

00382
7
24



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

**RESONANCIAS Y ESTADOS DE GAMOW EN
POTENCIALES NO LOCALES CON
INTERACCION COULOMBIANA**

T E S I S

Que para obtener el Grado de:
Doctor en Ciencias (Física)

P r e s e n t a :

Juan Manuel Velázquez Arcos

México, D. F., Julio de 1967

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Introducción		1
Capítulo I.	La dispersión por la suma de un potencial no local y un potencial de Coulomb en el formalismo de Fredholm	
1.1	La dispersión por un potencial no local	6
1.2	La ecuación integral	8
1.3	Condiciones sobre el potencial	13
1.4	El determinante de Fredholm	17
1.5	El resolvente	26
Capítulo II.	Resonancias y estados resonantes en un potencial no-local y un potencial de Coulomb	
II.1	Estados resonantes en un potencial no-local	32
II.2	La función de Gamow y la eigenfunción de Fredholm	38
II.3	El dual de la función de Gamow	40
II.4	Normalización de los estados de Gamow	42
II.5	Desarrollo de la función de Green en términos de estados ligados, resonantes y estados de la dispersión	50
II.6	Desarrollo de una función en términos de estados ligados, resonantes y estados de la dispersión	52
Capítulo III.	Ejemplo de aplicación del formalismo: Resonancias y estados resonantes en la captura radiativa directa de ^3He por ^3H	
III.1	Uso práctico del desarrollo en estados de Gamow en un ejemplo realista	55
III.2	Elementos de matriz del operador dipolar eléctrico entre estados del continuo y estados ligados	58
III.3	Resonancias	
Conclusiones		71
Referencias		73

INTRODUCCION

Los potenciales no locales son de gran importancia en la descripción mecánico cuántica de los sistemas formados por muchas partículas en interacción mutua. Algunos ejemplos lo son átomos y moléculas constituidas de electrones que se mueven en el campo electromagnético de los núcleos y que además actúan unos en los otros mediante el campo electromagnético que generan en su movimiento.

Otro ejemplo es el núcleo atómico que está formado de nucleones, es decir protones y neutrones que se mueven a gran velocidad confinados en una región muy pequeña del espacio por las fuerzas nucleares que actúan entre ellos. Los nucleones mismos son sistemas compuestos de partículas, que actualmente se cree que son elementales, -los quarks- que se mueven en el campo de fuerzas nucleares "fuertes" producido por el intercambio de gluones y descrito por la función lagrangiana de la cromodinámica cuántica. En todos estos casos y en muchos otros de igual importancia, las ecuaciones diferenciales correspondientes, ecuación de Schrödinger ó ecuaciones de la cromodinámica cuántica, plantean un problema cuya solución no se puede obtener en términos de funciones analíticas conocidas en forma cerrada. Se recurre entonces a diversas aproximaciones, entre las que sobresale, por su eficacia y simplicidad el método de Hartree-Fock o algún otro método equivalente a éste y en el que la acción en una partícula, debida al resto de las partículas en el sistema se representa por un potencial o campo promedio, el cual a su vez se calcula con ayuda de las funciones de ondas aproximadas que describen el movimiento de esas partículas. La antisimetrización de las funciones de onda de los sistemas de muchos fermiones hace que el potencial resultante no sea

una función de la posición de la partícula solamente, sino que para cada posición de la partícula sobre la que actúa el potencial efectivo, esta función depende también de la presencia de las otras partículas. Resulta así que el potencial efectivo es función de dos variables de posición, una que describe la posición de la partícula sobre la que actúa el potencial y otra que indica la posición de los puntos del espacio alrededor de la partícula en los que se encuentran otras partículas correlacionadas con la primera por la acción del principio de Pauli.

En consecuencia, en la representación de Schrödinger los potenciales no locales son operadores integrales hermitianos de la forma siguiente:

$$V\psi = \int V(r,s)\psi(s)d^3s$$

El problema de la descripción de las colisiones entre dos sistemas compuestos de fermiones, en la aproximación del campo promedio, lleva de mcdo natural a una ecuación integrodiferencial

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \int V(r,s)\psi(s)d^3s = E\psi$$

con las condiciones a la frontera adecuadas, en donde V es el potencial efectivo que como se explicó antes no es local. La solución de esta ecuación se vuelve particularmente difícil cuando las condiciones a la frontera corresponden a las de ondas salientes, éstas son las llamadas funciones de Gamow.

Las funciones de Gamow son de gran utilidad en la descripción del comportamiento resonante de las colisiones. El antecedente de su aplicación se remonta a 1928, cuando Gamow⁽²³⁾ describió el decaimien-

to de los núcleos radiactivos, con la ayuda de soluciones de la ecuación de Schrödinger que se comportan a grandes distancias de separación como ondas salientes puras correspondientes a valores complejos de la energía con una parte imaginaria negativa. Desde entonces, la posibilidad de usar estos eigenestados resonantes para describir estados no ligados de vida larga y resonancias en física nuclear y en otros campos de la física ha sido explorada por varios autores⁽²⁴⁾. Las resonancias y los estados resonantes producidos por un potencial no local, no separable, con soporte no compacto fueron estudiadas por Mondragón y Velázquez.⁽³²⁾ Sin embargo, la dificultad que representa la no localidad de los potenciales y la presencia de interacción coulombiana en muchos problemas solo había sido salvada parcialmente utilizando potenciales separables⁽⁵⁾. El estudio de las resonancias y los estados resonantes en el caso general de un potencial no local con soporte no compacto en presencia de una interacción coulombiana no había sido hecho.

En este trabajo, transformaremos la ecuación integrodiferencial de Schrödinger para potenciales no locales y en presencia de interacción coulombiana en la correspondiente ecuación de Lippmann-Schwinger por parecernos que es más conveniente incluir las condiciones a la frontera en la función de Green, y demostraremos que es posible resolver esta ecuación con la ayuda de la teoría de Fredholm de las ecuaciones integrales. Demostraremos también que es posible utilizar las soluciones divergentes de la ecuación de Lippmann-Schwinger homogénea para hacer una descripción del comportamiento resonante de las colisiones y demostraremos que las reglas usuales de normalización, cerradura y ortogonalidad de las

eigenfunciones se pueden extender a las funciones de Gamow en este caso.

Finalmente aplicaremos nuestros resultados a un problema concreto, la captura radiativa de ${}^3\text{He}$ por ${}^3\text{H}$ en el primer estado excitado de ${}^6\text{Li}$, en donde se hace una breve discusión y se obtiene la estructura resonante de la sección de captura mediante un desarrollo de la función de ondas en el canal de entrada en estados ligados resonantes y un continuo de estados de la dispersión. El programa de esta tesis es como sigue:

En el primer capítulo se exponen los fundamentos matemáticos que nos permitirán garantizar que nuestros resultados sean correctos. Se demuestra que a la ecuación de Lippmann-Schwinger del problema con un potencial no local de soporte no compacto y un potencial coulombiano corresponde una ecuación de Fredholm con un núcleo integral cuya traza es finita. De este modo se pueden utilizar los resultados bien conocidos de la teoría de Fredholm aún en un caso, como el presente, en el que el núcleo integral no es autoadjunto.

El formalismo que desarrollamos en este trabajo es una generalización del tratamiento original de Lippmann y Schwinger⁽¹⁾ y del tratamiento más general y más moderno de N. von der Heydt⁽⁴⁾.

En el segundo capítulo planteamos el problema de los potenciales no locales con interacción coulombiana como una ecuación integral de Lippmann-Schwinger y construimos una ecuación integral de Fredholm auxiliar que nos permitirá obtener las propiedades de las funciones de Gamow.

Después, utilizamos los resultados del capítulo 1 para desarrollar a las funciones de ondas y de Green en términos de estados ligados y estados resonantes y de un continuo de estados de la dispersión. Obtenemos la generalización de las reglas de ortogonalidad, completez y normalización de los estados de Gamow.

En el tercer capítulo aplicamos los resultados anteriores a un problema concreto del cual se hace una discusión muy breve, obteniéndose el comportamiento resonante de la sección de captura radiativa de ${}^3\text{He}$ por ${}^3\text{H}$ en el primer estado excitado de ${}^6\text{Li}$ por el procedimiento que ya ha sido descrito.

En el capítulo cuatro hacemos un resumen de los resultados obtenidos en este trabajo y exponemos algunas conclusiones de nuestro trabajo.

1.1 LA DISPERSION POR UN POTENCIAL NO LOCAL

El problema de la dispersión por un potencial no local da lugar a una ecuación radial de Schrödinger de tipo integrodiferencial con condiciones a la frontera apropiadamente definidas.

El hecho mismo de que el potencial no local se deba representar por un operador integral hace que los métodos matemáticos que se usan comúnmente en la teoría de la dispersión por un potencial local, es decir los métodos de las ecuaciones diferenciales ordinarias, no sean apropiados en este caso.

Esto me ha llevado a reformular el problema de la dispersión por un potencial no local como un problema de ecuaciones integrales de tipo Lippmann-Schwinger, homogéneas o inhomogéneas, según sea el caso, pues las técnicas del análisis funcional que permiten resolver estas ecuaciones son más apropiados para estudiar un problema que tiene como parte esencial un operador integral. El problema de la dispersión por un potencial local ha sido formulado y estudiado como un problema de ecuaciones integrales por Lippmann y Schwinger,⁽¹⁾ por Jost y Pais⁽²⁾ y por muchos otros autores, una exposición clara de esta teoría y una bibliografía bastante completa se encuentran en el conocido libro de texto de R.G. Newton.⁽³⁾ El problema de la dispersión por un potencial no local formulado como un problema de ecuaciones integrales ha sido estudiado por N. von der Heydt⁽⁴⁾ en el caso en que el potencial de interacción no tiene término coulombiano. También el problema de la dispersión por un potencial no local de corto alcance en presencia de interacción coulombiana ha sido estudiado por H. van Haeringen⁽⁵⁾ y sus colaboradores en el caso especial en el que el potencial de corto

alcance es separable y de rango uno. En este capítulo generalizaré algunos resultados de von der Heydt al caso más interesante en que el potencial tiene además de los términos de corto alcance locales y no locales un término coulombiano.

Aquí se expondrán algunos resultados básicos de la teoría de la dispersión por un potencial no local que servirán de fundamento para la derivación de los resultados nuevos y originales que se exponen en la segunda y tercera partes de esta tesis. En la derivación de los resultados de este capítulo he seguido el mismo método que N. von der Heydt quien a su vez se basa en los métodos de la teoría de las ecuaciones integrales tal como están expuestos en el libro de F. Smithies.⁽⁷⁾ Por esta razón no he creído que fuese necesario repetir aquí aquellas demostraciones que se encuentran claramente expuestas en los trabajos de estos autores y solo se expondrán en detalle los resultados que no se encuentran ahí o en un libro de texto.

1.2 LA ECUACION INTEGRAL

El problema de la dispersión no relativista de una partícula sin spin por un potencial que es la suma de un término no local y uno local que a distancias grandes se comporta como un potencial de Coulomb lleva, mediante la representación de la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas, a la ecuación radial siguiente:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - W_\ell - \frac{2\gamma k}{r} + k^2 \right) u_\ell(r) = 0 \quad (1)$$

Se ha supuesto que el operador W es invariante respecto de rotaciones y de la inversión del tiempo, y, en general se escribe como:

$$W_\ell u_\ell(r) = U_\ell(r)u_\ell(r) + \int_0^\infty ds V_\ell(r,s) u_\ell(s) \quad (2)$$

en esta expresión $U_\ell(r)$ es un potencial local real que decrece a grandes distancias más aprisa que $1/r$; $V(r,s)$ es un potencial real no local, simétrico en sus argumentos:

$$V_\ell(r,s) = V_\ell(s,r) \quad (3)$$

y

$$\frac{2\gamma k}{r} = \frac{ZZ'e^2}{r}$$

es el potencial de Coulomb.

Para construir la función de ondas radial $u_\ell(r)/r$ de la partícula, requerimos de soluciones de (1) que sean continuas en r y que satisfagan las condiciones a la frontera siguientes:

a) Soluciones de la dispersión

con

$$u_{\ell}(k, r) = F_{\ell}(k, r) + \phi_{\ell}(k, r)$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi_{\ell}(k, r) = 0$$

y

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial \phi_{\ell}}{\partial r} - i(k - \frac{\gamma}{r}) \phi_{\ell} \right] = 0 \quad (4)$$

$F_{\ell}(k)$ es la función de Coulomb regular en el origen .

b) Estados ligados $v_{\ell}(k, r)$ con

$$\begin{aligned} v_{\ell}(k, 0) &= 0 \\ \int_0^{\infty} dr |v_{\ell}(k, r)|^2 &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

La ecuación (1.1), con cada una de las condiciones a la frontera (1.4) y (1.5), se puede transformar en una ecuación integral con la ayuda de la función de Green del problema Coulombiano:

$$G_{0\ell}(k; r, r') = \frac{F_{\ell}(kr_{<}) W_{\ell}^{(+)}(kr_{>})}{k} e^{i\sigma_{\ell}(k)} \quad (6)$$

con

$$\sigma_{\ell} = \arg \Gamma(\ell + 1 + i\gamma) \quad (7)$$

en esta fórmula $W_{\ell}^{(+)}(kr)$ es la onda saliente de Coulomb.

Con la ayuda de $G_{0\ell}(k; r, r')$ obtenemos a partir de la ecuación (1.1), las ecuaciones integrales:

$$a) u_{\ell}(k, r) = F_{\ell}(kr) + \int_0^{\infty} ds K_{\ell}(k; r, s) u_{\ell}(k, s) \quad (8)$$

$$b) v_{\ell}(k, r) = \int_0^{\infty} ds K_{\ell}(k; r, s) v_{\ell}(k, s) \quad (9)$$

$$K_{\ell}(k; r, s) = L_{\ell}(k; r, s) + M_{\ell}(k; r, s)$$

$$L_{\underline{r}}(k; r, s) = G_{O_{\underline{r}}}^{(+)}(k; r, s) U(s)$$

$$N_{\underline{r}}(k; r, s) = \int_0^{\infty} G_{O_{\underline{r}}}^{(+)}(k; r, t) V_{\underline{r}}(t, s) dt$$

A partir de $u_{\underline{r}}(k, r)$ se puede calcular la matriz S .

La onda saliente de Coulomb se expresa como:

$$W_{\underline{r}}^{(+)}(kr) = (-1)^{\ell} e^{\frac{1}{2}\pi\alpha} W_{-i\alpha, \ell + \frac{1}{2}}(-2ikr)$$

en donde $W_{\lambda, \nu}(z)$ es la función de Whittaker⁽⁹⁾ irregular y α y γ son

$$\alpha = \frac{M}{2\hbar^2} \quad \gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2 M \hbar^{-2}}{k}$$

$W_{\underline{r}}^{(+)}(kr)$ satisface la condición a la frontera

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial W_{\underline{r}}^{(+)}(kr)}{\partial r} - i(k - \frac{\gamma}{r}) W_{\underline{r}}^{(+)}(kr) \right] = 0$$

También es posible expresar a $F_{\underline{r}}(kr)$ en términos de las funciones de Whittaker^(9,34) regulares en el origen $M_{\lambda, \nu}(z)$ como

$$F_{\underline{r}}(kr) = \frac{(-1)^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} C_{\underline{r}}(k) M_{i\gamma, \ell + \frac{1}{2}}(2ikr)$$

con

$$C_{\underline{r}}(k) = \frac{2^{\ell} e^{-\frac{1}{2}\pi\gamma} |\Gamma(\ell+1+i\gamma)|}{\Gamma(2\ell+2)}$$

$M_{\lambda, \nu}(z)$ y $W_{\lambda, \nu}(z)$ son funciones multiformes de k con un punto ramal en $k=0$ y una singularidad esencial en $k=\infty$. $M_{\lambda, \nu}(z)$ es, como función de r , regular en el origen mientras que $W_{\lambda, \nu}(z)$ es singular como función de r en ese mismo punto.^(9,34)

Si hacemos una transformación de inversión en el tiempo y de conjugación de la carga $F_{\underline{r}}(kr)$, $W_{\underline{r}}^{(+)}(kr)$ y $e^{i\sigma_{\underline{r}}(k)}$ se convierte en

$$F_{\underline{r}}^{*}(-k^{*}r) = (-1)^{\ell+1} e^{\pi\gamma} F_{\underline{r}}(k, r)$$

$$W_{\lambda}^{*(+)}(-k^*, r) = (-1)^{\lambda} e^{-\pi \gamma W_{\lambda}^{*(+)}(k, r)}$$

$$[e^{i\sigma_{\lambda}(-k^*)}]^* = e^{i\sigma_{\lambda}(k)}$$

Como funciones de k , tanto $C_{\lambda}(k)$ como $e^{i\sigma_{\lambda}(k)}$ tienen singularidades para aquellos valores de k correspondientes a estados ligados del potencial de Coulomb. (28)

La función de Green de Coulomb $G_{O_{\lambda}}^{(+)}(k; r, s)$ tiene un corte en el plano k debido a la multiformidad de las funciones de Whittaker $M_{\lambda, \mu}(z)$, $W_{\lambda, \mu}(z)$. Este corte, por convención, se extiende desde $k=0$ hasta $k=-\infty$ sobre el eje real negativo. Consideradas como funciones de k , $M_{\lambda, \mu}(kr)$ y $W_{\lambda, \mu}(kr)$ no tienen ninguna otra singularidad en el plano complejo k . $G_{O_{\lambda}}^{(+)}(k; r, s)$ tiene además polos simples sobre el eje imaginario positivo cuyo origen está en los estados ligados del potencial de Coulomb y aparecen explícitamente en $C_{\lambda}(k)$ y en $e^{i\sigma_{\lambda}(k)}$. El punto $k=0$ es un punto singular esencial de $G_{O_{\lambda}}^{(+)}(k; r, s)$. En cualquier otra región del plano k , $G_{O_{\lambda}}(k; r, s)$ es una función entera.

$G_{O_{\lambda}}^{(+)}(k; r, s)$ tiene las propiedades de simetría siguientes:

$$G_{O_{\lambda}}^{(+)}(-k; r, s) = G_{O_{\lambda}}(k; r, s) + \frac{2i}{k} F_{\lambda}(kr) F_{\lambda}(ks) \quad (10a)$$

$$G_{O_{\lambda}}^{*}(-k^*; r, s) = G_{O_{\lambda}}(k; r, s) = G_{O_{\lambda}}(k; s, r) \quad (10b)$$

y para $\text{Im}k > 0$, la representación espectral de $G_{O_{\lambda}}(k; r, s)$ es:

$$G_{O_{\lambda}}(k; r, s) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{O_{\lambda}n}(r) \frac{1}{2k_n(k - ik_n)} v_{O_{\lambda}n}(s) +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{0+\delta}^{\infty} dq \frac{F_{\lambda}(qr) F_{\lambda}(qs)}{k^2 + ic - q^2} \quad (11)$$

en donde $v_{onL}(r)$ son los estados ligados del potencial de Coulomb cuya expresión es:

$$v_{onL}(r) = \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^2}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l e^{-\frac{2r}{na}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)$$

en esta expresión $L_p^q(x)$ es el polinomio de Laguerre de orden p asociado de orden q . y

$$a = \frac{h^2}{2Z^2 m e^2} = \frac{1}{Z^2} a_0$$

La demostración de las propiedades (10a) y (10b) se sigue de inmediato de la representación integral de $G_0^{(+)}$ que se encuentra en R.G. Newton (3).

1.3 CONDICIONES SOBRE EL POTENCIAL

Es necesario hacer algunas suposiciones sobre el potencial que garanticen que las ecuaciones integrales tengan solución.

Queremos llevar las ecuaciones integrales de Lippmann-Schwinger (8) y (9) a otras ecuaciones integrales que se puedan resolver con el método de Hilbert. Esto se logra mediante una función $H_\alpha(r)$, tal que $H_\alpha(r)K_2(k; r, s)H_\alpha^{-1}(s)$ sea un núcleo de Hilbert-Schmidt en L^2 con $|Imk| \leq \alpha$ y con $\alpha \geq 0$. Para el análisis de las resonancias α debe ser positivo.

Solo admitiremos potenciales con las siguientes propiedades⁽⁴⁾:

Sea $H_\alpha(r) = e^{-\alpha r} r^{-1+\epsilon_0} (1+r)^{-\epsilon_0-\epsilon_\infty}$

definido con los tres números reales

$$\alpha \geq 0, \epsilon_0 > 0, \epsilon_\infty > 0$$

Entonces, el potencial no local debe cumplir la condición:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty dr ds H_\alpha^{-2}(r) |V_2(r, s)|^2 H_\alpha^{-2}(s) = c_2 < \infty \quad (12a)$$

El potencial local $U(r)$ debe ser L^1 integrable en cada intervalo $[a, b]$ con $0 < a < b < \infty$, y debe tener la conducta asintótica

$$\begin{aligned} U(r) & \underset{r \rightarrow 0}{\sim} O(r^{-2+n_0}) \\ U(r) & \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-2\alpha r} r^{-2-n_\infty} \end{aligned} \quad (12b)$$

con

$$n_0 > \epsilon_0 \text{ y } n_\infty > \epsilon_\infty$$

Jost y Pais⁽²⁾ han demostrado que la ecuación integral (8) con un potencial local, es soluble con el método de Hilbert para k real bajo la suposición (12b) con $\alpha=0$. Sin embargo, en el formalismo de Jost, para que $S_2(k)$ se pueda definir para $k=0$, $U(r)$ debe decrecer más

rápidamente que r^{-3} para $r \rightarrow \infty$ (6). En lo que sigue demostraremos que $S_2(k)$ también se puede definir en $k=0$ cuando la validez de la suposición (12b) se extiende a $l=0$. Además, en lugar del formalismo de Jost, que para potenciales no locales con $l \neq 0$ no es aplicable, aprovecharemos la teoría del determinante de Fredholm que es mucho más clara.

En consecuencia, las suposiciones (12) implican que, para $k \geq -\alpha$

$$\hat{V}_2(r,s) = H_\alpha^{-1}(r) V_2(r,s) H_\alpha^{-1}(s) \quad (13)$$

es un núcleo de Hilbert Schmidt en L^1 .

Las mismas condiciones (12) implican que para $\text{Im} k > -\alpha$ los núcleos

$$\hat{L}_2(k;r,s) \equiv H_\alpha(r) G_{O_2}(k;r,s) U(s) H_\alpha^{-1}(s) \quad (14)$$

$$\hat{G}_{O_2}(k;r,s) \equiv H_\alpha(r) G_{O_2}(k;r,s) H_\alpha(s) \quad (15)$$

y por consiguiente también:

$$\hat{N}_2(k;r,s) \equiv [\hat{G}_{O_2}^+(k) \hat{V}_2](r,s) \quad (16)$$

$$\hat{K}_2(k;r,s) \equiv H_\alpha(r) K_2(k;r,s) H_\alpha^{-1}(s) \quad (17)$$

$$= \hat{L}_2(k;r,s) + \hat{N}_2(k;r,s) \quad (18)$$

son núcleos de Hilbert Schmidt en L^2 .

Los últimos cuatro núcleos son, como funciones de k , holomorfos en el semiplano $\text{Im} k > -\alpha$ y continuos para $\text{Im} k \geq -\alpha$ salvo en el semi eje $\text{Re} k \leq 0$, $\text{Im} k = 0$, en donde tienen un corte que se extiende de $k=0$ a $k=-\infty$.

De aquí en adelante se considerarán solo funciones de ondas radiales

$u_2(kr)$ tales que $\hat{u}_2 = H_\alpha u_2$ sea cuadráticamente integrable, esto es, solo funciones $u_2(r)$ tales que la función reducida correspondiente $\hat{u} = H_\alpha u$ esté en L^2 :

$$G_\alpha \equiv \{u_2(r) | H_\alpha u(r) \in L^2(0, \infty)\}$$

En el espacio G_α están contenidas las funciones físicamente importantes.

- a) Para $|Imk| \leq \alpha$ y $r > 0$, las soluciones $u_2(k, r)$ de la ecuación integral (8) que están en G_α son precisamente las soluciones del problema de condiciones a la frontera (1), (2) que están en G_α ; ϕ_2 satisface la desigualdad.

$$|\phi_2(k, r)| \leq \text{constante} \sqrt{\frac{r}{1+\alpha r}} e^{-Imkr} \quad (19a)$$

$$(|Imk| \leq \alpha)$$

- b) Para $Imk \geq 0$, $k \neq 0$, las soluciones $v_2(k, r)$ de la ecuación integral homogénea (9) son precisamente las soluciones del problema de autovalores.

Para $Imk \geq -\alpha$, las soluciones de (9) contenidas en G_α satisfacen una desigualdad $|v_2(k, r)| \leq \text{constante} \sqrt{\frac{r}{1+\alpha r}} e^{-ur}$

$$\text{con } u = \min(\alpha, Imk) \quad (19b)$$

Encontrar la solución de las ecuaciones integrales (8) y (9) en G_α es equivalente a encontrar la solución de la ecuación integral

$$c) \quad \hat{u}_2(k, r) = \hat{F}_2(k, r) + \int_0^\infty ds \hat{K}_2(k; r, s) \hat{u}_2(k, s) \quad (20)$$

con

$$\hat{u}_2(k,r) \equiv H_\alpha(r) u_2(k,r)$$

y

$$\hat{F}_2(k,r) \equiv H_\alpha(r) F_2(k,r)$$

$$d) \quad \hat{v}_2(k,r) = \int ds \hat{K}_2(k;r,s) \hat{v}_2(k,s) \quad (21)$$

Como consecuencia de que los núcleos $\hat{V}_2(r,s)$, $\hat{L}(k;r,s)$, $\hat{G}_{02}(k;r,s)$, $\hat{N}_2(k;r,s)$ y $\hat{K}_2(k;r,s)$ con núcleos de Hilbert-Schmidt cuando $|Imk| \leq \alpha$, la ecuación (20) es soluble para $Imk \geq -\alpha$ y (21) es soluble para $Imk \geq -\alpha$ con ayuda de la teoría de Smithies⁽⁷⁾ de las ecuaciones integrales con núcleos L^2 en el espacio de las funciones L^2 .

1.4 EL DETERMINANTE DE FREDHOLM

Mostraremos ahora que para $\text{Im} k \geq -\alpha$, la traza del núcleo $\hat{K}_2(k)$ existe. Por definición

$$\begin{aligned} \text{tr} \hat{K}_2 &= \int_0^\infty ds \hat{K}_2(k; s, s) = \\ &= \int_0^\infty ds H_\alpha(s) G_{02}(k; s, s) U(s) H_\alpha^{-1}(s) + \\ &+ \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt H_\alpha(s) G_{02}(k; s, t) H_\alpha(t) H_\alpha^{-1}(t) V_2(t, s) H_\alpha^{-1}(s) \end{aligned} \quad (22)$$

Será necesario demostrar únicamente que la traza de \hat{G}_{02} existe, ya que las condiciones impuestas en los potenciales garantizan que la traza de $\hat{U}_2 + \hat{V}_2$ existe. Que esto es así se ve del siguiente argumento:

I.- Si \hat{G}_{02} y $\hat{U}_2 + \hat{V}_2$ son operadores del espacio de Hilbert G_α , es decir que:

$$[\hat{G}_{02}(\hat{U}_2 + \hat{V}_2)] \psi = \hat{G}_{02}[(\hat{U}_2 + \hat{V}_2)\psi] \in G_\alpha$$

para cada vector

$$\psi \in G_\alpha$$

II.- Entonces, la norma de los operadores satisface la relación siguiente:

$$\|\hat{G}_{02}(\hat{U}_2 + \hat{V}_2)\| \leq \|\hat{G}_{02}\| \cdot \|(\hat{U}_2 + \hat{V}_2)\|$$

III.- Si se define la norma como:

$$\|A\| = \sqrt{\text{tr } A^+ A}$$

entonces basta con que $\text{tr} \hat{G}_{02}$ exista para que $\text{tr} \hat{K}_2^{(+)}$ exista.

La integral que nos interesa es:

$$\int_0^{\infty} \hat{G}_{O_2}(k; s, s) ds = \int_0^{\infty} H_{\alpha}(s) G_{O_2}(k; s, s) H_{\alpha}(s) ds \quad (23)$$

$$= - \int_0^{\infty} \frac{e^{i\sigma_2 s}}{k} F_2(k; s) W_2^{(+)}(k; s) [e^{2\alpha s} s^{-2+2\epsilon_0} (1+s)^{-2\epsilon_0-2\epsilon_{\infty}}] ds$$

$$= \int_0^r \hat{G}_{O_2}(k; s, s) ds + \int_r^{\infty} \hat{G}_{O_2}(k; s, s) ds \equiv I_1 + I_2 \quad (23')$$

Como el integrando es una función continua y acotada para todos los valores finitos de sus argumentos, bastará entonces con analizar el comportamiento del integrando para $r \rightarrow 0$ y para $r \rightarrow \infty$.

Para $r \rightarrow 0$ se tiene que:

$$F_2(\rho) \sim \rho^{\ell+1} \sim r^{\ell+1}$$

$$W_2^{(+)}(\rho) \sim \rho^{-\ell} \sim r^{-\ell}$$

$$H_{\alpha}^2(r) \sim r^{-2+2\epsilon_0}$$

de manera que para $r \ll 1$, el integrando de I_1 se comporta como:

$$\hat{G}_{O_2}(k; s, s) \sim s^{2\epsilon_0-1} \quad (24)$$

y como $\epsilon_0 > 0$

$$I_1 \sim \int_0^r ds s^{2\epsilon_0-1} = \frac{r^{2\epsilon_0}}{2\epsilon_0} \text{ con } \epsilon_0 > 0$$

que es finito.

En el caso de que $r \rightarrow \infty$

$$F_2 \sim \text{sen}(\rho - \gamma \ell n 2\rho - \frac{1}{2} \ell \pi + \sigma_2)$$

$$W_2^{+} \sim \exp[i(\rho - \gamma \ell n 2\rho - \frac{1}{2} \ell \pi)]$$

$$H_{\alpha}^2(r) \sim e^{-2\alpha r} r^{-2-2\epsilon_{\infty}}$$

$$k = a + ib; \quad \gamma = \frac{r}{k}$$

con lo cual, cuando $r \rightarrow \infty$.

$$\hat{G}_{02}(k, r, r) \sim \frac{e^{-1\sigma_2}}{2^1} \left[e^{2i[(a+ib)r - \frac{\Gamma}{k}r - (a-ib)2nr - \frac{\Gamma}{k}r] + 2(a+ib)n} \right. \\ \left. \times e^{2i(-b2\pi + \sigma_2) - 1} \times e^{-2\alpha r} r^{-2-2c_\infty} \right] \quad (25)$$

Sólo el primer término amerita atención.

La parte relevante de este término, dependiente de r , resulta ser

$$e^{2i[r - \frac{\Gamma nr}{k}] + a} e^{-2b[r + \frac{\Gamma nr}{k}]} e^{-2\alpha r} r^{-2-2c_\infty}$$

Si tomamos el valor absoluto de la función nos queda:

$$e^{-2r(\alpha + |b|)} e^{2nr(\pm \frac{|b|\Gamma}{k} - 1 - c_\infty)} \equiv e^{-cr} e^{Xnr}$$

con

$$c = 2(\alpha + |b|); X = 2(\pm \frac{|b|\Gamma}{k} - 1 - c_\infty)$$

Es evidente que si $c > 0$, esto es, que si $\alpha > |b|$ entonces:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{G}_{02}(k; r, r) = 0; \alpha > |b| \quad (25')$$

como el producto de una potencia por una exponencial decreciente. Podemos también encontrar expresiones exactas para la integral (9)

$$\int_0^\infty e^{-cs} s^x ds = \begin{cases} c^{-(x+1)} \Gamma(x+1, cr); & 1+x > 0 \\ c^{x-1} \left(\frac{r}{c}\right)^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{r}{2c}} W_{-\frac{x}{2}, \frac{(1-x)}{2}}\left(\frac{r}{c}\right); & x < 0 \end{cases}$$

En vista de que el integrando de (23) es una función acotada en todo el intervalo de integración, que va a cero en el origen como una

potencia del argumento y que va a cero en infinito como una exponencial decreciente, la integral en (23) existe⁽¹⁰⁾.

Con esto hemos demostrado que la traza del kernel $\tilde{K}_\alpha(k)$ existe cuando $\text{Im}k > \alpha$, además, por la propiedad de invariancia de la traza ante transformaciones unitarias se tiene que:

$$\text{tr}K_\alpha(k) - \text{tr}\tilde{K}_\alpha(k) = \int \bar{d}s K_\alpha(k; s, s)$$

cuando $\text{Im}k > \alpha$ y a partir de aquí, como la condición para que el determinante de Fredholm exista es que la traza de K_α exista, y ésta existe, así pues, también el determinante de Fredholm existe.

$$\Delta_\alpha^{(+)}(g, k) = \det [1 - g \tilde{K}_\alpha(k)] \quad (26)$$

Para cada valor complejo de g , $\Delta_\alpha^{(+)}(g, k)$, como función de k , es analítico en el semiplano $\text{Im}k > -\alpha$ y continuo para $\text{Im}k \geq -\alpha$ salvo en los puntos donde $G_{0\alpha}$ tiene polos y un corte. De donde se sigue que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_\alpha^{(+)}(g, k) = 1, \quad k \in \mathbb{R}^+ \quad (27)$$

De la simetría respecto de las operaciones de inversión del tiempo y conjugación de carga se tiene que:

$$\Delta_\alpha^{(+)*}(g, k) = \Delta_\alpha^{(+)}(g, -k^*) \quad \text{para } g \text{ real} \quad (3,4) \quad (28)$$

Cuando α es finita, $\Delta_\alpha^{(+)}(k)$ sólo puede tener un número finito de ceros en la franja $0 > \text{Im}k > -\alpha$. Estos ceros están situados simétricamente respecto del eje imaginario. En el semiplano $\text{Im}k > 0$, los ceros de $\Delta_\alpha^{(+)}(g, k)$ pueden estar en el eje imaginario k .

A continuación, se enunciarán algunos resultados sobre núcleos en L^1

que se usarán más adelante⁽⁷⁾.

a) La traza de un núcleo separable

$$A(r,s) = a(r)b(s) \quad (29)$$

con $a, b \in L^1(0, \infty)$ existe y es igual a:

$$\int_0^{\infty} a(r)b(r)dr, \text{ su determinante de Fredholm es:}$$

$$\det[1-A] = 1 - \text{tr}A = 1 - \int_0^{\infty} a(s)b(s)ds \quad (30)$$

b) Si A, B y C son núcleos en L^1 tales que sus trazas existen y satisfacen la ecuación integral

$$C = A + B - AB \quad (31)$$

entonces

$$\det[1-C] = \det[1-A] \det[1-B] \quad (32)$$

c) Si se define un núcleo en L^1 mediante "la identidad del resolvente"

$$\hat{R}_g(g,k) - \hat{K}_g(k) = g \hat{K}_g(k) \hat{R}_g(g,k) = g \hat{R}_g(g,k) \hat{K}_g(k) \quad (33)$$

para $\text{Im}k \geq -\alpha$, el núcleo:

$$\hat{D}_g(g,k; r,s) = \Delta_g(g,k) \hat{R}_g(g,k; r,s) \quad (34)$$

es una función entera de g ⁽⁴⁾.

El núcleo $\hat{D}_g(g,k)$ es además una función meromorfa de k en el semiplano $\text{Im}k > -\alpha$ y continuo para $\text{Im}k \geq -\alpha$ salvo en el eje real negativo, en donde tiene un corte.

Cuando g es real, se cumple también que

$$\hat{D}_2^*(g, k) = \hat{D}_2(g, -k^*) \quad (35)$$

El núcleo $\hat{R}_2(g, k; r, s)$ es, como función de R meromorfo en el semiplano $\text{Im}k < -\alpha$ salvo en el eje real negativo y tiene polos precisamente en los ceros de $\Delta_2(g, k)$. En el semiplano $\text{Im}k \geq 0$, $\hat{R}_2(k)$ puede tener polos solamente en los ejes imaginarios positivo o real. Estos polos son simples salvo en $k=0$, donde el polo puede ser doble⁽³⁾.

Las consecuencias de los resultados anteriores son las siguientes:

Los núcleos

$$D_2(g, k; r, s) = H_\alpha^{-1}(r) \hat{D}_2(g, k; r, s) H_\alpha(s) \quad (36)$$

y

$$R_2(g, k; r, s) = \frac{D_2(g, k; r, s)}{\Delta_2(g, k)} \quad (37)$$

tienen, como función de k , las mismas propiedades analíticas que los núcleos $\hat{D}_2(g, k)$ y $\hat{R}_2(g, k)$, y de (33) se sigue que

$$R_2(g, k) - K_2(k) = gK_2(k)R_2(g, k) = gR_2(g, k)K_2(k)$$

En el enunciado siguiente se resumen los bien conocidos teoremas de Fredholm sobre las soluciones de las ecuaciones integrales (20) y (21) respectivamente, (8) y (9), así como las afirmaciones que se siguen de las propiedades de $K_2(k)$ ^(3,7).

Alternativa de Fredholm:

I.- Cuando $\Delta_2(g, k) \neq 0$, la ecuación integral inhomogénea (8) tiene para $|\text{Im}k| \leq \alpha$, precisamente una solución $u_2(k, r)$ en G_α

Esta solución es:

$$u_{\ell}(k, r) = F_{\ell}(k, r) + \frac{g}{\Delta_{\ell}(g, k)} \int_0^{\infty} D_{\ell}(g, k; r, s) F_{\ell}(k, s) ds \quad (38)$$

de donde se sigue que (3)

$$u_{\ell}^{*}(k, r) = (-1)^{\ell+1} u_{\ell}(-k^{*}, r) \quad (39)$$

II.- Cuando $\Delta_{\ell}(g, k) \neq 0$, para $\text{Im} k \geq -\alpha$, la ecuación integral homogénea (9) tiene cuando menos una solución en G_{α} .

Para k fija en el semiplano $\text{Im} k \geq -\alpha$, el orden n del cero g_0 de $\Delta_{\ell}(g, k)$ (multiplicidad algebraica) y el número m de soluciones linealmente independientes satisfacen la desigualdad siguiente:

$$1 \leq m \leq \underline{n}, m \leq g_0^{\alpha} \|\hat{K}_{\ell}(k)\|^{\alpha} \quad (40)$$

Para $\text{Im} k \geq 0$, $k \neq 0$, las soluciones $v_{\ell}(k, r)$ de (9) contenidas en G_{α} son normalizables, este resultado es válido también cuando $\alpha=0$ (4).

Cuando la ecuación integral homogénea (9) tiene una solución en G_{α} para $k=0$, ésta no es necesariamente normalizable (3,4).

La normalizabilidad para $\ell \geq 1$ se mantiene sin embargo bajo las suposiciones (12) aumentadas con las condiciones

$$\alpha > 0 \quad (41)$$

$$c_{\alpha} > 1$$

Para $\ell=0$, $k=0$, una solución $v_0(0, r)$ de la ecuación integral homogénea (9) en G_{α} es normalizable cuando además de (41) se cumple que (4)

$$\int_0^{\infty} dr r \{ U(r) v_0(0, r) + \int_0^{\infty} ds v_0(r, s) v_0(0, s) \} = 0 \quad (42)$$

III.- En el caso de que $\Delta_2(g, k_0) \neq 0$, con k real o imaginaria, la ecuación integral inhomogénea (20) puede tener a lo más soluciones en G_α .

Cuando k_0 es real o imaginaria y $\text{Im} k_0 > -\alpha$, la solución $u_2(k, r)$ de la ecuación inhomogénea (8) se puede continuar analíticamente a k_0 . Si todas las eigenfunciones $v_2(k_0, r)$ de $gK(k_0, r)$ están contenidas en G_α , la relación de ortogonalidad

$$\int_G \overline{dr} u_2(k_0, r) \{U(r)v_2(k_0, r) + \int_G \overline{ds} V(r, s)v_2(k_0, s)\} = 0 \quad (43)$$

se cumple, que para k_0 real siempre es el caso.

Cada solución $v_2(k_0, r)$ de la ecuación integral homogénea (9) en G_α , para la cual esta relación se cumple es normalizable en el caso $k_0 \neq 0$ y es también eigenfunción del núcleo $gK_2(-k_0)$.

Con estos antecedentes, a partir de la igualdad del determinante de Fredholm y de la función de Jost del problema⁽³¹⁾, se deriva una fórmula para $S_2(g, k)$.

Bajo las suposiciones (12) y para $|\text{Im} k| < \alpha$ se cumple la relación

$$S_2^{(+)}(g, k) = \frac{\Delta_2^{(-)}(g, k)}{\Delta_2^{(+)}(g, k)} \quad (44)$$

A partir de aquí y de los resultados anteriores se sigue que, $S_2^{(+)}(g, k)$ como función de k tiene las siguientes propiedades:

- i) Es meromorfa en el semiplano $|\text{Im} k| < \alpha$ con $\alpha > 0$ y bajo las suposiciones (12).
- ii) Es continua en el eje k real cuando $k > 0$ y bajo las suposiciones (12); además se cumple que
- iii) Los polos de $S_2(g, k)$ están en el semiplano de $\text{Im} k < -\alpha$; cuando

$\text{Im}k > 0$. éstos se encuentran en el eje imaginario positivo; cuando $-\alpha < \text{Im}k \leq 0$, los polos de $S_z(g, k)$ están situados simétricamente respecto del eje imaginario negativo. Los polos de $S_z(g, k)$ están precisamente en donde están los ceros de $\Delta_z^{(+)}(g, k)$. En el eje imaginario entre 0 e i - estos polos solo pueden ser simples.

iv) $S_z(g, k)S_z(g, -k) = 1$

v) $S_z^*(g, k) = S_z(g, -k^*)$ para g real

vi) $\lim_{k \rightarrow \infty} S_z(g, k) = 1$

vii) $u_z(k, r) = (-1)^{z+1} S_z(g, k) u_z(-k, r)$

viii) Si $\Delta_z(g, k)$ tiene un cero de orden n en $k=0$ entonces $S_z(g, 0) = (-1)^n$

ix) En el eje k real se cumple que $|S_z(g, k)| = 1$

1.5 EL RESOLVENTE

La función de Green completa o resolvente del operador radial en (1) se define mediante la ecuación:

$$(\Omega_2 + k^2)G_2^{(+)}(k) = \delta(r-r') \quad (45)$$

con

$$\Omega_2 \equiv \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} - \frac{2\gamma k}{r} - g_2 \quad (46)$$

$$\bar{\Omega}_2 \equiv \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} - \frac{2\gamma k}{r}$$

y con las condiciones a la frontera apropiadas. Esta función de Green se puede expresar fácilmente con ayuda del resolvente R_2 de la ecuación integral (8), que se definió anteriormente, de la siguiente manera:

$$G_2^{(+)}(k; r, s) = G_{O_2}^{(+)}(k; r, s) + g \int_0^{\infty} \bar{R}_2(g, k; r, t) G_{O_2}^{(+)}(k; t, s) dt \quad (47)$$

A partir de la identidad del resolvente (33) para R_2 se sigue que:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \bar{R}_2(g, k; r, t) G_{O_2}^{(+)}(k; t, s) dt &= \int_0^{\infty} \bar{K}_2^{(+)}(k; r, t) + g \int_0^{\infty} \bar{K}_2^{(+)}(k; r, x) \\ &\quad R_2(g, k; x, t) dx \quad dt G_{O_2}^{(+)}(t, s) \\ &= \int_0^{\infty} \bar{K}_2^{(+)}(k; r, t) (G_{O_2}^{(+)}(k; t, s) + g \int_0^{\infty} R_2(k; t, x) G_{O_2}^{(+)}(k; x, s) dx) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \bar{K}_2^{(+)}(k; r, t) G_2^{(+)}(k; t, s) dt \end{aligned}$$

Así que G_2 satisface la ecuación del resolvente para los operadores $\bar{\Omega}_2$ y Ω_2

$$G_2^{(+)}(k; r, s) = G_{O_2}^{(+)}(k; r, s) + g \int_0^{\infty} \bar{K}_2^{(+)}(g, k; r, t) G_2^{(+)}(k; t, s) dt \quad (48)$$

$$G_2^{(+)}(k; r, s) = G_{O_2}^{(+)}(k; r, s) + g \int_0^{\infty} \bar{\Omega}_2^{(+)}(k; r, t) \int_0^{\infty} W_2(k; x) G_2^{(+)}(k; x, s) dx dt$$

con

$$W_2(k; x) = \bar{\Omega}_2 - \Omega_2$$

Ahora solo es necesario aplicar $\hat{n}_{0z} + k^2$ a $G_{0z}^{(+)}$ por la izquierda y aprovechar que

$$[\hat{n}_{0z} + k^2] G_{0z}^{(+)}(k; r, r') = \delta(r - r')$$

para obtener (45). Inversamente, se puede obtener R_z a partir de G_z con ayuda de (34)

$$R_z(r) = \int G_z^{(+)}(k; r, s) W_z(k; s) ds \quad (49)$$

La dependencia del núcleo integral del número de ondas k y de la constante de acoplamiento g que proviene de (47) se hará notar aquí y en lo que sigue solamente cuando sea importante que se muestre. Las siguientes propiedades de $G_z^{(+)}(k; r, s)$ se pueden demostrar con la ayuda de los resultados ya obtenidos.

1.- $\hat{G}_z^{(+)}(k; r, s) \equiv H_\alpha(r) G_z^{(+)}(k; r, s) H_\alpha(s)$

es un núcleo L^1 cuando $\text{Im}k > -\alpha$ y $\Delta_z^{(+)}(k) \neq 0$

2.- $\hat{G}_z^{(+)}(k; r, s)$, como función de k , es meromorfa en el semiplano $\text{Im}k \geq \alpha$ excluyendo al semieje real negativo $R_0, k \leq 0$ y tiene un número infinito de polos en el semieje imaginario positivo y un número finito de polos en la banda $0 > \text{Im}k > -\alpha$. Estos polos coinciden en posición y orden con los de $R_z(k)$ y en posición con los ceros de $\Delta_z^{(+)}(k)$. En el semiplano $\text{Im}k > -\alpha$ los polos sólo pueden estar en el eje imaginario positivo o en el eje real y son simples para $k \neq 0$ (3).

3.- $G_z^{(+)}(k)$ tiene las propiedades de simetría.

$$G_z^{(+)*}(-k^*; r, s) = G_z^{(+)}(k; s, r)$$

(50)

$$G_z^{(+)}(-k; r, s) = G_z(k; s, r)$$

y para $\text{Im}k > -\alpha$ excluyendo el corte $\text{Re}k < 0$. Para $\text{Im}k = 0$ se tiene que

$$G_l^{(+)}(-k; r, s) = G_l^{(+)}(k; s, r) + (-1)^{l+1} \frac{2i}{k} u_l(kr) u_l(-ks) \quad (51)$$

$G_l^{(+)}$ satisface las condiciones a la frontera

$$G_l^{(+)}(k; r, s) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^l$$

y

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial}{\partial r} G_l^{(+)}(k; r, s) - i \left(k - \frac{l}{r} \right) G_l^{(+)}(k; r, s) \right] = 0$$

La representación (47) de una función de Green completa de la ecuación de Schrödinger radial (1) y sus propiedades enunciadas en los resultados anteriores se puede utilizar para demostrar la clausura o completitud⁽³⁰⁾ de las soluciones (2) y (3) de (1) y también para obtener la representación espectral de la función de Green⁽²⁹⁾

$$G_l(k; r, s) = \frac{2}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} \frac{u_l(q, r) u_l^*(q, s)}{k^2 + 1 - q^2 - i\delta} q dq + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k_{\nu}^2} \left(\sum_{j=1}^{m_{\nu}} v_{l\nu j}(r) v_{l\nu j}(s) \right) \quad (52)$$

con $\text{Im} k > 0$

Las soluciones $v_{l\nu j}(r)$ de (3) se escogen reales.⁽⁴⁾

Bajo las suposiciones (12), con $\alpha \geq 0$ el conjunto de las soluciones de la dispersión $u_l(k, r)$, ecuación (2) y para todas las $k > 0$ reales, y las eigenfunciones $v_l v_{l1}(r) \dots v_{l m_l}(r)$, escogidas reales; que corresponden a los eigenvalores $k_{l\nu}^2$ de la ecuación de ondas radiales (1), forman un sistema ortonormal completo en el espacio $L^2(0, \infty)$ (30). Esto significa que:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq u_l(q, r) \int_0^\infty u_l^*(q, s) f(s) ds + \sum_{\nu=0}^{m_l} \int_{j=1}^{m_{l\nu}} v_{l\nu j}(r) \int_0^\infty ds v_{l\nu j}(s) f(s) = f(r) \quad (53)$$

para todas las $f(r) \in L^2(0, \infty)$, todas las $m_{l\nu}$ son finitas.

Se cumple la relación de ortogonalidad

$$\int_0^\infty v_{l\nu j}(r) v_{l\mu l}(r) dr = \delta_{\nu\mu} \delta_{jl} \quad (54a)$$

y

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty u_l^*(k_1, r) u_l(k_2, r) dr = \delta(k_1 - k_2) \quad (54b)$$

para todas las k_1 y k_2 reales.

Como resultado de la cerradura de las soluciones físicas del operador de ondas radiales y de la clausura de los armónicos esféricos se sigue la clausura de las soluciones esféricas de la ecuación de Schrödinger en R^3 , la que bajo suposiciones parecidas ha sido fácilmente derivada (3). Los métodos de la teoría de las funciones utilizadas en (4) aparentemente han sido usados hasta ahora sólo en el caso de un potencial local y de un potencial no local sin interacción de Coulomb. La aplicabilidad en el caso de un potencial no local en presencia de una interacción Coulombiana se vuelve esencial para la construcción de la función de Green completa y para el conocimiento de las propiedades

del núcleo resolvente $R(k)$ en este último caso.

A partir de las propiedades analíticas de la función de Green como función de k y de su representación espectral se aclara completamente la conducta de la misma $G_L(k)$ por lo menos en el semiplano superior de k excluyendo al eje real. Con ayuda de las ecuaciones (5), (6) y (51) se logra entonces hacer también una afirmación sobre la presencia posible de polos de $G_L(k)$ en la franja $0 > \text{Im}k > -\alpha$.

Además, por razones de simplicidad, nos restringiremos al estudio de los polos en los cuadrantes abiertos tercero y cuarto; esto es a los llamados polos resonantes.

Consideraremos ahora el desarrollo de Laurent de la función de Green alrededor de un polo.

Enunciaremos el resultado sin la demostración que se puede obtener de Smithies (7), capítulo III y Marsden (10), capítulo III, ver también von der Heydt (4).

Sea k_0 con $\text{Re}k_0 \neq 0$ y $0 > \text{Im}k_0 > -\alpha$ un cero de orden n de $\Delta_L^{(+)}(k)$

i) Entonces $G_L^{(+)}(k)$, $|u_L(k)\rangle$ y $S_L(k)$ como funciones de k tiene un polo de orden n en k_0 .

ii) $|u_L(k)\rangle$ se puede desarrollar en serie de Laurent en k_0

$$|u_L\rangle = \sum_{\nu=-n}^{\infty} |a_{\nu}\rangle (k-k_0)^{\nu} \quad (55)$$

Entonces, los coeficientes de las potencias negativas en la serie de Laurent

$$G_L(k) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} B_{\nu}(k-k_0)^{\nu} \quad (56)$$

se pueden expresar mediante las funciones

$$|\phi_{-n}\rangle, \dots, |\phi_{-1}\rangle \quad (57)$$

$$B_{-n+m} = \sqrt{\sum_{\nu=0}^m} B_{m-\nu} \sum_{\nu=0}^m u_{\nu} |\phi_{-n+\nu}\rangle \langle \phi_{-n+\nu-m}|; \quad (58)$$

$$m=0,1,\dots,n-1$$

además $B_{-n} = B_0 |\phi_{-n}\rangle \langle \phi_{-n}|$ (59)

Cuando el polo en k_0 es simple, $G_z(k)$ se reduce a

$$G_z(k) = \frac{B_z}{k-k_\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (k-k_0)^\nu = \frac{R_{zn}}{k-k_n} + F_n \quad (60)$$

con

$$B_z = R_{zn}; F_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (k-k_0)^\nu; k_0 = k_n \quad (61)$$

iii) Las funciones $|\phi_{-n+m}\rangle$ y $|\bar{\phi}_m\rangle$ de (62) ($m=0,1,\dots$) están contenidas en G_α . Son linealmente independientes las funciones del multiplete finito $|\phi_{-n}\rangle, \dots, |\phi_{-n+m}\rangle$ ($m=0,1,2,\dots$) y uno puede desarrollar en términos de los primeros $m+1$ términos de la serie de potencias

$$-(-1)^{L+1} \frac{2i}{k} |\mu_z(-k)\rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\bar{\phi}_\nu\rangle \langle \phi_{-n+\nu}\rangle \quad (62)$$

e invertir el desarrollo:

$$|\bar{\phi}_{-n+m}\rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\bar{\phi}_\nu\rangle \gamma_{m-\nu}; \gamma_0 = \frac{1}{B_0} \quad (63)$$

$$m=0,1,2,\dots$$

$$|\bar{\phi}_m\rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\phi_{n+\nu}\rangle B_{m-\nu} \quad m=0,1,2 \quad (64)$$

iv) La función $|\phi_{-n}\rangle = |\phi_0\rangle \gamma_0$ es, hasta un factor multiplicativo, la única eigenfunción G_α del núcleo $K_z(k_0)$ en g .

11.1 ESTADOS RESONANTES EN UN POTENCIAL NO LOCAL

Como ya hemos mencionado en la primera parte, la dispersión no relativista de una partícula sin spin, por un potencial que es la suma de un potencial Coulombiano, un potencial local no coulombiano y de un potencial no local de soporte no compacto es descrita por la ecuación integral de Lippmann-Schwinger:

$$u_{\underline{r}}(k, r) = F_{\underline{r}}(kr) + \int_0^{\infty} ds K_{\underline{r}}(k; r, s) u_{\underline{r}}(k, s) \quad (1.8)$$

en donde $F_{\underline{r}}(kr)$ es la función de Coulomb regular en el origen y el kernel $K_{\underline{r}}(k; r, s)$ está definido por:

$$K_{\underline{r}}(k; r, s) = \int_0^{\infty} G_{o_{\underline{r}}}^{(+)}(k; r, s) U_{\underline{r}}(s, r') ds$$

en donde a su vez $G_{o_{\underline{r}}}^{(+)}(k; r, s)$ y $U_{\underline{r}}(s, r')$ son la función de Green del potencial de Coulomb definido en 1.2 ecuaciones (6) y (7) y $U_{\underline{r}}(s, r')$ contiene al potencial local no coulombiano y al potencial no local como se expresa en la ecuación (2) de 1.2.

Hemos también discutido el comportamiento de los estados de la dispersión que se comportan como la suma de una onda saliente y una incidente en la región asintótica $r \rightarrow \infty$ de la ecuación de Schrödinger con un potencial de Coulomb.

En los experimentos se presenta con frecuencia una situación física que corresponde a condiciones a la frontera que aún no ha sido discutida y es descrita por los llamados estados resonantes.

Un estado resonante o función de Gamow describe una situación física en la cual, a grandes distancias, se observa una onda saliente pero no

hay una onda incidente.

Un ejemplo de esta situación física es el decaimiento radiactivo de un núcleo atómico o de cualquier otro sistema cuántico localizado. En este caso, el sistema que inicialmente es un núcleo en un estado inestable, emite una partícula; por ejemplo una α , (núcleo de ${}^4\text{He}$) y queda un núcleo residual. El estado físico del sistema antes de la desintegración se describe con ayuda de una función de ondas localizada en una región finita del espacio. Después de la desintegración, el estado físico del sistema se describe con el producto de tres funciones de ondas: dos de ellas describen el movimiento de los nucleones en el interior de la partícula y el núcleo residual (dinámica interna) y la tercera, que es una onda saliente pura, describe el movimiento relativo de la partícula y el núcleo residual que se alejan uno del otro.

Es esta onda saliente la que hemos llamado estado de Gamow. Por ello, la función de Gamow es una solución de la ecuación integrodiferencial (I.1) que corresponde a la solución de la ecuación integral homogénea de Lippmann-Schwinger.

$$u_{n\ell}(k_n, r) = \int_0^\infty K_\ell^{(+)}(k_r; r, s) u_{n\ell}(k_n, s) ds \quad (\text{II.1})$$

cuyo kernel $K_\ell^{(+)}(k_n; r, s)$ está definido análogamente al de la ecuación (I.9) por

$$K_\ell^{(+)}(k; r, r') = \int_0^\infty G_{0\ell}^{(+)}(k; r, s) U_\ell(s, r') ds \quad (\text{II.2})$$

Las condiciones a la frontera que satisfacen las soluciones de la ecuación (II.1) son explícitamente:

$$u_{n\ell}(k_r, 0) = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{du_{n\ell}^{(+)}(k_n, r)}{dr} - i(k_n - \frac{\gamma}{r})u_{n\ell}^{(+)}(k_r, r) \right] = 0 \quad (II.3)$$

Solo para determinados valores de k , en general complejos, es posible cumplir las condiciones a la frontera (II.3)

$$\text{Cuando} \quad k_n = A_n - i\gamma_n \quad (II.4)$$

$$\text{con} \quad A_n > \gamma_n > 0$$

la solución $u_n(k_n, r)$ es un estado de Gamow.

Las soluciones de estado ligado $v_{m\ell}(r)$ de (I.1) también satisfacen las condiciones (II.3), pero en este caso la parte real del número de ondas es igual a cero y la parte imaginaria es positiva, lo cual significa que, asintóticamente, la función de ondas $v_{m\ell}(r)$ decae exponencialmente con r y que la energía es real y negativa.

La función de Green $G_{O\ell}^{(+)}(k; r, s)$ tiene la expresión

$$G_{O\ell}^{(+)}(k; r, r') = - \frac{F(kr_<)W^{(+)}(kr_>)}{k} e^{i\sigma_\ell(k)} \quad (I.11)$$

donde $F_\ell(kr)$ es la función de Coulomb regular en el origen y $W_\ell^{(+)}(kr)$ se comporta asintóticamente en $r \rightarrow \infty$ como una onda saliente:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{dW_\ell^{(+)}(kr)}{dr} - i(k - \frac{\gamma}{r})W_\ell^{(+)}(kr) \right] = 0 \quad (II.5)$$

después de substituir la expresión explícita (I.11) de $G_{O\ell}^{(+)}(k; r, r')$ en (II.2) la ecuación integral (II.1) puede ser escrita en una forma más explícita

$$u_{n\pm}(k_n, r) = \frac{e^{i\sigma_z}}{k_n} (W_z^{(+)}(k_n, r) \int ds F_z(k_n, s) \int_0^{\infty} dt U_z(s, t) u_{n\pm}(k_n, t) + F_z(k_n, r) \int_r^{\infty} ds W^{(+)}(k_n, s) \int_0^{\infty} dt U_z(s, t) u_{n\pm}(k_n, t)) \quad (11.6)$$

De esta expresión, y de las propiedades de $F_z(k, r)$ y de $W_z^{(+)}(k, r)$, es obvio que cuando las integrales existen, $u_{n\pm}(k_n, r)$ se anula en el origen y que, asintóticamente, se porta como una onda saliente.

Cuando la parte imaginaria del número de ondas es negativa, $F_z(k_n, r)$ y $W_z^{(+)}(k_n, r)$ se portan asintóticamente como ondas salientes de amplitud creciente.

$$F_z(k_n, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2I} e^{\gamma n r} e^{\gamma n |\bar{k}|^2 \epsilon n r} e^{i\phi} \quad (11.7)$$

$$W_z^{(+)}(k_n, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{\gamma n r} e^{\gamma n |\bar{k}|^2 \epsilon n r} e^{i\theta} \quad (11.8)$$

$$\text{con } k_n = a - i\gamma n; \quad \phi = a(r - \frac{\Gamma}{|\bar{k}|^2} \epsilon n r) - \gamma \epsilon n 2k_n - \frac{1}{2} \epsilon \pi + \sigma_z$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{k_n} \quad \theta = a(r - \frac{\Gamma}{|\bar{k}|^2} \epsilon n r) - \gamma \epsilon n 2k_n - \frac{1}{2} \epsilon \pi$$

De estas expresiones y de (11.6), se sigue que la función de Gamow $u_n(k_n, r)$, también se comporta asintóticamente como una onda saliente que oscila entre envolventes que crecen exponencialmente cuando r crece.

Esta propiedad de $u_{n\pm}(k_n, r)$ no produce divergencias en el miembro derecho de la ecuación integral (11.6), debido a que las mismas condiciones sobre el potencial, ecuaciones (1.12a) y (1.12b), que

garantizan la existencia de soluciones de la dispersión y de estados ligados de la ecuación radial (I.1), hacen que el producto del potencial no local y la función de Gamow sea a su vez una función de r exponencialmente decreciente.

Precisando, supondremos que el potencial $U_z(r,r')$ es invariante respecto de rotaciones espaciales y la inversión del tiempo; y que sus partes local y no local están sujetas a las condiciones (I.12a) discutidas en la sección anterior.

Cuando se satisfacen estas condiciones el integrando en la ecuación (II.6) es convergente, dado que de acuerdo a (I.12a) y (I.12b), cuando:

$$\text{Im}k_n = -\gamma_n > -\alpha \quad (II.9)$$

el potencial no local $U_z(s,t)$ amortigua las oscilaciones de $F_z(k_n,s)$, $W_z^{(+)}(k_n,s)$ y $u_{nz}(k_n,t)$, que son exponencialmente crecientes en magnitud cuando $\text{Im}k_n < 0$, haciendo que las integrales sean finitas. Esto se ve claramente al multiplicar (II.1) por $H_\alpha(r)$, de este modo se obtiene

$$H_\alpha(r)u_{nz}(k_n,r) = \int_0^\infty [H_\alpha(r)K_z^{(+)}(k_n,r,s)H_\alpha^{-1}(s)] H_\alpha(s)u_{nz}(k_n,s)ds$$

que en la notación usada en la primera parte queda como:

$$\hat{u}_{nz}(k_n,r) = \int_0^\infty \hat{K}_z^{(+)}(k_n,r,s)\hat{u}_n(k_n,s)ds$$

De la forma explícita de la ecuación integral homogénea (II.6), (II.7) y (II.8) se sigue que, cuando $|\text{Im}k_n| < \alpha$, $\hat{u}_{nz}(k_n,r)$ decrece exponencialmente para valores grandes de r . De esta propiedad y de que $\hat{u}_{nz}(k_n,r)$ sea regular en el origen se sigue que $\hat{u}_{nz}(k_n,r)$ es cuadráticamente integrable (está en L^2). Se demostrará más adelante que

las eigenfunciones de la energía E_n y los números de onda correspondientes k_n que son de relevancia para este trabajo, son aquéllos para los cuales la condición (II.9) es satisfecha).

11.2 LA FUNCION DE GAMOW Y LA EIGENFUNCION DE FREDHOLM

N. von der Heydt⁽⁴⁾, ha demostrado que, cuando el potencial satisface las condiciones (1.12) e $\text{Im}k \geq -\alpha$, la traza del kernel $K_2^{(+)}(k; s, t)$, y el determinante de Fredholm

$$\Delta_2^{(+)}(n, k) = \det(1 - nK_2^{(+)}(k)) \quad (11.10)$$

existen.

Las soluciones de la ecuación de Lippmann-Schwinger (11.6), existen cuando n es igual a uno y el determinante de Fredholm se anula.

Esto se puede ver del siguiente argumento: el primer menor del determinante de Fredholm $M_2(k; s, r_0)$ satisface la relación integral llamada Segunda Relación Fundamental de Fredholm⁽¹¹⁾

$$M_2(k; r, r_0) = n\Delta_2^{(+)}(n, k) + n \int_0^{\infty} K_2^{(+)}(k; r, s) M_2(k; s, r_0) ds \quad (11.11)$$

Cuando $\Delta_2^{(+)}(n, k)$ es cero, esta ecuación se reduce a la ecuación de Fredholm homogénea

$$w_2(k, r) = n(k) \int_0^{\infty} K_2^{(+)}(k; r, s) w_2(k, s) ds \quad (11.12)$$

La condición de que $\Delta_2^{(+)}(n, k)$ se anule define a n como una función de k

$$\Delta_2^{(+)}(n, k) = \prod_{i=1}^N (1 - n(k)\alpha_i(k)) = 0 \quad (11.13)$$

las $\alpha_i(k)$ que aparecen en esta ecuación son los eigenvalores del kernel $K_2^{(+)}(k)$

Se considerará primero el caso en que k tiene un valor fijo con $\text{Im}k \geq -\alpha$, cuando $\Delta_2^{(+)}(n, k)$ tiene un cero simple, $n(k)$ es igual al inverso de uno de los eigenvalores, digamos $\alpha_1^{-1}(k)$.

Si $\Delta_z^{(+)}(k)$ tiene N diferentes eigenvalores, $n(k)$ tiene n ramas como función de k .

Ahora, haciendo n igual a uno en (II.3), esta condición solo se satisface para algunos valores k_n del número de ondas k , con $k_n > \alpha$.

$$\Delta_z^{(+)}(1, k_n) = 0 \quad (II.14)$$

y en $k = k_n$, uno de los eigenvalores es igual a uno

$$\alpha_1(k_n) = 1 \quad (II.15)$$

En este caso, la ecuación (II.12) se reduce a la ecuación de Lippmann-Schwinger homogénea (II.6), mostrando que la función de Gamow $u_n(k_n, r)$ es igual al primer menor de Fredholm evaluado en $k = k_n$. Cuando el cero de $\Delta_z^{(+)}$ en $k = k_n$ es simple solo hay un eigenvalor $\alpha_1(k_n)$ que satisface (II.15). La correspondiente función de Fredholm $w_{z1}(k_n, r)$ es entonces igual a la función de Gamow.

$$u_{nz}(k_n, r) = w_{z1}(k_n, r) \quad (II.16)$$

Entonces, a cada cero simple de $\Delta_z^{(+)}(n, k)$ le corresponde un estado de Gamow. Por otra parte, en vista de que la ecuación (II.14) puede tener varias raíces diferentes k_n , y el mismo eigenvalor $\alpha_1(k)$ puede tomar el valor uno más de una vez, pueden existir varias funciones de Gamow que provengan de la misma eigenfunción de Fredholm cuando el eigenvalor k correspondiente es igual a cualquiera de las k_n que hace a $\alpha_1(k)$ igual a uno. Se puede decir que todas estas funciones de Gamow pertenecen a la misma rama de $n(k)$.

11.3 EL DUAL DE LA FUNCION DE GAMOW

El dual de la función de Gamow se obtiene de las simetrías del kernel $K_L^{(+)}(k;r,s)$. Recordemos primero las propiedades de simetría de la función de Green:

$$G_{0L}^{(+)}(k;r,s) = G_{0L}^{(+)}(k;s,r) \quad (11.17)$$

y

$$G_{0L}^{(+)}(k;r,s) = G_{0L}^{(+)*}(-k^*;s,r) \quad (11.18)$$

a partir de estas relaciones y de la hermiticidad del potencial, se sigue que:

$$K_L^{(+)}(k;r,s) = K_L^{(+)*}(-k^*;s,r) \quad (11.19)$$

lo cual implica que el determinante de Fredholm y la función $n(k)$ satisfacen una relación similar

$$\Delta_L^{(+)}(k) = \Delta_L^{(+)*}(-k^*) \quad (11.20)$$

$$n(k) = n^*(-k^*) \quad (11.21)$$

Estas relaciones sugieren que se tome el complejo conjugado en ambos lados de la ecuación (11.6), que se cambie k por $-k^*$ y haciendo uso de (11.12), se obtiene:

$$u_{nL}^*(-k_n^*;r) = \int_0^{\infty} u_{nL}^*(-k^*;s) K_L^{(+)}(k_n;s,r) ds \quad (11.22)$$

lo que demuestra que, cuando $u_{nL}(k_n;s)$ es una eigenfunción derecha de $K_L^{(+)}(k;r,s)$, $u_{nL}^*(-k_n^*;r)$ es una eigenfunción izquierda de $K_L^{(+)}(k;r,s)$. Entonces, la función adjunta $u_{nL}(k_n,r)$ de la función de Gamow es proporcional a $u_{nL}^*(-k_n^*;r)$ y sin perder generalidad se puede poner:

$$\tilde{u}_{n\pm}(k_n:r) = u_{n\pm}^*(-k_n^*:r) \quad (11.23)$$

En el caso de partículas sin spin, el potencial es una función real, simétrica de sus argumentos, y $G_{Oz}^{(+)}(k;r,s)$ también es simétrica; por lo cual (11.22) se puede reordenar para dar la ecuación:

$$\tilde{u}_{n\pm}(k_n:r) = \int_{\mathbb{R}_z^+} G_{Oz}^{(+)}(k;r,s) \tilde{u}_{n\pm}(k_n:s) ds \quad (11.24)$$

que es la misma ecuación que (11.1). Por esto, para partículas sin spin, la función de Gamow es proporcional a su adjunta. Nuevamente, sin perder generalidad se puede escribir:

$$\tilde{u}_{n\pm}(k_n:r) = u_{n\pm}(k_n:r) \quad (11.25)$$

II.4 NORMALIZACION DE LOS ESTADOS DE GAMOW

En lo que sigue se demostrará que el residuo de la función de Green de la ecuación radial (I.1) en un polo simple localizado en el cuarto cuadrante del plano k , es el producto de las funciones de Gamow $u_{n\pm}(k_n, r)u_{n\pm}(k_n, r')$ por una constante que es igual al inverso de la integral de normalización de la función de Gamow.

Antes que nada, con el fin de evitar complicaciones innecesarias en la escritura, se introducirá la siguiente notación simplificada:

$$\begin{aligned} |f\rangle\langle g| &= f(k, r)\tilde{g}(k, s) \\ \langle f|g\rangle &= \int^{\infty} f(k, r)g(k, r)dr \\ k_{\pm}^{(+)}|f\rangle &= \int^{\infty} ds k_{\pm}^{(+)}(k; r, s)f(s) \\ \langle f|k_{\pm}^{(+)} &= \int^{\infty} ds \tilde{f}(k, s)k_{\pm}^{(+)}(k; s, r) \end{aligned}$$

Ahora bien, la función de Green completa o resolvente de la ecuación integrodiferencial (I.1) satisface las ecuaciones de Lippmann-Schwinger, que en esta notación se escriben como:

$$G_{\pm}^{(+)}(k) = G_{O_{\pm}}^{(+)}(k) + K_{\pm}^{(+)}(k)G_{\pm}^{(+)}(k) \quad (II.26)$$

y

$$G_{\pm}^{(+)}(k) = G_{O_{\pm}}^{(+)}(k) + G_{\pm}^{(+)}(k)K_{\pm}^{(+)}(k) \quad (II.27)$$

N. von der Heydt⁽⁴⁾ ha demostrado que en ausencia del potencial de Coulomb, cuando el potencial no local U_{\pm} satisface las condiciones (I.12a) y (I.12b), $G_{\pm}^{(+)}(k)$, como función de k , es una función meromorfa en el semiplano $\text{Im}k^2 < -\alpha$. Cuando α es finito, $G_{\pm}^{(+)}(k)$ tiene.

a lo mas, un número finito de polos en dicho semiplano, los cuales se localizan precisamente en donde están los ceros de $\Delta_z^{(+)}$.

Para von der Heydt, el caso coulombiano corresponde a $\alpha=0$. La franja tiene ancho nulo. Hay un punto de acumulación de ceros de $\Delta_z^{(+)}$ en $k=0$.

Para nosotros, además de estas singularidades, la franja tiene ancho finito y contiene singularidades que son polos. El número de éstos es finito. Además, la multiformidad de las funciones de Whittaker es heredada por la función de Green.

Cerca de un polo complejo, localizado en $k=k_n$, $G_z^{(+)}$ puede ser escrita como:

$$G_z^{(+)}(k) = \frac{R_{nz}(k_n)}{k-k_n} + F_n(k) \quad (II.28)$$

siendo la función $F_n(k)$, como función de k , regular en $k=k_n$.

Con el fin de obtener una ecuación integral para R_n , se substituye (II.28) para $G_z^{(+)}(k)$ en (II.26), se multiplica a la ecuación resultante por $(k-k_n)$ y se toma el límite cuando k tiende a k_n , de esta forma se obtiene la siguiente ecuación:

$$R_n(k_n) = G_{oz}^{(+)}(k_n) U_z R_n(k_n) \quad (II.29)$$

Esto es precisamente la ecuación integral homogénea (I.9) que satisface el estado de Gamow $|u_{nz}(k_n)\rangle$. Cuando el cero del determinante de Fredholm en $k=k_n$ es simple, la solución de (II.29) es única, hasta una constante multiplicativa, (35) por consiguiente $R_n(k_n)$ es proporcional al estado de Gamow.

$$R_n(k_n) = |u_{nz}(k_n)\rangle \langle f_n| \quad (II.30)$$

Para encontrar una ecuación integral para $\langle f_n |$, se procede de manera similar. Se substituyen (II.28) y (II.30) en (II.27), entonces se multiplica la ecuación resultante por $(k-k_n)$ y se toma el límite cuando k tiende a k_n para obtener:

$$\langle f_n | = \langle f_n(k_n) | K_L^{(+)}(k_n) \quad (II.31)$$

De acuerdo con esta expresión, $\langle f_n(k_n) |$ es proporcional al dual del estado de Gamow, y como el dual del estado de Gamow es igual al estado de Gamow, $\langle f_n(k_n) |$ es proporcional al estado de Gamow. Con estos resultados se obtiene que cerca de sus polos simples, situados en el cuarto cuadrante del plano k , la función de Green puede ser escrita como:

$$G_L^{(+)}(k; r, r') = u_{nL}(k_n, r) \frac{c_n}{k-k_n} u_{nL}(k_n, r') + F_n(k; r, r') \quad (II.32)$$

Con el propósito de encontrar una expresión para la constante c_n , es conveniente extender la validez de la expresión (II.32) de tal manera que las funciones en el numerador del término regular, estén definidas para los valores del número de ondas k en un entorno finito de k_n en el semiplano $\text{Im}k > -\alpha$ y no solo en el punto k_n . Esto se puede conseguir substituyendo en (II.32) al estado de Gamow $|u_{nL}(k_n)\rangle$ por la eigenfunción de Fredholm que es igual a este estado cuando k igual a k_n . Para simplificar la notación se llamará a esta eigenfunción de Fredholm también $|u_{nL}(k)\rangle$, teniendo en cuenta que, cuando otro estado de Gamow $|u_{mL}(k_n)\rangle$ pertenezca a la misma rama de $n(k)$, entonces $|u_{nL}(k)\rangle$ y $|u_{mL}(k)\rangle$ son la misma función.

$$G_{\pm}^{(+)}(k) = |u_{n\pm}(k)\rangle \frac{c_n}{k-k_n} \langle u_{n\pm}(k)| + F_n^{\pm}(k) \quad (11.33)$$

La función $F_n^{\pm}(k)$ que por definición, es la diferencia de la función de Green $G_{\pm}^{(+)}(k)$ y del término singular en (11.33) se reduce a $F_n(k)$ cuando el número de ondas k en el argumento de la eigenfunción de Fredholm es igual a k_n .

De la ecuación de Lippmann-Schwinger (II.27) se obtiene la siguiente relación:

$$\underline{G}_{\pm}^{(+)}(k) \underline{U}_{\pm} |u_{n\pm}(k)\rangle = \underline{G}_{0\pm}^{(+)}(k) \underline{U}_{\pm} |u_{n\pm}(k)\rangle + \quad (11.34)$$

$$\underline{G}_{\pm}^{(+)}(k) \underline{U}_{\pm} G_{0\pm}^{(+)}(k) U |u_{n\pm}(k)\rangle$$

recordando que $|u_{n\pm}(k)\rangle$ es una solución de la ecuación de Fredholm homogénea (II.12), esta expresión se reduce a:

$$(n(k)-1) \underline{G}_{\pm}^{(+)}(k) \underline{U}_{\pm} |u_{n\pm}(k)\rangle = |u_{n\pm}(k)\rangle \quad (11.35)$$

Ahora substituyendo la expresión (11.33) para $G_{\pm}^{(+)}$ en esta ecuación, se obtiene:

$$(n(k)-1) \left[|u_{n\pm}(k)\rangle \frac{c_n}{k-k_n} \langle u_{n\pm}(k)| U_{\pm} |u_{n\pm}(k)\rangle + \right. \\ \left. + F_n^{\pm}(k) \underline{U}_{\pm} |u_{n\pm}(k)\rangle \right] = |u_{n\pm}(k)\rangle \quad (11.36)$$

tomando el límite cuando k tiende a k_n , y recordando que $n(k_n) = 1$ se obtiene:

$$c_n = \frac{1}{\left(\frac{dn}{dk}\right)_{k_n} \langle u_{n\pm}(k_n) | U_{\pm} |u_{n\pm}(k_n)\rangle} \quad (11.37)$$

Esta expresión aún no está en la forma deseada, ya que contiene a la derivada del eigenvalor de Fredholm.

La derivada del eigenvalor de Fredholm $\eta^{-1}(k)$, puede ser calculada fácilmente. Primero se multiplica la ecuación de Fredholm (II.12) por $\langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell}$ por la izquierda y se obtiene

$$\langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell} | u_{n\ell}(k) \rangle = \eta(k) \langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell} G_{O\ell}^{(+)}(k) U_{\ell} | u_{n\ell}(k) \rangle$$

a partir de aquí se obtiene la identidad

$$\eta^{-1}(k) = \frac{\langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell} G_{O\ell}^{(+)}(k) U_{\ell} | u_{n\ell}(k) \rangle}{\langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell} | u_{n\ell}(k) \rangle} \quad (II.38)$$

Derivando respecto de k en ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$\eta^{-1}(k) = \frac{\langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell} | u_{n\ell}(k) \rangle \left(\frac{d \langle u_{n\ell}(k) |}{dk} \right) U_{\ell} G_{O\ell}^{(+)}(k) U_{\ell} | u_{n\ell}(k) \rangle}{(\langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell} | u_{n\ell}(k) \rangle)^2}$$

$$+ \frac{\langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell} \frac{\partial G_{O\ell}^{(+)}}{\partial k} U_{\ell} | u_{n\ell}(k) \rangle + \langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell} G_{O\ell}^{(+)}(k) U_{\ell} \frac{d | u_{n\ell}(k) \rangle}{dk}}{\langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell} | u_{n\ell}(k) \rangle^2}$$

$$= \frac{\langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell} G_{O\ell}^{(+)} U_{\ell} | u_{n\ell}(k) \rangle \left(\frac{d \langle u_{n\ell}(k) |}{dk} \right) U_{\ell} | u_{n\ell}(k) \rangle + \langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell} \frac{d | u_{n\ell}(k) \rangle}{dk}}{(\langle u_{n\ell}(k) | U_{\ell} | u_{n\ell}(k) \rangle)^2}$$

si ahora simplificamos el numerador con ayuda de (II.12), notamos que

$$\begin{aligned}
& \langle u_{n\ell}(k) | U | u_{n\ell}(k) \rangle \frac{d \langle u_{n\ell} |}{dk} U_2 G_{O_2}^{(+)}(k) U_2 | u_{n\ell}(k) \rangle - \\
& - \langle u_{n\ell}(k) | U_2 G_{O_2}^{(+)}(k) U_2 | u_{n\ell}(k) \rangle \frac{d \langle u_{n\ell} |}{dk} U_2 | u_{n\ell} \rangle = \\
& = \frac{1}{n} \langle u_{n\ell}(k) | U | u_{n\ell}(k) \rangle \frac{d \langle u_{n\ell}(k) |}{dk} U_2 | u_{n\ell}(k) \rangle - \\
& - \frac{1}{n} \langle u_{n\ell}(k) | U_2 | u_{n\ell}(k) \rangle \frac{d \langle u_{n\ell}(k) |}{dk} U_2 | u_{n\ell}(k) \rangle = 0
\end{aligned}$$

y que también los términos con $\frac{d | u_{n\ell} \rangle}{dk}$ se anulan.

De este modo, se obtiene

$$\frac{d n}{dk} = -n \frac{\langle u_{n\ell}(k) | U_2 \frac{\partial G_{O_2}^{(+)}}{\partial k} U_2 | u_{n\ell}(k) \rangle}{\langle u_{n\ell}(k) | U_2 | u_{n\ell}(k) \rangle}$$

$$\frac{d n(k)}{dk} = -n(k) \frac{\langle u_{n\ell}(k) | U_2 \frac{\partial G_{O_2}^{(+)}}{\partial k} U_2 | u_{n\ell}(k) \rangle}{\langle u_{n\ell}(k) | U_2 | u_{n\ell}(k) \rangle} \quad (11.39)$$

La derivada de la función de Green puede ser obtenida de la representación espectral y la relación de cerradura de las eigenfunciones del problema de Coulomb (1.53), se obtiene:

$$\frac{\partial G_{O_2}^{(+)}(k)}{\partial k} = -2k \int_0^\infty G_{O_2}^{(+)}(k; r, s) G_{O_2}^{(+)}(k; s, r') ds \quad (11.40)$$

Cuando esta expresión es substituida para $\frac{\partial G_{O_2}^{(+)}(k)}{\partial k}$ en (11.39) y,

recordando que $|u_{n_2}(k)\rangle$ es la eigenfunción de Fredholm con eigenvalor $\eta^{-1}(k)$, el resultado se simplifica con la ayuda de (II.12), obteniéndose que:

$$\frac{dn(k)}{dk} = - \frac{2k}{\eta(k)} \frac{\langle u_{n_2}(k) | u_{n_2}(k) \rangle}{\langle u_{n_2}(k) | U | u_{n_2}(k) \rangle} \quad (\text{II.41})$$

Ahora, substituyendo este resultado en (II.37) y tomando el límite cuando k tiende a k_n , se obtiene finalmente:

$$C_n = \frac{1}{2k_n} \lim_{k \rightarrow k_n} \left[\int_0^\infty \frac{1}{u_{n_2}^2(k^+, r)} dr \right] \quad (\text{II.42})$$

Caben aquí dos observaciones, primero, en (II.42) se ha hecho uso de la igualdad de la eigenfunción de Fredholm con su dual. Segundo, la integral que ocurre en el denominador de (II.42) se define del modo siguiente: el integrando $u_{n_2}^2(k^+, r)$, como función de k ; se define con k^+ en el semiplano superior del plano k , después de que la integral se ha hecho, la función de k resultante se continúa analíticamente hasta el punto k_n en el semiplano inferior del plano k . El límite no puede ser tomado dentro de la integral porque en ese caso la integral no existe.

Cuando la expresión (II.42) es substituida por C_n en (II.33), y se integra en ambos lados de la ecuación a lo largo de un contorno cerrado que contiene un solo polo de G en $k=k_n$, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_C G_2^{(+)}(k; r, r') dk \\ & = u_{n_2}(k_n, r) \lim_{k \rightarrow k_n} \left[\int_0^\infty \frac{1}{u_{n_2}^2(k^+, r'')} dr'' \right] u_{n_2}(k_n, r') \quad (\text{II.43}) \end{aligned}$$

el contorno de integración C encierra un solo polo de $G^{(+)}$.

Se sigue de aquí que la regla adecuada para la normalización de los estados de Gamow es:

$$\lim_{k \rightarrow k_n} \int_0^{\infty} u_{n\lambda}^*(k^+; r) dr = 1 \quad (11.44)$$

Hernández y Mondragón⁽²⁷⁾, han demostrado que, cuando el estado de Gamow está definido para un potencial cortado de alcance R_0 , (11.44) se reduce a la condición de normalización dada por Hokkyo, Romo, y García-Calderón y Peierls⁽²⁾.

II.5 DESARROLLO DE LA FUNCION DE GREEN EN TERMINOS DE ESTADOS LIGADOS, RESONANTES Y ESTADOS DE LA DISPERSION

La función de Green de la ecuación de Schrödinger con un potencial no local puede ser desarrollada en eigenfunciones de la energía correspondientes a eigenvalores de la energía, tanto negativos como complejos, más una integral sobre estados de la dispersión con número de ondas complejo. Un resultado similar al nuestro es bien conocido para el caso de potenciales locales de corto alcance⁽¹³⁾.

La representación espectral de la función de Green de la ecuación radial con un potencial no local (I.52) es:

$$G_{\ell}^{(+)}(k; r, r') = \sum_{n \geq 0} v_{n\ell}(r) \frac{1}{k^2 - k_{n\ell}^2} v_{n\ell}(r') + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\phi}_{\ell}(k, r) \frac{1}{k^2 - k'^2} \phi_{\ell}^*(k, r') dk' \quad (II.45)$$

Cuando el potencial no local satisface las condiciones (I.12a) y (I.12b), $G_{\ell}^{(+)}(k; r, r')$ como función de k , es meromorfa en el semiplano $\text{Im}k > -\alpha$ y, cuando α es finita, tiene, a lo más, un número finito de polos en la franja $0 \leq -\text{Im}k < \alpha$. En el semiplano $\text{Im}k \geq 0$, puede tener polos solo en el eje imaginario positivo o en el eje real. Cuando $k \neq 0$, los polos son simples. En el caso de existir un polo en $k=0$, éste puede ser simple o doble⁽⁵⁾. Este comportamiento de $G_{\ell}^{(+)}$ corresponde al caso en que $G_{\ell}^{(+)}$ es la función de Green para la ecuación de Schrödinger de una partícula libre. Si consideramos ahora la presencia de un potencial coulombiano y separamos el problema de manera que $G_{0\ell}^{(+)}$ sea la función de Green para este último potencial, entonces $G_{\ell}^{(+)}$, la función de Green completa, tendrá además las

singularidades provenientes de los estados ligados del potencial coulombiano y el corte que se extiende desde cero hasta $-\infty$ en el plano k debido a la multiformidad de $G_{0L}^{(+)}$.

El contorno de integración de la ecuación (II.45) se puede deformar en el semiplano inferior, como se muestra en la figura 1.

Cuando el contorno deformado cruza sobre estados resonantes, el teorema del residuo, y la ecuación (II.43) dan:

$$G_L^{(+)}(k; r, r') = \sum_{\text{ESTADOS}} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} v_{nL}(r) \frac{1}{k^2 + \frac{1}{2m} |E_n|} v_{nL}(r') \quad (\text{II.46})$$

$$+ \sum_{\text{RESONANTES}} u_{nL}(k_n, r) \frac{1}{2k_n(k-k_n)} u_{nL}(k_n, r) + \int_C \phi_L(z, r) \frac{1}{k^2 - z^2} \tilde{\phi}_L(z, r') dz$$

en donde $v_{nL}(r)$ son las eigenfunciones de estados ligados correspondientes a eigenvalores de la energía negativa, $u_{nL}(k_n; r)$ son las funciones de Gamow correspondientes a eigenvalores de la energía complejos y $\phi_L(z; r)$ es una función de la dispersión con número de ondas z complejo. Soluciones derechas e izquierdas de la ecuación de dispersión han sido distinguidas por una tilde en la solución izquierda. La distinción se hace debido a que cuando el número de ondas es complejo, la solución izquierda no es igual a la hermitiana conjugada de la solución derecha.

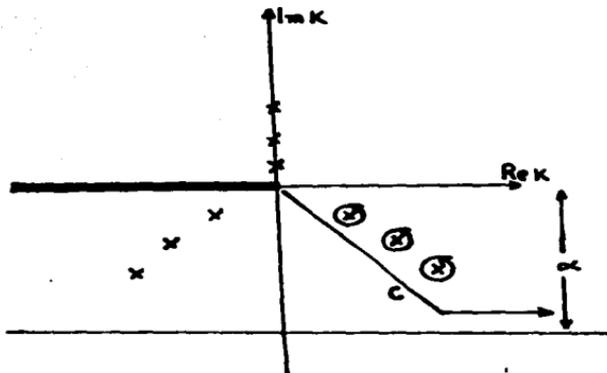


Fig. 1. El contorno de integración C sobre el cual se hace la integral de la ecuación (II-46) consiste de dos tramos de recta: El primero parte del origen con pendiente -1 y llega hasta $Im\ k = -\alpha + c$ a partir de allí continúa en el segundo que va paralelo al eje real y a distancia $-\alpha + c$ de éste hasta $+i(-1)(\alpha - c)$.

11.6 DESARROLLO DE UNA FUNCION EN TERMINOS DE ESTADOS LIGADOS, RESONANTES Y ESTADOS DE LA DISPERSION

En esta sección se demostrará que una función de cuadrado integrable arbitraria puede ser desarrollada en términos de un conjunto de funciones que contienen estados ligados y resonantes y un continuo de estados de la dispersión con número de ondas complejo.

Empezamos por recordar que el conjunto ortonormal de estados ligados y de soluciones de la dispersión de la ecuación radial de Schrödinger (1.1) es un conjunto completo.⁽³⁾

Esto ha sido demostrado para potenciales no locales en ausencia de un potencial de Coulomb, por N. von der Heydt⁽⁴⁾ bajo condiciones generales. En el caso en que haya un potencial de Coulomb, las relaciones de completitud y cerradura siguen siendo válidas, entonces para cualesquiera dos funciones de cuadrado integrable, $\phi(r)$ y $x(r)$, la siguiente relación es válida:

$$\int_0^{\infty} \phi^*(r) x(r) dr = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \langle \phi | v_{n,s} \rangle \langle v_{n,s} | x \rangle + \int_0^{\infty} \langle \phi | \phi_2(k) \rangle \langle \phi_2(k) | x \rangle dk \quad (11.47)$$

en donde

$$\langle \phi | v_{n,s} \rangle = \int_0^{\infty} \phi^*(r) v_{n,s}(r) dr \quad (11.48)$$

$$\langle v_{n,s} | x \rangle = \int_0^{\infty} v_{n,s}(r) x(r) dr \quad (11.49)$$

$$\langle \phi | \phi_2(k) \rangle = \int_0^{\infty} \phi^*(r) \phi_2(k, r) dr \quad (11.50)$$

y

$$\langle \phi_2(k) | x \rangle = \int_0^{\infty} \phi_2^*(k; r) x(r) dr \quad (11.51)$$

En esta expresión, la función $v_{n,s}(r)$ es una solución de estado

ligado de la ecuación de Schrödinger (I.1) que corresponde a eigenvalores de la energía. E_n negativos, y es también solución de la ecuación de Lippmann-Schwinger homogénea (II.1). La función $\phi_z(k,r)$ es una onda parcial de la dispersión que es solución de la ecuación radial (I.1), que es también solución de una ecuación de Lippmann-Schwinger inhomogénea.

Ahora bien, de la representación espectral de la función de Greer para partículas incidentes y salientes se sigue que la integral (II.47) es igual a⁽³⁶⁾:

$$\int_0^{\infty} \langle \phi_z(k) | x \rangle \phi_z(k) | x \rangle dk \quad (II.52)$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \phi^*(r) \left[G_z^{(+)}(k;r,r') - G_z^{(-)}(k;r,r') \right] x(r') dr dr' \right] dk$$

La función de Green para partículas incidentes, $G_z^{(-)}$, no tiene singularidades en el semiplano inferior k , salvo aquellas correspondientes al potencial coulombiano que aparecen sobre el eje imaginario negativo, mientras que la función de Green para partículas saliente no tiene polos en esa parte del plano, como ya se ha explicado. El contorno de integración de la ecuación (II.52) puede ser deformado en el semiplano inferior como se muestra en la figura 1, y cuando el contorno deformado C cruza sobre polos resonantes, el teorema del residuo y las ecuaciones (II.43) y (II.44), dan:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \langle \phi_z(k) | x \rangle \phi_z(k) | x \rangle dk = \\ & = \sum_{\substack{\text{estados} \\ \text{resonantes}}} \left[\int_0^{\infty} \phi^*(r) u_{nz}(k^+;r) dr \right]_{k_n} \left[\int_0^{\infty} u_{nz}(k^+;s) x(s) ds \right]_{k_n} \\ & + \int_C dz \left[\int_0^{\infty} \phi^*(r) \phi_z(k;r) dr \int_0^{\infty} \phi_z(k;s) x(s) ds \right]_{k=z} \quad (II.53) \end{aligned}$$

Como $\phi(r)$ y $x(r)$ son funciones arbitrarias, la discusión anterior justifica el escribir el desarrollo:

$$\begin{aligned}
 x(r) = & \sum_{\substack{\text{estados} \\ \text{ligados}}} v_{mz}(r) \langle u_{nz} | x \rangle + \\
 & + \sum_{\substack{\text{estados} \\ \text{libres}}} u_{nz}(k_n; r) \langle u_{nz} | x \rangle + \\
 & + \int_C \phi_z(z, r) \langle \phi_z(z) | x \rangle dz
 \end{aligned} \tag{11.54}$$

Los coeficientes del desarrollo están dados por:

$$\langle v_{mz} | x \rangle = \int_0^{\infty} v_{mz}(r) x(r) dr \tag{11.55}$$

$$\langle u_{nz} | x \rangle = \left[\int_0^{\infty} u_{nz}(k^+; r) x(r) dr \right]_{k=k_n} \tag{11.56}$$

$$\langle \phi_z(z) | x \rangle = \left[\int^{\infty} \phi_z(k; r) x(r) dr \right]_{k=z} \tag{11.57}$$

III.1 USO PRACTICO DEL DESARROLLO EN ESTADOS DE GAMOW EN UN EJEMPLO REALISTA

En esta parte se demostrará que el formalismo discutido anteriormente es útil en la descripción del comportamiento resonante observado en las colisiones de sistemas compuestos con una estructura interna que da lugar a una interacción efectiva no local. Con este propósito discutiré, muy brevemente, la captura radiativa directa de ${}^3\text{He}$ por ${}^3\text{H}$ en el primer estado excitado de ${}^6\text{Li}$.

La sección diferencial para captura directa del continuo a estados excitados de la reacción



está dada por la expresión (19)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi v (2J_{\text{He}} + 1) (2J_{\text{H}} + 1) \sum_{P=-1}^1 \sum_{m_f, m_i} | \langle f | m_f | H_{\text{int}}^P | i m_i \rangle |^2$$

K_γ es el número de ondas de la radiación γ (fotón). En esta expresión P es la polarización circular de la radiación γ , v es la velocidad relativa de ${}^3\text{He}$ y ${}^3\text{H}$, J_{He} y J_{H} son los spines de ${}^3\text{He}$ y ${}^3\text{H}$ respectivamente e i y f se refieren a los estados del continuo y ligados respectivamente.

El hamiltoniano H_{int}^P de la interacción para la radiación dipolar eléctrica es (3):

$$H_{int}^P = -i \frac{\sqrt{4\pi}}{3\pi} \text{em} \left(\frac{Z_{He}}{m_{He}} - \frac{Z_H}{m_H} \right) \times$$

(III-2)

$$\times \sum_{\mu} P \hat{D}_{\mu}^{(1)*}(\phi_{\gamma}, \theta_{\gamma}, 0) \hat{\mathbb{D}}_{E1}(r) Y_{1\mu}^*(\theta, \psi)$$

En la fórmula (III.2), e es la carga eléctrica del electrón, $Z_{He} = 2$ es el número de protones en el núcleo de ${}^4\text{He}$, $Z_H=1$ es el número de protones en el núcleo de ${}^1\text{H}$, m es el número cuántico magnético de la radiación, m es la masa reducida de He y H

$$m = \frac{m_{He} m_H}{m_{He} + m_H}$$

$\hat{D}_{\mu}^{(1)*}(\phi_{\gamma}, \theta_{\gamma}, 0)$ son los elementos de las matrices de rotación en función de los ángulos que describen la dirección de la emisión del rayo gamma con respecto del eje del haz incidente y las coordenadas (r, θ, ψ) especifican el vector de posición relativa \vec{r} del sistema ${}^4\text{He}-{}^1\text{H}$ en el marco de referencia del centro de masa. La función $\hat{\mathbb{D}}_{E1}(r)$ es la parte radial del operador del dipolo eléctrico que se expresa como:

$$\hat{\mathbb{D}}_{E1}(k_{\gamma}, r) = \frac{3}{\rho^2} [(\rho^2 - 2)\text{sen } \rho + 2\rho \text{cos } \rho] \quad (III.3)$$

$\rho = k_{\gamma} r$

Para simplificar la escritura introducimos la notación:

$$C_1 = -\frac{\sqrt{4\pi}}{3} \left(\frac{m_{He} m_H}{m_{He} + m_H} \right) \left(\frac{Z_{He}}{m_{He}} - \frac{Z_H}{m_H} \right) \quad (III-4)$$

C_1 es proporcional al momento dipolar eléctrico del sistema ^3He y ^3H .

Entonces, el Hamiltoniano de la interacción se escribe como⁽¹⁸⁾:

$$H_{int}^P = ieC_1 \sum_{\mu} P_{\mu}^{(1)*}(\phi_{\gamma}, \theta_{\gamma}, 0) \otimes_{E1}^{(1)}(k\gamma) Y_1^{\mu*}(\hat{r}) \quad (III-5)$$

en esta expresión, los ángulos $(\phi_{\gamma}, \theta_{\gamma})$ especifican la dirección de salida del fotón y no dependen de las coordenadas nucleares.

En consecuencia el elemento de matriz nuclear se factoriza

$$\langle f m_f | H_{int}^P | i m_i \rangle = ieC_1 \sum_{\mu} P_{\mu}^{(1)*}(\phi_{\gamma}, \theta_{\gamma}, 0) \langle f m_f | \otimes_{E1}^{(1)}(k\gamma) Y_1^{\mu*}(\theta\psi) | i m_i \rangle \quad (III-6)$$

Así pues, para obtener la sección de captura radiativa se deben evaluar los elementos de matriz

$$\langle f m_f | \otimes_{E1}^{(1)}(k\gamma) Y_1^{\mu*}(\theta, \psi) | i m_i \rangle \quad (III-7)$$

III.2 ELEMENTOS DE MATRIZ DEL OPERADOR DIPOLAR ELECTRICO ENTRE ESTADOS DEL CONTINUO Y ESTADOS LIGADOS

La evaluación de los elementos de matriz que aparecen en la expresión para la sección diferencial se puede reducir a la evaluación de una suma de productos de integrales de funciones de las variables angulares multiplicadas por integrales sobre la variable radial.

Las integrales sobre funciones de los ángulos se hacen fácilmente aprovechando las propiedades de las eigenfunciones del momento angular.⁽²⁰⁾ Las integrales radiales contienen la información dinámica y por lo tanto, al estudiar su comportamiento como funciones de la energía, se puede exhibir la conducta resonante de la sección.

Para evaluar los elementos de matriz III-7, necesitamos las funciones de ondas de los estados inicial y final. Suponemos que el estado final es el primer estado excitado de ${}^6\text{Li}^*$. Este estado se puede describir como formado por dos cúmulos (${}^3\text{He}-{}^3\text{H}$) ligados cuyo movimiento relativo se describe con la función de ondas siguiente

$$\psi_{m_j}^j = \theta_1 \frac{U_{jL}(k_j r)}{r} \sum_{B=-1}^1 C(L1j; m_j - B, B) Y_L^{m_j - B} X_S^B \quad (\text{III-8})$$

Los números cuánticos del primer estado excitado de ${}^6\text{Li}$ son

$$\begin{aligned} J_j &= 3 \\ L &= 2 \\ \pi &= + \\ T &= 0 \\ S &= 1 \end{aligned}$$

θ_1 es el coeficiente de procedencia fraccional de la configuración: ${}^3\text{He}$

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

+ ³H en la función de ondas completa de ⁶Li⁺, en esta expresión θ_1 es el coeficiente de precedencia fraccional de la partición [3,3] en la función de ondas de ⁶Li⁺, s es el spin del estado final, que en el caso que nos interesa es igual a 1. L y J_J son los momentos angulares orbital y total, respectivamente, del estado final.

En la transición dipolar eléctrica se deben cumplir las siguientes reglas de selección⁽¹⁸⁾

$$\begin{array}{ll} \Delta J = \pm 1, 0 & \text{no } 0 \rightarrow 0 \\ \Delta L = \pm 1, 0 & \text{no } 0 \rightarrow 0 \\ \Delta T \neq 0 & \text{debido a que } {}^6\text{Li es un núcleo} \end{array}$$

autoconjugado, y

$$\Delta s = 0$$

porque no se han tomado en cuenta los términos de spin en H_{int} pues son muy pequeños. Como el estado final tiene s=1, esta última regla sugiere que la función de ondas del estado inicial tenga también s=1 (el singulete s=0 no contribuye).

Así pues el estado inicial se debe poner como

$$\psi_i = \frac{1}{k_1 r} \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{J=L-1}^{L+1} \sqrt{4\pi(2L+1)} i^L e^{i(\sigma_L - \sigma_0)} C(L J; 0 M_i) x \quad (III-9)$$

$$\times u_{J_i L}(k_1 r) \mathcal{Y}_{J_i L; 0 M_i}^{M_i}(\hat{k}_1 \cdot \hat{r})$$

en donde $\mathcal{Y}_{J_i L; 0 M_i}^{M_i}(\hat{k}_1 \cdot \hat{r})$ es el armónico esférico vectorial y $u_{J_i L}(k_1 r)$ es la función de ondas radial del estado inicial.

Substituyendo (III-9) y (III-8) en (III-6) y esta última en (III-1), se

obtiene la siguiente expresión para la sección diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\pi^2 M^2}{8\pi(2S+1)kM} \left[\sum_{M_f} \sum_{J_f} \sum_{J_i} \left\{ Q_{L_f J_f} Q_{L_i J_i}^* \right. \right. \\ \times C(2, 1, J; m_2, M_1) C(2, 1, J'; m_2', M_1') \left. \left. \begin{pmatrix} J_f & 1 & J \\ -M_f & M_f - M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & 1 & J \\ -M_f & M_f - M & M' \end{pmatrix} \right\} \right. \\ \left. \times Y_{L_f}^{m_f}(\hat{k}) Y_{L_i}^{m_i}(k) \right] \Delta_{M_f - M}(\hat{k}, \gamma) \quad (III-10)$$

Hemos expresado al armónico esférico vectorial como

$$\mathcal{Y}_{J_f L_f M}^{M_f}(\hat{k}, \hat{r}) = \sum_{M_2} Y_{L_f}^{m_2}(\hat{k}, \hat{r}) X_{M_2}^{M_f} C(J, 2, 1; m_2, M_1); M_2 = M - m_2 \\ y \\ Y_L^0(\hat{k}, \hat{r}) = \frac{4\pi}{2L+1} \sum_{m'} Y_L^{m'}(\hat{r}) Y_L^{m'}(\hat{k}) \quad (III-11)$$

las integrales angulares se hacen usando las técnicas conocidas del álgebra de momentos angulares.(20)

Las integrales radiales $Q_{L_f J_f}$ se definen por la expresión siguiente:

$$(-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & 1 & J_f \\ -M_f & M_f & M_f \end{pmatrix} Q_{L_f J_f} = \int_0^\infty r^2 dr \int d\Omega \begin{pmatrix} J_f & 1 & J_f \\ -M_f & M_f & M_f \end{pmatrix} Q_{L_f J_f} Y_{L_f}^{M_f}(\hat{r}) Y_{L_f}^{M_f}(\hat{k}) \\ = i^{2+1} e^{i(\sigma_{L_f} - \sigma_0)} \sqrt{\frac{4M^2}{3\pi k}} k_{\gamma}^{\frac{1}{2}} e^{i\phi} \langle \mathcal{D}_{E1}(k, \gamma) Y_{L_f}^{M_f}(\hat{r}) Y_{L_f}^{M_f}(\hat{k}) \rangle \quad (III-12)$$

a su vez $\Delta_{M_f - M}(\hat{k}, \gamma)$ se define como

$$\Delta_{M_f - M}(\hat{k}, \gamma) = \int d\Omega \mathcal{D}_{E1}^{(1)*}(k, \gamma) | \dots \rangle \quad (III-13)$$

III.3 RESONANCIAS

En el canal de entrada, la interacción nuclear entre el núcleo de helio 3 (^3He) y el tritio (^3H) puede producir resonancias, las cuales se ponen de manifiesto en la dependencia con la energía de la parte radial de la función de ondas del estado inicial. En la parte II de esta tesis se ha indicado como se puede exhibir esta conducta resonante haciendo un desarrollo de la función de ondas en términos de estados ligados, estados resonantes y una parte residual o fondo. A continuación se explica como se puede usar este método en el ejemplo que nos ocupa.

En el caso en que el potencial efectivo que actúa entre ^3He y ^3H no sea diagonal en el momento angular total λ , por ejemplo en el caso de que haya fuerzas tensoriales entre ^3He y ^3H , las funciones radiales $u_{\lambda}(r)$ de la misma J y la misma paridad satisfacen un sistema de ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned}
 u_{J-1}^{(J)}(r) &= u_{J-1}^{(-)}(kr) e^{-i\sigma_{J-1}} + \\
 &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G_{\lambda=J-1}^{(+)}(r, r') \left[V_{J-1, J-1}(r', r'') u_{J-1}^{(J)}(r'') \right. \\
 &+ \left. V_{J-1, J+1}(r', r'') u_{J+1}^{(J)}(r'') \right] dr'' dr' \quad (III-14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{J+1}^{(J)}(r) &= u_{J+1}^{(-)}(kr) e^{-i\sigma_{J+1}} + \\
 &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G_{\lambda=J+1}^{(+)}(r, r') \left[V_{J+1, J+1}(r', r'') u_{J+1}^{(J)}(r'') \right. \\
 &+ \left. V_{J+1, J-1}(r', r'') u_{J-1}^{(J)}(r'') \right] dr'' dr'
 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones (III-14) se puede escribir en forma más

compacta y conveniente en términos de un vector de dos componentes:

$$u^{(J)}(r) = \begin{pmatrix} u_{J-1}^{(J)}(r) \\ u_{J+1}^{(J)}(r) \end{pmatrix} \quad (III-15)$$

y una matriz de 2×2

$$V = \begin{pmatrix} V_{J-1, J-1} & V_{J-1, J+1} \\ V_{J+1, J-1} & V_{J+1, J+1} \end{pmatrix} \quad (III-16)$$

En el caso que nos interesa

$$G_{0J}^{(+)}(r, r') = \begin{pmatrix} G_{z=J-1}^{(+)}(r, r') & 0 \\ 0 & G_{z=J+1}^{(+)}(r, r') \end{pmatrix} \quad (III-17)$$

$G_{0z}^{(+)}(r, r')$ es la función de Green del problema de Coulomb (ecuación (I.6)).

$$G_{0z}^{(+)}(k; r, r') = \frac{-F_z(kr_<) u_z^{(+)}(kr_<)}{k} e^{i\alpha_z k}$$

El sistema (III-14) se reescribe como:

$$u^{(J)}(r) = u_{0z}^{(-)}(r) + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G_{0J}^{(+)}(r, r') V(r', r'') u^{(J)}(r'') dr' dr'' \quad (III-18)$$

la ecuación de Lippmann-Schwinger (III-18) tiene una solución formal en términos de la función de Green $G_J^{(+)}$ del problema completo

$$u^{(J)}(r) = u_{0z}^{(-)}(r) + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G_{zJ}^{(+)}(r, r') V(r', r'') u_{0z}^{(-)}(r'') dr' dr'' \quad (III-19)$$

La función de Green $G_{zJ}^{(+)}$ satisface una ecuación semejante a (III-18)

en la que $u_0^{(+)}$ aparece en lugar de $u_0^{(-)}$.

El método explicado en la parte II de este trabajo se generaliza de manera inmediata a este caso y permite desarrollar la función de Green $G^{(+)}_J(r, r')$ en eigenfunciones de los estados ligados, estados de Gamow y un continuo de funciones de la dispersión.

$$\begin{aligned}
 G^{(+)}_J(r, r') = & \sum_{\text{ligados}} u_{nJ}(r) \frac{1}{E-E_n} \tilde{u}_{nJ}(r') + \\
 & + \sum_{\text{resonancias}} u_{\lambda J}(r) \frac{1}{E-E_\lambda} u_{\lambda J}(r') + \\
 & + \int_C u_J(r, \epsilon) \frac{d\epsilon}{E-\epsilon} \tilde{u}_J(r', \epsilon)
 \end{aligned}
 \tag{III-20}$$

en esta expresión, \tilde{u} son las matrices renglón adjuntas de las matrices columna u_{J} .

Los estados ligados y los estados de Gamow satisfacen una ecuación de Lippmann-Schwinger homogénea

$$u_{nJ}(r) = \left[\int_0^\infty \int_0^\infty G_0^{(+)}(r, r') V(r, r'') u_{nJ}(r''') dr'' dr''' \right] \delta_{kn} \tag{III-21}$$

y los estados de la dispersión satisfacen una ecuación de Lippmann-Schwinger inhomogénea

$$u_J(r, E) = u_0^{(-)}(r, E) + \int_0^\infty \int_0^\infty G_0^{(+)}(r, r') V(r', r'') u_J(r'', E) dr' dr'' \tag{III-22}$$

El desarrollo en estados de Gamow de u_J , se obtiene substituyendo (III-20) en (III-19)

$$u^{(J)}(r) = u_0^{(-)}(r) + \sum_{\text{ligados y n resonancias}} u_{nJ}(r) \frac{b_{nJ}}{E-E_n} + \int_C u_J(r, \epsilon) \frac{d\epsilon}{E-\epsilon} C(\epsilon) \quad (III-23)$$

en esta expresión, b_{nJ} y $C(\epsilon)$ son

$$b_{nJ} = \left[\int \int \tilde{u}_{nJ}(r, E^+) V(r, r') u_0^{(-)}(r') dr' dr \right]_{E=E_n} \quad (III-24)$$

$$C(\epsilon) = \left[\int \int \tilde{u}_J(r, E^+) V(r, r') u_0^{(-)}(r') dr' dr \right]_{E=\epsilon} \quad (III-25)$$

Si nos fijamos en la componente u_{nJ}^J de $u^{(J)}$, la ecuación (III-23) queda como:

$$u_{lJ}^{(J)}(r) = u_{0l}^{(+)}(kr) e^{i\sigma_l} + \sum_n u_{nJ}^J(r) \frac{b_{nJ}}{E-E_n} + \int_C u_{lJ}^{(J)}(r, \epsilon) \frac{C(\epsilon)}{E-\epsilon} d\epsilon \quad (III-26)$$

Para obtener una forma explícita para la función de ondas sustituimos este resultado en la ecuación (III-9) lo cual nos da

$$\psi_{m_1}^{(res)}(r) = 2\pi \sqrt{\frac{M^2}{kM}} \sum_{l \neq 0} \sum_{n \neq l} \sum_{J=|l-1|}^{l+1} \left\{ i^{l+1} e^{i(\sigma_l - \sigma_0)} C(lJ; m_2 M_1) \times \right. \\ \left. \times \sum_{n \neq J} e^{i\phi_l}(\epsilon) \Gamma_{lJ, n}^{(1)}(\epsilon) u_{lJ}^{(n)}(r) \right\} \mathcal{Y}_{lJ; m_2 M_1}(\hat{r}) \frac{m_2}{2} e^{\delta}(\hat{k}) + \quad (III-27)$$

+ ψ Background

En esta expresión se ha usado la notación

$$e^{i\phi} \Gamma_{LJ}^{\frac{1}{2}}(e1) = \sqrt{\frac{M^2}{kM}} \sum_{nLJ} \quad (III-28)$$

en donde

$$\sum_{nLJ} = \left[\int u_{nLJ}(k'r') v_{LJ}(r') F_L(kr') dr' \right]_{k_n} \quad (III-29)$$

La definición de la semianchura elástica $\Gamma_{LJ}^{\frac{1}{2}}(e1)$, implícita en la expresión (III-28) coincide con la definición normalmente usada en los libros de texto como ha sido demostrado por Deborah & Watson.⁽²⁵⁾

Si sustituimos ahora (III-27) en (III-6) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle f m_f | H_{int}^p | i m \rangle^{res} &= 2\pi \sqrt{\frac{M^2}{kM}} \sum_{LJ} \sum_{L'J'} \frac{2+1}{J' |L'-1|} (1^L e^{i(\sigma_L - \sigma_0)}) \times \\ &C(L'J'; m_2 M_1) \times i e C_L \frac{\phi_{LJ}(e1)}{E - E_{LJ}} \Gamma_{LJ}^{\frac{1}{2}}(e1) \sum_{\mu} \langle f J_f m_f | \mathcal{D}_{E1}^{\mu} | i J_i m_i \rangle \times \\ &\times P \mathcal{D}_{\mu}^{(1)*}(\hat{k}_\gamma) Y_L^m(\hat{k}) \end{aligned} \quad (III-30)$$

El término del fondo no se ha tomado en cuenta, pues en la vecindad de una resonancia su contribución a la sección es comparativamente muy pequeña.

El teorema de Wigner-Eckart permite factorizar la dependencia del elemento de matriz nuclear en los números cuánticos magnéticos⁽¹⁶⁾

$$\begin{aligned} \langle f J_f m_f | \mathcal{D}_{E1}^{\mu} | i J_i m_i \rangle &= (-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & 1 & J_i \\ -M_f & \mu & M_i + M_1 \end{pmatrix} \times \\ &\times (J_f L_f J_i | \mathcal{D}_{E1}^{\mu} | J_i) \end{aligned} \quad (III-31)$$

$$M = m_f + M_1 \quad (III-32)$$

A su vez, este elemento de matriz se puede reescribir si se define la semianchura radiativa por

$$\Gamma_{J_2 \rightarrow J_1}^{(\gamma)} = \frac{4}{2J_2+1} \cdot \frac{1}{3} k \gamma e^2 c_1^2 | (J_2 L_2 1 || \mathcal{O}_{E1} Y_1^{u*} || J_1 L_1) |^2 \quad (III-33)$$

Esta expresión coincide con la definición común de la anchura radiativa, tal como se encuentra, en el texto de G.R. Satchler⁽²²⁾

Con la definición anterior, la expresión (III.31) da

$$e^{iX_{2J}} \langle J_2 L_2 | \mathcal{O}_{E1} Y_1^{u*} | J_1 M_1 \rangle = (-1)^{J_2 - M_2} \frac{\sqrt{3(2J_2+1)}}{4} \frac{1}{k_Y^{\frac{1}{2}} e c_1} \times \\ \times \begin{pmatrix} J_2 & 1 & J_1 \\ -M_2 & u & M_1 \end{pmatrix} \Gamma_{2J} \rightarrow \rho_{J_2}^{J_1}(\gamma) \quad (III-34)$$

Si se substituye esta expresión en (III-30) se obtiene

$$\langle \rho_{J_2}^{J_1} | H_{int}^{(1)} | m_1 \rangle = -\pi \frac{k^2}{k m k} \sum_{L_2=0}^{\infty} m_2 \sum_{J_2=L_2-2}^{L_2+1} J_2 = |L_2-1| \{ 1^{L_2+1} e^{i(\sigma_2 - \sigma_0)} \} \times \\ \times C(2J_2; m_2, M_1) e^{i\phi_{2J}}(e_1) \Gamma_{2J}(e_1) \Gamma_{2J} \rightarrow \rho_{J_2}^{J_1}(\gamma) \sqrt{3(2J_2+1)} (-1)^{J_2 - M_2} e^{iX_{2J}} \\ \frac{1}{E - E_{2J}} \quad (III-35)$$

$$\times \sum_{\mu} [P_{\mu}^{(1)}]_{\mu}^{(1)}(\hat{k}\gamma) \begin{pmatrix} J_2 & 1 & J_1 \\ -M_2 & \mu & M_2 + M_1 \end{pmatrix} | Y_{2L}^{m_2}(\hat{k}) |$$

La regla $\mu = M_2 - M_1$, implícita en el símbolo de $9j$ permite hacer la suma sobre μ

$$\begin{aligned}
\langle J M_J | H_{int}^{HP} | l m_l \rangle &= \pi \sqrt{\frac{M^2}{K K_Y m}} \sum_{l=0}^{\infty} m_{l^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{J=|l-1|}^{l+1} |l-1| (\sqrt{3(2J+1)}) (-1)^{J-M_J} \times \\
&\times l^{l+1} e^{i(\sigma_l - \sigma_a)} C(l 1 J_1 m_l M_1) e^{i \phi_{2J}(e_1)} \frac{\Gamma_{lJ}^{\frac{1}{2}}(e_1) \Gamma_{lJ}^{\frac{1}{2}}(\gamma)}{E - E_{lJ}} L_{lJ} J_{lJ}^{\times} \\
&\times \begin{pmatrix} J_{lJ} & 1 \\ -M_J & M_J - M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ \nu \end{pmatrix} Y_{lJ}^{M_J}(\hat{k}) \left[P \mathcal{D}^{(1)*}_{M_J - M, P}(\hat{k}) \right] \quad (III-36)
\end{aligned}$$

Substituyendo esta expresión en la fórmula para la sección de captura, eq.(III-1), se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{K_Y}{\pi v(2S+1)} \frac{\pi^2 3M^2}{K K_Y m} \sum_{M_1 M_J} \sum_n \sum_l \sum_{m_l} \sum_J (\sqrt{2J+1}) (-1)^{J-M_J} \times e^{i \chi_{2J}} \\
&\times l^{l+1} e^{i(\sigma_l - \sigma)} C(l 1 J_1 m_l M_1) e^{i \phi_{2J}(e_1)} \frac{\Gamma_{n2J}^{\frac{1}{2}}(e_1) \Gamma_{n2J}^{\frac{1}{2}}(\gamma)}{E - E_{n2J}} J_{lJ}^{\times} \\
&\times \begin{pmatrix} J_{lJ} & 1 \\ -M_J & M_J - M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ M_1 + M \end{pmatrix} Y_{lJ}^{M_1 + M}(\hat{k}) \left| \times \left| \mathcal{D}^{(1)*}_{M_J - M, P}(k\gamma) \right| \right|^2 \quad (II-37)
\end{aligned}$$

La suma sobre P es inmediata, ya que P sólo aparece en la matriz de rotación, dando un factor

$$\Delta_{M_J - M}(k\gamma) = \sum_P \left| \mathcal{D}^{(1)*}_{M_J - M, P}(k\gamma) \right|^2$$

Cuando para cada (lJ) hay una resonancia que domina a los otros términos de la suma sobre n, se conserva solo el término dominante en III-37.

Con el objeto de aligerar la notación y hacer la suma sobre

proyecciones del spin usará la abreviación

$$Q_{LJ}^{(res)} = \sqrt{2J+1} i^{L+1} e^{i(\sigma_L - \sigma_0)} e^{i\phi_{LJ}} \frac{\Gamma_{LJ}^{\frac{1}{2}}(e_1) \Gamma_{LJ}^{\frac{1}{2}}(\gamma)}{E - E_{LJ}} e^{iX_{LJ}} \quad (III-38)$$

Esta definición de $Q_{LJ}^{(res)}$ es consistente con (III-12) por lo que al substituirse en (III-37) se obtiene de nuevo la ecuación (III-10) para la sección diferencial pero con Q_{LJ} dada por la ec. (III-38). En III-38 no se ha escrito la contribución que proviene del fondo ($\Psi_{Background}$) pues esta es pequeña en comparación con el término resonante cuando $E \sim \text{Re } E_{LJ}$.

Eligiendo el eje Oz , respecto del cual se cuantiza las proyecciones de los momentos angulares, en la dirección del haz incidente $k=0$; y recordando que

$$Y_L^{m_L}(\hat{0}) = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} P_L^m(1) \delta_{0m_L} \quad (III-39)$$

$$Y_L^{m_L}(\hat{0}) = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \delta_{0m_L}$$

Las sumas sobre m_L y m_L' en (III-10) se hacen de inmediato, y se obtiene el resultado

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\pi h^2}{4k^2 v(2S+1)k\bar{m}} \left[\sum_{M_1} \sum_{M_2} \sum_{J} \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \times \right. \\ \left. \times C(2LJ; 0M_1) C(2L'J'; 0M_1) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \times \begin{pmatrix} J_j & 1 & J \\ -M_j & M_j - M_1 & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 1 & J' \\ -M_j & M_j - M_1 & M_1 \end{pmatrix} \times \\
 & \times Q_{\ell, J}(\text{res}) Q_{\ell, J'}^*(\text{res}) \Delta_{M_j, M_1}(\hat{k}r) \quad (III-40)
 \end{aligned}$$

La sección total se obtiene integrando sobre los ángulos \hat{k}_Y . Como $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ depende de \hat{k}_Y solamente en el factor Δ_{M_j, M_1} , basta con hacer la integral sobre la función

$$\Delta_{M_1, -M_j} = \begin{cases} \frac{2}{3} [1 - P_2(\cos\theta)] M_1 = M_j \\ \frac{2}{3} [1 + \frac{1}{2} P_2(\cos\theta)] M_1 - M_j = \pm 1 \end{cases}$$

Efectuando la integral obtenemos que la expresión para la sección total de captura es

$$\begin{aligned}
 \sigma_T = & \frac{2\pi^2 M^2}{\hbar v k m (2S+1) k m} \sum_{M_1} \sum_{M_j} \sum_{\ell} \sum_{\ell'} (\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}) \times \\
 & \times C(\ell 1 J; 0 M_1) C(\ell' 1 J'; 0 M_1) \times \\
 & \times \begin{pmatrix} J_j & 1 & J \\ -M_j & M_j - M_1 & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_j & 1 & J' \\ -M_j & M_j - M_1 & M_1 \end{pmatrix} \times \\
 & \times Q_{\ell, J} Q_{\ell', J'}^* \quad (III-41)
 \end{aligned}$$

Efectuando la suma sobre spines iniciales y el promedio sobre spines finales la expresión para la sección total es

$$\sigma_T = \frac{2\pi M^2}{\hbar v k m (2S+1)} \sum_{\ell} \sum_{J} |Q_{\ell}(\text{res})|^2 \quad (III-42)$$

Si ahora se substituye (III-38) en (III-42) se obtiene finalmente

$$\sigma_T = \frac{\pi\lambda^2}{(2s+1)} \sum_L \sum_{J=\frac{L}{2}-1}^{L+1} (2J+1) \frac{\Gamma_{LJ}(e1)\Gamma_{LJ=L-J}J(\gamma)}{(E - e_{LJ})^2 + \frac{1}{4}\Gamma_{LJ}^2} \quad (\text{III-43})$$

De igual manera, la expresión para la sección diferencial que se obtiene de III.40 es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \sigma_T + a_2(E) P_2(\cos\theta) \quad (\text{III-44})$$

en donde a_2 está dada por

$$a_2 = \frac{3\lambda^2}{8(2s+1)} \sum_L \sum_{J=\frac{L}{2}}^{L-1} \left[\left(\frac{1}{3} \delta_{LJ} \delta_{JJ'} - \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} Z(LJ'JJ') \right) Q_{LJ} Q_{L'J'}^* \right] \quad (\text{III-45})$$

el factor que resulta del álgebra de los momentos angulares (III-45) abreviado como $Z(L, L'; J, J')$

$$Z(L, L'; J, J') = \sum_{M_1} (L 0 1 M_1 | L 1 J) (L' 0 1 M_1 | L' 1 J') \begin{pmatrix} J & 1 & J \\ -M_1 & 0 & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 1 & J \\ -M_1 & 0 & M_1 \end{pmatrix} \quad (\text{III-46})$$

Recordamos que, en esta expresión no se han escrito los términos que provienen del fondo porque en la región de las resonancias, esta contribución es pequeña comparada con los términos resonantes. En el caso en que la energía E no sea muy vecina de la energía resonante y cuando las resonancias son estrechas y aisladas, la aproximación anterior deja de ser buena. Para describir correctamente el comportamiento de la sección como función de la energía entre resonancias se debe tomar en cuenta la contribución del fondo, ver por ejemplo Lynn⁽²⁶⁾. Sin embargo, como el interés de esta tercera parte del trabajo es sólo el de demostrar como se puede usar el método descrito en la segunda parte y no el de hacer un cálculo realista del problema nuclear, no se escribirán las fórmulas completas, es decir con todo y la contribución del fondo, pues son muy largas y no agregan nada nuevo a la discusión del comportamiento resonante.

La comparación de las expresiones obtenidas en esta sección, ecuaciones (III.41), (III.42), (III.43), (III.44) y (III.45) con los datos experimentales ha sido hecha por A. Mondragón y E. Hernández.⁽³³⁾ Los resultados obtenidos del ajuste de estas expresiones a los datos experimentales es excelente.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos demostrado que la teoría de Fredholm de las ecuaciones integrales lineales es una herramienta apropiada para el estudio de las propiedades de las resonancias y de los estados resonantes en potenciales que son la suma de un potencial no local de soporte compacto o no-compacto y un potencial de Coulomb.

A partir de estos resultados, hemos demostrado que se puede hacer un tratamiento sistemático y general de las resonancias y los estados resonantes en potenciales locales o no-locales en presencia de un potencial coulombiano. Hasta donde estamos enterados, antes de este trabajo el único tratamiento sistemático de las resonancias y los estados resonantes en un potencial no local en presencia de un potencial coulombiano se había restringido al caso en que el potencial no local es separable⁽⁵⁾. La generalización lograda nos da la posibilidad de aplicar nuestros resultados a casos de interés físico en forma realista. Tenemos la esperanza, bien fundada, de poder obtener resultados numéricos con ventaja en problemas de interés⁽²¹⁾. En la parte final de esta tesis hemos demostrado que nuestros resultados también se pueden aplicar a la discusión formal de un problema particular de la física nuclear, la captura radiativa directa de ^3He por ^3H en estados excitados de ^6Li y de este modo pudimos exhibir la estructura resonante de la sección de captura directa en una forma simple y sin necesidad de introducir separaciones del espacio en regiones interna y externa y parámetros arbitrarios, como se hace en varias versiones de la forma tradicional de la teoría de reacciones nucleares⁽²²⁾.

Los resultados mencionados se obtuvieron separando el problema coulombiano explícitamente y escribiendo las ecuaciones integrales satisfechas por las soluciones de la ecuación de Schrödinger con ayuda de la función de Green del problema coulombiano G_0^+ . Gracias a esto, la información referente al potencial de Coulomb queda convenientemente expresada en la función de Green G_0^+ y en las ecuaciones integrales que relacionan a la función de Green completa G^+ con la función de Green del problema coulombiano G_0^+ . Luego, desarrollamos a la función de ondas y a la función de Green en términos de estados ligados, estados resonantes y de un continuo de estados de la dispersión con número de ondas complejo. Estos resultados son una generalización al caso de potenciales no locales, con interacción coulombiana, de desarrollos similares obtenidos por otros autores para potenciales locales de alcance finito^(12,13,14) o para potenciales no locales de rango 1⁽⁵⁾.

También hemos encontrado las reglas de ortogonalización, normalización y la relación de completez satisfechas por los eigenestados de la ecuación de Schrödinger correspondientes a eigenvalores complejos con $\text{Im}E_n < 0$.

Aún cuando en este trabajo no hemos puesto énfasis en el rigor matemático, las demostraciones son completas y correctas. Creemos que la demostración de la regla de normalización de los estados de Gamow que se presenta aquí es original y tiene la ventaja de establecer una relación analítica entre las soluciones de la ecuación de Schrödinger y las de las funciones Sturmianas correspondientes.

REFERENCIAS

- 1.- B. Lippmann and J. Schwinger.
Phys. Rev. 79, 469 (1950).
- 2.- Jost, R., A. Pais.
Phys. Rev. 82, 840 (1951).
- 3.- Newton, R.G.
"Scattering Theory of Waves and Particles".
New York 1966.
- 4.- von der Heydt, M.
Annalen der Physik Z. (29), 309 (1973).
- 5.- van Haeringen H.
J. Mathematical Physics 24, (5), 1152 (1983).
J. Mathematical Physics 24, (5), 1157 (1983).
J. Mathematical Physics 24, (5), 1267 (1983).
J. Mathematical Physics 24, (10), 2467 (1983).
J. Mathematical Physics 24, (5), 1274 (1983).
J. Mathematical Physics 25, (10), 3001 (1984).
Phys. Rev. A 32, (1), 677 (1985).
- 6.- Bertero, M., G. Talenti y A. Viano.
Nucl. Phys. A115, 395 (1968).
- 7.- Smithies, F.
Integral Equations.
Cambridge 1965.
- 8.- Halmos, P.C.
"Introduction to Hilbert Space".
Chelsea Publishing Co. New York 1951.
página 35.
- 9.- Gradshteyn, I.S. y I.M. Ryzhik.
"Table of integrals series and products".
3.381.3 pag. 317.
3.382.3
Funciones de Whittaker pag. 1059.
Secciones 9.22-9.23.
- 10.- Marsden Jerrold E.
"Basic Complex Analysis"
W.H. Freeman and Company. San Francisco 1973.
Capítulo 3 pag. 185.
- 11.- Lovitt, William Vernon
"Linear Integral Equations"
Dover Publications Inc., New York (1950) pag. 34 y 38.
- 12.- Hakkio, N.
Prog. Theor. Phys. 33, 1116 (1965).

- 13.- Romo, W.
Nucl. Phys. A109, 265 (1968).
Nucl. Phys. AT69, 353 (1971).
- 14.- Garcia-Calderón, G. and R.E. Peierls.
Nucl. Phys. A265, 443 (1976).
- 15.- Fortes, M. and G. Garcia-Calderón.
Lettere al Nuovo Ciment.
Vol. 28, No.11 (1980).
- 16.- M.E. Rose.
Elementary Theory of Angular Momentum.
New York. John Wiley and Sons Inc. 1957 pag 88.
- 17.- J.A. Gaunt.
Trans. Roy. Soc.
London A 228, 195 (1928).
- 18.- A. de Shalit and H. Feshback.
Theoretical Nuclear Physics.
Volume 1, Nuclear Structure.
New York. John Wiley and Sons Inc. 1974 Capitulo VIII pag.667.
- 19.- Nuclear Structure and Electromagnetic Interactions.
Scottish Universities' Summer School 1964.
Edited by N. MacDonald.
New York Plenum Press 1965.
Photonuclear reactions.
y
"Microscopic Description of Nucleus-Nucleus Collisions".
K. Langanke y H. Friedrich
en
Advances in Nuclear Physics, Vol.17
Ed. J.W. Negele y E. Vogt.
New York Plenum Publishing Co. 1986 pp 223-363.
- 20.- Nuclear Shell Theory.
A. de Shalit and I. Talmi.
Academic Press Inc. London 1963 pag. 63 a 158.
- 21.- Z. Papp.
Journal of Physics A20 (1987) 153-162.
- 22.- G.R. Satchler. Direct Nuclear Reactions.
Oxford University Press 1983 pag. 369.
- 23.- G. Gamow. Z. Phys. 51, 204, (1928).
- 24.- L. Fonda, G.C. Ghirardi, and S. Rimini; Rep. Progr.Phys. 41, 587
(1978).
F.A. Gareev and J. Bang. Fiz. Elem.
Chastits At. Yadra 11, 813 (1980).
Sov. J. Part. Nucl. 11, 323 (1980)

- 25.- D.K. Watson, Phys. Rev. A34 (2) pag. 1016 (1986).
- 26.- J.E. Lynn, The Theory of Neutron Resonance Reactions Oxford. Clarendon Press 1968 Cap. VII pag. 291-350.
- 27.- E. Hernández and A. Mondragón.
Phys. Rev. 29, 3 (1984) 722.
- 28.- Ver referencia 3.
Ecuaciones: 14.42, 14.45, 14.48 y 14.49; págs.429 a 430.
- 29.- Ibid.
Ecuación: 7.26; pág. 184.
- 30.- Ibid.
Ecuación: 12.128b; pág. 371.
- 31.- Ibid.
Ecuación: 12.43; pág. 343.
- 32.- A. Mondragón y J. M. Velázquez.
"Resonances and resonant states in non-local potentials" en
Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics. p 353-371.
Ed. T.H. Seligman and H. Nishioka.
Lecture Notes in Physics 263 (1986)
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
London Paris Tokyo.
- 33.- A. Mondragón and E. Hernández.
"Radiative capture of ^3He by ^1H to the first excited state of
 ^6Li ".
Proc. of the 6th. International Symposium on Capture Gamma-Ray
Spectroscopy.
A. Mondragón y E. Hernández.
por publicarse en Journal of Physics G .
- 34.- J. Humblet.
Nucl. Phys. 50 (1964) 1-16.
- 35.- W. V. Lovitt.
"Linear Integral Equations"
Dover Publications Inc. New York 1950.
pp. 43 a 46.
- 36.- John R. Taylor.
"Scattering Theory: The Quantum Theory on Non relativistic Collisions".
John Wiley & Sons, Inc. New York 1972.
Capitulo 8, p.131.