ANALISIS DE SISTEMAS DE PRODUCCION-INVENTARIO

ANA BERTHA JIMENEZ RIOS

T E S I S

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE
MAESTRA EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

CIUDAD UNIVERSITARIA

México, D. F. Agosto de 1987

C O N T E N I D O

NOMENCLATURA

x	Número de unidades a producir.
x^*	Tamaño del lote óptimo a producir.
C	Costo de producción por artículo.
d	Demanda por período.
k	Costo fijo por ordenar.
p	Costo por unidad no satisfecha.
S^*	Tamaño del déficit permitido.
h	Costo de almacenamiento por artículo.
w	Precio de venta del artículo.
V	Costo de ventas pérdidas esclusivas de la útilidad pérdida.
t	Tiempo entre demandas.
t_o	Tamaño del período en que el sistema se encuentra fuera de stock.
T	Longitud de tiempo durante el cual las ventas se pierden.
t^*	Frecuencia con la que debe hacerse una série de producción.
D	Variable aleatoria que representa la demanda.
$f(D)$	Función de densidad.
I^*	Nivel de inventario óptimo.
I_{n+1}	Nivel de inventario en el périodo n+1.
I_o	Nivel de existencia inicial.
α	Factor de descuento.
r	Tasa de interes por período.
R	Costo de descuento.
$C(.)$	Función de costos de producción.
$h(.)$	Función de costos de almacenamiento.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE DIAGRAMAS

INTRODUCCION

Los problemas de inventario han existido desde épocas prehistóricas, pues el hombre primitivo almacenaba comestibles para las temporadas de frío o de sequía. Sin embargo, hasta hace relativamente poco tiempo, se ha hecho conciencia de los problemas que ocasiona el tener mercancía en excedente. La necesidad real de la combinación perfecta entre la producción y el inventario apareció en las grandes empresas.

Una de las razones para planear la producción-inventario en la actualidad es que un peso bien invertido puede dar como resultado un ahorro extremadamente importante en cuanto a la adquisición y producción de nuevos productos, ya que el precio de ciertos materiales para la manufactura de otros puede tener considerables fluctuaciones; en este caso una de las posibles políticas que toman los empresarios es que cuando el precio de un material es bajo se procura comprar cierta cantidad para así mejorar el margen de utilidades posterior. Otra razón para planear la producción-inventario es que la demanda siempre será satisfecha y no se incurrirá en costos por pérdida de ventas ni costos de sobreproducción.

En general las personas interesadas en esta problemática han analizado y desarrollado técnicas que van encaminadas a resolver dos preguntas fundamentales:

¿Cuando producir o comprar?

¿En qué cantidad?

En 1915 Ford Harris (ref. 22) fue el primero en tratar de resolver uno de estos problemas; en particular Harris derivó la primera fórmula formal del modelo del tamaño del lote económico. Posteriormente R.H. Wilson deduce su fórmula, la cual se desarrolla como parte integral del control de inventarios.

En 1931 F.E. Reymond (ref. 46) publica el primer libro que trata los problemas de inventarios, sin embargo, el texto no trata toda la teoría ni derivaciones de fórmulas y sólo explica algunas extensiones del modelo del lote económico. No fue sino hasta después de la segunda guerra mundial cuando las revistas especializadas Management Science y Operation Research dieron atención a los aspectos de modelación de los inventarios.

Las técnicas de solución actuales sobre problemas de producción-inventario van desde ubicar el sistema hasta formar modelos matemáticos que representan la problemática. El objetivo de construir modelos matemáticos en un sistema de producción inventario es determinar la característica de la política óptima de operación de dichos sitemas, es decir, la política asociada a la maximización de utilidades o bien la minimización de costos en un horizonte de planeación conocido. En algunos casos la tarea de seleccionar la política es un tanto difícil pues se deben considerar todos los componentes modelables que puedan afectar al sistema, ésto con el fin de tomar la mejor decisión y así llegar a resolver el problema de manera realista. Los principales componentes de los sitemas de inventario son: demanda, oferta, costos, producción, políticas de operación.

Existen en el ramo de los inventarios una gran variedad de modelos que pueden clasificarse en Determinísticos y Estocásticos y que a su vez pueden ser dinámicos o estáticos.

En los modelos estocásticos la demanda es una variable aleatoria con función de distribución conocida y los modelos determinísticos tienen la característica principal de que la demanda es conocida y no necesariamente constante. En este trabajo se estudian dos tipos de estos modelos: el de lote económico y el de costos cóncavos.

El objetivo de esta tesis es analizar los modelos clásicos de producción-inventario tanto de tipo determinístico como estocástico, con especial énfasis en aquellos modelos determinísticos que presentan una estructura particular que permita proponer métodos de solución sencilla y eficiente como es el caso de los problemas de producción-inventario con función de costos cóncavos. Así mismo se pretende extender el análisis de estos mismos modelos a casos con otras variantes como son el control de la producción-inventario cuando se tiene límite en la producción y cuando se tienen costos de cese y arranque de producción. Todos estos modelos pueden resolverse con las mismas técnicas y resultados que el caso simple de costos cóncavos.

Los modelos que se muestran a lo largo de los capítulos, se plantean bajo diferentes series de suposiciones y circunstancias que representan los problemas reales concernientes a los sistemas de inventarios; dichas suposiciones pueden ir desde representar un modelo casi ideal, en el cual se presenta la situación en que la demanda es conocida y puede ser satisfecha en el momento en que se requiera, hasta tener el caso en donde las ventas se pierdan por no contar con el material inmediatamente, o que se presente la situación en que se exceda la producción y entonces se incurre en costos de sobreproducción; otro caso también posible es cuando la producción tenga que ser limitada. Pueden existir un gran número de situaciones sin embargo, sólo algunos casos particulares se muestran en esta investigación.

La tesis está desarrollada de la siguiente manera: En el capítulo I se muestra un desarrolo histórico, las principales componentes de los sistemas de producción-inventario así como las hipótesis usuales empleadas para poder modelarlos.

En el capítulo II se analizan algunos modelos clásicos de producción-inventario determinísticos, tales como el modelo del tamaño del lote económico con algunas variantes. Se muestran algunos ejemplos ilustrativos.

En el capítulo III se analizan algunos modelos clásicos de producción-inventario de tipo estocástico con algunas variantes como son con o sin costo de ordenación o con y sin déficit y se dan algunos ejemplos para ilustrar el capítulo.

El capítulo IV muestra el análisis de control de producción-inventario para el caso en que las funciones de costos de producción y de inventario son cóncavas. Primero se describe un modelo determinístico de producción-inventario, después se analiza el mismo modelo para el caso de costos cóncavos y en ambos modelos se propone un método de solución con programación dinámica. Para la tercera sección se analiza el modelo cuando hay déficit y se describen algunos ejemplos.

En el capítulo V se dan algunas extensiones de los modelos mencionados, dichas extensiones presentan los siguientes casos: cuando la producción es limitada por alguna causa, dando como resultado que existe déficit.

En el capítulo VI se muestran las conclusiones de la tesis.

Un programa de computadora llamado PRO-IN se ha desarrollado en una P.C. compatible y se presenta en el anexo I. Se presentan también, en el anexo II, algunos conceptos más relevantes de programación lineal usados a lo largo de la tesis que permiten prestar ayuda al lector en caso de que se presente alguna duda.

CAPITULO I

ASPECTOS BASICOS DE UN INVENTARIO

Los aspectos básicos de un inventario son: la forma en que se desarrolla, los componentes del mismo y la manera de describirse. En el presente capítulo se muestra de una manera general cada una de estas partes, esto es con el objeto de que el lector se generalize con los conceptos de inventarios y así pueda comprender el contenido de la tesis.

El capítulo se desarrolla de la manera siguiente: en la primera sección se muestra un pequeño resumen de la evolución de los sistemas de producción-inventario. Posteriormente se describen los principales componentes de los mismos y por último de una manera general se muestran los modelos utilizados a lo largo de la tesis.

1.1 EVOLUCION DE LOS SISTEMAS DE PRODUCCION-INVENTARIO

Hace aproximadamente trecientos años que se tomó conciencia de lo que era un inventario, los primeros que tomaron medidas serias sobre esto, fueron los entonces llamados "marchantes" y los productores. En 1677, Pappilon (ref. 43) decía:

"El stock o riqueza del reino unido, no sólo consiste de nuestro dinero, sino también de nuestras comodidades y condiciones para el comercio y llenado de nuestros almacenes con materiales necesarios"

Más recientemente, específicamente en los años veintes, la toma de decisiones tuvo comienzo para incrementar el énfasis en la liquidez de capital activo para los inventarios y en las transacciones comerciales, lo cual fue establecido como una meta por muchas organizaciones.

En 1950 Whitin (Ref. 55) publica un libro en el cual se proporciona una versión estocástica del lote económico.

Después de la Segunda Guerra Mundial las revistas Management Science y Operation Research publicaron algunos modelos sobre la naturaleza estocástica de los inventarios, específicamente

Arthur F. Veinott, Jr. en 1964 publica "The Optimal Inventory Policy for batch Ordering". (Ref. 53). En 1969 Willard I. - Zanwill publica el artículo "A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic lot size Production System - A Network approach" y muchos otros no mencionados.

Es interesante observar que los economistas y matemáticos a últimas fechas han tomado interés en los modelos de inventarios, pues en ellos se han podido formular modelos teóricos, que posteriormente los ingenieros les dan aplicación práctica. Un ejemplo clásico de esta situación es dada por Arrow, Harris y Marschack (Ref. 1) quienes fueron los primeros en proveer un análisis matemático riguroso sobre la teoría de inventarios y posteriormente Dvoretzky, Kefer y Wolfowitz (Refs. 17, 18) publicaron algunos artículos, en donde combinaron los problemas de inventarios dando un tratamiento, tanto económico, como matemático. Estos autores son además los promotores de las ideas que usó - Bellman para popularizar el principio de optimalidad en programación dinámica. En 1958 Arrow, Karlin y Scarf (Ref. 2) publican un libro en el cual se muestran las matemáticas de los sistemas de inventarios.

De todos los problemas referentes a este tema, los problemas de multilocalización de inventarios en múltiples períodos y con múltiples artículos son los que más se han desarrollado. Existe en la literatura una gran variedad de estas versiones (Ref. 27). Allen (1958), Gross (1963), Clark and Scarf (1960), Veinott (1965), Bessler and Veinott (1966), Das (1075) Karmarkar (1979), Simpson (1978) por citar algunos investigadores que han examinado el caso de sistemas de múltiples fases en estructura arborescente, trabajos recientes de esos problemas han sido tratados por Federgruen and Zipkin (1983). Este problema también se relaciona con ciertos problemas de producción formulados estocásticamente. Siguiendo los resultados de Zarwill's, Christopher H. Nevison en 1984 (Ref. 41) muestra una extensión al modelo del tamaño económico del lote económico considerando en este que existen costos de arranque de producción y que la demanda es una variable aleatoria en cada período de tiempo.

En 1985 Meir J. Rosenblatt and Moshe Kaspi (Ref. 48) publican un artículo en el cual se muestra un algoritmo con programación dinámica que sirve para ordenar artículos dentro de diferentes grupos en donde cada uno permanece un determinado período de tiempo almacenado. John W. Mamer and Stephen A. Smith publican otro artículo en el cual se presenta como manejar un sistema o taller que repara partes o maquinaria. Este sistema maneja múl tiples artículos o refacciones. Para el caso en que la unidad es reparable Silver (1972) obtiene una solución con programación dinámica usando una regla heurística para poder extender el problema a otros más generales. (Ref. 32). En este mismo año Charles P. Schmidt and Steve Nahmiar (Ref. 49) publican un artículo en el que se considera un sistema de inventario en el cual el producto final es ensamblado de dos componentes cada uno de los cuales es ordenado de fuentes diferentes. En este artículo se considera que la demanda del producto final es aleatoria. Utilizando el método de programación dinámica se caracteriza la forma óptima de ambas políticas de ordenación para los componentes y la política de ensamblado del producto final para un problema de períodos múltiples de longitud finita. Uno de los artículos más recientes publicado en 1987 es el elaborado por H. Jönsson and E. A. Silver, ellos analizan un sistema de control de inventarios de dos fases consistentes de una central de almacenamiento reemplazado por diferentes divisiones de almacenes. En el artículo se analiza la política de reemplazamiento usando un stock base y un ciclo de órdenes predeterminados. Se derivan fórmulas computacionales las cuales permite comparar ambos sitemas. Cadace Arai Yano investiga el problema de determinar la planeación óptima de carga en series de producción en sitemas en los cuales el tiempo de procesamiento y procuramiento es estocástico. El objetivo es minimizar la suma de costos de alamacenamiento y costos por trabajo retardado. Se presenta un procedimiento de solución general para dos estados y posteriormente para n-estados. Los resultados son obtenidos por métodos computacionales.

Existe sin lugar a duda una gran cantidad de artículos publicados y libros que tratan este tema. Sin embargo, solo se mencionaron algunos importantes para el trabajo de la tesis.

1.2 COMPONENTES PRINCIPALES DE LOS SISTEMAS DE PRODUCCION-INVENTARIO.

Para realizar un programa de optimización de producción-inventario en un horizonte de planeación conocido, se deben tomar en cuenta todos los factores que afectan al sistema, uno de éstos y de gran importancia es la política de operación que la empresa decida, es decir, la política asociada a la maximización de utilidades o bien a la minimización de costos en un determinado período. Entre otros componentes de un sistema de producción-inventario, se pueden mencionar a la demanda, los costos y la producción.

La demanda es un factor relevante en el control de producción-inventario. Representa el número de unidades requeridas en uno o varios períodos. Este número de unidades puede ser conocido con anticipación en cuyo caso se le denominará demanda determinística. En caso contrario se le denomina estocástica y tiene asociada una distribución de probabilidad conocida. Si la demanda es constante en todo período de tiempo se le llamará estacionaria y si varía con el tiempo es llamada dinámica o no estacionaria.

En general la demanda suele variar con el precio del artículo. Por ejemplo, la gente tiende a comprar más de un artículo, cuan

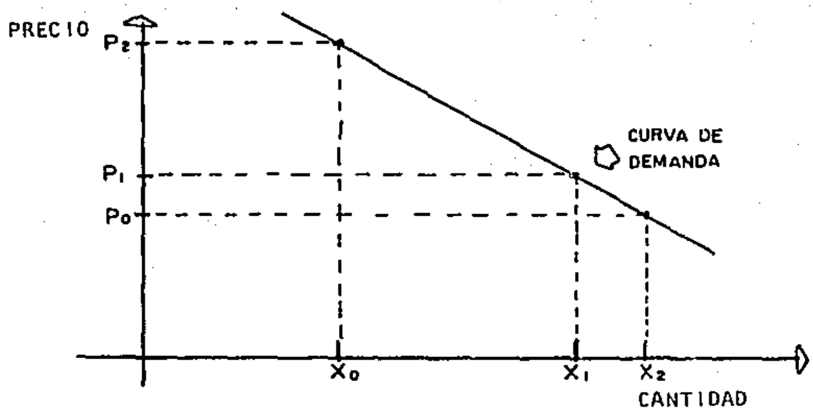


FIGURA 1.1 CURVA DE DEMANDA (PRECIO EN FUNCION DE LA CANTIDAD)

do su precio es bajo y viceversa, esta definición puede ser ilustrada usando un diagrama llamado curva de demanda Fig. 1.1 Para construir esta curva, se coloca en el eje vertical de un sistema coordenado el precio y sobre el eje horizontal se coloca la cantidad demanda . Si el precio es alto, supóngase P_2, la cantidad demandada será baja, esto es, x_0; al bajar el precio a P_1 y a P_0 la cantidad aumente a x_1 y x_2, respectivamente.

Otra componente muy importante en los sistemas de producción-inventario son los costos, los que se pueden clasificar como: a) costos asociados con la adquisición de bienes (compra o producción) b) costo por llevar inventario (o almacenamiento) c) costos de ordenamiento, d) costos asociados al déficit y e) costos de preparación.

El costo de compra o de producción es el costo marginal de cada artículo, éste será proporcional a la cantidad pedida o fabricada Cx, donde C representa el precio unitario del artículo y x la cantidad producida o comprada. Los costos de almacenamiento son los costos asociados a la conservación del artículo hasta que es vendido o usado; éstos pueden incluír el costo de capital paralizado, del espacio, del seguro y los impuestos atribuídos al almacenamiento. Los costos por demanda no satisfecha o déficit se presentan cuando la cantidad del artículo requerido (demanda) es mayor que la existencia disponible. Este costo depende de la estructura del modelo y de las políticas de operación de la compañía o de la escacez de material. Sin embargo, la misma política de operación puede decidir satisfacer la demanda posteriormente o no satisfacerla en lo absoluto, teniendo como consecuencia que las ventas se pierdan. Los costos de preparación son asociados al mantenimiento de maquinaria, estudios de mercado, estudios de factibilidad, estudios técnicos acumulación de datos o información de cierto artículo, procesos del control del sistema de inventario, etc. estos costos se supondrán fijos y serán cargados al inicio del período.

Los costos de ordenamiento se atribuyen a los gastos de transporte o fletes, seguros de transporte etc. estos costos pueden ser asimilados por la compañía o cargados al cliente.

La producción es otro componente igual de importante que los costos o la demanda, pues elegir el tipo de producto que se va a producir es una de las decisiones más importantes para los empresarios, ya que en base al producto que se va a realizar es el tamaño del horizonte de planeación. Así, si el producto caduca rápidamente, entonces se deberá producir el tamaño del lote exclusivamente de acuerdo a la demanda y esto se hace muchas veces para un sólo período. Si la demanda es constante en todo período aunque el horizonte de planeación sea grande, entonces se planeará la producción para cada período sin riesgo a sobreproducir o quedar cortos y entonces incurrir en déficit. Existen productos que pueden ser producidos en un sólo lote y almacenarse por varios períodos, este tipo de políticas la toman los empresarios cuando resulta más costoso producir cada período o cuando se cuenta con materia prima sólo una cierta temporada, indudablemente son productos que no se descomponen ni pasan de moda.

1.3 CLASIFICACION DE LOS MODELOS DE PRODUCCION-INVENTARIO

En los sistemas de producción-inventario existe una gran variedad de modelos que se pueden clasificar en Determinísticos y Estocásticos y que a su vez pueden ser dinámicos y estáticos. Los modelos estocásticos presentan la característica de que la demanda es una variable aleatoria, con función de distribución conocida. Algunos de estos modelos son (s,S), (Q,r,t), (r,T) (nQ, r,T), etc. y los modelos de períodos múltiples con o sin costos de preparación, modelos para un sólo período con y sin déficit etc. que se describen brevemente en la tesis.

Los modelos determinísticos tienen la cualidad principal de que la demanda es conocida y no necesariamente constante. En este trabajo se estudian dos tipos de estos modelos y son: el del lote económico y el de costos cóncavos. Los primeros se presentan con las siguientes variantes: con y sin déficit y cuando las ventas se pierden debido al déficit. Los modelos de costos cóncavos son los más importantes y son aquellos modelos con función de costos cóncavos; son estudiados con y sin déficit; con costos de preparación; cuando la producción es limitada; y cuando hay costo por arranque y paro de producción por algún motivo. Estos modelos son representados por medio de redes de flujo y se clasifican de acuerdo al siguiente diagrama 1

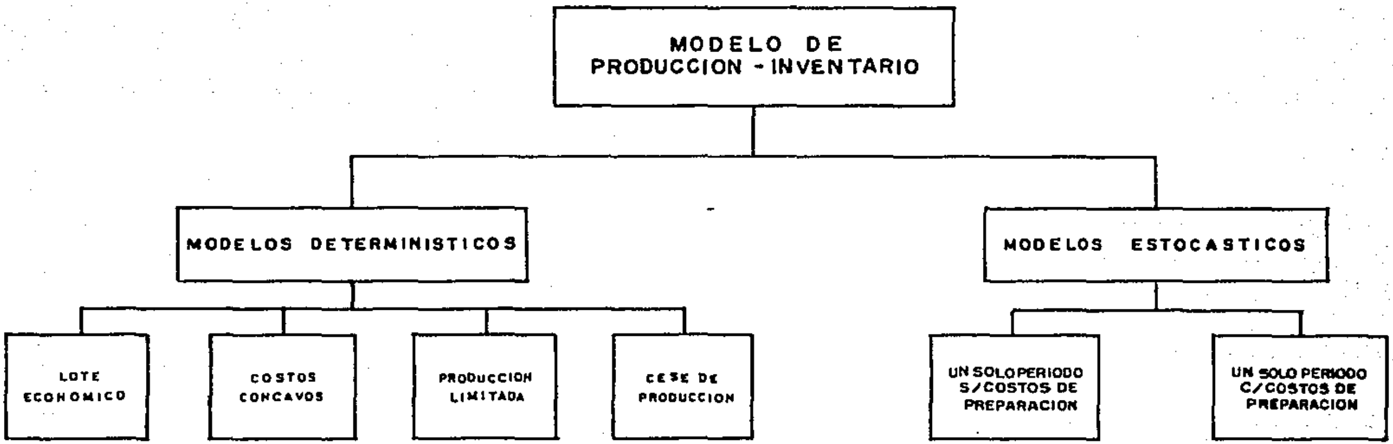

MODELO DE PRODUCCION - INVENTARIO
MODELOS DETERMINISTICOS
MODELOS ESTOCASTICOS
LOTE ECONOMICO
COSTOS CONCAVOS
PRODUCCION LIMITADA
CESE DE PRODUCCION
UN SOLO PERIODO S/COSTOS DE PREPARACION
UN SOLO PERIODO C/COSTOS DE PREPARACION

DIAGRAMA 1

CAPITULO II

MODELOS DETERMINISTICOS BASICOS

El interés en los modelos de producción-inventario ha crecido en las últimas décadas, esto es debido a los beneficios cualitativos asociados con la caracterización de la política óptima bajo distintas hipótesis. Uno de esos modelos es el del lote económico que resume una estructura compartida por una variedad importante de problemas determinísticos. La estructura y la sencillez del modelo permite que sus resultados sean fáciles de aplicar.

El capítulo se desarrollo de la manera siguiente: En la primera sección se hace la deducción de la fórmula para obtener el lote económico y el tiempo en que se debe hacer cada orden. En la segunda sección se obtiene la misma ecuación del lote económico pero en el caso en que hay déficit. Finalmente, se hace un análisis para el caso de períodos múltiples. Cada sección del capítulo se ilustra con algunos ejemplos.

2.1 MODELO DEL LOTE ECONOMICO

Este modelo se caracteriza por ser uno de los más sencillos que existen en la teoría de inventarios y es sin duda el más usado por su lógica y resultados. El modelo puede describirse como sigue: suponga que los artículos de una compañía se demandan a una tasa constante d. Suponga que al inicio de cada período se ordena una cantidad de artículos x cuyo tiempo de entrega es cero y que siempre se disponen artículos en inventario para satisfacer la demanda. Esquemáticamente, el nivel de inventario a lo largo del tiempo se comporta como se muestra en la figura 2.1, en donde se observa que el tamaño del período en que se efectúan las órdenes de artículos es igual a x/d (ref. 42)
Suponga que existe un costo fijo K por ordenar artículo y que el costo marginal de cada uno es igual a c unidades monetarias. También suponga que se tiene un costo por inventario igual a h unidades monetarias por artículo.

Se desea determinar el tamaño del lote x que debe ordenarse de manera de tener mínimo costo por unidad de tiempo.

Una manera sencilla de calcular el costo por período y de allí el costo promedio en el período, es observar que tenemos tanto costos de pedido como costos de inventario. El costo de pedi-

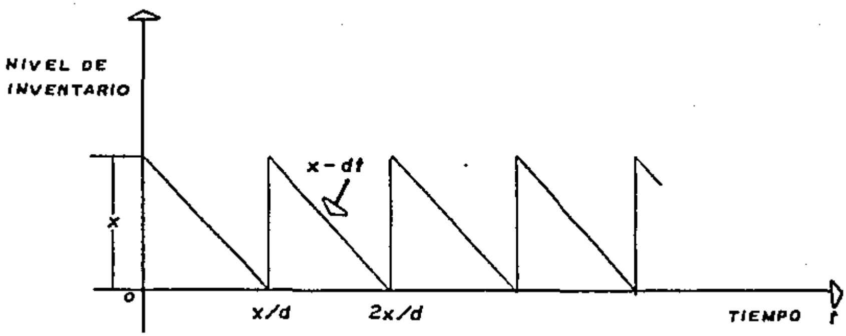


Figura 2.1 Desarrollo de los niveles de inventario

do es igual a (K + Cx) mientras que el costo de inventario es ($Hx^2/2d$), debido a la forma en que se desarrollan los niveles de inventario. Por lo tanto el costo unitario en el período es:

$$C_t(x) = (K + Cx + hx^2/(2d)\ )/(x/d) \qquad (2.1)$$

o bien

$$C_t(x) = dK/x + dC + (hx)/2$$

Sin embargo, la función $C_t(x)$ es convexa pues la suma de funciones convexas es convexa y el cálculo de su mínimo puede hacerse obteniendo la primera derivada. Específicamente

$$dC_t/dt = - dK/x^2 + h/2 = 0$$

o bien, el lote económico es

$$x^* = \sqrt{2Kd/h} \qquad (2.2)$$

y el tiempo o tamaño del período en que se efectúa el pedido es:

$$t^* = x^*/d = \sqrt{2K/dh} \qquad (2.3)$$

Esta es la famosa ecuación del lote económico con su correspondiente tamaño del período entre pedidos.

<u>Ejemplo 2.1</u> Supóngase que la demanda de un producto es de 25 unidades por mes. El costo fijo de preparación, cada vez que se hace una serie de producción, es de \$ 15.00. El costo marginal de producción es de \$ 1.00 por artículo y el costo de mantener inventario es de \$ 0.30 por artículo por mes. Suponiendo que no se permite déficit alguno, Determínese con que frecuencia debe hacerse una serie de producción y cual debe ser su tamaño.

Aplicando las ecuaciones (2.2) y (2.3) se tiene:

$$x^* = \sqrt{\frac{2(15)(25)}{(0.30)}} = 50 \text{ unidades}; \quad t^* = \sqrt{\frac{2(15)}{(25)(0.30)}} = 2 \text{ meses}$$

La serie de producción se debe hacer cada 2 meses y el tamaño del lote debe de ser de 50 unidades.

2.2 MODELO DEL TAMAÑO ECONOMICO DEL LOTE CON DEFICIT PERMITIDO

En el modelo del lote económico se consideró que toda la demanda es satisfecha a lo largo del período. Ahora se presenta el mismo modelo para el caso en que se permite déficit. Se supondrá que la política de revisión es periódica y con el propósito de que el déficit no sea demasiado grande, se ha formulado el siguiente modelo, en el cual se determinan los tamaños óptimos del déficit del lote y la longitud óptima del período para el cual el déficit es permitido. Sea s la existencia con la que se cuenta al principio de un período, P el costo por cada unidad no satisfecha para una unidad de tiempo, K el costo de ordenar artículo, C el costo marginal por cada artículo, h el costo por mantenimiento de inventario.

Para un tiempo s/d el inventario es positivo y su costo de almacenamiento por período es $hs^2/2d$, análogamente el déficit se presenta para un tiempo $(x-s)/d$ y su costo correspondiente es $P(x-s)^2/2d$. Para determinar el costo promedio por período, observe que se tienen costos por ordenar el material K y el costo de producción o compra de x artículos de modo que el costo total por período es:

$$C = [K + Cx + (hs^2/2d) + (P(x-s)^2/2d] / (x/d) \qquad (2.4)$$

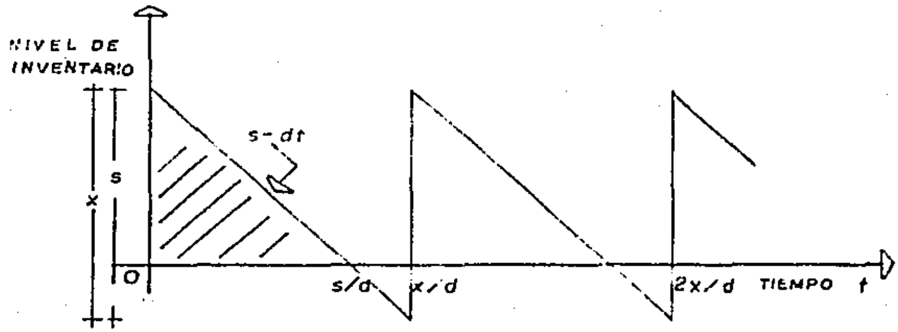


FIGURA 2.2 REPRESENTACION DEL MODELO DEL TAMAÑO ECONOMICO DEL LOTE CON DEFICIT

$$C = (dK/x) + dc + (hs^2/2x) + (P(x-s)^2/2x) \quad (2.5)$$

El modelo puede ser observado gráficamente en la Fig. 2.2

Para encontrar los tamaños óptimos de s*, x* y t* se procede derivando la ec. (2.5) con respecto a s, x y t e igualando a cero respectivamente y se encuentra el mínimo para cada función, esto es;

$$\frac{dC}{dS} = (hs/x) - (P(x-s)/S) = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{dC}{dQ} = -(dK/x^2)-h\,s^2/2x^2) + (P(x-s)/x) - P(x-s)^2/2=0 \quad (2.7)$$

resolviendo las ecuaciones se obtiene

$$X^* = \sqrt{2dK/h} \cdot \sqrt{(P+h)/P} \quad (2.8)$$

$$s^* = \sqrt{2dK/h} \cdot \sqrt{P/(p+h)} \tag{2.9}$$

El déficit máximo permitido se expone como:

$$S = X^* - s^* = \sqrt{2dK/P} \cdot \sqrt{h/p+h} \tag{2.10}$$

y la longitud óptima del período que se permite déficit es:

$$t^* = x^*/d = \sqrt{2K/dh} \cdot \sqrt{P+h/P} \tag{2.11}$$

<u>Ejemplo 2.2</u> Suponga que el costo de déficit en el ejemplo 2.1 es de $ 1.50 por artículo por mes. Determine la frecuencia con la que debe hacerse una serie de producción, cual debe ser el tamaño del lote a producir y el tamaño del déficit permitido.

Aplicando las ecuaciones (2.5), (2.7) y (2.8) se tiene que:

$$x^* = \sqrt{(2)(25)(15)/0.30}\ \sqrt{(1.50+0.30)/1.50} = 54.77 \text{ unidades}$$

$$t^* = (54.77)/25 = 2.19 \text{ meses}$$

$$x^* - s^* = \sqrt{(2)(25)(15)/1.50}\ \sqrt{(0.30)/(1.50 + 0.30}$$

$$S = 9.12 \text{ unidades}$$

De modo que se debe producir cada 2 meses y 19 días la cantidad de 55 unidades, permitiéndose un déficit de sólo 9 unidades.

2.3 MODELO EN QUE LAS VENTAS SE PIERDEN DEBIDO AL DEFICIT.

El modelo que aquí se presenta es clásico de aquellos en los que la demanda sucede cuando el sistema se encuentra a un nivel de almacenamiento cero o dicho de otra manera fuera de stock. Que la demanda suceda precisamente en el intervalo de tiempo en el cual el sistema se encuentra fuera de stock depende de la política de operación que siga la compañía, con esto y con el estudio acerca de déficit hecho en la sección (2.2) se puede concluir que la misma política de operación puede ser usada tanto para buscar la maximización del promedio de utilidades como la minimización del promedio de costos incurridos en la producción del artículo.

Sea h el costo por llevar inventario w el precio de venta del artículo, G el promedio anual de utilidades, v el costo de ventas perdidas exclusivas de la utilidad perdida, C el costo unitario del artículo, K el costo de ordenación, t el tiempo entre demandas, t_0 el tamaño del período en que el sistema se encuentra fuera de stock y $\lambda = 1/t_0$.

De modo que el promedio anual de utilidades es:

$$G = \lambda(w-C)(1-t_0) + v\lambda t_0 - (K + h)$$

$$= \lambda(w-C) - (v+w-C)\lambda t_0 - (K + h) \qquad (2.12)$$

$\lambda(w-C)$ es el costo anual de utilidades que debería ser obtenido si el sistema nunca estuviera fuera de stock.

Sea $V = (v + w - C)$ el costo de ventas perdidas incluyendo las utilidades perdidas.

Como V es el costo de las ventas perdidas entonces la minimización del promedio anual de costos ocupa la misma política de operación que la maximización de las utilidades, donde las dos expresiones difieren solo de $\lambda(w-C)$, la cual es independiente de la política de operación.

El objetivo del modelo es encontrar el tamaño óptimo de x y del intervalo de tiempo en el que se pierden las ventas de tal manera que los costos promedios anuales se minimicen.

Sea T la longitud del tiempo por ciclo durante el cual las ventas se pierden, para una cantidad requerida x, la longitud de un ciclo es:

$$T_1 = x/\lambda + T \tag{2.13}$$

El costo promedio anual es la suma de los costos por ordenación, por llevar inventarios y por déficit de modo que

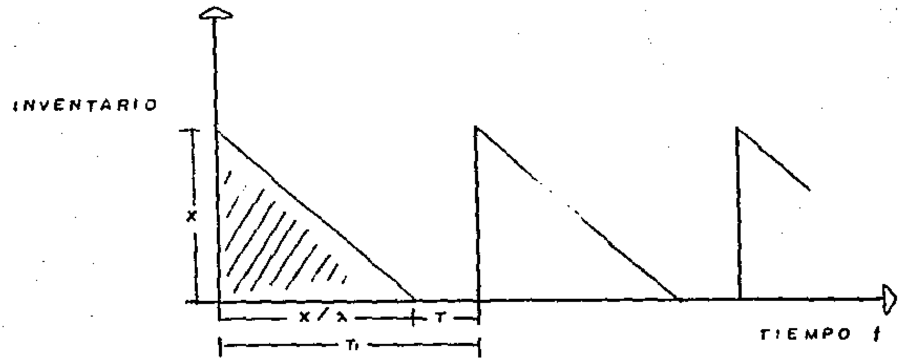


FIGURA 2.3 REPRESENTACION DEL MODELO EN LA CUAL LAS VENTAS SE PIERDEN

$$C = (\lambda/(x+\lambda t)K+(IC/2)(x^2/(x+\lambda T))+(V\lambda/(x+\lambda T)\lambda T) \qquad (2.14)$$

En promedio hay $(\lambda/(x+\lambda T))$ ciclos por año e $Ic = h$

El costo por llevar inventario por año es $ICx^2/2\lambda$ y el costo de ventas perdidas por ciclo es $v\lambda T$.

Geométricamente el modelo puede ser representado en la fig 2.3

En la figura 2.3 se puede observar como disminuye el nivel de existencias x/λ a lo largo del tiempo, llegando el nivel de inventario a cero; de ese instante hasta que se vuelva a proveer del artículo pasa un determinado intervalo de tiempo T en el cual toda la demanda que ocurre se pierde.

Si lo que interesa es encontrar el tamaño de x* y de T* óptimos. una condición necesaria para que esto suceda es que las derivadas de C con respecto a x y a T sean cero; es decir

$$dC/dx = 0$$

$$dC/dT = 0$$

$$dC/dx = -(x+\lambda t)^{-2}(\lambda k + (IC/2)x^2+\lambda^2 VT) + ICx(x+\lambda T)^{-1} = 0 \qquad (2.15)$$

ó

$$-\lambda k(IC/2)x^2 - V\lambda^2 T + IC\lambda T = 0 \qquad (2.16)$$

$$dC/dT = -(x+\lambda T)^{-2}(\lambda^2 k+(\lambda IC/2)x^2+V\lambda^3 T)+(x+\lambda T)^{-1}V\lambda^2 \qquad (2.17)$$

ó

$$\lambda V = \frac{\lambda k}{x} + (IC/2)x \qquad (2.18)$$

Se deben encontrar los valores para $0 < T^* < \infty$ y $0 < x^* < \infty$. Resolviendo 2.18, se obtiene

$$x = \frac{V\lambda}{IC} \pm ((V\lambda/IC)^2 - 2\lambda k/IC)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.19$$

Si $(V\lambda)^2 < 2k\lambda IC$ el valor del discriminante es negativo y x resulta no ser real en 2.18.

Si $(V\lambda)^2 = 2\lambda kIC$ hay un único valor que satisface 2.18.
Si $(V\lambda)^2 > 2\lambda kIC$ hay dos valores positivos de x para los cuales se satisface (2.18) de donde:

$$V\lambda/IC > ((V\lambda/IC)^2 - (2\lambda k/IC))^{\frac{1}{2}} \qquad (2.20)$$

en el caso en donde x no es real no existe un valor T el cual satisfaga $0<T<\infty$ y el valor óptimo de T deberá ser ∞. Si el valor óptimo es ∞ la condición $(V\lambda)^2 < 2\lambda kIC$ implica que se incurre en costos de ventas perdidas siempre. Considere uno o dos valores de x que satisfacen (2.18) sustituyendo (2.19) en (2.16) y después de una pequeña manipulación

$$\lambda T = -\lambda V/IC \pm ((V\lambda/IC)^2 - (2\lambda k/IC))^{\frac{1}{2}} \qquad (2.21)$$

Sin embargo de la ec. (2.20) se sigue que $T<0$ para ambos signos y que el óptimo no está en $0<T<\infty$, en este caso el valor óptimo es $T = 0$, de donde $(V\lambda) \geq 2\lambda kIC$, es decir, el costo de ejecutar con cualquier cantidad positiva la pérdida de ventas. En el caso en que $(V\lambda)^2 = \lambda kIC$ cualquier valor de T es óptimo.

En resumen nunca se incurre en un tamaño óptimo de T. Si la pérdida de ventas es permitida y se tiene $(V\lambda)^2 > 2k\lambda IC$ la solución es precisamente la misma que la de la Sección (2.1) es decir $x = \sqrt{2\lambda k/IC}$ y de la figura (2.1) se sigue que hay un intervalo de tiempo en que no hay pérdida de ventas (Ref.55)

CAPITULO III

MODELOS PROBABILISTICOS BASICOS

El presente capítulo se concentra en el análisis del control de la producción-inventario, en el caso particular en que la demanda es probabilística. Esta situación es mucho más realista que el caso determinístico analizado en el capítulo anterior. De manera semejante se hace el análisis para diferentes situaciones con uno o varios períodos de planeación de producción.

El capítulo se desarrolla de la manera siguiente: En la primera sección se muestra un modelo clásico de producción-inventario con demanda estocástica. En la segunda sección, se utiliza el mismo modelo pero se involucran costos de preparación y en la siguiente sección se trata el modelo para períodos múltiples y sin costos de preparación. Por último se analiza el modelo para períodos múltiples y con costos fijos de ordenación.

3.1 MODELO SIN COSTO DE PREPARACION

Es importante analizar otros modelos que se pueden clasificar también dentro de los modelos clásicos de inventario: los modelos estocásticos; los cuales presentan la característica esencial de que la demanda es una variable aleatoria con distribución de probabilidad conocida. El modelo puede ser descrito como sigue: suponga que los artículos son demandados aleatoriamente y producidos a un costo de C unidades monetarias por artículo. Sea h el costo de almacenar una unidad de dicho artículo. El costo de la demanda no satisfecha es de P unidades monetarias por artículo. Sea D la variable aleatoria que representa la demanda durante el período. Se supone que D es continua con función de densidad f(D). Se está considerando el modelo para un sólo período y sin costos fijos de preparación. Sea I la cantidad de unidades disponibles al comienzo del período.

El problema es determinar el nivel óptimo de inventario I* que deberá tenerse a la mano al comenzar el período de manera tal que los costos esperados se minimicen.

Este modelo describe el caso de inventario de un artículo en el cual la demanda ocurre en un intervalo relativamente corto, después del cual se vuelve obsoleto, se echa a perder o no se demanda en otro período. La característica que distingue a este modelo es que se presenta sólo una oportunidad para producir el artículo y esto ocurre al principio del período. La cantidad vendida durante el período, si I unidades se tienen a la mano al comienzo del período es: min (D,I). La cantidad de inventario en exceso al final del período es max {0, I-D} y la condición de déficit al final del período es:

$$\psi(I,D) = \begin{cases} 0 & \text{Si } D \leq I \\ D-I & \text{Si } D > I \end{cases} \qquad (3.1)$$

El costo total esperado en el período consiste de la suma de los costos esperados de ordenación o producción, almacenamiento y déficit. Denótese ese costo por C(I) de modo que:

$$C(I) = \int_0^{\infty} (CI - p\max(0,\ D-I) + h \max\ (0, I-D))\, f(D)\, dD$$

$$= CI + \int_I^{\infty} p(D-I) f(D)\, dD + \int_0^{I} h(I-D) f(D)\, dD \qquad (3.2)$$

Es claro que se debe encontrar el valor de I* tal que minimice C(I), dicho valor se encuentra derivando C(I) con respecto a I e igulándola a cero.

$$dC(I) \;/\; dI = 0 \tag{3.3}$$

ó

$$C + h \int_0^I f(D)\,dD - p \int_I^\infty f(D)\,dD = 0$$

ó

$$C + h\;F\;(I) - p\;(1-F(I)) = 0 \tag{3.4}$$

de modo que el valor de I^* que satisface dicha derivada es:

$$\phi(I^*) = \frac{p-C}{p+h} \tag{3.5}$$

donde I^* es definida sí y solo sí, $p>C$; si $p<C$ no se puede ope rar el sistema de inventario, sin embargo:

$$d^2C(I)/dI^2 = (p+h)f(I) > 0 \tag{3.6}$$

La solución para encontrar I^* la dá la ecuación (3.5) con el mí nimo global equivalente a decir que C(I) es convexa, por esto, la política óptima es: (Ref. 31)

$$\begin{cases} \text{ordenar } (I^*-I) & \text{si } I^* > I \\ \text{no ordenar} & \text{si } I^* \leq I \end{cases} \tag{3.7}$$

Ejemplo 3.1 Suponga que la demanda en galones de un jarabe dulce durante una semana es distribuído exponencialmente con una media de 100 galones, esto es:

$$f(d) = 0.01\ e^{-0.01t} \qquad t>0$$

El jarabe es producido una vez por semana y si no es usado durante esa semana, se echa a perder. El costo marginal de producción de dicho jarabe es de \$ 1.00 por galón. Cualquier cantidad no usada es vendida al fin de semana a un costo de \$0.10 por galón, y es tratada como desecho. Si hay déficit las ventas se pierden. Un galón de jarabe genera una ganancia neta de \$2.00. Determinar la cantidad de galones a producir I* tal que la demanda sea satisfecha.

De la ecuación

$$f(I^*) = \int_0^{I^*} 0.01\ e^{-0.01t}dt = \frac{2.00-1.00}{2.00+1.00}$$

$$1-e^{-0.01I^*} = 0.476 \Rightarrow \quad I^* = 64.6 \text{ galones.}$$

Se deben producir 64.6 galones a la semana de jarabe dulce para satisfacer la demanda.

3.2 MODELO CON COSTO DE PREPARACION

En general cuando se va a producir o comprar cierto artículo siempre se incurre en costos de preparación, que para este estudio se denotará por k. Este costo incluye: los costos de compra de herramienta, maquinaria, materia prima, estudios de mercado, de factibilidad, etc. y son cargados al inicio del periodo. Los costos que se manejan son el de producción o compra que se denota por C, de almacenamiento que se denomina h, y de déficit llamado P. Los costos de almacenamiento y déficit se supondrán lineales y son representados por la función G(I) de la siguiente manera.

$$G(I) = P \int_{I}^{\infty} (D-I)\,f(D)\,dD + h \int_{0}^{I} (I-D)\,f(D)\,dD \qquad (3.8)$$

Defínase la cantidad disponible en inventario I como:

$$I = I_0 + (I-I_0) \qquad (3.9)$$

donde I_0 es la existencia inicial antes de tomar la decisión de ordenar cierta cantidad, e $(I-I_0)$ es la cantidad pedida o producida. De modo que al considerar los costos de preparción k, producción o adquisición C y la función G(I) definida anteriormente se tiene:

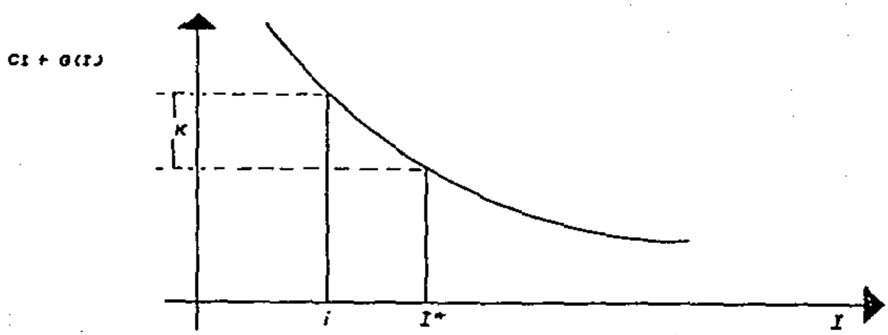


FIGURA 3.1 REPRESENTACION DEL COSTO EN FUNCION DEL INVENTARIO

$$C(I) = \begin{cases} k + C(I-I_0) + G(I) & \text{si } I > I_0 \\ G(I) & \text{si } I = I_0 \end{cases} \qquad (3.10)$$

donde C(I) representa el costo total esperado en el período.

Elaborando una gráfica como función de los costos y del inventario se tiene la fig (3.1).

Sea I^* el valor de I que minimiza $CI+G(I)$ y defínase i como el menor valor de I para el cual $Ci + G(i) = k + CI^* + G(I^*)$. De la fig (3.1) es posible analizar tres casos de interés.

a) $I_0 > I^*$

b) $i \leq I_0 \leq I^*$

c) $I_0 < i$

Caso a). Es el caso en que el inventario inicial es mayor que el inventario óptimo. Si $I_0>I^*$ entonces

$$k + CI + G(I) > CI_0 + G(I_0) \quad \forall\ I>I_0 \tag{3.11}$$

ó

$$k + C(I-I_0)+G(I) > G(I_0) \tag{3.12}$$

donde $(k + C(I-I_0) +G(I))$ es el costo total esperado si se hace pedido, y $G(I_0)$ es el costo total esperado si no se hace pedido alguno. Por tanto la política óptima indica que si $I_0>I^*$ no se haga pedido alguno.

Caso b). Si $i \leq I_0 \leq I^*$ resulta que

$$k + CI + G(I) \geq CI_0 + G(I_0)$$

ó

$$k + C(I-I_0) + G(I) \geq G(I_0) \tag{3.13}$$

donde $(k + C(I-I_0) + G(I))$ es el costo total esperado si se hace pedido y $G(I_0)$ es el costo total esperado si no se hace pedido, nuevamente hacer pedido resulta más caro que no hacerlo.

Caso c). Si $I_0<i$ se tiene que:

$$\min_{I\geq I_0} (k+CI+G(I)) = (k+CI^*+G(I^*)) < CI_0 + G(I_0) \tag{3.14}$$

o bien

$$\min_{I \geq I_0} (k+C(I-I_0) + G(I)) - (k+C(I^*-I_0) + G(I^*)) < G(I_0) \qquad (3.15)$$

de modo que los costos incurridos son menores si se hace pedido hasta completar I*. En resumen la política óptima de hacer pedido es la siguiente:

$$\begin{cases} \text{Si } I_0 < i & \text{hágase pedido hasta completar } I^* \\ \text{Si } I_0 \geq i & \text{no se haga pedido alguno} \end{cases}$$

El valor de I* óptimo se obtiene nuevamente a partir de la ecuación (3.5)

$$\phi(I^*) = \frac{p-C}{p+h}$$

donde i es el menor valor que satisface

$$Ci + G(i) = k + CI^* + G(I^*) \qquad (3.16)$$

la cual es una política del tipo (s,S) que es una de las más comúnmente usadas en la industria (Ref 17)

Note que estos resultados pueden ser extendidos al caso donde G(I) es estrictamente convexa; en tal caso la política óptima de ordenación es:

$$\begin{cases} \text{ordenar } (I^{*}-I) & \text{si } I < i \\ \text{no ordenar} & \text{si } I \geq i \end{cases} \tag{3.17}$$

<u>Ejemplo 3.2</u> Suponga que una compañía produce esmalte de uñas, y que la demanda mensual presenta una distribución exponencial dada como sigue:

$$f(D) = \frac{1}{10000} \; e^{-D/10000} \qquad\qquad D>0$$

El esmalte de uñas tiene un costo marginal de \$ 20.00, el costo de preparación es de \$ 800.00 y cada elmalte es vendido al público en \$ 45.00 con una utilidad de \$ 25.00. Si la demanda es mayor que el abastecimiento disponible entonces debe interpretarse el costo unitario de la demanda no satisfecha como el ingreso pedido de \$ 45.00 por esmalte. El costo de almacenamiento por esmalte es de -\$9.00.

Determinar el número de unidades que se deben producir tal que la demanda sea satisfecha.

De la ecuación (3.5)

$$\phi(I) = \int_0^I \frac{1}{10000} \; e^{-D/10000} \, dD = 1 - e^{-I/10000} = \frac{45-20}{45-9}$$

La cantidad óptima a producirse es $I^* = 11856$. De la ecuación (3.16)

$$20i + 45 \int_{i}^{\infty} (D-i) \frac{1}{10000} e^{-D/10000} dD - 9 \int_{0}^{i} (i-D) e^{-D/10000} dD$$

$$= 800+20(11856)+45 \int_{11856}^{\infty} (D-11856) \frac{1}{10000} e^{-D/10000} dD$$

$$-9 \int_{0}^{11856} (11856-D) \frac{1}{10000} e^{-D/10000} dD$$

de modo que i = 10674. Entonces la política óptima requiere que se haga una serie de producción hasta completar I=11856 unidades de esmalte de uñas, si la cantidad a la mano es menor que 10674. De lo contrario no se haga pedido alguno.

3.3 MODELO MULTIPERIODICO SIN COSTOS FIJOS DE ORDENACION

Una extensión lógica del análisis de las secciones anteriores es planear un horizonte de producción para más de un período. En esta sección se discute el modelo de planeación de producción-inventario para múltiples períodos en el cual la revisión del nivel de inventario y la decisión de ordenar es hecha sólo a intervalos fijos de tiempo. Los modelos de revisión periódica son importantes porque los sistemas en el mundo real son operados de acuerdo a políticas de este tipo. El modelo puede ser descrito de la siguiente manera: se supondrá que el horizonte de planeación es para n-períodos, que la revisión de inventario se hace al comienzo de cada período y que la entrega de artículos una vez ordenados es inmediata, se permite que haya déficit excepto al final del período N, se supone que la demanda D es independiente en cada período y distribuída idénticamente como una variable aleatoria continua con densidad de probabilidad f(D).

El precio de compra C del artículo depende de las unidades ordenadas, los costos de almacenamiento y déficit son de h y p unidades monetarias respectivamente. Finalmente se define el factor de descuento de los costos denotado por α, $0<\alpha<1$. Tal que α es de la forma $\alpha = (1+r)^{-1}$ donde r es la tasa de interés por período.

El problema es encontrar las cantidades óptimas para hacer los pedidos de modo que los costos esperados totales se minimicen. Sea I_{0j} el inventario neto al principio del período j, por el análisis hecho en las secciones 3.1 y 3.2 la política óptima implica que:

$$\begin{cases} \text{ordenar } I_j - I_{0j} & \text{si } I_j > I_{0j} \\ \text{no ordenar} & \text{si } I_j \leq I_{0j} \end{cases} \tag{3.18}$$

Se mostrará que en ausencia de un costo fijo de ordenación, el ordenar una cantidad mayor que I es la política óptima. El costo en el período j es:

$$\begin{cases} C\ (I_j - I_{0j}) + G(I_j) & \text{si } I_j > I_{0j} \\ G\ (I_j) & \text{si } I_j \leq I_{0j} \end{cases} \tag{3.19}$$

donde G es la suma esperada de un solo período de los costos de almacenamiento y déficit.

$$G(I_j) = h \int_0^{I_j} (I_j - D) f(D)\, dD + p \int_{I_j}^{\infty} (D - I_j) f(D)\, dD \tag{3.20}$$

El programa de optimización deberá encontrar el valor de I_j^* para cada período $j = 1,2, \ldots, N$ tal que el costo de descuento esperado:

$$R = E \left\{ \sum_{j=1}^{N} \alpha^{j-1} (c(I_j - I_{0j}) + G(I_j)) \right\} \qquad (3.21)$$

sea mínimo.

Utilizando el método de programación dinámica es posible encontrar la relación recursiva esperada tal que se obtenga el mínimo de la ecuación anterior.

$$R_j(I_{0j}) = \min_{I_j \geq I_{0j}} \{c(I_j - I_{0j}) + G(I_j) + \alpha E(R_{j+1}(I_j - D)) \qquad (3.22)$$

$$j = 1 \ldots N$$

donde $R_{N+1}(I_{N+1}) = 0$, y

$$E(R_{j+1}(I_j - D)) = \int_0^{\infty} R_{j+1}(I_j - D) f(D) dD \qquad (3.23)$$

donde $R_j(I_{0j})$ es el costo total mínimo sobre los períodos j, $j+1$, ..., N cuando el inventario neto al principio del período es I_{0j}. Asimismo, $c(I_j - I_{0j}) + G(I_j)$ es el costo esperado en el período j y R_{j+1} (I_j-D) es el costo mínimo obtenido sobre los períodos N-j.

Este mismo modelo puede ser extendido al caso donde se tienen costos fijos por ordenación, cuya política presenta la siguiente estructura de costos:

$$U(I_j-I_{0j}) = \begin{cases} k + c(I_j-I_{0j}) & \text{si } I_{0j}<I_j \\ 0 & \text{si } I_j=I_{0j} \end{cases} \qquad (3.24)$$

tal situación también puede ser formulada como un modelo de programación dinámica; la relación de recursión apropiada es:

$$R_j(I_{0j}) = \min_{I_j-I_{0j}} \{U(I_j-I_{0j})+G(I_j)+\alpha E(R_{j+1}(I_j-D))\} \quad J=1...N \qquad (3.25)$$

donde $R_{N+1}(I_{N+1}) = 0$

Teóricamente, es posible obtener la solución óptima de (3.24) por los métodos de programación dinámica tradicionales, sin embargo su manipulación es un tanto tediosa, y no se efectúa en este trabajo.

Ejemplo 3.3

La demanda para un artículo cada dos períodos es uniformemente distribuída de 0 a 10, es decir $f(0) = 0.10 \quad 0 \leq D \leq 10$. El costo de compra del artículo es de \$2.00 si sobra mercancía al final del período su precio se eleva a \$ 6.00. El costo por déficit de cada artículo es de \$ 10.00. Encontrar la política óptima para dos períodos con el factor de descuento $\alpha=1$.

Considere el período 2, entonces si j=2.

De acuerdo a la ecuación 3.22

$$R_2(I_2) = \min_{I_2 \geq I_{02}} \{2(I_2 - I_{02}) + G(I_2) + 0)\}$$

como $R_{j+1} = R_{2+1} = R_3 = 0$ entonces

$$F(I_2^*) = \frac{p-c}{p+h} = \frac{10-2}{10+6} = 0.5$$

el valor óptimo I_2^* a pedir es 5. En forma más general. De la ecuación 3.20

$$G(I_2^*) = 6 \int_0^{I} (I-D)(0.1)dD + 10 \int_I^{10} (D-I)(0.1)dD$$

$$= 0.8\ I^2 - 10I + 50$$

Por otro lado

$$E(R_2(I_1-D)) = \int_0^{10} R_2(I_1-D)(0.1)\,dD$$

$$= \int_0^{I-5} ((0.8)(I_1-D)^2 - 10\ (I_1-D) + 50)(0.1)\,dD$$

$$+ \int_{I_1-5}^{10} (2(5-I_1+D) + 0.8(5)^2 - 10(5) + 50)(0.1)\,dD$$

$$= .02\ I_1^3 - .4\ I_1^2 - 36.6$$

Ahora considerando el período 1 de la ecuación 3.22

$$R_1(I_{01}) = \min_{I_1 \geq I_{01}} \{2(I_1 - I_{01}) + 0.8I_1^2 - 10I_1 + 50$$

$$+ .02I_1^3 - 0.4I_1^2 - 36.6\}$$

$$= \min_{I_1 \geq I_{01}} \{- 2I_{01} + \frac{40}{3} - 10I_1 + 0.4I_1^2 + .02\ I_1^3$$

diferenciando $R_1(I_{01})$ con respecto a I_1 se obtiene el mínimo:

$$dR_1(I_1) \; / \; dI_1 = -10 + .8I_1 + .06I_1^2 = 0$$

entonces

$$I_1 = 7.25$$

de modo que la política óptima es ordenar hasta completar 7.25 unidades al principio del primer período y ordenar en el segundo período hasta completar 5 unidades.

CAPITULO IV

MODELO BASICO DE PRODUCCION-INVENTARIO

El presente capítulo se concentra en el análisis del control de producción-inventario para el caso particular en que las funciones de costos y de inventario son cóncavas, esto se debe a que en los problemas de inventario de tipo real los costos involucrados casi nunca son lineales. Existen situaciones en los que hay cargos fijos por diferentes motivos, por ejemplo, cese o arranque de producción, mantenimiento de maquinaria o simplemente cambios de producción de la cantidad de artículos de una misma clase. Esto precisamente es lo que nos lleva a hacer el estudio de la producción cuando las funciones de costos son cóncavas.

Este capítulo se desarrolla como sigue: en la primera sección se describe el modelo determinístico de producción-inventario y se propone un método de solución usando programación dinámica. En la segunda sección, se analiza el mismo modelo para el caso de costos cóncavos y se caracteriza la solución óptima para obtener un método de solución más sencillo también con programación dinámica. En la tercera sección se analiza la extensión al caso con costos cóncavos cuando existe déficit y se encuentran resultados semejantes. En la última sección se describen algunos ejemplos ilustrativos que posteriormente se comprueban computacionalmente.

4.1 EL MODELO BASICO DE PRODUCCION-INVENTARIO

Considérese la problemática de determinación de una política de operación óptima de un sistema de producción-inventario con demanda determinística en un período de planeación consistente de N períodos. Suponga que en cada período n se tiene una demanda conocida de un mismo artículo que se denota por d_n y que el costo de producir x_n artículos en dicho período es $c_n(x_n)$ con $c_n(\cdot)$ función conocida. También suponga que el costo de almacenar I_n unidades del artículo en cuestión durante el período n es dado por $h_n(I_n)$ con $h_n(\cdot)$ función conocida. La demanda se supone debe satisfacerse con la producción del mismo período o uno anterior, equivalentemente, se dice que el sistema de producción-inventario no permite demanda acumulada o déficit en la satisfacción de demanda. Finalmente supondremos, sin pérdida de generalidad, que tanto el inventario inicial como el inventario al final del horizonte de planeación es cero. El objetivo es determinar la producción que satisfaga la demanda a costo mínimo.

En el modelo de producción-inventario la forma de las funciones de costo por producción o inventario que se permite es general y el modelo puede expresarse formalmente como:

MODELO A. Determine los niveles de producción e inventario tales que se

$$\text{minimice} \sum_{n=1}^{N} [c_n(x_n) + h_n(I_n)] \qquad (4.1)$$

sujeto a

(1) $I_n + x_n = d_n + I_{n+1}$ $\qquad n = 1,2,\ldots, N$

(2) $x_n \geq 0$; x_n entero $\qquad n = 1,2,\ldots, N$

(3) $I_1 = I_{N+1} = 0$; $I_n \geq 0$; I_n entero $\qquad n = 1,2,\ldots, N$

$\qquad n = 2,3,\ldots, N$

En dicho modelo puede observarse que la condición (1) asegura la continuidad de los materiales en cada período, esto es, el inventario en ese período más lo que se produce es igual a la demanda más el material que queda en inventario en el período siguiente. Las otras condiciones aseguran que tanto la producción como el inventario son números enteros no-negativos. En particular la condición $I_n \geq 0$ equivale, en términos más generales, a que la demanda sea satisfecha por producción de ese período o anteriores. Las funciones de costo por producción o inventario en cada período sólo requieren estar definidas para valores enteros no-negativos.

Conviene señalar que los niveles de producción e inventario están interrelacionados y que si conocemos, por ejemplo, los niveles de inventario en cada período, podemos determinar los niveles de producción. Recíprocamente, si conocemos los niveles de producción x_1 hasta x_N podemos determinar los niveles de inventario por medio de la ecuación

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) = I_n + (d_1 + \ldots + d_{n-1}) \quad (4.2)$$

donde n = 2,..., N. Dicha ecuación se deduce de la suma repetida de las condiciones tipo (1) expresadas en el modelo. Es interesante observar de la ecuación anterior que el nivel de inventario en el período n, denotado I_n, es igual a la producción total hasta el período n-1 menos la demanda total hasta ese mismo período.

En el modelo A se dice que un vector $(x_1, \ldots, x_N)$ es un plan de producción <u>factible</u> si junto con los niveles de inventario asociados satisfacen las restricciones del modelo. El vector se dice plan de producción <u>óptimo</u>, si es factible y minimiza la función objetivo del modelo.

El modelo A corresponde a un problema de programación no-lineal con variables enteros pero puede resolverse con métodos sencillos debido a su estructura.

Formulación del modelo usando redes.

Un aspecto importante en la conceptualización del modelo A es su descripción esquemática por medio de redes, esto es, un conjunto de elementos denominados nodos y un conjunto de elementos denominados arcos que consisten de pares ordenados de nodos. En términos de redes, el modelo A equivale a la determinación de los "flujos" que ocurren a lo largo de los arcos y el flujo que entra en cada nodo es igual al flujo que sale (figura 4.1). Asimismo, se tiene un denominado nodo fuente (el nodo 0 en la figura 1) de donde parte todo el flujo que en nuestro modelo equivale a toda la producción. La red asociada al modelo expresa la condición $I_1 = I_{N=1} = 0$. En cada arco, el costo por paso de flujo queda expresado por $h_n(I_n)$ obien $c_n(x_n)$, dependiendo del flujo I_n o x_n; respectivamente.

En términos de la red asociada con el modelo, se dice que un flujo es factible si es entero y satisface todas las restricciones del modelo. Un flujo óptimo es un flujo factible cuya suma de costos en todos los arcos es mínimo.

Un método de solución general.

La estructura de model A permite determinar un plan de producción óptimo usando el método de la programación dinámica pro-

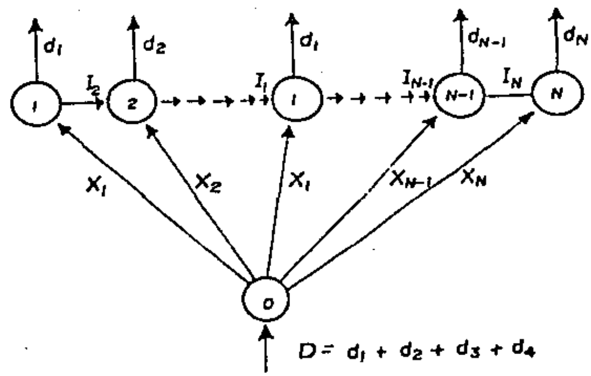


FIGURA 4.1 REPRESENTACION DEL MODELO A

puesto por Bellman. Dicho método se aplica convenientemente cuando existe un proceso secuencial y está basado en la definición correcta del concepto de estado, esto es, la información relevante del proceso en cada período. En el presente caso, conviene definir el estado (n, I_n) que representa el desarrollo del sistema de producción-inventario del período n hasta N dado que se dispone de un nivel de inventario I_n.

Sea $f(n, I_n)$ el costo mínimo de satisfacer la demanda durante los períodos n hasta N dado que el inventario en el período n es I_n. Suponga que la $f(n, I_n)$ incluye el costo de inventario $h_n(I_n)$ incurrido en forma inmediata, así como todos los costos de producción e inventario de todos los períodos restantes.

En estos términos, el problema original equivale a determinar el plan óptimo de producción asociado con el primer período dado que tenemos un inventario cero o bien $f(1,0)$.

El cálculo de los valores $f(n, I_n)$, $n= 1, \ldots, N$ pueden hacerse de manera recursiva. Específicamente, note que en el periodo N el inventario final debe ser cero por lo que el inventario al inicio de ese período tiene que ser menor o igual a la demanda d_N. Específicamente, $I_N \leq d_N$ y el valor de la función $f(N,I_N)$ es dado por:

$$f(N,I_N) = h_N(I_N)+C_N(d_N-I_N) \tag{4.3}$$

para todos los valores $I_N = 0,1,2, \ldots, d_N$. El cálculo de $f(N, I_N)$ es sencillo dadas las condiciones terminales del problema. La ecuación asociada con $f(N,I_N)$ es comúnmente denominada, la <u>condición</u> de <u>frontera</u> de la programación dinámica.

Considérese ahora el estado (n, I_n) donde $n < N$ y denote por x_n la cantidad de producción durante el período n. La suma de los inventarios en este período más la producción, esto es $I_n + x_n$, debe ser mayor o igual que la demanda d_n durante ese período y menor que la demanda total durante los períodos restantes. Específicamente, un nivel de producción x se dice factible respecto al estado (n, I_n) si x_n es un entero no-negativo que satisface:

$$d_n \leq I_n + x_n \leq d_n + \ldots + d_N$$

Es inmediato que existe un número finito de enteros x_n que satisfacen esta relación y podemos calcular $f(n,I_n)$ usando el argumento usual de la programación dinámica, esto es, la <u>ecuación recursiva</u>:

$$f(n,I_n) = \min \{h_n(I_n) + C_n(x) + f(n+1, I_n + x-d_n)\} \qquad (4.4)$$

donde el mínimo se calcula sobre todos los niveles de producción x que son factibles.

4.2 EL MODELO BASICO CON COSTOS CONCAVOS

En esta sección se analiza el modelo A de producción-inventario bajo la hipótesis que tanto las funciones de costo por producción como inventario son funciones cóncavas. Una función cóncava es aquella que tiene la propiedad de costos marginales decrecientes, es decir, el costo de producir una unidad adicional de producto cuando estamos en el nivel de producción x+1 es menor que el correspondiente al nivel x. La forma típica de estas funciones se muestra en la fig. 4.2 y se observa que en, términos analíticos, dicha propiedad equivale a

$$f(x+2) - f(x+1) \leq f(x+1) - f(x) \qquad (4.5)$$

para todo entero $x \geq 0$. Si definimos la diferencia hacia adelante de una función f como $\Delta f(x) = f(x+1)-f(x)$ y la segunda diferencia hacia adelante de f como $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1)-\Delta f(x)$ es sencillo concluir que una función f es cóncava sí y solo sí su segunda diferencia hacia adelante es no-negativa.

Suponga que las funciones de costo tanto de producción como inventario del modelo básico son cóncavas. La propiedad de concavidad de tales funciones permite caracterizar los planes de producción óptimos en forma sencilla y proponer métodos de solución eficientes. Con el propósito de empezar el análisis de este mo

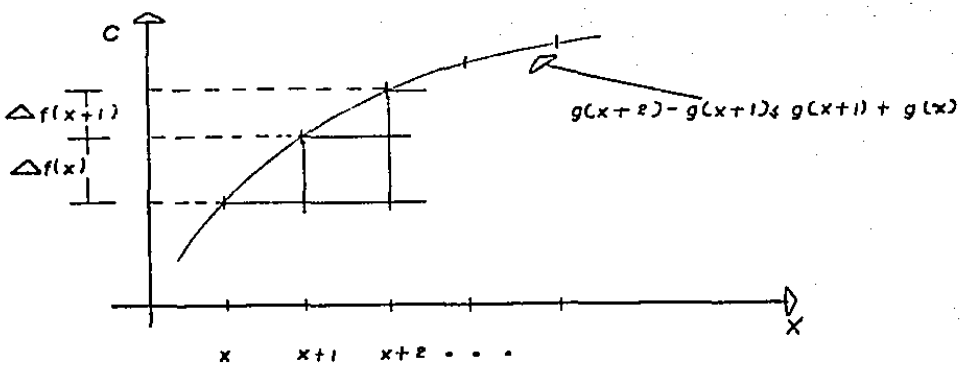


FIGURA 4.2 FUNCION CONCAVA

delo conviene observar la representación del mismo en términos de redes (fig 4.3). En dicha red existen varios circuitos, esto es, sucesiones de nodos y arcos de la forma

$$0 \longrightarrow i \longrightarrow i+2 \longrightarrow \cdots \quad \longrightarrow p \longleftarrow 0$$

donde el sentido de la flecha indica el sentido en que se utiliza el arco que une un par de nodos. Una <u>circulación</u> en la red es un flujo distinto de cero que circula a lo largo del circuito. Es interesante puntualizar que en la red de flujo que representa el modelo de producción-inventario no existe una circulación sí y solo sí $x_i I_i=0$ para todo $i=2,3, \ldots, n$ (Lema 1). Equivalentemente, no existe una circulación sí y solo sí en cada nodo i la demanda se satisface usando inventario de artículo

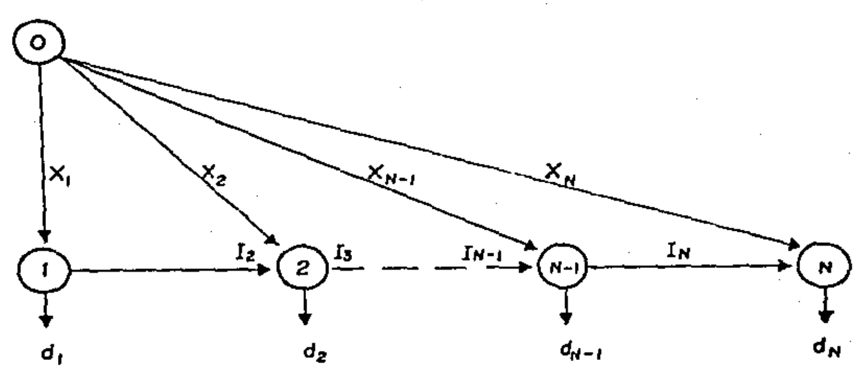


FIGURA 4.3 REPRESENTACION DEL MODELO A DE TIPO CONCAVO EN TERMINOS DE REDES.

del período anterior o producción del período i pero no ambos. Por otra parte, se cumple que existe un plan de producción óptimo $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ con correspondiente plan de inventarios $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$ talque $x_i I_i = 0$ para todo $i=1,\ldots n$ (Teorema 1) o equivalentemente existe plan de producción óptimo tal que no forma circulaciones en la red que representa el modelo. Esta condición permite establecer métodos sencillos de solución.

Lema 1. Un flujo factible en el modelo A no tiene circuitos sí y solo sí satisface:

$$I_j x_j = 0 \qquad j = 2, \ldots n \tag{4.6}$$

esto es, en cada nodo la demanda se satisface usando inventario de períodos anteriores o producción del mismo período pero no en ambos.

Prueba. Si existe un circuito en la red asociada con el modelo A se tiene que es de la forma

$$0 \longrightarrow i \longrightarrow i + 1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow j \longleftarrow 0$$

y necesariamente $I_j x_j \neq 0$. Recíprocamente, si $I_j x_j \neq 0$ por algún $j = 2,3, \ldots, n$ es sencillo verficar que existe un circuíto como el indicado al principio de la prueba y terminamos.

Teorema 1. Considerese el modelo A de producción-inventario con costos concavos. Entonces, existe al menos un plan de producción óptimo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ con correspondiente plan de inventario $I = (I_1, \ldots, I_n)$ tal que $x_i I_i = 0$ para todo período $i=1, \ldots, n$.

Prueba. Dado que existe un número finito de planes de producción factibles se concluye que al menos uno de ellos es óptimo. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un plan de producción óptimo con correspondiente plan de inventarios $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$ tal que minimiza la suma $(x_1 + I_1) + \ldots + (x_n + I_n)$ sobre todos los planes de producción óptimos. Suponga que $x_i I_i \neq 0$ para algún $i=1, \ldots, n$. Entonces, el lema 1 implica que existe un circuito. Dicho circuito es de la forma $(0, i, i+1, \ldots, j, 0)$ donde cada índice está asociado a un nodo de la red asociada al problema considerado (figura 4.4). Observe que todos los flujos en este circuito son enteros positivos.

Un nuevo flujo factible se obtiene si incrementamos x_i en una unidad; incrementamos I_k en una unidad para $i < k \leq j$; y decrementamos x_j en una unidad. El costo asociado con este nuevo flujo no puede ser menor que el costo óptimo. Por lo que podemos escribir

$$\beta \triangleq C_i(x_i) + C_j(x_j) + \sum_{k=i+1}^{j} h_k\,(I_k)$$

$$\leq C_i(x_i+1) + C_j(x_j-1) + \sum_{k=i+1}^{j} h_k(I_k+1) \tag{4.7}$$

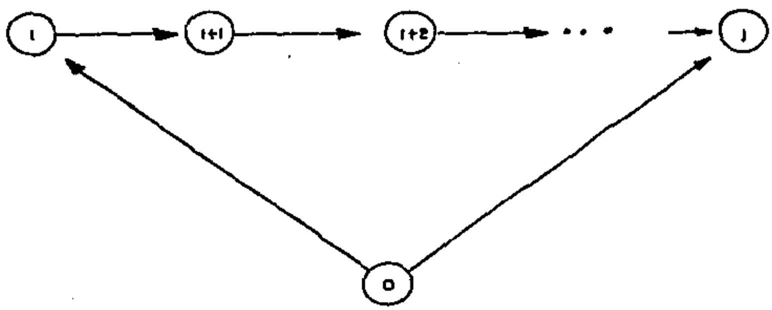


FIGURA 4.4 SUBRED ASOCIADA CON EL CIRCUITO

De manera análoga, es factible perturbar el plan de producción óptimo x decrementando x_i en una unidad; decrementando I_K en una unidad para $i < k \leq j$; y, aumentando x_j en una unidad. El flujo o plan perturbado tiene un costo mayor igual que el costo óptimo y podemos escribir

$$\begin{aligned}\gamma &\stackrel{\Delta}{=} C_i(x_i) + C_j(x_j) + \sum_{k=i+1}^{j} h_k\,(I_k) \\ &\leq C_i(x_i-1) + C_j(x_j+1) + \sum_{k=i+1}^{j} h_k(I_k-1)\end{aligned} \tag{4.8}$$

Sumando β con γ y arreglando la suma tenemos

$$0 < \Delta^2\, C_i(x_i-1) + \Delta^2 C_j(x_j-1) + \sum_{k=i+1}^{j} \Delta^2 h_k(I_k-1) \tag{4.9}$$

pero, las segundas diferencias hacia adelante de funciones cón cavas son no-positivas. Entonces podemos concluir que la desigualdad anterior es una ecuación y, por lo tanto, ambos planes de producción perturbados son óptimos. Sin embargo, la perturbación que disminuye x_i e I_k donde $i < k \leq j$, en una unidad, y aumenta x_j en una unidad es tal que disminuye en forma neta el flujo en las áreas en $(j-i)>0$ unidades. Esto contradice la minimalidad de la suma $(x_1+I_1) + \ldots + (x_n+I_n)$ y termina la prueba (Ref. 15).

Una implicación importante del teorema 1 es que el plan de producción óptimo x satisface la siguiente propiedad: si se produce en el período i, el volumen de producción satisface la demanda de ese período y todos los demás períodos anteriores al siguiente período de producción j donde i<j. En estos términos se observa que si definimos C_{ij} como el corte de producción y mantenimiento asociado con la satisfacción de la demanda del período i hasta un período antes del período j se tiene que dicho costo equivale a:

$$C_{ij} = C_i\left(\sum_{k=i}^{j-1} d_k\right) + \sum_{k=i}^{j-1} h_k \left(\sum_{t=k+1}^{j-1} r_t\right) \qquad (4.10)$$

si conocemos dichos costos para todo (i,j) donde i<j podemos resolver el modelo A de producción-inventario usando la técnica

de programación dinámica, específicamente defina $f(i)$ como el costo mínimo de satisfacer la demanda durante el período i a N dado que se tiene un inventario cero.

$$f(i) = \min \{C_{ij} + f(j)\} \qquad (4.11)$$

<u>Ejemplo 4.1</u> Considere un sistema de producción-inventario con la demanda determinística y horizonte de planeación consistente de cuatro períodos. Suponga que las funciones de costo por producción e inventario son como sigue: $C_i(x_i)=0$ si $x_i=0$; $C_i(x_i)=k_i+C_ix_i$ si $x_i>0$ y $h_i(I_i)=h_iI_i$ $i=1, \ldots, 4$. Las constantes asociadas así como la demanda en cada período son:

Período i	Demanda D_i	costo fijo k_i	costo unitario C_i	costo unitario por inventario. h_i
1	20	30	3	2
2	30	40	3	2
3	40	30	4	1
4	30	50	4	1

Si definimos las constantes C_{ij} asociadas con el costo de satisfacer la demanda desde el período i hasta antes del período j se tiene que:

$C_{12} = 90$ $\quad C_{13} = 180$ $\quad C_{14} = 300$

$C_{23} = 130$ $\quad C_{24} = 250$ $\quad C_{34} = 190$

$C_{15} = 390$ $\quad C_{25} = 340$ $\quad C_{35} = 310$

De donde la solución con programación dinámica es: $f(5) = 0$ y

$$f(i) = \min \{C_{ij} + f(j) \mid j>i\}$$

para todo i=1,2,3,4. Lo que deseamos es calcular f(1). Efectuando operaciones se tiene que:

$$f(4) = 170;\ f(3) = 340$$
$$f(2) = 470;\ f(1) = 590$$

entonces, f(1) es el costo de satisfacer la demanda durante los períodos 1 hasta 4, se $I_1=0$ y el plan de solución óptimo es:

$$x_1^* = 20,\ x_2^* = 30,\ x_3^* = 70,\ x_4^* = 0$$

cuyo resultado final puede ser apreciado en la fig. 4.5 Como se puede observar en la figura el plan de producción no forma ciclos por tanto se cumple la condición $x_i I_i = 0$ de donde se concluye que es un plan de producción óptimo.

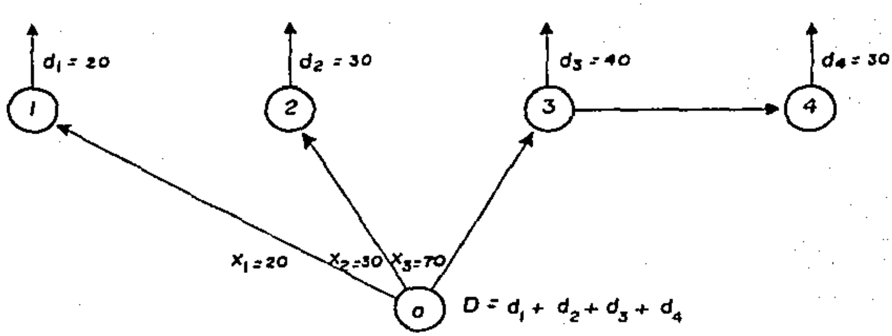


FIGURA 4.5 REPRESENTACION DEL PLAN DE PRODUCCION OPTIMO EJEMPLO 4.1

4.3 EL MODELO A CON COSTOS CONCAVOS Y DEFICIT

En la presente sección se considera el caso cuando la demanda d en algún período no es satisfecha y ésta se acumula para que en períodos posteriores se satisfaga.

La producción debe planearse para varios períodos. Se formulará un modelo que represente la problemática en donde se considerará que los costos involucrados son: el costo unitario del artículo en dicho período C_i; el costo de mantenimiento de inventario h_i^+ cuando hay artículo y el costo de almacenamiento cuando no hay artículo h_i^-, también denótese el nivel neto de inventario como I_i; si I_i resulta ser negativo, representa I_i^- unidades no satisfechas de demanda y que deberá ser cubierta en períodos posteriores; si I_i es positiva, I_i^+ representa las unidades en inventario en el período i entonces el inventario neto será:

$$I_i = I_i^+ + I_i^-$$

$$I_i^+, I_i^- \geq 0 \quad \text{enteros.}$$

De igual manera que en la sección anterior la problemática puede ser representada gráficamente por medio de una red de flujo como lo muestra la figura (4.6)

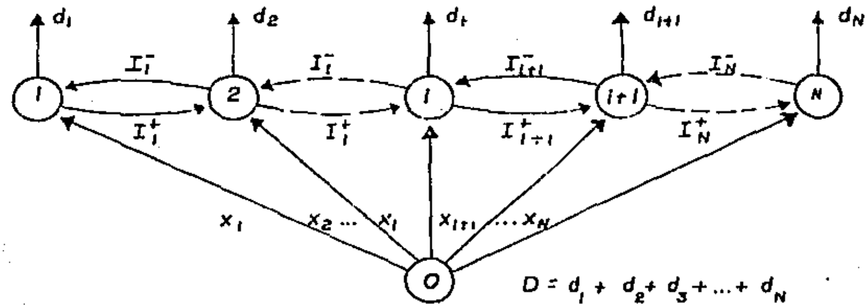


FIGURA 4.6 REPRESENTACION DE LA RED DE FLUJO CON DEFICIT

En la red de flujo anterior, se observa que el flujo en los arcos $(i+1, i)$ es precisamente I_i^- el cual representa las unidades de demanda no satisfecha al principio del período i.

Se desea obtener un plan de producción óptimo tal que minimice el conjunto de costos $c_i(\cdot)$, $h_i^+(\cdot)$, $h_i^-(\cdot)$ cuyas funciones que las representan son cóncavas sobre un conjunto $x_i \geq 0$, $I_i^+ \geq 0$, $I_i^- \geq 0$ de enteros.

El modelo que representa la problemática descrita tiene la representación matemática siguiente:

MODELO 3. Determine los niveles de producción e inventario tales que se:

$$\text{minimice} \sum_{i=1}^{N} (c_i(x_i)+h_i^+(I_i^+) + h_i^-(I_i^-))$$

sujeto a: $I_1=I_{N+1}=0$

$$x_i+I_i^+ + I_{i+1}^- = d_i+I_i^+ + I_{i+1}^- \qquad i = 1...N$$

$$x_i \geq 0 \qquad x_i \text{ entero} \qquad i = 1...N$$

$$I_i = I_i^+ - I_i^- \qquad I_i^+, I_i^- \geq 0 \text{ enteros } i = 2...N$$

Las propiedades de este tipo de problemas representados con redes de flujo, presentan la oportunidad de ser resueltos utilizando programación dinámica, en los términos que siguen: como las variables x sólo pueden tener ciertos valores que satisfagan exactamente las demandas de los períodos presentes, pasados y futuros al período de producción y como las d_i son cantidades enteras, entonces las variables de decisión podrán ser sólo enteras teorema 2.

Teorema 2. Considérese el modelo A de producción-inventario con costos cóncavos y con opción a déficit en la satisfacción de la demanda. Entonces, existe al menos un plan de producción óptimo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con correspondiente plan de inventario $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$ tal que si $x_m > 0$ y $x_n > 0$ donde $m < n$ entonces $I_i = 0$ para al menos un i que satisface - $m < i \leq n$.

Prueba. Dado que existe un número finito de planes de producción factibles se concluye que al menos uno de ellos es óptimo. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un plan de producción óptimo correspondiente al plan de inventario $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$ tal que minimiza la suma $(x_1 + I_1) + \ldots + (x_n + I_n)$ sobre todos los planes de producción óptimo. Suponga dado un $x_m > 0$ y un $x_n > 0$ donde $m < n$ se cumple que todo I_i donde $m < i \leq n$ es distinto de cero. Entonces se forma un circuito de la forma $(0, m, m + 1, \ldots, n, 0)$ y aplicando un argumento semejante al de la prueba del teorema 1 se puede concluir que podemos pasar un flujo unitario en cualquier dirección del circuito y el flujo resultante sigue siendo óptimo. Procediendo de esta manera se llega a contradecir la suposición de minimalidad de la suma $(x_1 + I_1) + \ldots + (x_n + I_n)$ o bien a lograr que $I_i = 0$ para algún $m < i \leq n$. Esto termina la prueba.

Ejemplo 4.2

Considere el mismo sistema de producción-inventario del problema 4.1, con demanda determinística y horizonte de planeación consistente de cuatro períodos. Suponga que las funciones de costo de producción e inventario son como sigue: $c_i(x_i) = 0$ si $x_i = 0$; $c_i(x_i) = k_i + c_i x_i$ si $x_i > 0$ $i = 1,2,3,4$. Suponga que se permite acumulación de demanda no satisfecha a un costo $h_i(I_i) = P_i I_i$ $i=1, \ldots, 4$ las constantes asociadas, así como la demanda en cada período son:

Período i	Demanda d_i	Costo de Preparación K_i	Costo marginal c_i	Costo por inventario h_i	Costo por déficit P_i
1	20	30	3	2	1
2	30	40	3	2	1
3	40	30	4	1	2
4	30	50	4	1	2

Si se definen las constantes c_{ij} asociado con el costo de satisfacer la demanda desde el período i hasta antes del período j, se tiene que:

$$c_{45}=170;\ c_{35}=340;\ c_{23}=130;\ c_{12}=90$$

$$c_{34}=190,\ c_{24}=330;\ c_{13}=210$$

$$c_{25}=510;\ c_{14}=410$$

$$c_{15}=590$$

Entonces la solución con programación dinámica es como sigue:

$$f(5) = 0 \text{ y}$$
$$f(i) = \text{mín } \{c_{ij} + f(j) \ / \ j>i\}$$

para todo $i = 1, 2, 3, 4$. Lo que se desea es calcular $f(1)$. Efectuando operaciones se tiene que:

$$f(4) = 170 \ ; \quad f(3) = 340$$
$$f(2) = 470 \ ; \quad f(1) = 550$$

siendo $f(1)$ el mínimo costo para satisfacer la demanda de los períodos $i=1, \ldots, 4$, cuando $I_1 = 0$. De tal forma que el plan de producción óptimo está dado por:

$$f(1) = c_{13} + f(3) = c_{13}+c_{35}+f(5) = c_{13}+c_{35}$$
$$f(1) = c_{13}(2) + c_{35}(3).$$

Por lo tanto se debe producir en los períodos 2 y 3, y el plan de producción óptimo es:

$$x_1^* = 0; \ x_2 = 70; \ x_3 = 70; \ x_4 = 0$$

con un costo óptimo de $f(1) = 550$.

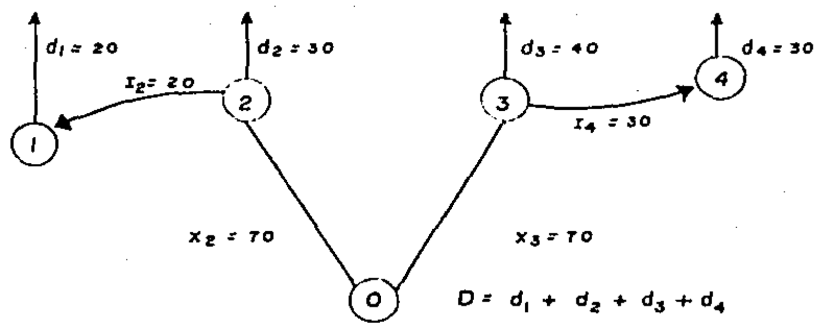


FIGURA 4.7 REPRESENTACION GRAFICA DE LA PRODUCCION OPTIMA. EJEMPLO 4.2

Los resultados mencionados pueden observarse en la representacion de la red de flujo fig. (4.7)

CAPITULO V

EXTENSIONES DEL MODELO BASICO DE PRODUCCION-INVENTARIO

Un aspecto importante del modelo básico presentado en el capítulo anterior es la búsqueda de extensiones que comparten el mismo método de solución. Por ejemplo es posible que se puedan resolver otros problemas del mismo tipo y esto es precisamente lo que se pretende en este capítulo. Al modelo básico de producción-inventario, se le suman las restricciones de límite en la producción.

El capítulo se desarrolla de la siguiente manera: El capítulo consta de tres secciones; en la primera se muestra el modelo general de producción-inventario modificado para cuando hay límite en la producción. En la segunda sección se describe el mismo modelo para el caso en que hay déficit.

5.1 EL MODELO BASICO CON COSTOS CONCAVOS Y PRODUCCION LIMITADA.

Considérese el problema de producción-inventario en que se pretende satisfacer la demanda de cierto artículo a costo mínimo con la restricción de que la producción en cada período no pue de exceder de un cierto límite preestablecido L. Para analizar mejor esta problemática se toma el modelo A y se supondrá que la demanda puede ser satisfecha por la producción de ese mismo período ó por la de períodos anteriores. La obtención del plan de producción-inventario óptimo se dará para el caso en donde los costos de producción ($C_n(x_n)$) y de mantenimiento de inventario ($h_n(I_n)$) son funciones cóncavas sobre el conjunto $0 \leq x_n \leq I_h$, $I_n \geq 0$ de enteros, donde x_n es la producción, I_n el inventario y d_n la demanda correspondiente al período n. Los costos involu crados en la problemática son los de almacenamiento, de h pesos por artículo; de producción o de compra, de C unidades monetarias; y de preparación k cargados al principio del período. Note que la capacidad de producción está limitada por L_n unidades por período. Esta capacidad de producción debe cumplir con la restricción:

$$L_n > d_n \qquad o \qquad \sum_{n=1}^{N} L_n \geq \sum_{n=1}^{N} d_n \qquad 5.1$$

de modo que el modelo A se tranforma al modelo C que presenta la estructura siguiente:

<u>MODELO C</u> Determine el plan de producción-inventario tal que se:

$$\text{minimice } \{\sum_{n=1}^{N} C_n(x_n) + h_n(I_n)\}.$$

sujeta a:

$$I_1 = I_{n+1} = 0 \qquad n = 1 \ldots N$$

$$I_n + x_n = d_n + I_{n+1} \qquad n = 1 \ldots N$$

$$I_n \geq 0 \qquad n = 2 \ldots N$$

$$0 \leq x_n \leq L_n \qquad n = 1 \ldots N$$

$$\sum_{n=1}^{N} L_n \geq \sum_{n=1}^{N} d_n \qquad n = 1 \ldots N$$

El mínimo de la función cóncava se dá en un punto extremo, el cual pertenece al conjunto de soluciones del conjunto poliédrico y con ese punto extremo es posible obtener el óptimo de la función objetivo del modelo C.

Para caracterizar dichos puntos extremos, considere una sucesión S_{ab} de producción, que consiste de un subconjunto del plan de producción factible que incluye todos los períodos entre dos puntos de regeneración consecutivos (período a y período b), siendo puntos de regeneración aquellos en los cuales el nivel de inventario inicial del período es cero, $I_a = I_b = 0$ entonces

$$S_{ab} = \{x_i \quad i = a, \ldots, b-1 \ / \ I_n=0 = I_b, I_i>0\} \qquad \forall \quad a<i<b \qquad 5.2$$

Como $I_1 = I_{n+1}=0$ es posible descomponer un plan de producción factible en una o más sucesiones de producción.

Una secuencia de producción es de capacidad restringida, si los niveles de producción en a lo más un período están limitados por un cierta capacidad L_n positiva.

$$0 \leq x_n \leq L_n \qquad u \leq n \leq v-1 \qquad 5.3$$

Dado que el problema que nos preocupa es un conjunto poliédrico, entonces existe la misma relación entre puntos extremos y soluciones básicas factibles, donde las soluciones básicas factibles se construyen como sigue:

Se le asignan a las variables no básicas sus cotas inferiores ($x_i=0$), o sus cotas superiores ($x_i=c_i$) y después se resuelve en forma única, para las variables básicas tales que sus valores se encuentren entre sus cotas inferiores o superiores ($0<x_j<c_j$).

De donde es posible que exista producción en un período a pesar de que el nivel de inventario inicial de ese período sea

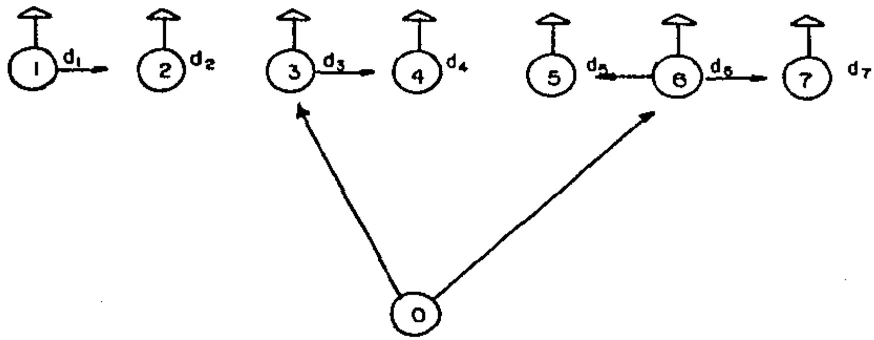


FIGURA 5.1 REPRESENTACION DE UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE DEGENERADA.

diferente de cero, ya que las variables no básicas pueden estar en su cota superior.

Además por el análisis hecho en las secciones anteriores se puede decir que la gráfica respectiva para el punto extremo no presenta ciclos. Pero al construir las variables básicas, es posible que estos adquieran su cota superior o inferior y por tanto se tendrá una solución básica factible degenerada, dando origen a una subgráfica sin ciclos y desconectada, como lo indica la fig. 5.1

Un plan de producción x factible constituye un punto extremo si está formado por sucesiones de producción de capacidad restringida.

Cuando se tiene que la capacidad de producción en todo período es la misma ($c_i = c \quad \forall_i$) la problemática se simplifica, ya que las demandas de los períodos que comprenden una sucesión de producción deberán ser satisfechas de la siguiente manera:

$$\sum_{c=u}^{v} d_i = R_c + \varepsilon \qquad 5.4$$

donde R es un entero no negativo, correspondiente a los períodos cuyos niveles de producción son c y ε es un nivel de producción posible en el período correspondinte, además $0 \leq \varepsilon < c$. Con estas características se puede construir una gráfica fig. (5.2) dirigida, correspondiente a una secuencia de producción de capacidad restringida S_{uv}, en la cual cada vértice será un valor posible de los niveles de producción de los períodos. Es conveniente que para cada período se forme una gráfica añadiéndole un vértice artificial (*); se tendrá una gráfica en la cual cada ruta del vértice (*) al vértice x_v representa una secuencia de producción de capacidad restringida y viceversa. De tal manera que si el costo de ir de un vértice a otro lo determina el costo de producción y el de mantener inventario, entonces se requiere determinar la secuencia de producción de capacidad restringida de menos costo C_{uv}, que equivale a determinar la ruta de menor costo de (*) a x_v en la gráfica anteriormente construida, entonces se establece que C_{uv} será igual a:

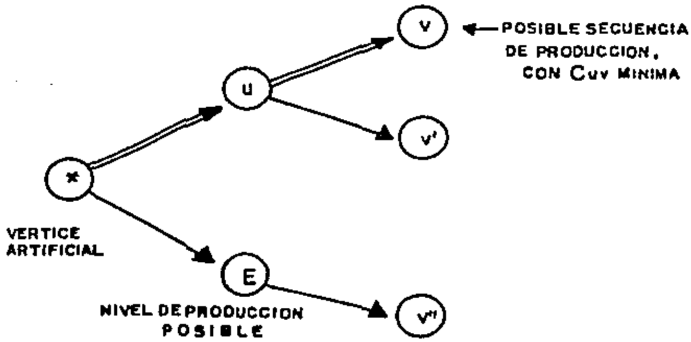


FIGURA 5.2 REPRESENTACION DE UNA SECUENCIA DE PRODUCCION DE CAPACIDAD RESTRINGIDA.

$$C_{uv} = C_u\left(\sum_{k=u}^{v-1}\right) + \sum_{k=u}^{v-1} h_k\left(\sum_{t=k+1}^{v-1} I_t\right) \qquad 5.5$$

y si f(u) es el costo mínimo de satisfacer las demandas durante los períodos u a v si $I_u = 0$ y $I_{v+1} = 0$, se establece la siguiente ecuación recursiva:

$$f(u) = \min_{u<v<N+1} \{C_{uv} + f(v)\} \qquad u = 1 \ldots N \qquad 5.6$$

N = número de períodos

Ejemplo 5.1 Considere un problema de cuatro períodos cuyas demandas son $d_1=3$, $d_2=6$, $d_3=8$, $d_4=3$ respectivamente y cuya capacidad de producción para todo período es $L_i = 7 \quad i = 1,2,3.4$; los costos de producción e inventario están dados por: $C_i(x_i)=0$ si $x_i=0$; $C_i(x_i)=(6-k) + 5(x_k)$ si $x_i>0$. Y los costos de almacenamiento están dados por $H_i(I_i) = i(I_i)$. No se permite acumular demanda.

El problema es determinar el plan de producción óptimo, tal que los costos totales incurridos se minimicen.

Definiendo las constantes C_{ij} asociadas con el costo de satisfacer la demanda desde el período i hasta antes del período j se tiene que:

$C_{45} = 17$ con $S_{45}=\{3\}$; $C_{34} = \infty$

; $C_{35} = \infty$

$C_{23} = 34$ con $S_{23}=\{6\}$; $C_{12}= 20$ con $S_{12}=3$

$C_{24} = 79$ con $S_{24}=\{7,7\}$; $C_{13}=54$ con $S_{13}=\{7,2\}$

$C_{25} = \infty$; $C_{14} = 103$ con $S_{14}=\{7,3,7\}$

; $C_{15} = 132$ con $S_{15}=\{6,7,7,8\}$

Resolviendo con programación dinámica se tiene que la condición de frontera es: $f(5) = 0$, y

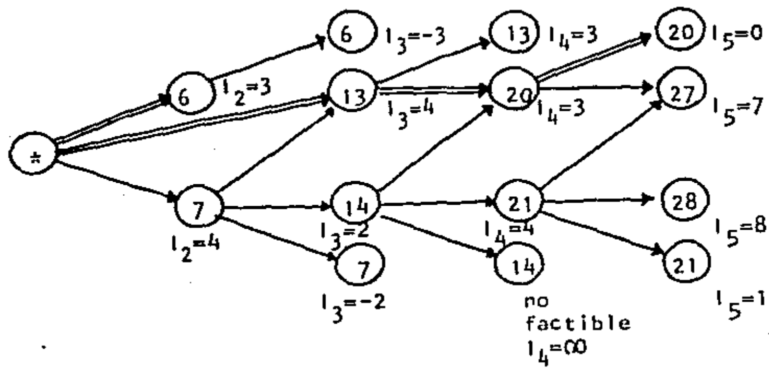


FIGURA 5.3 REPRESENTACION DE LA RUTA DE COSTO MINIMO EJEMPLO 5.1

$$f(i) = \min \{c_{ij} + f(j) \ / \ j>i\}$$

para todo i = 1,2,3,4. lo que se desea es calcular f(1). efectuando las operaciones se tiene:

$$f(4) = 17 \quad ; \quad f(3) = \infty$$
$$f(2) = 96 \qquad f(1) = 116$$

considerando sólo los vértices requeridos para determinar la ruta de costo mínimo del vértice (*) al vértice 20 se tiene la ruta más corta del vértice (*) al vértice 20 es la indicada por el doble arco.

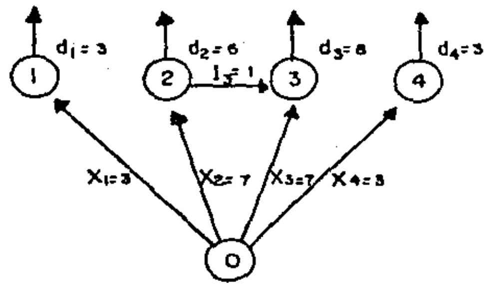


FIGURA 5.4 REPRESENTACION DEL PLAN DE PRODUCCION OPTIMO EJEMPLO 5.1

como f(1) es el costo asociado al plan de producción óptimo del período 1 al 4 dado que $I_1= 0$, y éste es igual a 116, entonces el plan de producción óptimo será como se muestra en la figura (5.4)

El plan de producción óptimo es:

$$x_1= 3 \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 7 \quad x_4 = 3$$ a un costo de 116.

5.2 EL MODELO BASICO CON COSTOS CONCAVOS, PRODUCCION LIMITADA Y DEFICIT PERMITIDO.

Suponga que se pretende planear la producción-inventario para satisfacer la demanda de cierto artículo durante varios períodos con producción limitada a costo mínimo.

Para analizar esta problemática, se volverá a tomar el modelo A pero modificándose algunas de sus restricciones. Se supondrá que la demanda puede ser satisfecha con la producción del mismo período o con la de producción de períodos futuros.

La obtención de ese plan de producción se dará para el caso en donde la función de costos de producción ($C_n(x_n)$) y la función de mantenimiento de inventario ($h_n(I_n)$) son funciones cóncavas sobre el conjunto $0 \leq x_i \leq L_i$, $I_i \leq 0$ de enteros, donde x_i es la producción en el período i, I_i es el inventario, este puede ser negativo y ello significa que hay déficit, d_i es la demanda correspondiente al período i. Los costos involucrados son los de almacenamiento de h unidades monetarias por artículo, el costo de producción de C unidades monetarias por artículo.

Para el caso en que se permite que haya déficit en a lo más P períodos, se debe incluir en el modelo A la restricción:

$$I_i \geq -\sum_{j=1-P+1}^{i} d_j \qquad i = P,\ P+1,\ \ldots,\ n \qquad (5.7)$$

Y para asegurar la existencia de soluciones factibles se añade también la siguiente restricción al modelo A.

$$\sum_{j=1}^{i} L_j \geq \sum_{j=1}^{i-P} d_j \qquad (5.8)$$

En la cual se interpreta a L_j como el límite de producción, el cual debe ser mayor que la demanda en i-períodos menos P períodos en los que se permite que haya déficit.

Por tanto el modelo A se tranforma al modelo D, el cual presenta la estructura siguiente:

MODELO D

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n} C_i(x_i) + h_i(I_i) \right\}$$

sujeto a

$I_1 = I_{i+1} = 0 \qquad i = 2,\ldots,n$

$I_i + x_i = d_i + I_{i+1} \qquad i = 1,\ldots,n$

I_i no restringido $\qquad i = 2,\ldots,n$

$I_i \geq -\sum_{j=i-P+1}^{i} d_j \qquad i = P,\ P+1,\ldots,\ n$

$\sum_{j=1}^{i} L_j \geq \sum_{j=1}^{i-P} d_j$

De donde se puede notar que la función objetivo no cambia, sólo se interpretea a $h_i(I_i)$ como el costo de mantener en inventario cuando I_i es negativo. Para este caso se mantienen las mismas propiedades de los puntos extremos, tales como:

"Una solución factible es un punto extremo sí y solamente sí, se compone de secuencias de capacidad restringida"

En este caso al formar la red de flujo se deben tomar en cuenta los vértices cuyo nivel de inventario resulte negativo, se debe de la misma forma que en la sección anterior aumentar un vértice auxiliar (*) con lo que se obtendrá una gráfica en la cual cada ruta del vértice (*) al vértice x_v representa una secuencia de producción de capacidad restringida. De tal manera que el costo de ir de un vértice a otro lo determina el costo de producción y de mantenimiento de inventario, de modo que se debe determinar la ruta de menor costo de (*) a x_v en la gráfica que se haya construido. Entonces se establece que:

$$C_{uv} = C_u \left(\sum_{k=u}^{v-1} d_k \right) + \sum_{k=u}^{v-1} h_k \left(\sum_{t=k+1}^{v-1} I_t \right) \qquad (5.9)$$

y si f(u) es el costo mínimo de satisfacer las demandas durante los períodos u a v, si $I_u = 0$ y $I_{v+1}=0$ se establece la ecuación recursiva:

$$f(u) = \min_{u<v\leq N+1} \{C_{uv} + f(v)\} \qquad (5.10)$$

<u>Ejemplo 5.2</u> Suponga que se desea planear la producción-inventario para cuatro períodos cuyas demandas son: $d_1 = 3$, $d_2 = 6$, $d_3 = 8$, $d_4 = 3$. La capacidad máxima de producción para todo período es $L_i = 7$ $i = 1, 2, 3, 4$. Los costos de producción están dados como: $C_i(x_i) = 0$ si $x_i = 0$; $C_i(x_i) = (6-i) + 5x_i$ si $x_i > 0$ y la función de costos de inventario tiene la forma: $h_i(I_i) = -1(I_i)$ si $I_i < 0$.

Determinar el plan de producción óptimo durante cuatro períodos. Utilizando las funciones recursivas de la programación dinámica el plan de producción óptimo se determinará calculando $f(1)$.

Definiendo las constantes C_{ij} asociadas con el costo de satisfacer la demanda del período i hasta antes del período j, se tiene que considerando $f(5) = 0$:

$C_{45} = 17$ con $S_{45} = \{3\}$; $C_{34} = \infty$

$C_{35} = 61$ con $S_{35} = \{7, 4\}$

$C_{23} = 34$ con $S_{23} = \{6\}$; $C_{12} = 20$ con $S_{12} = \{3\}$

$C_{24} = 79$ con $S_{24} = \{7, 7\}$; $C_{13} = 55$ con $S_{13} = \{2, 7\}$

$C_{25} = 100$ con $S_{25} = \{7, 3, 7\}$; $C_{14} = 103$ con $S_{14} = \{7, 3, 7\}$

$C_{15} = 117$ con $S_{15} = \{0, 7, 7, 6\}$

con $f(i) = \min \{C_{ij} + f(j)\} \qquad j>0$

$f(4) = 17 \quad ; \; f(3) = 61$

$f(2) = 95 \quad ; \; f(1) = 115.$

Considerando sólo los vértices requeridos para determinar la ruta de costo mínimo del vértice(*) al vértice 20, se tiene; la gráfica siguiente figura (5.5)

La ruta de costo mínimo se indica con el símbolo *, resultando que f(1) es el costo de satisfacer la demanda durante los períodos 1 hasta 4, si $I_1=0$, por tanto el plan de producción óptimo es:

$$x_1^* = 3, \quad x_2^* = 6, \quad x_3^* = 7, \quad x_4^* = 4$$

cuyos resultados pueden ser apreciados en la fig. (5.6)

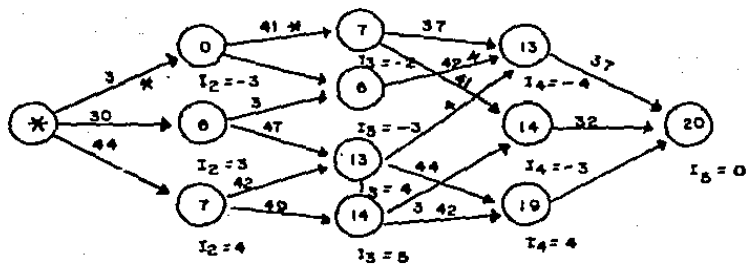


FIGURA 5.5 REPRESENTACION DE LA RUTA DE COSTO MINIMO EJEMPLO 5.2

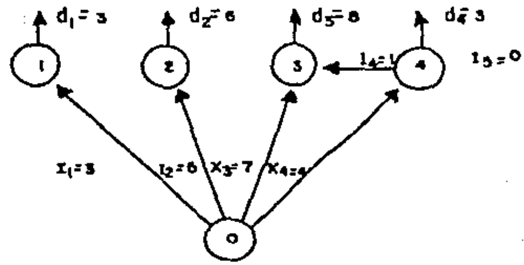


FIGURA 5.6 REPRESENTACION DEL PLAN DE PRODUCCION OPTIMO EJEMPLO 5.2

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

El problema de producción-inventario fue descrito y cada una de sus componentes ha sido analizada. Una clasificación de los modelos clásicos asociados se describió tomando en consideración la forma de la demanda, el número de períodos de decisión y la estructura de las funciones de costo. En particular el modelo clásico del lote económico es analizado con algunas de sus extensiones como el caso en donde se pierden las ventas debido al déficit.

El problema de producción e inventario determinístico con costos cóncavos denominado modelo básico ha sido analizado en detalle y como resultado se ha podido explotar su estructura para obtener métodos de solución sencilla y eficiente. El modelo básico que resulta se analizó considerando diversas variantes y en cada uno de ellos se obtuvieron resultados semejantes. En todos los casos se aplica la técnica de programación dinámica para obtener las soluciones numéricas. También se analizó el modelo básico para el caso en que se obtienen costos por el arranque y para de producción así como, límites en la producción. Este modelo puede ser extendido al caso en que se manejan varios productos y es una línea a desarrollar (Ref. 31). Aunque el análisis resulta más laborioso que el del modelo básico los resultados son semejantes.

La técnica de programación dinámica fue utilizada porque la estructura del modelo así lo permite. Aunque dicha técnica, resulta más laboriosa en términos manuales, es una de las más sencillas y fácil de programar computacionalmente.

Un programa de computadora denominado PRO-IN ha sido implantado para resolver los modelos descritos en este trabajo y evitar el tedioso trabajo de los cálculos de la programación dinámica.

El análisis hecho en la tesis se enfocó a un tipo de problemas en especial. Sin embargo, el campo de los inventarios es considerablemente amplio y puede ser estudiado en varias direcciones. Así, actualmente se están estudiando modelos en los que se consideran múltiples productos (Ref. 13, 58), múltiples períodos (Ref. 27), los cuales presentan demanda estocástica (Ref. 9, 37 y 41). Se piensa que la mayor parte de los estudios se desarrollan en esta dirección porque los problemas de la vida real generalmente operan de este modo.

La mayoría de los autores modernos hacen el estudio en esta dirección aunque resolviendo diferentes problemáticas; uno de los modelos que se ha ampliado y modernizado es el modelo del tamaño económico del lote (Ref. 5, 45 y 49) el cual se encuentra publicado resolviendo algunos problemas particulares. Otra de las rutas que son estudiadas actualmente son los modelos de producción-inventarios de múltiples fases, generalmente utilizados para cuando un producto se produce en varias etapas (Ref. 9, 20, 25, 38 y 49).

ANEXO 1

PROGRAMA PRO-IN

La mayoría de los modelos de producción-inventario mostrados a lo largo de la tesis, han sido resueltos con el método de programación dinámica. Sin embargo, éste es un método largo y tedioso, por lo que se elaboró e implantó un programa, llamado PRO-IN en una computadora P.C compatible.

El programa resuelve los siguientes modelos, diagrama 3:

MODELO A. Modelo general de producción-inventario con función de costos cóncavos.

MODELO B. Es el modelo general en el que se permite déficit.

MODELO C. Modelo general con límite en la producción.

MODELO D. Modelo general con límite en la producción y déficit.

MODELO E. Modelo general modificado para permitir costos por arranque y paro en la producción.

FUNCION VERIFICA. Verificación de una función cóncava.

RUTINA 1. Cálculo del tamaño del lote económico.

ESTRUCTURA DEL PROGRAMA.

El programa consiste de un programa principal, seis subrutinas, una función y un procedimiento, cuyas características y funciones se describen a continuación. La forma en que se interrelacionan tales componentes del programa PRO-IN se describen esquemáticamente en el diagrama 2.

PROGRAMA PRINCIPAL.

Coordina un menú de opciones y sólo responde a los teclados indicados en la pantalla; CONTROL-C para salir provisionalmente del programa; y CONTROL-ALT-DEL o RESET para abortar el sistema completo. En caso de elegir alguna opción, la rutina menú distribuye el trabajo a las subrutinas correspondientes.

RUTINA MODELO A.

Tiene como principal objetivo calcular el costo mínimo total incurrido para satisfacer la demanda en un determinado horizonte de planeación. La rutina cuenta con dos funciones:

FUNCION F. Determina recursivamente la siguiente función $f(i) = \min \{C_{ij}+f(j)\}$ y se auxilia de la función C_{ij}.

Función C. Determina la siguiente ecuación:

$$C_{ij} = C_i\left(\sum_{k=i}^{j-1} d_k\right) + \sum_{k=i}^{j-1} h_k\left(\sum_{t=k+1}^{j-1} d_t\right)$$

RUTINA MODELO B.

Tiene como objetivo calcular el costo mínimo de producción total incurrido en un horizonte de planeación consistente de n-periodos, permitiendo que haya déficit; utilizando para su solución también programación dinámica y cuya función de recurrencia se calcula de la misma manera que en el modelo A; considerando que $C_{ij}(i) = C_i\left(\sum_{k=i}^{j-1} d_k\right) + \sum_{n=k}^{j-1} h_n^+\left(\sum_{t=n+1}^{j-1} d_t\right) + \sum_{n=i+1}^{k} h_k^-\left(\sum_{t=k}^{j-1} I_t\right)$.

RUTINA MODELO C.

Calcula el costo mínimo total incurrido en un horizonte de planeación determinado de exactamente n-periodos. Este modelo es semejante al modelo A pero con una variante adicional; esta variante consiste en añadir una restricción a la producción en cada periodo o dicho de otra manera, la producción está limitada por alguna causa; el método de solución es con programación dinámica.

RUTINA MODELO D.

Calcula el costo mínimo de producción total incurrido en un horizonte de planeación n. Este modelo presenta las restricciones adicionales de límite en la producción y de déficit permitido. El método de solución también es por medio de la función recursiva, realizándose por el método de programación dinámica.

RUTINA MODELO E.

Calcula el costo mínimo de producción total incurrido con la restricción de que la producción puede ser cesado en un determinado período y luego arrancado en un período posterior.

FUNCION VERIFICA.

Esta rutina verifica si el tipo de funciones que se utilizan es de tipo cóncavo, esta verificación se efectúa con la ecuación de costos marginales decrecientes.

RUTINA 1.

Efectúa el cálculo del tamaño del lote de producción, el tiempo en que se debe hacer cada orden y el tamaño del déficit permitido.

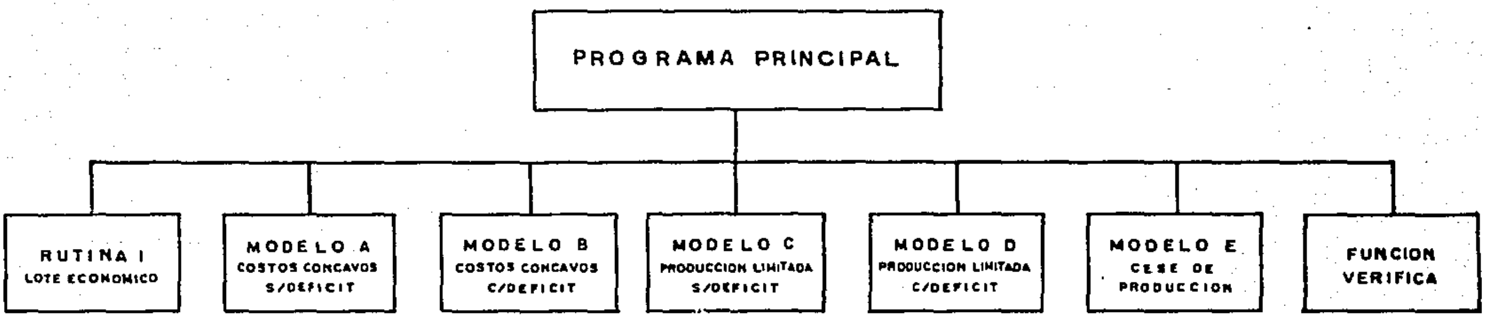
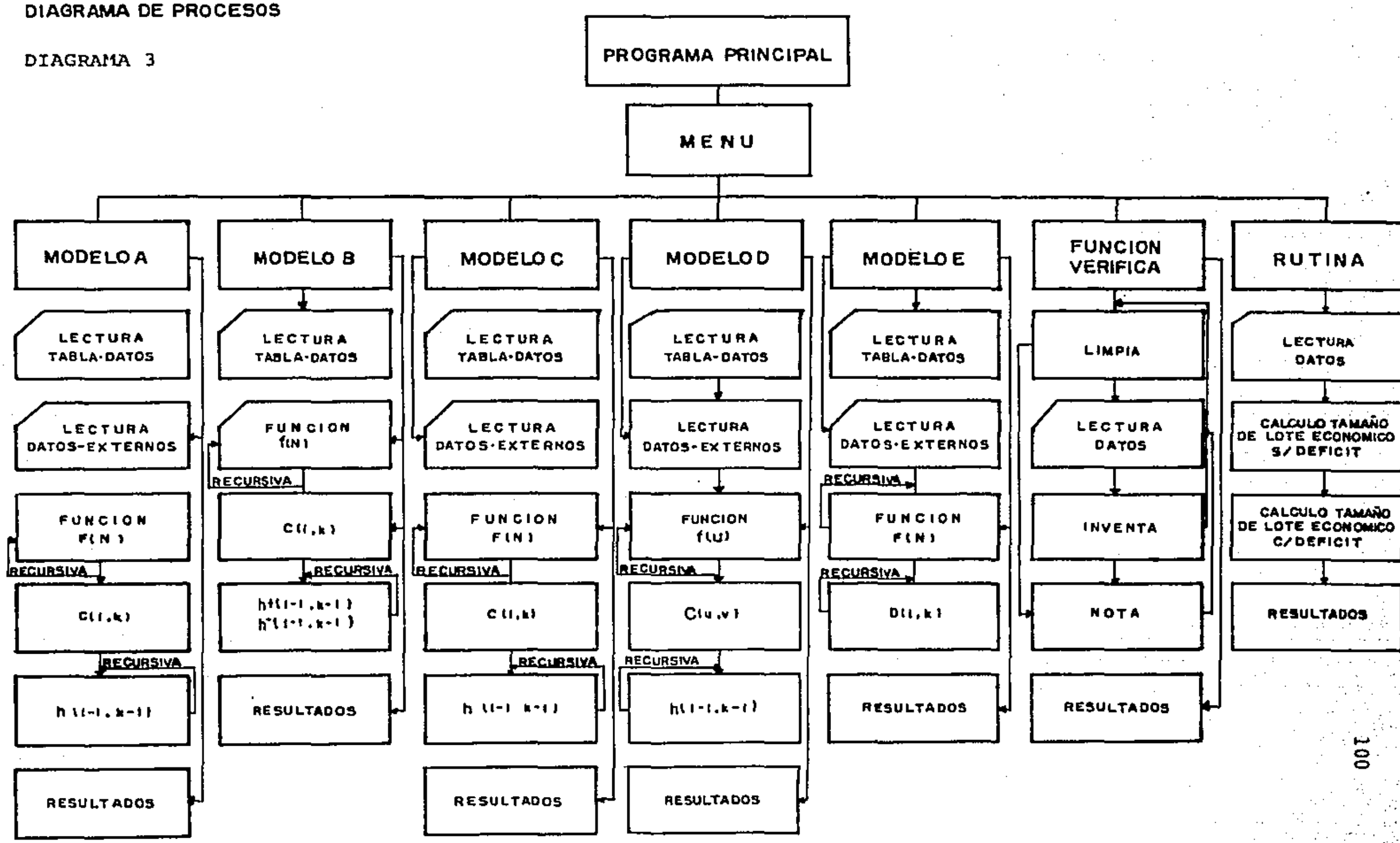

PROGRAMA PRINCIPAL
RUTINA I
LOTE ECONOMICO
MODELO A
COSTOS CONCAVOS
S/DEFICIT
MODELO B
COSTOS CONCAVOS
C/DEFICIT
MODELO C
PRODUCCION LIMITADA
S/DEFICIT
MODELO D
PRODUCCION LIMITADA
C/DEFICIT
MODELO E
CESE DE
PRODUCCION
FUNCION
VERIFICA

DIAGRAMA 2

DIAGRAMA DE PROCESOS

DIAGRAMA 3



PROGRAMA PRO-IN

```
PROGRAM PROG1;

type
  cadena = string[70];


VAR
  artic,pre,costo:TEXT;
  ci,np1,M,I,tot,num,np,invf:INTEGER;
  linea,precio,costo_min:string[5];
  t,dt,at,ct,ht:array [1..10] of integer;
  Kt:array[1..10] of integer;
  Vt:array[1..10] of integer;
  arrx:array[1..15] of integer;
  p:array[1..15] of integer;



procedure frame(x,y,lonx,lony:integer);

{ TRAZA RECUADRO EN PANTALLA }


begin
 gotoxy(x,y);
 write(chr(218));
 for i:=(x+1) to (lonx-1) do
  write(chr(196));
  write(chr(191));
  for i:=(y+1) to (lony-1) do
 begin
   gotoxy(x,i);write(chr(179));
   gotoxy(lonx,i);write(chr(179));
 end;
 gotoxy(x,lony);
 write(chr(192));
 for i:=(x+1) to (lonx-1) do
  write(chr(196));
 write(chr(217));
end;


procedure esc(x,y,z:integer:cad:cadena);

{ ESCRIBE MENSAJES UTILIZADOS EN PANTALLA }

var nm:integer;
begin
nm:=length(cad);
for i:=1 to nm do
  begin
   delay(5);
   sound(200*z);
   gotoxy(x+i,y);
```

```
   write(cad[i]);
  end;
  nosound;
end;


procedure rutina1;
var
  h,k,x,Z,T2,R,f,p,A,B,N,E,G,L,I,Q,w,t,S,O,M,V,S2:real;
  d,c:integer;
  pra:TEXT;
  ch:char;

{_________________________________________________________________

 En  este procedimiento como su nombre lo indica se hace la
inicia-
 lizacion de las variables que se van a introducir para los
calculos
 ______________________________________________________________
__________}

procedure inicia;
begin
frame(1,1,80,24);
frame(4,4,70,6);
esc(4,5,5,' VALORES INDICADOS PARA LAS VARIABLES ');
frame(4,8,70,24);
assign(pra,'datos.pas');
reset(pra);
while not (eof(pra)) do
 begin
 esc(11,10,5,' costo articulo d:');readln(pra,d);
 gotoxy(30,10);
 write(d);
 esc(11,12,5,' costo articulo c:');readln(pra,c);
 gotoxy(30,12);write(c);
 esc(11,14,5,' costo ordenamiento k:');readln(pra,k);
 gotoxy(30,14);write(k);
 esc(11,16,5,' costo por inventario h:');readln(pra,h);
 gotoxy(30,16);write(h);
 esc(11,18,5,'      costo     por     deficit      unitario
p:');readln(pra,p);
 gotoxy(30,18);write(p);
 end;
 esc(15,23,5,'                             <<OPRIMA  ENTER   PARA
CONTINUAR>>');
 ch:='-';
 while (ch <> #13)  do
  read(kbd,ch);
 end;


 procedure loteeco;
```

```
{_______________________________________________________________________
 Se  calcula el tamano del lote que se debe producir  y  el
tiempo
 en el cual se debe obtener cada lote de produccion
 Para el modelo del TAMANO DE LOTE ECONOMICO
 _______________________________________________________________________}
      begin
      clrscr;
      frame(1,1,80,24);
      frame(4,4,70,6);
      esc(4,5,5,'  CALCULO PARA EL TAMANO ECONOMICO DEL LOTE
');
      frame(4,14,70,24);
            begin
               f :=(2*d*k);
               R:=f/h;
               x:= sqrt(R);
               Z:= (2*k)/(d*h);
              T2:= sqrt(Z);
              esc(11,18,5,' X = ');
              gotoxy(17,18);
              writeln(x);
              esc(11,21,5,' T2 =  ');
              gotoxy(17,21);
              writeln(T2);
            end;
 esc(15,23,5,'                             <<OPRIMA  ENTER   PARA
CONTINUAR>>');
 ch:='-';
 while (ch <> #13)  do
 read(kbd,ch);
 end;


procedure deficit;
{_______________________________________________________________________
 Se calcula el tamano del lote ,  el tiempo en que se  debe
producir
 cada  serie  de articulos y el tamano maximo  del  deficit
permitido
 esto se hace para el modelo del TAMANO DEL LOTE ECONOMICO
 _______________________________________________________________________}

   begin
      clrscr;
      frame(1,1,80,24);
      frame(2,2,70,4);
      esc(4,3,5,' VALORES INDICADOS PARA LAS VARIABLES ');
      frame(4,6,70,24);
      N:=((2*d*k)/h);
      E:= sqrt(N);
      A:= ((p+h)/p);
      B:= sqrt(A);
      Q:=E*B;
```

```
      I:=(p/(p+h));
      L:=sqrt(I);
      S:=E*I;
      w:=(2*k*d)/p;
      M:=sqrt(w);
      O:=h/(p+h);
      V:=sqrt(O);
      S2:=M*V;
      t:=Q/d;
      esc(7,7,5,' Q = ');
      gotoxy(17,7);
      writeln(Q);
      esc(7,9,5,' S = ');
      gotoxy(17,9);
      writeln(S);
      esc(7,11,5,' S2 =');
      gotoxy(17,11);
      writeln(S2);
      esc(7,13,5,' T = ');
      gotoxy(17,13);
      writeln(t);
      esc(7,15,5,'EL       TAMANO       DE      X      ES      =
UNIDADES');
      gotoxy(32,15);
      write(Q);
      esc(7,17,5,'EL TAMANO DE S ES =                    ');
      gotoxy(32,17);
      write(S);
      esc(7,19,5,'EL TAMANO DEL DEFICIT MAXIMO PERMITIDO  ES
=    ');
      gotoxy(50,19);
      write(S2);
      esc(7,21,5,'LA   LONGITUD  OPTIMA  DEL  PERIODO  ES  =
');
      gotoxy(48,21);
      write(t);
      esc(15,24,5,'<<OPRIMA ENTER PARA CONTINUAR>>');
      ch:='-';
      while (ch <> #13)  do
      read(kbd,ch);
   end;


begin  (*programa principal*)
   inicia;
   loteeco;
   deficit;readln
end;


procedure converge(xs:integer);
{ ______________________________________________________
   En esta funcion se realiza la validacion de la funcion
   insertada y la evaluacion de tal funcion
   Se hace la observacion de que si la funcion es concava
```

o convexa, valuando la funcion para los diferentes puntos en cuestion.
separando cada uno de los pasos en diferentes procedimientos que ha continuacion se describen.

```
type
  cadena = string[70];
  cad30  = string[60]:
  cad1    = string[30];


var
   band,tam, cont,i:integer;
   er : boolean;
   num:integer;
   code,no,x,n,M,tot,invf:INTEGER;
  linea,precio:string[5];
  ch:char;
  valor,  x1,  fun:cad30;
  to1,to2,x1,x2,xt:real];



Procedure lectura(long : byte;x,y:integer;var fun:cad30 );
var
     ch       : char;
     existe : boolean;
     cad1,cadena : cad30;
     ci,j,err: integer;

begin (lectura y validacion de cadenas)
 repeat
  gotoxy(x,y);
  Ci  := 0;
  err:=0;
  j := 0;
  ch := ' ';
  existe := false;
  while (ch <> chr(13)) do
  begin
     while  (ch  <>  chr(8)) and (Ci<= long-1)  and  (ch  <>
chr(13)) do
     begin
        Ci := Ci+1;
        if not existe then
         read(kbd,ch);
        existe := false;
        if (ch <> chr(13)) and (ch <> chr(8)) then
        begin
           write(ch);
           cadena[ci] := ch;
        end;
        if (ch = chr(13)) or (ch = chr(8)) then
          ci := ci - 1
```

```
      end;
      if  (ci = long) and (ch <> chr(8)) and  (ch<>  chr(13))
then
      while (ch <> chr(13)) and (ch <> chr(8)) do
         read(kbd,ch);
      if (ch = chr(8)) then
        while (ci>= 1) and (ch = chr(8)) do
         begin
           gotoxy(wherex-1,wherey);
           write('_');
           gotoxy(wherex-1,wherey);
           ci := ci - 1 ;
           read(kbd,ch);
         end;
      if ci = 0 then
      while ch = chr(8) do
        read(kbd,ch);
      exista := true;
    end;
    fun:='';
    for j := 1 to ci do
     fun := fun+cadena[j];
    for j := ci + 1 to long do
      cad1[j] := ' ';
      gotoxy(wherex,wherey);
 until err=0;
end;   {lee}


procedure nota;
{_____________________________________________________

 en este procedimiento se explica como debe insertar la
   funcion el usuario
______________________________________________________}
begin
    clrscr;
    frame(1,1,80,24);
    esc(10,5,5,'LA  FUNCION  SE  INSERTARA  DE  LA  SIGUIENTE
FORMA');
    esc(10,6,5,'.');
    esc(10,7,5,'.  Teclea  las  exponenciales  como  variable
seguida de ** exponente');
    esc(10,8,5,'. Ejem.    X**2    = X al cuadrado');
    esc(10,9,5,'. La funcion sera evaluada para depender solo
de una variable ...X');
    esc(10,10,5,'. Si consideras prioridades en la evaluacion
de la funcion  favor de');
    esc(10,11,5,'.       colocar   parentesis  entre   valores
');
    esc(10,12,5,'.  EJEM.  x**(2+8)/15-x   sera evaluada como
');
    esc(10,13,5,'.  equis elevado a la potencia 2 mas 8 entre
quince menos equis');
```

```
  esc(10,14,5,'.           (x**2)+8/15-x        sera   evaluada
como');
  esc(10,15,5,'.  equis  al  cuadrado mas 8  entre  quince
menos equis');
  esc(10,16,5,'.  Indica la multiplicacion con el signo "*"
');
  esc(10,17,5,'.   EJEM.   x*2     indica  equis  por   dos
');
  esc(10,18,5,'.   Favor   de  no  dejar   espacios   entre
variables,constantes,signos');
  esc(10,19,5,'.    EJEM.   x/(2   +7*x)    "NO    PERMITIDO"
x/(2+7*x) "SI PERMITIDO" ');
  esc(10,20,5,'.              ^                         ^^^^^
');
  esc(15,23,5,'                        <<OPRIMA  ENTER  PARA
CONTINUAR>>');
  ch:='-';
  while (ch <> #13)  do
  read(kbd,ch);
end;

procedure valida(var fun:cad30);


procedure error(num:integer);
{
------------------------------------------------------------
--------------
  Se presentan en pantalla los mensajes de error que pueden
aparecer
  en pantalla ,  al momento de estar insertando la  funcion
desde teclado

  ----------------------------------------------------------
--------------}

begin
  gotoxy(14,22);
  writeln('
              ');
  case num of
   1 : esc(14,22,19,'<<error..parametro no permitido>>');
   2 : esc(14,22,19,'<<error..debe insertar un numero>>');
   3  :  esc(14,22,19,'<<error..debe  insertar un  caracter
aritmetico>>');
   4 : esc(14,22,19,'<<error..falta parentesis>>');
   5   :     esc(14,22,19,'<<error..incompleto   numero   de
parametros>>');
   6 :  esc(14,22,19,'<<error..la funcion debe tener  algun
caracter>>');
   7  :  esc(14,22,19,'<<error..no debe espacios en  blanco
entre caracteres>>');
   8  :  esc(14,22,19,'<<error..la  funcion  no  esta  bien
terminada>>');
   end;
   er:=true;
```

```
end;

procedure valida_num(var fun:cad30);
{_______________________________________________________________
 En este procedimiento se va verificando que cada caracter
 insertado este en el rango de numeros entre [ 0''9 ]
 sea un caracter permitido para la funcion como [ X "." "("
")" ]
 _______________________________________________________________}
begin

  if fun[i] in ['0'..'9','.'] then
     begin
      while fun[i] in ['0'..'9','.'] do
      i:=i+1;
      band:=0;
    end
  else
   if (fun[i] = 'x') or (fun[i] = 'X') then
     begin
      i:=i+1;
      band:=0;
     end
   else
    if fun[i] =')' then
     begin
      cont :=cont-1;
      i:=i+1;
      band:=0;
      error(5);
     end
   else
     if fun[i] ='(' then
       begin
          i:=i+1;
          band:=1;
          cont:=cont+1;
       end
    else
    error(1);
end;

 procedure valida_carac(var fun:cad30);
 {______________________________________________________________
  Aqui  se  realiza la validacion de caracteres  matematicos
 como
  son [ "(" ")" "*" "-" "+" "/" "**" ]
  ______________________________________________________________}


 begin
  if fun[i] = ')' then
    begin
     cont:=cont-1;
```

```
    i:=i+1;
   end
  else
   if fun[i] = '(' then
     begin
      cont:=cont+1;
      i:=i+1;
     end
    else
     if fun[i] ='*' then
      begin
       i:=i+1;
       if fun[i] in ['1'..'9','.','x','X'] then
        begin
         while fun[i] in ['1'..'9','.','x','X'] do i:=i+1 ;
         band:=0;
        end
       else
        if fun[i] ='*' then
         begin
          i:=i+1;
          band:=1;
         end
        else
         if fun[i] = '(' then
          begin
           i:=i+1;
           cont:=cont+1;
           band:=1;
          end
       end
      else
       if fun[i] in ['-','+','/'] then
        begin
          i:=i+1;
          band:=1;
        end
        else
     error(3);
end;


   begin
     tam:=length(fun);
     cont:=0;
     er:=false;
     if tam =0 then error(6);
     i:=1;
     while i<tam do
      begin
       if fun[i] = ' ' then
        begin
         error(7);
         i:=tam;
        end
```

```
        else i:=i+1;
       end;
      i:=1;
      if (fun[i] = 'x') or (fun[i] = 'X') then
        begin
          i:=i+1;
          band:=0;
        end
      else
        if fun[i] in ['0'..'9','.'] then
          begin
           while fun[i] in ['0'..'9','.'] do
           i:=i+1;
           band:=0;
          end
        else
          if fun[i] ='(' then
           begin
            i:=i+1;
            cont:=1;
            band:=1;
           end
         else
          error(1);
           while (i <= tam) and ( not er) do
           begin
             if band = 0 then
               valida_carac(fun)
             else
               if band = 1 then
               valida_num(fun)
          end;
            if band =1 then error(8)
            else
               if cont <> 0 then error(4);
end;


procedure lee;
{________________________________________________________________
 Se  realiza la capturacion  de la funcion a evaluar  y  se
llama
 a  la funcion de error ,en caso de que la funcion este mal
in-
 sertada.
_________________________________________________________________}

begin
  clrscr;
  frame(1,1,80,24);
     esc(28,12,5,'
');
     esc(28,14,5,'**      DA  LA  FUNCION  PARA  LA  GRAFICA
```

```
**');
     esc(28,16,5,' FUNCION [____________________] ');
     esc(18,18,5,' LA FUNCION SE EVALUARA PARA  ');
     gotoxy(15,19);
     for i:=np1 to np do
      write('X[',i,'] =',arrx[i],'    ');
  repeat
     gotoxy(39,16);
     lectura(20,39,16,fun);
     valida(fun);
  until (not er);
     gotoxy(10,20);
     writeln('
');
     esc(20,24,5,'<<OPRIMA RETURN PARA CONTINUAR>>');
     ch:='-';
     while(ch <> #13) do
     read(kbd,ch);
     clrscr;
end;


function invent(var valor:cad30):real;
var
 cadi2,a,cad,cade3,f,cade,cade2,cadi,cadt,cadl:string[60];
 tot1:real;
 code:integer;
 del,ca1,v, cad2:real;
 total:real;

 procedure analiza(var valor,fun:cad30);
   {_____________________________________________________
  En  este  procedimiento  una vez que se  toma  la  cadena
insertada
  como  funcion  se verifica si esta contiene  la  variable
"X"
  si es de esta forma se sustituye la variable por el valor
  que llega, dejando la funcion como una cadena de puros
  caracteres numericos y signos aritmeticos
  _______________________________________________________}
 var i,j,cc:integer;

 begin
  cade3:='';
     cc:=length(fun);
     i:=1;
     j:=1;
     while i<= cc do
      begin
        if fun[i] <>'x' then
         while (fun[i]<>'x') and (i <=cc)do
          begin
           i:=i+1;
           cade3:=copy(fun,1,i-1);
```

```
            end
           else
           begin
          if (fun[i] = 'x') then
            begin
            j:=i+1;
            while ( (fun[j] <> 'x') and (j <=cc )) do j:=j+1;
            cade2:=copy(fun,i+1,j-(i+1));
            cade3:=concat(cade3,valor,cade2);
            i:=j;
            cade2:='';
            end   ;
      end;
     end;
end;


function ep(var tot1,cad2:real):real;
{_______________________________________________________________
 Se  realiza  el  calculo de elevar  a  cualquier  potencia
entera
  al numero que llega como parametro
 _______________________________________________________________}
var
  f,i:integer;
  totr,tot:real;

begin
  i:=1;
  if cad2 =2 then
   begin
    totr:=sqr(tot1);
   end
  else
  begin
   tot:=tot1;
   while (i<cad2) do
    begin
      totr:=totr*tot;
      i:=i+1;
    end;
  end;
   ep:=totr;
end;

procedure quita_blancos(var cadi2:cad30);
{___________________________________________________________
 Se eliminan los blancos que se encuentran a la derecha del
 numero que llega como parametro
 ___________________________________________________________}
var
i,cc:integer;
```

```
begin
    i:=1;
    cc:=length(cadi2):
    while cadi2[i] = ' ' do i:=i+1;
    cadi2:=copy(cadi2,i,(cc-(i-1)));
end;

function con(var cad1:cad30):real;
{_______________________________________________
 Se evalua la operacion matematica , limitada por dos
 cadenas de numeros las operaciones matematicas que se
 pueden realizar son [ "+" "_" "*" "/" "**" ]
 _______________________________________________}
var
  cc,i,j:integer;
  cadi:cad30;
  totr:real;
begin
 cc:=length(cad1);
 i:=1;
 j:=1;
 tot1:=-1;
 while (i <=cc) do
 begin
      if tot1=-1 then
          begin
             while cad1[i] in ['0'..'9','.'] do
             i:=i+1;
               if  (cad1[i]  =  'E')   and  (cad1[i+1]   in
['+','-']) then i:=i+2;
               while cad1[i] in ['0'..'9'] do i:=i+1;
               cade2:=copy(cad1,j,i-1);
               val(cade2,tot1,code);
          end
       else
         begin
            j:=i;
            i:=i+1;
            while (cad1[i] in ['0'..'9','.']) and (i<=cc) do
              i:=i+1;
               if (cad1[i] = 'E')  and (cad1[i+1] in ['+','-
']) then i:=i+2;
               while cad1[i] in ['0'..'9'] do i:=i+1;
              if (cad1[j] = '*') and (cad1[i] = '*') then
                begin
                  i:=i+1;
                  while   (cad1[i]  in  ['0'..'9','.'])  and
 (i<=cc) do
                  i:=i+1;
                  cadi:=copy(cad1,j+2,i-(j+2));
                  if cadi ='.5' then
                    begin
                     totr:=sqrt(tot1);
                     tot1:=totr;
                    end
```

```
                else
                 begin
                    val(cadi,cad2,code);
                    tot1:=ep(tot1,cad2);
                 end;
              end
            else
              begin
                cadi:=copy(cad1,j+1,i-(j+1));
                val(cadi,cad2,code);
                case cad1[j] of
                   '+' :tot1:=tot1+cad2;
                   '-' :tot1:=tot1-cad2;
                   '*' :tot1:=tot1*cad2;
             end;
         end;
       end;
   end;
  con:=tot1;
end;


function conv(var cad1:cad30):real:
{________________________________________________________________
Se  realiza  la eliminacion de parentesis  ,  evaluando  la
operacion
que se encuentre entre ellos ,  esta evaluacion se lleva  a
cabo
llamando  a  la rutina CON ,  considera  prioridades  entre
parentesis
para llevar a cabo la realizacion de la operacion
________________________________________________________________}

var
fin,cadt,cadi,temp:cad30;
ctemp,cc,i,j,marca:integer:


 begin
     i:=1;
     j:=1;
     marca:=0;
     cadi2:='';
     cadi:='';
     cadt:='';
     cad:='';
    temp:='';
    fin:='';
    cc:=length(cad1);
      while (cad1[i] <> '(') and (i<=cc) do
         i:=i+1;
         if cad1[i] <> '(' then
         begin
           cad:=copy(cad1,j,cc);
           cal:=con(cad);
```

```
        end
        else
          begin
           cadt:=copy(cad1,j,i-j);
            j:=i;
            i:=i+1;
            while (i < cc) do
            begin
              if (cad1[i] = '(')  then
                begin
                 marca:=i;
                 i:=i+1;
                end
              else
                i:=i+1;
            end;
            if marca <> 0 then
              begin
                cadi:=copy(cad1,j,marca-j);
                i:=marca+1;
                while cad1[i] <> ')' do i:=i+1;
                cadi2:=copy(cad1,marca+1,i-(marca+1));
                ca1:=con(cadi2);
                str(ca1,cadi2);
                quita_blancos(cadi2);
              end
              else
               begin
                i:=j;
                while cad1[i] <> ')' do
                i:=i+1;
                cadi2:=copy(cad1,j+1,i-(j+1));
                ca1:=con(cadi2);
                str(ca1,cadi2);
                quita_blancos(cadi2);
               end;
                fin:=copy(cad1,i+1,cc-i);
                fin:=concat(cadt,cadi,cadi2,fin);
                ca1:=conv(fin);
     end;
     conv:=ca1;
  end;


procedure convierte(var fun:cad30);
{_______________________________________________________
Se lleva a cabo la division de la cadena si se encuentra
algun signo de division "/" , llamando a la primera parte
de la cadena ca1 , y a la segunda parte ca2
cada una de las cadenas ca1 y ca2 son llevadas a evaluar
en las rutinas "CON" y "CONV" para la eliminacion de paren
tesis y evaluacion de operacion
_______________________________________________________}
```

```
var
 cad1:string[60];
 ca1,ca2:real;
 cc,i,j:integer;

begin
cc:=length(fun);
j:=1;
i:=1;
tot1:=0;
while (fun[i] <> '/') and (i <= cc ) do i:=i+1;
if fun[i] = '/' then
 begin
    cad1:=copy(fun,j,i-1);
    ca1:=conv(cad1);
    j:=i+1;
    while(i<=cc) do i:=i+1;
    cade2:=copy(fun,j,i);
    ca2:=conv(cade2);
    total:=(ca1/ca2);
 end
 else
  begin
   tot1:=conv(fun);
   total:=conv(fun);
  end;
end;

begin
    analiza(valor,fun);
    convierte(cade3);
    invent:=total;
end;




procedure notas2;
{--------------------------------------------------------------
------------------
Se  manda el usario un mensaje de la definicion de  "COSTOS
CONCAVOS " para la
obtencion de un plan de produccion optimo
--------------------------------------------------------------
-----------------}
begin
 clrscr;
 frame(1,1,80,24);
 frame(4,4,70,6);
 esc(6,5,5,'DEFINICION DE COSTOS CONCAVOS' );
 frame(4,8,70,24);
 esc(5,9,5,'   La obtencion de plan de produccion OPTIMO se
da en donde      -');
 esc(5,10,5,'los costos de produccion (Cn(Xn)) e inventario
```

```
(Hn(In))          -');
 esc(5,11,5,'son funciones concavas sobre el conjunto Xn  >
0 y In >0 enteros');
 esc(5,12,5,'   Este  tipo de funciones presentan un  costo
MARGINAL decreciente');
 esc(5,13,5,'o  sea  el costo de producir   o  mantener  un
articulo mas de X+1 a ');
 esc(5,14,5,'a  x+2 es menor o igual al costo de producir o
mantener un     -');
 esc(5,15,5,'articulo mas de x a x+1' );
 esc(5,16,5,'   Se  presenta  la  funcion  en  la  cual  se
evaluara ');
 esc(5,17,5,' ');
 esc(5,18,5,'          g(x+2)-g(x+1)  < g(x+1) - g(x)    ');
 esc(5,19,5,'          -------------    ------------');
 esc(5,20,5,'          costo marginal   costo marginal  ');
 esc(5,23,5,'            oprima << ENTER >> para continuar');
 ch:='-';
 while (ch <> #13) do
  read(kbd,ch);
end;


procedure notas3(var xt,x1,x2,to1,to2:real; no:integer);
{______________________________________________________________
_____________
 Se  manda a impresion el valor de la variable  X donde  se
esta evaluando
 la  expresion  ,  el valor calculado  para  "G(X)   G(X+1)
G(X+2) "
 y la conclusion de que si la funcion fue concava o convexa
 _____________________________________________________________
____________}
begin
  clrscr;
  frame(1,1,80,24);
  frame(4,4,70,6);
  esc(6,5,5,'CALCULO DE LA FUNCION PARA X =');
  gotoxy(38,5);
  write(arrx[xs]);
  frame(4,8,70,24);
  esc(11,10,5,'g(x)    =');
  gotoxy(21,10);
  writeln(xt);
  esc(11,12,5,'g(x+1) =');
  gotoxy(21,12);
  writeln(x1);
  esc(11,14,5,'g(x+2) =');
  gotoxy(21,14);
  writeln(x2);
  esc(11,16,5,'g(x+2)-g(x+1)    <=    g(x+1) -g(x)');
  esc(11,17,5,'-------------          ------------');
  gotoxy(8,18);
  writeln(to1,'    ',to2);
  if to1 <= to2 then
```

```
   esc(12,21,5,'**LA FUNCION ES CONCAVA**')
  else
   esc(12,21,5,'**LA FUNCION NO CUMPLE NO ES CONCAVA**');
   esc(12,24,5,'oprima << ENTER >> para continuar');
   ch:='-';
   while (ch <> #13) do
   read(kbd,ch);
end;

procedure inventario;
{_______________________________________________________________
 En  esta  parte  se lleva a cabo la  distribucion  de  las
llamadas
 a las rutinas
 _______________________________________________________________}

   begin
        str(arrx[xs],x1);
      xt:=invent(x1);
      val(x1,x,code);
      x:=x+1;
      str(x,x1);
      x1:=invent(x1);
      x:=x+1;
      str(x,x1);
      x2:=invent(x1);
      to1:=x2-x1;
      to2:=x1-xt;
      notas3(xt,x1,x2,to1,to2,no);
 end;


begin
m:=xs;
 if xs = np1 then
   begin
     nota;
     lee;
     notas2;
     inventario;
   end
  else
   begin
   inventario;
   end
 end;



procedure lee;

 { CAPTURA DE DATOS }

 begin
```

```
  clrscr;
  frame(1,1,80,24);
  esc(9,6,50,'**  PROPOCIONAME  EL INTERVALO DEL PERIODO  A
CALCULAR **');
  esc(20,10,0,'PERIODO INICIAL [1..4] [__]');
  gotoxy(45,10);
  readln(np1);
  esc(20,14,0,'PERIODO FINAL  [PI..4] [__]');
  gotoxy(45,14);
  readln(np);
  clrscr;
end;


procedure tabla_datos(opc:integer);
var
 ch:char;

 { LECTURA DE TABLA }

begin
  frame(1,1,80,24);
  frame(3,3,77,22);
  frame(1,5,80,24);
  esc(26,2,60,' **  TABLA DE DATOS  ** ');
  if opc=1 then
     esc(5,4,30,'PER     DEMANDA       COSTO   FIJO     C.U.
VARIABLE     C.U./INV')
  else
     esc(5,4,30,'PER     DEMANDA       COSTO   FIJO     C.U.
VARIABLE    C.U./INV      Pn');
  i:=1;
  num:=1;
  assign(pre,'precio.pas');
  reset(pre);
  while (not eof(pre)) do
     begin
   readln(pre,dt[i]);readln(pre,at[i]);readln(pre,ct[i]);
   readln(pre,ht[i]);readln(pre,p[i]);
   gotoxy(6,wherey+3);
   if opc=1 then
   write(i,'              ',dt[i],'                 ',at[i],'
',ct[i],'           ',ht[i])
    else
     write(i,'             ',dt[i],'                 ',at[i],'
',ct[i],'           ',ht[i],'          ',p[i]);
    i:=i+1;
 end;
 esc(25,23,10,'oprime <ENTER> para continuar');
 ch:=' ';
 while (ch<>#13) do
  read(kbd,ch);
end;
```

```
procedure tabladatos2;
var
 ch:char;

{ LECTURA DE TABLA }

begin
  frame(1,1,80,24);
  frame(3,3,77,22);
  frame(1,5,80,24);
  esc(26,2,60,' **  TABLA DE DATOS  ** ');
  esc(5,4,30,'PER   COSTO/PREPARACION                  COSTO  FIJO
PER/CESE  ');
  i:=1;
  num:=1;
  assign(costo,'costo_min.pas');
  reset(costo);
  while (not eof(costo)) do
  begin
   readln(costo,kt[i]);
   readln(costo,at[i]);
   readln(costo,vt[i]);
   gotoxy(6,wherey+3);
   write(i,'                                              ',kt[i],'
',at[i],'                  ',vt[i]);
   i:=i+1;
 end;
 esc(25,23,10,'oprime <ENTER> para continuar');
 ch:=' ';
 while (ch<>#13) do
  read(kbd,ch);
end;

procedure obten_xs;
var
tot_x,i,j:integer;

begin
 tot_x:=0;
 for i:=np1 to np do
 begin
  if (i=np)and (i<>1) then
    arrx[np]:=0
  else
    if i=np-1 then
       arrx[i]:=dt[i]+dt[i+1]
    else
       arrx[i]:=dt[i]
  end;
end;

 function DD(NUMA.NUMB:INTEGER):INTEGER;

 var
```

```
  i,j,k,v,auxiliar,ci,aux4,cont,aux1,aux2:integer;
  a:array[1..10] of integer;

begin
  writeln('---------------',numa,'.....',numb);
  if numB-numa<=1 then
        begin
         aux4:=0;
         a[numA+1]:=0;
        end
  else
   begin
     for v:=NUMA+1 TO NUMB-1  do
      begin
         aux1:=dd(numa,v);
         aux2:=dd(v,numB);
         aux4:=aux1+aux2;
         A[v]:=AUX4;
      end;
   end;
    for k:=numa+1 to numb-1 do
    for j:=k+1 to numb-1 do
    begin
     writeln(a[k]);
     if a[k]>a[j] then
      begin
       auxiliar:=a[j];
       a[j]:=a[k];
       a[k]:=auxiliar;
     end;end;
     WRITELN(' MT+TOTAL MINIMO DD  =',KT[NUMA]+A[NUMA+1]);
   dd:=kt[numa]+a[numA+1]; read;
 end;


function FF(NUMP:INTEGER):INTEGER;

{ FUNCION RECURSIVA QUE CALCULA  F(I)= C(I,k) + F(K)      }
var
  j,k,auxiliar,ci,aux,CONT:integer;
  arr:array[1..10] of integer;

begin
writeln('   ENTRE A FUNCION F CON ',NUMP);
writeln('______________________________________________________
__________');
  if nump=np+1 then
        begin
         aux:=0;
         arr[nump+1]:=0;
        end
  else
   begin
     for ci:=np+1 downto nump+1  do
      begin
```

```
          aux:=AT[NUMP]+DD(NUMP,CI)+ff(ci);
          ARR[CI]:=AUX;
        end;
    end;
    for k:=nump+1 to np+1 do
     for j:=k+1 to np+1 do
      if arr[k]>arr[j] then
       begin
        auxiliar:=arr[j];
        arr[j]:=arr[k];
        arr[k]:=auxiliar;
      end;
      WRITELN(' TOTAL MINIMO FF=',ARR[NUMP+1]);
    ff:=arr[nump+1];READLN;
 end;


function h(num1,num2:integer):integer;

{         FUNCION         RECURSIVA         QUE         CALCULA
H1(d1+d2+..dk)+H2(d2+d3+..+dk)+...+H(k-1)(dk) }

var

temp,temp1,temp2,cc:integer;

begin
  temp1:=0;
  if (num2-num1=1) then temp:=0
  else
   begin
     num:=num1+1;
      for cc:=num+1 to num2 do
        temp1:=temp1+dt[cc];
        WRITELN('                          HT(',NUM,') * ',TEMP1);
        temp:=temp1*ht[num];
        temp:=temp+h(num,num2):
    end;
 h:=temp;
end;

function c(n1,n2:integer):integer;

{  FUNCION RECURSIVA QUE CALCULA ATk +  CK(d1+d2+...+dk)  +
HTk }

var
  n3,NUM5,tot2,aux1,totp:integer;

begin
totp:=0;
for i:=n1 to n2-1 do
begin
 totp:=totp+dt[i];
```

```
end;
aux1:=at[n1]+(ct[n1]*totp)+h(n1-1,n2-1);
WRITELN('                C(',N1,') * ',TOTP,' + H(',N1-1,',',N2-
1,')');
c:=aux1;
end;


function F(NUMP:INTEGER):INTEGER;

{ FUNCION RECURSIVA QUE CALCULA  F(I)= C(I,k) + F(K)      }
var
  j,k,auxiliar,ci,aux,CONT:integer;
  arr:array[1..10] of integer;

begin
  if nump=np+1 then
        begin
         arr[nump+1]:=0;
        end
  else
   begin
     for ci:=np+1 downto nump+1  do
      begin
        WRITELN('F(',NUMP,')=       C(',NUMP,',',CI,')      +
F(',CI,')');
        aux:=c(nump,ci)+f(ci);
        ARR[CI]:=AUX;
      end;
   end;
    for k:=nump+1 to np+1 do
    for j:=k+1 to np+1 do
     if arr[k]>arr[j] then
      begin
       auxiliar:=arr[j];
       arr[j]:=arr[k];
       arr[k]:=auxiliar:
     end;
   f:=arr[nump+1];   READ:
 end;

 function hp(kn,n:integer):integer;
 var
   tothp,toth,i,j:integer;
 begin
   toth:=0;
   if kn=n then tothp:=0
   else
   begin
    for  i:=kn+1 to n do
       toth:=toth+dt[i];
    tothp:=toth*ht[kn];
    tothp:=tothp+hp(kn+1,n);
   end;
   hp:=tothp;
```

```
  end;

 function hn(n,k:integer):integer;
 var
   toth,tothp,i,j:integer;
 begin
   toth:=0;
   if k=n then tothp:=0
   else
   begin
    for  i:=n to k-1 do
       toth:=toth+dt[i];
    toth:=toth+p[k];
    tothp:=toth+hn(n,k-1);
   end;
   hn:=tothp;
  end;


function c1(n1,n2:integer):integer;

{  FUNCION RECURSIVA QUE CALCULA ATK +  CK(d1+d2+...+dk)   +
HTk }

var
  i,j,totp,aux1,auxiliar:integer;
  arrc:array[1..10] of integer;
begin
 for j:=n1  to n2-1 do
 begin
   totp:=0;
   writeln('N1=',n1,' N2=',n2,' k=',j);
   for i:=n1 to n2-1 do
      totp:=totp+dt[i];
   aux1:=at[j]+(ct[j]*totp)+hp(j,n2-1)+ hn(n1,j);
   Arrc[j]:=aux1;
   writeln(at[j],'+',ct[j],'*',totp,'+',hp(j,n2-
1),'+',hn(n1,j),'=',aux1);readln;
 end;
   for i:=n1 to n2-1 do
   for j:=i to n2-1 do
      if arrc[i]>arrc[j] then
       begin
        auxiliar:=arrc[j];
        arrc[j]:=arrc[i];
        arrc[i]:=auxiliar;
  end;
  writeln('_________________ARREGLO_________________');
  for i:=n1 to n2-1 do
   writeln(arrc[i]);
   WRITELN('MINIMO=',ARRC[N1]);
  c1:=arrc[n1];

end;
```

```
function F1(NUMP:INTEGER):INTEGER;

{ FUNCION RECURSIVA QUE CALCULA  F(I)= C(I,k) + F(K)      }
var
  j,k,auxiliar,ci,aux,CONT:integer;
  arr:array[1..10] of integer;

begin
  if nump=np+1 then
        begin
         aux:=0;
         arr[nump+1]:=0;
        end
  else
   begin
     for ci:=np+1 downto nump+1  do
      begin
        aux:=c1(nump,ci)+f1(ci);
        ARR[CI]:=AUX;
      end;
   end;
   for k:=nump+1 to np+1 do
    for j:=k+1 to np+1 do
     if arr[k]>arr[j] then
      begin
       auxiliar:=arr[j];
       arr[j]:=arr[k];
       arr[k]:=auxiliar;
     end;
   for k:=nump+1 to np+1 do
    writeln('=..',arr[k]);
   f1:=arr[nump+1];  READln;
 end;


procedure resultados(opc:integer);
VAR
  ch:char;
{ RUTINA QUE DESPLIEGA RESULTADOS }
begin
 clrscr;
 frame(1,1,80,24);
 frame(5,5,75,19);
 esc(11,10,20,'   ENTONCES  F(i)  ES  EL  COSTO  MINIMO  DE
SATISFACER LAS DEMANDAS');
 gotoxy(11,11);
 esc(11,11,20,'DURANTE LOS PERIODOS ');
 write(NP1,'  HASTA ',NP,'. SI Ii = 0 .');
 gotoxy(32,16);
 write('F(',NP1,') = ');
 write(tot);
 if opc=1 then
```

```
 begin
  gotoxy(10,18);
  for i:=np1 to np do
  write('X[',i,'] =',arrx[i],'    ');
 end;
 gotoxy(18,22);
 write('oprime <ENTER> para continuar');
 ch:='-';
 while  ( ch<>#13 ) do
  read(kbd,ch);
end;

procedure menu ;
var
 opc:char;

procedure evalua_opcion(opcion:char);
 begin
  case opcion of
  'R','r':begin
              clrscr;
              rutina1;
              menu;
          end;
  'A','a':begin
              clrscr;
              tabla_datos(1);
              lee;
              tot:=f(np1);
              obten_xs;
              resultados(1);
              for ci:=np1 to np do
               converge(ci);clrscr;
              menu;
          end;
  'B','b':begin
           clrscr;
           tabladatos2;
           lee;
           tot:=ff(np1);
           resultados(2);
           for ci:=np1 to np do
             converge(ci);clrscr;
           menu;
           end;
  'c','C':  begin
              clrscr;
              tabla_datos(1);
              lee;
              tot:=f(np1);
              obten_xs;
              resultados(1);
              for ci:=np1 to np do
               converge(ci);clrscr;
              menu;
```

```
            end;
    'd','D': begin
              clrscr;
              tabla_datos(2);
              lee;
              tot:=f1(np1);
              obten_xs;
              resultados(1);
               for ci:=np1 to np do
               converge(ci);clrscr;
              menu;
            end;
   'e','E': begin
            clrscr;
            tabladatos2;
            lee;
            tot:=ff(np1);
            resultados(2);
            for ci:=np1 to np do
              converge(ci);clrscr;
            menu;
            end;
   'F','f':begin
            clrscr;
            frame(1,1,80,24);
            esc(16,13,60,'F  I  N     D  E     S  I  S  T  E
M  A');
            GOTOXY(1,24);
            HALT;
           end;
     end;{case}
   end;


begin
   clrscr;
   frame(1,1,80,24);
   gotoxy(22,5);
   write('  **    M      E      N     U   **   ');
   gotoxy(14,7);
   write('       PLAN   DE   PRODUCCIONH   OPTIMO   PARA   N
PERIODOS.');
   gotoxy(25,9);
   write(' <R>          RUTINA R          ');
   gotoxy(25,11);
   write(' <A>          MODELO A          ');
   gotoxy(25,13);
   write(' <B>          MODELO B          ');
   gotoxy(25,15);
   write(' <C>          MODELO C          ');
   gotoxy(25,17);
   write(' <D>          MODELO D          ');
   gotoxy(25,19);
   write(' <E>          MODELO E          ');
   gotoxy(25,21);
```

```
  write(' <F>        FIN DE PROGRAMA     ');
  gotoxy(11,23);
  write('OPCION [_] ');
  opc:=' ';
  while
((opc<>'R')and(opc<>'A')and(opc<>'B')and(opc<>'r')and(opc<>
'a')and(opc<>'b')and(opc<>'C')
        and(opc<>'c')and(opc<>'D')and(opc<>'d')and(opc<>'F'
)and(opc<>'f')
        and(opc<>'e')and(opc<>'E'))
    begin
      gotoxy(19,23);
      read(kbd,opc);
    end;
    evalua_opcion(opc);
 end;

procedure bienvenida;
var
  ch:char;
begin
 clrscr;
 frame(1,1,80,24);
 frame(5,3,75,21);
 esc(33,6,50,' U  N  A  M ');
 esc(11,9,50,'C O N T R O L  O P T I M O  D E  L A  P R O D
U C C I O N');
 esc(25,16,50,'REALIZADO POR :');
 esc(41,17,50,'ANA  BERTHA  JIMENEZ  RIOS');
 esc(25,22,0,'oprime <ENTER> para continuar');
 ch:=' ';
 while (ch<>#13) do
   read(kbd,ch);
END;

                 (*   MODULO PRINCIPAL   *)

begin
{  bienvenida;   }
  menu;
end.
```

ANEXO 2

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

En este anexo se pretende establecer breve y claramente, conceptos que se manejan en la tesis, dando por hecho que el lector está familiarizado con ellos, esperando que sirva de apoyo en caso de alguna duda.

a.1 CONJUNTO CONVEXO

Un conjunto $X \subset E^n$ se llama conjunto convexo, si dado cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 en X se satisface que $wx_1 + (1-w)x_2 \subset X$, para cada $0<w<1$. El vector $wx_1+(1-w)x_2$ representa un punto en el segmento de recta que une a x_1 y x_2. A cualquier punto que tenga la forma $wx_1+(1-w)x_2$ con $0<w<1$ se llama combinación convexa de x_1 y x_2. El conjunto convexo geométricamente, se puede interpretar como se muestra en la figura (1)

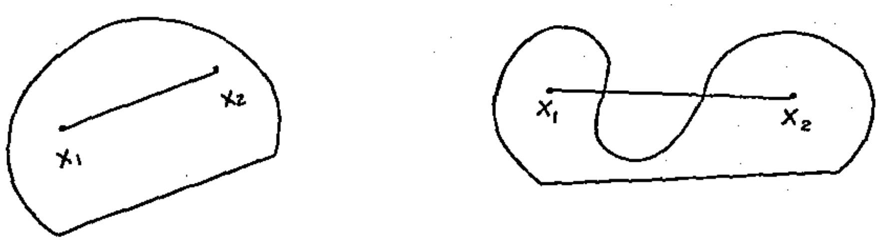


FIGURA 1 Conjunto convexo

Conjunto no convexo

En donde para cada par de puntos x_1 y x_2 εX el segmento de recta o la combinación convexa que los une deben pertenecer a X.

Los siguientes conjuntos son conjuntos convexos

1) $\{(x_1, x_2) \ / \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

2) $\{x \ / \ Ax=b\}$ donde A es una matriz de mxn y b es un m-vector.

3) $\{x \ / \ Ax=b \ \ x \geq 0\}$ donde A es una matriz mxn y b es un m-vector.

Proposición 1. Un conjunto $X\varepsilon E^n$ es convexo si toda combinación convexa de elementos de x pertenece a X.

Demostración. Procediendo por inducción; para n=2 es inmediato, por hipótesis suponemos que es válido para n=K-1 y lo probaremos para n=K. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y $w_1, w_2, \ldots, w_k$ tales que $w_i C[0,1]$ y $w_1 + w_2 + \ldots + w_k = 1$ por demostrar que $z = w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_kx_k$ pertenece a X. Sea

$$z = [(1-w_k)/(1-w_k)](w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_{k-1}x_{k-1}) + w_kx_k$$

$$= (1-w_k)[w_1/(1-w_k))x_1 + (w_2/(1-w_k))x_2 + \ldots + (w_{k-1}/(1-w_k))x_{k-1}] + w_kx_k$$

como $(w_1 + w_2 + \ldots + w_{k-1})/(1-w_k) = 1$ por hipotesis de inducción, se puede asegurar que

$$y = ((w_1/(1-w_k))x_1 + (w_2/(1-w_k))x_2 + \ldots + (w_{k-1}/(1-w_k))x_{k-1}$$

de donde $(1-w_k)y + w_k\, x_k C X$

con lo que queda demostrada la proposición.

Definición. Sea S un subconjunto de R. El contorno convexo de S, denotado por $C \circ S$ es el resultado de la intersección de todos los conjuntos convexos que contiene a S.

PUNTOS EXTREMOS

Un punto x en un conjunto convexo X, se llama punto extremo de X, si x se puede representar como una combinación convexa extricta de dos puntos distintos de X, es decir si $x = wx_1 + (1-w)x_2$ con $w \in (0,1)$ y $x_1, x_2 \in X$, entonces $x = x_1 = x_2$.

La figura (2) muestra algunos ejemplos de puntos extremos y no extremos de un conjunto convexo. Observe que x_1 es un punto extremo de X, mientras que x_2 y x_3 no lo son.

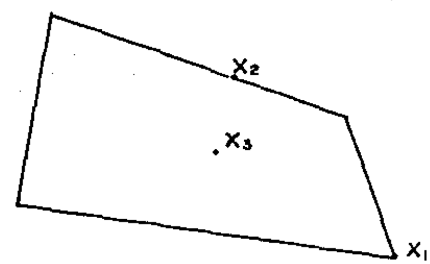


FIGURA 2 PUNTOS EXTREMOS Y NO EXTREMOS DE UN CONJUNTO CONVEXO

CONJUNTO POLIEDRICO

Un conjunto poliédrico es la intersección de un número finito de semiespacios. Un semiespacio se puede representar mediante una desigualdad del tipo $a^i x \leq b$, entonces un conjunto poliédrico se podrá representar por medio del sistema $a^i x \leq b \quad i=1...N$ o bien por $\{x/Ax<b\}$ con A matriz mxn, cuyo i-esimo renglón es a^i y b es un m-vector.

CONJUNTO POLIEDRICO ACOTADO

Considérese el conjunto poliédrico acotado (un conjunto es acotado si existe un número K tal que la norma de $||x||^*<K$ para cada x en el conjunto) observando la fig (3), el conjunto poliédrico se forma de cinco puntos extremos x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5. Nóteše

*La norma de un vector x, que se denota por $||x||$, está dado por $\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$

que cualquier punto en el conjunto se puede representar como una combinación convexa de esos cinco puntos extremos.

<u>Ejemplo</u>. Tómese el punto x que se muestra en la fig (3), observe que x se puede representar como una combinación convexa de y y x_4 entonces $x = wy + (1-w)x_4$, donde $w \in [0,1]$ y Y se puede representar como una combinación convexa de x_1 y x_2 entonces $y = vx_1 + (1-v)x_2$ sustituyendo el valor de y en x y haciendo una pequeña manipulación algebráica se tiene:

$$x = wvx_1 + w(1-v)x_2 + (1-w)x_4$$

con wv, w(1-v) y (1-w) $\in$ [0,1], además

$$wv + w\ (1-v) + (1-w) = 1$$

o en otras palabras x se puede representar como una combinación convexa de x_1, x_2 y x_4 y en general cualquier conjunto poliédrico se puede representar como una combinación convexa de sus puntos extremos.

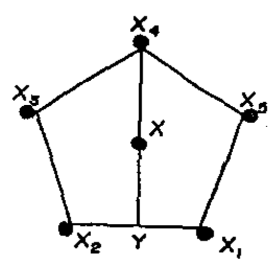


FIGURA 3 REPRESENTACION CONVEXA DE X EN TERMINOS DE X_1, X_2, Y X_4

<u>Teorema 1*</u> (Representación de elementos de un conjunto convexo)

Sea $X = \{x \,/ Ax = b,\ x \geq 0\}$ un conjunto poliédrico acotado no vacio, entonces el conjunto de puntos extremos es no vacío y tiene un número finito de puntos, dígase $x_1, x_2, \ldots, x_K$. Más aún $x \subset X$ si y solo sí, X se puede representar como una combinación convexa de $x_1, \ldots, x_K$ más una combinación lineal no negativa de $d_1, \ldots, d_\ell$; $d_1, \ldots d_\ell$ conjunto de direcciones extremas no vacio entonces

$$x = \sum_{j=1}^{K} w_j x_j + \sum_{j=1}^{\ell} v_j d_j$$

$$\sum_{j=1}^{K} w_j = 1$$

$$w_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, K$$

$$v_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots \ell$$

CORRESPONDENCIA ENTRE SOLUCIONES BASICAS FACTIBLES Y PUNTOS EXTREMOS.

En esta sección se demostrará que la colección de soluciones básicas factibles y la colección de puntos extremos son equivalentes también se mostrará que un punto es una solución bá-

---

*Para demostración del teorema ver programación lineal y flujo en redes. Mokhtar Bazaraa.

sica factible si, y solo sí, es un punto extremo. Puesto que un problema de programación lineal que tiene un valor óptimo finito siempre tiene una solución óptima en un punto extremo, entonces siempre será posible encontrar una solución básica factible óptima.

<u>Definición</u>. Considere el sistema $Ax = b$, donde A es matriz de MxN, b vector columna de m-componentes y x vector de n-componentes, donde el rango de $[a|b]$ = rango $[a] = m$. Suponga sin pérdida de generalidad que $A = [B,N]$, donde B es una matriz invertible MxM y N es una matriz de Mx[N-M]. Entonces

a) El punto x_0 definido por $x_0 = [x_B, x_W]$, donde $x_B = B^{-1}b$; y $x_n=0$ recibe el nombre de <u>solución básica</u> del sistema.

b) La matriz B recibe el nombre de <u>matriz básica</u>. La matriz N recibe el nombre de matriz no-básica. Las componentes x_B se llaman, variables básicas. Las componentes x_W se denominan variables no-básicas y si $x_B>0$, entonces x_0 se denomina variable básica factible no degenerada. Si $x_B=0$ se dice que x_0 es variable básica degenerada

<u>Proposición 3</u>. Considere el problema

$$\min cx$$

sujeta a

$$Ax = b; \quad x>0$$

donde la matriz A es de dimensión MxN y de rango M. Entonces x_0 es una solución básica factible si y solo sí, x_0 es un punto extremo.

Demostración. Sea x_0 un punto extremo de la región factible, después de un posible arreglo de los componentes de x_0 y de las columnas de A, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $x_1, x_2, \ldots, x_p$ son positivas y $x_{p+1} = \ldots = x_0 = 0$.

Se demostrará que $a_1, a_2, \ldots a_p$ vectores columna de A son linealmente independientes; procediendo por contradicción, suponga que no son l.i, entonces existen escalares $w_1, w_2, \ldots, w_p$ no todos cero, tales que: $\sum_{j=1}^{p} w_j a_j = 0$; sean x' y x" definidos por

$$x'_j = \begin{cases} x_j + vwj & \text{si } j = 1, \ldots, p \\ 0 & \text{si } j>p \end{cases}$$

$$x''_j \begin{cases} x_j - vw_j & \text{si } j = 1, \ldots, p \\ 0 & \text{si } j>p \end{cases}$$

como $x_j>0$, para $j = 1, \ldots, p$ entonces independientemente de los valores de wj, se puede escoger $v>0$, tal que $x'>0$ y $x''>0$, como al menos para algún j $wj \neq 0$ se tiene que $x' \neq x''$ y se cumple que

$$Ax' = \sum_{j=1}^{p} a_j x'_j = \sum_{j=1}^{p} a_j (x_i + vw_j) = \sum_{j=1}^{p} a_j x_j + v \sum_{j=1}^{p} a_j w_j = b$$

de igual manera se prueba que $Ax'' = b$ de donde se tiene que

a) $x_0 = (1/2)x' + (1/2)x''$

b) $x_0 \neq x' \neq x''$

c) $Ax = Ax' = Ax''$

lo que contradice que x_0 sea punto extremo, de donde se concluye la independencia lineal de $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Supóngase ahora que x_0 es una solución básica factible del sistema $Ax = b$, $x_0>0$, demostratemos que x_0 es punto extremo. Sea B la base correspondiente a x_0, de manera que se puede escribir $x_0 = [x, 0]$. Supóngase ahora que existen soluciones factibles x', x'' y $w \subset (0,1)$, tales que $x_0 = wx' + (1-w)x''$ y sea $x' = [x'_E, x'_N]$ y $x'' = [x''_B, x''_N]$ donde, no necesariamente x'_N, x''_N son idénticamente, cero, pero como

$$[x_B, 0]=w[x'_B, x'_N] + (1-w)\ [x''_B, x''_N] \quad \text{con } w \in [0,1]$$

como x'_N, $x''_N \geq 0$ entonces $x'_N = x''_N = 0$.

Ahora bien $b = Ax' = Bx' + N x'_N = Bx'$ por lo tanto $x' = B^{-1}b$.

Lo que demuestra que $x_0 = x'$, en forma similar se demuestra que $x_0 = x''$, lo que demestra que x_0 es punto extremo. Con lo que se concluye la demostración de la proposición

1. Arrow, K.J., Harris, T. and Marschak, J., "Optimal Inventory Policy" Econometría; XIX (1951), pp 250-272.

2. Arrow, K.J., Karlin, S., and Scarf H., "Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production" Stanford, California. Stanford University Press, 1958.

3. Bensoussan, Alain, Crouhy Michel, Proth Jean, "Mathematical Theory of Production Planning".

4. Biddle, Gary C., and Kipp Martin R., "A Stochastic Inventory Model Incorporation Intra-Year Purchases and Accounting Tax Incentives". University of Chicago, Chicago. Vol. 32 No. 6 June 1986 Management Science.

5. Billington, Peter J., McClain John O. and Joseph Thomas L., "Heuristics for Multileve Lot-Sizing with a Bottleneck", Northeastern University, Boston Massachusetts. Vol 12 No. 8 pp 989 Management Science.

6. Bitran, Gabriel R., Haas, Elizabeth A. and Matzuo Hirofumi "Production Planning of Style Goods with High Setup Costs and Forecast Revisions", Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts. Vol. 34 No. 2 pp 226-236 Operation Research.

7. Bitran, Gabriel R. Matzuo, Hirofumi., "Approximation formulations for the Single-Product Capacitated lot Size Problem" Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts. Vol. 34 No. 1 pp 63-74 december 1984 Operation Research.

8. Blumenfeld, Dennis E., "Distribution Strategies that Minimize Transportation and Invetory Costs".

9. Bodt, Marc A. de and Graves Stephen C., "Continous-Review policies for a Multi-Echelon Inventory Problem with Stochastic Demand". Vol. 31 No. 10, October 1985. pp 1286. Management Science.

10. Brown, Corcoran and Lloyd, "Inventory Models with Forecasting and Dependent Demand", Management Science, Vol. 17 No. 7 March 1971, pp 498-499.

11. Burn, R.N., and Carter, M.W., "Work Force Size and Single Shift Schedules with Variable Demands". School of Business, Ontario Canadá. Vol. 1 No. 5 May 1985. Management Science

12. Candace, Arai Yano, "Setting Planned Leadtimes in Serial Production Systems with Tardiness Costs". Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan. Vol. 33 No. 1 January 1987 pp 95 Management Science.

13. Chakravarty, A.K., Orlin, J.B., Rothblum, U.G. "Consecutive Optimizer for a Partitioning Problem with Applications to Optimal Inventory Groupings for Joint Replenishment". Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts. Vol. 33 No. 4 pp 820-834.

14. Laganzo Carlos F. and Blumenfeld, Dennis E., "Distribution Strategies that Minimize Transportation and Inventory costs" University of California Berkeley, Cal. Vol. 33 No. 3-4 June 1985. Operation Research.

15. Denardo, E.V. "Dynamic Programing, Models and Applications", Prentice-Hall, Inc. 1982.

16. Dvorestzky, A., Kiefer, J. and Wolfowitz, J., "The Inventory Problem: I, Case of Known Distributions of Demand; II, case of Unknown Distributions of Demand", Econometrica, XX (1952), pp 187-222 and 450-466.

17. Dvoretzky, A., Kiefer, J., and Wolfowitz, J., "On the Optimal Character of the (s,S) Policy in the Inventory Theory", Econometrica, XXI (1953), pp 586-596

18. Florian, M. and Klein, M., "Deterministic Production Planning with Concave cost and Capacity Constrains". Management Science. Vol. 18 No. 1 1971.

19. Florian, M. and Fulkerson, D.R., "Flows in Network", Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

20. Graves, Stephen C. "A Multi-Echelon Inventory model for a Repairable Item with One-for-One Replenishment". Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts. Vol. 31 No. 10 October 1965 Management Science.

21. Hadley, G. and Whitin, T.M., "Analysis of Inventory Systems", University of California, Berkely, Prentice-Hall International series in Management 1963.

22. Harris, F., "OPerations and cost". (Factory Management Series) Chicago: A. W. Shaw Co., 1915, pp 48-52.

23. Harvey, M. Wagner and Thomson, H. Whitin "Dynamic version of the Economic lot Size Model", Stanford University and Massachusetts Institute of Technology, pp 89-95.

24. Hubbard, R. Glenn and Winer, Robert "Inventory Optimization in the U.S. Petroleum Industry: Empirical Analysis and Implications for Energy Emergency Policy", Harvard University, Cambridge, Massachusetts. Vol. 32 No. 7 July 1966 pp 773. Management Science

25. Jonsson, H. and Silver, E. A. "Analysis of a Two-Echelon Inventory Control System with complete Redistribution", Department of Mathematics, Faculty of Management, Calgary, Alberta, Canadá. Vol. 33 No. 2 February 1987 Management Science.

26. Kamal Golabi, "Optimal Inventory Policies when Ordering Prices ar Random", Stanford University. Vol. 33 No. 3, June 1985 pp 575-588, Operation Research.

27. Karmakar, Uday S., "The Multilocation Multiperiod Inventory Problem: Bounds and Approximations" University of Rochester, N. Y. Vol. 33 No. 1, January 1987, pp 86 Management Science.

28. Lasserre, J.B., Bes, C. and Bellat Rou, F., "The Stochastic Discrete Dynamic Lot Size Problem: An Open-Loop Solution". Laboratoire Du C.N.R.S. D'Automatiqué at D'Analyse des Sys tems du C.N.R.S., Toulouse, France. August 1984 Operation Research.

29. Love, S.F. "Bounded Production and Inventory Models with Piece wise Concave Cost", Management Science. Vol. 20 No. 3 1973.

30. Love, S.F. "Inventory Control", McGraw-Hill International Book Company.

31. Lynwood, A., Johnson and Douglas, C. Montgomery. "Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control", John Wiley & Sons, Inc; New York, London, Sydney, Toronto.

32. Mamer, John W. and Smith, Stephan A., "Job Completion based Inventory Systems: Optimal policies for Repair Kits and Spare Machines", University Santa Clara, Sta. Clara, Cal., Vol. 31 No. 6, June 1985 Management Science.

33. Martel, Charles., "Premptive Scheduling to Minimize Maximun Completion time on Uniform Processors with Memory Constrain", University of California, Davis, Cal. Vol. 33 No. 6 pp - 1360-1380. Operation Research.

34. Mattew, J. Sobel., "Smoothing Start-up and Shut-Down cost Concave Case", Yale University, Management Science. Vol. 17 No. 1, September 1970.

35. Maxwell, William L. and Muckstadt, John A., "Establishing Consistent and Realistic Reorder Intervals in Production-Distribution System". Cornell University, Ithaca, N.Y. pp 1316-1342.

36. Maxwell, W.W. and Sighk, H., "Scheduling Cycle Production on Several Identical Machines", Cornell University, Ithaca N.Y. Vol. 34 No. 3 pp 460-463, September 1985. Operation Research

37. Miller, Bruce L., "Scarf's State Reduction Method, Flexibility and a Dependent Demand Inventory Model" University of California, Los Angeles, Cal. Vol. 34 No. 1 pp 83-90, Feb./86.

38. Moinzadeh, Kamban and Lee, Hau L., "Batch Size and Stocking Levels in Multi-Echelon Repairable Systems", School of Business Administration, University of Washington. Vol. 32 No. 12, December 1986 pp 1567. Management Science.

39. Morgan, Jonces J., "A Stochastic Model for Adaptive Behavior In a Dynamic Situation", Management Science. Vol. 17, March 1971 pp 484-497.

40. Nador, Eliezer., "Inventory Systems", John Wiley & Sons, Inc. Cap. VI.

41. Nevison, Christopher H., "A Cost Adjustment Heuristic for Dynamic Lot-Sizing with Uncertain Demand Timing", Colgate University, Hamilton, N. Y. Vol. 33 No. 6 November-December 1985. Operation Research

42. Panayotis Afentakis, Bezalel Gavish., "Optimal Lot-Sizing Algorithms for Complex Product Structures". Vol. 34 No. 2 pp 226-236, March 1985, Operation Research.

43. Pappilon, A., "A treatise Concerning the East India Trade (1677)", 1696 Reprint, R 4 Quoted in Viner, J. Studies in The Tehory of International Trade. New York: 1937, p 20.

44. Poots, S. T., "A Lagrangean Based Branch and Bound Algorithm for Single Machine Sequencing with Procedentce Constraints to Minimize total Wighted Completion Time", Department of Mathematics, University of Keele. Vol. 31 No. 10, October 1985. pp 1300. Management Science.

45. Porteus, Evan L., "Optimal Lot Sizing, Process Quality Improvement and Setup Cost Reduction", Stanford University, Stanfor, California. Vol. 34 No. 1 pp 137-144. February 1986. Operation Research.

46. Raymond, F.E., "Quantity and Economy in Manufacture"., New York: McGraw-Hill Book Co., 1931.

47. Rein, Peterson and Silver, Edward A., "Decision Systems for Inventory Production Planning"., John Willey & Sons. New York Chichester Brisbane Toronto.

48. Rosenblatt, Meir J. and Kaspi Moshe., "A Dynamic Programming Algorithm for Joint Replenishment under General order cost Functions". Stanford University Cal. Vol. 3 No. 3 pp 369 March 1985. Management Science.

49. Schmidt, Charles P., Nahnias, Steven, "Optimal Policy for a Two-Stage Assembly System under Random Demand". The University of Santa Clara, Sta. Clara, California. Vol. 33 No. 5, September 1985. Operation Research.

50. Schrage, Linus and Wolsey, Laurence, "Sensitivity Analysis for Branch and Bound Integer Programming", University of Chicago, Chicago, Illinois. Vol. 33 No. 5, September-October 1985 pp 1008. Operation Research.

51. Stidham, Shaler J. R., "Clearing Systems and (s,S) Inventory Systems with Nonlinear costs and Positive Lead Lines", North Carolina State University, Raleigh, North Carolina, Vol. 34 No. 2 pp 276-280 July 1985. Operation Research.

52. Veinott, Arthur F., "The Status of Mathematical Inventory Theory". Management Science; Vol. 12 No. 11 July 1966, pp 745-773.

53. Veinott, Arthur F. Jr. "The Optimal inventory policy for Batch Orderin"., Stanford University, Stanford, California August 1964.

54. Von, Neumann, J. and Morgnstern, O., "Theory of Games and Economic Behavior. Princeton, N.Y.: Princeton University Press, 1953.

55. Whitin, T.M., "The Theory of Inventory Management", Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1957, p 219.

56. Willard I, Zangwill., "Minumun Concave Cost Flows in Certain Network". Management Science. Vol. 14 No. 7 March. 1968, pp 429-450.

57. Willard I. Zangwill "A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic lot Size Production System a Network Approach"., Management Science. Vol. 17 March 1971 pp 434-497.

58. Zipkin, Paul H., "Models for Design and Control of Stochastic, Multi-item Batch Production System". Columbia University, N. Y., New York Vol. 34 No. 1 pp 91-104 February 1986. Operation Research