



0117)  
zej.  
1

FLUJOS Y DIFERENCIALES:  
FACTIBILIDAD Y OPTIMALIDAD

*María del Carmen Hernández Ayuso*

T E S I S

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRA DE INVESTIGACION DE OPERACIONES**

CIUDAD UNIVERSITARIA  
MEXICO, D. F.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1987



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INDICE

	Pag.
INTRODUCCION	1
1. TRAYECTORIAS Y CORTES	7
1.1 Conceptos básicos de redes	8
1.2 Trayectorias en una red	18
1.3 Algoritmo de enrutamiento	26
1.4 Lema de Minty y Teorema de la red coloreada	35
2. FLUJO MAXIMO Y EXTENSIONES	43
2.1 Definiciones elementales	45
2.2 Flujo máximo en una red	49
2.3 Algoritmo de flujo máximo	57
2.4 El problema de factibilidad de flujo	78
2.5 Algoritmo de rectificación de flujo	93
3. TRAYECTORIA MÍNIMA Y EXTENSIONES	104
3.1 Definiciones elementales	105
3.2 Trayectoria mínima	112
3.3 Algoritmo de trayectoria mínima	115
3.4 El problema de diferencial factible	122
3.5 Algoritmo de rectificación de tensión	134

	Pag.
4. PROBLEMA DE ACOPLAMIENTO	141
4.1 Problema de acoplamiento	143
4.2 Algoritmo de solución	156
4.3 Relación con flujo máximo	163
4.4 Especialización del algoritmo de flujo máximo para el problema de acoplamiento	168
5. PROBLEMA DE ORDENAMIENTO	179
5.1 Problema de ordenamiento	181
5.2 Algoritmo de solución	188
5.3 Relación con diferenciales	204
5.4 Simplificación del algoritmo de trayectoria mínima para el problema de ordenamiento	209
CONCLUSIONES	218
BIBLIOGRAFÍA	222

## INTRODUCCION

La teoría de redes es una clase de modelos matemáticos que involucra la representación gráfica de ciertos problemas de optimización. Las redes tienen una aplicación extensa en diversos campos como son: planeación, administración, ingeniería, química, educación, etc.; en estos campos, innumerables situaciones pueden formularse como modelos matemáticos de redes. Algunos ejemplos son: sistemas de producción-distribución, tráfico urbano, transporte colectivo, redes eléctricas, remplazo de equipo, inventarios, presas, flujo de dinero, tuberías, oleoductos, asignación de recursos y otros.

A causa de la vasta aplicación de este tipo de modelos y a la valiosa ayuda que proporcionan para el entendimiento de los sistemas, ha habido gran actividad en su estudio. Gracias a esto, y a la estructura especial que presentan los modelos de redes, se han desarrollado algoritmos eficientes para la solución de los problemas formulados. Incluso se ha desarrollado más de un algoritmo para resolver el mismo tipo de problema en base a las restricciones que en él se consideren. Además, los algoritmos son, en su mayoría, de relativa facilidad en su comprensión y aplicación ya que surgen de manera natural en el desarrollo de la teoría. Otra ventaja de algunos de los algoritmos es que, a través de ellos, es posible detectar cuándo un problema de redes no tiene solución.

En la teoría de redes existe un conjunto de problemas básicos: flujo máximo, trayectoria mínima, flujo con costo mínimo, entre otros. Los variados métodos de solución desarrollados para ellos se han desprendido principalmente de dos ramas desarrolladas paralelamente: la programación lineal y la teoría de redes eléctricas. En los últimos años se han hecho intentos por unificar estas ramas enriqueciendo de este modo la teoría de redes. Los conceptos y técnicas antes desligados en la literatura se han relacionado, dando lugar a una teoría general que engloba los problemas básicos de redes. (R.T. Rockafellar).

La herramienta principal de optimalidad utilizada para los modelos de redes la constituyen los resultados de teoría de dualidad que toman una forma particular en este tipo de problemas. Se definen los conceptos de flujo y potencial y a partir de ellos los de divergencia y diferencial. Otros conceptos duales que tienen injerencia en la unificación de teorías resultan ser los de trayectoria y corte, que pueden ser vistos como un flujo y un diferencial especiales en la red. De hecho, en base a todos estos conceptos surge un resultado conocido como teorema de la red coloreada que se aplica, junto con un resultado equivalente llamado lema de Minty, en el desarrollo de resultados teóricos y algoritmos de solución para los modelos de redes. Otros resultados de dualidad relacionan los problemas de flujo máximo y trayectoria mínima con los de corte mínimo y tensión máxima respectivamente. Más aún, las demostraciones de tales resultados son constructivas por lo que proporcionan algoritmos de solución simultánea para el par de problemas duales.

Este trabajo tiene como objetivos analizar la factibilidad y optimalidad de las parejas de problemas duales flujo máximo - corte mínimo y trayectoria mínima - tensión máxima, presentar algoritmos que determinen soluciones factibles y óptimas para ellos y analizar una aplicación de cada uno de ellos en los problemas de acoplamiento máximo y ordenamiento. Se utiliza, para este análisis, la teoría que engloba los modelos de redes en un esquema general.

El contenido del trabajo es el siguiente: En el capítulo 1 se presentan los conceptos y resultados teóricos de la teoría de redes, los cuales son de gran importancia tanto para el estudio de las propiedades teóricas como en el desarrollo de algoritmos de solución de las parejas de problemas anteriormente mencionados. Cabe señalar que, en particular, los algoritmos de enrutamiento y de Minty presentados en este capítulo se utilizan como subrutinas en casi todos los algoritmos descritos en este trabajo.

En el capítulo 2 se analiza la primera pareja de problemas duales: flujo máximo - corte mínimo. Primeramente se describen los dos problemas y se establecen resultados que los relacionan; el más importante de ellos es el teorema de flujo máximo - corte mínimo debido a Ford y Fulkerson. También se proporciona un algoritmo de solución simultánea inspirado por tales resultados. Posteriormente se analiza el problema de factibilidad de flujo con respecto a dos tipos de restricciones: capacidad y divergen

cia; se establecen las condiciones que garantizan la existencia y se describen dos algoritmos alternativos para la determinación del flujo factible. El primero de éstos, llamado algoritmo de distribución factible, requiere una solución inicial que satisfaga las restricciones de capacidad y, a partir de éste, construye uno que satisfaga también las de divergencia. Por el contrario el otro, llamado algoritmo de rectificación de flujo, considera inicialmente un flujo que satisfaga las restricciones de divergencia y construye uno factible también con respecto a las restricciones de capacidad. Cabe mencionar que, en ambos problemas, factibilidad y optimalidad, surgen como subproblemas la determinación de trayectorias, circuitos y cortes compatibles con una coloración dada, con objeto de verificar cuál de las alternativas establecidas por los teoremas de la red coloreada y de Minty se cumple. Es por ello que los algoritmos de enrutamiento y de Minty son subrutinas en los algoritmos de determinación de los flujos factible y óptimo.

El capítulo 3 se ha desarrollado de manera completamente paralela al capítulo 2. Primero los problemas de trayectoria mínima y de tensión máxima y se establecen resultados que los relacionan; también se proporciona un algoritmo de solución simultánea basado en tales resultados. Después se analiza el problema de diferencial con respecto a restricciones de generación; de nuevo, se establecen teoremas de existencia y se proporcionan dos algoritmos para la determinación del diferencial factible: el algoritmo de diferencial factible y el de rectificación de tensión. El



primero de ellos considera una función definida sobre los nodos de la red, que se modifica en cada iteración hasta alcanzar la factibilidad; el segundo determina los arcos que no satisfacen las restricciones de generación y modifica el potencial hasta alcanzar la factibilidad. De nuevo, los dos teoremas de alternativas, de la red coloreada y de Minty, se aplican en el desarrollo de este capítulo.

En el capítulo 4 se analiza un problema combinatorio, conocido como problema de acoplamiento máximo, en una red bipartita. Primeramente se describe el problema y se formula su dual, el de bloqueo mínimo. Se establecen resultados que relacionan esta pareja de problemas; en particular el teorema de König - Egervary. Estos resultados inducen un algoritmo de solución simultánea basado en un procedimiento de marcaje. Posteriormente se estudia la relación del problema de acoplamiento con el de flujo máximo; de hecho, el primero resulta ser un caso particular del último. De este hecho se desprenden resultados muy interesantes; en uno de ellos se hace notar que el teorema de König - Egervary es un caso particular del teorema flujo máximo - corte mínimo. Más aún se establece la equivalencia del acoplamiento máximo con el flujo máximo, en una red particular, y del bloqueo mínimo con el corte mínimo. Finalmente, se especializa el algoritmo de Ford y Fulkerson para el caso del problema de acoplamiento obteniéndose como resultado un algoritmo muy parecido al de marcaje que no tiene nada que ver con flujos.

Por último, en el capítulo 5 se analiza el problema de ordenamiento de manera casi paralela al problema de acoplamiento máximo. Se describe el problema y se introduce su dual: el de la ruta crítica; se describe un algoritmo de programación dinámica para la solución simultánea de esta pareja de problemas. Posteriormente se relaciona el problema de ordenamiento con el de tensión mínima; de hecho, resulta ser un problema particular de tensión mínima. De nuevo se establecen equivalencias entre los conceptos y resultados presentados en las primeras secciones de este capítulo con los del tercer capítulo reformulados para trayectoria positiva máxima. Finalmente, se simplifican los algoritmos de rectificación de tensión y de trayectoria mínima para aplicarse de manera más eficiente en el problema de ordenamiento.

## 1. TRAYECTORIAS Y CORTES.

En este capítulo se proporcionan los conceptos elementales que permitirán el análisis de los problemas a estudiar. Se definen los conceptos de flujo, divergencia, potencial y diferencial, y se establece un resultado que los relaciona, el llamado fórmula de conversión. En las secciones 1.2 y 1.3 se define el concepto de trayectoria y se proporciona un algoritmo, denominado algoritmo de enrutamiento, para su determinación. En la sección 1.4 se define el concepto de corte que resulta ser dual al de trayectoria. De hecho, el algoritmo de enrutamiento se basa en un teorema de alternativas llamado teorema de la red coloreada; este teorema garantiza que el enrutamiento genera una trayectoria o bien un corte. Cabe señalar que en ambos casos se requiere la satisfacción de ciertas restricciones de coloración.

En la última sección del capítulo se prueba la equivalencia del teorema de la red coloreada con otro teorema de alternativas: el lema de Minty. Esto produce como resultado otro algoritmo, llamado algoritmo de Minty, el cual tiene dos posibilidades de término: se detecta un circuito o bien un corte. De nuevo, en ambos casos se exige la satisfacción de ciertas restricciones de coloración.

Todos estos conceptos y resultados juegan un papel muy importante en los problemas tratados en este trabajo.

## 1.1 CONCEPTOS BASICOS DE REDES.

Una red es una pareja de conjuntos  $A$  y  $N$  y una función  $f$  que asocia a cada elemento  $j \in A$  un par  $(i, i') \in N \times N$ , donde  $i \neq i'$ . Los elementos de  $N$  reciben el nombre de nodos o vértices y los de  $A$  se llaman arcos, aristas, líneas o ligaduras. Cuando los elementos de  $A$  tienen dirección se representa ésta mediante una flecha. En la figura 1.1 se muestra una red. Para denotar  $f(j) = (i, i')$ , con  $j \in A$  e  $i, i' \in N$ , se utiliza simplemente  $j \sim (i, i')$ ; los nodos  $i$  e  $i'$  son respectivamente el nodo o extremo inicial y el nodo o extremo final o terminal de  $j$ . Se dice también en este caso que  $i$  e  $i'$  son adyacentes y que  $j$  es incidente o adyacente a  $i$  e  $i'$ . En el caso en que el par  $(i, i')$  esté asociado a un solo arco, puede escribirse  $j = (i, i')$ ; nótese que si todo arco corresponde de manera única a una pareja de nodos, entonces el conjunto  $A$  puede identificarse mediante un subconjunto de  $N \times N$ . Una red con esta característica se llama gráfica o red dirigida o digráfica.

Dos conceptos muy utilizados en teoría de redes son las funciones de incidencia y adyacencia que permiten una representación matricial de las redes. La función de incidencia de la red  $G$  se define como:

$$e(i,j) = e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es nodo inicial del arco } j \\ -1 & \text{si } i \text{ es nodo final del arco } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta función puede representarse mediante una matriz E de incidencia, de dimensión  $m \times n$ , (con  $m = |N|$  y  $n = |A|$ ) cuyo  $(i, j)$ -ésimo elemento es  $e_{ij}$ . La matriz de incidencia de la red de la figura 1.1 es:

$$E = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

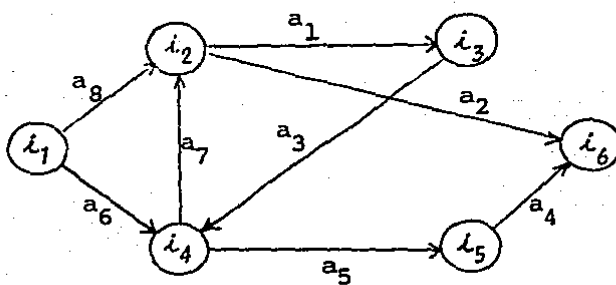


Figura 1.1

Obsérvese que las columnas de la matriz de incidencia de una red tienen exactamente dos elementos distintos de 0; uno de ellos es igual a 1 y el otro es igual a -1, puesto que cada arco tiene un solo extremo inicial y un solo extremo final.

Otra función útil para la representación de una digráfica es la función adyacencia definida como:

$$\hat{e}(i, j) = \hat{e}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, i') \in A \\ -1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La matriz de adyacencia  $\hat{E}$  es una matriz  $m \times m$  de elementos  $\hat{e}_{ij}$ . Para la red de la figura 1.1 se tiene:

$$\hat{E} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nótese que, en general, si se suman los elementos del  $i$ -ésimo renglón de  $\hat{E}$ , se obtiene el número de arcos con nodo inicial en  $i$  llamado grado exterior de  $i$ , para todo  $i \in N$ . Análogamente, si se suman los elementos de la  $i$ -ésima columna de  $\hat{E}$ , se obtiene el grado interior de  $i$ , para todo  $i \in N$  (es decir, el número de arcos con extremo final en  $i$ ).

## Flujos y divergencias.

En algunas ocasiones es necesario asociar a los arcos o a los nodos de una red ciertos parámetros para representar, por ejemplo, la cantidad de agua que fluye a través de una tubería, la cantidad de ciertos productos a transportar en un buque, la cantidad de energía eléctrica que fluye a través de un cable, etc. Con este objeto se define el concepto de flujo en una red.

Un flujo en una red  $G$  es una función  $X:A \rightarrow \mathbb{R}$ . El valor  $x(j)$  se conoce como flujo a través del arco  $j$ . Un flujo puede de notarse mediante un vector  $x \in \mathbb{R}^{|A|}$  en donde la  $j$ -ésima componente de  $x$  es  $x(j)$ . En la figura 1.2 se muestra el flujo  $x^t = (3, -2, -1, 1, 1, 5, 4, +4, 4)$ .

Conviene señalar que la cantidad de flujo que "sale" de un nodo  $i$  es la suma de los flujos  $x(j) > 0$  tales que  $e(i,j) = 1$  más la suma de los flujos  $x(j) < 0$  tales que  $e(i,j) = -1$ ; es decir, el flujo total que sale de  $i$  es la suma de los términos positivos  $e(i,j)x(j)$ . Análogamente, la cantidad total de flujo que "llega" al nodo  $i$  es el recíproco de la suma de los términos negativos  $e(i,j)x(j)$ . La suma de todos los términos  $e(i,j)x(j)$  es entonces la cantidad total de flujo que sale de  $i$  menos la cantidad total de flujo que llega a  $i$  y recibe el nombre de divergencia del flujo en el nodo  $i$ . Esta cantidad se denota con  $y(i)$ ; es decir:

$$y(i) = \sum_{j \in A} e(i,j)x(j) = [\text{divergencia de } x \text{ en } i]$$

En la red de la figura 1.2 se tiene:  $y(i_1) = 1$ ;  $y(i_2) = y(i_3) = y(i_4) = y(i_5) = 0$ ;  $y(i_6) = -1$ .

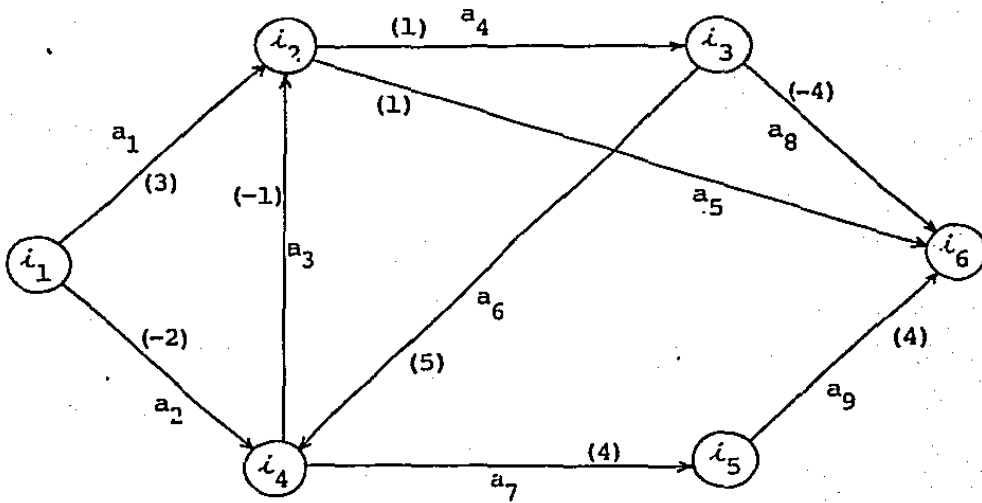


Figura 1.2



Se dice que el nodo  $i$  es un origen o fuentes si  $y(i) > 0$ ; análogamente,  $i$  es un destino o sumidero si  $y(i) < 0$ . Si  $y(i) = 0$  se dice que el flujo se conserva en  $i$ . En la figura 1.2  $i_1$  es un origen,  $i_6$  es un destino y el flujo se conserva en los demás nodos. La función de divergencia asociada al flujo  $x$  puede expresarse matricialmente mediante el vector:

$$y = Ex = \text{div } x$$

Como ejemplo se tiene, para la figura 1.2:

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Una propiedad importante es que la cantidad total de flujo en los orígenes es igual a la cantidad total de flujo en los destinos; es decir, el flujo "generado" es igual al flujo "absorbido". Este resultado se conoce como principio de divergencia total.

Principio de divergencia total. En una red  $G$  se cumple que:

$$\sum_{i \in N} y(i) = 0, \text{ donde } y = \text{div } x.$$

Demostración. En efecto, se tiene:

$$\sum_{i \in N} y(i) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in A} e(i,j)x(j) = \sum_{j \in A} x(j) \sum_{i \in N} e(i,j) = 0$$

puesto que, como se había señalado anteriormente, cada columna de la matriz de incidencia tiene exactamente un 1, exactamente un -1 y el resto de los elementos son 0. ▀

Otras propiedades importantes y sencillas de verificar de la función de divergencia, que serán empleadas en capítulos posteriores, son las siguientes: Si  $x$  y  $x'$  son dos flujos definidos en una red y  $\lambda$  es un escalar, entonces:

$$\text{div}(x+x') = \text{div } x + \text{div } x' \text{ y } \text{div}(\lambda x) = \lambda \text{div } x$$

en donde

$$(x+x')(j) = x(j) + x'(j), \text{ para todo } j \in A$$

$$(\lambda x)(j) = \lambda x(j), \text{ para todo } j \in A$$

### Potenciales y tensión.

Un concepto dual al de flujo lo constituye el de potencial. Un potencial en una red  $G$  es una función  $u$  que asocia a cada nodo  $i$  de  $G$  un real  $u(i)$  llamado potencial en  $i$ . La tensión a través del arco  $j \sim (i, i')$  se define como la diferencia de potenciales:

$$v(j) = u(i') - u(i) = [\text{tensión a través de } j],$$

que también puede expresarse:

$$v(j) = - \sum_{i \in N} u(i) e(i, j),$$

o, expresado matricialmente:

$$v = - u E = \Delta u.$$

En la figura 1.3 se ha asociado a cada nodo su potencial y a cada arco su correspondiente tensión.

Las fórmulas  $y = Ex$  y  $v = - uE$  definen una pareja de sistemas duales y pueden expresarse mediante una tabla como la mostrada en la figura 1.4. Los renglones corresponden al sistema flujo-divergencia mientras que las columnas corresponden al sistema potencial-tensión.

El conjunto de todos los diferenciales se preserva bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar; luego, este conjunto es un subespacio de  $\mathbb{R}^{|A|}$  llamado espacio de diferenciales. El espacio diferencial puede interpretarse como el espacio generado por los renglones de la matriz de incidencia  $E$  de la red o equivalentemente como el rango de la transformación lineal  $u \rightarrow - uE$  definida del espacio  $\mathbb{R}^{|N|}$  al espacio  $\mathbb{R}^{|A|}$ . Nótese que esta transformación es la negativa adjunta de la transformación  $x \rightarrow Ex$ . El espacio complementario ortogonal al espacio de diferenciales es el espacio de circulaciones que se define enseguida. Una circulación es un flujo  $x$  para

el cual  $\text{div } x = 0$ ; es decir, un flujo que se conserva en todo nodo. Las circulaciones se preservan bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar por lo que forman un subespacio lineal de  $\mathbb{R}^{|A|}$  llamado espacio de circulaciones. Se observa que el espacio de circulaciones es el espacio nulidad de la matriz de incidencia  $E$  de la red; es decir, es el núcleo de la transformación lineal  $x \rightarrow Ex = \text{div } x$  definida del espacio  $\mathbb{R}^{|A|}$  al espacio  $\mathbb{R}^{|N|}$ .

A partir de los conceptos del último párrafo puede establecerse la fórmula de conversión.

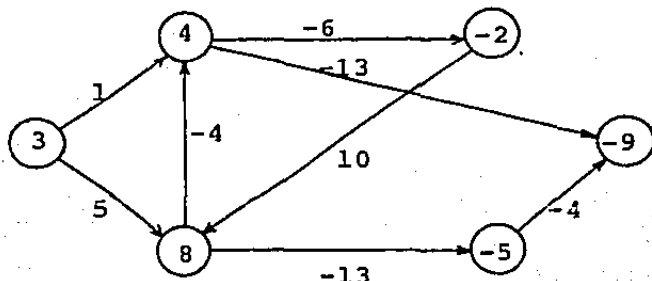


Figura 1.3

Fórmula de conversión. Sean  $x$  un flujo y  $u$  un potencial. Si  $y = \text{div } x$  y  $v = \Delta u$  entonces:

$$v \cdot x = - u \cdot y$$

Demostración.  $v \cdot x = (-u E)x = - u(Ex) = - u \cdot y$  ■

Como corolario de la fórmula de conversión se tiene que, si  $D$  es el espacio de diferenciales y  $C$  es el espacio de circulaciones, entonces:

$$v \cdot x = 0, \text{ para todo } v \in D \text{ y para todo } x \in C$$

mas aún:

$$D = \{v \in \mathbb{R}^{|A|} \mid v \cdot x = 0, \text{ para todo } x \in C\} = C^\perp$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}^{|A|} \mid v \cdot x = 0, \text{ para todo } v \in D\} = D^\perp$$

es decir,  $D$  y  $C$  son ortogonales complementarias.

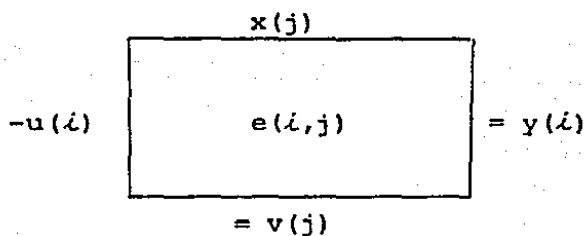


Figura 1.4

## 1.2 TRAYECTORIAS EN UNA RED.

Una trayectoria P en una red G es una secuencia finita de la forma:

$$i_0, j_1, i_1, j_2, \dots, j_r, i_r, \quad r > 0,$$

donde  $i_k \in N$ , para todo  $k = 1, \dots, r$ , y  $j_k \sim (i_{k-1}, i_k)$  ó  $j_k \sim (i_k, i_{k-1})$  (es decir, no importa la dirección del arco  $j_k$ ), para todo  $k = 1, \dots, r$ . Los nodos  $i_0$  e  $i_r$  reciben respectivamente los nombres de nodo inicial y final de la trayectoria P. Un modo alternativo de denotar la trayectoria es  $P: i_0 \rightarrow i_r$ . En el caso particular en que el nodo  $i_0$  coincide con el nodo  $i_r$ , la trayectoria P recibe el nombre de circuito. En la figura 1.5 se muestra en una red, una trayectoria y un circuito.

Si el arco es de la forma  $j_k \sim (i_{k-1}, i_k)$  se dice que  $j_k$  se recorre positivamente; si por el contrario  $j_k \sim (i_k, i_{k-1})$  se dice que  $j_k$  se recorre negativamente. Una trayectoria para la cual todos los arcos son recorridos positivamente es una trayectoria positiva; una trayectoria para la cual se cumple que todos los arcos se recorren negativamente es una trayectoria negativa. Como caso particular de estas definiciones surgen los conceptos de circuitos positivo y negativo.

Conviene señalar que la sola secuencia de nodos (o la sola secuencia de arcos) de una trayectoria puede resultar insuficiente para describirla puesto que entre dos nodos puede existir

más de un arco. Sin embargo, si la red es una digráfica, puede utilizarse como notación alternativa para la trayectoria  $P$  una secuencia de nodos y flechas que indiquen el sentido del arco entre dos nodos adyacentes:

$$P: i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \dots \rightarrow i_k$$

Cuando un arco se recorre más de una vez en una trayectoria, incluso positiva o negativamente, se dice que  $P$  tiene multiplicidades. Si cada arco y cada nodo de la secuencia son recorridos una sola vez entonces  $P$  es una trayectoria simple o elemental. Cabe hacer notar que para cualquier trayectoria  $P$  puede construirse una trayectoria elemental eliminando los nodos y arcos que se repiten.

En una trayectoria sin multiplicidades  $P$  se puede particionar el conjunto de arcos en los recorridos positivamente y los recorridos negativamente, denotándose estos conjuntos con  $P^+$  y  $P^-$  respectivamente. Puede entonces definirse la función de incidencia de los arcos de  $P$  como:

$$e_p(j) = e(j, P) = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in P^+ \\ -1, & \text{si } j \in P^- \\ 0, & \text{si } j \notin P. \end{cases}$$

Obsérvese que esta función, además de indicar la orientación de un arco, puede interpretarse como un flujo en la red  $G$ ; de hecho, representa una unidad de flujo circulando a través de  $P$ . En el caso en que  $P$  no sea un circuito se tiene que

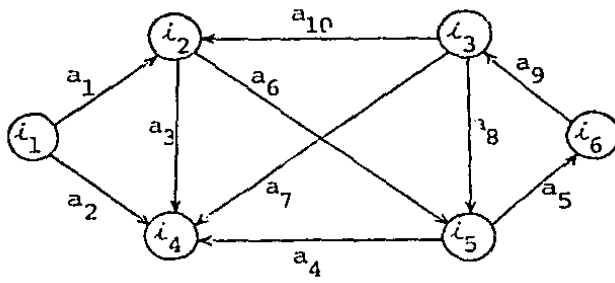
$y = \text{div } e_p$  tiene valor 1 y -1 en los nodos inicial y final de  $P$  respectivamente y 0 en los demás nodos; es decir,  $i_0$  es el único origen e ir es el único destino para el flujo. Si  $P$  es un circuito entonces  $e_p$  es una circulación.

Es importante señalar que una trayectoria  $P$  puede ser completamente reconstruída a partir de la función de incidencia de sus arcos; lo mismo es válido para circuitos excepto que, en este último caso, no se puede determinar a cuál de las dos direcciones posibles corresponde.

Otro concepto útil que involucra trayectorias es el de conexidad. Se dice que la red  $G$  es conexa si para todo par de nodos diferentes  $s, s'$ , existe una trayectoria  $P:s \rightarrow s'$ . Si la red  $G$  no es conexa puede partitionarse en  $k$  componentes conexas; esto es, en  $k$  redes  $(N_i, A_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , en donde los subconjuntos de arcos  $N_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , forman una partición de  $N$  y son tales que dos nodos  $s, s'$  pertenecen al mismo  $N_i$  si, y sólo si, existe una trayectoria  $P:s \rightarrow s'$  ó  $s = s'$ . Los subconjuntos  $A_i$ , están definidos como los arcos cuyos extremos están en  $N_i$  (de hecho  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  forman una partición de  $A$ ). Una red fuertemente conexa es aquella para la cual existe una trayectoria positiva  $P:s \rightarrow s'$  que une todo par de nodos distintos  $s, s'$ .

En la figura 1.6 se muestran una red conexa, una fuertemente conexa y una con dos componentes conexas.

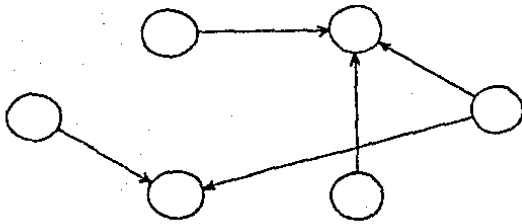




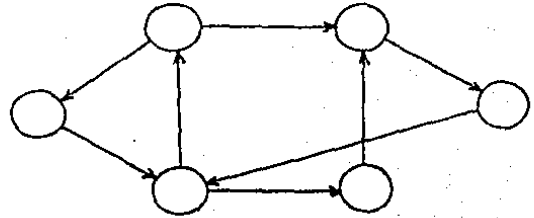
Trayectoria de  $i_1$  a  $i_6$ :  $i_1, a_2, i_4, a_4, i_5, a_5, i_6$

Circuito:  $i_2, a_3, i_4, a_4, i_5, a_8, i_3, a_{10}, i_2$

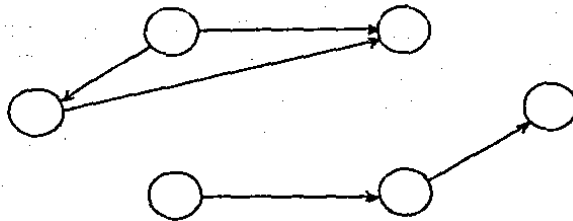
Figura 1.5



Red conexa



Red fuertemente conexa



Red con dos componentes conexas

Figura 1.6

## Trayectoria de un conjunto a otro.

Una consideración importante en la determinación del flujo máximo en una red es la dirección en que puede circular flujo a través de un arco; es decir, debe tenerse en cuenta si el flujo puede aumentarse, disminuirse, ambas cosas o ninguna de ellas. En este sentido es importante una "etiqueta" que distinga qué cambios son factibles para el flujo a través de un arco. Esta etiqueta estará dada por la introducción de una "coloración" del arco. La coloración de una red induce una partición de su conjunto de arcos.

En una red pueden distinguirse cuatro clases de arcos: aquéllos que pueden recorrerse en ambos sentidos, aquéllos que pueden ser recorridos sólo en su sentido, los que pueden recorrerse sólo en sentido contrario al suyo y los que no pueden recorrerse en ningún sentido. Los arcos de la primera clase serán "coloreados" de verde, los de la segunda de blanco, los de la tercera negro y finalmente, los de la cuarta clase se pintarán de rojo. De esta manera se define una partición de  $A$  en cuatro conjuntos (alguno de los cuales puede ser vacío) llamada coloración de  $A$ .

Con el concepto de coloración es posible caracterizar las restricciones de una determinada trayectoria; por ejemplo, que ésta sea positiva. Por otro lado, se desea determinar una trayectoria en la cual se respeten las restricciones de recorrido

para cada arco. En términos de la coloración de A, el problema puede establecerse de la siguiente manera:

Problema de la trayectoria coloreada (o pintada). Sean dos conjuntos no vacíos de nodos  $N^+$  y  $N^-$  en la red G y sea una coloración de A consistente en los colores verde, blanco, negro y rojo. El problema es determinar una trayectoria  $P: N^+ \rightarrow N^-$  (es decir,  $P: i_0 \rightarrow i_r$  con  $i_0 \in N^+$  e  $i_r \in N^-$ ) tal que todo arco de  $P^+$  es verde o blanco y todo arco de  $P^-$  es verde o negro.

Una trayectoria compatible con la coloración dada es una trayectoria con estas características. Luego, una solución al problema formulado anteriormente es una trayectoria compatible de  $N^+$  a  $N^-$ .

La herramienta empleada para garantizar la no existencia de trayectorias es el concepto de corte o cortadura. Como se verá posteriormente este concepto juega un papel de dualidad.

Considérese la siguiente notación para conjuntos de nodos arbitrarios S y S'

$$[S, S']^+ = \{j \in A \mid j^-(i, i') \text{ con } i \in S, i' \in S'\}$$

$$[S, S']^- = \{j \in A \mid j^-(i', i) \text{ con } i \in S, i' \in S'\}$$

Se centrará la atención para el caso donde  $S' = N/S$  (complemento de S en N).

El conjunto signo  $Q = [S, N/S]$ , formado por los conjuntos de

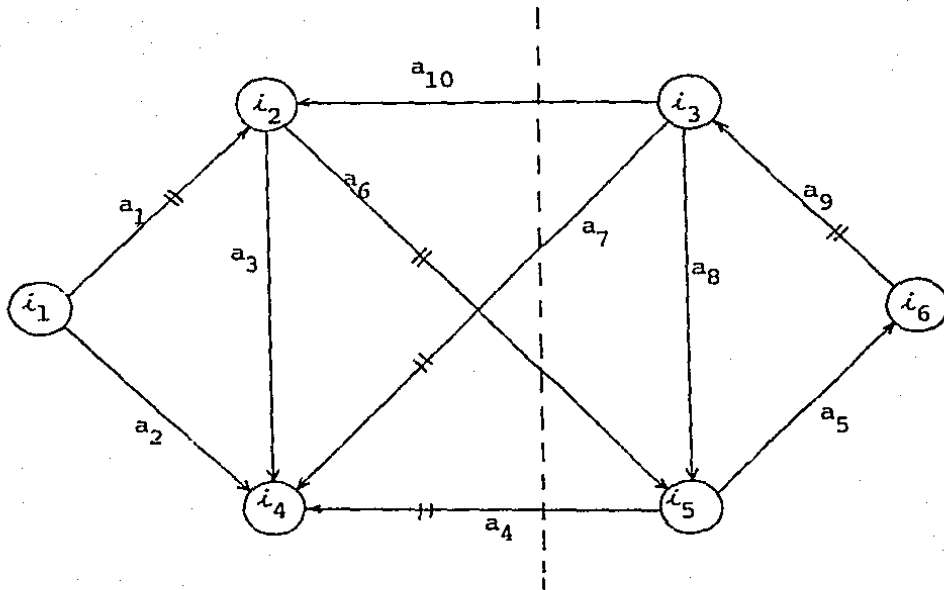
arcos  $[S, N/S]^+$  y  $[S, N/S]^-$  los cuales se denotarán con  $Q^+$  y  $Q^-$  respectivamente, se llama corte o cortadura de la red  $G$ . Obsérvese que toda trayectoria de  $S$  a  $N/S$  contiene un arco de  $Q$ ; de este hecho se deriva el nombre de corte. Más aún, si  $P: i_0 \rightarrow i_r$  es una trayectoria tal que  $i_0 \in S$ ,  $i_r \notin S$ ,  $Q$  es un corte de  $G$  y  $j \in P \cap Q$ , entonces o bien  $j \in P^+ \cap Q^+$  ó bien  $j \in P^- \cap Q^-$ . En la figura 1.7 se ilustra este hecho. La función incidencia para los arcos de un corte se define de manera análoga a los de una trayectoria:

$$e_Q(j) = e(j, Q) = \begin{cases} 1, & j \in Q^+ \\ -1, & j \in Q^- \\ 0, & j \notin Q \end{cases}$$

Nótese que  $e_Q$  puede interpretarse como un diferencial; la incidencia de un arco es la tensión del negativo del potencial:

$$e_S(i) = \begin{cases} 1, & i \in S \\ 0, & i \notin S \end{cases}$$

es decir,  $e_Q = -\Delta e_S = \Delta e_{N/S}$ . De aquí que el corte corresponda al concepto dual del de trayectoria.



Trayectoria P:  $i_1, a_1, i_2, a_6, i_5, a_4, i_4, a_7, i_3, a_9, i_6$

Conjunto S =  $\{i_1, i_2, i_4\}$

Corte Q =  $\{a_{10}, a_6, a_7, a_4\}$

$P^+ = \{a_1, a_6\}$  ,  $P^- = \{a_4, a_7, a_9\}$

$Q^+ = \{a_6\}$  ,  $Q^- = \{a_{10}, a_7, a_4\}$

De donde

$P^+ \cap Q^+ = \{a_6\}$  ,  $P^- \cap Q^- = \{a_7, a_4\}$

Figura 1.7

### 1.3 ALGORITMO DE ENRUTAMIENTO.

En esta sección se describe un algoritmo que determina una solución al problema de la trayectoria compatible con una coloración dada en la red  $G$  o bien detecta un corte particular, concluyéndose en este último caso la no existencia de solución al problema.

La idea general del algoritmo consiste en construir un conjunto de nodos  $S \subset N^+$  y una función  $\theta: S/N^+ \rightarrow A$ , la cual asigna o etiqueta a cada nodo  $i \in S/N^+$  con un arco  $j \in A$ ; este apuntador del nodo servirá para recuperar las trayectorias construídas de  $N^+$  a  $S/N^+$ . La función  $\theta$  recibe el nombre de enrutamiento (o  $\theta$ -enrutamiento) de  $S$  con base en  $N^+$  y debe satisfacer:

(i) Para cada  $i \in S/N^+$ ,  $\theta(i)$  es un arco que une  $i$  con algún nodo de  $S$ .

(ii) Cuando se genera una secuencia  $i_0, \theta(i_0), i_1, \theta(i_1), \dots, i_k, \theta(i_k), i_{k+1}$ , en donde  $i_h$  es el otro extremo de  $\theta(i_{h-1})$  ( $h=1, 2, \dots, k+1$ ), eventualmente se alcanza un nodo de  $N^+$ . El reverso de esta secuencia es entonces una trayectoria de  $N^+$  a  $i$ .

Por otro lado, el algoritmo debe generar trayectorias compatibles con la coloración dada por lo que  $\theta(i)$  debe ser verde o blanco si  $i$  es su extremo inicial y debe ser verde o negro en caso contrario. El algoritmo de enrutamiento se describe en la siguiente hoja y se proporciona su justificación.

## ALGORITMO DE ENRUTAMIENTO

Propósito: Determinar una trayectoria de  $N^+$  a  $N^-$  compatible con la coloración dada.

### Descripción

Paso 1. Sea  $S = N^+$  y sea  $\theta$  vacío.

Paso 2. Determinése el corte  $Q = [S, N/S]$ .

- Si existe  $j \in Q^+$  tal que  $j$  es verde o blanco o si existe  $j \in Q^-$  tal que  $j$  es verde o negro ir a 3.
- Si no existe tal  $j$  terminar. En este caso no existe solución al problema.

Paso 3. Sea  $\theta(i) = j$ , en donde  $i \notin S$ .

Sea  $S := S \cup \{i\}$ . (El enrutamiento  $\theta$  es compatible con la coloración).

- Si  $i \in N^-$  terminar. Los arcos del enrutamiento  $\theta$  forman una trayectoria  $P$  de  $N^+$  a  $i \in N^-$  compatible con la coloración.
- Si  $i \notin N^-$  se tiene  $S \cap N^- = \emptyset$ . Ir a 2.

Justificación del algoritmo. Obsérvese que en el paso 2 se inspecciona si existe un arco  $j$  verde o blanco en  $Q^+$  o un arco  $j$  verde o negro en  $Q^-$  para construir (en el paso 3) el  $\theta$ -enrutamiento de  $S$  que por tanto es compatible con la coloración en cada iteración; nótese también que mientras el algoritmo no termine se cumple que  $S \cap N^- = \phi$ . Por lo anterior se concluye que si el algoritmo termina en el paso 3, cuando se detecta  $i \in N^-$ , se ha determinado una trayectoria  $P: N^+ \rightarrow N^-$  compatible con la coloración. Por otro lado, si durante la inspección realizada en el paso 2 se encuentra que no existe un arco  $j$  con las características pedidas, el corte  $Q$  satisface que todo  $j \in Q^+$  es negro o rojo y todo  $j \in Q^-$  es blanco o rojo. En este caso no existe solución al problema de la trayectoria coloreada puesto que para que exista una trayectoria  $P$  compatible debe existir al menos un arco  $j \in P^+ \cap Q^+$  o  $j \in P^- \cap Q^-$  y esta es imposible sin violar las restricciones de color en la red.

El algoritmo termina en un número finito de pasos puesto que en cada iteración se define la función  $\theta$  al menos para un nodo  $i$  (excepto en la última si se termina en el paso 2), y el número de nodos es finito. Más aún, el nodo etiquetado cumple  $i \notin S$ ; de aquí que, si en cada iteración se etiqueta sólo uno, en el peor de los casos se realizarán tantas iteraciones como nodos haya fuera de  $N^+ \cup N^-$  además de la iteración final en donde se detecta  $i \in N^-$ . Por lo tanto el algoritmo termina en, a lo más,  $|N| - |N^+| - |N^-| + 1$  iteraciones. ■



### EJEMPLO 1.

Determinése una trayectoria compatible con la coloración definida en la figura 1.8 donde  $N^+ = \{s\}$  y  $N^- = \{s'\}$ . Se empleará el algoritmo de enrutamiento para la determinación de tal trayectoria.

Iteración 1. Inicialmente se tiene que  $S = \{s\}$ . De aquí que el corte  $Q = [S, N/S]$  está formado por los conjuntos de arcos  $Q^+$  y  $Q^-$  en donde:

$$Q^+ = \{(s, i_1), (s, i_2), (s, i_4)\} \text{ y } Q^- = \{(i_3, s)\}$$

Puesto que  $j \sim (s, i_1)$  y  $j \sim (s, i_2) \in Q^+$  son blanco y verde respectivamente, se define:

$$\theta(i_1) = (s, i_1) \text{ y } \theta(i_2) = (s, i_2)$$

El nuevo conjunto  $S$  es:  $S = \{s, i_1, i_2\}$ . Como aún no se ha alcanzado el nodo  $s'$ , en otras palabras  $S \cap N^- = \phi$ , se realiza otra iteración.

Iteraciones 2 a 5. En el siguiente cuadro se resumen las iteraciones restantes:

Número de iteración	Conjunto S	Arcos de $Q^+$	Arcos de $Q^-$	Enrutamiento definido
2	$\{s, i_1, i_2\}$	$\{(s, i_4) (i_1, i_5) (i_2, i_4)\}$	$\{(i_3, s) (i_3, i_1) (i_5, i_1) (i_5, i_2) (i_7, i_2)\}$	$\theta(i_5) = (i_1, i_5)$ $\theta(i_3) = (i_3, i_1)$ $\theta(i_7) = (i_7, i_2)$
3	$\{s, i_1, i_2, i_5, i_3, i_7\}$	$\{(s, i_4) (i_2, i_4) (i_5, i_8) (i_3, i_9) (i_7, i_4) (i_7, i_{10}) (i_7, i_8)\}$	$\{(i_6, i_5) (i_6, i_3) (i_8, i_7)\}$	$\theta(i_4) = (i_7, i_4)$ $\theta(i_6) = (i_6, i_3)$
4	$\{s, i_1, i_2, i_5, i_3, i_7, i_4, i_6\}$	$\{(i_3, i_9) (i_6, i_8) (i_5, i_8) (i_7, i_8) (i_4, i_{10}) (i_7, i_{10})\}$	$\{(i_9, i_6) (i_9, i_8) (i_8, i_7)\}$	$\theta(i_{10}) = (i_4, i_{10})$
5	$\{s, i_1, i_2, i_5, i_3, i_7, i_4, i_6, i_{10}\}$	$\{(i_3, i_9) (i_6, i_8) (i_5, i_8) (i_7, i_8) (i_{10}, i_8) (i_{10}, i_5)\}$	$\{(i_9, i_6), (i_9, i_8) (i_8, i_7)\}$	$\theta(i_8) = (i_{10}, i_8)$ $\theta(s') = (i_{10}, s')$

Al final de la quinta iteración se tiene etiquetado  $s' \in N^-$  por lo que esta iteración es la última. La secuencia obtenida para este nodo fué:

$$s', \theta(s') = (i_{10}, s'), i_{10}, \theta(i_{10}) = (i_4, i_{10}), i_4, \theta(i_4) = (i_7, i_4), \\ i_7, \theta(i_7) = (i_7, i_2), i_2, \theta(i_2) = (s, i_2), s.$$

Por tanto la trayectoria compatible obtenida es:

$$P: s + i_2 + i_7 + i_4 + i_{10} + s'$$

Esto se muestra en la figura 1.8 en donde se han marcado los arcos que forman el enrutamiento construido durante el algoritmo.

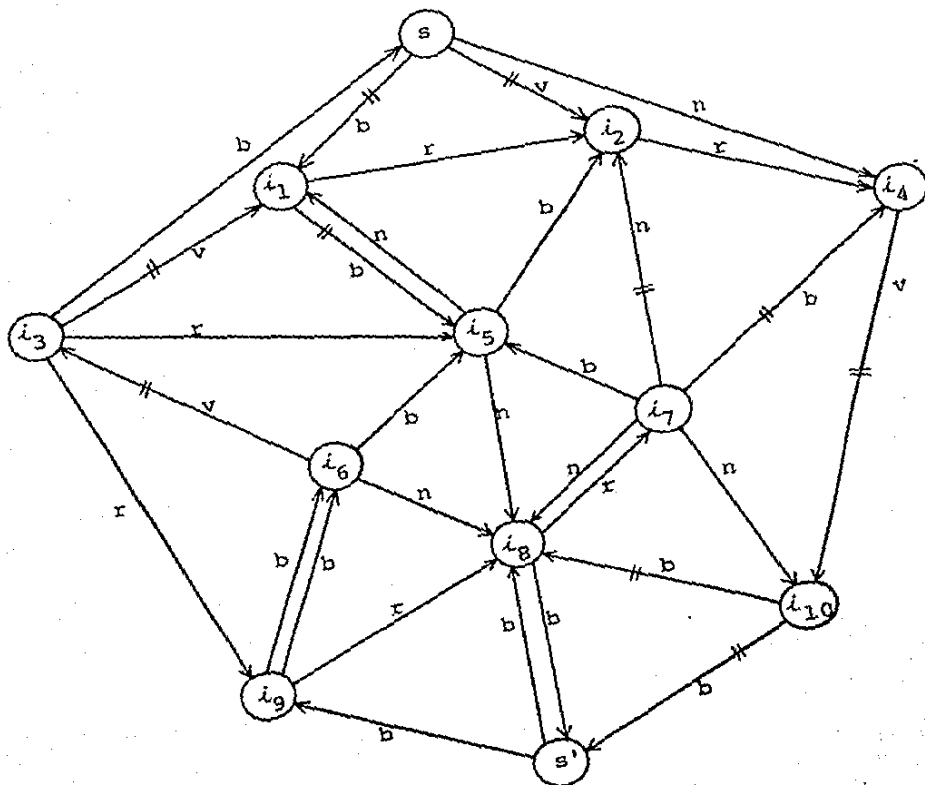


Figura 1.8

EJEMPLO 2.

Determinése una trayectoria, compatible con la coloración definida en la red de la figura 1.9, de  $N^+ = \{s\}$  a  $N^- = \{i_7, i_8, i_9\}$ , empleando el algoritmo de enrutamiento.

En el siguiente cuadro se presenta, como en el ejemplo anterior, un resumen de las iteraciones. Se ha denotado con  $k$ , en la primera columna, el número de iteración.

k	S	Arcos de $Q^+$	Arcos de $Q^-$	Enrutamiento definido
1	{s}	{(s, $i_1$ ) (s, $i_3$ )}	{( $i_2$ , s)}	$\theta(i_1) = (s, i_1)$ $\theta(i_3) = (s, i_3)$
2	{s, $i_1, i_3$ }	{( $i_1, i_4$ ) ( $i_1, i_2$ ) ( $i_3, i_6$ )}	{( $i_2, s$ ) ( $i_2, i_1$ ) ( $i_2, i_3$ )}	$\theta(i_4) = (i_1, i_4)$
3	{s, $i_1, i_3, i_4$ }	{( $i_2, i_4$ ) ( $i_3, i_6$ )}	{( $i_2, s$ ) ( $i_2, i_1$ ) ( $i_2, i_3$ ) ( $i_7, i_4$ ) ( $i_6, i_4$ ) ( $i_2, i_4$ )}	

En la tercera iteración se observa que todo arco  $j \in Q^+$  es negro o rojo y todo arco  $j \in Q^-$  es blanco o rojo. Luego, este corte  $Q$  es compatible con la coloración dada y por tanto se concluye que no existe ninguna trayectoria compatible con la coloración de  $N^+$  a  $N^-$ . En la figura 1.9 se han marcado los arcos del enrutamiento y el corte compatible.

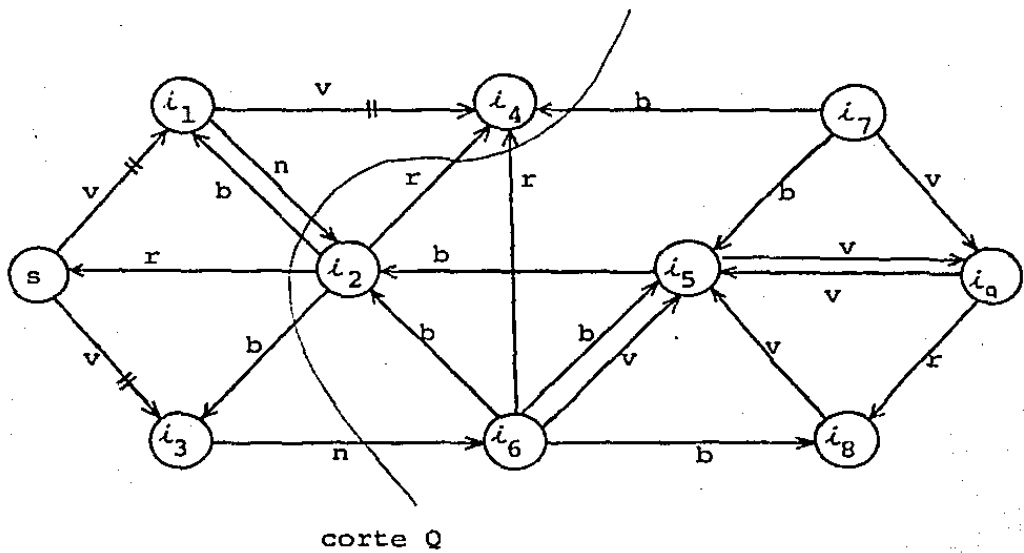


Figura 1.9

#### 1.4 TEOREMA DE LA RED COLOREADA Y LEMA DE MINTY.

En la justificación del algoritmo de enrutamiento de la red coloreada se estableció un problema complementario: el del corte compatible. Se dice que el corte  $Q$  separa  $N^+$  de  $N^-$  si es de la forma  $[S, N/S]$ , para algún SCN, tal que  $N^+CS$  y  $N^- \cap S = \phi$ . Se denotará  $Q$  con  $N^+ + N^-$ . En términos de coloraciones se tiene:

Problema del corte coloreado (o pintado). Sean  $N^+$  y  $N^- \subset N$  tales que  $N^+ \cap N^- = \phi$ . Sea una coloración en la red  $G$  con los colores verde, blanco, negro y rojo. El problema es determinar un corte  $Q: N^+ + N^-$  tal que todo arco de  $Q^+$  sea rojo o negro mientras que todo arco de  $Q^-$  sea rojo o blanco.

Un corte que cumple las restricciones de color se dice compatible con la coloración y si además separa  $N^+$  de  $N^-$  constituye la solución al problema del corte coloreado. Obsérvese la dualidad entre las restricciones de color para trayectorias y cortes.

El algoritmo de enrutamiento constituye una prueba constructiva para el siguiente resultado de dualidad. De este hecho se desprende que el procedimiento puede ser utilizado para resolver el problema del corte compatible.

Teorema (de la red coloreada). Sean  $N^+$  y  $N^- \subset N$ , tales que  $N^+ \cap N^- = \emptyset$ . Entonces, para toda coloración de la red  $G$  con los colores verde, blanco, negro y rojo, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es válida.

1. El problema de la trayectoria coloreada tiene solución  $P$ .
2. El problema del corte coloreado tiene solución  $Q$ .

Estas dos alternativas constituyen las dos posibilidades de terminación del algoritmo. Si termina en el paso 2 se han construido un corte  $Q: N^+ \downarrow N^-$  compatible con la coloración; la existencia de este corte, garantiza entonces la no existencia de una trayectoria compatible con la coloración.



### Equivalencia con el lema de Minty.

Existe otro resultado fuertemente relacionado con el teorema de la red coloreada. Este resultado es el lema de Minty y se utiliza frecuentemente de manera constructiva. Este resultado utiliza el concepto de corte elemental paralelo al de trayectoria elemental.

Un corte  $Q$  es elemental si al remover sus arcos de la red, el número de componentes conexas se incrementa en una unidad.

Si la red  $G$  es conexa, esto equivale a que  $Q$  tenga la forma  $[S, N/S]$ , donde  $N \neq S \neq \emptyset$ , todo par de nodos de  $S$  pueden ser unidos mediante una trayectoria que sólo utilice nodos de  $S$  y todo par de nodos en  $N/S$  puedan ser unidos con trayectorias cuyos nodos sean todos elementos de  $N/S$ .

Dada una coloración en una red y un arco blanco o negro de ella, se cumple que este arco pertenece a un circuito elemental compatible con la coloración o bien a un corte elemental compatible con la coloración. Este resultado se establece en el lema de Minty.

### Lema de Minty.

Dada una coloración en la red  $G$  con los colores verde, blanco negro o rojo y cualquier arco  $\bar{e}$  blanco o negro, una y solo una de las siguientes afirmaciones es válida

1. Existe un circuito (elemental)  $P$  compatible con la coloración que usa  $\bar{j}$ .
2. Existe un corte (elemental)  $Q$  compatible con la coloración que usa  $\bar{j}$ .

Este lema de Minty puede demostrarse a partir del teorema de la red coloreada del siguiente nodo:

Sea  $\bar{j} = (i, i')$  un arco y denótense sus extremos con  $s$  y  $s'$  del siguiente modo: si  $\bar{j}$  es blanco sean  $s = i_2$  y  $s' = i_1$ ; si  $\bar{j}$  es negro, sean  $s = i_1$  y  $s' = i_2$ . Si se utiliza el algoritmo de enrutamiento para determinar una trayectoria  $P: N^+ \rightarrow N^-$  compatible con la coloración, en donde  $N^+ = \{s\}$  y  $N^- = \{s'\}$ , sólo son factibles dos posibilidades:

(i) No existe solución al problema de la trayectoria coloreada; es decir, se determina un corte  $Q = [S, N/S]$  compatible con la coloración. En este caso, puesto que  $s \in S$  y  $s' \notin S$  se tiene  $\bar{j} \in Q$  y por tanto se satisface la segunda condición del lema de Minty. Inversamente, si  $Q$  es un corte que satisface todas las condiciones anteriores resuelve el problema del corte coloreado.

(ii) Existe solución al problema de la trayectoria coloreada; en este caso se determina una trayectoria  $P': s \rightarrow s'$ . Supóngase que esta trayectoria es elemental y que no usa  $\bar{j}$ .

La existencia de  $P'$  puede ser garantizada a partir del siguiente hecho: sólo existe una trayectoria elemental de  $N^+$  a  $N^-$ , a saber;  $s, \bar{j}, s'$ ; pero esta trayectoria no es compatible con la coloración. Defínase  $P = P', \bar{j}, s$ . Esta trayectoria es un circuito elemental que contiene a  $\bar{j}$  y que es compatible con la coloración. Nótese que las trayectorias  $P'$  de esta clase corresponden biunívocamente a los circuitos  $P$  de esta clase. Por tanto se deriva la primera alternativa del lema de Minty.

Es importante señalar que esta demostración del lema de Minty a partir del teorema de la red coloreada proporciona un algoritmo (llamado algoritmo de Minty) que determina cuál de las dos posibilidades del lema de Minty se satisface en un caso dado.

Por otro lado el teorema de la red coloreada puede ser demostrado a partir del lema de Minty de la siguiente manera:

Sea  $G$  una red coloreada con los cuatro colores de costumbre y sean  $N^+, N^-$  dos subconjuntos ajenos del conjunto  $N$  de nodos de la red. Sea  $G'$  una red construída agregando a  $G$  el arco  $\bar{j} \sim (s', s)$  y los arcos  $(s, i)$ , para todo  $i \in N^+$ , y  $(k, s')$ , para todo  $k \in N^-$  como se muestra en la figura 1.10. Coloréense todos los nuevos arcos de blanco. La aplicación del lema de Minty para el arco  $\bar{j}$  lleva a dos posibilidades:

(i) Existe un circuito elemental  $P$  compatible con la coloración que contiene al arco  $\bar{j}$ . Puesto que  $\bar{j}$  es blanco, este

circuito debe ser de la forma  $P: s', \bar{j}, s, j_1, P', j_2, s'$  en donde  $j_1 \sim (s, i)$ , con  $i \in N^+$ ,  $j_2 \sim (k, s')$  con  $k \in N^-$  y  $P'$  es entonces una trayectoria de  $i$  a  $k$  compatible con la coloración. Con esto se establece una correspondencia biunívoca de los circuitos  $P'$  con estas características y las trayectorias  $P': i \rightarrow k$ , con  $i \in N^+$  y  $k \in N^-$ , de donde se deriva la primera condición del teorema de la trayectoria coloreada.

(ii) Existe un corte elemental  $Q$  compatible con la coloración que contiene el arco  $\bar{j}$ . En este caso  $Q$  no puede contener ningún arco nuevo distinto de  $\bar{j}$  puesto que, siendo éstos blancos, no se satisfarían las restricciones de color (nótese que  $\bar{j} \in Q^-$ ). De aquí que los demás arcos de  $Q$  son arcos de la red original  $G$  y por tanto constituyen un corte compatible con la coloración en ella. De nuevo, esta correspondencia de cortes es biunívoca por lo que se deriva la segunda alternativa del teorema de la red coloreada. ■

A partir de las demostraciones del lema de Minty usando el teorema de la red coloreada y viceversa queda establecida la equivalencia de estos resultados. Esto es de gran importancia y será aprovechado más adelante.

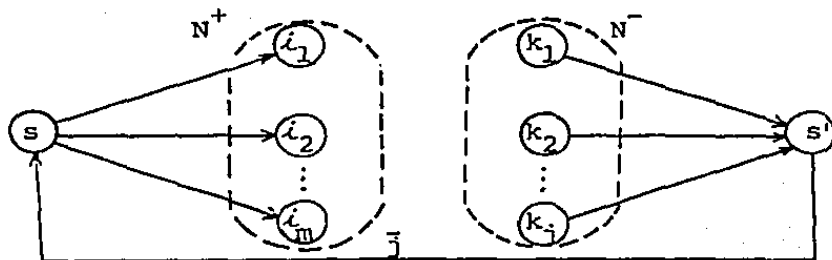


Figura 1.10

EJEMPLO 3.

Determinese si el arco  $(i_4, i_5)$  pertenece a un circuito elemental compatible o a un corte elemental compatible con la coloración definida en la red de la figura 1.11.

Para verificar si este arco pertenece a un circuito o corte elementales compatibles con la coloración se utilizará el algoritmo de Minty. Es decir, se resuelve el problema de la trayectoria coloreada de  $N^+ = \{i_4\}$  a  $N^- = \{i_5\}$ . Utilizando el algoritmo de enrutamiento se obtiene la trayectoria compatible de  $i_4$  a  $i_5$ :

$$P: i_4, (i_4, i_2), i_2, (i_1, i_2), i_1, (i_1, i_5), i_5;$$

la trayectoria  $P$ , junto con el arco  $(i_4, i_5)$ , forma un circuito elemental. En la figura 1.11 se han marcado los arcos de tal circuito.

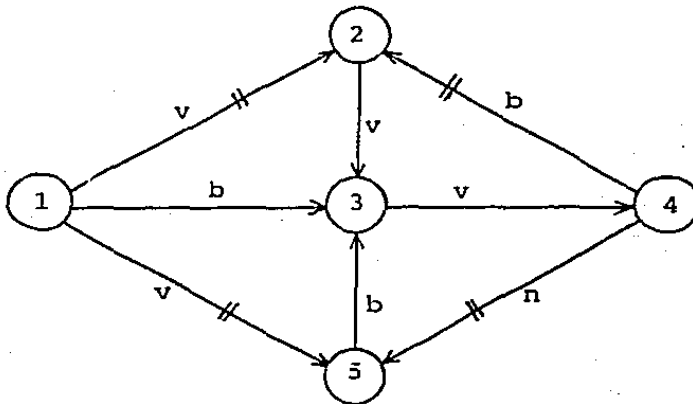


Figura 1.11

EJEMPLO 4.

Determinese si el arco  $(i_4, i_5)$  pertenece a un circuito elemental compatible o a un corte elemental compatible con la coloración dada en la red de la figura 1.12.

De nuevo se empleará el algoritmo de Minty para determinar si  $(i_4, i_5)$  pertenece a un corte o a un circuito. En este caso, al aplicar el algoritmo de enrutamiento, se determina el corte elemental  $Q = [S, N/S]$ , en donde  $S = \{i_4, i_2, i_3\}$ , que contiene a  $(i_4, i_5)$  y que es compatible con la coloración.

Se ha marcado  $Q$  en la figura 1.12.

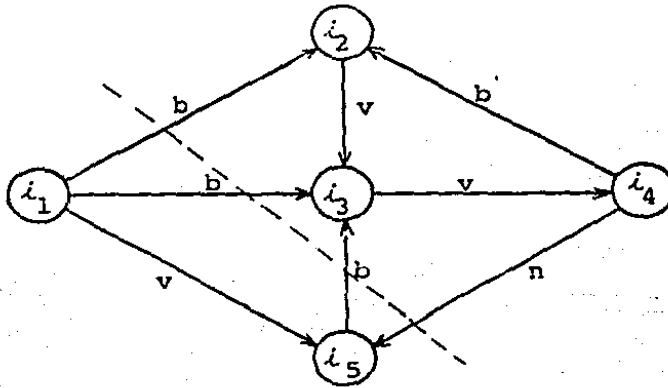


Figura 1.12

## 2. FLUJO MAXIMO Y EXTENSIONES.

En este capítulo se analizan dos problemas de flujos en una red. El primero, estudiado y resuelto por Ford y Fulkerson (1956) consiste en determinar el flujo máximo en una red y el segundo concierne a la determinación de un flujo que satisfaga ciertas restricciones de capacidad y divergencia. En el estudio del problema de flujo máximo (sección 2.2) se introduce el problema combinatorio dual de corte mínimo utilizado como herramienta de optimalidad. De hecho, estos dos problemas están fuertemente relacionados por el teorema flujo máximo-corte mínimo. Los conceptos y resultados del capítulo anterior juegan un papel de gran importancia en la solución de esta pareja de problemas duales; en particular, el teorema de la red coloreada proporciona una valiosa ayuda para el desarrollo de la teoría y del algoritmo de solución simultánea presentado en la sección 2.3.

Por otro lado, en la mayoría de los problemas de flujo se consideran restricciones para el flujo a través de un arco. Las restricciones más comunes consisten en el establecimiento de cotas inferior y superior para el flujo a través de un arco y en la restricción de la divergencia de los nodos a ciertos valores determinados. El problema de distribución factible, analizado en la sección 2.4, consiste en la determinación de flujos que satisfagan este tipo de restricciones.

En esta misma sección se establecen condiciones de existencia para tales flujos.

Finalmente se presentan dos algoritmos (secciones 2.4 y 2.5) que se basan en la comprobación de las condiciones de existencia; de nuevo, el teorema de la red coloreada y el lema de Minty se aplican en este análisis.



## 2.1 DEFINICIONES ELEMENTALES.

En el análisis de redes de flujo, la restricción más común es acotar el flujo a través de un arco; es decir, se exige que el valor del flujo esté en un intervalo cerrado no vacío  $C(j)$  llamado intervalo de capacidad para  $j$ . Un flujo  $x$  en la red  $G$  es factible con respecto a las capacidades si  $x(j) \in C(j)$ , para todo  $j \in A$ . Los intervalos de capacidad se denotarán.

$$C(j) = [c^-(j), c^+(j)],$$

en donde  $c^-(j)$  y  $c^+(j)$  son las capacidades inferior y superior respectivamente para el arco  $j$ . Las únicas restricciones que deben satisfacer  $c^-(j)$  y  $c^+(j)$  son:  $c^-(j) \leq c^+(j)$ ,  $c^+(j) > -\infty$ ,  $c^-(j) < \infty$ .

El establecimiento de estos intervalos de capacidad tienen como consecuencia indirecta algunos resultados importantes. Uno de ellos restringe el flujo que puede pasar a través de un corte. El flujo de  $x$  a través de  $Q$ , donde  $x$  es un flujo definido en la red  $G$  y  $Q$  es un corte de  $G$ , se define como la cantidad:

$$e_Q \cdot x = \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j)$$

Por otro lado, si  $Q = [S, N/S]$ , con  $S \subset N$ , se define la divergencia de  $x$  desde  $S$  mediante:

$$y(S) = \sum_{i \in S} y(i), \quad y = \text{div } x$$

Obsérvese que ésta es la cantidad de flujo que se origina en S. Las últimas cantidades definidas se relacionan por medio del principio fundamental de divergencia. Este principio se ilustra en la figura 2.1.

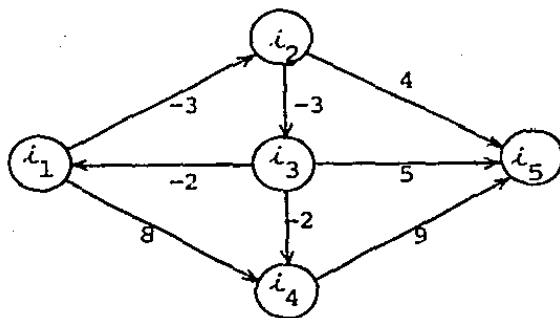


Figura 2.1

$i$	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$i_5$
$y(i)$	7	4	4	3	-18

Sea  $S = \{i_1, i_2, i_4\}$ , entonces

$$Q = \{(i_2, i_3), (i_2, i_5), (i_4, i_5), (i_3, i_1), (i_3, i_4)\}$$

En esta red puede observarse que:

$$\text{divergencia de } x \text{ desde } S = y(S) = 7 + 4 + 3 = 14$$

$$y \text{ flujo de } x \text{ a través de } Q = e_Q \cdot x = -3 + 4 + 9 - (-2) - (-2) = 14$$

Principio fundamental de divergencia. Sea  $x$  un flujo en la red  $G$  y sea el corte  $Q = [S, N/S]$ . Entonces:

$$y(S) = e_Q \cdot x, \quad \text{donde } y = \text{div } x.$$

Demostración. Usando las definiciones de  $y = \text{div } x$  y de  $e_Q$  se tiene:

$$\begin{aligned} y(S) &= \sum_{i \in S} y(i) = \sum_{i \in S} \left( \sum_{j \in A} e(i, j) x(j) \right) = \sum_{j \in A} \sum_{i \in S} e(i, j) x(j) = \\ &= \sum_{j \in Q^+} \sum_{i \in S} e(i, j) x(j) + \sum_{j \in Q^-} \sum_{i \in S} e(i, j) x(j) = \\ &= \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = e_Q \cdot x \end{aligned}$$

Debe observarse que la regla de divergencia total establecida en el primer capítulo:  $y(N) = 0$ , es un caso particular del principio de divergencia; en efecto, si  $S = N$  entonces  $Q = \phi$  y de aquí se concluye el resultado.

Conviene señalar que si se suman las restricciones de capacidad sobre los arcos de  $Q$ , se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} \sum_{j \in Q^+} c^-(j) &\leq \sum_{j \in Q^+} x(j) \leq \sum_{j \in Q^+} c^+(j), \\ - \sum_{j \in Q^-} c^+(j) &\leq - \sum_{j \in Q^-} x(j) \leq - \sum_{j \in Q^-} c^-(j), \end{aligned}$$

De donde

$$\sum_{j \in Q^+} c^-(j) - \sum_{j \in Q^-} c^+(j) \leq \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) \leq \sum_{j \in Q^+} c^+(j) - \sum_{j \in Q^-} c^-(j).$$

Los extremos de esta desigualdad, que se denotarán con  $c^-(Q)$  y  $c^+(Q)$  respectivamente, son las capacidades inferior y superior para el flujo a través del corte  $Q$  respectivamente. El intervalo de capacidad asociado con  $Q$  es entonces  $c(Q) = [c^-(Q), c^+(Q)]$ .

En base a estos conceptos se define el problema de flujo máximo en una red.

## 2.2 FLUJO MAXIMO EN UNA RED.

Considérese una red  $G$  con intervalos de capacidad y sean  $N^+$ ,  $N^- \subset N$  tales que  $N^+ \cap N^- = \emptyset$ . Sea  $x$  un flujo que se conserva en todos los nodos de  $N \setminus N^+ \cup N^-$ ; de aquí se concluye que:

$$0 = \sum_{i \in N} y(i) = \sum_{i \in N^+} y(i) + \sum_{i \in N^-} -y(i),$$

luego:

$$y(N^+) = -y(N^-)$$

Esta última cantidad recibe el nombre de flujo de  $x$  de  $N^+$  a  $N^-$ . El problema de flujo máximo queda definido de la siguiente manera:

Problema del flujo máximo. Maximizar el flujo de  $N^+$  a  $N^-$  ( $y(N^+)$ ) sobre todos los flujos  $x$  tales que  $y(i) = 0$ , para todo  $i \in N^+ \cup N^-$ , factibles con respecto a las capacidades.

Se supondrá la existencia de al menos un flujo que satisfaga todas las restricciones de capacidad y conservación (posteriormente se eliminará este supuesto). El supremo en el problema de flujo máximo es la mínima cota superior del conjunto de valores de flujo de  $N^+$  a  $N^-$  de todos los posibles flujos  $x$ . Si este supremo es finito entonces el flujo  $x$  que produzca este valor es la solución requerida del problema de flujo máximo.

El problema del flujo máximo puede ser formulado como problema de programación lineal de la siguiente manera:

$$\text{Max } z = \sum_{i \in N^+} \sum_{j \in A} e(i,j)x(j)$$

s.a

$$\sum_{j \in A} e(i,j)x(j) = 0, \quad i \in N^+ \cup N^- \quad (\text{restricciones de conservación})$$

$$c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j), \quad j \in A \quad (\text{restricciones de capacidad})$$

Para resolver este problema se introduce el concepto dual de corte mínimo que será utilizado como herramienta de optimalidad. Como se había mencionado en el capítulo anterior, todas las trayectorias de  $N^+$  a  $N^-$  utilizan algún arco de cualquier corte  $Q: N^+ \downarrow N^-$ ; de este modo los cortes constituyen "cuellos de botella" para el valor del flujo de  $N^+$  a  $N^-$ . Es decir:

Proposición. Sea  $x$  un flujo que satisface las restricciones del problema y sea  $Q: N^+ \downarrow N^-$  un corte que separa  $N^+$  de  $N^-$ ; entonces

$$[\text{flujo de } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] \leq c^+(Q).$$

Demostración. Puesto que  $Q$  es un corte que separa  $N^+$  de  $N^-$  entonces es de la forma  $[S, N/S]$ , con  $S \supset N^+$  y  $S \cap N^- = \emptyset$ . Además, como  $x$  se conserva en todos los nodos excepto los de  $N^+ \cup N^-$ , se tiene que  $y(i) = 0$  para  $i \in S \cap N^+$ ; por tanto  $y(N^+) = y(S)$ . Por otro lado, por el principio de divergencia, se cumple  $y(S) = e_Q \cdot x$  y esta última cantidad no puede exceder  $c^+(Q)$  de donde se concluye la afirmación. ■

En seguida se enuncia el problema de corte mínimo, problema dual del de flujo máximo.

Problema de corte mínimo. Minimizar  $c^+(Q)$  sobre todos los cortes  $Q: N^+ + N^-$ .

Obsérvese que un corolario de la proposición anterior es la desigualdad:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Supremo en problema de} \\ \text{flujo máximo} \end{array} \right] \leq \left[ \begin{array}{c} \text{Mínimo en problema de} \\ \text{corte mínimo} \end{array} \right]$$

La relación más importante entre los dos problemas es el hecho de que la igualdad se cumple en los óptimos. Para probar este resultado es necesario definir antes los conceptos de trayectoria aumentante de flujo y trayectoria de capacidad ilimitada.

Una trayectoria  $P: N^+ + N^-$  es aumentante para el flujo  $x$  si

$$x(j) < c^+(j), \forall j \in P^+ \text{ y } x(j) > c^-(j), \forall j \in P^-.$$

Claramente, el flujo  $x$  puede mejorarse a través de una trayectoria aumentante. En efecto, puede garantizarse la existencia de un número  $\alpha > 0$  tal que:

$$x'(j) = x(j) + \alpha e_p(j) = \begin{cases} x(j) + \alpha & , j \in P^+ \\ x(j) - \alpha & , j \in P^- \\ x(j) & , j \notin P. \end{cases}$$

Es importante notar que el flujo  $x'$  construido de esta manera cumple con todas las restricciones del problema para todos los valores de  $\alpha$  que cumplan

$$\alpha \leq c^+(j) - x(j) \quad , \quad \forall j \in P^+$$

$$\alpha \leq x(j) - c^-(j) \quad , \quad \forall j \in P^-$$

ya que con esto  $c^-(j) \leq x'(j) \leq c^+(j)$ ,  $\forall j \in A$ . Además:

$$\text{div } x' = \text{div } x + \alpha \text{ div } e_p \quad ,$$

en donde la función de divergencia  $\text{div } e_p$  es nula en todos los nodos de  $P$  excepto en el inicial y en el final. Este hecho implica que  $x'$  se conserva en todos los nodos fuera de  $N^+ \cup N^-$  y también que:

$$[\text{flujo de } x' \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = [\text{flujo de } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] + \alpha.$$

De aquí que  $x'$  sea mejor que  $x$ . Al valor máximo del número  $\alpha$  se le llama capacidad incremental de la trayectoria  $P$ . Se dice que una trayectoria  $P: N^+ \rightarrow N^-$  tiene capacidad ilimitada si su capacidad incremental no es finita; es decir, si:

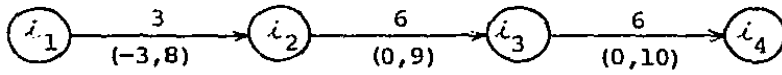
$$c^+(j) = +\infty, \forall j \in P^+ \quad \text{y} \quad c^-(j) = -\infty, \forall j \in P^-$$

En las figuras 2.2 (a,b y c) se muestran trayectorias aumentantes, con capacidades incrementales 3, 5 y 1 respectivamente, junto con los flujos "mejorados". En la figura 2.2(d) se muestra una trayectoria no aumentante; es decir, de capacidad incremental igual a 0.

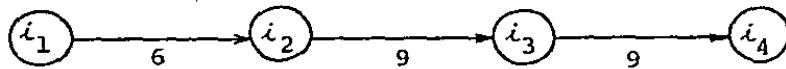


En las siguientes trayectorias la pareja asociada a cada arco es  $(c^-(j), c^+(j))$  y el número asociado es  $x(j)$ .

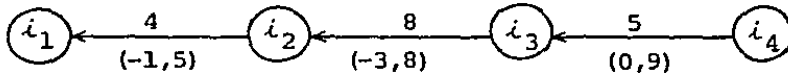
(a) Flujo inicial:



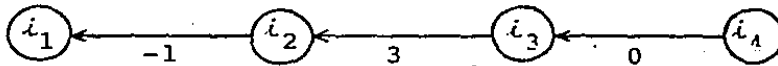
Flujo actualizado:



(b) Flujo inicial



Flujo actualizado:



(c) Flujo inicial



Flujo Actualizado:



(d) Flujo inicial

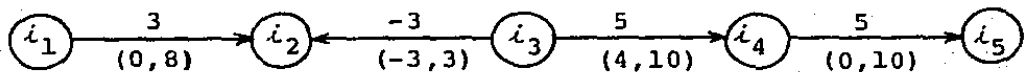


Figura 2.2

Teorema de Flujo máximo - Corte mínimo. (Ford y Fulkerson).

Supóngase que existe al menos un flujo  $x$  que satisface todas las restricciones del problema. Entonces:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Supremo en problema} \\ \text{de flujo máximo} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Mínimo en problema} \\ \text{de corte mínimo} \end{array} \right]$$

(Cabe señalar que si existe una trayectoria de capacidad ilimitada, entonces ambos problemas tienen valor  $+\infty$ ; en caso contrario los valores de ambos, iguales, son finitos y el problema de flujo máximo tiene por tanto solución).

Demostración. La demostración de este teorema es constructiva por lo cual constituye un algoritmo para resolver ambos problemas. En vista del resultado que afirma que el supremo en el problema del flujo máximo es menor o igual que el mínimo en el problema del corte mínimo, basta exhibir un flujo  $x$  y un corte  $Q$  tales que:

$$[\text{flujo de } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = c^+(Q).$$

Para ello, considérese cualquier flujo  $x$  en la red  $R$  que se conserva en todos los nodos fuera de  $N^+ \cup N^-$  y constrúyase un corte  $Q$  aplicando el siguiente procedimiento:

- (i) Sea  $S = N^+$
- (ii) Si  $i \in N^+$ ,  $j = (i, i') \in A$  y  $x(j) < c^+(j)$  o

$$j \sim (i', i) \in A \text{ y } x(j) > c^-(j),$$

actualícese  $S = N^+ \cup \{i'\}$

Repítase (ii) hasta que no sea posible agregar nodos a S. Es importante señalar que los nodos de S son aquéllos a los cuales aún puede enviarse flujo. Pueden presentarse entonces dos casos: o bien  $S \cap N^- \neq \emptyset$  o bien  $S \cap N^- = \emptyset$ .

Caso 1. Si  $S \cap N^- \neq \emptyset$  entonces aún puede enviarse flujo de  $N^+$  a  $N^-$ ; es decir, dada la construcción de S, existe una trayectoria  $P: N^+ \rightarrow N^-$  tal que  $x(j) < c^+(j)$ ,  $\forall j \in P^+$ , y  $x(j) > c^-(j)$ ,  $\forall j \in P^-$ . De aquí se concluye que P es una trayectoria incremente para el flujo x. Sea  $\alpha$  la capacidad incremental de P y redefínase x como sigue:

$$x(j) = \begin{cases} x(j) + \alpha & , \text{ si } j \in P^+ \\ x(j) - \alpha & , \text{ si } j \in P^- \\ x(j) & \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Constrúyase de nuevo el conjunto S con procedimiento (i), (ii) utilizando este flujo mejor.

Caso 2. Si  $S \cap N^- = \emptyset$  entonces  $Q = [S, N/S]$  es un corte de R. Por construcción se tiene que  $x(j) = c^+(j)$ , para todo  $j \in Q^+$  y  $x(j) = c^-(j)$ , para todo  $j \in Q^-$ ; entonces, puesto que  $S \cap N^- = \emptyset$ ,

$$[\text{flujo de } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = y(N^+) = y(S) = e_Q \cdot x =$$

$$= \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = \sum_{j \in Q^+} c^+(j) - \sum_{j \in Q^-} c^-(j) = c^+(Q).$$

En este caso (ii) se tiene que  $x$  es flujo máximo y  $Q$  es corte mínimo. Este procedimiento es finito bajo ciertas condiciones que serán discutidas posteriormente a la descripción del algoritmo de Ford y Fulkerson. ■

### 2.3 ALGORITMO DE FLUJO MAXIMO.

Una de las conclusiones que pueden obtenerse del teorema de flujo máximo - corte mínimo es que ambos problemas pueden ser resueltos simultáneamente; de hecho la demostración constructiva de tal teorema es un algoritmo que determina el flujo máximo y el corte mínimo. Debe recordarse que, puesto que es estos problemas son duales, a partir de la solución de uno puede obtenerse la del otro.

Durante el algoritmo que se describe en esta sección se construye un flujo  $x$ , que satisface todas las restricciones del problema, y un corte  $Q: N^+ \rightarrow N^-$  tales que:

$$[\text{flujo de } x \text{ a través de } Q] = c^+(Q), \text{ con } c^+(Q) \text{ finito;}$$

en este caso  $x$  es la solución al problema de flujo máximo y  $Q$  es el corte mínimo.

Para construir tal flujo se comienza con cualquiera que cumpla las restricciones y en cada iteración se buscará enviar más flujo de  $N^+$  a  $N^-$  a través de trayectorias aumentantes de flujo hasta que esto no sea posible.

Obsérvese que si existe una trayectoria aumentante para el flujo  $x$  de capacidad ilimitada, el valor máximo de  $x$  no es finito y por tanto el supremo en el problema de flujo máximo es  $+\infty$ .

Por otro lado, el criterio de terminación se establece mediante la existencia de un corte  $Q$  con las características mencionadas antes.

Para la determinación de las trayectorias aumentantes y del corte  $Q$  se utiliza el algoritmo de coloración presentado en el capítulo anterior. A continuación se describe detalladamente el algoritmo cuya justificación de optimalidad queda dada por el teorema de flujo máximo - corte mínimo.

## ALGORITMO DE FORD Y FULKERSON

Propósito: Determinar el flujo máximo de  $N^+$  a  $N^-$  en una red  $G$  en la cual no existen trayectorias de capacidad ilimitada.

### Descripción

Paso 1. Determinar  $x$ , un flujo que satisfaga todas las restricciones del problema.

Paso 2. Colorear los arcos de  $G$  de acuerdo a:

verde	si	$c^-(j) < x(j) < c^+(j)$
blanco	si	$c^-(j) = x(j) < c^+(j)$
negro	si	$c^-(j) < x(j) = c^+(j)$
rojo	si	$c^-(j) = x(j) = c^+(j)$

Paso 3. Utilizar el algoritmo de enrutamiento para determinar una trayectoria compatible con la coloración (i.e, una trayectoria aumentante para  $x$ ).

- Si se determina la trayectoria  $P: N^+ \rightarrow N^-$  compatible con la coloración, calcular

$$\alpha = \text{Min} \begin{cases} c^+(j) - x(j) , j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j) , j \in P^- \end{cases}$$

Hacer  $x = x + \alpha e_p$  y regresar a 2.

- Si se determina un corte  $Q: N^+ + N^-$  compatible con la coloración; terminar con el flujo máximo  $x$  y el corte mínimo  $Q$  ya que este último satisface  $c^+(j) = x(j)$ ,  $j \in Q^+$  y  $c^-(j) = x(j)$ ,  $j \in Q^-$  y por tanto

$$[\text{flujo de } x \text{ a través de } Q] = \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = c^+(Q).$$



### Justificación de convergencia del algoritmo.

Supóngase que las capacidades de los arcos  $c^+(j)$ ,  $c^-(j)$  y los valores de flujo inicial  $x(j)$  son conmensurables; es decir, es tos números son múltiplos de cierta cantidad  $q$ . En particular, capacidades y flujos enteros son conmensurable con  $q = 1$ . De esta condición de conmensurabilidad se concluye que los números  $\alpha$  y  $x'(j)$  calculados durante el algoritmo, son también múltiplos de la cantidad  $q$ . De aquí que, en cada iteración, el flujo de  $N^+$  a  $N^-$  se incrementa al menos en la cantidad positiva  $q$  y por tanto se realiza un número finito de iteraciones si no existen trayectorias de capacidad ilimitada. Sin esta condición existe el peligro de que el algoritmo no converja; más aún, podría ser incluso que sí converja pero que proporcione una solución errada como se ve en el ejemplo 3. ■

### Discriminación de arcos.

La condición de conmensurabilidad puede eliminarse si el algoritmo de Ford y Fulkerson se utiliza con una pequeña modificación llamada criterio de discriminación de arcos. Este cambio consiste en utilizar, siempre que sea posible, arcos verdes durante la rutina de enrutamiento. Cuando se utiliza trayectorias de arcos verdes, el flujo "mejorado" alcanzará la cota superior o la inferior para al menos un arco, el correspondiente al valor de  $\alpha$ . De este modo, para la siguiente iteración, al

menos un arco se vuelve blanco o negro mientras que los que tenían estos colores no se alteran. Con este argumento puede concluirse que después de un número finito de iteraciones, no existen trayectorias aumentantes con todos los arcos verdes por lo que para continuar con el proceso de aumento de flujo (si esto es posible) deberá recurrirse a los arcos blancos o negros. En tal momento hay un conjunto  $S$  correspondiente a un corte  $Q$  que no contiene arcos verdes; es decir, todo arco  $j$  de  $Q$  satisface  $x(j) = c^+(j)$  o  $x(j) = c^-(j)$  o ambas condiciones. De aquí que, la suma

$$\begin{aligned} \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) &= [\text{flujo de } x \text{ a través de } Q] = \\ &= [\text{flujo de } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^-], \end{aligned}$$

tiene todos sus términos iguales a  $\pm c^+(j)$  o a  $\pm c^-(j)$ . Puesto que hay un número finito de arcos, existe un número finito de sumas de esta forma y por tanto existe un número finito de valores posibles para el flujo de  $N^+$  a  $N^-$ . Ninguno de estos valores se repite durante la aplicación del algoritmo, ya que el flujo se incrementa en cada iteración.

Puede concluirse entonces, que el algoritmo converge en cualquier caso si se utiliza el criterio de discriminación de arcos.

### EJEMPLO 1.

Considérese la primera red de la figura 2.3. Determinese el flujo máximo de  $s$  a  $s'$ . Los números asociados a cada arco son sus cotas inferior y superior respectivamente.

Iteración 1.  $N^+ = \{s\}$ ,  $N^- = \{s'\}$ . Se define como flujo factible inicial el mostrado en la segunda red de la figura 2.3. De acuerdo con la coloración correspondiente (tercera red de la figura 2.3) se determina la trayectoria compatible  $P: s + i_1 + i_3 + i_5 + s'$  produciendo un valor de  $\alpha$  igual a 5. El flujo actualizado se muestra en la cuarta red de la figura 2.3.

Iteración 2. De nuevo se colorea la red (quinta red de la figura 2.3) y se obtiene la trayectoria compatible  $P: s + i_1 + i_2 + i_4 + i_7 + s'$  con un valor de  $\alpha$  igual a 1. El flujo resultante se muestra en la sexta red de la figura 2.3.

Iteración 3. Dada la coloración correspondiente (séptima red de la figura 2.3) se obtiene el corte  $Q: N^+ + N^-$  asociado a  $S = \{s\}$ . Por tanto el flujo definido en la sexta red es el máximo.

Obsérvese:

$$[\text{flujo de } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = 10$$

y

$$[\text{flujo de } x \text{ a través de } Q] = 10$$

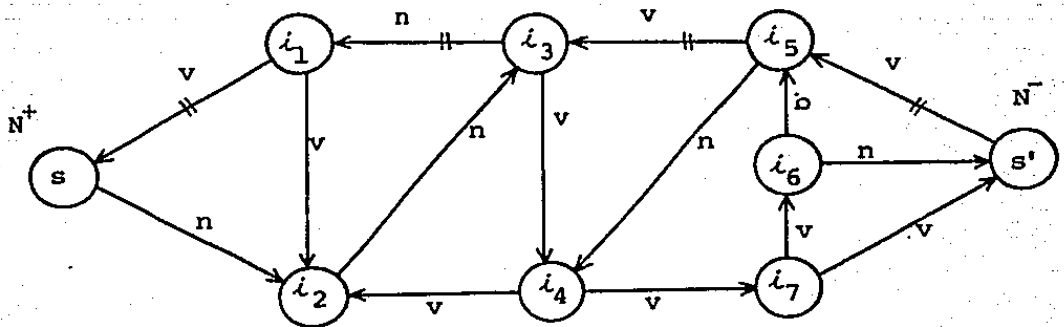
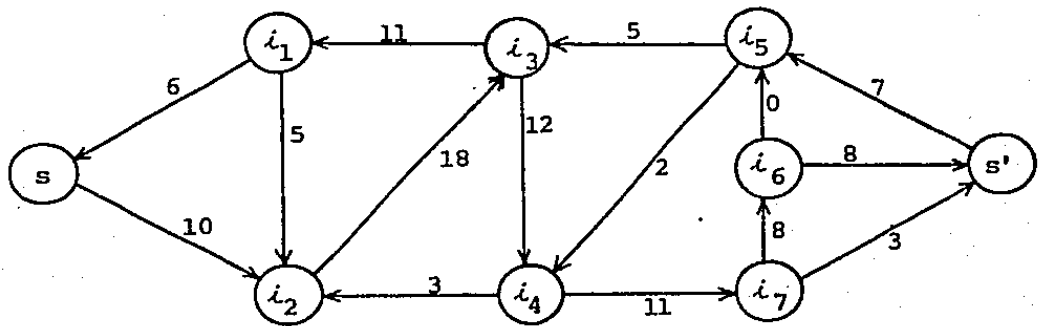
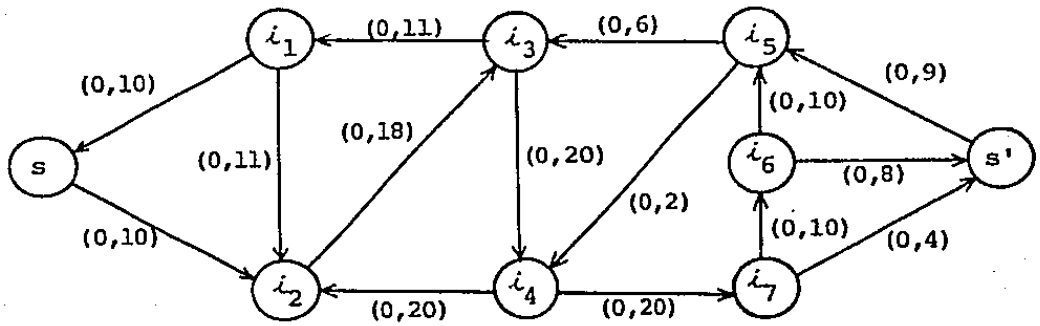


Figura 2.3

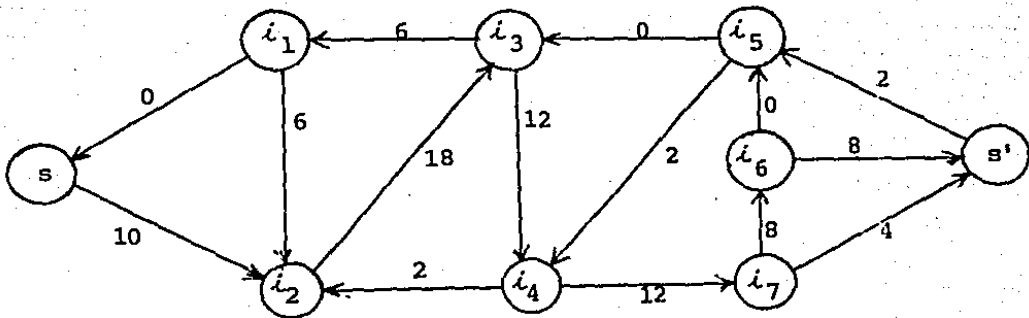
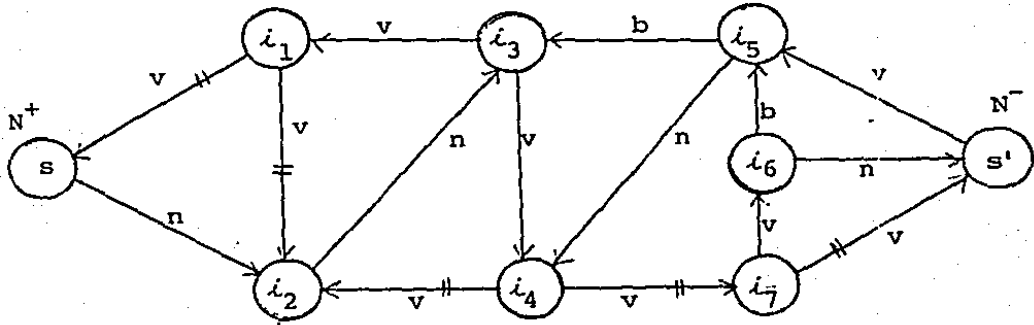
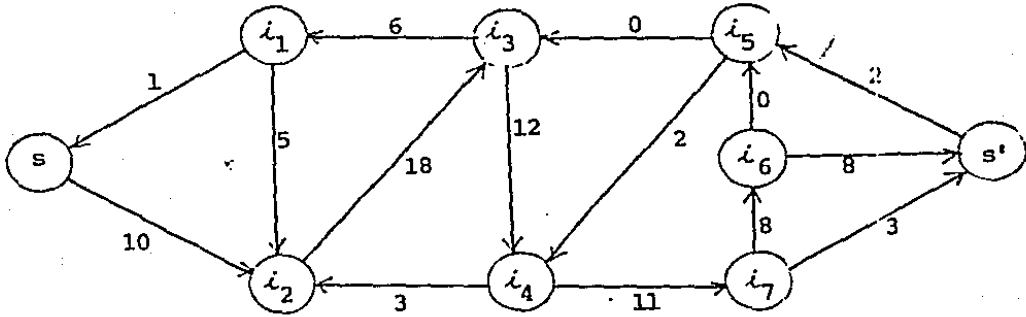


Figura 2.3 (cont).

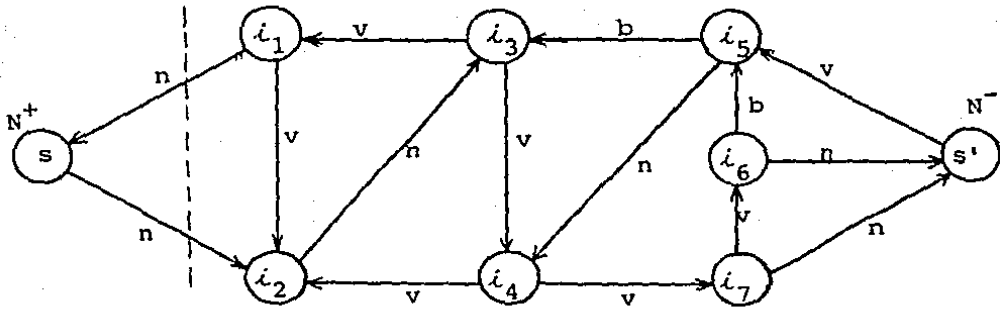


Figura 2.3 (cont.)

## EJEMPLO 2.

Determinése el flujo máximo de  $N^+ = \{i_1, i_2, i_3\}$  a  $N^- = \{i_{10}, i_{11}, i_{12}\}$  en la red mostrada en la figura 2.4(a).

Iteraciones 1, 2 y 3. Se inicia con el flujo factible correspondiente a cero a través de todos los arcos. De acuerdo con la coloración definida por este flujo (figura 2.4(b)) se determinan las trayectorias compatibles  $P_1: i_1 + i_4 + i_7 + i_{10}$ ,  $P_2: i_2 + i_5 + i_8 + i_{11}$ ,  $P_3: i_3 + i_6 + i_9 + i_{12}$ .

Para éstas se tiene:

$$\alpha = \text{Min} \{5, 4, 1\} = 1$$

$$\alpha = \text{Min} \{2, 6, 1\} = 1$$

$$\alpha = \text{Min} \{9, 1, 8\} = 1$$

respectivamente. El flujo resultante se muestra en la figura 2.4(c).

Iteración 4. La coloración correspondiente es la de la figura 2.4(d); compatible con ésta se tiene la trayectoria  $P: i_2 + i_5 + i_8 + i_9 + i_{12}$ ; para la cual

$$\alpha = \text{Min} \{1, 5, \infty, 7\} = 1$$

Resultando el flujo de la figura 2.4(e).

Iteración 5. Compatible con la coloración definida (figura 2.4(f)) se determina la trayectoria  $P: i_1 + i_4 + i_7 + i_8 + i_9 + i_{12}$  para la cual

$$\alpha = \min \{4, 3, \infty, \infty, 6\} = 3,$$

resultando el flujo definido en la figura 2.4(g)

Iteración 6. Compatible con la coloración correspondiente (figura 2.4(h)) se tiene la trayectoria  $P: i_3 + i_6 + i_5 + i_8 + i_9 + i_{12}$  para la cual

$$\alpha = \min \{8, 2, 4, \infty, 3\} = 2$$

resultando el flujo de la figura 2.4(i).

Iteración 7. Para este flujo modificado se tiene la coloración mostrada en la figura 2.4(j). Con ella se determina el corte compatible  $Q: N^+ + N^-$  asociado a  $S = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_6\}$ . Por lo tanto el flujo definido en la figura 2.4(i) es máximo.

Por último obsérvese que:

$$[\text{flujo de } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = 4 - (-2) + 3 = 9$$

y

$$[\text{flujo se } x \text{ a través de } Q] = 5 - (0 - 2 - 2) = 9.$$



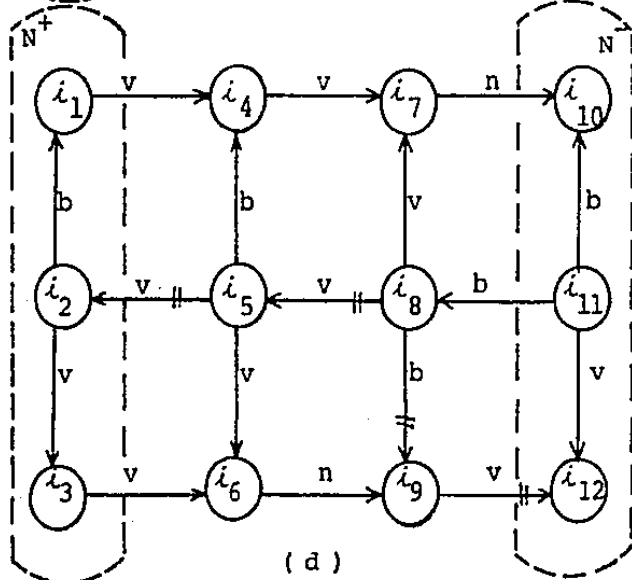
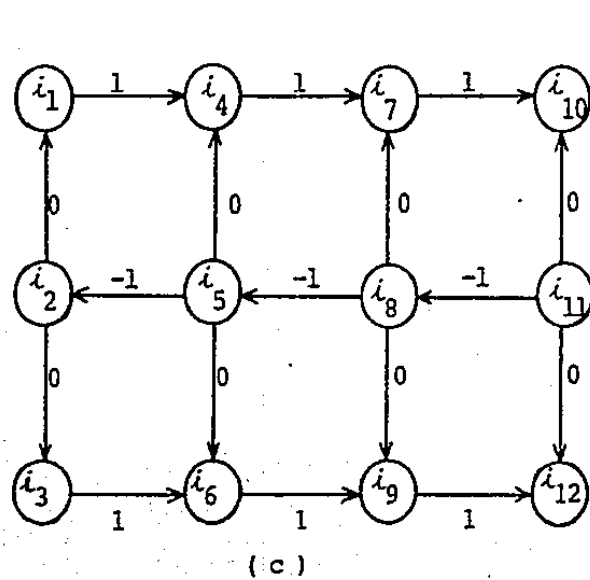
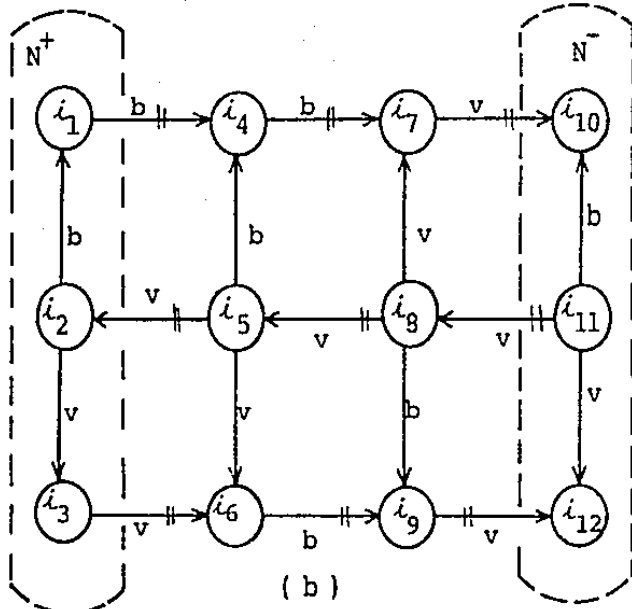
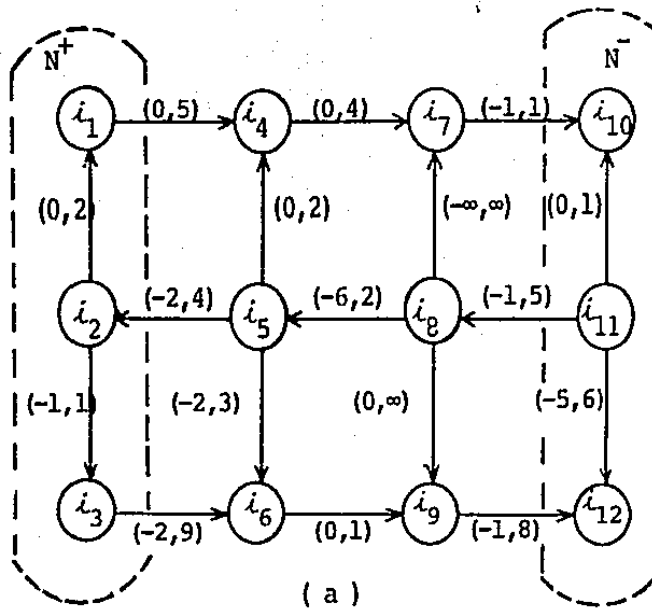


Figura 2.4

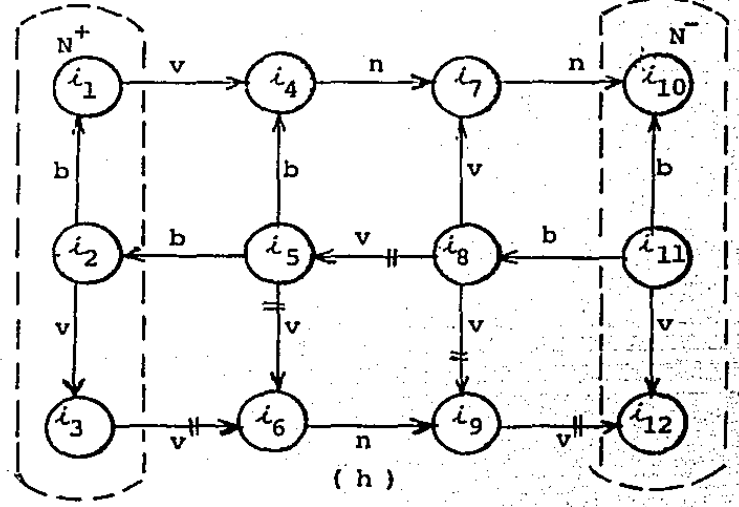
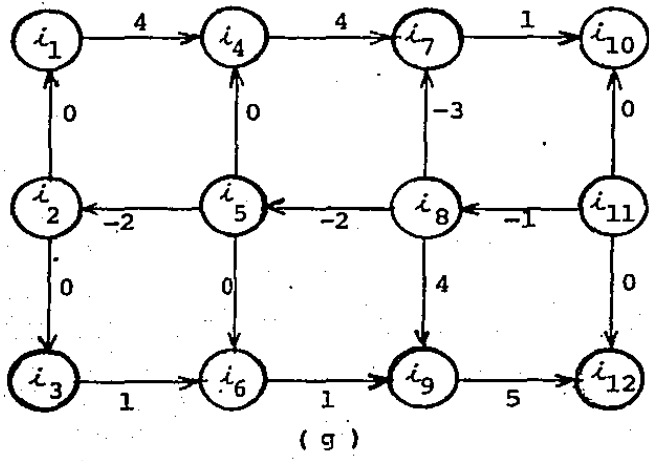
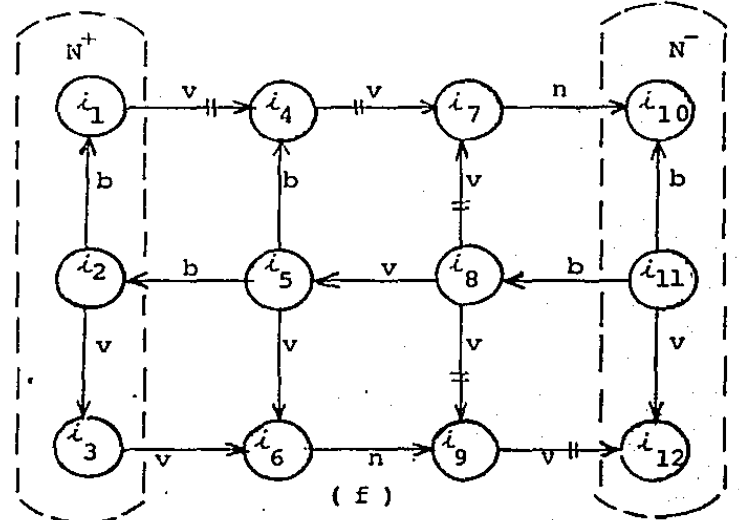
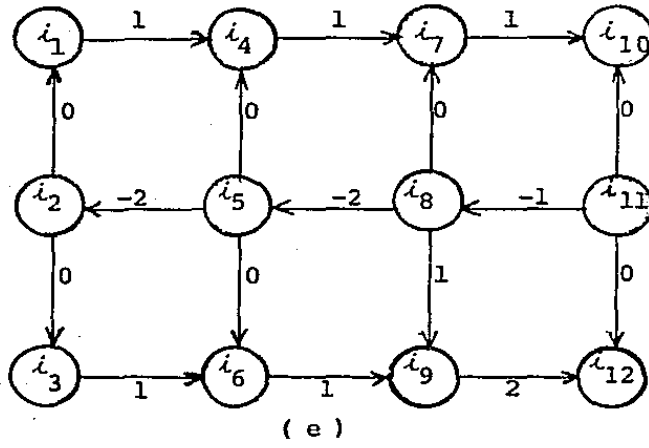
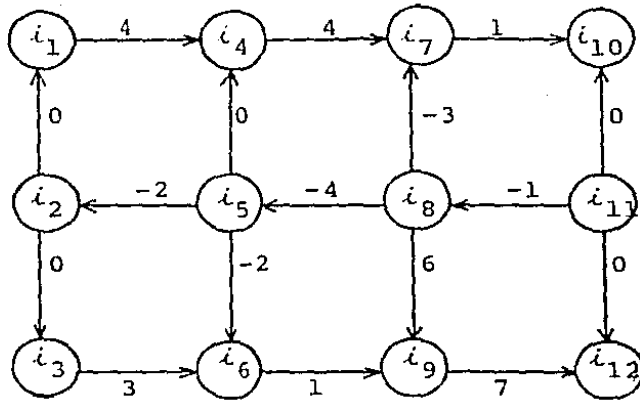
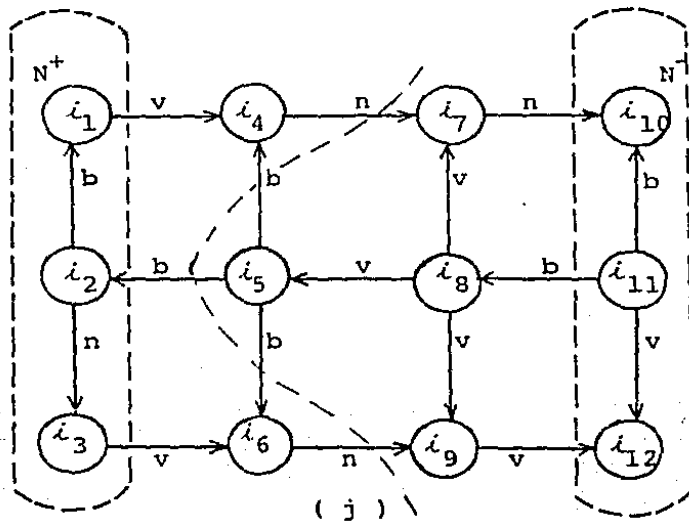


Figura 2.4 (cont.)



(i)



(j)

Figura 2.4 (cont.)

### EJEMPLO 3.

Pruébese que el algoritmo de Ford y Fulkerson no funciona al aplicarlo a la red  $G$  de la figura 2.5 si no se utiliza el criterio de discriminación de arcos. Todos los arcos de esta red tienen intervalos de capacidad  $(-\infty, \infty)$  excepto los arcos  $j_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . En estos cuatro arcos la cota inferior para el flujo es  $-\infty$  y las cotas superiores son  $1$ ,  $r$ ,  $r^2$  y  $r^2$  respectivamente, donde  $r = (-1 + \sqrt{5})/2$ . (Este número tiene las propiedades  $0 < r < 1$  y  $r^k - r^{k+1} = r^{k+2}$  para toda  $k$ ).

Primeramente obsérvese que el supremo para el problema de flujo máximo de  $N^+ = \{s\}$  a  $N^- = \{s'\}$  en esta red es  $\infty$  puesto que existen trayectorias de capacidad ilimitada; una de ellas es  $s \rightarrow u_1 \rightarrow a \rightarrow v_1 \rightarrow s'$ . Para verificar que el algoritmo conduce a un resultado erróneo se aplicará éste a la red  $G$ .

Iteración 1. Iníciase el algoritmo con flujo factible igual a cero a través de todos los arcos. Se determina la trayectoria aumentante de flujo  $s \rightarrow u_1 \rightarrow v_1 \rightarrow s'$ , que utiliza el arco  $j_1$  positivamente, de capacidad incremental igual a 1. Si se envía una unidad de flujo a través de esta trayectoria las capacidades incrementales de los arcos  $j_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  (es decir, las cantidades de flujo que aún pueden incrementarse) son  $0$ ,  $r$ ,  $r^2$  y  $r^2$  respectivamente. En este momento el valor del flujo de  $N^+$  a  $N^-$  es igual a 1.

Iteración 2. Para este nuevo flujo se determina la trayectoria aumentante  $s \rightarrow u_2 \rightarrow v_2 \rightarrow a \leftarrow u_3 \rightarrow v_3 \rightarrow s'$ , que utiliza los arcos  $j_2$  y  $j_3$  positivamente, con capacidad incremental igual a:

$$\text{Min } \{\infty, r, \infty, \infty, r^2, \infty\} = r^2$$

Si se envían  $r^2$  unidades de flujo a través de tal trayectoria las capacidades incrementales de los arcos  $j_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , son respectivamente:

$$0, r - r^2 = r^3, r^2 - r^2 = 0 \text{ y } r^2.$$

En este momento el valor del flujo de  $N^+$  a  $N^-$  es igual a  $1+r^2$ .

Iteración 3. Se determina la trayectoria aumentante  $s \rightarrow u_2 \rightarrow v_2 \rightarrow a \leftarrow v_1 \leftarrow u_1 \rightarrow b \leftarrow v_3 \rightarrow u_3 \rightarrow b \leftarrow v_4 \rightarrow s'$  (que utiliza el arco  $j_2$  recorrido positivamente y los arcos  $j_1$  y  $j_3$  negativamente) de capacidad incremental:

$$\text{Min } \{\infty, r^3, \infty, \infty, 1, \infty, \infty, r^2, \infty, \infty, \infty\} = r^3$$

Se envían  $r^3$  unidades de flujo a través de la trayectoria; las capacidades incrementales de  $j_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  se reducen a:

$$0 + r^3 = r^3, r^3 - r^3 = 0, 0 + r^3 = r^3, r^2$$

El valor del flujo de  $N^+$  a  $N^-$  es  $1 + r^2 + r^3$ .

Iteraciones 4 y 5. Nótese que en este momento se tiene una situación análoga a la del inicio de la iteración 2. En efecto dos arcos tienen capacidad incremental igual ( $r^3$ ), uno tiene capacidad incremental  $r^2$  y otro tiene capacidad incremental 0. En la iteración 4 se determina una trayectoria aumentante que utiliza positivamente un arco de capacidad incremental  $r^3$  y el de capacidad incremental  $r^2$ ; esta trayectoria tiene entonces una capacidad incremental igual a  $r^3$ , por lo que al enviar esta cantidad de flujo, las capacidades incrementales de  $j_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  se reducen a:

$$r^3, 0, r^3 - r^3 = 0, r^2 - r^3 = r^4$$

En la iteración 5 se determina una trayectoria aumentante (análoga a la de la iteración 3) que utiliza negativamente los arcos de capacidad incremental igual a 0 y positivamente el de capacidad incremental  $r^4$ . Esta trayectoria tiene capacidad incremental igual a  $r^4$ , por lo cual al enviar esta cantidad de flujo a través de ella la capacidad incremental de  $j_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  se reduce a:

$$r^3, 0 + r^4 = r^4, 0 + r^4 = r^4, r^4 - r^4 = 0$$

En este momento el valor del flujo de  $N^+$  a  $N^-$  es  $1 + r^2 + r^3 + r^3 + r^4$ . Obsérvese que se presenta de nuevo la misma situación que al inicio de las iteraciones 2 y 4.

Si se repite este modo de proceder, se hace lo siguiente:

Iteración 2k. Al inicio de esta iteración las capacidades incrementales de los arcos  $j_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) son  $0, r^k, r^{k+1}, r^{k+1}$ . Supóngase sin pérdida de generalidad que estas capacidades incrementales se presentan en este orden. Durante esta iteración se determina la trayectoria aumentante  $s \rightarrow u_2 \rightarrow v_2 \rightarrow a \rightarrow u_3 \rightarrow v_3 \rightarrow s'$  (que usa  $j_2$  y  $j_3$  positivamente) de capacidad incremental:

$$\text{Min } \{\infty, r^k, \infty, \infty, r^{k+1}, \infty\} = r^{k+1}.$$

Si se envía esta cantidad de flujo a través de la trayectoria las capacidades incrementales de  $j_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) se reducen a:

$$0, r^k - r^{k+1} = r^{k+2}, r^{k+1} - r^{k+1} = 0 \text{ y } r^{k+1}.$$

Iteración 2k + 1. Se determina la trayectoria aumentante  $s \rightarrow u_2 \rightarrow v_2 \rightarrow a \rightarrow v_1 \rightarrow u_1 \rightarrow b \rightarrow v_3 \rightarrow u_3 \rightarrow b \rightarrow v_4 \rightarrow s'$  (que usa  $j_2$  positivamente y  $j_1, j_3$  negativamente) de capacidad incremental

$$\text{Min } \{\infty, r^{k+2}, \infty, \infty, 1, \infty, \infty, r^{k+1}, \infty, \infty, \infty\} = r^{k+2}$$

Si se envía esta cantidad de flujo a través de tal trayectoria, las capacidades incrementales de  $j_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) se reducen a

$$0 + r^{k+2} = r^{k+2}, r^{k+2} - r^{k+2} = 0, 0 + r^{k+2} = r^{k+2}, r^{k+1}$$

De nuevo se presenta la misma situación que en el inicio de la iteración 2k.

Es importante señalar, que este procedimiento no es finito pues to que la misma situación se presenta cada dos iteraciones. Por otro lado el valor del flujo de  $N^+$  a  $N^-$  que se obtiene es:

$$\begin{aligned}
 & 1 + (r^2 + r^3) + (r^3 + r^4) + \dots + (r^{k+1} + r^{k+2}) + \dots = \\
 = & 1 + r^2 + \sum_{i=3}^{\infty} 2 r^i = 1 + r^2 + 2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} r^i - (1+r+r^2) \right) = \\
 = & \frac{2}{1-r} - 1 - r^2 - 2r,
 \end{aligned}$$

que es un valor finito. Esto no constituye el supremo para el problema del flujo máximo en esta red que es  $\infty$  como se comentó al inicio del ejemplo.

Obsérvese que si se utiliza el criterio de discriminación de ar cos, se determina una trayectoria de capacidad infinita después de un número finito de pasos. Con tal criterio se obtiene entonces la solución correcta del problema.



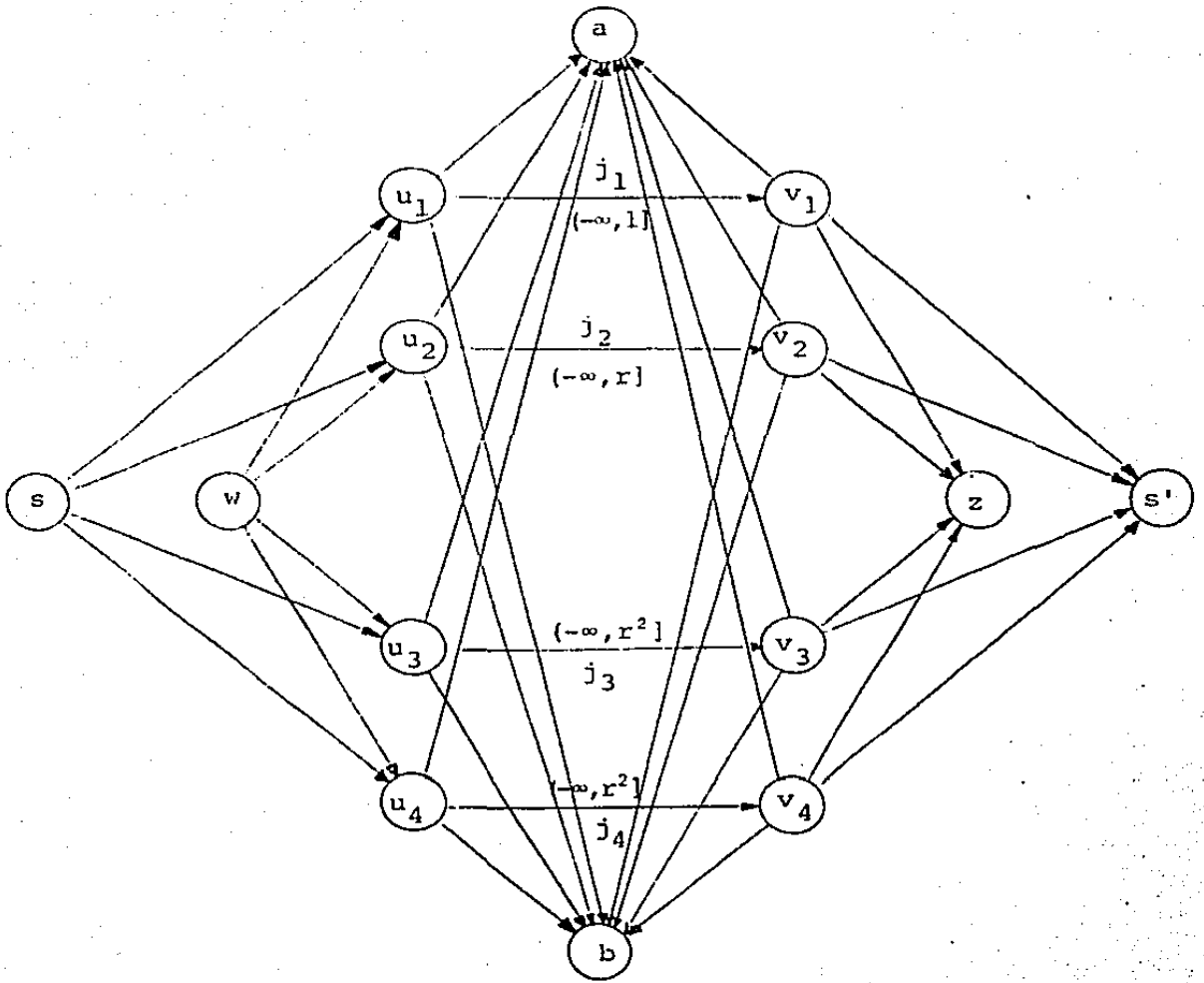


Figura 2.5

## 2.4 EL PROBLEMA DE FACTIBILIDAD DE FLUJO.

El algoritmo de flujo máximo requiere inicialmente un flujo factible en la red; es decir, un flujo que satisfaga las restricciones de capacidad y conservación en arcos y nodos respectivamente.

Este flujo factible no siempre existe por lo cual deben establecerse condiciones necesarias para garantizar su existencia. En esta sección se presenta un algoritmo que verifica si estas condiciones son satisfechas en cuyo caso construye el flujo factible.

Problema de distribución factible. Sean los intervalos de capacidad  $C(j) = [c^-(j), c^+(j)]$ , para todo arco  $j$  y sean valores de oferta  $b(i)$  para todo nodo  $i$ . Se desea determinar un flujo  $x$  tal que:

$$c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j) \quad , \quad j \in A$$

$$y(i) = b(i) \quad , \quad i \in N \quad (y = \text{div} x)$$

La función  $b$  recibe el nombre de función de oferta, entendiéndose como demanda una oferta negativa. En el caso particular en que  $b = 0$ , el problema recibe el nombre de problema de circulación factible.

Nótese que, dado el principio de divergencia total, una condi-

ESTA COPIA NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

ción necesaria para que exista solución al problema de distribución factible es que  $b(N) = 0$ . De hecho, esta última condición exige que la oferta total sea igual a la demanda total.

El problema puede ser más general si en vez de considerar un cierto valor para la divergencia, se permite que esta última pueda tomar valores en un determinado intervalo llamado intervalo de oferta. El problema general se formula:

Problema del flujo factible. Determinar un flujo  $x$  tal que:

$$\begin{aligned} x(j) &\in C(j) \quad , \quad j \in A, \\ y(i) &\in C(i) \quad , \quad i \in N, \end{aligned}$$

en donde  $C(j)$  es el intervalo de capacidad para el arco  $j$  y  $C(i)$  es el intervalo de oferta para el nodo  $i$ .

Puede verificarse fácilmente que estos tres problemas, distribución factible, circulación factible y flujo factible son equivalentes.

Las condiciones que garantizan la existencia de solución para el problema de distribución factible se establecen en el siguiente teorema. De nuevo, la demostración constructiva de éste proporciona un algoritmo de solución (o de detección de la no existencia de solución). Denótese con  $b(S)$  a la cantidad total de oferta del subconjunto de vértices  $S$ ; es decir:

$$b(S) = \sum_{i \in S} b(i)$$

Teorema de distribución factible. (Gale y Hoffman). El problema de distribución factible tiene solución si y sólo si  $b(N) = 0$  y  $b(S) \leq c^+(Q)$ , para todo corte  $Q = [S, N/S]$  con  $SCN$ .

Demostración.

Condición necesaria. La condición  $b(N) = 0$  debe cumplirse como se estableció en la formulación del problema. Por otro lado, según el principio de divergencia, si  $SCN$  y  $Q = [S, N/S]$ ,

$$b(S) = [\text{divergencia de } x \text{ desde } S] = [\text{flujo de } x \text{ a través de } Q]$$

si  $\text{div } x = b$ . Puesto que  $x$  debe ser un flujo factible con respecto a las capacidades de los arcos, se tiene que:

$$b(S) \in c(Q) = [c^-(Q), c^+(Q)];$$

en particular  $b(S) \leq c^+(Q)$

Condición suficiente. La condición suficiente queda probada por medio del algoritmo de distribución factible, que será descrito enseguida, junto con su justificación. ■

Algoritmo de distribución factible.

Para resolver el problema de distribución factible se utilizará un algoritmo llamado de distribución factible el cual de hecho constituye la demostración constructiva del teorema de distribución factible. Este algoritmo se inicia con un flujo que satisface las restricciones de capacidad sobre los arcos pero que posiblemente no satisface las condiciones de oferta en los nodos; es decir, pueden existir nodos  $i$  tales que  $b(i) \neq y(i)$ . Después se construye un flujo que "rompe menos" las restricciones de divergencia en el sentido de que la diferencia entre la oferta y la divergencia del nodo  $i$  se hace menor en cada iteración. Con este propósito se resuelve un problema de flujo máximo considerando como orígenes a los nodos tales que  $b(i) > y(i)$  (conjunto  $N^+$ ) y como destinos a los nodos tales que  $b(i) < y(i)$  (conjunto  $N^-$ ). Cabe señalar que las restricciones de capacidad sobre los arcos se respetan durante la ejecución del algoritmo. El algoritmo termina cuando  $N^+ = N^- = \phi$ , puesto que en este caso todas las restricciones son satisfechas, o cuando se detecte un corte  $Q$  compatible con la coloración definida; en este último caso se concluye la no existencia de solución al problema.

A continuación se describe detalladamente el algoritmo.

## ALGORITMO DE DISTRIBUCION FACTIBLE

Propósito. Resolver el problema de distribución factible.

### Descripción

Paso 1. Determinar un flujo factible  $x$  con respecto a las capacidades de los arcos.

Paso 2. Sean  $N^+ = \{i \in N \mid b(i) > y(i)\}$ ,  $N^- = \{i \in N \mid b(i) < y(i)\}$

- Si  $N^+ = N^- = \emptyset$ , entonces el flujo  $x$  es la solución deseada, Terminar.
- Si  $N^+ \neq \emptyset$  y  $N^- \neq \emptyset$ , colorear los arcos de la red de la siguiente manera:

verde si  $c^-(j) < x(j) < c^+(j)$

blanco si  $c^-(j) = x(j) < c^+(j)$

negro si  $c^-(j) < x(j) = c^+(j)$

rojo si  $c^-(j) = x(j) = c^+(j)$

ir a 3.

Paso 3. Aplicar el algoritmo de enrutamiento a la red.

- Si se determina una trayectoria  $P: N^+ \rightarrow N^-$  compatible con la coloración, calcular

$$\alpha = \text{Min} \begin{cases} c^+(j) - x(j) & , \quad j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j) & , \quad j \in P^- \\ b(i) - y(i) & , \quad i \text{ nodo inicial de } P \\ y(i) - b(i) & , \quad i \text{ nodo terminar de } P. \end{cases}$$

Hacer  $x = x + \alpha e_p$  y regresar a 2

- Si se determina un corte  $Q = [S, N/S]$  compatible con la coloración terminar, ya que en este caso no existe solución al problema.

Justificación del algoritmo. Si el algoritmo termina con un corte  $Q: N^+ \rightarrow N^-$  compatible con la coloración definida y corresponde al conjunto de vértices  $S$ , con  $N^+ \cap S$  y  $N^- \cap S = \emptyset$ , entonces:

$$\begin{aligned} c^+(Q) &= [\text{flujo a través de } Q] = [\text{divergencia de } x \text{ desde } S] = \\ &= y(S) = b(S) - [b(S) - y(S)] = \\ &= b(S) - [b(N^+) - y(N^+)] < b(S) \end{aligned}$$

ya que  $b(i) - y(i) = 0$ , para  $i \in S/N^+$  y  
 $b(i) - y(i) > 0$ , para  $i \in N^+ \setminus \emptyset$ .

Por tanto se concluye que el problema no tiene solución factible.

Por otro lado, si durante el algoritmo se determina una trayectoria  $P: N^+ \rightarrow N^-$  compatible con la coloración definida, entonces  $c^+(j) - x(j) \geq 0$ , para todo  $j \in P^+$   
 $x(j) - c^-(j) \geq 0$ , para todo  $j \in P^-$ .

Además, dada la definición de los conjuntos  $N^+$  y  $N^-$ , se tiene que las cantidades  $b(i) - y(i)$  ( $i \in N^+$  nodo inicial de  $P$ ) y  $y(i) - b(i)$  ( $i \in N^-$  nodo final de  $P$ ) son positivas y finitas.

Por tanto el número  $\alpha$ , calculado en el paso 3 del algoritmo, es positivo y finito. Puede verificarse fácilmente que el flujo  $x = x + \alpha e_p$  satisface las restricciones de capacidad de los arcos; la divergencia  $y'$  de este nuevo flujo es la misma, por construcción, para todos los nodos excepto para el inicial y final de P para los cuales se tiene ahora:

$$b(i) - y'(i) = b(i) - y(i) - \alpha \geq 0, \text{ para } i \text{ nodo inicial de P}$$

$$b(i) - y'(i) = b(i) - y(i) + \alpha \leq 0, \text{ para } i \text{ nodo final de P.}$$

En base a esto,  $x$  es un flujo "mejor" puesto que  $b - y'$  está más cercano a 0 que  $b - y$ .

Por otro lado, el algoritmo termina en un número finito de pa sos si las cantidades  $c^+(j)$ ,  $c^-(j)$ ,  $b(i)$ , y los valores del flujo inicial  $x(j)$  son conmensurables. En este caso todos los números mencionados son múltiplos de cierta  $\delta > 0$  y por tanto también lo son la cantidad  $\alpha$  y los valores del nuevo flujo construido así como sus divergencias. Puesto que las cantidades  $b(i) - y(i)$  distintas de cero tienden monótonamente hacia cero, modificándose al menos en  $\delta$ , y dos de éstas son modificadas en cada iteración entonces el algoritmo termina en un número finito de pasos.

Por último, cabe mencionar que el algoritmo termina en un número finito de pasos, aún sin la condición de conmensurabilidad, si se utiliza la discriminación de arcos durante la subrutina de enrutamiento. ■



EJEMPLO 4.

Determinese un flujo factible en la red mostrada en la figura 2.6(a) utilizando el algoritmo de distribución factible. Los números asociados a cada arco representan las capacidades inferior y superior respectivamente para el flujo a través de él y los asociados a cada nodo representan su oferta.

Iteración 1. Se inicia con el flujo  $x$ , factible con respecto a las capacidades, mostrado en la figura 2.6(b). Las divergencias de los respectivos vértices son:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(i)$	5	0	0	-5	0	-5	0	5

entonces:  $N^+ = \{i_1, i_4\}$  y  $N^- = \{i_6, i_8\}$

Se obtiene la trayectoria compatible con la coloración correspondiente (figura 2.6(c))  $P: i_1 + i_7 + i_8$  para la cual:

$$\alpha = \text{Min} \{6, 9, 5\} = 5$$

El flujo resultante se muestra en la figura 2.6(d).

Iteración 2. La función de divergencia para este nuevo flujo es:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(i)$	10	0	0	-5	0	-5	0	0

de donde:  $N^+ = \{i_1, i_4\}$ ,  $N^- = \{i_6\}$

La coloración correspondiente se muestra en la figura 2.6(e).

En ella se determina la trayectoria compatible  $P: i_4 + i_8 + i_6$  para la cual:

$$\alpha = \text{Min} \{10, 16, 5, 9\} = 5.$$

El nuevo flujo es el de la figura 2.6(f).

Iteración 3. La función de divergencia es:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(i)$	10	0	0	0	0	-10	0	0

de donde:  $N^+ = \{i_1\}$ ,  $N^- = \{i_6\}$ .

Se determina la trayectoria compatible con la coloración de la figura 2.6(g)  $P: i_1 + i_2 + i_4 + i_8 + i_6$  para la cual:

$$\alpha = \text{Min} \{5, 5, 4, 4\} = 4$$

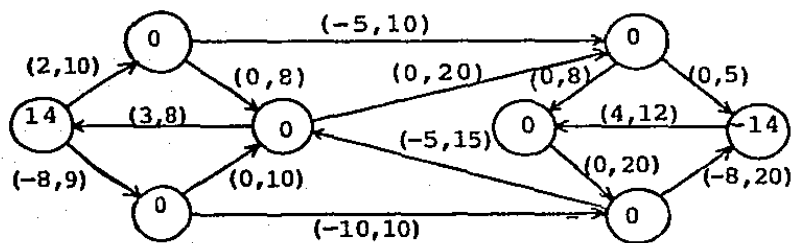
El flujo actualizado se muestra en la figura 2.6(h).

Iteración 4. La función de divergencia para este nuevo flujo es:

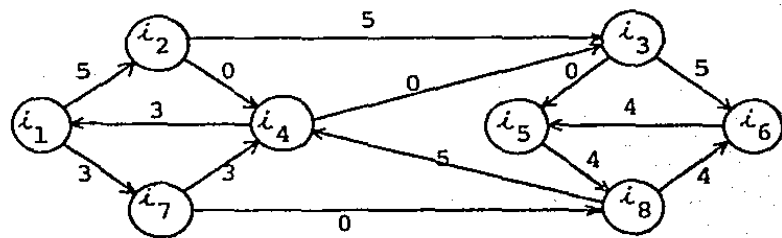
$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(i)$	14	0	0	0	0	-14	0	0

De aquí que  $N^+ = N^- = \emptyset$ ; es decir  $y(i) = b(i)$ , para todo nodo  $i$ .

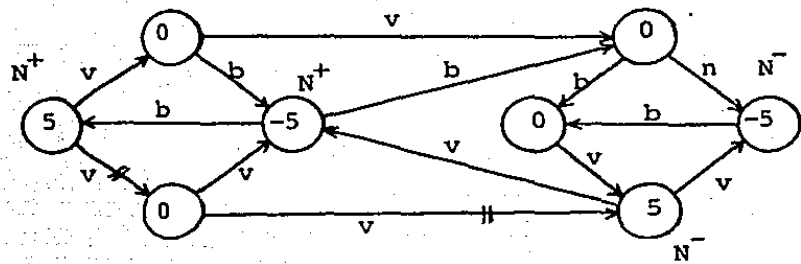
Por tanto el flujo  $x$  mostrado en la figura 2.6(h) es factible.



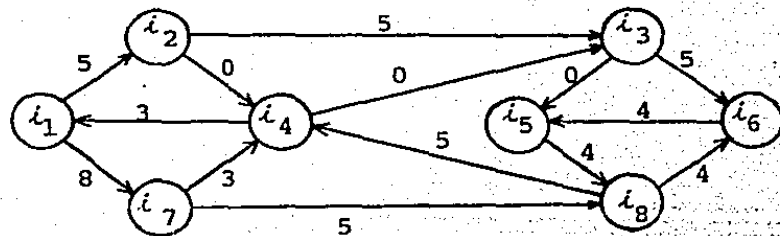
( a )



( b )

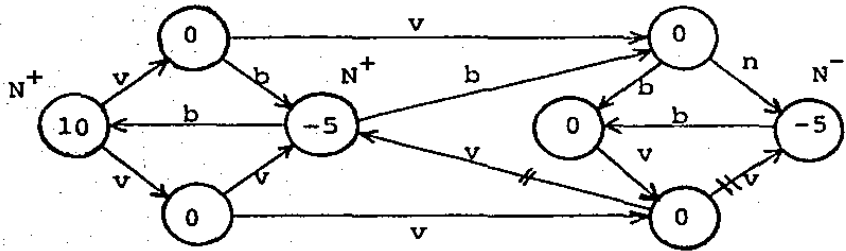


( c )

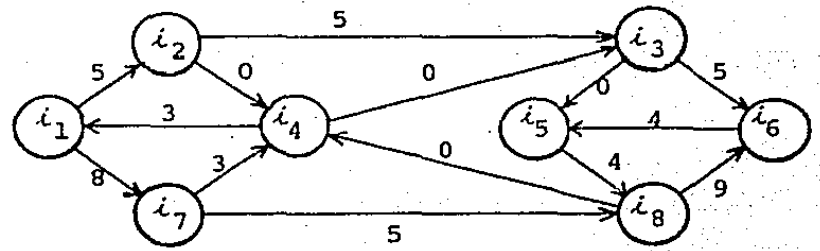


( d )

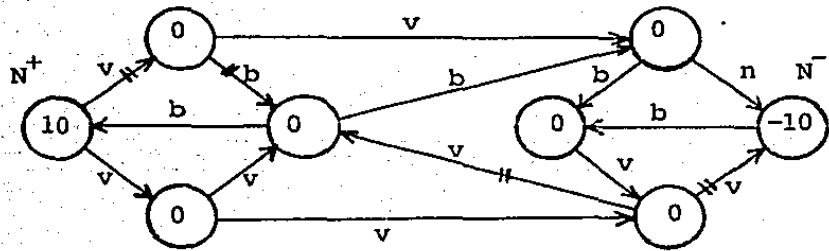
Figura 2.6



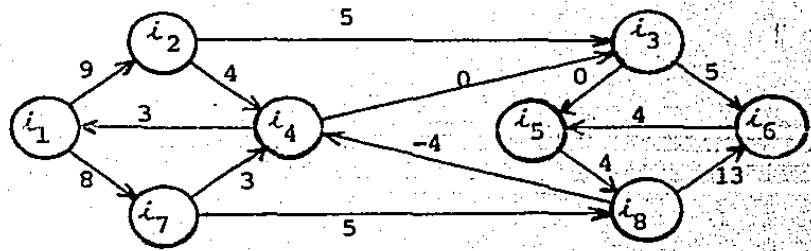
( e )



( f )



( g )



( h )

Figura 2.6(cont.)

EJEMPLO 5.

Determinése un flujo factible en la red de la figura 2.7(a) usando el algoritmo de distribución factible. A los arcos se han asociado sus capacidades inferior y superior respectivamente; a los nodos se ha asociado su oferta.

Iteración 1. Se inicia con el flujo factible con respecto a las capacidades de cada arco mostrado en la figura 2.7(b). Las divergencias de los nodos son:

$i$	1	2	3	4	5
$y(i)$	5	5	-2	-4	-4

de donde  $N^+ = \{i_3\}$ ,  $N^- = \{i_1\}$ .

Se obtiene la trayectoria compatible con la coloración correspondiente (figura 2.7(c))  $P: i_3 + i_1$ . Para ésta se tiene

$$\alpha = \text{Min} \{1, 3, 3\} = 1$$

El flujo resultante se muestra en la figura 2.7(d).

Iteración 2. La función de divergencia para este nuevo flujo es:

$i$	1	2	3	4	5
$y(i)$	4	5	-1	-4	-4

de aquí que  $N^+ = \{i_3\}$ ,  $N^- = \{i_1\}$ .

Se obtiene la trayectoria compatible con la coloración (figura 2.7(e))  $P: i_3 + i_2 + i_1$  para la cual

$$\alpha = \text{Min} \{5, 1, 2, 2\} = 1,$$

resultando el flujo definido en la figura 2.7(f)

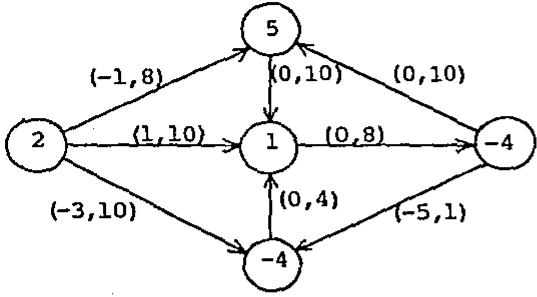
Iteración 3. La función de divergencia es:

$i$	1	2	3	4	5
$y(i)$	3	5	0	-4	-4

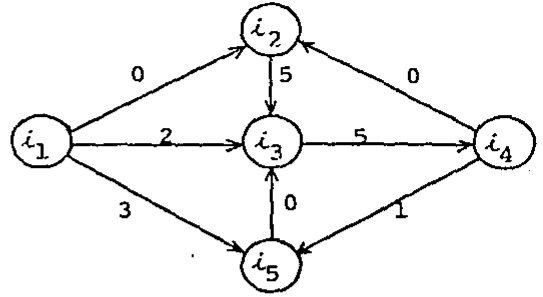
y por tanto  $N^+ = \{i_3\}$ ,  $N^- = \{i_1\}$ .

Se obtiene el corte  $Q: N^+ \downarrow N^-$ , compatible con la coloración (figura 2.7(g)) asociado a  $S = \{i_3, i_2, i_4\}$  por lo cual no hay solución al problema.

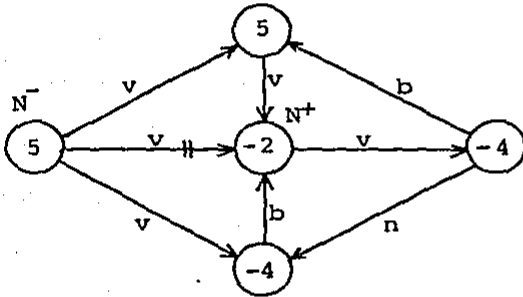
Nótese que  $b(S) = 2 > c^+(Q) = 1 - (8 + 10 + 4) = -21$ .



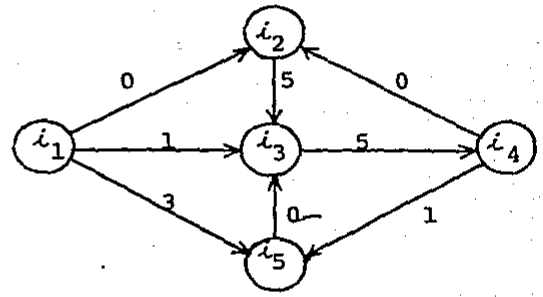
( a )



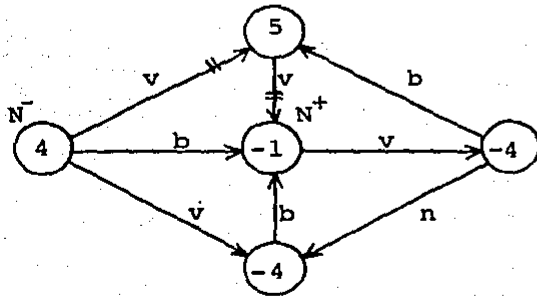
( b )



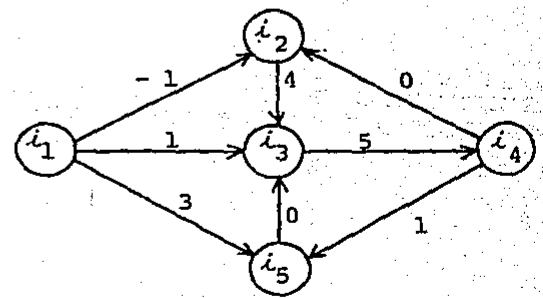
( c )



( d )

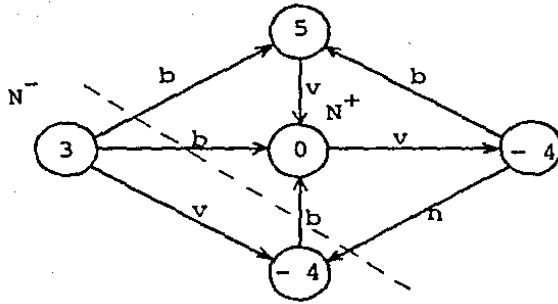


( e )



( f )

Figura 2.7



(g)

Figura 2.7 (cont.)



## 2.5 ALGORITMO DE RECTIFICACION DE FLUJO.

Una alternativa natural para resolver el problema de distribución factible consiste en determinar inicialmente un flujo factible con respecto a las restricciones de oferta en los nodos y posiblemente no factible con respecto a las restricciones de capacidad sobre los arcos. Al igual que en el algoritmo de distribución factible se construye en cada iteración, un flujo que "rompa menos" las restricciones de capacidad en el sentido de que el flujo definido sobre el arco se acerque más a las cotas de capacidad en cada iteración. De nuevo, las restricciones de oferta se mantienen siempre válidas. Para la modificación del flujo se definen los conjuntos de arcos  $A^+ = \{j \in A \mid x(j) > c^+(j)\}$  y  $A^- = \{j \in A \mid x(j) < c^-(j)\}$  que están formados por arcos que rompen la factibilidad, se utiliza el algoritmo de Minty para determinar un circuito, que contenga un arco de  $A^+ \cup A^-$ , a través del cual se realiza el cambio de flujo y se ejecuta otra iteración. Si se determina un corte  $Q$ , compatible con la coloración definida, que contenga un arco de  $A^+ \cup A^-$  se concluye la no existencia de solución al problema.

A continuación se detalla el algoritmo.

## ALGORITMO DE RECTIFICACION DE FLUJO

Propósito: Resolver el problema de distribución factible.

### Descripción

Paso 1. Determinar un flujo  $x$  factible con respecto a las restricciones de divergencia; i.e., tal que  $\text{div } x = b$ .

Paso 2. Sean  $A^+ = \{j \in A \mid x(j) > c^+(j)\}$ ,  $A^- = \{j \in A \mid x(j) < c^-(j)\}$

- Si  $A^+ = A^- = \emptyset$ , entonces  $x$  es la solución deseada, terminar.
- Si existe  $\bar{j} \in A^+$  ó  $\bar{j} \in A^-$  colorear los arcos de la red de la siguiente manera:

verde	si	$c^-(j) < x(j) < c^+(j)$
blanco	si	$x(j) \leq c^-(j)$ , $x(j) < c^+(j)$
negro	si	$x(j) \geq c^+(j)$ , $x(j) > c^-(j)$
rojo	si	$c^-(j) = x(j) = c^+(j)$ .

Ir a 3.

Paso 3. Aplicar el algoritmo de Minty a la red coloreada.

- Si se determina un circuito elemental  $P$  compatible con la coloración, que contenga a  $\bar{j}$ , calcular:

$$\alpha = \min \begin{cases} c^+(j) - x(j) , j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j) , j \in P^- \\ \bar{\alpha} \end{cases}$$

donde

$$\bar{\alpha} = \text{dist}(x(j), [c^-(\bar{j}), c^+(\bar{j})]) = \begin{cases} x(j) - c^-(j), j \in A^+ \\ c^+(j) - x(j), j \in A^- \end{cases}$$

Hacer  $x = x + \alpha e_p$  e ir a 2.

- Si se determina un corte  $Q = [S, N/S]$  compatible con la coloración que contenga a  $\bar{j}$  terminar, ya que en este caso no existe solución al problema.

Justificación. Si el algoritmo termina con un corte  $Q = [S, N/S]$  entonces:

$$\begin{aligned} x(j) &\geq c^+(j), \text{ para todo } j \in Q^+, \\ -x(j) &\geq -c^-(j), \text{ para todo } j \in Q^-, \end{aligned}$$

en donde al menos una de estas desigualdades es estricta dada la definición de los conjuntos  $A^+$  y  $A^-$ . Sea  $\bar{j}$  el arco para el cual la desigualdad es estricta (nótese que todo arco de  $A^-$  es blanco mientras que todo arco de  $A^+$  es negro).

Entonces:

$$\begin{aligned} c^+(Q) &< \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = \\ &= [\text{flujo de } x \text{ a través de } Q] = \\ &= [\text{divergencia de } x \text{ desde } S] = \\ &= b(S); \end{aligned}$$

luego, no existe solución factible al problema.

Por otro lado, si durante el algoritmo se determina un circuito  $P$ :

$$\begin{aligned} c^+(j) - x(j) &> 0, \text{ para todo } j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j) &> 0, \text{ para todo } j \in P^-. \end{aligned}$$

Puesto que  $\bar{j} \in A^- \cup A^+$ , entonces  $\bar{\alpha}$  es positiva y finita y por tanto  $\alpha$  también lo es. La manera de calcular  $\alpha$  asegura que, para el nuevo flujo  $x' = x + \alpha e_p$ , se cumple:

$c^+(j) \geq x'(j)$  y  $c^-(j) - x'(j) = c^-(j) - x(j) - \alpha$ , para todo  $j \in P^+$ ,

$c^-(j) \leq x'(j)$  y  $x'(j) - c^+(j) = x(j) - c^+(j) - \alpha$ , para todo  $j \in P^-$ ,

mientras que en los demás arcos  $x'(j) = x(j)$ . Se tiene entonces que  $x'$  satisface las mismas restricciones que  $x$  y posiblemente otra más (si  $\alpha = \bar{\alpha}$  entonces el nuevo flujo a través de  $\bar{j}$  satisface las restricciones de capacidad para ese arco). Aún en el caso de que las restricciones satisfechas sean las mismas, la restricción para el arco  $\bar{j}$  será "menos" violada por  $x'$  que por  $x$  (la distancia a la cota no satisfecha es menor en  $x'$  que en  $x$ ); en este sentido  $x'$  es mejor que  $x$ .

Por otro lado, puesto que  $P$  es un circuito,  $\text{div } e_p = 0$ . De aquí se concluye que:

$$\text{div } x' = \text{div } x + \alpha \text{ div } e_p = \text{div } x = b,$$

por lo que el nuevo flujo satisface las restricciones de oferta.

El algoritmo termina en un número finito de pasos si las cantidades  $c^+(j)$ ,  $c^-(j)$  y los valores iniciales de flujo  $x(j)$  son conmensurables. Debe observarse que, bajo este supuesto, como  $\text{div } x = b$  entonces  $b(i)$  pertenece a la misma clase de conmensurabilidad. En este caso todos los valores de los flujos generados durante el algoritmo son múltiplos de

una cierta  $\delta > 0$ . De aquí que las reducciones de las violaciones a las restricciones de capacidad para los arcos de  $A^+UA^-$  siempre son iguales al menos a  $\delta$ . Sólo es posible una reducción finita y existe un número finito de arcos que violan la factibilidad. Por tanto el número de iteraciones es finito.

Cabe señalar nuevamente que si se utiliza la discriminación de arcos, el algoritmo termina en un número finito de pasos aún si no se satisface la condición de commensurabilidad. ■

### EJEMPLO 6.

Determinese un flujo factible en la red de la figura 2.6(a) mediante el algoritmo de rectificación de flujo. Los números asociados a cada arco son sus capacidades inferior y superior respectivamente y los asociados a los nodos son su oferta.

Iteraciones 1 y 2. Se inicia con el flujo  $x$ , factible con respecto a las ofertas, mostrado en la figura 2.8(a).

Los arcos que rompen la factibilidad en sus cotas superior e inferior respectivamente son:

$$A^+ = \{(i_3, i_6)\}, \quad A^- = \{(i_4, i_1), (i_6, i_5)\}$$

Para la coloración correspondiente (mostrada en la figura 2.8(b)) se determinan los circuitos ajenos  $P_1: i_4 + i_1 + i_7 + i_1$  y  $P_2: i_6 + i_3 + i_5 + i_8 + i_6$  que contienen a los arcos  $(i_4, i_1)$  e  $(i_3, i_6)$  respectivamente. Para el primer circuito se obtiene:

$$\alpha = \text{Min} \{5, 10, 8\} = 5$$

y para el segundo

$$\alpha = \text{Min} \{8, 20, 16, 10\} = 8,$$

resultando el flujo mostrado en la figura 2.8(c).

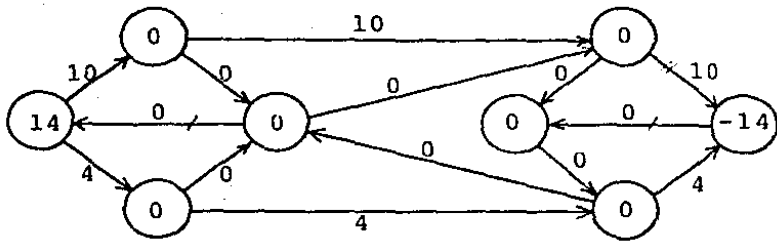
Iteración 3. En esta iteración se tiene  $A^+ = \phi$  y  $A^- = \{(i_6, i_5)\}$ . Se determina el circuito compatible con la coloración mostrada en la figura 2.8(d).  $P: i_6 + i_5 + i_8 + i_6$  que contiene el arco  $(i_6, i_5)$ . Para éste se obtiene

$$\alpha = \text{Min} \{12, 8, 12\} = 8.$$

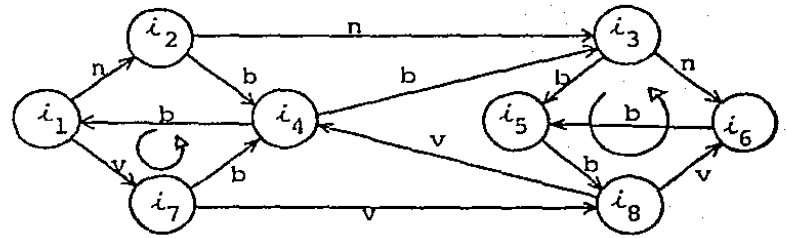
El flujo resultante se muestra en la figura 2.8(e).

Iteración 4. Para este flujo se tiene que  $A^+ = A^- = \phi$ , por lo cual el flujo definido en la figura 2.8(e) es el deseado.

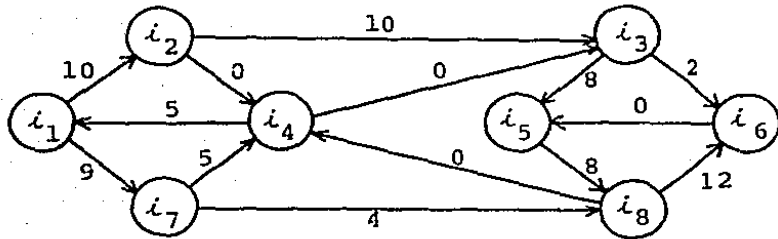




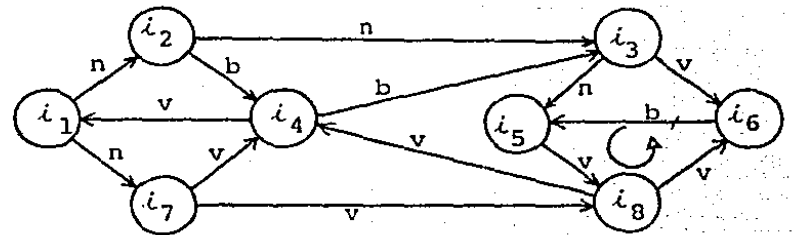
( a )



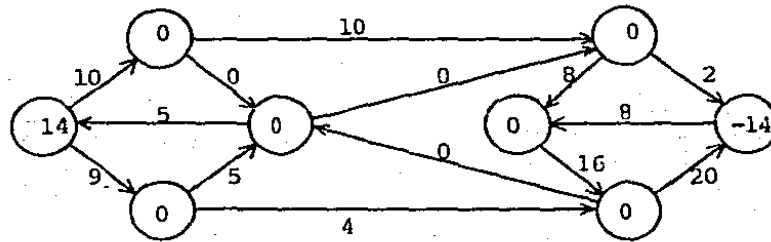
( b )



( c )



( d )



( e )

Figura 2.8

### EJEMPLO 7.

Determinese un flujo factible en la red de la figura 2.7(a) utilizando el algoritmo de rectificación de flujo.

Iteración 1. Se inicia con el flujo  $x$  factible con respecto a las ofertas mostrado en la figura 2.9(a).

Los arcos que rompen la factibilidad en sus cotas superior e inferior respectivamente son:

$$A^+ = \{(i_4, i_5)\} \text{ y } A^- = \{(i_1, i_3)\}.$$

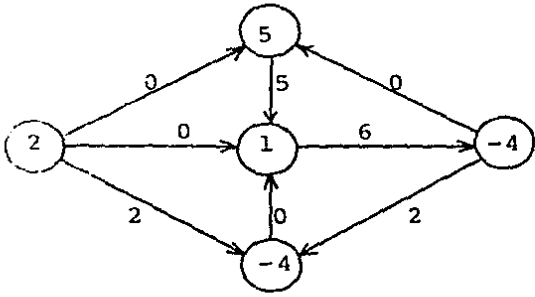
Para la coloración correspondiente (figura 2.9(b)) se determina el circuito  $P: i_1 + i_3 + i_2 + i_1$ , que contiene el arco  $(i_1, i_3)$ . Para éste se obtiene

$$\alpha = \text{Min} \{1, 5, 10\} = 1,$$

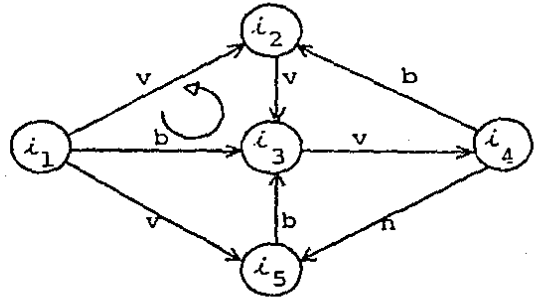
resultando el flujo definido en la figura 2.9(c)

Iteración 2. En esta iteración se obtiene  $A^+ = \{(i_4, i_5)\}$ ,  $A^- = \emptyset$ . Para la coloración correspondiente (figura 2.9(d)) se obtiene el corte compatible  $Q: N^+ + N^-$  con  $N^+ = \{i_4\}$  y  $N^- = \{i_5\}$ , asociado a  $S = \{i_4, i_3, i_2\}$ . De aquí se concluye que no existe flujo factible para esta red.

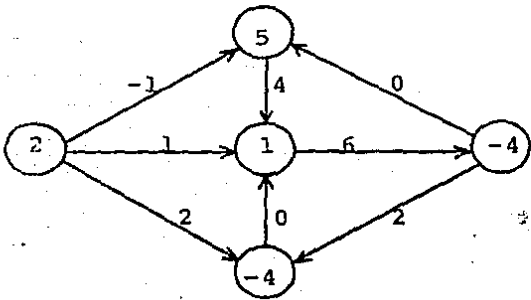
Obsérvese que se obtuvo el mismo resultado que en el ejemplo 5.



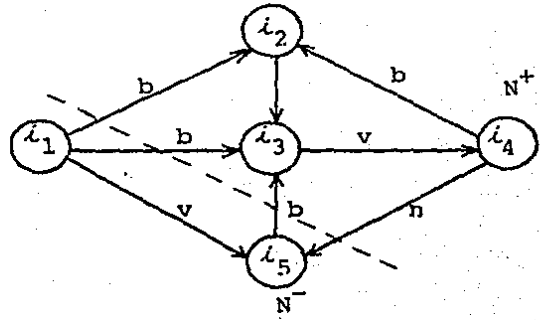
( a )



( b )



( c )



( d )

Figura 2.9

### 3. TRAYECTORIA MINIMA Y EXTENSIONES.

En este capítulo se analizan los resultados teóricos y algoritmos de solución para la pareja de problemas duales de trayectoria mínima y tensión máxima en una red y para un problema de factibilidad de tensión. Estos resultados teóricos y algoritmos se establecen de manera completamente paralela a los referentes a los problemas de flujo máximo y corte mínimo.

En la sección 3.2 se formula el problema de trayectoria mínima y se define su dual: el problema de tensión máxima. Esta pareja de problemas está fuertemente relacionada mediante el teorema trayectoria mínima - tensión máxima en donde se establece un resultado paralelo al teorema flujo máximo - corte mínimo. De aquí surge un algoritmo de solución simultánea, descrito en la sección 3.3, la cual constituye otro paralelismo con flujo máximo - corte mínimo.

Por otro lado, de manera análoga el problema de distribución factible de la sección 2.4 se analiza un problema de factibilidad de diferencial que consiste en determinar un potencial en la red tal que la tensión asociada a cada arco satisfaga ciertas restricciones de generación. De nuevo, tal potencial puede no existir por lo cual se establecen condiciones de existencia. Se presentan dos algoritmos (secciones 3.4 y 3.5) que verifican la satisfacción de tales condiciones, el primero de los cuales trabaja sobre nodos y el otro sobre arcos. También en esta parte se aplican el teorema de la red coloreada y el lema de Minty. Esto último constituye otra analogía con el capítulo 2.

### 3.1 DEFINICIONES ELEMENTALES.

Un potencial en una red  $G$  es una función real  $u$  asociada a los nodos de  $G$  mientras que la tensión a través del arco  $j = (i, i')$  se define como la diferencia de potenciales:

$$v(j) = u(i') - u(i) = - \sum_{i \in N} u(i) e(i, j).$$

En forma matricial  $v = - uE = \Delta u$ ; al vector  $v$  se le llama diferencial en  $G$ . Se define ahora otro concepto relacionado con diferenciales. El despliegue del diferencial  $v$  relativo a la trayectoria  $P$  es la suma de los términos  $\pm v(j)$  asociados a los arcos de  $P$ . Si  $P$  es una trayectoria sin multiplicidades:

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] = \sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j) = v \cdot e_P.$$

En el caso de que  $P$  tenga multiplicidades puede descomponerse en trayectorias simples. El despliegue de  $v$  relativo a cada una de estas trayectorias es una expresión de la forma anterior por lo cual el despliegue de  $P$  será la suma de tales expresiones. Para ejemplificar el concepto de despliegue, considérese la trayectoria  $P$  marcada en la red de la figura 3.1 en la cual se ha asociado a cada nodo su potencial y a cada arco su tensión. Para esta trayectoria:

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] = (1 - 13 - 4) - (-4) = -12$$

Obsérvese que si los extremos de  $P$  son  $i$  e  $i'$  se cumple la relación:

[despliegue de  $v$  relativo a  $P$ ] =  $u(i') - u(i) = -9 - 3 = -12$ .

En esta relación puede notarse que el despliegue de  $v$  relativo a  $P$  sólo depende de los potenciales de los extremos de  $P$ ; esto es válido en general y se conoce con el nombre de principio de integración.

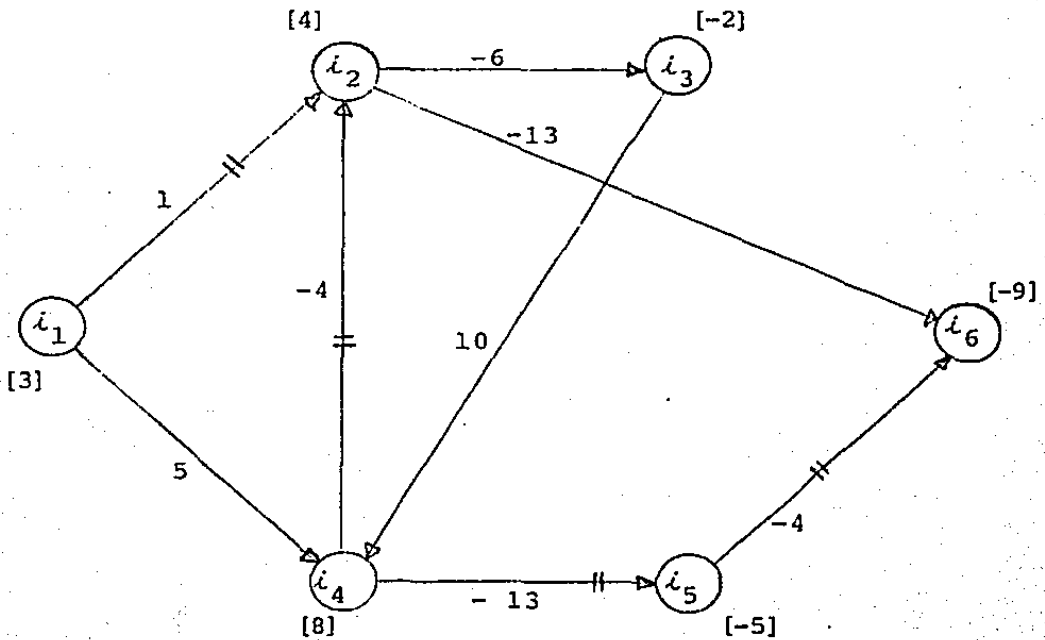


Figura 3.1

Principio de integración. Sea  $v = \Delta u$ , para algún diferencial  $u$  definido en una red  $G$ , y sea  $P: i \rightarrow i'$  una trayectoria.

Entonces:

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] = u(i') - u(i).$$

Demostración. Sea la trayectoria  $P: i_1 = i', j_1, i_2, j_2, \dots, j_{k-1}, i_k = i'$ . Para esta trayectoria se tiene que:

$$v(j_h) = u(i_{h+1}) - u(i_h) \text{ si } e_p(j_h) = 1$$

$$\text{y } -v(j_h) = u(i_{h+1}) - u(i_h) \text{ si } e_p(j_h) = -1.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} [\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] &= \sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j) = \\ &= [u(i_2) - u(i_1)] + [u(i_3) - u(i_2)] + \dots + [u(i_k) - u(i_{k-1})] = \\ &= u(i_k) - u(i_1) = u(i') - u(i). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Como corolario de este principio se tiene que si  $P$  es un circuito y  $v$  es un diferencial entonces el despliegue de  $v$  relativo a  $P$  es cero. De hecho, puede demostrarse que  $v$  satisface esto si y sólo si es un diferencial por lo cual este corolario y el principio de integración son equivalentes.

El principio de integración permite obtener de manera constructiva un potencial  $u$  tal que  $v = \Delta u$  para una tensión  $v$ , si es que existe. En efecto, supóngase que la red  $G$  es conexa

(el procedimiento se aplica a cada componente conexa si la red no lo es) y sea  $s$  cualquier nodo de  $G$ . Si existe un potencial  $u$  con diferencial  $v$  entonces sus valores en los nodos distintos de  $s$  pueden ser determinados de manera única mediante la relación:

$$u(i) = u(s) + [\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P],$$

donde  $P: s \rightarrow i$ . Es importante recalcar que  $u(s)$  puede tomar cualquier valor ya que si se suma cualquier constante a una función de potencial no se afecta su diferencial. Con base en lo anterior es posible establecer el siguiente procedimiento general; durante este procedimiento se verificará si  $v$  es un diferencial por lo cual no es necesario saber esto de ante mano.

Sea  $\mathcal{C}$  cualquier enrutamiento de  $N$  con base  $s$  y sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Defínase:

$$u(i) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } i = s \\ \alpha + [\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P_i], & \text{si } i \neq s, \end{cases}$$

donde  $P_i$  es la  $\mathcal{C}$ -trayectoria de  $s$  a  $i$ . Si  $v$  es un diferencial la función  $u$ , construída de esta manera, será el único potencial que satisfaga  $\Delta u = v$  y  $u(s) = \alpha$ . En caso contrario se tendrá  $(\Delta u)(j) \neq v(j)$ , para algún arco  $j$  no utilizado por el enrutamiento.



Para ilustrar el procedimiento considérese de nuevo la red mostrada en la figura 3.1: Si  $s = i_5$  un enrutamiento de  $N$  con base en  $s$  es:  $\Theta(i_4) = (i_4, i_5)$ ,  $\Theta(i_6) = (i_5, i_6)$ ,  $\Theta(i_1) = (i_1, i_4)$ ,  $\Theta(i_2) = (i_2, i_4)$ ,  $\Theta(i_3) = (i_3, i_4)$ , que define las trayectorias  $P_k: s \rightarrow i_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 6$ ) siguientes:

$$P_1: i_5 \rightarrow i_4 \rightarrow i_1, \quad P_2: i_5 \rightarrow i_4 \rightarrow i_2,$$

$$P_3: i_5 \rightarrow i_4 \rightarrow i_3, \quad P_4: i_5 \rightarrow i_4,$$

$$P_6: i_5 \rightarrow i_6.$$

Según la definición de despliegue se calcula:

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P_1] = -(-13+5)=8, \quad [\text{despliegue de } v \text{ relativo a}$$

$$P_2] = -4 -(-13) = 9$$

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P_3] = -(-13+10)=3, \quad [\text{despliegue de } v \text{ relativo a}$$

$$P_4] = -(-13) = 13$$

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P_6] = -4.$$

Si se fija  $\alpha = -5$ , se obtienen los siguientes valores de  $u$ :

$i$	1	2	3	4	5	6
$u(i)$	3	4	-2	8	-5	-9

Nótese que para los arcos  $j \sim (i, i')$  que no forman parte del enrutamiento se cumple  $v(j) = u(i') - u(i)$ , por lo que  $u$  es el único potencial que satisface  $\Delta u = v$  y  $u(i_5) = -5$ .

De manera semejante al desarrollo de los resultados sobre tensiones y trayectorias, paralelos a aquéllos sobre flujos y

cortes, se asocia un intervalo real no vacío  $D(j)$  a cada arco  $j$ . Este intervalo recibe el nombre de intervalo de generación del arco  $j$ . Se denotarán los extremos de  $D(j)$  con  $d^-(j)$  y  $d^+(j)$  respectivamente y se llamarán respectivamente límite inferior de generación y límite superior de generación. Los únicos requerimientos para estos números son:  $d^-(j) \leq d^+(j)$  y  $d^-(j) < +\infty$ ,  $d^+(j) > -\infty$ .

Paralelamente al concepto de un flujo factible con respecto a las capacidades, se define una tensión factible con respecto a las generaciones como una tensión  $v$  tal que  $v(j) \in D(j)$ , para todo  $j \in A$ . Esto es equivalente a la condición:

$$u(i) + d^-(j) \leq u(i') \leq u(i) + d^+(j),$$

donde  $u$  es un potencial tal que  $v = \Delta y$  y  $j^-(i, i')$ .

La factibilidad con respecto a las generaciones implica, debido al principio de integración, algunas restricciones respecto a las trayectorias. Se define la generación superior  $d^+(P)$  de una trayectoria  $P$  como la suma de los términos  $d^+(j)$ , para  $j$  recorrido positivamente, menos la suma de los términos  $d^-(j)$ , para  $j$  recorrido negativamente. Análogamente se define la generación inferior  $d^-(P)$  de  $P$ . Para una trayectoria  $P$  sin multiplicades se tiene:

$$d^+(P) = \sum_{j \in P^+} d^+(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j),$$

$$d^-(P) = \sum_{j \in P^+} d^-(j) - \sum_{j \in P^-} d^+(j).$$

De aquí se concluye que si  $v$  es una tensión factible, es decir  $v(j) \in D(j)$  para todo  $j \in A$ , entonces:

$$d^-(P) \leq [\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] \leq d^+(P),$$

para toda trayectoria  $P$ . Si  $u$  es un potencial tal que  $v = \Delta u$  la condición anterior se reduce a:

$$u(i) + d^-(P) \leq u(i') \leq u(i) + d^+(P),$$

para toda trayectoria  $P: i \rightarrow i'$ .

### 3.2 TRAYECTORIA MINIMA.

En algunos contextos puede asociarse al arco  $j$  la pareja de números  $d^+(j)$  y  $d^-(j)$  sin que necesariamente tengan algo que ver con factibilidad de tensiones. Por ejemplo,  $d^+(j)$  puede ser el costo de recorrer positivamente el arco  $j$  mientras que  $d^-(j)$  puede ser el costo de recorrerlo negativamente. En este caso  $d^+(P)$  se interpreta como el costo de recorrer la trayectoria  $P$  y  $d^-(P)$  se interpreta como el costo de recorrer el reverso de  $P$ . Con esta interpretación surge de manera natural el problema de la trayectoria mínima.

Problema de la trayectoria mínima. Sean  $N^+$ ,  $N^- \subset N$  no vacíos en la red  $G$ . El problema consiste en

$$\text{Min } \{d^+(P) \mid P: N^+ \rightarrow N^-\}$$

Se hace la convención  $\text{Min} = +\infty$  para el problema si no existe ninguna trayectoria  $P: N^+ \rightarrow N^-$ . Esto conforme al hecho de que es posible agregar arcos  $j$  con  $d^+(j) = \infty$  y  $d^-(j) = -\infty$  sin afectar al problema.

Si se efectúa la siguiente coloración de la red, llamada coloración asociada con las generaciones:

verde	si	$d^+(j) < \infty$	y	$d^-(j) > -\infty$
blanco	si	$d^+(j) < \infty$	y	$d^-(j) = -\infty$
negro	si	$d^+(j) = \infty$	y	$d^-(j) > -\infty$
rojo	si	$d^+(j) = \infty$	y	$d^-(j) = -\infty$ ,

se tiene que  $d^+(P)$  es finito sólo si  $P$  es compatible con esta coloración, por lo que resolver el problema de la trayectoria mínima equivale a determinar  $P$ , compatible con esta coloración, tal que minimice  $d^+(P)$ ; es decir la solución "más barata" del problema de la trayectoria compatible con esta coloración.

Para resolver este problema de trayectoria mínima de nuevo se utilizará como herramienta de optimalidad un resultado dual.

Para formular este resultado debe notarse primeramente que existe un problema de potenciales análogo al problema de flujo máximo. En efecto, sea  $u$  un potencial que es constante en el conjunto  $N^+ \subset N$ , constante en el conjunto  $N^-$ , con  $N^+$  y  $N^-$  conjuntos ajenos no vacíos en la red  $G$ . Entonces se cumple que  $u(i') - u(i)$  vale lo mismo para todo  $i \in N^+$  y para todo  $i' \in N^-$ . Esta diferencia se conoce con el nombre de despliegue de  $u$  de  $N^+$  a  $N^-$ . También se concluye que:

$$[\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = [\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P],$$

para toda trayectoria  $P: N^+ \rightarrow N^-$ , donde  $v = \Delta u$ . El problema análogo al de flujo máximo es:

Problema de la tensión máxima. Consiste en maximizar el despliegue de  $u$  de  $N^+$  a  $N^-$  sobre todos los potenciales  $u$  constantes en  $N^+$ , constantes en  $N^-$  tales que  $v = \Delta u$  es factible con respecto a las generaciones.

Puesto que hay una analogía con el problema de flujo máximo surge un resultado dual que relaciona los problemas de tensión máxima y trayectoria mínima. Este resultado utiliza el concepto de corte de generación ilimitada de  $N^+$  a  $N^-$  que se define como un corte  $Q: N^+ \rightarrow N^-$  tal que  $d^+(j) = +\infty$ , para todo  $j \in Q^+$ , y  $d^-(j) = -\infty$  para todo  $j \in Q^-$ . Nótese un corte de esta naturaleza es compatible con la coloración asociada con las generaciones.

Teorema de tensión máxima - trayectoria mínima (Minty). Supóngase que existe al menos un potencial que satisface las restricciones del problema de máxima tensión. Entonces:

$$\begin{aligned} & [\text{sup en problema de tensión máxima}] = \\ & = [\text{mín en problema de trayectoria mínima}]. \end{aligned}$$

Demostración. Obsérvese primeramente que para cualquier potencial  $u$  que satisfaga las restricciones del problema de la tensión máxima y  $P$  cualquier trayectoria de  $N^+$  a  $N^-$  se tiene:

$$\begin{aligned} [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] &= [\text{despliegue de } \Delta u \text{ relativo a } P] \\ &\leq d^+(P) \end{aligned}$$

Basta probar que existen una trayectoria  $P$  y un potencial  $u$  que satisfacen la igualdad. Esto se hace de manera constructiva y por tanto la demostración constituye un algoritmo de solución para ambos problemas y que será descrito en la siguiente sección. ■

### 3.3 ALGORITMO DE TRAYECTORIA MÍNIMA.

Los problemas de tensión máxima y trayectoria mínima pueden ser resueltos simultáneamente; la demostración constructiva del teorema de tensión máxima-trayectoria mínima proporciona un algoritmo para ello. Cabe volver a resaltar el paralelismo entre este par de problemas y los de flujo máximo y corte mínimo. Para iniciar el algoritmo se requiere un potencial, que satisfaga las condiciones impuestas para el problema de máxima tensión, tal que su diferencial sea factible con respecto a las generaciones. Puede considerarse el potencial  $u_0 \equiv 0$  si  $0 \in D(j)$  para todo arco  $j$ ; sin embargo esto no es cierto en general por lo cual se requiere una herramienta para la construcción de tal potencial. Este problema será tratado más adelante y por ahora se supondrá que se cuenta con dicho potencial.

Durante el algoritmo se construye un diferencial factible con respecto a las generaciones correspondiente a un potencial  $u$  y un  $\Theta$  - enrutamiento con base  $N^+$  tales que:

$$d^+(P) = [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-],$$

donde  $P$  es la  $\Theta$  -trayectoria de  $N^+$  a  $i \in N^-$ . De aquí se concluirá la optimalidad de estas soluciones para sus respectivos problemas.

## ALGORITMO DE TRAYECTORIA MINIMA

Propósito: Determinar la trayectoria mínima de  $N^+$  a  $N^-$  en la red  $G$ .

### Descripción

Paso 1. Determinar un potencial  $u_0$  constante en  $N^+$ , constante en  $N^-$  y cuyo diferencial  $v_0$  sea factible con respecto a las generaciones. Sea  $S = N^+$  y sea  $\emptyset$  vacío. Sea  $w \equiv 0$  en  $S$ . Sea

$$d_0^+(j) = d^+(j) - v_0(j), \quad d_0^-(j) = d^-(j) - v_0(j), \quad j \in A.$$

Paso 2. Determinar el corte  $Q = [S, N/S]$  y calcular

$$\beta = \min \begin{cases} w(i') + d_0^+(j), & \text{para } j^-(i', i) \in Q^+ \\ w(i') - d_0^-(j), & \text{para } j^-(i, i') \in Q^- \end{cases}$$

- Si  $\beta = \infty$  terminar.  $Q$  es un corte de generación ilimitada y por tanto ambos problemas tienen valor  $\infty$ .
- Si  $\beta < \infty$  ir a 3.

Paso 3. Sea  $j$  el arco correspondiente al valor de  $\beta$ . Hacer

$$S = S \cup \{i\}, \quad \theta(i) = j, \quad w(i) = \beta.$$

- Si  $i \in N^-$  terminar. La  $\theta$ -trayectoria  $P: N^+ \rightarrow i$  es la mínima y el potencial  $u = u_0 + w$ , donde  $w(x) = \beta$  para todo  $x \in N/S$  resuelve el problema de máxima tensión. En este caso:

$$\begin{aligned} d^+(P) &= [\text{despliegue de } u_0 \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] + \beta = \\ &= [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-]. \end{aligned}$$

- Si  $i \notin N^-$  ir a 2.



### Justificación del algoritmo.

Obsérvese primeramente que si durante el paso 2 se obtiene un valor de  $\beta$  igual a  $\infty$ , entonces  $d_0^+(j) = \infty$  para todo  $j \in Q^+$  y  $d_0^-(j) = -\infty$  para todo  $j \in Q^-$ . De aquí que  $d^+(j) = \infty$  para todo  $j \in Q^+$  y  $d^-(j) = -\infty$  para todo  $j \in Q^-$ . Por tanto  $Q$  es un corte de generación ilimitada. Por otro lado, cada vez que se agrega un nodo  $i$  a  $S'$ , la  $\theta$ -trayectoria  $P: N^+ \rightarrow i$  cumple  $d_0^+(P) = w(i) = \beta$ . De aquí se concluye que:

$$\begin{aligned}d_0^+(P) &= \sum_{j \in P^+} [d^+(j) - v_0(j)] - \sum_{j \in P^-} [d^-(j) - v_0(j)] = \\&= \left( \sum_{j \in P^+} d^+(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j) \right) - \left( \sum_{j \in P^+} v_0(j) - \sum_{j \in P^-} v_0(j) \right) = \\&= d^+(P) - [\text{despliegue de } v_0 \text{ relativo a } P].\end{aligned}$$

Por lo tanto, si el algoritmo termina en el paso 3 con  $i \in N^-$ , se cumple:

$$d^+(P) = [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-]$$

puesto que  $w \equiv \beta$  en  $N^-$ . El potencial  $u = u_0 + w$ , al igual que  $u_0$  y  $w$ , es constante en  $N^+$  y es constante en  $N^-$ . Además, por construcción,  $v = \Delta u$  es factible con respecto a las generaciones. En efecto, a pesar de que no se calcula  $w$  en los nodos fuera de  $S$  (excepto al final), el modo de construir esta función es equivalente a que en cada iteración,  $w$  tome el valor de  $\beta$  en los nodos de  $N/S$  y  $u$  se defina como  $u_0 + w$ . De

hecho,  $u$  se modifica agregando una constante  $\alpha$  en cada iteración a sus valores asociados con los nodos fuera de  $S$ . Esta constante  $\alpha$  es la diferencia entre los valores de  $\beta$  en las iteraciones actual y anterior; es decir:

$$\alpha = \min \begin{cases} w(i') + d_0^+(j) - w(i) & \text{para } j \sim (i', i) \in Q^+ \\ w(i') - d_0^-(j) - w(i) & \text{para } j \sim (i, i') \in Q^- \end{cases}$$

Es decir:

$$\alpha = \min \begin{cases} d^+(j) - v(j) & , \text{ para } j \in Q^+ \\ v(j) - d^-(j) & , \text{ para } j \in Q^- \end{cases}$$

puesto que para actualizar  $u$  se tendría  $u = u + \alpha e_{N/S}$  (y  $v = v + \alpha e_Q$ ). Si  $v$  es factible con respecto a las generaciones también lo es  $v + \alpha e_Q$  ( $\alpha \geq 0$ ). Entonces la factibilidad se conserva en cada iteración.

Para establecer la optimalidad de  $u$  y  $P$  nótese que satisfacen

$$\begin{aligned} d^+(P) &= [\text{despliegue de } u_0 \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] + \beta = \\ &= [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-]; \end{aligned}$$

pero durante la prueba del teorema de máxima tensión - mínima trayectoria se verificó que

$$d^+(p') \geq [\text{despliegue de } u' \text{ de } N^+ \text{ a } N^-]$$

para toda trayectoria  $P': N^+ \rightarrow N^-$  y para todo potencial  $u'$  que satisface las condiciones del problema de tensión máxima. En particular, para el potencial  $u$ :

$$d^+(p') \geq [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = d^+(P)$$

y, para la trayectoria  $P$ :

$$[\text{despliegue de } u' \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] \leq d^+(P) = [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-];$$

por tanto  $P$  es una trayectoria mínima y  $v$  es una tensión máxima.

El algoritmo termina en un número finito de iteraciones puesto que en cada una se agrega un nodo a  $S$ . Si termina en el paso 3 se tiene  $[\max] = [\min] < \infty$  como se vió anteriormente. Si termina en el paso 2, (equivalente a  $\alpha = \infty$ ) con el potencial  $u$  que satisface todas las condiciones del problema de máxima tensión, se tiene que para cualquier  $\alpha' \in (0, \infty)$  el potencial  $u' = u + \alpha' e_{N/S}$  también satisface dichas condiciones y:

$$[\text{despliegue de } u' \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] + \alpha'$$

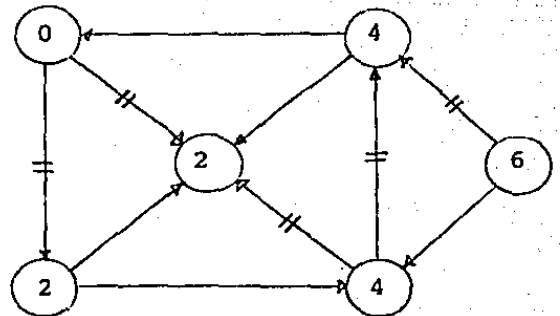
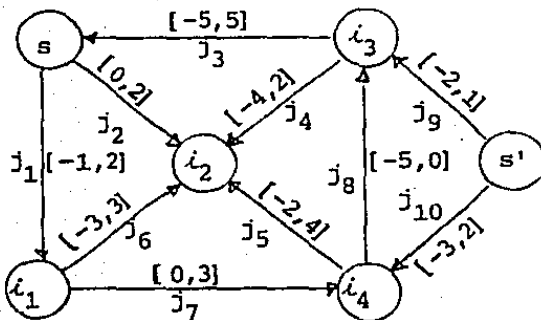
Luego,  $[\sup] = \infty$  y por tanto  $[\min] = \infty$  ( $[\min] \geq [\sup]$ ).

EJEMPLO 1

Determinése la trayectoria mínima de  $s$  a  $s'$  en la siguiente red, en la cual se ha asociado a cada arco un intervalo de generación.

Se utilizará como potencial inicial  $u_i$  igual a cero para todo  $i \in N$ . En el siguiente cuadro se presenta un resumen de las iteraciones; en éste se observa que la trayectoria mínima es  $P : s \rightarrow i_2 \rightarrow i_4 \rightarrow i_3 \rightarrow s'$  con generación superior igual a 6.

Iteración	Cálculo de $\beta$	nodo agragado	$\theta(i)$	$w(i) = \beta$
0		$s$		0
1	5, 2, 2	$i_2$	$j_2$	2
		$i_1$	$j_1$	2
2	5, 2+2, 2+4, 2+3	$i_4$	$j_5$	4
3	5, 4+2, 4+0, 4+3	$i_3$	$j_8$	4
4	2+4, 3+4	$s'$	$j_9$	6

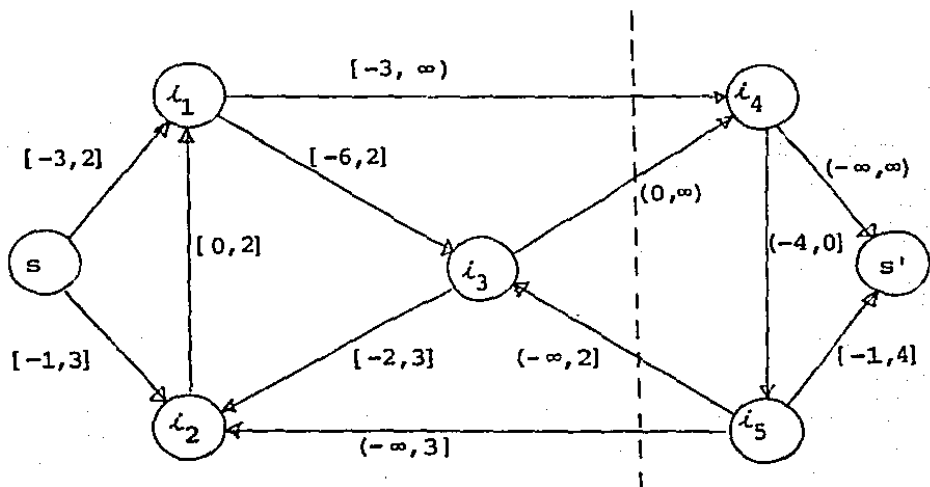


EJEMPLO 2

Determinese la trayectoria mínima de  $s$  a  $s'$  en la siguiente red, utilizando como potencial inicial  $u_0$  igual a cero.

En el siguiente cuadro se presenta un resumen de las iteraciones realizadas. En él se observa la detección del corte de generación ilimitada  $Q=[S,N/S]$ , siendo  $S=\{s, i_1, i_2, i_3\}$ . Por tanto se cumple que  $[\text{sup}] = [\text{mín}] = \infty$  para los problemas de tensión máxima y trayectoria mínima.

Iteración	Cálculo de $\beta$	nodo agregado	$w(i) = \beta$
0		$s$	0
1	2,3	$i_1$	2
2	$\infty, 2+2, 0+2, 3$	$i_2$	2
3	$\infty, 2+2, 2+2, \infty$	$i_3$	4
4	$\infty, \infty, \infty$		$\beta = \infty$



### 3.4 PROBLEMA DE DIFERENCIAL FACTIBLE.

En forma idéntica al problema del flujo factible aquí es necesario determinar cómo se construye un potencial que satisfaga las condiciones del problema de tensión máxima tal que su diferencial sea factible con respecto a las generaciones. Se requiere primero establecer condiciones necesarias para garantizar la existencia de tal potencial. En esta sección se describe un algoritmo que verifica si estas condiciones son satisfechas y, si se cumplen, realiza la construcción del potencial. Primero se define el problema fundamental.

Problema del diferencial factible. Determinar un potencial  $u$  tal que  $v(j) = (\Delta u)(j) \in D(j)$  para todo  $j \in A$  en una red con intervalos de generación  $D(j) = [d^-(j), d^+(j)]$ .

Como en el caso de flujos, puede formularse un modelo más general en el cual se exige que el potencial  $u$  satisfaga también  $u(i) \in D(i)$  (para  $i \in N$ ) donde  $D(i)$  es un intervalo real cerrado no vacío. Este modelo recibe el nombre de problema de potencial factible. Es sencillo verificar que el último problema formulado puede reducirse al problema de diferencial factible.

Las condiciones que garantizan la existencia de solución para el problema de diferencial factible se establece en el siguiente teorema. Como en el caso del teorema paralelo a éste,

referente a factibilidad de flujos, la demostración es cons  
tructiva y proporciona por tanto un algoritmo de solución  
(o de detección de la no existencia de solución).

Teorema de diferencial factible. El problema de diferencial  
factible tiene solución si y sólo si  $d^+(P) \geq 0$  para todo  
circuito P (elemental).

Demostración. La condición necesaria queda establecida por  
el siguiente hecho. Recuérdese que para cualquier trayecto  
ria P y cualquier tensión v factible con respecto a las gene  
raciones,

$$d^-(P) \leq [\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] \leq d^+(P);$$

en particular, si P es un circuito y v un diferencial el  
despliegue de v relativo a P es cero, por lo cual  $d^+(P) \geq 0$  y  
 $d^-(P) \leq 0$ . Obsérvese que en el enunciado del teorema no apa  
rece la condición  $d^-(P) \leq 0$ ; esto se omite puesto que  $d^-(P) =$   
 $-d^+(P')$  en donde P' es el reverso de P.

La condición suficiente se prueba mediante el algoritmo de  
diferencial factible. ■

### Algoritmo de diferencial factible.

Un procedimiento mediante el cual se determina un diferencial factible, si existe, es el algoritmo de diferencial factible. Este algoritmo, como se mencion6 anteriormente, constituye una prueba constructiva del teorema del mismo nombre. Durante el procedimiento o bien se construye el diferencial requerido o bien se detecta un circuito elemental  $P$  tal que  $d^+(P) < 0$  concluy6ndose, en este 6ltimo caso, la no existencia de soluci6n al problema. Se comienza con cualquier potencial. En cada iteraci6n se define una funci6n asociada a los nodos de la red; esta funci6n se utiliza para verificar si existe alguna violaci6n a las restricciones de generaci6n. Si es as6 se realiza una subrutina consistente en una modificaci6n del algoritmo de trayectoria m6nima. Precisamente durante esta subrutina se detecta un circuito de generaci6n superior negativa en caso de que exista. Si esta subrutina finaliza sin haber detectado tal circuito se procede entonces a la modificaci6n del potencial de manera tal que las restricciones de generaci6n satisfechas por el diferencial anterior lo siguen siendo y con tal actualizaci6n se satisface al menos una de las no satisfechas. Con este potencial, mejor que el anterior puesto que el n6mero de restricciones violadas es menor, se realiza otra iteraci6n. A continuaci6n se describe detalladamente el algoritmo.



## ALGORITMO DE DIFERENCIAL FACTIBLE

Propósito. Determinar un potencial  $u$  tal que  $v(j) = (\Delta u) \in D(j)$  para todo  $j \in A$ .

### Descripción

Paso 1. Sea  $u$  cualquier potencial. Sea  $v = \Delta u$ .

Paso 2. Hacer:  $d_0^+(j) = d^+(j) - v(j)$ ,  $d_0^-(j) = d^-(j) - v(j)$ ,  $j \in A$ .  
Calcular, para todo  $i \in N$ :

$$\rho(i) = \min \begin{cases} d_0^+(j) & \text{para } j \in [i, N/i]^+ \\ -d_0^-(j) & \text{para } j \in [i, N/i]^- \\ 0 & \end{cases}$$

- Si  $\rho(i) \geq 0$ , para todo  $i \in N$ , terminar. El potencial  $u$  resuelve el problema del diferencial factible.
- En otro caso, selecciónese cualquier  $\bar{i} \in N$  tal que  $\rho(\bar{i}) < 0$ . Ir a 3.

Paso 3. Aplicar el algoritmo de trayectoria mínima como sigue:

- a. Hacer  $u_0 = u$ . Hacer  $N^+ = N^- = \{\bar{i}\}$
- b. Cualquier término negativo  $d_0^+(j)$  o  $-d_0^-(j)$  se tratará como cero, excepto si  $j$  se recorre desde  $\bar{i}$  hacia afuera.

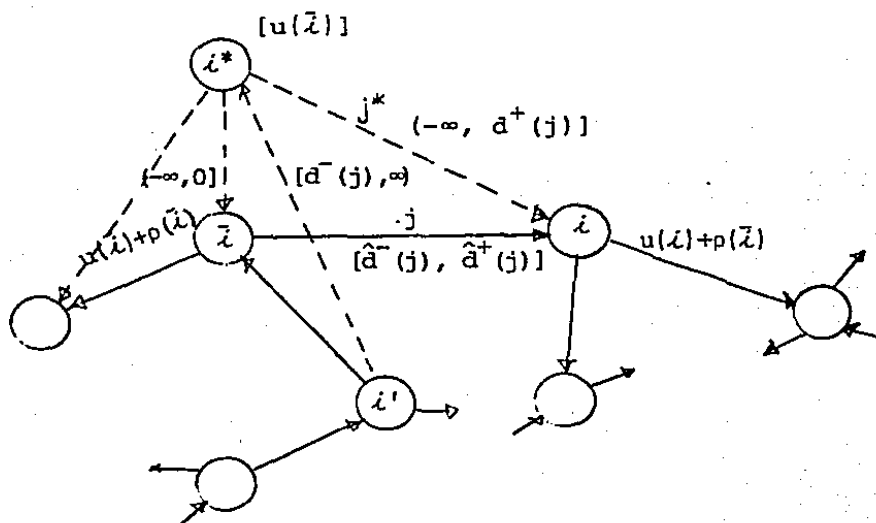
- Si  $\bar{\lambda}$  se alcanza con  $\beta < 0$  terminar. En este caso la  $\theta$  - trayectoria  $P: \bar{\lambda} \rightarrow \bar{\lambda}$  es un circuito tal que  $d^+(P) < 0$  y por tanto el problema no tiene solución.
- En otro caso, términose esta subrutina en cuanto  $\beta \geq 0$  (aún si  $\bar{\lambda}$  no se ha alcanzado).  $S$  no será actualizado. Hacer  $w(i) = 0$ , para todo  $i \in S$  y actualizar  $u = u + w$ . Ir a 2.

Justificación del algoritmo.

Primeramente observese que  $\rho(i) = 0$  si y sólo si  $v(j) \leq d^+(j)$  cuando  $j \in (i, N/i)^+$ , y  $v(j) \geq d^-(j)$ , cuando  $j \in (i, N/i)^-$ . De aquí se concluye que  $\rho(i) = 0$  para todo  $i \in N$  equivale a  $d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j)$  para todo arco  $j$ ; es decir, si el algoritmo termina en el paso 2 se tiene un diferencial factible.

Supóngase ahora que  $\rho(\bar{l}) < 0$  para algún nodo  $\bar{l} \in N$ . Constrúyase la red  $G^*$  (figura) agregando a la red  $G$  un nodo  $i^*$ , copia de  $\bar{l}$ , copias de los arcos adyacentes a  $\bar{l}$  y un arco  $\bar{j} \sim (i^*, \bar{l})$ . Al arco copia  $j^*$  se le asigna intervalo de generación  $(-\infty, d^+(j)]$  si  $j \in (\bar{l}, N/\bar{l})^+$  o  $[d^-(j), \infty)$  si  $j \in (\bar{l}, N/\bar{l})^-$ ; el arco  $\bar{j}$  se le asigna intervalo de generación  $(-\infty, 0]$  y a los arcos de la red original  $[\hat{d}^+(j), \hat{d}^-(j)]$  donde:

$$\hat{d}^+(j) = \text{Max} \{d^+(j), v(j)\} \text{ y } \hat{d}^-(j) = \text{Min} \{d^-(j), v(j)\}$$



Los intervalos de generación definidos en la red  $G^*$  tienen el propósito de que el diferencial  $v_0 = \Delta u_0$ , donde  $u_0(i^*) = u(\bar{l})$  y  $u(i) = u(i) + \rho(\bar{l})$  para todo  $i \in N$ , sea factible en  $G^*$ . En efecto, si  $j$  es un arco original:

$$\hat{d}^-(j) \leq v(j) = v_0(j) \leq \hat{d}^+(j);$$

si  $j^*$  es un arco copia, de la definición de  $\rho(\bar{l})$  se tiene para  $j \in [\bar{l}, N/\bar{l}]^+$ :

$$\begin{aligned} v_0(j^*) &= \rho(\bar{l}) + u(i) - u(\bar{l}) = \rho(\bar{l}) + v(j) \leq \\ &\leq \hat{d}_0^+(j) + v(j) = (\hat{d}^+(j) - v(j)) + v(j) = \hat{d}^+(j) \end{aligned}$$

y para  $j \in [\bar{l}, N/\bar{l}]^-$ :

$$\begin{aligned} v_0(j^*) &= u(\bar{l}) - u(i) - \rho(\bar{l}) = v(j) - \rho(\bar{l}) \geq \\ &\geq v(j) + \hat{d}_0^-(j) = v(j) + \hat{d}^-(j) - v(j) = \hat{d}^-(j). \end{aligned}$$

Finalmente, para  $\bar{j}$  se tiene  $v_0(\bar{j}) = u(\bar{l}) + \rho(\bar{l}) - u(\bar{l}) =$

$$\rho(\bar{l}) < 0.$$

Si se resuelve el problema de máxima tensión para  $N^+ = \{i^*\}$  y  $N^- = \{\bar{l}\}$  en la red  $G^*$  mediante el algoritmo de trayectoria mínima, utilizando  $u_0$  como potencial inicial, se tiene que  $[\max] \leq 0$  dadas las cotas de capacidad de  $\bar{j}$ . Más aún, si  $[\max] < 0$  el algoritmo determina una trayectoria  $P^+ : i^* \rightarrow \bar{l}$  tal que  $d^+(P^+) < 0$ ; esto equivale a un circuito elemental  $P$

con  $d^+(p) < 0$  en la red original  $G$  puesto que  $\hat{d}^+(j) \geq d^+(j)$  y  $\hat{d}^-(j) \leq d^-(j)$ . Si  $[\max] = 0$  el potencial  $u'$  obtenido satisfice  $u'(\bar{l}) - u'(i^*) = 0$  y por tanto  $v'(j) = v'(j^*)$  para todo arco  $j$  adyacente a  $\bar{l}$ . Por tanto  $v'(j) \leq d^+(j)$  para todo  $j \in [\bar{l}, N/\bar{l}]^+$  y  $v'(j) \geq d^-(j)$  para todo  $j \in [\bar{l}, N/\bar{l}]^-$ . Por otra parte, la restricción del diferencial  $v'$  a los arcos de  $G$  es factible con respecto a las generaciones modificadas. Por tanto los valores de  $\rho$  producidos por  $u'$  no son peores que los producidos por  $u$  y además se cumple que  $\rho(\bar{l}) = 0$ .

En la aplicación del algoritmo de trayectoria mínima a  $G^*$  se utilizan generaciones obtenidas restando los valores de  $v_0$ . Esto puede interpretarse como costos relativos para atravesar los arcos. Para los arcos de  $G^*$  pertenecientes a  $G$  estos costos son:

$$\hat{d}_0^+(j) = \text{Max}\{d_0^+(j), 0\}, \quad -\hat{d}_0^- = \text{Max}\{-d_0^-(j), 0\};$$

para los arcos  $j^*$  adyacentes a  $i^*$  se tienen los costos  $d_0^+(j) - \rho(\bar{l})$ , para  $j^*$  correspondiente a  $j \in [\bar{l}, N/\bar{l}]^+$ , y  $-d_0^-(j) - \rho(\bar{l})$ , para  $j^*$  copia de  $j \in [\bar{l}, N/\bar{l}]^-$ . Para el arco  $\bar{j}$  el costo relativo es  $-\rho(i) = |\rho(\bar{l})|$ .

Por otro lado, durante el algoritmo de trayectoria mínima se construye la función  $w$  a partir de una secuencia no decreciente de valores de  $\beta$  (no negativas). Sea  $\bar{\beta}$  el valor de  $\beta$  cuando se alcanza  $\bar{l}$ ; entonces, puesto que [despliegue de  $u_0$  de  $i^*$  a  $\bar{l}] = \rho(\bar{l})$ , se tiene que  $[\max] = [\min] = \rho(\bar{l}) + \bar{\beta}$ . De aquí

que si  $\bar{\beta} < |\rho(\bar{\lambda})|$ , el algoritmo termina con la detección de un circuito de generación superior negativa en G. En otro caso  $\bar{\beta} = |\rho(\bar{\lambda})|$  y entonces puede interpretarse que  $\bar{\lambda}$  fué alcanzado por medio de  $\bar{j}$ . En este último caso se asigna a  $w$  el valor de  $|\rho(\bar{\lambda})|$  en  $\bar{\lambda}$  y en los nodos no tocados por el enrutamiento y se calcula el potencial  $u' = u_0 + w$ .

Dado que  $u_0 = u + \rho(\bar{\lambda})$  en G puede observarse que se tiene  $u' = u + w + \rho(\bar{\lambda})$  en los nodos originales. Estos términos  $\rho(\bar{\lambda})$  pueden ser descartados de los costos relativos de los arcos  $j^*$  y, puesto que exactamente uno de los arcos  $j^*$  debe ser utilizado por la  $\theta$  trayectoria, esto tendrá el efecto de restar  $|\rho(\bar{\lambda})|$  a todos los valores de  $w$  (excepto en  $i^*$ ) y de  $\beta$ . El nivel de  $\bar{\beta}$  será entonces cero; cuando esto suceda puede considerarse simplemente  $u' = u + w$  en G ( $w(i) = 0 = w(i^*)$  en este momento). De esta manera el procedimiento puede realizarse directamente sobre la red G como se establece en la descripción del algoritmo. ■

EJEMPLO 3

Determinese un diferencial factible con respecto a las generaciones definidas en la siguiente red, usando  $u_0$  igual a cero como potencial inicial.

Iteración 1. Los valores de  $\rho(i)$  resultan ser -1 y -2 para los nodos  $i_1$  e  $i_8$  respectivamente y cero para los restantes. El resultado del algoritmo de trayectoria mínima con  $N^+ = N^- = \{i_8\}$  es:

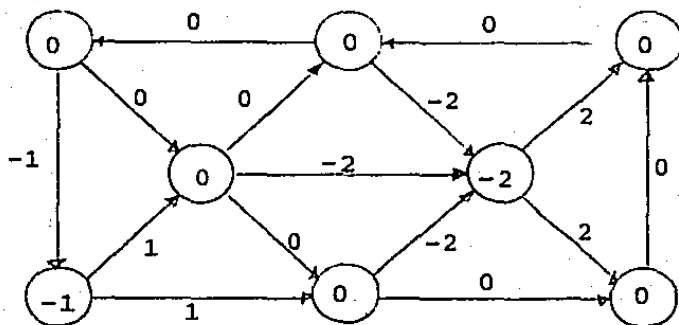
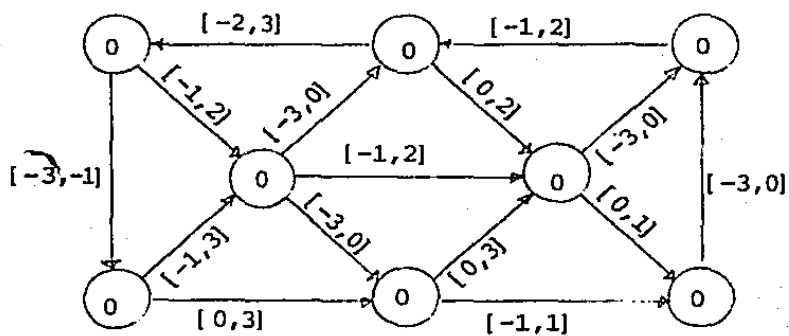
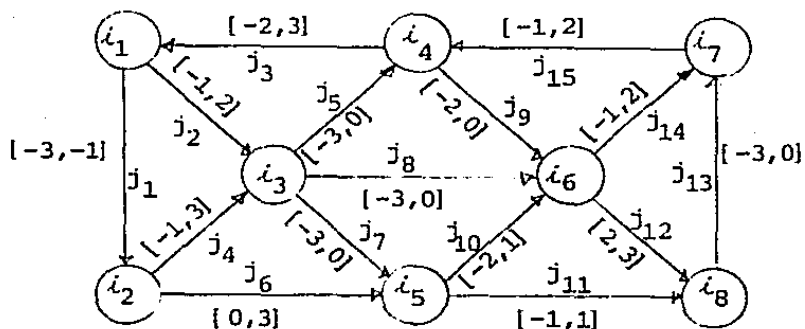
nodo analizado	arcos involucrados	arcos involucrados	W	valores de $\beta$
$i_8$	$j_{11}$	$i_5$	1	-2
	$j_{12}$	$i_6$	-2	
	$j_{13}$	$i_7$	0	
$i_6$	$j_{10}$	$i_5$	0	0
	$j_8$	$i_3$	1	
	$j_9$	$i_4$	0	
	$j_{14}$	$i_7$	0	
	$j_{12}$	$i_8$	1	

Como  $\beta = 0$  se actualizan los intervalos de generación y los potenciales tal como se muestran en la segunda red.

Iteración 2 Se define  $N^+ = N^- = \{i_1\}$  obteniéndose:

nodo analizado	arcos involucrados	arcos involucrados	w	valores de $\beta$
$i_1$	$j_1$	$i_2$	-1	-1
	$j_2$	$i_3$	2	
	$j_3$	$i_4$	2	
$i_2$	$j_1$	$i_1$	2	$\beta=2$
	$j_4$	$i_3$	2	
	$j_6$	$i_5$	2	

Aquí,  $\beta > 0$  y por tanto se obtiene el diferencial factible mostrado en la tercera red junto con el potencial correspondiente.



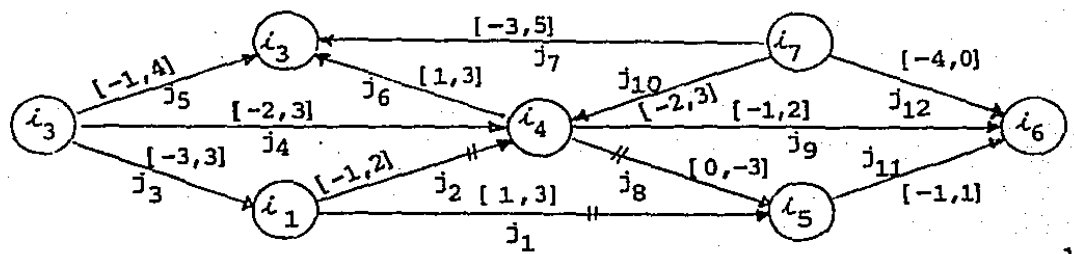


EJEMPLO 4

Determinese un diferencial factible con respecto a las generaciones definidas en la red que se muestra, usando  $u_0$  igual a cero como potencial inicial.

Iteración 1. Los valores de  $\rho(i)$  que se obtienen son  $-1$  para  $i_3$  e  $i_5$ ,  $-3$  para  $i_4$  y cero para los nodos restantes. En el siguiente cuadro se resume el algoritmo de trayectoria mínima para  $N^+ = N^- = \{i_4\}$ . Aquí se detecta el circuito negativo  $P: i_4 + i_5 + i_1 + i_4$ , por lo que se concluye que no existe diferencial factible.

nodo analizado	arco involucrado	nodos involucrado	$w(i)$	valores de $\beta$
$i_4$	$j_2$	$i_1$	1	$\beta = -3$
	$j_4$	$i_2$	2	
	$j_6$	$i_3$	3	
	$j_{10}$	$i_7$	2	
	$j_9$	$i_6$	2	
	$j_8$	$i_5$	-3	
$i_5$	$j_1$	$i_1$	-3	$\beta = -3$
	$j_8$	$i_4$	-3	
	$j_{11}$	$i_6$	-2	
$i_1$	$j_3$	$i_2$	0	$\beta = -1$
	$j_2$	$i_4$	-1	



### 3.5 ALGORITMO DE RECTIFICACION DE TENSION.

Un procedimiento alternativo para construir un diferencial factible lo constituye el algoritmo de rectificación de tensión. Como el algoritmo de diferencial factible éste también detecta la existencia de circuitos de generación superior negativa concluyéndose, en este último caso, la no existencia de diferencial factible en la red. El algoritmo de Minty se utiliza como subrutina durante este procedimiento alternativo; esto constituye un paralelismo con el algoritmo de rectificación de flujo. Se inicia con cualquier potencial y se define como en el algoritmo de rectificación de flujo dos conjuntos  $A^+$  y  $A^-$  formados por los arcos que violen las restricciones de generación. En  $A^-$  se consideran los arcos cuya tensión sea menor que su cota inferior de generación; en  $A^+$  se consideran los arcos cuya tensión sea mayor que la cota superior de generación. Posteriormente se trata de modificar el potencial de los extremos de un arco en  $A^+ \cup A^-$  (cuidando siempre que las restricciones satisfechas lo sigan siendo) a fin de que se cumpla la restricción de generación para tal arco. De este modo, se eliminan arcos de  $A^+ \cup A^-$ ; el procedimiento termina con un potencial correspondiente a un diferencial factible en cuanto no haya arcos que violen restricción alguna ( $A^+ = A^- = \phi$ ). En otro caso se determina un circuito  $P$  tal que  $d^+(P) < 0$  y por tanto finaliza el algoritmo con la conclusión de no existencia de solución.

## ALGORITMO DE RECTIFICACION DE TENSION

Propósito. Determinar un potencial tal que  $v(j) = (\Delta u)(j) \in D(j)$  para todo  $j \in A$ .

### Descripción

Paso 1. Sea  $u$  cualquier potencial. Sea  $v = \Delta u$ .

Paso 2. Sean

$$A^+ = \{j \in A \mid v(j) < d^-(j)\}, \quad A^- = \{j \in A \mid v(j) > d^+(j)\}.$$

- Si  $A^+ = \emptyset = A^-$  terminar. El potencial  $u$  resuelve el problema.

- En otro caso, selecciónese  $\bar{j} \in A^+ \cup A^-$  e ir a 3.

Paso 3. Colorear los arcos de  $G$  de la siguiente manera:

rojo	si	$d^-(j) < v(j) < d^+(j)$
negro	si	$v(j) \leq d^-(j), \quad v(j) < d^+(j)$
blanco	si	$v(j) \geq d^+(j), \quad v(j) > d^-(j)$
verde	si	$d^-(j) = v(j) = d^+(j)$

Aplicar el lema de Minty para  $\bar{j}$ .

- Si se determina un circuito  $P$  compatible que contenga a  $\bar{j}$  terminar. En este caso  $d^+(P) < 0$  y por tanto no existe solución para el problema.

- Si se determina un corte  $Q$  compatible que contenga a  $\bar{j}$ , calcular:

$$\alpha = \min \begin{cases} d^+(j) - v(j) & \text{para } j \in Q^+ \\ v(j) - d^-(j) & \text{para } j \in Q^- \\ \bar{\alpha} & \end{cases}$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \text{dist}(v(\bar{j}), [d^-(\bar{j}), d^+(\bar{j})]) = \\ &= \begin{cases} d^-(\bar{j}) - v(\bar{j}) & \text{si } \bar{j} \in A^+ \\ v(\bar{j}) - d^+(\bar{j}) & \text{si } \bar{j} \in A^- \end{cases} \end{aligned}$$

Actualizar  $u = u + \alpha e_{N/S}$  e ir a 2.

### Justificación del algoritmo.

Supóngase que la aplicación del Lema de Minty proporciona un circuito  $P$  y que se hace  $d_0^+(j) = d_{(j)}^+ - v(j)$  y  $d_0^-(j) = d_{(j)}^- - v(j)$  para todo arco  $j$  en  $P$ . Entonces

$$\begin{aligned} 0 > d_0^+(P) &= \sum_{j \in P^+} d_0^+(j) - \sum_{j \in P^-} d_0^-(j) \\ &= \sum_{j \in P^+} d(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j) \end{aligned}$$

pues la suma de las tensiones en el circuito  $P$  son iguales a cero. Esto equivale a que  $d_0^+(P) = d(P) < 0$  y se detecta un circuito negativo.

Supóngase que la aplicación del Lema de Minty proporciona un corte. Dado que  $d^-(j) < +\infty$  y  $\bar{\alpha} = d^-(j) - v(j) > 0$  se tiene que  $\bar{\alpha}$  es finito. Lo mismo sucede si  $\bar{\alpha} = v(j) - d^+(j)$ . Por otra parte, todos los términos en el cálculo de  $\alpha$  son positivos, por lo que  $\alpha$  es positivo. La actualización de los potenciales es tal que la nueva tensión  $v(\bar{j})$  está más cercana al intervalo  $[d^-(\bar{j}), d^+(\bar{j})]$  que la tensión anterior. Específicamente se mejoró la distancia en un valor  $\alpha$ . Si se introduce la condición de conmensurabilidad se tiene que el algoritmo termina en un número finito de iteraciones. ■

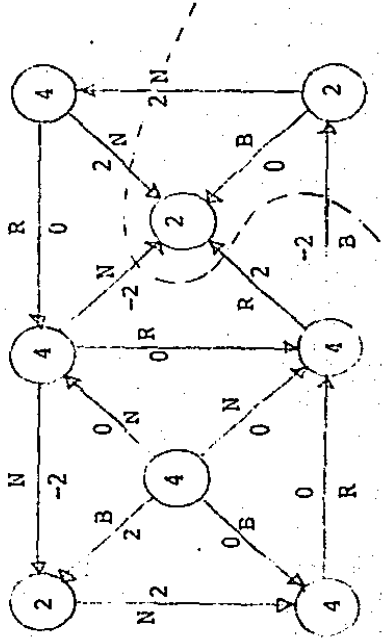
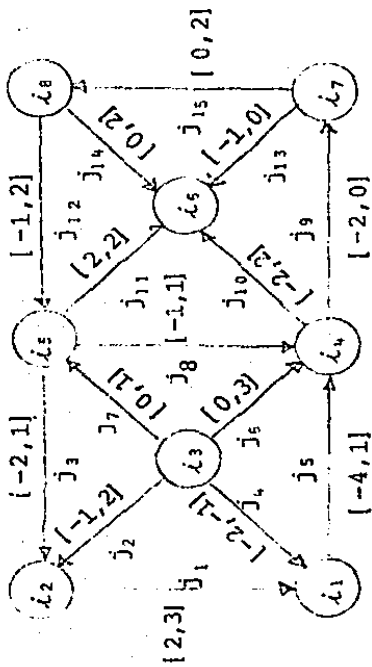
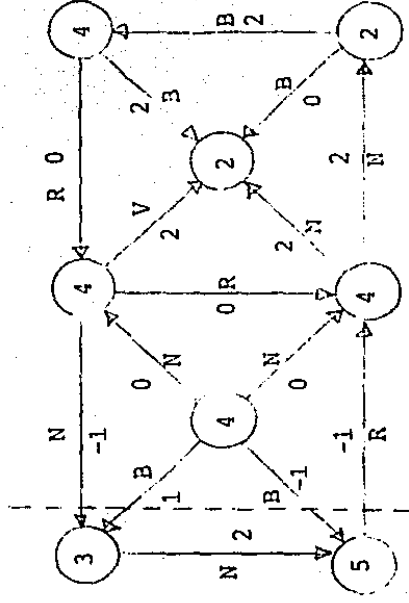
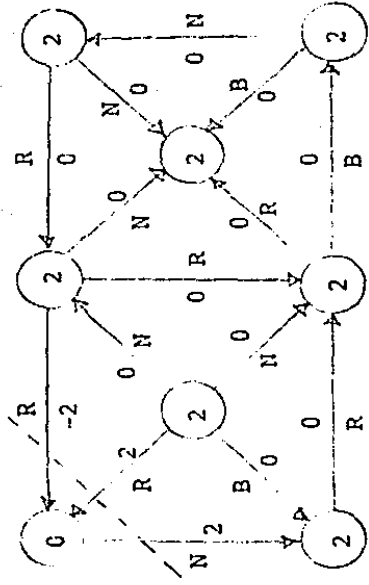
### EJEMPLO 5.

Determinese un diferencial factible con respecto a las generaciones mostradas en la siguiente red, utilizando rectificación de tensión.

Iteración 1. A partir del potencial inicial igual a cero se obtiene  $A^+ = \{j_1, j_{11}\}$  y  $A^- = \{j_4\}$ . Se elige  $\bar{j} = j_1$  y, con la coloración mostrada en la segunda red, se detecta el corte  $Q$  definido por  $S = \{i_2\}$ . El valor de  $\alpha$  resulta ser 2 por lo que se actualiza el potencial obteniéndose el mostrado en la misma red.

Iteración 2. La coloración correspondiente se muestra en la tercera red. Se detecta el corte  $Q = \{S, N/S\}$  con  $S = \{i_6, i_7\}$ , que contiene al arco  $\bar{j} = j_{11}$ . De aquí que  $\alpha = 2$  y se obtiene el potencial mostrado en esta misma red.

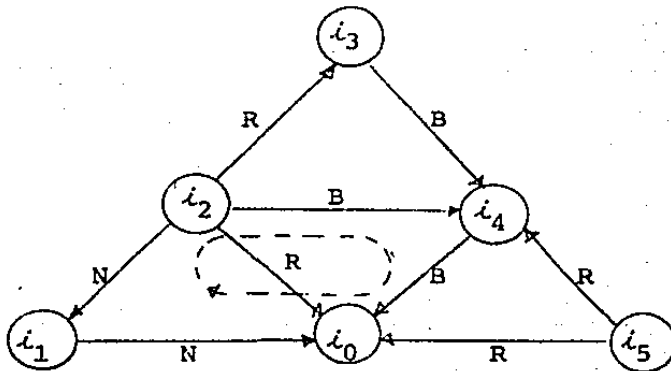
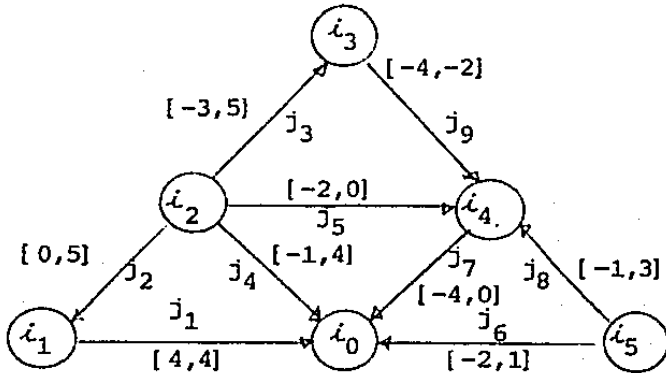
Iteración 3. En esta iteración se obtiene el corte  $Q$ , compatible con la coloración de la cuarta figura, definido por  $S = \{i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8\}$ . En este caso  $\alpha = 1$  y el potencial que resulta se muestra en la red. Este resulta ser factible con respecto a las generaciones.



EJEMPLO 6.

Determinese un diferencial factible con respecto a las generaciones en la siguiente red utilizando el algoritmo de rectificación de tensión.

Si se utiliza potencial inicial igual a cero, se obtiene  $A^+ = \{j_1\}$  y  $A^- = \{j_{19}\}$ . Aquí se observa que el circuito  $P: i_0 + i_1 + i_2 + i_4 \rightarrow i_0$  es compatible con la coloración mostrada en la red y contiene al arco  $j_1$ . Por tanto se asegura que no existe diferencial factible en este caso. Obsérvese que  $d^+(P) = -4 < 0$ .





#### 4. EL PROBLEMA DE ACOPLAMIENTO.

En este capítulo se analiza un problema que surge en algunas aplicaciones consistente en la determinación del máximo número de parejas de objetos que cumplan cierta característica, conocido como problema de acoplamiento máximo. Un ejemplo es el siguiente: En un poblado dividido en colonias, se desea construir casetas de policía para seguridad de los vecinos. Cada caseta puede proporcionar servicio a dos colonias adyacentes a la vez. Se requiere minimizar el número de casetas construidas, con la restricción de que cada colonia tenga acceso a una caseta de seguridad. Este problema puede resolverse determinando el máximo número de pares de colonias que pueden formarse (sumando posteriormente a este número el de colonias no consideradas en las parejas). Esta clase de problemas combinatorios pueden definirse en cualquier red; sin embargo, los conceptos de los capítulos anteriores tienen injerencia solamente en el problema definido en un tipo de redes; las bipartitas. En la sección 4.1 se establecen condiciones mediante las cuales es posible verificar si un acoplamiento dado es máximo o no. De nuevo, la herramienta de optimalidad utilizada es la teoría de dualidad; en efecto, la pareja de problemas acoplamiento máximo - bloqueo mínimo está relacionada mediante el teorema de Konig - Egervary de manera análoga al teorema de flujo máximo - corte mínimo. En la sección 4.2 se presenta un algoritmo de solución simultánea, para el par de problemas duales, basado en estos resultados.

En la sección 4.3 se formula el problema de acoplamiento máximo como uno de flujo máximo. De esta formulación se desprenden resultados muy interesantes; por ejemplo, el corte mínimo correspondiente al modelo de flujos equivale, en cierto sentido, al bloqueo mínimo para la red bipartita. También se observa que el teorema de Konig - Egervary es un caso particular del teorema flujo máximo - corte mínimo. Finalmente, una vez establecida la relación con flujos, en la sección 4.4 se especializa el algoritmo de Ford y Fulkerson dando como resultado un algoritmo que parecería no tener nada que ver con flujos.

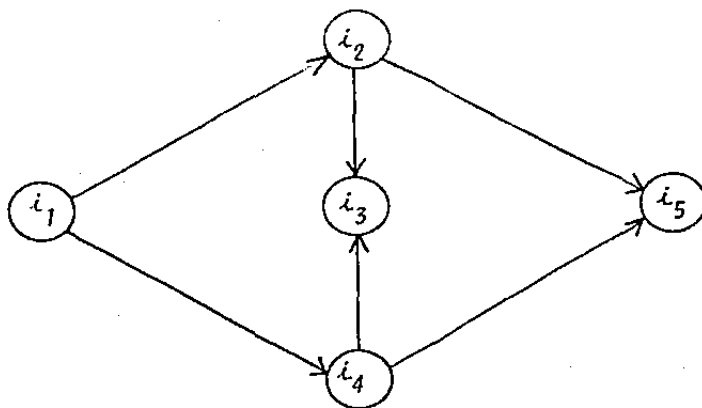
#### 4.1 PROBLEMA DE ACOPLAMIENTO.

Una red es bipartita si su conjunto de nodos puede particionarse en dos conjuntos ajenos de tal modo que no existan arcos en la red con ambos extremos en el mismo conjunto de la partición; es decir, el conjunto de nodos de la red  $G$  puede expresarse como  $K \cup N$ , con  $K \cap N = \phi$  y se cumple que todo  $j \sim (i_1, i_2) \in A$  es tal que  $i_1 \in K$  e  $i_2 \in N$  o viceversa. Las parejas  $(i_1, i_2)$  son compatibles si  $(i_1, i_2) \in A$  o  $(i_2, i_1) \in A$ .

Conviene señalar que la matriz de adyacencia  $\bar{E}$  de una red bipartita tiene una estructura peculiar. Los elementos de la submatriz  $|K| \times |K|$  formada por los primeros  $|K|$  renglones y las primeras  $|K|$  columnas son todos cero puesto que no hay arcos con ambos extremos en el mismo conjunto. Lo mismo sucede con la matriz  $|N| \times |N|$  formada por los últimos  $|N|$  renglones y las últimas  $|N|$  columnas de  $\bar{E}$ . Por otro lado, no tiene importancia la dirección de un arco sino solamente si el par  $(i_1, i_2)$  es compatible o no. De lo anterior se concluye que la red bipartita puede ser representada mediante la matriz  $H$ , de dimensión  $|K| \times |N|$ , de elementos:

$$H_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i_k, i_j) \text{ es compatible.} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta representación matricial de la red y la representación gráfica serán utilizadas indistintamente. En la figura 4.1 se muestra una red bipartita y su representación matricial.



$$K = \{i_1, i_3, i_5\}$$

$$N = \{i_2, i_4\}$$

$$H = \begin{matrix} & i_2 & i_4 \\ i_1 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ i_2 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ i_5 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figura 4.1

El siguiente teorema proporciona una herramienta para caracterizar una red bipartita y juega un papel importante en los métodos de solución para el problema del acoplamiento máximo.

Teorema 1. Una red  $G$  es bipartita si y sólo si no contiene circuitos de cardinalidad impar.

Demostración.

Condición necesaria. Supóngase que la red contiene un circuito de cardinalidad impar. Sea éste  $i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_q, j_q, i_1$ . Sean  $K$  y  $N$  los conjuntos en los cuales puede partitionarse el conjunto de nodos de la red  $G$  y supóngase, sin pérdida de generalidad que  $i_1 \in K$ . Puesto que  $G$  es bipartita todo arco cumple la condición de tener un extremo en  $K$  y otro en  $N$ ; entonces:  $i_2 \in N, i_3 \in K, \dots$ . En general se tiene que  $i_j \in K$ , para  $j$  impar, e  $i_j \in N$ , para  $j$  non. Como el circuito es de cardinalidad impar debe pasar por un número impar de nodos, de donde  $i_q \in K$ . Esto último implica  $i_1 \in N$  lo cual constituye una contradicción puesto que  $K \cap N = \emptyset$ . Por tanto se concluye que la red no contiene circuitos de cardinalidad impar.

Condición suficiente. Supóngase que no existen circuitos de cardinalidad impar en  $G$ . Se construirá la partición de nodos del siguiente modo: Elijase cualquier nodo  $i$  de  $G$  y pntese se color azul. Después hágase el siguiente procedimiento iterativo: colorear de gris los nodos adyacentes a uno pintado

azul y de azul los adyacentes a uno pintado gris. Realícese este proceso de coloración hasta que:

- (i) Todos los nodos están coloreados y todo arco tiene un extremo azul y otro gris.
- (ii) Algún nodo  $i'$  pintado de un color puede ser pintado del otro color.
- (iii) Todos los nodos adyacentes a nodos coloreados también lo están pero existen algunos no coloreados.

En el caso (i) defínanse los conjuntos  $K$  y  $N$  formados por los nodos coloreados de azul y gris respectivamente. En este caso  $K \cup N$  son todos los nodos de  $G$ ,  $K \cap N = \emptyset$  y todos los arcos tienen un extremo en  $K$  y otro en  $N$ . De aquí se concluye que  $G$  es bipartita.

En el caso (ii) el nodo  $i'$  recibe color azul mediante una trayectoria  $P_1: i + i'$  en la cual los nodos están coloreados alternativamente azul y gris; análogamente recibe color gris mediante una trayectoria  $P_2: i + i'$  con las mismas características. Sea  $i^*$  el penúltimo nodo común a las dos trayectorias y sean  $P_1': i^* + i'$  y  $P_2': i^* + i'$  las trayectorias distintas, partes de  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente. Si  $i^*$  tiene color azul entonces  $P_1$  es de cardinalidad par y  $P_2$  es de cardinalidad non. Pero la unión de  $P_1$  y  $P_2$  constituye un circuito de de cardinalidad non, lo cual contradice la hipótesis. Por

tanto este caso no puede presentarse.

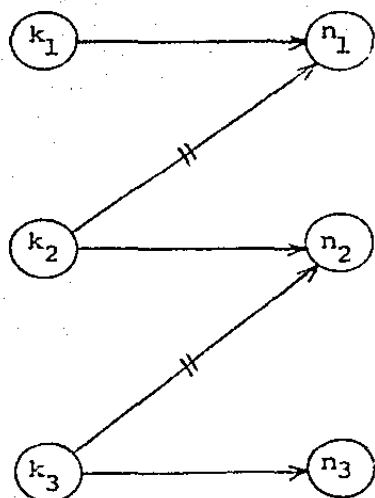
En el caso (iii) la red resulta ser no conexa. Repitiendo el proceso de coloración en cada componente conexa de  $G$ , este caso se reduce al caso (i).

De esto se concluye que toda red que no contenga circuitos de longitud impar es bipartita y con esto se termina la prueba. ■

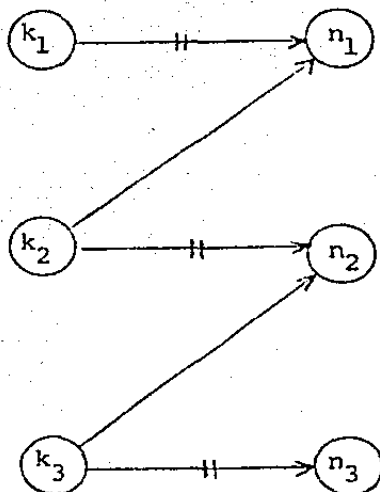
El problema de acoplamiento que se enuncia a continuación puede ser definido en cualquier red; sin embargo, los conceptos y resultados de los capítulos anteriores son aplicables sólo en el caso de redes bipartitas, por lo cual éstas son el objeto de interés.

Un acoplamiento  $M$  en una red bipartita con conjunto de nodos  $K \cup N$  y conjunto de arcos  $A$ , es un subconjunto de arcos no adyacentes entre sí. El problema consiste en determinar el acoplamiento  $M$  de cardinalidad máxima al que se llamará simplemente acoplamiento máximo.

Es importante establecer la diferencia entre los conceptos de acoplamiento máximo y maximal. Un acoplamiento maximal es aquél para el cual no puede agregarse ningún arco. En la figura 4.2 se muestran un acoplamiento máximo y uno maximal. (arcos marcados).



Acoplamiento maximal



Acoplamiento máximo

Figura 4.2

Un ejemplo de problema de acoplamiento máximo es el siguiente: Supóngase que el conjunto  $K$  representa un conjunto de personas y el conjunto  $N$  representa un conjunto de trabajos. El arco  $j \sim (i_1, i_2)$  está definido si y sólo si es posible que la persona  $i_1$  realice el trabajo  $i_2 \in N$ . Se desea determinar el máximo número de trabajos a realizar por las personas del conjunto  $K$  (cada persona realiza un solo trabajo).

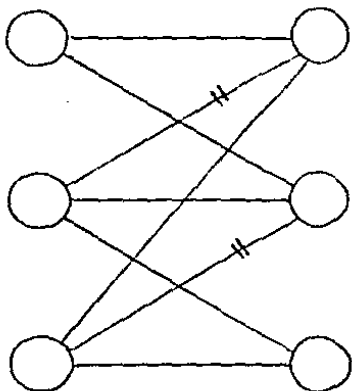
En la figura 4.3(a) se muestran una red y un acoplamiento  $M$  definido en ella. Esta red contiene una trayectoria, mostrada en la figura 4.3(b), que posee una propiedad especial.



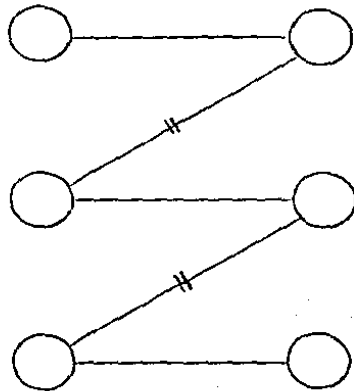
En efecto, obsérvese que al intercambiar los arcos del acoplamiento que están en la trayectoria por los que no lo están, se produce un acoplamiento  $M'$  (mostrado en la figura 4.3(c)) de cardinalidad mayor que la de  $M$ . Este tipo de trayectorias recibe el nombre de aumentante y se define a continuación junto con otros conceptos de utilidad.

Se dice que un vértice es expuesto o no saturado por el acoplamiento  $M$ , si no es extremo de ninguno de sus arcos. Una trayectoria es alternante con respecto al acoplamiento  $M$ , si sus arcos pertenecen alternadamente a  $M$  y a su complemento. Si los extremos inicial y final de la trayectoria son expuestos, ésta recibe el nombre de trayectoria aumentante. El nombre de aumentante proviene de la posibilidad de definir un acoplamiento de mayor cardinalidad en este tipo de trayectorias; para ello basta intercambiar, como en el ejemplo de la figura 4.3, los arcos de la trayectoria que están en  $M$  por los de la trayectoria que no están en  $M$  puesto que los primeros son uno más que los segundos. En efecto, si los extremos de la trayectoria son expuestos entonces la trayectoria es de cardinalidad impar. Además, puesto que los arcos primero y último no forman parte del acoplamiento, el número de arcos que están en la trayectoria y en el acoplamiento es menor en una unidad que el número de arcos de la trayectoria que no están en el acoplamiento, lo que se establece en el siguiente teorema. Si lo anterior es válido, un procedimiento natural para

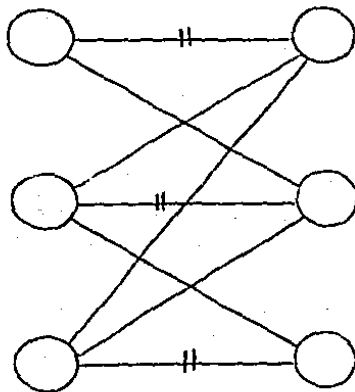
obtener un acoplamiento máximo consiste en la detección de trayectorias aumentantes, mientras sea posible, y en la construcción por medio de éstas de acoplamientos de cardinalidad cada vez mayor.



(a) Acoplamiento M



(b) Trayectoria aumentante



(c) Acoplamiento M'

Figura 4.3

Teorema 2. (Berge). Un acoplamiento  $M$  es máximo si y sólo si no existen en la red trayectorias aumentantes relativas a  $M$ .

Demostración.

Condición necesaria. Supóngase que existe una trayectoria  $P$  aumentante relativa a  $M$ . Nótese que ningún arco del conjunto  $M - P \cap M$  es adyacente a ningún arco de  $P$  puesto que los extremos de  $P$  son expuestos y los nodos restantes de  $P$  son adyacentes a algún arco de  $P \cap M$ . Entonces el conjunto de arcos  $M' = (M - P \cap M) \cup (P - P \cap M)$  es un acoplamiento. Por otro lado, puesto que los extremos de  $P$  no son adyacentes a  $M$ , la cardinalidad de  $P$  es impar y  $P - P \cap M$  contiene un arco más que  $P \cap M$ . Luego,  $|M'| = |M| + 1$  y por tanto  $M$  no es de cardinalidad máxima.

Condición suficiente. Sea  $M$  un acoplamiento y supóngase que no existen trayectorias aumentantes relativas a  $M$ . Sea  $M^*$  un acoplamiento de cardinalidad máxima. Se probará que  $M$  y  $M^*$  son de la misma cardinalidad. Considérese la red formada por los arcos que están en uno sólo de los acoplamientos, es decir  $M \cup M^* - M \cap M^*$ , junto con sus nodos extremos. Ningún nodo de esta red es adyacente a más de dos arcos ya que de lo contrario  $M$ , o  $M^*$ , tendría arcos adyacentes y esto violaría la definición de acoplamiento. La red de este modo construida puede estar formada de varias componentes conexas, cada

una de las cuales puede ser un nodo aislado, una trayectoria elemental o un circuito elemental como se muestra en la figura 4.4.

Trayectorias del tipo (b) no pueden existir, dada la hipótesis, puesto que serían aumentantes relativas a  $M$ . Trayectorias del tipo (c) no pueden existir puesto que serían aumentantes con respecto a  $M^*$  y esto contradiría que  $M^*$  es máximo. Circuitos del tipo (e) con un número impar de arcos tampoco son posibles puesto que habría dos arcos de  $M$ , o de  $M^*$ , adyacentes. Los únicos casos posibles son entonces (a), (d) y (e) con un número par de arcos. En todos estos casos el número de arcos de  $M$  y de  $M^*$  coinciden. Si  $n_k(M)$  y  $n_k(M^*)$  son respectivamente el número de arcos de  $M$  y el número de arcos de  $M^*$  en la  $k$ -ésima componente conexa de la red se tiene

$$\sum_k n_k(M) = \sum_k n_k(M^*)$$

y por tanto

$$|M| = |M \cap M^*| + \sum_k n_k(M) = |M \cap M^*| + \sum_k n_k(M^*) = |M^*|$$

y entonces  $M$  es de cardinalidad máxima. ■

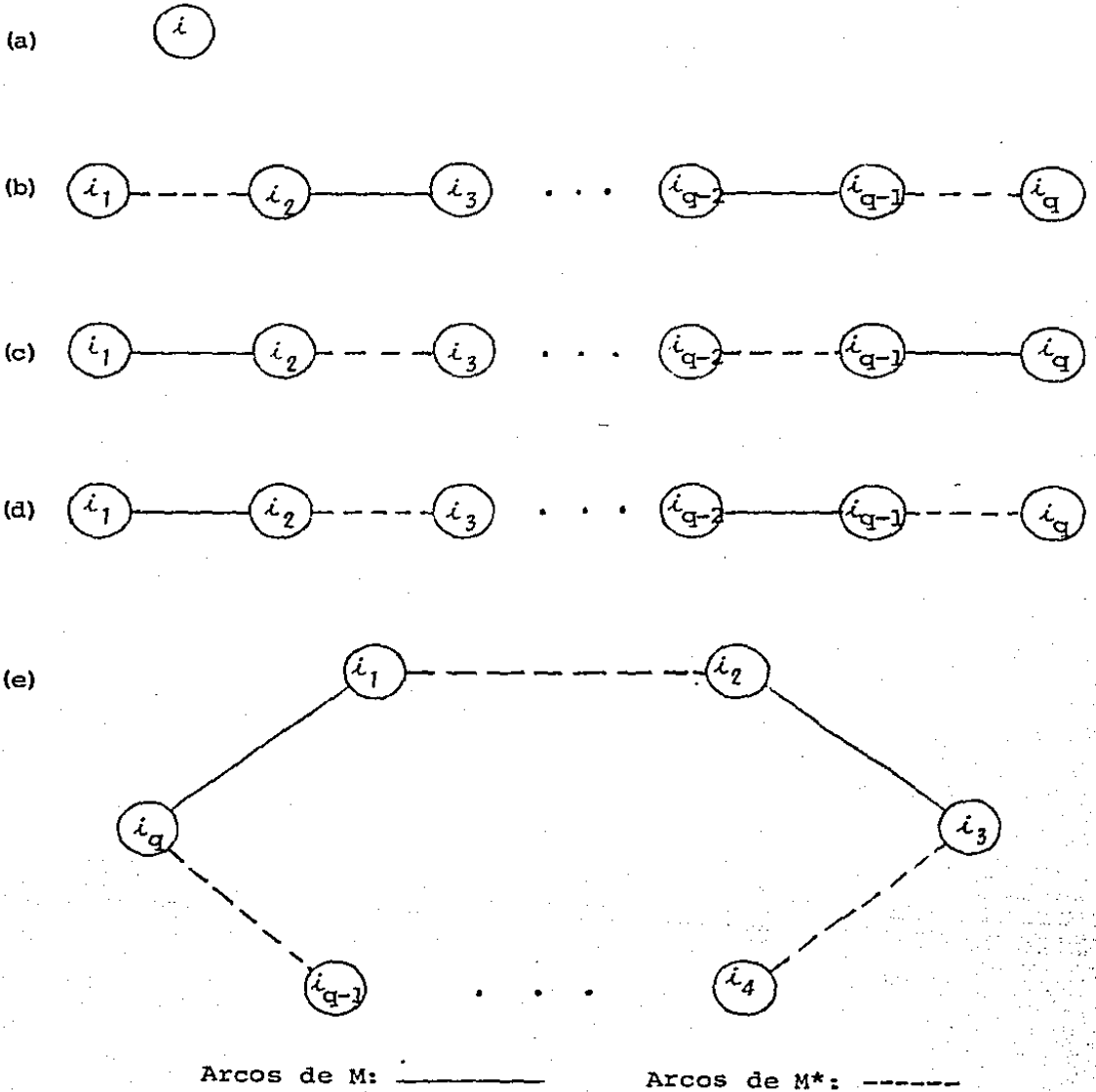


Figura 4.4

Así como se define el concepto dual de corte para el problema de flujo máximo, puede ser definido el concepto dual de bloqueo para el problema de acoplamiento máximo.

Un bloqueo o conjunto transversal en una red es un conjunto de nodos  $B \subseteq V$  tal que, para todo arco  $(i, j) \in A$  se tiene  $i \in B$  o  $j \in B$ . El problema del bloqueo o transversal mínimo consiste en determinar el bloqueo de mínima cardinalidad. De nuevo, debe quedar clara la diferencia entre bloqueos mínimo y minimal. En la figura 4.5 se muestran un bloqueo mínimo (no existe otro de cardinalidad menor) y uno minimal (no puede ser eliminado ningún nodo). Este problema del bloqueo mínimo tiene gran importancia en la determinación del acoplamiento máximo. De hecho, constituye una cota para él, lo que se establece en el siguiente teorema.

Teorema 3. Sea  $G$  una red bipartita. Sean  $M$  un acoplamiento y  $B$  un bloqueo en  $G$ . Entonces:

$$|B| \geq |M|$$

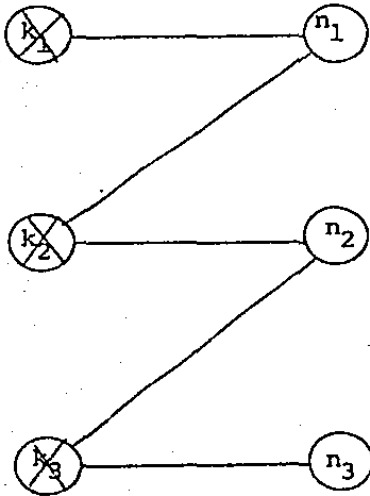
Demostración. Todo bloqueo de  $G$  debe contener al menos un nodo adyacente a cada arco de  $M$ . Por otro lado, un nodo no puede ser adyacente a varios arcos de  $M$ . Por tanto es válida la afirmación del teorema. ■

Puesto que el bloqueo es el concepto dual del de acoplamiento máximo, se deduce el resultado se enuncia a continuación y

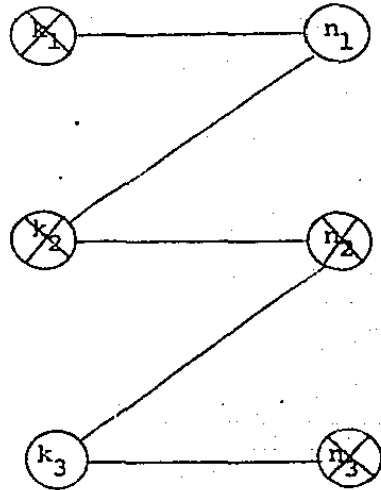
que servirá como herramienta de optimalidad. Este resultado será probado más adelante con ayuda de la teoría del problema de flujo máximo.

Teorema 4. (König-Egervary). En una red bipartita el número de arcos del acoplamiento máximo es igual al número de no dos del bloqueo mínimo. Es decir:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Max } M \text{ en el} \\ \text{problema de} \\ \text{acoplamiento} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Min } B \text{ en el} \\ \text{problema de} \\ \text{bloqueo} \end{array} \right]$$



Bloqueo mínimo:  $\{k_1, k_2, k_3\}$



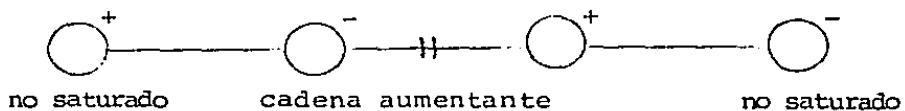
Bloqueo minimal:  $\{k_1, k_2, n_2, n_3\}$

Figura 4.5

#### 4.2 ALGORITMO DE SOLUCION.

El algoritmo se basa en la determinación de trayectorias aumentantes para construir acoplamientos de cardinalidad cada vez mayor hasta que éstas no existen. Es en esta parte donde se utiliza el concepto de bloqueo.

A grandes rasgos, el algoritmo procede de la siguiente manera: Primeramente se proporciona un acoplamiento cualquiera (puede ser el acoplamiento vacío). Después se utiliza un proceso de marcaje en los vértices que servirá para la prueba de optimalidad. En efecto, se elige un nodo no saturado y se marca con "+" y se revisa si existen trayectorias aumentantes entre este nodo y algún otro no saturado del siguiente modo: los nodos adyacentes se marcan "-" y los adyacentes a éstos en el acoplamiento, se marcan "+" y así sucesivamente. Si se marca "-" para algún nodo no saturado, se habrá determinado la trayectoria deseada.



En este caso se construye un acoplamiento de cardinalidad mayor en una unidad como se indica durante la demostración de la condición necesaria del teorema de Berge. En caso contrario, cuando se termina el proceso de marcaje, el conjunto de nodos marcados "-" resulta ser un transversal en correspondencia biunívoca con los arcos del acoplamiento construido y de aquí que ambos sean óptimos.



## ALGORITMO DE MARCAJE

Propósito: Determinar un acoplamiento máximo en una red con conjunto de nodos  $K \cup N$  y de arcos  $A$ .

### Descripción

- Paso 1. Iniciar con un acoplamiento cualquiera  $M$ . (El vacío puede ser considerado).
- Paso 2. Ningún nodo está marcado
- Paso 3. Si todos los nodos no saturados por  $M$  están marcados ir a 4. Si existe un nodo  $i$  no saturado por  $M$  y no marcado, ir a 5.
- Paso 4. Marcar con "+" los nodos no marcados de  $K$  y con "-" los no marcados de  $N$ . Terminar,  $M$  es un acoplamiento máximo y  $B$ , el conjunto de nodos marcado "-", es un bloqueo mínimo.
- Paso 5. Marcar con "+" el nodo  $i$  y repetir iterativamente:
- Marcar con "-" todos los nodos adyacentes de un nodo "+"
  - Si un nodo no saturado está marcado "-" ir a 6
  - Marcar con "+" el nodo adyacente, en el acoplamiento  $M$ , a uno marcado "-".
- Cuando no sea posible continuar ir a 3.
- Paso 6. Se ha determinado una trayectoria  $P$  aumentante relativa a  $M$ ; Hacer  $M = (M - P \cap M) \cup (P - P \cap M)$ . Ir a 2.

Justificación del algoritmo. El algoritmo determina en un número finito de pasos una trayectoria aumentante con respecto al acoplamiento actual  $M$  (paso 5) si existe. Si no existe tal, se han determinado un acoplamiento  $M$  y un bloqueo  $B$  de la misma cardinalidad (paso 4) y por tanto  $M$  es máximo y  $B$  es mínimo.

En efecto, no existen dos nodos adyacentes marcados con "+" puesto que cuando un nodo se marca "+" todos los adyacentes a él se marcan "-". De aquí que si el algoritmo termina en el paso 4 con todos los nodos marcados, entonces todo arco es adyacente a un nodo marcado "-". Por tanto, el conjunto de nodos marcados "-" forman un bloqueo de la red.

Por otro lado, no existen arcos del acoplamiento cuyos extremos estén marcados ambos con "-"; esto se comprueba de la siguiente manera: Sean  $i_1, i_2$  tales que  $j \in (i_1, i_2)$  con  $j \in M$  y supóngase que ambos tienen la etiqueta "-"; sea  $i$  el nodo no saturado, marcado con "+", desde el cual  $i_1$  e  $i_2$  reciben etiqueta "-". Las trayectorias de  $i$  a  $i_1$  y de  $i$  a  $i_2$  que hicieron posible este marcaje deben ser de longitud par; estas trayectorias junto con el arco  $j$  forman un circuito de longitud impar lo cual contradice que la red sea bipartita. Por tanto todo nodo marcado "-", si se termina en el paso 4, es adyacente a exactamente un arco de  $M$ .

Con los argumentos anteriores puede afirmarse que el conjunto

de nodos marcados "-" es un bloqueo  $B$  en biyección con el conjunto de arcos de  $M$ . Por tanto,  $B$  es mínimo y  $M$  es máximo.

Si en el paso 5 se identifica un nodo no saturado marcado "-", dada la manera de marcar, se ha detectado una trayectoria alternante con extremos no saturados. Esta trayectoria es por tanto aumentante con respecto al acoplamiento actual; por el teorema de Berge, existe en este caso un acoplamiento de cardinalidad mayor. Este se construye en el paso 6.

Además, puesto que la cardinalidad del acoplamiento se incrementa una unidad en cada iteración, el algoritmo converge en un número finito de pasos. ■

### EJEMPLO 1.

Determinese un acoplamiento de cardinalidad máxima en la red de la figura 4.6(a) mediante el algoritmo de marcaje.

Iteración 1. Se inicia con el acoplamiento M formado por los arcos  $(k_4, n_1)$  y  $(k_6, n_3)$ .

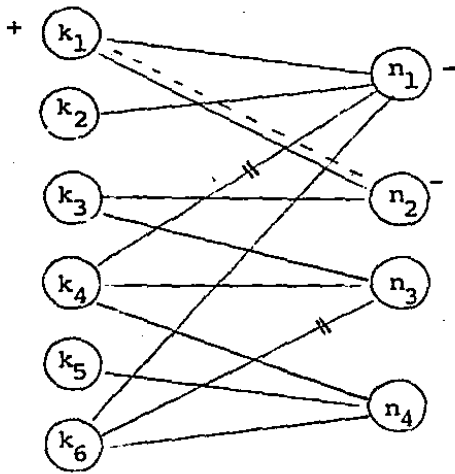
El nodo  $k_1$ , no saturado por M, se marca con "+". Se marcan los nodos adyacentes  $n_1$  y  $n_2$  con "-". Puesto que el nodo no saturado  $n_2$  recibió etiqueta "-" se ha determinado una trayectoria P aumentante; ésta está formada por el arco  $(k_1, n_2)$  y se muestra con línea punteada en la figura 4.6(a). En este caso  $P \cap M$  es vacío por lo que se redefine M simplemente agregando el arco  $(k_1, n_2)$ .

Iteración 2. El nodo  $k_2$  no saturado se marca con "+". El nodo adyacente  $n_1$  se marca "-". El nodo adyacente, saturado,  $k_4$  se marca con "+". Los nodos adyacentes a  $k_4$  se marcan "-"; éstos son  $n_3$  y  $n_4$ . Puesto que  $n_4$  es no saturado y tiene etiqueta "-" se ha determinado una trayectoria aumentante P formada por los arcos  $(k_2, n_1)$ ,  $(n_1, k_4)$  y  $(k_4, n_4)$ . (Ver figura 4.6(b)). Se tiene entonces que:

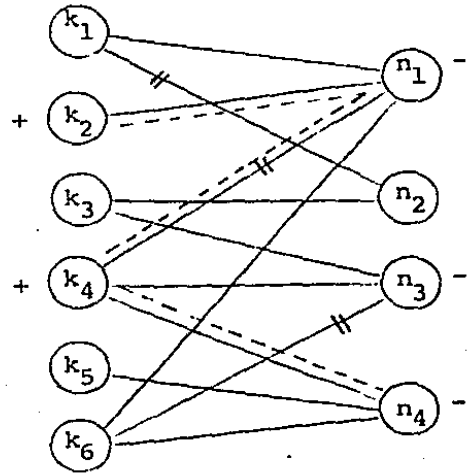
$$M = (M - P \cap M) \cup (P - P \cap M) = \{(k_1, n_2), (k_6, n_3)\} \cup \{(k_2, n_1), (k_4, n_4)\}$$

Los arcos de M se han marcado en la figura 4.6(c).

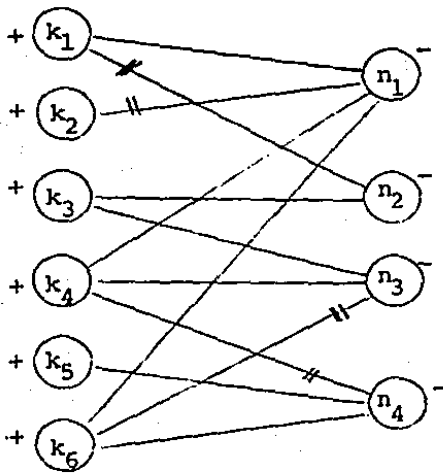
Iteración 3. Se marca el nodo  $k_3$  no saturado con "+". Los nodos adyacentes  $n_2$  y  $n_3$  se marcan con "-". Los nodos adyacentes a  $n_2$  y  $n_3$  que están saturados son  $k_1$  y  $k_6$  por lo que éstos se marcan con "+". Los adyacentes a estos dos últimos se marcan con "-"; son:  $n_1$  y  $n_4$ ; se marcan con "+" los nodos saturados  $k_2$  y  $k_4$  adyacentes a  $n_1$  y  $n_4$ . Finalmente el nodo  $k_5$  no saturado recibe la etiqueta "+". En este momento todos los nodos no saturados por M están marcados (de hecho lo están todos los de la red); se concluye entonces que M es un acoplamiento máximo y que el conjunto de nodos marcados "-"  $B = N$  es un bloqueo mínimo.



( a )



( b )



( c )

Acoplamiento Máximo:

$$M = \{(k_1, n_2), (k_2, n_1), (k_4, n_4), (k_6, n_3)\}$$

Bloqueo Mínimo:

$$B = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$$

Figura 4.6

### 4.3 RELACION CON FLUJO MAXIMO.

El problema de acoplamiento puede ser resuelto también de manera eficiente con el algoritmo de flujo máximo. En efecto, a la red  $G$  bipartita con conjunto de nodos  $K \cup N$  y conjunto de arcos  $A$  se asocia la red  $G'$  con conjunto de nodos  $K \cup N \cup \{s, s'\}$  y conjunto de arcos  $A' = A \cup \{(s, k) \mid k \in K\} \cup \{(n, s') \mid n \in N\}$ . Los elementos de  $A$  son los arcos de la Red  $G$  considerándolos todos con dirección de  $K \cup N$ ; es decir  $j \sim (k, n)$  para todo  $j \in A$ , donde  $k \in K$ ,  $n \in N$ . Los nodos  $s$  y  $s'$  fungirán como origen y destino respectivamente. Los intervalos de capacidad asignados a los arcos de  $G'$  son los siguientes:

$[0, 1]$  para los arcos del conjunto  $\{(s, k) \mid k \in K\} \cup \{(n, s') \mid n \in N\}$

$[0, \infty]$  para los arcos elementos de  $A$ .

Para determinar el acoplamiento máximo en la red  $G$  basta con determinar el flujo máximo de  $N^+$  a  $N^-$ , con  $N^+ = \{s\}$  y  $N^- = \{s'\}$  en la red  $G'$ . Cabe señalar que este problema de flujo máximo tiene solución puesto que los arcos de  $A$  constituyen un corte de capacidad finita. Por otro lado, puesto que las cotas para el flujo a través de cada arco son enteras, el problema tiene solución entera.

Obsérvese que si el flujo a través del arco  $(k, n) \in A$  es diferente de 0 entonces, por las condiciones de integrabilidad y no-negatividad de  $x$  y por las restricciones de conservación

en  $k, n$ , el flujo a través de los arcos  $(s, k)$ ,  $(k, n)$  y  $(n, s')$  es igual a 1; más aún, el flujo a través de los demás arcos adyacentes a  $k$  y a  $n$  es igual a 0. De aquí se concluye que los arcos con flujo distinto de 0 forman un acoplamiento  $M$  en  $G$ ; además el número de estos arcos es igual al flujo de  $x$  de  $s$  a  $s'$ . Es fácil verificar que, inversamente, si  $M$  es cualquier acoplamiento entonces el flujo definido como 1 a través de los arcos de  $M$ , 1 a través de los arcos adyacentes a estos últimos y a  $s$  o  $s'$  y 0 a través de los demás arcos es un flujo  $x$  que satisface todas las restricciones y el valor de  $x$  de  $s$  a  $s'$  es igual a la cardinalidad de  $M$ .

Es válido entonces afirmar que todo flujo  $x$  entero que satisface las condiciones del problema de flujo máximo en la red  $G'$  corresponde exactamente a un acoplamiento  $M$  tal que

$$\left[ \begin{array}{c} \text{flujo de } x \text{ de} \\ s \text{ a } s' \end{array} \right] = |M|$$

De aquí que sea equivalente resolver ambos problemas.

De esta formulación del problema del acoplamiento máximo como problema de flujo máximo se obtiene un resultado dual. En efecto, asociado con este problema de flujo máximo se tiene un problema de corte mínimo; este último equivale precisamente al problema del transversal o bloqueo mínimo y el resultado dual se convierte en el teorema de König-Egerváry.



Teorema 4. (König-Egerváry).

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Max } M \text{ en el} \\ \text{problema de} \\ \text{acoplamiento} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Min } B \text{ en el} \\ \text{problema de} \\ \text{acoplamiento} \end{array} \right]$$

Demostración. El problema del bloqueo mínimo equivale al del corte mínimo para la red de flujo asociada al problema de acoplamiento. Los cortes de capacidad finita están formados por arcos adyacentes a  $s$  o a  $s'$ ; es decir, son de la forma  $Q = [S, N/S]$ , donde  $s \in S$  y  $s' \notin S$  y no existe  $(k, n) \in A$  con  $k \in S$  y  $n \notin S$  (recuérdese que estos arcos tienen capacidad infinita). Cada arco de  $Q$  adyacente a  $s'$  corresponde a un nodo  $k \in K$  tal que  $k \notin S$ ; del mismo modo, cada arco de  $Q$  adyacente a  $s$  corresponde a un nodo  $n \in N$  tal que  $n \in S$ . Puesto que estos arcos tienen capacidad superior igual a 1 se concluye:

$$c^+(Q) = |K/S| + |N \cap S|$$

Entonces estos cortes corresponden uno a uno a los bloqueos  $B$ , donde la correspondencia puede expresarse:  $B = (K/S) \cup (N \cap S)$ , y se tiene  $c^+(Q) = |B|$ . Con esto se concluye la validez del teorema. ■

Es importante hacer notar que el algoritmo de Ford y Fulker-son adquiere características particulares cuando se emplea para resolver el problema del acoplamiento máximo. Esto será analizado en la siguiente sección. Antes considérese un ejemplo.

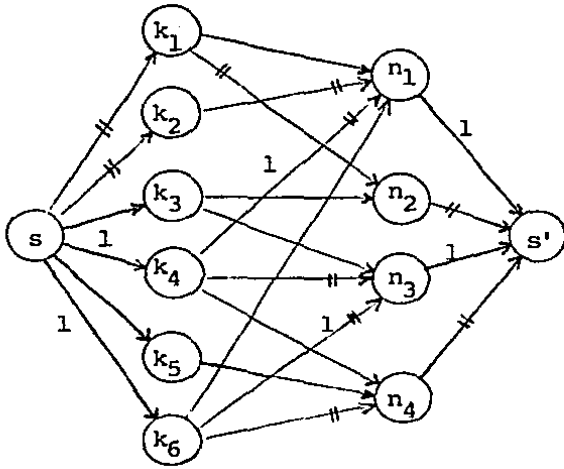
## EJEMPLO 2.

Determinese un acoplamiento de cardinalidad máxima utilizando el algoritmo de Ford y Fulkerson en la red bipartita representada por la matriz:

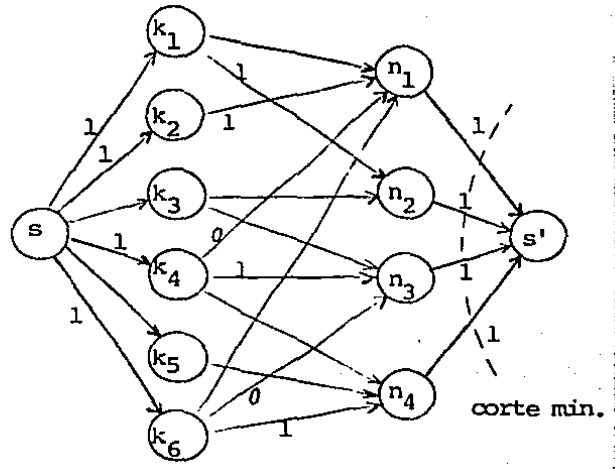
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Primeramente se formula la red de flujo correspondiente y se define un flujo inicial (mostrado en la figura 4.7(a)). Utilizando el algoritmo de Ford y Fulkerson se determinan dos trayectorias aumentantes de flujo, marcadas con línea punteada en la figura 4.7(a), y se modifica el flujo a través de ellas resultando el definido en la figura 4.7(b). Este flujo es el máximo por lo que los arcos con flujo igual a una unidad contenidos en la red original forman un acoplamiento de cardinalidad máxima (mostrado en la figura 4.7(c)). El corte mínimo resulta ser  $Q = [S, X/S]$ , en donde  $X = K \cup N \cup \{s, s'\}$  y  $S = \{s\} \cup \{K \cup N\}$ , de donde se obtiene el bloqueo mínimo:

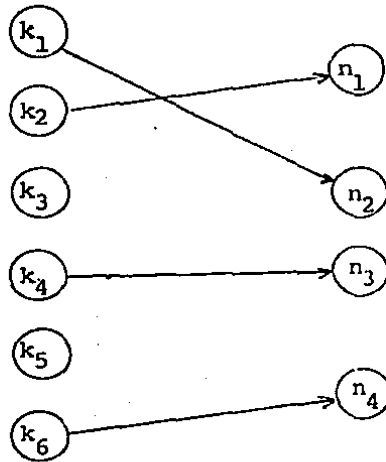
$$B = (K/S) \cup (N \cap S) = N.$$



(a) Flujo inicial



(b) Flujo máximo



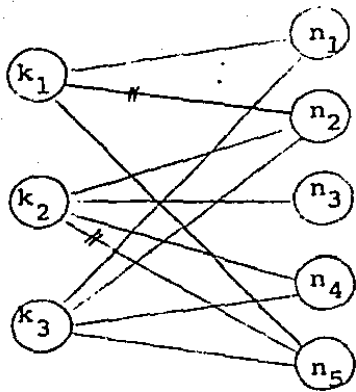
(c) Acoplamiento máximo

Figura 4.7

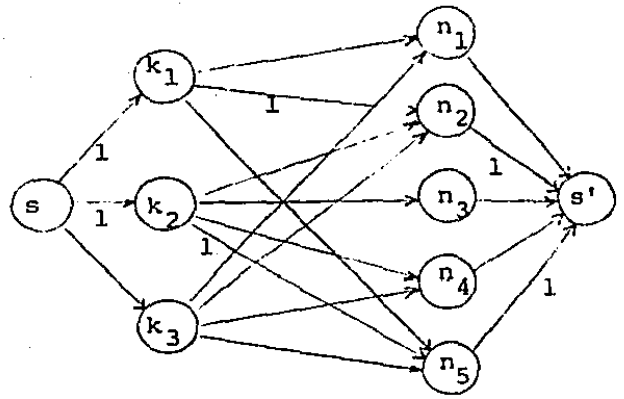
#### 4.4 ESPECIALIZACION DEL ALGORITMO DE FLUJO MAXIMO PARA EL PROBLEMA DE ACOPLAMIENTO.

Dada la estructura especial del problema de flujo máximo asociado al problema de acoplamiento máximo, el algoritmo de Ford y Fulkerson puede ser especializado en estos casos produciendo de esta manera un algoritmo más eficiente para resolver el problema.

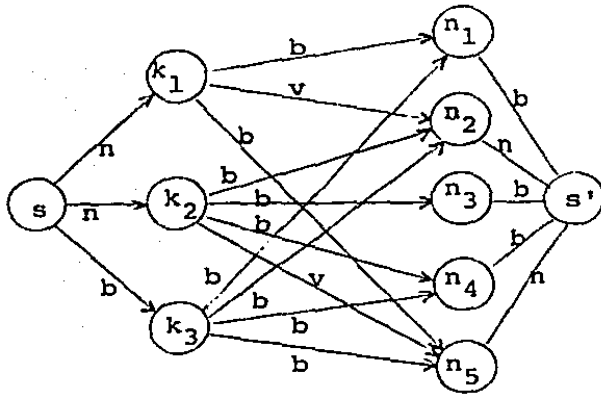
En efecto, las trayectorias aumentantes de flujo tienen características particulares. Obsérvese que los arcos de un acoplamiento  $M$  son verdes mientras que los que no están en  $M$  son blancos. Por otro lado, los arcos con extremo  $s$  o  $s'$  adyacentes a los del acoplamiento son negros y aquéllos no adyacentes a elementos de  $M$  son blancos. Esta coloración se muestra en la figura 4.8. Claramente, las trayectorias aumentantes de flujo de  $s$  a  $s'$  empiezan en un arco adyacente a  $s'$  coloreado blanco, después utilizan alternadamente arcos de  $A$  coloreados de blanco recorridos positivamente y arcos de  $A$  verdes recorridos negativamente; los últimos dos arcos son uno de  $A$  y uno adyacente a  $s'$  ambos coloreados de blanco. Es sencillo verificar que estas trayectorias aumentantes de flujo corresponden, al eliminar los arcos primero y último, a trayectorias aumentantes relativas al acoplamiento, asociado al flujo definido, en la red bipartita y viceversa. En efecto, sea  $P: s \rightarrow k_1 \rightarrow n_1 \leftarrow k_2 \rightarrow n_2 \dots n_j \rightarrow s'$  (con  $k_i \in K$  y  $n_i \in N$ , para  $i=1, \dots, j$ ) una trayectoria aumentante de flujo,



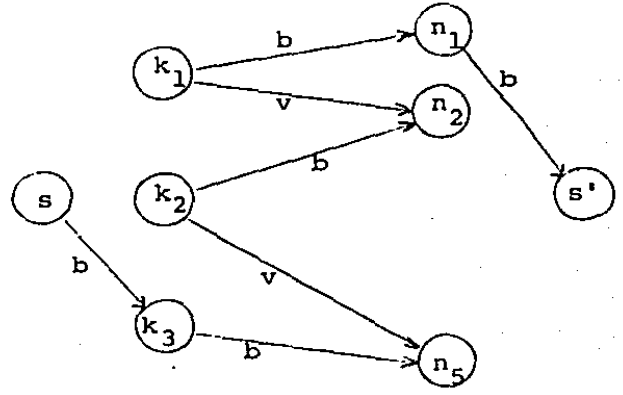
Acoplamiento M



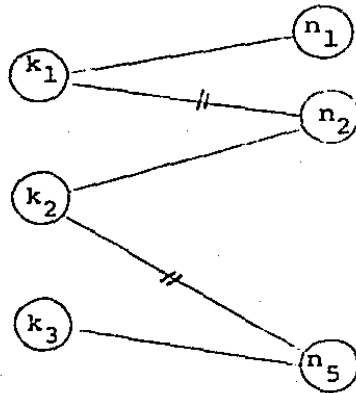
Flujo x correspondiente a M



Coloración definida por x



trayectoria aumentante de flujo



trayectoria aumentante relativa a M

Figura 4.8

entonces:

$(s, k_1)$  es blanco  
 $(k_i, n_i)$  es blanco, para  $i = 1, \dots, j$   
 $(k_{i+1}, n_i)$  es verde, para  $i = 1, \dots, j$   
 $(n_j, s')$  es blanco.

Puesto que el flujo a través de los arcos  $(k_i, n_i)$  es 0 y a través de los arcos  $(k_{i+1}, n_i)$  es 1 para  $i=1, \dots, j$ , entonces  $(k_i, n_i) \notin M$  y  $(k_{i+1}, n_i) \in M$ ; de aquí se concluye que la trayectoria  $k_1 + n_1 + k_2 + n_2 \dots n_j$  es aumentante relativa a  $M$  en la red bipartita ( $k_1$  y  $n_j$  son nodos expuestos). Recíprocamente, si  $k_1 + n_1 + k_2 + n_2 \dots n_j$  es una trayectoria aumentante relativa al coplamiento  $M$  definido en la red bipartita, entonces en la red de flujo se tiene:

$$\begin{aligned}x(s, k_1) &= 0, \\x(k_i, n_i) &= 0, \quad i = 1, \dots, j \\x(k_{i+1}, n_i) &= 1, \quad i = 1, \dots, j \\x(n_j, s') &= 0,\end{aligned}$$

y por tanto:

$(s, k_1)$  es blanco  
 $(k_i, n_i)$  es blanco,  $i = 1, \dots, j$   
 $(k_{i+1}, n_i)$  es verde,  $i = 1, \dots, j$   
 $(n_j, s')$  es blanco.

Luego,  $P: s + k_1 + n_1 + k_2 + n_2 \dots n_j + s'$  es una trayectoria aumentante de flujo. Se muestra un ejemplo de estas corres-

pondencias en la figura 4.8.

Para describir este tipo de trayectorias en el algoritmo especializado, se introduce la siguiente notación:

Para el arco  $(k,n) \in M$  se denotará  $n$  como  $M(k)$ . Se define entonces:

$$\begin{aligned}\text{dom } M &= \{k \in K \mid \text{existe } n \in N \text{ con } (k,n) \in M\}, \\ \text{rango } M &= \{n \in N \mid \text{existe } k \in K \text{ con } (k,n) \in M\}.\end{aligned}$$

Por ejemplo en la figura 4.8:  $M(k_1) = n_2$ ,  $M(k_2) = n_5$ ,

$$\begin{aligned}\text{dom } M &= \{k_1, k_2\} \\ \text{rango } M &= \{n_2, n_5\}\end{aligned}$$

Sea  $K_M = \{k \in K \mid \text{existe } n \in N / (\text{rango } M), \text{ con } (k,n) \in A\}$ . En la figura 4.8 :  $K_M = \{k_1, k_2, k_3\} = K$ .

Para determinar una trayectoria aumentante de flujo deberá construirse una secuencia:

$$k, M(k'), k', M(k''), k'', \dots$$

que comience en  $K / (\text{dom } M)$  y termine en  $K_M$  (nodos no saturados), donde:

$$(k', M(k')), (k'', M(k'')), \dots \in A$$

En la figura 4.8 se tiene la secuencia:

$$k_3, M(k_2), k_2, M(k_1), k_1,$$

donde  $k_3 \in K / (\text{dom } M)$  y  $k_1 \in K_M$ ;

esta secuencia define la trayectoria aumentante de flujo:

$$P: s \rightarrow k_3 \rightarrow n_5 \rightarrow k_2 \rightarrow n_2 \rightarrow k_1 \rightarrow n_1 \rightarrow s'.$$

Con la anterior notación, el algoritmo de Ford y Fulkerson puede ser simplificado en estos casos obteniéndose como resultado un método que parecería no tener nada que ver con flujos.

El enrutamiento que se realiza durante el algoritmo puede expresarse en términos de los elementos de  $K$ . Es decir, basta con usar la etiqueta  $\phi(k') = k$  para denotar que  $k'$  se alcanza desde  $k$ .

A continuación se describe detalladamente el algoritmo.



## ALGORITMO DE ACOPLAMIENTO

Propósito. Determinar el acoplamiento máximo en una red bipartita.

### Descripción

Paso 1. Iniciar con un acoplamiento  $M$  cualquiera.

Paso 2. Sean  $B = \text{dom } M$  y  $W = K / (\text{dom } M)$ .

Paso 3. Si  $W = \emptyset$ , terminar.  $M$  es un acoplamiento máximo y  $B$  es un bloqueo máximo.

- Si  $W \neq \emptyset$  ir a 4.

Paso 4. Sea  $k \in W$ .

- Si existe  $n \in N / \text{rango } M$  con  $(k, n) \in A$  ir a 6.

- En otro caso ir a 5.

Paso 5. Para todo  $k' \in B \cap K$  con  $(k, M(k')) \in A$ , actualizar;

$B = B \cup \{M(k')\} - \{k'\}$ ,  $W = W \cup \{k'\}$ ,  $\phi(k') = k$ .

Sea  $W = W - \{k\}$ , ir a 3.

Paso 6. Generar la secuencia  $k = k^0, k^1, \dots, k^r$  donde  $k^i = \phi(k^{i-1})$ , para  $i = 1, \dots, r$ , y  $k^r$  no está en el dominio de  $\phi$ .

Actualizar:

$$M = [M - \{(k^0, M(k^0)), \dots, (k^{r-1}, M(k^{r-1}))\}] \cup \{(k^0, n), (k^1, M(k^0)), \dots, (k^r, M(k^{r-1}))\}$$

Ir a 2.

### EJEMPLO 3.

Determinese un acoplamiento máximo en la red bipartita cuya representación en matriz se proporciona a continuación, empleando la especialización del algoritmo de Ford y Fulkerson.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iteración 1. Se inicia con el acoplamiento marcado en la figura 4.9(a). Los conjuntos B y W resultan ser:

$$B = \text{dom } M = \{k_2, k_5\}, W = K/(\text{dom } M) = \{k_1, k_3, k_4, k_6\}.$$

Como  $W \neq \emptyset$  se considera algún elemento de este conjunto:  $k=k_4$ ; existe el elemento  $n_4 \in N/(\text{rango } M) = \{n_1, n_3, n_4, n_6, n_7\}$  con  $(k_4, n_4) \in A$ , por lo cual este arco se agrega al acoplamiento obteniéndose el mostrado en la figura 4.9(b).

Iteración 2. En este caso se tiene:

$$B = \text{dom } M = \{k_2, k_4, k_5\}, W = K/(\text{dom } M) = \{k_1, k_3, k_6\}$$

Existe el elemento  $k = k_1 \in W$  y no existe ningún arco  $(k_1, n) \in A$  con  $n \in N/(\text{rango } M)$ , por lo cual se realizan las actualizaciones

del paso 5. En conjunto  $B \cap K$  resulta ser  $B$ ; para los elementos de este conjunto se tiene:

$$M(k_2) = n_2, M(k_4) = n_4, M(k_5) = n_5 \text{ y}$$

$$(k_1, n_2) \in A, (k_1, n_5) \in A.$$

Entonces:  $\phi(k_2) = \phi(k_5) = k_1,$

$$B = \{k_4, n_2, n_5\}; W = \{k_3, k_6, k_2, k_5\}$$

Se elije  $k = k_2 \in W$ . Existe el arco  $(k_2, n_1) \in A$  con  $n_1 \in N/\text{rango}$   
 $M = \{n_1, n_3, n_6, n_7\}$ . Entonces se genera la secuencia de no  
 dos en la trayectoria alternante:

$$k = k_2, \phi(k_2) = k_1 = k_r \text{ con } k_1 \notin \text{dom } \phi.$$

Se actualiza el acoplamiento obteniéndose:

$$\begin{aligned} M &= [M - \{(k_2, M(k_2))\}] \cup \{(k_2, n_1), (k_1, M(k_2))\} = \\ &= [M - \{(k_2, n_2)\}] \cup \{(k_2, n_1), (k_1, n_2)\} = \\ &= \{(k_4, n_4), (k_5, n_5), (k_1, n_2), (k_2, n_1)\}, \end{aligned}$$

El cual se muestra en la figura 4.9(c).

Iteración 3. Se redefinen los conjuntos:

$$B = \{k_1, k_2, k_4, k_5\}, \quad W = \{k_3, k_6\}$$

Como  $W \neq \emptyset$  se toma el elemento  $k = k_3 \in W$ . Este cumple que no

existe  $(k_3, n) \in A$  con  $n \in N/\text{rango } M$  y por tanto se calcula:

$$B \cap K = B; M(k_1) = n_2, M(k_2) = n_1, M(k_4) = n_4, M(k_5) = n_5.$$

Como existe el arco  $(k_3, n_5)$  en la red se define  $\phi(k_5) = k_3$ .

Se actualiza:

$$B = \{k_1, k_2, k_4, n_5\}, W = \{k_6, k_5\}$$

Se elige  $k = k_6 \in W$ . Puesto que no existe  $(k_6, n) \in A$  con  $n \in N/\text{rango } M$  se calcula:

$$B \cap K = \{k_1, k_2, k_4\}, M(k_1) = n_2, M(k_2) = n_1, M(k_4) = n_4.$$

Como existe  $(k_6, n_2) \in A$  se define  $\phi(k_1) = k_6$ . Se actualiza:

$$B = \{k_2, k_4, n_5, n_1\}, W = \{k_5, k_1\}.$$

Sea  $k = k_5 \in W$ . En este caso existe el arco  $(k_5, n_3) \in A$  con  $n_3 \in N/\text{rango } M$ ; se genera entonces la secuencia:

$$k_5, \phi(k_5) = k_3, k_3 \text{ en donde } k_3 \notin \text{dom } \phi.$$

Por tanto el acoplamiento se actualiza:

$$M = MU\{(k_5, n_3), (k_3, n_5)\} - \{(k_5, n_5)\},$$

mostrado en la figura 4.9(d).

Iteración 4. Se definen:

$$B = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}, W = \{k_6\}$$

Sea  $k = k_6 \in W$ . Puesto que no existe  $(k_6, n) \in A$  con  $n \in N/\text{rango } M$  se calcula:

$$B \cap K = B; M(k_1) = n_2, M(k_2) = n_1, M(k_3) = n_5, M(k_4) = n_4, \\ M(k_5) = n_3.$$

Como  $(k_6, M(k_1) = n_2), (k_6, M(k_3) = n_5) \in A$  se define  $\phi(k_1) = \phi(k_3) = k_6$ . Se actualiza:

$$B = \{n_2, k_2, n_5, k_4, k_5\}, W = \{k_1, k_3\}$$

Sea  $k = k_1 \in W$ . No existe  $n \in N/\text{rango } M$  con  $(k_1, n) \in A$ . Entonces se calcula:

$$B \cap K = \{k_2, k_4, k_5\}; M(k_2) = n_1, M(k_4) = n_4, M(k_5) = n_3.$$

No existe ningún  $(k_1, M(k')) \in A$  con  $k' \in B \cap K$ . Se actualiza  $W = \{k_3\}$ .

Sea  $k = k_3 \in W$ . No existe  $n \in N/\text{rango } M$  con  $(k_3, n) \in A$ . Entonces se calcula:

$$B \cap K = \{k_2, k_4, k_5\}. \text{ No existe ningún } (k_3, M(k')) \in A \text{ con } k' \in \\ B \cap K. \text{ Se actualiza } W = \emptyset.$$

Con  $W = \emptyset$  se termina el algoritmo por lo que el acoplamiento  $M$  de la figura 4.9(d) es de cardinalidad máxima y  $B = \{n_2, k_2, n_5, k_4, k_5\}$  es un bloqueo de cardinalidad mínima.

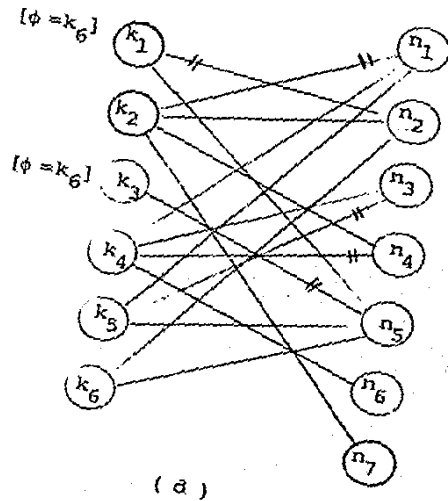
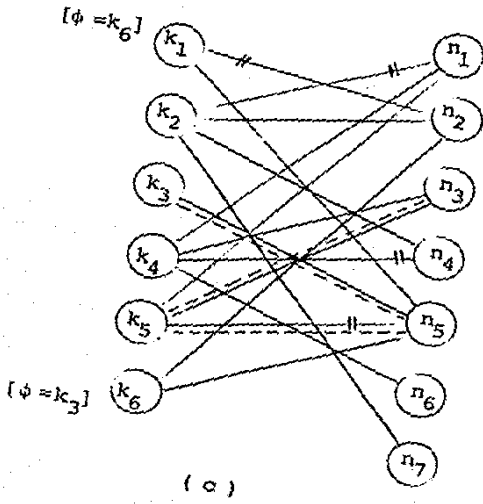
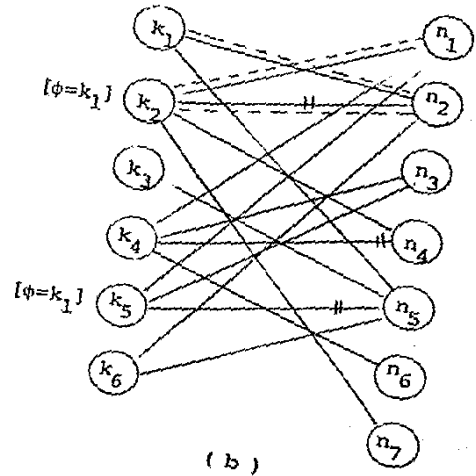
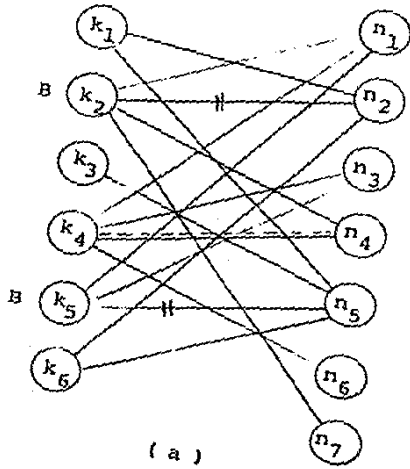


Figura 4.9

## 5. EL PROBLEMA DE ORDENAMIENTO.

En este capítulo se analiza el problema de ordenamiento consistente en la planificación y el control de ejecución de un proyecto. La técnica de ordenamiento más conocida es el método PERT (Program Evaluation and Review Technique), desarrollado en los Estados Unidos por la Marina Americana durante la década de los años 50's para la ejecución del proyecto Polaris. El desarrollo de este proyecto involucraba la coordinación del trabajo de muchas empresas privadas y de gobierno. La utilización del modelo PERT, en la administración del proyecto, tuvo mucho éxito pues éste se terminó de realizar dos años antes de lo previsto.

En general, las técnicas de ordenamiento son muy útiles en la administración de proyectos que involucren la realización de un gran número de actividades; algunos ejemplos son los proyectos de: construcción de edificios, carreteras, puentes, etc, planeación del mantenimiento de refinerías, barcos, aviones, etc, manufactura de nuevos productos, ensamblamiento de artículos grandes como aviones, barcos, computadoras, etc.

En la sección 5.1 se define formalmente el problema de ordenamiento y se proporciona la formulación PERT para él; también se mencionan características importantes de este modelo útiles en el desarrollo de métodos de solución. En la sección 5.2 se introducen los conceptos de ruta crítica y holgura de

una actividad y se presenta un algoritmo de solución para el problema; de nuevo se utiliza como herramienta de optimalidad la teoría de dualidad; esto se hace notar en la sección 5.3 en la cual se analiza la relación del problema de ordenamiento con diferenciales. Se formula el problema como uno especial de tensión mínima y se aprovechan los resultados del capítulo 3 para definir el problema dual y establecer la equivalencia con los conceptos de las secciones precedentes. Por último, en la sección 5.4, se analizan las modificaciones y simplificaciones que pueden hacerse cuando se aplican los algoritmos de diferenciales y trayectorias del capítulo 3 en la búsqueda de solución para el problema de ordenamiento.



## 5.1 PROBLEMA DE ORDENAMIENTO.

La administración de un proyecto complejo compuesto de múltiples trabajos elementales crea problemas de planificación y de control de ejecución del proyecto. Las técnicas de ordenamiento tienen como objetivo ayudar a resolver este tipo de problemas. En general, resolver un problema de ordenamiento significa establecer el orden en que deberán ser ejecutadas las actividades de manera tal que se optimice cierta función objetivo (por ejemplo, realizar el proyecto en el menor tiempo posible). Las actividades deben satisfacer ciertas restricciones dadas por una relación de precedencia (anterioridad de unas actividades respecto a otras) que tiene las propiedades de ser transitiva, no reflexiva y no simétrica.

Sean  $j_1, j_2, \dots, j_m$  las actividades del proyecto y  $d(j_1) = d_1, d(j_2) = d_2, \dots, d(j_m) = d_m$  sus respectivos tiempos estimados de ejecución. Se define una etapa como el inicio o el término de una actividad; así, toda actividad puede representarse mediante la pareja de sus etapas inicial y final.

Puesto que se trata de establecer un calendario de ejecución de las distintas actividades que satisfaga las restricciones de precedencia y que permita realizar el proyecto en el menor tiempo posible, se deben determinar números  $a(i)$  para cada etapa que indiquen la fecha en que debe alcanzarse la etapa  $i$ , tales que la cantidad  $a(\text{etapa final del proyecto})$  sea mí-

nima. El número  $a(i)$  recibe el nombre de "fecha más próxima" para la etapa  $i$  y representa la mínima fecha en la cual es posible alcanzar la etapa  $i$ ; es decir, en la cual es posible empezar a realizar las actividades cuyo inicio es la etapa  $i$ .

Supóngase que una actividad  $k = (i', i'')$  requiere que otra actividad  $j = (i, i')$  sea realizada por completo para poder llevarse a cabo. Esto significa que el tiempo más próximo en que es posible empezar la ejecución de  $k$  debe ser mayor o igual que el tiempo más próximo en que se comienza a realizar  $j$  más la duración de esta actividad. La restricción de precedencia se expresa entonces:

$$a(i') - a(i) \geq d(i, i').$$

Cualquier función  $a: N \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $N$  representa el conjunto de etapas del proyecto, que satisfaga las restricciones de precedencia, es un calendario posible de ejecución del proyecto. Por otro lado, si  $I$  y  $F$  son las etapas inicial y final del proyecto, la cantidad  $a(F) - a(I)$  representa la duración total del proyecto (que deberá ser minimizada). El problema de ordenamiento puede formularse por tanto como un problema de programación lineal:

$$\text{Min } z = a(F) - a(I)$$

s. a

$$a(i') - a(i) \geq d(i, i'), \quad (i, i') \in A$$

en donde el conjunto A representa al conjunto de las actividades del proyecto.

Formulación PERT. (Program Evaluation Review Technique).

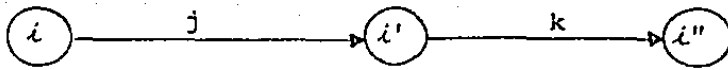
El proyecto puede ser representado en una red de la siguiente manera. El conjunto de nodos N representa al conjunto de etapas y el conjunto de arcos A representa al conjunto de actividades del proyecto. De aquí que  $j \sim (i, i') \in A$  si y solo si j es una actividad con etapas inicial y final i e i' respectivamente. La restricción de precedencia entre k y j (j terminada antes de empezar k) se representa haciendo coincidir el extremo (etapa) final de j con el extremo (etapa) inicial de k como se muestra en la figura 5.1(a). El extremo inicial de las actividades que no requieren de ninguna otra para su ejecución coincide con I, la etapa inicial del proyecto, y el extremo final de aquéllas que no son requeridas por ninguna otra coincide con F, la etapa final del proyecto. Esta red recibe el nombre de red PERT. Para ejemplificar considérese un proyecto formado por las actividades listadas en la siguiente tabla. En el segundo renglón de la tabla se muestra la relación de precedencia existente entre las actividades, indicando como antecedente toda actividad que deba ser terminada antes de realizar la correspondiente en el primer renglón.

Actividad	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>
Antecedentes	-	A <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub> , A <sub>4</sub>	-	A <sub>5</sub> , A <sub>6</sub>

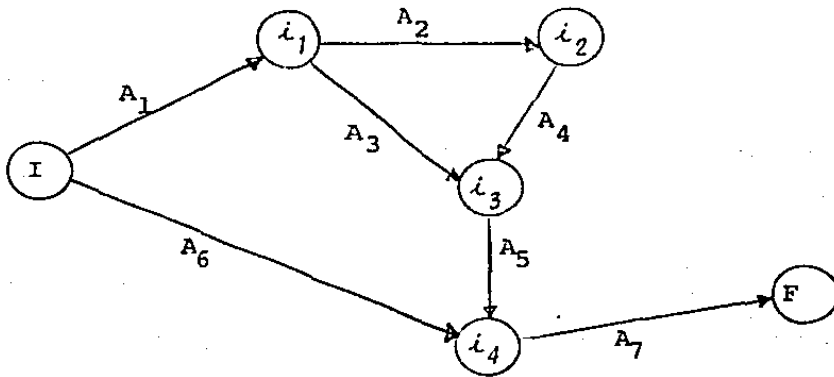
La red o diagrama PERT correspondiente a este proyecto se muestra en la figura 5.1(b). En esta red puede observarse, por ejemplo, que el extremo inicial de  $A_5$  coincide con el final de  $A_3$  y el final de  $A_4$  representando que  $A_5$  no puede realizarse antes de haber terminado la ejecución de  $A_3$  y  $A_4$  tal como se indica en la tabla.

Algunas veces es necesario utilizar arcos ficticios, representando actividades "fantasma", para expresar exactamente la relación de precedencia. Por ejemplo, si una actividad  $A_3$  requiere para su ejecución que  $A_1$  esté completamente terminada y otra actividad  $A_4$  tiene como antecedentes a las actividades  $A_1$  y  $A_2$ , no es posible hacer coincidir el extremo final de  $A_1$  y  $A_2$  con el extremo inicial de  $A_3$  y  $A_4$ , como se muestra en la figura 5.2(a), puesto que esto querría decir que  $A_3$  también tiene como antecedente a  $A_2$ . Para evitar esto, se agrega el arco ficticio mostrado en la figura 5.2(b); así se representa que  $A_4$  requiere de la actividad ficticia (que requiere a  $A_1$ ) y de la actividad  $A_2$  mientras que  $A_3$  sólo requiere que  $A_1$  sea terminada para proceder a su ejecución. Cabe señalar que a los arcos ficticios se asocia duración igual a cero puesto que corresponden a actividades no existentes; sólo se utilizan para la representación de la relación de precedencia.

Nótese que la representación del proyecto en una red PERT permite observar qué actividades pueden realizarse simultáneamente y cuales no. Por otro lado, las fechas a(i) asociadas a

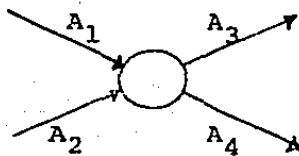


( a )

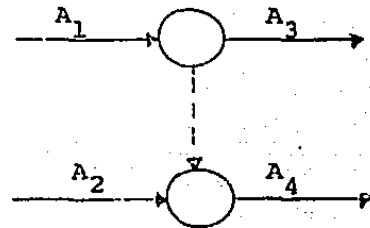


( b )

Figura 5.1



( a )



( b )

Figura 5.2

las etapas pueden ser asociadas a los correspondientes nodos en la red; esto permitirá el cálculo de su valor como se verá posteriormente. Una de las principales propiedades de las redes PERT es que éstas no contienen circuitos positivos como se establece en la siguiente proposición.

Proposición. Una red PERT no contiene circuitos positivos.

Demostración. Sea  $i_1, a_1, i_2, a_2, \dots, i_q, a_q, i_1$  un circuito positivo; entonces:

para realizar  $a_2$  se requiere que  $a_1$  se haya completado,  
 para realizar  $a_3$  se requiere que  $a_2$  se haya completado,  
 ⋮  
 para realizar  $a_1$  se requiere que  $a_q$  se haya completado.

De aquí se concluye un absurdo:  $a_1$  requiere que  $a_1$  esté totalmente terminada para poder llevarse a cabo.

Por otro lado, la existencia de un circuito positivo implicaría que el problema de programación lineal asociado al proyecto no tendría solución factible si alguna actividad involucrada en el circuito tuviera duración no nula. En efecto, sumando las restricciones de los arcos de un circuito positivo C:

$$\sum_{(i,i') \in C} d_{ii'} \leq \sum_{(i,i') \in C} a(i') - a(i) = 0,$$

y por tanto  $d_{ii'} = 0$ , para todo  $(i,i') \in C$ . ■

Otra observación importante es el hecho de que el modelo de programación lineal asociado a un proyecto puede expresarse matricialmente del siguiente modo si E es la matriz de incidencia de la red PERT.

$$\text{Min } z = a(F) - a(I)$$

s.a.

$$- a E \geq d ,$$

en donde  $d \in \mathbb{R}^{|A|}$  es el vector de duraciones.

En la siguiente sección se analiza la solución de este problema.

## 5.2 ALGORITMO DE SOLUCION.

En general, resolver un problema de ordenamiento no significa solamente establecer un calendario de ejecución de las actividades del proyecto de tal modo que la duración de éste sea mínima, sino también determinar cuáles son las actividades críticas; esto es, las actividades que al sufrir un retraso en su ejecución retrasan todo el proyecto. Es evidente la importancia de tales actividades y su determinación permite una mejor vigilancia de la realización del proyecto. Una ruta crítica es una trayectoria positiva de I a F formada por actividades críticas. Por otro lado, también es importante determinar la holgura de una actividad; es decir, el aumento que puede sufrir su duración sin retrasar el proyecto. Dada la definición de holgura, es claro que una actividad crítica tiene holgura igual a cero. La holgura de una actividad debe calcularse con objeto de controlar mejor el proyecto (por ejemplo, si una actividad tiene holgura distinta de cero, podrían canalizarse recursos asignados a ésta a alguna actividad crítica).

Para calcular la duración mínima del proyecto, obsérvese que ésta es igual a la longitud (duración) de una trayectoria positiva de I a F que cumpla que, al finalizar la ejecución de las actividades que la forman, se hayan terminado todas las demás actividades del proyecto. En vista de lo anterior se concluye que la duración mínima del proyecto es igual a la máxima longitud de las trayectorias positivas de I a F en la red PERT, en



donde se considera como longitud de un arco a la duración de la actividad que éste representa. Por tanto, calcular la duración mínima del proyecto equivale a determinar la trayectoria positiva más larga en la red PERT. Más aun, si se considera que la etapa inicial del proyecto puede alcanzarse cuanto antes (es decir,  $a(I) = 0$ ), entonces:

duración mínima del proyecto =  $a(F)$  =  
longitud de una trayectoria positiva  
más larga de I a F.

Además, ninguna actividad sobre la trayectoria positiva más larga de I a F puede sufrir retraso alguno en su ejecución puesto que ello conllevaría al retraso del proyecto. Por tanto, la trayectoria positiva más larga de I a F es precisamente la ruta crítica.

Con el mismo argumento que el usado para  $a(F)$ , puede generalizarse que:

$a(i)$  = longitud de una trayectoria positiva  
más larga de I a  $i$ ,  $i \in N$ .

Antes de esta fecha no se ha terminado de realizar alguna actividad con etapa final  $i$ . Luego, basta con determinar las trayectorias positivas más largas de I a  $i$ , para todo  $i \in N$ .

Una alternativa para calcular las fechas más próximas  $a(i)$  para las etapas  $i \in N$  está basada en el algoritmo de programación dinámica para determinar las trayectorias

más cortas en una red. Este algoritmo se basa en la no existencia de circuitos positivos. Para su descripción se introduce la siguiente notación.

Sea  $\Gamma^-(i') = \{i \in N \mid \text{existe } (i, i') \in A\}$  para  $i \in N$ . Cada elemento de este conjunto se llama predecesor de  $i'$ . Supóngase ahora que, para una etapa  $i' \in N$ , se ha calculado  $a(i)$  para todo  $i \in \Gamma^-(i')$ ; es decir, se conoce la longitud de las trayectorias positivas más largas de  $I$  a  $i$ , para todo  $i \in \Gamma^-(i')$ . Para calcular  $a(i')$  nótese que:

$$a(i') - a(i) \geq d(i, i'), \text{ para todo } i \in \Gamma^-(i');$$

es decir

$$a(i') \geq a(i) + d(i, i'), \text{ para todo } i \in \Gamma^-(i');$$

el valor más pequeño de  $a(i')$  es entonces:

$$a(i') = \underset{i \in \Gamma^-(i')}{\text{Max}} \{a(i) + d(i, i')\}$$

Este valor  $a(i')$  es precisamente la longitud de la trayectoria positiva más larga de  $I$  a  $i'$  puesto que se ha buscado el máximo sobre todas las trayectorias positivas posibles. Obsérvese además que para las actividades  $j^-(i, i')$  de la ruta crítica se tiene que  $a(i) + d(i, i') = a(i')$ .

También es importante calcular la "fecha más lejana" en que puede alcanzarse la etapa  $i$  sin retrasar el proyecto; es decir, la fecha máxima en que es posible empezar a realizar las

actividades cuya etapa inicial es  $i$ , sin hacer la duración del proyecto mayor que  $a(F)$ . Si se denota esta fecha con  $b(i)$ , para  $i \in N$ , la primera observación que hay que hacer es que la actividad  $j^-(i, i')$  puede comenzar a realizarse en cualquier fecha en el intervalo  $[a(i), b(i)]$ . También se concluye que  $b(F) = a(F)$ .

Se define el conjunto de sucesores del nodo  $i$ , de manera análoga al conjunto de predecesores, como  $\Gamma^+(i) = \{i' \in N \mid \text{existe } (i, i') \in A\}$ . Supóngase ahora que, para una etapa  $i$ , se ha calculado  $b(i')$ , para todo  $i' \in \Gamma^+(i)$ . Nótese que, para no retrasar el proyecto, debe cumplirse:

$$b(i) + d(i, i') \leq b(i'), \text{ para todo } i' \in \Gamma^+(i);$$

es decir

$$b(i) \leq b(i') - d(i, i'), \text{ para todo } i' \in \Gamma^+(i).$$

Entonces, el máximo valor que puede tomar  $b(i)$  es:

$$b(i) = \min_{i' \in \Gamma^+(i)} \{b(i') - d(i, i')\}.$$

El valor  $b(i)$ , para  $i \in N$ , es igual al valor  $a(F)$  menos la longitud de una trayectoria positiva más larga de  $i$  a  $F$ . En efecto, esto puede verificarse observando que si  $b'(i)$  es la longitud de la trayectoria positiva más larga de  $i$  a  $F$ , por analogía con el cálculo de las trayectorias más largas de  $I$  a  $i$  (o invirtiendo el sentido de los arcos) se tiene que:

$$b'(F) = 0$$

$$b'(i) = \text{Max}_{i \in F^+(i)} \{b'(i') + d(i, i')\},$$

en donde es sencillo verificar que  $b(i) = a(F) - b'(i)$ . Cabe señalar que para las actividades críticas  $j \sim (i, i')$  se tiene  $b(i) + d(i, i') = b(i)$ . De hecho, puesto que  $b(F) = a(F)$ , es posible asegurar que  $a(i) = b(i)$  y  $a(i') = b(i')$  para toda actividad crítica  $j \sim (i, i') \in A$ .

Finalmente, para el cálculo de las holguras de las actividades, considérese lo siguiente: sea  $j \sim (i, i')$  una actividad y supóngase que las actividades que requieren de  $j$  se retrasan en su inicio lo más tarde permisible y que  $j$  se comienza a realizar lo más pronto posible; en otras palabras  $j$  se comienza en la fecha  $a(i)$  y las actividades que requieren de  $j$  se comienzan en la fecha  $b(i')$ . Bajo estos supuestos la duración de  $j$  puede aumentarse en la cantidad  $h(j)$  sin retrasar el proyecto, en donde la holgura  $h(j)$  se calcula:

$$h(j) = b(i') - a(i) - d(j), \quad j \in A.$$

A continuación se presenta la descripción detallada del algoritmo que calcula todas estas cantidades.

## ALGORITMO

Propósito. Determinar las fechas más próximas, las fechas más lejanas y las actividades críticas en una red PERT.

Paso 1. Hacer  $S = \{I\}$ ,  $a(I) = 0$ .

Paso 2. - Si existe  $i' \in S$  tal que  $\Gamma^-(i') \cap CS$ , ir a 3.  
- En otro caso hacer  $S = F$ ,  $b(F) = a(F)$  e ir a 4.

Paso 3. Hacer  $a(i') = \max_{i \in \Gamma^-(i')} \{a(i) + d(i, i')\}$   
Actualizar  $S = S \cup \{i'\}$ . Ir a 2.

Paso 4. - Si existe  $i \in S$  tal que  $\Gamma^+(i) \cap CS$ , ir a 5.  
- En otro caso ir a 6.

Paso 5. Hacer  $b(i) = \min_{i' \in \Gamma^+(i)} \{b(i') - d(i, i')\}$   
Actualizar  $S = S \cup \{i\}$ . Ir a 4.

Paso 6. A cada arco  $j \sim (i, i')$  de la red, asociar  $h(j) = b(i') - a(i) - d(j)$ . Terminar.

Los números  $a(i)$  y  $b(i)$  son las fechas más próximas y más lejanas de la etapa  $i$  respectivamente. El número  $h(j)$  es la holgura de la actividad  $j$ .

### Justificación del algoritmo.

Sólo se probará que el algoritmo converge dado que la prueba de que produce la solución óptima ya se ha proporcionado durante el desarrollo de la sección.

Obsérvese que para calcular  $a(i)$  para  $i \in N$ , se requiere que esta cantidad haya sido calculada para todos los predecesores de  $i$ . En el paso 2, si no existe tal nodo se tiene que  $S = N$ ; es decir, que las únicas alternativas que se tienen son: existe un nodo  $i$  para el cual ya se ha calculado  $a(i)$  para todos sus predecesores o bien ya se ha calculado  $a(i)$  para todos los nodos. En efecto, supóngase que no existe  $i' \in S$  tal que  $\Gamma^-(i') \subset S$  y que  $S \neq N$ ; esto querría decir que existe  $i_1 \in \Gamma^-(i')$  tal que  $i_1 \notin S$  (o bien  $\Gamma^-(i') = \emptyset$  pero esto es imposible para  $i' = I$ ). Como no existen nodos fuera de  $S$  con todos sus predecesores en  $S$ , entonces existe  $i_2 \in \Gamma^-(i_1)$  tal que  $i_2 \notin S$  y así sucesivamente. Como el número de nodos es finito, se llega a un nodo  $i_k \in \Gamma^-(i_{k-1})$  fuera de  $S$  tal que  $\Gamma^-(i_k) \not\subset S$ , con  $i_k = i_q$ , para algún  $q \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ; esto pone en evidencia un circuito positivo lo cual constituye una contradicción. Por tanto el número de veces que se realizan los pa sos 2 y 3 es finito; de hecho estos pasos se repiten  $n-1$  veces, en donde  $n$  es el número de nodos de la red.

Análogamente se prueba que el número de veces que se realizan los pasos 4 y 5 es finito (de nuevo  $n-1$ ). El paso 1 se realiza una sola vez y en el paso 6 se calculan  $m$  holguras, en donde  $m$  es el número de arcos de la red. Por tanto el algoritmo se realiza en un número finito de iteraciones.

EJEMPLO 1.

En la siguiente tabla se listan las actividades que forman un proyecto de establecimiento de un ingenio azucarero. En la segunda columna de la tabla se indica la duración de cada actividad (en semanas) y en la tercera se enumeran las actividades precedentes a la correspondiente en la primera columna. Determínese la duración mínima del proyecto, las fechas más próximas y más lejanas para cada etapa y la holgura de cada actividad.

Actividad	Duración	Antecedentes
A1 Compra de equipo	5	-----
A2 Entrenamiento de personal	12	-----
A3 Búsqueda del mercado de capital	10	-----
A4 Instalación de equipo	4	A1
A5 Cálculo del presupuesto	1	A1
A6 Financiamiento para cinco años de producción	6	A3, A5
A7 Pruebas de equipo	8	A2, A4

Primeramente se construye la red PERT correspondiente. Esta se muestra en la figura 5.3. En el primer cuadro se resume la aplicación de la parte del algoritmo en donde se calculan las fechas más próximas y en el segundo se resume el cálculo de las fechas más lejanas.

Iteración	Nodo i agregado a S	a(i)
0	I	0
1	1	5
2	2	$\text{Max}\{0 + 10, 5 + 1\} = 10$
3	3	$\text{Max}\{0 + 12, 5 + 4\} = 12$
4	F	$\text{Max}\{10 + 6, 12 + 8\} = 20$

En este momento se tiene  $S = N$  por lo que se actualiza  $S = F$ ,  $b(F) = a(F) = 20$  y se procede al cálculo de las otras fechas.

Iteración	Nodo i agregado a S	b(i)
5	3	12
6	2	14
7	1	$\text{Min}\{12 - 4, 14 - 1\} = 8$
8	I	$\text{Min}\{8 - 5, 12 - 12, 14 - 10\} = 0$

En este momento se tiene  $S = N$  por lo que se procede al cálculo de holguras.

Actividad $j \sim (i, i')$	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
Holgura $h(j) = b(i') - a(i) - d(j)$	3	0	4	3	8	4	0

La duración mínima del proyecto es entonces  $a(F) = b(F) = 20$  semanas. La ruta crítica corresponde a la formada por las actividades con holgura igual a cero, o equivalentemente a la trayectoria positiva más larga. Esta ruta está marcada en la



figura 5.3; en esta misma figura se ha asociado a cada nodo  $i$  la pareja  $[a(i), b(i)]$ . Obsérvese que para las etapas sobre la ruta crítica se cumple  $a(i) = b(i)$ . Las actividades  $j - (i, i')$  sobre la ruta crítica satisfacen por tanto  $a(i) = b(i)$  y  $a(i') = b(i')$ .

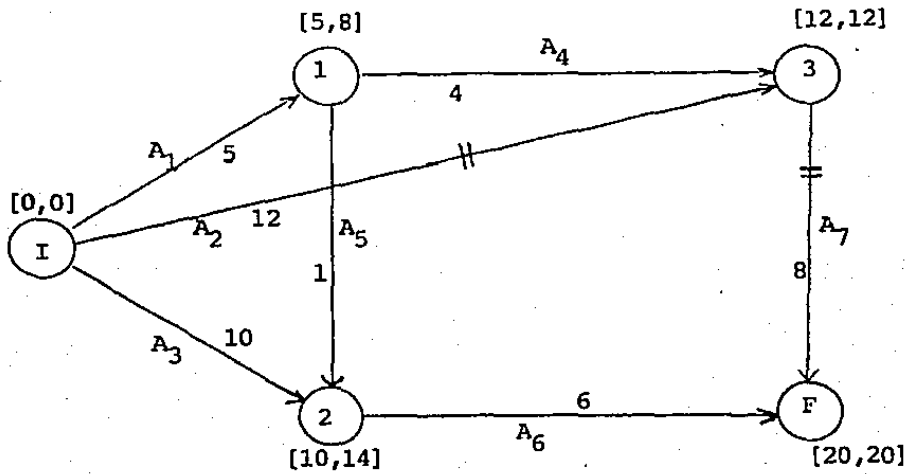


Figura 5.3

EJEMPLO 2.

La siguiente tabla muestra, en la primera columna, la lista de actividades de un proyecto consistente en la fabricación de un nuevo producto. En la segunda columna de la tabla se indica la duración de cada actividad (en días) y en la tercera se enumeran las actividades precedentes a la correspondiente en la primera columna. Determínese la duración mínima del proyecto, las fechas más próximas y más lejanas para cada etapa y la holgura de cada actividad.

	Actividad	Duración	Antecedentes
A1	Decisión Preliminar	15	-----
A2	Estudio de mercado	30	A1
A3	Reporte de estudio	2	A2
A4	Sugerencia del diseño	10	A3
A5	Lista posibles proveedores	4	A3
A6	Estimación de la capacidad de producción	10	A3
A7	Lista de posibles distribuidores	4	A3
A8	Estudio de campaña de publicidad	20	A3
A9	Estudio de diseño	40	A4
A10	Cotización de precios	10	A5
A11	Pronóstico de ventas	8	A6
A12	Cálculo de costos de publicidad	6	A8

A13	Compra de material	20	A10
A14	Pruebas de producción	30	A9, A13
A15	Presupuesto	15	A11, A12, A17
A16	Estrategia de ventas	3	A7, A15
A17	Pruebas de control de calidad	30	A14
A18	Resultados de publicidad	12	A17
A19	Lanzamiento al público	7	A16, A18

Primeramente se construye la red PERT correspondiente. Esta se muestra en la figura 5.4. En el primer cuadro se resume la aplicación de la parte del algoritmo en donde se calculan las fechas más próximas y en el segundo se resume el cálculo de las fechas más lejanas.

Iteración	Nodo i agregado a S	a(i)
0	I	0
1	1	15
2	2	45
3	3	47
4, 5, 6, 7	4, 5, 6, 7	$a(4) = 57, a(5) = 51$
8	10	61
9	9	$\text{Max} \{ 57 + 40, 61 + 20 \} = 97$
10	12	127

11	13	157
12	11	Max{ 157 + 0, 57 + 8, 67 + 6 } = 157
13	8	Max{ 47 + 4, 157 + 15 } = 172
14	14	Max{ 172 + 3, 157 + 12 } = 175
15	F	182

En este momento se tiene  $S = N$  por lo que se actualiza  $S = F$ ,  
 $b(F) = a(F) = 182$  y se procede al cálculo de las otras fechas.

Iteración	Nodo i agregado a S	b(i)
16	14	175
17	8	172
18	11	157
19, 20, 21	13, 6, 7	$b(13) = \text{Min}\{157 - 0, 175 - 12\} = 157$ $b(6) = 149, \quad b(7) = 151$
22	12	127
23	9	97
24, 25	4, 5	$b(4) = 57, \quad b(5) = 67$
26	3	$\text{Min}\{57 - 10, 67 - 4, 149 - 10,$ $151 - 20, 172 - 4\} = 47$
27	2	45
28	1	15
29	I	0

En este momento se tiene  $S = N$  por lo que se procede al cálculo de holguras.

Actividad $j \sim (i, i')$	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Holgura $h(j)$	0	0	0	0	16	92	121	84	0

(Continuación)

A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19
16	92	84	16	0	0	0	0	6	0

La duración mínima del proyecto es entonces  $a(F) = b(F) = 182$  días. La ruta crítica corresponde a la formada por las actividades con holgura igual a cero, o equivalentemente a la trayectoria positiva más larga (en este caso la actividad ficticia forma parte de la ruta crítica). Esta ruta está marcada en la figura 5.4 en la que también se ha asociado a cada nodo  $i$  a pareja  $[a(i), b(i)]$ . Obsérvese que para las etapas sobre la ruta crítica se cumple  $a(i) = b(i)$ . Las actividades  $j \sim (i, i')$  sobre la ruta crítica satisfacen por tanto  $a(i) = b(i)$  y  $a(i') = b(i')$ . Sin embargo el inverso no es válido; esto es, si una actividad es tal que sus etapas cumplen las dos igualdades anteriores no necesariamente es crítica como es el caso de A18 (las etapas inicial y final de A18 están sobre la ruta crítica pero A18 no).

Por último, nótese que pudieran haberse evitado varios cálculos en este caso particular. En efecto, las etapas I, 1, 2, 3, 14 y 15 están contenidas en todas las trayectorias positivas de I a F; en particular están en la ruta crítica y por tanto  $b(i) = a(i)$  para tales etapas y entonces no era necesario calcular estos valores. Además, la ruta crítica es la trayectoria positiva mas larga de I a F y por tanto la holgura de las actividades sobre esta trayectoria es igual a cero; luego, tampoco era necesario haber calculado estas cantidades.

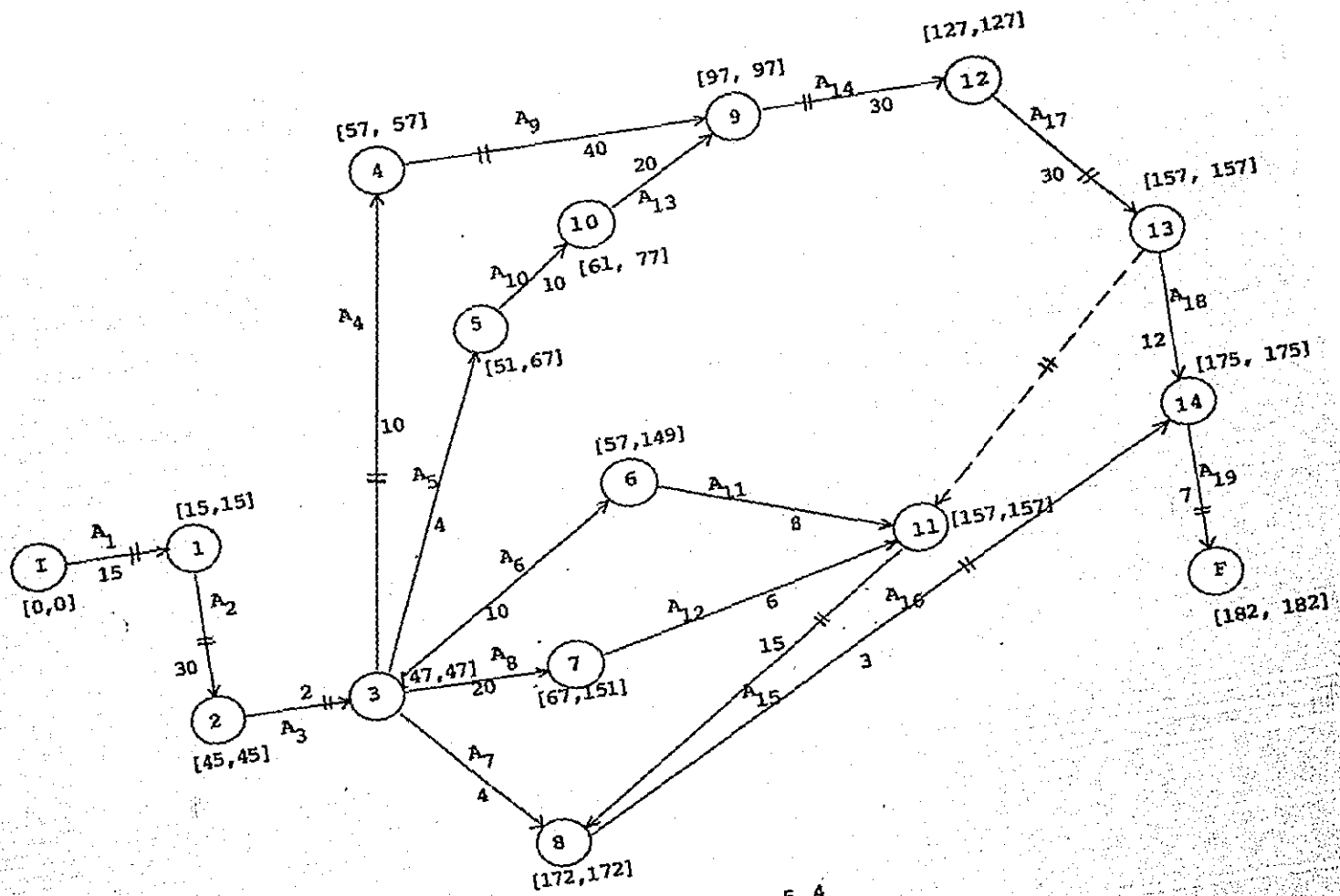


Figura 5.4

### 5.3 RELACION CON DIFERENCIALES.

Primeramente debe observarse que las fechas más próximas a(*i*) con *i* ∈ N, definidas en la sección 5.1, constituyen un potencial tal que su diferencial  $v = \Delta a$  debe satisfacer ciertas restricciones de generación. Estas restricciones de generación son precisamente las restricciones de precedencia introducidas en el modelo de programación lineal correspondiente al problema de ordenamiento. En efecto

$$v(j) = \Delta a(j) = a(i') - a(i) \geq d(j), \quad j \sim (i, i') \in A.$$

Es decir, se requiere que la tensión a través del arco *j* esté contenida en el intervalo de generación  $[d(j), \infty)$ .

Más aún, si se considera  $N^+ = \{I\}$  y  $N^- = \{F\}$  se tiene que el problema de ordenamiento consiste en determinar un potencial, con diferencial factible con respecto a las generaciones, tal que el despliegue de *a* de  $N^+$  a  $N^-$  sea mínimo; es decir, el problema de ordenamiento es un problema de tensión mínima.

Por otro lado, recuérdese que, para toda trayectoria  $P: N^+ \rightarrow N^-$

$$\begin{aligned} d^-(P) &\leq [\text{despliegue de } a \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = \\ &= [\text{despliegue de } a \text{ relativo a } P] \leq d^+(P); \end{aligned}$$

de donde se concluye que la función objetivo del problema de ordenamiento está acotada inferiormente por la generación inferior de toda trayectoria de  $N^+$  a  $N^-$ .



Por otro lado nótese que si  $P: N^+ \rightarrow N^-$  es tal que  $P^- \neq \phi$ , entonces

$$d^-(P) = \sum_{j \in P^+} d^-(j) - \sum_{j \in P^-} d^+(j) = \sum_{j \in P^+} d(j) - \sum_{j \in P^-} (\infty) = -\infty;$$

es decir, toda trayectoria que utilice arcos recorridos negativamente tiene generación inferior igual a  $-\infty$ . Por tanto puede concluirse que la función objetivo del problema de ordenamiento está acotada inferiormente por la generación inferior de toda trayectoria positiva de  $N^+$  a  $N^-$ .

Intuitivamente, se sospecha que el dual del problema de ordenamiento, por analogía con la sección 3.2, es el siguiente:

Problema de la trayectoria positiva máxima. Sean  $N^+, N^- \subset N$  no vacíos en una red. El problema consiste en

$$\text{Max } \{d^-(P) \mid P: N^+ \rightarrow N^- \text{ positivas}\}$$

En donde  $N^+ = \{I\}$ ,  $N^- = \{F\}$ ,  $d^-(j) = d(j)$  y  $d^+(j) = \infty$ , para este caso particular. Además, es posible establecer un resultado análogo al teorema tensión máxima - trayectoria mínima en el cual se relacionan el problema de tensión mínima, asociado a un problema de ordenamiento, y el problema de trayectoria positiva máxima definido de esta manera.

Teorema de tensión mínima - trayectoria positiva máxima.

(Para problema de ordenamiento). Supóngase que existe al menos un potencial que satisface las restricciones del problema de mínima tensión asociado al problema de ordenamiento.

Entonces:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Min en problema de} \\ \text{tensión mínima} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Sup en problema de} \\ \text{trayectoria positiva máxima} \end{array} \right]$$

De hecho este resultado es válido no sólo para el caso del problema de ordenamiento sino en general, substituyendo trayectorias positivas por cualquier trayectoria; la prueba de este hecho es completamente análoga a la del teorema tensión máxima - trayectoria mínima.

Otra prueba, para el caso particular del problema de ordenamiento, la constituye el algoritmo de la sección anterior (pasos 1, 2 y 3). Cabe aclarar que lo que se ha llamado "longitud" de la trayectoria positiva en la sección anterior coincide con el concepto de generación inferior de tal trayectoria, por lo que se asegura que este problema de determinación de trayectoria positiva máxima es precisamente el de de terminación de la ruta crítica en la red PERT.

Otra observación importante que debe hacerse en cuanto a factibilidad se refiere es que, en vista del teorema de diferencial factible, siempre existe solución factible en el caso del problema de ordenamiento ya que, dado que no existen circuitos positivos:

$$d^-(P) = \sum_{j \in P^+} d^-(j) - \sum_{j \in P^-} d^+(j) = \sum_{j \in P^+} d(j) - \sum_{j \in P^-} (\infty) = -\infty < 0.$$

0. equivalentemente,  $d^+(P') = \infty > 0$ , donde  $P'$  es el reverso de  $P$ . De hecho, el diferencial  $v$ , con  $a(I) = 0$ , puede construirse utilizando el algoritmo de rectificación de tensión descrito en el capítulo 3.

Con respecto a las fechas más lejanas  $b(i)$  para  $i \in N$ , considérese lo siguiente. Sea  $R$  la red PERT y sea  $R'$  la red construída invirtiendo los arcos de  $R$ ; es decir, si  $N$  y  $A$  son los conjuntos de nodos y arcos de  $R$  respectivamente, entonces los conjuntos de nodos y arcos de  $R'$  son  $N'$  y  $A'$ , en donde:

$$N = N' \quad \text{y} \quad j^-(i, i') \in A' \quad \text{si y sólo si} \quad j^-(i', i) \in A.$$

Nótese que los números  $b'(i)$ , definidos en la sección anterior como  $b'(i) = a(F) - b(i)$ , constituyen un potencial en la red  $R'$  tal que su diferencial  $w$  debe ser factible con respecto a ciertas generaciones. En efecto, los números  $b'(i)$ ,  $i \in N$ , satisfacen:

$$b'(i) \geq b'(i') + d(i, i'), \quad \text{para } j^-(i, i') \in A;$$

entonces esta desigualdad se cumple para todo  $j^-(i', i) \in A'$ , en donde  $d(i', i) = d(i, i')$ , para  $j \in (i', i) \in A'$ . Luego:

$$w(j) = \Delta b'(j) = b'(i) - b'(i') \geq d(i', i) \quad \text{para } j^-(i', i) \in A'.$$

Es decir, se requiere que la tensión a través del arco  $j$  esté contenida en el intervalo de generación  $[d(j), \infty)$ .

Si se considera  $N^+ = \{F\}$  y  $N^- = \{I\}$ , se tiene que el problema de determinar los números  $b'(\lambda)$ ,  $\lambda \in N$ , es también un problema de tensión mínima puesto que se desea minimizar la duración del proyecto ( $b'(I) - b'(F)$ ). De aquí se concluye que todos los resultados válidos para el potencial  $a(\lambda)$  también lo son para el potencial  $b'(\lambda)$ . En particular, el dual de este problema es un problema de trayectoria positiva máxima en la red  $R'$  (una prueba la constituyen los pasos 5 y 6 del algoritmo de la sección anterior). De nuevo, puesto que no existen circuitos positivos en la red  $R'$ , el problema de diferencial factible siempre tiene solución en esta red y, para su construcción, puede utilizarse el algoritmo de rectificación de tensión con  $b'(F) = 0$ . Una vez calculada la solución óptima  $b'$  de este problema de tensión mínima las fechas más lejanas se obtienen, como se indicó en la sección anterior, calculando  $b(\lambda) = a(F) - b'(\lambda)$  para las etapas  $\lambda \in N$ .

Antes de considerar un ejemplo de aplicación de estos resultados se analizan las posibles simplificaciones del algoritmo de trayectoria mínima en su aplicación para la solución del problema de ordenamiento.

#### 5.4 SIMPLIFICACION DEL ALGORITMO DE TRAYECTORIA MINIMA PARA EL PROBLEMA DE ORDENAMIENTO.

Antes de mencionar las simplificaciones que pueden realizarse en la aplicación del algoritmo de trayectoria mínima para el caso del problema de ordenamiento, es necesario observar que también en la determinación de un diferencial factible pueden hacerse ciertas simplificaciones.

El algoritmo de rectificación de tensión puede iniciarse con cualquier potencial tal que  $a(I) = 0$  y  $a(i) < \infty$  para todo  $i \in N$ ; esto seguramente es válido para las fechas más próximas pues de lo contrario el proyecto no tendría duración finita. El conjunto  $A^-$  construido en el paso 2 siempre resulta ser vacío ya que  $d^+(j) = \infty$ , para todo  $j \in A$ ; este paso puede entonces ser reducido a la determinación del conjunto  $A^+$  y a la prueba de factibilidad. Bajo la consideración de que se inicia con un potencial de valores finitos es posible concluir que todos los potenciales construidos durante el algoritmo también tienen esta característica y por tanto la tensión a través de todo arco es también finita. De aquí que la coloración definida en el paso 3 sólo puede constar de dos colores: el rojo, para los arcos cuya tensión sea superior a la cota inferior de generación  $d(j)$ , y el negro, para aquéllos cuya tensión sea inferior o igual a la generación inferior. Además, la alternativa que considera la posibilidad de determinar un circuito compatible con la coloración es imposible puesto que éste tendría generación

superior menor que cero y en la sección anterior se probó la no existencia de tales circuitos. Luego, en el paso 3 sólo existe la posibilidad de determinar cortes compatibles. Por otro lado, el valor de  $\bar{\alpha}$  se reduce a  $d(\bar{j}) - v(\bar{j})$  pues  $A^-$  es vacío. Finalmente,  $d^+(j) - v(j) = \infty$  para todo  $j \in A$  por lo que este término puede ser eliminado del cálculo de  $\alpha$ .

Con respecto al cálculo del potencial  $b'$  en la red  $R'$  puede procederse del mismo modo que el empleado para la construcción de  $a$  utilizando  $b'(F) = 0$ .

Una vez calculado el diferencial  $a$  factible con respecto a las generaciones en la red PERT  $R$  (o  $b'$  en la red  $R'$ ) se procede a su optimización determinando la trayectoria positiva máxima de  $I$  a  $F$  en  $R$  (o de  $F$  a  $I$  en  $R'$ ). Sin embargo, si previamente ya se han determinado las fechas más próximas  $a(i)$  para toda etapa  $i \in N$ , puede iniciarse el algoritmo de cálculo del potencial  $b'$  óptimo con  $b'(i) = a(F) - a(i)$  para toda etapa  $i$  que esté sobre la ruta crítica con la ventaja de que estos valores no serán ya modificados pues  $a(i) = b(i) = a(F) - b'(i)$  para tales etapas. Más aun, si  $b'$  se construye mediante el algoritmo de rectificación de tensión, iniciando de este modo, entonces constituye una solución óptima del problema de tensión mínima en  $R'$  ya que su despliegue es  $b'(F) - b'(I)$  que coincide con la duración del proyecto (es decir, con la generación inferior de la trayectoria positiva máxima). Esto ahorra la aplicación del algoritmo de trayectoria máxima dos veces. A continuación se detalla el algoritmo simplificado.

## A L G O R I T M O

Propósito. Determinar un potencial  $a$  con  $a(I) = 0$  en una red PERT.

### Descripción

Paso 1. Sea  $a$  cualquier potencial de valores finitos con  $a(I) = 0$ . Sea  $v = \Delta a$ .

Paso 2. Sea  $A^+ = \{j \in A \mid v(j) < d(j)\}$ .

- Si  $A^+ = \emptyset$  terminar. El potencial  $a$  resuelve el problema.
- En otro caso seleccionar  $\bar{j} \in A^+$  e ir a 3.

Paso 3. Colorear los arcos de  $R$  de la siguiente manera:

rojo    si  $v(j) > d(j)$ ,  
negro   si  $v(j) \leq d(j)$ .

Determinar, mediante el algoritmo de Minty, el corte  $Q$  compatible con la coloración que contiene a  $j$ .

Calcular:

$$\alpha = \text{Min} \begin{cases} v(j) - d(j), & \text{para } j \in Q^- \\ d(j) - v(j), & \text{para } j = \bar{j}. \end{cases}$$

Actualizar  $a = a + \alpha e_{N/S}$  e ir a 2.

### EJEMPLO 3.

Considérese el proyecto del ejemplo 1. Determínese un potencial a tal que su diferencial sea factible con respecto a las generaciones utilizando el algoritmo de rectificación de tensión modificado.

Iteración 1. Se inicia con el potencial a mostrado en la figura 5.5(a). Se tienen entonces los siguientes valores para  $v = \Delta a$ :

j	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
v(j)	5	9	10	4	6	7	8

Luego,  $A^+ = \{A2\}$ . La coloración definida se muestra en la figura 5.5(b) y compatible con ésta se determina el corte  $Q = \{(I,1), (I,3), (I,2)\}$ . El valor de  $\alpha$  es:

$$\alpha = d(I,3) - v(I,3) = 12 - 9 = 3.$$

Se actualiza el potencial obteniéndose el mostrado en la figura 5.5(c).

Iteración 2. Los valores de  $v = \Delta a$ , para el nuevo potencial a son:

j	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
v(j)	8	12	13	4	6	7	8

De donde  $A^+ = \emptyset$  y por tanto el diferencial del último potencial es factible.



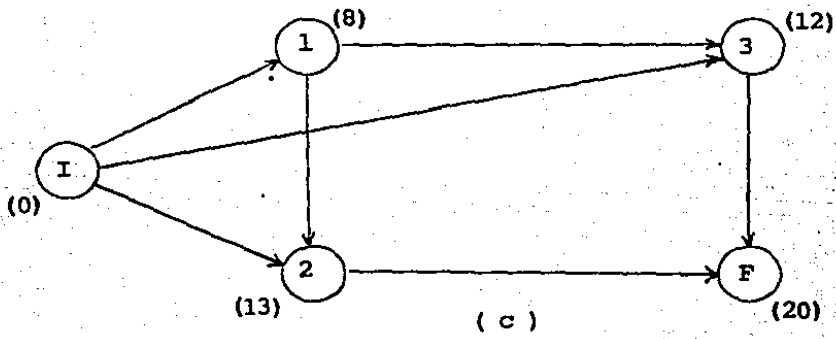
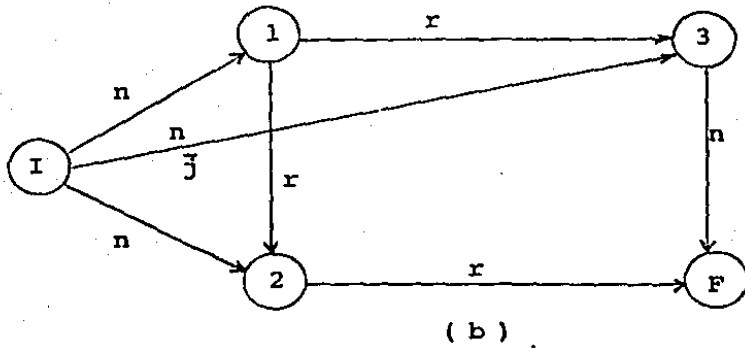
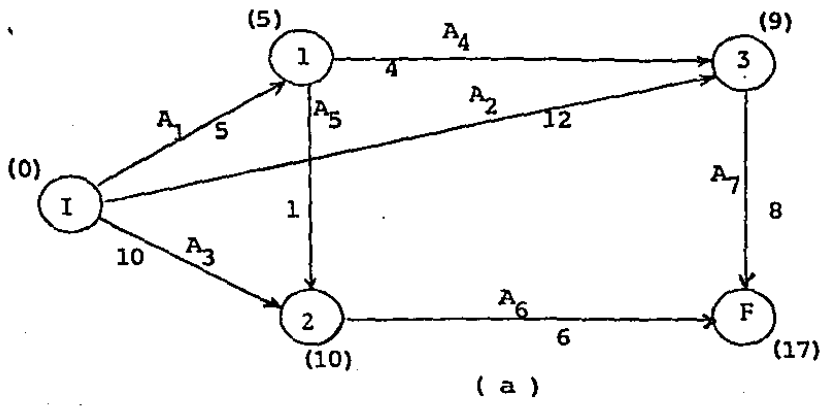


Figura 5.5

Cuando se cuenta ya con un potencial a tal que su diferencial  $v$  es factible respecto a las generaciones se procede entonces a la determinación del óptimo. Para ello se requieren ciertas modificaciones y simplificaciones del algoritmo de trayectoria mínima. Primeramente nótese que  $d_0^+(j)$  siempre es igual a infinito pues éste es el valor de la generación superior de todo arco. Por otro lado, puesto que se trata de determinar una trayectoria positiva máxima, no serán incluidos los arcos recorridos negativamente; el cálculo de  $\beta$  se reduce entonces a la comparación de los términos  $w(i') + d_0^-(j)$  (se considera la generación inferior de las trayectorias) con  $j \in Q^+$ . El valor de  $\beta$  será el máximo de las diferencias anteriores. Un corte de generación inferior ilimitada no puede presentarse pues todas las actividades tienen duración finita; de aquí que el valor de  $\beta$  siempre es finito y por tanto después de su cálculo se pasa directamente al paso 3.

Por otro lado, se desea determinar no solamente la trayectoria positiva máxima de I a F, sino también las trayectorias positivas de I a  $i$  para todo  $i \in N$ , con objeto de conocer las fechas más próximas para cada etapa. El criterio de término establecido en el paso 3 no sería entonces finalizar cuando  $i \in N^-$  sino cuando  $S = N$ ; es decir, cuando se haya construido un enrutamiento que toque todo nodo de la red.

A continuación se describen estas modificaciones y se resuelve un ejemplo.

## A L G O R I T M O

Propósito. Determinar las fechas más próximas a  $(i)$  para  $i \in N$ , la ruta crítica y la duración mínima del proyecto en una red PERT.

### Descripción

Paso 1. Iniciar con un potencial  $a$  obtenido mediante el algoritmo anterior. Sean  $S = N^+ = \{I\}$ ,  $\theta$  vacío y  $w = 0$  en  $S$ . Sea  $d_0^-(j) = d(j) - v(j)$ ,  $j \in A$ , donde  $v = \Delta a$ .

Paso 2. Determinar el corte  $Q = [S, N/S]$  y calcular:

$$\beta = \text{Max } \{w(i') + d^-(j), \text{ para } j \sim (i', i) \in Q^+\}.$$

Ir a 3.

Paso 3. Sea  $j$  el arco correspondiente al valor de  $\beta$ .  
Calcular:

$$S = S \cup \{i\}, \theta(i) = \{j\}, w(i) = \beta:$$

- Si  $S = N$  terminar. La  $\theta$ -trayectoria positiva  $P_i: I \rightarrow i$  es máxima, para  $i \in N$ , y el potencial  $a = a + w$  representa las fechas más próximas de las etapas.
- Si  $S \neq N$  ir a 2.

EJEMPLO 4.

Determinese la duración mínima del proyecto, la ruta crítica y la fecha más próxima de cada etapa para el proyecto del ejemplo 1 utilizando el algoritmo de trayectorias modificado.

Se inicia con el potencial obtenido en el ejemplo 3. Entonces (figura 5.6(a)).

j	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
$d_0^-(j)$	-3	0	-3	0	-5	-1	0

A continuación se presenta un cuadro resumen de las iteraciones. En la figura 5.6(a) se ha marcado  $w(i)$ .

Iteración	Valor de $\beta$	nodo agregado a S	$\Theta(i)$	$Q^+$
0	-	I	--	A1, A2, A3
1	0	3	A2	A1, A3, A7
2	0	F	A7	A1, A3
3	-3	1, 2	$\Theta(1) = A1$ $\Theta(2) = A3$	

Puesto que  $S = N$  se termina. Las fechas más próximas son los valores del potencial  $a = a + w$  y se muestran en la figura 5.6 (b). La  $\Theta$ -trayectoria positiva máxima, marcada en la figura 5.6(b), es la ruta crítica y la duración mínima del proyecto es igual a la generación inferior de ésta: 20 semanas.

Nótese que estos resultados coinciden con los del ejemplo 1 como era de esperarse.

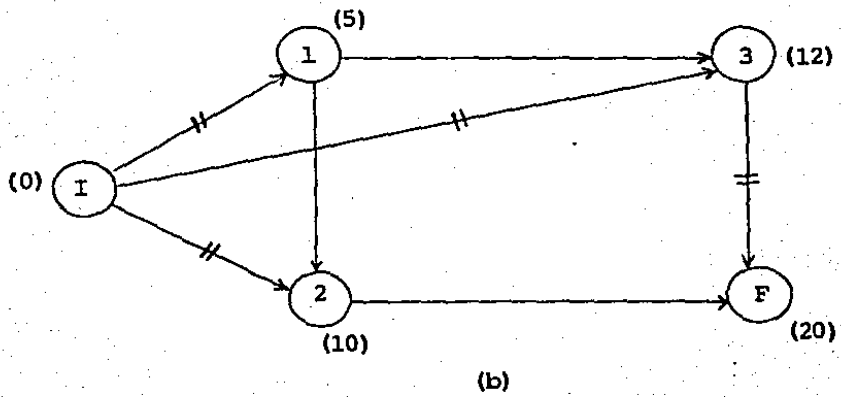
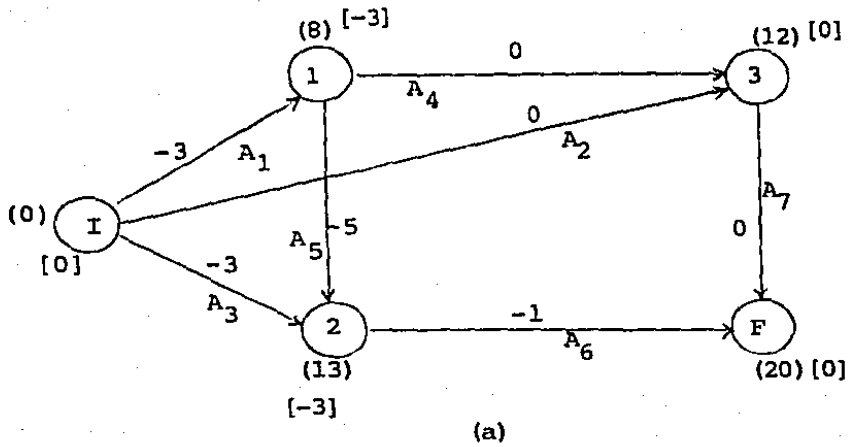


Figura 5.6

## CONCLUSIONES.

Este trabajo ha sido enfocado a la presentación y análisis de resultados teóricos y algoritmos de solución simultánea para las parejas de problemas duales de redes flujo máximo-corte mínimo y trayectoria mínima - tensión máxima. También se ha considerado el caso de determinación de soluciones factibles con respecto a ciertas restricciones de divergencia y de capacidad en el caso de flujos y de generación en el caso de diferenciales. En cada capítulo se hizo patente la importancia de los resultados establecidos en el desarrollo de los algoritmos de solución pues estos últimos surgen de las demostraciones constructivas.

Por otro lado, se hizo notar el paralelismo existente entre las parejas de problemas duales antes mencionadas. Lo más destacado de tal paralelismo lo constituyen los teoremas de Ford y Fulkerson y de Minty, en los cuales se establece respectivamente que el supremo en el problema de flujo máximo es igual al mínimo en el de corte mínimo y que el mínimo en el problema de trayectoria mínima es igual al supremo en el de tensión máxima. Otra analogía consiste en disponer de algoritmos de solución simultánea en ambos pares de problemas. En lo referente a factibilidad, lo más relevante son los teoremas de distribución factible, para el caso de flujos, y de diferencial factible, para el caso de tensiones, así como el desarrollo de dos tipos de algoritmos: los de distribución

y rectificación de flujo para el caso de flujos y los de diferencial factible y rectificación de tensión para el caso de diferenciales. En los métodos de distribución factible y diferencial factible se analizan las violaciones a restricciones sobre los nodos y en los de rectificación de flujo y tensión se trabaja sobre arcos. En la presentación de todos estos algoritmos se hizo énfasis en la importancia de los teoremas de alternativas conocidos como lema de Minty y teorema de la red coloreada, pues se aplican como subrutinas en casi todos los casos.

Este paralelismo mostrado en los problemas de flujos y diferenciales permite el desarrollo de una teoría general que engloba los problemas básicos de Redes (R.T. Rockafellar). De hecho, las variables tratadas tienen mayor relación que la establecida en este trabajo. En un diagrama, llamado de Tucker, se relacionan los pares de variables flujo - divergencia y potencial - tensión; este esquema permite generalizar las relaciones existentes entre las variables y de este modo es posible extender los resultados teóricos que engloban estas parejas a problemas con matrices generales de restricciones (en el caso de redes tal matriz resulta ser la de incidencia de la red) abarcando así toda una gama de problemas de optimización. Un caso particular que vale la pena mencionar es el concerniente al lema de Minty. Este lema se utiliza en la determinación de soluciones factibles para los problemas de

flujos y diferenciales como se mostró en los capítulos 2 y 3. El lema puede generalizarse dando como resultado un teorema denominado de índices coloreados que a su vez se aplica en ciertos problemas de factibilidad con matrices generales. Es importante entonces profundizar en estas generalizaciones y explotar sus aplicaciones.

En los últimos capítulos quedó demostrado que es posible resolver otros problemas de redes utilizando los algoritmos de solución presentados en los capítulos 2 y 3, lo cual refuerza la importancia de éstos en la práctica. Más aún, los problemas tratados en estos capítulos, acoplamiento máximo y ordenamiento, se formulan como casos particulares de flujo máximo y tensión mínima respectivamente, lo cual permite ciertas especializaciones de los algoritmos. De tales especializaciones surgen resultados muy interesantes. En especial se observó que el teorema de Konig-Egervary, que relaciona acoplamiento máximo con bloqueo mínimo en una red, resulta ser un caso particular del teorema de Ford y Fulkerson y de aquí que sea posible obtener métodos de solución alternativos a los clásicos para resolver la pareja de problemas duales acoplamiento máximo - bloqueo mínimo. En cuanto al problema de ordenamiento, se observó que el problema de determinar un calendario de ejecución del proyecto, que minimice la duración de éste, puede formularse como un problema de tensión mínima; el dual de este último resulta ser un problema de determinación



de la trayectoria máxima que a su vez coincide con el concepto de ruta crítica. De aquí que los resultados y algoritmos de diferenciales, modificados para trayectorias máximas, puedan ser especializados para aplicarse al problema de ordenamiento.

Finalmente, cabe señalar que es también importante estudiar y analizar la complejidad computacional de los algoritmos presentados en este trabajo, así como llevar a cabo su implementación en una computadora.

Con todo lo anterior queda demostrado que el campo de estudio de los modelos de redes es muy amplio y variado. Aún quedan problemas abiertos en esta interesante rama de la Investigación de Operaciones.

BIBLIOGRAFIA.

Bazaraa, M.S. y Jarvis, J.J. 1981. "Programación Lineal y Flujo en Redes". LIMUSA.

Berge, C. 1970. "Graphes et Hypergraphes". Dunod.

Bland, R.G. y Las Vernas, M. 1979. "Minty colorings and orientations of matroids" Annals New York Academy of Sciences 319: 86-92.

Bondy, J.A. y Murty, U.S.R. 1976. "Graph Theory with Applications". American Elsevier.

Busaker, R.G. y Saaty, T.L. 1965. "Finite Graphs and Networks: An introduction with applications". McGraw-Hill.

Christofides, N. 1975. "Graph Theory: An algorithmic approach" Academic Press.

Hu, T.C. 1969. "Integer Programming and Network Flows". Adisson-Wesley.

Kennington, J.L. y Helgason, R.V. 1980. "Algorithms for network Programming". John Wiley & Sons.

Lawler, E.L. 1976. "Combinatorial Optimization: Networks and Matroids". Holt, Rinehart & Winston.

Minieka, E. 1978. "Optimization Algorithms for Networks and Graphs". Marcel Dekker.

Minty, G.J. 1960. "Monotone networks". Proc. Roy. Soc London A 257: 194-212.

Minty, G.J. 1966. "On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and networks programming". J. Math Mech. 15: 420 - 485.

Papadimitriou, C.H. y Steiglitz, K. 1982.. "Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity". Prentice-Hall.

Rockafellar, R.T. 1969. "The elementary vectors of a subspace of  $\mathbb{R}^n$ ". Combinatorial Math. and its Applications. Proc. of the Chapel Hill Conference 1967. R.C. Bose and T.A. Dowling. eds. University of North Carolina Press. p. 104-127.

Rockafellar. R.T. 1984. "Network Flows and Monotropic Optimization". John Wiley & Sons.

Sakarowitch, M. 1975. "Introduction a l'etude des Graphes". Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

Sakarovitch., M. 1977. "Optimization dans les réseaux". Université Scientifique et Médicale de Grenoble.