

2ej  
19



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**El Riesgo y la Inflación  
en los Proyectos de Inversión**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :  
**LICENCIADO EN ACTUARIA**  
**P R E S E N T A :**  
**JOSE MARTIN CHAVEZ MEDEROS**

**México , D . F .**

**1 9 8 7**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

	Pág.
Introducción. -----	1
Capítulo I	
Origen y análisis de los proyectos de inversión. -----	3
I.1.- Los proyectos de inversión como producto de un proceso organizacional. -----	3
I.2.- Definición de un proyecto de inversión. -----	5
I.3.- Costos y beneficios. -----	6
I.3.1.- Proyectos de reducción de costos. -----	6
I.4.- Vida económica y decisión de abandono. -----	7
I.5.- Conclusiones al capítulo. -----	8
Capítulo II	
Los proyectos de inversión en situaciones de riesgo. -----	9
II.1.- Elementos de la evaluación. -----	9
II.2.- El riesgo en los proyectos de inversión. -----	12
II.3.- Medición, cuantificación e interpretación del riesgo. -----	14
II.3.1.- Densidad de probabilidad. -----	14
II.3.2.- Distribución Normal. -----	17
II.3.3.- Medidas de tendencia central. -----	20
II.3.4.- Medidas de dispersión. -----	22
II.4.- Incorporación del riesgo a los métodos de evaluación financiera de proyectos de inversión. -----	30
II.4.1.- Método de la media y la desviación estándar. -----	34
II.4.2.- Método de la probabilidad de error en la aceptación. -----	37
II.4.3.- Método de la tasa de descuento ajustada al riesgo. -----	42
II.4.2.- Método de la tasa combinada. -----	45
II.5.- Conclusiones al capítulo. -----	46
Capítulo III	
Evaluación de proyectos de inversión en épocas inflacionarias. -----	48
III.1.- La inflación. -----	48
III.2.- Clasificación de la inflación. -----	50
III.3.- La inflación y las operaciones financieras. -----	50
III.3.1.- La inflación y las tasas de interés. -----	50
III.3.2.- La inflación y el capital de la empresa. -----	51
III.3.3.- La inflación y la planeación financiera. -----	52

	Pág.
III.3.4.- La inflación y la medición de la productividad. -----	53
III.3.5.- La inflación y los créditos a largo plazo. -----	54
III.3.6.- La inflación y las inversiones estratégicas. -----	54
III.3.7.- La inflación y los préstamos bancarios. -----	55
III.4.- El impacto de la inflación en los elementos de la evaluación. --	55
III.4.1.- La inflación en los flujos de efectivo y en la in- certidumbre que los afecta. -----	56
III.4.2.- La inflación en el costo de capital. -----	57
III.5.- El efecto de la inflación en los criterios económicos de eva- luación bajo certeza. -----	60
III.5.1.- Criterio del Valor Actual Neto con inflación. -----	61
III.5.2.- Criterio de la Tasa Interna de Rendimiento con infla- ción. -----	63
III.5.3.- Caso especial de la Tasa Interna de Rendimiento para inversiones de un periodo con inflación.-----	64
III.5.4.- Caso más complejo de evaluación con inflación. -----	66
III.6.- El efecto de la inflación en los métodos de medición del riesgo. 68	
III.6.1.- Métodos de evaluación cuando no se incluye el riesgo en el costo de capital con inflación. -----	68
III.6.2.- Métodos de evaluación cuando se incluye implí- citamente el riesgo en el costo de capital con inflación. -----	71
III.7.- Conclusiones al capítulo. -----	73
Capítulo IV	
Caso práctico. -----	75
Apéndice -----	91
Costo de capital. -----	91
Correlación de los flujos de efectivo en el tiempo. -----	94
Combinación de proyectos. -----	102
Correlación entre proyectos. -----	108
Tasa Interna de Rendimiento. -----	113
Teorema Central del Límite. -----	116
Datos agrupados. -----	117
Bibliografía. -----	121

*Antes, solíamos ir a las tiendas con el dinero en el bolsillo y volvíamos con la comida en una cesta; ahora, vamos a la tienda con el dinero en una cesta y volvemos con la comida en el bolsillo.*

## INTRODUCCION

El objetivo de esta tesis es presentar un análisis de decisión de inversión bajo incertidumbre e inflación, mediante el uso de algunas técnicas y métodos que permiten evaluar la rentabilidad de proyectos de inversión en cuanto al riesgo que ofrecen, tanto en forma individual como de carteras de inversión.

En la actualidad casi todos los países del mundo son afectados -- por la inflación, incrementando aún más el riesgo que se incurre cuando se invierte una determinada cantidad de capital.

Las Finanzas se ocupan del capital y su empleo correcto, a fin de que aumente y maximice el patrimonio del accionista.

El medio más importante y utilizado para lograr este objetivo es la inversión, que puede entenderse como una reducción del consumo actual -- con el propósito de incrementar el consumo futuro.

Un proyecto de inversión es un plan estructurado o diseñado de -- tal manera que el valor actual del consumo futuro que se espera que genere, sea mayor que el valor de la reducción requerida en el consumo actual.

Al evaluar un proyecto se pretende reunir los elementos que permitan -- tomar decisiones relacionadas con su realización.

En el proceso de evaluación de un proyecto es recomendable considerar los diferentes tipos de factores que pueden influir en la toma de alguna decisión; como por ejemplo, estudios de mercado, presupuestos, evaluación económica, marco físico, social y político, tecnología y otros de acuerdo a la particular política del inversionista o de la empresa que esté por realizarlo.

En el capítulo I, se esboza de manera general las seis etapas básicas por las cuales un proyecto es considerado como producto de un -- proceso organizacional prolongado; se analizan también los factores -- tecnológicos, mercadotécnicos y estratégicos para que un proyecto se considere bien definido; así como los costos, vida económica y decisión de abandono de los proyectos de inversión considerados en forma individual.

En el capítulo II, se incluye el riesgo a la evaluación de proyectos de inversión mediante algunos conceptos probabilísticos y estadísticos, apoyándose en dos de los métodos tradicionales de evaluación co

mo el Valor Actual Neto (VAN) y la Tasa Interna de Rendimiento (TIR).

En el capítulo III, se presenta un panorama general de la manera en que la inflación afecta a la mayoría de las operaciones financieras de una empresa; recalcando el efecto que ésta ejerce en el costo de capital y en los flujos de efectivo de un proyecto.

Se hacen dos análisis económicos distintos para evaluar la rentabilidad de los proyectos, dependiendo del grado de certeza en sus flujos de efectivo.

En el caso de riesgo se considerarían cuatro métodos, que se clasifican de acuerdo a la consideración implícita del riesgo en el costo de capital con inflación utilizado en la evaluación. Incluyendo de esta manera, tanto el riesgo como la inflación en la evaluación individual de proyectos de inversión.

En el capítulo IV, se proporciona un ejemplo de aplicación de los dos capítulos anteriores con sus respectivas conclusiones.

En el apéndice se desarrolla una serie de temas que sirven de soporte a la tesis y a la vez, se amplía el tratamiento del riesgo al considerar las carteras o combinaciones de proyectos.

Finalmente, una recomendación general que está relacionada con la elección de los métodos de evaluación vistos en esta tesis; es que la elección apropiada depende de las circunstancias en que se tome la decisión y de las políticas que siga la particular empresa.

Las diversas empresas y también quienes toman decisiones, tienen distintas políticas de aceptación e incluso una misma empresa querrá considerar más de una norma de aceptación.



C A P I T U L O    I

ORIGEN Y ANALISIS DE LOS PROYECTOS DE INVERSION

### I.1.-Los proyectos de inversión como producto de un proceso organizacional.

Generalmente, las propuestas de inversiones de capital son tratadas como un conjunto de oportunidades a ser evaluadas mediante un análisis económico determinado, sin considerar que estas propuestas resultan ser consecuencia de un proceso organizacional prolongado; en el cual se pueden identificar seis etapas, que van desde cuando surge la necesidad de invertir, hasta la completa formalización de un proyecto de inversión.

#### Etapa de activación.

La primera etapa de este proceso se conoce con el nombre de Activación y es donde por primera vez se vislumbra las oportunidades de inversión que una empresa tiene; es decir, que la etapa de Activación es donde da inicio por primera vez la actividad de inversión de una empresa.

Cuando un proyecto de inversión es considerado como nuevo dentro del conjunto de oportunidades de inversión a realizarse, en varias ocasiones, las primeras ideas que se tienen de este nuevo proyecto, no son propuestas con la suficiente rapidez; debido a que el costo involucrado en la preparación de las propuestas de este proyecto, puede ser demasiado grande y también puede involucrar ciertos riesgos políticos a los patrocinadores del mismo.

Normalmente, los proyectos o propuestas de inversión son ignorados hasta que se tiene la necesidad de llevarlos a cabo; o bien, cuando se sabe que otras empresas están por efectuarlos.

#### Etapa de filtrado.

La etapa de Filtrado, es la segunda etapa de este proceso organizacional, en la cual, la información que se dispone para la realización de estudios de uno o varios proyectos juega un papel determinante; ya que es lógico pensar que no todos los proyectos son merecedores de un estudio posterior más profundo y detallado, debido a que estos suelen resultar altamente costosos.

Es importante señalar, que por culpa de una mala información o una información escasa, proyectos que eran merecedores de un estudio posterior pueden ser eliminados.

La etapa de Filtrado es donde se toman decisiones importantes, respecto a la continuación de un estudio posterior de los proyectos de inversión; mediante el uso de cierta información, que en principio se deseaba que fuera lo suficientemente representativa y además completa.

#### Etapa de definición.

Cuando uno o varios proyectos se hacen merecedores de una investigación posterior, se llega a la etapa de definición, en donde se determinan tanto las características técnicas como económicas de los proyectos considerados.

La escasez en las alternativas consideradas y la dificultad en la elección de la evaluación, son dos de las consecuencias que se pueden tener cuando se dispone de una información inadecuada del proyecto.

#### Etapa de evaluación.

La etapa siguiente es la de Evaluación y consiste en la preparación de análisis económicos y financieros, elaborados por las personas que propusieron el proyecto; to do esto, con el fin de justificar las elecciones hechas en las etapas anteriores.

Antes de explicar la siguiente etapa, es importante mencionar que en una organización jerárquica, un asunto de inversiones tiene que ser transmitido hacia arriba a través de la organización, dependiendo de su tamaño e importancia estratégica.

#### Etapa de transmisión.

La etapa de Transmisión, principia con una etapa inicial dentro de la jerarquía llamada transmisión informal; que consiste en preparar la propuesta formal, para que cuando esté lista, sea transmitida hacia arriba.

En esta etapa inicial, se analizan las probabilidades que tiene el proyecto de ser aceptado y si en realidad vale la pena efectuar una investigación completa; se buscan patrocinadores que se encuentren bien ubicados dentro de la jerarquía, de tal manera, que cuando la propuesta formal se transmita hacia arriba, se encuentre libre de problemas.

El objetivo general que se persigue en esta etapa, es la aceptación de la propuesta formal del proyecto; luego entonces en esta etapa, los proponentes del proyecto deben familiarizarse en cuanto a las tendencias de la política y planeación gerencial; así como también deben trabajar en armonía con la planeación establecida y propósitos corporativos.

#### Etapa de decisión.

Finalmente, la última etapa de este proceso es llamada la etapa de la Decisión final; que en cierto sentido se podría decir que ya ha sido cubierta en las etapas anteriores, en donde se toman decisiones bastante importantes en cuanto a determinadas elecciones hechas.

Cuando la propuesta formal no presenta alternativas, la decisión final es una elección entre continuar o no adelante con un proyecto.

Es importante señalar que a estas alturas, generalmente la alta gerencia decide continuar adelante con el proyecto, puesto que se supone que ha sido preparado por personal altamente calificado; sin embargo, no se debe pensar que la decisión final, consiste en una operación de estampado de selio, ya que los cambios en la planeación, políticas y estrategias, podrían haber alterado la aceptabilidad del mismo.

Esta etapa sirve además, para formalizar el trabajo de aquellas personas que se comprometieron a llevar a cabo el proyecto; desde su inicio, realización y éxito esperado.

#### I.2.- Definición de un proyecto de inversión.

La definición de un proyecto de inversión se basa generalmente, sobre consideraciones tecnológicas, mercadotécnicas y estratégicas. Por lo que antes de que un proyecto se considere lo suficientemente bien definido, es necesario que la empresa elabore un estudio previo sobre estas consideraciones, y en base a este estudio determinar que tan lucrativo puede resultar el proyecto; así como también, si se cuenta con los recursos de personal necesarios para manejar la lucratividad esperada, o bien emplear estos recursos en otro lugar donde la lucratividad sea mayor.

Los cinco puntos básicos que debe contener este estudio son los siguientes:

- 1) Determinar aquellos segmentos del mercado, donde la empresa tiene mayor probabilidad de mantener una sustancial fuerza competitiva y estimar el rango de la demanda proyectada en esos segmentos.
- 2) Asegurarse que las ventajas de calidad que ofrece su proyecto, no sean tan fácilmente duplicadas por sus competidores.
- 3) Estimar qué porción del mercado se proyectará conservadoramente en los futuros períodos, originando una demanda incierta.
- 4) Elaborar un estudio completo y detallado sobre los niveles de capacidad alternos que habrán de considerarse para cubrir esta demanda.

Este estudio debe comprender lo siguiente:

- a) Los niveles que habrán de considerarse.
  - b) Las modificaciones a los precios con el fin de cubrir estos niveles.
  - c) Los costos operativos y subsecuentes de cada uno de ellos.
  - d) El tiempo de instalación involucrado.
- 5) Determinar de qué manera influirán los avances tecnológicos en el futuro, en relación con sus principales competidores.

Es importante hacer notar, que este estudio es muy delicado e importante y por consiguiente, debe estar elaborado por personal altamente calificado, con la suficiente experiencia y confianza, ya que de ello depende que un proyecto de inversión se considere suficientemente bien definido.

### 1.3.- Costos y beneficios.

En varias ocasiones, las empresas se encuentran frente al problema de decidir si el empleo de los recursos en una inversión vale la pena, en términos de los beneficios esperados.

Una forma sencilla de calcular estos beneficios es comparando el valor de los gastos incurridos, contra el valor de los beneficios futuros.

Por otra parte, cuando se desea elaborar un análisis financiero más detallado para el cálculo de éstos, se asigna un valor de efectivo a todos aquellos costos y beneficios del proyecto y aquellos factores que no se les pueda asignar tan fácilmente un valor, se ponderan cualitativamente en conjunción con el análisis financiero.

Los beneficios cualitativos, entran generalmente en la categoría de las relaciones industriales, las relaciones públicas y protección ambiental.

Frecuentemente suelen omitirse algunos factores en este análisis, bajo la consideración de no ser flujos de efectivo; aunque se les pueda asignar fácilmente un valor. Esta consideración, puede repercutir en forma negativa para la empresa a través del tiempo, originándole fuertes gastos.

También es importante considerar el Capital de Trabajo en este análisis, puesto que en toda actividad que requiera de un incremento neto en este tipo de capital, exige de inversiones adicionales.

Cabe señalar que, aunque este análisis es bastante completo, la forma más utilizada para el cálculo de los beneficios de un proyecto, consiste en determinar el flujo de efectivo incremental neto; que se obtiene mediante una comparación, entre los flujos de efectivo cuando la empresa realiza el proyecto y cuando no decide llevarlo a cabo.

#### 1.3.1.- Proyectos de reducción de costos.

Cuando la alta gerencia ha decidido poner en marcha una actividad, es muy probable que se quiera investigar aquellos proyectos que tienen como finalidad, reducir los gastos operativos; es así, como surgen los proyectos de reducción de costos.

Aunque el objetivo de estos proyectos, es la minimización del valor actual de los costos, es posible elaborar un análisis más consistente, utilizando el flujo de efectivo incremental neto; es decir, comparar los flujos de efectivo cuando la empresa decide realizarlo y cuando no decide hacerlo.

#### 1.4.- Vida económica y decisión de abandono.

La vida económica de un proyecto de inversión, está determinada por la más corta de las siguientes duraciones:

##### a) La vida operativa lucrativa.

La vida operacional de un proyecto de inversión, es el cumplimiento de los objetivos esperados durante un periodo de tiempo razonablemente satisfactorio para la empresa.

Dado que los costos involucrados en un proyecto de inversión se incrementan con el tiempo, entonces, al final de su vida operativa, se presenta lo que se conoce como la vida operativa lucrativa de un proyecto de inversión; que se determina cuando la empresa considera que la lucratividad actual del proyecto ya no es "buena". Por lo tanto, la vida operativa lucrativa de un proyecto de inversión (comunmente llamada vida económica), suele ser más corta que su vida operacional.

##### b) La vida económica de los activos o actividades en los cuales el proyecto es -- contingente.

Cuando un proyecto de inversión depende de un conjunto de activos, actividades o probablemente quizá de otros proyectos, se dice que el proyecto es contingente -- respecto a ellos.

Generalmente, la mayoría de los proyectos de inversión son contingentes, excepto -- para aquellas inversiones que se consideran completamente nuevas. Entonces, si un proyecto es contingente respecto a un conjunto de activos o actividades, la vida -- económica de éste puede ser determinada por la vida de ese conjunto de activos o actividades en los cuales es contingente.

##### c) El periodo de remplazo óptimo.

Cuando un proyecto de inversión es no contingente, entonces es probable que la vida económica de éste sea determinada por una decisión de remplazo.

El periodo de remplazo óptimo de un proyecto, está determinado por aquel instante de tiempo, en el cual se espera encontrar más lucrativo remplazarlo por alguno nuevo o mejor.

El ciclo óptimo determina la vida económica esperada máxima de un proyecto de in--versión y a grandes rasgos se puede decir, que el análisis de remplazo de un pro--yecto, está basado en una comparación, entre los costos de mantenimiento crecien--tes de equipo-capital en proceso de obsolescencia y los costos menores que resul--tan de una nueva tecnología, construida con los nuevos bienes de capital.

La decisión de abandonar o liquidar un proyecto, puede ser tan importante como sa--ber cuando invertir.

En un momento dado, la empresa puede estimar que los beneficios actuales y futuros de un proyecto de inversión, no son los que esperaba obtener; sin embargo, esto no quiere decir que ha llegado el momento de abandonarlo, ya que su reventa o liquidación puede ser tan pequeña con respecto a la inversión original, que puede resultar no lucrativo hacerlo.

Básicamente, el análisis de abandono de un proyecto, está basado en una comparación entre el valor actual de los beneficios futuros (después de impuestos) que la empresa obtendrá si no abandona el proyecto y el efectivo (después de impuestos) que obtendrá, si decide liquidarlo.

Cabe señalar, que una vez que se han establecido las diferentes fases de abandono de un proyecto de inversión, el problema consiste en determinar, cual de todas las fases puede llevarse a cabo más lucrativamente.

Si la reventa o liquidación de un proyecto no se puede efectuar en forma inmediata puede ser recomendable extraerle la mayor cantidad de efectivo posible durante un periodo determinado de tiempo.

Por otra parte, cuando la empresa ha establecido que el abandono de un proyecto en futuro predecible es poco probable, es hasta ese entonces, cuando la empresa debe considerar más inversiones en actividades existentes.

La importancia de la decisión de abandono de un proyecto, radica en que la mayoría de éstos forman parte de una actividad existente, es decir, que la mayoría de los proyectos de inversión son contingentes respecto a la continuación de una actividad ya existente dentro de la empresa; salvo que se trate de una actividad completamente nueva.

#### 1.5.- Conclusiones al capítulo.

Los proyectos de inversión emergen como parte de un proceso de toma de decisiones organizacional, en donde las decisiones vitales son efectuadas en las etapas de Activación, Filtrado y Definición.

Para contrarrestar las posibles desviaciones que pudieran surgir de compromisos personales, sobre todo en las etapas iniciales, algunas empresas suelen utilizar los comités de proyectos; donde un equipo multidisciplinario queda asignado para filtrar, definir y evaluar las alternativas existentes, una vez que un proyecto ha sido activado.

Dado que la lucratividad de un proyecto depende normalmente, de la escasez, la posición en el mercado y de los desarrollos no previstos; una propuesta de un proyecto de inversión, debe incluir un análisis de las ventajas competitivas que lo convierten en lucrativo.

El análisis de los proyectos de inversión requiere de una capacidad profesional; esta capacidad es esencial en la definición de alternativas, identificando, tanto los flujos de efectivo relevantes como los costos de oportunidad.

**C A P I T U L O    I I**

**LOS PROYECTOS DE INVERSIÓN EN SITUACIONES DE RIESGO**



### II.1.- Elementos de la evaluación.

Los elementos esenciales que se deben considerar en toda evaluación de proyectos de inversión son los siguientes:

- 1) Los flujos de efectivo del proyecto.
- 2) La incertidumbre que afecta a estos flujos.
- 3) El costo de capital para financiar el proyecto.

Los flujos de efectivo del proyecto.

Los flujos de efectivo de un proyecto están formados por:

- a) El desembolso original, que incluye el Capital de Trabajo necesario para -- mantener al proyecto en marcha.
- b) Las entradas o salidas netas.
- c) Las fechas en que ocurrirán los flujos netos subsecuentes.
- d) El valor de desecho después del pago de impuestos, incluyendo la liberación del capital de trabajo.
- e) La fecha de terminación.

a) El desembolso original.

El desembolso original o desembolso inicial de capital, es todo aquel dinero que se gasta o se invierte para dar inicio a un proyecto de inversión y comprende también el capital de trabajo necesario para mantenerlo en marcha. Este capital -- está formado por el efectivo, las cuentas por cobrar y los inventarios; es decir, por las inversiones en activos circulantes que servirán para hacer frente a las -- obligaciones a corto plazo que requiera el proyecto.

Generalmente, la mayoría de los proyectos de inversión necesitan de este desembol-- so para que puedan generar los beneficios futuros esperados; puesto que en varias ocasiones, antes de recibir cualquier beneficio de un proyecto, ya se habrá gasta-- do mucho en él.

Cuando una empresa decide llevar a cabo un proyecto, la empresa debe incrementar proporcionalmente su capital de trabajo; ya que el hecho de considerar un nuevo -- proyecto, exige de inversiones adicionales para su funcionamiento.

Este incremento en el capital de trabajo de la empresa, se verá reflejado en un -- aumento en los inventarios, a fin de satisfacer las necesidades de sus clientes; así como en otorgarles un mayor crédito en forma de cuentas por cobrar e incremen-- tar su efectivo para poder realizar nuevas y futuras transacciones.

b) Las entradas o salidas netas.

Una vez que se ha invertido una cierta cantidad de dinero para emprender un proyecto, lo que se espera es que genere entradas de efectivo en los periodos subsecuentes.

Estas entradas o salidas están determinadas por la utilidad o pérdida neta, los gastos que no se hacen en efectivo y los intereses.

Entre los gastos que no se hacen en efectivo se pueden citar por ejemplo, la depreciación, la amortización de activos intangibles tales como las patentes y el crédito mercantil.

c) Las fechas en que ocurrirán los flujos netos subsecuentes.

Así como pueden variar el importe de los flujos de efectivo, también igualmente pueden variar las fechas en que éstos se recibirán; es decir, que la ocurrencia de los flujos subsecuentes puede ser cada dos años, anualmente, semestralmente, trimestralmente, mensualmente o quizá hasta en forma irregular.

Sin embargo, es importante tomar en cuenta que estas fechas de ocurrencia, ya que en tre más rápido ocurran los flujos netos subsecuentes, mayor valor tendrá el dinero que se reciba.

d) El valor de desecho.

El valor de desecho de un proyecto, es el precio de venta estimado al final de su vida útil.

Al final de la vida útil de un proyecto, puede ya no ser necesaria la inversión en capital de trabajo, entonces en este caso, se libera devolviéndola a los recursos de la empresa; sin embargo, en algunas ocasiones cuando se requiere de un capital de trabajo adicional, éste libera en el último año de vida del mismo, pasando a formar parte del valor de desecho.

Es importante señalar que para efectos fiscales, esta liberación no es considerada como parte del valor de desecho y como consecuencia no es incluida en los cálculos para determinar la depreciación correspondiente.

e) La fecha de terminación.

La fecha de terminación de un proyecto, es el año en que se espera darlo por terminado.

Nótese que la duración de un proyecto puede influir en su atractividad; ya que entre más tiempo se encuentre en operación, mayor podrá ser el rendimiento que éste genere.

Es importante hacer notar que todos y cada uno de estos componentes, se deben estimar al inicio del estudio de un proyecto, así como también deben ser todos incluidos en la evaluación del mismo.

La incertidumbre que afecta a estos flujos.

El estudio de la incertidumbre se hará con detalle en las secciones siguientes.

*El costo de capital para financiar el proyecto.*

Es el costo de las diferentes fuentes de financiamiento que la empresa utiliza para emprender un proyecto de inversión; o bien, es el límite inferior de la tasa interna de rendimiento (TIR) que un proyecto debe rendir, con el objeto de justificar el empleo de capital necesario para realizarlo. Analizado de esta manera, el costo de capital puede ser visto como la tasa de rendimiento mínima requerida o tasa objetivo de una inversión.

En general, el costo de capital de una empresa se puede definir como la tasa de interés que iguala el valor presente de los flujos netos recibidos por la empresa, con el valor presente de los desembolsos esperados.

Es conveniente señalar, la importancia que tiene el costo de capital utilizado en la evaluación de proyectos de inversión; ya que como se verá más adelante, este puede o no estar ajustado al riesgo y también puede o no considerar el efecto de la inflación.

\* En el apéndice se analiza con mayor detalle el costo de capital de un proyecto de inversión.

## 11.2.-El riesgo en los proyectos de inversión.

Uno de los elementos esenciales que debe ser considerado en la evaluación de -- proyectos de inversión, es la incertidumbre que afecta a sus flujos de efectivo. Pero, ¿Qué es la incertidumbre?

Para entender lo que es la incertidumbre, primero se analizará lo que es la certidumbre desde el punto de vista financiero.

En términos financieros, la certidumbre es un futuro en el cual sólo existe un resultado posible, que se conoce con certeza desde ahora. De otra manera, operando en condiciones de certidumbre, sólo se hace frente a un resultado conocido posible.

En cambio, la incertidumbre es un futuro en el cual existe un número indeterminado -- de resultados posibles, de los cuales ninguno de ellos se conoce con exactitud; sin embargo es posible estimar el valor de éstos, más no la probabilidad de que se produzcan. Por lo que en estas condiciones casi cualquier cosa puede ocurrir.

La condición más realista en la que operan la mayoría de las empresas es en condiciones de riesgo; entendiendo por riesgo, un futuro en el cual existe un número finito de resultados conocidos posibles, los cuales tienen asociada una probabilidad -- de ocurrencia conocida.

Es muy importante no confundir el riesgo que se analizará en este capítulo y en general durante el desarrollo de este trabajo, con otros tipos de riesgos existentes, como son por ejemplo:

### a) El riesgo de operación.

Es el riesgo asociado con las operaciones de una empresa. Y está determinado -- por todos aquellos factores característicos de la empresa que introducen incertidumbre en los procesos de inversión y financiamiento, porque aumentan la variabilidad -- de los ingresos provenientes de los proyectos y la posibilidad de que las utilidades previstas no se lleguen a obtener.

Todo esto, independientemente de las influencias externas que ejercen la sociedad, -- el gobierno y los mercados financieros.

### b) Riesgo financiero.

Es el riesgo en que incurren los compradores potenciales de los valores de una empresa y está determinado por:

-El cumplimiento con el pago de intereses.

-El cumplimiento con el programa de reembolso del préstamo.

Por otra parte, el riesgo tratado en este trabajo, será definido como la variación -- relativa de los flujos de efectivo de un proyecto en el tiempo.

Por lo que el grado de riesgo de un proyecto de inversión, será la diferencia entre los flujos de efectivo reales y los esperados.

Operando en estas condiciones, se utilizará la definición de probabilidad clásica o discreta; es decir:

Si  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  es la representación formal de un fenómeno aleatorio, en su estructura un espacio de probabilidad, entonces:

$$P: \Omega \rightarrow [0, 1] \rightarrow \forall \Delta \in \mathcal{A}$$

$$P(\Delta) = \frac{\text{no. de veces que ocurre } \Delta}{\text{no. total}} = \frac{\# \Delta}{\# \Omega}$$

donde:

1i)  $\forall \Delta \in \mathcal{A} \quad P(\Delta) \geq 0$

2i)  $P(\Omega) = 1$

3i)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \forall \Delta, B \in \mathcal{A} \rightarrow \Delta \cap B = \emptyset$

Para las estimaciones de los flujos de efectivo futuros en condiciones de riesgo, es necesario elaborar un análisis formal de éste, de tal manera que tanto los resultados posibles como sus probabilidades asociadas se puedan presentar en un formato concreto y estandarizado, el cual se pueda dar a conocer con facilidad.

Este análisis consiste básicamente en elaborar una serie de estimaciones subjetivas de los flujos de efectivo y de sus probabilidades asociadas; determinando en primer lugar, aquellos factores que por su influencia en la determinación de los flujos de efectivo de un proyecto suelen ser los más importantes, posteriormente, se hacen suposiciones en cuanto a los niveles de cada factor considerado, para que finalmente se formulen las estimaciones específicas de los flujos y de sus probabilidades asociadas.

Es importante mencionar que el Análisis de Regresión, es una de las técnicas de pronóstico cuantitativas más utilizadas en la práctica para las estimaciones de los flujos de efectivo de un proyecto. Relaciona las variables de influencia de experiencias anteriores, obteniendo una nueva línea de regresión ajustada que proporciona una estimación para cada período futuro y utiliza el error estándar de estimación para determinar que tan confiables han sido las estimaciones anteriores en relación con los resultados reales.

Aunque el Análisis de Regresión tiene ciertas limitantes, como son por ejemplo:

- No incorpora la distribución de todos los resultados posibles ni sus probabilidades asociadas.
- No incorpora las percepciones subjetivas.

La combinación de estimación y error estándar suele utilizarse con frecuencia en la evaluación de proyectos de inversión en condiciones de riesgo.

En cuanto a la segunda limitante, cabe señalar que si se pudiera ajustar los parámetros del modelo de regresión utilizado, con base en ciertas ideas intuitivas, entonces se podría obtener el mayor provecho de ambas predicciones.

### II.3.- Medición, cuantificación e interpretación del riesgo.

Una vez que se tienen las estimaciones subjetivas y las probabilidades asociadas, el problema consiste en cómo medir, cuantificar e interpretar el riesgo de un proyecto.

Es preciso cuantificar el riesgo de acuerdo con alguna medida estándar para que se pueda comunicar a otros miembros de la empresa y sea utilizado como elemento de las técnicas cuantitativas y estadísticas que se aplican al manejo del riesgo en los proyectos de inversión.

En esta sección, se analizará algunos elementos de la medición del riesgo tales como la densidad de probabilidad, el valor esperado o media y algunas medidas de dispersión como la varianza, la desviación estándar, la asimetría y el coeficiente de variación.

#### II.3.1.- Densidad de probabilidad.

En condiciones de riesgo, es factible considerar a los flujos de efectivo como variables aleatorias (v.a.); ya que éstos pueden tomar cualquier valor aleatorio a lo largo de la vida útil de un proyecto, por lo que:

Si  $X$  representa todos los posibles valores de los flujos de efectivo de un proyecto a lo largo de su vida útil.

$X$  puede ser discreta o absolutamente continua.

Obsérvese que en cualquiera de los dos casos, siempre existirá la función de distribución de la v.a.  $X$  ( $F_X(x)$ ).

$$\rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{x_i \in X} f_X(x_i) = \sum_{x_i \in X} P(X = x_i) \\ \text{cuando } X \text{ es discreta con valores } x_0, x_1, \dots \\ \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \text{ cuando } X \text{ es absolutamente continua.} \end{cases}$$

Cuando  $X$  es discreta con valores  $x_0, x_1, \dots$

$$\text{i.e. } X : \Omega \rightarrow (x_0, x_1, \dots)$$

entonces :

!  $f(x) = f(x) = f(x)$  es llamada la función de densidad

de probabilidad de la v.a.  $X$ .

Y ademas satisface las siguientes propiedades :

(1)  $f(x) \geq 0$   $\forall x$

(2)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Observese, que estas dos propiedades se deben a que  $f(x)$  es una probabilidad

cuando  $X$  es una v.a. discreta. En este caso,  $x_i$  representa el posible

tipo de efectivo en el periodo  $i$  de su vida útil.

Por otra parte, cuando  $X$  es absolutamente continuo

ie.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

entonces :

La función de densidad de probabilidad de la v.a.  $X$  ( $f(x)$ ),

se puede obtener de la siguiente manera :

$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

por definición de función de distribución.

Y satisface las siguientes propiedades :

(1)  $f(x) \geq 0$   $\forall x \in \mathbb{R}$

(2)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Observese que en este caso, la función de densidad de probabilidad

no es una probabilidad como lo es en el caso discreto; sin embargo,

sirve para calcularlas.

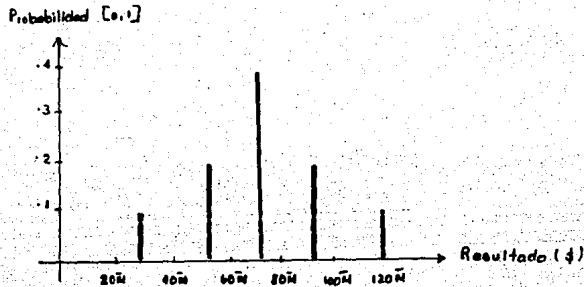
Por lo tanto, la función de densidad de los flujos de efectivo de un proyecto de inversión, es el conjunto de posibles resultados y sus probabilidades asociadas.

Representación gráfica.

Supóngase que se cuenta con la siguiente función de densidad de probabilidad de los flujos de efectivo anuales del proyecto A.

PROYECTO A	
Flujo anual promedio estimado	Probabilidad asociada
120 000 000	.10
95 000 000	.20
75 000 000	.40
55 000 000	.20
30 000 000	.10

Entonces, la gráfica de la función de densidad de probabilidad del proyecto A será la siguiente:

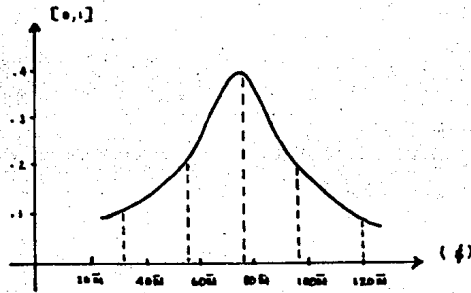


Esta representación es mediante gráfica de barras, en donde la altura de cada barra significa la probabilidad de ocurrencia de un resultado determinado en \$.

Es posible obtener a partir de esta gráfica de barras, una gráfica más suave de la densidad de probabilidad del proyecto A (en general de cualquier densidad), uniéndolo la parte superior de cada barra mediante una línea continua, esto es:



Gráfica de la función de densidad de probabilidad del proyecto A.



Es importante señalar que esta gráfica, proporciona exactamente la misma información que se tiene del proyecto A, en cuanto al riesgo del mismo; ya que es fácil darse -- cuenta que hay cinco resultados posibles, que van desde \$ 30 M con una probabilidad de ocurrencia de .1, hasta \$ 120 M con una probabilidad de .1 también.

### 11.3.2.- Distribución Normal.

La función de distribución Normal, es una de las funciones de distribución más utilizadas en Estadística.

X v.a. tiene una distribución Normal con parámetros  $\mu$ ,  $\sigma^2$  ( $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ) -- con  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2 > 0$

Si la función de densidad de probabilidad asociada a esta v.a. X es:

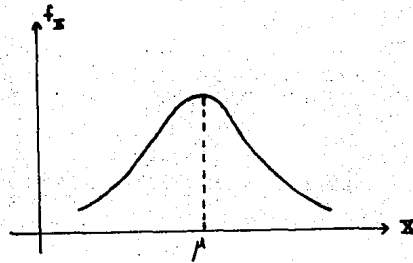
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Y además satisface las siguientes propiedades:

- 1i)  $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- 2i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_X(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_X(x) = 0$
- 3i)  $f_X(x+\mu) = f_X(-x+\mu) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ie. que  $f_X$  es simétrica respecto a  $\mu$ .

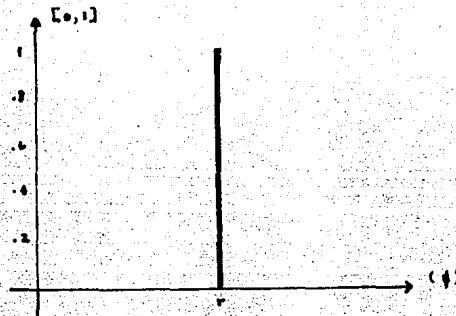
Gráfica de la función de densidad de probabilidad Normal.



Es obvio pensar que no todos los proyectos de inversión tienen una distribución de probabilidad Normal asociada; ya que existen varias familias de distribuciones (distintas a la Normal) como son por ejemplo, la Ji-cuadrada, la F-snedecor, la Normal logarítmica, la triangular y otras.

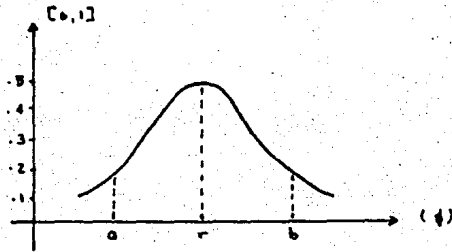
Únicamente para fines de ilustración se utilizará la distribución Normal.

Como en condiciones de certidumbre absoluta sólo hay un resultado posible  $r$ , que se producirá ciertamente, entonces la gráfica de la certidumbre estará representada de la siguiente forma:



En la cual puede observarse que sólo existe un resultado posible, el cual ocurrirá con una probabilidad totalmente segura de 1.

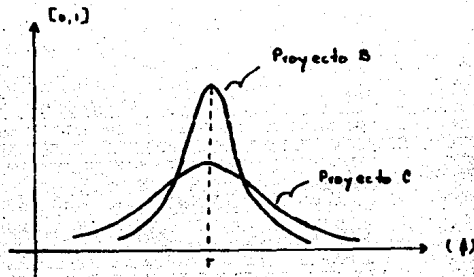
Considérese la siguiente gráfica de densidad de probabilidad:



De la gráfica anterior se puede observar que en condiciones de riesgo, aunque el resultado  $r$  ocurre con una probabilidad de  $.5$ , es probable que también se produzcan -- (aunque con una probabilidad menor) los resultados  $a$  o  $b$  en lugar de  $r$ .

En este caso, si la dispersión alrededor de  $r$  sigue aumentando, entonces la probabilidad de que ocurra o se produzca  $r$  es cada vez menor; ya que la probabilidad de ocurrencia de los resultados  $a$  o  $b$  constituirán parte de la probabilidad total que debe ser siempre igual a 1.

una vez hecho este análisis, supóngase que se tienen dos proyectos de inversión B y C, cuyas gráficas de sus funciones de densidad de probabilidad son las siguientes:



Es fácil observar de la gráfica anterior, que si  $r$  es el valor medio de ambas distribuciones, entonces  $r$  se producirá con mayor seguridad en B que en C; todo que en B hay menos dispersión alrededor de  $r$  y por consiguiente su probabilidad de ocurrencia es mayor.

Si se han incluido en las densidades de probabilidad de los dos proyectos todos los posibles resultados, entonces es mejor decidirse por el proyecto B; ya que para un mismo valor medio  $\bar{x}$ , el proyecto B presenta un riesgo menor.

### 11.3.3.- Medidas de tendencia central.

Las medidas descriptivas numéricas que dan una idea de localización del centro de la distribución de probabilidades, son llamadas medidas de tendencia central. Las más conocidas y utilizadas son, la media o valor esperado, la moda y la mediana.

La media o valor esperado

Si  $X$  v.a. representa todos los posibles valores de los flujos de efectivo de un proyecto, entonces el concepto matemático que refleja el promedio, es la esperanza de la v.a.  $X$  y se define de la siguiente manera:

a) Si  $X$  es una v.a. absolutamente continua con densidad  $f_X(x)$  entonces:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad \text{siempre que} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$$

ie. que sea absolutamente convergente.

b) Si es una v.a. discreta con valores  $x_0, x_1, \dots$  tales que

$$\forall j \quad P(X=x_j) = f_X(x_j) \quad \text{entonces}$$

$$E(X) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j f_X(x_j) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j P(X=x_j) \quad \text{siempre que:}$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} |x_j| f_X(x_j) < \infty$$

en donde:

$x_j$ : es el posible flujo de efectivo en el periodo  $j$  de un proyecto.

$P(X=x_j)$ : es la probabilidad de ocurrencia asociada al posible flujo de efectivo  $j$ .

Es decir que la media o valor esperado de una distribución, es el promedio de todos los resultados, medidos cada uno según su probabilidad asociada y suele denotarse generalmente por  $\bar{x}$ .

Entonces:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n r_i p_i$$

en donde:

$\bar{x}$ : es la media de la distribución.

$r_i$ : es el resultado posible  $i$ .

$p_i$ : es la probabilidad de ocurrencia del resultado posible  $i$ .

$n$ : es el total de resultados posibles.

es conveniente señalar que de todas las medidas de tendencia central, la media es la más conocida y utilizada.

En el caso del proyecto A, la media se calcula de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 r_i p_i$$

donde:

$r_1 = 120\ 000\ 000$	$p_1 = .1$
$r_2 = 45\ 000\ 000$	$p_2 = .2$
$r_3 = 75\ 000\ 000$	$p_3 = .4$
$r_4 = 55\ 000\ 000$	$p_4 = .2$
$r_5 = 30\ 000\ 000$	$p_5 = .1$

Efectuando las operaciones se tiene que:

$$\bar{x} = \$ 75\ 000\ 000.$$

Lo cual quiere decir que que el valor esperado que ocurrirá con mayor certeza entre todos los resultados posibles que se tienen del proyecto A, es \$ 75 000 000.

Lo cual es fácil de verificar visualizando el punto máximo en la gráfica de la función de densidad de probabilidad del proyecto A.

La media de una distribución, es utilizada en la evaluación de proyectos de inversión como una estimación específica, en donde el riesgo está representado por la dispersión alrededor de este valor esperado.

Como se dijo anteriormente, existen otras medidas de tendencia central como la moda; que es el resultado que ocurre con mayor frecuencia dentro de un conjunto de mediciones o resultados.

Esta medida es muy útil en ciertos casos, por ejemplo en planificación de negocios, para identificar aquellos productos que tienen la mayor demanda. Un fabricante de camisas o vestidos se interesa en las tallas que más frecuentemente adquiere el consumidor, para planear la producción de su artículo.

Cabe notar, que Esta medida no es única y será un buen indicador del centro de datos solamente si existe una sola frecuencia dominante.

La mediana es una medida que puede ser usada al menos con escalas ordinales; la mediana de un conjunto de resultados, es el valor que divide a la mitad al conjunto, de tal manera que los resultados posibles sean menores o iguales que el valor de la mediana y en la otra mitad sean mayores o iguales.

Cuando se desea encontrar la mediana de un conjunto de resultados, es conveniente ordenar los resultados de manera creciente, si el número de resultados que se tiene es impar, la mediana es el resultado que ocupa el valor central entre los resultados ya ordenados, si el número de resultados es par, entonces la mediana es el promedio entre los dos resultados centrales.

Las tres medidas de tendencia central que se han presentado, son las de mayor uso en la práctica.

Para decidir cuál de ellas usar en un problema particular, se debe analizar la situación específica, para así efectuar una buena elección.

Una recomendación general, que está relacionada con la forma de la distribución de probabilidades de un proyecto, es que si ésta es asimétrica, la mediana en este caso es una mejor medida de localización que la media.

#### 11.3.4.- Medidas de dispersión.

Hasta ahora se ha visto como se cuantifica la media o valor esperado de una distribución; sin embargo, es posible cuantificar el riesgo mediante ciertas medidas de dispersión que puedan ayudar a determinar el grado de variación de los resultados -- con respecto a una cierta medida de centralidad, que generalmente suele ser la media:

Existen varias de estas medidas, de entre las cuales se puede seleccionar la más adecuada para los propósitos que se pretendan.

Dado que los flujos de efectivo de un proyecto se pueden considerar como v.a., - entonces una suposición importante que se hará de ahora en adelante en este capítulo y en el siguiente, es que los flujos de efectivo de los proyectos considerados son independientes entre sí; es decir, que el flujo de efectivo del período  $t$  no depende del flujo de efectivo del período  $t-1$ . \*

Entre las medidas de dispersión más conocidas y utilizadas, se pueden citar las siguientes:

La varianza.

Si  $X$  v.a. representa todos los posibles valores de los flujos de efectivo de un proyecto, entonces el concepto matemático que mide numéricamente la dispersión de este fenómeno aleatorio con respecto a la media, se llama varianza de  $X$  y se define de la siguiente manera:

$$\text{Var}(X) = E(X - EX)^2 \quad \forall \text{ valor de } X.$$

a) Si  $X$  es absolutamente continua, entonces:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f_X(x) dx \quad \forall \text{ valor } x \text{ de } X.$$

b) Si  $X$  es discreta, entonces:

$$\text{Var}(X) = \sum_{j=0}^{\infty} (x_j - EX)^2 f_X(x_j) = \sum_{j=0}^{\infty} (x_j - EX)^2 P(X=x_j) \quad \forall \text{ valor } x_j \text{ de } X.$$

\* No siempre los flujos de efectivo de un proyecto son independientes entre sí. Con síttese en el apéndice en correlación de los flujos de efectivo en el tiempo.

Es decir, que la varianza de la distribución de probabilidades alrededor del valor esperado, es un promedio ponderado del cuadrado de las diferencias entre cada resultado posible y la media, y suele denotarse generalmente por  $S^2$ .

$$\Rightarrow S^2 = \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{x})^2 p_i$$

en donde:

$S^2$  : es la varianza de la distribución.

$r_i$  : es el resultado posible  $i$ .

$\bar{x}$  : es la media de la distribución.

$p_i$  : es la probabilidad de ocurrencia del resultado posible  $i$ .

$n$  : es el total de resultados posibles.

Obsérvese que la varianza mide la variabilidad que existe entre todos los resultados posibles y la media y esta aumenta a medida que aumenta la dispersión o variabilidad de los posibles resultados con respecto a este valor esperado.

Es importante hacer notar, que en el cálculo de la varianza, los resultados mayores o menores que la media son incluidos en forma separada y no se compensan entre sí, debido a que las diferencias son elevadas al cuadrado.

La desviación estándar.

Es la raíz cuadrada de la varianza y mide las desviaciones con respecto a la media. De todas las medidas de dispersión es la más usada y se denota generalmente por  $S$ .

$$\Rightarrow S = \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{x})^2 p_i}$$

Una observación interesante que cabe hacer, es que la desviación estándar al igual que la varianza, impide que los resultados mayores que la media se compensen con resultados menores que la misma. Además compensa el efecto amplificador de la elevación al cuadrado, puesto que al obtener la raíz, se tiene una medida en las mismas unidades que el parámetro de centralidad, que en este caso es la media.

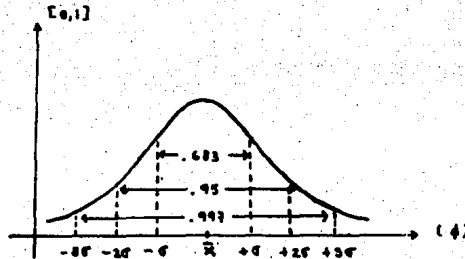
La desviación estándar en la Normal es única, en el sentido de que una desviación estándar a los lados de la media, incorpora un 68.3% de todos los resultados posibles, es decir, que se puede estar un 68.3% seguro que se producirá uno de los resultados posibles comprendidos dentro de esta área; siempre que la distribución de probabilidades se haya especificado correctamente.

Para el caso de dos o tres desviaciones estándar a los lados de la media, se tiene lo siguiente:

$X \pm 2S$  : incorpora un 95% de todos los resultados posibles.

$X \pm 3S$  : incorpora un 99.7% de todos los resultados posibles.

Interpretación gráfica de la desviación estándar en la Normal.



En el ejemplo del proyecto A, se tiene que la desviación estándar es de \$ 23.7 millones (\$ 23.7 M) y dado que se había supuesto que la función de densidad de este proyecto era Normal y considerando que la media es de \$ 75 M, se puede hacer el siguiente análisis:

$75 M \pm 23.7 M$  : incorpora un 68.3% de todos los resultados posibles.

$75 M \pm 2(23.7 M)$  : incorpora un 95% de todos los resultados posibles.

$75 M \pm 3(23.7 M)$  : incorpora un 99% de todos los resultados posibles.

Es decir, que se tiene un 68.3% de confianza que se produzca uno de los resultados posibles, comprendidos entre \$ 51.3 M y \$ 98.7 M; un 95% de confianza que se produzca uno de los resultados posibles comprendidos entre \$ 27.6 M y \$ 122.4 M y casi se puede estar completamente seguro que se producirá uno de los resultados comprendidos entre \$ 3.9 M y \$ 146.1 M.

En este caso, es importante hacer notar que a medida que aumentan las desviaciones estándar a los lados de la media, aumenta también la probabilidad de ocurrencia de los resultados posibles, comprendidos dentro del rango de las desviaciones consideradas; ya que al aumentar las desviaciones estándar, se va cubriendo cada vez más el área bajo la curva de la distribución del proyecto.

Finalmente, en el particular ejemplo del proyecto A, se puede concluir lo siguiente:



Si se invierte en el proyecto A, se pronostica tener un flujo promedio anual de -- \$ 75 M; pero se puede ganar \$ 23.7 M más o perder \$ 23.7 M menos con una probabilidad de .68.

Aunque la varianza y la desviación estándar son dos de las medidas de dispersión - que más frecuentemente se utilizan para medir e interpretar el riesgo en los proyectos de inversión; existen otras medidas, entre las cuales se pueden citar por ejemplo a la asimetría y al coeficiente de variación.

### Asimetría

Cuando el área bajo la curva de la densidad de un proyecto desde  $-\infty$  a  $\bar{X}$ , es igual al área bajo la curva desde  $\bar{X}$  a  $\infty$ ; entonces, la densidad de probabilidad asociada a este proyecto es simétrica con respecto a su media. En caso contrario, se dice que la densidad de probabilidad es asimétrica.

Ejemplos de distribuciones simétricas, son todas aquellas distribuciones que pertenecen a la familia de distribuciones Normal y ejemplos de distribuciones asimétricas, son todas aquellas distribuciones que pertenecen a la familia de distribuciones Ji-cuadrada y F-snedecor.

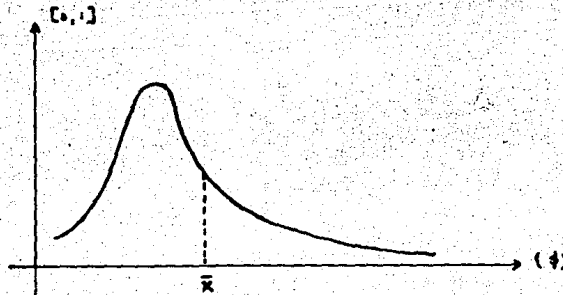
Es importante señalar que todas las distribuciones de probabilidad, se caracterizan además de su media y su desviación estándar, por su asimetría; la cual como se analizó anteriormente refleja el grado de simetría de la dispersión alrededor de la media.

En las distribuciones asimétricas, existe un número mayor de resultados posibles a la derecha o la izquierda de la densidad; por lo que las distribuciones de probabilidad asimétricas, pueden presentar dos tipos diferentes de asimetría:

a) Asimetría a la derecha o asimetría positiva.

Es cuando el número de resultados posibles a la derecha de la densidad de -- probabilidad de un proyecto, es mayor que el número de resultados posibles a la izquierda de la misma.

Gráficamente se tiene lo siguiente:

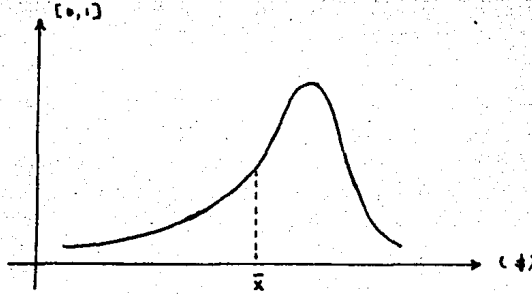


Obsérvese que en las densidades de probabilidad que presentan una asimetría positiva, existe un número mayor de resultados posibles por encima de la media.

b) Asimetría a la izquierda o asimetría negativa.

Es cuando el número de resultados posibles a la izquierda de la densidad de probabilidad de un proyecto, es mayor que el número de resultados posibles a la derecha de la misma.

Gráficamente se tiene lo siguiente:



Obsérvese que en las densidades de probabilidad que presentan una asimetría negativa, existe un número mayor de resultados posibles por debajo de la media.

La asimetría de cualquier distribución de probabilidad se puede calcular de la forma siguiente:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^3 p_i}{S^3}$$

en donde:

$\alpha$  : es la asimetría de la distribución.

$x_i$  : es el resultado posible  $i$ .

$p_i$  : es la probabilidad de ocurrencia del resultado posible  $i$ .

$\bar{x}$  : es la media de la distribución.

$S$  : es la desviación estándar.

$n$  : es el número de resultados posibles.

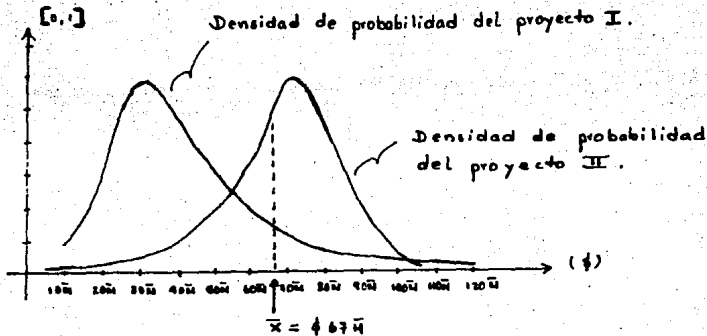
Ante un problema de selección entre dos proyectos de inversión, cada uno de los cuales tiene la misma media, pero la asimetría de la densidad de probabilidad de uno es positiva, mientras que la asimetría del otro es negativa; es preferible elegir - el que tiene asimetría positiva, ya que en caso de que ocurra lo inesperado (es decir, que ocurra uno de los resultados posibles que se encuentran en la cola de la -- distribución o equivalentemente que tenga asociado una probabilidad de ocurrencia -- casi nula) el resultado obtenido será mayor que el resultado que se esperaba obte--- ner.

A manera de ilustración, considérese el siguiente problema de elección entre dos pro- yectos de inversión:

Proyecto I	
Resultado posible (\$)	Probabilidad de ocurrencia [0,1]
\$ 10 M	.10
\$ 30 M	.60
\$ 60 M	.20
\$ 70 M	.10
\$ 80 M	.08
\$ 90 M	.07
\$ 100 M	.06
\$ 110 M	.05
\$ 120 M	.04

Proyecto II	
Resultado posible (\$)	Probabilidad de ocurrencia [0,1]
\$ 10 M	.005
\$ 20 M	.01
\$ 30 M	.025
\$ 40 M	.10
\$ 50 M	.20
\$ 70 M	.60
\$ 100 M	.10

Fácilmente se puede verificar que las medias de ambos proyectos son iguales a \$67 M. La gráfica de las funciones de densidad de probabilidad de los proyectos I y II es - la siguiente:



De la cual se pueden hacer las siguientes observaciones:

- 1) La asimetría de la densidad del proyecto I es positiva.
- 2) La asimetría de la densidad del proyecto II es negativa.
- 3) Los resultados posibles que tienen una probabilidad de ocurrencia muy pequeña, son tanto los resultados posibles más grandes del proyecto I como los resultados posibles más pequeños del proyecto II.

Por lo que en caso de que ocurra lo inesperado, es más conveniente elegir el proyecto I que el II.

#### Coefficiente de variación.

Es una medida de dispersión relativa, que permite comparar los riesgos de proyectos de tamaño distinto y se calcula dividiendo la desviación estándar de un proyecto entre su respectiva media.

ie. si:

V : es el coeficiente de variación.

X̄ : es la media de la distribución.

S : la desviación estándar.

entonces:

$$V = \frac{S}{\bar{X}}$$

Sería deseable que el coeficiente de variación de un proyecto de inversión, fuera lo más pequeño posible (es decir, lo más posible cercano a cero); pero esto se puede analizar de la manera siguiente:

$$\frac{S}{\bar{X}} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } S \ll \bar{X}$$

Es decir, cuando la desviación estándar de la distribución de un proyecto sea muy pequeña comparada con su media, entonces el coeficiente de variación de este será casi cero; en otras palabras, un proyecto de inversión ofrece menor riesgo, cuando su coeficiente de variación sea lo más pequeño posible.

Como se dijo anteriormente, el coeficiente de variación es útil en la comparación de riesgos de proyectos de tamaño distinto, es decir, que la utilidad del coeficiente de variación se hace más evidente cuando el problema es de escalas.

Por ejemplo, considérense dos proyectos de inversión M y N con sus siguientes medias y desviaciones estándar:

Proyecto	Media	D. Estándar
M	\$ 20 M	\$ 4 M
N	\$ 15 M	\$ 2 M

De la tabla anterior, se puede observar que el proyecto M es el que tiene un flujo promedio mayor; sin embargo, aunque el flujo promedio del proyecto N es menor, es el que ofrece menor riesgo.

Entonces el problema consiste en determinar cual de los dos resulta ser el más atractivo.

Calculando los coeficientes de variación de los proyectos, se puede observar lo siguiente:

$$V_M = \frac{4}{20} = .20$$

$$V_N = \frac{2}{15} = .13$$

El coeficiente de variación del proyecto N, es menor que el coeficiente de variación del proyecto M, es decir, que el proyecto N ofrece un riesgo menor por cada peso de rendimiento esperado.

En general, la elección de una medida de dispersión depende de los objetivos que se persigan y de la particular situación, pero existe una preferencia por aquellas que hacen referencia alguna medida de centralidad (generalmente la media) y de entre ellas se suele optar con frecuencia por la desviación estándar o el cuadrado de esta cantidad conocida como varianza.

#### 11.4.- Incorporación del riesgo a los métodos de evaluación financiera de proyectos de inversión.

En la sección anterior, se vio como medir, cuantificar e interpretar el riesgo en los proyectos de inversión; ahora en esta sección, se verá como se incorpora el riesgo a algunas técnicas de evaluación financiera que suelen utilizarse con frecuencia en la práctica.

Es importante hacer notar que el riesgo se puede incorporar de distintas formas y su aplicabilidad varía con los criterios de decisión y con las diversas situaciones existentes.

El objetivo de esta sección, es estudiar y analizar algunos de los métodos que permiten la incorporación del riesgo a los criterios de decisión que suelen utilizarse con más frecuencia en la evaluación financiera de proyectos de inversión en condiciones de certeza, como son por ejemplo, el valor actual o flujo de efectivo descontado, el valor actual neto (VAN) y la tasa interna de rendimiento (TIR).

Por lo que antes de empezar el estudio de estos métodos, se presentará a continuación un breve resumen de los criterios de decisión mencionados con anterioridad:

Este resumen considera los siguientes supuestos:

- Se conocen con certeza los flujos de efectivo.
- El costo de capital será una tasa de interés pura y libre de riesgo, puesto que no existe posibilidad de que no se obtengan los flujos de efectivo esperados.
- Los niveles de precios permanecerán fijos o constantes durante toda la vida útil del proyecto, es decir, que no existe inflación.

Flujo de efectivo descontado o valor actual.

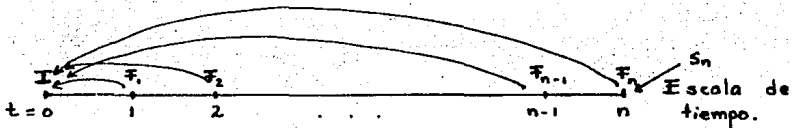
El principio en que descansa este método, es en determinar si el valor actual de los flujos futuros esperados justifica el desembolso o costo inicial de un proyecto.

Para esto supóngase que:

- $f_x$  : es el flujo de efectivo neto anual que se recibirá al final del año  $x$ .
- $S_n$  : es el valor de desecho que se recibirá al final del último año de vida del proyecto.
- $k$  : es el costo de capital.
- $i$  : es el costo inicial.
- $n$  : es la duración o vida estimada del proyecto.
- $VA$  : es el Valor Actual del proyecto.

Dado que se cuenta con todos los elementos necesarios para poder evaluar un proyecto, se tiene entonces que el Valor Actual de un proyecto, consiste en traer a valor presente ( $t=0$ ) los flujos futuros esperados a una tasa constante  $k$ .

Gráficamente se tiene lo siguiente:



Por lo tanto, el Valor Actual de un proyecto se calcula de la siguiente manera:

$$VA = F_1(1+k)^{-1} + F_2(1+k)^{-2} + \dots + F_n(1+k)^{-n} + S_n(1+k)^{-n}$$

$$= \frac{F_1}{(1+k)} + \frac{F_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{F_n}{(1+k)^n} + \frac{S_n}{(1+k)^n}$$

$$\therefore VA = \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+k)^t} + \frac{S_n}{(1+k)^n}$$

La regla de decisión cuando se utiliza este criterio en la evaluación de proyectos de inversión es la siguiente:

Si  $VA > I$  entonces el proyecto se acepta.

Si  $VA < I$  entonces el proyecto no se acepta.

Si  $VA = I$  entonces la decisión es subjetiva o indiferente dependiendo de la particular empresa.

**Valor actual neto.**

Este criterio es una variante del criterio anterior y consiste en determinar la equivalencia en el tiempo cero de los flujos de efectivo futuros que genere un proyecto y comparar esta equivalencia con el desembolso inicial.

Por lo tanto, el VAN de un proyecto de inversión, se obtiene restando el costo inicial del mismo al valor actual de éste.

$$\begin{aligned} \text{ie. } \text{VAN} &= \text{VA} - \text{I} \\ &= \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+k)^t} + \frac{S_n}{(1+k)^n} - \text{I} \end{aligned}$$

En este caso, la regla de decisión es la siguiente:

Si el VAN > 0 entonces el proyecto se acepta.

Si el VAN < 0 entonces el proyecto no se acepta.

Si el VAN = 0 la decisión es subjetiva o indiferente.

Tasa interna de rendimiento.

La tasa interna de rendimiento o tasa de rendimiento de un proyecto de inversión, es aquella tasa de interés que iguala la serie de sus ingresos futuros con su desembolso o costo inicial; o bien, es aquella tasa de interés que hace que el VAN de un proyecto sea cero.

Es decir, si  $r$  es la tasa interna de rendimiento de un proyecto de inversión, entonces  $r$  es tal que:

$$\text{I} = \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+r)^t} + \frac{S_n}{(1+r)^n} \iff \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+r)^t} + \frac{S_n}{(1+r)^n} - \text{I} = 0$$

Una forma sencilla de calcular la tasa interna de rendimiento de un proyecto de inversión es por tanteo, de la siguiente forma:

Paso 1

Sea  $r^*$  una aproximación a  $r$  tal que

$$X(r^*) = \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+r^*)^t} + \frac{S_n}{(1+r^*)^n}$$

$\text{I}$  : el costo inicial fijo.

Paso 2

Si  $X(r^*) > \text{I}$  entonces  $r > r^*$  (regresar al paso 1)

Si  $X(r^*) < \text{I}$  entonces  $r < r^*$  (regresar al paso 1)

Si  $X(r^*) = \text{I}$  entonces  $r = r^*$  (sigue al paso 3)

Paso 3

la tasa interna de rendimiento  $r$  es igual a  $r^*$ .



Cuando  $r_1$  y  $r_2$  son dos aproximaciones a  $r$  tales que  $X(r_1) < I < X(r_2)$ , entonces la tasa interna de rendimiento  $r$ , se puede obtener interpolando entre estas dos aproximaciones.

La regla de decisión cuando se utiliza este criterio en la evaluación de proyectos de inversión, está directamente relacionada con la naturaleza interna de la tasa de rendimiento de un proyecto y la naturaleza externa del costo de capital con respecto al mismo.

Por lo tanto se tiene lo siguiente:

Si  $r > k$  entonces el proyecto se acepta.

Si  $r < k$  entonces el proyecto no se acepta.

Si  $r = k$  entonces la decisión es subjetiva o indiferente.

Es decir, que con este criterio de decisión lo se hace es comparar el rendimiento de un proyecto, con respecto a su costo de capital o costo de los recursos que se utilizaron para llevarlo a cabo.

Este método es frecuentemente utilizado en la evaluación de proyectos de inversión que realizan las empresas, ya que permite comparar fácilmente la TIR de un proyecto con el costo de capital del mismo, puesto que ambos están expresados en porcentajes.

Es conveniente señalar que así como existen proyectos con múltiples tasas internas de rendimiento, también los hay sin tasas de rendimiento. \*

Con este último criterio, finaliza el resumen de los criterios de decisión que más se utilizan en la práctica para la evaluación financiera de proyectos de inversión en condiciones de certeza y se da inicio a los métodos de incorporación del riesgo. Los métodos de incorporación del riesgo que se presentan a continuación son, el método de la media y la desviación estándar, el método de la probabilidad de error en la aceptación, el método de la tasa de descuento ajustada al riesgo y el método de la tasa combinada.

\* Consúltese el apéndice en Tasa Interna de Rendimiento.

II.4.1.- Método de la media y la desviación estándar.

Este método permite la incorporación más directa del riesgo al criterio de decisión que utiliza al valor actual como variable de decisión.

A manera de ilustración, se utilizará el flujo de efectivo descontado o valor actual, que como se vio en condiciones de certeza se calcula de la siguiente manera:

$$VA = \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+K)^t} \quad \text{suponiendo que } S_n = 0$$

En este caso,  $F_t$  representa el flujo de efectivo neto anual que se recibirá al final del año  $t$ , es decir, que en condiciones de certidumbre se considera una sola estimación de los flujos de efectivo por cada año de la duración de un proyecto; mientras que al incorporar el riesgo, no es suficiente con una sola estimación por año, sino que se deben considerar el mayor número posible de estimaciones en cada año con sus respectivas probabilidades de ocurrencia asociadas y así, de esta manera utilizar la media de la distribución de resultados en cada año también.

Es decir, que para poder aplicar este método se debe tener la función de densidad de probabilidad de cada año de los flujos de efectivo del proyecto que se vaya a analizar.

Por ejemplo, supóngase que se tiene un proyecto el cual tiene una vida estimada de  $n$ -años y que se tienen  $m$ -estimaciones de los flujos de efectivo posibles en cada año con sus respectivas probabilidades de ocurrencia asociadas:

	Flujo posible ( $\$$ )	Probabilidad de ocurrencia [ $0,1$ ]
	$\delta_{11}$	$P_{11}$
	$\delta_{12}$	$P_{12}$
	.	.
Año 1	.	.
	.	.
	$\delta_{1m}$	$P_{1m}$
	$\delta_{21}$	$P_{21}$
	$\delta_{22}$	$P_{22}$
	.	.
Año 2	.	.
	.	.
	$\delta_{2m}$	$P_{2m}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

	Flujo posible (\$)	Probabilidad de ocurrencia [0,1]
	$\delta_{n1}$	$P_{n1}$
	$\delta_{n2}$	$P_{n2}$
	.	.
Año n	.	.
	.	.
	$\delta_{nm}$	$P_{nm}$

en donde:

$\delta_{tj}$ : es la estimación del  $j$ -ésimo flujo de efectivo en el  $t$ -ésimo año de vida del proyecto.

$P_{tj}$ : es la probabilidad de ocurrencia asociada a  $\delta_{tj}$ .

obsérvese que con este método, al usar la media de la distribución, se puede considerar también la dispersión o variabilidad de los flujos de efectivo posibles con respecto a este valor medio.

Por lo tanto, incorporando el riesgo a este criterio de decisión con este método se tiene lo siguiente:

Si:

$\bar{VA}$ : es el valor actual esperado de un proyecto.

$F_t$ : es el flujo de efectivo neto anual esperado en el año  $t$ .

$k$ : el costo de capital.

$n$ : la duración del proyecto.

entonces:

$$\bar{VA} = \sum_{t=1}^n \frac{\bar{F}_t}{(1+k)^t}$$

En donde  $\bar{F}_t$  se calcula como la media de la distribución de un proyecto en el año  $t$ , es decir:

$$\bar{F}_t = \sum_{j=1}^m \delta_{tj} P_{tj} \quad \forall t \in \overline{1, n}$$

Por otra parte, para obtener la desviación estándar de un proyecto lo que se hace -- primero, es calcular sus desviaciones estándar en cada año de su vida útil, después traerlas a valor presente considerando su costo de capital y finalmente calcular la desviación estándar total del mismo.

Por lo tanto, si:

$S$ : es la desviación estándar de un proyecto.

$s_t$ : la desviación estándar en el año  $t$ .

$k$ : el costo de capital.

entonces:

$$S = \sqrt{\sum_{t=1}^n \left( \frac{s_t}{(1+k)^t} \right)^2} = \sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{s_t^2}{(1+k)^{2t}}}$$

en donde:

$$s_t = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_{t_i} - \bar{F}_t)^2 P_{t_i}} \quad \forall t \in \{1, n\}$$

Es importante hacer las siguientes observaciones:

- 1) El flujo medio de cada año puede ser diferente a los flujos de efectivo posibles en cada año.
- 2) Al considerar el flujo medio en cada año, se está considerando toda la gama de resultados posibles.
- 3) Con este método se consideran todos los resultados posibles y su efecto potencial en la ocurrencia.
- 4) Este método proporciona información del beneficio esperado de un proyecto y el riesgo que éste ofrece medido por su desviación estándar.

La principal diferencia entre el criterio de certidumbre y el de riesgo, es que al obtener con este último la desviación estándar, ésta refleja de manera explícita el riesgo; la personas encargadas de tomar la decisión, ahora deben analizar si el beneficio esperado justifica el riesgo, es decir, que ya no se trata simplemente de comparar el valor actual de un proyecto con su costo de capital.

Es muy probable que proyectos que habían sido aceptados sin discusión alguna, sean nuevamente reevaluados haciendo esta consideración explícita del riesgo.

Para obtener el valor actual neto esperado de un proyecto ( $\overline{VAN}$ ), se le resta al valor actual esperado ( $\overline{VA}$ ) el costo inicial del mismo.

ie.

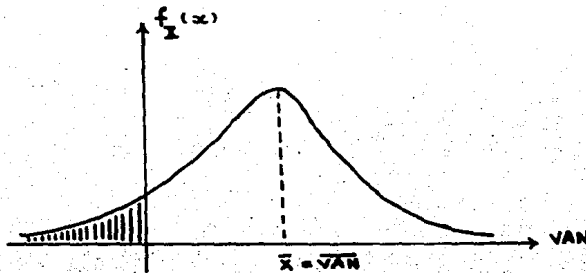
$$\overline{VAN} = \overline{VA} - I$$

$$= \sum_{t=1}^n \frac{\bar{F}_t}{(1+k)^t} - I$$

11.4.2.- Método de la probabilidad de error en la aceptación.

Este método se aplica generalmente al valor actual neto (VAN), aunque esto no quiere decir que se limite a él. Cuando este método se aplica al VAN, el problema consiste en determinar la probabilidad de que el VAN sea menor que cero; proporcionando con esto, una medida de error en la aceptación de un proyecto, puesto que si el VAN de éste es menor que cero, esto indica que el proyecto no se debe aceptar. Con el fin de ejemplificar este método, se hará la suposición de que los valores actuales netos del proyecto bajo estudio se distribuyen como una Normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ ; en donde  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2 > 0$ , son los parámetros de la distribución, que se pueden estimar.

Si se supone además que el valor actual neto esperado ( $\bar{VAN}$ ) del proyecto es mayor que cero, entonces gráficamente se tiene lo siguiente:



Obsérvese que el área sombreada bajo la curva de la densidad, es la probabilidad que interesa conocer, ya que son todos los resultados posibles de la densidad que se encuentran a la izquierda del  $VAN = 0$ .

Para determinar esta probabilidad, lo que se hará es estandarizar la  $N(\mu, \sigma^2)$  que corresponde a la distribución de los valores actuales netos del proyecto, de la siguiente manera:

Si  $X$  es la v.a. que representa todos los posibles valores actuales netos del proyecto, entonces:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ con } \mu \text{ y } \sigma^2 \text{ desconocidos.}$$

Por otra parte, se sabe de la teoría de la Estadística que:

$\bar{X} = VAN$  es el mejor estimador para  $\mu$  y

$S^2$ : es el mejor estimador para  $\sigma^2$ .

en donde:

$$\bar{X} = \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{(1+k)} - I$$

$$S^2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{(a_k)^2}{(1+k)^2}}$$

Se sabe también que si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , entonces:

$$Y = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \sim N(0, 1) \quad \forall \text{ valor de } X$$

pero como  $\mu$  y  $\sigma^2$  son desconocidos, entonces:

$$Y = \frac{X - \bar{x}}{\sqrt{s^2}} \sim N(0, 1) \quad \forall \text{ valor de } X$$

Obsérvese que este cociente es tan sólo una aproximación, puesto que se están sustituyendo a los verdaderos parámetros de la distribución por sus mejores estimaciones.

Como interesa conocer la variación bajo la curva Normal, desde  $VAN = 0$  ( $x=0$ ).

Entonces:

$$\text{Sea } y = \frac{0 - \bar{x}}{s} \sim N(0, 1) \text{ para } x = 0$$

$$\text{ie. } y = \frac{-\bar{x}}{s} \text{ donde } Y \sim N(0, 1)$$

$$\therefore P_r(VAN < 0) = P_r(X < 0) = P_r(Y \leq y) \text{ donde } Y \sim N(0, 1)$$

$$\therefore P_r(VAN < 0) = \int_{-\infty}^y N(0, 1) = \beta \text{ con } y = \frac{-\bar{x}}{s} \text{ para } x = 0$$

Por lo tanto, la probabilidad de que los valores actuales netos del proyecto sean menores que cero, es igual con  $\beta$ .

$$\text{donde: } \beta = \int_{-\infty}^y N(0, 1) \text{ si } X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ e } y = \frac{-\bar{x}}{s}$$

Nótese que dependiendo del valor de  $y$ , el valor de  $\beta$  se busca en las tablas de la Normal estándar.

En el método anterior (de la media y la desviación estándar), se vio como calcular el valor actual neto esperado ( $\overline{VAN}$ ) y la desviación estándar  $S$  de un proyecto de inversión; sin embargo, si el  $\overline{VAN}$  era mayor que cero, no se tenía de una medida de probabilidad para cuantificar el error en caso de aceptar el proyecto, aunque se conocía explícitamente la desviación estándar.

Con este método, en caso de aceptar un proyecto (porque su  $\overline{VAN} > 0$ ),  $\beta$  proporciona esa medida de probabilidad para cuantificar el error en caso de aceptarlo; puesto -- que representa la probabilidad de equivocarse o cometer un error de que el resultado real sea un valor actual neto menor que cero.

Es importante hacer las siguientes observaciones:

- 1) Con este método se cuantifica la probabilidad de equivocarse y esta es utilizada como medida de riesgo.
- 2)  $\beta$  representa la probabilidad de error en la aceptación de un proyecto.
- 3) Este método proporciona un criterio para juzgar si el valor actual neto esperado ( $\overline{VAN}$ ) justifica el riesgo.
- 4) Aunque este método cuantifica la probabilidad de equivocarse, no proporciona -- (al igual que el método de la media y la desviación estándar) una regla de aceptación o de rechazo.

Con el objeto de ilustrar un poco más los dos métodos anteriores, se presentará a -- continuación un ejemplo de aplicación de estos.

Considérese la siguiente densidad de probabilidad de los flujos de efectivo del proyecto R, cuya vida estimada es de tres años.

		Proyecto R	
		Flujo posible (\$)	Probabilidad de ocurrencia [0,1]
Año 1		1900	.20
		2500	.30
		2150	.20
		3150	.30
Año 2		1500	.10
		2250	.70
		2500	.10
		3000	.10
Año 3		1000	.10
		1500	.20
		2000	.40
		2500	.20
	3000	.10	

Supóngase también que el costo de capital de éste es del 10% y su costo inicial es -- de \$ 5000.

Con esta información que se tiene, el problema consiste en proporcionar indicadores acerca de la aceptabilidad del proyecto R, considerando su valor actual neto esperado (VAN) en relación con el riesgo que éste presenta.

Para esto lo primero que se calculará es el valor actual esperado del proyecto:

En este caso  $n = 3$  y para  $t = 1$ , se tiene que  $m = 4$

Por lo que  $\bar{F}_1 = 2625$

Análogamente:

$$\bar{F}_2 = 2275$$

$$\bar{F}_3 = 2000$$

Una vez obtenidos los flujos de efectivo esperados en cada año de vida del proyecto, se tiene que como  $k = .10$ , entonces:

$$\begin{aligned} \bar{V}_A &= \sum_{t=1}^3 \frac{\bar{F}_t}{(1+i)^t} \\ &= \frac{2625}{(1.1)} + \frac{2275}{(1.1)^2} + \frac{2000}{(1.1)^3} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\bar{V}_A = \$ 5769.15$$

Para obtener la desviación estándar del proyecto, se tiene que calcular primero las desviaciones estándar en cada año de vida de éste.

ie.

$$\begin{aligned} \text{Para } t = 1 \quad s_1 &= \sqrt{\sum_{j=1}^4 (f_{1j} - \bar{F}_1)^2 p_{1j}} \\ &= \sqrt{(900 - 2625)^2 \cdot 2 + \dots + (3150 - 2625)^2 \cdot 3} \\ &= 450.69 \end{aligned}$$

Análogamente:

$$s_2 = 346.32$$

$$s_3 = 547.72$$

Por lo tanto, considerando nuevamente el costo de capital se tiene que:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\sum_{t=1}^3 \frac{s_t^2}{(1+i)^{2t}}} = \sqrt{\frac{(450.69)^2}{(1.1)^2} + \frac{(346.32)^2}{(1.1)^4} + \frac{(547.72)^2}{(1.1)^6}} \\ &= \$ 647.40 \end{aligned}$$

Interpretación de los resultados obtenidos:

El valor actual neto esperado del proyecto R es de \$ 5769.15 y el riesgo asociado, medido por su desviación estándar es de \$ 647.4; es decir, que el beneficio que se espera obtener del proyecto R sin considerar su costo inicial es de \$ 5769.15 pero este beneficio esperado tiene un riesgo del 11.22% medido por su coeficiente de variación.



Por otra parte, si se considera su costo inicial, se obtiene que el valor actual neto esperado del proyecto R es de:

$$769.15 = 5769.15 - 5000.$$

Haciendo esta consideración, se tiene que el riesgo del proyecto R medido por su -- coeficiente de variación aumenta a un 84%; lo cual indica que el proyecto es altamente riesgoso.

Como el valor actual neto esperado del proyecto es mayor que cero, entonces sería recomendable conocer la probabilidad de equivocarse en caso de que sea aceptado.

Para calcular la probabilidad de error en la aceptación, se supondrá que los valores actuales netos del proyecto R se distribuyen normalmente entonces:

$$\beta = P_r(\bar{X} < 0) = \int_{-\infty}^{\gamma} N(0,1) \text{ en donde } \gamma = \frac{-\bar{X}}{S} = -\frac{\overline{VAN}}{S}$$

Sustituyendo el  $\overline{VAN}$  y la S del proyecto, se tiene lo siguiente:

$$\gamma = -\frac{769.15}{647.4} = -1.188 \Rightarrow \beta = \int_{-\infty}^{-1.188} N(0,1) = 0.119 \approx .12$$

Por lo tanto, si el proyecto R se acepta hay aproximadamente una probabilidad de .12 de que se cometa un error y de que el resultado real sea un valor actual neto menor que cero.

#### 11.4.3.- Método de la tasa de descuento ajustada al riesgo.

Este método al igual que los anteriores, incorpora el riesgo a los criterios de decisión que utilizan al valor actual como variable de decisión.

El método consiste como su nombre lo dice, en ajustar el costo de capital o tasa de descuento, para que de esta manera se pueda compensar el riesgo del proyecto; de tal forma que si el riesgo aumenta la tasa de descuento ajustada al riesgo también aumente, originando con esto que el valor actual esperado disminuya.

Por lo tanto considerando esta nueva tasa, si el riesgo aumenta, la atraktividad del proyecto bajo estudio disminuye.

La aplicación de este método al criterio de decisión del VAN, consiste en utilizar esta nueva tasa ajustada, en lugar del costo de capital que se utilizó en los dos métodos anteriores, obteniendo con esto el valor actual neto ajustado al riesgo de un proyecto. De tal manera, que si éste es mayor que cero, entonces se acepta el proyecto y en caso contrario no se acepta.

Para entender mejor el ajuste que se hace a la tasa de descuento o costo de capital ( $k$ ), es importante darse cuenta que existen dos tipos de inversiones diferentes:

- a) Las inversiones que ofrecen certidumbre en su serie de flujos, como los son por ejemplo los valores emitidos por el gobierno de un país estable o valores libres de riesgo del gobierno.
- b) Las inversiones que no ofrecen certidumbre en su serie de flujos como lo son por ejemplo la mayoría de todas las inversiones en el mercado de capitales.

En el primer tipo de inversiones existe una tasa libre de riesgo  $i$ , comúnmente -- llamada también tasa libre de omisión; por lo que en este caso  $k = i$ .

Por otra parte, al considerar el otro tipo de inversiones, es necesario ajustar el costo de capital de tal manera que la nueva tasa refleje el riesgo adicional; obteniendo así, la tasa de descuento ajustada al riesgo.

Es decir que en este caso, la nueva tasa ajustada debe estar formada por una tasa libre de riesgo y un factor de compensación adicional por el riesgo involucrado en este tipo de inversiones.

Por lo tanto:

$$k = i + \varphi_X$$

en donde:

$\varphi_X$ : es la prima de ajuste al riesgo o prima de riesgo.

$k$ : es la tasa de descuento ajustada al riesgo -- del proyecto X.

$i$ : es la tasa libre de riesgo o tasa libre de omisión.

La prima de ajuste al riesgo  $\varphi_X$ , es propia de cada empresa y del proyecto -- que ésta considere; de tal manera que debe involucrar tanto la variabilidad o dispersión de los flujos de efectivo de toda la empresa como del proyecto; por lo que se puede ver como una relación proporcional entre el riesgo que ofrece el proyecto y el riesgo existente en toda la empresa.

Por lo tanto:

$$\varphi_X = \frac{V_X}{V_{emp}} \varphi_{emp}$$

en donde:

$V_X$ : es el coeficiente de variación del proyecto X.

$V_{emp}$ : es el coeficiente de variación de la empresa.

Nótese que si la variabilidad o dispersión aumenta, entonces también aumenta el riesgo, pero al aumentar el riesgo,  $\varphi_X$  también aumenta, originando que  $k$  también aumente; trayendo como consecuencia final que la atractividad del proyecto disminuya, puesto que al aumentar el costo de capital, disminuye el valor actual del mismo.

Cabe señalar que, tanto la prima de riesgo de toda la empresa como la tasa libre de riesgo utilizadas para el cálculo de esta nueva tasa ajustada, son ambas determinadas por el Departamento de Finanzas de la empresa.

Por otra parte, para comparar la tasa de descuento ajustada al riesgo de un proyecto con la tasa de descuento ajustada al riesgo de la empresa que esté por emprenderlo, es necesario hacer el siguiente análisis:

$$\text{Si } \frac{V_X}{V_{emp}} > 1 \quad \text{entonces } k_X > k_{emp}$$

$$\text{Si } \frac{V_X}{V_{emp}} < 1 \quad \text{entonces } k_X < k_{emp}$$

Es decir, si el riesgo de un proyecto es mayor que el riesgo de todas las inversiones de la empresa, entonces la tasa de descuento ajustada al riesgo del proyecto será mayor que la de la empresa, y viceversa.

Finalmente, para obtener tanto el valor actual (VA) como el valor actual neto (VAN) ambos ajustados al riesgo, lo único que se tiene que hacer, es sustituir el costo de capital ( $k$ ) por la tasa de descuento ajustada al riesgo del proyecto en cuestión, en las fórmulas correspondientes.

De manera que el VAN ajustado al riesgo del proyecto X, se calcula de la siguiente forma:

$$VAN_X = \sum_{t=1}^n \frac{\bar{F}_t}{(1+k_x)^t} - I$$

Si el VAN ajustado al riesgo es mayor que cero, entonces el proyecto se acepta y en caso contrario, no se acepta.

#### Ventajas del método.

- 1) Este método proporciona un criterio directo para aceptar o rechazar un proyecto de inversión, mientras que los dos métodos anteriores únicamente proporcionan medidas del riesgo y del beneficio que estaban sujetas a interpretación.
- 2) Al considerar las densidades de probabilidad de los flujos de efectivo en cada año de vida de un proyecto, este método no pierde nada del análisis subjetivo considerado en los métodos anteriores.
- 3) Cada proyecto es ajustado por separado, de tal manera que en su evaluación se puede aplicar el nivel de riesgo apropiado.
- 4) Los proyectos de menor riesgo pueden ser más atractivos a pesar de no tener flujos de efectivo muy altos, mientras que los de alto riesgo y alto flujo pueden perder su atraktividad.
- 5) Si las empresas consideran proyectos de poco riesgo, esto puede ser muy útil, puesto que se podría compensar el riesgo más alto de la empresa en general.
- 6) El costo de capital de la empresa (determinado en los mercados financieros), puede servir de base para calcular la tasa de descuento de un proyecto; ya que esta última debe fluctuar con el costo de capital de la empresa.

II.4.- Método de la tasa combinada.

Cuando el método de la tasa de descuento ajustada al riesgo se aplica al criterio de decisión de la tasa interna de rendimiento (TIR), se obtiene una tasa combinada, que es calculada del mismo modo que la tasa anterior y representa el costo de capital ajustado al riesgo de un proyecto; es decir que:

$$k_x = i + \varphi_x$$

en donde ahora,  $k_x$  es la tasa combinada del proyecto X.

Para decidir si se acepta o no un proyecto, esta tasa combinada se debe comparar con la TIR del mismo; de tal manera que si la  $TIR_x > k_x$  entonces se acepta el proyecto o si la  $TIR_x < k_x$ , entonces no se acepta.

La tasa interna de rendimiento, es ahora aquella tasa de interés que hace que el valor actual neto esperado ( $\overline{VAN}$ ) de un proyecto sea igual con cero; es decir que  $r$  es tal que:

$$\sum_{t=1}^n \frac{\overline{F}_t}{(1+r)^t} - I = 0$$

$$\text{en donde: } \overline{F}_t = \sum_{i=1}^m f_{t,i} p_{t,i} \quad \forall t \in \overline{1, n}$$

Obsérvese que este método tiene las mismas ventajas que el método anterior; sin embargo cuando se utiliza en la práctica, generalmente se le incluye a la tasa combinada un cierto factor de falla, que sirve como colchón de seguridad para compensar los posibles errores de juicio. Es muy probable que con esta consideración, proyectos que debieron ser aceptados sean rechazados, puesto que al considerar este factor de falla, la nueva tasa combinada puede ser más grande que la tasa combinada original.

De ahí la importancia que tiene el agregarle a la tasa combinada este factor de falla.

Finalmente es importante señalar que esta tasa combinada debe estar sujeta a los cambios que se registren en los mercados financieros y/o en el costo de capital de la empresa; ya que en caso contrario, en épocas de altas tasas de interés y capital caro, el costo de capital real de la empresa puede ser mayor que la tasa combinada, originando con esto una evaluación deficiente, ya que la tasa combinada considerada en la evaluación, no corresponderá a la tasa combinada real.

## II.5.- Conclusiones al capítulo.

La información necesaria y suficiente para establecer la medida de la rentabilidad de un proyecto de inversión, es en primer lugar, los flujos de efectivo netos antes de depreciación e intereses pero después de impuestos, que a su vez dependen de su costo inicial, de las entradas y salidas subsecuentes que se produzcan, de la ocurrencia de sus flujos, de su duración y de su valor de desecho; en segundo lugar, se debe conocer también el costo de capital o tasa de descuento, que en situaciones de riesgo se puede ajustar considerando tanto el riesgo de la empresa en cuanto a sus inversiones, como el riesgo particular del proyecto a evaluar; y por último, se debe considerar la incertidumbre que afecta a sus flujos de efectivo, aunque la mayoría de las empresas operan con el riesgo, por ser esta una situación más realista y práctica de manejar, puesto que operando en estas condiciones, se pueden formular estimaciones de los flujos de efectivo posibles y de sus probabilidades asociadas, mientras que operando en condiciones de incertidumbre esto es imposible de realizar.

Aunque el Análisis de Regresión y otras técnicas estadísticas son de gran utilidad para la formulación de las estimaciones requeridas, gran parte de la distribución de los resultados, proviene de un razonamiento subjetivo. Una vez conocida la densidad de probabilidad de los flujos de efectivo de un proyecto, es posible obtener una estimación cuantificada de estos, mediante el uso de algunas medidas de centralidad y de dispersión.

Cuando se utilizan tanto el método de la tasa de descuento ajustada al riesgo, como el método de la tasa combinada en la evaluación financiera de proyectos de inversión en situaciones de riesgo, las ventajas que se tienen con respecto a los otros dos métodos son bastante notorias, sobre todo porque estos proporcionan un criterio directo de aceptación; mientras que los métodos de la media y la desviación estándar y de la probabilidad de error en la aceptación, aunque proporcionan medidas del riesgo muy útiles, estas están sujetas a una interpretación subjetiva.

En este capítulo, se analizó el riesgo de cada proyecto en forma individual, determinado por la variación de los flujos de efectivo en el tiempo; sin embargo, es importante señalar que una combinación o cartera de proyectos podría ofrecer un riesgo menor que cada uno de los proyectos tomados separadamente, porque las variaciones que los flujos de efectivo sufren en el tiempo se pueden compensar, o en su defecto disminuir la magnitud de la variación producida por tal combinación.\*

\* Consúltese el apéndice en combinación de proyectos.

Finalmente es conveniente señalar que el enfoque probabilístico es generalmente utilizado, cuando la magnitud de la inversión inicial es significativa, o bien, cuando los criterios tradicionales de evaluación no establecen con la suficiente claridad cual de los proyectos analizados es el mejor.

Sin embargo, aunque este enfoque es muy utilizado en la práctica, existen otras técnicas como la simulación, la cual se considera muy apropiada y simple de aplicar en estos casos.

**C A P I T U L O    I I I**

**EVALUACION DE PROYECTOS DE INVERSION EN EPOCAS INFLACIONARIAS**



### III.1.- La inflación.

Dada la actual situación económica del país la palabra inflación es utilizada -- todos los días, aunque en varias ocasiones resulta difícil definirla con claridad. Existen diversas teorías que explican la inflación. Unicamente para objetivos del -- presente trabajo, se hará especial énfasis en la teoría monetarista:

" La inflación se produce cuando la cantidad de dinero en circulación aumenta más rápidamente que la de los bienes y servicios; cuanto mayor es el incremento de la cantidad de dinero por unidad de producción, la tasa de inflación es más alta ". Todo escasea menos el dinero.

De acuerdo con esta teoría, la causa principal de la inflación es el aumento del circulante monetario (moneda fraccionaria, billetes y depósitos bancarios); que a su -- vez, es originado por los déficits en el presupuesto gubernamental.

Con el objeto de cubrir estos déficits, se acude a diversos recursos como pueden ser, el incremento de los impuestos, financiamientos tanto internos como externos y emisión de moneda, que es el recurso más grave puesto que aumenta el dinero en circulación sin tener como apoyo un incremento en la producción.

Por otra parte, es conveniente señalar que estos déficits son originados principalmente por:

- a) La aplicación de políticas gubernamentales para redistribuir mejor el ingreso entre la población.
- b) Las exigencias de la sociedad por obtener:
  - Mejor salario.
  - Más beneficios.
  - Mejorar la salud y en general vivir mejor.
- c) Lograr un crecimiento sostenido que genere más empleos a fin de combatir la -- desocupación.
- d) Gastos excesivos y dispendiosos en los propios gobiernos.

De acuerdo con esto, la manera óptima de contrarrestar la inflación sería no generar -- do más déficits, o equivalentemente reduciendo la tasa de crecimiento de la oferta -- monetaria (cantidad de dinero en circulación); sin embargo, si se limita el circulan -- te monetario entonces se reducirían los recursos a la economía del país y probable-- mente el problema sería más grave.

El déficit en la productividad puede ser considerado como una causa secundaria de la inflación, puesto que pueden registrarse altas tasas de crecimiento de la pro- -- ducción y sin embargo, la inflación puede continuar si este crecimiento no es apoya-- do por un incremento de la productividad en todos los niveles.

Cada aumento de precios es la señal para aumentar los salarios y los gastos, que a su vez impulsarán aún más la subida de éstos.

Por lo tanto, la inflación es un problema de equilibrio entre lo que se tiene y lo que se gasta. Si se tiene más dinero, se gasta más.

El temor de futuros incrementos en los precios provoca mayores consumos, originando nuevamente un desequilibrio entre la oferta y la demanda, puesto que al haber más dinero en circulación se estimula la demanda, contribuyendo a un aumento total más rápido de los precios.

Los negocios se estancan porque ya no saben cuanto cobrar; se genera especulación, puesto que al observar que los precios suben provoca que los recursos sean destinados a otro tipo de inversiones como los inmuebles y en general, a bienes con los que se pueda hacer mejor frente a la inflación, originando que los recursos destinados a las inversiones productivas sean menores; también se manifiesta en una disminución del ahorro, ya que el incremento sostenido de precios origina una pérdida del poder adquisitivo del mismo.

El temor de los inversionistas ante la incertidumbre prevaeciente, hace que exporten sus capitales a otros países, acentuando la descapitalización de las empresas.

La inflación se puede definir como la medida de la disminución en el poder de compra del dinero, originada por el alza del nivel general de precios.

Usualmente, la inflación es expresada en términos de una tasa promedio ponderada, que mide el cambio sostenido en el nivel general de precios de los bienes y servicios.

Es importante no confundir el efecto de la inflación en el valor del dinero, con el cambio del valor del dinero a través del tiempo, aunque ambos produzcan el mismo efecto:

" El valor de un peso ahora, es mayor que el valor de un peso el próximo año".

El efecto de la inflación en el valor del dinero surge porque el poder de compra de un peso ahora, es mayor que el del próximo año, debido simplemente a la alza general de precios.

Por otra parte, el cambio del valor del dinero a través del tiempo, surge porque cantidades iguales de dinero no tienen el mismo valor si se encuentran en puntos diferentes en el tiempo, considerando que la tasa de interés prevaeciente en el mercado es mayor que cero.

### III.2.- Clasificación de la inflación.

Dependiendo de la proporción en que se incrementan los precios de los bienes y servicios, existen dos clases de inflación:

- a) La inflación general o abierta y
- b) La inflación diferencial o reprimida.

La inflación general o abierta se da cuando todos los precios y costos se incrementan en la misma proporción.

Mientras que la inflación diferencial o reprimida se da cuando no todos los precios y costos se incrementan en la misma proporción; en este caso, el incremento de éstos depende del sector económico involucrado.

Es muy probable que el primer tipo de inflación no se presente en la práctica; por lo que de ahora en adelante se supondrá, que aunque todos los precios y costos se incrementan a distintas tasas de inflación (inflación diferencial o reprimida), -- siempre será posible obtener una estimación de la tasa anticipada promedio ponderada de inflación durante la vida de un proyecto de inversión.

### III.3.- La inflación y las operaciones financieras.

En general, la inflación afecta a la mayoría de las operaciones financieras de una empresa; algunas más que otras, sin embargo el impacto que tiene la inflación en éstas es de consideración, ya que el efecto que puede tener sobre una operación puede no ser tan sustancial como el efecto y consecuencia que pueda tener en otra operación determinada.

A continuación, se esboza el impacto de la inflación sobre algunas operaciones financieras relacionadas con: las tasas de interés, el capital de la empresa, la planeación financiera, la medición de la productividad, los créditos a largo plazo, las inversiones estratégicas y los préstamos bancarios.

#### III.3.1.- La inflación y las tasas de interés.

Las tasas de interés representan el precio que la empresa pagará al comprador de los valores que se ofrezcan en caso de que preste o invierta su dinero en ella; o bien, es el precio del crédito que el acreedor o inversionista otorga a la empresa.

Estas tasas, fluctúan según las condiciones del mercado y de acuerdo con la posición relativa de la empresa y de los compradores potenciales.

Por lo que en épocas de altas tasas inflacionarias, las tasas de interés se ven fuertemente afectadas, ya que los cambios en el nivel general de precios repercuten no sólo en las condiciones del mercado, sino también en la posición relativa de la empresa con respecto a sus compradores de los valores que esta ofrece.

La tasa de interés sobre los valores gubernamentales (tanto a corto como a largo plazo) llamada tasa libre de riesgo o tasa libre de omisión, está formada -- por la tasa real de productividad o tasa básica de crecimiento de la economía; que proporciona la fuente de pagos para los ahorradores de modo que satisfagan para el futuro su consumo actual y una prima inflacionaria que refleja la tasa de infla-- ción del período correspondiente. De esta manera, un aumento en la tasa de infla-- ción repercute seriamente en la tasa libre de riesgo.

Como el costo del dinero para las empresas (costo de capital), generalmente -- está formado por una tasa libre de riesgo y una compensación por el mismo, enton-- ces los cambios en la tasa de inflación también repercuten en el costo de capital de las empresas, puesto que al aumentar la tasa inflacionaria, aumenta la tasa li-- bre de riesgo y como consecuencia se incrementa también el costo de capital.

Las tasas de rendimiento normalmente son expresadas sin considerar a la inflación, sin embargo es preciso agregarles un factor adicional basado en la tasa esperada de inflación, de tal manera que los cambios en la tasa inflacionaria, se reflejen en las tasas de rendimiento de las empresas, para que mediante ciertos ajustes -- sea posible conservar los rendimientos reales.

Es por ello, que en muchas ocasiones las empresas se ven en la necesidad de obte-- ner tasas de rendimiento más altas que las esperadas o estimadas, para contrarres-- tar el posible efecto de la inflación sobre los rendimientos reales.

### III.3.2.- La inflación y el capital de la empresa.

En épocas inflacionarias, el capital que necesita la empresa para dirigir sus operaciones se incrementa considerablemente.

El inventario que ha sido vendido deberá ser reemplazado a un costo mayor; así mis-- mo el costo de reemplazo o expansión industrial de los activos se incrementa según aumente la tasa inflacionaria.

Al incrementarse la tasa de inflación, es necesario aumentar también los salarios de los trabajadores de la empresa. Originando que además de obtener fondos adicio-- nales para poder equilibrar este incremento, en varias ocasiones se vea en la nece-- sidad de pedir créditos; por lo que en un período inflacionario, también es impor-- tante tomar en cuenta la actitud de los prestatarios y de los prestamistas, puesto que si las tasas de interés reflejan las expectativas inflacionarias y los prés-- tamos son pactados a tasas de interés fija, entonces únicamente los cambios inespe-- rados en la tasa de inflación beneficiarán a un prestatario o a un prestamista.

El prestatario gana si la tasa de inflación es mayor de lo esperado cuando el prés-- tamo fue sometido a consideración y el prestamista gana, si la tasa de inflación -- es más baja de lo esperado.

Por lo tanto, no sólo es importante elaborar buenas estimaciones de las futuras tasas de inflación, sino también considerar y comprender la diferencia que existe entre las tasas de inflación esperadas e inesperadas.

Cabe señalar que cuando los préstamos son pactados a tasas de interés prevalcientes (es decir, a tasas de interés variable), entonces ni el prestatario ni el prestamista ganarían o perderían con las variaciones en estas tasas.

Por lo tanto, aunque la inflación influye determinantemente en la ganancia de los prestatarios y de los prestamistas, son los cambios inesperados en la tasa de inflación los que originan estas ganancias.

### III.3.3.- La inflación y la planeación financiera.

Normalmente, la planeación financiera opera sobre la base de planes o inversiones a largo plazo; sin embargo, en un periodo de precios inestables, las altas tasas de interés y la escasez general de capital, obliga a la mayoría de las empresas a tener mucho más cuidado en su planeación.

Las técnicas de pronóstico de costos e ingresos empleadas en la planeación financiera de las empresas, no son fáciles de obtener aún cuando no se considera el efecto de la inflación; sin embargo, es importante tomar en cuenta en estas técnicas el pronóstico de la tasa inflacionaria, puesto que es esencial en la planeación de las empresas.

Una buena planeación financiera debe tomar en cuenta la incertidumbre en la economía actual, puesto que en una inversión a largo plazo, la tasa básica de crecimiento de la economía se eleva según la lejanía del vencimiento; originando con esto, un aumento en las primas de riesgo, debido a que el riesgo de que haya fluctuaciones en las tasas de interés es mayor.

### III.3.4.- La inflación y la medición de la productividad.

Cuando en una economía se presentan cambios bruscos en el nivel general de precios, la medición de la productividad se vuelve demasiado compleja.

Los efectos de la inflación sobre las técnicas contables con las que se mide la productividad son sustanciales y de gran importancia.

Durante periodos inflacionarios, la forma de valuar los activos fijos e inventarios es muy importante, puesto que el método de valuación empleado debe ser el que mejor considere el efecto de la inflación en los estados financieros, con el objeto de obtener resultados que realmente se apeguen a la realidad.

Si la tasa de inflación es alta, los resultados que muestran los estados financieros, pueden no corresponder con los resultados reales.

Cuando se incrementan los precios de venta de los inventarios, se podría pensar que se está obteniendo mayor utilidad reflejada en el estado de resultados; -- sin embargo, también es importante considerar que el costo para reemplazar el inven- ta- rio ven- di- do es mayor que antes.

Al presentar una empresa utilidades aparentemente altas, los socios-inverionistas pueden pensar en repartirse utilidades que realmente no se generaron, también se afectaría el reparto de utilidades a los trabajadores y lo que es más grave, se es ta- ria- n pa- ga- nd- o im- p- ue- st- os s- ob- re utilidades in- ex- is- t- e- n- tes.

La adquisición de activos en épocas de altas tasas inflacionarias juega un pa- pel determinante en el rendimiento de una inversión; algunas empresas con el obje- to de evitar o reducir los efectos de la inflación, suelen apresurar la adquisi- -- ción de sus activos y no toman en cuenta que pueden volverse obsoletos por ser ad- quiridos demasiado pronto y como consecuencia pueden aparecer otros mejores antes de que éstos sean utilizados.

La oportunidad de adquisición de los activos, no sólo es importante cuando existen fuertes cambios en los índices generales de precios; sino también, aún cuando es- -- tos cambios no son sustanciales.

En un periodo de altas tasas inflacionarias, es importante que las empresas - consideren la diferencia que existe entre los costos contables históricos y los -- costos actuales de reemplazamiento de sus activos, para que el rendimiento o produc- tividad de su inversión no se vea alterado.

Cabe señalar también, que no necesariamente los costos actuales de reemplazo de -- los activos tienen que ser más caros que antes; sino también pueden ser más bara- -- tos, si existe una tasa elevada de obsolescencia de mercados en esos activos.

Generalmente la utilidad neta obtenida de una inversión debe absorber el va- lor de reemplazo de sus activos; este valor se tiene que ajustar continuamente de acuerdo a los cambios existentes, de tal manera que el rendimiento sobre ésta, re- fle- je los nive- les re- ales de productividad.

Las consecuencias que se tienen por la inflación son similares cuando la deprecia- ción es calculada en base a los costos históricos de adquisición y no en base a -- los costos actuales de reemplazo.

Algunas empresas consideran a la depreciación como una fuente de recursos para re- poner la maquinaria gastada y otros bienes de capital, pero la inflación hace que la depreciación que se genera no aporte los recursos suficientes para reponer el - antiguo equipo.

Para llenar el faltante que no cubre la depreciación, estas empresas tienden a uti- lizar parte de las utilidades retenidas, originando que sus pagos de dividendos -- sean menos atractivos.

Al ser afectados los estados financieros por la inflación, también son afectadas las razones financieras y en consecuencia por la falta de comparabilidad entre estos estados, es necesario reexpresar la información financiera; actualizando los inventarios, el costo de ventas, los activos fijos, la depreciación de Estos y el capital contable, incorporando esta actualización en los estados financieros correspondientes.

### III.3.5.- La inflación y los créditos a largo plazo.

La mayoría de los créditos a largo plazo presentan un alto índice de riesgo, debido a las fluctuaciones de las tasas de interés.

Los niveles inesperados de alta inflación conducen a tasas inesperadas de alto interés y como consecuencia a una caída en el valor de estos créditos; tal es el caso de los precios de los bonos, que desciende según aumenten las tasas de interés. Los prestamistas de bonos pierden cuando la inflación se incrementa más allá de lo esperado; mientras que los prestatarios que tienen préstamos con intereses fijos ganan.

Es por ello que los prestamistas han asignado más fondos a los créditos a corto que a largo plazo y están promoviendo más los bonos con tasas de interés variable (es decir, con tasas que varíen según el nivel general de tasas de interés); todo esto, con el fin de protegerse contra tales pérdidas de capital.

### III.3.6.- La inflación y las inversiones estratégicas.

En épocas de altas tasas de inflación el dinero se devalúa con mucha rapidez, haciendo que las inversiones estratégicas de efectivo sean esenciales para el buen funcionamiento de una empresa.

Un sistema eficiente de administración de efectivo, no sólo localiza el efectivo ocioso; sino que además debe saber invertirlo adecuadamente para protegerlo de la inflación.

El dinero ocioso o dinero inmóvil de una empresa, debe ser invertido en forma eficiente para protegerlo de futuras contingencias, ya que de lo contrario además de que se devalúa rápidamente por la inflación, no se podría disponer de una reserva suficiente para cubrir los faltantes de efectivo futuros que vayan surgiendo.

Para solucionar este problema durante periodos de escasez de dinero, las empresas no deben atenerse a recibir préstamos bancarios; sino que deben buscar dónde invertir sus fondos tratando de obtener mayores rendimientos.

Actualmente, la mayoría de las empresas han dejado de invertir su dinero en bonos de la tesorería o en los bancos; ya que con el objeto de proteger su reserva contra la inflación, les resulta más conveniente invertirlo donde las tasas de rendimiento sean más atractivas y las inversiones sean de poco riesgo, es decir a corto plazo.

Entre ellas se pueden citar por ejemplo, los documentos comerciales, los certificados de depósito, los valores municipales e incluso algunas empresas están utilizando instrumentos extranjeros para invertir el dinero que necesitarán más rápidamente.

### III.7.- La inflación y los préstamos bancarios.

En períodos inflacionarios y escasez de créditos, las empresas pueden verse obligadas a solicitar préstamos bancarios para su financiamiento.

Un método eficaz de financiamiento a corto plazo durante estos períodos, son las aceptaciones bancarias.

Una aceptación bancaria, es un giro limitado por un individuo y aceptado por un -- banco; en el cual, el individuo le ordena al banco pagar una suma específica en un momento determinado.

El expedidor de la aceptación (el banco) gana tiempo antes de pagar la suma acordada y dado que la mayoría de estas aceptaciones casi siempre sirven para financiar el envío y el almacenamiento de bienes, entonces el mismo inventario puede ser utilizado como garantía; por lo que se puede decir que la mayoría de las aceptaciones bancarias son seguras.

En un período de precios inestables, una aceptación bancaria puede ser más segura que un documento comercial e incluso los rendimientos obtenidos pueden ser -- más atractivos que los que se obtienen de un buen certificado de depósito de algún banco.

Por último, es conveniente señalar que una aceptación bancaria tiene derecho a un redescuento en la Reserva Federal, cuando se extiende un recibo de almacenamiento de bienes que son fácilmente negociables, por el inventario que respalda la acep-tación.

### III.4.- El impacto de la inflación en los elementos de la evaluación.

Generalmente, en la evaluación de proyectos de inversión no se considera el efecto de la inflación; sin embargo, es otro elemento del medio de operación que influye radicalmente en las decisiones de inversión y financiamiento, por lo que es importante tomarlo en cuenta aunque muchas ocasiones confunde y distorsiona el panorama de la evaluación.

Los mercados financieros se alteran cuando existe inflación y como consecuencia se incrementan con frecuencia las tasas de interés. Los acreedores potenciales exigen más intereses por el uso de sus recursos para protegerse contra la disminución del poder adquisitivo de su dinero; de igual manera la Reserva Federal restringe el -- crédito, originando con esto una mayor incertidumbre en este tipo de negociacio---nes.



La inflación también aumenta la mayoría de los costos de los proyectos de inversión (materias primas, mano de obra, etc.), haciendo necesario considerar estos aumentos en el momento de proceder a la evaluación inicial, si se cree que habrán de alterar la atractividad de éstos. Este aumento en los costos, puede obligar a las empresas a elevar el precio de venta de sus productos, permitiendo que sus competidores puedan apoderarse de una mayor parte del mercado.

Por lo tanto, la inflación dificulta la evaluación de proyectos de inversión, por lo que es importante considerarla explícitamente en todo análisis económico.

III.4.1.- La inflación en los flujos de efectivo y en la incertidumbre que los afecta.

Un ambiente crónico inflacionario disminuye notablemente el poder de compra de la unidad monetaria, causando grandes divergencias entre los flujos de efectivo futuros reales y los esperados. Entre más grande sean estas divergencias, mayor será el riesgo involucrado en los flujos de efectivo.

Es muy importante que al estimar los flujos de efectivo de un proyecto, la inflación anticipada sea tomada en cuenta; ya que a menudo se supone (erróneamente) que los niveles de precios permanecerán constantes durante la vida de éste.

Si la inflación anticipada es considerada en el criterio de decisión utilizado en la evaluación, es importante que se refleje también en los flujos de efectivo.

Los flujos de efectivo de un proyecto de inversión son afectados por la inflación de diferentes formas:

a) La inflación afecta al costo o desembolso inicial de capital, puesto que éste considera el capital de trabajo necesario durante la vida de un proyecto (efectivo, cuentas por cobrar e inventarios); el cual puede modificarse radicalmente durante un período inflacionario.

b) Como las entradas y salidas que se efectúan durante la vida de un proyecto están formadas por la ganancia o pérdida neta, más intereses y depreciación; éstas también son fuertemente afectadas por la inflación.

c) La inflación puede modificar las fechas de ocurrencia esperadas de los flujos de efectivo de un proyecto, así como su fecha de terminación.

d) El precio de venta de un proyecto a su terminación o valor de desecho, también es afectado por la inflación reduciéndolo considerablemente o incluso anulándolo en su totalidad.

Es importante señalar que el efecto de la inflación anticipada sobre los flujos de efectivo, varía de acuerdo con la naturaleza de cada proyecto.

En algunos casos, los ingresos crecerán más rápidamente que los egresos a través de aumentos en los precios; en otros casos, se presentará la situación opuesta. De cualquier manera, es importante que sea tomada en cuenta independientemente de la relación anterior.

En el capítulo anterior, se explicó cómo se lleva a cabo el proceso de estimación de la densidad de probabilidad de los flujos de efectivo de un proyecto de inversión; pero esto se hizo suponiendo que los precios permanecerían constantes durante toda la vida de éste.

Sin embargo, cuando la inflación es considerada en los flujos de efectivo de un proyecto, éstos suelen incrementarse a la tasa de inflación existente, pero por otra parte, la probabilidad de ocurrencia de éstos puede disminuir; sobre todo si la vida del proyecto es larga.

Por lo tanto, se puede decir que la inflación además de afectar la densidad de los flujos de efectivo de un proyecto, afecta también a la posible divergencia que existe entre los flujos de efectivo futuros reales y los flujos de efectivo estimados afectados por la inflación.

#### III.4.2.- La inflación en el costo de capital.

En el capítulo anterior se definió el costo de capital, como el costo de los recursos que se utilizan para financiar un proyecto de inversión; por costumbre, este costo suele expresarse generalmente en términos de una tasa de interés anual.

El costo de capital generalmente está formado por una tasa libre de riesgo  $i$  y una prima de ajuste por el riesgo  $\phi$ .

La tasa libre de riesgo representa el rendimiento que exige el acreedor o inversionista a la empresa; o bien, la compensación por el uso de su dinero.

Mientras que la prima de ajuste por el riesgo, representa la compensación por el riesgo que implica prestar a la empresa o invertir en ella.

Es importante para las empresas conocer los mercados financieros donde pueden obtener los recursos necesarios para la realización de un proyecto de inversión, ya que de ello depende la magnitud del costo de capital involucrado.

Las perspectivas de inflación dan por resultado que las empresas aceleren su demanda de capital, lo que a su vez hace que los proveedores sean más selectivos en sus préstamos, exigiendo mayor rendimiento; la combinación de estos factores puede contribuir a elevar el costo de capital de una empresa.

En varias ocasiones los proyectos de inversión son puestos en marcha antes de lo previsto, debido a la expectativa de una tasa de inflación mayor que la esperada; ya que como el dinero se mide a través de su poder adquisitivo (lo que se puede comprar con él), entonces cuando existe inflación el dinero vale menos. Por lo que en esta situación, todo lo que adeuda una empresa tiene menor poder adquisitivo, incluyendo el costo de capital; puesto que le permite pagar capital e intereses con dinero más barato y que además es más fácil de ganar.

Por otra parte cuando esto sucede, los proveedores de capital tratan de obtener el mayor rendimiento posible, mediante aumentos en las tasas de interés de los préstamos pactados; con el objeto de compensar la pérdida esperada en el poder adquisitivo durante los períodos inflacionarios.

Ante esta situación, las empresas deben ser muy cautelosas tanto en las estimaciones de las futuras tasas de inflación, como en la elección del personal adecuado para la determinación del costo de capital pactado entre una empresa y sus proveedores.

Cuando una empresa maneja eficientemente esta situación, es posible que pueda obtener un ahorro considerable en el costo de capital utilizado en la evaluación, que se verá reflejado en una mayor rentabilidad de su proyecto.

Por lo tanto, resulta de suma importancia considerar el efecto de la inflación en el costo de capital utilizado en la evaluación de proyectos de inversión.

Es por ello que la tasa libre de riesgo, generalmente está formada por una tasa real de interés o tasa básica de crecimiento de la economía y una prima inflacionaria que refleja la tasa de inflación proyectada a largo plazo. De esta manera se incluye en el costo de capital de un proyecto el efecto de la inflación, puesto que al haber fluctuaciones o cambios inesperados en la tasa de inflación, éstos se verán reflejados en el costo de capital.

Es claro que los costos de capital utilizados en la evaluación de proyectos - cuya vida esperada es larga, serán los más afectados por la inflación; ya que estarán sujetos a una serie de posibles cambios inesperados de la tasa inflacionaria. Es conveniente recalcar la importancia que tiene el cálculo y la actualización del costo de capital, sobre todo en un período inflacionario; puesto que éste será utilizado como tasa de descuento en la evaluación de proyectos de inversión, tanto en condiciones de certeza como en condiciones de riesgo.

Es de esperarse que los flujos de efectivo de un proyecto crezcan conforme se incrementa la tasa inflacionaria; o en otras palabras, los flujos de efectivo crecen conforme a una cierta tasa de inflación.

Si el costo de capital no fuera afectado por la inflación, esto sería magnífico para las empresas puesto que estarían utilizando como tasa de descuento en la evaluación una tasa de interés fija; sin embargo, esto nunca sucede en la práctica ya que los proveedores de capital de éstas siempre perderían.

El caso contrario tampoco se presenta, ya que si el costo de capital se incrementa a una cierta tasa de inflación y los flujos de efectivo permanecen constantes durante la vida de un proyecto, entonces la atractividad de éste se verá fuertemente afectada y por consiguiente casi todos los proyectos serían rechazados en la evaluación.

Lo que sucede realmente, es que tanto los flujos de efectivo como el costo de capital ambos se incrementan conforme aumenta la tasa inflacionaria.

Ante esta situación, es importante elaborar estimaciones precisas de las tasas de inflación aplicables tanto a los flujos de efectivo como al costo de capital; ya que la atractividad de un proyecto dependerá de las proporciones de incremento causadas por estas tasas.

Generalmente las empresas mantienen un cierto equilibrio entre la tasa de rendimicnto de su proyecto y el costo de capital del mismo.

En conclusión se puede decir que los tres elementos esenciales en la evaluación de proyectos de inversión son afectados por la inflación; algunos más que otros, pero de cualquier forma el impacto de la inflación en éstos, es sustancial y de consideración.

III.5.- El efecto de la inflación en los criterios económicos de evaluación bajo certeza.

Se ha visto que la inflación afecta tanto a los flujos de efectivo de un proyecto como a su costo de capital. Cuando existe inflación, los flujos de efectivo futuros no tendrán el mismo poder adquisitivo del año cero de la inversión. Partiendo de este hecho y considerando principalmente que la inflación también afecta al costo de capital de un proyecto, es posible hacer dos análisis distintos para el estudio de los criterios de decisión utilizados en la evaluación de proyectos de inversión en condiciones de certidumbre con inflación:

a) Cuando el costo de capital utilizado en la evaluación es libre de inflación y en consecuencia es necesario considerar una tasa anticipada promedio ponderada de inflación para deflactar los flujos de efectivo y de esta manera compensar el hecho de no considerarla en el costo de capital.

En este caso:

$$k = i + \psi$$

en donde:

$i$  : es la tasa libre de riesgo y de inflación.

$\psi$  : es la compensación por el riesgo.

$k$  : es el costo de capital sin inflación.

Se denotará por  $i^*$  a la tasa anticipada promedio ponderada de inflación durante la vida de un proyecto.

b) Cuando se incluye en el costo de capital una prima inflacionaria que forma parte de la tasa libre de riesgo y en consecuencia ya no es necesario deflactar los flujos de efectivo, puesto que hacerlo, sería tanto como considerar a la inflación dos veces.

En este caso:

Se denotará por  $k^*$  al costo de capital que incluye el efecto de la inflación mediante una prima inflacionaria:

ie.  $k^* = i + \psi$

en donde:

$i$  : es la tasa libre de riesgo que está formada por una tasa real de interés y una prima inflacionaria que refleja la tasa de inflación proyectada a largo plazo durante la vida de un proyecto.

$\psi$  : es la compensación por el riesgo.

### III.5.1.- Criterio del Valor Actual Neto (VAN) con inflación.

a) Sin considerar el efecto de la inflación en el costo de capital.

El valor actual neto de un proyecto de inversión en condiciones de certeza se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$VAN = \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+k)^t} - I$$

Suponiendo que el valor de rescate es cero.

Cabe señalar que esta expresión únicamente es válida cuando no existe inflación; - ya que cuando esta es considerada en la evaluación, la fórmula para el cálculo del VAN de un proyecto no es la misma, puesto que al tomar en cuenta el efecto de la inflación, los flujos de efectivo futuros serán distintos a los flujos de efectivo - futuros sin considerar el efecto de la misma.

ie.

Si  $F'_t$  : representa el flujo de efectivo neto del periodo  $t$  considerando el efecto de la inflación y

$F_t$  : representa el flujo de efectivo neto del periodo  $t$  sin considerar el efecto de la inflación.

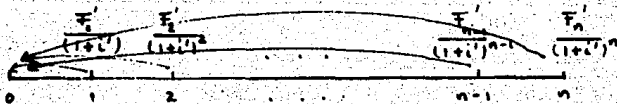
entonces:

$$F'_t > F_t \quad \forall t \in \overline{1, n}$$

Va que en épocas inflacionarias los flujos de efectivo de un proyecto, se incrementan de acuerdo a la tasa de inflación prevaleciente en el mercado.

Por lo que en este caso, antes de calcular el VAN de un proyecto será necesario de flactar los flujos de efectivo, utilizando la tasa anticipada promedio ponderada - de inflación  $i$ .

ie.



Por lo tanto, la ecuación para obtener el VAN de un proyecto considerando el efecto de la inflación ( $VAN'$ ), es la siguiente:

$$= \sum_{t=1}^n \frac{F'_t / (1+i)^t}{(1+k)^t} - I$$

$$= \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{\{(1+i')(1+k)\}^t} - I$$

En donde:

$VAN'$  : es el VAN de un proyecto bajo el efecto de la inflación.

$F'_t$  : es el flujo de efectivo neto en el periodo  $t$  con inflación.

$i'$  : es la tasa anticipada promedio ponderada de inflación durante la vida del proyecto.

$k$  : es el costo de capital libre de inflación.

Obsévese que esta última ecuación corrige el poder adquisitivo de los flujos de efectivo; además cuando no existe inflación ( $i' = 0$ ), la ecuación anterior se transforma en la ecuación que se utiliza para obtener el VAN de un proyecto sin -- considerar el efecto de la inflación.

La regla de aceptación o de rechazo cuando se utiliza este criterio en la evaluación de un proyecto de inversión sigue siendo la misma.

#### Efecto Fisher.

Este efecto es muy utilizado para considerar el efecto de la inflación en el costo de capital de un proyecto.

En términos formales, el efecto Fisher es expresado de la siguiente manera:

Si  $T$  es el costo de capital que refleja la tasa anticipada de inflación, entonces  $T$  es tal que:

$$\begin{aligned} 1 + T &= (1 + k)(1 + i') \\ &= 1 + i' + k + ki' \\ &= 1 + i' + k + ki - 1 = i' + k + ki' \end{aligned}$$

Entonces, cuando el efecto Fisher es utilizado en el cálculo del VAN de un proyecto de inversión se tiene lo siguiente:

$$VAN' = \sum_{t=1}^n \frac{F'_t}{(1+T)^t} - I$$

b) Cálculo del VAN considerando el efecto de la inflación en el costo de capital.

Como en este caso el costo de capital considera el efecto de la inflación, entonces ya no es necesario deflactar los flujos de efectivo.

Por lo tanto, para calcular el VAN de un proyecto de inversión bajo estas condiciones, se hará de la siguiente manera:

$$VAN' = \sum_{t=1}^n \frac{F'_t}{(1+k')^t} - I$$

En donde ahora,  $k^*$  es el costo de capital del proyecto que refleja además la tasa inflacionaria prevalectiente durante la vida de éste.

Obsérvese que cuando no existe inflación, entonces la prima inflacionaria que forma parte de la tasa libre de riesgo es cero y por consiguiente, se tiene exactamente el mismo criterio cuando el efecto de la inflación no es considerado en la evaluación.

### III.5.2.- Criterio de la Tasa Interna de Rendimiento (TIR) con inflación.

a) Sin considerar el efecto de la inflación en el costo de capital.

La tasa interna de rendimiento  $r$  de un proyecto de inversión, es aquella tasa de interés que iguala a cero su VAN.

ie.  $r$  es tal que:

$$VAN = \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+r)^t} - I = 0$$

o en forma equivalente:

$$r \rightarrow \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+r)^t} = I$$

Pero cuando el efecto de la inflación es considerado en la evaluación, el cálculo de la TIR se modifica:

Ahora  $r^*$  será la TIR con inflación que satisfaga la siguiente ecuación:

$$\sum_{t=1}^n \frac{F'_t / (1+i)^t}{(1+r^*)^t} - I = 0$$

Como en este caso la regla de aceptación o de rechazo depende de la relación que exista entre el costo de capital y la TIR ( $r^*$ ): y dado que el costo de capital es libre de inflación, entonces es necesario que la TIR absorba el efecto de ésta, para compensar el hecho de no considerarla en el costo de capital.

De esta manera,  $r^*$  será la TIR de un proyecto bajo el efecto de la inflación.

Si  $r^* > k$  entonces se acepta el proyecto.

Si  $r^* < k$  entonces no se acepta el proyecto.

Si  $r^* = k$  la decisión es subjetiva o indiferente.

Una forma sencilla para determinar el número de tasas internas de rendimiento de un proyecto de inversión, es la regla de los signos de Descartes.\*

\* Consúltese el apéndice en Tasa Interna de Rendimiento.



b) Cálculo de la TIR considerando el efecto de la inflación en el costo de capital.

Como en este caso ya no es necesario deflactar los flujos de efectivo, entonces la TIR, será aquella tasa de interés  $r'$  que satisfaga la siguiente ecuación:

$$\sum_{t=1}^n \frac{F_t'}{(1+r')^t} - I = 0$$

La regla de aceptación o de rechazo, dependerá de la relación que exista entre  $r'$  y el costo de capital bajo el efecto inflacionario  $k'$ .

Por lo tanto se tendrá lo siguiente:

Si  $r' > k'$  entonces se acepta el proyecto.

Si  $r' < k'$  entonces no se acepta el proyecto.

Si  $r' = k'$  la decisión es subjetiva o indiferente.

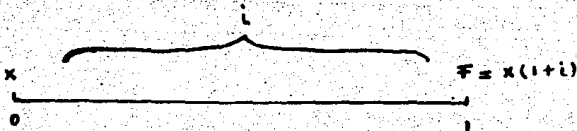
### III.5.3.- Caso especial de la TIR para inversiones de un período con inflación.

En varias ocasiones, surge la necesidad de invertir cierta cantidad de capital en inversiones cuyas vidas estimadas no sean mayores de un período determinado de tiempo, es decir, en inversiones a corto plazo.

En la actualidad este tipo de inversiones suelen utilizarse con frecuencia, debido al riesgo que presentan las inversiones a largo plazo por las fluctuaciones de las tasas de interés, causadas por los cambios en las tasas de inflación.

Con el objeto de encontrar una expresión para la TIR de este tipo de inversiones bajo el efecto de la inflación, considérese el siguiente análisis:

Supóngase que se invierte  $X$  cantidad de capital a una tasa de interés ( $i$ ), durante un cierto período de tiempo (un año, un semestre, un trimestre, un mes, etc); entonces al final del período de la inversión, se tendrá una cantidad  $F = X(1+i)$ , es decir un flujo de efectivo.



Si no existe inflación y la tasa de interés  $i$  es tal que:

$$\frac{F}{(1+i)} = X \Leftrightarrow \frac{F}{(1+i)} - X = 0 \Rightarrow i = r$$

donde  $r$  es la TIR de la inversión.

Es decir, si la tasa de interés es tal que el valor presente del flujo de efectivo de la inversión es igual a la inversión original, entonces la tasa de interés de la inversión, es también la TIR de la misma.

Por otra parte, si existe una tasa de inflación  $i' > 0$ , entonces antes de traer a valor presente el flujo de efectivo, es necesario deflactarlo y la TIR de la inversión, será aquella tasa de interés  $r'$  que satisfaga la siguiente ecuación:

$$\frac{F}{(1+i')} = X \Leftrightarrow \frac{F}{(1+i')(1+r')} = X$$

$$\Leftrightarrow X(1+r') = \frac{F}{(1+i')} \Leftrightarrow X(1+r') = \frac{X(1+i)}{(1+i')}$$

$$\therefore r' = \frac{X(1+i)}{X(1+i')} - 1 = \frac{1+i}{1+i'} - 1$$

Si  $X = \neq 1$ , entonces:

$$(1+r') = \frac{(1+i)}{(1+i')} \Rightarrow (1+r')(1+i') = 1+i$$

$$\Rightarrow 1+i'+r'+r'i' = 1+i$$

$$r'(1+i') = i - i'$$

$$\Rightarrow r' = \frac{i - i' - r'i'}{1+i'} \dots \textcircled{1}$$

$$r' = \frac{i - i'}{1+i'} \dots \textcircled{2}$$

Obsérvese que la tasa de interés  $i$ , se puede ver como la tasa de rendimiento si consideramos el efecto de la inflación, puesto que fue la tasa a la que se invirtió la cantidad  $X$ .

Mientras que  $r'$  se puede considerar como la tasa de rendimiento real o verdadera de la inversión.

Es conveniente señalar que cuando las tasas de interés y de inflación son ambas muy pequeñas, entonces para el cálculo de la verdadera TIR de una inversión sue le utilizarse la siguiente aproximación:

$$r^* = i - i^*$$

### III.5.4.- Caso más complejo de evaluación con inflación.

Cuando la inflación anticipada se refleja adecuadamente en las estimaciones de los flujos de efectivo y en el costo de capital de un proyecto, entonces la estimación de su VAN se verá libre de influencias inflacionarias; esto sucede -- cuando la tasa de inflación aplicable a los flujos de efectivo, coincide con la tasa anticipada de inflación que se verá reflejada en el costo de capital del -- mismo.

Sin embargo, es de esperarse que esta situación nunca sucede en la práctica; ya que la inflación anticipada no necesariamente tiene porque afectar de igual mane ra a las estimaciones de los flujos de efectivo que al costo de capital de un -- proyecto.

El caso más complejo de evaluación se presenta cuando los componentes relativos a los flujos netos de efectivo (flujos de entrada y salida de efectivo), son a--fectados por la inflación en diferente magnitud; es decir a diferentes tasas de inflación, que pueden diferir de la tasa inflacionaria aplicable al costo de ca--pital.

Por lo que en estas condiciones, se tendrían tres posibles estimaciones de las -- tasas de inflación:

$i^*$  : es la tasa de inflación que se verá reflejada en el costo de capi--tal del proyecto.

$j^*$  : es la tasa de inflación que afecta a los flujos de entrada de efec--tivo.

$l^*$  : es la tasa de inflación que afecta a los flujos de salida de efec--tivo.

Por lo tanto, el VAN de un proyecto de inversión bajo estas condiciones, se cal--cula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} VAN^* &= \sum_{t=1}^n \frac{f_{e_t} (1+j^*)^t - f_{s_t} (1+l^*)^t}{(1+i^*)^t (1+k)^t} \\ &= \sum_{t=1}^n \frac{f_{e_t} (1+j^*)^t - f_{s_t} (1+l^*)^t}{(1+r)^t} \end{aligned}$$

en donde:

$f e_t$  : es el flujo de entrada de efectivo en el periodo  $t$ .

$f s_t$  : es el flujo de salida de efectivo en el periodo  $t$ .

$k$  : es el costo de capital libre de inflación.

$T$  : es el costo de capital que refleja la tasa de inflación  $i^*$  mediante el efecto Fisher.

$I$  : Inversión inicial.

Finalmente, cabe señalar que cuando este criterio es utilizado en la evaluación de proyectos de inversión individual, la regla de aceptación o de rechazo no sufre ninguna modificación; es decir:

Si el  $VAN^*$   $> 0$  entonces el proyecto se acepta.

Si  $VAN^*$   $< 0$  entonces el proyecto no se acepta.

Si  $VAN^*$   $= 0$  la decisión es subjetiva o indiferente.

III.6.- El efecto de la inflación en los métodos de medición del riesgo.

Cuando se considera el efecto de la inflación en el proceso de estimación de los flujos de efectivo y sus probabilidades asociadas, se obtiene la densidad de probabilidad de los flujos de efectivo de un proyecto bajo el efecto de la inflación y a partir de ésta, se pueden obtener las medidas de tendencia central y de dispersión considerando el efecto inflacionario en la medición del riesgo.

El costo de capital utilizado en estos métodos de evaluación incluye implícitamente el efecto de la tasa inflacionaria, puesto que es lo que sucede generalmente en la práctica.

ie.

$k^*$  será la tasa de descuento o costo de capital bajo el efecto de la inflación.

Es por ello que para el estudio de los métodos de medición del riesgo con inflación, se hará un análisis similar al que se hizo cuando la inflación no era considerada en la evaluación, es decir:

Costo de capital con inflación ( $k^*$ ).	a) Sin considerar el riesgo de la inversión.	Método de la media y la desviación estándar con inflación.
		Método de la probabilidad de error en la aceptación con inflación.
	b) Considerando implícitamente una compensación por el riesgo de la inversión.	Método de la tasa de descuento ajustada al riesgo con inflación.
		Método de la tasa combinada con inflación.

III.6.1.- Métodos de evaluación cuando no se incluye el riesgo en el costo de capital con inflación.

Método de la media y la desviación estándar con inflación.

Cuando se considera el efecto de la inflación en el proceso de estimación de los flujos de efectivo y sus probabilidades asociadas de un proyecto de inversión, cuya vida esperada es de  $n$ -años y del cual se tienen  $m$ -estimaciones por año; se tiene la siguiente función de densidad de probabilidad de los flujos de efectivo:

	Flujo de efectivo (\\$)	Probabilidad asociada
		0,1
	$\hat{b}_{11}$	$\hat{p}_{11}$
	$\hat{b}_{12}$	$\hat{p}_{12}$
	.	.
Año 1	.	.
	$\hat{b}_{1m}$	$\hat{p}_{1m}$
	$\hat{b}_{21}$	$\hat{p}_{21}$
	$\hat{b}_{22}$	$\hat{p}_{22}$
	.	.
Año 2	.	.
	$\hat{b}_{2m}$	$\hat{p}_{2m}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
	$\hat{b}_{n1}$	$\hat{p}_{n1}$
	$\hat{b}_{n2}$	$\hat{p}_{n2}$
Año n	.	.
	.	.
	$\hat{b}_{nm}$	$\hat{p}_{nm}$

en donde:

$\hat{b}_{tj}$  : es la estimación del  $j$ -ésimo flujo de efectivo en el  $t$ -ésimo año de vida de un proyecto considerando el efecto de la inflación.  $\forall t \in \overline{1, n}$  ;  $\forall j \in \overline{1, m}$

$\hat{p}_{tj}$  : es la probabilidad asociada a  $\hat{b}_{tj}$ .

Es muy probable que se obtengan las siguientes relaciones de las densidades de probabilidad de los flujos de efectivo, cuando el efecto de la inflación es considerado en la estimación de la densidad y cuando no es considerado:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{b}_{tj} > b_{tj} \\ \hat{p}_{tj} \leq p_{tj} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall t \in \overline{1, n} \quad \forall \\ \forall j \in \overline{1, m} \end{array}$$

Al considerar el efecto de la inflación en las estimaciones de los flujos de efectivo y sus probabilidades asociadas, los flujos suelen incrementarse de acuerdo a la tasa de inflación existente; pero el mismo hecho de considerarla en las estimaciones, puede reducir la probabilidad de ocurrencia de estos resultados.

Obsérvese que cuando no existe inflación, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{b}_{tj} = b_{tj} \\ \hat{p}_{tj} = p_{tj} \end{array} \right\} \forall t \in \overline{1, n} \quad \forall j \in \overline{1, m}$$

Por lo tanto, para obtener la media o valor actual neto esperado con inflación - ( $\overline{VAN}$ ) de un proyecto de inversión cuya vida esperada es de  $n$ -años y del cual se tienen  $m$ -estimaciones por año de los flujos de efectivo esperados, es necesario utilizar la siguiente fórmula:

$$VAN' = \bar{x}' = \sum_{t=1}^n \frac{\bar{F}'_t}{(1+k')^t} - I$$

en donde:

$\bar{F}'_t$ : es el flujo de efectivo promedio esperado bajo el efecto de la inflación en el período  $t$

$k'$ : es el costo de capital bajo el efecto de la inflación y libre de riesgo.

$I$ : es la inversión inicial.

El flujo de efectivo promedio esperado bajo el efecto de la inflación  $\bar{F}'_t$  se calcula de la siguiente manera:

$$\bar{F}'_t = \sum_{j=1}^m f'_{tj} p'_{tj} \quad \forall t \in \overline{1, n}$$

Para obtener la desviación estándar global de un proyecto bajo el efecto de la inflación, es necesario utilizar la siguiente fórmula:

$$S = \sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{(s'_t)^2}{(1+k')^{2t}}}$$

en donde:

$s'_t$ : es la desviación estándar bajo el efecto de la inflación en el período  $t$

la cual se calcula de la siguiente forma:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{t=1}^n (f'_t - \bar{F}'_t)^2 P'_t} \quad \forall t \in \overline{1, n}$$

Es importante señalar que aunque este método considera el efecto de la inflación, únicamente proporciona información del riesgo medido por la desviación estándar y del beneficio de un proyecto los cuales están sujetos a interpretación.

Método de la probabilidad de error en la aceptación con inflación.

Para obtener la probabilidad de error en la aceptación  $\beta$  de un proyecto de inversión, en el cual no se considera el efecto de la inflación, es necesario utilizar la siguiente ecuación:

$$\beta = P_r (\overline{VAN} < 0) = \int_{-\infty}^{\beta} N(0,1) \quad \text{donde } \beta = -\frac{\bar{x}}{s}$$

Suponiendo que los valores actuales netos esperados se distribuyen normalmente.

Por lo tanto, para obtener la probabilidad de error en la aceptación bajo el efecto de la inflación ( $\beta'$ ) de un proyecto de inversión, la ecuación anterior se transforma en la siguiente:

$$\beta' = P_r (\overline{VAN}' < 0) = \int_{-\infty}^{\beta'} N(0,1) \quad \text{donde } \beta' = -\frac{\bar{x}'}{s'}$$

en donde:

$\bar{x}'$ : es el valor actual neto esperado con inflación de un proyecto.

$s'$ : es la desviación estándar global bajo el efecto de la inflación.

Es conveniente señalar que este método al igual que el anterior, proporciona información que también está sujeta a una interpretación subjetiva de quienes toman la decisión final.

### III.6.2.- Métodos de evaluación cuando se incluye implícitamente el riesgo en el costo de capital con inflación.

Método de la tasa de descuento ajustada al riesgo con inflación.

Este método consiste en calcular el valor actual neto esperado con inflación ( $\overline{VAN}'$ ) de un proyecto, utilizando como costo de capital una tasa de descuento que incluya un factor adicional por el riesgo de la inversión.

ie.

$$\overline{VAN}' = \sum_{t=1}^n \frac{\bar{F}'_t}{(1+k')^t} - I$$

en donde:

$\overline{VAN}'$ : es el valor actual neto esperado ajustado al riesgo con inflación.



$F'_t$  : es el flujo de efectivo promedio esperado bajo el efecto de la inflación en el período  $t$ .

$k^*$  : es el costo de capital ajustado al riesgo con inflación, que está formado de la siguiente manera:

$$k^* = i + \psi$$

en donde:

$i$  : es la tasa libre de riesgo que refleja la inflación mediante una prima inflacionaria estimada durante la vida del proyecto.

$\psi$  : es la compensación por el riesgo de la inversión.

Nótese que al considerar a la inflación en el proceso de estimación de la densidad de probabilidad de los flujos de efectivo, tanto de una empresa como de su proyecto, también  $\psi$  es afectada por la inflación, ya que:

$$\psi = \frac{\text{Coeficiente de variación del proyecto}}{\text{Coeficiente de variación de la empresa}} \psi_{emp}$$

Obsérvese que el costo de capital utilizado en este método, es distinto al costo de capital utilizado en los dos métodos anteriores.

Cuando este método es utilizado en la evaluación de proyectos de inversión, la regla de aceptación o de rechazo sigue siendo la misma, es decir:

Si el  $\overline{VAN}^* > 0$  entonces se acepta el proyecto.

si  $\overline{VAN}^* < 0$  entonces no se acepta el proyecto.

si  $\overline{VAN}^* = 0$  la decisión es subjetiva o indiferente.

A diferencia de los dos métodos anteriores, este método proporciona una cifra única en la cual se basa la decisión de aceptar o rechazar un proyecto de inversión.

#### Método de la tasa combinada con inflación.

Cuando la técnica general de la tasa de descuento ajustada al riesgo con inflación se aplica al criterio de la TIR, entonces se obtiene el método de la tasa combinada con inflación.

Ahora  $k^*$  será la tasa combinada con inflación que debe ser superada por la TIR ( $r^*$ ), para que la empresa acepte el proyecto.

En donde  $r^*$  es tal que:

$$\overline{VAN}^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{t=1}^n \frac{\overline{F}'_t}{(1+r^*)^t} - I = 0$$

El costo de capital  $k^*$  utilizado en la comparación, es el mismo que se utilizó en el método anterior.

Obsérvese que este método al igual que el anterior, proporciona un criterio en el cual se basa la decisión de aceptar o rechazar un proyecto, mediante la comparación de la tasa combinada con inflación  $k^*$  y la tasa interna de rendimiento  $r^*$  que también considera el efecto de ésta.

Es conveniente hacer notar que estos dos últimos métodos, tienen exactamente las mismas ventajas que se señalaron en el capítulo anterior con respecto a los dos métodos anteriores.

### III.7.- Conclusiones al capítulo.

La inflación es el principal problema político, social y económico al que en nuestros días se enfrentan casi todos los países del mundo. La producción e incluso el orden social se desorganizan, provocando que la riqueza de grandes grupos de población desaparezca.

Considerando al aumento del circulante monetario como la principal causa de la inflación, una de las medidas más adecuadas para controlarla, es la reducción del déficit del sector público, haciendo crecer la cantidad de dinero a una velocidad menor.

Gastar menos de lo que se tiene, reducir el gasto público, controlar el dinero y el crédito a través del gobierno y el Sistema de la Reserva Federal para mejorar el equilibrio entre el ahorro y el gasto de inversión; son algunas de las estrategias económicas encaminadas para controlar y eliminar a largo plazo este fenómeno económico.

La evaluación de proyectos de inversión en épocas de altas tasas inflacionarias no es fácil de realizar, debido a la dificultad que se presenta cuando se realizan las estimaciones de las futuras tasas de inflación que deben ser consideradas en la evaluación.

Aunque existen dos tipos diferentes de inflación, es importante señalar que la inflación diferencial o reprimida es la que se presenta en la realidad.

En la actualidad resulta de suma importancia, considerar el efecto de la inflación en cualquier estudio económico, ya que la mayoría de las inversiones son fuertemente castigadas por ésta y se puede decir que casi no existen inversiones inmunes al efecto nocivo de la inflación.

En el capítulo anterior, se analizó el riesgo inherente a cada proyecto de inversión considerado individualmente; mientras que en este capítulo se analizó el efecto inflacionario en la evaluación de proyectos de inversión en forma individual.

De donde se puede concluir que la mayoría de las inversiones están sujetas a dos tipos diferentes de riesgo:

- a) El riesgo inherente al proyecto.
- b) El riesgo causado por el efecto de la inflación.

El hecho de no considerar a la inflación en los estudios económicos, presenta la dificultad de predecir o estimar los niveles generales de precios que prevalecerán en el futuro correspondiente a la duración del estudio. En este caso, se pueden hacer estimaciones optimistas, pesimistas y más probables de la tasa anticipada de inflación que deberá ser utilizada en la evaluación, como una tasa constante durante la vida de un proyecto de inversión.

Es muy importante considerar el efecto de la inflación en los elementos de la evaluación de proyectos de inversión, ya que éstos sufren cambios sustanciales --- cuando las tasas de inflación son muy altas. Debido a esto, la inflación puede modificar la decisión de aceptar o de rechazar un proyecto; es decir, proyectos que eran rechazados en condiciones normales, son aceptados considerando el efecto de la inflación, y viceversa.

Por lo que es importante que en épocas inflacionarias, las empresas mantengan un equilibrio en cuanto a los incrementos en el costo de capital y en la tasa de rendimiento de los proyectos emprendidos.

Para protegerse de posibles contingencias, que pudieran surgir en períodos inflacionarios, la mayoría de las empresas se sujetan a ciertas normas, como por ejemplo:

- a) Incrementan los precios de venta de sus productos a una tasa mayor que la inflacionaria.
- b) Incrementan sus tasas de rendimiento esperadas.
- c) Incrementan sus inversiones en activos no depreciables.

C A P I T U L O    I V

C A S O   P R A C T I C O

A manera de ilustración, se desarrollará un ejemplo de aplicación de los capítulos anteriores; tomando en cuenta que cuando en la práctica los flujos de efectivo de un proyecto son considerados como v.a., entonces generalmente éstas -- suelen ser discretas.

Entre las distribuciones discretas de uso más frecuente se puede citar a la distribución Binomial; la cual servirá de base para el desarrollo del siguiente caso práctico:

Si  $X$  v.a. representa el número de ocurrencias de un suceso en  $n$ -pruebas independientes y  $p$  la probabilidad de ocurrencia del suceso, entonces la función de densidad de probabilidad de esta v.a. es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

ie.  $X \sim \text{Bin}(n, p)$

en donde:

$n$  : es el parámetro discreto de la distribución ya que sólo puede tomar valores entre 1 y  $n$ .

$p$  : es el parámetro continuo ya que  $p \in [0, 1]$ .

En este caso:

$$\left. \begin{aligned} E(X) &= np \\ \text{Var}(X) &= npq \quad \text{con } q = 1-p \\ \text{Modo de } x &= [(n+1)p] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots *$$

Supóngase que en un horizonte de planeación de cuatro años, se tiene la siguiente información del comportamiento de los flujos de efectivo de los proyectos de inversión A y B:

	Proyecto	A
$F_1 = 1000 + 100X_1$	donde	$X_1 \sim \text{Bin}(15, .75)$
$F_2 = 1000 + 100X_2$	donde	$X_2 \sim \text{Bin}(15, .60)$
$F_3 = 900 + 100X_3$	donde	$X_3 \sim \text{Bin}(15, .84)$
$F_4 = 850 + 100X_4$	donde	$X_4 \sim \text{Bin}(15, .70)$

\* Consúltase el libro *Introducción a la Teoría de la Estadística* de Alexander M. Mood y Franklin A. Graybill.

Además, supóngase que  $X_i$  es independiente de  $X_j$   $\forall i, j \in \overline{1,4}$   $i \neq j$ .

Obsérvese que en este caso, se tienen 15 estimaciones por año de los flujos de efectivo, los cuales pueden tomar valores entre \$ 850 y \$ 2500.

	Proyecto	B		
$F_1 = 1500 + 200Y_1$	donde	$Y_1 \sim \text{Bin}(10, .50)$		
$F_2 = 1750 + 150Y_2$	donde	$Y_2 \sim \text{Bin}(10, .67)$		
$F_3 = 1300 + 100Y_3$	donde	$Y_3 \sim \text{Bin}(10, .35)$		
$F_4 = 1400 + 100Y_4$	donde	$Y_4 \sim \text{Bin}(10, .45)$		

$Y_i$  es independiente de  $Y_j$   $\forall i, j \in \overline{1,4}$  con  $i \neq j$ .

En este caso se tienen 10 estimaciones por año de los flujos de efectivo, los cuales pueden tomar valores entre \$ 1300 y \$ 3500.

Medidas de tendencia central.

Para obtener las medias de los flujos de efectivo de ambos proyectos, se utilizará que  $E(X) = np$  si  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ .

Es decir en el caso del proyecto A, la media de su primer flujo se calculará como:

$$\begin{aligned} E(F_1) &= E\{1000 + 100 X_1\} = 1000 + 100 E(X_1) \\ &= 1000 + 100(15 \times .75) = 2125 \end{aligned}$$

Las modas de los flujos de efectivo, se obtienen utilizando que el valor modal o moda de  $x = [(n+1)p]$  si  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ .

De esta manera el valor modal del primer flujo de efectivo del proyecto A, se calcula como:

$$\begin{aligned} 1000 + 100 \left[ (15+1) \cdot 75 \right] &= 1000 + 100(12) \\ &= 1000 + 1200 = 2200 \end{aligned}$$

Para obtener las medianas de cada uno de los flujos de efectivo, primero se calculan todos los posibles valores de cada uno de éstos; se ordenan de manera creciente y el valor que divida a la mitad al conjunto, será la mediana de ese conjunto - de resultados (flujos de efectivo).

De esta manera se obtienen las siguientes medidas de tendencia central de los flujos de efectivo de los proyectos A y B.

Proyecto A

	Medias	Modas	Medianas
Flujo 1	2125	2200	1750
Flujo 2	1900	1900	1750
Flujo 3	2260	2200	1650
Flujo 4	2050	1950	1600

Proyecto B

	Medias	Modas	Medianas
Flujo 1	2500	2500	2500
Flujo 2	2755	2800	2500
Flujo 3	1650	1600	1800
Flujo 4	1850	1800	1900

Medidas de dispersión.

Para obtener las varianzas de los flujos de efectivo de ambos proyectos, se utilizará que la  $Var(X) = npq$  con  $q = 1 - p$  si  $X \sim Bin(n, p)$ .

Es decir en el caso del proyecto A, la varianza de su primer flujo se calculará como:

$$\begin{aligned} Var(F_1) &= Var\{1000 + 100 X_1\} = Var(100 X_1) \\ &= 100^2 Var(X_1) = 100^2 (15 \times 0.75 \times 0.25) = 28125 \end{aligned}$$

Una vez obtenidas las varianzas de todos los flujos, las desviaciones estándar se obtienen sacando raíz cuadrada positiva a cada una de estas.

De esta manera la desviación estándar del primer flujo de efectivo del proyecto A es:

$$\sigma(F_1) = \sqrt{28125} = 167.70509$$

Para obtener el coeficiente de variación de cada flujo de efectivo, se divide la desviación estándar de cada flujo entre su respectiva media.

De esta forma se obtienen las siguientes medidas de dispersión de los flujos de efectivo de los proyectos A y B:

Proyecto A			
	Varianzas	Desviaciones estándar	Coefficientes de variación
Flujo 1	28125	167.70509	0.07892
Flujo 2	36000	189.73665	0.09986
Flujo 3	20160	141.98591	0.06282
Flujo 4	31500	177.48239	0.08657

Proyecto B			
	Varianzas	Desviaciones estándar	Coefficientes de variación.
Flujo 1	100000	316.22776	0.12649
Flujo 2	49747.5	223.04147	0.08095
Flujo 3	22750	150.83103	0.09141
Flujo 4	24750	157.32132	0.08503

Para ilustrar como se emplean los criterios del VAN y la TIR en condiciones de --certeza en los flujos de efectivo; supóngase que las únicas estimaciones que se --tienen de los flujos de efectivo en cada año de vida de los proyectos A y B, coñ --ciden con sus respectivas medias.

Es decir, que los flujos de efectivo esperados de los proyectos A y B son los si--guientes:

Proyecto A	Proyecto B
$F_1 = 2125$	$F_1 = 2500$
$F_2 = 1900$	$F_2 = 2755$
$F_3 = 2260$	$F_3 = 1650$
$F_4 = 2050$	$F_4 = 1850$

Supóngase también que el costo de capital para los dos proyectos, es constante du--rante toda la vida útil de ambos e igual al 10% y que el valor de rescate de ambos, es cero, o bien ya fue considerado en los últimos flujos.

Si los costos iniciales de los proyectos A y B son de \$ 6300 y \$ 6500 respectiva--mente, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{VAN}_A &= 6600.2151 - 6300 & \text{VAN}_B &= 7052.831 - 6500 \\ &= 300.2151 & &= 552.831 \end{aligned}$$

Para obtener la TIR de los proyectos A y B, lo que se hace es encontrar las raíces reales positivas de un polinomio de cuarto grado, haciendo  $X = 1 / (1+r)$ ; de esta manera la TIR del proyecto A será aquella tasa de interés  $r_A$  tal que:



$$2125x + 1980x^2 + 2260x^3 + 2054x^4 - 6300 = 0$$

En este caso,  $x = .891457334$

entonces  $r_A = (0.891457334)^{-1} - 1 = 0.1217587$

Por lo tanto, la TIR del proyecto A es aproximadamente del 12%.

Andlogamente, la TIR del proyecto B ( $r_B$ ) es aproximadamente del 14%.

Método de la media y la desviación estándar.

Como las medias de los proyectos A y B coinciden con las únicas estimaciones de los flujos de efectivo en el caso de certeza absoluta, entonces las medias globales de los proyectos, coinciden con sus valores actuales netos respectivos.

ie.  $\bar{X}_A = VAN_A = 300.2151$  y

$\bar{X}_B = VAN_B = 552.831$

Las desviaciones estándar globales, se calculan utilizando la siguiente fórmula:

$$S = \sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{(c_t)^2}{(1+r)^{2t}}}$$

De esta manera:

$S_A = \sqrt{73907.063} = 271.85853$  y

$S_B = \sqrt{141010.67} = 375.51388$

Los coeficientes de variación global son:

$V_A = \frac{S_A}{\bar{X}_A} = \frac{271.85853}{300.2151} = 0.9055468$

$V_B = \frac{S_B}{\bar{X}_B} = \frac{375.51388}{552.831} = 0.6792561$

Método de la probabilidad de error en la aceptación.

Como las  $X^i$ s son independientes entre sí, entonces se aplicará el Teorema -- del Límite Central (TLC).\*

\* Consúltese el apéndice en Teorema Central del Límite.

$$P_A = P_r (VAN_A < 0) = P_r \left\{ \frac{VAN_A - \bar{x}_A}{\sqrt{s_A^2}} < \frac{-\bar{x}_A}{\sqrt{s_A^2}} \right\} = P_r \left\{ Z < \frac{-\bar{x}_A}{s_A} \right\}$$

donde  $Z \sim N(0,1)$

$$\therefore P_A = \int_{-\infty}^{-\bar{x}_A/s_A} N(0,1) = \int_{-\infty}^{-1.1} N(0,1) = 0.13567$$

Análogamente:

$$P_B = \int_{-\infty}^{-\bar{x}_B/s_B} N(0,1) = \int_{-\infty}^{-1.47} N(0,1) = 0.07077$$

Puesto que también las  $V_j$  son independientes entre sí.

Método de la tasa de descuento ajustada al riesgo.

Este método consiste en ajustar el costo de capital de los proyectos mediante una prima de ajuste o prima de riesgo, que depende básicamente del riesgo de la empresa y del particular riesgo del proyecto.

Dado que se está suponiendo implícitamente que la misma empresa está en posibilidad de emprender ambos proyectos, entonces la magnitud de la prima de ajuste, dependerá de los coeficientes de variación de cada uno de ellos.

Como el coeficiente de variación del proyecto A es mayor que el del proyecto B, entonces se supondrá que los costos de capital ajustados al riesgo de los proyectos A y B son del 15% y 12% respectivamente.

Por lo tanto, este método consiste en calcular los valores actuales netos, utilizando como tasas de descuento, estas nuevas tasas ajustadas.

De esta manera, el VAN ajustado al riesgo del proyecto A es igual a:

$$5942.5799 - 6300 = - 357.42007$$

El VAN ajustado al riesgo del proyecto B es:

$$6778 - 6500 = 278.55781$$

Método de la tasa combinada.

El método de la tasa combinada, consiste en comparar las tasas internas de rendimiento de los proyectos A y B (ya obtenidas), con las nuevas tasas de descuento respectivas.

ie.

$r_A = 12\%$	contra	$k_A = 15\%$
$r_B = 14\%$	contra	$k_B = 12\%$

Resumiendo toda la información obtenida, se tiene lo siguiente:

Inicialmente, se puede pensar que se trata de un problema de selección entre dos proyectos, en el cual no se considera el riesgo de los mismos, puesto que únicamente se dispone de los flujos de efectivo esperados en cada año de vida de éstos.

Bajo estas circunstancias se obtuvo lo siguiente:

	VAN	k	TIR
Proyecto A	300	10%	12%
Proyecto B	552	10%	14%

**Conclusiones:**

Como el VAN de los dos proyectos es mayor que cero y además sus tasas de rendimiento son ambas superiores a su costo de capital; entonces, se puede decir que si la empresa está en posibilidad de emprender ambos proyectos, le resultaría lucrativo; sin embargo, si la empresa tiene que decidir entre uno u otro, entonces sería más conveniente invertir en el proyecto B que en el proyecto A, ya que de los dos, el proyecto B es el que tiene VAN mayor y una TIR superior a la del proyecto A.

Por otra parte, cuando se dispone de la información del riesgo que ofrece cada proyecto, se obtuvieron los siguientes resultados:

	Proyecto A					
	Medias	Modas	Medianas	Varianzas	Desviaciones estándar	Coefficientes de variación
Flujo 1	2125	2200	1750	28125	167	7%
Flujo 2	1900	1900	1750	36000	189	10%
Flujo 3	2260	2200	1650	20160	141	6%
Flujo 4	2050	1950	1600	31500	177	8%

	Proyecto B					
	Medias	Modas	Medianas	Varianzas	Desviaciones estándar	Coefficientes de variación
Flujo 1	2500	2500	2500	100000	316	12%
Flujo 2	2755	2800	2500	49747	223	8%
Flujo 3	1650	1600	1800	22750	150	9%
Flujo 4	1850	1800	1900	24750	157	8%

**Conclusiones:**

De entrada se puede observar que los posibles flujos de efectivo del proyecto B, pueden ser mayores que los del proyecto A; puesto que el B, puede tomar cualquier valor entre \$ 1300 y \$ 3500, mientras que el A únicamente puede tomar valo-

res entre \$ 850 y \$ 2500.

Si se compara el comportamiento de ambos proyectos año con año mediante su valor esperado o media y se utiliza como medida de riesgo al coeficiente de variación, se puede concluir lo siguiente:

En el primer año de vida útil de ambos, se espera que el proyecto B genere en promedio un rendimiento mayor que el proyecto A; sin embargo, dado que en este año el coeficiente de variación del proyecto A es casi la mitad del coeficiente de variación del proyecto B; entonces, en este año es más seguro el proyecto A que el B, puesto que ofrece un riesgo menor por cada peso de rendimiento esperado.

Siguiendo este mismo análisis, en el siguiente año es fácil observar que el proyecto B es mejor que el A, puesto que además de que su coeficiente de variación es menor, también se espera que genere un rendimiento promedio más alto que el proyecto A.

En el tercer año, sucede exactamente lo mismo que en el año anterior, a diferencia que en este año, el proyecto A es mejor que el proyecto B.

Y en el cuarto año, ambos proyectos ofrecen el mismo riesgo por cada peso de rendimiento esperado.

De los métodos de la media y la desviación estándar y de la probabilidad de error en la aceptación, se tiene que:

	Media Global	Desviación estándar global	C.V. Global	$\beta$	$h$
Proyecto A	300	271	90%	13.5%	10%
Proyecto B	552	375	67%	7%	10%

#### Conclusiones:

Como las medias globales de ambos proyectos son estrictamente mayores que cero, entonces se puede pensar que ambos proyectos son rentables; sin embargo, los dos proyectos son riesgosos puesto que sus coeficientes de variación son muy altos, siendo mayor el del proyecto A.

Por otra parte, aunque la probabilidad de error en la aceptación  $\beta$  de ambos se puede considerar pequeña, es mejor el proyecto B que el A; ya que la probabilidad de equivocarse del proyecto A, es casi el doble que la del B.

En otras palabras, si se tuviera que elegir entre el proyecto A o el B, sería más conveniente elegir el proyecto B; puesto que se espera que genere en promedio un rendimiento mayor, además de que ofrece menor riesgo por cada peso de rendimiento esperado y también, en caso de emprenderlo la probabilidad de equivocarse es considerablemente menor.

Nótese, que esto no quiere decir que el proyecto B necesariamente se debe aceptar o emprender; sino que simplemente es mejor que el proyecto A.

De los métodos de la tasa de descuento ajustada al riesgo y de la tasa combinada, se tiene que:

	VAN	k	TIR
Proyecto A	-357	15%	12%
Proyecto B	278	12%	14%

**Conclusiones:**

Ahora con estos dos métodos, ya es posible tomar una decisión entre aceptar o rechazar cualquiera de los dos proyectos.

Como el VAN del proyecto A es menor que cero y en consecuencia su TIR es menor que su costo de capital, entonces el proyecto A es no rentable y por lo tanto no se acepta.

Como el VAN del proyecto B es mayor que cero y su TIR es mayor que su costo de capital, entonces el proyecto B, que además de ser mejor que el proyecto A, es el que se acepta.

Nótese que con estos dos últimos métodos, ya se puede tomar una decisión rigurosa. Finalmente es importante hacer notar lo siguiente:

Cuando no se tenía información a cerca del riesgo que ofrecían ambos proyectos, la posibilidad de emprender los dos resultaba factible; sin embargo, una vez hecha la consideración explícita del riesgo, es fácil darse cuenta que cuando la información que se tiene a cerca del riesgo de los proyectos es escasa, la decisión entre aceptar o rechazar un proyecto puede modificarse.

Hasta este momento, no se ha considerado a la inflación en la evaluación financiera de los proyectos de inversión A y B; sin embargo, es importante tomarla en cuenta en cualquier análisis financiero, puesto que en varias ocasiones puede modificar las decisiones que se hablan tomado cuando no fue considerada en la evaluación.

Supóngase ahora, que la evaluación financiera de los proyectos A y B se llevará a cabo tomando en consideración a la inflación.

Bajo este supuesto, considérese la siguiente información de los proyectos de inversión A y B:

Proyecto A

$$F_1^A = 2000 + 100X_1 \quad \text{donde} \quad X_1 \sim \text{Bin}(15, .65)$$
$$F_2^A = 2000 + 100X_2 \quad \text{donde} \quad X_2 \sim \text{Bin}(15, .70)$$
$$F_3^A = 2000 + 100X_3 \quad \text{donde} \quad X_3 \sim \text{Bin}(15, .55)$$
$$F_4^A = 2000 + 100X_4 \quad \text{donde} \quad X_4 \sim \text{Bin}(15, .60)$$

Con  $X_i$  independiente de  $X_j \quad \forall i, j \in \overline{1,4}$  con  $i \neq j$ .

Proyecto B

$$F_1^B = 2100 + 200Y_1 \quad \text{donde} \quad Y_1 \sim \text{Bin}(10, .45)$$
$$F_2^B = 2100 + 150Y_2 \quad \text{donde} \quad Y_2 \sim \text{Bin}(10, .60)$$
$$F_3^B = 1800 + 150Y_3 \quad \text{donde} \quad Y_3 \sim \text{Bin}(10, .40)$$
$$F_4^B = 1800 + 150Y_4 \quad \text{donde} \quad Y_4 \sim \text{Bin}(10, .55)$$

Con  $Y_i$  independiente de  $Y_j \quad \forall i, j \in \overline{1,4}$  con  $i \neq j$ .

Obsérvese que en este caso, los flujos de efectivo de ambos proyectos son mayores que cuando la inflación no era considerada en la evaluación; pero también es importante observar el cambio que sufrieron las probabilidades.

#### Criterio del VAN con inflación.

a) Sin considerar el efecto de la inflación en el costo de capital.

Dado que en este caso el costo de capital utilizado en la evaluación, es una tasa de descuento ajustada al riesgo y libre de inflación; entonces es factible utilizar, con el fin de ejemplificar este criterio las mismas tasas de descuento -- que se utilizaron en los dos últimos métodos anteriores.

Es decir, que los costos de capital de los proyectos A y B serán del 15% y 12% respectivamente, durante toda la vida útil de ambos; además, se supondrá que existe una tasa de inflación constante del 10% durante todo el horizonte de planeación. Para calcular los valores actuales netos de ambos proyectos, supóngase nuevamente que las únicas estimaciones que se tienen de los flujos de efectivo en cada año de los proyectos coinciden con sus respectivas medias. Es decir, que los flujos de efectivo esperados de los proyectos A y B son los siguientes:

Proyecto A	Proyecto B
$F_1' = 2975$	$F_1' = 3000$
$F_2' = 3050$	$F_2' = 3000$
$F_3' = 2825$	$F_3' = 2400$
$F_4' = 2900$	$F_4' = 2625$

Los costos iniciales son de \$ 6300 y \$ 6500 respectivamente y el valor de salvamento de ambos es cero.

La fórmula utilizada en este caso es:

$$VAN' = \sum_{t=1}^n \frac{F_t'}{\{(1+i^i)(1+\pi)\}^t} - I$$

Por lo tanto, el VAN con inflación del proyecto A ( $VAN_A'$ ) sin considerar el efecto de la inflación en el costo de capital es:

$$VAN_A' = 6785.8093 - 6300 = 485.80936$$

El VAN con inflación del proyecto B ( $VAN_B'$ ) sin considerar el efecto de la inflación en el costo de capital es:

$$VAN_B' = 6034.456 - 6500 = 334.45605$$

b) El VAN considerando el efecto de la inflación en el costo de capital.

En este caso, el costo de capital refleja la tasa de inflación proyectada a largo plazo durante la vida útil de ambos proyectos, mediante una prima inflacionaria que forma parte de la tasa libre de riesgo.

Supóngase que los costos de capital con inflación de los proyectos A y B son del 27% y 25% respectivamente.

La fórmula utilizada en este caso es:

$$VAN' = \sum_{t=1}^n \frac{F_t'}{(1+k')^t} - I$$

$$\text{Con } k_A' = 27\% \quad \text{y} \quad k_B' = 25\%$$

Por lo tanto, el VAN con inflación del proyecto A ( $VAN_A'$ ) considerando el efecto de la inflación en el costo de capital es:

$$VAN_A' = 6727.4245 - 6300 = 427.42454$$

El VAN con inflación del proyecto B ( $VAN_B'$ ) considerando el efecto de la inflación en el costo de capital es:

$$VAN_B' = 6624 - 6500 = 124$$

Criterio de la TIR con inflación.

a) Sin considerar el efecto de la inflación en el costo de capital.

Este criterio consiste en encontrar la TIR de los proyectos, mediante las raíces reales positivas de un polinomio de cuarto grado con coeficientes iguales a los flujos de efectivo no deflactados; y comparar estas tasas, contra sus respectivos costos de capital libres de inflación.

Es decir,  $r'$  será la TIR con inflación que satisfaga la siguiente ecuación:

$$\sum_{t=1}^n \frac{F_t'}{(1+r')^t} - I = 0$$

Para el caso del proyecto A se tiene lo siguiente:

$$\text{Sea } x = (1+r')^{-1} \rightarrow$$

$$2704.5454x + 2520.6611x^2 + 2122.4643x^3 + 1980.739x^4 - 6300 = 0$$

$$\therefore r_A' = (0.84033245)^{-1} - 1 = 0.18997$$

Es decir, que la TIR con inflación del proyecto A es aproximadamente del 19%. Análogamente, la TIR con inflación del proyecto B es aproximadamente del 14%.



b) La TIR considerando el efecto de la inflación en el costo de capital.

Este criterio, consiste en encontrar la TIR con inflación de los proyectos, mediante las raíces reales positivas de un polinomio de cuarto grado, con coeficientes iguales a los flujos de efectivo de los proyectos sin deflactarlos; y comparar estas tasas contra sus respectivos costos de capital con inflación. Es decir,  $r'$  será la TIR con inflación que satisfaga la siguiente ecuación:

$$\sum_{t=1}^3 \frac{F_t}{(1+r')^t} - I = 0$$

Nuevamente, haciendo  $X = 1/(1+r)$  se tiene que:

La TIR con inflación del proyecto A es aproximadamente del 31%.

La TIR con inflación del proyecto B es aproximadamente del 26%.

Resumiendo toda la información obtenida se tiene lo siguiente:

En principio se puede pensar nuevamente, que se trata de un problema de selección entre dos proyectos de inversión, en el cual se considera a la inflación más no el riesgo de los mismos (en cuanto a sus flujos de efectivo), puesto que únicamente se dispone de los flujos de efectivo esperados en cada año de vida de éstos. Bajo estas circunstancias se obtuvo lo siguiente:

	VAN	k	i	TIR
Proyecto A	485	15%	10%	19%
Proyecto B	334	12%	10%	14%

**Conclusiones:**

Como el VAN de los dos proyectos es mayor que cero y además sus tasas de rendimiento son ambas superiores a su costo de capital; entonces se puede decir que si la empresa está en posibilidad de emprender ambos proyectos, esto le resultaría lucrativo.

Por otra parte, si tiene que decidir entre uno u otro, entonces sería mejor que invertiera en el proyecto A que en el B, puesto que de los dos proyectos, el A es el que tiene mayor VAN y mejor tasa de rendimiento.

Cuando se consideró a la inflación en el costo de capital de ambos proyectos, se obtuvieron los siguientes resultados:

	VAN	k	TIR
Proyecto A	427	27%	31%
Proyecto B	124	25%	26%

**Conclusiones:**

De la información anterior, se puede decir que tanto el proyecto A como el proyecto B son rentables; pero de los dos, el mejor es el A, porque se espera que genere un rendimiento superior al del proyecto B.

Es conveniente señalar, la importancia que tiene considerar a la inflación en el costo de capital utilizado en la evaluación; puesto que en este caso, es fácil dar se cuenta que cuando la inflación es considerada en el costo de capital, los valores actuales netos de ambos proyectos disminuyen; sobre todo el del proyecto B.

Por otra parte, si se observa el cambio que sufrieron las tasas internas de rendimiento; se podría pensar que son mejores las tasas de rendimiento que se obtuvieron cuando la inflación fue considerada en la tasa de descuento, que cuando no fue considerada; sin embargo, la magnitud de las diferencias entre las tasas de rendimiento y sus respectivos costos de capital, permaneció casi estable.

Métodos de evaluación cuando no se incluye el riesgo en el costo de capital con inflación.

a) Método de la media y la desviación estándar con inflación.

Para este método, supóngase que los costos de capital de los proyectos A y B son del 25% y 22% respectivamente.

Por lo tanto, el  $\overline{VAN}$  (VAN esperado con inflación) o media de los proyectos, se obtiene sustituyendo sus respectivos costos en la siguiente fórmula:

$$\overline{VAN} = \bar{X} = \sum_{t=1}^n \frac{\bar{F}_t}{(1+r)^t} - I$$

Obsérvese que  $\bar{F}_t \sqrt{t \leq \frac{1}{r}}$ , coincide exactamente con las respectivas medias de los proyectos.

De esta manera, se tiene que las medias de los proyectos A y B son:

$$\bar{X}_A = 6966.24 - 6300 = 666.4245$$

$$\bar{X}_B = 6981.2227 - 6500 = 481.22271$$

Nótese, que antes de calcular las desviaciones estándar globales de los proyectos es necesario conocer las varianzas en cada año de ambos; ya que:

$$S^2 = \sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{(F_t - \bar{F}_t)^2}{(1+r)^{2t}}}$$

Por lo tanto, las desviaciones estándar globales de los proyectos de inversión A y B son las siguientes:

$$S'_A = \sqrt{59694.425} = 244.32442$$

$$S'_B = \sqrt{118613.89} = 344.40367$$

b) Método de la probabilidad de error en la aceptación con inflación.

Una vez que se tienen tanto las medias como las desviaciones estándar de los proyectos, es posible calcular las probabilidades de error en la aceptación con inflación ( $\beta'_s$ ); recordando además, que esto se puede hacer dado que existe independencia entre los flujos de efectivo de cada uno de los proyectos.

De esta manera, las probabilidades de error en la aceptación con inflación de los proyectos A y B, están dadas por:

$$\beta'_A = \int_{-\infty}^{-\bar{x}'_A / s'_A} N(0,1) = \int_{-\infty}^{-2.72} N(0,1) = 0.00326$$

$$\beta'_B = \int_{-\infty}^{-\bar{x}'_B / s'_B} N(0,1) = \int_{-\infty}^{-1.397} N(0,1) = 0.08226$$

Resumiendo la información obtenida con estos métodos, se tiene lo siguiente:

	$\overline{VAN}$	$k$ (sin riesgo)	$S$	C.V.	$\beta'$
Proyecto A	666	25%	244	36%	.3%
Proyecto B	481	22%	344	71%	8%

Cuando se trabaja con toda la información que se tiene a cerca del riesgo de los proyectos A y B; lo primero que se puede observar, es que el proyecto A puede tomar cualquier valor entre \$ 2000 y \$ 3500, mientras que el B, puede tomar cualquier valor entre \$ 1800 y \$ 4100.

Es decir, que en cuanto a lo mínimo que se puede ganar, es mejor el A que el B; pero en cuanto a lo máximo, es mejor el B que el A.

Como los dos proyectos tienen un  $\overline{VAN}$  mayor que cero, entonces los dos son rentables; pero aunque los dos lo son, es mejor el A que el B en cuanto al riesgo por cada peso de rendimiento esperado que ofrecen cada uno de ellos y en cuanto a la probabilidad de equivocarse en caso de aceptar alguno de los dos.

Esto es fácil de observar, ya que el coeficiente de variación del proyecto B es casi el doble que el del proyecto A; además de que la probabilidad de equivocarse en caso de aceptar el proyecto A es casi del 0%, mientras que la del B es del 8%.

Nótese que con los resultados obtenidos con estos dos métodos, lo único que se puede concluir, es cual de los dos proyectos es mejor y también que tan riesgosos son.

Métodos de evaluación cuando se incluye implícitamente el riesgo en el costo de capital con inflación.

a) Método de la tasa de descuento ajustada al riesgo con inflación.

Este método, consiste en calcular el  $\overline{VAN}$ , utilizando como tasa de descuento una nueva tasa que incluya un factor adicional por el riesgo de la inversión.

Supóngase para fines prácticos, que los costos de capital ajustados al riesgo con inflación son del 27% para el proyecto A y del 25% para el proyecto B.

Por lo tanto, se tiene que:

$$\overline{VAN}_A = 427.42454 \quad \text{y} \quad \overline{VAN}_B = 124$$

b) Método de la tasa combinada con inflación.

Este método consiste en comparar las tasas internas de rendimiento de los proyectos con las nuevas tasas de descuento.

ie.

$$\begin{array}{lll} r_A = 31\% & \text{contra} & k_A = 27\% \\ r_B = 26\% & \text{contra} & k_B = 25\% \end{array}$$

Conclusiones:

Como las medias o valores esperados de los proyectos coinciden exactamente con las únicas estimaciones de los flujos de efectivo esperados en cada año de vida de éstos, y dado que se están utilizando como tasas de descuento a los mismos costos de capital con inflación que se utilizaron para el cálculo del  $\overline{VAN}$  y la TIR; entonces, tanto los resultados como las conclusiones que se obtuvieron con estos dos criterios económicos de evaluación, son los mismos para estos dos últimos métodos.

Es decir, que los dos proyectos se pueden aceptar, puesto que los dos son rentables; pero de los dos, es más rentable el proyecto A, puesto que ofrece un rendimiento mayor.

### Conclusiones generales al capítulo.

Durante el desarrollo de este caso práctico, se fueron obteniendo una serie de resultados y de decisiones sobre estos resultados, que se fueron reafirmando o bien se fueron modificando.

A grandes rasgos, se puede dar el siguiente resumen general:

a) Cuando la inflación no fue considerada en la evaluación.

Cuando no se consideró el riesgo en la evaluación de los proyectos de inversión, es decir, cuando se disponía únicamente de la información de los flujos de efectivo esperados de éstos, entonces, como los dos resultaban rentables; ambos se podían aceptar, siendo el proyecto B el más rentable de los dos.

Por otra parte, cuando se tomó en cuenta el riesgo en la evaluación, aunque los dos proyectos resultaron rentables, los dos eran riesgosos y en este caso, ya no se trataba simplemente de aceptarlo o aceptarlos en cuanto a su rentabilidad; sino que también dependía del grado de riesgo que ofrecían cada uno de ellos.

De los métodos de la tasa de descuento ajustada al riesgo y la tasa combinada, se obtuvo la siguiente conclusión:

El proyecto A no se acepta porque no es rentable; el que se acepta es el proyecto - B.

Aquí es conveniente señalar la importancia que tiene la consideración explícita del riesgo en la evaluación financiera de proyectos de inversión; ya que la decisión -- que se había tomado al inicio de la evaluación, se modificó considerablemente.

b) Cuando la inflación fue considerada en la evaluación.

Cuando se hizo la evaluación de los proyectos sin considerar el riesgo de éstos, se llegó a la conclusión de que ambos proyectos se podían aceptar, puesto que los dos eran rentables; siendo el más rentable de los dos el proyecto A.

Por otra parte cuando se hizo la consideración explícita del riesgo, se llegó a la conclusión de que aunque los dos eran rentables, el proyecto B era dos veces más riesgoso que el A; además de que su probabilidad de equivocarse en caso de aceptar lo era mayor.

La conclusión final fue de que ambos proyectos se podían aceptar; pero en caso de elección, el que se debía elegir era el proyecto A.

Finalmente, es importante señalar la influencia que puede ejercer la inflación en la evaluación financiera de proyectos de inversión; ya que un proyecto que era aparentemente no rentable sin considerar el efecto de la inflación (el proyecto A), se transformó en un proyecto bastante aceptable considerando el efecto de la misma y otro que era relativamente aceptable (el proyecto B), disminuyó su rentabilidad.

**A P E N D I C E**

### Costo de capital.

El costo de capital de una empresa está determinado por los siguientes elementos:

- a) Las fuentes de financiamiento externas e internas que la empresa utilice para financiar sus proyectos de inversión.
- b) Los costos después de impuestos de cada una de estas fuentes.
- c) El porcentaje que cada una representa del total utilizado.

### Fuentes externas de financiamiento.

Las fuentes externas de financiamiento más comunes que una empresa utiliza para financiar sus proyectos de inversión son las siguientes:

- Los proveedores.
- Los préstamos bancarios a corto plazo.
- Los pasivos a largo plazo; tales como las obligaciones, los diferentes tipos de crédito hipotecario industrial y los arrendamientos financieros.

### Fuentes internas de financiamiento.

Las principales fuentes internas de financiamiento que una empresa utiliza para financiar sus proyectos son las siguientes:

- Las acciones preferentes.
- Las acciones comunes.
- Las utilidades retenidas.

### Cálculo genérico del costo de capital.

Una vez que se conocen las diversas fuentes de financiamiento que la empresa -vaya utilizar, es importante saber cómo determinar el costo de capital de cada una de ellas.

Es por ello, que a continuación se presenta una metodología general para el cálculo del costo de capital de cualquier fuente de financiamiento.

Si se denota por  $M$  la cantidad recibida por una empresa de una determinada fuente -de financiamiento y por  $N$  el desembolso inicial o cantidad aportada por el inversionista, entonces, normalmente  $M < N$ ; puesto que generalmente, cuando las empresas solicitan cualquier tipo de financiamiento incurren en ciertos gastos, originando que la cantidad original recibida sea menor que la cantidad aportada.

Cabe señalar, que cualquier fuente de financiamiento, implica tanto de recepciones periódicas para el inversionista como desembolsos de la misma magnitud para la empresa, es decir:

Si  $F_i$  es el cobro o recepción periódica para el inversionista en el período  $i$ .  
y  $P_i$  es el pago o desembolso para la empresa en el período  $i$ .  
entonces:

$$F_i = P_i \quad \forall i \in \overline{1, n}$$

en donde  $n$ , es el número de años pactados entre el inversionista y la empresa para liquidar la cantidad  $N$  aportada por el inversionista.

Por lo tanto, el costo de capital de cualquier fuente de financiamiento será aquella tasa de interés  $k$ , que iguale la cantidad captada o recibida por una empresa, con el valor presente de la serie de pagos que se haya comprometido a pagar.

ie.  $k$  es tal que:

$$M = \sum_{t=1}^n \frac{P_t}{(1+k)^t}$$

En donde  $k$ , es el costo de capital de la particular fuente de financiamiento que la empresa haya utilizado para financiar sus proyectos de inversión.

Una vez conocidas las diversas fuentes de financiamiento que la empresa vaya a utilizar, así como el costo de capital de cada una de ellas; se determina el porcentaje que cada una representa del total a utilizar, para de esta manera obtener finalmente el costo promedio ponderado de capital, de la siguiente forma:

$$K = \sum_{t=1}^n k_t \cdot \alpha_t$$

en donde:

$K$ : es el costo promedio ponderado de capital de una empresa.

$k_t$ : es el costo después de impuestos de la fuente  $t$ .

$\alpha_t$ : es el porcentaje que la fuente  $t$  representa del total utilizado.

$n$ : es el número de alternativas de financiamiento próximas a obtenerse.



### Correlación de los flujos de efectivo en el tiempo.

Una suposición importante que se hizo en el desarrollo de los capítulos anteriores, fue el supuesto de independencia entre los flujos de efectivo de los proyectos analizados; sin embargo, el flujo de efectivo de un periodo, puede depender de los flujos de efectivo generados en periodos anteriores.

Es por ello, que a continuación se presenta un análisis de las consecuencias que se tienen en la evaluación de proyectos de inversión, cuando los flujos de efectivo de un proyecto no son independientes.

Si  $X$  e  $Y$  son dos v.a. sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  entonces:

$$\forall X, Y \text{ v. "a."}$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - EX)(Y - EY)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Si  $X$  e  $Y$  son independientes  $\Rightarrow E(XY) = EXEY$ ; pero:

si  $E(XY) = EXEY \Rightarrow X$  e  $Y$  sean independientes.

Cuando  $X$  e  $Y$  son independientes:

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \text{ puesto que } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY$$

entonces:

Cuando  $X$  e  $Y$  son independientes

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

$\therefore$  La  $\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$  es igual a la  $\text{Var}(X+Y)$  si  $X$  e  $Y$  son independientes.

Entonces si  $X$  e  $Y$  son dependientes:

$$\text{Var}(X+Y) = \{ \text{Var}(X+Y) \text{ si } X \text{ e } Y \text{ fueran independientes} \} + 2 \{ \text{Cov}(X, Y) \}$$

Por lo que resulta de suma importancia conocer cómo es la  $\text{Cov}(X, Y)$

Si la  $\text{Cov}(X, Y) > 0$

$\Rightarrow \text{Var}(X+Y)$  cuando  $X$  e  $Y$  son dependientes  $> \text{Var}(X+Y)$  si  $X$  e  $Y$  fueran independientes.

Si la  $\text{Cov}(X, Y) = 0$

$\Rightarrow \text{Var}(X+Y)$  cuando  $X$  e  $Y$  son dependientes  $= \text{Var}(X+Y)$  si  $X$  e  $Y$  fueran independientes.

Si la  $\text{Cov}(X, Y) < 0$

$\Rightarrow \text{Var}(X+Y)$  cuando  $X$  e  $Y$  son dependientes  $< \text{Var}(X+Y)$  si  $X$  e  $Y$  fueran independientes.

Por lo tanto, dependiendo de la covarianza que exista entre los flujos de efectivo de un proyecto, el riesgo medido por su varianza puede aumentar o disminuir.

Coefficiente de correlación.

El coeficiente de correlación lineal, puede considerarse como una medida de correlación entre dos variables aleatorias.

Definición:

El coeficiente de correlación entre dos v.a.  $X$  e  $Y$  está definido de la siguiente forma:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} \quad -1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

Propiedades:

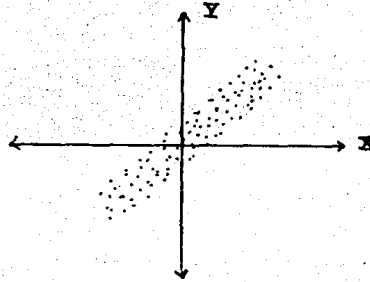
- 1.) Cuando  $\rho(X, Y) = 1$  o  $-1$ , entonces  $X$  e  $Y$  están perfectamente correlacionadas.
- 2.) Cuando  $\rho(X, Y) = -1$ , entonces se dice que la correlación que existe entre  $X$  e  $Y$  es perfectamente negativa.
- 3.) Cuando  $\rho(X, Y) = 1$ , entonces se dice que la correlación que existe entre  $X$  e  $Y$  es perfectamente positiva.
- 4.) Cuando  $\rho(X, Y) = 0$ , se considera que  $X$  e  $Y$  no están correlacionadas, es decir, que el conocimiento de una de las variables no ayuda a describir el comportamiento de la otra.
- 5.) Si  $\rho(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X$  e  $Y$  sean independientes. Únicamente se podrá garantizarlo, cuando  $X, Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ; aunque en la mayoría de los libros de Finanzas, se supone implícitamente que las variables aleatorias utilizadas son normales.

Cuando X e Y están correlacionadas positivamente, entonces:

Si X crece o aumenta  $\Rightarrow$  Y crece o aumenta.

o Si X decrece o disminuye  $\Rightarrow$  Y decrece o disminuye.

Interpretación gráfica de la correlación positiva.

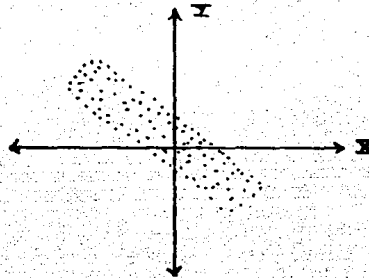


Cuando X e Y están correlacionadas negativamente, entonces:

Si X crece o aumenta  $\Rightarrow$  Y decrece o disminuye.

o Si X decrece o disminuye  $\Rightarrow$  Y crece o aumenta.

Interpretación gráfica de la correlación negativa.



La interpretación que se puede dar a la correlación positiva y negativa en cuanto a los flujos de efectivo de un proyecto, es la siguiente:

La correlación positiva entre dos flujos de efectivo se presenta, cuando un buen resultado es seguido por otro buen resultado en el período siguiente, o en forma equivalente, cuando un mal resultado es seguido por otro malo también.

Cabe señalar, que este tipo de correlación es la que se presenta con frecuencia en la práctica; puesto que generalmente, un buen resultado en un determinado período, puede ser la señal de un buen resultado en el período siguiente; o bien, un mal resultado, puede indicar que en el período siguiente se obtendrá un mal resultado también.

La correlación negativa entre dos flujos de efectivo se presenta, cuando un buen resultado es seguido por un mal resultado en el periodo siguiente, o en forma equivalente, cuando un mal resultado es seguido por un buen resultado.

Es importante señalar, que este tipo de correlación no se presenta con frecuencia - en la práctica; puesto que es poco probable, que un buen resultado sea seguido por un mal resultado, o viceversa.

Cuando los flujos de efectivo de un proyecto están correlacionados, el cálculo de la varianza se modifica.

El VAN de un propuesta de inversión sin considerar el efecto de la inflación, se calcula de acuerdo a la siguiente expresión:

$$VAN = \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+k)^t} - I$$

Si se considera a los flujos de efectivo como v.a.  $X_i$  y a  $X_0$  como la inversión inicial, la fórmula anterior puede ser reexpresada como sigue:

$$VAN = \sum_{i=0}^n X_i c_i \quad \text{donde} \quad c_i = \begin{cases} -1 & \text{cuando } i=0 \\ \frac{1}{(1+k)^i} & \text{cuando } i \in \overline{1, n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(VAN) = \text{Var}\left(\sum_{i=0}^n X_i c_i\right) \text{ donde las v.a. } X_i \text{ no son independientes.}$$

$$= E\left\{\left(\sum_{i=0}^n c_i X_i - E\left(\sum_{i=0}^n c_i X_i\right)\right)^2\right\}$$

$$= E\left\{\left(\sum_{i=0}^n c_i X_i - \sum_{i=0}^n c_i E(X_i)\right)^2\right\}$$

Si  $\mu_i = E(X_i) \forall i \in \overline{0, n}$ , entonces:

$$\text{Var}(VAN) = E\left\{\left(\sum_{i=0}^n c_i X_i - \sum_{i=0}^n c_i \mu_i\right)^2\right\} = E\left\{\left(\sum_{i=0}^n c_i (X_i - \mu_i)\right)^2\right\}$$

Sea  $u_i = c_i (X_i - \mu_i) \forall i \in \overline{0, n}$ , entonces:

$$\text{Var}(VAN) = E\left\{\left(\sum_{i=0}^n u_i\right)^2\right\} = E\left\{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n u_i u_j\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=0}^n u_i^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n u_i u_j\right\} \dots (1)$$

$$= E \left\{ \sum_{i=0}^n u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} u_i u_j \right\} \dots (2)$$

$$= E \left\{ \sum_{i=0}^n (e_i (X_i - \mu_i))^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} e_i (X_i - \mu_i) e_j (X_j - \mu_j) \right\}$$

$$= E \left\{ \sum_{i=0}^n (e_i (X_i - \mu_i))^2 \right\} + E \left\{ 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} e_i (X_i - \mu_i) e_j (X_j - \mu_j) \right\}$$

$$= E \left\{ \sum_{i=0}^n e_i^2 (X_i - \mu_i)^2 \right\} + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} e_i e_j E \left\{ (X_i - \mu_i) (X_j - \mu_j) \right\}$$

$$= \sum_{i=0}^n e_i^2 E \left\{ (X_i - \mu_i)^2 \right\} + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} e_i e_j E \left\{ (X_i - \mu_i) (X_j - \mu_j) \right\}$$

pero como  $E \left\{ (X_i - \mu_i)^2 \right\} = \text{Var} (X_i) = \sigma_i^2$  y

$$E \left\{ (X_i - \mu_i) (X_j - \mu_j) \right\} = \text{Cov} (X_i, X_j)$$

$$\Rightarrow \text{Var}(VAN) = \sum_{i=0}^n e_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} e_i e_j \text{Cov} (X_i, X_j) \dots (I)$$

Por otra parte, si se considera la ecuación (I) entonces :

$$\text{Var}(VAN) = \sum_{i=0}^n e_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n e_i e_j \text{Cov} (X_i, X_j) \dots (II)$$

Cualquiera de las dos fórmulas anteriores (I y II), puede ser utilizada para el cálculo de la varianza cuando los flujos de efectivo de un proyecto no son independientes.

De manera que para obtener la fórmula para el cálculo de la varianza en el caso de dos periodos ( $n=2$ ), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\text{VAN}) &= \sum_{i=0}^2 c_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^{i-1} c_i c_j \text{Cov}(\bar{X}_i, \bar{X}_j) \\ &= c_0^2 \sigma_0^2 + c_1^2 \sigma_1^2 + c_2^2 \sigma_2^2 + 2 c_0 c_1 \text{Cov}(\bar{X}_0, \bar{X}_1) \\ &\quad + 2 c_0 c_2 \text{Cov}(\bar{X}_0, \bar{X}_2) + 2 c_1 c_2 \text{Cov}(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \end{aligned}$$

Como  $c_i = \begin{cases} -1 & \text{si } i=0 \\ \frac{1}{(1+k)^i} & \text{si } i \in \{1, 2\} \end{cases}$

entonces:

$$c_0 = -1$$

$$c_1 = \frac{1}{(1+k)} \Rightarrow c_1^2 = \frac{1}{(1+k)^2}$$

$$c_2 = \frac{1}{(1+k)^2} \Rightarrow c_2^2 = \frac{1}{(1+k)^4}$$

$$\therefore \text{Var}(\text{VAN}) = \sigma_0^2 + \frac{\sigma_1^2}{(1+k)^2} + \frac{\sigma_2^2}{(1+k)^4} - \frac{2}{(1+k)} \text{Cov}(\bar{X}_0, \bar{X}_1)$$

$$- \frac{2}{(1+k)^2} \text{Cov}(\bar{X}_0, \bar{X}_2) + \frac{2}{(1+k)^3} \text{Cov}(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$$

Hasta ahora se ha visto como se obtiene la varianza de los flujos de efectivo de un proyecto en el caso de que estos sean independientes y en el caso de que sean correlativos; sin embargo, también sería interesante conocer la varianza cuando se tiene una combinación de flujos dependientes e independientes.

Para esto, supóngase que el VAN de un proyecto de inversión se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$VAN = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{j=1}^m Y_j$$

En donde las  $X_i$  son v.a. independientes entre sí y las  $Y_j$  son v.a. dependientes entre ellas y las  $X_i$ .

$$\text{Sea } Z = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{j=1}^m Y_j$$

entonces lo que se desea conocer es:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{j=1}^m Y_j\right) \\ &= E\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{j=1}^m Y_j\right) - E\left(\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{j=1}^m Y_j\right)\right\}^2 \\ &= E\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{j=1}^m Y_j - \sum_{i=1}^n E(X_i) - \sum_{j=1}^m E(Y_j)\right)\right\}^2 \\ &= E\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n E(X_i)\right) + \left(\sum_{j=1}^m Y_j - \sum_{j=1}^m E(Y_j)\right)\right\}^2 \end{aligned}$$

si  $E(X_i) = \mu_i \quad \forall i \in \overline{1, n}$  y  $E(Y_j) = \mu_j \quad \forall j \in \overline{1, m}$

entonces:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= E\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i\right) + \left(\sum_{j=1}^m Y_j - \sum_{j=1}^m \mu_j\right)\right\}^2 \\ &= E\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^m Y_j - \sum_{j=1}^m \mu_j\right)^2\right\} \end{aligned}$$

$$+ 2 \left( \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \bar{X}_i - \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \mu_i \right) \left( \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \bar{Y}_i - \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \mu_i \right) \}$$

$$\text{Var}(z) = \text{Var} \left( \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \bar{X}_i \right) + \text{Var} \left( \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \bar{Y}_i \right) + 2E \left\{ \left( \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \bar{X}_i - \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \mu_i \right) \left( \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \bar{Y}_i - \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \mu_i \right) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \text{Var}(\bar{X}_i) + \text{Var} \left( \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \bar{Y}_i \right) + 2 \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} E \left\{ (\bar{X}_i - \mu_i) (\bar{Y}_j - \mu_j) \right\}$$

$$\therefore \text{Var}(z) = \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \text{Var}(\bar{X}_i) + \text{Var} \left( \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \bar{Y}_j \right) + 2 \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \text{Cov}(\bar{X}_i, \bar{Y}_j)$$

Ahora, como las  $\bar{Y}_j$  son dependientes, entonces:

$$\text{Var} \left( \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \bar{Y}_j \right) = E \left\{ \left( \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \bar{Y}_j - E \left( \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \bar{Y}_j \right) \right)^2 \right\}$$

$$= E \left\{ \left( \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \bar{Y}_j - \sum_{j=1}^{\tilde{m}} E(\bar{Y}_j) \right)^2 \right\} = E \left\{ \left( \sum_{j=1}^{\tilde{m}} (\bar{Y}_j - E(\bar{Y}_j)) \right)^2 \right\}$$

$$= E \left\{ \left( \sum_{j=1}^{\tilde{m}} (\bar{Y}_j - \mu_j) \right)^2 \right\}$$

Si  $u_j = \bar{Y}_j - \mu_j$ ,  $\forall j \in \overline{1, \tilde{m}}$ , entonces:

$$\text{Var} \left( \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \bar{Y}_j \right) = E \left\{ \left( \sum_{j=1}^{\tilde{m}} u_j \right)^2 \right\} = E \left\{ \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} u_i u_j \right\}$$

$$= E \left\{ \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} (\bar{Y}_i - \mu_i) (\bar{Y}_j - \mu_j) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} E \left\{ (\bar{Y}_i - \mu_i) (\bar{Y}_j - \mu_j) \right\} = \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \text{Cov}(\bar{Y}_i, \bar{Y}_j)$$

$$\therefore \text{Var}(z) = \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \text{Var}(\bar{X}_i) + \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \text{Cov}(\bar{Y}_i, \bar{Y}_j) + 2 \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \text{Cov}(\bar{X}_i, \bar{Y}_j)$$



Esto quiere decir, que cuando un proyecto de inversión tenga tanto flujos de efectivo dependientes como independientes; la variabilidad total de esos flujos, será igual a la suma de las varianzas de los flujos independientes, más la covarianza que exista entre los flujos dependientes, más dos veces la suma de las covarianzas que existan entre los flujos dependientes e independientes.

#### Combinación de proyectos.

El objetivo de esta sección, es analizar los proyectos de inversión en el contexto de valores en cartera; puesto que únicamente se ha hecho en forma aislada. Cuando un proyecto de inversión se combina con otros proyectos, es importante hacer notar que el riesgo de ese proyecto puede ser influenciado por la interacción que exista entre el patrón de sus rendimientos y el patrón de los rendimientos de los otros proyectos con los cuales se mantiene en combinación.

A la combinación de proyectos de inversión se denomina cartera de proyectos o simplemente cartera.

La teoría de carteras de inversión, trata básicamente sobre la selección de carteras óptimas, es decir:

" Seleccionar las carteras que proporcionan el más alto rendimiento posible a un grado específico de riesgo, o en forma equivalente, el más bajo riesgo posible en base a una tasa de rendimiento específica "

#### Rendimiento esperado de una cartera.

Supóngase que  $X_i$  es la v.a. que representa el rendimiento del proyecto  $X_i$  ---  $X_i \in \bar{1}, n$ ;  $n$ , el número de proyectos que forman la cartera y  $\alpha_i$ , el porcentaje de la cartera que se ha invertido en proyecto  $X_i$  tal que:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

Entonces el rendimiento esperado de la cartera será igual a:

$$E\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i$$

Por lo tanto, el rendimiento esperado de una cartera, depende de la cantidad de fondos de la cartera que se inviertan en cada proyecto y de la tasa de rendimiento obtenida de cada uno de ellos.

El rendimiento esperado de una cartera, es una combinación lineal de los rendimientos esperados de cada uno de los proyectos que la forman.

Riesgo de una cartera.

El grado de riesgo de una cartera formada de  $n$ -proyectos de inversión, puede ser medido mediante la varianza de la cartera o el cuadrado de esta cantidad conocida como desviación estándar.

Si  $X_i$  representa el rendimiento del proyecto  $X_i$   $\forall i \in \overline{1, n}$ .

$\alpha_i$ : el porcentaje de la cartera invertido en el proyecto  $X_i$ .

$n$ : el número de proyectos que forman la cartera.

Entonces la varianza de esta cartera estará dada por:

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \right) = E \left\{ \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i - E \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \right) \right)^2 \right\}$$

Si  $\mu_i = E(X_i)$   $\forall i \in \overline{1, n}$ , entonces:

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \right) = E \left\{ \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i \right)^2 \right\}$$

$$= E \left\{ \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i (X_i - \mu_i) \right)^2 \right\}$$

Sea  $r_i = \alpha_i (X_i - \mu_i)$   $\forall i \in \overline{1, n}$

$$\Rightarrow \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \right) = E \left\{ \left( \sum_{i=1}^n r_i \right)^2 \right\} = E \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i r_j \right\}$$

$$= E \left\{ \sum_{i=1}^n r_i^2 + 2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} r_i r_j \right\} = E \left\{ \sum_{i=1}^n r_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n r_i r_j \right\}$$

$$= E \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (X_i - \mu_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_i \alpha_j (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 E(X_i - \mu_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_i \alpha_j E \left\{ (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) \right\}$$

$$\therefore \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_{X_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

$$\text{Como } \rho(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = \frac{\text{Cov}(\bar{X}_i, \bar{X}_j)}{\sigma_{\bar{X}_i} \sigma_{\bar{X}_j}} \Rightarrow \text{Cov}(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = \rho(\bar{X}_i, \bar{X}_j) \sigma_{\bar{X}_i} \sigma_{\bar{X}_j}$$

$$\therefore \sigma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{X}_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_{\bar{X}_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \alpha_i \alpha_j \rho(\bar{X}_i, \bar{X}_j) \sigma_{\bar{X}_i} \sigma_{\bar{X}_j}}$$

De manera que para obtener la desviación estándar de una cartera formada por dos proyectos ( $n = 2$ ), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma\left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i \bar{X}_i\right) &= \sigma(\alpha_1 \bar{X}_1 + \alpha_2 \bar{X}_2) \\ &= \sqrt{\alpha_1^2 \sigma_{\bar{X}_1}^2 + 2 \sum_{i=1}^1 \sum_{j=i+1}^2 \alpha_i \alpha_j \rho(\bar{X}_i, \bar{X}_j) \sigma_{\bar{X}_i} \sigma_{\bar{X}_j}} \\ &= \sqrt{\alpha_1^2 \sigma_{\bar{X}_1}^2 + \alpha_2^2 \sigma_{\bar{X}_2}^2 + 2 \alpha_1 \alpha_2 \rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \sigma_{\bar{X}_1} \sigma_{\bar{X}_2}} \end{aligned}$$

Como en este caso  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , entonces la fórmula anterior puede ser reexpresada de la siguiente manera:

$$\sigma(\alpha \bar{X}_1 + (1-\alpha) \bar{X}_2) = \sqrt{\alpha^2 \sigma_{\bar{X}_1}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_{\bar{X}_2}^2 + 2\alpha(1-\alpha) \rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \sigma_{\bar{X}_1} \sigma_{\bar{X}_2}}$$

en donde:

$\alpha$ : es el porcentaje de la cartera invertido en el proyecto  $X_1$ .

$1-\alpha$ : es el porcentaje de la cartera invertido en el proyecto  $X_2$ .

Dado que la desviación estándar de una cartera se puede ver como una función que depende de  $\alpha$ , entonces lo que se hará, es encontrar el valor de  $\alpha$  para el cual el riesgo de ésta, medido por su desviación estándar se hace mínimo.

$$\text{Sea } f(\alpha) = \sigma(\alpha \bar{X}_1 + (1-\alpha) \bar{X}_2)$$

$$= \left( \alpha^2 \sigma_{\bar{X}_1}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_{\bar{X}_2}^2 + 2\alpha(1-\alpha) \rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \sigma_{\bar{X}_1} \sigma_{\bar{X}_2} \right)^{1/2} \dots \text{(III)}$$

M

$$\Rightarrow f'(\alpha) = \frac{1}{2} M^{-1/2} (2\alpha \sigma_{X_1}^2 - 2(1-\alpha)\sigma_{X_2}^2 + 2\rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2)\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}(1-2\alpha))$$

$$f'(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} M^{-1/2} (2\alpha \sigma_{X_1}^2 - 2(1-\alpha)\sigma_{X_2}^2 + 2\rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2)\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}(1-2\alpha)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \sigma_{X_1}^2 - (1-\alpha)\sigma_{X_2}^2 + \rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2)\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}(1-2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \sigma_{X_1}^2 - \sigma_{X_2}^2 + \alpha \sigma_{X_2}^2 + \rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2)\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} - 2\alpha \rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2)\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha (\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 - 2\rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2)\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}) = \sigma_{X_2}^2 - \rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2)\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\sigma_{X_2} (\sigma_{X_2} - \rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2)\sigma_{X_1})}{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 - 2\rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2)\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}$$

Se puede verificar que si se sustituye este punto singular en la segunda derivada de  $f$ , entonces:

$$f'' \left( \frac{\sigma_{X_2} (\sigma_{X_2} - \rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2)\sigma_{X_1})}{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 - 2\rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2)\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \right) > 0$$

Cuando la correlación que exista entre los proyectos  $X_1$  y  $X_2$  sea negativa perfecta, el porcentaje  $\alpha$  de la cartera que debe ser invertido en el proyecto  $X_1$ , con el objeto de hacer mínimo el riesgo de ésta, se puede obtener de la siguiente forma:

Como  $\rho(X_1, X_2) = -1$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sigma_{X_2} (\sigma_{X_2} + \sigma_{X_1})}{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + 2\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} = \frac{\sigma_{X_2} (\sigma_{X_2} + \sigma_{X_1})}{(\sigma_{X_1} + \sigma_{X_2})^2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_1} + \sigma_{X_2}}$$

Cuando no exista correlación entre los proyectos  $X_1$  y  $X_2$ , entonces el porcentaje  $\alpha$  de la cartera que debe ser invertido en proyecto  $X_1$ , con el objeto de hacer mínimo el riesgo de la misma, se puede obtener de la siguiente forma:

Como  $\rho(X_1, X_2) = 0$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sigma_{X_2}^2}{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2}$$

Cuando la correlación que exista entre los proyectos  $X_1$  y  $X_2$  sea positiva perfecta, el porcentaje  $\alpha$  de la cartera que debe ser invertido en proyecto  $X_1$ , con el objeto de hacer mínimo el riesgo de esta, se puede obtener de la siguiente forma:

Como  $\rho(X_1, X_2) = 1$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sigma_{X_2} (\sigma_{X_2} - \sigma_{X_1})}{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 - 2\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} = \frac{\sigma_{X_2} (\sigma_{X_2} - \sigma_{X_1})}{(\sigma_{X_2} - \sigma_{X_1})^2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_2} - \sigma_{X_1}} \quad \text{siempre que} \quad \frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_2} - \sigma_{X_1}} \in [0, 1]$$

Si  $\frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_2} - \sigma_{X_1}} \notin [0, 1]$ , entonces el mínimo global de  $f$  se encuentra a la izquierda o a la derecha del  $[0, 1]$ ; por lo que es necesario analizar como es  $f$  en el  $[0, 1]$ , - de tal manera que el riesgo de la cartera medido por su desviación estándar se puede reducir para algún valor apropiado de  $\alpha$ .

Si  $\rho(X_1, X_2) = 1$  entonces,

sustituyendo  $\rho(X_1, X_2)$  en la ecuación (III) se tiene que:

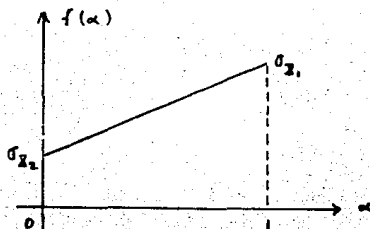
$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sigma(\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2) = \sqrt{\alpha^2 \sigma_{X_1}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_{X_2}^2 + 2\alpha(1-\alpha) \sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \\ &= \sqrt{(\alpha \sigma_{X_1} + (1-\alpha) \sigma_{X_2})^2} = \alpha \sigma_{X_1} + (1-\alpha) \sigma_{X_2} = \alpha (\sigma_{X_1} - \sigma_{X_2}) + \sigma_{X_2} = f(\alpha) \end{aligned}$$

Por lo tanto en este caso,  $f(\alpha)$  es una recta cuya pendiente ( $m = \sigma_{X_1} - \sigma_{X_2}$ ) depende de la relación que exista entre  $\sigma_{X_1}$  y  $\sigma_{X_2}$ .

Caso 1i)

Si  $\sigma_{X_1} > \sigma_{X_2}$ , entonces la pendiente de la recta  $f(\alpha) \in [0, 1]$  es positiva y por lo tanto en este caso  $\alpha = 0$ ; lo cual quiere decir, que se tendría que invertir el 100% de la cartera en el proyecto  $X_2$ .

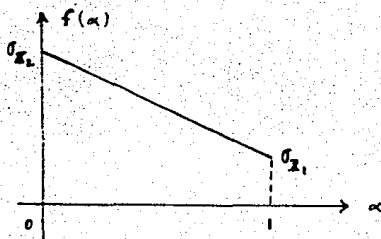
Gráficamente se tiene lo siguiente:



Caso 2i)

Si  $\sigma_{X_1} < \sigma_{X_2}$ , entonces la pendiente de la recta  $f(\alpha) \in [0, 1]$  es negativa y por lo tanto en este caso  $\alpha = 1$ ; lo cual quiere decir, que se tendría que invertir el 100% de la cartera en el proyecto  $X_1$ .

Gráficamente se tiene lo siguiente:



Caso 3i)

Si  $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2}$ , entonces para cualquier valor de  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $f(\alpha)$  es mínimo.

Resumiendo, se tiene que cuando  $\rho(X_1, X_2) = 1$ , el porcentaje  $\alpha$  de la cartera que deberá ser invertido en el proyecto  $X_1$ , con el objeto de minimizar el riesgo de ésta, estará dado por:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_2} - \sigma_{X_1}} & \text{si } 0 \leq \frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_1} - \sigma_{X_1}} \leq 1 \\ 0 & \text{si } \frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_2} - \sigma_{X_1}} \notin [0, 1] \text{ y } \sigma_{X_1} > \sigma_{X_2} \\ 1 & \text{si } \frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_2} - \sigma_{X_1}} \notin [0, 1] \text{ y } \sigma_{X_1} < \sigma_{X_2} \end{cases}$$

Correlación entre proyectos.

Cuando varios proyectos se combinan para formar una cartera, es importante analizar de qué manera se relacionan los flujos de efectivo de los diversos proyectos que la forman.

El grado en que los flujos de efectivo de los proyectos se mueven juntos se llama correlación entre proyectos.

Supóngase que:

$X$  v.a. : representa el rendimiento del proyecto  $X$  y que

$Y$  v.a. : representa el rendimiento del proyecto  $Y$ ; tales que  $X$  e  $Y$  están correlacionadas de la siguiente manera:

$$X = \bar{X}$$

$$Y = aX + b, \text{ entonces:}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= \text{Var}(X + aX + b) = \text{Var}(X(1+a) + b) \\ &= (a+1)^2 \text{Var}(X+b) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Var}(X+Y) = (a+1)^2 \text{Var}(X)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, aX+b)$$

$$= E\{(X - EX)(aX+b) - E(aX+b)\}$$

$$= E\{(X - EX)(aX+b) - aEX - b\}$$

$$= E\{(X - EX)(a(X - EX))\}$$

$$= a E\{(X - EX)(X - EX)\}$$

$$= a E\{(X - EX)^2\}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = a \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(aX+b) = a^2 \text{Var}(X)$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, aX+b)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(aX+b)}}$$

$$= \frac{a \text{Var}(X)}{\sqrt{\text{Var}(X) a^2 \text{Var}(X)}} = \frac{a \text{Var}(X)}{\sqrt{a^2 (\text{Var}(X))^2}} = \frac{a \text{Var}(X)}{a \text{Var}(X)}$$

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ -1 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$



Si se utiliza el coeficiente de correlación lineal como base de análisis para determinar el riesgo de una cartera, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

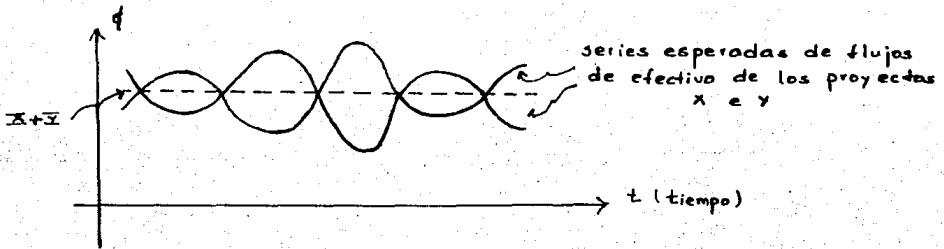
a) Si  $\rho(X, aX + b) = -1$  y  $a = -1$ , entonces:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X + aX + b) = 0$$

$$\text{ya que } \text{Var}(X + Y) = (a+1)^2 \text{Var}(X)$$

Es decir, cuando la correlación que exista entre los proyectos X e Y sea negativa perfecta; pero además, las series esperadas de sus flujos de efectivo se compensen exactamente ( $a = -1$ ), el efecto de la combinación reduce a cero la dispersión alrededor del valor esperado.

Gráficamente se tiene lo siguiente:



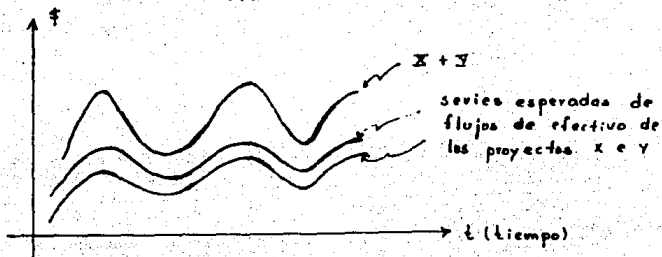
a) Si  $\rho(X, Y) \in (-1, 0)$ , entonces la  $\text{Var}(X + Y) < \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Es decir, cuando la correlación que exista entre los proyectos X e Y sea simplemente negativa, el efecto de la combinación reduce el riesgo de la cartera; o en otras palabras, el riesgo conjunto de ambos proyectos es menor que el riesgo de cada proyecto tomado en forma separada.

b) Cuando  $\rho(X, Y) = 1$ , entonces la  $\text{Var}(X + Y) > \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Es decir, cuando la correlación que exista entre dos proyectos sea positiva perfecta, el efecto de la combinación no reduce el riesgo. Esto se presenta cuando las variaciones de los flujos de efectivo que forman una cartera se complementan exactamente, aumentando la magnitud de la variación producida por la combinación.

Gráficamente se tiene lo siguiente:



b) Cuando  $\rho(X, Y) \in (0, 1)$ , entonces la  $Var(X+Y) > Var(X) + Var(Y)$   
 Es decir, cuando la correlación que exista entre dos proyectos sea simplemente positiva, el efecto de la combinación no reduce el riesgo; sin embargo en este caso, el riesgo conjunto de ambos es menor que cuando  $\rho(X, Y) = 1$ .

c) Cuando  $\rho(X, Y) = 0$ , entonces la  $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$   
 Es decir, cuando los rendimientos provenientes de dos proyectos no tuvieran ninguna correlación, el riesgo conjunto producido por la combinación de ambos, será el mismo si se hubiesen tomado separadamente cada uno de ellos.  
 Sin embargo, la Ley Débil de los Grandes Números (LDGN) de Tchebyshev garantiza lo siguiente:

Si  $\{X_i\}_{i=1}^n$  es una sucesión de v.a. independientes de varianza uniforme acotada  
 i.e.  $Var(X_i) \leq c$  donde  $c$  no depende de  $i$

$\Rightarrow \{X_i\}_{i=1}^n$  satisface la Ley Débil de los Grandes Números.

$$\{X_i\}_{i=1}^n \in LDGN$$

i.e.

$$\forall \epsilon > 0 \quad P_r \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \right| < \epsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

o equivalentemente:

$$\forall \epsilon > 0 \quad P_r \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \right| \geq \epsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Entonces para poder utilizar el resultado anterior, se hará el supuesto de normalidad en toda la sucesión de v.a. que representarán los rendimientos de cada uno de los proyectos que forman la cartera; para que de esta manera se pueda garantizar - que se tiene una sucesión de v.a. independientes.

ie.

Como  $p(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = 0 \quad \forall i, j \in \overline{1, n}$

y además  $\bar{X}_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad \forall i \in \overline{1, n}$ , entonces:

$\bar{X}_i$  es independiente de  $\bar{X}_j \quad \forall i, j \in \overline{1, n}$  con  $i \neq j$

y  $\text{Var}(\bar{X}_i) \leq c \quad \forall i \in \overline{1, n}$

Por lo tanto, a medida que aumente el número de proyectos independientes que forman una cartera, la probabilidad de que el rendimiento promedio de la cartera, difiera en menos de  $\epsilon > 0$  de su rendimiento esperado promedio, tiende a 1; en otras palabras, cuanto más alto sea el número de proyectos independientes que una empresa emprenda, menor será la variación de su tasa general de rendimiento.

Finalmente, una observación interesante que cabe hacer antes de terminar esta sección, es que los proyectos no correlacionados no son tan útiles para reducir el riesgo de una cartera como los proyectos negativamente correlacionados, sin embargo son mejores que los proyectos positivamente correlacionados.

**Tasa Interna de Rendimiento.**

La Tasa Interna de Rendimiento TIR de un proyecto de inversión sin considerar el efecto de la inflación, es aquella tasa de interés  $r$ , que satisface la siguiente ecuación:

$$\sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+r)^t} - I = 0$$

Sin embargo, es importante hacer notar que aunque en este trabajo se han utilizado proyectos con una sola TIR, también los hay sin tasas de rendimiento y con múltiples tasas internas de rendimiento.

Cuando la serie de los flujos de efectivo a lo largo de la vida de un proyecto, es formada en su totalidad, ya sea por ingresos o por egresos, entonces el proyecto no tiene tasa de rendimiento; tal es el caso de las inversiones en que solamente los gastos son conocidos y entre las cuales se puede citar por ejemplo, a todas aquellas inversiones no lucrativas. La finalidad de estas inversiones, es proporcionar cualquier tipo de beneficio a los trabajadores de una empresa.

Cuando esto sucede no es posible determinar la TIR de cada proyecto de inversión en forma separada; pero se puede aplicar en forma incremental para seleccionar el proyecto más adecuado de la siguiente manera:

Cuando se trata de un problema de selección entre varios proyectos de los cuales únicamente los egresos son conocidos; entonces se supone implícitamente que, o bien todos generan los mismos ingresos, o bien, que con todos se ahorra lo mismo.

En estas circunstancias lo que se hace primero, es categorizar a los proyectos de acuerdo a la magnitud de su inversión inicial de manera creciente, es decir:

Supóngase que se tienen  $N$ -proyectos tales que tanto su costo de capital, como su vida útil es para todos del  $k\%$  y de  $n$ -años respectivamente.

Entonces la categorización de éstos sería la siguiente:

Proyecto 1	Proyecto 2	.	.	Proyecto $N-1$	Proyecto $N$
$I_1$	$I_2$			$I_{N-1}$	$I_N$
$C_{1j}$	$C_{2j}$			$C_{N-1j}$	$C_{Nj}$

en donde:

- $I_r$  : es la inversión inicial del proyecto  $r$  con  $r \in \overline{1, N}$
- $\rightarrow I_r \leq I_{r+1} \quad \forall r \in \overline{1, N}$
- $C_{rj}$  : es el costo neto por año del proyecto  $r$  en el año  $j$  de su vida útil.  $j \in \overline{1, n}$

Con respecto a los costos, es de esperarse que:  $C_{2j} \geq C_{1j} \forall j$ ; puesto que en estos proyectos normalmente se espera que a medida que aumente la magnitud de la inversión inicial, se gaste menos.

Una vez categorizados los proyectos, lo que se hace es ir seleccionando el mejor, aplicando el método de la TIR de la siguiente forma: ~

Para los dos primeros:

Sea  $I$  la inversión adicional del proyecto 2, entonces:

$$I = I_2 - I_1$$

A el ahorro en los costos del proyecto 2, entonces:

$$A = C_{1j} - C_{2j} \quad \forall j \in \overline{1, n}$$

entonces la tasa de rendimiento  $r$  del incremento en la inversión es tal que:

$$\frac{C_{11} - C_{21}}{(1+r)} + \frac{C_{12} - C_{22}}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_{1n} - C_{2n}}{(1+r)^n} - (I_2 - I_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{C_{1i} - C_{2i}}{(1+r)^i} - (I_2 - I_1) = 0$$

Si  $r > k$ , entonces el proyecto 2 es mejor que el proyecto 1 y en consecuencia el proyecto 1 queda eliminado.

Si  $r = k$ , entonces es indiferente escoger cualquiera de los dos proyectos.

Si  $r < k$ , entonces el proyecto 1 es mejor que el proyecto 2 y por lo tanto, el proyecto 2 queda eliminado.

En el caso de  $N$ -proyectos, este procedimiento se repite  $N-1$  veces hasta seleccionar el mejor proyecto. Obsérvese que la alternativa: "no hacer nada", no es considerada.

Por otra parte, los proyectos de inversión con una sola TIR se les conoce como inversiones simples y se pueden identificar, cuando solamente existe un cambio de signo en la serie de sus flujos de efectivo; garantizando con esto, la existencia de una sola tasa interna de rendimiento.

Es importante señalar que este tipo de inversiones son sencillas de analizar y facilitan grandemente el proceso de toma de decisiones en una evaluación.

Cuando el número de cambios de signo en la serie de flujos de efectivo a lo largo de la vida de un proyecto es mayor que 1, se presenta el fenómeno de tasas múltiples de rendimiento.

A este tipo de inversiones se les conoce como inversiones no simples y se clasifican en puras (una sola TIR) y mixtas (más de una TIR).

Si se sustituye por  $X = 1/(1+r)$  en el cálculo de la TIR de un proyecto de inversión cuya vida estimada sea de  $n$  años, entonces el cálculo de la TIR del proyecto se transforma en encontrar las raíces reales positivas de un polinomio de grado  $n$ ; esto es:

$$F_1X + F_2X^2 + \dots + F_nX^n - I = 0$$

( $\Rightarrow$ )

$$\sum_{t=1}^n F_t X^t - I = 0$$

Nótese que en este caso, pueden existir tanto flujos de efectivo positivos como negativos.

Una regla sencilla para determinar el número de tasas internas de rendimiento de un proyecto o número de raíces reales positivas de un polinomio con coeficientes reales, es la regla de los signos de Descartes para un polinomio de grado  $n$ :

"El número de raíces reales positivas de un polinomio de grado  $n$  con coeficientes reales, es siempre menor o igual que el número de cambios de signo en la sucesión de sus coeficientes; si el número de tales raíces es estrictamente menor, entonces la diferencia será un número par".

Por otra parte, cuando se desee encontrar o conocer todas las raíces de un polinomio de grado  $n$ , se puede utilizar el algoritmo de Mueller. \*

\*Consultese el libro *Elementary Numerical Analysis*; tercera edición de Samuel D. Conte y Carl de Boor de la pág. 120-127.

**Teorema Central del límite.**

Dado que en el desarrollo de este trabajo se ha supuesto en varias ocasiones normalidad de las v.a. utilizadas, es necesario recalcar la importancia que tiene el Teorema Central de Límite; así como también, el papel predominante que juega -- Esta distribución en Estadística, no sólo por la valiosa aportación de este teorema; sino también, porque en la práctica es muy frecuente encontrar distribuciones aproximadas a la Normal, e incluso, la obtención de distribuciones en el Muestreo es más sencilla, desde el punto de vista analítico, cuando las muestras proceden de una población Normal.

El enunciado del teorema central del límite es el siguiente:

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una sucesión de v.a. independientes con función de densidad de probabilidad  $f_{X_i}(x)$  con media  $\mu_i$  y varianza finita  $\sigma_i^2 \forall i \in \overline{1, n}$  entonces:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - E(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sqrt{\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i)}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} N(0, 1)$$

O bien:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \bar{X}_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} N(0, 1)$$

Es importante hacer las siguientes observaciones:

- 1.)  $f_{X_i}(x)$  puede ser cualquier función de densidad de probabilidad.
- 2.) Es necesario que  $F_{X_i}(x)$  tenga varianza finita.
- 3.) Dado que en la práctica, por lo general el recorrido de la varianza siempre es finito, entonces la condición de varianza finita no es una restricción excesiva.
- 4.) El grado de aproximación, depende del tamaño  $n$  de la sucesión y de las particulares funciones de probabilidad.
- 5.) El teorema es aplicable tanto a distribuciones discretas como a distribuciones absolutamente continuas.

\* La demostración de este teorema, no entra dentro de los objetivos de este trabajo. Consúltese el libro *Introducción a la Teoría de la Estadística* de Mood y -- Graybill.

### Datos agrupados.

Hasta ahora se han analizado los flujos de efectivo de un proyecto, en términos de su función de densidad de probabilidad; sin embargo, puede suceder que la información que se tenga a cerca de estos flujos, sea proporcionada mediante una tabla de frecuencias.

Una tabla de frecuencias, es una tabla donde se resume la información de una tira de datos (en este caso, flujos de efectivo), facilitando su entendimiento.

Cabe señalar, que existen reglas empíricas para determinar el número de clases óptimas para resumir la información a través de una tabla de frecuencias.

Los elementos de una tabla de frecuencias son:

- Los representantes de clase, que deben distar lo mismo.
- La frecuencia simple, que es el número de datos que cayeron en esa clase.
- La frecuencia acumulada, que es el número de datos hasta un cierto representante de clase.
- La frecuencia relativa, que se obtiene como el cociente de la frecuencia simple entre el número total de datos.
- La frecuencia acumulada porcentual, que se obtiene como el cociente de la frecuencia acumulada hasta una cierta clase entre el número total de datos.

Cuando únicamente se dispone de una tabla de frecuencias, se utilizan las medidas de datos agrupados; siendo las más importantes, la media, la moda, la mediana, la varianza y el rango intercuartil.

### La media.

Supóngase que se tiene un conjunto de datos agrupados, donde  $k$  es el número de intervalos y  $c_i$  es el representante de clase o centro del intervalo  $i \forall i \in \overline{1, k}$ . Entonces, la media de ese conjunto de datos agrupados se calculará de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k c_i f_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^k f_i} \sum_{i=1}^k c_i f_i$$

en donde:

$f_i$ : es la frecuencia simple correspondiente a la clase  $i$   
 $\forall i \in \overline{1, k}$

$n$ : es el número de datos.

Nótese, que cuando se dispone de la función de densidad de probabilidad de los flujos de efectivo de un proyecto, la media de la distribución se estima con:



$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n r_i p_i$$

En este caso, las probabilidades son las frecuencias de los datos agrupados y por lo tanto, la suma de las frecuencias, es la suma de las probabilidades que es igual a uno.

Por otra parte, cuando se tiene certeza absoluta en la ocurrencia de los flujos de efectivo de un proyecto, la media se estima con:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

En este caso se puede interpretar, que como cada  $X_i$  se está multiplicando por  $1/n$ ; entonces  $1/n$  se puede interpretar como la probabilidad de ocurrencia fija o constante de cada resultado (equiprobabilidad) y de esta manera:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad \text{será} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

Ahora, si se compara este estimador con el estimador de la media para datos agrupados; se podría interpretar que cada  $X_i$  se está multiplicando por uno, que sería la frecuencia de cada resultado en el caso de datos agrupados.

Obsérvese, que en este caso  $\bar{X}$  es una v.a. y deja de serlo, cuando se sustituye cada  $X_i$  por  $x_i \quad \forall i \in \overline{1, n}$ .

Es conveniente señalar, que aunque en este trabajo se ha utilizado a  $\bar{X}$  como el mejor estimador para la media de una distribución, no siempre será el mejor estimador; sino que depende de la particular distribución de la v.a. (flujos de efectivo) que se vaya a analizar.

Por ejemplo, si  $X$  v.a. se distribuye como una Poisson con parámetro  $\lambda$ , es decir  $X \sim \text{Po}(\lambda)$ , entonces el mejor estimador para la media de esta distribución es  $\bar{X}$ ; sin embargo, si  $X$  se distribuye como una exponencial con parámetro  $\lambda$  ( $X \sim \text{expl}(\lambda)$ ), el mejor estimador para la media en este caso es  $1/\bar{X}$ .

En este trabajo se utilizó  $\bar{X}$  como el mejor estimador para la media, ya que en varias ocasiones se hizo el supuesto de normalidad en la v.a. que describía el comportamiento de los flujos de efectivo; sin embargo, también es posible hacer el mismo análisis cuando la v.a. que describe el comportamiento de los flujos de efectivo de un proyecto no sea normal.

Método estadístico para calcular cualquier tipo de percentil ( p ) de datos agrupados.

Paso 1.- Calcúlese la columna de la frecuencia acumulada.

Paso 2.- Identifíquese el intervalo que contiene el valor np  
en donde:

n : es el número de datos o tamaño de la muestra.

p : es el percentil que se desea calcular.

Paso 3.- Sea L el límite verdadero inferior de ese intervalo.

Paso 4.- El percentil de orden p es igual a:

$$L + \frac{(np - F_{i-1}) w}{f_i}$$

en donde:

$f_i$  : es la frecuencia simple de la clase que contiene a np.

$F_{i-1}$  : es la frecuencia acumulada de la clase inmediata anterior.

w : es el ancho del intervalo.

La mediana.

La mediana de un conjunto de datos agrupados, se calcula utilizando el método anterior haciendo p = 1/2.

ie.

$$\tilde{x} = L + \frac{(n/2 - F_{i-1}) w}{f_i}$$

La moda.

La moda de un conjunto de datos agrupados se calcula :

$$\text{Moda} = c_i + \frac{1}{2} \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2f_i - f_{i+1} - f_{i-1}} w$$

en donde:

$c_i$  : es el representante de clase o intervalo modal

$f_i$  : es la frecuencia simple de la clase modal.

$f_{i+1}$  : es la frecuencia simple de la clase inmediata superior.

$f_{i-1}$  : es la frecuencia simple de la clase inmediata anterior.

Cuando n > 20, la fórmula anterior es una buena aproximación.

La varianza.

La varianza de un conjunto de datos agrupados se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (c_i - \bar{x})^2 f_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^k f_i} \sum_{i=1}^k (c_i - \bar{x})^2 f_i$$

en donde:

$c_i$  : es el representante de clase o centro del intervalo  $i$ .

$f_i$  : es la frecuencia simple correspondiente a la clase  $i$ .

$\bar{x}$  : es la media del conjunto de datos agrupados.

$n$  : es el número de datos.

Cuando se tiene la función de densidad de probabilidad de los flujos de efectivo de un proyecto, la varianza de la distribución de los flujos se estima con:

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{x})^2 p_i$$

en donde:

$\bar{x}$  : es el estimador de la media de la distribución de los flujos de efectivo.

Por otra parte, cuando se tiene certeza absoluta en los flujos de efectivo de un proyecto, la varianza se estima con:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$$

en donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})$$

$x_i$  : representa el flujo de efectivo esperado en el periodo  $i$

Obsérvese que estas dos últimas ecuaciones, se les puede hacer las mismas observaciones o interpretaciones que se le hicieron a la media.

Rango intercuartil.

El rango intercuartil para un conjunto de datos agrupados, se obtiene calculando la diferencia que existe entre los percentiles de orden  $3/4$  y  $1/4$ .

ie. 
$$\text{Rango intercuartil} = X_{3/4} - X_{1/4}$$

en donde  $X_{3/4}$  y  $X_{1/4}$ , se obtienen con el método estadístico anteriormente descrito.

BIBLIOGRAFIA

Alexander M. Mood y  
Franklin A. Graybill

Gustavo Valencia R.  
Manuel Mendoza R.  
Francisco Aranda

James C. Van Horne

Jean Paul Rheault

J. F. Weston y  
Eugene F. Brigham

J. F. Weston y  
Eugene F. Brigham

J. R. Franks y  
J. E. Broyles

*Introducción a la Teoría  
de la Estadística.*  
Ed. Aguilar; 2a. Ed. 1963.

*Introducción a la Inferen-  
cia Estadística.*  
Comunicación Interna No. 42  
Dpto. de Matemáticas. Fac.  
Ciencias UNAM; 2a. Ed. 1978.

*Fundamentos de Administración  
Financiera.*  
Prentice-Han Hispanoamericana.  
1986.

*Introducción a la Teoría de --  
las Decisiones con aplicaciones  
a la Administración.*  
Ed. Limusa; 1ra. Ed. 1982.

*Finanzas en Administración.*  
Ed. Interamericana; 7a. Ed. 1985.  
Vol. 1 y 2 .

*Fundamentos de Administración  
Financiera.*  
Ed. Interamericana 5a. Ed. 1985.

*Técnicas modernas de Administra-  
ción Financiera.*  
Ed. Limusa; 1a. Ed. 1983.

Paul A. Samuelson

Curso de Economía Moderna.  
Aguilar S. A. de Ediciones  
Madrid, España 16a. Ed. 1969.

Raúl Coss Bu

Análisis y Evaluación de Pro-  
yectos de Inversión.  
Ed. Límusa; 1a. Ed. 1981.

Robert G. Murdick  
Donald D. Deming

La Administración de las Inver-  
siones de Capital.

Samuel D. Conte y  
Carl de Boor

Elementary Numerical Analysis -  
An Algorithmic Approach.  
Ed. International Student; --  
3a. Ed. 1983.

Vladimirovich Gneden-  
do Boris

The theory of probability.  
Ed. New York: chelsea 1968.