

0117J
2ej^o 3



PROBLEMAS LINEALES DUALES EN REDES DE FLUJO

Ana Elena Narro Ramírez

T E S I S

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

CIUDAD UNIVERSITARIA



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
GUATEMALA


DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

Profr. SERGIO FUENTES MAYA
P r e s e n t e

Comunico a usted que a propuesta del COORDINADOR DE LA
SECCION DE INV. DE OPERACIONES ha sido designado
como director de tesis del alumno(a) _____
ANA ELENA NARRO RAMIREZ para obtener el grado de
M EN I EN INV. DE OPERACIONES.

Mucho he de agradecerle su comunicaci3n, por escrito, de la
aceptaci3n a esta designaci3n y el nombre de la tesis a de-
sarrollar.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria 22 de julio de 1987
EL JEFE DE LA DIVISION


DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE

RESUMEN

La teoría de redes ha tenido un desarrollo impresionante en las últimas décadas debido a la importancia de los problemas que analiza y a la sencillez con que representa las situaciones que resuelve. Su campo de aplicación se ha expandido para abarcar problemas de transporte, comunicación, industria, distribución de bienes y servicios, teoría de inventarios, teoría de decisiones e inteligencia artificial, entre otros. Los problemas usuales incluyen dos tipos de redes: redes de flujo y redes de potencial, a cuya solución han contribuido fundamentalmente dos corrientes de desarrollo: Programación lineal y teoría de redes eléctricas.

En este trabajo se analiza la estructura, métodos de solución y aplicaciones de los problemas de distribución y diferencial lineales óptimos, así como los casos aparentemente particulares de problemas elementales duales. Se incluye el análisis detallado de existencia y factibilidad de soluciones, así como algoritmos para determinar las condiciones de optimalidad y ejemplos de aplicación. El marco metodológico que se emplea permite unificar y sintetizar los diversos enfoques y métodos de solución existentes, así como mostrar el paralelismo en el análisis de las redes de flujo y de potencial y su respectiva aplicación a problemas reales. ■

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CONTENIDO

	PAG.
INTRODUCCIÓN	1
1. CONCEPTOS BASICOS DE REDES	9
1.1 Definiciones	10
1.2 Trayectorias en una red	16
1.3 Algoritmo de enrutamiento	22
1.4 Dualidad de trayectorias y cortes	25
1.5 Intervalos de capacidad y generación	29
2. LOS PROBLEMAS DE DISTRIBUCION Y DIFERENCIAL ANALISIS DE FACTIBILIDAD	32
2.1 El problema de distribución factible	33
2.2 El problema de trayectoria mínima	44
2.3 El problema de diferencial factible	56
3. EL PROBLEMA DE DISTRIBUCION LINEAL OPTIMA	69
3.1 Descripción del problema de distribución	70
3.2 Existencia y caracterización de soluciones óptimas	75
3.3 Algoritmo de distribución óptima	82
3.4 Algoritmo simplex para flujos	94

4.	EL PROBLEMA DE DIFERENCIAL LINEAL OPTIMO	109
4.1	Descripción del problema de diferencial óptimo	110
4.2	Existencia y caracterización de soluciones	115
4.3	Algoritmo de diferencial óptimo	121
4.4	Algoritmo simplex para potenciales	130
5.	PROBLEMAS ELEMENTALES DUALES	149
5.1	Descripción de los problemas elementales duales	150
5.2	Relación con los problemas de distribución y diferencial	158
5.3	Algoritmo de ajuste eficiente	162
5.4	Algoritmo de las desviaciones	176
	CONCLUSIONES	184
	Bibliografía	186
	Anexo	191

INTRODUCCION

Una variedad importante de problemas de optimización resulta al analizar los problemas de la vida diaria relacionados con los sistemas de distribución de agua, gas, energía eléctrica, así como el transporte de bienes o personas de un lugar a otro usando vías de comunicación terrestre, aérea o marítima. Un aspecto común de todos estos problemas es el manejo del concepto de red, que en el caso del agua, corresponde a la red de tuberías que conducen a la misma a los lugares que lo requieren y, en el caso de la energía eléctrica representa a la red de distribución que conduce la corriente.

La ventaja más importante de manipular una red es su facilidad para representarla gráficamente de acuerdo con el adagio que establece que más vale un buen dibujo que mil palabras. Un dibujo adecuado permite mayor comprensión que una larga explicación y proporciona una guía para la intuición y el razonamiento. La estructura lógica y visual con que se han analizado las redes (o gráficas en términos matemáticos) ha permitido el desarrollo de una gran variedad de ideas dotadas de sencillez y claridad.

El antecedente histórico de la teoría de redes es la teoría de gráficas que surgió hace aproximadamente doscientos años con Leonhard Euler y su famoso problema de los puentes de Königsberg. El trabajo creativo asociado con este problema

originó el análisis de otros problemas de gráficas que el mismo Euler y Cauchy⁵ analizaron. Sin embargo, es Kirchhoff, en 1847, el primero en utilizar los conceptos de gráficas para el análisis de un problema real relacionado con circuitos eléctricos. Posteriormente, Hamilton²³ en 1856 usó gráficas para analizar algunos problemas geométricos, mientras que Gordan²², en 1873, las utilizó en el análisis de desigualdades lineales. Por otra parte, Cayley⁶, en 1875, usó algunos resultados de gráficas para analizar las estructuras combinatorias posibles de algunos derivados del carbón. Otros resultados en esta area fueron obtenidos por Sylvester.³⁰

El desarrollo de la teoría de redes propiamente dicha, tiene su origen en el problema de transporte formulado y resuelto parcialmente por Hitchcock²⁵, en 1941. Sin embargo, su discusión no tuvo impacto hasta el advenimiento de la programación lineal con el método simplex de Dantzig^{7, 8} en 1948. En estos años existe un desarrollo floreciente de la teoría de programación lineal con Gale^{19, 20}, Kuhn y Tucker²⁹, que establecieron el teorema de dualidad y con ello una concepción teórica formal de esta teoría.

La especialización de las técnicas de programación lineal originaron nuevos resultados en el caso del problema clásico de transporte. En esta línea Dantzig, Ford y Fulkerson contribuyeron de manera determinante, en los años cincuenta.

Un impulso importante en el análisis de redes de flujo se tie¹³ne con Ford y Fulkerson en los años sesenta con su famoso libro de flujo en redes (que actualmente es un clásico), donde se introduce y resuelve el problema de flujo máximo y su correspondiente dual; el problema de corte mínimo, que es un problema combinatorio. En este libro se empieza a hacer énfasis en la relación entre las redes de flujo y la optimización combinatoria. Esta línea se encuentra en amplio desarrollo. (Papadimitrouc. y Steiglitzk "Combinatorial Optimization Algorithms and Complexity", Prentice-Hall, 1982). También se introducen otros problemas, entre ellos el problema de flujo a costo mínimo que se resuelve usando el método de las desviaciones (out-of-kilter)¹⁷, que consiste en reducir paulatinamente las discrepancias entre los valores del flujo y el potencial, en cada arco, y la curva de optimalidad hasta anularlas.

Existe una línea de desarrollo paralela a las redes de flujo y es la relacionada con redes de potencial analizadas en Ingeniería eléctrica. En esta línea el principal contribuyente al desarrollo de métodos de análisis es George Minty³¹⁻³⁴ durante los años 1957 a 1974. Una de sus primeras contribuciones es un método de solución al problema de la ruta más corta, semejante al dado por Dijkstra. Sin embargo, su principal aportación es en el análisis de redes eléctricas donde maneja tanto la primera ley de Kirchhoff (relacionada con la igualdad de flujos que entran y salen de cada nodo) como con la segunda ley de Kirchhoff (relacionada con la caída de potencial, en

un circuito, igual a cero). Es Minty quien propone la "técnica de pintado de los arcos" que tan frecuentemente se emplea en análisis de redes actualmente y que equivale al lema de Farkas de la programación lineal. Esta técnica además de su sencillez conceptual tiene una amplia aplicación en aspectos computacionales. Otros contribuyentes al desarrollo de estas técnicas son Dennis (con programación matemática en redes eléctricas), Berge y Ghouila-Houri, así como Iri.

Una de las dificultades más grandes cuando se trata de rescatar conceptos y métodos de análisis de un campo diferente al que se trabaja, es la terminología y la falta de motivación para aceptar definiciones y resultados. En los años setenta esta dificultad es comprendida. Se proponen diversas terminologías así como se realizan esfuerzos para unificar y sintetizar el avance de las redes de flujo y potencial y explicar su relación con la programación lineal y sus posibles extensiones.

El principal autor que ha contribuido a unificar, sintetizar y extender los métodos de análisis de redes de flujo y potencial es R.T. Rockafellar³⁷ en su reciente trabajo sobre programación monotrópica. Dicho trabajo extiende los métodos de análisis de redes al caso de programación lineal y, aún más, el caso de funciones convexas con una sola variable (de ahí el nombre de monotrópica) y demuestra que los resultados de dualidad y holgura complementaria descritos en programación lineal son válidos para este caso general. El aspecto básico de su desarrollo es el uso de conceptos de dualidad.

El objetivo de este trabajo es analizar los problemas lineales duales de las redes de flujo y potencial que resultan en campos tan diversos como la investigación de operaciones, redes eléctricas y optimización combinatoria. El análisis se realiza en un marco metodológico que unifica diversos enfoques y métodos de solución de los mencionados campos y permite un enriquecimiento de ideas y formas de manipulación de las redes de flujo y potencial. Como resultado se tienen nuevas interpretaciones (especialmente económicas) a los métodos de solución existentes, algunos de los cuales parecían olvidados. Este aspecto es complementado por el floreciente desarrollo de la ciencia de la computación.

Conviene señalar que el enfoque del análisis de los problemas lineales duales de redes de flujo y potencial descritos en este trabajo ha sido elegantemente generalizado al caso de la programación lineal y la programación monotrópica, (por Rockafellar (ref.37)); consistente en la minimización de una suma de funciones convexas de una sola variable cada una de ellas sujetas a restricciones lineales en las mismas variables. Un aspecto menor pero significativo es que la terminología que se emplea permite estandarizar los conceptos y definiciones usuales de redes de flujo y potencial.

Este trabajo se desarrolla como sigue: En el primer capítulo se presenta la terminología usada para referirse a los diversos componentes y conceptos de redes de flujo y potencial empleados en este trabajo. Se enfatiza la relación de dualidad

de conceptos tales como trayectoria y corte y se presentan algunos de los algoritmos básicos para recorrer o analizar una red, como el algoritmo de enrutamiento.

En el capítulo dos se describen y analizan dos conjuntos de restricciones que dan origen a los denominados problemas de distribución y diferencial factible. Para tales problemas se establecen las condiciones "a priori" que garantizan existencia y, se describen algoritmos que determinan una solución factible (si existe). En este análisis se discuten brevemente dos problemas clásicos de redes: flujo máximo y trayectoria mínima (o popularmente ruta más corta) y sus duales. Los algoritmos básicos que se discuten son los debidos a Ford-Fulker son y Dijkstra con algunas modificaciones.

En el capítulo tres se discute el problema de distribución con costos lineales consistente en la minimización de una función de costos lineal en los flujos que pasan por los arcos, los duales están sujetos a restricciones de capacidad en cada arco y de disponibilidad en cada nodo. Una vez motivado el formato de este problema (que incluye al problema de transporte, asignación y otros) se establecen las condiciones de existencia y optimalidad de soluciones. Asimismo se proporcionan dos métodos de solución que se justifican e interpretan adecuadamente.

En el capítulo cuatro se discute el problema de diferencial lineal óptimo consistente en la maximización de una función

lineal de los potenciales en los nodos sujeto a restricciones sobre las diferencias de potencial que existen en cada arco. Se describe el formato de este problema (que incluye el problema de ruta crítica, costos compartidos y localización de instalaciones entre otros) y se establecen las condiciones de existencia y optimalidad de las soluciones. Asimismo se proporcionan dos métodos de solución que se ilustran y justifican convenientemente.

En el capítulo quinto se analizan dos casos aparentemente particulares pero equivalentes de los problemas de distribución y diferencial lineales óptimos, los denominados problemas elementales duales. Primero se describen tales problemas y se demuestra que son duales a partir de resultados clásicos de programación lineal. También se establecen las condiciones de existencia y optimalidad de soluciones factibles. Es interesante resaltar que el teorema de holgura complementaria que caracteriza las soluciones óptimas se traduce en la denominada curva de optimalidad asociada a cada arco. Finalmente se describen dos métodos de solución que se justifican e ilustran el algoritmo de ajuste eficiente y el algoritmo de las desviaciones (out-of-kilter). El primer algoritmo tiene una interpretación económica sencilla mientras que el segundo resulta fácil de aplicar y sólo requiere un mínimo de conceptos teóricos por lo que constituye una de las técnicas más aplicadas en diversos campos de la ingeniería. Dichos métodos unifican

una variedad importante y algunas veces, poco conocida de métodos de solución de problemas básicos de redes de flujo y potencial.

Las conclusiones se presentan en el último capítulo y se incluye un anexo que describe algunos resultados técnicos empleados en este trabajo. ■

CAPITULO I

CONCEPTOS BÁSICOS DE REDES

En el análisis de redes de flujo existe un conjunto bien definido de problemas básicos como ruta más corta, flujo máximo, flujo a costo mínimo que requieren de un enfoque integral. Dichos problemas han sido resueltos usando diversas técnicas e introduciendo distintas terminologías que dependen del campo en que se analicen. En este capítulo se presentan una nomenclatura sencilla y que rápidamente ha ganado popularidad así como diversos conceptos y resultados que son utilizados en el desarrollo posterior de este trabajo.

Este capítulo se desarrolla como sigue:

Primeramente se establecen las definiciones de flujo y potencial en una red así como diversos resultados básicos. A continuación se analiza el concepto de trayectoria en una red y su concepto dual: el corte. Un algoritmo para determinar una trayectoria de un conjunto a otro se proporciona en la tercera sección: el algoritmo de enrutamiento. La dualidad de los problemas de trayectoria y corte se analizan en la penúltima sección para posteriormente introducir los conceptos de intervalo de generación de una tensión, diferencia de potenciales.

1.1 Definiciones.

Una red es una pareja de conjuntos A y N y una función $f: A \rightarrow N \times N$ que asocia a cada elemento $j \in A$ un par $(i, i') \in N \times N$, donde $i \neq i'$. Los elementos de N reciben el nombre de nodos y los de A se llaman arcos. Los elementos de A tienen dirección que se representa mediante una flecha. Para denotar $f(j) = (i, i')$, con $j \in A$ e $i, i' \in N$, se utiliza simplemente $j \sim (i, i')$; los nodos i e i' son respectivamente el nodo inicial y el nodo final de j . Si (i, i') está asociado a un solo arco, puede escribirse $j = (i, i')$; nótese que si todo arco corresponde de manera única a una pareja de nodos, entonces el conjunto A puede identificarse con un subconjunto de $N \times N$. Una red con esta característica se llama digráfica.

Un concepto muy utilizado en teoría de redes es la función de incidencia que permite una representación matricial de las redes. La función de incidencia de la red G se define como:

$$e(i, j) = e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es nodo inicial del arco } j \\ -1 & \text{si } i \text{ es nodo final del arco } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta función puede representarse mediante una matriz E de incidencia, de dimensión $m \times n$, (con $m = |N|$ y $n = |A|$) cuyo (i, j) -ésimo elemento es e_{ij} .

Flujos y divergencias.

En ocasiones los arcos de una red tienen asociados parámetros que representan, por ejemplo la cantidad de agua que fluye a través de una tubería, la cantidad de productos transportados a través de una ruta, la cantidad de energía eléctrica que fluye por un cable, etc., en estos casos resulta útil el concepto de flujo en una red.

Un flujo en una red G es una función $x:A \rightarrow \mathbb{R}$. El valor $x(j)$ se conoce como flujo a través del arco j . Un flujo puede denotarse mediante un vector $x \in \mathbb{R}^{|A|}$ en donde la j -ésima componente de x es $x(j)$.

Conviene señalar que la cantidad de flujo que "sale" de un nodo i es la suma de los flujos $x(j) > 0$ tales que $e(i,j) = 1$ más la suma de los flujos $x(j) < 0$ tales que $e(i,j) = -1$; es decir, el flujo total que sale de i es la suma de los términos positivos $e(i,j)x(j)$. Análogamente, la cantidad total de flujo que "llega" al nodo i es la suma de los términos negativos $e(i,j)x(j)$. La suma de todos los términos $e(i,j)x(j)$ es entonces la cantidad total de flujo que sale de i menos la cantidad total de flujo que llega a i y recibe el nombre de divergencia del flujo en el nodo i . Esta cantidad se denota con $y(i)$; es decir:

$$y(i) = \sum_{j \in A} e(i,j)x(j) = \{\text{divergencia de } x \text{ en } i\}$$

Se dice que el nodo i es un nodo fuente si $y(i) > 0$; análogamente, i es un nodo sumidero si $y(i) < 0$. Si $y(i) = 0$ se dice que el flujo se conserva en i . La función de divergencia asociada al flujo x puede expresarse matricialmente mediante el vector:

$$y = Ex = \text{div } x$$

Una propiedad importante es que la cantidad total de flujo en los nodos fuente es igual a la cantidad total de flujo en los nodos sumidero; es decir, el flujo "generado" es igual al flujo "requerido". Este resultado se conoce como principio de divergencia total.

Principio de divergencia total. En una red G se cumple que:

$$\sum_{i \in N} y(i) = 0, \text{ donde } y = \text{div } x.$$

Observe que

$$\sum_{i \in N} y(i) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in A} e(i,j)x(j) = \sum_{j \in A} x(j) \sum_{i \in N} e(i,j) = 0$$

puesto que, como se había señalado anteriormente, cada columna de la matriz de incidencia tiene exactamente un 1, exactamente un -1 y el resto de los elementos son 0. ■

Potenciales y tensión.

Un concepto dual al de flujo lo constituye el de potencial. Un potencial en una red G es una función u que asocia a cada nodo i de G un real $u(i)$ llamado potencial en i . La tensión a través del arco $j = (i, i')$ se define como la diferencia de potenciales:

$$v(j) = u(i') - u(i) = [\text{tensión a través de } j]$$

que también puede expresarse:

$$v(j) = - \sum_{i \in N} u(i) e(i, j),$$

o, expresado matricialmente:

$$v = - uE = \Delta u.$$

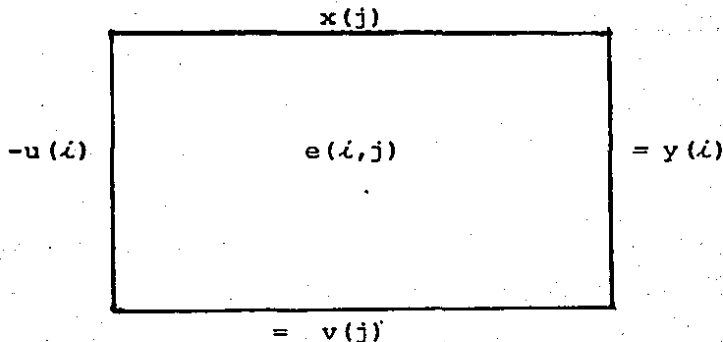
Las fórmulas $y = Ex$ y $v = - uE$ definen una pareja de sistemas duales y pueden expresarse mediante una tabla como la mostrada en la figura sig. Los renglones corresponden al sistema flujo-divergencia mientras que las columnas corresponden al sistema potencial-tensión.

El conjunto de todos los diferenciales se preserva bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar; luego, este conjunto es un subespacio de $R^{|A|}$ llamado espacio de diferenciales. El espacio diferencial puede interpretarse como el espacio generado por los renglones de la matriz de incidencia E de la red o equivalentemente como el rango de la trans

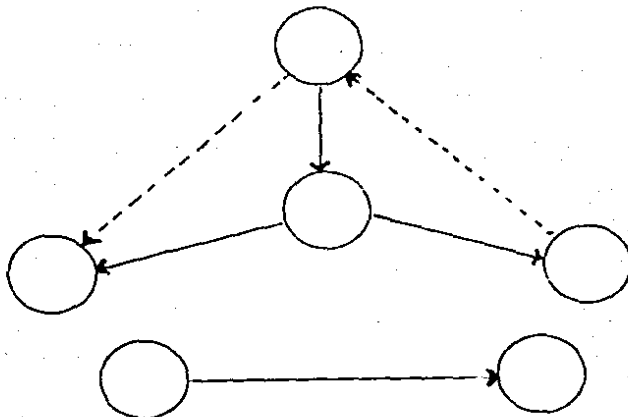
formación lineal $u \rightarrow -uE$ definida del espacio $\mathbb{R}^{|N|}$ al espacio $\mathbb{R}^{|A|}$. Nótese que esta transformación es la negativa adjunta de la transformación $x \rightarrow Ex$. El espacio complementario ortogonal al espacio de diferenciales es el espacio de circulaciones que se define enseguida. Una circulación es un flujo x para el cual $\text{div } x = 0$; es decir, un flujo que se conserva en todo nodo. Las circulaciones se preservan bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar por lo que forman un subespacio lineal de $\mathbb{R}^{|A|}$ llamado espacio de circulaciones. Se observa que el espacio de circulaciones es el espacio nulidad de la matriz de incidencia E de la red; es decir, es el núcleo de la transformación lineal $x \rightarrow Ex = \text{div } x$ definida del espacio $\mathbb{R}^{|A|}$ al espacio $\mathbb{R}^{|N|}$.

Fórmula de conversión. Sean x un flujo y u un potencial. Si $y = \text{div } x$ y $v = \Delta u$ entonces, $v \cdot x = -u \cdot y$

Prueba. $v \cdot x = (-uE) \cdot x = -u(Ex) = -u \cdot y$



Finalmente es necesario definir los siguientes conceptos, que serán utilizados en capítulos subsecuentes: Se llama árbol a una red conectada y sin circuitos. Cuando un árbol incluye a todos los nodos de una red G se dice que se trata de un árbol de expansión. A un conjunto $F \subset A$ de una red G se le denomina bosque cuando toda componente de la subred formada por arcos de F y los nodos en los que éstos inciden es un árbol. Un bosque es máximal si no está estrictamente contenido en ningún otro bosque de G . Es interesante notar que en una red conectada árbol maximal y árbol de expansión son conceptos equivalentes. Por otro lado, un conjunto de arcos $F' \subset A$ forma un cobosque en la red G , si al borrar todos los arcos que pertenecen a F' el número de componentes de G no aumenta. Un cobosque maximal es el complemento de un bosque maximal, cuando G es conectada, un conjunto F' es cobosque en G si A/F' contiene un árbol de expansión de G .



Bosque y cobosque correspondiente

1.2 Trayectorias en una red.

Una trayectoria P en una red G es una secuencia finita de la forma:

$$i_0, j_1, i_1, j_2, \dots, j_r, i_r, \quad r > 0,$$

donde $i_k \in N$, para todo $k = 1, \dots, r$, y $j_k \sim (i_{k-1}, i_k) \text{ ó } j_k \sim (i_k, i_{k-1})$ (es decir, no importa la dirección del arco j_k), para todo $k = 1, \dots, r$. Los nodos i_0 e i_r reciben respectivamente los nombres de nodo inicial y final de la trayectoria P. Un modo alternativo de denotar la trayectoria es $P: i_0 \rightarrow i_r$. En el caso particular en que el nodo i_0 coincide con el nodo i_r , la trayectoria P recibe el nombre de circuito.

Si el arco es de la forma $j_k \sim (i_{k-1}, i_k)$ se dice que j_k se recorre positivamente; si por el contrario $j_k \sim (i_k, i_{k-1})$ se dice que j_k se recorre negativamente. Una trayectoria para la cual todos los arcos son recorridos positivamente es una trayectoria positiva; una trayectoria para la cual se cumple que todos los arcos se recorren negativamente es una trayectoria negativa. Como caso particular de estas definiciones surgen los conceptos de circuitos positivo y negativo.

Conviene señalar que la sola secuencia de nodos (o la sola secuencia de arcos) de una trayectoria puede resultar insuficiente para describirla puesto que entre dos nodos puede existir

más de un arco. Sin embargo, si la red es una digráfica, puede utilizarse como notación alternativa para la trayectoria P una secuencia de nodos y flechas que indiquen el sentido del arco entre dos nodos adyacentes:

$$P: i_0 \rightarrow i_1 \leftarrow i_2 \dots \rightarrow i_k$$

Cuando un arco se recorre más de una vez en una trayectoria, ya sea positiva o negativamente, se dice que P tiene multiplicidades. Si cada arco y cada nodo de la secuencia son recorridos una sola vez entonces P es una trayectoria simple o elemental. Cabe hacer notar que, para cualquier trayectoria P , puede construirse una trayectoria elemental eliminando los nodos y arcos que se repitan.

En una trayectoria sin multiplicidades P se puede particionar el conjunto de arcos en los recorridos positivamente y los recorridos negativamente, denotándose estos conjuntos con P^+ y P^- respectivamente. Puede entonces definirse la función de incidencia de los arcos de P como:

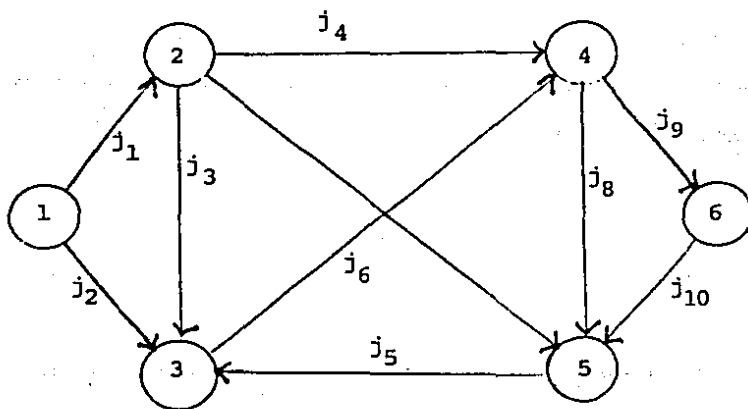
$$e_p(j) = e(j, P) = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in P^+ \\ -1, & \text{si } j \in P^- \\ 0, & \text{si } j \notin P. \end{cases}$$

Obsérvese que esta función, además de indicar la orientación de un arco, puede interpretarse como un flujo en la red G ; de hecho, representa una unidad de flujo circulando a través de P . En el caso en que P no sea un circuito se tiene que

$y = \text{div } e_p$ tiene valor 1 y -1 en los nodos inicial y final de P respectivamente y 0 en los demás nodos;. Si P es un circuito entonces e_p es una circulación.

Otro concepto útil que involucra trayectorias es el de conexidad. Se dice que la red G es conexa si para todo par de nodos diferentes s, s' , existe una trayectoria $P:s \rightarrow s'$. Si la red G no es conexa puede particionarse en k componentes conexas.

En la figura se muestra una red conexa y se observa que $P:1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$ es una trayectoria positiva mientras que: $P:1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ es simplemente una trayectoria.



Trayectoria de un conjunto a otro.

Una consideración importante en la determinación del flujo máximo en una red es la dirección en que puede circular flujo a través de un arco; es decir, debe tenerse en cuenta si el flujo puede aumentarse, decrementarse, ambas cosas o ninguna de ellas. Para indicar que cambios son factibles para el flujo a través de un arco se utiliza una "coloración" en la red.

En una red pueden distinguirse cuatro clases de arcos: aquéllos que pueden recorrerse en ambos sentidos, aquéllos que pueden ser recorridos sólo en su sentido, los que pueden recorrerse sólo en sentido contrario al suyo y los que no pueden recorrerse en ningún sentido. Los arcos de la primera clase serán "coloreados" de verde, los de la segunda de blanco, los de la tercera negro y finalmente, los de la cuarta clase se pintarán de rojo. De esta manera se define una partición de A en cuatro conjuntos (alguno de los cuales puede ser vacío) llamada coloración de A .

Con el concepto de coloración es posible caracterizar las restricciones de una determinada trayectoria; por ejemplo, que ésta sea positiva. Por otro lado, se desea determinar una trayectoria en la cual se respeten las restricciones de recorrido para cada arco. En términos de la coloración de A , el problema puede establecerse de la siguiente manera:

Problema de la trayectoria coloreada (o pintada). Sean dos conjuntos no vacíos de nodos N^+ y N^- en la red G y sea una coloración de A consistente en los colores verde, blanco, negro y rojo. El problema es determinar una trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ (es decir, $P: i_0 \rightarrow i_r$ con $i_0 \in N^+$ e $i_r \in N^-$) tal que todo arco de P^+ es verde o blanco y todo arco de P^- es verde o negro.

Una trayectoria compatible con la coloración dada es una trayectoria con estas características. Luego, una solución al problema formulado anteriormente es una trayectoria compatible de N^+ a N^- .

La herramienta empleada para garantizar la no existencia de trayectorias es el concepto de corte o cortadura. Como se verá posteriormente este concepto juega un papel de dualidad.

Considérese la siguiente notación para conjuntos de nodos arbitrarios S y S'

$$[S, S']^+ = \{j \in A \mid j^-(i, i') \text{ con } i \in S, i' \in S'\}$$

$$[S, S']^- = \{j \in A \mid j^-(i', i) \text{ con } i \in S, i' \in S'\}$$

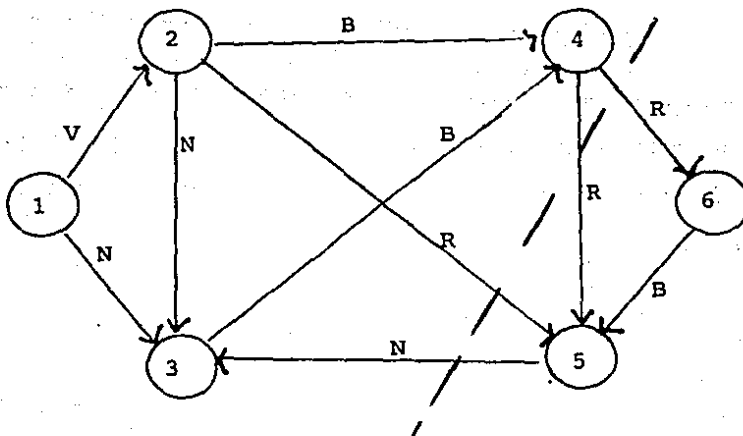
Se centrará la atención para el caso donde $S' = N/S$ (complemento de S en N).

El conjunto signo $Q = [S, N/S]$, formado por los conjuntos de arcos $[S, N/S]^+$ y $[S, N/S]^-$ los cuales se denotarán como Q^+ y Q^- respectivamente, se llama corte de la red G . Obsérvese que

toda trayectoria de S a N/S contiene un arco de Q ; de este hecho se deriva el nombre de corte. Más aún, si $P: i_0 \rightarrow i_r$ es una trayectoria tal que $i_0 \in S$, $i_r \notin S$, Q es un corte de G y $j \in P \cap Q$, entonces o bien $j \in P^+ \cap Q^+$ o bien $j \in P^- \cap Q^-$. La función influencia para los arcos de un corte se define de manera análoga a los de una trayectoria

$$e_Q(j) = e(j, Q) = \begin{cases} 1, & j \in Q^+ \\ -1, & j \in Q^- \\ 0, & j \notin Q. \end{cases}$$

Ejemplo. En la red de la figura se muestra una coloración de los arcos y se observa que $P: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ es una trayectoria compatible y $Q = [S, N/S]$ donde $S = \{5, 6\}$ es un corte.



1.3 Algoritmo de enrutamiento.

Este algoritmo determina una solución al problema de la trayectoria compatible con una coloración dada en la red G o bien detecta un corte particular.

La idea general del algoritmo consiste en construir un conjunto de nodos $S \subset N^+$ y una función $\theta: S/N^+ \rightarrow A$, la cual asigna a cada nodo $i \in S/N^+$ un arco $j \in A$; este apuntador del nodo servirá para recuperar las trayectorias construidas de N^+ a S/N^+ . La función θ recibe el nombre de enrutamiento (ó θ -enrutamiento) de S con base en N^+ y debe satisfacer:

(i) Para cada $i \in S/N^+$, $\theta(i)$ es un arco que une i con algún nodo de S .

(ii) Cuando se genera una secuencia $i_0, \theta(i_0), i_1, \theta(i_1), \dots, i_k, \theta(i_k), i_{k+1}$, en donde i_h es el otro extremo de $\theta(i_{h-1})$ ($h=1, 2, \dots, k+1$), eventualmente se alcanza un nodo de N^+ . El reverso de esta secuencia es entonces una trayectoria de N^+ a i .

Por otro lado, el algoritmo debe generar trayectorias compatibles con la coloración dada por lo que $\theta(i)$ debe ser verde o blanco si i es su extremo inicial y debe ser verde o negro en caso contrario.

Algoritmo: DE ENRUTAMIENTO

Propósito: Determinar una trayectoria de N^+ a N^- compatible con la coloración dada.

Descripción

Sea $S = N^+$ y \emptyset vacío. Determinar el corte $Q = [S, N/S]$, si no existe $j \in Q^+$ verde o blanco ni $j \in Q^-$ verde o negro, el algoritmo termina y no existe solución al problema.

De otra manera $\emptyset(i) = j$, con $i \notin S$. $S = S \cup \{i\}$, si $i \in N^-$ el algoritmo se detiene y los arcos del enrutamiento \emptyset forman una trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ compatible con la coloración, si $i \notin N^-$ se reinicia el proceso. ■

El algoritmo de enrutamiento es un proceso iterativo que adiciona aquéllos nodos que son alcanzados por una trayectoria compatible. El algoritmo utiliza, en cada paso, la formación de un corte y verifica si todos los arcos positivos son negros o rojos y si todos los arcos negativos son blancos o rojos.

Justificación del algoritmo de enrutamiento.

Obsérvese que se inspecciona si existe un arco j verde o blanco en Q^+ o un arco j verde o negro en Q^- para construir el θ -enrutamiento de S que por tanto es compatible con la coloración en cada iteración; nótese también que mientras el algoritmo no termine se cumple que $S \cap N^- = \emptyset$. Por lo anterior se concluye que si el algoritmo termina, cuando se detecta $i \in N^-$, se ha determinado una trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ compatible con la coloración. Por otro lado, si durante la inspección se encuentra que no existe un arco j con las características pedidas, el corte Q satisface que todo $j \in Q^+$ es negro o rojo y todo $j \in Q^-$ es blanco o rojo. En este caso no existe solución al problema de la trayectoria coloreada puesto que para que exista una trayectoria P compatible debe existir al menos un arco $j \in P^+ \cap Q^+$ o $j \in P^- \cap Q^-$ y esto es imposible sin violar las restricciones de color en la red.

El algoritmo termina en un número finito de pasos puesto que en cada iteración se define la función θ al menos para un nodo i y el número de nodos es finito. Más aún, el nodo etiquetado cumple $i \notin S$; de aquí que, si en cada iteración se etiqueta sólo uno, en el peor de los casos se realizarán tantas iteraciones como nodos haya fuera de $N^+ \cup N^-$ además de la iteración final en donde se detecta $i \in N^-$. Por lo tanto el algoritmo termina en, a lo más, $|N| - |N^+| - |N^-| + 1$ iteraciones. ■

1.4 Dualidad de trayectorias y cortes.

El problema complementario al de encontrar una trayectoria compatible con una coloración dada es el corte compatible. Se dice que el corte Q separa N^+ de N^- si es de la forma $\{S, N/S\}$, para algún $S \subset CN$, tal que $N^+ \cap S$ y $N^- \cap S = \emptyset$. Se denotará Q con $N^+ + N^-$. En términos de coloraciones se tiene:

Problema del corte coloreado (o pintado). Sean N^+ y $N^- \subset CN$ tales que $N^+ \cap N^- = \emptyset$. Sea una coloración en la red G con los colores verde, blanco, negro y rojo. El problema es determinar un corte $Q: N^+ + N^-$ tal que todo arco de Q^+ sea rojo o negro mientras que todo arco de Q^- sea rojo o blanco.

Un corte que cumple las restricciones de color se dice compatible con la coloración y si además separa N^+ de N^- constituye la solución al problema del corte coloreado. Obsérvese la dualidad entre las restricciones de color para trayectorias y cortes.

El algoritmo de enrutamiento constituye una prueba constructiva para el siguiente resultado de dualidad.

Teorema (de la red coloreada). Sean N^+ y $N^- \subset CN$, tales que $N^+ \cap N^- = \emptyset$. Entonces, para toda coloración de la red G con los colores verde, blanco, negro y rojo, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es válida:

- a. El problema de la trayectoria coloreada tiene solución P.
- b. El problema del corte coloreado tiene solución Q.

El teorema establece dos alternativas excluyentes la primera relacionada con la existencia de una trayectoria compatible y la segunda con la existencia de un corte. Este resultado es semejante al Lema de Farkas de la programación lineal y es interesante puntualizar que es equivalente a dicho resultado.

Lema de Minty.

Existe otro resultado fuertemente relacionado con el teorema de la red coloreada. Este resultado es el lema de Minty y se utiliza frecuentemente de manera constructiva. Este resultado utiliza el concepto de corte elemental paralelo al de trayectoria elemental.

Un corte Q es elemental si al remover sus arcos de la red, el número de componentes conexas se incrementa en una unidad. Si la red G es conexa, esto equivale a que Q tenga la forma $[S, N/S]$, donde $N \neq S \neq \emptyset$; todo par de nodos de S pueden ser unidos mediante una trayectoria que sólo utilice nodos de S y todo par de nodos en N/S pueden ser unidos con trayectorias cuyos nodos sean todos elementos de N/S.

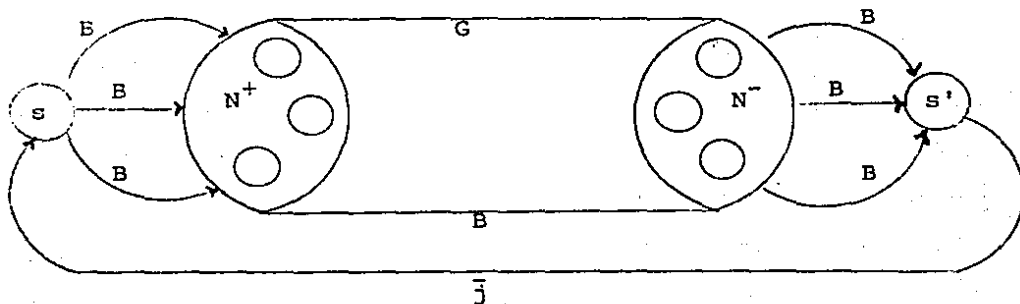
Lema de Minty. Considere una red G con pintado de arcos verde, blanco, negro o rojo. Entonces, dado cualquier arco \bar{j} blanco o negro una y sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a. Existe un corte Q (elemental) compatible con la coloración que usa \bar{j} .
- b. Existe un circuito (elemental) compatible con la coloración que usa \bar{j} .

Prueba. Aplicaremos el teorema de la trayectoria pintada de la siguiente manera: Se aplica el algoritmo de enrutamiento para determinar una trayectoria $P: N^+ + N^-$ compatible con el pintado de la red con $N^+ = \{s\}$ y $N^- = \{s'\}$ donde $s = i'$ y $s' = i$ cuando $\bar{j} \sim (i, i')$ es blanco y $s = i$ y $s' = i'$ si \bar{j} es negro. Si el algoritmo termina con un corte compatible $Q = [N, N/S]$ dado que $s \in S$ y $s' \notin S$, $\bar{j} \in Q$ la primera condición del lema de Minty queda satisfecha. En cambio, cuando el algoritmo detecta una trayectoria elemental $P': s + s'$ compatible con la coloración, esta trayectoria no puede usar \bar{j} dado que si lo usara no podría ser compatible con la coloración por la manera en que s y s' fueron elegidos, entonces el circuito $P = P' \cup \{\bar{j}\}$ es un circuito elemental compatible con la coloración que satisface la segunda condición del lema de Minty. ■

Proposición. El teorema de la red coloreada es equivalente al lema de Minty.

Prueba. Sólo resta demostrar que el teorema de la red coloreada se deriva del lema de Minty. Sea $G = [N, A]$ una red coloreada y N^+ y $N^- \subset N$ con $N^+ \cap N^- = \emptyset$. Si al aplicar el lema de Minty a la red aumentada G' de la siguiente figura



se obtiene un circuito P compatible tal que $\bar{j} \in P$, esto es, $P: s' \rightarrow s \rightarrow i \rightarrow P' \rightarrow k \rightarrow s'$ con $i \in N^+$, $k \in N^-$ y P' una trayectoria de N^+ a N^- compatible que satisface la primera condición del teorema de la red coloreada. En cambio, si se obtiene un corte Q , con $\bar{j} \in Q$, este corte no puede contener otro de los arcos añadidos a G para formar G' entonces los demás arcos de Q son arcos de la red original y el corte en G' induce un corte compatible en G que satisface la condición del teorema de la red coloreada. ■

1.5 Intervalos de capacidad y generación.

En el análisis de redes de flujo se exige que el valor del flujo esté en un intervalo cerrado no vacío $C(j)$ llamado intervalo de capacidad para j . Un flujo x en la red G se dice factible con respecto a las capacidades si $x(j) \in C(j)$, para todo $j \in A$. Los intervalos de capacidad se denotan por $C(j) = [c^-(j), c^+(j)]$, en donde $c^-(j)$ y $c^+(j)$ son respectivamente, la menor y la mayor cantidad de flujo que puede circular por el arco j . Las únicas restricciones que deben satisfacer $c^-(j)$ y $c^+(j)$ son: $c^-(j) \leq c^+(j)$, $c^+(j) > -\infty$, $c^-(j) < \infty$.

El establecimiento de estos intervalos de capacidad tiene como consecuencia indirecta algunos resultados importantes. Uno de ellos restringe el flujo que puede pasar a través de un corte. Específicamente, el flujo de x a través del corte Q , se define como la cantidad:

$$e_Q \cdot x = \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j)$$

De manera semejante si $Q = [S, N/S]$, con $S \subset N$, se define la divergencia de x desde S mediante:

$$y(S) = \sum_{i \in S} y(i), \quad y = \text{div } x$$

Obsérvese que ésta es la cantidad de flujo que se origina en S . Las últimas cantidades definidas se relacionan por medio del principio fundamental de divergencia.

Principio fundamental de divergencia. Sea x un flujo en la red G y sea el corte $Q = [S, N/S]$. Entonces:

$$y(S) = e_Q \cdot x, \text{ donde } y = \text{div } x.$$

Prueba. Este principio es un caso particular de la fórmula de conversión $v \cdot x = -u \cdot y$, aplicada para el potencial $u = e_S$, donde $e_S(i) = -1$ si $s \in S$, $e_S(i) = 0$ si $i \notin S$ y el correspondiente diferencial $v = \Delta e_S$. Dado que $y(s) = e_S \cdot y$ y que $v = -e_Q$ donde e_Q es el vector de incidencia del corte $Q = [S, N/S]$ se tiene:

$$e_Q \cdot x = -v \cdot x = u \cdot y = e_S \cdot y = y(S)$$

De la misma manera en que los intervalos de capacidad restringen el paso de flujo por los arcos de una red, los intervalos de generación constituyen la restricción correspondiente para el valor del diferencial en cada arco. Un intervalo de generación $D(j) = [d^-(j), d^+(j)]$ es un intervalo cerrado no vacío para el que $d^-(j) \leq d^+(j)$ y $d^-(j) < +\infty$, $d^+(j) > -\infty$.

Paralelamente al concepto de un flujo factible con respecto a las capacidades, se define una tensión factible con respecto a las generaciones como una tensión v tal que $v(j) \in D(j)$, para todo $j \in A$. Esto es equivalente a la condición:

$$u(i) + d^-(j) \leq u(i') \leq u(i) + d^+(j),$$

donde u es un potencial tal que $v = \Delta y$ y $j^-(i, i')$.

La factibilidad con respecto a las generaciones implica, debido al principio de integración, algunas restricciones respecto a las trayectorias. Se define la cota superior de generación $d^+(P)$ de una trayectoria P como la suma de los términos $d^+(j)$, para j recorrido positivamente, menos la suma de los términos $d^-(j)$, para j recorrido negativamente. Análogamente se define la cota inferior de generación $d^-(P)$ de P . Para una trayectoria P sin multiplicidades se tiene:

$$d^+(P) = \sum_{j \in P^+} d^+(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j),$$

$$d^-(P) = \sum_{j \in P^+} d^-(j) - \sum_{j \in P^-} d^+(j).$$

De aquí se concluye que si v es una tensión factible, entonces:

$$d^-(P) \leq [\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] \leq d^+(P)$$

para toda trayectoria P . Si u es un potencial tal que $v = \Delta u$ la condición anterior se reduce a:

$$u(i) + d^-(P) \leq u(i') \leq u(i) + d^+(P),$$

para toda trayectoria $P: i \rightarrow i'$. Dado que [despliegue de v relativo a P]. Se define como

$$\sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j)$$

CAPITULO 2

PROBLEMAS DE DISTRIBUCION Y DIFERENCIAL:

ANALISIS DE FACTIBILIDAD

Un aspecto importante en los problemas que involucran flujos restringidos por intervalos de capacidad es la existencia de un flujo factible, esto es, un flujo que satisfaga tanto las restricciones de capacidad en los arcos como las disponibilidades de flujo en los nodos. Este problema de flujos, se denomina problema de distribución factible y requiere de un análisis para determinar las condiciones a priori que garantizan la existencia de un flujo factible así como un correspondiente procedimiento para determinarlo (si existe). La necesidad de resolver este problema es evidente en el problema de flujo máximo analizado por Ford y Fulkerson que requiere de partida un flujo factible en la red.

En este capítulo se efectúa el análisis de factibilidad tanto del problema de distribución (que involucra flujos) como del problema de diferencial (que involucra potenciales). En ambos casos se establecen las condiciones para garantizar factibilidad, así como procedimientos para obtener el flujo o potencial factible, según se trate. También se presentan ejemplos ilustrativos.

2.1 El problema de distribución factible.

Considere una red de flujo G en la que cada arco $j \in A$ tiene asociado un intervalo de capacidad $C(j) = [c^-(j), c^+(j)]$ y donde cada nodo $i \in N$ tiene una correspondiente disponibilidad de flujo $b(i)$. Al problema de determinación de un flujo x que satisfaga las restricciones de capacidad en los arcos y disponibilidad en los nodos se le conoce como problema de distribución factible y se expresa formalmente como:

Problema de distribución factible. Determinar un flujo x tal que si $y = \text{div } x$

$$c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j) \quad j \in A$$

$$y(i) = b(i) \quad i \in N$$

Es conveniente señalar que el problema descrito es equivalente a la determinación de una solución factible de un sistema de desigualdades lineales y que diversas técnicas como la programación lineal están disponibles. También señalaremos que dicho problema surge al tratar de resolver el clásico problema de flujo máximo consistente en enviar el flujo máximo entre dos subconjuntos no vacíos y ajenos de nodos, denotados N^+ y N^- , sin violar las restricciones de capacidad en los arcos.

El problema de flujo máximo fué elegantemente resuelto por Ford y Fulkerson (1944) usando un método de solución "que

trabaja en la red" y que consiste en la aplicación repetida del algoritmo de enrutamiento (descrito en el capítulo anterior) a una red cuyos arcos han sido pintados de manera de reflejar el posible paso de flujo a lo largo de los mismos.

El método de solución propuesto por Ford y Fulkerson resuelve simultáneamente un problema combinatorio conocido como el problema de corte mínimo consistente en determinar un corte $Q: N^+ \downarrow N^-$ que separe los conjuntos N^+ y N^- de manera que la capacidad del corte, medida como la suma de las capacidades de los arcos, sea mínima.

El problema de distribución factible fué resuelto por Gale y Hoffman quienes demostraron que si x es un flujo factible y denotamos por $b(S)$ la suma de las disponibilidades de flujo en el conjunto de nodos S (arbitrario) se cumple que $b(S)$ es elemento de $c(Q) = [c^-(Q), c^+(Q)]$ donde $Q = [S, N/S]$, esto es, $b(S)$ pertenece al intervalo de capacidades del corte inducido por el conjunto S .

Teorema 2. (Gale-Hoffman). El problema de distribución factible tiene solución si y sólo si $b(N) = 0$ y $b(S) \leq c^+(Q)$ para todo corte $Q = [S, N/S]$ donde $S \subset N$.

Prueba. La necesidad del resultado es sencilla de verificar pues $b(N) = 0$ siempre se cumple. Por otra parte, si x es un flujo factible se tiene que $\text{div } x = b$ y

$$\begin{aligned} b(s) &= [\text{divergencia de } x \text{ en } S] \\ &= [\text{flujo de } x \text{ en } Q] \leq c^+(Q) \end{aligned}$$

debido al principio de divergencia. La suficiencia del teorema se demuestra constructivamente y está resumida en el algoritmo de distribución factible.

En el establecimiento del teorema pudiera pensarse que falta la condición $b(s) \geq c^-(Q)$ para todo corte $Q = [S, N/S]$ donde $S \subset N$. Sin embargo, si usamos el corte inverso $Q' = [N/S, S]$ y notamos que $c^+(Q') = -c^-(Q)$ podemos implicar de la identidad $0 = b(N) = b(S) + b(N/S)$ que $b(N/S) \leq c^+(Q')$ que equivale a $b(s) \geq c^-(Q)$. ■

Algoritmo: DISTRIBUCION FACTIBLE.

Propósito: Resolver el problema de distribución factible.

Descripción

Sea x un flujo factible con respecto a las capacidades de los arcos. Sean

$$N^+ = \{i \in N \mid b(i) > y(i)\}, \quad N^- = \{i \in N \mid b(i) < y(i)\}$$

Si $N^+ = N^- = \emptyset$ el algoritmo se detiene y x es la solución al problema planteado. De otra manera se colorean los arcos:

verde si $c^-(j) < x(j) < c^+(j)$

blanco si $c^-(j) = x(j) < c^+(j)$

negro si $c^-(j) < x(j) = c^+(j)$

rojo si $c^-(j) = x(j) = c^+(j)$

Con esta coloración se aplica el algoritmo de enrutamiento.

Si éste se detiene con una trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ se calcula

$$\alpha = \min \begin{cases} c^+(j) - x(j) , & j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j) , & j \in P^- \\ b(i) - y(i) , & i \text{ nodo inicial de } P \\ y(i) - b(i) , & i \text{ nodo final de } P \end{cases}$$

se repite el proceso con $x' = x + \alpha e_P$. En caso contrario, si el algoritmo se detiene con un corte, no existe solución al problema. ■

Justificación del algoritmo de distribución factible.

Suponga que el algoritmo determina una trayectoria compatible $P: N^+ \rightarrow N^-$. Entonces

$$c^+(j) - x(j) \geq 0 \text{ si } j \in P^+; \quad x(j) - c^-(j) \geq 0 \text{ si } j \in P^-$$

Asimismo $b(i) - y(i) > 0$ si $i \in N^+$ y $y(i) - b(i) > 0$ si $i \in N^-$.

De donde el escalar α es positivo y finito. Consecuentemente $x' = x + \alpha e_p$ es factible. Por otro lado el algoritmo termina en un número finito de pasos si las cantidades $c^+(j)$, $c^-(j)$, $b(i)$ y $x(j)$ son conmensurables.

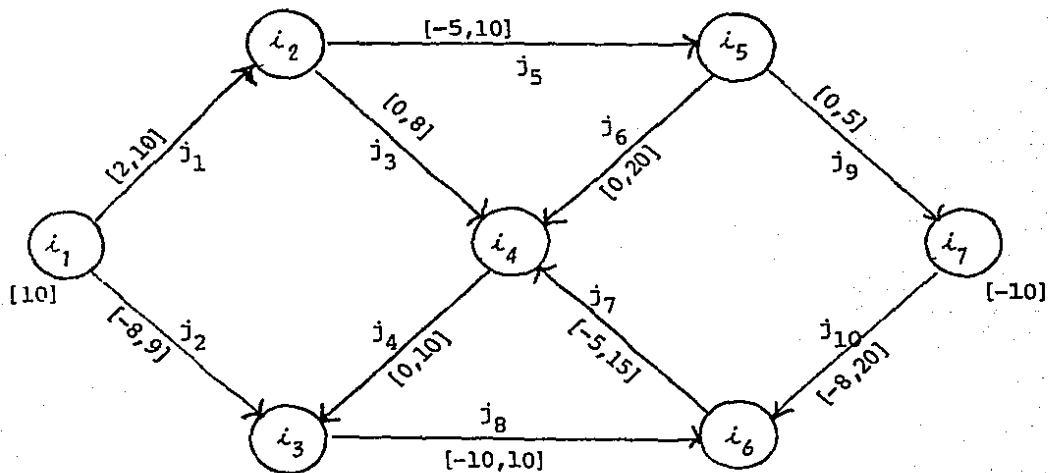
Suponga que algoritmo termina con un corte compatible $Q = [S, N/S]$ donde, $N^+ \cap S$ y $N^- \cap S = \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned} c^+(Q) &= [\text{flujo de } x \text{ en } Q] = [\text{divergencia de } x \text{ de } S] \\ &= y(S) = b(S) - [b(S) - y(S)] \\ &= b(S) - [b(N^+) - y(N^+)] < b(S) \end{aligned}$$

pues $b(i) - y(i) = 0$ si $i \in S/N^+$ y $b(i) - y(i) > 0$ si $i \in N^+ \setminus \emptyset$.

De donde no existe solución factible. ■

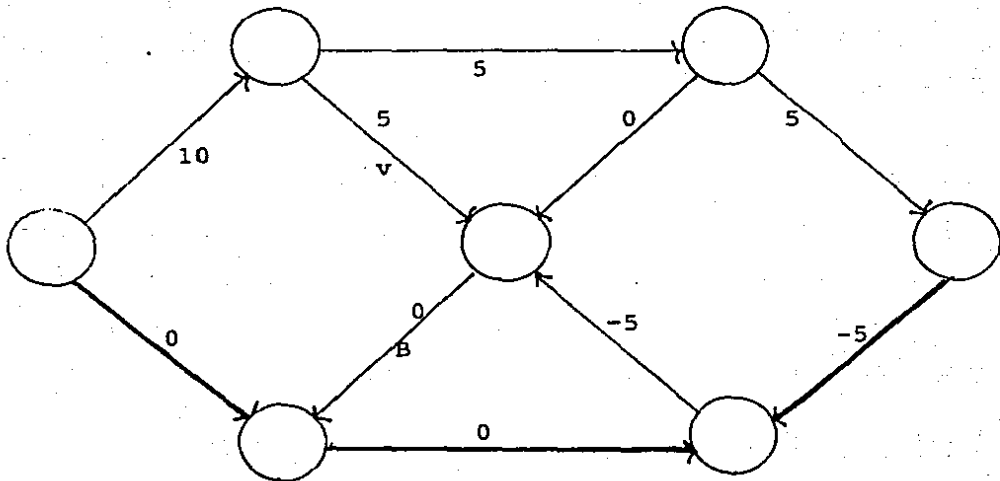
Ejemplo-2.1 Considere la red



donde los parámetros asociados a los arcos representan los límites inferior y superior de capacidad, respectivamente, y los nodos tienen asignado un número que representa la disponibilidad de flujo, cuando ésta es distinta de cero.

Determinar el flujo adecuado que resuelve el problema de distribución factible descrito.

flujo que resuelve el problema:



En esta figura los números asociados a los arcos representan un flujo que resulta factible con respecto a las restricciones de capacidad.

2.2 El problema de trayectoria mínima.

En el análisis clásico de problemas de redes de flujo, podemos distinguir dos problemas básicos, el de flujo máximo y el de ruta más corta. El primer problema está relacionado con el en vío de flujo de un conjunto de nodos N^+ a un conjunto de nodos N^- en una red con intervalos de capacidad conocidos. Dicho problema no involucra costos por paso de flujo en la red. En cambio, el problema de ruta más corta no involucra intervalos de capacidad pero sí costo por recorrer el arco. En este problema se desea determinar la trayectoria de "costo" mínimo que une un conjunto de nodos N^+ con un conjunto de nodos N^- , ambos conjuntos no vacíos y ajenos y donde cada arco tiene asociado un costo $d(j)$. Formalmente, este problema consiste en:

Problema de trayectoria mínima. Determinar la trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ que minimice $d^+(P)$.

Si denotamos por P^+ el conjunto de arcos que se recorren positivamente en la trayectoria P y por P^- los que se recorren negativamente se tiene que el "costo o longitud" (también llamada cota superior de generación) de P es

$$d^+(P) = \sum_{j \in P^+} d^+(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j)$$

Si no existe trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$, la convención usada es que el mínimo del problema es $+\infty$. Esto permite que podamos añadir a la red original arcos con intervalos de generación $d^+(j) = +\infty$

y $d^-(j) = -\infty$ que no afectan el comportamiento de la red.

En particular, podemos observar que $d^+(p) < +\infty$ si y sólo si B es compatible con el pintado de la red asociado con los intervalos de generación, dado como sigue:

VERDE si $d^+(j) < +\infty$ y $d^-(j) > -\infty$

BLANCO si $d^+(j) < +\infty$ y $d^-(j) = -\infty$

NEGRO si $d^+(j) = +\infty$ y $d^-(j) > -\infty$

ROJO si $d^+(j) = +\infty$ y $d^-(j) = -\infty$

Como consecuencia, el problema de trayectoria mínima es equivalente a la determinación de una trayectoria compatible con el pintado que tenga costo mínimo o bien mínima cota superior de generación, antes de establecer el procedimiento que permite determinar una trayectoria mínima conviene mencionar que este problema tiene asociado un problema dual denominado problema de tensión máxima que consiste en determinar el potencial que maximiza el despliegue de N^+ a N^- donde N^+ y N^- son conjuntos ajenos no-vacíos de nodos de una red. Sea u un potencial constante en N^+ y constante en N^- . El valor de $u(i') - u(i)$ es el mismo para cualquier $i \in N^+$ y $i' \in N^-$, y se denomina el despliegue de N^+ a N^- . Dicho valor es igual al despliegue del diferencial $v = \Delta u$ relativo a cualquier trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ debido a la regla de integración. Específicamente:

$$\begin{aligned} [\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] &= \sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j) \\ &= v_p = u(i') - u(i) \end{aligned}$$

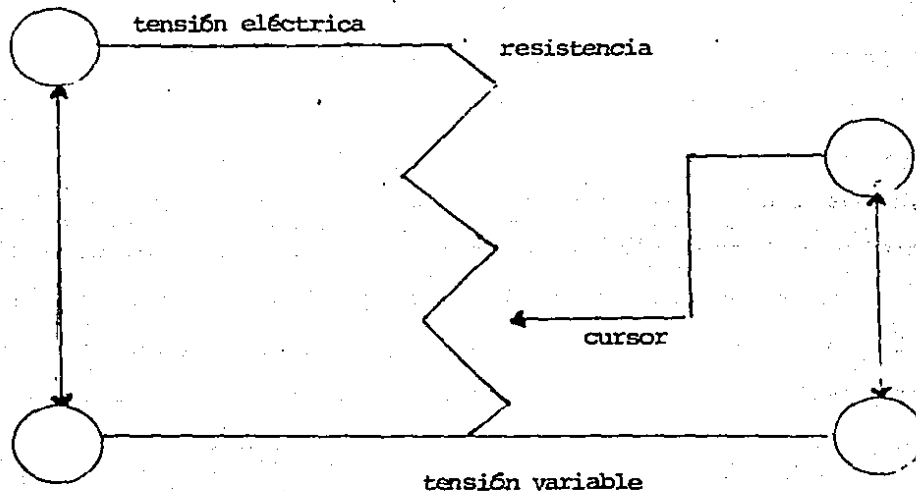
si v es el diferencial asociado a u y e_p es el vector de incidencia de P .

Problema de tensión máxima.

$$\max \{u(i') - u(i) \mid P: i \in N^+ \rightarrow i' \in N^-\}$$

donde $u(i')$ es constante en N^+ y $u(i)$ es constante en N^- con $v = \Delta u$ factible respecto a los intervalos de generación.

Un concepto que es necesario introducir para establecer la dualidad del problema de trayectoria mínima y tensión máxima es el de corte de generación ilimitada de N^+ a N^- , esto es, un corte $Q: N^+ \rightarrow N^-$ tal que $d^+(j) = +\infty$ para todo $j \in Q^+$ y $d^-(j) = -\infty$ para todo $j \in Q^-$ o bien que $Q = \phi$.



Teorema (de trayectoria mínima - tensión máxima [Minty]). Suponga que existe al menos un potencial que satisface las restricciones del problema de tensión máxima. Entonces

$$\left[\begin{array}{l} \text{supremo en problema} \\ \text{de tensión máxima} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{mínimo en problema} \\ \text{de trayectoria mínima} \end{array} \right]$$

El valor común es $+\infty$ si existe un corte $Q:N^+ + N^-$ de generación ilimitada. De otra manera, existe solución óptima al problema de tensión máxima.

Prueba. Suponga que u es un potencial que satisface las restricciones del problema de tensión máxima y $P:N^+ \rightarrow N^-$ es una trayectoria arbitraria. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] \\ &= [\text{despliegue de } \Delta u \text{ relativo a } P] \leq d^+(P) \end{aligned}$$

Si demostramos que la igualdad se obtiene para un potencial u y una trayectoria, es sencillo concluir el resultado del teorema. Esto se hace de manera constructiva y genera un algoritmo cuya descripción y verificación se analizan en esta sección. ■

Algoritmo: TRAYECTORIA MINIMA (DIJKSTRA)

Propósito: Determinar la trayectoria mínima de N^+ a N^- .

Descripción

Sean $S, T \subset N$ con $N^+ \subset S \subset T \subset N/N^-$. Sea $\theta: T/N^+ \rightarrow A$ un enrutamiento y $w: T \rightarrow R$ una función. Al iniciar $T = S = N^+$; θ vacía y $w = 0$ en S . Sea u_0 un potencial constante en N^+ y N^- con $v_0 = \Delta u_0$ factible. Empezamos asignando la etiqueta "no analizado" a cada nodo y cuando se procese su información se cambia la etiqueta a "nodo analizado". Hacer

$$d_0^+(j) = d^+(j) - v_0(j) \quad ; \quad d_0^-(j) = d^-(j) - v_0(j) \quad j \in A$$

Sea $i' \in S$ un nodo con etiqueta "no analizado". Considere todos los arcos $j \in Q = [S, N/S]$ que inciden en i' y calcule

$$\gamma = \begin{cases} w(i') + d_0^+(j) & \text{si } j \sim (i', i) \\ w(i') - d_0^-(j) & \text{si } j \sim (i, i') \end{cases}$$

si $i' \in T$ y $\gamma < w(i)$ hacer $\theta(i) = j$ y $w(i) = \gamma$

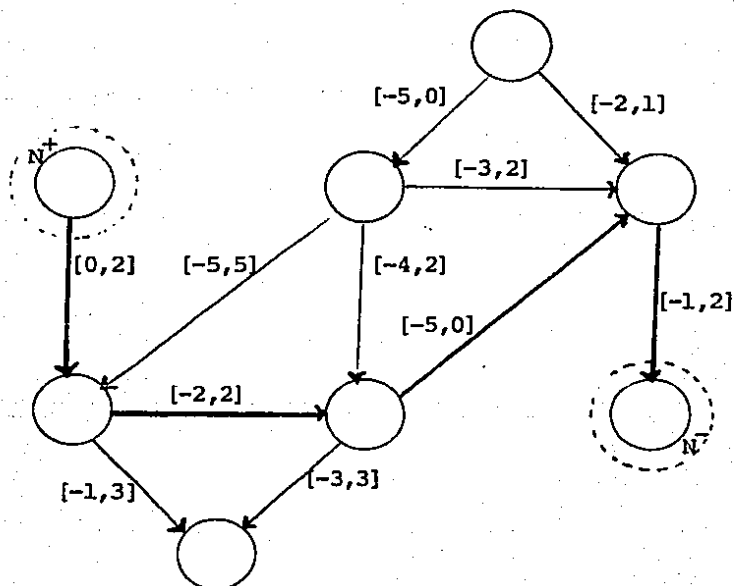
si $i' \notin T$ y $\gamma < \infty$ hacer $T = T \cup \{i\}$, $\theta(i) = j$ y $w(i) = \gamma$

si $\gamma = \infty$ o $i' \in T$ con $\gamma \geq w(i)$ no hacer nada.

Cambie la etiqueta de i' por "nodo analizado" calcule

$$\beta = \min \{w(i) \mid i \in T/S\}$$

Si $T/S = \emptyset$ hacer $\beta = +\infty$ y el algoritmo se detiene con un corte Q de generación ilimitada. De otra manera, haga $S = SU\{i \mid w(i) = \beta\}$. Si $i \in N^-$ para alguno de los nodos de S , la θ -trayectoria $P: N^+ \rightarrow i$ es la solución del problema de trayectoria mínima y $u = u_0 + w$ en S ; $u = u_0 + \beta$ en N/S es el potencial que resuelve el problema de máxima tensión. De otra manera repetir el proceso anterior con los nuevos valores para S , T , u .



Justificación del algoritmo de trayectoria mínima.

Para cada nodo $i \in T/S$, $w(i)$ es el mínimo de $w(i') + d_0^+(j)$ para $(i, i') \sim j \in Q^+$ o $w(i') - d_0^-(j)$ para $(i', i) \sim j \in Q^-$ y $\theta(i)$ es un arco con este valor. Cuando todos los nodos de S han sido analizados, también lo han sido los arcos de Q y T/S consiste en los nodos $i \in N/S$ que pueden ser alcanzados desde S por arcos $j \in Q^+$ con $d_0^+(j) < \infty$ y por arcos $j \in Q^-$ con $d_0^-(j) > -\infty$, $w(i)$ y $\theta(i)$ guardan la información que permite hacerlo óptimamente. Así $T/S = \infty$ significa que los nodos de N/S sólo pueden ser alcanzados desde S con arcos $j \in Q^+$ con $d_0^+(j) = \infty$ y por arcos $j \in Q^-$ con $d_0^-(j) = -\infty$, esto es, Q es un corte de capacidad ilimitada. Por otro lado, cada vez que se agrega un nodo i a S la θ -trayectoria $P: N^+ \rightarrow i$ cumple que $d_0^+(p) = w(i) = \beta$, de donde:

$$\begin{aligned} d_0^+(p) &= \sum_{j \in P^+} [d^+(j) - v_0(j)] - \sum_{j \in P^-} [d^-(j) - v_0(j)] = \\ &= \left[\sum_{j \in P^+} d^+(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j) \right] - \left[\sum_{j \in P^+} v_0(j) - \sum_{j \in P^-} v_0(j) \right] = \\ &= d^+(p) - [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-]. \end{aligned}$$

Dado que $W \equiv \beta$ en N^- , el potencial $u = u_0 + w$ es constante en N^+ y en N^- . Además por construcción $v = \Delta u$ es factible con respecto a los intervalos de generación, pues la forma de construir W equivale a que en cada iteración W tome el valor de β en N/S y $u = u_0 + w$. De hecho u se modifica agregando

una constante α en cada iteración a sus valores asociados fuera de S . Esta constante α es la diferencia entre los valores de β en las iteraciones sucesivas, esto es:

$$\alpha = \min \begin{cases} w(i') + d_0^+(j) - w(i) & \text{para } j - (i', i) \in Q^+ \\ w(i') - d_0^-(j) - w(i) & \text{para } j - (i, i') \in Q^- \end{cases}$$

Es decir:

$$\alpha = \min \begin{cases} d^+(j) - v(j) & j \in Q^+ \\ v(j) - d^-(j) & j \in Q^- \end{cases}$$

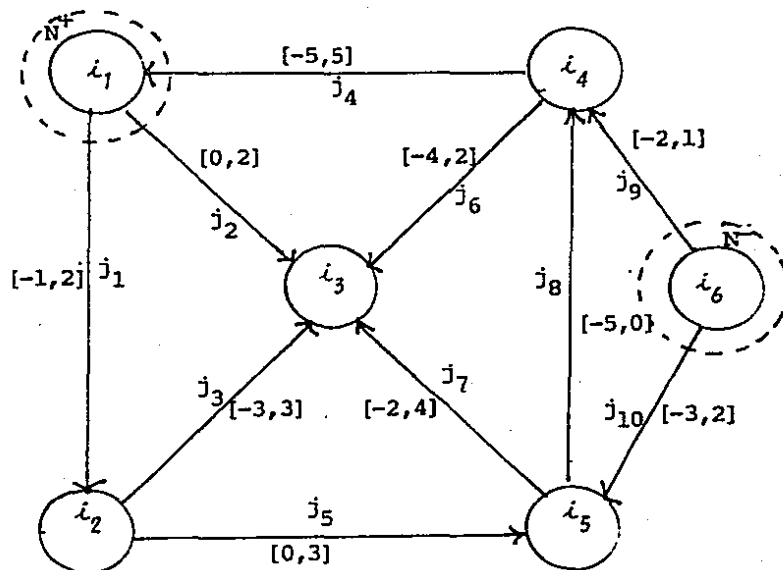
Dado que $u' = u + \alpha e_{N/S}$ (y $v' = v + \alpha e_Q$), si v es factible $v + \alpha e_Q$ también lo es ($\alpha \geq 0$). Con respecto a la optimalidad, en vista de que $d^+(p) = [\text{despliegue de } u_0 \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] + \beta = [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-]$, y $d^+(p') \geq [\text{despliegue de } u' \text{ de } N^+ \text{ a } N^-]$ para toda trayectoria $p': N^+ \rightarrow N^-$ y todo potencial u' factible, entonces

$$d^+(p') \geq [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = d^+(P) \text{ y}$$

$[\text{despliegue de } u' \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] \leq d^+(P) = [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-]$, de donde, P es una trayectoria mínima y v una tensión máxima.

El algoritmo termina en un número finito de iteraciones, pues en cada iteración se agrega a S un nuevo nodo y el número de nodos es finito.

Ejemplo 2.2 Considere la red



en donde cada arco tiene asociado un par de parámetros que corresponden a los límites inferior y superior de generación.

Determinar la trayectoria mínima de $N^+ = \{i_1\}$ a $N^- = \{i_6\}$ usando como potencial inicial $u \equiv 0$.

Se inicia la aplicación del algoritmo de trayectoria mínima con

$S = T = \{i_1\}$; $\theta = \phi$; $w \equiv 0$; $d_0^+(j) = d^+(j)$ y $d_0^-(j) = d^-(j)$ para $j \in A$

Sea i_2 el nodo etiquetado con "no analizado" del que se parte, los arcos que inciden en él son:

$$j_1 \sim (i_1, i_2) \quad \text{con } \gamma = 2$$

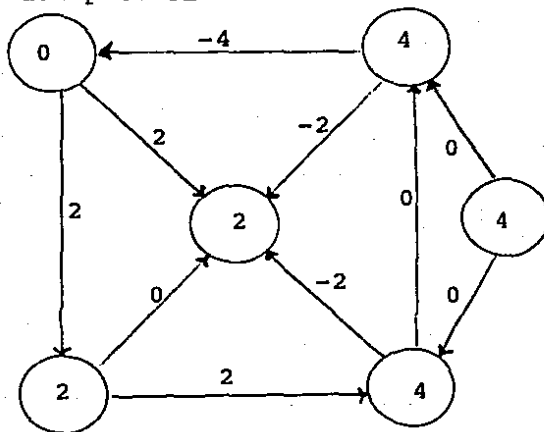
$$j_2 \sim (i_1, i_3) \quad \text{con } \gamma = 2$$

$$j_4 \sim (i_4, i_1) \quad \text{con } \gamma = 5$$

Dado que $i_2, i_3, i_4 \notin T$ y $\gamma < \infty$ entonces $T = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$, $\theta(j_2) = j_1$; $\theta(i_3) = j_2$, $\theta(i_4) = j_4$, $w(i_2) = 2$, $w(i_3) = 2$ y $w(i_4) = 5$. De donde $\beta = 2$ y $S = \{i_1, i_2, i_3\}$ como $i_1, i_2, i_3 \notin N^-$ se reinicia el proceso. Los resultados de la aplicación del algoritmo de trayectoria mínima a partir de este punto se presentan en el cuadro resumen anexo:

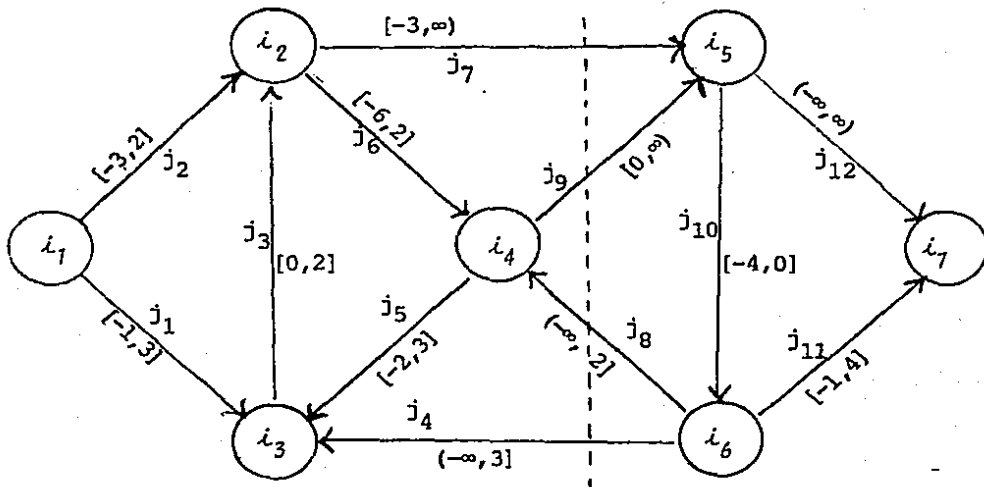
Se puede observar que la trayectoria mínima resulta ser:

$P: i_1 \rightarrow i_3 \rightarrow i_5 \rightarrow i_4 \rightarrow i_6$ con $d^+(P) = 6$ y la tensión máxima está dada por $v = [2, 2, 0, -4, 2, -2, -2, 0, 0, 0]$ como se indica en la figura siguiente, los números en los nodos corresponden a los valores del potencial



T/S	nodo i añadido	nodo i analizado a S	arco involucrado	nodo i' involucrado	γ	$w(i')$	$\Theta(i')$	B
i_2, i_3, i_4	i_2, i_3	i_2	j_5	i_5	6	6	j_5	
		i_3	j_6	i_4	6	6	j_6	
			j_7		4	4	j_7	4
i_4, i_5	i_5	i_5	j_8	i_4	4	4	j_8	4
			j_{10}	i_6	7	7	j_{10}	
i_4, i_6	i_4	i_4	j_9	i_6	6	6	j_9	6

Ejemplo 2.3 Considere la red



en donde cada arco tiene asociado un intervalo que corresponde al intervalo de generación.

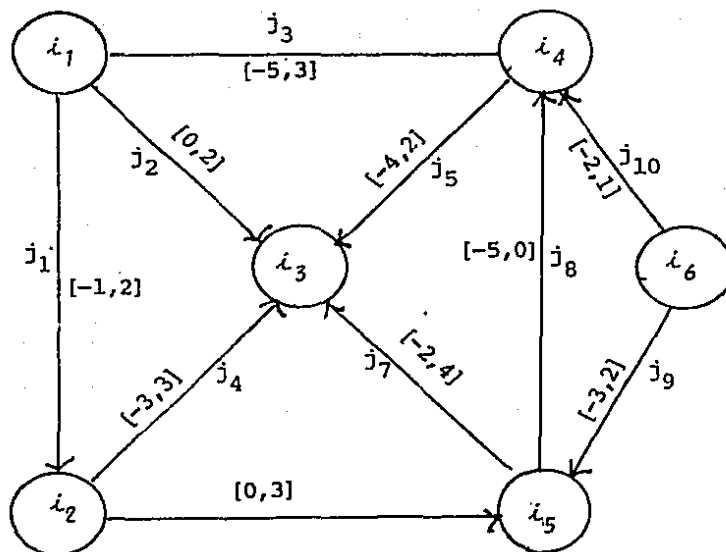
Determinar la trayectoria mínima de $N^+ = \{i_1\}$ a $N^- = \{i_6\}$ usando como potencial inicial $u_0 \equiv 0$.

El cuadro - resumen que resulta de la aplicación del algoritmo de trayectoria mínima se muestra a continuación, observándose que se tiene un corte de generación ilimitada $Q = [S, N/S]$ donde $S = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. Por lo tanto $[\text{sup}] = [\text{min}] = +\infty$ en los problemas de trayectoria mínima y tensión máxima.

nodo analizado	arco involucrado	nodo involucrado	w(i)	B
i_1	j_1	i_3	3	
	j_2	i_2	2	2
i_2	j_3	i_3	2	2
	j_6	i_4	4	
	j_7	i_5	∞	
i_3	j_5	i_4	4	4
	j_4	i_6	∞	
i_4	j_9	i_5	∞	
	j_8	i_6	∞	∞

como puede notarse en el cuadro anterior el algoritmo se detiene con $\beta = \infty$ lo que sugiere la existencia de un corte de generación ilimitada. ■

Ejemplo 2.4 Considere la red



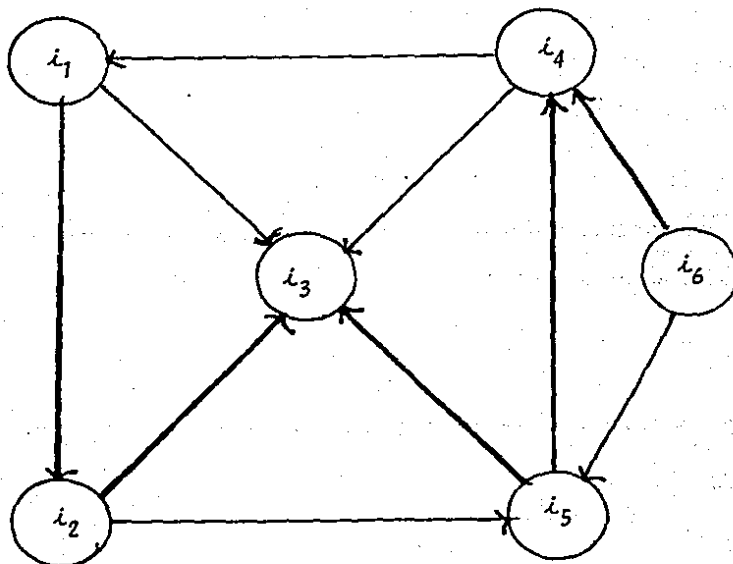
en donde cada arco tiene asociado un intervalo de generación. Determinar la trayectoria mínima de $N^+ = \{i_1\}$ a $N^- = \{i_6\}$ usando como potencial inicial $u \equiv 0$.

Los cálculos de la aplicación del algoritmo de trayectoria mínima se resumen en la tabla que aparece a continuación. Note que la trayectoria

$$P: i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow i_5 \rightarrow i_4 \rightarrow i_6$$

es la solución óptima con valor 6, (ver figura anexa)

nodo analizado	arco involucrado	nodo involucrado	w(i)	B
i_1	j_1	i_2	2	2
	j_2	i_3	2	
	j_3	i_4	5	
i_2	j_4	i_3	5	
	j_6	i_5	5	
i_3	j_5	i_4	6	4
	j_5	i_5	4	
i_5	j_8	i_4	4	4
	j_9	i_6	7	4
i_4	j_{10}	i_6	6	6



2.3 Problema de diferencial factible.

Es interesante observar que el problema de distribución factible encuentra una motivación en la necesidad de la existencia de un flujo factible para la solución del conocido problema de flujo máximo. De manera semejante el problema de diferencial factible aparece con la necesidad de determinar un potencial cuyo diferencial correspondiente sea factible para resolver el problema de trayectoria mínima. El problema de diferencial factible puede expresarse como:

Problema de diferencial factible. Determinar un potencial u cuyo diferencial $v = \Delta u$ satisfaga que $v(j) \in D(j)$ para toda $j \in A$.

Así mismo como el problema de distribución factible puede ser resuelto como uno de flujo máximo aplicado a una red extendida el problema de diferencial factible puede resolverse como uno de trayectoria mínima aplicada a una red transformada, como será visto más adelante y recíprocamente.

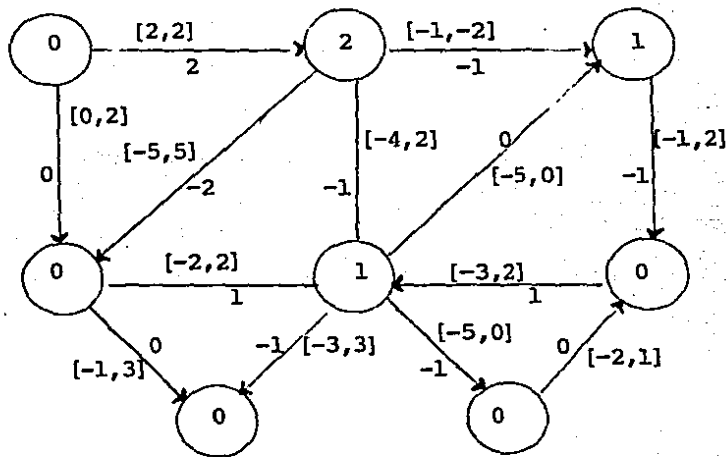
Las condiciones que garantizan la existencia de soluciones para el problema de diferencial factible se establecen en el siguiente teorema.

Teorema de diferencial factible. El problema de diferencial factible tiene solución sí y solo sí $d^+(p) \geq 0$ para todo circuito (elemental) P.

Prueba. La condición necesaria es sencilla si recordamos que para cualquier trayectoria P y diferencial factible v se tiene que

$$d^-(P) \leq [\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] \leq d^+(P)$$

En particular, si P es un circuito sabemos que el despliegue de v relativo a P es cero y concluimos que $d^+(P) \geq 0$. La condición suficiente se demuestra de manera constructiva y genera el algoritmo correspondiente que se analiza a continuación.



En los arcos de la figura anterior se indica el diferencial que resuelve el problema.

Algoritmo: DIFERENCIAL FACTIBLE.

Propósito: Determinar un potencial con diferencial factible.

Descripción

Sea u un potencial arbitrario y $v = \Delta u$. Hacer

$$d_0^+(j) = d^+(j) - v(j) ; d_0^-(j) = d^-(j) - v(j) \quad j \in A$$

Calcular los parámetros de desviación

$$\rho(i) = \min \begin{cases} d_0^+(j) & j \in [i, N/i]^+ \\ -d_0^-(j) & j \in [i, N/i]^- \\ 0 & \end{cases}$$

Si $\rho(i) \geq 0$ para todo $i \in N$ entonces u es el potencial buscado y terminamos. De otra manera seleccione un $\bar{i} \in N$ tal que $\rho(\bar{i}) < 0$ y aplique el algoritmo de DIJKSTRA modificado como sigue:

- a. Hacer $u_0 = u$ y $N^+ = N^- = \{\bar{i}\}$
- b. Si $d_0^+(j) \delta -d_0^-(j)$ es menor que cero, se considera igual a cero; excepto en el caso en que j conecta al nodo \bar{i} con un nodo de N/S . Si \bar{i} se alcanza con $\beta < 0$ el algoritmo se detiene con un circuito P tal que $d^+(P) < 0$. De otra manera el algoritmo se detiene cuando $\beta \geq 0$ en cuyo caso S se mantiene igual. Hacer $w(i) = 0$ si $i \notin S$ y $u := u + w$ y reiniciar nuevamente el proceso.

Justificación del algoritmo de diferencial factible.

De la definición de ρ es inmediato que $\rho(i) = 0$ para todo $i \in N$ si y sólo si $d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j)$ para todo $j \in A$. Cuando $\rho(\bar{\lambda}) < 0$ para algún nodo $\bar{\lambda} \in N$ se construye una red aumentada G^* agregando a G un nodo i^* copia del nodo $\bar{\lambda}$, copias de los arcos adyacentes a $\bar{\lambda}$, j^* y un arco $\bar{j} = (i, \bar{\lambda})$, como se muestra en la siguiente figura. A cada arco j^* se le asigna un intervalo de generación $(-\infty, d^+(j)]$ si $j \in [\bar{\lambda}, N/\bar{\lambda}]^+$ ó $[d^-(j), \infty)$ si $j \in [\bar{\lambda}, N/\bar{\lambda}]^-$, al arco \bar{j} se le hace corresponder el intervalo de generación $(-\infty, 0]$ y a los arcos de la red original se le asocian los intervalos $[\hat{d}^+(j), \hat{d}^-(j)]$ con $\hat{d}^+(j) = \max \{d^+(j), v(j)\}$ y $\hat{d}^-(j) = \min \{d^-(j), v(j)\}$. La definición de estos intervalos permite que el diferencial $v_0 = \Delta u_0$, con $u_0(i^*) = u(\bar{\lambda})$ y $u_0(i) = u(i) + \rho(i)$, para todo $i \in N$ sea factible en G^* . En efecto si j es un arco original:

$$\hat{d}^-(j) \leq v(j) = v_0(j) \leq \hat{d}^+(j)$$

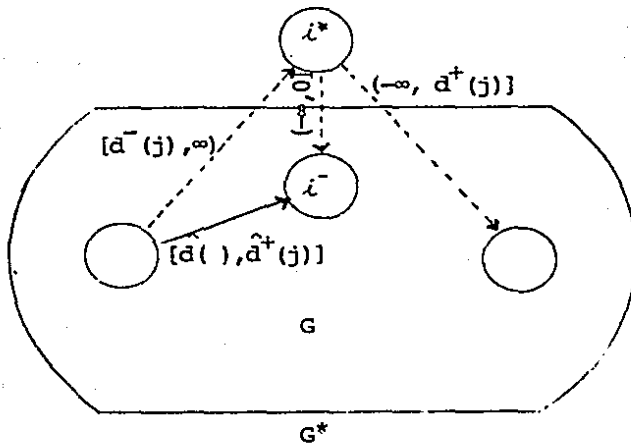
Para j^* arco copia de $j \in [\bar{\lambda}, N/\bar{\lambda}]^+$.

$$\begin{aligned} v_0(j^*) &= \rho(\bar{\lambda}) + u(i) - u(\bar{\lambda}) = \rho(\bar{\lambda}) + v(j) \leq \\ &\leq d_0^+(j) + v(j) = d^+(j) - v(j) + v(j) = d^+(j) \end{aligned}$$

para j^* arco copia de $j \in [\bar{\lambda}, N/\bar{\lambda}]^-$

$$\begin{aligned} v_0(j^*) &= u(\bar{\lambda}) - u(i) - \rho(\bar{\lambda}) = v(j) - \rho(\bar{\lambda}) \geq \\ &\geq v(j) + d_0^-(j) = v(j) + d^-(j) - v(j) = d^-(j) \end{aligned}$$

finalmente para \bar{j} , $v_0(\bar{j}) = u(\bar{\lambda}) + \rho(\bar{\lambda}) - u(\bar{\lambda}) = \rho(\bar{\lambda}) < 0$



Dadas las cotas de capacidad de \bar{j} , al aplicar el algoritmo de trayectoria mínima para resolver el problema de tensión máxima de $N^+ = \{i^*\}$ a $N^- = \{\bar{j}\}$ en la red G^* partiendo de u_0 se obtiene $[\max] \leq 0$. Cuando $[\max] < 0$ este algoritmo se detiene con una trayectoria $P': i^* \rightarrow \bar{j}$ tal que $d^+(p') < 0$. Esta trayectoria restringida a G se convierte en un circuito elemental P con $d^+(p) < 0$ puesto que $\hat{d}^+(j) \geq d^+(j)$ y $\hat{d}^-(j) \leq d^-(j)$. Si $[\max] = 0$, $v'(j) = v'(j^*)$ para todo arco adyacente a \bar{j} . De donde $v'(j) \leq d^+(j)$ para todo $j \in [i, N/\bar{j}]^+$ y $v'(j) \geq d^-(j)$ para todo $j \in [\bar{j}, N/\bar{j}]^-$, así la restricción del diferencial v' a la red G es factible con respecto a los intervalos modificados. Así los valores de p producidos por u'

no son peores que los producidos por u y además $\rho(\bar{\lambda}) = 0$.
 Los límites de los intervalos de generación de la red G^* me-
 nos v_0 pueden interpretarse como costos relativos:

$$\hat{d}_0^+(j) = \max \{d_0^+(j), 0\}, \quad -\hat{d}_0^-(j) = \max \{-d_0^-(j), 0\}$$

Para los arcos j^* adyacentes a i^* estos costos son:

$$d_0^+(j) - \rho(\bar{\lambda}) \text{ para } j^* \text{ correspondiente a } j \in [\bar{\lambda}, N/\bar{\lambda}]^+$$

$$-d_0^-(j) - \rho(\bar{\lambda}) \text{ para } j^* \text{ correspondiente a } j \in [\bar{\lambda}, N/\bar{\lambda}]^-$$

$$-\rho(i) = |\rho(i)| \text{ para } \bar{j}.$$

La función auxiliar W se construye a partir de una sucesión
 no decreciente de valores de β (no negativa). Si $\bar{\beta}$ es el
 valor de β cuando se alcanza $\bar{\lambda}$, entonces, dado que

$$[\text{despliegue de } u_0 \text{ de } i^* \text{ a } \bar{\lambda}] = \rho(\bar{\lambda})$$

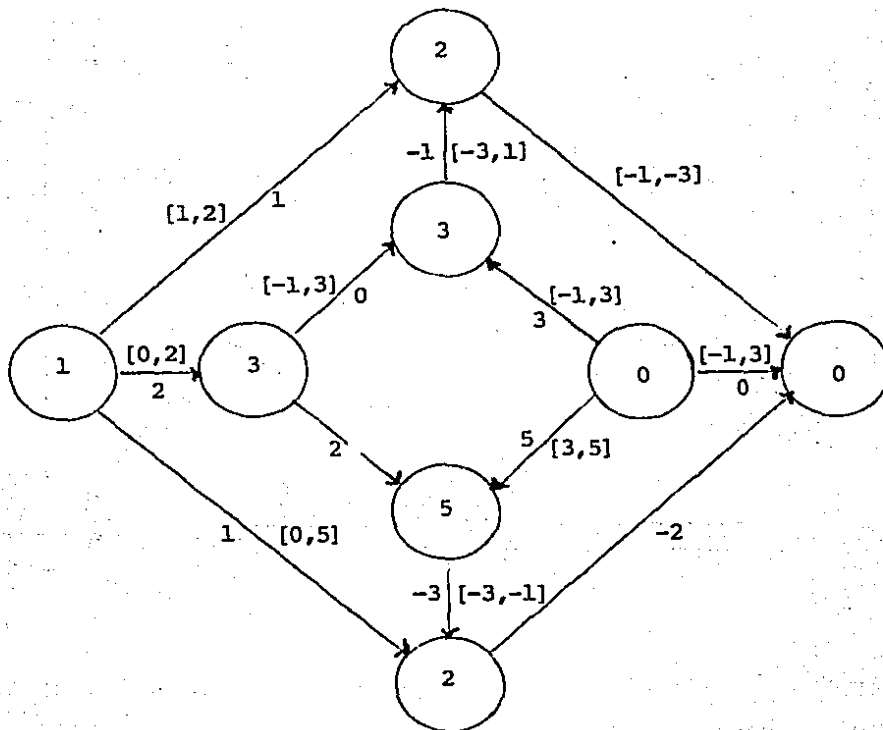
entonces

$$[\max] = [\min] = \rho(\bar{\lambda}) + \bar{\beta}$$

De aquí, si $\bar{\beta} < |\rho(\bar{\lambda})|$, el algoritmo se detiene con un cir-
 cuito p con $d^+(p) < 0$ en G . Cuando $\bar{\beta} = |\rho(\bar{\lambda})|$ puede decirse
 que $\bar{\lambda}$ fue alcanzado por medio de \bar{j} , $W(\bar{\lambda}) = |\rho(\bar{\lambda})|$ y en los
 nodos no incluidos en el enrutamiento $u' = u_0 + W$.

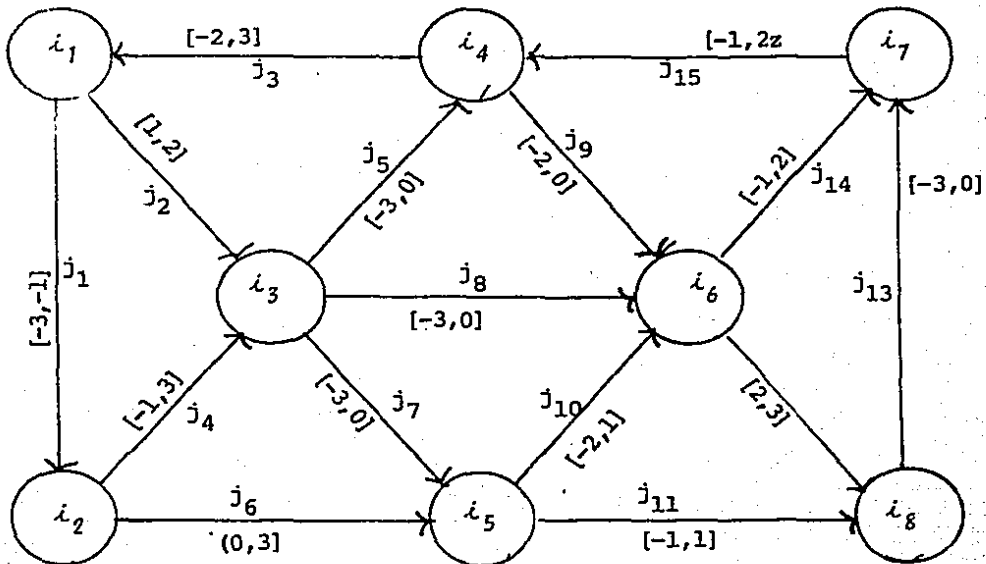
Dado que $u_0 = u + \rho(\bar{\lambda})$ en G , se tiene que $u' = u + w + \rho(\bar{\lambda})$
 en los nodos originales, los términos $\rho(\bar{\lambda})$ pueden ser descar-
 tados de los costos relativos de los arcos j^* y como sólo

uno de los arcos j^* debe ser utilizado por la θ -trayectoria esto es equivalente a restar $|\rho(\bar{\lambda})|$ a todos los valores de W (excepto en i^*) y de β y $\bar{\beta} = 0$, de donde, $u' = u + w$ en $G(W(i) = 0 = w(i^*))$. Así este procedimiento puede realizarse directamente sobre la red G como lo indica el algoritmo de diferencial factible. ■



En la red anterior se muestran los valores del potencial y el diferencial factible correspondiente, con respecto a los intervalos indicados.

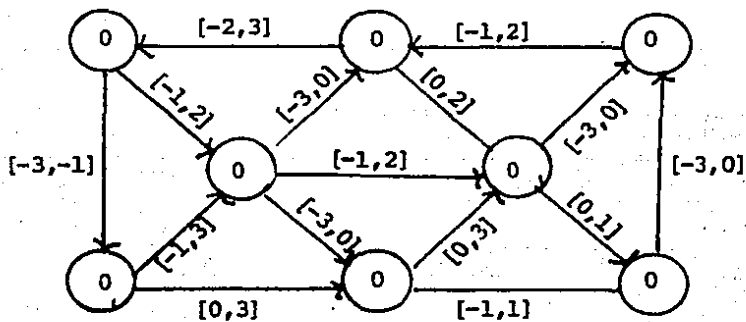
Ejemplo 2.5 Considérese la red de la figura con parámetros de generación mínima y máxima asociada con cada arco. Determínese un diferencial factible (si existe), usando como potencial inicial u_0 igual a cero

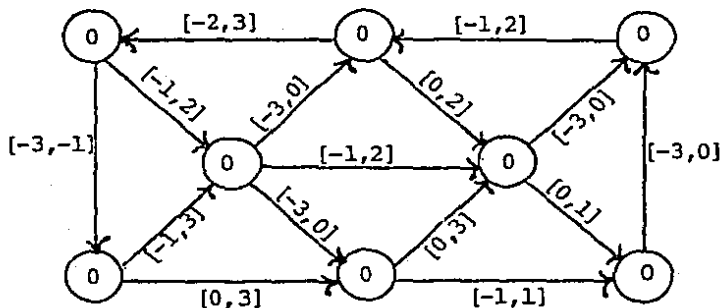


Se inicia la aplicación del algoritmo de diferencial factible con el cálculo de los valores $\rho(i)$, $i \in N$. Entonces $\rho(i_1) = -1$; $\rho(i_8) = -2$, y cero en los restantes. Asimismo los resultados del algoritmo de trayectoria mínima son:

nodo analizado	arcos involucrados	nodos involucrados	W	valores de β
i_8	j_{11}	i_5	1	-2
	j_{12}	i_6	-2	
	j_{13}	i_7	0	
i_6	j_{10}	i_5	0	0
	j_8	i_3	1	
	j_9	i_4	0	
	j_{14}	i_7	0	
	j_{12}	i_8	1	

El algoritmo se detiene pues $\beta = 0$. La actualización de los intervalos de generación y potenciales es:

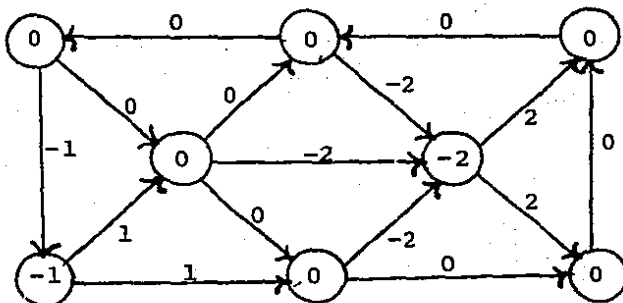




Los resultados de esta iteración con $s = \{i_1\}$ son:

nodo analizado	arcos involucrados	nodos involucrados	w	valores de β
i_1	j_1	i_2	-1	-1
	j_2	i_3	2	
	j_3	i_4	2	
i_2	j_1	i_1	2	$\beta = 2$
	j_4	i_3	2	
	j_6	i_5	2	

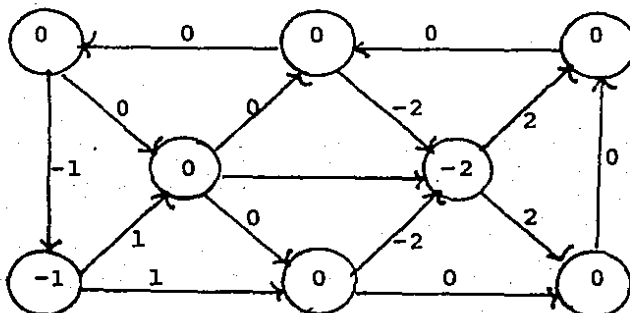
como puede observarse $\beta > 0$, el potencial y la tensión factibles son los indicados en la red de la siguiente figura:



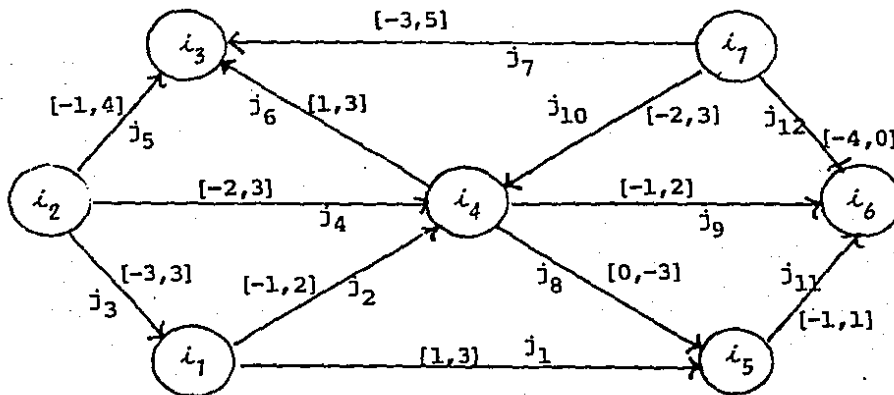
Los resultados de esta iteración con $s = \{i_1\}$ son:

nodo analizado	arcos involucrados	nodos involucrados	W	valores de β
i_1	j_1	i_2	-1	-1
	j_2	i_3	2	
	j_3	i_4	2	
i_2	j_1	i_1	2	$\beta = 2$
	j_4	i_3	2	
	j_6	i_5	2	

como puede observarse $\beta > 0$, el potencial y la tensión factibles son los indicados en la red de la siguiente figura:

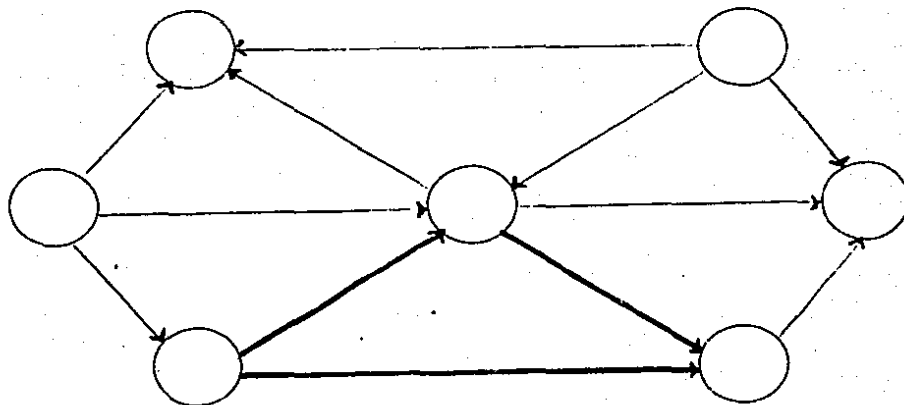


Ejemplo 2.6 Considere la red de la figura con los intervalos de generación indicados. Determine un diferencial factible (si existe) usando $u_0 = 0$.



Se inicia la aplicación del algoritmo de diferencial factible calculando $\rho(i)$, $i \in N$. Entonces $\rho(i_3) = \rho(i_5) = -1$, $\rho(i_4) = -3$ y cero para el resto. La aplicación del algoritmo de trayectoria mínima con $s = \{i_4\}$ se muestra a continuación y se observa que se tiene un circuito negativo $P: i_4 \rightarrow i_5 \rightarrow i_1 \rightarrow i_4$ con valor $d^+(P) = -2$.

nodo analizado	arcos involucrado	nodos involucrado	w(i)	valores de β
i_4	j_2	i_1	1	$\beta = -3$
	j_4	i_2	2	
	j_6	i_3	3	
	j_{10}	i_7	2	
	j_9	i_6	2	
	j_8	i_5	-3	
i_5	j_1	i_1	-3	$\beta = -3$
	j_8	i_4	-3	
	j_{11}	i_6	-2	
i_7	j_3	i_2	-0	$\beta = -1$
	j_2	i_4	-1	



CAPITULO 3

EL PROBLEMA DE DISTRIBUCIÓN LINEAL OPTIMA.

En este capítulo se analiza un problema de programación lineal cuyas características particulares hacen sencillo su análisis y permiten unificar distintos enfoques y métodos de solución: el problema de distribución lineal óptima. Entre los aspectos relevantes del análisis podemos mencionar que en lugar de manejar matrices de números reales lo que se utilizan son matrices de elementos 0, 1, -1, las denominadas matrices nodos-arcos; el manejo clásico de una solución básica es sustituido por la manipulación de un árbol con raíz que resulta sencillo en la computadora; y el pivoteo se transforma en la búsqueda de rutas para enviar flujo a menor costo.

Este capítulo se desarrolla como sigue: Primeramente se describen los componentes del problema de distribución lineal óptimo y algunos de los modelos clásicos de la teoría de redes que se reformulan en este formato. A continuación se analizan las condiciones de existencia y optimalidad de la solución de este problema y por último se presentan dos algoritmos que lo resuelven, el de distribución óptima y el simplex especializado en redes de flujo cuya aplicación a problemas clásicos como transporte y asignación se ilustra.

3.1 Descripción del problema de distribución.

Considérese una red conectada G y suponga que asociado a cada nodo $i \in N$ se tiene una disponibilidad de flujo, denotada $b(i)$, y que la condición de conservación de flujo se cumple, esto es, $b(N) = 0$. Suponga que asociado a cada arco $j \in A$ se tiene un intervalo de capacidad $c(j) = [c^-(j), c^+(j)]$ que refleja las limitaciones que tiene el flujo para moverse a través de dicho arco. También suponga que a cada arco se le asocia una función lineal expresada como sigue $d(j)x(j) + p(j)$ donde $d(j)$ es el costo por paso de cada unidad de flujo y $p(j)$ es un costo fijo. El problema de distribución lineal óptima consiste en la determinación de un flujo que satisfaga todas las restricciones e incurra en costo mínimo,

En el problema de distribución es común decir que un flujo x es factible si $x(j) \in c(j)$ para todo $j \in A$ y $y(i) = b(i)$ para todo $i \in N$. Un flujo factible x que minimiza la correspondiente función de costos se dice óptimo.

El problema de distribución es un problema de programación lineal que para propósito del análisis que se efectúa en este trabajo lo expresaremos formalmente como

$$\min \sum_{j \in A} [d(j)x(j) + p(j)]$$

sujeto a

$$c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j) \quad j \in A$$

$$\sum_{j \in A} e(i,j)x(j) = b(i) \quad i \in N$$

El problema descrito se presenta en una variedad de situaciones reales y teóricas. Algunas de ellas se describen como ejemplos a continuación.

El problema de transporte.

Consiste en transportar bienes o productos de un conjunto de bodegas o depósitos, denotados por K , a un conjunto de consumidores, denotados por P , a costo mínimo. Cada bodega tiene una disponibilidad $m(k)$, $k \in K$ y cada consumidor tiene una demanda $n(p)$, $p \in P$. El costo de transportar una unidad de bien de la bodega k al depósito p es $q(k,p)$. En términos formales, el problema consiste en

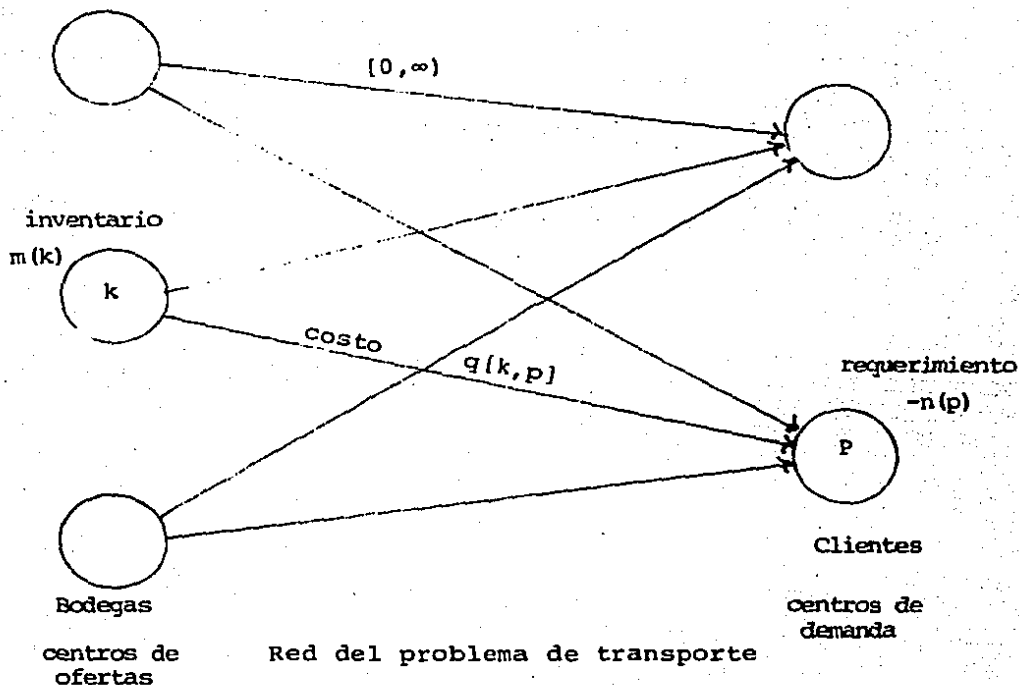
$$\min q(x) = \sum_{k \in K} \sum_{p \in P} q(k,p)x(k,p)$$

sujeto a

$$\sum x(k,p) = m(k) \quad p \in P$$

$$\sum x(k,p) = n(p) \quad k \in K$$

Este problema corresponde al problema de distribución lineal óptimo para la red $G = [N, A]$ donde $N = K \cup P$ y $A = K \times P$. La disponibilidad para $k \in K$ es $m(k) = b(k)$ mientras que $b(p) = -n(p)$ si $p \in P$. En cada arco (k, p) el intervalo de capacidad correspondiente es $[0, \infty)$ y el costo $q(k, p)$. La red asociada a este problema se dice bipartita y el problema de transporte puede representarse como sigue:



El problema de asignación óptima.

Este problema consiste en hacer corresponder a cada elemento de un conjunto K un solo elemento de un conjunto P donde cada pareja (k,p) tiene asignado un costo q(k,p), respetando una relación H establecida entre estos conjuntos; de manera que la colección de parejas obtenidas M, cubriendo K, tenga asignado el costo más bajo, por ejemplo K puede representar un conjunto de trabajos y P una serie de compañías que pueden realizar al menos uno de ellos, en este caso la relación H es la establecida entre cada trabajo y las compañías que lo pueden realizar, se pretende seleccionar el subconjunto M \subset H que cubra todos los trabajos al menor costo, sabiendo que cada compañía efectuará una sola de las tareas. Formalmente se plantea como:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{p \in P} q(k,p) x(k,p)$$

sujeto a

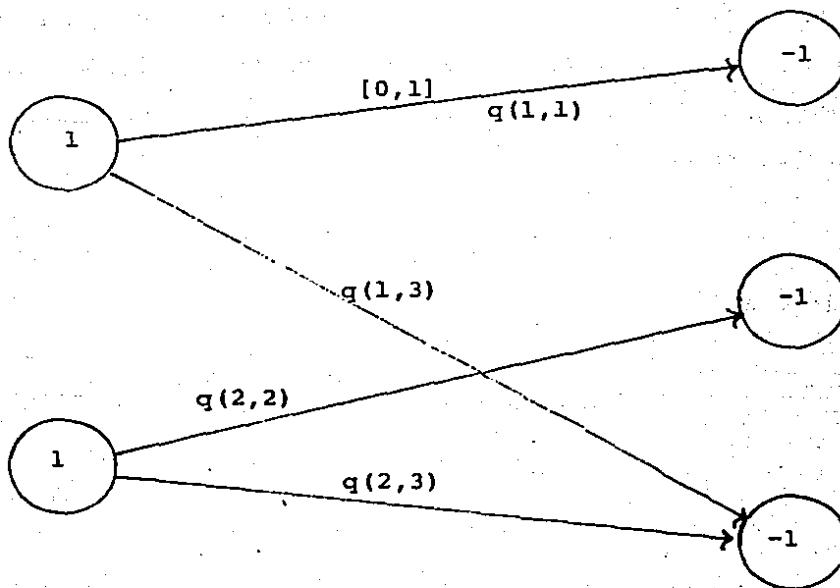
$$\sum_{k \in K} x(k,p) = 1 \quad p \in P$$

$$\sum_{p \in P} x(k,p) = 1 \quad k \in K$$

$$x(k,p) \geq 0 \quad (k,p) \in H$$

donde x(k,p) representa las veces que el trabajo k es realizado por la compañía p.

Este problema es el problema de distribución lineal óptimo para la red $G = [N, A]$ donde $N = K \cup P$ y $A = K \times P$, la disponibilidad para $k \in K$ es $b(k) = 1$ mientras que $b(p) = -1$ para $p \in P$. En cada arco (k, p) el intervalo de capacidad correspondiente es $[0, 1]$ y el costo es $q(k, p)$. Nótese que para un flujo entero, $x(k, p) = 0$ ó $x(k, p) = 1$ para toda $(k, p) \in K \times P$ y M es dado por $M = \{(k, p) \in H \mid x(k, p) \neq 0\}$.



Problema de asignación.

3.2 Existencia y caracterización de soluciones óptimas.

Un aspecto básico en el análisis de un problema de optimización es la especificación de las condiciones bajo las cuales se garantiza la existencia de soluciones de dicho problema.

Una vez cubierto este aspecto es necesario proceder a la caracterización de tales soluciones óptimas, es decir, a la identificación de las condiciones que deben ser satisfechas por las soluciones que son óptimas y usar tales condiciones para identificarlas.

La idea básica para establecer la existencia de la solución óptima en el caso del problema de distribución lineal óptima es el concepto de circuitos con costo negativo, es decir, un circuito P tal que

$$0 > \sum_{j \in P^+} d(j) - \sum_{j \in P^-} d(j) = d \cdot e_P$$

cuya función puede explicarse como sigue:

Si G es una red con un flujo x factible con respecto a los intervalos de capacidad correspondientes y en ella existe un circuito P con costo negativo, entonces para $t > 0$ suficientemente pequeña, de manera que

$$x(j) + t \leq c^+(j) \quad \text{para } j \in P^+ \quad \text{y}$$

$$x(j) - t \geq c^-(j) \quad \text{para } j \in P^-$$

El flujo $x' = x + te_p$ es factible para $j \in A$ y

$$\begin{aligned} [\text{costo de } x'] &= [\text{costo de } x] + t \cdot \text{de}_p \\ &< [\text{costo de } x] \end{aligned}$$

Esto significa que el costo en la red disminuye al hacer circular flujo por el circuito. Nótese que si P es un circuito con capacidad ilimitada, es decir, con $c^+(j) = \infty$ para $j \in P^+$ y $c^-(j) = -\infty$ para $j \in P^-$, para cualquier valor de t tan grande como se quiera, x' resulta factible y su costo se puede hacer arbitrariamente pequeño. Un circuito de esta forma se dice no-balanceado.

La existencia de circuitos no-balanceados se traduce en un valor infinito negativo de la función objetivo. De donde puede deducirse que una condición necesaria para la existencia de solución para el problema de distribución lineal óptima es la ausencia de circuitos no balanceados. Esta condición es también suficiente, como puede apreciarse del siguiente teorema.

Teorema. (Existencia de flujos óptimos). Suponga que el problema lineal de distribución óptima tiene al menos una solución factible. El ínfimo en este problema es finito y se asegura la existencia de al menos una solución óptima, si y sólo si, no existe algún circuito elemental no balanceado.

Prueba. (Suficiencia). Si no existe circuito con capacidad doblemente ilimitada cualquier flujo x se puede expresar como:

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k + \sum_{s=1}^g \mu_s e_p,$$

donde cada x_k representa un flujo extremo y cada e_p es un circuito con capacidad ilimitada, $\lambda_k \geq 0$, $\mu_s \geq 0$ y $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. En este caso el costo asociado con x , excepto por una constante es:

$$d \cdot x = \sum_{k=1}^n \lambda_k d \cdot x_k + \sum_{s=1}^g \mu_s d \cdot e_{p_s}$$

donde $d \cdot e_{p_s} \geq 0$ puesto que no existen circuitos no balanceados, así el problema se reduce a minimizar $d \cdot x$ sobre $\lambda_k \geq 0$, $\mu_s \geq 0$, con $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Este mínimo se obtiene seleccionando el k_0 para el que $d \cdot x_{k_0}$ sea menor, tomando $\lambda_{k_0} = 1$, $\lambda_k = 0$ para $k \neq k_0$ y $\mu_s = 0$ para toda s .

Si existe algún circuito P con doble capacidad ilimitada, tanto el circuito F como su inverso tienen capacidad ilimitada y no

son no balanceados por lo que $d \cdot e_p = 0$, así si x es una solución factible $x' = x + t e_p$ con $t \in \mathbb{R}$ también lo es; Se puede seleccionar un arco $\hat{j} \in p$ e imponer la restricción $x(\hat{j}) = 0$, esto permite redefinir $c^+(\hat{j})$ y $c^-(\hat{j})$ iguales a cero con lo que P ya no es un circuito de doble capacidad ilimitada y el problema se reduce al caso anterior.

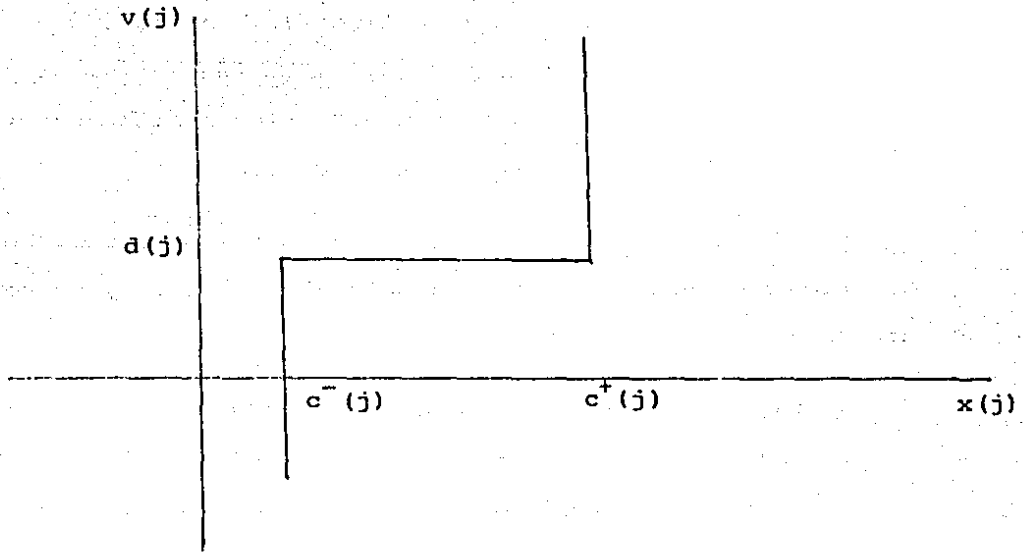
La necesidad del resultado se demostró en la hoja anterior. ■

Una vez cubierta la existencia de solución se puede pasar a su caracterización analítica, para ello conviene familiarizarse con el concepto de curva de optimalidad.

La curva de optimalidad Γ_j está definida como:

$$\Gamma_j = \left\{ (x(j), v(j)) \in \mathbb{R}^2 \mid x(j) \in c(j) \text{ y } \begin{cases} v(j) \leq d(j) \text{ para } x(j) < c^+(j) \\ v(j) \geq d(j) \text{ para } x(j) > c^-(j) \end{cases} \right\}$$

si $c^-(j)$ y $c^+(j)$ son distintos y finitos la curva Γ_j tiene el aspecto que presenta la figura siguiente:



Curva de optimalidad Γ_j .

En el caso en el que $c^+(j) = \infty$, la semi-recta vertical derecha desaparece; cuando $c^-(j) = -\infty$, la semi-recta que no aparece es la del lado izquierdo; si $c^-(j) = -\infty$ y $c^+(j) = \infty$ la curva Γ_j está formada sólo por la recta $v(j) = d(j)$ y en el caso en el que $c^-(j) = c^+(j)$ Γ_j es la recta $x(j) = c^+(j)$.

La caracterización de la solución óptima queda formalizada por el teorema siguiente:

Teorema. (Optimalidad lineal de flujos). Un flujo x es una solución óptima del problema de distribución lineal si y sólo si $\text{div } x = b$ y existe un potencial u cuyo diferencial satisface que $(x, (j), v(j)) \in \Gamma_j$ para toda $j \in A$.

Prueba. (Suficiencia) si x y u satisfacen las condiciones del teorema, entonces x es una solución factible y de acuerdo con la definición de Γ_j :

si $c^-(j) < x(j) < c^+(j)$ entonces $d(j) = v(j)$

si $x(j) = c^+(j)$ entonces $v(j) \geq d(j)$ y $x'(j) \leq x(j)$

si $x(j) = c^-(j)$ entonces $v(j) \leq d(j)$ y $x'(j) \geq x(j)$

lo que implica que $d(j) [x'(j) - x(j)] \geq v(j) [x'(j) - x(j)]$ en todos los casos; sumando sobre todos los arcos $j \in A$ se obtiene

$$d(x' - x) \geq -u \text{ div } (x' - x) = -u [b - b] = 0$$

de donde $d \cdot x' \geq d \cdot x$ lo que implica que x es óptima.

La prueba de la necesidad es constructiva. Con el algoritmo de distribución óptima se construye un potencial u que satisface las condiciones del teorema o una solución x' con costo menor que el costo del flujo factible x del que se parte. ■

Interpretación económica de la curva de optimalidad.

Considere una red conectada G en la que los parámetros de intervalos de capacidad de flujo y costo por paso del mismo son conocidos. Sea x un flujo factible en la red. Dicho flujo representa los bienes (i.e., artículos, dinero, energía, etc) que se transportan de los nodos de oferta a los nodos de demanda siguiendo diversas rutas de acceso.

Sea u el vector de potenciales e interprete a cada elemento $u(i)$ como el precio unitario de los bienes existentes en el nodo i . Es por ello que $v(j) = u(i') - u(i)$, esto es, la diferencia de potenciales, representa el incremento o decremento de precio de un bien al ser transportado del nodo i al nodo i' . Por otra parte, si $d(j)$ es el costo de transportar un bien a lo largo del arco j se tiene que $[d(j) - v(j)]$ es el costo unitario neto de transporte. Es por ello que la curva de optimalidad Γ_j trabaja usando la consideración de minimizar costos netos de transporte pues, si $d(j) - v(j) > 0$ se envía tan poco flujo como sea posible, esto es, $x(j) = c^-(j)$. Sin embargo, si $d(j) - v(j) < 0$ entonces se envía tanto flujo como sea posible, esto es, $x(j) = c^+(j)$.

3.3 Algoritmo de distribución óptima.

En esta sección se describe un procedimiento para determinar una solución óptima del problema de distribución lineal óptima. Dicho procedimiento parte de un flujo factible que es mejorado (en términos de su función objetivo) o bien se demuestra que es óptimo. El mejoramiento se basa en la especificación de ciertos intervalos de generación para determinar un diferencial factible por medio del algoritmo de diferencial. Como resultado de este algoritmo se tienen dos alternativas mutuamente excluyentes: a) se detecta un circuito con costo negativo (y se mejora el flujo) o b) se construye un diferencial factible tal que las parejas de flujo y tensión en cada arco se encuentran en su curva de optimalidad, por lo que la solución es óptima.

El algoritmo de distribución descrito en esta sección es uno de los posibles procedimientos iterativos para colocar las parejas de flujo y tensión de cada arco (con el flujo factible) en la curva de optimalidad. Un método alternativo de lograr el mismo propósito es usando el concepto de árbol de expansión: el algoritmo simplex para flujos.

ALGORITMO: DISTRIBUCION OPTIMA

Propósito: Resolver el problema lineal de distribución óptima.

Descripción

Sea x un flujo factible. Defina el siguiente sistema de intervalos de generación:

$$[d_x^-(j), d_x^+(j)] = \begin{cases} [d(j), d(j)] & \text{si } c^-(j) < x(j) < c^+(j) \\ [-\infty, d(j)] & \text{si } c^-(j) = x(j) < c^+(j) \\ [d(j), \infty) & \text{si } c^-(j) < x(j) = c^+(j) \\ (-\infty, \infty) & \text{si } c^-(j) = x(j) = c^+(j) \end{cases}$$

Aplique el algoritmo de diferencial factible. Si terminamos con un diferencial factible, el flujo x es óptimo. De otra manera se detecta un circuito elemental negativo P , esto es, $d_x^+(P) < 0$ o bien $d.e_p < 0$ de forma tal que $x(j) < c^+(j)$ si $j \in P^+$ y $x(j) > c^-(j)$ si $j \in P^-$. Calcule α como el mínimo de $c^+(j) - x(j)$ si $j \in P^+$ y $x(j) - c^-(j)$ si $j \in P^-$. Es inmediato que $\alpha > 0$. Si $\alpha = +\infty$, entonces P es un circuito no-balanceado y el algoritmo termina con costo inferior no-acotado (o igual a $-\infty$). De otra manera el flujo $x' = x + \alpha e_p$ es factible y tiene menor costo que x . Repita el proceso usando x' .

Justificación del algoritmo de distribución óptima.

Cuando el algoritmo de diferencial factible termina con un potencial u tal que $\Delta u = v$ y $d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j)$ para $j \in A$ la factibilidad de v asegura la optimalidad de x por el teorema de optimalidad de flujos. En el caso en el que el algoritmo se detiene con un circuito P , el flujo $x' = x + \alpha e_p$ es factible puesto que $x(j) + \alpha \leq c^+(j)$ para $j \in P^+$ y $x(j) - \alpha \geq c^-(j)$ para $j \in P^-$ por la definición de α , además

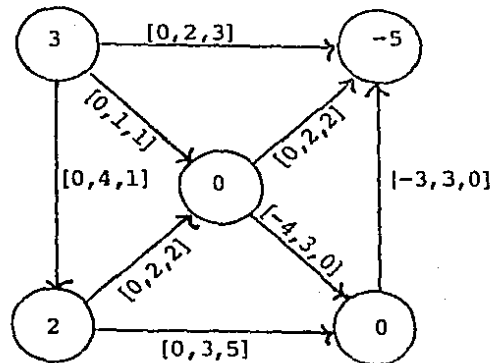
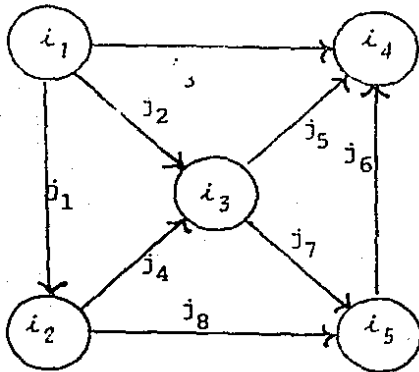
$$d \cdot x' = d \cdot x + \alpha d \cdot e_p < d \cdot x,$$

es decir, el costo de x' es menor que el costo de x .

Si el ínfimo del problema es finito y los valores de $c^-(j)$, $c^+(j)$ y $b(i)$ son conmensurables, el algoritmo de distribución factible puede proporcionar una solución factible inicial x con valores $x(j)$ en la misma clase de conmensurabilidad.

Si todos estos valores son múltiplos de cierta $\delta > 0$, entonces también lo son los valores de α y los de los flujos sucesivos $x'(j)$. Así todos los flujos generados por el algoritmo pertenecen a la misma clase de conmensurabilidad y en cada iteración el costo decrece al menos en $\delta \epsilon$, donde ϵ es el menor de los valores $|d \cdot e_p|$ correspondientes a los circuitos elementales P con $d \cdot e_p < 0$. Como los costos están acotados inferiormente la sucesión de iteraciones no puede ser infinita. ■

Ejemplo 3.1 Considérese la red de flujo



donde asociados a los arcos se tiene una triplete de parámetros que corresponde a la capacidad mínima, capacidad máxima y costo por paso de una unidad de flujo, mientras que asociado a los nodos se tiene la disponibilidad de flujo.

Determine el flujo a costo mínimo que resuelve el problema de distribución lineal descrito.

Empezaremos la aplicación del algoritmo de distribución óptima con el flujo $x = [3, 0, 0, 2, 2, 3, 0, 3]$ que da origen a los intervalos de generación $[d_x^-(j), d_x^+(j)]$ indicados en la red de la figura 1. La determinación de un diferencial factible en dicha red se efectúa mediante la aplicación del algoritmo de diferencial factible que se inicia con un potencial cero en todos los nodos.

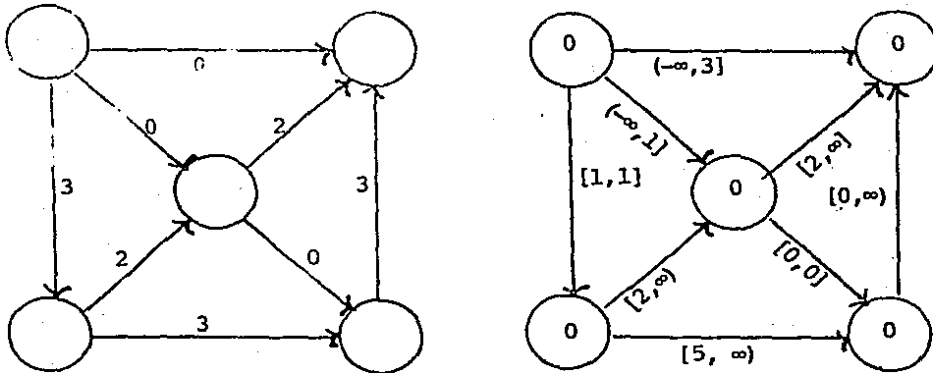


Fig. 1 Flujos y potenciales iniciales

Como consecuencia, podemos calcular, para cada uno de los no dos, el valor de la desviación $\rho(i)$ y obtener:

$$\rho(i_1) = 0; \rho(i_2) = -1; \rho(i_3) = -2;$$

$$\rho(i_4) = -2; \rho(i_5) = -5.$$

Se elige el nodo i_5 para empezar a determinar un circuito negativo (si existe) o mejorar el potencial actual.

Los cálculos que resultan de la aplicación del algoritmo de trayectoria mínima con $S = \{i_5\}$ se resumen en:

nodos analizado	arcos involucrados	nodos involucrados	$w(i)$	β
i_5	j_8	i_4	∞	
	j_7	i_3	0	
	j_6	i_2	-5	-5
i_2	j_1	i_1	-5	-5
	j_4	i_3	∞	
	j_8	i_5	∞	
i_1	j_2	i_3	-4	-4
	j_3	i_4	-2	
i_3	j_5	i_4	∞	-4
	j_7	i_5	-4	

como puede observarse el algoritmo de trayectoria mínima termina detectando un circuito $P: i_5 + i_2 + i_1 + i_3 + i_5$ con $d^+(P) = -5 - 1 + 1 + 0 = -5$. El valor del flujo aumentante en este circuito es $\alpha = 1$. El nuevo flujo es $x + e_p$.

Iteración 2. Se denota por x el flujo actualizado y se calculan los intervalos de generación asociados para empezar la aplicación del algoritmo de diferencial factible con potencial inicial cero (figura 2). Es sencillo verificar que $\rho(i_5) = -5$ y podemos empezar la aplicación del algoritmo de trayectoria mínima.

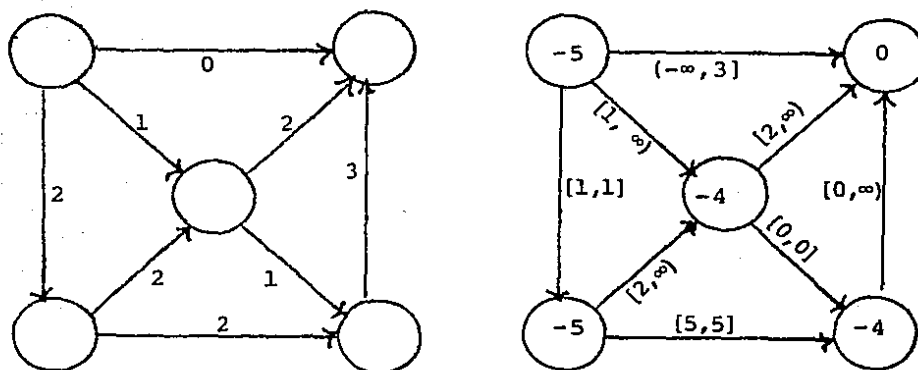


Fig. 2. Flujos y potenciales en la iteración 1.

Los cálculos que resultan de la aplicación del algoritmo de trayectoria mínima con $S = \{i_5\}$ se resumen en:

nodo analizado	arcos involucrados	nodos involucrados	$w(i)$	β
i_5	j_8	i_4	∞	
	j_7	i_3	0	
	j_6	i_2	-5	-5
i_2	j_1	i_1	-5	-5
	j_4	i_3	∞	
	j_6	i_5	0	
i_1	j_2	i_3	∞	
	j_3	i_4	-2	-2
i_4	j_5	i_3	-2	-2
	j_8	i_5	-2	
i_3	j_7	i_5	-2	-2

Como puede observarse el algoritmo de trayectoria mínima termina con un circuito $P: i_5 + i_2 + i_1 + i_4 + i_3 + i_5$ con $d^+(P) = 3 + 0 - 5 - 1 - 2 = -5$. El valor del flujo aumentante en este circuito es $\alpha = 2$ y el nuevo flujo es $x + 2 e_p$.

Iteración 3. Se denota por x el flujo actualizado y se calculan los intervalos de generación asociados para empezar la aplicación del algoritmo de diferencial factible con potencial inicial cero en todos los nodos (figura 3). Es sencillo verificar que la desviación $\rho(i_4)$ es negativa y podemos aplicar el algoritmo de trayectoria mínima.

Los cálculos de la aplicación del algoritmo de trayectoria mínima se resumen en:

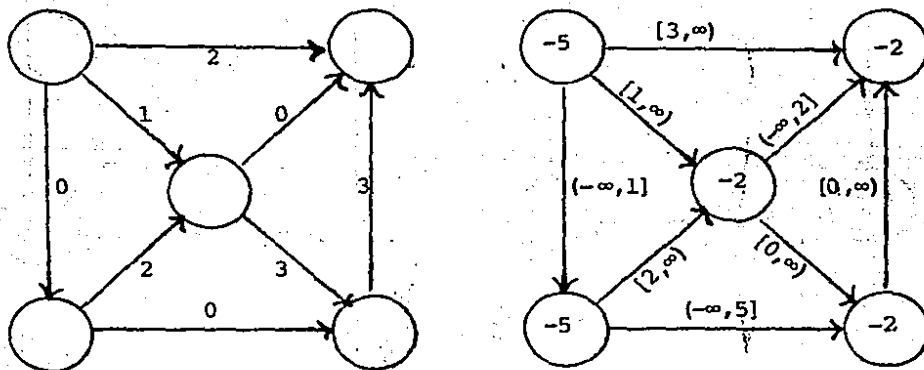


Fig. 3. Flujos y potenciales en la iteración 2.

nodos analizados	arcos involucrados	nodos involucrados	$w(i)$	β
i_4	j_3 j_5 j_8	i_1 i_3 i_5	-3 ∞ 0	-3
i_1	j_2 j_1	i_3 i_2	∞ -2	-2
i_2	j_3 j_4 j_8	i_4 i_3 i_5	∞ ∞ 3	$\beta > 0$

En esta iteración se actualiza el potencial y se obtiene un potencial (diferencial) factible. En este caso termina el algoritmo y el flujo es óptimo.

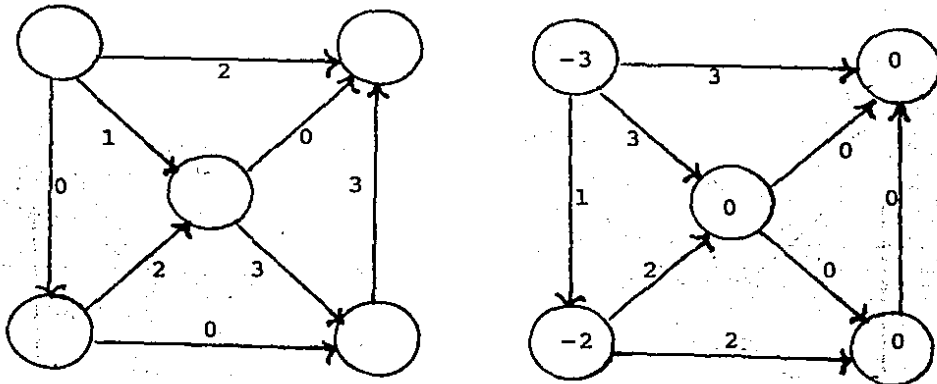
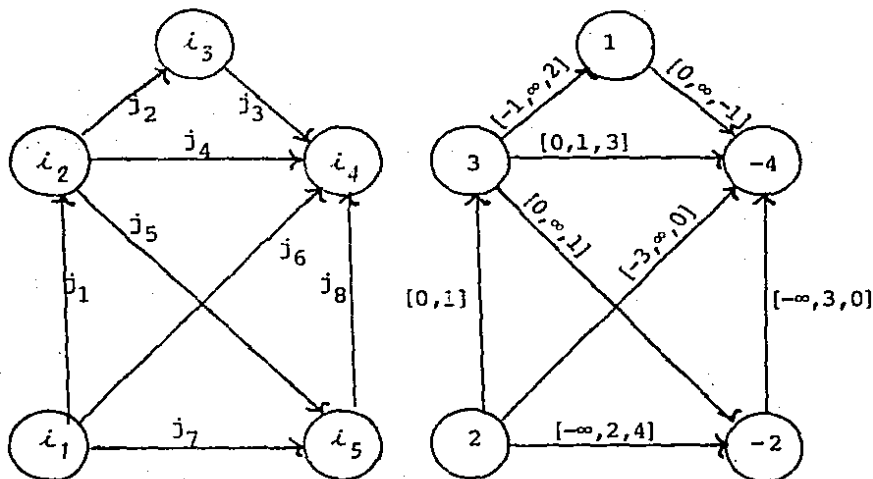


Fig. 4. Flujo y potenciales óptimos

Ejemplo 3.2 Considérese la red de flujo



donde cada arco tiene asociada una tripleta de parámetros que corresponden a la capacidad mínima, la capacidad máxima y el costo por paso de una unidad de flujo, mientras que en cada nodo se indica la disponibilidad de flujo.

Determinar el flujo a costo mínimo que resuelve el problema de distribución lineal descrito.

Se inicia la aplicación del algoritmo de distribución lineal óptima con el flujo $x = [0, -1, 0, 1, 3, 0, 2, -3]$ que da origen a los intervalos de generación $[d_x^-(j), d_x^+(j)]$ indicados en la red de la figura 5.

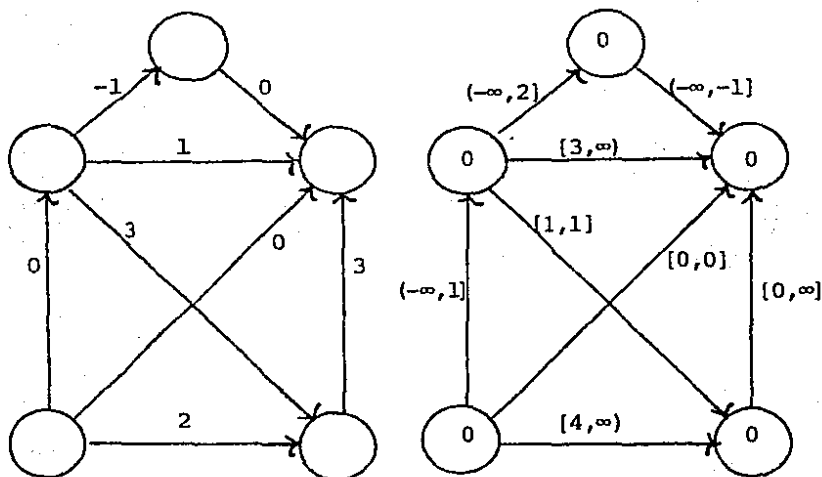


Fig. 5. Flujos y potenciales iniciales

La determinación del diferencial factible en dicha red se efectúa mediante la aplicación del algoritmo de diferencial factible que se inicia con un potencial de cero en todos los nodos. El resultado del cálculo de las desviaciones en los nodos es:

$$\rho(i_1) = \rho(i_2) = 0, \rho(i_3) = -1, \rho(i_4) = -3, \rho(i_5) = -4$$

Se inician los cálculos con $S = \{i_5\}$ y los resultados obtenidos son:

nodos analizado	arcos involucrados	nodos involucrados	$w(i)$	β
i_5	j_7	i_1	-4	-4
	j_5	i_2	-1	
	j_8	i_4	∞	
i_1	j_7	i_5	∞	-4
	j_6	i_4	-4	
	j_1	i_2	-3	
i_4	j_8	i_5	-4	-4
	j_4	i_2	-4	
	j_3	i_3	∞	

como puede observarse este algoritmo detecta el circuito $P: i_5 + i_1 + i_4 + i_5$ con $d^+(P) = -4$ y $\alpha = \infty$, es decir, este es un circuito no balanceado y por lo tanto no existe solución finita para este problema.

3.4 Algoritmo simplex para flujos.

El algoritmo de distribución óptima descrito en la sección anterior trata de determinar un potencial u cuyo diferencial sea factible respecto a los intervalos de generación $[d_x^-, d_x^+]$. El proceso para lograr dicho propósito se basa en la construcción de un enrutamiento óptimo que englobe a todos los nodos de la red usando como base un nodo s arbitrariamente seleccionado. La repetición de este proceso genera una sucesión de enrutamientos completos (esto es, comprende todos los nodos) con sus potenciales asociados de manera que cada enrutamiento difiere de su predecesor en un solo arco.

Una manera alternativa de realizar el proceso anterior es usando árboles de expansión, esto es, subredes que no contienen circuitos. En este caso, el proceso de determinación de un potencial u cuyo diferencial sea factible se reduce a cambiar de una iteración a otra, un árbol de expansión. También se cumple que dos árboles de expansión consecutivos difieren en un solo arco. Este método coincide con el método simplex con variables acotadas aplicadas al problema de redes de flujo. El algoritmo se describe a continuación junto con su justificación y unos ejemplos.

Algoritmo: SIMPLEX PARA FLUJOS

Propósito: Resolver el problema lineal de distribución óptima.

Descripción

Sea x una solución extrema tal que $F_x = \{j \in A \mid c^-(j) < x(j) < c^+(j)\}$ forma un bosque y sea F un árbol de expansión tal que $F_x \subset F$. Sea u un potencial con $u(s) = 0$ (s prefijado) tal que $v = \Delta(u)$ satisfice

$v(j) = d(j)$ para $j \in F$. Si se cumple que:

$$v(j) \leq d(j) \quad \text{para } j \in A-F \quad \text{con } x(j) = c^-(j) < c^+(j)$$

$$v(j) \geq d(j) \quad \text{para } j \in A-F \quad \text{con } x(j) = c^+(j) > c^-(j)$$

el algoritmo termina y x es una solución óptima. De otra manera sea el arco \bar{j} con la mayor violación a alguna de las desigualdades y P un circuito elemental, formado por arcos de F , tal que $\bar{j} \in P^+$ si la primera desigualdad no se satisface, ó $\bar{j} \in P^-$ si la segunda desigualdad es violada. Calcule el valor α como el mínimo de $c^+(j) - x(j)$ si $j \in P^+$ y $x(j) - c^-(j)$ si $j \in P^-$. Entonces $\alpha \geq 0$ y si $\alpha = +\infty$ el algoritmo termina con $[\text{inf}] = -\infty$. Si $\alpha < \infty$ entonces el flujo $x' = x + \alpha e_{\bar{j}}$ es solución extrema y $\bar{F} = (F - \{\bar{j}\}) \cup \{\bar{j}\}$ donde \bar{j} es el arco para el que se alcanza α . El bosque \bar{F} contiene a F_x , y $dx' < dx$. Reinicie el proceso con x' .

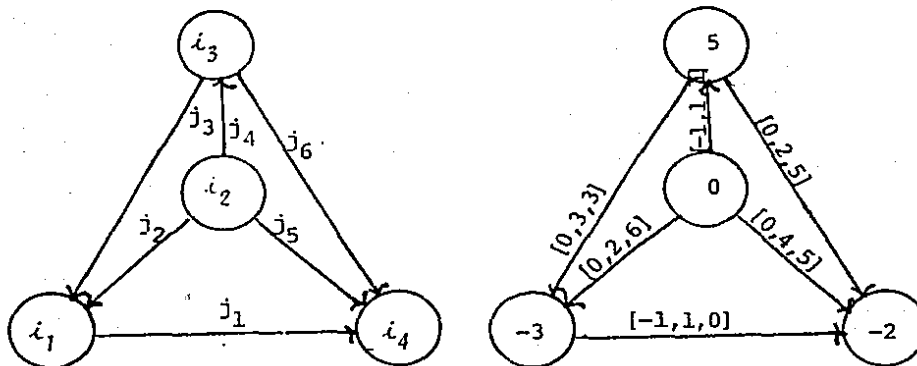
Justificación del algoritmo simplex para flujos.

Si $j \in A - F$ entonces $x(j) = c^-(j)$ ó $x(j) = c^+(j)$, o ambos. Las desigualdades $v(j) \leq d(j)$ con $x(j) = c^-(j)$ y $v(j) \geq d(j)$ con $x(j) = c^+(j)$ aseguran que $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$, esto es, que x es la solución óptima. Por otro lado si $v(j) > d(j)$ con $x(j) = c^-(j)$ y P es el circuito elemental correspondiente con $\bar{j} \in P^+$ y los demás arcos en F , entonces

$$d.e_p = \sum_{j \in P^+} d(j) - \sum_{j \in P^-} d(j) < \sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j) = v.e_p = 0$$

pues $v(j) = d(j)$ para $j \in F$. En forma análoga $d.e_p < 0$ cuando $v(\bar{j}) < d(\bar{j})$ con $x(\bar{j}) = c^+(\bar{j})$. Por otra parte, $\alpha = \infty$ cuando $c^+(j) = \infty$ para $j \in P^+$ y $c^-(j) = -\infty$ para $j \in P^-$, es decir, P es un circuito no balanceado, así el ínfimo es $-\infty$. La factibilidad de x implica $\alpha \geq 0$ y x' factible. Por otra parte, se observa que para todos los arcos $k \in A - F$; excepto posiblemente \bar{j} , se tiene que $x'(k) = x(k)$ y consecuentemente que $x'(k) = c^+(k)$ o $x'(k) = c^-(k)$ (pues F_x está contenido en F). La elección de \bar{j} asegura que $x'(\bar{j}) = c^+(\bar{j})$ o $x'(\bar{j}) = c^-(\bar{j})$ por lo que $F_x, C\bar{F}$. Esto demuestra que \bar{F} es un árbol de expansión y x' es un flujo extremo.

Ejemplo 3.3 Considere la red de flujo



donde cada arco tiene asociada una tripleta de parámetros que corresponden a la capacidad mínima, la capacidad máxima y el costo por paso de una unidad de flujo, mientras que en cada nodo se indica la disponibilidad de flujo.

Determinar el flujo a costo mínimo que resuelve el problema de distribución lineal descrito partiendo de la solución factible extrema $x = [0, 1, 2, -1, 0, 2]$.

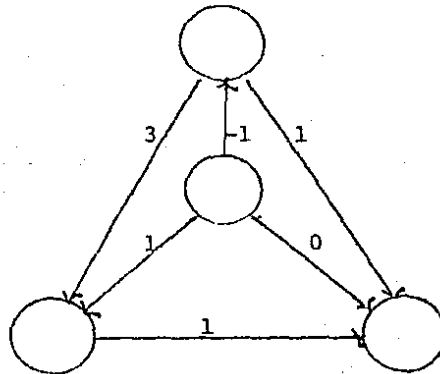
Se inicia la aplicación del algoritmo simplex para flujos con $F = F_x = \{j_1, j_2, j_3\}$, y $S = i_2$, $u = [6, 0, 3, 6]$, se tiene:

$$v(j_4) = 3 > d(j_4) = 1 \quad ; \quad x(j_4) = c^-(j_4) = -1$$

$$v(j_5) = 6 > d(j_5) = 5 \quad ; \quad x(j_5) = c^-(j_5) = 0$$

$$v(j_6) = 3 < d(j_6) = 5 \quad ; \quad x(j_6) = c^+(j_6) = 2$$

para j_6 y $P: i_3 + i_1 + i_4 + i_3$, $\alpha = 1$, $F' = \{j_1, j_2, j_6\}$ y $x' = x + e_p$, indicado en la figura siguiente:



Haciendo $u'(i_2) = 0$ y $v(j) = d(j)$ para $j \in F'$ se obtiene

$$u' = [6, 0, 1, 6]$$

$$v(j_3) = 5 > d(j_3) = 3 \quad ; \quad x(j_3) = 3 = c^+(j_3)$$

$$v(j_5) = 6 > d(j_5) = 5 \quad ; \quad x(j_5) = 0 = c^-(j_5)$$

$$v(j_4) = 1 = d(j_4) \quad ; \quad x(j_4) = -1 = c^-(j_4)$$

Para j_5 y $P: i_2 + i_4 + i_1 + i_2$, $\alpha = 1$, $F'' = \{j_1, j_5, j_6\}$ y $x'' = x' + e_p$ está indicado sobre la figura siguiente:

Haciendo $u^*(i_2) = 0$ y $v(j) = d(j)$ para $j \in F^*$ se obtiene

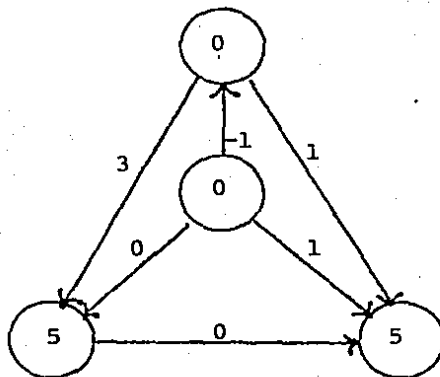
$$u^* = [5, 0, 0, 5]$$

$$v(j_2) = 5 < d(j_2) = 6, \quad x(j_2) = 0 = c^-(j_2)$$

$$v(j_3) = 5 > d(j_3) = 3, \quad x(j_3) = 3 = c^+(j_3)$$

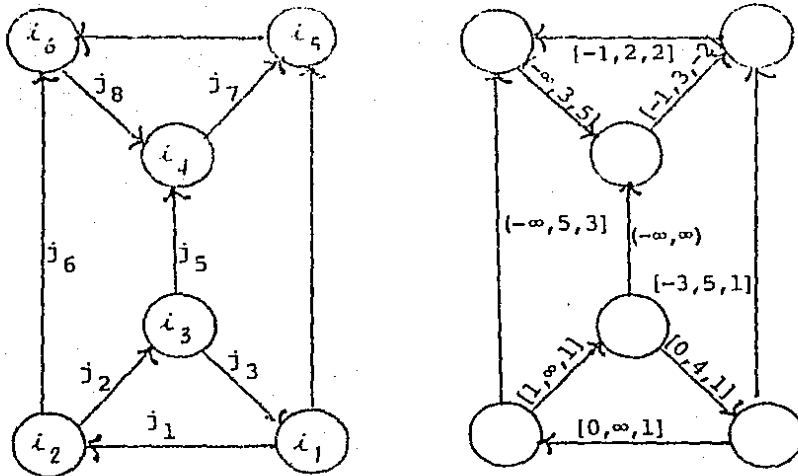
$$v(j_4) = 0 < d(j_4) = 1, \quad x(j_4) = -1 = c^-(j_4)$$

lo que implica que x es una solución óptima.



Los valores marcados sobre los nodos indican el potencial óptimo y los valores indicados sobre los arcos representan el flujo óptimo.

Ejemplo 3.4 Considere la red de flujo



donde cada arco tiene asociada una tripleta de parámetros que corresponden a la capacidad mínima, la capacidad máxima y el costo por paso de una unidad de flujo, mientras que en cada nodo se indica la disponibilidad de flujo.

Determinar el flujo a costo mínimo que resuelve el problema de distribución lineal descrito partiendo de la solución factible extrema $x = [0, 3, 0, 4, 3, 0, 0, -3, 2]$.

Se inicia la aplicación del algoritmo simplex para flujos con

$F = Fx = \{j_2, j_4, j_5, j_6, j_7\}$, $S = i_4$ y $u ; [-3, -1, 0, 0, -2, 2]$

se tiene:

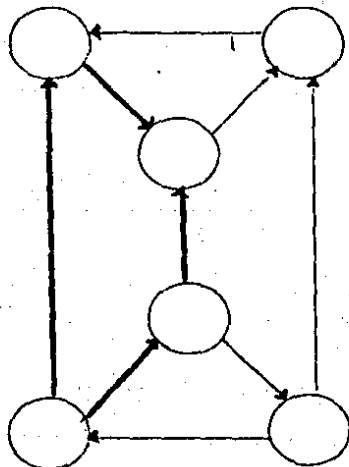
$$v(j_1) = 2 < d(j_1) = -1, \quad x(j_1) = 0 = c^-(j_1)$$

$$v(j_3) = -3 < d(j_3) = 1, \quad x(j_3) = 0 = c^-(j_3)$$

$$v(j_8) = -2 < d(j_8) = 1, \quad x(j_8) = -3 = c^+(j_8)$$

$$v(j_0) = 4 < d(j_0) = 2, \quad x(j_0) = 9 = c^+(j_0)$$

para j_8 y $P: i_6 + i_2 + i_3 + i_4 + i_6$, $\alpha = \infty$ lo que significa que P es un circuito no balanceado y el infimo del problema es $-\infty$.



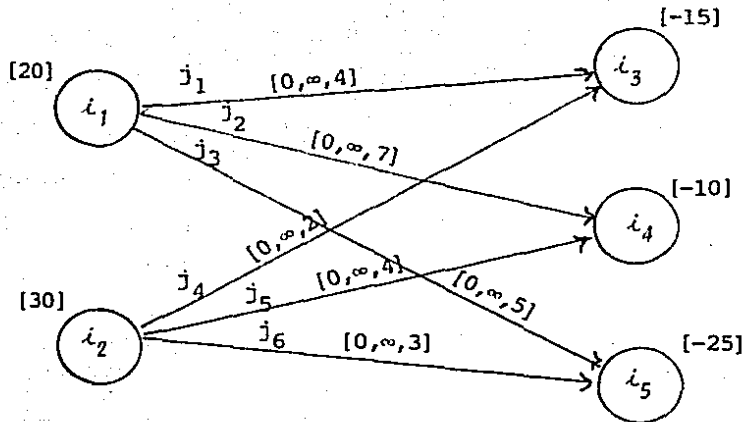
El valor de las desviaciones debidas a la no-factibilidad de la tensión en los arcos que inciden en cada nodo se indica mediante los valores $\rho(i)$, $i = 1, \dots, 5$. La aplicación del algoritmo de trayectoria mínima de Dijkstra para disminuir tales desviaciones se resume a continuación

nodo analizado	arco involucrado	nodo involucrado	valor de w	valor de β
i_5	j_3	i_1	-5	-5
	j_6	i_2	-3	
i_1	j_1	i_3	-1	-3
	j_2	i_4	2	
i_2	j_4	i_3	-1	-1
	j_5	i_4	1	
i_3	j_6	i_5	0	

Los potenciales resultantes son dados por

$$u = [-5, -3, -1, 0, 0]$$

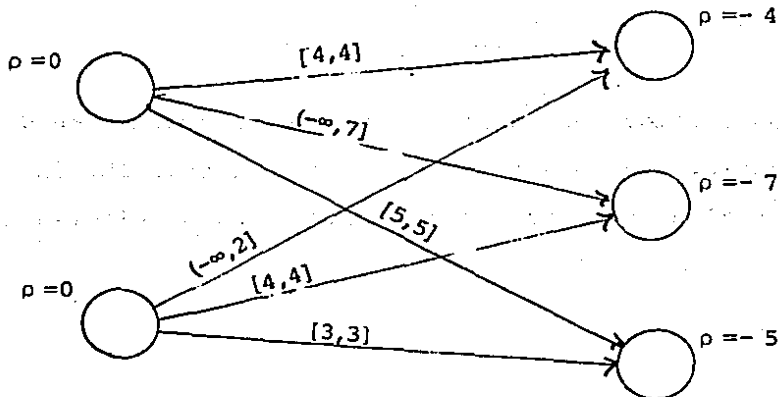
y continuamos con la aplicación del algoritmo de diferencial factible. En la siguiente red se muestran los intervalos de generación actualizados respecto al nuevo diferencial.

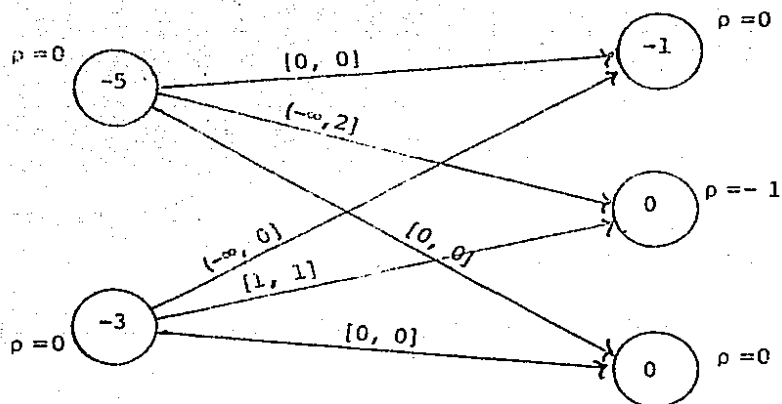


La red planteada se resolverá a continuación, usando el algoritmo de distribución óptima. El flujo factible inicial es

$$x = [15, 0, 5, 0, 10, 20]$$

Iteración 1. En la siguiente red se muestran los intervalos de generación asociados al flujo inicial y se procede a la aplicación del algoritmo de diferencial factible usando como potencial inicial $u = 0$.





La nueva aplicación del algoritmo de trayectoria mínima de Dijkstra para disminuir desviaciones de factibilidad de tensión en los nodos (o encontrar un circuito negativo) se resume a continuación

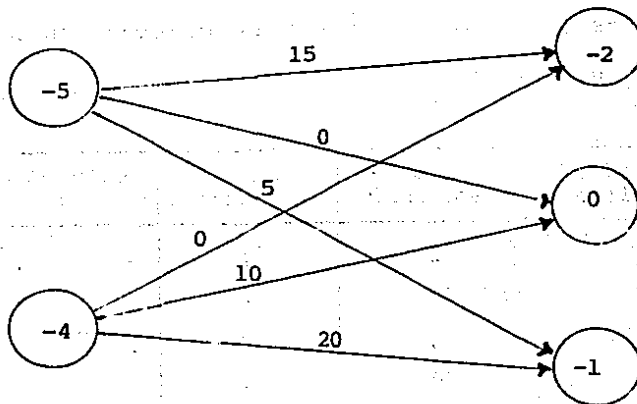
nodo analizado	arco involucrado	nodo involucrado	valor de w	valor de β
i_4	j_2	i_1	∞	
	j_5	i_2	-1	-1
i_2	j_4	i_3	-1	-1
	j_6	i_5	-1	
i_3	j_1	i_1	-1	-1
i_1	j_2	i_4	1	
	j_3	i_5	-1	-1
i_5				

El potencial actualizado es

$$u = [-6, -4, -2, 0, -1]$$

obtenido al sumar el potencial u disponible el potencial w obtenido de la tabla anterior.

El nuevo potencial es factible y se verifica que el flujo factible inicial es óptimo.



Solución óptima.

Ejemplo 3.6 (Problema de asignación). El gobierno federal pretende realizar cuatro proyectos de infraestructura rural y existen seis compañías que han ofrecido sus servicios y sus correspondientes cotizaciones (en miles de millones de pesos)

Proyecto	Compañía					
	1	2	3	4	5	6
A	7	6	10	3	4	9
B	8	6	5	4	6	4
C	8	5	11	4	9	9
D	12	10	8	7	8	12

La contraloría general del gobierno ha decidido que cada compañía realice a lo más un proyecto y desea asignar los proyectos a costo mínimo.

Esta problemática está representada por la red bipartita de la figura 1 en la que el primer conjunto de nodos corresponde a las compañías y el segundo conjunto a los proyectos. Los arcos de la red tienen asignada la terna de parámetros: cotas inferior y superior de capacidad, que establecen la posibilidad de asignación o no asignación y el valor de la cotización. Al aplicar el algoritmo de distribución lineal óptimo se obtiene la solución indicada en la figura 2, con un costo de 20.

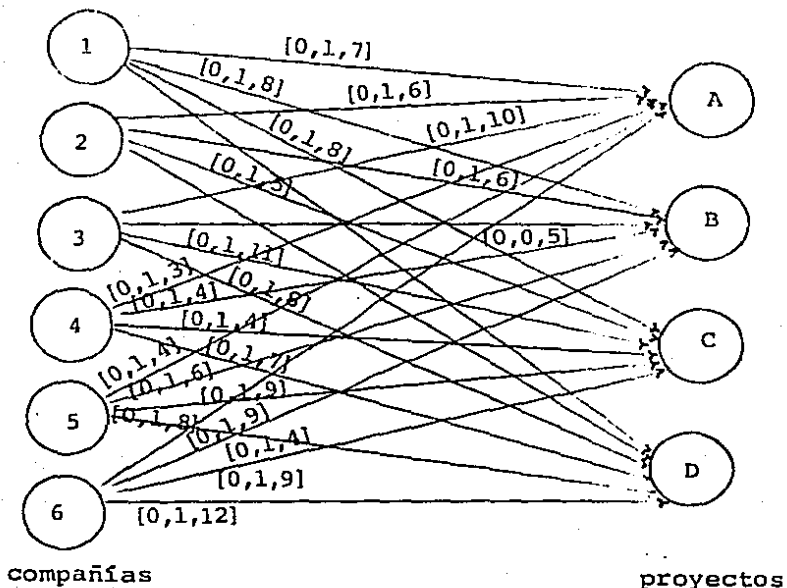


Figura 1.

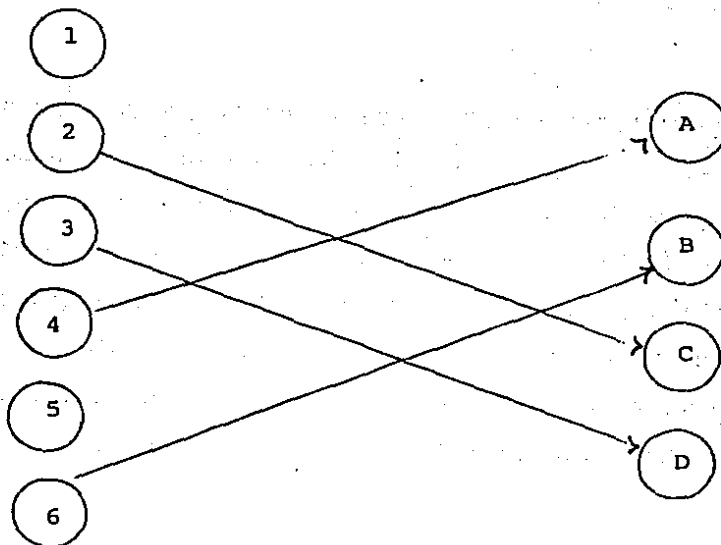


Figura 2.

CAPITULO 4

EL PROBLEMA DE DIFERENCIAL LINEAL ÓPTIMO

Un aspecto básico del análisis de un problema de programación lineal es la consideración del correspondiente problema dual. En el caso de redes de flujo se tiene que el dual asociado es un problema con estructura especial cuyo análisis es sencillo y permite métodos de solución alternativos: el problema de diferencial lineal óptimo. Entre los aspectos más importantes que surgen en el análisis de este problema se tiene el concepto de potencial (semejante al empleado en ingeniería) y la manera en que se utiliza para plantear problemas de índole combinatoria, se manejan formatos de problemas que aparecen frecuentemente en la literatura como el problema de costos compartidos.

Este capítulo se desarrolla como sigue: primero se describe el problema de diferencial lineal óptimo y algunos de los problemas clásicos que tiene asociados. A continuación se analizan las condiciones de existencia y optimalidad que sirven de base para los métodos de solución que se describen: el método de diferencial lineal y el simplex especializado en redes para potenciales.

4.1 Descripción del problema de diferencial óptimo.

Sea G una red conectada en la que asociado a cada arco se tiene un intervalo de generación $[d^-(j), d^+(j)]$ que limita los cambios de potencial o propiamente dicho, la tensión en el arco $j \in A$. Suponga que asociado a cada arco se tiene una disponibilidad de flujo $b(i)$, $i \in N$ que cumple con la condición de conservación de flujo $b(N) = 0$. Suponga que el problema de diferencial tiene distintas soluciones factibles. Entonces, el problema de diferencial óptimo consiste en seleccionar aquella solución factible que minimice una función de costos que involucra tanto los potenciales como a las tensiones que se originan en cada arco. Específicamente

$$\max - \sum_{i \in N} b(i)u(i) - \sum_{j \in A} [c(j)v(j) + q(j)]$$

sujeto a

$$d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j) \quad j \in A$$

donde $v = \Delta u$ es el diferencial correspondiente y las constantes asociadas con los costos $c(j)$, $q(j)$ y $b(i)$ son conocidas.

Un diferencial v es una solución factible del problema descrito si $v(j) \in D(j)$ para todo $j \in A$ y es solución óptima cuando minimiza la función de costos (o maximiza el negativo de la función de costos) sujeto a las restricciones de factibilidad.

Es conveniente señalar que el formato del problema de diferencial óptimo se ajusta a un número importante de problemas teóricos y reales. Algunos de estos ejemplos se describen brevemente a continuación.

Problema de localización.

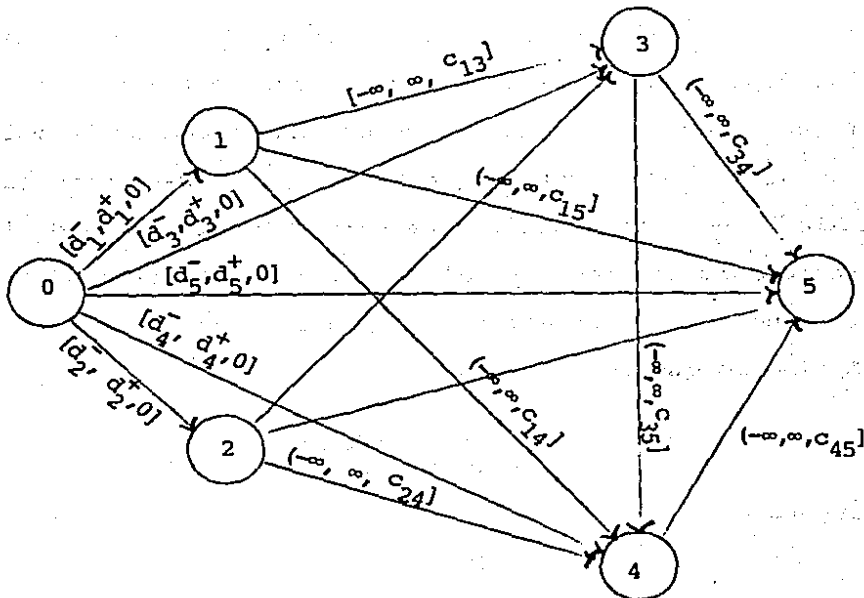
Considere la problemática de determinar la localización de n instalaciones a lo largo de una curva (que puede representar una carretera, ruta de distribución de servicios u otra). A cada instalación F_i le corresponde una coordenada s_i medida sobre la curva usando un punto de referencia, que generalmente coincide con una instalación ya establecida como almacén, fábrica, etc. Suponga que cada uno de los valores s_i debe estar en un cierto intervalo $[d^-(i), d^+(i)]$ y que asociada a cada pareja de instalaciones existe un costo de "intercomunicación" que depende de la distancia que separa a tales instalaciones. El costo de intercomunicación es una medida de la multiplicidad de servicios mutuos que pueden prestarse entre sí dos instalaciones. Se desea determinar la localización de las n instalaciones con costo total de intercomunicación mínimo. En términos de la estructura del problema de diferencial lineal óptimo lo que se desea es

$$\min \sum_{1 \leq k < j \leq n} c(k, i) |s_k - s_j|$$

sujeto a

$$d^-(i) \leq s_i \leq d^+(i)$$

donde $c(k,i)$ es un escalar no-negativo que refleja el costo de intercomunicación. Note que si una instalación se encuentra ya construída lo único que tenemos que hacer es $d^-(i) = d^+(i)$. La red de flujo que representa la problemática se muestra a continuación. En dicha red, un potencial u asigna a cada instalación F_i una posición $s_i = u(i) - u(0)$ y la distancia $|s_k - s_i|$ se identifica en la magnitud de la tensión existente entre los nodos k, i , o bien $|v(j)|$ donde $j = (k,i)$ si $k > 0$. En estos arcos el intervalo de generación es $(-\infty, \infty)$, mientras que en los arcos del tipo $j = (0,i)$ el intervalo de generación es dado por $[d^-(i), d^+(i)]$ en tanto que el costo asociado a tales arcos es cero.



Problema de costos compartidos.

Un aspecto interesante de los problemas combinatorios es que algunos de ellos pueden plantearse en términos de redes, uno de estos se discute a continuación. Considérese la realización de un proyecto que tiene diversas actividades, denominadas terminales, denotadas por P . Dichas actividades tienen asociado un beneficio conocido $g(p)$ si $p \in P$. Sin embargo, cada actividad terminal requiere de la realización de un conjunto de actividades de apoyo, sucede generalmente que dos o más actividades terminales requieren una misma actividad de apoyo. El conjunto de actividades de apoyo se denota por K y cada una de ellas tiene un cierto costo $f(k)$ si $k \in K$. Se desea determinar el subconjunto de actividades terminales que junto con sus actividades de apoyo proporcionen beneficio neto máximo. En términos del problema de diferencial lineal óptimo lo que se desea es:

$$\max \sum_{p \in P} g(p)v(u_p) - \sum_{k \in K} f(k)v(j_k)$$

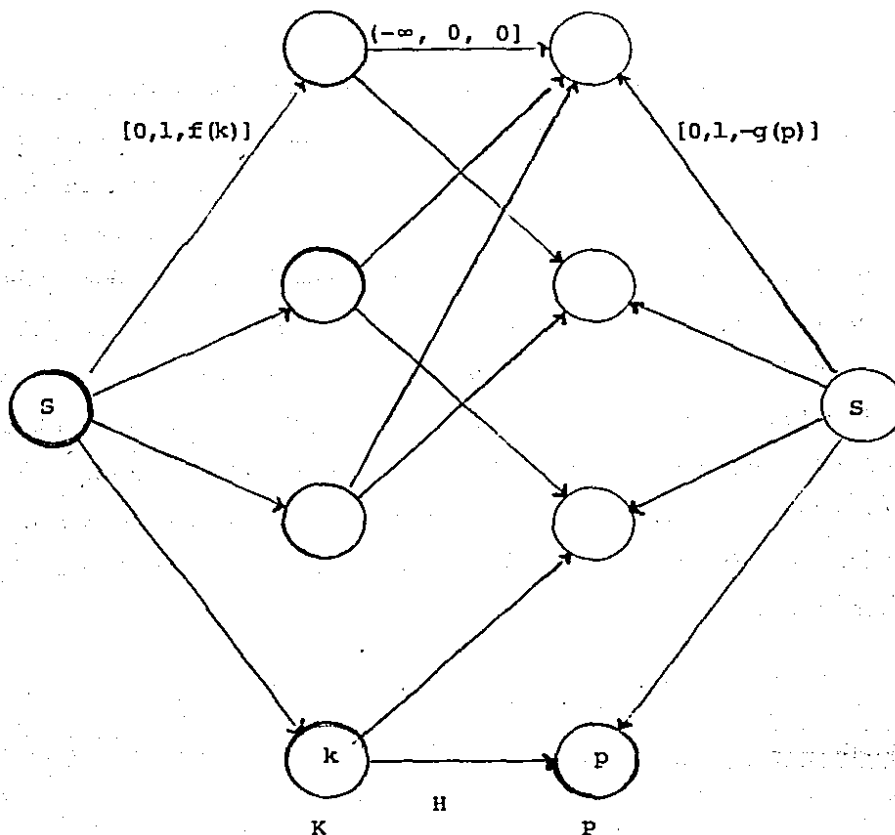
sujeto a

$$0 \leq v(j_p) \leq 1 \quad p \in P$$

$$0 \leq v(j_k) \leq 1 \quad k \in K$$

y $v(j_k) \geq v(j_p)$ enteros para todo par $(k,p) \in H$ donde H es el conjunto que relaciona a cada actividad terminal con sus respectivas terminales de apoyo.

Esquemáticamente, la red de flujo que representa la problemática es:



donde cada arco j tiene asociada una tripleta de parámetros que representa los límites inferior y superior de generación y el costo respectivamente, para cada nodo $i \in N$ $b(i) = 0$. Los diferenciales $v(j) = u(i) - u(s)$ sólo toman valores 0 ó 1.

4.2 Existencia y caracterización de soluciones.

La idea fundamental para establecer la existencia de soluciones del problema de distribución es el concepto de circuito con costo negativo. En el caso del problema de diferencial, el concepto básico es el corte con costo negativo, esto es, un corte $Q = [S, N/S]$ tal que

$$0 > - \sum_{i \in S} b(i) + \sum_{j \in Q^+} c(j) - \sum_{j \in Q^-} c(j)$$

o bien si recordamos que $b(N) = 0$ equivale a tener $b \cdot e_S + b_{N/S} = 0$ podemos escribir en forma compacta que

$$0 > b_{N/S} + c_Q$$

esto es, la condición que permite incrementar en un valor positivo, la función objetivo asociada a un potencial factible.

Existe una forma sencilla de verificar la condición anterior y su papel como elemento que mejora el potencial factible disponible. Suponga que tenemos un potencial factible u con diferencial asociado v , esto es, $d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j)$ para todo $j \in A$. Suponga que tenemos un corte $Q = [S, N/S]$ y que modificamos el potencial inicial como sigue $\underline{u}(i) = u(i)$ si $i \in S$ y $\underline{u}(i) = u(i) + \alpha$ si $i \notin S$ donde $\alpha > 0$. Suponga que el nuevo potencial \underline{u} es factible, entonces, el diferencial \underline{v} difiere del diferencial original v únicamente en los arcos que pertenecen al corte; pues en los restantes la tensión en cada arco es la misma. Específicamente

$$\underline{v}(j) = v(j) + \alpha \quad \text{si } j \in Q$$

$$\underline{v}(j) = v(j) - \alpha \quad \text{si } j \in Q$$

por lo tanto el costo asociado con u' es

$$[\text{costo de } u'] = [\text{costo de } u] + \alpha [b e_{N/S} + c e_Q]$$

Lo que equivale a tener un potencial mayor con un costo menor.

Es importante notar que si Q es un corte de capacidad ilimitada, es decir $d^+(j) = +\infty$ cuando $j \in Q^+$ y $d^-(j) = -\infty$ cuando $j \in Q^-$ entonces $\underline{v} = v + \alpha e_Q$ es factible para todo $\alpha > 0$ y el costo asociado es tan grande como se desee o bien el problema de diferencial lineal óptimo no es acotado. Así la existencia de tales cortes no balanceados se traduce en un valor infinito para la función objetivo, de donde puede deducirse que una condición necesaria para la existencia de solución para el problema de diferencial lineal óptimo es la ausencia de cortes no balanceados.

El siguiente teorema demuestra que ésta última condición es también suficiente para que el problema de diferencial tenga solución óptima (si tiene solución factible). ■

Teorema. (Existencia de potenciales óptimos). Suponga que el problema lineal de diferencial óptimo tiene al menos una solución factible. El supremo de este problema es finito y se asegura la existencia de al menos una solución óptima si y sólo si, no existe corte no balanceado.

Prueba. (suficiencia). Si no existe corte no vacío doblemente ilimitado, cualquier potencial se puede expresar como:

$$u = \sum_{k=1}^r \lambda_k u_k + \sum_{t=1}^q \mu_t b.e_{N/s_t} + cte$$

donde $v_k = \Delta u_k$ es un diferencial extremo y cada corte $Q_t = [s_t, N/s_t]$ es un corte elemental de generación ilimitada, $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \dots, r$; $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1$, $\mu_t \geq 0$ $t = 1, \dots, q$. Así el problema se reduce a maximizar la expresión

$$- \sum_{k=1}^r \lambda_k [b.u_k + c.v_k] - \sum_{t=1}^q \mu_t [b.e_{N/s_t} + c.e_{Q_t}]$$

sobre $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \dots, r$; $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = 1$; $\mu_t \geq 0$; $t = 1, \dots, q$; $b.e_{N/s_t} + c.e_{Q_t} \geq 0$. Puesto que no hay cortes no balanceados y el máximo se obtiene seleccionando el índice k_0 para el que $-b.u_{k_0} - c.v_{k_0}$ sea mayor, tomando $\lambda_{k_0} = 1$, $\lambda_k = 0$ para $k \neq k_0$ y $\mu_t = 0$ para toda $t = 1, \dots, q$.

Si existe algún corte $Q = [S, N/S]$ de generación doblemente ilimitada $b.e_{N/s} + c.e_Q = 0$ puesto que ni Q ni su inverso son no balanceados, entonces para cada potencial factible u , el potencial $u' = u + t e_{N/s}$ es factible para todo $t \in \mathbb{R}$. Sin

pérdida de generalidad se puede seleccionar un arco $\bar{j} \in Q$, e imponer al problema la restricción $v(\bar{j}) = 0$, esto permite redefinir el intervalo de generación correspondiente a \bar{j} como $[0, 0]$ con lo que Q ya no es un corte de doble capacidad ilimitada y el problema se reduce al caso anterior.

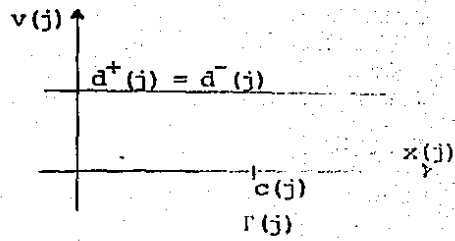
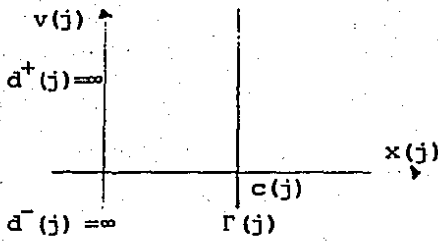
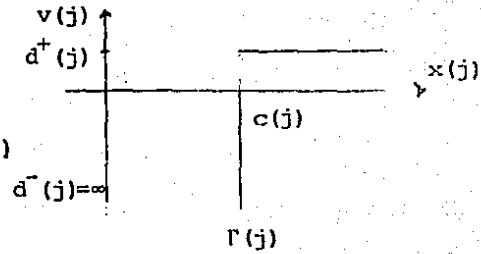
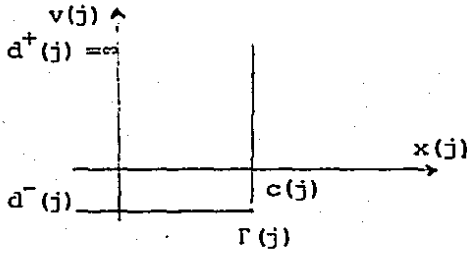
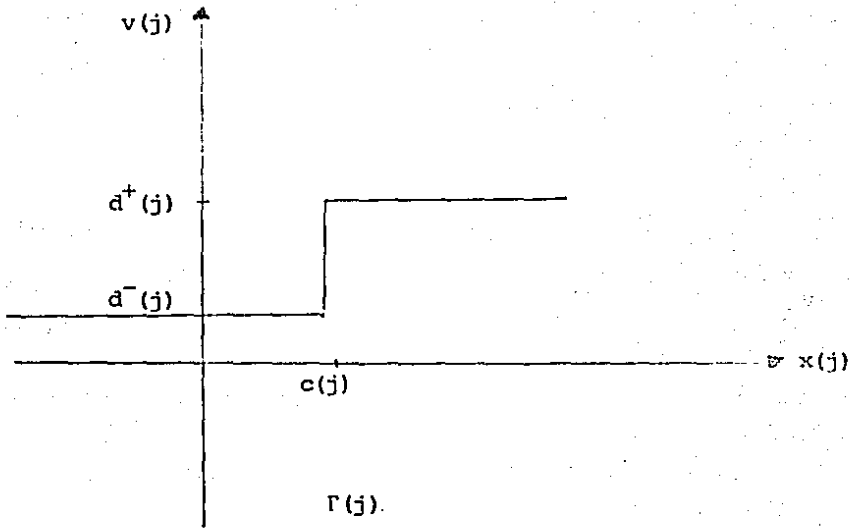
La necesidad del resultado se demostró en la hoja anterior. ■

De manera semejante al proceso de caracterización de las soluciones óptimas del problema de distribución definiremos la correspondiente curva de optimalidad asociada al problema de diferencial óptimo.

La curva de optimalidad Γ_j está definida por

$$\Gamma_j = \left\{ (x(j), v(j)) \in \mathbb{R}^2 \mid v(j) \in D(j) \text{ y } \begin{cases} x(j) \leq c(j) \text{ si } v(j) < d^+(j) \\ x(j) \geq c(j) \text{ si } v(j) > d^-(j) \end{cases} \right\}$$

cuando $d^-(j)$ y $d^+(j)$ son distintos y finitos. La forma esquemática de la curva se muestra en la hoja siguiente. De dicha figura se observa que si $d^+(j) = \infty$, entonces la semirecta horizontal superior desaparece y de manera semejante si $d^-(j) = -\infty$ la semirecta horizontal inferior desaparece. Por otra parte, si $d^-(j) = -\infty$ y $d^+(j) = \infty$, la curva de optimalidad estará formada únicamente por la recta $x(j) = c(j)$ y si $d^+(j) = d^-(j)$ tendremos la recta $v(j) = d(j)$. ■



Teorema. (Optimalidad lineal de potenciales). Un potencial u es una solución del problema de diferencial lineal si y sólo si existe un flujo x con $\text{div } x = b$ que satisface $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ para todo $j \in A$.

Prueba. (Suficiencia). Si x y u satisfacen las condiciones del teorema entonces v es una solución factible. Si v' es otra solución factible, de acuerdo con la definición de Γ_j :

$$\text{si } d^-(j) < v(j) < d^+(j) \text{ entonces } x(j) = c(j)$$

$$\text{si } v(j) = d^+(j) \text{ entonces } x(j) \geq c(j)$$

$$\text{si } v(j) = d^-(j) \text{ entonces } x(j) \leq c(j)$$

lo que implica que $c(j) [v'(j) - v(j)] \geq x(j) [v'(j) - v(j)]$ en todos los casos, sumando sobre los arcos de j se obtiene;

$$c.[v'-v] \geq x.[v'-v] = - [\text{div}.x].[u'-u] = - b.[u'-u]$$

De donde $-b.u - c.u \geq -b.u' - c.v'$ lo que implica que u es óptimo.

La prueba de la necesidad es constructiva. El algoritmo de diferencial óptimo construye, a partir de un potencial factible o un flujo x satisfaciendo las condiciones del teorema o un potencial factible u' mejor que u . ■

4.3 Algoritmo diferencial óptimo.

En esta sección se describe un procedimiento para determinar una solución óptima del problema de diferencial óptimo. Dicho procedimiento parte de un potencial factible que es mejorado (en términos de la función objetivo) o bien se demuestra que es óptimo. El mejoramiento se basa en un aspecto constructivo de ciertos intervalos de capacidad para determinar un flujo factible por medio del algoritmo de distribución.

Como resultado de tal algoritmo se tienen dos conclusiones mutuamente excluyentes: a) se detecta un corte con costo negativo (y se mejora el potencial) o b) se construye un flujo factible tal que las parejas de flujo y tensión asociadas a cada arco se encuentran en la curva de optimalidad descrita en la sección anterior.

Es conveniente considerar al algoritmo de diferencial como un procedimiento para conducir a las parejas de flujo-tensión en cada arco (con tensión factible) a la curva de optimalidad. Un procedimiento alternativo es usar árboles de expansión y tener el correspondiente simplex especializado para potenciales.

ALGORITMO: DIFERENCIAL OPTIMO

Propósito: Resolver el problema lineal de diferencial óptimo.

Descripción

Sea $G = [N, A]$ una red conectada con $b(N) = 0$, si u es un potencial factible defina el siguiente sistema de intervalos de capacidad:

$$[c_u^-(j), c_u^+(j)] = \begin{cases} [c(j), c(j)] & \text{si } d^-(j) < v(j) < d^+(j) \\ [-\infty, c(j)] & \text{si } d^-(j) = v(j) < d^+(j) \\ [c(j), \infty) & \text{si } d^-(j) < v(j) = d^+(j) \\ (-\infty, \infty) & \text{si } d^-(j) = v(j) = d^+(j) \end{cases}$$

Aplique el algoritmo de distribución factible. Si este algoritmo termina con un flujo x que satisface $\text{div } x = b$, $c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j)$ para $j \in A$ el algoritmo se detiene y u es óptimo. De otra manera, el corte no-vacío $Q = [S, N/S]$ con el que el algoritmo termina es tal que

$$b(S) > c_u^+(Q) = \sum_{j \in Q^+} c_u^+(j) - \sum_{j \in Q^-} c_u^-(j)$$

que equivale a $v(j) < d^+(j)$ para $j \in Q^+$ y $v(j) > d^-(j)$ para $j \in Q^-$, es decir,

$$0 > \sum_{i \in N/S} b(i) + \sum_{j \in Q^+} c(j) - \sum_{j \in Q^-} c(j) = b \cdot e_{N/S} + c \cdot e_Q$$

dado que $b(N) = 0$. Si hacemos

$$\alpha = \min \begin{cases} d^+(j) - v(j) & \text{para } j \in Q^+ \\ v(j) - d^-(j) & \text{para } j \in Q^- \end{cases}$$

entonces $\alpha > 0$. Si $\alpha = \infty$, Q es un corte no balanceado y el problema tiene $[\text{sup}] = +\infty$. De otra manera $u' = u + \alpha e_{N/S'}$ es otra solución factible mejor que u . Se repite el proceso empezando ahora con u' . ■

En términos prácticos el algoritmo de diferencial óptimo es semejante al algoritmo de distribución óptima, pues ambos parten con una solución factible de un problema de optimización y generan cierto sistema de intervalos a que debe ajustarse la solución dual para tener una solución óptima. En este caso, se genera un sistema de intervalos de capacidad y se busca que el algoritmo de distribución factible encuentre un flujo factible o bien, si esto no es posible, detecta un corte y mejora el potencial disponible.

Justificación del algoritmo de diferencial óptimo.

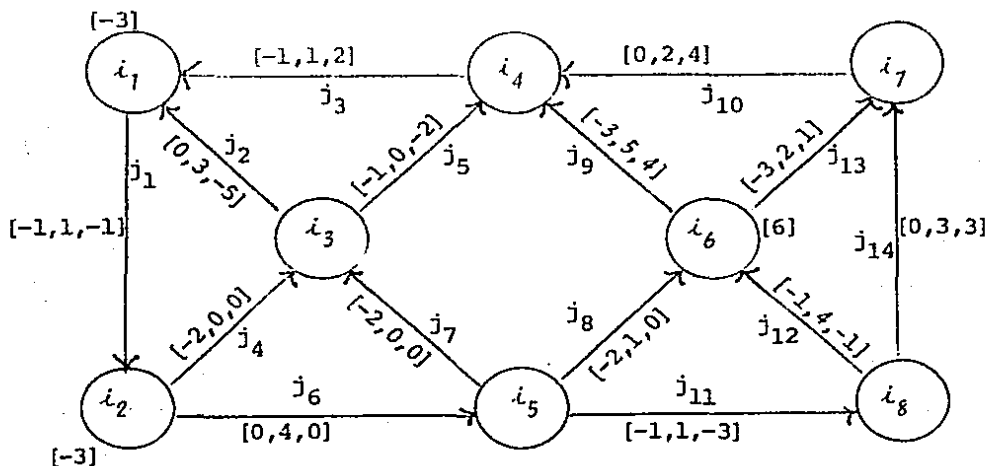
Los intervalos de capacidad $[c_u^-(j), c_u^+(j)]$ utilizados para obtener el flujo factible correspondiente al diferencial óptimo se obtienen directamente de la aplicación de la condición de optimalidad $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$. Si el algoritmo de distribución factible termina con un flujo factible se asegura la optimalidad de u . De otra manera se determina un corte $Q = [S, N/S]$ con $b(S) > c_u^+(Q)$ el potencial $u' = u + \alpha e_{N/S}$ es factible y mejor que u pues para $v' = \Delta u'$ se tiene que

$$-b.u' - c.v.' = -b.u - c.v - \alpha[b.e_{N/S} + c.e_Q] > -b.u - c.v$$

Suponga que el supremo del problema es finito y los valores $d^-(j), d^+(j)$ son conmensurables junto con la solución factible inicial u . Si todos estos valores son múltiplos de cierta $\delta > 0$ entonces también lo son los valores de α y los de los potenciales sucesivos $u'(i)$. Todas las soluciones generadas por el algoritmo pertenecen a la misma clase de conmensurabilidad y en cada iteración el valor aumenta en al menos un $\delta \epsilon$ donde ϵ es el menor de los valores $|b.e_{N/S} + c.e_Q|$ correspondientes a los cortes $Q = [S, N/S]$ con $b.e_{N/S} + c.e_Q < 0$.

Esto implica que el algoritmo termina en un número finito de iteraciones.

Ejemplo 4.1 Considere la red de flujo.



donde asociada a cada arco se tiene una tripleta de parámetros que corresponden a los límites inferior y superior de generación y al costo por unidad de tensión, mientras que asociada a cada nodo se tiene la disponibilidad de flujo.

Determinar la tensión a costo mínimo que resuelve el problema de diferencial óptimo descrito.

Se inicia la aplicación del algoritmo de diferencial óptimo con el potencial $u = 0$ que dá origen a los intervalos de capacidad $[c^-(j), c^+(j)]$ indicados en la red de la figura 6. La determinación del flujo factible se efectúa mediante la aplicación del algoritmo de distribución factible que se inicia con un flujo de $[-1, 0, 2, 0, 0, -3, 0, 0, 4, -2, -3, -1, 1, -3]$.

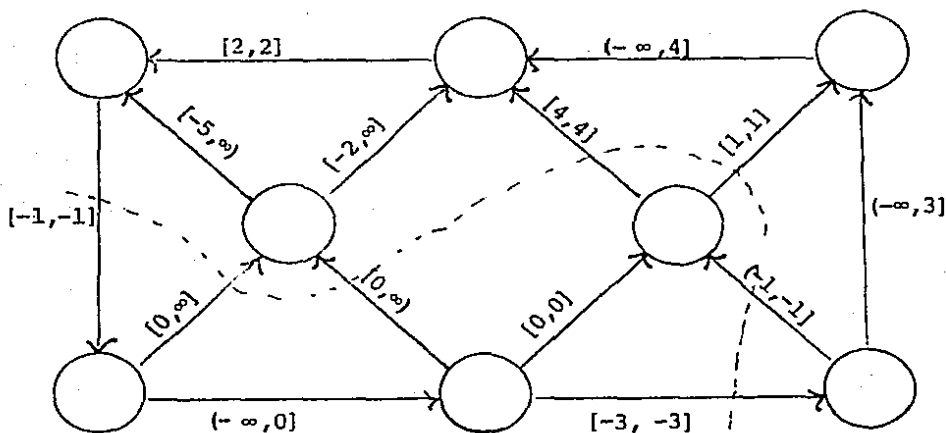


Figura 6.

Observe que existen únicamente dos nodos no factibles: $b(i_2) = -3 < y(i_2) = -2$ y $b(i_8) = 0 > y(i_8) = -1$. De donde $N^+ = \{i_8\}$ y $N^- = \{i_2\}$ y al aplicar Minty a la red pintada se obtiene el corte $Q = [S, N/S]$ con $S = \{i_1, i_3, i_4, i_7, i_8\}$; $\alpha = 1$ por lo que el potencial mejorado es: $u = u + e_{N/S} = [0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0]$.

Iteración 2. Los intervalos de capacidad correspondientes al nuevo potencial están indicados en la figura 2. La aplicación del algoritmo de distribución factible se inicia con el flujo $[-1, 0, 2, 0, 0, -3, 0, 0, 4, -2, -3, -1, 1, -3]$ para el que $N^+ = \{i_8\}$, $N^- = \{i_2\}$. Al aplicar Minty se tiene $P: i_8 + i_5 + i_2$; $\alpha = 1$ y $x' = x + e_P = [-1, 0, 2, 0, 0, -4, 0, 0, 4, -2, -4, -1, 1, -3]$ que corresponde a un flujo factible. La solución óptima del problema está indicada en la figura 7.

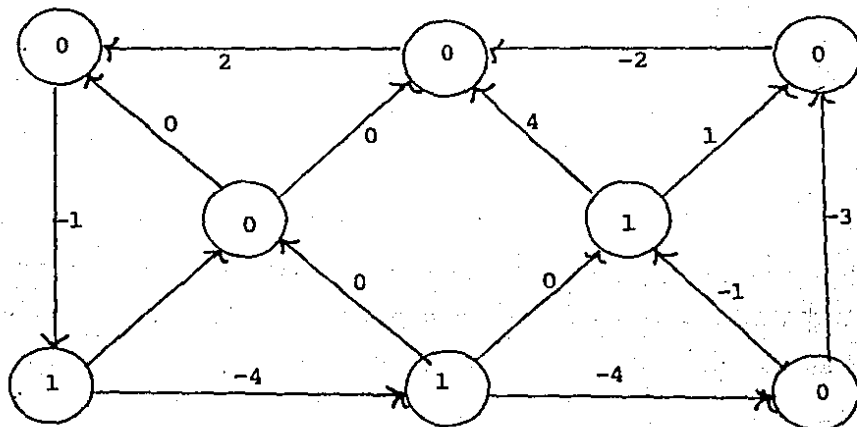
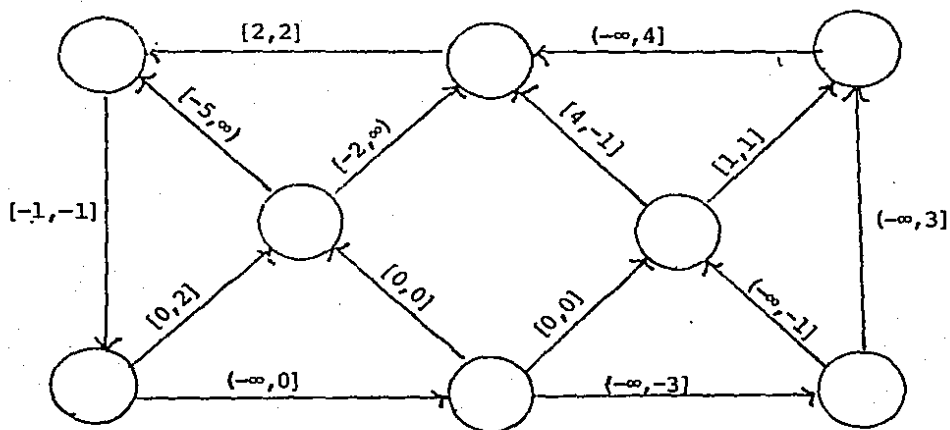
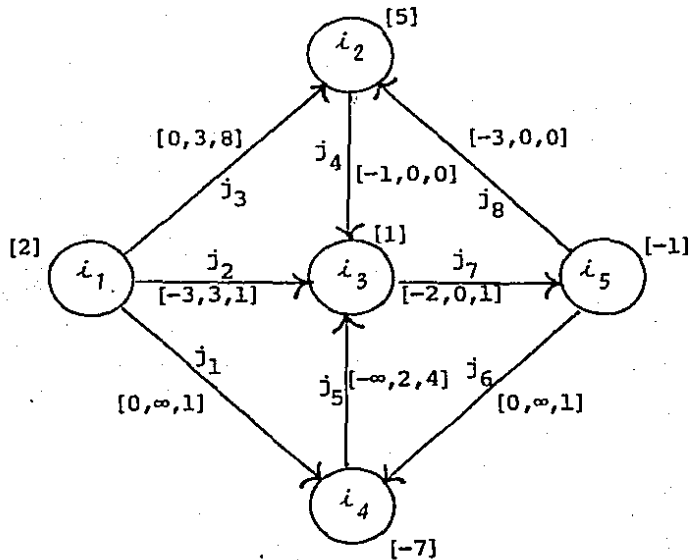


Figura 7.

Ejemplo 4.2 Considere la red de flujo



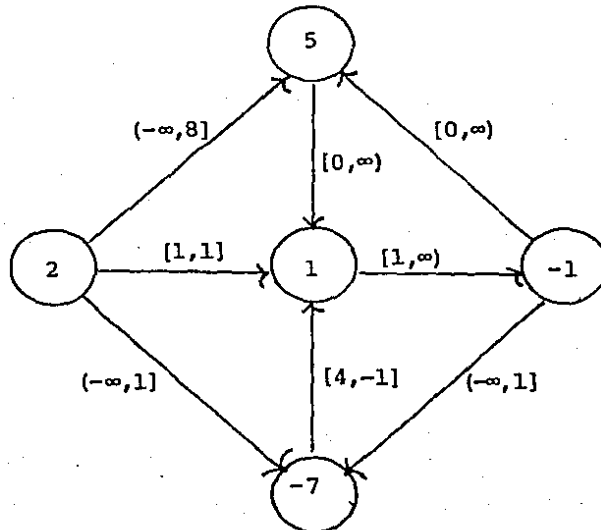
donde asociada a cada arco se tiene una tripleta de parámetros que corresponden a los límites inferior y superior de generación y al costo por una unidad de tensión, mientras que asociada a los nodos se tiene la disponibilidad de flujo.

Determinar la tensión a costo mínimo que resuelve el problema de diferencial óptimo descrito.

Se inicia la aplicación del algoritmo de diferencial óptimo con el potencial $u \equiv 0$ que da origen a los intervalos de

capacidad $[c^-(j), c^+(j)]$ indicados en la red de la figura.

La determinación de un flujo factible en dicha red se efectúa mediante la aplicación del algoritmo de distribución factible que se inicia con el flujo $[1, 1, 0, 5, 4, 0, 3, 0]$.



Observe que existen dos nodos no factibles: $b(i_4) = -7 < y(i_4) = 4 - 1 = 3$ y $b(i_5) = -1 > y(i_5) = -3$, entonces $N^+ = \{i_5\}$, $N^- = \{i_4\}$ y al aplicar Minty a la red pintada se obtiene $P: i_5 \rightarrow i_4$ con $\alpha = 1$, $x' = x + e_p = [1, 1, 0, 5, 4, 1, 3, 0]$, con este nuevo flujo se inicia la segunda iteración con $b(i_5) > y(i_5)$, $b(i_4) < y(i_4)$. Entonces $N^+ = \{i_5\}$, $N^- = \{i_4\}$ y se obtiene el corte $Q = [S, N/S]$ con $S = \{i_1, i_2, i_3, i_5\}$ para el que $\alpha = \infty$, esto es, Q es un corte no balanceado y el problema tiene como solución $[\text{sup}] = \infty$.

4.4 Algoritmo simplex para potenciales.

El algoritmo de diferencial óptimo descrito en la sección anterior trata de determinar un flujo x que sea factible respecto a los intervalos de generación $\{c_u^-(j), c_u^+(j)\}$. Dichos intervalos están asociados a un potencial factible u . El proceso para lograr este propósito es la aplicación repetida del algoritmo de distribución factible que permite determinar el flujo o detectar un corte que modifica el potencial disponible y permitir una mejora en la factibilidad del flujo disponible.

Una manera alternativa de realizar el proceso anterior es el uso adecuado de árboles de expansión mínima. En esta alternativa, en cada iteración se modifica el arco de un árbol y se verifica si se tiene la optimalidad. El proceso es semejante al método simplex para flujos excepto que se utiliza el complemento de un árbol de expansión denominado co-bosque. El método es sencillo y eficiente.

Algoritmo: SIMPLEX PARA POTENCIALES

Propósito: Resolver el problema lineal de diferencial óptimo.

Descripción

Si u es una solución factible extrema del problema de diferencial lineal tal que $F'_v = \{k \in A \mid d^-(k) < v(k) < d^+(k)\}$ forma un co-bosque, F es un árbol de expansión ajeno a F'_v y x el flujo que satisface que $x(k) = c(k)$ para todo $k \in A/F$ y $\text{div } x = b$. Si

$$\begin{aligned} x(j) &\leq c(j) \text{ para toda } j \in F \text{ con } v(j) = d^-(j) < d^+(j) \text{ y} \\ x(j) &\geq c(j) \text{ para toda } j \in F \text{ con } v(j) = d^+(j) > d^-(j) \end{aligned}$$

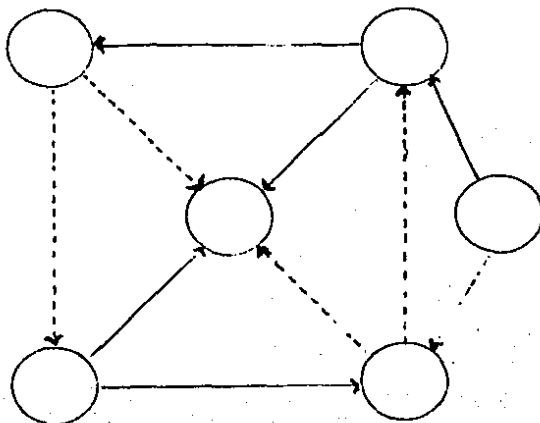
el algoritmo se detiene, v es una solución óptima. De otra manera se selecciona un arco \bar{j} de F con la mayor violación a alguna de las desigualdades. Al sacar \bar{j} de F se obtiene una partición de los nodos de la red en dos conjuntos: los nodos alcanzables desde el nodo inicial de \bar{j} usando sólo arcos de $F/(\bar{j})$, llamado S cuando \bar{j} viola la primera desigualdad, y los nodos alcanzables desde el nodo terminal de \bar{j} mediante arcos de $F/(\bar{j})$, etiquetado con S cuando la desigualdad violada por \bar{j} es la segunda. $Q = [S, N/S]$ es un corte tal que $b \cdot e_{N/S} + c \cdot e_Q < 0$, en el que el único arco de F es \bar{j} ; si

$$\alpha = \min \begin{cases} d^+(j) - v(j) & j \in Q^+ \\ v(j) - d^-(j) & j \in Q^- \end{cases}$$

$\alpha \geq 0$, si $\alpha = \infty$ el algoritmo se detiene, Q es un corte no balanceado y el supremo en el problema es ∞ . Cuando $\alpha < \infty$, si \bar{j} es un arco para el que se alcanza α , $u' = u + \alpha e_{N/S}$ es una solución factible extrema, $\bar{F} = [F/\{\bar{j}\}] \cup \{\bar{j}\}$ es un árbol de expansión ajeno a $F'_v = \{j \in A \mid d^-(j) < v'(j) < d^+(j)\}$ y

$$-b \cdot u' - c \cdot v' = -b \cdot u - c \cdot v + \alpha [x(\bar{j}) - c(\bar{j})] \geq b \cdot u - c \cdot v$$

se reinicia el proceso con u' , \bar{F} .



Bosque y cobosque correspondiente.

Justificación del algoritmo simplex para potenciales.

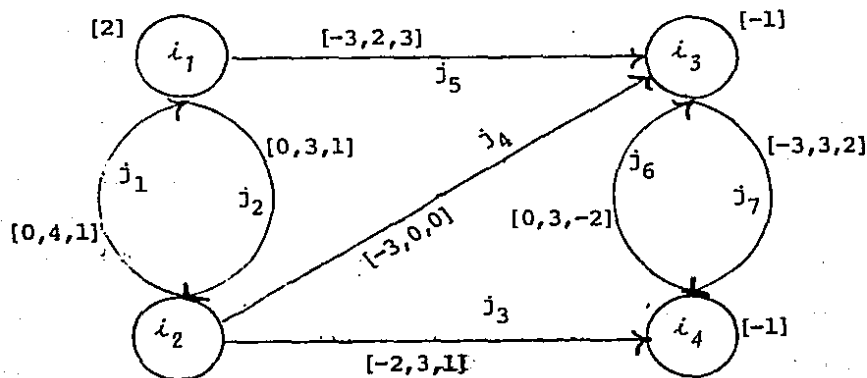
Si $j \in F$ entonces $v(j) = d^+(j)$ ó $v(j) = d^-(j)$, así las desigualdades $x(j) \leq c(j)$ con $v(j) = d^-(j)$ y $x(j) \geq c(j)$ con $v(j) = d^+(j)$ aseguran que la pareja $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ y por lo tanto la solución u es óptima. Por otro lado si $x(j) > c(j)$ con $v(j) = d^-(j)$ entonces $\bar{j} \in Q^+$ y los demás arcos de Q no están en F , es decir, satisfacen que $x(j) = c(j)$, lo que implica que

$$\sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) > \sum_{j \in Q^+} c(j) - \sum_{j \in Q^-} c(j), \text{ es decir,}$$

$$b \cdot e_{N/S} + c \cdot e_Q < b \cdot e_{N/S} + x \cdot e_Q = \text{div}(x) \cdot e_{N/S} + x \cdot \Delta e_{N/S} = 0.$$

Lo mismo sucede para $x(j) < c(j)$ con $v(j) = d^+(j)$; $\alpha = \infty$ cuando $d^+(j) = \infty$ para $j \in Q^+$ y $d^-(j) = -\infty$ para $j \in Q^-$, así Q es no balanceado y el supremo del problema es ∞ , por el teorema de la existencia de potenciales óptimos. Si $\alpha < \infty$ se tiene que $\alpha \geq 0$ puesto que $d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j)$ para $j \in A$. La elección de α asegura que estas desigualdades son satisfechas para $v'(j) = v(j) + \alpha e_Q(j)$. Como α se alcanza para \bar{j} , se tiene que $v'(\bar{j}) = d^+(\bar{j})$ ó $v'(\bar{j}) = d^-(\bar{j})$, así ningún arco de \bar{F} satisface que $d^-(j) < v(j) < d^+(j)$, entonces $v'(j) = v(j)$ para $j \in F/\{\bar{j}\}$, esto es, $\bar{F} \cap F = \emptyset$, como \bar{F} es otro árbol de expansión, u' es otra solución extrema. El algoritmo genera una sucesión de soluciones factibles extremas no degeneradas. En las iteraciones en las que $\alpha > 0$ el potencial es reemplazado por uno mejor y ninguna de las soluciones extremas puede ser utilizada dos veces, como sólo existe un número finito de soluciones extremas factibles el proceso no puede repetirse infinitamente. ■

Ejemplo 4.3 Considere la red



donde asociada a cada arco se tiene una tripleta de parámetros que corresponden a los límites inferior y superior de generación y al costo por unidad de tensión, mientras que asociada a cada nodo se tiene la disponibilidad de flujo.

Determinar la tensión a costo mínimo que resuelve el problema de diferencial óptimo descrito.

Se inicia la aplicación del algoritmo simplex para potenciales con $u \equiv 0$ que corresponde a una solución extrema del problema de diferencial factible tal que $F'_v = \{j_3, j_5, j_7\}$. Entonces $F = \{j_2, j_4, j_6\}$ es un árbol de expansión ajeno a F'_v y

$x = [1, 0, 1, -2, 3, 2, 2]$ es el flujo que satisface que $x(j) = c(j)$ para $j \in A - F$. Como puede observarse

$$x(j_2) = 0 < c(j_2) \quad ; \quad v(j_2) = d^-(j_2)$$

$$x(j_4) = -2 < c(j_4) \quad ; \quad v(j_4) = d^+(j_4)$$

$$x(j_6) = 2 > c(j_6) \quad ; \quad v(j_6) = d^-(j_6)$$

j_6 es el arco en el que se dá la mayor violación, entonces $\bar{j} = j_6$ y se obtiene el corte $Q = [S, N/S]$ con $S = \{i_4\}$, $\alpha = 2$, $u' = u + 2e_{N/S}$, de donde, $v = [0, 0, -2, 0, 0, 2, -2]$ y $\bar{F} = (F - \{j_6\}) \cup J_3 = \{j_2, j_3, j_4\}$

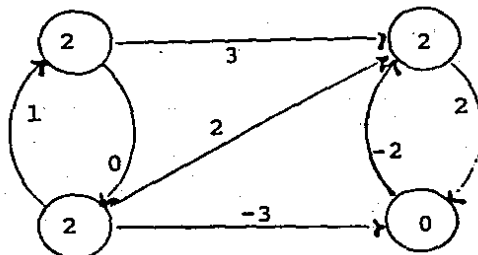
Iteración 2. El flujo $x = [1, 0, -3, 2, 3, -2, 2]$ es el flujo que satisface que $x(j) = c(j)$ para $j \in A - F$. Como puede observarse:

$$x(j_2) = 0 < c(j_2) \quad ; \quad v(j_2) = d^-(j_2)$$

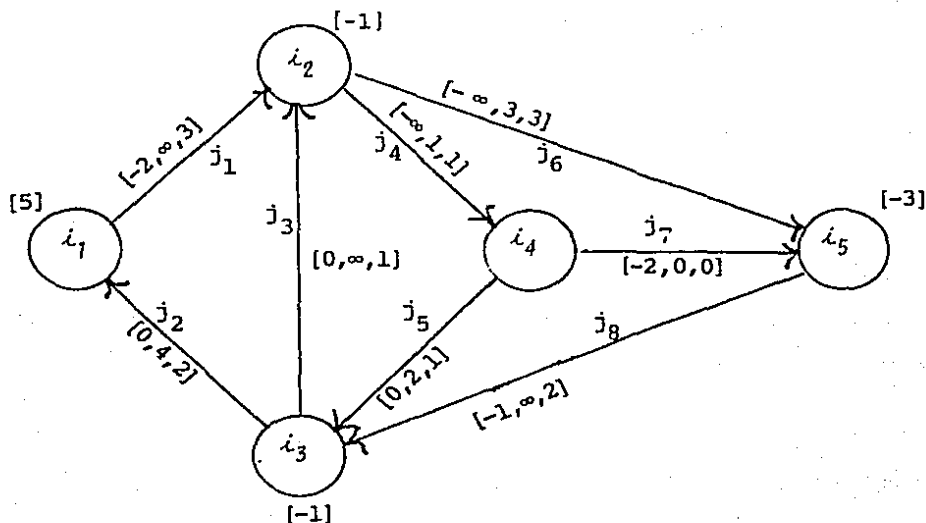
$$x(j_3) = -3 < c(j_3) \quad ; \quad v(j_3) = d^-(j_3)$$

$$x(j_4) = 2 > c(j_4) \quad ; \quad v(j_4) = d^+(j_4)$$

Por lo que el algoritmo se detiene y la solución óptima es la indicada en la siguiente figura:



Ejemplo 4.4 Considere la red



donde cada arco tiene asociada una tripleta de parámetros que corresponden a los límites inferior y superior de generación y al costo por unidad de tensión, mientras que asociada a cada nodo se tiene la disponibilidad de flujo.

Determine la tensión a costo mínimo que resuelve el problema de diferencial óptimo descrito.

Se inicia la aplicación del algoritmo simplex para potenciales con $u \equiv 0$ que corresponde a una solución extrema del problema de diferencial factible tal que $F'_V = \{J_1, J_4, J_6, J_8\}$. Entonces

$F = \{j_2, j_3, j_5, j_7\}$ es un árbol de expansión ajeno a F'_v y $x = [3, -2, 2, 1, -1, 3, 2, 2]$ es el flujo que satisface $x(j) = c(j)$ para $j \in A - F$. Como puede observarse:

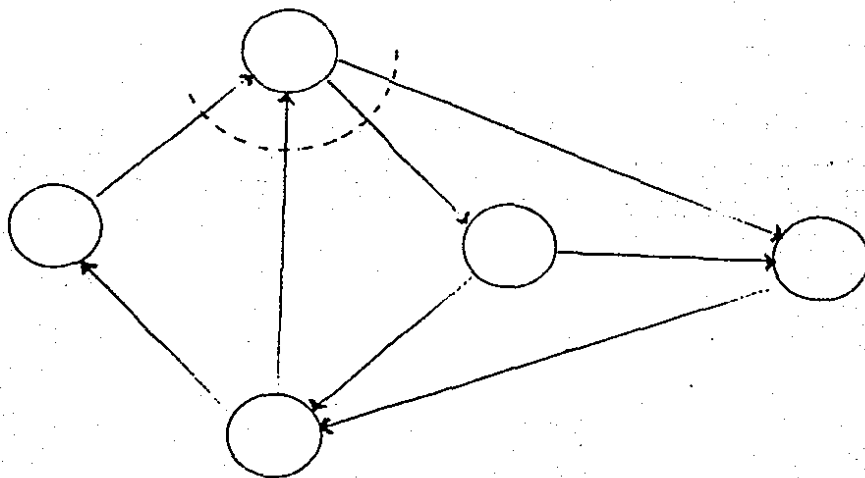
$$x(j_2) = -2 < c(j_2) = 2 \quad ; \quad v(j_2) = d^-(j_2)$$

$$x(j_3) = 2 > c(j_3) = 1 \quad ; \quad v(j_3) = d^-(j_3)$$

$$x(j_5) = 1 < c(j_5) = 1 \quad ; \quad v(j_5) = d^-(j_5)$$

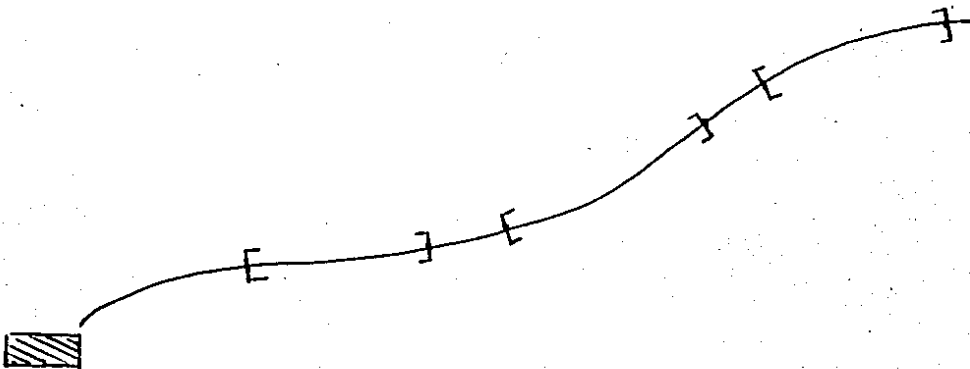
$$x(j_7) = 2 > c(j_7) = 0 \quad ; \quad v(j_7) = d^+(j_7)$$

$\bar{j} = j_3$ no satisface la desigualdad, por lo que se obtiene el corte $Q = [S, N/S]$ con $S = \{i_1, i_3, i_4, i_5\}$, $\alpha = \infty$, esto es, Q es un corte no balanceado por lo que el supremo del problema es ∞ .



Ejemplo 4.3 (Localización de instalaciones). Considere una compañía distribuidora de refacciones automotrices que desea determinar la localización de tres nuevas instalaciones a lo largo de una carretera. La compañía ha determinado que la primera instalación debe estar entre 5 y 10 Km. de distancia de un punto base (la fábrica) y que la segunda instalación debe estar, sobre la carretera, a una distancia de 12 a 18 Kms. La tercera instalación debe estar entre 20 y 25 Kms. de distancia del punto base. El costo de "intercomunicación" entre cada par de refaccionarias es función de la distancia entre ellas. El costo de intercomunicación, por km. de distancia de separación, entre cada par de refaccionarias es da do como sigue: entre las refaccionarias uno y dos el costo es 16 mientras que entre uno y tres es treinta y cinco. El costo de intercomunicación entre las refaccionarias dos y tres es veinte.

Se desea determinar las localizaciones de las refaccionarias de manera tal de satisfacer las restricciones de localización a costo mínimo



La red de flujo que representa la problemática es:

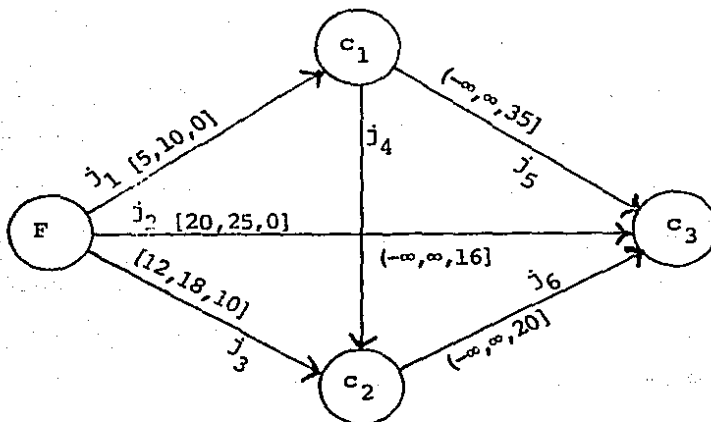


Figura 8.

donde cada arco tiene asociada una terna de parámetros que corresponden a los límites inferior y superior de generación y el costo de intercomunicación respectivamente. En términos de redes de flujo, lo que se pretende en este problema es determinar un potencial factible que tenga asociado costo mínimo. Dado que podemos identificar de manera sencilla un potencial factible procederemos a la aplicación del algoritmo de diferencial lineal óptimo.

Iteración 1. Considérese el potencial inicial $u = [0, 5, 12, 2, 0]$ que corresponde a un vector de localizaciones factibles de

cada una de las instalaciones del problema en los respectivos intervalos. El diferencial asociado es dado por el vector $v = \Delta u = [5, 20, 12, 7, 15, 8]$ y los intervalos de capacidad correspondientes se indican en la red de la figura 9.

Nuestro siguiente propósito es determinar un flujo factible asociado a estas capacidades, tomando en cuenta que la divergencia en cada nodo debe ser cero. Sea el flujo inicial $x = [0, 0, 0, 16, 35, 20]$ y observe que en el nodo tres existe exceso de flujo, esto es, $N^+ = \{3\}$, mientras que en los nodos uno y dos existe déficit de flujo o bien $N^- = \{1, 2\}$. Efectuando un pintado de los arcos se identifica un corte $Q = [S, N/S]$ donde $S = \{0, 3\}$ con $\alpha = 5$. Por lo tanto podemos actualizar el potencial y tener $u' = u + 5e_{N/S}$ o bien $u' = [0, 10, 17, 20]$.

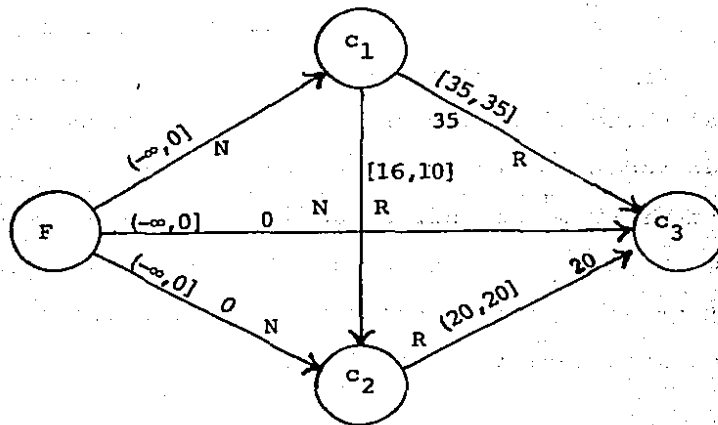


Figura 9.

Iteración 2. Dado el potencial $u = [0, 10, 17, 20]$ se observa que el diferencial asociado es $v = \Delta u = [10, 20, 17, 7, 10, 3]$ y que los correspondientes intervalos de capacidad son los mostrados en la red de la figura 10.

La determinación de un flujo factible asociado a esta red se inicia con $x = [0, 0, 0, 16, 35, 20]$ con lo que se tiene $N^+ = \{3\}$ y $N^- = \{1, 2\}$. Efectuando el pintado de la red se identifica una trayectoria aumentante de N^+ a N^- , esto es, $P: 3 \leftarrow 0 \rightarrow 1$ con $\alpha = 51$ y el nuevo flujo es $x' = x + 51e_p$ o bien $x' = [51, -51, 0, 16, 35, 20]$. Efectuando el nuevo pintado de los arcos (figura 11) se observa que existe un corte $Q = \{S, N/S\}$ con $S = \{0, 1, 3\}$ y podemos actualizar el potencial. Específicamente, $u' = u + \alpha e_{N/S}$ con $\alpha = 1$ o bien $u' = [0, 10, 18, 20]$

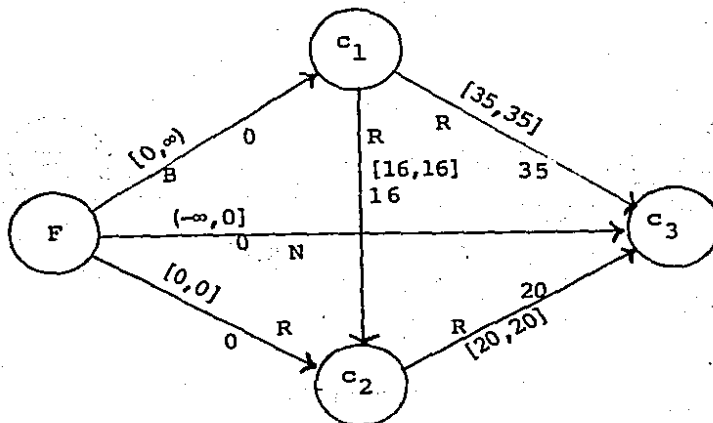


Figura 10.

Iteración 3. Dado el potencial $u = [0, 10, 18, 20]$ se observa que el diferencial es $v = \Delta u$ o bien $v = [10, 20, 18, 8, 10, 2]$ y los correspondientes intervalos de capacidad se muestran en la figura 12. El flujo inicial (idéntico a la iteración 2) es $x = [51, -51, 0, 16, 35, 20]$ con $N^+ = \{3\}$ y $N^- = \{2\}$. Efectuando el pintado de los arcos (figura 12) se tiene que existe una trayectoria aumentante de N^+ a N^- , esto es : $P: 3 \rightarrow 0 \rightarrow 2$ con $\alpha = 4$. El nuevo flujo es $x' = x + 4e_p = [51, -55, 4, 16, 35, 20]$. Dicho flujo es factible y se concluye que el potencial actual es óptimo. El costo de localización de las instalaciones es 480. (Figura 13).

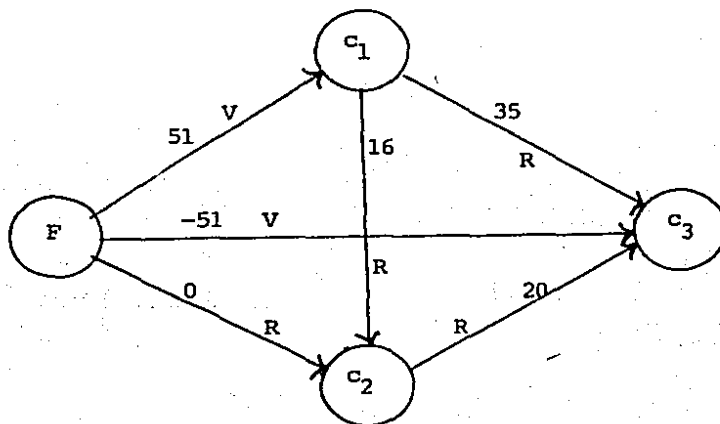


Figura 11.

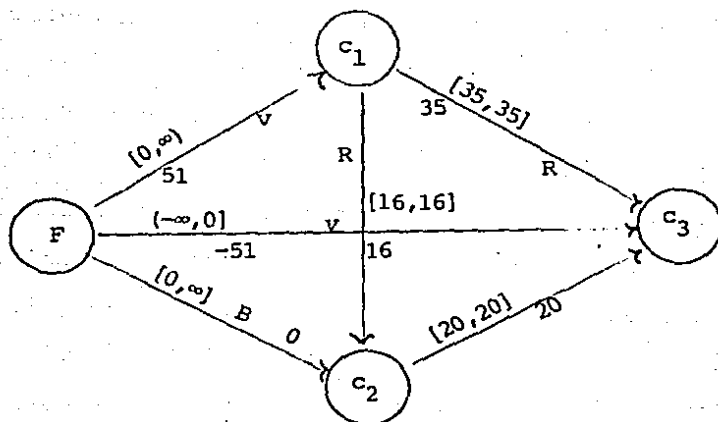


Figura 12.

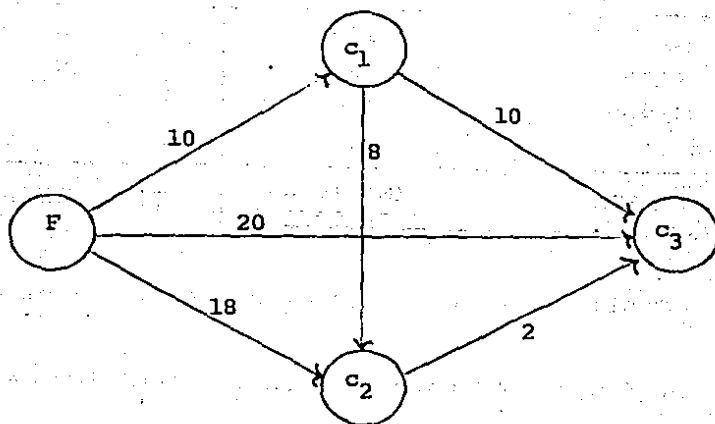


Figura 13.

Ejemplo 4.6 (Costos compartidos). Considérese un conjunto de actividades terminales (esto es, actividades que producen un beneficio por la venta de un producto o servicio) relacionadas con alimento para animales de granja. Asociados a tales actividades terminales, se tiene un conjunto de actividades de apoyo que tienen un cierto costo. Los beneficios de las actividades terminales, los costos de las actividades de apoyo y la relación de actividades de apoyo requeridas para cada actividad terminal, se muestran en la tabla 1. Se desea seleccionar el subconjunto de actividades terminales con sus actividades de apoyo asociadas que produzcan ganancia neta máxima.

Actividad terminal (venta de alimento)	Beneficio (Millones de pesos)	actividades de apoyo (compra de maquinaria)			
		A	B	C	D
vacas	150	x	x		x
obejas	130		x	x	
cerdos	100	x		x	x
aves	50	x			x
costos	(Millones) de pesos)	70	90	100	20

Tabla 1. Descripción de costos y relaciones.

La red de flujo que representa la problemática es:

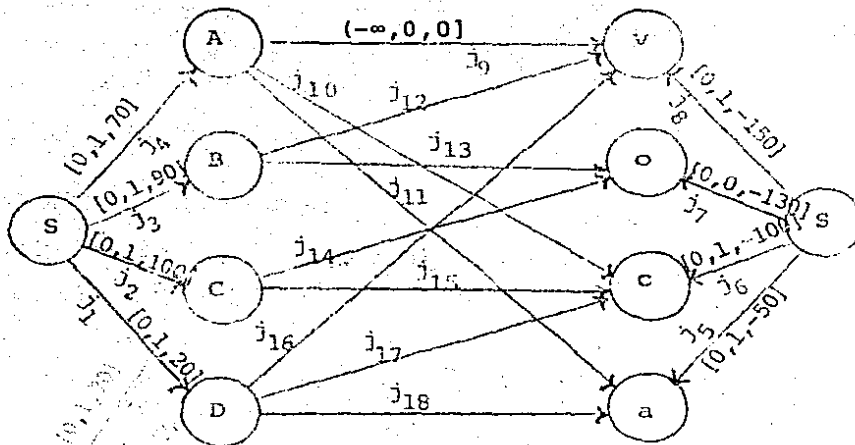


Figura 14.

donde cada arco tiene asociada una tripieta de parámetros que corresponde a los límites inferior y superior de generación y el costo respectivamente. En términos de redes de flujo lo que se desea es determinar un potencial factible (que es uno si se realiza la actividad y cero en caso contrario) que tenga asociado costo mínimo. Dado que podemos identificar de forma sencilla un potencial factible procederemos a la aplicación del algoritmo de diferencial lineal óptimo.

Iteración 1. Sea el potencial inicial $u \equiv 0$ con correspondiente diferencial $v = \Delta u = 0$. Los intervalos de capacidad asociados a los arcos se indican en la figura 15.

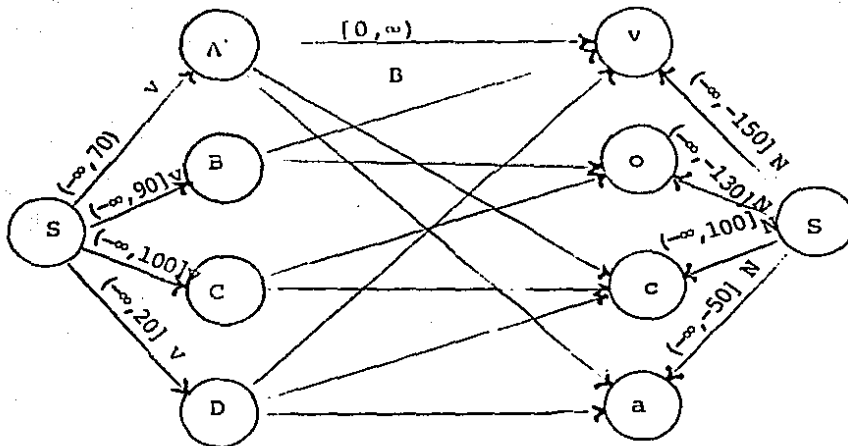


Figura 2.

Nuestro siguiente propósito es determinar un flujo factible asociado a estas capacidades, tomando en cuenta que la divergencia en cada nodo es cero. Considere el flujo inicial cero en todos los arcos excepto $x(j_5) = -50$, $x(j_6) = -100$; $x(j_7) = -130$; $x(j_8) = -150$. Entonces, $N^+ = \{s\}$ y $N^- = \{a, c, v\}$. Efectuando el pintado de la red es sencillo identificar las siguientes trayectorias aumentantes ajenas de N^+ a N^- :

- P_1 : $s \rightarrow D \rightarrow a$ con $\alpha = 20$ que implica $x'(j_1) = x'(j_{18}) = 20$
 P_2 : $s \rightarrow C \rightarrow c$ con $\alpha = 100$ que implica $x'(j_2) = x'(j_{15}) = 100$
 P_3 : $s \rightarrow B \rightarrow o$ con $\alpha = 90$ por lo que $x'(j_3) = x'(j_{13}) = 90$
 P_4 : $s \rightarrow A \rightarrow v$ con $\alpha = 70$ que da $x'(j_4) = x'(j_9) = 70$

Repetiendo el proceso anterior se tiene que $N^+ = \{s\}$ y $N^- = \{a, o, v\}$. Efectuando el pintado de arcos de la red es sencillo verificar la existencia de un corte $Q = [S, N/S]$ donde $s = \{s\}$ y $\alpha = 1$. El nuevo potencial es $u' = u + e_{N/S}$ que es un vector con elementos iguales a uno en todos los nodos excepto en s donde es igual a cero.

Iteración 2. El diferencial asociado al potencial $u(s) = 0$ y $u(p) = 1$ con $p \neq s$ se indica en la red de la figura 16. Mientras que en la red de la figura 17 se muestran los intervalos de capacidad asociados. Sea el flujo inicial, el indicado en la red de la figura 17, y observe que $N^+ = \{s\}$ y $N^- = \{a, o, v\}$. Efectuando el pintado de los arcos podemos observar que existen las siguientes trayectorias aumentantes ajenas de N^+ a N^- :

$$P_1 : s \rightarrow a \quad \text{con } \alpha = 30 \quad \text{que implica } x(j_5) = -20$$

$$P_2 : s \rightarrow o \quad \text{con } \alpha = 40 \quad \text{de donde } x(j_7) = -90$$

$$P_3 : s \rightarrow v \quad \text{con } \alpha = 80 \quad \text{que dá } x(j_8) = -70$$

El flujo actual es factible y el potencial disponible en esta iteración es óptimo. La ganancia neta asociada con la decisión óptima es 150.

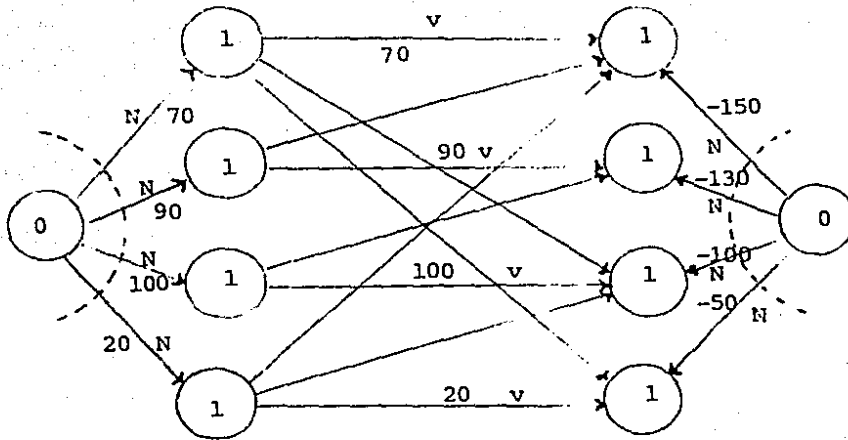


Figura 16.

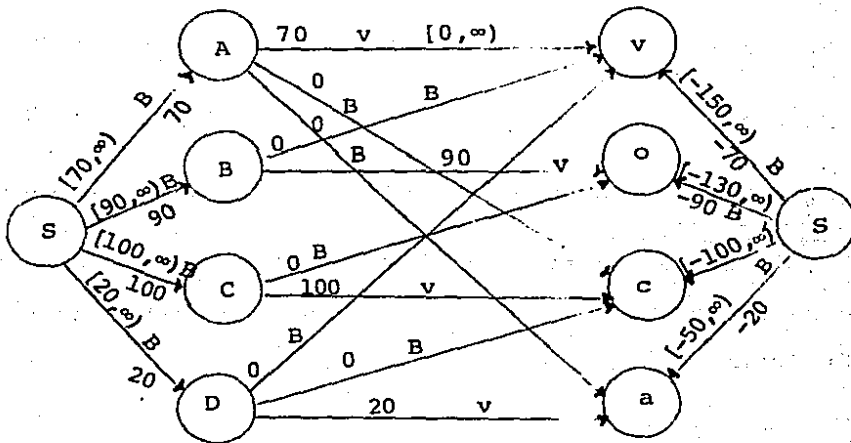


Figura 17.

CAPITULO 5

PROBLEMAS ELEMENTALES DUALES

Un aspecto fundamental en el análisis de los problemas de distribución y diferencial óptimo es la relación que existe entre sus soluciones óptimas. Específicamente, la obtención de la solución óptima de uno de estos problemas requiere la determinación de una solución factible (y óptima) del otro. La dualidad inmersa y hasta este momento no explícita de tales problemas queda plenamente establecida en este capítulo por medio de los denominados problemas elementales duales que resultan casos particulares, pero equivalentes, de los problemas de distribución y diferencial óptimo.

Este capítulo se desarrolla como sigue: Primeramente se describen los problemas elementales y se establece su dualidad basada en la propiedad que ambos problemas tienen la misma curva característica. A continuación se demuestra la equivalencia de los problemas elementales con los correspondientes problemas de distribución y diferencial óptimos. Finalmente se describen los métodos de solución: El método de ajuste eficiente y el método de las desviaciones ambos con un mismo propósito; pero diferente procedimiento.

5.1 Descripción de los problemas elementales duales.

En esta sección se consideran casos aparentemente particulares de los problemas de distribución y diferencial lineales óptimos en donde los intervalos de capacidad son de la forma $[c(j), \infty)$ mientras que los intervalos de generación son de la forma $(-\infty, d(j)]$ con $c(j)$ y $d(j)$ finitos, respectivamente. Para describir tales problemas suponemos que la red G en cuestión es conectada y que las disponibilidades en los nodos $b(i)$, $i \in N$ son conocidos y satisfacen la propiedad de balance total $b(N) = 0$. Supongamos también que asociados a cada arco $j \in A$ se tienen varios parámetros $c(j)$, $d(j)$, $p(j)$ y $q(j)$ tales que satisfacen la relación

$$q(j) = -c(j)d(j) - p(j) ; p(j) = -c(j)d(j) - q(j)$$

Problema elemental de distribución óptima. Consiste en

$$\text{minimizar } \sum_{j \in A} [d(j)x(j) + p(j)]$$

sobre todos los flujos x tales que $x(j) \geq c(j)$ si $j \in A$ y $y(i) = b(i)$, si $i \in N$ donde $y = \text{div } x$.

Problema elemental de diferencial óptimo. Consiste en

$$\text{maximizar } - \sum_{i \in N} b(i)u(i) - \sum_{j \in A} [c(j)v(j) + q(j)]$$

sobre todos los potenciales u que satisfacen $v(j) \leq d(j)$ para toda $j \in A$ donde $v = \Delta u$.

Conviene señalar que para estos casos particulares de los problemas de distribución y diferencial lineales óptimos la curva característica Γ_j que sirve para establecer la optimalidad de las respectivas soluciones es la misma, específicamente

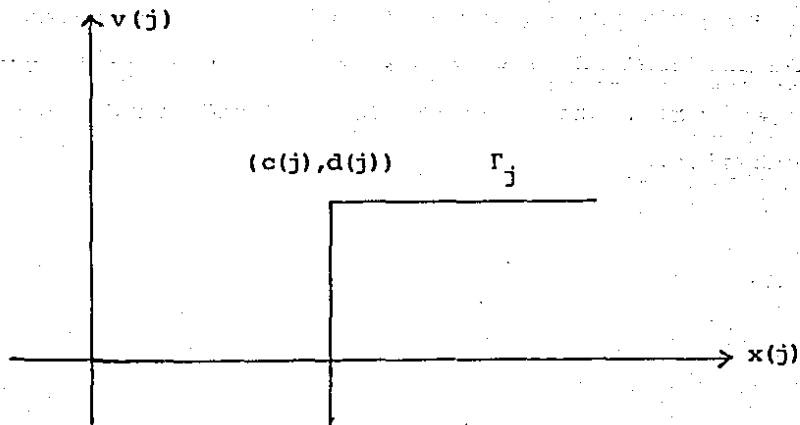
$$\Gamma_j = \{(x(j), v(j)) \in \mathbb{R}^2 \mid x(j) \geq c(j) ; v(j) \leq d(j) ;$$

$$[x(j) - c(j)] [v(j) - d(j)] = 0\}$$

o bien como se describe geométricamente en la figura inferior. La implicación inmediata de esta caracterización es que el conjunto de condiciones de optimalidad para ambos problemas es el mismo y equivale a tener un flujo x y un potencial u tales que

$$\operatorname{div} x = b \quad \text{y} \quad (x(j), v(j)) \in \Gamma_j \quad j \in A$$

La relación de optimalidad y dualidad de los problemas elementales duales queda resumida en el teorema de la hoja siguiente.



Teorema de dualidad. Si ambos problemas elementales poseen solución factible finita entonces:

$$\left[\begin{array}{l} \text{mínimo en el problema} \\ \text{elemental de distribu} \\ \text{ción óptima.} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{máximo en el problema} \\ \text{elemental de diferencial} \\ \text{óptimo.} \end{array} \right]$$

Si sólo el primer problema posee solución factible entonces $[\text{inf}] = -\infty$. Si el segundo problema es el único que posee solución factible entonces $[\text{sup}] = +\infty$.

Prueba. Sean x y u soluciones factibles de los respectivos problemas. Entonces la diferencia de funciones objetivo es

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{j \in A} [d(j)x(j) + p(j)] - [- \sum_{i \in N} b(i)u(i) - \sum_{j \in A} [c(j)v(j) + q(j)]] \\ &= \sum_{j \in A} (d(j) - v(j))x(j) + c(j)v(j) - d(j) \\ &= \sum_{j \in A} [x(j) - c(j)] [d(j) - v(j)] \geq 0 \end{aligned}$$

dado que $x \cdot v = -v \cdot u$ y $p(j) + q(j) = -c(j)d(j)$ si $j \in A$. Entonces $\alpha \geq 0$ y se tiene la igualdad sí y sólo si $\text{div } x = b$ y $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ para $j \in A$. El resto de la prueba es inmediato de la desigualdad anterior. ■

Es conveniente observar que la dualidad de los problemas elementales es sencilla de verificar si usamos la programación lineal. Específicamente, el problema elemental de distribución lineal equivale, en términos matriciales, a

$$\min z = dx + ep$$

$$Ex = b$$

$$x \geq c$$

donde e es un vector cuyos componentes son todos igual a uno y es conformable con el vector p que tiene tantos elementos como arcos tiene la red G . El resto de los elementos especificados en este problema lineal es sencillo de interpretar. El dual asociado a este problema es

$$\max w = ub + \alpha c + ep$$

$$uE + \alpha = d ; \alpha \geq 0$$

Sin embargo, si observamos que el vector α es no-negativo e igual a $d - uE$ podemos reescribir el problema dual como

$$\max w = ub - uEc + dc + ep$$

$$uE \leq d$$

Finalmente, si recordamos que $-eq = dc + ep$ y que siendo u una variable no restringida podemos reemplazarla (sin pérdida de generalidad) por $-u$, tenemos que el dual es igual a

$$\max w = - ub - [vc + eq]$$

$$- uE \leq d$$

donde $v = - uE$ o bien $u = \Delta u$. Sin embargo éste es precisamente el problema elemental de diferencial óptimo.

Finalmente, es posible utilizar la programación lineal para verificar el hecho de que la curva característica es la base de la optimalidad de las soluciones factibles de los problemas elementales duales. Específicamente, la condición $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ para toda $j \in A$ no es otra cosa que la condición que resume el teorema de holgura complementaria de dos problemas duales en programación lineal. Esta equivalencia se aprecia directamente del siguiente teorema:

Teorema. (Holgura complementaria). Sean los problemas lineales duales

$$\min z = dx + ep \qquad \max w = - ub - (vc + eq)$$

$$(P) \qquad Ex = b \qquad v \leq d \quad (v = \Delta u)$$

$$x \geq c$$

donde E es la matriz nodos-arcos de una red G ; b es el vector de disponibilidad de flujo en cada nodo y el resto de los parámetros son idénticos a los usados en esta sección. Una condición necesaria y suficiente para que las soluciones factibles

x y u sean óptimas, respectivamente, es que se cumpla $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ para toda $j \in A$.

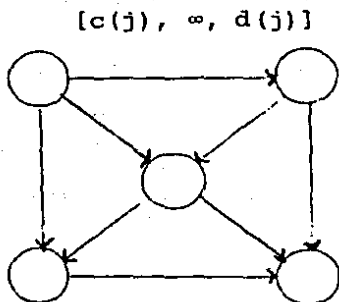
Prueba. Debido al teorema fundamental de dualidad, las soluciones factibles x , u son óptimas sí y solo si

$$dx + ep = -ub - vc - eq$$

pero $eq = -dc - ep$ y $-ub = vx$ por lo que la igualdad anterior se convierte en

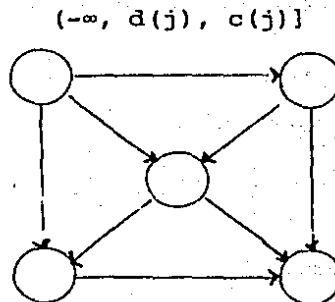
$$(d - v)x = (d - v)c$$

o bien $(d-v)(x-c) = 0$ pero dado que $d-v \geq 0$ y $x-c \geq 0$ se tiene que esto equivale a $[d(j) - v(j)]$ o $[x(j) - c(j)] = 0$ o bien $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$.



Distribución óptima

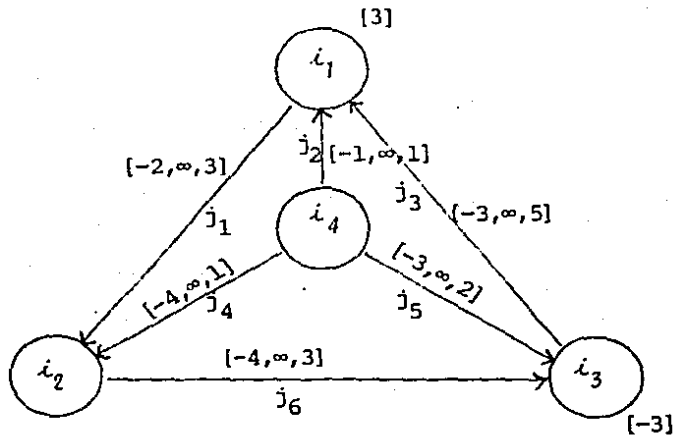
$$\begin{aligned} \min \quad & dx + ep \\ \text{Ex} = & b \\ x \geq & c \end{aligned}$$



Diferencial óptimo

$$\begin{aligned} \max \quad & -ub - (vc + eq) \\ v \leq & d \quad (v = \Delta u) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.1 Considere la red de flujo



donde cada arco tiene asociada una tripleta de parámetros que corresponden a las capacidades inferior y superior de flujo así como el costo por paso de una unidad de flujo.

La formulación de programación lineal asociada con la determinación del flujo a costo mínimo en la red es:

$$\min z = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6$$

sujeto a

$$x_1 - x_2 - x_3 = 3$$

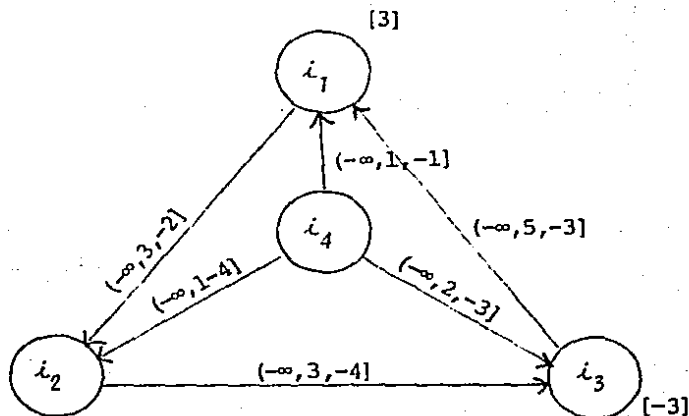
$$-x_1 - x_4 + x_6 = 0$$

$$x_3 - x_5 - x_6 = -3$$

$$x_2 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 \geq -2 ; x_2 \geq -1 ; x_3 \geq -3 ; x_4 \geq -4 ; x_5 \geq -3 ; x_6 \geq -4$$

Problema dual asociado.



El problema dual asociado al problema de distribución óptima descrito anteriormente es dado a continuación y corresponde a un problema de diferencial óptimo.

$$\max z = -[3u_1 + 3u_3 + 2v_1 + v_2 + 3v_3 + 4v_4 + 3v_5 + 4v_6] - 44$$

sujeto a

$$v_1 \leq 3; v_2 \leq 1; v_3 \leq 5; v_4 \leq 1; v_5 \leq 2; v_6 \leq 3$$

La solución óptima del problema primal es:

$x = [-1, -1, -3, -3, 4, -4]$ y la solución correspondiente del

problema dual es $v = [3, -2, -4, 1, 2, 1]$ con $v = Au$ para

$u = [1, 4, 5, 3]$ con el valor común de la función objetivo

$$[\min] = [\max] = -28.$$

5.2 Relación con los problemas de distribución y diferencial.

La generalidad de los problemas elementales duales descritos en la sección anterior queda establecida si podemos reducir cualquier problema de distribución o diferencial lineal óptimo a su correspondiente forma elemental.

Empezaremos por demostrar la reducción de cualquier problema de distribución lineal óptima. Para tal propósito sólo se necesita verificar que podemos reemplazar cualquier arco $j \in A$ con intervalo de capacidad $[c^-(j), c^+(j)]$ por uno o varios arcos equivalentes con intervalo de capacidad de la forma $[c^-(j), \infty)$. Existen cuatro casos:

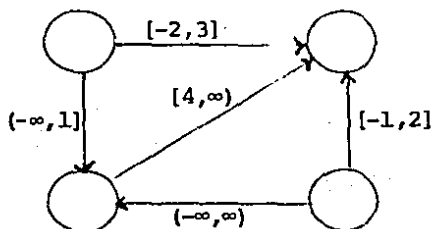
Caso 1. Si el intervalo original es $[c^-(j), \infty)$ con $c^-(j)$ finito no hay nada que hacer.

Caso 2. Si el intervalo del arco es de la forma $(-\infty, c^+(j)]$ con $c^+(j)$ finito basta con reemplazar el arco original $j = (i, i')$ por su recíproco $j' = (i', i)$ con parámetros $d(j') = -d(j)$, $p(j) = p(j')$ y flujo $x(j') = x(j)$, (ver figura 18).

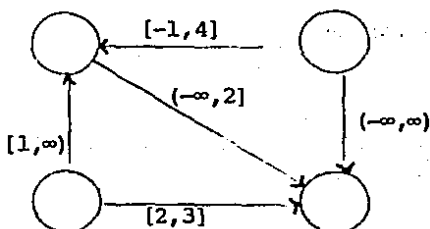
Caso 3. Si el intervalo del arco es de la forma $[c^-(j), c^+(j)]$ con ambos extremos finitos podemos reemplazar el arco $j = (i, i')$ por un par de arcos en serie con un nodo ficticio que denotaremos por k ; de modo que los arcos $j_1 = (i, k)$ y $j_2 = (k, i')$ tienen como parámetros $d(j_1) = d(j)$; $p(j_1) = p(j)$; $d(j_2) = p(j_2) = 0$ y flujo $x(j_1) = -x(j_2) = x(j)$, (ver figura 18).

Caso 4. Si el intervalo del arco es de la forma $(-\infty, \infty)$ podemos reemplazar el arco $j = (i, i')$ por un par de arcos en paralelo $j_1 = (i, i')$ y $j_2 = (i', i)$ con parámetros $d(j_1) = d(j)$; $p(j_1) = p(j)$; $d(j_2) = -d(j)$; $p(j_2) = 0$; y flujos tales que $x(j) = x(j_1) - x(j_2)$ (ver figura 18).

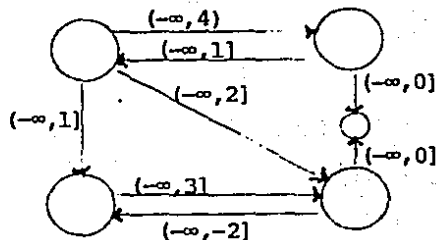
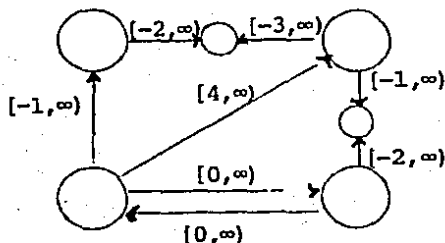
La reducción del problema de diferencial lineal al correspondiente problema elemental es semejante al descrito anteriormente. Existen cuatro casos y los detalles del reemplazo de un arco por un arco (s) equivalente (s) se describen en la figura 19.



Flujo máximo

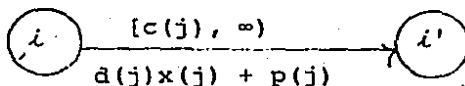


Trayectoria mínima

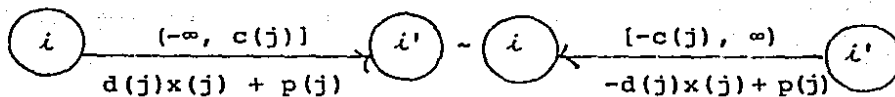


Problemas elementales equivalentes a los anteriores

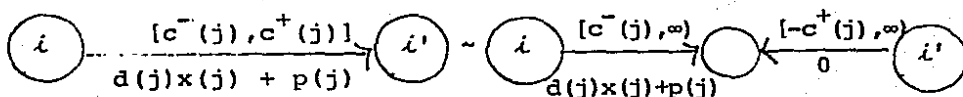
Caso 1)



Caso 2)



Caso 3)



Caso 4)

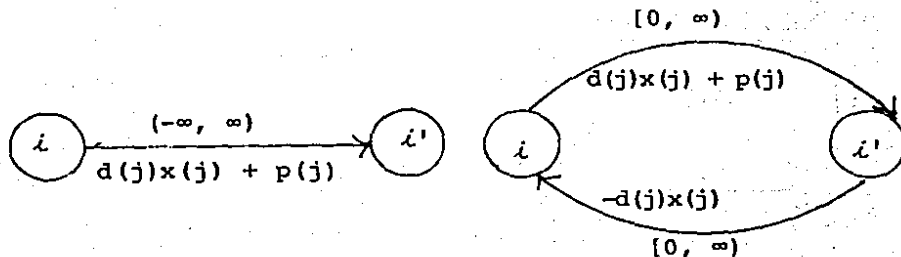
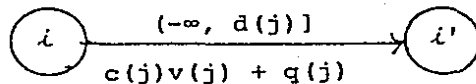
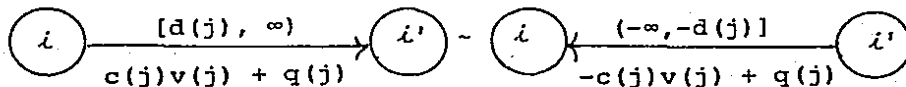


Fig. 18. Reducción del problema de distribución lineal.

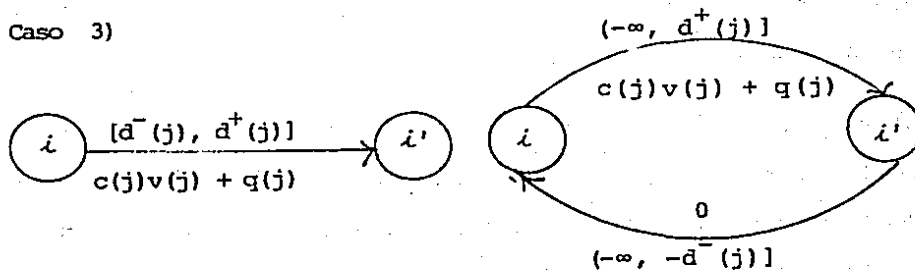
Caso 1)



Caso 2)



Caso 3)



Caso 4)

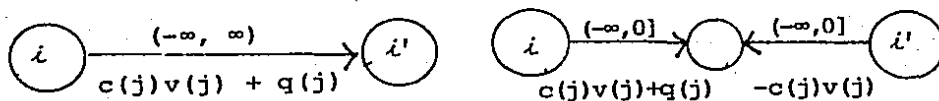


Fig. 19. Reducción del problema de diferencial lineal.

5.3 Algoritmo de Ajuste eficiente.

Una vez establecida la dualidad de los problemas elementales de distribución y diferencial óptimos, podemos proceder a sus métodos de solución. Dada la dualidad de los problemas en cuestión sabemos que cualquier método resuelve ambos problemas. El primer método que discutiremos es una especialización del algoritmo de diferencial óptimo que usa de manera repetida el algoritmo de diferencial óptimo. En este algoritmo se parte de un potencial factible y un flujo factible respecto a los arcos de la red. En el algoritmo, los potenciales representan un sistema de precios que forzan a un ajuste en el flujo debido a excesos o deficiencias hasta que existe un equilibrio y así se obtiene la solución óptima.

El algoritmo de ajuste se describe a continuación y se observa la manera en que se utilizan los intervalos de capacidad modificados, así como los intervalos de generación modificados, que equivalen a tener la misma condición establecida por la curva característica.

Algoritmo: AJUSTE EFICIENTE

Propósito: Resolver simultáneamente el problema elemental de distribución lineal óptimo y su dual.

Descripción

Sea u una solución factible del problema elemental de diferencial óptimo y x un flujo factible en los arcos, $N^+ = \{i \mid b(i) < y(i)\}$, si $N^+ = N^- = \emptyset$ el algoritmo se detiene y x es una solución factible del problema elemental correspondiente. De otra manera se aplica el algoritmo de trayectoria mínima de N^+ a N^- empezando con $u_0 = u$ con los intervalos de generación

$$[d_x^-(j) - v_0(j), d_x^+(j) - v_0(j)] = \begin{cases} (-\infty, d(j) - v_0(j)] & x(j) = c(j) \\ [0, 0] & x(j) > c(j) \end{cases}$$

cuando el algoritmo se detiene con un corte $Q: N^+ \rightarrow N^-$ de generación infinita, Q es un corte no balanceado y la solución del problema elemental de diferencial óptimo tiene $[\text{sup}] = \infty$. De otra manera si el algoritmo de trayectoria mínima se detiene con una trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ y un potencial $u' = u_0 + W$, se forman los intervalos

$$[c_u^-(j), c_u^+(j)] = \begin{cases} [c(j), \infty) & v(j) = d(j) \\ [c(j), c(j)] & v(j) < d(j) \end{cases}$$

Y para ellos se calcula:

$$\alpha = \min \begin{cases} x(j) - c(j) & j \in P^- \\ b(i) - y(i) & \text{para el nodo inicial de } P \\ y(i') - b(i') & \text{para el nodo terminal de } P \end{cases}$$

Entonces $0 < \alpha < \infty$, $x' = x + \alpha e_p$ y la discrepancia entre los valores $b(i)$ y $y(i)$ disminuye al menos en α en los nodos inicial y terminal de P . Se repite el proceso con los nuevos valores de x y u . ■

Como se observa este algoritmo se inicia con un potencial cu yo diferencial es factible con respecto a los intervalos $(-\infty, d(j)]$ para $j \in A$. En muchas de las aplicaciones $d(j) \geq 0$ y en este caso $u \equiv 0$ satisface las restricciones. Cuando un diferencial factible no es fácilmente identificado se puede determinar mediante la aplicación del algoritmo de diferencial factible. El flujo inicial es un flujo $x(j)$ dentro del intervalo $[c^-u(j), c^+u(j)]$ para $j \in A$, como puede notarse estos intervalos siempre contienen a $c(j)$ de manera que $x(j) = c(j)$ para $j \in A$, resulta factible.

Justificación del algoritmo de ajuste eficiente.

Cuando el algoritmo se detiene con un corte de generación limitada $x(j) = c(j)$ para toda $j \in Q^- = Q$ que es de la forma $[S, N/S]$ con $b(i) \leq y(i)$ para todo $i \in N/S$ con al menos una de las desigualdades estricta. Así

$$\begin{aligned} b \cdot e_{N/S} + c \cdot e_Q &= b \cdot e_{N/S} + x \cdot \Delta e_{N/S} \\ &= b \cdot e_{N/S} - (\text{div} x) \cdot e_{N/S} \\ &= (b - y) \cdot e_{N/S} < 0 \end{aligned}$$

es decir, Q es un corte no balanceado para el problema elemental de diferencial óptimo. Cuando se aplica el algoritmo de trayectoria mínima con u_0 no necesariamente constante en N^+ o en N^- se resuelve el problema de tensión máxima para los intervalos

$$\begin{aligned} &[d_x^-(j) - v_0(j), d_x^+(j) - v_0(j)] = \\ &= \begin{cases} (-\infty, d(j) - v_0(j)] & \text{si } x(j) = c(j) \\ [0, 0] & \text{si } x(j) > c(j) \end{cases} \end{aligned}$$

se obtiene un valor de W y una P con valor común máximo y mínimo $\beta \geq 0$ que es constante e igual a W en N^- . Se tiene

$$d_x^-(j) - v_0(j) \leq \Delta w(j) \leq d_x^+(j) - v_0(j) \quad \text{para todo } j \in A$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{despliegue de } \Delta w \\ \text{de } N^+ \text{ a } N^- \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{despliegue de } \Delta w \\ \text{relativo a } P \end{array} \right] = \sum_{j \in P^+} \Delta w(j) - \sum_{j \in P^-} \Delta w(j) \quad Y$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{máxima generacion de } P \\ \text{con respecto a los intervalos} \end{array} \right] &= \sum_{j \in P^+} [d_x^+(j) - v_0(j)] - \sum_{j \in P^-} [d_x^-(j) - v_0(j)] \\ &= d^+(p) - [\text{despliegue de } v_0 \text{ relativo a } P] \\ &= \beta \end{aligned}$$

lo que implica que $\Delta w(j) = d_x^+(j) - v_0(j)$ para toda $j \in P^+$ y $\Delta w(j) = d_x^-(j) - v_0(j)$ para $j \in P^-$. Así en términos del potencial $u = u_0 + w$ y un diferencial $v = v_0 + \Delta w$ se tiene

$$d_x^-(j) \leq v(j) \leq d_x^+(j) \quad \text{para toda } j \in A$$

$$v(j) = \begin{cases} d_x^+(j) & \text{para } j \in P^+ \\ d_x^-(j) & \text{para } j \in P^- \end{cases}$$

así se satisface que

$$(x(j), v(j)) \in \Gamma_j \quad \text{si y sólo si } x(j) \in [c_u^-(j), c_u^+(j)]$$

si y sólo si $v(j) \in [d_x^-(j), d_x^+(j)]$, en particular $c_u^-(j) \leq x(j) \leq c_u^+(j)$ para los nuevos intervalos.

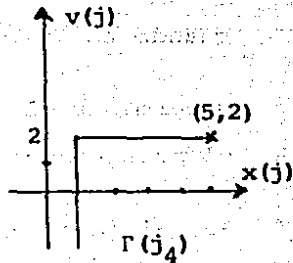
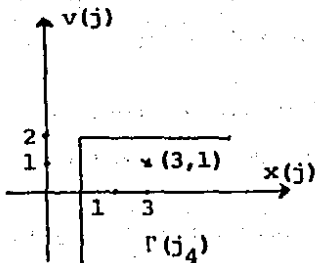
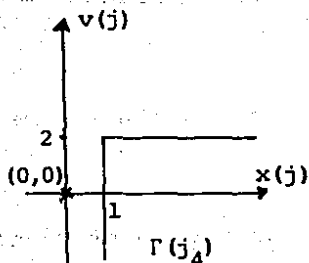
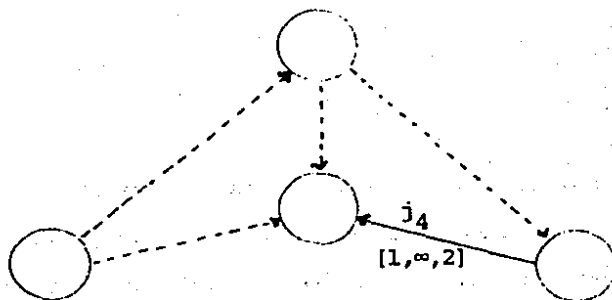
$$[c_u^-(j), c_u^+(j)] = \begin{cases} [c(j), \infty) & \text{si } v(j) = d(j) \\ [c(j), c(j)] & \text{si } v(j) < d(j) \end{cases}$$

Por otro lado $v(j) = d(j)$ para toda $j \in P$ y $[c_u^-(j), c_u^+(j)] = [c(j), \infty]$ para $j \in P$, asimismo $x(j) > c(j)$ para toda $j \in P$ lo que implica que $0 < \alpha < \infty$ y

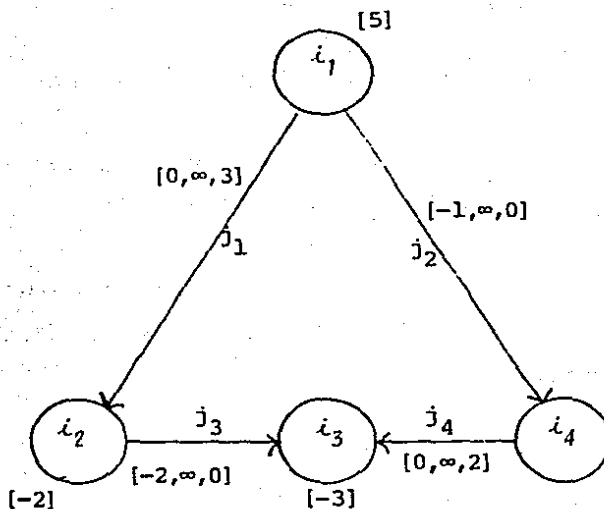
$$c_u^-(j) \leq x(j) + \alpha e_p(j) \leq c_u^+(j) \quad \text{para } j \in A$$

por lo que las condiciones equivalentes a $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ se siguen satisfaciendo para $x + \alpha e_p$.

Si los números $b(i)$, $c(j)$ y los valores iniciales de $x(j)$ son conmensurables la terminación en un número finito de pasos queda asegurada. ■



Ejemplo 5.1 Considere la red.

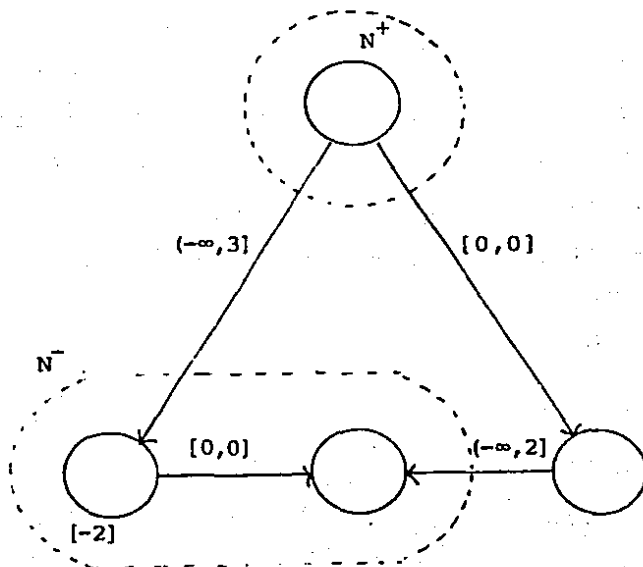


donde cada arco tiene asociada una tripleta de parámetros que corresponden a los límites inferior y superior de capacidad y al costo por unidad de flujo respectivamente, mientras que asociada a cada nodo tiene anotada la disponibilidad de flujo, cuando es distinta de cero.

Determinar el flujo y la tensión que a costo mínimo resuelven el problema elemental descrito.

Se inicia la aplicación del algoritmo de ajuste eficiente con el flujo $x \equiv 0$ y el potencial $u \equiv 0$ que satisfacen la condición $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ para $j \in A$. Los nodos en los que hay desajuste con respecto a las restricciones son $\{i_1, i_2, i_3\}$ con

$N^+ = \{i_1\}$ y $N^- = \{i_2, i_3\}$. Se aplica el algoritmo de trayectoria mínima de N^+ a N^- con $u_0 \equiv 0$ y los intervalos de generación indicados en la siguiente figura

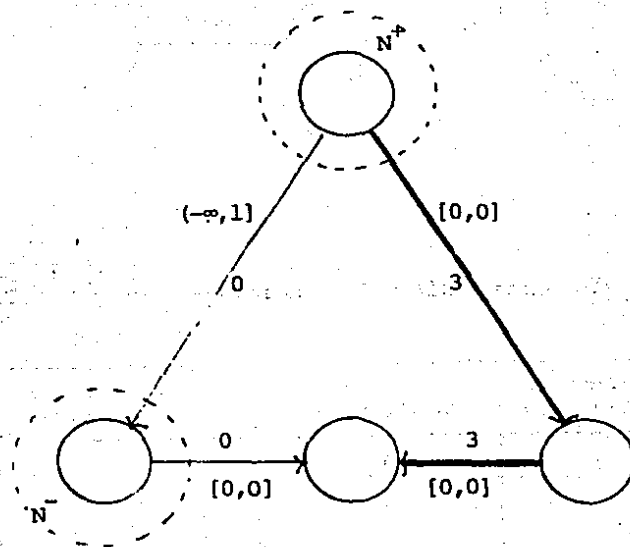


Iteración 1. Aplicación del algoritmo de DIJKSTRA.

nodo analizado	arcos involucrados	nodos involucrados	w	B
i_1	j_1	i_2	3	
	j_2	i_4	0	0
i_4	j_4	i_3	2	2
i_3	j_3	i_2	2	2
i_2	j_1	i_1		

como puede observarse el algoritmo se detiene con la trayectoria $P: i_1 \rightarrow i_4 \rightarrow i_3$ y el potencial $u = [0, 2, 2, 0]$ para el que $\alpha = 3$ de donde se implica que $x' = x + 3e_p = [0, 3, 0, 3]$.

Iteración 2. Se inicia la iteración con la aplicación del algoritmo de trayectoria mínima usando los intervalos de generación correspondientes al nuevo flujo indicados en la siguiente figura. El desajuste persiste en los nodos $\{i_1, i_2\}$ con $N^+ = \{i_1\}$ y $N^- = \{i_2\}$. Los resultados de la aplicación del algoritmo Dijkstra se encuentran resumidos en la siguiente tabla



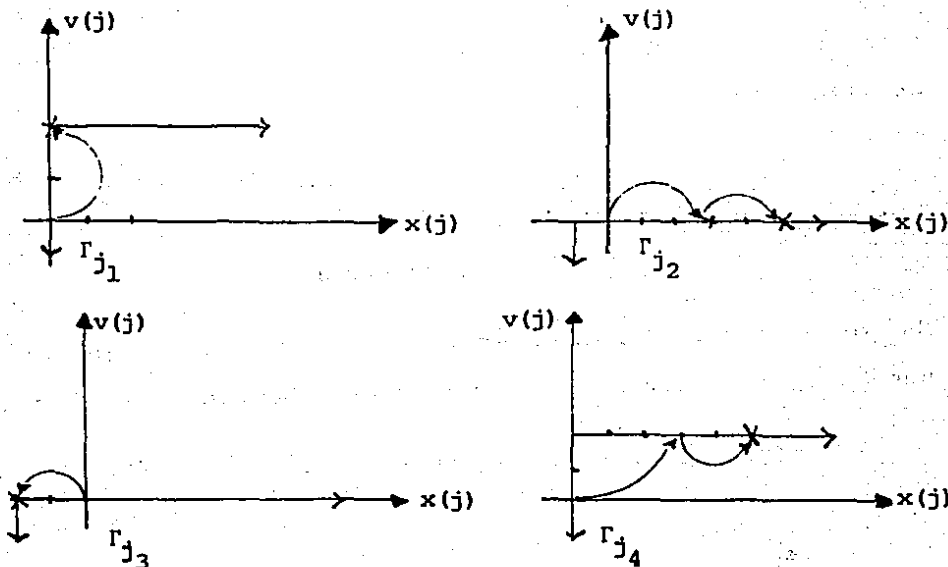
nodo analizado	arcos involucrados	nodos involucrados	w	B
i_1	j_1	i_2	1	
	j_2	i_4	0	0
i_4	j_4	i_3	0	0
i_3	j_3	i_2	0	0

De donde puede observarse que

$$P: i_1 \rightarrow i_4 \rightarrow i_3 \rightarrow i_2 ; u = (0, 2, 2, 0).$$

Con $\alpha=2$ y $x=[0, 5, -2, 5]$ que es la solución óptima, pues ya no hay desajuste.

En la siguiente figura se representa el comportamiento de las parejas $(x, (j), v(j))$ con respecto a las curvas de optimalidad



Interpretación económica del algoritmo de ajuste.

Es conveniente señalar que la mecánica de trabajo del algoritmo de ajuste eficiente tiene una interesante interpretación económica. Para discutirla empezaremos por analizar en detalle la naturaleza del algoritmo de trayectoria mínima que se resuelve en cada iteración.

Denote por \bar{u} el potencial al inicio del algoritmo. El potencial u_0 en la iteración general del algoritmo satisface $u_0 \equiv \bar{u}$ en N^+ y $u_0 = \bar{u} + \beta$ en N^- para algun $\beta \geq 0$. En términos del potencial \bar{u} sabemos que

$$\begin{aligned} [\text{despliegue de } v_0 \text{ relativo a } P] &= u_0(\lambda') - u_0(\lambda) \\ &= \bar{u}(\lambda') - \bar{u}(\lambda) + \bar{\beta} \end{aligned}$$

donde λ denota el nodo inicial de P y λ' el nodo terminal. Asimismo, de la definición de los intervalos de generación se tiene que

$$d_x^+(P) = \begin{cases} d.e_p & \text{si } x(j) > e(j) \text{ toda } j \in P^- \\ + \infty & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Es por ello que al minimizar la expresión $d^+(P)$ - [despliegue de v_0 relativo a P] lo que estamos haciendo es minimizar

$$m(P) = \bar{u}(\lambda) + \sum_{j \in P^+} d^+(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j) - \bar{u}(\lambda') \quad (1)$$

donde $P: i \rightarrow i'$ sobre todas las trayectorias $P: N^+ \rightarrow N^-$ que son de flujo aumentante para x respecto al intervalo de capacidad dado en el problema de distribución. El valor α que se calcula en el algoritmo es el mayor flujo a lo largo de P que puede añadirse a x sin violar factibilidad de arco y reduciendo la descripción entre $y = \text{div } x$ y b .

La única diferencia entre el algoritmo de ajuste y el algoritmo de distribución factible es que usa una trayectoria minimizante en el sentido (1). Note que el mínimo de $m(P)$ aumenta en $\beta \geq 0$ en cada iteración.

La idea básica de la interpretación económica del algoritmo de ajuste está en la expresión (1). Suponga que x representa el flujo de un cierto bien. En cada nodo i , la disponibilidad u oferta es $b(i)$ y el precio del bien es $u(i)$. Un sistema de precios ha sido especificado al inicio del procedimiento. En estos términos $m(P)$ es el costo marginal asociado con la compra de una unidad de bien en el nodo inicial de P (donde existe un exceso), el costo de transporte a lo largo de P y su venta en el nodo terminal de P (donde se demanda). Al minimizar el costo marginal, se desea que entre las trayectorias disponibles tome lo que es mejor en términos del trueque o intercambio de bienes de un lugar a otro. Los costos marginales μ de las trayectorias usadas de una iteración a otra forman una sucesión no decreciente (el incremento es el

mínimo es $\beta \geq 0$). Esto equivale a decir que el ajuste es cada vez más caro; y entre estos elegimos el de menor costo.

La discusión hasta este momento demuestra que el algoritmo de ajuste puede formularse sin referencia a los cambios de potencial, esto es, como un algoritmo de distribución factible con un criterio extra para la selección de trayectorias en términos de un sistema de precios \bar{u} fijo. La interpretación de los cambios de potencial existe y se discute a continuación.

Un flujo \bar{x} al inicio del algoritmo no se elige en forma arbitraria, sino que debe satisfacer $(\bar{x}(j), \bar{v}(j)) \in \Gamma_j$ donde $\bar{v} = \Delta \bar{u}$. Sin embargo esto significa que $\bar{x}(j)$ minimiza el costo neto $[d(j) - \bar{v}(j)]x(j)$ que ocurre al transportar a través del arco j una cantidad de flujo $x(j)$ que es factible respecto a los intervalos de capacidad $[c(j), \infty)$. Es por ello que, por construcción el flujo x es siempre óptimo en el problema de distribución modificado en que b se reemplaza por el valor $y = \text{div } x$.

Si recordamos que el sistema de precios u es construido a partir del flujo x y el potencial u_0 al inicio de la iteración como $u_0 + w$ donde w es la solución al problema de tensión máxima de N^+ a N^- , dado que $\Delta w = \Delta u - \Delta u_0 = v - v_0$; se puede decir que u resuelve el problema:

$$\max h(u) = \left[\begin{array}{l} \text{valor constante} \\ \text{de } u - u_0 \text{ en } N^- \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{valor constante} \\ \text{de } u - u_0 \text{ en } N^+ \end{array} \right]$$

sobre todos los potenciales u cuyo diferencial v es factible respecto a los intervalos de generación $[d_x^-(j), d_x^+(j)]$ con $u - u_0$ constante en N^+ y N^- . Es claro que u_0 puede ser reemplazado por \bar{u} puesto que $u_0 - \bar{u}$ es constante en N^+ y N^- y el máximo valor que se encuentra es $\mu = \bar{\beta} + \beta$ en lugar de β .

Es por ello que para el flujo x con que iniciamos la iteración se desea determinar el máximo μ de forma tal que el sistema de precios u coincida con \bar{u} en N^+ y $\bar{u} + \mu$ en N^- y satisfaga las condiciones $v(j) \in [d_x^-(j), d_x^+(j)]$ donde $v = \Delta u$. Esto proporciona la mayor diferencia de precios entre N^+ y N^- que es compatible con la optimalidad de x , relativa al costo neto del flujo en cada arco. Al pasar a un nuevo u , lo que estamos haciendo es permitir un aumento de precios en el mercado que refleje el costo incremental de transferir una cantidad adicional de N^+ a un lugar i . ■

5.4 Algoritmo de las desviaciones. (OUT OF KILTER).

Existe otro método alternativo para resolver los problemas elementales duales. El método de las desviaciones que tiene su origen con FORD y FULKERSON. Dicho método está basado también en la búsqueda del procedimiento para garantizar que un potencial y flujo sean tales que $(x(j), v(j))$ pertenezcan a la cura característica para toda $j \in A$. Sin embargo, aquí las condiciones iniciales que se le piden al flujo y potencial son distintos y, aparentemente, más sencillas que en el caso del método de ajuste. En el algoritmo de las desviaciones sólo se pide que el flujo sea factible respecto a la disponibilidad de los nodos y el potencial es arbitrario. El algoritmo usa de manera repetida el algoritmo de Minty para determinar un corte compatible (y mejorar potenciales) o un circuito compatible (y mejorar factibilidad de flujo) hasta lograr que se cumpla la optimalidad de las soluciones de los problemas elementales.

En el caso en el que el flujo inicial x es factible (pero el potencial inicial no lo es necesariamente, el algoritmo de las desviaciones puede ser considerado como una versión del algoritmo de distribución óptima (aplicado en un par de problemas elementales) que usa el algoritmo de rectificación, como subrutina. También hay algunos paralelismos entre este método y la versión del algoritmo de diferencial óptimo que utiliza el algoritmo de distribución factible como subrutina.

Algoritmo: METODO DE LAS DESVIACIONES (OUT-OF-KILTER)

Propósito: Resolver simultáneamente el par de problemas elementales duales.

Descripción

Sean x un flujo satisfaciendo $\text{div } x = b$ y u un potencial, un arco j está desviado si $(x(j), v(j)) \notin \Gamma_j$, donde $v = \Delta u$. Si no hay arcos desviados, el algoritmo se detiene y x y u son las soluciones a los problemas. De otra manera si \bar{j} es un arco desviado, la red se pinta

NEGRO	si	$x(j) > c(j)$	y	$v(j) < d(j)$
ROJO	si	$x(j) = c(j)$	y	$v(j) < d(j)$
VERDE	si	$x(j) > c(j)$	y	$v(j) = d(j)$
BLANCO	si	$x(j) = c(j)$	y	$v(j) = d(j)$ ó
		$x(j) < c(j)$	ó	$v(j) > d(j)$

Se aplica el algoritmo de Minty. Si éste se detiene con un circuito elemental compatible con el pintado conteniendo a \bar{j} , se calcula

$$\alpha = \min \begin{cases} x(j) - c(j) & j \in P^- \\ c(j) - x(j) & j \in P^+ \quad v(j) < d(j) \\ c(\bar{j}) - x(\bar{j}) & \bar{j} \in P^+ \quad v(\bar{j}) \leq d(\bar{j}) \end{cases}$$

$\alpha > 0$; si $\alpha^* = \infty$ P es un circuito no balanceado para el problema elemental de distribución óptima por lo que este problema no tiene solución factible o $[\text{inf}] = -\infty$, el problema dual no tiene solución factible. De otra manera $x' = x + \alpha e_p$ y se reinicia el proceso. En el caso en el que el algoritmo se detiene con un corte $Q = \{S, N/S\}$

$$\alpha = \min \begin{cases} d(j) - v(j) & \text{para } j \in Q^+ \\ v(j) - d(j) & \text{para } j \in Q^- \text{ con } x(j) > c(j) \\ v(\bar{j}) - d(\bar{j}) & \text{si } \bar{j} \in Q^- \text{ con } x(\bar{j}) \geq c(\bar{j}) \end{cases}$$

Entonces $\alpha > 0$, si $\alpha^* = \infty$ el algoritmo termina, Q es un corte no-balanceado para el problema elemental de diferencial óptimo por lo que este problema no tiene solución factible o $[\text{sup}] = \infty$, el problema dual no tiene solución factible. De otra manera $u' = u + \alpha e_{N/S}$ y se reinicia el proceso.

En cada caso la distancia de cada nuevo punto $(x(j), v(j))$ a la curva Γ_j no es mayor que la distancia del punto anterior, en particular los arcos que ya estaban en ella siguen estando allí. ■

* $\alpha = \infty$ significa mínimo vacío.

Justificación del algoritmo de las desviaciones.

Los arcos negros corresponden a los puntos $(x(j), v(j))$ que se pueden mover hacia arriba o a la izquierda sin que la distancia a Γ_j aumente. Los arcos rojos se pueden mover hacia arriba o abajo, los verdes hacia la derecha o la izquierda y los blancos hacia abajo o a la derecha. Los movimientos arriba y abajo corresponden al caso del circuito con $j \in P^+ \cup j \in P^-$ respectivamente. Los movimientos hacia la izquierda y derecha corresponden al caso del corte, con $j \in Q^+ \cup j \in Q^-$ respectivamente. La compatibilidad con el pintado de los arcos asegura que $x + \alpha e_p$ o $v + \alpha e_Q$ no alejan el punto $(x(j), v(j))$ de Γ_j . El movimiento es de α unidades, donde α es la cantidad mayor que permite no agrandar la distancia a Γ_j . Si $\alpha = \infty$, el circuito p correspondiente es un circuito positivo ($e_p \geq 0$) formado por arcos verdes con $v(j) = d(j)$ y blancos con $v(j) \geq d(j)$. El arco \bar{j} , debe ser blanco con $v(\bar{j}) > d(\bar{j})$. Estas condiciones implican que $d \cdot e_p < v \cdot e_p = 0$, así P es un circuito no balanceado puesto que los intervalos de capacidad en el problema elemental de distribución óptima son de la forma $[c(j), \infty)$ para toda j .

Similarmente si $\alpha = \infty$, θ debe ser un corte negativo ($e_Q \geq 0$) formado por arcos rojos con $x(j) = c(j)$ y blancos con $x(j) \leq c(j)$, el arco \bar{j} es blanco con $x(\bar{j}) < c(\bar{j})$ de donde, $c \cdot e_Q < x \cdot e_Q = -(\text{div } x)$. $e_{N/S} = -b \cdot e_{N/S}$, así $c \cdot e_Q + b \cdot e_{N/S} < 0$ y

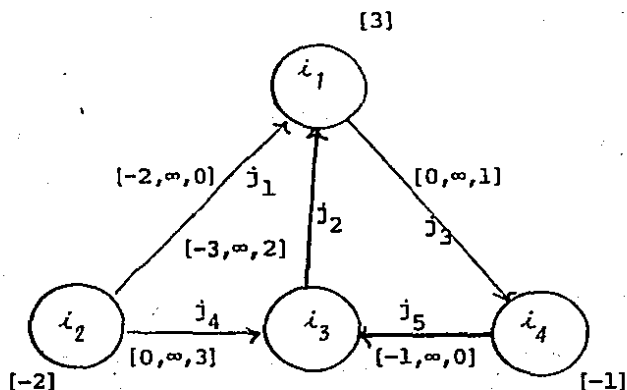
dato que los intervalos de generación en el problema elemental de diferencial óptima son de la forma $[-\infty, d(j)]$, Q es un corte no balanceado.

Si inicialmente $x(j) \geq c(j)$ y $v(j) \geq d(j)$ para $j \in A$, esto es, x y v son soluciones factibles, esta factibilidad se mantiene.

Los arcos desviados son negros y $x(j) - c(j)$, $d(j) - v(j)$ son positivos y permanecen invariables cuando j no está en el circuito o el corte obtenido si $j \in P$ ó $j \in Q$ entonces la diferencia correspondiente decrece en α . Así toda iteración mejora la situación. Basta con una condición de conmensurabilidad para asegurar la existencia de un número finito de iteraciones anteriores a que todos los arcos están en Γ_j . ■

Este algoritmo se inicia con un flujo que debe satisfacer las restricciones de divergencia en los nodos, cuando no resulta evidente se puede encontrar mediante la aplicación del algoritmo de distribución factible partiendo de un flujo factible con respecto a los intervalos de capacidad, el cual puede ser $x(j) = c(j)$ para $j \in A$.

Ejemplo 5.2 Considere la red

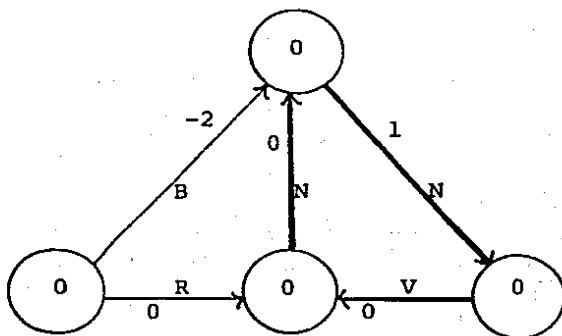


donde cada arco tiene asociada una tripleta de parámetros que corresponde a los límites inferior y superior de capacidad y al costo por unidad de flujo respectivamente, mientras que asociada a cada nodo se encuentra indicada la disponibilidad de flujo, cuando es distinta de cero.

Determinar el flujo y la tensión que a costo mínimo resuelven el problema elemental descrito.

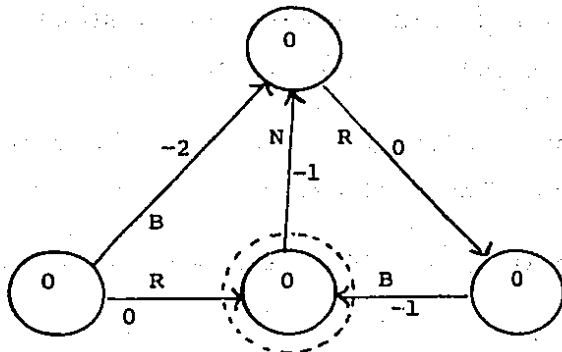
Se inicia la aplicación del algoritmo de desviaciones con el

flujo $x = [-2, 0, 1, 0, 0]$ y el potencial $u \equiv 0$. Puede observarse que los arcos con desviación son $\{j_2, j_3\}$. Al aplicar el algoritmo de Minty con el pintado sugerido para red se obtiene la trayectoria

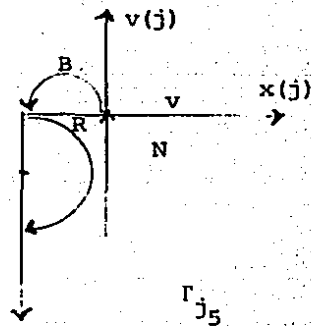
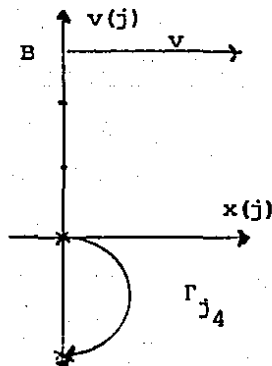
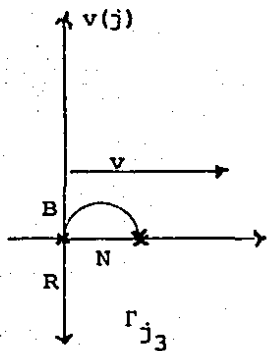
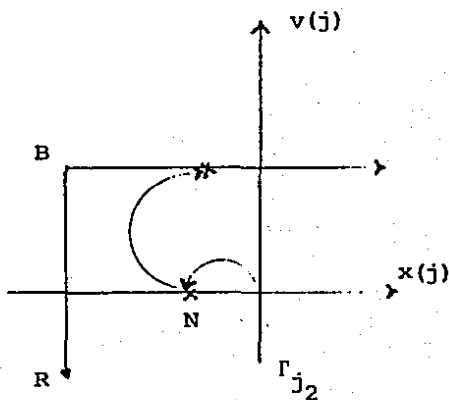
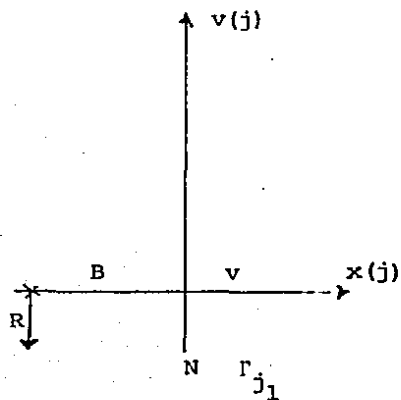


$P: i_1 + i_3 + i_4 + i_1$ con $\alpha = 1$ y el flujo $x = [-2, -1, 0, 0, -1]$.

Iteración 2. Al aplicar el algoritmo de Minty con el pintado indicado en la siguiente figura se obtiene el corte



$Q = [S, N/S]$ con $S = \{i_3\}$, $\alpha = 2$ y $u = [2, 2, 0, 2]$, de donde $v = \Delta u = [0, 2, 0, -2, -2]$ que corresponde a la solución óptima puesto que ya no hay arcos desviados, según puede observarse en la siguiente figura que resume los movimientos de las parejas $(x(j), v(j))$, $j \in A$ con respecto a las curvas de optimalidad Γ_j correspondientes



CAPITULO 6

CONCLUSIONES

Los problemas lineales duales que resultan en el estudio de redes de flujo y potencial, han sido analizados en un marco metodológico que permite unificar los diversos enfoques y métodos de solución existentes en campos tan diversos como la investigación de operaciones, ingeniería eléctrica y optimización combinatoria.

El aspecto unificador del análisis de los problemas de distribución y diferencial lineal es que pueden reducirse a sus casos particulares denominados problemas elementales duales, permitiendo un análisis de dualidad y la generación de métodos de solución combinando métodos aparentemente desconectados. Este aspecto no interfiere con el hecho de que se sigan usando y generando métodos de solución particulares tanto para el problema de distribución como para el de diferencial.

Los problemas de redes de flujo y potencial tratados en este trabajo cuentan con un análisis detallado de existencia y factibilidad de soluciones así como procedimientos para determinar tales soluciones (si existen). También se proporcionan las condiciones para garantizar optimalidad de soluciones y se discuten en forma detallada los diversos algoritmos para obtenerlos. Cabe mencionar que la terminología usada es sen-

cilla y utilizable en todos los campos incluyendo el de la programación lineal y la recientemente postulada programación monotrópica.

Conviene señalar que los modelos de redes de flujo y potencial presentados han sido motivados con diversos ejemplos para mostrar su aplicabilidad. ■

B I B L I O G R A F I A

- [1]. M.L. Balinski "On a Selections Problem" City University of N.Y. Management Science Vol. 17 No. 3 ppl 230-231. 1970.
- [2]. G.E. Bennington "Applying network analysis". Special report. In a series; North Carolina University, U.S. 1974.
- [3]. C. Berge and A. Ghouila-Houri "Programming, Games and Transportation Networks". Wiley. 1965.
- [4]. John R. Canada "Decision Flow networks". Special report in a series North Carolina University U.S. 1974.
- [5]. A.L. Cauchy "Recherche Sur les Polyedres" Premier Memoire J. Ecole Polytech 9 (cals 16) pp. 68-86. 1813.
- [6]. A. Cayley "On the analytical forms called trees: with application to the theory of chemical combinations". Rep. Brit. Assoc. Advance Stc. 45 pp. 237-305. 1875.
- [7]. G.B. Dantzig "Programming in lineal structure" Comptrol ler U.S. Air Force Washington D.C. 1948.
- [8]. G.B. Dantzig "Aplication of the simplex method to the transportation In Activity analysis of production and allocation". 1951.
- [9]. E.W. Davis "Networks Resourse Allocation" Special report in a series" Mass. Inst. of Tec. 1974.

- [10]. J.B. Dennis "Mathematical programming and Electrical Networks". Wiley.
- [11]. R.J. Duffin "Nonlinear methods" Bull. Amer. Math. Soc. 53 pp. 963-971. 1947.
- [12]. L. Euler "Solution problematis ad geometrian situs pertinentis. Commun Acad. Sci. Imp. Petropol 8 pp. 128-140 Opera Omnia (1) Vol. 7. 1736.
- [13]. L.R. Ford and D.R. Fulkerson "Maximal flow through a network". Canad. J. Math 8 pp. 339-404. 1956.
- [14]. L.R. Ford. and D.R. Fulkerson "Flows and application to the Hitchcock problem" Canad. J. Math. 9 pp. 210-218. 1957.
- [15]. L.R. Ford and D.R. Fulkerson "Hitchcock Problem". Naval Res. Logist. Quart 4 pp. 47-54. 1957.
- [16]. Dr.S.Fuentes Maya "Seminario de Programación Monotrópica" DEPEFI. UNAM. 1987.
- [17]. D.R. Fulkerson "Flow networks and combinatorial operations research" Amer. Math. Monthly 73 pp. 115-138. 1966.
- [18]. D.R. Fulkerson "An out-of-kilter method for minimal cost flow problems". SIAM J 9 pp 18-27. 1961.
- [19]. P. Gale. "A theorem of flows in network. Pacific J. Maths 7 pp. 1073-1082. 1957.
- [20]. P. Gale "Linear programming and theory of games". In Activity analysis of productions and allocation cowles comission monograph No. 13 pp. 317-328. 1951.

- [21]. M. Gondran and M. Minoux. "Graphs and algorithms" Wiley Inter science Series in Discrete Math. 1984.
- [22]. P. Gordan "Über die Aufzählung linearer Gleichungen mit reellen coefficienten". 1873.
- [23]. W.R. Hamilton "Account of the icosian calculus". Proc. Roy Iris. Acad. 6 pp. 415-416. 1856.
- [24]. Y. Handler and I. Zang "A dual algorithm for the constrained shortest path problem". Networks 10 pp. 293-310. 1980.
- [25]. F.L. Hitchcock "The distribution of a product from several sources to numerous locations" J. Math. Phys. 20 pp. 224-230. 1941.
- [26]. R.M. Karp "An algorithm to solve the $m \times n$ assignment problem in expected time $O(m^2n)$ " Networks 10 pp. 143-152. 1980.
- [27]. J.L. Kennington and R.V. Helgason "Algorithms for Network programming" I Wiley-Intersciens. 1980.
- [28]. G.R. Kirchhoff "Über die Auflösung der Gleichungen auf welcheman bei unter schongder linearen vertheilan y Galvanisher stömp geführt wind". Ann. Phys. Chem 72. pp. 497-508. 1847.
- [29]. H.W. Kuhn and A.W. Tucker. "Dual systems of Homogenous relations in linear inequalities and related systems" Ann of Math studies 38 pp. 3-18. 1956.
- [30]. M.J. Maggar , W.G. Lesso and M.J.Wexler "Network Analysis with Gerts III QR". Special report in a series. 1974.

- [31]. G.J. Minty "A comment on the shortest route problem" Operation Res. 5 p. 724. 1957.
- [32]. G.J. Minty "Monotone networks "Proc. Roy. Soc. London A 257 pp. 194-212. 1960.
- [33]. G.J. Minty "Solving steady-state nonlinear networks of 'monotone' elements" Ire Trans Circuit Theory ct. pp. 99-104. 1961.
- [34]. G.J. Minty "On axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming" J. Math. Mech. 15 pp. 420-485. 1966.
- [35]. D. T. Phillips. "The out of kilter algorithms". Special report in a series. 1974.
- [36]. J.M. W. Rhys. "A selection problem of shared fixed costs and network flows" Barclays Bank Limited, London, England. Management Science Vol. 17 NO. 3 pp. 200-207. 1970.
- [37]. R.T. Rochafellar "Network flows and monotropic optimization" Seattle Washington, 1984.
- [38]. J.J. Sylvester "Chemistry and algebra" Nature 21 p. 284. 1878.
- [39]. H. Swanson and R.E.D. Woolsey "Using the out-of-kilter algorithm". Special report in a series. 1974.
- [40]. W.T. Tutte "On Hamilton Circuits". London Math. Soc. J. 21 pp. 98-116. 1946.

[41]. G.E. White House. "Using decision flow networks"
Special report in a series. 1974.

[42]. N. Zadeh "What is the worst case behavior of the
simplex algorithm" Technical report 37. Department
of Operations Research. Stándford University. 1980.

ANEXO

A. REPRESENTACION DE FLUJOS

B. REPRESENTACION DE DIFERENCIALES

A. Representación de flujo.

Un aspecto básico de un conjunto convexo cerrado y acotado es que pueda representarse como la envoltura convexa de sus puntos extremos, esto es, el conjunto puede expresarse como una combinación lineal de sus puntos extremos. Si el conjunto convexo es cerrado pero no acotado, es necesario introducir el concepto de rayos o direcciones de recesión, para representar el conjunto convexo. En el caso de redes de flujo, cuyo conjunto de restricciones es un conjunto convexo, podemos efectuar la representación de los elementos del conjunto que denominaremos, flujos, utilizando el concepto de flujos extremos (que no son otra cosa que puntos extremos del conjunto convexo) y circuitos de capacidad ilimitada (que juegan el papel de los rayos a direcciones de recesión de un conjunto convexo).

Considere una red de flujo G con intervalos de capacidad $[c^-(j), c^+(j)]$ para cada arco $j \in A$ y disponibilidades de flujo $b(i)$ en cada nodo $i \in N$.

Un flujo extremo relativo al problema de distribución factible se define como un flujo x tal que el conjunto de arcos

$$F_x = \{j \in A \mid c^-(j) < x(j) < c^+(j)\}$$

forma un bosque, esto es, no existe circuito elemental contenido en F_x , o equivalentemente, las columnas de la matriz de

incidencia nodos-arcos, asociadas al conjunto F_x , son linealmente independientes. Una implicación inmediata de lo anterior es la existencia de un conjunto $F \subset A$ que forma un bosque maximal tal que $F_x \subset CF$ y cada $j \in F$ es tal que $x(j) = c^-(j)$, o bien, $x(j) = c^+(j)$.

Un concepto que se requiere para efectuar la representación de un flujo en términos de flujos extremos es como sigue: un circuito elemental P se dice de capacidad ilimitada si $c^+(j) = +\infty$ para todo $j \in P^+$ y $c^-(j) = -\infty$ para todo $j \in P^-$. Un circuito elemental P se dice de doble capacidad ilimitada si P y su inverso son ambos de capacidad ilimitada o bien cada arco j en P es de la forma $(-\infty, +\infty)$.

Una propiedad interesante de la representación de flujos en el problema de distribución es que los flujos son enteros si se satisface un mínimo de propiedades acerca de los intervalos de capacidad y disponibilidades de flujo, específicamente, si tales valores son enteros.

TEOREMA 1. (Representación de flujos). Suponga que el problema de distribución es factible y que no existen circuitos elementales de doble capacidad ilimitada. Entonces, existe un número finito de flujos extremos (al menos uno); que son enteros, si todos los intervalos de capacidad y disponibilidad de flujo son enteros. Asimismo, x es solución del problema de distribución si y sólo si x puede ser expresado como:

$$x = \sum_{k=1}^r \lambda_k x_k + \sum_{s=1}^q \mu_s e_{P_s}$$

donde cada x_k es un flujo extremo, cada $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ es escalar no-negativo y su suma es igual a cero, mientras que P_s es un circuito elemental de capacidad ilimitada y su correspondiente escalar μ_s es no-negativo.

Prueba. Suponga que el vector de disponibilidades b es igual a cero; en caso contrario se puede construir una red aumentada para que esto se cumpla. Si se usa la representación de Tucker para el sistema lineal resultante, se tiene que el hog que F_x correspondiente a un flujo extremo x está contenido en un bosque maximal F . Asimismo, se cumple que

$$x(j) = \sum_{k \in F} a(j, k)x(k) \quad j \in F$$

donde cada $a(j, k)$ es 1, -1, ó cero y para $k \notin F$ se tiene $k \notin F_x$ ó bien $x(k)$ es igual a $c^+(k)$ o $c^-(k)$. Dado que existe un número

finito de soluciones extremas, que son enteras, si todas las cotas de capacidad (y disponibilidad) son enteras.

El algoritmo de representación con flujos extremos demuestra la necesidad de la segunda parte del teorema. La suficiencia es como sigue: observe que para cada flujo extremo x_k se tiene que $c^-(j) \leq x_k(j) \leq c^+(j)$ donde $j \in A$. Entonces,

$$c^-(j) \leq \sum_{k=1}^r \lambda_k x_k(j) \leq c^+(j) \quad j \in A$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ son escalares mayores o iguales a cero y suman uno. Si j es un arco que pertenece a un circuito de capacidad ilimitada P_s se tiene que $c^+(j) = +\infty$ cuando $e_{P_s}(j) = 1$ y $c^-(j) = -\infty$ cuando $e_{P_s}(j) = -1$. Por lo tanto

$$\sum_{s=1}^q \mu_s e_{P_s}(j) > 0 \quad \text{implica} \quad c^+(j) = +\infty$$

$$\sum_{s=1}^q \mu_s e_{P_s}(j) < 0 \quad \text{implica} \quad c^-(j) = -\infty$$

y se concluye que $c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j)$ para todo $j \in A$. La verificación de la divergencia de x (en términos de su representación) igual a b se sigue de la combinación convexa de los flujos extremos y del hecho que los circuitos tienen divergencia cero en todos los nodos. ■

Algoritmo: REPRESENTACION CON FLUJOS EXTREMOS.

Propósito: Representar un flujo factible del problema de distribución usando flujos extremos y circuitos de capacidad ilimitada.

Descripción

Sea x el flujo factible disponible y denote por F_x el conjunto de arcos cuyo flujo es mayor que su capacidad inferior y menor que su capacidad superior. Si F_x es un bosque, terminamos; x es un flujo extremo. De otra manera existe (y se determina) un circuito P tal que $c^-(j) < x(j) < c^+(j)$ si $j \in P$. Existen dos casos resultantes posibles:

a. P es de capacidad ilimitada y podemos suponer, (pasando al circuito inverso si es necesario) que $0 < \underline{\mu} = \max \{ \mu \in \mathbb{R} \mid c^-(j) \leq x(j) - \mu e_p(j) \leq c^+(j); j \in A \}$ existe. Entonces $x' = x - \underline{\mu} e_p$ es otro flujo factible con conjunto de arcos $F_{x'}$, contenido estrictamente en F_x . Asimismo, se tiene para $x = x' + \underline{\mu} e_p$. Repetir el proceso.

b. P es de capacidad ilimitada en un sentido. El escalar $\underline{\mu}$ definido en a existe y lo mismo sucede con el escalar $\bar{\mu}$ obtenido al reemplazar $x(j) - \mu e_p(j)$ por $x(j) + \mu e_p(j)$ en la fórmula descrita. Los flujos resultantes $\underline{x} = x - \underline{\mu} e_p$ y $\bar{x} = x + \bar{\mu} e_p$ son factibles. Asimismo $x = \alpha \underline{x} + (1-\alpha)\bar{x}$ con $\alpha = \bar{\mu} / (\bar{\mu} + \underline{\mu})$. Los conjuntos $F_{\underline{x}}$ y $F_{\bar{x}}$ están contenidos estrictamente en F_x . Repetir el proceso. ■

B. Representación de diferenciales.

Un conjunto de arcos F' se dice cobosque de una red G si la eliminación de todos los arcos de G no aumenta el número de componentes de G . Equivalentemente, F' se dice cobosque si no existe corte elemental de G incluido en F' . Los cobosques maximales son los complementos de los bosques maximales. Es por ello que si G es conectada, los cobosques son los conjuntos F' CA tales que A/F' contiene un árbol de expansión de G , esto es, un árbol que incluye a todos los nodos de G .

Un diferencial v es extremo (respecto a los intervalos de generación) si $d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j)$ para todos los arcos $j \in A$ y el conjunto

$$F'_v = \{j \in A \mid d^-(j) < v(j) < d^+(j)\}$$

es un cobosque. Esto es cierto sí y sólo si existe un bosque maximal F tal que para toda $j \in F$ se tiene $v(j) = d^-(j)$ ó bien $v(j) = d^+(j)$.

Un concepto que es necesario para establecer la representación de diferenciales es el relacionado con cortes de capacidad ilimitada, esto es, un corte Q tal que $d^+(j) = +\infty$ para toda $j \in Q^+$ y $d^-(j) = -\infty$ para toda $j \in Q^-$. Si Q y su inverso tienen capacidad ilimitada se dice que Q es de doble capacidad ilimitada.

Algoritmo. REPRESENTACION DE DIFERENCIALES

Propósito. Determinar la representación de un diferencial factible, usando diferenciales extremos y cortes de capacidad ilimitada.

Descripción

Sea v el diferencial factible y se define el conjunto

$$F'_v = \{j \in A \mid d^-(j) < v(j) < d^+(j)\}$$

Si F'_v es un cobosque terminamos. De otra manera existe (y se determina) un corte Q tal que $d^-(j) < v(j) < d^+(j)$ si $j \in Q$. Existen dos casos resultantes posibles.

a. Q es de capacidad doblemente ilimitada y se puede, suponer (pasando al corte inverso si es necesario) que existe, $\underline{\mu}$

$$0 < \underline{\mu} = \max \{ \mu \in \mathbb{R} \mid d^-(j) \leq v(j) - \mu e_Q(j) \leq d^+(j), j \in A \} < \infty$$

Entonces si $u' = u - \underline{\mu} e_Q, v' = \Delta v$ es otra solución factible para el problema de diferencial factible con F' estrictamente contenido en F (F' y F los bosques correspondientes a F'_v y F_v) así mismo

$$u = u' + \underline{\mu} e_Q$$

se repite el proceso. ■

Teorema. (Representación de diferenciales). Suponga que el problema de diferencial es factible y que no existen cortes de doble capacidad ilimitada. Entonces, existe un número finito de diferenciales extremos (al menos uno); que son enteros, si las cotas de los intervalos de generación $d^-(j)$, $d^+(j)$ son enteras. Asimismo v es una solución factible del problema de diferencial si y sólo si puede ser representado como

$$v = \sum_{k=1}^r \lambda_k u_k + \sum_{p=1}^q \mu_p e_{Q_p}$$

donde v_k es un diferencial extremo; los escalares λ_k son no-negativos y suman uno; Q_p es un corte elemental de generación ilimitada; y, cada escalar μ_p es no-negativo.

Prueba. Si v es un diferencial extremo, existe un bosque maximal F ajeno a F_v y se tiene que la representación de Tucker asociada es

$$v(k) = - \sum_{j \in F} v(j) a(j,k)$$

donde los coeficientes $a(j,k)$ son +1, -1, o cero. Entonces $v(j) = d^+(j)$ o bien $v(j) = d^-(j)$ para todo $j \in F$. Dado un bosque maximal F existe un número finito de diferenciales expresables de esta manera, y sus valores son enteros si $d^+(j)$, y $d^-(j)$ son enteros. Por otra parte existe un número finito de bosques maximales F .

La existencia de diferenciales extremos y la representación de un diferencial en términos de diferenciales extremos y cortes con capacidad ilimitada se sigue del algoritmo de representación dado en la siguiente hoja. La suficiencia de la última parte del teorema es como sigue: Si v tiene la representación del teorema, entonces $d^-(j) \leq v_k(j) \leq d^+(j)$ para $k = 1, 2, \dots, r$ y se cumple que

$$d^-(j) \leq \sum_{k=1}^r \lambda_k v_k(j) \leq d^+(j)$$

Por otra parte, el término $\mu_q e_{Q_q}(j)$ aumenta la suma únicamente si $d^+(j) = +\infty$ y la disminuye sólo si $d^-(j) = -\infty$. Equivalentemente, no existe violación de cotas y $d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j)$ para todo $j \in A$.

b. Q es de generación ilimitada en un sentido, el escalar $\underline{\mu}$ definido en \underline{a} existe y lo mismo sucede con el escalar $\bar{\mu}$ obtenido al reemplazar $v(j) - \mu e_Q(j)$ por $v(j) - \mu e_P(j)$ por $v(j) + \mu e_P(j)$ en la fórmula descrita. Los potenciales resultantes $\underline{v} = v - \underline{\mu} e_Q$ y $\bar{v} = v + \bar{\mu} e_Q$ son factibles. De la misma manera $v = \alpha \underline{v} + (1-\alpha)\bar{v}$ con $\alpha = \bar{\mu}/(\bar{\mu} + \underline{\mu})$. Los conjuntos F_1 y F_2 (bosques correspondientes a los cobosques $F_{\underline{v}}$ y $F_{\bar{v}}$) están contenidos estrictamente en F . El proceso se repite. ■