TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS. (MATEMATICAS)

"SOBRE LOS DOMINIOS DE EQUICONTINUIDAD DE UNA FUNCION RACIONAL"

FEDERICO SANCHEZ BRINGAS. 1983

A principios de este siglo los matemáticos Gaston Julia y M. Fatou entre otros, se interesaron por estudiar la dinámica de las funciones holomorfas en la esfera de Riemann. La idea consiste en observar el comportamiento de los puntos de la esfera bajo repetidas aplicaciones (iteraciones) de una función holomorfa.

Su punto de vista parte del estudio de los subconjuntos de la esfera S^2 para los cuales la familia de funciones $\{R_n(z)\}$ definida por $R(z) = R_1(z)$ y $R_n(z)=R\circ R_{n-1}(z)$, no es normal.

Se dice que la familia $\{R_n(z)\}$ es normal en $z_0 \in S^2$ si existe V vecindad de z_0 para la cual toda subsucesión $\{R_n(z)\}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos.

Al conjunto de puntos donde $\{R_n(z)\}$ no es normal se le llama conjunto de julia y se denota por J_R.

La principal herramienta que utilizaron fue el "teorema de Montel" para familias normales [8].

Estas investigaciones arrojaron propiedades interesantes acerca de J_R.

Se enunciaran algunas de ellas que se consideren de importancia y que se encuentran estudiadas en [6] con un enfoque mas moderno.

i) $J_R \neq \emptyset$ y cerrado

ii) J_R es completamente invariante es decir $R_n(J_R)=J_R$ y $R_{-n}(J_R)=J_R$

iii) Si $z \in J_R$, z es punto de acumulacion de $\{R_{-n}(x) \mid x \in S^2$ con esepción de a lo mas dos puntos: x_1, x_2 en S^2

iv) J_R es perfecto

v) J_R es homogeneo. es decir si $z \in J_R$ y V es una vecindad de x denotandose $J_R \cap V = J$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R^n(J) = J_R$

vi) O bien $Int(J_R) = \emptyset$ o bien $J_R=S^2$

de hecho se conocen ejemplos cuando $J_R = S^2$ $(R(z) =$

vii) J_R puede ser completamente disconexo

Con este afán, se estudió tambien el complemento de J_R, (J_R^c) en S^2, es decir, donde $\{R_n(z)\}$ es normal lo cual es equivalente a que $\{R_n(z)\}$ sea equicontinua [1]

Se estudiaron las componentes conexas de J_R^c haciendose observaciones relativas a los puntos periódicos atractores ($z \in S^2$ tal que -- $R_n(z) = z$ y $|R_n'(z)| < 1$) que se encuentran en J_R^c

Lograron inclusive probar que si J_R^c tiene mas de dos componentes conexos entonces tiene una infinidad $\left(R(z)=\frac{z^3+3z}{2}\right)$

Una idea ambiciosa que ocurrió, fue la de clasificar de alguna manera estos dominios de equicontinuidad. En este sentido se encontraron algunos resultados parciales; no obstante tuvieron que transcurrir mas de cincuenta años para que se encontrara una clasificación satisfactoria.

En 1982 Dennis Sullivan clasifica los dominios de equicontinuidad en cinco tipos cualitativamente distintos [7]. Esto lo hace, demostrando un teorema capital en esta teoría.

Teorema:

Toda componente conexa de equicontinuidad es eventualmente periódica.

El presente trabajo tiene por objeto analizar con cierto detalle la demostración de este teorema tratando de hacer incapié en las ideas mas importantes que se encuentran inmersas.

La demostración, que contiene dificultades técnicas interesantes, mezcla campos de la matemática, principalmente:

i) Teoría de superficies de Riemann [3]

ii) Teoría de mapeos cuasiconformes [13]; [11]

iii) Teoría de grupos fuchsianos y geometría hiperbólica [11] [5]

La demostración se consigue por contradicción:

Supongase que existe una región de equicontinuidad A que no es eventualmente periódica. Esta genera una sucesión de discos, o anillos, o superficies de tipo topológico finito donde a partir de --- $n \in \mathbb{N}$, R es un difeomorfismo conforme; o bien una superficie de Riemann de tipo topológico infinito (el límite directo).

Se considera el espacio de estructuras cuasiconformes de dimensión infinita, sobre estas superficies, asociandoselo a cada estructura su único mapeo cuasiconforme uniformizado φ_α

Se parametrizan las deformaciones de R dadas por la conjugación $R^\alpha = \varphi_\alpha R \varphi_\alpha^{-1}$. Estas forman parte de $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2d+1}$ de dimensión finita.

El mapeo que asocia φ_α á R_α es un mapeo inyectivo y real analítico cuyo dominio es un espacio de dimensión infinita y su contradominio es de dimensión finita.

Cabe señalar, por ultimo, que las ideas que aquí se manejan tienen un paralelismo con las que se usan en la nueva demostración del teorema de "finitud" de Ahlfors para grupos kleinianos, dada tambien por Sullivan en 1982 [16].

Se supondrá que $A = A_0$ es una región de equicontinuidad que no es -- eventualmente cíclica.

Denotándose por $A_n = R_n(A_0)$. Como $A_i \cap A_j \neq \phi$ implica que $A_i = A_j$, entonces si $i \neq j$ $A_i \neq A_j$. Mas aún el conjunto $P = \{Z \in S^2 ; R^1(Z) = 0\}$ es finito, así se puede suponer que $A_i \cap P = \phi$ para toda i. Por lo anterior el mapeo $R: A_i \to A_i + 1$ es un mapeo cubriente analítico. Es conveniente señalar que A_i es una superficie hiperbólica (su espacio cubriente universal es el disco hperbólico) dado que $A_i \subset S^2 \quad J_R$ y J_R tiene más de tres puntas.

1.1 <u>Definición</u>.

i) Sea $S_0 \xrightarrow{f_0} S_1 \xrightarrow{f_1} S_2 \xrightarrow{f_2} \ldots$ una sucesión de mapeos analíticos -- suprayectivos entre superficies de Riemann. Se dice que la superficie de Riemann S_∞ es, o mejor aún, representa el límite directo de la sucesión,- si existe una familia $\{\pi_n : S_n \to S_\infty\}_{n \in \mathbb{N}}$ de mapeos suprayectivos y analíticos de forma que $\pi_{n+1} \circ f_n = \pi_n$.

ii) Una superficie de Riemann es no-elemental si su grupo fundamental o grupo cubriente no es abeliano.

Por el teorema del mapeo de Riemann ∞_i como por una de sus consecuencias [ ], se tiene que si una superficie de Riemann abierta contenida -- en S^2, con más de 2 puntos en su frontera, posee grupo fundamental abeliado, analíticamente un disco o un anillo. Así cualquier A_i es disco,- o bien un anillo, o bien una superficie de Riemann no-elemental.

Interesa estudiar las sucesiones $A_n \overset{R}{\to} A_{n+1} \overset{R}{\to} A_{n+2} \overset{R}{\to} \ldots$ en particular cuando el mapeo R o eventualmente inyectivo, así como la existencia del límite directo y su tipo topolúgico, en el caso en que no se pueda asegurar la inyectividad eventual.

1.1 Proposición:

i) Si A_i es un disco (i ε $\pi_1(A_i) = 0$) entonces $R_n(A_i)$ es un disco

ii) Si A_i es un anillo (i ε una región doblemente conexa), entonces $R_n(A_i)$ es un anillo.

iii) Si A_i es no-elemental, entonces $R_n(A_i)$ es no elemental.

Demostración:

Basta probar las afirmaciones en el caso n = 1.

La demostración se reduce a probar que $\partial R(A_{i+1})$ tiene una (en el caso i) o dos (en el caso ii)componentes conexas con más de un punto [ ] p. 68 y p. 72 respectivamente.

La demostración del caso i) es análoga a la del caso ii), por tal motivo será omitida la primera siendo un poco más sencilla.

Supóngase que A_i es un anillo; $\pi_1(A_i) \cong Z$.

Ahora como R: $A_i \to A_{i+1}$ es mapeo cubriente, $\pi_1(A_i) \subset \pi_1(A_{i+1})$, ∞_i A_{i+1} no es simplemente conexo. Asi $A_{i+1}{}^c \neq S^2$ es disconexo y tiene al - menos 2 componentes conexos y a lo más un número finito

(R: $S^2 \to S^2$ es continuo y suprayectivo). Sean $A^1,\ldots,A^n$ las componentes de ${A_{i+1}}^c$, las cuales son cenadas en S^2. Asi $\partial A_{i+1} = \partial A^c_{i+1} = \partial A^1 \cup \ldots \cup \partial A^n$ y cada ∂A^i $i = 1,\ldots,n$ es una componente por lo que ∂A_{i+1} tiene al menos 2 componentes conexas. Pero $\partial A_{i+1} = R(\partial A_i)$ y como ∂A_i tiene 2 componentes, se sigue que ∂A_{i+1} tiene dos componentes.

El hecho de que cada componente tiene más de un punto, se debe a que P es analítica y no constante.

Finalmente, para probar ii) basta observar que si A_{i+1} no fuera no-elemental A_{i+1} sería un disco o un anillo i.e. $\pi_1(A_{i+1}) = 0$ ó $\mathbb{Z}$, pero si $\pi_1(A_{i+1})$ no tiene subgrupos no abelianos, luego entonces $\pi_1(A_i) \not\subset \pi_1(A_{i+1})$ lo cual es contradictorio.

De la proposición anterior se concluye que cada familia $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de discos, anillos o superficies no elementales.

La inyectividad eventual para el caso de una sucesión de discos se sigue inmediantamente del hecho de tener una sucesión de mapeos cubrientes; encontes el mapeo R: $A_i \to A_{i+1}$ para todo número natural i, es un homeomorfismo [ ] p. 31.

Más trabajo se requiere para una sucesión de anillos. Aquí se encuentran dificultades técnicas interesantes, que ilustran cierto tipo de problemas que se presentan al estudiar los renglones de equicontinuidad.

Antes de enunciar la proposición correspondiente a este caso, se probarán dos afirmaciones necesarias para su demostración.

Considere la siguiente situación:

Sea $A_0 \xrightarrow{R_0} A_1 \xrightarrow{R_1} A_2 \xrightarrow{R_2} \ldots$ una sucesión de anillos, cada uno de los cuales es una región de equicontinuidad (iε anillos de equicontinuidad). Donde $A_{i+1} = R_{k_i}(A_i)$ con $K_i \geqslant 1$ y que por simplicidad se escribe R_i en vez de R_{k_i}.

Supóngase además que $R:A_i \to R(A_i)$ es un mapeo cubriente, de grado topológico $d_i \geqslant 2$. Bajo estqs circunstancias las siguientes afirmaciones son ciertas.

Afirmación 1.

Cada componente de A_i, tiene un punto crítico de R.

Demostración

Supóngase que la afirmación es falsa, es decir, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que una de las componentes conexas de $(A_i)^c$, D_i no tiene puntos críticos de R.

$R(A_i)$ es un anillo [ ]. Sean D^1_{i+1}, D^2_{i+1} las componentes conexas de $R(A_i)^c$. Sea C_i la componente de ∂A_i, contenida en D_i; y análogamente -- C^1_{i+1}, C^2_{i+1} las componentes conexas de $\partial R(A_i)$ contenidas en D^1_{i+1}, D^2_{i+1}, respectivamente; cada una de ellas es una curva de

por la conexidad de C_i , $R(C_i) = C^j_{i+1}$ $j = 1,2$
sin pérdida de generalidad sea $R(C_i) = C^1_{i+1}$.
Ahora $A_i \cup D_i$ es una región (de jordan) en S^2
y $\partial(A_i \cup D_i)$ es una componente conexa de ∂A_i .
Para la imagen de D_i bajo R, se tienen las siguientes posibilidades:

$$R(D_i) = \begin{cases} \text{i)} & D^1_{i+1} \\ \text{ii)} & S^2 \setminus |n|(D^1_{i+1}) \\ \text{iii)} & S^2 \end{cases}$$

por lo que

$$R(A_i \cup D_i) = \begin{cases} \text{i)} & A_{i+1} \cup D^1_{i+1} \\ \text{ii)} & S^2 \setminus |n|(D^1_{i+1}) \\ \text{iii)} & S^2 \end{cases}$$

Nótese que en todos los casos $R(A_i \cup D_i)$ es una región simplemente conexa.

Así, probándose que $R: A_i \cup D_i \to R(A_i \cup D_i)$ es un mapeo cubriente, por [ ] p. 31 se tiene que es homeomorfismo. Entonces $R:A_i \to A_{i+1}$ tiene grado topológico 1, contradiciendo la hipótesis.

Para terminar, si $x \in A_i \cup D_i$, x no es punto crítico de R (hipótesis), así x y R(x) son localmente homeomorfos. Si $x_0 \in R(A_i \cup D_i)$, probar la existencia de una vecindad V de x_0 tal que cada componente conexa de $R^{-1}(V)$ es compacta, se sigue fácilmente de que R es un mapeo racional de grado d, $R(A_i \cup D_i)$ es abierto y $R_{-1}(x_o)$ $\partial(A_i \cup D_i) = \phi$. Y esto --- prueba que $R|_{A_i \cup D_i}$ es mapeo cubriente [ ] p. 27; 29. †

Afirmación 2

Sea $p_o = \lim_{n \to \infty} An$ (puntualmente). Entonces la convergencia es uniforme, es decir. Para toda vecindad V de p_o, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $K > N$, $A_k \subset V$.

Más aún, $p_o \in J_R$ y $R^1(p_o) = 0$.

Demostración:

Esta demostración se dividirá en dos partes:

i) Si $n_o \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, $A_n \subset |n|(D^1_{n_o})$. Donde $D^1_{n_o}$ es la componente conexa de $A^c_{n_o}$ que contiene a p_o

ii) Para toda vecindad V de p_o, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $D^1_N \subset V$. Prueba de i).

Sea $x \in A_n \cap D^1_{n_o}$, $A_n \cap A_{n_o} = \phi$ y por conexidad $A_n \subset D^1_{n_o}$.

Ahora por la convergencia puntual, para $x \in A_o$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$R_n(x) \varepsilon |n|(D^1_{n_o})$ si $n > N$; por lo que $A_n \subset D^1_{n_o}$.

Prueba de ii)

Sea F un anillo abierto con las siguientes propiedades.
$\overline{F} \subset A_o$; $\pi_1(F \cup B) \neq 0 \quad \forall B \subset A_o$ es decir, un anillo que le de una vuelta a una componente conexa de A^c_o .
Por [ ] p. un anillo con esas propiedades se puede construir.

Como $\{R_n\}$ converge en compactos, existe
$N \varepsilon \mathbb{N}$ tal que $R_N(F) \subset V$, vecindad de p_o .

Ahora como R es abierta, $R_N(F)$ es abierto.

Sea $\tilde{F}$ la componente conexa de $R_{-N}(R_N(F))$ que contiene a F.
$\tilde{F}$ es abierto en S^2. Así $\partial\tilde{F} \cap \tilde{F} = \phi$. Sea $x \varepsilon \partial\tilde{F} \cap A_o$, $R^1(x) \neq 0$ por lo que $R(x) \varepsilon F$ implica que existe V vecindad conexa de x homeomorfa de $R(x) \subset F$. Asi que $V \subset R_{-N}(F)$ pero V conexa y $V \cap \tilde{F} \neq \phi$, por lo tanto $V \subset \tilde{F}$ $\underset{o}{V}$ se puede asegurar entonces que si $x \varepsilon \partial\tilde{F}$, $R(x) \neq F$.

Por tanto $R_N: \tilde{F} \to R_N(F)$ es mapeo cubriente. Ahora $\tilde{F} = F \cup B$ para $B \subset A_o$, $0 \neq \pi_1(\tilde{F}) \subset \pi_1(R_N(F))$. Tómese $C \subset R_N(F)$ una curva de (lazo simple) no contruible; cada componente de C^c contiene una componente de A^c_N. Sea D_1 la componente de C^c que contiene a p_o . Si $x \varepsilon D_1$, $d(x,p_o) < \sup\limits_{y \varepsilon c} d(y,p_o)$ y $C \subset V$, por lo tanto $D_1 \subset V$ y $D^1_N \subset V$.

Usando i), ii) la primera parte de la afirmación se sigue trivialmente.

Sea V vecindad de p_o tal que $V \setminus \{p_o\}$ no tiene puntos críticos, esto -- siempre se puede suponer debido a que los puntos críticos forman un conjunto finito. Aplicando la primera parte de la afirmación a esta vecindad así como la afirmación 1, se tiene que $R^1(p_o) = 0$. Finalmente $p_o \in J_R$ pues es punto límite de $x \in \partial A_o \subset J_R$ perfecto.

Sea C una curva de jordan en S^2 tal que $\infty \not\in C$; considérense las dos componentes conexas de C^c, se llamará la componente acotada aquélla que- no contiene a ∞.

1.2 Definición:

i) Supóngase que C y R(C) son curvas de jordan que no contienen a ∞.

Sea C_1 la componente acotada de C^c y D_1 la componente acotada de $(R(C))^c$. Se dice que C_1 no explota (bajo R) si $R(C_1) = D_1$. De otra- forma se dice que explota.

Observe que si $R(C_1)$ explota si y sólo sí existe un polo de R en C_1

ii) Sea A un anillo cuya frontera son dos curvas de jordan (sin auto- intersecciones) tal que $\infty \not\in A$, y R(A0 un anillo con las mismas características, tales que $\partial R(A) = R(\partial A)$.

Se dice que la componente acotada A_1 de A^c (que se define de manera matural) no explota bajo R si $R(A_1)$ es la componente acotada de $(R(A))^c$. De otra forma se dice que explota.

De igual manera que en i), obsérvese que A_1 explota si y sólo si existe un polo de R en A_1 .

1.2 Proposición.

Con las hipótesis de las afirmaciones 1 y 2 para la familia $\{A_n\}$ (ver pág.), se puede asegurar que: Existe una familia $\{\tilde{A}_n\}_{n>k}$ de anillos de equicontinuidad que cumple con las siguientes propiedades.

i) $\{\tilde{A}_n\}_{n>k}$ converge a $p_\circ$ uniformemente (ver afirmación 2).

ii) $\tilde{A}_n^1$; $n>k$, no explota bajo R_n. Donde $\tilde{A}_n^1$ es la componente acotada de $\tilde{A}_n^c$

(recuérdese que $R_n = R_{k_n}$).

Conviene describir la idea de la demostración. Se sabe que la familia $\{A_n\}$ converge uniformemente a $p_\circ$, pero no se puede asegurar que las componentes acotadas de sus complementos no exploten en cada nivel k, bajo R_k; entonces en cada nivel k, $A_k \xrightarrow{R_k} A_{k+1}$, se verá que es posible escoger un anillo de equicontinuidad $\tilde{A}_k$, que puede pertenecer a $\{A_n\}$, siendo antecedente de orden menor o igual que n_k, de A_{k+1}; más aún, con la propiedad de que no explote la componente acotada de su complemento y además que $\tilde{A}_k \subset A_k^1$ cuando $\tilde{A}_k \neq A_k$. Esta última propiedad garantiza que

$\{\tilde{A}_k\}$ converge uniformemente a p_o .

Demostración

Sea V vecindad de p_o que n_1 contenga polos de R, como tampoco a ∞. - Una vecindad así siempre existe por conjugación. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que si- $n > N$ $A_n \subset V$.

[afirmación 2]. Se analizará el nivel n_o , $A_{n_o} \xrightarrow{R_{n_o}} A_{n_{o+1}}$ para $n_o > N$.

Es claro que en $A^1_{n_o}$ ni hay polos de R, ni está ∞; pues $A^1_{n_o} \subset V$. Supónga se que $A^1_{n_o}$ explota bajo R_{n_o}. Si para $k < n_o$ se tiene que $R_k(A_{n_o}) \subset A^1_{n_o}$, se define $R_{k^1}(A_{n_o}) = A^1_{n_o}$, donde $k^1 = \max\{k | R_k(A_{n_o}) \subset A^1_{n_o}\}$. Es decir - para $A'_{n_o}{}^1 \subset V$ y es el mínimo antecedente de $A_{n_{o+1}}$ con esta propiedad.

Suponiendo que $A^1_{n_o}$ no explota sin $A'_{n_o} = A_{n_o}$.

Asi $\{A'_n\}_{n > n_o}$ obtenida en cada nivel como se indica, es una familia- de equicontinuidad.

(1.1 proposición) y converge uniformemente a p_o . Observe el siguien te diagrama:

Aún con la construcción anterior no se puede asegurar que $A'^{1}_{n_o}$ no explota bajo R'_{n_o}.

Sin embargo $A'^{1}_{n_o} \subset A^{1}_{n_o}$ no explota bajo R. Si esto sucediera al aplicar R suficientes veces ($K_{n_{o+1}} - K'$ veces) a A'_{n_o}, la componente $A'^{1}_{n_o}$ no explotaría bajo R'_{n_o}, denotándose en tal caso a A'_{n_o} por $\tilde{A}_{n_o}$.

Supóngase que no sucede así, entonces existe una primera imagen de A'_{n_o} de orden menor o igual a $K_{n_{o+1}} - K'$ tal que la componente acotada desu complemento explota bajo R.

Para simplificar la notación, se puede suponer que esto sucede para $R(A'_{n_o}) = A_1 \neq A_{n_{o+1}}$ cumpliéndose que A_1 está contenida en la componente no acotada de A_{n_o} (véase el siguiente diagrama), luego entonces, $A_{n_{o+1}}$ tiene un antecedente de orden 1 en A^{1}_{1}, la componente acotada de A_1^{c}; por lo que existe A_2 antecedente de segundo orden de $A'_{n_{o+1}}$ en $A'^{1}_{n_o}$. (véase el siguiente diagrama).

De la primera construcción se tiene que A'_{n_o} es antecedente de $A'_{n_{o+1}}$ de orden 2. Si A^{1}_{2} no explota bajo R_2, se define $A_2 = \tilde{A}_{n_o}$; de no ser así; se repite el argumento para A_2, pero los antecedentes de orden 2 de $A'_{n_{o+1}}$ forman un conjunto finito, así que este proseso se acaba después de un número finito de pasos al anillo que resulta del último paso del proseso se le denota por $\tilde{A}_{n_o}$.

Obsérvese que $\tilde{A}_{n_\circ} \subset A'^{\,1}_{n_\circ}$, de donde se infiere que $\tilde{A}^{1}_{n_\circ} \subset A'^{\,1}_{n_\circ}$.
Por lo anterior se tiene que $\{\tilde{A}_n\}$ converge uniformemente a $p_\circ$.

El caso analizado fue cuando la componente acotada de $R(A'_{n_\circ})^c$ explotaba, para el caso general, ($i \in$ cuando la componente acotada de $R_j(A'_{n_\circ})^c$ explota, $j < K_{n_\circ} - K'$) se sigue de un razonamiento análogo que no involucra ideas nuevas.

Una vez desarrollada la herramienta necesaria, se puede pasar a demostrar la proposición relativa a la inyectividad eventual del mapeo R en el caso de una sucesión de anillos de equicontinuidad.

1.3 Proposición:

Sea $A_0 \xrightarrow{R} A_1 \xrightarrow{R} A_2 \xrightarrow{R} \ldots$ una sucesión de anillos de equicontinuidad de la familia $\{R_n\}$, donde para cada $I \in \mathbb{N}$ $R: A_i \to A_{i+1}$ es mapeo cubriente.

Entonces R es eventualmente inyectiva; es decir existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ $R: A_n \to A_{n+1}$ es inyectiva.

Comentario: Se puede decir más, $R|_{A_n}$ es homeomorfismo, ya que está definida una función inversa, sin embargo para los fines de este trabajo, basta el resultado de la forma en que se enuncia.

Demostración.

La demostración se hará por contradicción.

Supóngase que para todo número natural N, existe $M > N$ tal que $R: A_M \to A_{M+1}$ no es inyectiva, entonces existe una sucesión de anillos de equicontinuidad

$$A_{k_o} \xrightarrow{R_{k_o}} A_{k_1} \xrightarrow{R_{k_1}} A_{k_2} \xrightarrow{R_{k_2}} \dots$$

donde $R: A_{\sum_o^n k_i} \to R(A_{\sum_o^n k_i})$ es un mapeo cubriente de grado topológico $d_n > 2$

Compárese con la sucesión definida en la pág.

Por simplicidad, represéntese la sucesión por

$$A_o \xrightarrow{R_o} A_1 \xrightarrow{R_1} A_2 \xrightarrow{R_2} \dots$$

donde $R_i = R_{k_i}$ y $A_i = R_{i-1}(A_{i-1})$

Por la proposición 2 existe una familia $\{\tilde{A}_n\}_{n>k}$ de anillos de equicontinuidad que converge a $p_o \varepsilon S^2$ uniformemente y tal que $\tilde{A}_n^{-1}$ su componente acotada; $n > k$ no explota bajo R_n.

Sea V una vecindad suficientemente pequeña de p_o, es decir $J_R \cap \overline{V}^c \neq \phi$. Sea $n_o \varepsilon \mathbb{N}$ tal que si $n > n_o$, $\tilde{A}_n \subset V$. Considérese $e_o \varepsilon J_R$

tal que $e_o \varepsilon \tilde{A}^1_{n_o}$

por ejemplo $e_o \varepsilon \partial\tilde{A}_{n_{o+k}}$ $k > 0$

Sea $W = \tilde{A}_{n_{o+k}} \cup \tilde{A}_{n_{o+k}}$, la cual es una vecindad de e_o.

En vista de lo anterior, $R_n(W)$ no explota bajo R_n, con $n > n_{o+k}$.

Entonces para todo número $n > n_{o+k}$ $R_n(W) \subset V$ y así $R_n(W) \cap J_R \subset V$, y esto obliga a que $J_R \subset V$. [ ] lo cual es una contradicción.

Finalmente, para el caso que se tiene una sucesión de superficies -- no elementales, no se puede asegurar la inyectividad eventual, de R, como antes; no obstante un resultado alternativamente útil, respecto al límite directo aparece La siguiente suposición concreta lo anterior y es - enunciada desde un punto de vista un poco más general.

1.4 Proposición.

Sea $S_1 \xrightarrow{f_1} S_2 \xrightarrow{f_2} S_3 \xrightarrow{f_3} \ldots$ una sucesión de mapeos analíticos cubrientes de superficies de Riemann hiperbólicas; tal que para alguna $i \in \mathbb{N}$, S_i es no-elemental. Entonces el límite directo S_∞ existe. Más aún, ocurre una de las siguientes afirmaciones:

i) $\pi_1(S_\infty)$ no es finitamente generado.

ii) eventualmente las f_i son homeomorfismos.

Demostración

Sea (D^2,π) la superficie cubriente universal de S_1.

Como para todo $i \in \mathbb{N}$, f_i es un mapeo cubriente, $(D^2, f_{n-1}\circ\ldots\circ f_1\circ\pi)$ es la superficie cubriente universal de S_n.

$$
\begin{array}{rcc}
 & D^2 & 0 \\
\pi & \downarrow & \pi_* \downarrow \\
 & S_1 & \pi_1(S_1)=\Gamma_1 \\
f_1 & \downarrow & (f_1\pi)_* \downarrow \\
 & S_2 & \pi_1(S_2)=\Gamma_2 \\
f_2 & \downarrow & (f_2 f_1\pi)_* \downarrow \\
 & \vdots & \vdots \\
f_{n-1} & \downarrow & (f_{n-1}\ldots f_1\pi) \downarrow \\
 & S_n & \pi_1(S_n)=\Gamma_n
\end{array}
$$

Sea $\Gamma_i = \pi_1(S_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$; se tiene que $\Gamma_i \subset \Gamma_{i+1}$
$i_\varepsilon\, \Gamma_i \cong f_{i_*}\Gamma_i \subset \Gamma_{i+1}$ donde $f_{i_*}:\Gamma_i \to \Gamma_{i+1}$ es el monomorfismo inducido por $f_i : S_i \to S_{i+1}$ [ ] p. 153

Ahora bien cada Γ_i puede ser idefinido con el grupo de transformaciones cubrientes de $(D^2, F_{i-1}\circ\ldots\circ f_1\circ\pi)$. [ ] p. 38.

Se sabe que S_i tiene estructura analítica. Esta puede ser levantada de manera natural y única por el mapeo proyección y así $f_{i-1}\circ\ldots\circ f_1\circ\pi$ resulta un mapeo analítico. También se obtiene que toda transformación -- cubriente resulta analítica con esta estructura. [ ] p. 120-121.

Así, la estructura que se levanta en D^2 es la hiperbólica.

Por tanto si $:D^2 \to D^2$ es una transformación cubriente, es homeomorfismo conforme métrica hiperbólica, más aún es isometría. Entonces todo grupo de transformaciones cubrientes es un grupo fuchsiano .

Por lo tanto $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_3 \subset \ldots$ es una familia de grupos fuchsianos que representa a la sucesión .

Sea $\Gamma_\infty = \bigcup^{\infty}\Gamma_i$. Sean $a,b \in \Gamma_\infty$, se define el producto de a por b, $a'\cdot b$, de la siguiente manera, $a,b \in \Gamma_i$ para i suficientemente grande, $a\cdot b = ab$ donde $ab \in \Gamma_i$. Con el producto así definido es fácil comprobar que Γ_∞ tiene estructura de grupo.

Si Γ_∞ tuviese un elemento elíptico, g, éste tendría un punto fijo en D^2 y no podría ser transformación cubriente, siendo distinto de la identidad. [ ] p. 158

Por otro lado Γ_∞ no es abeliano ya que algún Γ_i no lo es, por tanto Γ_∞ es no-elemental. Así que Γ_∞ es necesariamente un subgrupo de PSL(2, $\mathbb{R}$) discreto y $S_\infty/_{\Gamma_\infty}$ es superficie de Riemann y representa el límite discreto de la sucesión.

Para terminar, si se supone que Γ_∞ es finitamente generado y $\{g_1,\ldots g_m\}$ es un conjunto de generadores, se ve fácilmente que existe un número natural n tal que $\{g_1,\ldots,g_n\} \subset \Gamma_n$ por lo que $\Gamma_n = \Gamma_\infty$.

Por lo anterior se tiene que $\Gamma_n = \Gamma_{n+1}$ es decir f_{n+1}, es isomorfismo de grupos y se puede asegurar que f_{n+1} es homeomorfismo [ ] p. 158 asícomo f_{n+s} con $s \in \mathbb{N}$.

†

Los resultados de toda esta sección, pueden ser sumarizados en el siguiente resultado.

<u>2.1 Lema:</u>

Sea A una región de equicontinuidad de la familia $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Entonces sucede una de las siguientes afirmaciones:

i) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que U_{n+i} tiene tipo topológico finito y $R: U_{n+i} \to U_{n+i+1}$ es mapeo cubriente inyectivo (homeomorfismo) para todo $i \in \mathbb{N}$.

ii) O bien, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $A_n \xrightarrow{R} A_{n+1} \xrightarrow{R} A_{n+2} \xrightarrow{R} \ldots$ es una sucesión de mapeos cubrientes analíticos para la cual existe el límite directo A_∞ y tiene tipo topológico infinito.

<u>Demostración</u>

La existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $A_n \xrightarrow{R} A_{n+1} \xrightarrow{R} \ldots$ es una sucesión de mapeos cubrientes que vio en la primera página de esta sección.

Si es una sucesión de anillos o discos se tiene que sucede i). 3 proposición y observación pág. . Si es una sucesión de superfi-- cies no elementales se tiene i) o bien, ii) considerando el hecho de que si $\pi_1(A_\infty)$ es infinitamente generado, A_∞ tiene tipo topológico infinito.

†

En este capítulo se demuestra detalladamente el teorema en el caso en que la región de equicontinuidad es un disco cuya frontera es una curva de jordan rectificable. Es importante sobre todo porque ilustra el tratamiento en los otros casos.

En la parte final se señala las modificaciones que se tienen que hacer para que la demostración funcione en los otros casos.

Antes de la demostración se dará una idea general en tres incisos.

Suponer que una región de equicontinuidad simplemente conexa A, no es eventualmente periódica llevará a una contradicción.

A genera una sucesión de mapeos inyectivos, cubrientes y analíticos ⊏⊐ que puede ser representada por simplicidad por

$$A = A_0 \xrightarrow{R} A_1 \xrightarrow{R} A_2 \xrightarrow{R} \dots \quad (1)$$

i) Si d es el grado de R, se contruye una familia de homeomorfismos reales analíticos de D^2 en sí mismo (automorfismos reales-analíticos) parametrizados de manera real analítica cerca de la identidad por un abierto conexo W_0 vecindad de cero, en un espacio euclidiano de dimensión real 4d+3 y que cumplen las siguientes propiedades:

a) si $\alpha \in W_0$, $\varphi_\alpha : D^2 \to D^2$ es un homeomorfismo K- cuasiconforme, K<1 que se extiende topológicamente a ∂D^2 uniformizado por tres puntos fijos.

b) $\varphi_0\ (z) = z$ para todo $z \in D^2$ (la identidad)

c) Si $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in W_0$; $\varphi_\alpha \neq \varphi_\beta$ si y sólo si son diferentes como automorfismos de ∂D^2. A esta propiedad se le llama la propiedad de inyectividad en W_0 .

ii) Usando el "teorema de mapeo de Riemann" para regiones simplemente conexas W_0 parametriza automorfismos cuasiconformes de la región A, con las propiedades a), b) y c); sustituyendo en ellas A por D^2.

Para cada φ_α definido en $\bar{A}$, se construye una extensión $\varphi'_\alpha : S^2 \to S^2$ K- cuasiconforme (usando la sucesión (1)) que coincide con φ'_α en $\bar{A}$. Así W_0 parametriza real analíticamente a la familia $\{\varphi'_\alpha\}_{\alpha \in W_0}$ de manera que $\varphi'_\alpha \neq \varphi'_\beta$ si y solo si φ'_α y φ'_β son distintos como mapeos en J_R .

Nota: Abusando de la notación a los mapeos φ'_α se les seguirá denotando φ_α

iii) De manera natural los mapeos de grado d se identifican en $\mathbb{C}P^{2d+1}$ y la deformación $R_\alpha = \varphi_\alpha R \varphi_\alpha^{-1}$ es un mapeo racional de grado d, cercano a R.

Aplicando $\Phi : W_0 \longrightarrow \mathbb{C}P^{2d+1}$ se observa que existe una subvariedad U de dimensión uno que cae sobre R bajo el mapeo Φ.

Los homeomorfismos φ_{u_α} determinados por los puntos en U forman un subespacio totalmente disconexo de U. Por lo que φ_{u_α} debe coincidir con la identidad.

La última afirmación contradice la porpiedad de inyectividad de W_0.

2.1) <u>Proposición</u>:

Sea A una región de equicontinuidad simplemente conexa, cuya frontera consiste de una curva de jordan. A es eventualmente periódica.

Demostración:

Siguiendo con la idea desarrollada arriba, se contruirá la vecindad W_0.

i) Sea d el grado de R y N=4d+3. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que la variedad de los jets (chorros) de los automorfismos C^∞ de ∂D^2, de orden k y con tres puntos fijos (1, -1, i) denotada por $J^k_{(1,-1,i)}(\partial D^2, \partial D^2)$ tiene dimensión N.

El jet identidad tiene una vecindad que puede ser representada por un abierto conexo W_0 que contiene al origen de $\mathbb{R}^N$.

Sea $H^{w}_{(1,-1,i)}(\partial D^2, \partial D^2)$ el espacio de los automorfismos reales analíticos de D^2 con la topología compacto abierta. La identificación natural $H^{w}_{(1,-1,i)}(\partial D^2, \partial D^2) \longrightarrow J^{k}_{(1,-1,i)}(\partial D^2, \partial D^2)$ es continua

Parametrizandose por α en W_0; en una vecindad de la identidad - se tiene el mapeo

$$\partial \Phi : W_0 \times \partial D^2 \longrightarrow \partial D^2 \quad ((\alpha, e^{i\theta}) \rightarrow \varphi_\alpha(e^{i\theta}))$$

donde $\varphi_\alpha(e^{i\theta})$ es el mapeo real analítico parametrizado por α

Se extiende radialmente al interior de D^2

$$\Phi : W_0 \times D^2 \rightarrow D^2 \quad ((\alpha, \rho e^{i\theta}) \longrightarrow \rho\varphi_\alpha(e^{i\theta}))$$

Ahora para cada α fijo la restricción $\Phi(\alpha,-) : D^2 \longrightarrow D^2$ denotada - por φ_α es un mapeo uniformemente Lispchitz (de ser necesario, se puede restringir la vecindad W_0), entonces es k-cuasiconforme (propiedad a)).

φ_0 es el mapeo identidad (propiedad b)) y por su construcción W_0 tiene la propiedad de inyectividad (propiedad c)).

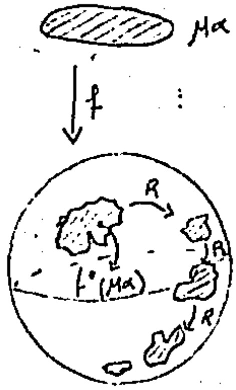
Observese además que si φ_α y φ_β son distintos, entonces esto - sucede en un subconjunto $A' \subset D^2$ de medida de Lebesgue mayor que cero.

ii) Por el "teorema de mapeo de Riemann" para regiones simplemente conexas [1] p.p. 222, o bien [3] p.p. 62, existe un homeomorfismo conforme $f : D^2 \rightarrow A$; considerandose que ∂A es una curva de jordan, se extiende homeomorficamente a ∂D^2 [7] T.5 p.p. 92, y si se fijan las imagenes de 1,-1,i es único.

El "teorema de mapeo de Riemann para métricas" [15] p.p. 185 permite asociar a cada $\varphi_\alpha : D^2 \rightarrow D^2$ una única métrica μ_α definida en D^2. si $\alpha \neq \beta$ se puede asegurar que μ_α es distinta de μ_β en un conjunto de medida de Lebesgue mayor que cero (observación anterior).

Ahora cada métrica μ_α es llevada sobre A por df^{-1} y se denota por $f^*(\mu_\alpha)$

Mas aún, dR^{-1} permite extender $f^*(\mu_\alpha)$ sobre $\bigcup\limits_{1}^{\infty}$ Ai.



Se define μ^*_α casi donde quiera por:
$\mu^*_\alpha|_{\bigcup_0^\infty A_i} = (Rf)^*(\mu_\alpha)$ y $\mu^*_\alpha|_{S^2 \setminus \bigcup_1^\infty A_i} = dE$
donde dE es la métrica euclidiana usual. μ^*_α determina un campo de elipses definido casi donde quiera, y cuyas excentricidades dependen de $f^*(\mu_\alpha)$ sobre A

Ahora dado que la asociación $\alpha \to \Phi_\alpha$ es real analítica, por "el teorema del mapeo de Riemann para métricas variables" [2] la asociación $\alpha \to \varphi_\alpha$ es real analítica, por tanto $\sup_{z \in S^2} |\mu^*_\alpha(z)| < 1$ casi donde quiera.

Entonces existe un mapeo cuasiconforme $\varphi'_\alpha : S^2 \to S^2$ tal que satisfaga la ecuación

$$\frac{\left(\frac{d\varphi'_\alpha}{\partial \bar{z}}\right)}{\left(\frac{d\varphi'_\alpha}{\partial z}\right)} = \mu^*_\alpha$$

siendo además unico si se uniformiza bajo la condición $\varphi'_\alpha(f(x)) = f(x)$ para $x=1,-1,i$.

Observese que $\varphi'_\alpha(A_i) \subset \bigcup_1^\infty A_i$ ya que $\varphi'_\alpha(S^2 \setminus \bigcup_1^\infty A_i)$ es un mapeo conforme casi donde quiera.

Supongase que $\Phi'_\alpha(A_0 = A) = A$ para todo $\alpha \in W_0$; supongase tambien que $f^*(\mu_\alpha) \neq f^*(\mu_\beta)$, entonces $f^*(\mu_\alpha) f^*(\mu_\beta)^{-1}$ no es la métrica usual en un conjunto de medida de Lebesgue mayor que cero.

Pero si $\Phi'_\alpha|_{\partial A} = \varphi'_\beta|_{\partial A}$ entonces $f^{-1}\varphi'_\alpha \circ \varphi'_\beta f|_{\partial A} = id$ y asi $\varphi'_\alpha \circ \varphi'^{-1}_\beta$ es un mapeo conforme en A: obligandose con esto a que $f^*(\mu_\alpha) f^*(\mu_\beta)^{-1}$ sea la métrica usual.

Lo anterior demuestra que si $\alpha \neq \beta$, $\varphi'_\alpha|_{\partial A} \neq \varphi'_\beta|_{\partial A}$.

iii) Abusando de la notación, de ahora en adelante se denotará por $\varphi_\alpha : S^2 \to S^2$

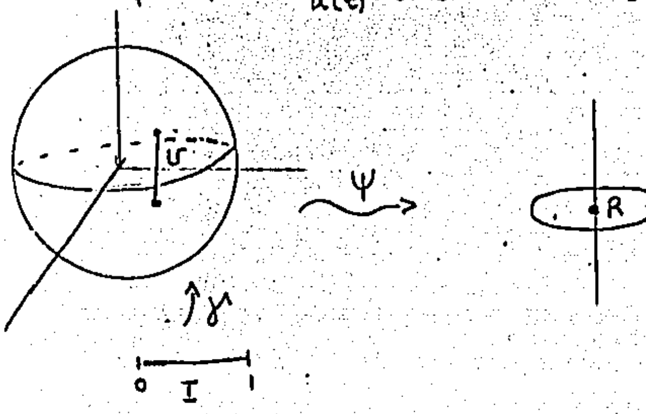
La conjugación $R_\alpha = \varphi_\alpha R \varphi_\alpha^{-1} : S^2 \to S^2$ es un mapeo localmente conforme casi donde quiera y continuo en el dominio, siendo que tiene el mismo grado topológico que R, resulta ser un mapeo racional de grado d. Entonces es una deformación cercana a R en $\mathbb{CP}^{2d+1}$

El mapeo $\psi : W_0^{4d+3} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_R^{2d+1}$ $(\alpha \to R_\alpha)$ es real analítico y $R_0 = R$

La dimensión real de $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2d+1}$ es 4d+2, por lo tanto existe un valor regular $R_{\alpha_0} = \psi(\alpha_0)$ en (W_0) [0] T. de Sard p.p. 40 y existe un subespacio de dimensión uno, $U \subset W_0$ tal que $\psi(U) = R$

Sea $\gamma : [0,1] \to U$ $(t \to \alpha(t))$ continua e inyectiva

$\psi\gamma(t) = R_{\alpha(t)}$ y para toda pareja $(t,t') \in I \times I$, $R_{\alpha(t)} = R_{\alpha(t')}$,



$$\varphi_{\alpha(t)} R \varphi_{\alpha(t)}^{-1} = \varphi_{\alpha(t')} R \varphi_{\alpha(t')}^{-1}$$

$$\varphi_{\alpha(t')}^{-1} \varphi_{\alpha(t)} R \left(\varphi_{\alpha(t)} \varphi_{\alpha(t')}^{-1}\right)^{-1} = R$$

Entonces $\varphi_{\alpha(t')}^{-1} \varphi_{\alpha(t)} = \tilde{\varphi}_{\alpha(t)}$ es un mapeo cuasiconforme que conmuta con la dinámica de R.

i.e. $\tilde{\varphi}_{\alpha(t)} R^N = R^N \tilde{\varphi}_{\alpha(t)}$

Suponer que la familia de homeomorfismos de S^2 en sí misma, distintos en J_R y que conmutan con la dinámica de R forman un espacio - totalmente disconexo con la topología compacto abierta, llevará a la siguiente contradicción:

$\tilde{\varphi}_{\alpha(t)}$ esta en la componente conexa de la identidad; entonces - $\tilde{\varphi}_{\alpha(t)}|_{J_R}$ es la identidad, es decir que $\varphi_{\alpha(t')}|_{J_R} = \varphi_{\alpha(t)}|_{J_R}$ para todo -- $(t,t') \in I \times I$ pero esto niega la propiedad inyectiva de W_0 $(\varphi_{\alpha(t)}|_{\partial A} \neq \varphi_{\alpha(t')}|_{\partial A})$

Para terminar la demostración de este caso, basta probar las siguientes tres afirmaciones:

<u>Afirmación 1</u>: $\tilde{\varphi}_{\alpha(t)}(Ai) = Ai$

Demostración:

$\tilde{\varphi}_{\alpha(t)}(A) \subset \bigcup^{\infty} Ai$ y por conexidad $\varphi_{\alpha(t)}(A) \subset A_{i_0}$ para $i_0 \in \mathbb{N}$ pero como $\tilde{\varphi}_{\alpha(t)} R^N \tilde{\varphi}_{\alpha(t)}^{-1} = R^N$, para toda $N \in \mathbb{N}$, $A_{i_0} = A$. Repitiendo este argumento - para todo i, se tiene que $\varphi_{\alpha(t)}(Ai) \subset Ai$ y por suprayectividad --

Afirmación 2:

$$\tilde{\varphi}_{\alpha(t)}(J_R) = J_R$$

Demostración:

Si $x \notin J_R$, existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $V \cap J_R = \phi$ asi $R^N(V) \cap J_R = \phi$ si $\tilde{\varphi}_\alpha(V) \cap J_R \neq \phi$ existe $y \in \tilde{\varphi}_\alpha(V) \cap J_R$ tal que $R^M(y) \in \partial A$ para algún $M \in \mathbb{N}$, asi $\tilde{\varphi}^{-1}_{\alpha(t)} R^M(y) \in \partial A$ por lo tanto $R^M(\tilde{\varphi}_{\alpha(t)}(y)) \in J_R$ $\therefore$ $\tilde{\varphi}^{-1}_{\alpha(t)}(y) \in J_R$ pero esto es una contradicción.

Entonces $\tilde{\varphi}^{-1}_{\alpha(t)}(X) \notin J_R$ y $\tilde{\varphi}_{\alpha(t)}(J_R) \supset J_R$

Sea $x \in \tilde{\varphi}_{\alpha(t)}(J_R) \cap J_R^c \subset \bar{A}^c$. Considerese una vecindad V de x tal que $V \subset \bar{A}^c \cup J_R^c$; entonces $\tilde{\varphi}^{-1}_{\alpha(t)}(V) \subset \bar{A}^c$ pero existe $y \in \tilde{\varphi}^{-1}_{\alpha(t)}(V)$ tal que $R^M(y) \in \partial A$ por lo tanto $\tilde{\varphi}_{\alpha(t)} R^M(y) = R^M(\tilde{\varphi}_{\alpha(t)}(y)) \in \partial A$ entonces $R^M(V) \cap J_R \neq \phi$. Contradicción

Se concluye asi que $\tilde{\varphi}_{\alpha(t)}(J_R) \subseteq J_R$ y se queda probada la afirmación.

Afirmación 3:

Sea $\{\varphi_{\alpha(t)}\}_{t \in [0,1]}$ una familia de homeomorfismos topológicos de S^2 que conmutan con la dinámica de R, distintos en J_R y que dependen real y analíticamente de t.

Entonces $\{\varphi_{\alpha(t)}\}_{t \in [0,1]}$ es un espacio totalmente disconexo con la topología compacto abierta.

Demostración:

Sea $A^0 = \{z \in J_R ; R_{n_0}(z) = z$ y n_0 el mínimo periodo$\}$

Se define $A^{n+1} = R_{-1}(A^n) \cup A^n$

Primero se mostratá que $\varphi_{\alpha(t)}(A^n) = A^n$

$z \in A^0$, como $\varphi_{\alpha(t)}(J_R) = J_R$, $\varphi_{\alpha(t)}(z) \in J_R$; pero

$\varphi_{\alpha(t)}(z) = \varphi_{\alpha(t)}(R_{n_0}(z)) = R_{n_0}(\varphi_{\alpha(t)}(z))$ asi $\varphi_{\alpha(t)}(z) \in A^0$

por definición

Sea $z \in A^n$, existe $n_1 \leq n \in \mathbb{N}$ tal que $R_{n_1}(z) \in A^0$ y

$| \ \varphi_{\alpha(t)}(R_{n_1}(z)) = R_{n_1}(\varphi_{\alpha(t)}(z))$ y entonces $\varphi_{\alpha(t)}(z) \in A^n$. Obteniendose asi que $\varphi_{\alpha(t)}(A^n) \in A^n$

Por otro lado, sea $z \in A^n$ y $z_1 = \varphi^{-1}_{\alpha(t)}(z)$; $R(z) \in A^{n-1}$, $\varphi_{\alpha(t)}(R(z_1)) \in A^{n-1}$ lo que implica que $R(z_1) \in A^{n-1}$ y Z_1 A^n. Por lo anterior $\varphi_{\alpha(t)}(A^n) = A^n$

Ahora $A^* = \bigcup_1^\infty A_i$ es un conjunto completamente disconexo (por su construcción) y denso en J_R. $\varphi_{\alpha(t)}|_{A^*} = id_{A^*}$ si y solo si $\varphi_{\alpha(t)}|_{J_R} = id|_{J_R}$

Por el "teorema del mapeo de Riemann para métricas variables" para todo $z \in S^2$, $\varphi_\alpha(z)$ varía real y analíticamente como función de α. Las hipótesis aseguran que $\varphi_{\alpha(t)}|_{J_R} \neq id|_{J_R}$, existe entonces $a_0 \in A^*$ tal que $\varphi_{\alpha(t)}(a_0) \neq a_0$.

El mapeo $[0,t] \to S^2$ $(t \longrightarrow \varphi_{\alpha(t)}(a_0))$ es una curva con dos puntos distintos cuya imagen esta contenida en A^*.

Esto contradice la estructura topológica de A^*.

Por lo tanto $\varphi_{\alpha(t)}|_{J_R} = id|_{J_R}$. Es decir que la componente de la identidad tiene solo un punto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ahlfors, L.V. "Complez Analisis", second edition. McGraw-Hill-Kogakusha.

[2] Ahlfors, L.V.-Bers, L. "Riemann mappings theorem for variable metries", Annals of Mathematics, 196.

[3] Ahlfors, L.V.-Sario, L. "Riemann Surfaces", 1960, Princeton.

[4] Bers, L. "Automorphic forms and general Teichmuller Spaces", Proceedings of the conference on complex analysis, Minneapolis 1964. Springer-Verlag.

[5] Bers, L. "What is a Klenian group?", A crash course on Klenian groups, Lecture notes in Mathematics 400.

[6] Brolin, H. "Invariants sets under iteration of rationals functions", Arkiv für Mathematik 6(1965).

[7] Caratheodory, C. "Theory of functions", second edition 1978, Chelsea.

[8] Fatou, P. "Sur les ecuations Functionells". Bull. Soc.MathFrance, 47 1919, pp 161-271.

[9] Golubitsky, M.-Guillemin, V. "Stable mappings and their singularities", Springer Verlang.

[10] Guillen, V.-Pollack, A. "Diferential Topology", Prentice-Hall, 1974.

[11] Harvey, W.J. "Discrete Groups and Automorphic functions", Academic Press 1977.

[12] Julia, G. "Mêmorie sur l'iteration des functions rationells", Jour. de Mathpures et appliquées, 1918, pp 47-245.

[13] Letho-Virtanen "Quasiconformal mappings in the plane", Second edition, Springer Verlag.

[14] Markushevich "Teoría de funciones Analíticas", Segunda edición, MIR.

[15] Massey, W. "Introducción a la topología algebráica" 1972, Ed. Reverté.

[16] Sullivan, D. "Seminar on conformal and hyperbolic geometry", I.H.E.S. Seminar notes, March 1972.

[17] Sullivan, D. "Quasiconformal homesmorphisms and dynamics", I. III, Preprint.

[18] Troels Jørgensen "A note on subgroups of SL(2,$\mathbb{C}$)" Quart. J. Math. Oxford (2), 28, 1977, pp 209-212.