00365
lej. 4

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA CUBIERTA UNIVERSAL DE UN CARCAJ CON RELACIONES.

T E S I S

Que para obtener el título de:

MAESTRO EN CIENCIAS

(MATEMATICAS)

P r e s e n t a :

José Antonio Stephan de la Peña Mena

Becario del Instituto de Matemáticas

México, D. F. Enero, 1982

INDICE

INTRODUCCION.

Recientemente han sido introducidas en la Teoría de Representaciones de álgebras técnicas de caracter topológico. Las cubiertas y cubiertas universales han sido exitosamente utilizadas por Gabriel y Bongartz [8], Gabriel [14], Riedtman [19] y [20], Waschbüsch [22], Gordon y Green [16]. En este trabajo definiremos un concepto de cubierta (ver sección 3) para el carcaj con relaciones asociado a un álgebra de forma que la categoría de cubiertas admite un objeto universal (sección 4). Y trataremos de aplicar esta técnica en el estudio de las álgebras y sus representaciones.

Este trabajo surgió ante la necesidad de comprender y completar las pruebas de la breve exposición hecha por P. Gabriel de sus resultados durante el III Congreso Internacional de Representaciones de Algebras efectuado en Puebla, México en 1980. Dichos resultados han aparecido ya publicados en [8] y [14]. Sin embargo, las ideas y motivación obtenidas de este estudio nos llevaron a reformular algunos conceptos en forma un tanto diferente y probar algunos resultados que creemos generalizan ó mejoran algunos de los probados en [8] y [14].

Las dos primeras secciones son de caracter introductorio, hacemos una rápida revisión de los conceptos fundamentales en teoría de representaciones de álgebras en la primera sección y en la segunda de los conceptos introducidos por Gabriel y Bongartz en [8].

Como hemos indicado en la tercera sección se introduce el concepto de cubierta para un carcaj con relaciones y se prueban algunos resultados básicos. En la cuarta se prueba que la categoría de cubiertas de un carcaj con relaciones fijo admite un objeto universal. Dada un álgebra Λ se obtiene el carcaj asociado Q que está determinado en forma única y un ideal I que no es único, de forma que a partir de Q e I se recupera Λ. Desgraciadamente la construcción de la cubierta universal depende del ideal I tomado. Sin embargo, en la sección 6 se prueba que la cubierta universal es esencialmente única para las cubiertas sin ciclos dirigidos. Este caso se manifiesta particularmente importante después.

Un problema particularmente importante en teoría de representaciones es clasificar las álgebras de tipo de representación finito, esto es las que admiten solo un número finito de representaciones inescindibles no isomorfas. En la sección 5 mostramos en que forma se pueden comparar las representaciones de un álgebra con las de su cubierta, de forma que el estudio de representaciones se puede simplificar estudiando las de la cubierta que tiene una estructura más sencilla.

Un resultado conocido [4], era que si un carcaj con relaciones es localmente de representación finita, también sus cubiertas lo son.

Un resultado importante (8.8) y (9.6) es que la propiedad de ser localmente de representación finita, también se preserva de la cubierta hacia el carcaj con relaciones. Este resultado se prueba por medio de dos métodos totalmente diferentes: dada una cubierta $(\tilde{Q},\tilde{I}) \xrightarrow{\pi} (Q,I)$ sus representaciones se comparan por medio de un funtor $\Sigma: \mathrm{mod}(\tilde{Q},\tilde{I}) \to \mathrm{mod}(Q,I)$ — llamado "push-down" en [8] — , en la sección 7 se obtiene la descomposición de ΣV, cuando V es inescindible en $\mathrm{mod}(\tilde{Q},\tilde{I})$ en suma directa de inescindibles de $\mathrm{mod}(Q,I)$ en el caso de que el estabilizador de V sea cíclico; subrayamos que esto no depende del tipo de representación de (Q,I). Esta descomposición es usada en la sección 8 para probar el resultado antes mencionado. También se sigue como un fácil Corolario del Teorema (9.4) que prueba un resultado conjeturado por Gabriel durante el Congreso antes citado, a saber que en una categoría de Auslander un automorfismo que mueve proyectivos inescindibles, mueve todos los inescindibles, [10].

En [14], Gabriel construye una categoría asociada a un álgebra a la que llama la cubierta universal del álgebra. En la sección 10 vemos que su construcción coincide con la nuestra cuando el álgebra es estandar, o sea $k(\tilde{\Gamma}_\Lambda) \cong \mathrm{ind}\Lambda$, donde Γ_Λ es el carcaj de Auslander-Reiten de Λ, el álgebra dada.

En la sección 11, obtenemos algunos resultados como Corolarios de las construcciones y teoremas de las secciones precedentes:

En [8] se define una categoría simplemente conexa, como aquella cuyo carcaj de Auslander-Reiten es su propia cubierta universal si además es de tipo de representación finita. Este concepto lo caracterizamos en (11.4) por medio de la conexidad simple del carcaj ordinario asociado a la categoría, esto es, por medio de una condición intrínseca a ella.

Para la cubierta universal $\pi:(\hat{Q},\hat{I})\longrightarrow(Q,I)$ de un carcaj con relaciones hay un grupo asociado, $\Pi_1(Q,I)$ llamado el grupo fundamental. En (11.5) probamos que este grupo es libre cuando $\hat{Q}$ no tiene ciclos dirigidos. Además, en (11.6) se muestra que esta condición es equivalente a que la categoría $k(\hat{Q},\hat{I})$ sea Schurian.

Finalmente, un álgebra Λ de tipo finito tiene una cubierta universal sin ciclos dirigidos si y solo si existe un álgebra Schurian también de tipo finito y $\bar{\Lambda}\xrightarrow{F}\Lambda$ un morfismo cubriente, esto es definido por la acción de un grupo. En particular esto es aplicable cuando Λ es álgebra estandar.

1. ALGEBRAS Y CARCAJES

En esta primera sección introducimos los conceptos fundamentales que serán usados a lo largo del trabajo. Enunciamos sin pruebas algunos de los resultados importantes.

Como referencias generales usamos [11] para anillos y módulos y [9] ó [13] para la relación entre las álgebras y carcajes y la teoría de representaciones de álgebras.

Sea k un campo algebraicamente cerrado, que quedará fijo a lo largo de todo este trabajo.

Un carcaj Q es una gráfica orientada. Por Q_0 denotamos el conjunto de los vértices de Q y por Q_1 el conjunto de flechas. Además, tenemos dos funciones $s, e : Q_1 \to Q_0$ donde para una flecha $\alpha \in Q_1$, $s(\alpha)$ denota el principio de α y $e(\alpha)$ el punto final.

Un camino dirigido en Q es una sucesión de flechas $\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1$ donde $s(\alpha_{i+1}) = e(\alpha_i)$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Decimos que este camino va de $s(\alpha_1)$ en $e(\alpha_n)$, y que tiene longitud n. Dado un vértice $x \in Q_0$, llamamos τ_x al camino trivial que va de x en x y que no involucra flecha alguna.

kQ la k-algebra asociada a Q se define: como k espacio vectorial es libre sobre la colección de todos los caminos dirigidos de Q. El producto de dos caminos dirigidos se define pegando los caminos cuando esto es posible y como 0 si no lo es.

En esta sección supondremos que Q es finito, en este caso $1 = \sum_{x \in Q_0} \tau_x$ es elemento unidad para kQ.

Además, si Q es conexo, kQ resulta ser un algebra inescindible. También, $\{\tau_x \mid x \in Q_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de kQ.

Por $\mathcal{F}$ denotamos el ideal izquierdo de kQ generado por los caminos de longitud 1 (flechas). $\mathcal{F}$ resulta ser ideal bilateral y como espacio vectorial tiene por base los caminos de longitud mayor o igual a 1.

Un ideal bilateral I de kQ se llama admisible si $I \subset \mathcal{F}^2$ y para alguna $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}^n \subset I$.

Escribimos $k(Q,I) = kQ/I$ que es un álgebra de dimensión finita sobre k, inescindible y básica, con $\{\bar{\tau}_x \mid x \in Q_0\}$ como sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos.

Sea Λ una k-algebra de dimensión finita. Como estamos interesados en el estudio de las propiedades de la categoría de módulos $\mathrm{Mod}\,\Lambda$, podemos suponer que Λ es básica e inescindible.

Podemos ahora asociar a Λ un carcaj Q de la manera siguiente: sea $\{e_i \mid i=1,\dots,n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de Λ, Q tiene n vértices, $Q_0 = \{1,\dots,n\}$ y si $i,j \in Q_0$ hay $n_{ij} = \dim e_j \frac{\mathrm{rad}\,\Lambda}{\mathrm{rad}^2\Lambda} e_i$ flechas de i en j.

Para cada $i,j \in Q_0$ escojemos una base $\{\bar{y}_\alpha\}_{\alpha \in A_{ij}}$, donde $y_\alpha \in e_j \operatorname{rad}\Lambda e_i$, de $e_j \frac{\operatorname{rad}\Lambda}{\operatorname{rad}^2\Lambda} e_i$ y podemos tomar $A_{ij} = \{\alpha \in Q_1 \mid i \xrightarrow{\alpha} j\}$.

Para definir $\varphi : kQ \longrightarrow \Lambda$ basta dar su valor en los elementos de la base de kQ sobre k. Así, $\varphi(\varepsilon_i) = e_i$ para $i \in Q_0$ y para $i \xrightarrow{\alpha} j$ en Q_1, $\varphi(\alpha) = y_\alpha$.

Se puede mostrar que φ es suprayectiva y que $I = \operatorname{Ker}\varphi$ es ideal admisible de kQ, luego $\Lambda \cong k(Q,I)$.

De esta forma el estudio de las álgebras se puede reducir al de los carcajes con un ideal admisible. Veremos de que forma se puede ahora interpretar $\operatorname{Mod}\Lambda$.

Sea Q un carcaj e I un ideal admisible de kQ. Una relación $\rho \in I$ es legible si $\rho = \sum_{\gamma \text{ camino}} \lambda_\gamma \gamma$ tal que $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ son los caminos con $\lambda_\gamma \neq 0$ y se tiene que $s(\gamma_i) = s(\gamma_j)$, $e(\gamma_i) = e(\gamma_j)$ para todo par $i,j \in \{1, \dots, n\}$. Se obtiene que I puede generarse por medio de un número finito de relaciones legibles.

Una k-representación V de Q consta de una familia de k-espacios vectoriales $(V(x))_{x \in Q_0}$ y de transformaciones lineales $(V(\alpha) : V(x) \longrightarrow V(y) \mid x \xrightarrow{\alpha} y$ en $Q_1)$. Un morfismo $\varphi : V \longrightarrow V'$ de representaciones de Q es una colección de transformaciones lineales $\varphi = (\varphi_x : V(x) \longrightarrow V'(x))_{x \in Q_0}$ tal que para cada flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Q_1 el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} V(x) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "\varphi_x"'] & V(y) \arrow[d, "\varphi_y"] \\ V'(x) \arrow[r, "V'(\alpha)"] & V'(y) \end{tikzcd}.$$

Dado $\gamma = \alpha_n \ldots \alpha_1$ camino dirigido no trivial en Q, podemos evaluar la representación V de Q en γ como sigue:

$$V(\gamma) = V(\alpha_n) \ldots V(\alpha_1) : V(x) \longrightarrow V(y) \quad \text{donde } x = s(\alpha_1)$$

$y = e(\alpha_n)$. Si $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_i$ es relación legible, podemos evaluar V en ρ: $V(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V(\gamma_i)$. Decimos que V satisface la relación ρ si $V(\rho) = 0$.

En general, V satisface el ideal admisible I si $V(\rho) = 0$ para toda relación legible $\rho \in I$, ó equivalentemente si V satisface un sistema generador de relaciones legibles.

Denotamos por $\mathrm{Mod}(Q,I)$ a la categoría de las k-representaciones que satisfacen I, con los morfismos de representaciones.

Si tenemos un álgebra Λ de dimensión finita sobre k, inescindible y básica con $\Lambda \cong k(Q,I)$ con Q carcaj e I ideal admisible, obtenemos que $\mathrm{Mod}\,\Lambda \cong \mathrm{Mod}(Q,I)$. Esta es la forma en que el estudio de los módulos se reduce al de representaciones de carcajes que satisfacen un ideal admisible.

Los módulos finitamente generados $\mathrm{mod}\,\Lambda$ corresponden bajo este isomorfismo a las representaciones $V \in \mathrm{Mod}(Q,I)$ con $V(x)$ de dimensión finita para cada $x \in Q_0$. Esta subcategoría de $\mathrm{Mod}(Q,I)$ la denotaremos $\mathrm{mod}(Q,I)$.

Finalmente, recordamos que los módulos simples corresponden a las representaciones $(S_x)_{x \in Q_0}$, de forma que $S_x(y)$ tiene dimensión 1 ó 0 dependiendo si $x = y$ ó no. Los módulos proyectivos inescindibles son de la forma $P_x = (x,-)$ con $x \in Q_0$ y los inyectivos inescindibles, $I_x = D(-,x)$ con $x \in Q_0$, donde

D denota la dualidad usual respecto al campo k.

Una de las metas de la teoría de Representaciones de Algebras, es llegar a clasificar todas las álgebras Λ que tienen solo un número finito de módulos inescindibles finitamente generados. Un algebra Λ que satisface esta condición se dice que es de tipo de representación finita (t.r.f.)

Supongamos que $\Lambda = k(Q,I)$ es un álgebra de tipo de representación finito y que $P_1 = (x_1,-)$, $P_2 = (x_2,-)$ son dos proyectivos inescindibles. Un resultado de Jans [17] nos dice que $(x_1,x_1) = \mathrm{End}_\Lambda(P_1)$ es un álgebra uniserial — o sea, con una única serie de composición, a saber la serie del radical —, y que $(x_1,x_2) = \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1,P_2)$ es un $\mathrm{End}_\Lambda(P_1)$-módulo izquierdo uniserial ó un $\mathrm{End}_\Lambda(P_2)$ módulo derecho uniserial y en todo caso un bimódulo uniserial sobre estas álgebras.

También, de [17] y [12] se sigue que en esta situación el carcaj Q no tiene flechas dobles, o sea, los números $n_{ij} = \dim_k e_j \frac{\mathrm{rad}\,\Lambda}{\mathrm{rad}^2\Lambda} e_i$ son menores o iguales a 1.

Cuando el álgebra Λ es de tipo de representación finita, podemos esperar también describir totalmente la categoría mod Λ de los Λ-módulos finitamente generados. Un conocido teorema de H. Auslander [4] nos dice que en esta situación todo Λ-módulo, finitamente generado o no, es suma directa de módulos inescindibles finitamente generados; luego para lograr este objetivo bastaría describir los morfismos entre los módulos inescindibles.

Para esta descripción son útiles los morfismos irreducibles [2], [3]. Un morfismo f en $\mathrm{mod}\,\Lambda$ se dice irreducible si no es sección ni retracción, pero siempre que $f = gh$, h será sección ó g retracción. Se sabe que si Λ es de t.r.f. todo morfismo no invertible entre módulos inescindibles es combinación lineal de composiciones de morfismos irreducibles entre inescindibles.

Llamamos $\mathrm{ind}\,\Lambda$ a la subcategoría plena de $\mathrm{mod}\,\Lambda$ cuyos objetos son los módulos inescindibles. Un morfismo irreducible $f: M \to N$ en $\mathrm{ind}\,\Lambda$ tiene una descripción simple si N es proyectivo o si M es inyectivo. En efecto, en el primer caso f es la inclusión de un sumando directo de $\mathrm{rad}\,N$ y en el segundo f es la proyección a un sumando directo de $M/\mathrm{soc}\,M$.

Para los casos restantes se introducen en [3] las sucesiones, que casi se dividen, también conocidas como sucesiones de Auslander-Reiten. Una sucesión exacta que no se escinde $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ con A y C inescindibles se dice de Auslander-Reiten cuando para todo morfismo $h: X \to C$ que no sea retracción, existe $t: X \to B$ tal que $h = gt$. Cuando C es un módulo inescindible y no proyectivo, existe una única sucesión de Auslander-Reiten que termina en C; $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$. La asociación $C \longmapsto A$ establece una biyección entre los módulos inescindibles no proyectivos y los inescindibles no inyectivos. Dicha correspondencia se denota por $D\mathrm{tr}$ y su inversa $\mathrm{tr}D$.

Cuando Λ es de t.r.f. el término central de una sucesión de Auslander-Reiten tiene una descomposición en módulos inescindibles sin sumandos repetidos.

Con la herramienta introducida, podemos asociar ahora otro carcaj a Λ. El carcaj de Auslander-Reiten de Λ, denotado por Γ_Λ, tiene por vértices las clases de isomorfía de módulos inescindibles y hay una flecha $[M] \to [N]$ en Γ_Λ si y solo si existe algún morfismo irreducible $M \to N$ en ind Λ.

Un hecho importante es que Γ_Λ tiene una componente conexa finita — y en este caso coincide con Γ_Λ — si y solo si Λ es álgebra de t.r.f.

2. CATEGORIAS LOCALMENTE DE REPRESENTACION FINITA.

En la presente sección se generalizan algunos de los conceptos definidos para álgebras al caso de categorías. Las definiciones y resultados que aquí se mencionan se deben a Gabriel [8] y [14] y a Riedtmann [19] y [20].

Una k-categoría $\mathcal{C}$ es una categoría cuyos conjuntos de morfismos $\mathcal{C}(x,y)$ están provistos con estructura de k-espacios vectoriales de tal forma que la composición es k-bilineal.

(2.1) <u>Definición</u>: Una k-categoría $\mathcal{C}$ se llama localmente de dimensión finita (respectivamente localmente acotada) si satisface las condiciones a), b) y c). (respectivamente a), b) y c')):

a). Para cada $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, el álgebra $\mathcal{C}(x,x)$ es local.

b). Objetos diferentes en $\mathcal{C}$ no son isomorfos.

c). $\dim_k \mathcal{C}(x,y)$ es finita para $x, y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

c'). $\sum_{y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \dim_k \mathcal{C}(x,y)$, $\sum_{y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \dim_k \mathcal{C}(y,x)$ son finitas para todo objeto x de $\mathcal{C}$.

Sea Q un carcaj posiblemente infinito. La categoría de caminos kQ se define como en el caso finito. Por $\mathcal{F}$ denotamos también al ideal bilateral generado por las flechas. Un ideal admisible I en kQ es uno tal que para cada vértice $x \in Q_0$ tiene un número natural n_x con $\mathcal{F}^{n_x}(x,-) \subset I(x,-) \subset \mathcal{F}^2(x,-)$ y similarmente para la segunda coordenada.

Dado el carcaj Q y un vértice $x \in Q_0$, por x^+ denotamos al conjunto de vértices en Q_0 a los cuales llegan flechas que comienzan en x y por x^- a los vértices donde comienzan flechas con punto final x. Q se llama localmente finito si y solo si x^+ y x^- son finitos para todo vértice $x \in Q_0$.

Dado Q localmente finito e I un ideal admisible en kQ, es fácil ver que la categoría $k(Q,I) = kQ/I$ es localmente acotada. De hecho, con la misma prueba que para el caso de un álgebra, puede probarse que toda categoría $\mathcal{C}$ localmente acotada es isomorfa a $k(Q,I)$ para un carcaj localmente finito y un ideal admisible.

Sea $\mathcal{C} \cong k(Q,I)$ una categoría localmente acotada con Q, I como antes. Un $\mathcal{C}$-módulo es un funtor k-lineal $V: \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Mod}\, k$, donde $\mathrm{Mod}\, k$ es la categoría de los k-espacios vectoriales.

La categoría de los $\mathcal{C}$-módulos se denota por $\mathrm{Mod}\,\mathcal{C}$ y por $\mathrm{mod}\,\mathcal{C}$ a la subcategoría plena de los módulos finitamente generados —aquí, un módulo es finitamente generado cuando es cociente de una suma directa de finitos funtores representables—. Claramente, $\mathrm{Mod}\,\mathcal{C} \cong \mathrm{Mod}\,(Q,I)$ donde esta última es la categoría de las k-representaciones que satisfacen I en el mismo sentido que la sección anterior. También, la restricción de este isomorfismo hace $\mathrm{mod}\,\mathcal{C} \cong \mathrm{mod}\,(Q,I)$ donde $V \in \mathrm{mod}\,(Q,I)$ si $V(x)$ es de dimensión finita para $x \in Q_0$ y $\mathrm{sop}\, V = \{x \in Q_0 \mid V(x) \neq 0\}$ es finito.

Los módulos simples, proyectivos e inyectivos inescindibles tienen la misma forma de representarse que en el caso de álgebras. Además, mod $\mathcal{C}$ admite sucesiones de Auslander-Reiten, y el carcaj de Auslander-Reiten de $\mathcal{C}$, $\Gamma_{\mathcal{C}}$ puede construirse como antes.

(2.2) <u>Definición</u>: Una categoría localmente acotada $\mathcal{C}$ se llama localmente de representación finita si para cada $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ se tiene solo un número finito de $\mathcal{C}$-módulo no isomorfos $V \in \mathrm{mod}\,\mathcal{C}$ con $V(x) \neq 0$.

Un carcaj Q localmente finito con un ideal admisible I de kQ se dice que es localmente de representación finita si la categoría $k(Q,I)$ lo es, o sea que para cada vértice $x \in Q_0$ hay solo un número finito de representaciones no isomorfas $V \in \mathrm{mod}\,(Q,I)$ con $V(x) \neq 0$.

Gran cantidad de los resultados que valen para álgebras de tipo de representación finito — que son categorías con carcaj finito — siguen valiendo para las categorías localmente de representación finita, aún con las mismas pruebas. En particular, los resultados de Jans: si (Q,I) es localmente de representación finita y $x,y \in Q_0$, entonces $\mathrm{End}_{k(Q,I)}(x)$ es álgebra uniserial, $\mathrm{Hom}_{k(Q,I)}(x,y)$ es $\mathrm{End}_{k(Q,I)}(x)$-módulo uniserial ó $\mathrm{End}_{k(Q,I)}(y)$-módulo uniserial y en Q no hay flechas dobles.

Como la situación que nos interesa está relacionada con el tipo de representación finita, hacemos el siguiente convenio para el resto del trabajo.

(2.3) <u>Definición</u>: Diremos que (Q,I) es un carcaj con relaciones si Q es un carcaj localmente finito, conexo y sin flechas dobles e I es un ideal admisible en kQ.

La siguiente definición debida a Riedtmann generaliza las propiedades esenciales del carcaj de Auslander-Reiten.

(2.4) <u>Definición</u>: Un carcaj de traslación Γ es un carcaj sin flechas dobles ni lazos junto con una inyección $\tau: \Delta \longrightarrow \Gamma_0$ definida en un subconjunto Δ de Γ_0 y tal que $x^- = (\tau x)^+$ para toda $x \in \Delta$. Las relaciones de malla en Γ forman el ideal m_Γ de $k\Gamma$ generado para cada $x \in \Delta$ por la suma de todos los caminos de longitud dos de τx a x. La categoría de Riedtmann de Γ, denotada por $k(\Gamma)$ es el cociente $k\Gamma/m_\Gamma$.

Parte de la importancia de la categoría de Riedtmann radica en el siguiente resultado bien conocido.

(2.5) <u>Teorema</u>: Sea Λ una k-álgebra de t.r.f.. Supongamos que tenemos una familia de representantes $\{M_i\}_{i\in I}$ de los módulos inescindibles de Λ y una aplicación φ que a cada flecha $[M_i] \xrightarrow{\alpha} [M_j]$ en Γ_Λ le asocia un morfismo irreducible $\varphi(\alpha): M_i \longrightarrow M_j$ de tal manera que para toda $i \in I$,

$$0 \to D\mathrm{Tr}\, M_i \xrightarrow{(\varphi(\alpha_j))} \bigoplus_{j=1}^{t} M_j \xrightarrow{(\varphi(\beta_j))} M_i \longrightarrow 0$$

es una sucesión de Auslander-Reiten, donde $\{M_j \mid j=1,\dots,t\}$ son los representantes de $[M_i]^-$ y $[D\mathrm{Tr}\, M_i] \xrightarrow{\alpha_j} [M_j] \xrightarrow{\beta_j} [M_i]$ son las flechas correspondientes en Γ_Λ. (Por ejemplo, φ existe si Γ_Λ no tiene ciclos dirigidos). Entonces φ se extiende a un funtor pleno y denso $\varphi: k\Gamma_\Lambda \longrightarrow \mathrm{ind}\Lambda$ con núcleo m_{Γ_Λ}, donde $\mathrm{ind}\Lambda$ es la subcategoría plena de $\mathrm{mod}\Lambda$ formada por $\{M_i\}_{i\in I}$. Por tanto, φ induce una equivalencia entre $k(\Gamma_\Lambda)$ y $\mathrm{ind}\Lambda$. //

Un morfismo de carcajs es obviamente una función que envía vértices en vértices y flechas en flechas de forma que el principio de la imagen de una flecha sea igual a la imagen del principio de ella y similarmente para el final. Un morfismo de carcajs con translación respeta además ésta.

Las siguientes definiciones aparecen en [19]:

(2.6) Definición: Sea $\varphi: (\Delta, \sigma) \longrightarrow (\Gamma, \tau)$ un morfismo de carcajs con translación, se dice que φ es cubriente si satisface:

i). para toda $x \in \Delta_0$, los morfismos $x^+ \longrightarrow (\varphi(x))^+$ y $x^- \longrightarrow (\varphi(x))^-$ inducidos por φ son biyectivos.

ii). $\sigma(x)$ está definido siempre que $\tau(\varphi(x))$ lo esté.

Decimos que (Γ, τ) es estable cuando τ está definido en todo el carcaj Γ.

En [8] se prueba que un carcaj con translación (Γ, τ) tiene un objeto universal $\pi: (\tilde{\Gamma}, \tilde{\tau}) \longrightarrow (\Gamma, \tau)$ en la categoría de las cubiertas de (Γ, τ). Dicha cubierta está definida por la acción de un grupo $\pi_1(\Gamma, \tau)$ llamado el grupo fundamental de (Γ, τ).

Supongamos que Γ es localmente finito, decimos que es localmente acotado si $k(\Gamma)$ lo es. Tenemos el siguiente:

(2.7) Teorema [19]: Sea (Γ, τ) carcaj con translación, Γ localmente acotado, conexo y estable, entonces su cubierta universal $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\tau})$ es isomorfa a un carcaj de translación de la forma $\mathbb{Z}D$ con D un diagrama Dynkin. //

Tenemos también la siguiente definición y teoremas que aparece en [8]:

(2.8) Definición: i). Una k-categoría $\mathcal{C}$ se llama de Auslander si existe una categoría $\mathcal{D}$ localmente de representación finita con $\mathcal{C} \cong \operatorname{ind} \mathcal{D}$, donde $\operatorname{ind} \mathcal{D}$ es la subcategoría plena de $\operatorname{mod} \mathcal{D}$ de una familia de representantes de las clases de isomorfía de los $\mathcal{D}$-módulos inescindibles.

ii). Un carcaj con traslación localmente finito Γ se llama carcaj de Riedtmann si $k(\Gamma)$ es una categoría de Auslander.

(2.9) Teorema: Sea Γ un carcaj de traslación conexo y $\tilde{\Gamma}$ su cubierta universal. Son equivalentes:

i). Γ es el carcaj de Auslander-Reiten de alguna k-categoría localmente de representación finita.

ii). Γ es un carcaj de Riedtmann

iii). $\tilde{\Gamma}$ es un carcaj de Riedtmann. //

(2.10) Teorema: Si Γ es un carcaj de Riedtmann y $x \in \Gamma_0$, el grupo fundamental de Γ en x, $\Pi_1(\Gamma, x)$ es libre. //

Terminamos recordando la siguiente importante definición:

(2.11) Definición [8]: Sea $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor k-lineal entre dos k-categorías. F se llama funtor cubriente si los morfismos inducidos por F:

$$\bigoplus_{F(z)=b} \mathcal{C}(x,z) \longrightarrow \mathcal{D}(F(x),b) \quad y \quad \bigoplus_{F(t)=a} \mathcal{C}(t,y) \longrightarrow \mathcal{D}(a,F(y))$$

para cada dos objetos $x, y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, son biyectivos. Y además, F es denso.

Los siguientes ejemplos son también de [8]:

a). Si $\pi : \Delta \longrightarrow \Gamma$ es un morfismo de carcajes con translación, el funtor inducido $k(\pi): k(\Delta) \longrightarrow k(\Gamma)$ es cubriente.

b). Asumamos que $\mathcal{C}$ sea categoría localmente de representación finita y conexa (o sea, $\mathcal{C}$ no es ni vacía ni suma de dos subcategorías no vacías). Luego $\Gamma_{\mathcal{C}}$ es conexo. Sea $\pi : \tilde{\Gamma}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{C}}$ su cubierta universal. Entonces, existe un funtor $F : k(\tilde{\Gamma}_{\mathcal{C}}) \longrightarrow \operatorname{ind} \mathcal{C}$ que envía un objeto $y \in \tilde{\Gamma}_{\mathcal{C}}$ en $\pi(y)$ y un morfismo $\bar{\beta}$ asociado a una flecha β de $\tilde{\Gamma}_{\mathcal{C}}$ en un morfismo irreducible de $\operatorname{mod} \mathcal{C}$. De hecho este funtor F es cubriente.

3. CUBIERTAS DEL CARCAJ ORDINARIO

En esta sección introducimos el concepto de cubierta para un carcaj con relaciones. Nuestra definición es similar a otras dadas anteriormente: Riedtmann [19] para un carcaj de translación, Gabriel [14] para categorías localmente finitas, Waschbüsch [22] para algebras autoinyectivas y Gordon y Green [16].

La ventaja aparente de nuestro concepto es que podremos en la siguiente sección construir un objeto universal en la categoría de cubiertas de un carcaj con relaciones, sin necesidad de hacer referencia al carcaj de Auslander-Reiten como en [14] ó a interpretaciones topológicas como en [16]. En ciertas condiciones, nuestra cubierta universal coincide con las antes mencionadas.

(3.1) <u>Definición</u>: Sea (Q,I) un carcaj con relaciones, un grupo de automorfismos G de (Q,I) se llama admisible si ninguna órbita de G en Q_0 tiene más de un vértice en un conjunto de la forma x^+ ó x^- con $x \in Q_0$.

Dado un grupo de automorfismos G de (Q,I), podemos definir el carcaj Q/G, que tiene por conjunto de vértices Q_0/G, o sea, las órbitas de Q_0 bajo la acción de G y por flechas Q_1/G. Llamamos $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ al morfismo natural.

Además, $\bar{I} = \pi(I)$ es el ideal de Q/G inducido como se indicó en la sección 1. Tenemos el siguiente:

(3.2) Lema: Sea G grupo admisible de (Q,I), entonces:

i). $(Q/G, \bar{I})$ es un carcaj con relaciones.

ii). $\pi: (Q,I) \longrightarrow (Q/G, \bar{I})$ es un morfismo suprayectivo de carcajes con relaciones, tal que para cada $x \in Q_0$, los morfismos inducidos $x^+ \longrightarrow (\pi(x))^+$ y $x^- \longrightarrow (\pi(x))^-$ son biyectivos.

Demostración: i): Supongamos que $[x] \rightrightarrows [y]$ es una flecha doble en Q/G. Por tanto obtenemos $x \xrightarrow{\ell} y$, $x' \xrightarrow{\ell'} y'$ en Q con $[x]=[x']$, $[y]=[y']$ y $\ell' \neq g(\ell)$ para toda $g \in G$. Tomamos $g_1, g_2 \in G$ con la propiedad de que $x'=g_1(x)$ y $y'=g_2(y)$. Como no hay flechas dobles en Q, tenemos $g_1(\ell) \neq \ell'$ y $g_1(y) \neq y'$. Así, $y''=g_1(y) \in (x')^+$, $y' \in (x')^+$ son diferentes con $g_2 g_1^{-1}(y'')=y'$, $g_2 g_1^{-1} \in G$ lo que contradice la admisibilidad de G. Mostraremos ahora que el ideal $\bar{I}$ es admisible. Sea $[x] \in (Q/G)_0$, como $x \in Q_0$ y el ideal I es admisible, hay un número natural n con $F^n(x,-) \subset I(x,-)$. Consideremos $[y] \in (Q/G)_0$ y $\rho \in F^n([x],[y])$. Asumamos que $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i$ donde u_i es un camino orientado en Q/G de longitud mayor o igual a n. De la propiedad que será probada en ii). independientemente, obtenemos para cada $i \in \{1,\dots,m\}$ un camino orientado v_i que comienza en x y tal que $\pi(v_i)=u_i$, sea y_i el vértice final de v_i. Claramente, $v_i \in F^n(x,y_i)$ y luego, $v_i \in I(x,y_i)$; así $u_i = \pi(v_i) \in \bar{I}([x],[y_i])$ por la definición de $\bar{I}$. Pero tenemos, $\pi(y_i)=[y]$, de donde se sigue que $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \in \bar{I}([x],[y])$. Obviamente, $\bar{I}([x],-) \subset \delta^2([x],-)$.

ii): Sea $x \in Q_0$. Es suficiente probar que $x^+ \longrightarrow (\pi(x))^+$ es biyección. Asumamos $x \underset{l_2}{\overset{l_1}{\rightrightarrows}} \begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}$ con $\pi(y_1)=\pi(y_2)$, tendríamos $\pi(x) \underset{\pi(l_2)}{\overset{\pi(l_1)}{\rightrightarrows}} \pi(y_1)=\pi(y_2)$ pero ya hemos mostrado que en Q/G no hay flechas dobles, luego $\pi(l_1)=\pi(l_2)$ y hay un elemento $g \in G$ con $g(l_1)=l_2$. De aquí $g(y_1)=y_2$ y como $y_1, y_2 \in x^+$ y G es admisible, obtenemos $y_1=y_2$. Luego, el morfismo es inyectivo y es obviamente suprayectivo. //

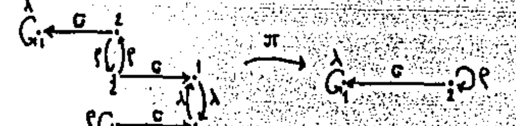
(3.3) <u>Definición</u>: Sea $f:(\Delta,J) \longrightarrow (Q,I)$ un morfismo de carcajes con relaciones suprayectivo, entonces f se llama:

a). localmente cubriente, si para cada $x \in \Delta_0$ los morfismos inducidos $x^+ \longrightarrow f(x)^+$ y $x^- \longrightarrow f(x)^-$ son biyectivos.

b). cubriente, si existe un grupo admisible G de (Δ,J) tal que

$$\begin{tikzcd} & (\Delta,J) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "G"] & \\ (\Delta/G,\bar{J}) \arrow[rr, "\cong"] & & (Q,I). \end{tikzcd}$$

Observemos que (3.2) indica que todo morfismo cubriente es localmente cubriente. Sin embargo, el inverso es falso como lo muestra el siguiente morfismo localmente cubriente:



que no puede ser cubriente, ya que en ese caso todos los levantamientos de λ debían ser lazos, o ninguno serlo.

El siguiente resultado muestra ciertas relaciones entre localmente cubrientes y cubrientes — también relacionadas con la observación anterior. —

(3.4) <u>Proposición</u>: Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & (\Delta,J) \arrow[d, "\pi_2"] \\ (\bar{Q},\bar{I}) \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi"] & (Q,I) \end{tikzcd}$$

donde π es cubriente definido por G y π_1 es localmente cubriente.

Entonces: i). $G = \{ f \in Aut(\bar{Q},\bar{I}) \mid \pi f = \pi \}$

ii). π_1 es cubriente definido por un subgrupo de G

iii). π_2 es localmente cubriente

iv). Si H es el subgrupo de G que define a π_1, entonces $H \triangleleft G$ si y solo si π_2 es cubriente y en este caso π_2 está definido por G/H.

<u>Demostración</u>: i): Si $g \in G$, obviamente $\pi g = \pi$. Supongamos que f es automorfismo de $(\bar{Q},\bar{I})$ con $\pi f = \pi$. Tomamos $x \in \bar{Q}_0$, como $\pi f x = \pi x$ y π está definido por la acción de G, obtenemos $g \in G$ con $gx = fx$.

Mostraremos que $g = f$. Sea $x \xrightarrow{\alpha} y$ flecha en $\bar{Q}$, por tanto

$$gx = fx \begin{matrix} \xrightarrow{f\alpha} fy \\ \xrightarrow[g\alpha]{} gy \end{matrix}$$

con $\pi f y = \pi y = \pi g y$, pero siendo π localmente cubriente tenemos que $fy = gy$, así como $f\alpha = g\alpha$. Siendo $\bar{Q}$ conexo, es claro que $f = g$.

ii): Definimos $H = \{ g \in G \mid \pi_1 g = \pi_1 \}$ que es claramente subgrupo de G. Mostraremos que H define a π_1. Supongamos que $\pi_1 x = \pi_1 y$, luego $\pi x = \pi y$ y tenemos $gx = y$ para alguna $g \in G$. Probaremos que $g \in H$.

Consideremos $x \xrightarrow{\alpha} x_1$ en $\bar{Q}$, luego $\pi_1 x \xrightarrow{\pi_1\alpha} \pi_1 x_1$ es flecha en Δ y como π_1 es localmente cubriente, existe una única flecha $gx \xrightarrow{\tilde{\alpha}} y'$ con $\pi_1 \tilde{\alpha} = \pi_1 \alpha$. Por tanto, $\pi \tilde{\alpha} = \pi \alpha = \pi g \alpha$ y como tanto $\tilde{\alpha}$ como $g\alpha$ comienzan en gx, se tiene $\tilde{\alpha} = g\alpha$. Luego, $\pi_1 g x_1 = \pi_1 x_1$ y $\pi_1 g\alpha = \pi_1 \alpha$

y por convexidad, $\pi_1 g = \pi_1$, o sea $g \in H$. Y H define al morfismo π_1.
Para mostrar que π_1 es cubriente basta que $\pi_1(\bar{I}) = J$.
Sea $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in J(x,y)$ con u_i camino dirigido de x a y. Luego, $\pi_2(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi_2(u_i) \in \bar{I}(\pi_2(x), \pi_2(y))$. Como $I = \pi(\bar{I})$ y π cubriente, existen $\rho_i \in \bar{I}(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$ y $\sum_{i=1}^{m} \pi(\rho_i) = \pi_2(\rho)$. Como $\pi x_i = \pi_2 x$, existe $g_i \in G$ con $g_i x_i = x_1$ para $i = 1, \ldots, m$. Luego $\sigma_i = g_i \rho_i \in \bar{I}(x_1, g_i y_i)$ con $\sum_{i=1}^{m} \pi(\sigma_i) = \pi_2(\rho)$ y podemos suponer que todas las $g_i y_i$ son diferentes.
Ponemos ahora $\sigma_i = \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{ij} v_{ij}$ con v_{ij} camino dirigido de x_1 a $g_i y_i$.
Obtenemos $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{ij} \pi_2 \pi_1(v_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi_2(u_i)$; obtenemos que en cada miembro de esta igualdad no hay cancelaciones, en efecto si $\pi_2(u_i) = \pi_2(u_j)$ como π_2 es localmente cubriente, tendríamos $u_i = u_j$ lo que podemos evitar desde el principio, similarmente en el otro miembro ya que todos los caminos comienzan en x_1. Luego esta expresión es libre y para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $i' \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n_{i'}\}$ con $\lambda_i = \mu_{i'j}$, $\pi_2 \pi_1(v_{i'j}) = \pi_2(u_i)$ y viceversa, o sea que esta asociación es biyectiva.
Escogemos ahora $\bar{x} \in \bar{Q}_0$ con $\pi_1 \bar{x} = x$, de donde $\pi \bar{x} = \pi x_1$ y existe $g \in G$ con $g x_1 = \bar{x}$. Luego, $g\sigma_i \in \bar{I}(\bar{x}, g g_i y_i)$ con $\pi_2 \pi_1(g v_{i'j}) = \pi_2(u_i)$, pero ahora $\pi_1(g v_{i'j})$ y u_i comienzan en x; sabiendo que π_2 es localmente cubriente, tenemos que $\pi_1(g v_{i'j}) = u_i$, de donde se sigue que
$\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{ij} \pi_1(g v_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \pi_1(g \sigma_i) \in \pi_1 \bar{I}$.

iii): Esta propiedad que ya hemos usado en ii) es trivial, como si $x \in \Delta_0$ tomamos $\bar{x} \in \bar{Q}_0$ con $\pi_1 \bar{x} = x$, luego:

$$\begin{tikzcd} \bar{x}^+ \arrow[r, "\pi_1", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi"', "\sim"] & x^+ \arrow[d, "\pi_2"] \\ & \pi_2(x)^+ \end{tikzcd}$$

y $x^+ \xrightarrow{\pi_2} \pi_2(x)^+$ es también biyección.

iii): Supongamos que H es el subgrupo de G que define a π_1.
Asumamos que $H \triangleleft G$. Si $\bar{g} \in G/H$ y $y \in \Delta_0$ con $y = \pi_1 x$ ponemos $\bar{g}y = \pi_1 g x$. Observemos en primer lugar que si $\bar{g} = \bar{g}'$, $g' g^{-1} \in H$ y por tanto $\pi_1 g = \pi_1 g'$ de donde $\bar{g}y$ está bien definida respecto al representante de $\bar{g}$; si $\pi_1 x' = y = \pi_1 x$, tenemos $h \in H$ con $x = hx'$ y $gh = h_1 g$ con $h_1 \in H$ ya que $H \triangleleft G$, luego, $\pi_1 g x = \pi_1 g h x' = \pi_1 h_1 g x' = \pi_1 g x'$, o sea que $\bar{g}y$ no depende de la elección de x. Obviamente, la definición de $\bar{g}$ se puede extender a flechas y tenemos $\bar{g} : \Delta \longrightarrow \Delta$ morfismo de carcajes. Supongamos $\bar{g}y = \bar{g}y'$ con $y = \pi_1 x$, $y' = \pi_1 x'$, o sea, $\pi_1 g x = \bar{g}y = \bar{g}y' = \pi_1 g x'$; luego, existe $h \in H$ con $hgx = gx'$ y siendo $H \triangleleft G$, $hg = gh_1$ para alguna $h_1 \in H$, esto es $gh_1 x = gx'$, $h_1 x = x'$ y por tanto $y = \pi_1 x = \pi_1 h_1 x = \pi_1 x' = y'$. Esto muestra que $\bar{g}$ es inyectiva. Además, $\pi_1 x = \pi_1 g(g^{-1}x) = \bar{g}(\pi_1 g^{-1} x)$ para $x \in \bar{Q}_0$ y $\bar{g}$ es isomorfismo de carcajes. Finalmente, si $\rho \in J(x,y)$ por ii). sabemos que $\rho = \sum_{i=1}^{n} \pi_1(\rho_i)$ con $\rho_i \in \bar{I}(x_i, y_i)$; luego $\bar{g}\rho = \sum_{i=1}^{n} \pi_1 g \rho_i \in \pi_1 \bar{I}$. Esto muestra que $\bar{g} : (\Delta, J) \longrightarrow (\Delta, J)$ es automorfismo. Mostraremos que G/H define a π_2. Si $\bar{g} \in G/H$, $y = \pi_1 x \in \Delta_0$, tenemos $\pi_2 \bar{g} y = \pi_2 \bar{g} \pi_1 x =$
$= \pi_2 \pi_1 g x = \pi g x = \pi x = \pi_2 y$, de donde $\pi_2 \bar{g} = \pi_2$.
Si $\pi_2 y_1 = \pi_2 y_2$, ponemos $\pi_1 x_1 = y_1$, $\pi_1 x_2 = y_2$ y obtenemos $g \in G$ con $g x_1 = x_2$ así: $\bar{g} y_1 = \pi_1 g x_1 = \pi_1 x_2 = y_2$. Además es claro que $\pi_2(J) = I$.

Para el converso supongamos que π_2 está definido por la acción del grupo admisible K. Mostraremos que $H \triangleleft G$. Sean $h \in H$, $g \in G$, tomemos $x \in \bar{Q}_0$ y definimos $y = hx$. Así, $\pi_1 x = \pi_1 y$. Tomemos un camino no necesariamente dirigido u de x a y en $\bar{Q}$, que debe existir ya que $\bar{Q}$ es conexo. Por tanto, $\pi_2(\pi_1 g u) = \pi g u = \pi u = \pi_2(\pi_1 u)$ y como la acción de K define a π_2, debe existir $t \in K$ tal que $t\pi_1 u$ es levantamiento de $\pi_2(\pi_1 gu)$ que comienza en $\pi_1 gx$, pero este levantamiento es único y $\pi_1 gu$ cumple esta propiedad, por tanto $t\pi_1 u = \pi_1 gu$ en particular los puntos finales, $t\pi_1 y = \pi_1 gy$, $\pi_1 gx = t\pi_1 x = t\pi_1 y = \pi_1 gy$. Como $\pi_1 hg^{-1}x = \pi_1 g^{-1}x$, por lo anterior $\pi_1 ghg^{-1}x = \pi_1 x$. Por ii), $ghg^{-1} \in H$.

Por el converso ya probado, G/H define a π_2 que por ser localmente cubriente implica que $K \cong G/H$. //

En (3.2) observamos que un morfismo cubriente tiene la propiedad de levantamiento único de caminos, nos preguntamos que tipo de relaciones pueden levantarse por un morfismo cubriente. El siguiente concepto dá la respuesta, nos será de gran utilidad a lo largo de todo el trabajo.

(3.5) <u>Definición</u>: Sea (Q,I) carcaj con relaciones. Una relación $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I(x,y)$ con $\lambda_i \in k$ y u_i camino dirigido de x a y se llama relación mínima si satisface que $n \geq 2$ y para cualquier subconjunto propio no vacío K de $\{1,\dots,n\}$, $\sum_{i \in K} \lambda_i u_i \notin I(x,y)$.

Recordemos que si $n=1$, ρ se llama relación cero.

(3.6) <u>Lema</u>: Toda relación es suma de relaciones mínimas y cero.

<u>Demostración</u>: Sea $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I(x,y)$ relación.

Por inducción sobre n. Si $n=1$, ρ es relación cero.

Supongamos $n>1$ y que ρ no es relación mínima. Podemos suponer que $m<n$ con $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \in I(x,y)$. Luego también $\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i u_i \in I(x,y)$ y por hipótesis de inducción, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i$ y $\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i u_i$ son suma de relaciones mínimas y cero. //

(3.7) <u>Proposición</u>: Sea $f:(\Delta,J)\to(Q,I)$ morfismo cubriente definido por la acción de G. Sea $\rho\in I(x,y)$ relación mínima ó cero y $\bar{x}\in\Delta_0$ con $f(\bar{x})=x$. Entonces existe $\bar{y}\in\Delta_0$ y una relación $\bar{\rho}\in J(\bar{x},\bar{y})$ con $f(\bar{\rho})=\rho$.

<u>Demostración</u>: Escribimos $\rho=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i$ en su expresión reducida. Procedemos ahora como en (3.4): como $I=f(J)$ y f cubriente, existen $\rho_i\in J(x_i,y_i)$, $i=1,\dots,m$ y $\rho=\sum_{i=1}^{m}f(\rho_i)$. Como $f(\bar{x})=x=f(x_i)$, existe $g_i\in G$ con $g_i x_i=\bar{x}$ para $i=1,\dots,m$. Luego, $\sigma_i=g_i\rho_i\in J(\bar{x},g_iy_i)$ con $\sum_{i=1}^{m}f(\sigma_i)=\rho$ y podemos suponer que todas las g_iy_i son diferentes. Ponemos ahora $\sigma_i=\sum_{j=1}^{n_i}\mu_{ij}v_{ij}$ en expresión reducida. Así, obtenemos $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\mu_{ij}f(v_{ij})$ y en esta última expresión no hay cancelaciones, o sea aparece en forma reducida, debido al levantamiento único de caminos. Como esta igualdad tiene lugar en el espacio vectorial libre de los caminos de x a y, para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, existe $\tau(i)\in\{(\ell,j)\mid \ell\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n_\ell\}\}$ con $u_i=f(v_{\tau(i)})$ y $\lambda_i=\mu_{\tau(i)}$, siendo además la asociación τ biyectiva. Luego, si $m>1$, $\phi\neq K=\tau^{-1}(\{(1,j)\mid j=1,\dots,n_1\})\subsetneq\{1,\dots,n\}$ tal que $\sum_{i\in K}\lambda_i u_i=\sum_{j=1}^{n_1}\mu_{1j}f(v_{1j})=f(\sigma_1)\in f(J)=I$, lo cual no es posible si ρ es relación cero ó mínima. Por tanto, $m=1$ y $\rho=f(\sigma_1)$ ∎

Observar además que la relación $\bar{\rho}\in J(\bar{x},\bar{y})$ es cero cuando ρ es cero en I y es relación mínima cuando ρ lo sea.

Concluimos esta sección con una observación relacionada con conceptos introducidos en la sección anterior y que nos será de utilidad más tarde.

(3.8) <u>Lema</u>: Sea $f : (\Delta, J) \longrightarrow (Q, I)$ un morfismo cubriente entre carcajes con relaciones. Sea $F = k(f) : k(\Delta, J) \longrightarrow k(Q, I)$ el funtor inducido, entonces F es un funtor cubriente.

<u>Demostración</u>: Sea $x \in \Delta_0$, $b \in Q_0$, mostraremos que
$\bigoplus_{f(y)=b} \mathrm{Hom}_{k(\Delta,J)}(x,y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k(Q,I)}(Fx, b)$.

Inyectividad: Supongamos $(\phi_y)_y \in \bigoplus_{f(y)=b} \mathrm{Hom}_{k(\Delta,J)}(x,y)$, tal que $0 = \sum_{fy=b} F(\phi_y)$ en $\mathrm{Hom}_{k(Q,I)}(Fx, b)$. Podemos escribir $\phi_y = \overline{t_y}$, donde $t_y = \sum_{i=1}^{n_y} \lambda_{yi} u_{yi}$ con u_{yi} caminos dirigidos de x a y.
Luego, $0 = \sum_{fy=b} F(\phi_y) = \sum_{fy=b} F\left(\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_{yi} u_{yi}\right) = \sum_{fy=b} \sum_{i=1}^{n_y} \lambda_{yi} \overline{f(u_{yi})}$,
en otras palabras $\sum_{fy=b} \sum_{i=1}^{n_y} \lambda_{yi} f(u_{yi}) \in I(\pi x, b)$. Escribiendo esta relación como suma de relaciones cero y mínimas y usando que estas relaciones pueden levantarse en forma única al mismo tipo de relaciones comenzando en x — como en (3.7) —, obtenemos que $t_y \in J(x,y)$ y que $\phi_y = 0$ para cada y con $fy = b$.

Supravectividad: Sea $\phi \in \mathrm{Hom}_{k(Q,I)}(Fx, b)$. La escribimos como $\phi = \overline{t}$ con $t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ y u_i un camino de Fx a b. Sea v_i el único levantamiento de u_i a un camino que comienza en x; llámese y_i el final de v_i. Sin pérdida de generalidad $1 = n_0 < n_1 < \ldots < n_\ell = n$, de forma que para dos $j, j' \in \{n_i, \ldots, n_{i+1}-1\}$ se tiene $y_j = y_{j'}$ y en diferentes intervalos son distintas. Definimos
$\phi_{y_{n_i}} := \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \lambda_j \overline{v_j} \in \mathrm{Hom}_{k(\Delta,J)}(x, y_{n_i})$ para cada $i = 1, \ldots, \ell-1$.
Tenemos $(\phi_{y_{n_i}})_{i=1}^{\ell} \in \bigoplus_{fy=b} \mathrm{Hom}_{k(\Delta,J)}(x,y)$ con $\sum_{i=1}^{\ell-1} F(\phi_{y_{n_i}}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(\overline{v_i}) =$
$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{f(v_i)} = \overline{t} = \phi$. Que prueba el resultado. //

4. LA CUBIERTA UNIVERSAL.

Sea (Q,I) un carcaj con relaciones, que se mantendrá fijo en toda la sección. Construiremos aquí una cubierta de (Q,I) que es objeto universal en la categoría de cubiertas de (Q,I). Nuestro método de construcción es intrínseco al carcaj con relaciones dado y se aproxima en algunos aspecto a la construcción de Waschbüsch [22].

(4.1) Definición: Sea W el conjunto de todos los caminos no orientado de Q, o sea, para cada flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Q admitimos $y \xleftarrow{\alpha^{-1}} x$. Denotamos por $\sim$ la relación de equivalencia en W inducida por las siguientes relaciones elementales:

a). Si $x \xrightarrow{\alpha} y$ es flecha en Q, entonces $\alpha\alpha^{-1} \sim \tau_y$, $\alpha^{-1}\alpha \sim \tau_x$, donde recordamos que τ_x es el camino trivial en x.

b). Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I(x,y)$ es relación mínima, $u_i \sim u_j$ para todo par $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

c). Si $u \sim v$ por medio de a). ó b). entonces $w'uw \sim w'vw$ siempre que estos productos estén definidos.

La relación $\sim$ se llama homotopía.

El siguiente resultado es claro:

(4.2) Lema: i). $s,e: W \longrightarrow Q_0$ son compatibles con $\sim$ e inducen $s_0, e_0: W/\sim \longrightarrow Q_0$.

ii). El producto en W es compatible con $\sim$ e induce un producto en $W/\sim$. Con este producto todo elemento en $W/\sim$ tiene un inverso derecho e izquierdo. //

Construiremos un carcaj que tenga como vértices al conjunto $W_0 = \mathcal{W}/\sim$.

Tomemos $x_1, x_2 \in W_0$ con $s_0(x_1) = s_0(x_2)$. Pondremos $x_1 \longrightarrow x_2$ si y solamente si existen $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ con $x_1 = [w_1]$, $x_2 = [w_2]$ y una flecha α en Q con $w_2 = \alpha w_1$.

Observemos que esta flecha α está determinada en forma única, en efecto: $x_1 = [w_1']$, $x_2 = [w_2']$ con $w_2' = \beta w_1'$ tendríamos $s(\alpha) = e(w_1) = e_0(x_1) = e(w_1') = s(\beta)$ y similarmente $e(\alpha) = e(\beta)$ y como en Q no hay flechas dobles, $\alpha = \beta$. Luego, podremos escribir $x_1 \xrightarrow{\hat{\alpha}} x_2$ para la flecha entre x_1 y x_2 sin ambigüedades.

Llamamos W al carcaj resultante y definimos $\pi: W \longrightarrow Q$ el morfismo de carcajes suprayectivo tal que $x_1 \xrightarrow{\hat{\alpha}} x_2 \stackrel{\pi}{\longmapsto} e_0(x_1) \xrightarrow{\alpha} e_0(x_2)$.

(4.3) <u>Lema</u>: W es unión de $|Q_0|$ componentes conexas, todas ellas isomorfas.

<u>Demostración</u>: Observar que si $x_1 \xrightarrow{\hat{\alpha}} x_2$ en W, entonces $s_0(x_1) = s_0(x_2)$, luego W tiene al menos $|Q_0|$ componentes conexas. Pero si $x_1 = [w_1]$ $x_2 = [w_2]$ con $s(w_1) = s(w_2)$, entonces $[w_2] = [w_2]([w_1^{-1}][w_1]) = ([w_2][w_1^{-1}])[w_1]$ y la sucesión de flechas en $w_2 w_1^{-1}$ conecta $x_1 = [w_1]$ con $x_2 = [w_2]$. Llamamos W_i a la componente de W con vértice inicial i. Tomamos $i, j \in Q_0$, como Q es conexo, tomamos también un camino γ de i en j en Q. Definimos

$$\varphi: W_j \longrightarrow W_i, \quad x \longmapsto x[\gamma] \qquad , \qquad \psi: W_i \longrightarrow W_j, \quad y \longmapsto y[\gamma^{-1}]$$

que claramente pueden extenderse a morfismos de carcajes, además, φ y ψ son inversas. //

Llamamos $\tilde{Q}$ a una de las componentes conexas de W, y denotamos por $\pi: \tilde{Q} \longrightarrow Q$ a la restricción del morfismo $\pi: W \longrightarrow Q$. Obviamente esta π también es morfismo supráyectivo de carcajes.

La siguiente observación nos permitirá definir un ideal $\tilde{I}$ en $\tilde{Q}$ de forma que π sea cubriente.

(4.4) <u>Lema</u>: Para cada $x \in \tilde{Q}_0$, los morfismos inducidos por π $x^+ \longrightarrow (\pi(x))^+$ y $x^- \longrightarrow (\pi(x))^-$ son biyectivos.

<u>Demostración</u>: Es consecuencia directa de que Q no tiene flechas dobles: $x \begin{array}{c} \xrightarrow{\hat{\alpha}} y_1 \\ \xrightarrow[\hat{\beta}]{} y_2 \end{array}$ con $\pi(y_1) = \pi(y_2)$ implica $\pi(x) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \pi(y_1) = \pi(y_2)$ en Q

y esto $\alpha = \beta$ o lo que es igual $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ con $y_1 = y_2$. La supráyectividad es trivial //

Definimos ahora el ideal $\tilde{I}$ de $\tilde{Q}$.

Sea $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I(a,b)$ relación mínima, y sea $x \in \tilde{Q}_0$ con $\pi(x) = a$. Asumamos $x = [w]$. Por (4.4) podemos tomar un camino $\tilde{u}_i$ que comienza en x y tal que $\pi(\tilde{u}_i) = u_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Claramente el punto final de $\tilde{u}_i$ es $[u_i w]$. Para un par $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos por la definición de homotopía, $u_i \sim u_j$ y luego $[u_i w] = [u_j w]$. Llamamos y a este punto final común; luego, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i$ es una relación de x a y.

<u>Definimos</u> $\tilde{I}$ el ideal de $\tilde{Q}$ generado por todas estas relaciones $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i$, junto con cualquier camino $\tilde{u}$ tal que $\pi(\tilde{u}) \in I$ —o sea, las relaciones cero—.

Observar que $\tilde{I}$ puede generarse aditivamente por medio de estos dos tipos de relaciones, ya que toda relación en I es suma de ceros y mínimas, (3.6).

(4.5) <u>Proposición</u>: $\pi : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \longrightarrow (Q, I)$ es un morfismo cubriente.

<u>Demostración</u>: Para cada par de puntos $x, y \in \tilde{Q}_0$ con $\pi(x) = \pi(y)$ definimos $g_{x,y} : \tilde{Q}_0 \longrightarrow \tilde{Q}_0$, $z \longmapsto zx^{-1}y$, que puede obviamente extenderse a un morfismo de carcajes. Como $g_{y,x}$ es inverso de $g_{x,y}$, este es un automorfismo de $\tilde{Q}$.

Como a la flecha $z_1 \xrightarrow{\hat{\alpha}} z_2$, $g_{x,y}$ la enviá en $z_1x^{-1}y \xrightarrow{\hat{\alpha}} z_2x^{-1}y$, tenemos que a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i \in \tilde{I}(z_1, z_2)$ levantamiento de $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I(\pi(z_1), \pi(z_2))$ $g_{x,y}$ lo enviá en el único levantamiento de $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ que comienza en $z_1x^{-1}y$, o sea $g_{x,y}$ preserva al ideal $\tilde{I}$; por tanto $g_{x,y}$ es automorfismo de $(\tilde{Q}, \tilde{I})$.

Sea $G = \{ g_{x,y} \mid x, y \in \tilde{Q}_0, \pi(x) = \pi(y) \}$. Como $g_{x,y}^{-1} = g_{y,x}$ y también $g_{x,y} \cdot g_{x',y'} = g_{x\,y'^{-1}x',\,y}$ se tiene que G es grupo.

Es fácil ver que π está definida por la acción de G:

Si $\pi(x) = \pi(y)$, entonces $g_{x,y} \in G$ tal que $g_{x,y}(x) = y$.

Si $g_{x,y} \in G$ y $z \in \tilde{Q}_0$, $\pi(g_{x,y}(z)) = \pi(zx^{-1}y) = e_0(zx^{-1}y) = e_0(z) = \pi(z)$.

Como los generadores de $\tilde{I}$ son levantamientos por π de relaciones en I, tenemos $\pi(\tilde{I}) \subset I$. Si $\rho \in I(a,b)$ y es relación cero ó mínima, por definición tenemos $\tilde{\rho} \in \tilde{I}$ con $\pi(\tilde{\rho}) = \rho$. Pero como toda relación es suma de ceros y mínimas tenemos también $I \subset \pi(\tilde{I})$. O sea, $I = \pi(\tilde{I})$.

Nos falta mostrar que efectivamente $(\tilde{Q}, \tilde{I})$ es un carcaj con relaciones. Como $\tilde{Q}$ es localmente finito y sin flechas dobles, basta mostrar que el ideal $\tilde{I}$ es admisible.

Sea $x \in \tilde{Q}_0$, como I es admisible, hay un número natural n con $\mathcal{F}^n(\pi(x), -) \subset I(\pi(x), -)$. Tomemos $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i \in \mathcal{F}^n(x, y)$.

como π preserva el número de flechas, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi(\tilde{u}_i) \in \delta^n(\pi(x),\pi(y)) \subset$ $\subset I(\pi(x),\pi(y))$. Como ya sabemos que $I = \pi(\hat{I})$ y que π está definido por la acción de un grupo de automorfismos de $(\hat{Q},\hat{I})$, podemos proceder como en (3.7) y obtener $\rho_j \in \hat{I}(x,z_j)$, $j=1,\dots,m$ con todas las z_j diferentes y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi(\tilde{u}_i) = \sum_{j=1}^{m} \pi(\rho_j)$. Ponemos $\rho_j = \sum_{t=1}^{n_j} \mu_{jt} v_{jt}$ expresión reducida, así $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi(\tilde{u}_i) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{n_j} \mu_{jt} \pi(v_{jt})$ y usando que esta expresión es libre, tenemos que $m=1$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i = \rho_1 \in \hat{I}(x,z_1)$.
Que $\hat{I}(x,-) \subset \delta^2(x,-)$ es trivial, y luego se tiene que $\hat{I}$ es admisible completando la prueba de la Proposición. //

Observemos que el grupo G construído en la Proposición anterior es isomorfo al grupo fundamental de (Q,I), $\Pi_1(Q,I)$.

Definimos
$$\varphi : G \longrightarrow \Pi_1(Q,I), \quad g_{x,y} \longmapsto y^{-1}x$$
que es claramente función biyectiva. Además, $\varphi(g_{x,y} \cdot g_{x',y'}) = \varphi(g_{xy'^{-1}x',y}) = y^{-1}xy'^{-1}x' =$ $= \varphi(g_{x,y}) \cdot \varphi(g_{x',y'})$ y φ es isomorfismo.

Luego, π está definido por la acción de $\Pi_1(Q,I)$. Cuando no haya confusión posible, llamaremos Π a este grupo y lo haremos actuar como G en $(\hat{Q},\hat{I})$.

El siguiente lema es fundamental para probar la universalidad de la cubierta π.

(4.6) <u>Lema</u>: Sea $f:(\Delta,J) \longrightarrow (Q,I)$ cubierta definida por la acción de un grupo G. Sean $\bar{u}, \bar{v}$ caminos en Δ con $s(\bar{u}) = x = s(\bar{v})$ supongamos que $u = f(\bar{u})$, $v = f(\bar{v})$ son tales que $u \sim v$, entonces también $e(\bar{u}) = e(\bar{v})$.

Demostración: Tenemos $u = u_0 \sim u_1 \sim \dots \sim u_n = v$ de forma que cada paso es una homotopía elemental. Como f es cubierta podemos tomar levantamientos $\bar{u}_i$ de u_i con $x = s(\bar{u}_i)$. El resultado se obtendrá si lo probamos para cada paso elemental. Podemos por ello suponer que $u \sim v$ es una homotopía elemental y distinguir 3 casos siguiendo la definición de $\sim$, (4.1)

a): es trivial

b): Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I(a,b)$ es relación mínima con $u_1 = u$, $u_2 = v$. En (3.7) probamos que existía $y \in \Delta_0$ y una relación $\rho \in J(x,y)$ con $f(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, luego $e(\bar{u}) = y = e(\bar{v})$.

c): Supongamos que $u = w_1 w w_2$, $v = w_1 w' w_2$ con $w \sim w'$ por medio de a). ó b). Tenemos $\bar{u} = \bar{w}_1 \bar{w} \bar{w}_2$, $\bar{v} = \bar{w}'_1 \bar{w}' \bar{w}'_2$ donde $\bar{w}_2$ y $\bar{w}'_2$ son levantamiento de w_2 comenzando en x, $\bar{w}$ es levantamiento de w comenzando en $e(\bar{w}_2)$ y $\bar{w}_1$ levantamiento de w_1 comenzando en $e(\bar{w})$ y similarmente para $\bar{w}'_1$ y $\bar{w}'$. Como f tiene levantamiento único, $\bar{w}_2 = \bar{w}'_2$, por tanto $e(\bar{w}_2) = s(\bar{w}) = e(\bar{w}'_2) = s(\bar{w}')$ y como $w \sim w'$ por a). ó b). se tiene $e(\bar{w}) = e(\bar{w}')$. Otra vez por levantamiento único, se tiene $e(\bar{u}) = e(\bar{w}_1) = e(\bar{w}'_1) = e(\bar{v})$. //

La siguiente es la definición usual.

(4.7) Definición: $(\Delta, J) \xrightarrow{f} (Q, I)$ cubierta se llama cubierta universal si para cualquier otro morfismo cubriente $(\Delta', J') \xrightarrow{f'} (Q, I)$ y puntos $x \in \Delta_0$, $y \in \Delta'_0$ con $f(x) = f'(y)$, existe un único morfismo de carcajes con relaciones $h: (\Delta, J) \longrightarrow (\Delta', J')$ con $f = f'h$ y $h(x) = y$.

El siguiente es el principal resultado de esta sección.

(4.8). Teorema: $\pi: (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (Q,I)$ es cubierta universal.

Demostración: Sea $f: (\Delta, J) \to (Q,I)$ un morfismo cubriente. Sean $x \in \tilde{Q}_0$, $y \in \Delta_0$ con $\pi(x) = f(y)$. Construiremos $h: (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (\Delta, J)$.

Definamos $h(x) = y$. Sea $x \xrightarrow{\hat{\alpha}} x'$ flecha en $\tilde{Q}$, luego tenemos $x = [w]$, $x' = [w']$ con $w' = \alpha w$. Como f es cubierta hay una única flecha $y \xrightarrow{\alpha'} y'$ con $f(\alpha') = \alpha$. Ponemos $h(x) = y \xrightarrow{\alpha' = h(\hat{\alpha})} y' = h(x')$. Y continuamos inductivamente de esta manera. Nuestro problema es ver si este morfismo está bien definido. Supongamos que $z \in \tilde{Q}_0$ y que podemos llegar a z desde x por dos caminos diferentes $\bar{u}$ y $\bar{v}$, basta mostrar que el punto determinado en Δ_0 por medio de cada uno de estos caminos es el mismo.

Pongamos $u = \pi(\bar{u})$ y $v = \pi(\bar{v})$ y recordemos $x = [w]$. El punto final de $\bar{u}$ es $z = [uw]$ y el de $\bar{v}$ es $z = [vw]$, luego $uw \sim vw$ y $u \sim v$. El punto asociado a z por medio de $\bar{u}$ es el punto final del levantamiento por f de u comenzando en y, llámese a este punto $e_\Delta(u)$. Similarmente el punto asociado a z por medio de v es $e_\Delta(v)$ el punto final del levantamiento a Δ de v comenzando en y. Por (4.6), estos puntos son iguales, $e_\Delta(u) = e_\Delta(v)$ y $h(z)$ está bien definido.

Luego, h es morfismo de carcajes con $\pi = fh$, $y = h(x)$.

Sea $\tilde{\rho} \in \tilde{I}(x', x'')$ tal que $\pi(\tilde{\rho})$ es relación cero ó mínima en I. Por tanto, $fh(\tilde{\rho}) = \pi(\tilde{\rho}) \in I(\pi(x'), \pi(x''))$ y $h(\tilde{\rho})$ es un levantamiento de $\pi(\tilde{\rho})$ comenzando en $h(x')$. Usando (3.7) y la propiedad de levantamiento único de caminos de f, tenemos $h(\tilde{\rho}) \in J(h(x'), h(x''))$.

Y por tanto, $h: (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (\Delta, J)$ es un morfismo bien definido. La unicidad es una consecuencia trivial de la definición de h

y de que f sea localmente cubriente. //

Supongamos dada el álgebra Λ. Sabemos construir un carcaj con relaciones (Q,I) de forma que $\Lambda \cong k(Q,I)$. Luego podemos construir la cubierta universal $\pi : (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (Q,I)$.

Este morfismo induce el funtor $k(\pi) : k(\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow k(Q,I) \cong \Lambda$, y nos gustaría decir que la categoría $\tilde{\Lambda} = k(\tilde{Q},\tilde{I})$ es la cubierta universal del álgebra Λ. Sin embargo, existe la ambigüedad de la elección del ideal I que según hemos visto no es único. De hecho podemos llegar a dos categorías no isomorfas como lo muestra el siguiente ejemplo.

(4.9) <u>Ejemplo</u>: Consideremos el carcaj con relaciones:

$$Q: \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "\beta"] & 2 \arrow[l, bend left, "\gamma"] \end{tikzcd} \qquad I_1 \text{ generado por } \alpha^2-\gamma\beta,\ \beta\gamma-\beta\alpha\gamma,\ \alpha^4.$$

$$Q: \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\bar{\alpha}"] \arrow[r, bend left, "\bar{\beta}"] & 2 \arrow[l, bend left, "\bar{\gamma}"] \end{tikzcd} \qquad I_2 \text{ generado por } \bar{\alpha}^2-\bar{\gamma}\bar{\beta},\ \bar{\beta}\bar{\gamma},\ \bar{\alpha}^4.$$

$$\Lambda_1 = k(Q,I_1) \quad , \Lambda_2 = k(Q,I_2) \text{ algebras}$$

Asumamos que el campo en el que trabajos tiene característica diferente de 2. Probaremos que Λ_1 y Λ_2 son isomorfas.

$$\text{Def.} \quad \varphi : Q \longrightarrow kQ$$
$$\bar{\alpha} \longmapsto \alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$\bar{\beta} \longmapsto \beta - \tfrac{1}{2}\beta\alpha$$
$$\bar{\gamma} \longmapsto \gamma - \tfrac{1}{2}\alpha\gamma$$

Debido a que $\bar{\alpha}$, $\overline{\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2}$ son iguales en $\operatorname{rad}\Lambda_2/\operatorname{rad}^2\Lambda_2$, el morfismo inducido $\varphi : kQ \longrightarrow kQ$ es k-isomorfismo.

Un fácil cálculo muestra que:

$$\varphi(\bar\gamma\bar\beta-\bar\alpha^2)=\gamma\beta-\alpha^2+\left(\alpha^3-\tfrac{1}{2}\alpha\gamma\beta-\tfrac{1}{2}\gamma\beta\alpha\right)+\tfrac{1}{4}\left(\alpha\gamma\beta\alpha-\alpha^4\right)\in I_1$$

$$\varphi(\bar\beta\bar\gamma)=\beta\gamma-\beta\alpha\gamma+\tfrac{1}{4}\beta\alpha^2\gamma\in I_1$$

$\varphi(\bar\alpha^4)\in I_1$ ya que sólo aparecen potencias mayores o iguales a 4 de α.

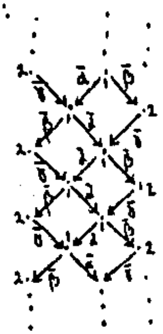
O sea, $\varphi(I_2)\subset I_1$. También se tiene $\varphi(I_2)=I_1$.

Luego, φ induce, $\bar\varphi:\Lambda_2\to\Lambda_1$ isomorfismo.

Como en I_1 aparece la relación $\beta\gamma-\beta\alpha\gamma$, se tiene $\beta\gamma\sim\beta\alpha\gamma$ y luego $\alpha\sim\tau_1$. De donde $\gamma\beta\sim\alpha^2\sim\tau_1$. Por tanto la cubierta universal de (Q,I_1) es ella misma.

Para (Q,I_2) es fácil ver que la cubierta universal es como sigue:

$\tilde{Q}$



con $\tilde{I}$ generado por $\bar\gamma\bar\beta-\bar\alpha^2$, $\bar\beta\bar\gamma$, $\bar\alpha^4$.

En la sección 6 veremos sin embargo que es posible mostrar la unicidad de las cubiertas universales sin ciclos dirigidos para un álgebra de tipo de representación finita.

5. REPRESENTACIONES DE UN CARCAJ Y SUS CUBIERTAS.

Como hemos dicho antes, estamos interesados en el estudio de la categoría de módulos mod Λ para una k-álgebra Λ. La introducción de los carcajes nos permiten trasladar este problema a uno de representaciones. La introducción de cubiertas para los carcajes es fundamentalmente con la idea de trasladar un problema de representaciones a otro sobre un carcaj más simple, del cual se pueda conocer más información.

En esta sección comenzaremos a estudiar las relaciones entre las representaciones de un carcaj y las de su cubierta.

Sea $\pi : (\bar{Q}, \bar{I}) \longrightarrow (Q, I)$ morfismo cubriente definido por la acción del grupo admisible G.

(5.1) <u>Definición</u>: Sea $V \in \mathrm{Mod}(\bar{Q}, \bar{I})$ y $g \in G$, denotamos por $V^g \in \mathrm{Mod}(\bar{Q}, \bar{I})$ a la representación $V^g(x) = V(g(x))$ para $x \in \bar{Q}_0$ y $V^g(\alpha) = V(g(\alpha))$ para $\alpha \in \bar{Q}_1$.

Obviamente, de esta forma g induce un automorfismo de la categoría $\mathrm{Mod}(\bar{Q}, \bar{I})$ de manera que el grupo G actúa en $\mathrm{Mod}(\bar{Q}, \bar{I})$.

Denotaremos por l-mod$(\bar{Q}, \bar{I})$ a la subcategoría de $\mathrm{Mod}(\bar{Q}, \bar{I})$ de las representaciones V con $V(x)$ de dimensión finita para $x \in \bar{Q}_0$. Así, mod$(\bar{Q}, \bar{I})$ es la subcategoría de l-mod$(\bar{Q}, \bar{I})$ de las representaciones con soporte finito.

Vamos a relacionar las representaciones mod(Q, I) con una subcategoría plena de l-mod$(\bar{Q}, \bar{I})$, las representaciones G-periódicas.

(5.2) <u>Definición</u>: $\mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$ es la siguiente categoría:

a). $(V,(\varphi_g)_{g\in G}) \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$ si y solo si

$V \in \ell\text{-mod}(\bar{Q},\bar{I})$, $\varphi_g : V \longrightarrow V^g$ es isomorfismo en $\ell\text{-mod}(\bar{Q},\bar{I})$

φ_1 es la identidad y $\varphi_h^g \varphi_g = \varphi_{hg}$, para $g,h \in G$.

b). $f : (V,(\varphi_g)_{g\in G}) \longrightarrow (W,(\psi_g)_{g\in G})$ es morfismo en $\mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$

si $f : V \to W$ es de representaciones y para $g \in G$, $x \in \bar{Q}_0$, el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V(x) & \xrightarrow{f(x)} & W(x) \\ {\scriptstyle \varphi_g(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_g(x)} \\ V^g(x) & \xrightarrow{f^g(x)} & W^g(x) \end{array}.$$

(5.3) <u>Proposición</u>: Las categorías $\mathrm{mod}(Q,I)$ y $\mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$ son equivalentes.

<u>Demostración</u>: Definimos $T : \mathrm{mod}(Q,I) \longrightarrow \mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$ el funtor restricción — "pull-up" en [8] — tal que si $V \in \mathrm{mod}(Q,I)$, $T(V)(x) = V(\pi x)$ para $x \in \bar{Q}_0$ y $T(V)(\alpha) = V(\pi\alpha)$ para $\alpha \in \bar{Q}_1$, y similarmente en morfismos. Como excluimos los isomorfismos de $T(V)$, se supone que son identidades. Primero checamos que T está bien definido: sea $V \in \mathrm{mod}(Q,I)$, $x \in \bar{Q}_0$, $g \in G$; así, $T(V)^g(x) = T(V)(g(x)) = V(\pi g(x)) = V(\pi x) = T(V)(x)$ y $T(V) \in \mathrm{mod}^G\bar{Q}$.

Si $\rho \in \bar{I}(x,y)$ tenemos que $\pi(\rho) \in I(\pi(x),\pi(y))$ y $T(V)(\rho) = V(\pi(\rho)) = 0$, luego $T(V) \in \mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$. En la misma forma se checa que T está bien definido en morfismos y que es funtor.

Sean $f,g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ en $\mathrm{mod}(Q,I)$ tales que $T(f) = T(g)$. Si $x \in Q_0$, escogemos $\bar{x} \in \bar{Q}_0$ con $\pi\bar{x} = x$ y $f(x) = f(\pi\bar{x}) = T(f)(\bar{x}) = T(g)(\bar{x}) = g(x)$, así $f = g$ y T es fiel.

Si $f \in \mathrm{Hom}(T(V),T(W))$ en $\ell\text{-mod}(\bar{Q},\bar{I})$, definimos $f' \in \mathrm{Hom}(V,W)$ por medio de $f'(x) = f(\bar{x})$ para cualquier $\pi\bar{x} = x$. Para cualquier otra

$\bar{x}' \in \bar{Q}_0$ con $\pi \bar{x}' = x$, tenemos el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} T(V)(\bar{x}) \arrow[r, "f(\bar{x})"] \arrow[d, equal] & T(W)(\bar{x}) \arrow[d, equal] \\ T(V)^g(\bar{x}) = T(V)(\bar{x}') \arrow[r, "f(\bar{x}')"] & T(W)(\bar{x}') \end{tikzcd}$$

de donde f' está bien definida y $T(f')(\bar{x}) = f'(\pi \bar{x}) = f(\bar{x})$. Así, $T(f') = f$ y T es pleno. Probar que T es denso es más complicado.

Sea $(V, (\varphi_g)_{g \in G}) \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{mod}^G(\bar{Q}, \bar{I})$. Para todo vértice $x \in Q_0$ fijamos $\bar{x} \in \bar{Q}_0$ tal que $\pi \bar{x} = x$.

Definimos $V' \in \mathrm{mod}(Q, I)$ en la siguiente forma:

Para $x \in Q_0$, ponemos $V'(x) = V(\bar{x})$. Si $x_1 \xrightarrow{\alpha} x_2$ es una flecha en Q, como $\pi \bar{x}_1 = x_1$, tenemos una única flecha $\bar{x}_1 \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{x}_2'$ en $\bar{Q}$ con $\pi \bar{\alpha} = \alpha$. Sabiendo que $\pi \bar{x}_2' = x_2 = \pi \bar{x}_2$ y que G es admisible, obtenemos un único elemento $g_\alpha \in G$ con $g_\alpha(\bar{x}_2') = \bar{x}_2$.

Ponemos $V'(\alpha) : V(\bar{x}_1) \xrightarrow{V(\bar{\alpha})} V(\bar{x}_2') \xrightarrow{\varphi_{g_\alpha}(\bar{x}_2')} V^{g_\alpha}(\bar{x}_2') = V(\bar{x}_2)$.

De esta forma obtuvimos ya una representación V' del carcaj Q. Probaremos que V' satisface las relaciones I. Para ello generalizaremos la expresión que define a V' de flechas a caminos:

Sea $u : x_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_2 \xrightarrow{\alpha_2} x_3 \to \dots \to x_n$ un camino dirigido en Q. Con la notación de arriba tenemos, $\bar{x}_1 \xrightarrow{\bar{\alpha}_1} \bar{x}_2' \xmapsto{g_{\alpha_1}} \bar{x}_2 \xrightarrow{\bar{\alpha}_2} \bar{x}_3' \xmapsto{g_{\alpha_2}} \bar{x}_3 \to \dots$

De la definición obtenemos: $V'(\alpha_2\alpha_1) = \varphi_{g_{\alpha_2}}(\bar{x}_3')\, V(\bar{\alpha}_2)\, \varphi_{g_{\alpha_1}}(\bar{x}_2')\, V(\bar{\alpha}_1)$.

Y $\bar{x}_1 \xrightarrow{\bar{\alpha}_1} \bar{x}_2' \xrightarrow{g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{\alpha}_2)} g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{x}_3')$ es el único levantamiento de $\alpha_2\alpha_1$ comenzando en $\bar{x}_1$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] V(\bar{x}_2) \arrow[rr, "\varphi_{g_{\alpha_1}^{-1}}(\bar{x}_2)"] \arrow[d, "V(\bar{\alpha}_2)"'] & & V^{g_{\alpha_1}^{-1}}(\bar{x}_2) = V(\bar{x}_2') \arrow[d, "V^{g_{\alpha_1}^{-1}}(\bar{\alpha}_2)"] \\ V(\bar{x}_3') \arrow[r, "\varphi_{g_{\alpha_2}}(\bar{x}_3')"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_{g_{\alpha_1}^{-1}}(\bar{x}_3')"'] & V^{g_{\alpha_2}}(\bar{x}_3') = V(\bar{x}_3) \arrow[r, "\varphi_{g_{\alpha_1}^{-1}g_{\alpha_2}^{-1}}(\bar{x}_3)"] & V(g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{x}_3')) \end{tikzcd}$$

En el diagrama anterior tanto el cuadrado exterior y el triangulo inferior conmutan. Luego, $V'(\alpha_2\alpha_1) = \varphi_{g_{\alpha_1}^{-1} g_{\alpha_2}^{-1}}^{-1}(\bar{x}_3)\, V^{g_{\alpha_1}^{-1}}(\bar{\alpha}_2)\, \varphi_{g_{\alpha_1}^{-1}}(\bar{x}_2)\, \varphi_{g_{\alpha_1}}(\bar{x}_2')\, V(\bar{\alpha}_1) =$

$= \varphi_{g_{\alpha_2} g_{\alpha_1}}(g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{x}_3))\, V(g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{\alpha}_2))\, V(\bar{\alpha}_1) = \varphi_{g_{\alpha_2} g_{\alpha_1}}(g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{x}_3'))\, V(g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{\alpha}_2)\bar{\alpha}_1)$.

Continuando por inducción, si $\bar{u}$ es el único levantamiento de u que comienza en $\bar{x}_1$ y termina en $\bar{x}_n'$ y $g \in G$ es el único morfismo con $g\bar{x}_n' = \bar{x}_n$, entonces tenemos $V'(u) = \varphi_g(\bar{x}_n')\, V(\bar{u})$.

Regresamos al problema original: Sea $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I(x,y)$ relación, que podemos asumir mínima ó cero. Así, se obtiene una relación $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in \bar{I}(\bar{x}, \bar{y}')$ de forma que v_i es el único levantamiento de u_i que comienza en $\bar{x}$. Sea $h \in G$ el elemento con la propiedad $h(\bar{y}') = \bar{y}$, entonces $V'(u_i) = \varphi_h(\bar{y}')\, V(v_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Tenemos que

$V'(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V'(u_i) = \varphi_h(\bar{y}') \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i V(v_i)\right) = \varphi_h(\bar{y}')\, V\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = 0$

ya que V satisface $\bar{I}$. De esta forma llegamos a $V' \in \mathrm{mod}(Q, I)$.

Probamos ahora que $T(V') \cong V$ en $\mathrm{mod}^G(\bar{Q}, \bar{I})$.

Sea $\bar{x}' \in \bar{Q}_0$. Ponemos $x = \pi(\bar{x}')$, como $\pi\bar{x}' = \pi\bar{x}$, hay solo una $g_{\bar{x}'} \in G$ con $g_{\bar{x}'}(\bar{x}) = \bar{x}'$ ya que G es admisible.

Definimos, $f(\bar{x}') := \varphi_{g_{\bar{x}'}}(\bar{x}) : V(\bar{x}) = V'(x) = V'(\pi\bar{x}') = T(V')(\bar{x}') \xrightarrow{\sim} V^{g_{\bar{x}'}}(\bar{x}) = V(\bar{x}')$.

Mostramos primero que f es isomorfismo en $1.\mathrm{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$.

Tomamos $\bar{x}' \xrightarrow{\bar{\alpha}'} \bar{y}'$ en $\bar{Q}$. Ponemos $\alpha = \pi\bar{\alpha}'$ y $\bar{x} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{y}''$ el único levantamiento de α comenzando en $\bar{x}$. Luego, $T(V')(\bar{\alpha}') = V'(\pi\bar{\alpha}') =$
$= V'(\alpha) = \varphi_{g_\alpha}(\bar{y}'')\, V(\bar{\alpha})$.

Como $g_{\bar{x}'}(\bar{x}) = \bar{x}' \xrightarrow{\bar{\alpha}'} \bar{y}'$ y $\bar{x}' = g_{\bar{x}'}(\bar{x}) \xrightarrow{g_{\bar{x}'}(\bar{\alpha})} g_{\bar{x}'}(\bar{y}'')$ son dos levantamientos de α, obtenemos $g_{\bar{x}'}(\bar{y}'') = \bar{y}'$ y $g_{\bar{x}'}(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}'$.

Así, $g_{\bar{y}'} g_\alpha(\bar{y}'') = g_{\bar{y}'}(\bar{y}) = \bar{y}' = g_{\bar{x}'}(\bar{y}'')$ y por tanto $g_{\bar{y}'} g_\alpha = g_{\bar{x}'}$.

Usando la compatibilidad de G con los isomorfismos $(\varphi_g)_{g\in G}$:

$$\varphi_{g_{\bar y'}}(\bar y)\,\varphi_{g_\alpha}(\bar y'') = \varphi_{g_{\bar y'}g_\alpha}(\bar y'') = \varphi_{g_{\bar x'}}(\bar y'').$$

Y hemos probado la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T(V')(\bar x') = V(\bar x) \arrow[rrr, "f(\bar x') = \varphi_{g_{\bar x'}}(\bar x)"] \arrow[ddd, "T(V')(\bar\alpha')"'] \arrow[dr, "V(\bar\alpha)"] & & & V(\bar x') = V^{g_{\bar x'}}(\bar x) \arrow[dl, "V^{g_{\bar x'}}(\bar\alpha)"'] \arrow[ddd, "V(\bar\alpha')"] \\
& V(\bar y'') \arrow[r, "\varphi_{g_{\bar x'}}(\bar y'')"] \arrow[ddl, "\varphi_{g_\alpha}(\bar y'')"'] & V^{g_{\bar x'}}(\bar y'') = V(\bar y') \arrow[ddr, equal] & \\
& & & \\
T(V')(\bar y') = V(\bar y) \arrow[rrr, "f(\bar y') = \varphi_{g_{\bar y'}}(\bar y)"] & & & V^{g_{\bar y'}}(\bar y) = V(\bar y')
\end{tikzcd}$$

En otras palabras, f es isomorfismo de $(\bar Q,\bar I)$- representaciones.

Finalmente, sea $\bar x' \in \bar Q_0$ y $g\in G$. Y considerese el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T(V')(\bar x') = V(\bar x) \arrow[r, "f(\bar x') = \varphi_{g_{\bar x'}}(\bar x)"] \arrow[d, equal] & V(\bar x') \arrow[d, "\varphi_g(\bar x')"] \\
T(V')^g(\bar x') = V(\bar x) \arrow[r, "f(g\bar x') = \varphi_{gg_{\bar x'}}(\bar x)"] & V^g(\bar x)
\end{tikzcd}$$

Pero $\varphi_g(\bar x')\,\varphi_{g_{\bar x'}}(\bar x) = \varphi_{gg_{\bar x'}}(\bar x)$ y conmuta. Esto prueba que $T(V') \cong V$ en $\mathrm{mod}^G(\bar Q,\bar I)$ y que T es denso. ∎

En algunas ocasiones nos convendrá identificar la categoría $\mathrm{mod}(Q,I)$ con $\mathrm{mod}^G(\bar Q,\bar I)$. Sobre todo porque tenemos una manera muy natural de pasar de $\mathrm{mod}(\bar Q,\bar I)$ a $\mathrm{mod}^G(\bar Q,\bar I)$.

Definimos el functor $\Sigma : \mathrm{mod}(\bar Q,\bar I) \longrightarrow \mathrm{mod}^G(\bar Q,\bar I)$ como $\Sigma(V) = \bigoplus_{g\in G} V^g$ para $V\in \mathrm{mod}(\bar Q,\bar I)$ y similarmente en morfismos.

Esencialmente, este es el functor "push-down" definido en [8].

(5.4) <u>Lema</u>: El functor Σ está bien definido.

<u>Demostración</u>: Sea $V\in \mathrm{mod}(\bar Q,\bar I)$, $x\in \bar Q_0$. Si $gx = x$ para $g\in G$, entonces g es la identidad ya que G es admisible,

luego, $\{gx \mid g\in G\}$ toma cada valor de $\bar{Q}_0$ a lo más una vez.
Como $V\in \text{mod}(\bar{Q},\bar{I})$, $\dim_k \Sigma V(x) = \sum_{g\in G} \dim V(g(x))$ es finita y $\Sigma V\in$ l-mod$(\bar{Q},\bar{I})$.

Por otra parte si $g\in G$, $\Sigma V^g \xrightarrow{\sim} \Sigma V$ canonicamente: mapea el sumando $V(hgx)$ de $\Sigma V^g(x)$ con índice $h\in G$ identicamente en $V(hgx)$ con índice hg en $\Sigma V(x)$. ∎

De ahora en adelante convenimos en llamar $\Sigma : \text{mod}(\bar{Q},\bar{I}) \to \text{mod}(Q,I)$ al funtor $T^{-1}\Sigma$, donde T es el funtor restricción que en (5.3) se mostró que era equivalencia.

Observemos que en las pruebas de (5.3) y (5.4) la única propiedad que se usó del grupo G es que actúa libremente en $\bar{Q}$, o sea, si $x\in\bar{Q}_0$, $g\in G$ y $g(x)=x$ entonces g es la identidad.
Esta propiedad se sigue facilmente de que el grupo G sea admisible, usando la conexidad de $\bar{Q}$.

(5.5) <u>Proposición</u> [8]: Sea $V\in \text{mod}(\bar{Q},\bar{I})$, entonces:

i). $\Sigma\, \text{rad} V \xrightarrow{\sim} \text{rad}\, \Sigma V$ y V es proyectivo en $\text{mod}(\bar{Q},\bar{I})$ si y solo si ΣV lo es en $\text{mod}(Q,I)$

ii). $\Sigma\, \text{soc} V \xrightarrow{\sim} \text{soc}\, \Sigma V$ y V es inyectivo en $\text{mod}(\bar{Q},\bar{I})$ si y solo si ΣV lo es en $\text{mod}(Q,I)$. ∎

(5.6) <u>Proposición</u>: Sean $U, V\in \text{mod}(\bar{Q},\bar{I})$ inescindibles tales que $\Sigma U \cong \Sigma V$ en $\text{mod}(Q,I)$, entonces existe $g\in G$ tal que $U \cong V^g$.

<u>Demostración</u>: Obviamente, $\Sigma U \cong \Sigma V$ en $\text{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$

Supongamos $\begin{tikzcd}[column sep=small] & \Sigma V \arrow[dr, "t"] & \\ \Sigma\mathcal{U} \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, equal] & & \Sigma\mathcal{U} \end{tikzcd}$ conmuta en $\mathrm{mod}^G(\mathbb{Q}, \bar{I})$.

Sea $A := \{x \in \bar{Q}_0 \mid x \in \mathrm{sop}\,\mathcal{U} \cup \mathrm{sop}\,V$ ó $x — y$ con $y \in \mathrm{sop}\,\mathcal{U} \cup \mathrm{sop}\,V\}$ y $H := \{g \in G \mid$ existe $x \in A$ con $g(x) \in A\}$, como A es finito y G actúa libremente, H es finito.

Sea $x \xrightarrow{\alpha} x'$ en $\bar{Q}$ con $x \in \mathrm{sop}\,\mathcal{U}$ ó $x' \in \mathrm{sop}\,\mathcal{U}$, luego $x, x' \in A$.

Sea $g \in G$ con $\mathcal{U}^g(x) \neq 0$, entonces $g(x) \in \mathrm{sop}\,\mathcal{U} \subset A$ y $g \in H$.

Así, $\Sigma\mathcal{U}(x) = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{U}^g(x) = \bigoplus_{g \in H} \mathcal{U}^g(x)$, similarmente $\Sigma V(x) = \bigoplus_{g \in H} V^g(x)$.

Por notación, ponemos $H = \{g_1, \dots, g_n\}$ con $g_1 = e_G$ la identidad de G.

Para $i = 1, \dots, n$ definimos $T_i := \mathcal{U}(g_i(\alpha)) : \mathcal{U}(g_i(x)) \longrightarrow \mathcal{U}(g_i(x'))$

$$S_i := V(g_i(\alpha)) : V(g_i(x)) \longrightarrow V(g_i(x')).$$

Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{U}(g_i(x)) \arrow[rr, "\begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_n \end{pmatrix}"] \arrow[dd, equal] \arrow[dr, "h_x"] & & \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{U}(g_i(x')) \arrow[dl, "h_{x'}"'] \arrow[dd, equal] \\
& \bigoplus_{i=1}^n V(g_i(x)) \arrow[r, "\begin{pmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_n \end{pmatrix}"] \arrow[dl, "t_x"] & \bigoplus_{i=1}^n V(g_i(x')) \arrow[dr, "t_{x'}"] \\
\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{U}(g_i(x)) \arrow[rr, "\begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_n \end{pmatrix}"] & & \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{U}(g_i(x'))
\end{tikzcd}$$

Denotaremos $h_x = (h_{ij}^x)$, $t_x = (t_{ij}^x)$. como matrices.

Así, $(h_{ij}^{x'} T_j) = (h_{ij}^{x'}) \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_n \end{pmatrix} (h_{ij}^x) = (S_i h_{ij}^x)$

definimos $H_x : \mathcal{U}(x) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n V(g_i(x))$

$$\text{con} \quad H_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathrm{sop}\,\mathcal{U} \\ \begin{pmatrix} h_{11}^x \\ \vdots \\ h_{n1}^x \end{pmatrix} & \text{si } x \in \mathrm{sop}\,\mathcal{U}. \end{cases}$$

y $G_x : \bigoplus_{i=1}^n V(g_i(x)) \longrightarrow \mathcal{U}(x)$ con $G_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathrm{sop}\,\mathcal{U} \\ (t_{11}^x, \dots, t_{1n}^x) & \text{si } x \in \mathrm{sop}\,\mathcal{U}. \end{cases}$

Sea $x \xrightarrow{\alpha} x'$ en $\bar{Q}$, sin pérdida de generalidad, $x \in \operatorname{sop} \mathcal{U}$ ó $x' \in \operatorname{sop} \mathcal{U}$ luego, $x, x' \in A$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{U}(x) & \xrightarrow{T_1 = \mathcal{U}(\alpha)} & \mathcal{U}(x') \\
{\scriptstyle H_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_{x'}} \\
\bigoplus_{i=1}^{n} V^{g_i}(x) & \xrightarrow[\begin{pmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_n \end{pmatrix} = \bigoplus_{i=1}^{n} V^{g_i}(\alpha)]{} & \bigoplus_{i=1}^{n} V^{g_i}(x')
\end{array}$$

con $\bigoplus_{i=1}^{n} V^{g_i}(\alpha) \cdot H_x = \begin{pmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11}^{x} \\ \vdots \\ h_{n1}^{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 h_{11}^{x} \\ \vdots \\ S_n h_{n1}^{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}^{x'} T_1 \\ \vdots \\ h_{n1}^{x'} T_1 \end{pmatrix} = H_{x'} T_1$.

Así, $H : \mathcal{U} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} V^{g_i}$ es $\operatorname{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$ morfismo y similarmente G lo es. Además, $G_x H_x = \sum_{i=1}^{n} t_{1i}^{x} h_{i1}^{x} = id_{\mathcal{U}(x)}$ si $x \in \operatorname{sop} \mathcal{U}$. Por tanto $GH = id_{\mathcal{U}}$. De donde $\mathcal{U}$ es sumando de $\bigoplus_{i=1}^{n} V^{g_i}$ y $\mathcal{U}$, V son inescindibles. Por tanto $\mathcal{U} \cong V^{g_j}$ para alguna $j \in \{1, \dots, n\}$. ∎

Ya hemos establecido una forma de comparar y relacionar representaciones de un carcaj con relaciones con las de su cubierta. Será importante saber la manera en que se relacionan los tipos de representación del carcaj y su cubierta. El primer resultado es que tipo de representación finito se refleja, probaremos después que esta propiedad también se preserva.

(5.7) <u>Proposición</u> [14]: Si $\pi : (\bar{Q}, \bar{I}) \longrightarrow (Q, I)$ es cubriente y (Q, I) es localmente de representación finita, $(\bar{Q}, \bar{I})$ también lo es.

<u>Demostración</u>: Presentamos aquí la demostración para ilustrar el uso de la herramienta recién introducida.

Sea $x \in \bar{Q}_0$. Recordamos que $T : \mathrm{mod}(Q,I) \longrightarrow \ell.\mathrm{mod}(\bar{Q},\bar{I})$ es el funtor restricción introducido en (5.3). Sean $V_1, \dots, V_n \in \mathrm{mod}(Q,I)$ inescindibles no isomorfos con $V_i(\pi x) \neq 0$ y tales que existe $W_i \in \mathrm{mod}(\bar{Q},\bar{I})$ inescindible y $H_i \subset G$ subconjunto con $TV_i \cong \bigoplus_{h \in H_i} W_i^h$. Como G actúa libremente, $G_i = \{ g \in G \mid W_i(gx) \neq 0 \}$ es finito.

Sea $W \in \mathrm{mod}(\bar{Q},\bar{I})$ inescindible con $W(x) \neq 0$. Tenemos $T^{-1}\Sigma W \in \mathrm{mod}(Q,I)$ y la descomponemos en suma de inescindibles $T^{-1}\Sigma W = P_1 \oplus \dots \oplus P_m$. De aquí $\bigoplus_{g \in G} W^g = TP_1 \oplus \dots \oplus TP_m$. Podemos suponer que W es sumando de TP_1, así $P_1(\pi x) = TP_1(x) \neq 0$ y además, existe $H \subset G$ con $TP_1 \cong \bigoplus_{h \in H} W^h$. Por tanto, $P_1 \cong V_j$ para alguna $j \in \{1, \dots, n\}$ y también $TP_1 \cong \bigoplus_{h \in H_j} W_j^h$.

Por el método aplicado en (5.6) se sigue que $W \cong W_j^h$ para alguna $h \in G$. Pero entonces $W_j(hx) \cong W(x) \neq 0$ y $h \in G_j$. //

6. CUBIERTAS UNIVERSALES SIN CICLOS DIRIGIDOS.

En esta sección nos concentramos en el estudio de algunas propiedades de las cubiertas universales. De particular interés es la situación de la cubierta sin ciclos dirigidos, ya que es localmente un álgebra cociente de hereditaria y estas han sido extensamente estudiadas.

Recordamos que una categoría $\mathcal{C}$ se llama schurian si para cada dos objetos $x, y \in \mathcal{C}$, $\dim_k \mathcal{C}(x,y) \leq 1$. Diremos que un carcaj con relaciones (Q,I) es schurian si la categoría $k(Q,I)$ lo es.

(6.1) <u>Lema</u>: (Q,I) carcaj con relaciones l.r.f. y Q sin ciclos dirigidos, entonces (Q,I) es schurian.

<u>Demostración</u>: Sea $x \in Q_0$, $kQ(x,x)$ es el espacio vectorial libre sobre todos los caminos dirigidos de x a x, el único es τ_x el camino trivial. Como I es admisible, $k(Q,I)(x,x)$ está generado por id_x. Luego, el radical de $k(Q,I)(x,x)$, $R_x = 0$.

Sean $x, y \in Q_0$. Como (Q,I) es l.r.f. sabemos que $k(Q,I)(x,y)$ es $k(Q,I)(x,x)$-módulo uniserial ó $k(Q,I)(y,y)$-módulo uniserial. Sin pérdida de generalidad lo es sobre el primer anillo, así la serie del radical de $k(Q,I)(x,y)$ es de composición, pero $R_x = 0$. Luego, si $k(Q,I)(x,y) \neq 0$ debe ser $k(Q,I)(x,x)$-módulo simple. Siendo k algebraicamente cerrado se tiene $\dim_k k(Q,I)(x,y) = 1$. //

Sea (Q,I) un carcaj con relaciones l.r.f. que quedará fijo a lo largo de la sección y $\pi : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \to (Q,I)$ su cubierta universal.

(6.2) <u>Lema</u>: Supongamos que $\tilde{Q}$ no tiene ciclos dirigidos, se satisfacen:

(D) Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I$ es relación mínima, para cada dos $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ diferentes hay un escalar $c \in k^*$ de forma que $u_i + c u_j \in I$.

(C) $x \xrightarrow{u} y \underset{w}{\overset{v}{\rightrightarrows}} z$ caminos dirigidos con $vu, wu \notin I$ y $\lambda \in k^*$ se tiene $vu + \lambda wu \in I$ si y solo si $v + \lambda w \in I$

<u>Demostración</u>: "(D)": Sea $\bar{x} \in \tilde{Q}_0$ con $\pi\bar{x} = x$. Tomamos un levantamiento $\tilde{u}_i$ de u_i comenzando en $\bar{x}$ para $i = 1,\ldots,n$. Sabemos que $e(\tilde{u}_i) = e(\tilde{u}_j)$ y llamamos $\bar{y}$ a este punto; luego, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i \in \tilde{I}(\bar{x},\bar{y})$ es también una relación mínima.

Por (5.7) $(\tilde{Q},\tilde{I})$ es también l.r.f. y por (6.1) $(\tilde{Q},\tilde{I})$ es schurian. Si tomamos $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ diferentes, tenemos $\tilde{u}_i, \tilde{u}_j \notin \tilde{I}(\bar{x},\bar{y})$ lo que dá la existencia de $c \in k^*$ con $\tilde{u}_i + c\tilde{u}_j \in \tilde{I}(\bar{x},\bar{y})$. Pasando al cociente por medio de π, $u_i + c u_j \in I(x,y)$.

(C): Supongamos $vu + \lambda wu \in I$. Como también, $vu, wu \notin I$ esta es una relación mínima, lo que nos dá $vu \sim wu$ y por cancelación $v \sim w$. Sean $\tilde{v}, \tilde{w}$ levantamientos de v y w respectivamente comenzando en $\bar{x}$, entonces $e(\tilde{v}) = e(\tilde{w})$ y como antes debemos tener un escalar $c \in k^*$ con $\tilde{v} + c\tilde{w} \in \tilde{I}$ y también $v + cw \in I$.

Esto además implica que $vu + cwu \in I$ que junto con $vu + \lambda wu \in I$ nos dice que $c = \lambda$. //

Las propiedades (D) y (C) son claramente intrínsecas al carcaj con relaciones (Q,I) y nos serán de utilidad en lo que sigue.

<u>Conjeturamos</u> que si (Q,I) satisface (D) y (C), entonces $\tilde{Q}$ no tiene ciclos dirigidos.

La condición (D) se dá en situaciones bastante generales y tiene consecuencias importantes como muestran los siguientes resultados.

(6.3) <u>Lema</u>: Supongamos que el ideal I está generado por una familia de relaciones cero y mínimas con solo dos sumandos, entonces (Q, I) satisface la condición (D).

<u>Demostración</u>. Sea $\{\rho_i\}_{i\in K}$ la familia de todas las relaciones cero y mínimas con solo dos sumandos en K. Si $\rho \in I$, por hipótesis $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \rho_i v_i$ con ρ_i en la familia indicada por K y u_i, v_i caminos dirigidos. Si ρ_i es relación cero, $u_i\rho_i v_i$ también lo es y si ρ_i es mínima con dos sumandos, $u_i \rho_i v_i$ lo es ó es suma de dos relaciones cero. Luego, la familia $\{\rho_i\}_{i\in K}$ genera aditivamente (ie. como k-espacio vectorial) al ideal I.

Sea $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ relación mínima. Supongamos $\rho = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \rho_i$ con con $\rho_i = v_i + c_i w_i \in I$ relación mínima, ya que de aparecer relaciones cero debían cancelarse porque $u_i \notin I$ para $i=1,\dots,n$.

Probaremos la condición (D) por inducción sobre m.

· Si $m=1$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \rho = \mu_1(v_1 + c_1 w_1) = \mu_1 v_1 + \mu_1 c_1 w_1$ y siendo esta expresión libre, tenemos $n=2$, $u_1 = v_1$, $u_2 = w_1$ y $u_1 + c_1 u_2 \in I$.

Supongamos $m>1$. Asumamos que w_m no aparece en la expresión de ρ, o sea $w_m \neq u_i$ para $i=1,\dots,n$. Sin pérdida de generalidad, $\{i \in \{1,\dots,m\} \mid v_i = w_m \text{ ó } w_i = w_m\} = \{t, t+1, \dots, m\}$ y de hecho $\rho_i = v_i + c_i w_m$ para $i=t,\dots,m$. El coeficiente de w_m será entonces $\sum_{i=t}^{m} \mu_i c_i$ y usando otra vez la libertad de la expresión, $\sum_{i=t}^{m} \mu_i c_i = 0$.

Como $\mu_m \neq 0$, $t<m$. Definimos ahora:

$$\rho_i' = \begin{cases} \rho_i & \text{si } i=1,\dots,t-1 \\ v_i - c_i c_m^{-1} v_m & \text{si } i=t,\dots,m-1. \end{cases}$$

entonces, $\sum_{i=1}^{t-1} \mu_i \rho_i' = \sum_{i=1}^{t-1} \mu_i \rho_i$ y

$$\sum_{i=t}^{m-1} \mu_i \rho_i' = \sum_{i=t}^{m-1} \mu_i (v_i - c_i c_m^{-1} v_m) = \sum_{i=t}^{m-1} \mu_i v_i - c_m^{-1}\Big(\sum_{i=t}^{m-1} \mu_i c_i\Big) v_m =$$

$$= \sum_{i=t}^{m-1} \mu_i v_i + c_m^{-1}(\mu_m c_m) v_m = \sum_{i=t}^{m} \mu_i v_i = \sum_{i=t}^{m} \mu_i (v_i + c_i w_i).$$

Además, $v_i - c_i c_m^{-1} v_m = (v_i + c_i w_m) - c_i c_m^{-1}(v_m + c_m w_m) = \rho_i - c_i c_m^{-1} \rho_m \in I$ y es relación mínima. Como $\rho = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i \rho_i'$, por hipótesis de inducción, $u_i + c u_j \in I$ para todo par $i,j \in \{1,\dots,n\}$ y alguna $c \in k^*$.

Podemos suponer entonces que toda v_i, w_i aparece en ρ. Así, no perdemos generalidad al poner $v_m = u_{n-1}$, $w_m = u_n$. Por tanto $n \geq 3$.

Definimos $\rho' = \rho - \lambda_n c_m^{-1} \rho_m \in I$,

$\rho' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i - \lambda_n c_m^{-1}(u_{n-1} + c_m u_n) = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i u_i + (\lambda_{n-1} - \lambda_n c_m^{-1}) u_{n-1}$. De hecho $\lambda_{n-1} - \lambda_n c_m^{-1} \neq 0$. En efecto si $\lambda_{n-1} = \lambda_n c_m^{-1}$, entonces $\lambda_{n-1}(u_{n-1} + c_m u_n) = \lambda_{n-1} u_{n-1} + \lambda_n u_n \in I$ que contradice que ρ sea mínima.

Llamamos $\lambda_i' = \lambda_i$ si $i=1,\dots,n-2$ y $\lambda_i' = \lambda_{n-1} - \lambda_n c_m^{-1}$ si $i=n-1$. Entonces $\rho' = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i' u_i$ que es relación mínima: Supongamos $\emptyset \neq K \subsetneq \{1,\dots,n-1\}$ con $\sum_{i\in K} \lambda_i' u_i \in I$. Como ρ es mínima obviamente $n-1 \in K$ y entonces $K - \{n-1\} \subsetneq \{1,\dots,n-2\}$. Sumando $\sum_{i\in K-\{n-1\}} \lambda_i u_i + (\lambda_{n-1} - \lambda_n c_m^{-1}) u_{n-1} \in I$ con $\lambda_n c_m^{-1}(u_{n-1} + c_m u_n) \in I$, resulta:

$$\sum_{i\in K-\{n-1\}} \lambda_i u_i + \lambda_{n-1} u_{n-1} + \lambda_n u_n \in I$$ que contradice que ρ sea mínima. Por tanto ρ' es relación mínima que es combinación lineal de $\rho_1,\dots,\rho_m$, pero en ella no aparece $u_n = w_m$. Por lo hecho antes, ρ' es también combinación de $\rho_1,\dots,\rho_{m-1}$.

Por hipótesis de inducción, $u_i + c\, u_j \in I$ para todo par $i,j \in \{1,\dots,n-1\}$ y alguna $c \in k^*$. Pero también $u_{n-1} + c_n u_n \in I$, de donde se sigue el resultado. //

(6.4) <u>Observación</u>: i). Dentro de la demostración del lema anterior probamos que bajo las hipótesis dadas, una relación $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I$ de forma que $u_i \notin I$ para $i=1,\dots,n$, puede expresarse como combinación lineal de relaciones mínimas de la forma $\rho_i = v_i + c_i w_i$ tales que toda v_i y w_i es igual a algún u_j para $j \in \{1,\dots,n\}$.

ii). Si $\Lambda = k(Q,I)$ es un álgebra, sabemos que I es finitamente generado y lo usual es dar el álgebra por medio de este sistema finito de generadores con lo que la hipótesis del lema anterior puede checarse inmediatamente.

(6.5) <u>Proposición</u>: Supongamos que (Q,I) satisface (D). Sean $x,y \in Q_0$ de forma que $k(Q,I)(x,y)$ es uniserial como $k(Q,I)(x,x)$ módulo. Entonces, existe un camino u de x a y, w un ciclo dirigido en x, de forma que para todo camino dirigido v de x a y, existen $\lambda \in k^*$ un escalar y $n \in \mathbb{N}$ un número natural con $v + \lambda u w^n \in I(x,y)$.

<u>Demostración</u>: Llamemos $\Lambda_x := k(Q,I)(x,x)$ y $R_x = \mathrm{rad}\,\Lambda_x$. Como $k(Q,I)(x,y) \supsetneq \mathrm{rad}_{\Lambda_x} k(Q,I)(x,y)$, tomamos un elemento f en la diferencia. Podemos escribir $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{u}_i$ donde u_i es camino dirigido de x a y, luego hay un camino u de x a y con $\bar{u} \notin \mathrm{rad}_{\Lambda_x} k(Q,I)(x,y)$.

De la misma manera como Λ_x es uniserial, la serie del radical es de composición. Si $R_x = 0$, el resultado se sigue de (6.1), y si $R_x \neq 0$, podemos escoger un ciclo dirigido w en x con $\bar{w} \notin R_x^2$.

Mostraremos que las potencias de $\bar{w}$ generan como espacio vectorial a Λ_x. Por comodidad llamemos $z = \bar{w}$. Claramente, $z^2 \in R_x^2$ y supongamos que también $z^2 \in R_x^3$. Tomamos entonces $y \in R_x^2 \setminus R_x^3$ y escribimos $y = \sum_{i=1}^{m} r_{1i} r_{2i}$ con $r_{1i}, r_{2i} \in R_x$. Existe entonces $j \in \{1,\dots,m\}$ con $r_{1j} r_{2j} \notin R_x^3$. Por tanto $r_{1j}, r_{2j} \notin R_x^2$. O sea, $0 \neq \bar{r}_{1j} \in R_x/R_x^2 \cong k$; debemos de tener un escalar $c_1 \in k^*$ y $t_1 \in R_x^2$ de forma que $r_{1j} = c_1 z + t_1$. Similarmente $r_{2j} = c_2 z + t_2$ con $t_2 \in R_x^2$. De donde se sigue:

$r_{1j} r_{2j} = (c_1 z + t_1)(c_2 z + t_2) = c_1 c_2 z^2 + c_1 z t_2 + c_2 t_1 z + t_1 t_2 \in R_x^3$ que es absurdo.
Por tanto, $z^2 \notin R_x^3$ y $(\bar{z}^2) = R_x^2/R_x^3$ y similarmente para potencias mayores. Siendo Λ_x álgebra de dimensión finita, $\Lambda_x = \sum_{i=0}^{m} k z^i$ para alguna m — de hecho tal que $R_x^{m+1} = 0$ —.

Tomemos ahora un camino arbitrario v de x a y. Como $k(Q,I)(x,y)$ es Λ_x-módulo uniserial, $\bar{u}\Lambda_x \subset \bar{v}\Lambda_x$ ó $\bar{v}\Lambda_x \subset \bar{u}\Lambda_x$.

Supongamos que $\bar{u}\Lambda_x \subset \bar{v}\Lambda_x$. Existen escalares $\lambda_i \in k$ para $i = 0,\dots,m$ de forma $\bar{u} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \bar{v} z^i = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{v w^i}$. O sea, $u - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v w^i \in I(x,y)$ que se expresa como suma de relaciones mínimas y cero, y como $u \notin I(x,y)$ tendremos $\emptyset \neq K \subset \{0,\dots,m\}$ con $u - \sum_{i \in K} \lambda_i v w^i \in I(x,y)$ relación mínima. Dado que se satisface la condición (D), existe $c \in k^*$ y $n \in \{0,\dots,m\}$ tal que $u + c v w^n \in I(x,y)$.

Entonces, $\bar{u} = c \bar{v} z^n \notin \operatorname{rad}_{\Lambda_x} k(Q,I)(x,y) = k(Q,I)(x,y) \cdot R_x$ y como $z \in R_x$ tendremos $n = 0$. Luego, $v + c^{-1} u \in I(x,y)$.

Si tuviéramos $\bar{v}\Lambda_x \subset \bar{u}\Lambda_x$, procedemos como antes hasta obtener $v + c u w^n \in I(x,y)$ para $n \in \{0,\dots,m\}$. Esto prueba el resultado. //

Obtenemos el siguiente importante Corolario.

(6.6) Corolario: Supongamos que (Q,I) satisface (D). Para cada dos vértices $x,y\in Q_0$, existen caminos $u^{(1)}_{x,y},\dots,u^{(n_{x,y})}_{x,y}$ de forma que $\{\overline{u^{(i)}_{x,y}} \mid i=1,\dots,n_{x,y}\}$ es base de $k(Q,I)(x,y)$ como k-espacio vectorial, y dado un tercer vértice $z\in Q_0$ y dos elementos de las bases $\overline{u^{(i)}_{x,y}}$, $\overline{u^{(j)}_{y,z}}$, existe $l\in\{1,\dots,n_{x,z}\}$ tal que $\overline{u^{(j)}_{y,z}}\;\overline{u^{(i)}_{x,y}}=c\,\overline{u^{(l)}_{x,z}}$; con $c\in k$.

Demostración: Podemos suponer que $k(Q,I)(x,y)$ es $k(Q,I)(x,x)$ módulo uniserial. Por (6.5) hay un camino u de x a y y un ciclo dirigido w en x de forma que $\{\overline{uw^i} \mid i\in\mathbb{N}\}$ generan a $k(Q,I)(x,y)$ como k-espacio vectorial. Como $k(Q,I)(x,x)$ es álgebra de dimensión finita, tomamos n máximo tal que $\overline{uw^n}\neq 0$ y definimos $u_i=uw^i$. Supongamos que $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\overline{uw^i}=0$; multiplicando por $\overline{w}^n$ tenemos que $\lambda_0\overline{uw^n}=(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\overline{uw^i})\overline{w}^n=0$. Luego, $\lambda_0=0$ y así sucesivamente. La propiedad multiplicativa de estas bases se sigue directamente de (6.5). /

Los siguientes resultados van encaminados a probar la unicidad, en cierto sentido, de las cubiertas universales sin ciclos.

(6.7) Proposición: Supongamos que (Q,I) satisface (C) y (D). $x_i\xrightarrow{\alpha_i}x_{i+1}$ es flecha en Q y $\mu=\alpha_n\dots\alpha_1$ es camino dirigido con $\mu\notin I$. Supongamos $\mu'=\rho_{n+1}\alpha_n\rho_n\dots\rho_2\alpha_1\rho_1$ tal que ρ_i es ciclo dirigido en x_i, para $i=1,\dots,n+1$. Y además, $\overline{\mu'}=c\overline{\mu}$ en $k(Q,I)$ con $c\in k^*$. Afirmamos que entonces todos los caminos ρ_i son triviales.

Demostración: Supongamos que $k(Q,I)(x_1,x_{n+1})$ es $k(Q,I)(x_1,x_1)$ módulo uniserial. Como $\mu'':=\alpha_n\rho_n\alpha_{n-1}\dots\rho_2\alpha_1\rho_1\notin I(x_1,x_{n+1})$, debemos tener $\overline{\mu''}\Lambda_{x_1}\subset\overline{\mu}\Lambda_{x_1}$ ó $\overline{\mu}\Lambda_{x_1}\subset\overline{\mu''}\Lambda_{x_1}$, donde $\Lambda_{x_1}:=k(Q,I)(x_1,x_1)$. Probaremos que $\overline{\mu''}\Lambda_{x_1}\subset\overline{\mu}\Lambda_{x_1}$. Sea w ciclo en x_1, tal que $\{\overline{w^i} \mid i=0,\dots,m_{x_1}\}$ genera como k-espacio vectorial a Λ_{x_1}. Entonces hay un escalar $\lambda\in k^*$ y un número $m\in\mathbb{N}$ con $\mu+\lambda\mu'\omega^m\in I$, por (6.5).

Por inducción sobre n. Si $n=1$, $\alpha_1+\lambda\alpha_1\rho_1\omega^m\in I$ y por la propiedad (c), $\tau_{x_1}+\lambda\rho_1\omega^m\in I$ y siendo I admisible, ρ_1 es trivial y $m=0$. Así, $\mu''+\lambda^{-1}\mu\in I$.

Supongamos $n>1$. también por (c), $\alpha_{n-1}\dots\alpha_1+\lambda\rho_n\alpha_{n-1}\rho_{n-1}\cdots\rho_2\alpha_1\rho_1\omega^m\in I$.

Ahora, si $k(Q,I)(x_1,x_n)$ es Λ_{x_1} módulo uniserial, por hipótesis de inducción existen $\lambda'\in k^*$ y $t\in\mathbb{N}$ con $\alpha_{n-1}\rho_{n-1}\cdots\rho_2\alpha_1\rho_1+\lambda'\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\omega^t\in I$; multiplicando por ρ_n y ω^m, tenemos $\lambda\rho_n\alpha_{n-1}\rho_{n-1}\cdots\rho_2\alpha_1\rho_1\omega^m+\lambda''\rho_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\omega^{m+t}\in I$ y finalmente, $\alpha_{n-1}\dots\alpha_1+\gamma_1\rho_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\omega^{m+t}\in I$ con $\gamma_1\in k^*$.
Multiplicamos otra vez por ω^{m+t} y ρ_n, $\gamma_1\rho_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\omega^{m+t}+\gamma_1^2\rho_n^2\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\omega^{2(m+t)}$ también está en $I(x_1,x_n)$. Restando, $\alpha_{n-1}\dots\alpha_1+\gamma_2\rho_n^2\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\omega^{2(m+t)}\in I$.
Este proceso nos lleva, a que para toda potencia $r\in\mathbb{N}$, hay un escalar $\gamma_r\in k^*$ con $\alpha_{n-1}\dots\alpha_1+\gamma_r\rho_n^r\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\omega^{r(m+t)}\in I(x_1,x_n)$. Pero los elementos de Λ_{x_1} son nilpotentes, luego $\omega^{r_0(m+t)}\in I(x_1,x_1)$ para algún $r_0\in\mathbb{N}$. Esto implicaría, $\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\in I(x_1,x_n)$ y que $\mu\in I(x_1,x_{n+1})$ contrario a lo supuesto. Luego, debe suceder que $m=0=t$ y similarmente que ρ_n sea trivial. Así, $\mu+\lambda'^{-1}\mu''=\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1+\lambda'^{-1}\alpha_n\rho_n\alpha_{n-1}\rho_{n-1}\cdots\rho_2\alpha_1\rho_1\in I$.

En el otro caso, $k(Q,I)(x_1,x_n)$ es Λ_{x_n} módulo uniserial. También por hipótesis de inducción (obsérvese que μ'' se define suprimiendo el ciclo del extremo opuesto al uniserial), existen $\lambda'\in k^*$ y $t\in\mathbb{N}$ con $\rho_n\alpha_{n-1}\rho_{n-1}\cdots\rho_2\alpha_1+\lambda'\omega^t\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\in I(x_1,x_n)$. Luego, se tiene multiplicando $\lambda\rho_n\alpha_{n-1}\dots\rho_2\alpha_1\rho_1\omega^m+\lambda'\omega^t\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\rho_1\omega^m\in I(x_1,x_n)$ y como antes se obtiene que $t=0=m$ y que ρ_1 es trivial. Así, $\mu+\lambda'^{-1}\mu''\in I$.

Hemos probado que $\bar{\mu}'' \Lambda_{x_1} \subset \bar{\mu} \Lambda_{x_1}$. Así, $\mu'' + \lambda \mu \omega^m \in I(x_1, x_{n+1})$ para algunos $\lambda \in k^*$, $m \in \mathbb{N}$. Tenemos:

$$\begin{cases} \rho_{n+1} \alpha_n \rho_n \dots \rho_2 \alpha_1 \rho_1 + c\,\alpha_n \dots \alpha_1 \in I(x_1, x_{n+1}) & \text{(hipótesis)} \\ \alpha_n \rho_n \dots \rho_2 \alpha_1 \rho_1 + \lambda \alpha_n \dots \alpha_1 \omega^m \in I(x_1, x_{n+1}) \end{cases}$$

por tanto, $\alpha_n \dots \alpha_1 + \lambda' \rho_{n+1} \alpha_n \dots \alpha_1 \omega^m \in I(x_1, x_{n+1})$ con $\lambda' \in k^*$.
Procediendo como antes, $m=0$ y ρ_{n+1} es trivial. Y queda solamente $\alpha_n \rho_n \alpha_{n-1} \dots \rho_2 \alpha_1 \rho_1 + c\,\alpha_n \dots \alpha_1 \in I(x_1, x_{n+1})$ y por la propiedad (C):
$\rho_n \alpha_{n-1} \dots \rho_2 \alpha_1 \rho_1 + c\,\alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \in I(x_1, x_n)$. Por hipótesis de Inducción, $\rho_1, \dots, \rho_n$ son también triviales.

El pie de Inducción, $n=1$ sería que $\rho_2 \alpha_1 \rho_1 + c\,\alpha_1 \in I(x_1, x_2)$. Pero siendo I admisible, tanto ρ_1 como ρ_2 son triviales. Se tiene así el resultado. ∎

Recordemos que dada una categoría localmente acotada, el carcaj asociado a ella está determinado en forma única, no así el ideal admisible que dá el isomorfismo. Esto provoca cierta ambiguedad en la definición de la cubierta universal de la categoría, como se mostró en (4.9). Comenzaremos a solventar esas dificultades.

(6.8) <u>Proposición</u>: Supongamos (Q, I_1), (Q, I_2) son carcajes con relaciones l.r.f. Tales que $k(Q, I_1) \cong \mathcal{C} \cong k(Q, I_2)$ y asumamos también que tanto (Q, I_1) como (Q, I_2) satisfacen (D) y (C).

Sean $\pi_1 : (\tilde{Q}_1, \tilde{I}_1) \to (Q, I_1)$, $\pi_2 : (\tilde{Q}_2, \tilde{I}_2) \to (Q, I_2)$ sus cubiertas universales, entonces $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2$ y $\Pi_1(Q, I_1) = \Pi_1(Q, I_2)$.

<u>Demostración</u>: Para ambas afirmaciones es suficiente mostrar

que las homotopías en (Q, I_1) y en (Q, I_2) coinciden. Y para ello basta con que las relaciones mínimas en I_1 y en I_2 sean las mismas.

Supongamos que $0 \to I_1 \to kQ \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C} \to 0$ y $0 \to I_2 \to kQ \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \to 0$ son exactas. Dada $\alpha \in Q_1$, podemos tomar $f(\alpha) \in kQ$ con $\psi(f(\alpha)) = \varphi(\alpha)$ en $\mathcal{C}$ y extenderlo a un morfismo de categorías. Así escogemos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] \arrow[d, "f|"] & kQ \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_2 \arrow[r] \arrow[d, "g|"] & kQ \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & kQ \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$ exacta y conmutativo.

Sea μ camino en Q con $\mu \in I_1$. Ponemos $\mu = \alpha_n \ldots \alpha_1$ con α_i flecha.

Por (6.6) hay un ciclo en $s(\alpha_1)$ (ó en $e(\alpha_1)$), ω_1 de forma que $f(\alpha_1) + \lambda_1 \alpha_1 + \sum_{i=1}^{n_1} \varkappa_{1i}\, \alpha_1 \omega_1^i \in I_2$. Como $gf(\alpha_1) \notin \mathcal{F}^2(s(\alpha_1), e(\alpha_1))$ debemos tener que $\lambda_1 \neq 0$. Similarmente $f(\alpha_2) + \lambda_2 \alpha_2 + \sum_{i=1}^{n_2} \varkappa_{2i}\, \alpha_2 \omega_2^i \in I_2$ (ó $\omega_2^i \alpha_2$), con $\lambda_2 \neq 0$. De forma que finalmente:

$f(\alpha_n) \ldots f(\alpha_1) = f(\mu) \in I_2$ tal que

$$f(\mu) + \lambda\mu + \sum_{\substack{\mu_t \cdots \mu_1 = \mu \\ t>1}} \varkappa_{\mu_1, \ldots, \mu_t}\, \rho_{t+1} \mu_t \rho_t \cdots \mu_2 \rho_2 \mu_1 \rho_1 \in I_2,$$

con $\lambda \neq 0$ y ρ_i ciclo dirigido no trivial en $s(\mu_i)$.

Si tuviésemos que $\mu \notin I_2$, tendríamos por (D), alguna partición no trivial de $\mu = \mu_t \cdots \mu_1$ y $\mu + c\, \rho_{t+1} \mu_t \rho_t \cdots \mu_2 \rho_2 \mu_1 \rho_1 \in I_2$ con $c \in k^*$. Pero esto contradice (6.7), por lo que $\mu \in I_2$.

Tomemos ahora $c\mu + \nu \in I_1$ relación mínima — basta probarlo para las relaciones con dos sumandos en vista de (6.3) —.

Procediendo como antes, $f(c\mu+\nu) \in I_2$ y

$$f(c\mu+\nu) + \lambda\mu + \lambda'\nu + \sum_{\substack{\mu_t \cdots \mu_1 = \mu \\ t>1}} \varkappa_{\mu_1, \ldots, \mu_t}\, \rho_{t+1} \mu_t \cdots \mu_1 \rho_1 + \sum_{\substack{\nu_t \cdots \nu_1 = \nu \\ t>1}} \varkappa'_{\nu_1, \ldots, \nu_t}\, \rho'_{t+1} \nu_t \cdots \nu_1 \rho'_1$$

está en I_2.

con $\lambda, \lambda' \in k^*$ y ρ_i, ρ_i' ciclos dirigidos no triviales.

Si $\mu \in I_2$, por lo ya probado se tendría $\mu \in I_1$ que es falso. Luego, $\mu \notin I_2$. Supongamos que μ y ν no están relacionados en I_2 como sumandos de una misma relación mínima. Como tenemos (D) en (Q, I_2) y además tenemos (6.7), debe haber una partición no trivial de ν, $\nu = \nu_t \dots \nu_1$ y $\gamma \in k^*$ con $\mu + \gamma \rho_{t+1}' \nu_t \dots \nu_1 \rho_1' \in I_2$ relación mínima.

Pero aplicamos ahora g a esta relación:

$$I_1 \ni g(\mu + \gamma \rho_{t+1}' \nu_t \dots \nu_1 \rho_1') + d\mu + \sum_{\substack{\mu = \mu_t \dots \mu_1 \\ t>1}} c_{\mu_1, \dots, \mu_t} \rho_{t+1} \mu_t \dots \mu_1 \rho_1 + \sum_{\substack{\nu = \nu_t' \dots \nu_1' \\ t>1}} c_{\nu_1', \dots, \nu_t'} \rho_{t+1}'' \nu_t'' \dots \nu_1' \rho_1''$$

. ya que las particiones de las ν_i resultan particiones de ν, y $d \in k^*$. Otra vez por (6.7), debemos tener, $\nu = \nu_t' \dots \nu_1'$ con $t > 1$, $\gamma' \in k^*$ y $\mu + \gamma' \rho_{t+1}'' \nu_t'' \rho_t'' \dots \rho_2'' \nu_1' \rho_1'' \in I_1$. Pero también teníamos $c\mu + \nu \in I_1$ luego $c^{-1}\nu + \gamma' \rho_{t+1}'' \nu_t'' \dots \nu_1' \rho_1'' \in I_1$ lo que contradice (6.7) ya que los ciclos ρ_i'' no son triviales.

Esto prueba que existe $c' \in k^*$ con $\mu + c'\nu \in I_2$. ∎

(6.9) <u>Observación</u>: Respetemos las hipótesis y la notación de la prueba de (6.8). Mostramos que $\lambda\mu + \lambda'\nu \in I_2$ y es por tanto mínima.

Tenemos $\lambda\mu + \lambda'\nu + \sum_{\substack{\mu_t \dots \mu_1 = \mu \\ t>1}} \gamma_{\mu_1, \dots, \mu_t} \rho_{t+1} \mu_t \dots \mu_1 \rho_1 + \sum_{\substack{\nu_t \dots \nu_1 = \nu \\ t>1}} \gamma'_{\nu_1, \dots, \nu_t} \rho_{t+1}' \nu_t \dots \nu_1 \rho_1' \in I_2$

y debe ser suma de relaciones mínimas y cero. Como $\mu \notin I_2$, $\lambda\mu$ forma parte de una de las relaciones mínimas de la descomposición, pero según se mostró, sólo ν puede aparecer como sumando en una de tales relaciones mínimas y recíprocamente. Obviamente esto prueba que $\lambda\mu + \lambda'\nu \in I_2$.

(6.10) <u>Teorema</u>: Supongamos $(Q,I_1), (Q,I_2)$ son carcajes con relaciones l.r.f. tales que $k(Q,I_1) \cong \mathcal{C} \cong k(Q,I_2)$ y asumamos también que tanto (Q,I_1) como (Q,I_2) satisfacen (D) y (C).

Sean $\pi_1: (\tilde{Q}_1, \tilde{I}_1) \longrightarrow (Q,I_1)$, $\pi_2: (\tilde{Q}_2, \tilde{I}_2) \longrightarrow (Q,I_2)$ sus cubiertas universales. Entonces existen isomorfismos $h: k(Q,I_1) \longrightarrow k(Q,I_2)$ y $\tilde{h}: k(\tilde{Q}_1,\tilde{I}_1) \longrightarrow k(\tilde{Q}_2,\tilde{I}_2)$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
k(\tilde{Q}_1,\tilde{I}_1) \arrow[r, "\tilde{h}", "\cong"'] \arrow[d, "k(\pi_1)"'] & k(\tilde{Q}_2,\tilde{I}_2) \arrow[d, "k(\pi_2)"] \\
k(Q,I_1) \arrow[r, "h", "\cong"'] & k(Q,I_2)
\end{tikzcd}$$

<u>Demostración</u>: Con la notación de la Proposición anterior tenemos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f|"'] & kQ \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "f"'] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_2 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g|"'] & kQ \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dashed, "g"'] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & kQ \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

exacto y conmutativo.

Sea $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Q, luego $f(\alpha) + \lambda_\alpha \alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha w^i \in I_2(x,y)$ para alguna $\lambda_\alpha \in k^*$ (estamos suponiendo uniserialidad en el extremo x, sin pérdida de generalidad).

Definimos $h: kQ \longrightarrow kQ$ por $h(\alpha) = \lambda_\alpha \alpha$, que es isomorfismo de categorías. Además, en (6.8) y (6.9) probamos que h preserva relaciones cero y mínimas respectivamente. Luego $h(I_1) \subset I_2$ y h se extiende a un morfismo de categorías $h: k(Q,I_1) \longrightarrow k(Q,I_2)$. Para probar que es isomorfismo basta ver que la inversa también preserva relaciones.

Para $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Q, podemos escribir $f(\alpha) = \lambda_\alpha \alpha + r_\alpha$ con $r_\alpha \in F^2(x,y)$.

Similarmente, $g(\alpha)=\lambda'_\alpha\alpha+r'_\alpha$ con $\lambda'_\alpha\in k^*$ y $r'_\alpha\in\mathcal{F}^2(x,y)$.

Luego, $gf(\alpha)=\lambda_\alpha\lambda'_\alpha\alpha+r''_\alpha$ con $r''_\alpha\in\mathcal{F}^2(x,y)$ y $\varphi(\alpha)=\varphi gf(\alpha)=\lambda_\alpha\lambda'_\alpha\varphi(\alpha)+\varphi(r''_\alpha)$ con $\varphi(r''_\alpha)\in \mathrm{rad}^2_{\mathcal{C}}(x,y)$. Esto implica que $\lambda_\alpha\lambda'_\alpha=1$.

De donde si ponemos $t: kQ\longrightarrow kQ$ con $t(\alpha)=\lambda'_\alpha\alpha$, este morfismo es el inverso de h y también $t(I_2)\subset I_1$ por (6.8).

Así, $h: k(Q,I_1)\longrightarrow k(Q,I_2)$ es isomorfismo de categorías.

Por (6.8), $\tilde{Q}_1=\tilde{Q}_2$. Luego, definimos $\tilde{h}: k\tilde{Q}_1\longrightarrow k\tilde{Q}_2$ como la identidad en vértices. Y para $x\xrightarrow{\alpha}y$ flecha en $\tilde{Q}_1$, $\tilde{h}(\alpha)=\lambda_{\pi_1\alpha}\alpha$.

Por las observaciones hechas antes basta mostrar que $\tilde{h}(\tilde{I}_1)\subset\tilde{I}_2$. Observemos primero que como $\tilde{Q}_1=\tilde{Q}_2$, entonces $\pi_1=\pi_2$ como morfismos de carcajes. Luego, para α flecha en $\tilde{Q}_1$, $\pi_1\alpha$ es flecha en Q y $h\pi_1\alpha=\lambda_{\pi_1\alpha}\pi_1\alpha=\lambda_{\pi_1\alpha}\pi_2\alpha$ y $\tilde{h}(\alpha)$ es el único levantamiento de $h\pi_1\alpha$ según π_2 comenzando en $s(\alpha)$. A este levantamiento lo denotamos $\widetilde{h\pi_1\alpha}$.

Esta identificación obviamente se generaliza a combinaciones lineales de caminos. Así, si $\rho\in\tilde{I}_1$ es una relación mínima o cero, tenemos: $\tilde{h}(\rho)=\widetilde{h(\pi_1\rho)}$. Pero $\pi_1\rho\in I_1$ es relación mínima o cero dependiendo de lo que sea ρ y también lo es $h\pi_1\rho\in I_2$. El único levantamiento de esta relación mínima o cero por π_2 resulta $\widetilde{h\pi_1\rho}\in\tilde{I}_2$ por definición.

Por tanto, $\tilde{h}: k(\tilde{Q}_1,\tilde{I}_1)\rightarrow k(\tilde{Q}_2,\tilde{I}_2)$ es isomorfismo de categorías.

Además, $\pi_2\tilde{h}(\alpha)=\pi_2\widetilde{h(\pi_1\alpha)}=\pi_2\widetilde{\lambda_{\pi_1\alpha}\pi_1\alpha}=\lambda_{\pi_1\alpha}\pi_2\alpha=h\pi_1\alpha$, o sea $k(\pi_2)\tilde{h}=h\,k(\pi_1)$. //

En particular, por (6.2), tanto (6.8) como (6.10) son válidas cuando $\tilde{Q}_1$ y $\tilde{Q}_2$ no tienen ciclos dirigidos. Ejemplos de este tipo son las álgebras con carcaj sin ciclos dirigidos y las schurian (ver sección 10).

7. MODULOS CON ESTABILIZADOR CICLICO.

En esta sección regresamos al problema planteado en la sección 5, a saber, relacionar las representaciones de un carcaj con relaciones con las de su cubierta. Para ello resultaban de particular interés los funtores restricción $T: \operatorname{mod}(Q,I) \longrightarrow \operatorname{l.mod}(\tilde{Q},\tilde{I})$ y $\Sigma: \operatorname{mod}(\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow \operatorname{mod}^G(\tilde{Q},\tilde{I})$ donde $\pi: (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (Q,I)$ es un morfismo cubriente. Recordamos que mediante el funtor T podemos considerar $\operatorname{mod}^G(\tilde{Q},\tilde{I})$ identificada con $\operatorname{mod}(Q,I)$ y luego el funtor Σ relaciona las representaciones que nos interesan. Es por lo tanto importante describir al funtor Σ. Aquí, describiremos la descomposición en inescindibles de ΣV para $V \in \operatorname{mod}(\tilde{Q},\tilde{I})$ inescindible cuando V satisface algunas hipótesis que se presentan frecuentemente.

(7.1) <u>Definición</u>: Sea $\pi: (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (Q,I)$ cubierta definida por medio del grupo G. Para $V \in \operatorname{Mod}(\tilde{Q},\tilde{I})$ definimos el estabilizador G_V de V como $G_V := \{g \in G \mid V^g \cong V\}$.

Para el resto de la sección fijamos una cubierta $\pi: (\tilde{Q},\tilde{I}) \to (Q,I)$ definida por la acción del grupo admisible G.

Si $V \in \operatorname{Mod}(\tilde{Q},\tilde{I})$, obviamente G_V es un subgrupo de G.

Además, si $V \in \operatorname{mod}(\tilde{Q},\tilde{I})$ un elemento $g \in G_V$ solo permuta los vértices en $\operatorname{sop} V = \{x \in \tilde{Q}_0 \mid V(x) \neq 0\}$ que es finito, siendo que G actúa libremente en $\tilde{Q}_0$, tenemos que G_V es finito.

Sea $V \in \operatorname{mod}(\tilde{Q},\tilde{I})$ y pongamos $G_V = \{g_1, \ldots, g_n\}$ con $g_1 = 1$, asumimos además que V es inescindible.

Asumamos que podemos escoger $V \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{g_i}} V^{g_i}$ para $i=1,\dots,n$, con $\varphi_1 = id_V$ y $\varphi_{g_j}^{g_i}\varphi_{g_i} = \varphi_{g_j g_i}$ para $i,j\in\{1,\dots,n\}$. Probaremos después que esto es posible cuando G_V es cíclico y la característica de k es 0, en esa situación obtendremos la descomposición completa de ΣV.

Tomamos una selección H de representantes de las clases laterales derechas de G_V en G. Tenemos así, $G = \dot{\bigcup}_{h\in H} G_V h$; suponemos que $1\in H$.

Para cada $i=1,\dots,n$ llamamos $A_i := \{g_i h \mid h\in H\}$ una transversal de G_V en G.

Definimos $V_i := \bigoplus_{h\in A_i} V^h \in l.\mathrm{mod}(\bar{\mathcal{Q}},\bar{I})$

(7.2) Lema: Para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ se puede construir una familia $(\psi_{ig})_{g\in G}$ de automorfismos de V_i tal que $(V_i,(\psi_{ig})_{g\in G})\in \mathrm{mod}^G(\bar{\mathcal{Q}},\bar{I})$. Además, cada dos de estos objetos resultan isomorfos en $\mathrm{mod}^G(\bar{\mathcal{Q}},\bar{I})$.

Demostración: Comenzamos construyendo la familia de automorfismos de $V_1 = \bigoplus_{h\in H} V^h$ de forma que pertenezca a $\mathrm{mod}^G(\bar{\mathcal{Q}},\bar{I})$.

Sea $g\in G$, definimos $\delta_g : H \longrightarrow H$ y $\varepsilon_g : H \longrightarrow G_V$ funciones tales que para cualquier $h\in H$, $\delta_g(h)$ y $\varepsilon_g(h)$ son los únicos elementos con $hg^{-1} = \varepsilon_g(h)\delta_g(h)$. Observemos que δ_g es una biyección: si $\delta_g(h_1)=\delta_g(h_2)$, tendríamos $\varepsilon_g(h_1)^{-1}h_1 g^{-1} = \delta_g(h_1) = \delta_g(h_2) = \varepsilon_g(h_2)^{-1}h_2 g^{-1}$ y $h_1 h_2^{-1} = \varepsilon_g(h_1)\varepsilon_g(h_2)^{-1}\in G_V$; como $h_1, h_2\in H$ representantes de las clases laterales de G_V, $h_1 = h_2$ $\therefore$ Además, si $h'\in H$, existe $g_i\in G_V$ y $h\in H$ con $h'g = g_i h$, así $hg^{-1} = g_i^{-1}h'$ y $\delta_g(h) = h'$.

Sea $h\in H$, obtenemos: $(\varphi_{\varepsilon_g(h)}^{-1})^{\delta_g(h)g} : V^{\varepsilon_g(h)\delta_g(h)g} = V^h \xrightarrow{\simeq} V^{\delta_g(h)g} = (V^{\delta_g(h)})^g$.

Por lanto, $\psi_g := \bigoplus_{h\in H} (\varphi_{\varepsilon_g(h)}^{-1})^{\delta_g(h)g} : V_1 = \bigoplus_{h\in H} V^h \xrightarrow{\simeq} (\bigoplus_{h\in H} V^{\delta_g(h)})^g = V_1^g$

es un isomorfismo de representaciones. Observar que $\bigoplus_{h\in H} V^{\delta_g(h)} = V_1$ es en realidad el isomorfismo canónico dado por la permutación δ_g.

Mostramos ahora que estas ψ_g satisfacen las condiciones para hacer $(V_1, (\psi_g)_{g\in G}) \in \operatorname{mod}^G(\bar{Q}, \bar{I})$. Sean $g, \bar{g} \in G$, $x \in \bar{Q}_0$, calculamos:

$$\psi_{\bar{g}}(g(x))\psi_g(x) = \left[\bigoplus_{h\in H} (\varphi^{-1}_{\varepsilon_{\bar{g}}(h)})^{\delta_{\bar{g}}(h)\bar{g}}(g(x))\right]\left[\bigoplus_{h\in H} (\varphi^{-1}_{\varepsilon_g(h)})^{\delta_g(h)g}(x)\right] =$$

$$= \left[\bigoplus_H \varphi^{-1}_{\varepsilon_{\bar{g}}(h)}(\delta_{\bar{g}}(h)\bar{g}g(x))\right]\left[\bigoplus_H \varphi^{-1}_{\varepsilon_g(h)}(\delta_g(h)g(x))\right] = \left[\bigoplus_H \varphi_{\varepsilon_{\bar{g}}(h)^{-1}}(hg(x))\right]\left[\bigoplus_H \varphi_{\varepsilon_g(h)^{-1}}(h(x))\right]$$

$$= \bigoplus_{h\in H} \varphi_{\varepsilon_{\bar{g}}(\delta_g(h))^{-1}}(\delta_g(h)g(x))\varphi_{\varepsilon_g(h)^{-1}}(h(x)),$$ este último paso debido al hecho de que $\varepsilon_g(h)^{-1}h = \delta_g(h)g$, y los anteriores por las propiedades que asumimos para los morfismos φ_{g_i}. Si continuamos un paso más, obtenemos:

$$\psi_{\bar{g}}(g(x))\psi_g(x) = \bigoplus_{h\in H} \varphi_{\varepsilon_{\bar{g}}(\delta_g(h))^{-1}\varepsilon_g(h)^{-1}}(h(x)) = \bigoplus_{h\in H} \varphi^{-1}_{\varepsilon_g(h)\varepsilon_{\bar{g}}(\delta_g(h))}(\varepsilon_{\bar{g}}(\delta_g(h))^{-1}\varepsilon_g(h)^{-1}h(x))$$

Y ahora tenemos que obtener algunas relaciones entre $\varepsilon_{\bar{g}}$ y ε_g:

$hg^{-1} = \varepsilon_g(h)\delta_g(h)$, $\delta_g(h)\bar{g}^{-1} = \varepsilon_{\bar{g}}(\delta_g(h))\delta_{\bar{g}}(\delta_g(h))$ y combinándolas:

$h(\bar{g}g)^{-1} = hg^{-1}\bar{g}^{-1} = (\varepsilon_g(h)\delta_g(h))(\delta_g(h)^{-1}\varepsilon_{\bar{g}}(\delta_g(h))\delta_{\bar{g}}(\delta_g(h)) = \varepsilon_g(h)\varepsilon_{\bar{g}}(\delta_g(h))\delta_{\bar{g}}(\delta_g(h))$

con $\varepsilon_g(h)\varepsilon_{\bar{g}}(\delta_g(h)) \in G_V$ y $\delta_{\bar{g}}(\delta_g(h)) \in H$. Siendo esta expresión única:

$\varepsilon_{\bar{g}g}(h) = \varepsilon_g(h)\varepsilon_{\bar{g}}(\delta_g(h))$ y $\delta_{\bar{g}g}(h) = \delta_{\bar{g}}(\delta_g(h))$. Terminamos ahora nuestro cálculo: $\psi_{\bar{g}}(g(x))\psi_g(x) = \bigoplus_{h\in H} \varphi^{-1}_{\varepsilon_{\bar{g}g}(h)}(\delta_{\bar{g}g}(h)\bar{g}g(x)) = \bigoplus_{h\in H} (\varphi^{-1}_{\varepsilon_{\bar{g}g}(h)})^{\delta_{\bar{g}g}(h)\bar{g}g}(x) =$
$= \psi_{\bar{g}g}(x)$.

Además, $\psi_1 = \bigoplus_{h\in H} (\varphi^{-1}_{\varepsilon_1(h)})^{\delta_1(h)} = \bigoplus_{h\in H} (\varphi_1^{-1})^h = \bigoplus_{h\in H} \mathrm{id}_{V^h} = \mathrm{id}_{V_1}$.

Hemos probado que $(V_1, (\psi_g)_{g\in G}) \in \operatorname{mod}^G(\bar{Q}, \bar{I})$.

Pasamos ahora a $V_i = \bigoplus_{h\in H} V^{g_i h}$.

Si $g \in G$, como antes podemos definir: $\delta_{ig}: g_iH \longrightarrow g_iH$ y $\varepsilon_{ig}: g_iH \longrightarrow G_V$ con la propiedad $g_ihg^{-1} = \varepsilon_{ig}(g_ih)\delta_{ig}(g_ih)$. Podemos probar que δ_{ig} es biyectiva y si ponemos $\psi_{ig} = \bigoplus_{h\in H} (\varphi^{-1}_{\varepsilon_{ig}(g_ih)})^{\delta_{ig}(g_ih)g} : V_i \xrightarrow{\simeq} V_i^g$, obtenemos claramente $(V_i, (\psi_{ig})_{g\in G}) \in \mathrm{mod}^G(\bar{Q}, \bar{I})$.

Describiremos ahora δ_{ig}, ε_{ig} en términos de δ_g y ε_g definidos antes.
Como $g_ihg^{-1} = \varepsilon_{ig}(g_ih)\delta_{ig}(g_ih)$, entonces $\varepsilon_g(h)\delta_g(h) = hg^{-1} = (g_i^{-1}\varepsilon_{ig}(g_ih)g_i)\, g_i^{-1}\delta_{ig}(g_ih)$
con $g_i^{-1}\varepsilon_{ig}(g_ih)g_i \in G_v$ y $g_i^{-1}\delta_{ig}(g_ih) \in H$ ya que $\delta_{ig}(g_ih) \in g_iH$.
Por la unicidad, tenemos: $\varepsilon_{ig}(g_ih) = g_i\,\varepsilon_g(h)\,g_i^{-1}$ y $\delta_{ig}(g_ih) = g_i\,\delta_g(h)$.
Podemos entonces reescribir, $\psi_{ig} = \bigoplus_{h\in H} (\varphi^{-1}_{g_i\varepsilon_g(h)g_i^{-1}})^{g_i\delta_g(h)g}$.

Usaremos esta expresión para probar que $(V_1, (\psi_g)_{g\in G}) \cong (V_i, (\psi_{ig})_{g\in G})$ en $\mathrm{mod}^G(\bar{Q}, \bar{I})$. Si $h\in H$, tenemos $\varphi^h_{g_i} : V^h \xrightarrow{\simeq} V^{g_ih}$ isomorfismo de representaciones. Y así, $\eta_i := \bigoplus_{h\in H} \varphi^h_{g_i} : \bigoplus_{h\in H} V^h \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{h\in H} V^{g_ih} = V_i$ es isomorfismo de representaciones. Basta mostrar que η_i es $\mathrm{mod}^G(\bar{Q}, \bar{I})$ morfismo.

Sea $x \in \bar{Q}_0$ y $g\in G$. Consideremos el cuadrado:

$$(1):\quad \begin{array}{ccc} V_1(x) & \xrightarrow{\eta_i(x)} & V_i(x) \\ {\scriptstyle \psi_g(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{ig}(x)} \\ V_1^g(x) & \xrightarrow{\eta_i(g(x))} & V_i^g(x) \end{array}$$

$\eta_i^g(x)\psi_g(x) = (\bigoplus_{h\in H} \varphi^h_{g_i}(x))^g \left[\bigoplus_H (\varphi^{-1}_{\varepsilon_g(h)})^{\delta_g(h)g}_{(x)}\right] = (\bigoplus_H \varphi_{g_i}(hg(x)))(\bigoplus_{h\in H} \varphi_{\varepsilon_g(h)^{-1}}(h(x))) =$
$= \bigoplus_{h\in H} \varphi_{g_i}(\delta_g(h)g(x))\varphi_{\varepsilon_g(h)^{-1}}(h(x)) = \bigoplus_{h\in H} \varphi_{g_i\varepsilon_g(h)^{-1}}(h(x)) =$
$= (\bigoplus_{h\in H} \varphi_{g_i\varepsilon_g(h)^{-1}g_i^{-1}}(g_ih(x)))(\bigoplus_{h\in H} \varphi_{g_i}(h(x))) = \left[\bigoplus_{h\in H} (\varphi^{-1}_{g_i\varepsilon_g(h)g_i^{-1}})^{g_i\delta_g(h)g}_{(x)}\right](\bigoplus_{h\in H} \varphi^h_{g_i}(x)) =$
$= \psi_{ig}(x)\,\eta_i(x)$. Que prueba que (1) conmuta.

Así, $V_1 \xrightarrow[\simeq]{\eta_i} V_i$ en $\mathrm{mod}^G(\bar{Q}, \bar{I})$. ∎

Llamamos V_i a $(V_i, (\psi_{ig})_{g\in G})$ cuando lo consideremos elemento de $\mathrm{mod}^G(\bar{Q}, \bar{I})$ por simplicidad.

Con las construcciones realizadas tenemos el siguiente:

(7.3) <u>Proposición</u>: V_1 es sumando directo de ΣV en mod$(\bar{\mathbb{C}},\bar{I})$, si $|G_v| \nmid$ char k.

<u>Demostración</u>: Toda la notación será igual que en (7.2). Los isomorfismos canónicos entre ΣV y $(\Sigma V)^g$ para $g \in G$, no los escribimos pero deben ser tomados en cuenta durante los cálculos.

Como $G = \dot{\bigcup}_{h\in H} G_v h$, tenemos que $\Sigma V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ en k-mod$(\bar{\mathbb{C}},\bar{I})$.

Definimos $\hat{j}_1 := (1_{V_1}, \eta_2, \ldots, \eta_n)^t : V_1 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} V_i = \Sigma V$ morfismo de representaciones. Deseamos mostrar que es mod$^G(\bar{\mathbb{C}},\bar{I})$-morfismo.

Sea $g \in G$ y $x \in \bar{\mathbb{C}}_0$. Debemos probar la conmutatividad del cuadrado

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\hat{j}_1} & \Sigma V \\ {\scriptstyle \psi_g}\downarrow & & \downarrow \\ V_1^g & \xrightarrow{\hat{j}_1^g} & \Sigma V \end{array} \qquad (1)$$

Donde llamamos ψ_{1g} a ψ_g por uniformidad de la notación.

$\hat{j}_1^g(x)\psi_{1g}(x) = (\psi_{1g}(x), \eta_2^g(x)\psi_{1g}(x), \ldots, \eta_n^g(x)\psi_{1g}(x))^t = (\psi_{1g}(x), \psi_{2g}(x)\eta_2(x), \ldots, \psi_{ng}(x)\eta_n(x))^t$

porque ya habíamos probado que $\psi_{ig}\eta_i = \eta_i^g \psi_{ig}$.

Tomemos ahora cualquier $g' \in G$ y llámese $\pi_{g'} : \Sigma V \to V^{g'}$ a la proyección natural. Para obtener la conmutatividad de (1) es suficiente probar que $\pi_{g'}\hat{j}_1^g \psi_{1g} = \pi_{g'}\hat{j}_1$.

Sabemos que $\eta_i = \bigoplus_{h\in H} \varphi_{g_i}^h$ y $\psi_{ig}(x)\eta_i(x) = \bigoplus_{h\in H} \varphi_{g_i\varepsilon_g(h)^{-1}}(h(x))$.

Para obtener la composición con $\pi_{g'}(x)$ es necesario saber la entrada de $\hat{j}_1^g\psi_{1g}(x)$ que le corresponde a g'. Para $h \in H$, el codominio de $\psi_{ig}(x)\eta_i(x)$ es obviamente $g_i\varepsilon_g(h)^{-1}h(x)$, así si $g' = g_i\varepsilon_g(h)^{-1}h$ con $g_i\varepsilon_g(h)^{-1} \in G_v$ y $h \in H$ son las únicas posibilidades para tal expresión.

Así, $\pi_{g'}\hat{j}_1^g\psi_{1g}(x) : V_1(x) \to V^{g'}(x)$ es la matriz columna con 0 en todas las entradas salvo en la h donde vale $\varphi_{g_i\varepsilon_g(h)^{-1}}(h(x))$.

Por otra parte $\eta_j(x) = \bigoplus_{h\in H} \varphi_{g_j}(h(x))$ y $\varphi_{g_j}(h(x))$ tiene codominio $g_j h(x)$ y $g' = g_j h'$ están también determinadas en forma única. Por tanto, $g_j = g_i \varepsilon_g(h)^{-1}$, $h = h'$ y $\pi_{g'} \hat{j}_1(x)$ es la matriz columna con entradas 0 salvo en $h' = h$ donde tiene a $\varphi_{g_j}(h'(x)) = \varphi_{g_i\varepsilon_g(h)^{-1}}(h(x))$. En otras palabras, $\pi_{g'} \hat{j}_1^g \psi_{1g}(x) = \pi_{g'} \hat{j}_1(x)$ y como se deseaba $\hat{j}_1^g \psi_{1g} = \hat{j}_1$.

Construimos ahora la proyección correspondiente. Sea $\Sigma V = \bigoplus_{i=1}^n V_i \xrightarrow{p_i} V_i$ la proyección natural en l-mod$(\bar{Q}, \bar{I})$. Recordamos que asumimos $n = |G_v| \nmid$ char$k$. Definimos $\hat{p}_1 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^{-1} p_i : \Sigma V = \bigoplus_{i=1}^n V_i \longrightarrow V_1$ que es morfismo de representaciones. Otra vez debemos probar que es mod$(\bar{Q}, \bar{I})$ morfismo.

Sea $g \in G$ y $x \in \bar{Q}_0$. Tomamos también otra $g' \in G$. Consideremos ahora

$$\begin{array}{ccccc} V^{g'} & \xrightarrow{\sigma_{g'}} & \Sigma V & \xrightarrow{\hat{p}_1} & V_1 \\ & & \| & & \downarrow \psi_{1g} \\ & & \Sigma V & \xrightarrow{\hat{p}_1^g} & V_1^g \end{array} \qquad (2)$$

$$\psi_{1g} \hat{p}_1(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_{1g} \eta_i^{-1} p_i(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta_i^g)^{-1} \psi_{1g} p_i(x).$$

Como $(\eta_i^g)^{-1} = \bigoplus_{h\in H} (\varphi_{g_i}^{-1})^{hg}$ y $\psi_{1g} = \bigoplus_{h\in H} (\varphi^{-1}_{g_i\varepsilon_g(h) g_i^{-1}})^{g_i \delta_g(h) g}$, entonces

$$(\eta_i^g)^{-1}(x) \psi_{1g}(x) = \left(\bigoplus_{h\in H} \varphi_{g_i^{-1}}(g_i h g(x))\right)\left(\bigoplus_{h\in H} \varphi_{g_i\varepsilon_g(h)^{-1} g_i^{-1}}(g_i h(x))\right) =$$

$$= \bigoplus_{h\in H} \varphi_{\varepsilon_g(h)^{-1} g_i^{-1}}(g_i h(x)).$$

Estamos interesados en el morfismo $\varphi_{\varepsilon_g(h)^{-1} g_i^{-1}}(g_i h(x))$ que tiene dominio $g'(x)$. Será el que $g' = g_j h$ con $g_j \in G_v$ y $h \in H$ que quedan de esta forma determinados. De esta manera $\psi_{1g} \hat{p}_1 \sigma_{g'}(x) : V^{g'} \longrightarrow V_1^g$ será la matriz renglón con entradas 0 salvo en la entrada $\delta_g(h)g$ — que es el codominio de $\varphi_{\varepsilon_g(h)^{-1} g_j^{-1}}(g_j h(x))$ — donde le corresponde $\frac{1}{n} \varphi_{\varepsilon_g(h)^{-1} g_j^{-1}}(g_j h(x))$.

Similarmente, $\hat{p}_1^g(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i^{-1})^g p_i^g(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\bigoplus_{h\in H}\varphi_{g_i^{-1}}(g_i h g(x)\right) p_i^g(x)$.
Y el dominio de $\varphi_{g_i^{-1}}(g_i h g(x))$ que le corresponde $g'(x)$ es tal que $g_{j'} h' g = g'$ para $g_{j'} \in G_V$, $h' \in H$. Luego, $\hat{p}_1^g \sigma_{g'}(x)$ es la matriz renglón con entradas 0 salvo en la entrada $h'g$ — que es el codominio de $\varphi_{g_{j'}^{-1}}(g_{j'} h' g(x))$ — donde le corresponde $\frac{1}{n}\varphi_{g_{j'}^{-1}}(g_{j'} h' g(x))$.

Pero, tenemos $g' = g_j h$ y $g' g^{-1} = g_{j'} h'$, así $h g^{-1} = h g'^{-1} g_{j'} h' = (g_j^{-1} g_{j'}) h'$. De esta forma, $\varepsilon_g(h) = g_j^{-1} g_{j'}$ y $\delta_g(h) = h'$, y también $\varepsilon_g(h)^{-1} g_j^{-1} = g_{j'}^{-1}$.

Por tanto, $\psi_{1g}\hat{p}_1\sigma_{g'} = \hat{p}_1^g\sigma_{g'}$ y $\psi_{1g}\hat{p}_1 = \hat{p}_1^g$, lo que hace a $\hat{p}_1$ un mod$(\tilde{Q},\tilde{I})$_morfismo.

Si llamamos $j_i : V_i \hookrightarrow \Sigma V$ la inclusión natural en ℓ-mod$(\tilde{Q},\tilde{I})$, podemos poner $\hat{j}_1 = \sum_{i=1}^{n} j_i \eta_i$. Y entonces:

$$\hat{p}_1\hat{j}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\eta_j^{-1} p_j j_i \eta_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^{-1}\eta_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{id}_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1}.$$

Que prueba que V_1 es sumando directo de ΣV en mod$^G(\tilde{Q},\tilde{I})$. //

Observar además que en caso de que $|G_V|>1$ este sumando es propio. Recordemos que hemos supuesto que los isomorfismos correspondientes al estabilizador de V son compatibles con la acción de G_V. Probamos ahora que en caso de que G_V sea cíclico y char$k=0$ es posible hacer una selección de los isomorfismos de esta manera, esto nos permitirá construir los restantes sumandos de ΣV. Aunque la prueba no es nuestra la incluimos pues la necesitamos más tarde.

(7.4) Lema [14]: Supongamos que $G_V = \{g_1,\dots,g_n\}$ es cíclico. Si char$k=0$, hay isomorfismos $\varphi_i : V \to V^{g_i}$ tales que $\varphi_1 = \mathrm{id}_V$, $\varphi_{g_j}^{g_i}\varphi_{g_i} = \varphi_{g_j g_i}$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $g_1 = 1$ identidad en G y $g_i = g_2^{i-1}$ para $i=1,\dots,n$. Tomemos un isomorfismo cualquiera $\varphi : V \longrightarrow V^{g_2}$, escribimos $g = g_2$ por comodidad. Llamemos θ a la composición:

$$V \xrightarrow{\varphi} V^{g} \xrightarrow{\varphi^{g}} V^{g^2} \longrightarrow \dots \longrightarrow V^{g^{n-1}} \xrightarrow{\varphi^{g^{n-1}}} V^{g^n} = V.$$

Entonces $\theta \in \mathrm{Aut}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ que es un anillo local en vista de la inescindibilidad de V.

Como k es algebraicamente cerrado, sabemos que $k \cong \mathrm{End}V/\mathrm{rad}\,\mathrm{End}V$ y $\theta \in \mathrm{End}V \cong \mathrm{rad}\,\mathrm{End}V \oplus k$. Supongamos que $\theta = c + t$ con $c \in k$ y $t \in \mathrm{rad}\,\mathrm{End}V$. Hay un número natural m con $t^m = 0$ y c tiene todas sus raíces en k. Como $\mathrm{char}\,k = 0$, podemos usar la expresión para el binomio de Newton:

$$\theta^{-1/n} = (c+t)^{-1/n} = c^{-1/n} - \frac{1}{n} c^{-1/n-1} t + \frac{2}{n(n-1)} c^{-1/n-2} t^2 - \dots \pm \aleph_m c^{-1/n-(m-1)} t^{m-1}$$

con $\aleph_i \in k$, bien definido en $\mathrm{End}V$.

En otras palabras, $y := (c+t)^{-1/n} = (\theta^{-1})^{1/n} \in \mathrm{End}V$, definimos $\phi_g := \varphi y$. Como $c \in k$, entonces $y \in k[\theta]$ y para estos elementos tenemos:

$$\theta^{g} = \varphi \varphi^{g^{n-1}} \cdots \varphi^{g} = \varphi \theta \varphi^{-1}.$$

$(\theta^2)^g = \varphi \theta^2 \varphi^{-1}$, etcétera, o sea para toda $z \in k[\theta]$, $z^g = \varphi z \varphi^{-1}$.

Esto implica que $\phi_g^{g} = \varphi^{g} y^{g} = \varphi^{g} \varphi y \varphi^{-1}$, $(\phi_g)^{g^2} = (\varphi^{g} \varphi y \varphi^{-1})^{g} = \varphi^{g^2} \varphi^{g} \varphi y \varphi^{-1} (\varphi^{-1})^{g}$ y en general que $\phi_g^{g^i} = \varphi^{g^i} \varphi^{g^{i-1}} \cdots \varphi y \varphi^{-1} (\varphi^{-1})^{g} \cdots (\varphi^{-1})^{g^{i-1}}$.

Multiplicándolas: $\phi_g^{g^{n-1}} \cdots \phi_g^{g} \phi_g = \varphi^{g^{n-1}} \cdots \varphi y^n = \theta \theta^{-1} = \mathrm{id}_V$.

Y podemos definir el isomorfismo $\phi_{g_i} = \phi_g^{g^{i-2}} \cdots \phi_g^{g} \phi_g : V \longrightarrow V^{g^{i-1}} = V^{g_i}$, con $\phi_1 = \phi_{g^n} = \mathrm{id}$ lo que hace una definición consistente.

Además, $\phi_{g_j}^{g_i} \phi_{g_i} = (\phi_g^{g^{j-2}} \cdots \phi_g^{g} \phi_g)^{g^{i-1}} \phi_g^{g^{i-2}} \cdots \phi_g^{g} \phi_g = \phi_g^{g^{i+j-3}} \cdots \phi_g^{g} \phi_g = \phi_{g_j g_i}$, y esta es la familia de isomorfismos que buscábamos //

Obtenemos así el siguiente Corolario, válido cuando $\mathrm{char}\,k = 0$ hipótesis que <u>supondremos</u> en adelante.

(7.5) Corolario : Si V es inescindible con $|G_V|>1$, entonces ΣV se escinde.

Demostración: Tomamos $1\neq g\in G_V$ y consideramos $K=(g)$ el grupo cíclico generado por g. Por (7.4), podemos elegir los isomorfismos $\varphi_{g^i}: V \longrightarrow V^{g^i}$ en forma compatible con la acción de K. Anotemos que (7.3) puede ser probado para cualquier subgrupo de G_V donde se puedan elegir los isomorfismos de esta manera, esto es ΣV se escinde. //

Recordemos que $V\in \text{mod}(\mathbb{Q},\bar{I})$ es inescindible y que char $k=0$. Supongamos de aquí en adelante que G_V es cíclico generado por $g\in G_V$. Fijamos el isomorfismo $\varphi_g: V \xrightarrow{\sim} V^g$ construído en (7.4) y que genera la familia $\{\varphi_{g^i} \mid g^i\in G_V\}$ compatible con la acción de G_V. Para esta familia hemos construído en (7.3) el sumando directo $V_1=(\underset{h\in H}{\oplus} V^h, (\psi_g)_{g\in G})\in \text{mod}^G(\mathbb{Q},\bar{I})$ de ΣV.

Tomemos ahora $\omega\in k$ con $\omega^n=1$ una raiz n-ésima de la unidad y definamos $\varphi_{\omega g}=\omega\varphi_g: V \xrightarrow{\sim} V^g$ isomorfismo que satisface las mismas características que φ_g — ya que $\varphi_g=\varphi_y$ donde $y^n=\theta^{-1}$, y luego y se puede modificar por ωy —. Luego, $\varphi_{\omega g}$ genera la familia $\{\varphi_{\omega g_i} \mid g_i\in G_V\}$ que es también compatible con la acción de G_V. Para esta familia podemos construir el sumando directo $V_\omega=(\underset{h\in H}{\oplus} V^h, (\psi_{\omega g})_{g\in G})\in \text{mod}^G(\mathbb{Q},\bar{I})$ de ΣV, exactamente como antes. Consideramos también las correspondientes $V_\omega \xhookrightarrow{j_\omega} \Sigma V \xrightarrow{p_\omega} \Sigma V$ inclusión y proyección en $\text{mod}^G(\mathbb{Q},\bar{I})$ construídas como en la demostración de (7.3).

(7.6) <u>Proposición</u>: $\Sigma V = \bigoplus_{\omega^n=1} V_\omega$ es una descomposición en inescindibles en $\mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$.

<u>Demostración</u>: Sean ω y ε dos raíces n-ésimas de la unidad diferentes. Recordemos que $\eta_{i\omega} = \bigoplus_{h\in H} \varphi^h_{\omega g_i} : V_\omega \xrightarrow{\sim} V_{i\omega}$ y entonces

$$j_\omega = (\eta_{1\omega}, \eta_{2\omega}, \ldots, \eta_{n\omega})^t : V_\omega \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n V_{i\omega} = \Sigma V \quad \text{y que}$$

$$p_\omega = \frac{1}{n}(\eta^{-1}_{1\omega}, \eta^{-1}_{2\omega}, \ldots, \eta^{-1}_{n\omega}) : \Sigma V \longrightarrow V_\omega .$$

Así obtenemos: $p_\varepsilon j_\omega = \frac{1}{n}(\eta^{-1}_{1\varepsilon}, \ldots, \eta^{-1}_{n\varepsilon})(\eta_{1\omega}, \ldots, \eta_{n\omega})^t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \eta^{-1}_{i\varepsilon}\eta_{i\omega} =$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(\bigoplus_{h\in H} \varepsilon^{-i+1}\varphi^{g_i h}_{g_i^{-1}}\Big)\Big(\bigoplus_{h\in H}\omega^{i-1}\varphi^h_{g_i}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\varepsilon^{-1}\omega)^{i-1}\, id_{V^h} = 0$$

Esta última igualdad debido a que si tenemos $\omega^n=1$ con $\omega\neq 1$, entonces $(1-\omega)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\omega^i\right) = 1-\omega^n = 0$ y $\sum_{i=1}^{n-1}\omega^i = 0$.

De aquí se sigue que $\bigoplus_{\omega^n=1} V_\omega$ es sumando directo de ΣV, pero de un cálculo de dimensiones en cada vértice se obtiene que el complemento debe ser cero. Luego, $\Sigma V = \bigoplus_{\omega^n=1} V_\omega$ en $\mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$.

Además, cada V_ω es inescindible. En efecto, supongamos que $V_\omega = W_1 \oplus W_2$ con $W_1, W_2 \in \mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$. Por el teorema de Krull-Schmidt (ver por ejemplo [21]) hay una partición $H = H_1 \dot\cup H_2$ de manera que $W_1 \cong \bigoplus_{h\in H_1} V^h$ y $W_2 \cong \bigoplus_{h\in H_2} V^h$ como módulo en $k\text{-}\mathrm{mod}(\bar{Q},\bar{I})$.

Tomemos entonces $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ y $g \in G$ con $h_1 g = h_2$, así tendríamos $\bigoplus_{h\in H_1} V^h \cong W_1 \cong W_1^g \cong \bigoplus_{h\in H_1} V^{hg}$ que tiene a V^{h_2} como sumando. Otra vez por el mismo teorema, hay un elemento $h_1' \in H_1$ con $V^{h_1'} \cong V^{h_2}$ pero $h_1', h_2 \in H$ son representantes de las clases laterales derechas de G_V por tanto $h_1' = h_2 \in H_1 \cap H_2 = \emptyset$, lo que es absurdo. Así, V_ω es inescindible en $\mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$. ∎

Recordamos que habíamos definido una equivalencia T de $\mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$ a $\mathrm{mod}(Q,I)$. Definimos $V'_\omega = T^{-1}(V_\omega,(\psi_{\omega g})_{g\in G}) \in \mathrm{mod}(Q,I)$ representación inescindible, de forma que $\bigoplus_{\omega^n=1} V'_\omega$ es una descomposición de ΣV como elemento de $\mathrm{mod}(Q,I)$.

Tenemos el siguiente útil resultado.

(7.7) <u>Lema</u>: las representaciones V'_ω tienen todas la misma cubierta proyectiva en $\mathrm{mod}(Q,I)$.

<u>Demostración</u>: Sea ω una raíz n-ésima de la unidad. Como en (7.3) para cada $x\in Q_0$ fijamos $\bar{x}\in\bar{Q}_0$ con $\pi\bar{x}=x$, y recordemos que para todo camino $u: y \rightsquigarrow x$ en Q, si $\bar{u}: \bar{y}' \rightsquigarrow \bar{x}$ es el único levantamiento que acaba en $\bar{x}$ y $g_u \in G$ es el único elemento de G con $g_u(\bar{y}) = \bar{y}'$, entonces: $V'_1(u) = V_1(\bar{u})\,\psi_{1 g_u}(\bar{y})$ y $V'_\omega(u) = V_\omega(\bar{u})\,\psi_{\omega g_u}(\bar{y}) = V_1(\bar{u})\,\psi_{\omega g_u}(\bar{y})$, ya que como representaciones V_1 y V_ω son iguales.

Tenemos, $\mathrm{rad}\, V'_1(x) = \sum_{\substack{f\in r(y,x)\\ y\in Q_0}} V'_1(f)(V_1(y))$ según un resultado bien conocido, donde $r(y,x) = \mathrm{rad}\, k(Q,I)(y,x)$. Pero todo $f\in r(y,x)$ tiene la forma $\overline{\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i}$ con u_i camino dirigido no trivial de y en x.

Luego, $\mathrm{rad}\, V'_1(x) = \sum_{\substack{\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \in kQ(y,x)\\ y\in Q_0}} \sum_{i=1}^m V_1(\lambda_i \bar{u}_i)\,\psi_{1 g_{u_i}}(\bar{y}_i)(V_1(\bar{y}_i)) =$

$= \sum_{\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \in kQ(y,x),\, y\in Q_0} \sum_{i=1}^m V_1(\lambda_i \bar{u}_i)(V_1(\bar{y}'_i))$ ya que $\psi_{1 g_{u_i}}$ es biyección.

Pero esta última expresión no depende de la raíz de la unidad escogida, luego $\mathrm{rad}\, V'_1(x) = \mathrm{rad}\, V'_\omega(x)$. Entonces también, $V'_1/\mathrm{rad}\, V'_1\,(x) = V'_\omega/\mathrm{rad}\, V'_\omega\,(x)$, pero estas representaciones son semisimples y por tanto están determinadas por sus valores en los vértices, lo que implica que $V_1'/\mathrm{rad}\,V_1' = V_\omega'/\mathrm{rad}\,V_\omega'$ y de esto se sigue que las cubiertas proyectivas de V_1' y V_ω' son iguales. //

Veremos ahora en que sentido Σ preserva sucesiones de Auslander-Reiten. Recordemos (ver sección 2) que $k(\bar{Q},\bar{I})$ es k-categoría localmente acotada y que $\mathrm{mod}(\bar{Q},\bar{I})$ tiene sucesiones de Auslander-Reiten, en particular tiene una que acaba en V si este no es proyectivo.

(7.8) Proposición: Supongamos que V no es proyectivo y sea $X: 0 \to U \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} V \to 0$ una sucesión de Auslander-Reiten en $\mathrm{mod}(\bar{Q},\bar{I})$. Tomemos

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1': & 0 \to & \Sigma U & \to & W_1' & \to & V_1 & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_1} & & \\ \Sigma X: & 0 \to & \Sigma U & \to & \Sigma W & \to & \Sigma V & \to & 0 \end{array}$$

pullback en $\mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$. X_1' es una sucesión que casi se divide derecha.

Demostración: Llamemos $\sigma: V \to V_1$ inclusión natural y $\pi: \Sigma V \to V$ proyección natural. Claramente, $\pi j_1 \sigma = id_V$; el siguiente diagrama muestra que X_1' no se escinde:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & V \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[ddddl, bend left] \\
 & & & V_1 \arrow[dl, dashed] \arrow[d, equal] & \\
X_1': 0 \arrow[r] & \Sigma U \arrow[r] \arrow[d, equal] & W_1' \arrow[r] \arrow[d] & V_1 \arrow[r] \arrow[d, "j_1"] & 0 \\
\Sigma X: 0 \arrow[r] & \Sigma U \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma W \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma V \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
X: 0 \arrow[r] & U \arrow[r] & W \arrow[r] & V \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ya que es exacto y conmutativo y X no se escinde.

Sea $p: (Y,(\chi_g)_{g\in G}) \to (V_1,(\psi_g)_{g\in G})$ un epimorfismo que no se escinde en $\mathrm{mod}^G(\bar{Q},\bar{I})$.

Supongamos que $\pi j_1 p: Y \to V$ se escinde en $k\text{-}\mathrm{mod}(\bar{Q},\bar{I})$.

Entonces existe $s: V \longrightarrow Y$ con $\pi j_1 p s = id_V$. El morfismo s puede no tener algunas propiedades deseables, pero lo corregiremos.

Respetaremos nuestra notación $G_V = \{g_1, \dots, g_n\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tenemos: $V \xrightarrow{\varphi_{g_i}} V^{g_i} \xrightarrow{s^{g_i}} Y^{g_i} \xrightarrow{\chi_{g_i}^{-1}} Y$ y formamos

$$\hat{s} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_{g_i}^{-1} s^{g_i} \varphi_{g_i} : V \longrightarrow Y.$$

Observemos primero que $\hat{s}$ es todavía un inverso derecho para $\pi j_1 p$.

Como p y j_1 son $\mathrm{mod}^G(\mathbb{A}, \bar{\Sigma})$ morfismos, entonces

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\chi_{g_i}"'] & V_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\varphi_{g_i}"] & \Sigma V \arrow[d, equal] \\
Y^{g_i} \arrow[r, "p^{g_i}"] & V_1^{g_i} \arrow[r, "j_1^{g_i}"] & \Sigma V
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Así, $\pi j_1 p \hat{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \pi j_1 p \chi_{g_i}^{-1} s^{g_i} \varphi_{g_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \pi j_1^{g_i} p^{g_i} s^{g_i} \varphi_{g_i}$

Recordamos que $j_1 = (\eta_1, \dots, \eta_n)^t : V_1 \longrightarrow \Sigma V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ con $\eta_j = \bigoplus_{h \in H} \varphi_{g_j}^{h} : V_1 \xrightarrow{\simeq} V_j$, luego $\eta_j^{g_i} = \bigoplus_{h \in H} \varphi_{g_j}^{h g_i}$.

Si queremos obtener la entrada en j_1^{g} cuyo codominio corresponde a 1, tenemos que conocer para cuales $g_j \in G_V$ y $h \in H$, $g_j h g_i = 1$ — ya que $V^{g_j h g_i}$ es el codominio de $\varphi_{g_j}^{h g_i}$ —; claramente $g_j = g_i^{-1}$, $h = 1$ ya que hemos asumido que $1 \in H$. Así $\pi j_1^{g_i}$ es la matriz renglón con 0 en todas las entradas salvo en g_i — que es el dominio de $\varphi_{g_i^{-1}}^{g_i}$ — en donde aparece $\varphi_{g_i^{-1}}^{g_i} = \varphi_{g_i}^{-1}$. Luego, $\pi j_1^{g_i} = \varphi_{g_i}^{-1} \pi^{g_i}$, donde π^{g_i} puede considerarse como la proyección natural $\pi_{g_i} : \Sigma V \longrightarrow V^{g_i}$ restringida a $(V_1)^{g_i}$.

Entonces, $\pi j_1 p \hat{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{g_i}^{-1} (\pi j_1 p s)^{g_i} \varphi_{g_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} id_V = id_V$.

Consideremos ahora el siguiente cuadrado con $g_j \in G_V$:

$$
(1)\qquad
\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{\hat{s}} & Y \\
{\scriptstyle \varphi_{g_j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{g_j}} \\
V^{g_j} & \xrightarrow[\hat{s}^{g_j}]{} & Y^{g_j}
\end{array}
$$

Calculemos: $\hat{s}^{g_j}\varphi_{g_j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\chi_{g_i}^{-1})^{g_j} s^{g_i g_j} \varphi_{g_i}^{g_j}\varphi_{g_j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi_{g_j}\chi_{g_j}^{-1}\chi_{g_i^{-1}}^{g_i g_j} s^{g_i g_j}\varphi_{g_i g_j}$

$= \chi_{g_j}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi_{g_i g_j}^{-1} s^{g_i g_j}\varphi_{g_i g_j} = \chi_{g_j}\hat{s}$, que prueba que (1) conmuta.

Podemos entonces asumir desde el principio que $\pi_{j_1}\rho s = id_V$ y que para cada $g_i \in G_V$, $s^{g_i}\varphi_{g_i} = \chi_{g_i} s$.

Obtenemos ahora un morfismo $\bar{s}: V_1 \longrightarrow Y$ tal que

$$
\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{h\in H} V^h = V_1 \arrow[d, dashed, "\bar{s}"] \\
V^h \arrow[ur, "q_h"] \arrow[r, "s^h"'] & Y^h \xrightarrow[\chi_h^{-1}]{} Y
\end{tikzcd}
$$

conmuta para cada $h\in H$.

Mostraremos que $\bar{s}$ es de hecho un $mod^G(\mathfrak{a},\bar{I})$-morfismo.

Así tomemos $g\in G$ y consideremos

$$
\begin{array}{ccc}
V_1 & \xrightarrow{\bar{s}} & Y \\
{\scriptstyle f_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi_g} \\
V_1^g & \xrightarrow{\bar{s}^g} & Y^g
\end{array}
\qquad (2).
$$

$\bar{s}^g f_g = ((\chi_h^{-1})^g s^{hg})_{h\in H}\left(\bigoplus_{h\in H}(\varphi_{\varepsilon_g(h)}^{-1})^{\delta_g(h)g}\right) = \left((\chi_{\delta_g(h)}^{-1})^g s^{\delta_g(h)g}(\varphi_{\varepsilon_g(h)}^{-1})^{\delta_g(h)g}\right)_{h\in H} =$

$= \left((\chi_{\delta_g(h)}^{-1})^g(\chi_{\varepsilon_g(h)}^{-1} s^{\varepsilon_g(h)})^{\delta_g(h)g}\right)_{h\in H} = \left((\chi_{\delta_g(h)}^{-1})^g(\chi_{\varepsilon_g(h)}^{-1})^{\delta_g(h)g} s^h\right)_{h\in H} =$

$= ((\chi_{gh^{-1}})^h s^h)_{h\in H} = (\chi_g\chi_{h^{-1}}^h s^h)_{h\in H} = \chi_g(\chi_h^{-1}s^h)_{h\in H} = \chi_g\bar{s}$, que muestra que (2) conmuta.

Probaremos ahora que $V_1 \xrightarrow{\bar{s}} Y \xrightarrow{p} V_1$ es un isomorfismo en $mod^G(\mathfrak{a},\bar{I})$. En efecto, $p\bar{s} = (\pi^h p)^t_{h\in H}(\chi_{h'}^{-1}s^{h'})_{h'\in H} = (\pi^h p\,\chi_{h'}^{-1}s^{h'})_{h,h'\in H}$ donde estamos tomando $\pi^h: \Sigma V \longrightarrow V^h$ como proyección natural.

Así, $\pi^h p\,\chi_{h'}^{-1}s^{h'}: V^{h'} \longrightarrow V^h$ es un morfismo entre representaciones inescindibles en $mod(\mathfrak{a},\bar{I})$. Si $h\neq h'$, por definición H es un conjunto de representantes de las clases laterales derechas de G_V, sabemos que entonces $V^{h'} \not\cong V^{h}$ y $\pi^{h} p \chi_{h'}^{-1} s^{h'} \in \operatorname{rad}(V^{h'}, V^{h})$. Ahora, si $h = h'$ entonces $\pi^{h} p \chi_{h}^{-1} s^{h} = \pi^{h} \psi_{h}^{-1} p^{h} s^{h}$ y $\pi^{h} \psi_{h}^{-1} = \pi^{h} \big(\bigoplus_{h' \in H} (\varphi^{-1}_{\varepsilon_h(h')})^{\delta_h(h')h} \big)^{-1}$ que es la matriz renglón cuya única entrada no cero es la h donde tiene $\varphi_{\varepsilon_h(h)}^{\delta_h(h)h} = \varphi_1^{h} = id_{V^h}$. O sea, $\pi^{h} \psi_{h}^{-1} = (\pi j_1)^{h}$; esto indica que $\pi^{h} p \chi_{h}^{-1} s^{h} = (\pi j_1)^{h} p^{h} s^{h} = (\pi j_1 p s)^{h} = id_{V^h}$.

Así tenemos $p\bar{s} = id_{V_1} + r$ donde $r \in \operatorname{rad} \operatorname{End} V_1$. Como por (7.6), $\operatorname{End} V_1$ es un anillo local, p se escinde. Esto es una contradicción.

Ahora sabemos que $\pi j_1 p$ no se escinde y como X es una sucesión de Auslander-Reiten en $\operatorname{mod}(\mathfrak{A}, \bar{I})$, obtenemos $h : Y \longrightarrow W$ en $\operatorname{Mod}(\mathfrak{A}, \bar{I})$ con $\pi j_1 p = q h$. Definimos $\bar{h} = (h^{g} \chi_g)^{t}_{g \in G} : Y \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} W^{g} = \Sigma W$.
Como $\bar{h}^{g'} \chi_{g'} = (h^{gg'} \chi_g^{g'})^{t}_{g \in G} \chi_{g'} = (h^{gg'} \chi_g^{g'} \chi_{g'})^{t}_{g \in G} = (h^{gg'} \chi_{gg'})^{t}_{g \in G} = \bar{h}$
entonces, $\bar{h}$ existe en $\operatorname{mod}^{G}(\mathfrak{A}, \bar{I})$.

Estamos ahora interesados en la conmutatividad de:

(3)
$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "p"] \arrow[dl, dashed, "\bar{h}"'] & \\
 & V_1 \arrow[d, "j_1"] & \\
\Sigma W \arrow[r, "\Sigma q"] & \Sigma V \arrow[r, "\pi^{g}"] & V^{g}
\end{tikzcd}
$$

$\pi^{g} \Sigma q \bar{h} = \pi^{g} \big(\bigoplus_{g' \in G} q^{g'} \big) (h^{g''} \chi_{g''})^{t}_{g'' \in G} = \pi^{g} (q^{g'} h^{g'} \chi_{g'})^{t}_{g' \in G} = q^{g} h^{g} \chi_g =$
$= (qh)^{g} \chi_g = \pi^{g} j_1^{g} p^{g} \chi_g = \pi^{g} j_1 p$, y entonces $\Sigma q \bar{h} = j_1 p$.

Finalmente, como $X_1' = (\Sigma X) j_1$ es un pullback, obtenemos un único morfismo en $\operatorname{mod}^{G}(\mathfrak{A}, \bar{I})$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "\hat{h}"] \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[ddr, bend right, "\bar{h}"'] & & \\
 & W_1' \arrow[r] \arrow[d] & V_1 \arrow[d, "j_1"] \\
 & \Sigma W \arrow[r] & \Sigma V
\end{tikzcd}
$$

esto prueba que X_1' es casi se divide derecha en $\operatorname{mod}^{G}(\mathfrak{A}, \bar{I})$. //

Supongamos que $0 \to \tau V \to W \to V \to 0$ es sucesión de Auslander-Reiten en $\operatorname{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$. Si $g \in G_V$, entonces $0 \to (\tau V)^g \to W^g \to V^g \to 0$ es también de Auslander-Reiten y $V^g \cong V$, por tanto $(\tau V)^g \cong \tau V$ y $W^g \cong W$; esto implica que $G_{\tau V} = G_V$ y que $G_V \subset G_W$.

Como G_V es cíclico con n elementos, entonces:

$\Sigma V = \bigoplus_{\omega^n=1} V_\omega$ y $\Sigma \tau V = \bigoplus_{\omega^n=1} (\tau V)_\omega$ son descomposiciones en inescindibles en $\operatorname{mod}^G(\bar{Q}, \bar{I})$.

Conservemos la notación de la Proposición anterior, entonces:

$X_1' : 0 \to \Sigma \tau V \to W_1' \to V_1 \to 0$ es sucesión que casi se divide derecha en $\operatorname{mod}^G(\bar{Q}, \bar{I})$. Es bien sabido que hay entonces un único sumando inescindible de $\Sigma \tau V$, $(\tau V)_{\delta(1)}$ de forma que:

$$\begin{array}{lccccccccc} X_1': & 0 & \to & \Sigma \tau V & \to & W_1' & \to & V_1 & \to & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle p_{\delta(1)}} & & \downarrow & & \| & & \\ X_1: & 0 & \to & (\tau V)_{\delta(1)} & \to & W_1 & \to & V_1 & \to & 0 \end{array}$$

el pushout no se escinde. Esta sucesión X_1 es por supuesto de Auslander-Reiten.

Claramente, la misma construcción puede repetirse para cada raíz de la unidad, obteniéndose:

$X_\omega : 0 \to (\tau V)_{\delta(\omega)} \to W_\omega \to V_\omega \to 0$ sucesión de Auslander Reiten.

Con esta notación probamos el siguiente:

(7.9) <u>Lema</u>: $\Sigma X = \bigoplus_{\omega^n=1} X_\omega$.

<u>Demostración</u>: Para simplificar la notación, escribimos

$\Sigma X : 0 \to \bigoplus_{i=1}^{m} A_i^{r_i} \to E \to \bigoplus_{i=1}^{m'} B_i^{s_i} \to 0$ de forma que A_i, B_j son inescindibles y si $i \neq j$, $A_i \not\cong A_j$, $B_i \not\cong B_j$.

Ponemos $\Sigma X = (x_{ij}) \in \bigoplus_{t,t'} \operatorname{Ext}(B_t, A_{t'})^{s_t r_{t'}}$ de forma que

$x_{ij} = p_j(\Sigma X)\sigma_i$ es cero ó de Auslander-Reiten. En forma canónica podemos hacer que σ_i y p_j sean las inclusiones y proyecciones usuales respectivamente.

Por la unicidad de las sucesiones que casi se dividen sabemos que $m=m'$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_{11}\neq 0$, $x_{(s_1+1)(r_1+1)}\neq 0$, etcétera. Como $A_2\not\cong A_1$ entonces para cualquier $1\le j\le r_1$, $i>s_1$ tenemos $x_{ij}=0$; similarmente para $1\le i\le s_1$ y $j>r_1$, $x_{ij}=0$. Así, la matriz ΣX puede ser escrita:

$$\Sigma X = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} x_{11} & \cdots & x_{1r_1}\\ \vdots & & \vdots \\ x_{s_11} & \cdots & x_{s_1r_1}\end{matrix} & 0 & 0 \;\cdots \\ \hline 0 & \begin{matrix} x_{(s_1+1)(r_1+1)} & \cdots & x_{(s_1+1)(r_1+r_2)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{(s_1+s_2)(r_1+1)} & \cdots & x_{(s_1+s_2)(r_1+r_2)}\end{matrix} & 0 \;\cdots \\ \hline 0 & \vdots & \ddots \\ \vdots & & \end{array}\right)$$

Tomemos $1\le i\le r_1$, $1\le j\le s_1$, entonces $x_{ij}\in \mathrm{Ext}(B_1,A_1)$ es cero ó de Auslander-Reiten, entonces $x_{ij}\in \mathrm{Soc}\,\mathrm{Ext}(B_1,A_1)$ que es un módulo simple generado por t_1. Escribimos $x_{ij}=c_{ij}t_1$ con $c_{ij}\in k$.

La matriz $M_1 = \begin{pmatrix} c_{11}t_1 & \cdots & c_{1r_1}t_1\\ \vdots & & \vdots \\ c_{s_11}t_1 & \cdots & c_{s_1r_1}t_1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ext}(B_1^{s_1}, A_1^{r_1})$ puede diagonalizarse por medio de operaciones elementales. Así, hay dos matrices $P_1\in \mathrm{Aut}(B_1^{s_1})$ y $Q_1\in\mathrm{Aut}(A_1^{r_1})$ tal que $P_1M_1Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right) \Big\}\ m$ renglones.

Podemos definir $P=\left(\begin{array}{c|c} P_1&0\\\hline 0&I\end{array}\right)\in \mathrm{Aut}(\bigoplus_{i=1}^m B_i^{s_i})$, $Q=\left(\begin{array}{c|c} Q_1&0\\\hline 0&I\end{array}\right)\in \mathrm{Aut}(\bigoplus_{i=1}^m A_i^{r_i})$.

y obtenemos $P(\Sigma X)Q = \left(\begin{array}{c|c} P_1M_1Q_1 & 0\\\hline 0 & M_1'\end{array}\right)$, donde $\Sigma X = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & 0\\\hline 0& M_1'\end{array}\right)$.

Supongamos que $m<r_1$, tendríamos $M = P(\Sigma X)Q = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{0}_{r_1-m \text{ columnas}} & \\ \hline 0 & & M_1' \end{array}\right)$.

Escribamos $M=(x'_{ij})$. Así, para cualquier $m<j\le r_1$, $x'_{ij}=0$ cuando $i=1,\dots,n$.

Pero, $x'_{ij} = P^{(r_i)}(\Sigma X)Q^{(c_j)}$ donde $P^{(r_i)}$ es el i-ésimo renglón de la matriz P y $Q^{(c_j)}$ es la j-ésima columna de Q. Así, $x'_{ij} = p_i P(\Sigma X)Q\sigma_j$.

Sabiendo que $\operatorname{Ext}(B_j, \bigoplus_{i=1}^{m} A_i^{r_i}) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ext}(B_j, A_i)^{r_i}$ y como $j \in \{m+1, \ldots, r_1\}$,

$$\eta \longmapsto (p_i\eta)_{i=1,\ldots,m}$$

entonces, $0 = P(\Sigma X)Q\sigma_j$ y siendo P un isomorfismo, $(\Sigma X)Q\sigma_j = 0$. Pero esto no es posible: recordamos que $B_j = \bigoplus_{h\in I} V^h$ y sea $\gamma: V \hookrightarrow B_j$ inclusión, así el morfismo $\gamma' = Q\sigma_j\gamma : V \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} B_i^{s_i} = \Sigma V$ se escinde.

Escribimos $\gamma' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_t)^t : V \longrightarrow \Sigma V$ solo tomando en cuenta la imagen de γ' que es finitamente generada y tiene una inversa $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_t) : \Sigma V \to V$ con $\sum_{i=1}^{t} \rho_i\gamma'_i = id_V$. Como $\operatorname{End} V$ es local, entonces hay alguna $\gamma'_{i_0} : V \longrightarrow V_{i_0}$ que es isomorfismo, donde V_{i_0} es V^g para alguna $g \in G$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & V \arrow[d, hook, "\gamma"] & \\
(\Sigma X)Q\sigma_j : & 0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{m} A_i^{r_i} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E'' \arrow[r] \arrow[d] & B_j \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_j"] \arrow[ddl, dashed, "h"'] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{m} A_i^{r_i} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i=1}^{m} B_i^{s_i} \arrow[r] \arrow[d, "\wr Q"] & 0 \\
\Sigma X : & 0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{m} A_i^{r_i} \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r, "\Sigma q"] \arrow[d] & \bigoplus_{i=1}^{m} B_i^{s_i} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{i_0}"] & 0 \\
X : & 0 \arrow[r] & \tau V_{i_0} \arrow[r] & W_{i_0} \arrow[r, "q"] & V_{i_0} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Donde $(\Sigma q)h = Q\sigma_j$, y h existe ya que $(\Sigma X)Q\sigma_j$ se escinde.

Como $\pi_{i_0}(Q\sigma_j\gamma) = \gamma'_{i_0}$ se escinde, entonces también X se escinde, lo que contradice el hecho de que X sea de Auslander-Reiten.

Así, $M = \left(\begin{array}{c|c} t_1 \ddots t_1 & 0 \\ \hline 0 & M_1 \end{array}\right)$. Y por este proceso se pueden encontrar matrices invertibles P y Q de forma que $P(\Sigma X)Q = \left(\begin{array}{c|c|c} t_1 \ddots t_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{n-1} \ddots t_{n-1} \end{array}\right)$.

Pero esta última matriz es exactamente $\bigoplus_{w^n=1} X_w$ y $P(\Sigma X)Q$

es una sucesión isomorfa a ΣX, luego $\Sigma X = \bigoplus_{\omega^n=1} X_\omega$ como sucesiones. //

En particular obtenemos que $\Sigma W \cong \bigoplus_{\omega^n=1} W_\omega$.

Recordemos que aunque hemos venido suponiendo que V no es projectivo, (7.1) permanece válido en ese caso si consideramos la inclusión del radical como sucesión de Auslander-Reiten — esto se debe a (5.5) —.

Observemos que todas las conclusiones de esta sección han sido obtenidas sin ningún supuesto acerca del tipo de representación de (Q,I) ó de $(\tilde{Q},\tilde{I})$. Sin embargo hemos supuesto que G_V es cíclico. En la siguiente sección veremos que estas dos propiedades están vinculadas y obtendremos así información usando los resultados aquí probados.

8. TIPO DE REPRESENTACION FINITO SE PRESERVA.

A lo largo de esta sección supondremos que la característica de k es cero. Fijemos también un morfismo cubriente $\pi : (\bar{Q}, \bar{I}) \longrightarrow (Q, I)$ definido por la acción del grupo admisible G.

Supondremos aquí que $(\bar{Q}, \bar{I})$ es localmente de representación finita y probaremos que en ese caso los estabilizadores de las representaciones inescindibles son cíclicos, de forma que podemos usar los resultados obtenidos en la sección anterior. Mostraremos así que cuando Q es finito — o sea, $k(Q, I)$ es un álgebra de dimensión finita — también (Q, I) es de tipo de representación finita.

Sabemos que $\mathrm{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$ tiene sucesiones de Auslander-Reiten, sin embargo las construiremos para obtener un poco más de información.

(8.1) Lema: $\mathrm{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$ tiene sucesiones de Auslander-Reiten, y tienen cuando más cuatro sumandos en el término intermedio y en ese caso uno de ellos es un módulo proyectivo-inyectivo.

Demostración: Sea $V \in \mathrm{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$ inescindible. Sean $W_1, \dots, W_n$ los inescindibles en $\mathrm{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$ con $(W_i, V) \neq 0$ — observar que son finitos ya que todos ellos tienen $W_i(x) \neq 0$ para algún $x \in \mathrm{sop}\, V$ que es finito y $(\bar{Q}, \bar{I})$ es l.r.f. —. Y sean $Z_1, \dots, Z_m$ los inescindibles — al igual que con W_i, son representantes de las clases de isomorfía — de $\mathrm{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$ de forma que $(Z_i, W_j) \neq 0$ ó $(W_j, Z_i) \neq 0$ para alguna $j \in \{1, \dots, n\}$.

Sea A el subcarcaj pleno de $\bar{Q}$ con vértices $A_0 = \mathrm{sop}\, V \cup (\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{sop}\, W_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{sop}\, Z_j)$ que es finito. Sea $\hat{I}$ el ideal de A generado por las siguientes relaciones: si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in \bar{I}$, podemos asumir que $u_1, \ldots, u_m$, $m \leq n$ son caminos en A y $u_{m+1}, \ldots, u_n$ no lo son, entonces $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \in \hat{I}$; de hecho el conjunto de las relaciones de esta forma es ya un ideal en A.

Sea $\mathcal{C}$ la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$ tal que $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ si $\mathrm{sop}\,Y \subset A$. Tenemos que $\mathrm{mod}(A, \hat{I})$ es isomorfa a $\mathcal{C}$. En efecto, si $Y \in \mathrm{mod}(A, \hat{I})$ definimos Y^e representación de $\bar{Q}$ con $Y^e(x) = \begin{cases} Y(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$

Sea $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in \bar{I}$, podemos suponer que $u_1, \ldots, u_m$ son caminos en A y que $u_{m+1}, \ldots, u_n$ no lo son. Luego, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \in \hat{I}$ y $Y^e(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i) = 0$; si $j \geq m+1$, u_j cruza por un vértice fuera de A y $Y^e(u_j) = 0$, o sea que $Y^e(\sum_{j=m+1}^{n} \lambda_i u_i) = 0$ y Y^e satisface $\bar{I}$. Por tanto $Y^e \in \mathrm{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$. Obviamente es fiel, pleno y denso. Como $(\bar{Q}, \bar{I})$ es l.r.f., se tiene que $(A, \hat{I})$ es de tipo finito.

Como $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{sop}\,W_i \subset A$, entonces V es proyectivo en $\mathrm{mod}(A, \hat{I})$ si y solo si lo es en $\mathrm{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$. Luego, la sucesión de Auslander-Reiten que termina en V en $\mathrm{mod}(A, \hat{I})$ todavía lo es en $\mathrm{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$. Pero es bien sabido [6] que esta sucesión tiene a lo más cuatro sumandos en el término intermedio y en ese caso uno es proyectivo-inyectivo en $\mathrm{mod}(A, \hat{I})$, pero como $\bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{sop}\,Z_i \subset A$, también lo será en $\mathrm{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$. //

Comenzaremos ahora a obtener información acerca del tamaño de los estabilizadores de módulos inescindibles $V \in \mathrm{mod}(\bar{Q}, \bar{I})$.

(8.2) Lema [14]: 1). Si G_V es trivial, entonces ΣV es inescindible.

2). Si $P \in$ mod$(\mathbb{Q},\bar{I})$ es proyectivo inescindible, ΣP también lo es.

3). Si $T \in$ mod$(\mathbb{Q},\bar{I})$ es transyectivo inescindible, ΣT también lo es.

Demostración: Solo remarcamos algunos hechos:

2): Si $P=(x,-)$ proyectivo inescindible, $\Sigma P=(\pi x,-)$ proyectivo inescindible.

3): Supongamos $\tau^n T = P$ proyectivo, luego $G_T = G_P = 1$, y ΣT inescindible. Además, $\Sigma\tau T = \tau\Sigma T$ ya que ambos son inescindibles, así $\tau^n \Sigma T = \Sigma P$. //

(8.3) Lema: $\mathcal{U}$ estable en mod$(\mathbb{Q},\bar{I})$ con $G_{\mathcal{U}}$ trivial. Supongamos $V \xrightarrow{f} \mathcal{U}$ irreducible con $|G_V|>1$, entonces $|G_V| \leq 3$.

Demostración: Sea $G_V = \{g_1=1,\dots,g_n\}$. Luego, $V \xrightarrow{f^{g_i}} \mathcal{U}^{g_i}$ son irreducibles con $\mathcal{U}^{g_i} \neq \mathcal{U}^{g_j}$ para $g_i \neq g_j$. Por (8.1), tenemos $n \leq 4$. Pero si $n=4$ habría $g_i \in G_V$ con $\mathcal{U}^{g_i}$ proyectivo y esto implicaría que $\mathcal{U}$ es proyectivo, lo que contradice la estabilidad de $\mathcal{U}$. //

(8.4) Lema: Sea $V \in$ mod$(\mathbb{Q},\bar{I})$ inescindible con $|G_V|>1$. Si $\mathcal{U} \in V^+ \cup V^-$, entonces $\mathcal{U}$ es estable.

Demostración: Supongamos que $\tau^n \mathcal{U} = P$ es proyectivo, como $G_{\tau^n V} = G_V$ podemos directamente asumir que $\mathcal{U}$ es proyectivo. Entonces, $G_{\mathcal{U}}=1$ y $|G_V| \leq 3$ ya que en una sucesión de Auslander-Reiten con 4 sumandos en el medio, solo uno de ellos es proyectivo. Por tanto G_V es cíclico y por (7.6), obtenemos $\Sigma V = \bigoplus_{\omega^n=1} V_\omega$.

Si $V \xrightarrow{f} \mathcal{U}$ es irreducible, como por (8.2) V es estable tenemos $\mathcal{U} \xrightarrow{g^{-1}} \tau^{-1} V$ irreducible. Podemos entonces suponer $V \xrightarrow{f} \mathcal{U}$ irreducible. Obtenemos así $\bigoplus_{\omega^n=1} V_\omega = \Sigma V \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma\mathcal{U}$ en la sucesión de Auslander-Reiten que termina en $\Sigma\mathcal{U}$ en mod(Q,I). Tomamos $w^n=1$, $1\neq w$, de forma que V_1 y V_w son sumandos diferentes de rad $\Sigma\mathcal{U}$.

Por (7.7), V_1 y V_w tienen una cubierta proyectiva común S y

$$S \rightarrow V_w \rightarrow V_w/\mathrm{rad}\,V_w \hookrightarrow \mathrm{rad}\,\Sigma\mathcal{U}/\mathrm{rad}^2\Sigma\mathcal{U}$$
$$S \rightarrow V_1 \rightarrow V_1/\mathrm{rad}\,V_1 \hookrightarrow \mathrm{rad}\,\Sigma\mathcal{U}/\mathrm{rad}^2\Sigma\mathcal{U}$$

son linealmente independientes. Así, $\dim_k \frac{\mathrm{rad}(S,\Sigma\mathcal{U})}{\mathrm{rad}^2(S,\Sigma\mathcal{U})} = \dim_k (S, \frac{\mathrm{rad}\,\Sigma\mathcal{U}}{\mathrm{rad}^2\Sigma\mathcal{U}}) \geq 2$ que contradice que Q no tenga flechas dobles. //

(8.5) <u>Corolario</u>: Sea Γ componente conexa de la parte estable del carcaj de Auslander-Reiten de $(\bar{Q},\bar{I})$. Existe $\mathcal{U}\in\Gamma$ con $|G_{\mathcal{U}}|=1$.

<u>Demostración</u>: Como $(\bar{Q},\bar{I})$ es l.r.f., el carcaj de Auslander-Reiten es conexo. Luego hay algún $\mathcal{U}\in\Gamma$ y X transyectivo con $X\to\mathcal{U}$ ó $\mathcal{U}\to X$ irreducible. Si $|G_{\mathcal{U}}|>1$, por (8.4) X tendría que ser estable. //

(8.6) <u>Proposición</u>: Para toda representación $V\in$ mod$(\bar{Q},\bar{I})$ inescindible, se tiene $|G_V|\leq 3$ y G_V es cíclico.

<u>Demostración</u>: Por (8.2), es suficiente probar el resultado para los elementos de una componente conexa Γ de la parte estable del carcaj de Auslander-Reiten de $(\bar{Q},\bar{I})$. Sea B la clase árbol de Γ -ver [19]-; por (2.7) sabemos que B es Dynkin.

Sea $V\to\mathcal{U}$ irreducible en Γ con $G_{\mathcal{U}}=1$ y $|G_V|>1$; si no todos los estabilizadores son triviales, esta flecha debe existir por (8.5). Luego, $|G_V|\leq 3$.

Construiremos el árbol B a partir de V. Sea $X\in V^+$ y supongamos que $h\in G_X - G_V$. Fijemos además $1\neq g\in G_V$, así $\mathcal{U}\neq\mathcal{U}^g$.

Entonces, $V\neq V^h$ y $\mathcal{U},\mathcal{U}^g,\mathcal{U}^h,\mathcal{U}^{gh}$ son todas diferentes. Resulta el

subcarcaj
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \mathcal{U} & & & \\ V \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{U}^g & & \tau^{-1}\mathcal{U}^h & \\ & X \arrow[r] & \tau^{-1}V^h \arrow[ur] \arrow[r] & \tau^{-1}\mathcal{U}^{gh} & \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Que no contiene subcaminos de la forma $Y \to Z \to \tau^{-1}Y$. En efecto, si $\tau^{-1}V \cong \tau^{-1}V^h$, entonces $V \cong V^h$ y si $\tau^{-1}X \cong \tau^{-1}\mathcal{U}^h$, entonces $G_X = G_U = 1$. Luego, (1) debe aparecer en B, pero (1) no es Dynkin. Por tanto $G_X \subset G_V$.

Probaremos en general que si $X_{i+1} \in X_i^+$ $i=0,\ldots,n-1$ y $X_0 \in V^+$ de forma que $X_{i+2} \not\cong \tau^{-1}X_i$, entonces $|G_{X_i}| \leq 3$ para $i=0,\ldots,n$.

Distinguiremos dos casos:

1) Supongamos $X_0 \not\cong \mathcal{U}^t$ con $t \in G_V$. Probaremos entonces que $G_{X_i} \subset G_V$. Por inducción sobre n. Si $n=0$, ya se probó antes. Supongamos $h \in G_{X_n} - G_V$. En Γ debe aparecer el siguiente subcarcaj:

$$\begin{array}{l} V \to \mathcal{U},\ V \to \mathcal{U}^g,\ V \to X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n \to \tau^{-1}X_{n-1}^h \to \cdots \to \tau^{-n}X_0^h \to \tau^{-n-1}V^h \\ \tau^{-n-1}V^h \to \tau^{-n-1}\mathcal{U}^h,\quad \tau^{-n-1}V^h \to \tau^{-n-1}\mathcal{U}^{gh} \end{array} \qquad (2)$$

Afirmamos que no tiene subcaminos $Y \to Z \to \tau^{-1}Y$.

Por hipótesis, hasta X_n no hay problema.

Si $\tau^{-1}X_{n-1} \cong \tau^{-1}X_{n-1}^h$, entonces $X_{n-1} \cong X_{n-1}^h$ y $h \in G_{X_{n-1}} \subset G_V$ por hipótesis de inducción, pero esto contradice la forma en que se eligió h.

Si $\tau^{-1}X_n \cong \tau^{-1}X_{n-2}^h$, entonces $X_{n-2}^h \cong \tau X_n$. Como $h^{-1} \in G_{X_n} = G_{\tau X_n}$, $\tau X_n \cong (\tau X_n)^{h^{-1}} \cong X_{n-2}$ y $X_n \cong \tau^{-1}X_{n-2}$.

Si $\tau^{-1}(\tau^{-i}X_{n-i}^h) \cong \tau^{-i-2}X_{n-i-2}^h$, entonces $X_{n-i}^h \cong \tau^{-1}X_{n-i-2}^h$ y $X_{n-i} \cong \tau^{-1}X_{n-i-2}$, siendo esto válido aún para $X_{-1}=V$.

Si $\tau^{-n-1}X_0^h \cong \tau^{-n-1}\mathcal{U}^h$, entonces $X_0 \cong \mathcal{U}$ y se supuso falso.

Entonces (2) debía ser subcarcaj de B que es Dynkin. Esto prueba que $G_{X_n} \subset G_V$, completando el primer caso.

2). Supongamos $X_0 = \mathcal{U}$.

Inducción sobre n. Si $n=0$, $G_{\mathcal{U}} = G_{X_0}$ es trivial.

Sup $n>0$. Si $G_{X_1} = 1$, tenemos que $|G_{X_n}| \leq 3$ por inducción sobre la longitud de la cadena.

Si $|G_{X_1}|>1$, $\tau^{-1}\mathcal{U} \in X_1^+$. Si $X_2 \cong \tau^{-1}\mathcal{U}$, $G_{X_2}=1$ y $|G_{X_n}| \leq 3$ otra vez.

Si $X_2 \not\cong (\tau^{-1}\mathcal{U})^h$ con $h \in G_{X_1}$, del caso anterior se sigue que $G_{X_n} \subset G_{X_1}$ que por (8.3) se sabe que tiene orden ≤ 3. Esto completa el segundo caso.

Hemos probado que todos los elementos de B tienen estabilizador con orden ≤ 3. Tomemos ahora $X \in \Gamma$, sabemos que la cubierta universal de Γ es $\mathbb{Z}B$ —ver [19]— y que la proyección respeta la traslación, obtenemos así $Y \in B$ con $X = \tau^n Y$ para $n \in \mathbb{Z}$.

Como $G_X = G_{\tau^n Y} = G_Y$, obtenemos el resultado deseado. //

(8.7) <u>Corolario</u>: Si $V \in \operatorname{mod}(\tilde{Q},\tilde{I})$ inescindible, $\Sigma V = \bigoplus_{\omega \in \tilde{\Omega}_1} V_\omega$ con $n = |G_V|$. //

Estamos ahora en posición de probar el siguiente:

(8.8) <u>Teorema</u>: Sea $\pi: (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (Q,I)$ cubierta definida por G grupo admisible. Supongamos que $\operatorname{char} k = 0$ y Q es finito.

Si $(\tilde{Q},\tilde{I})$ es l. r. f. entonces (Q,I) es de tipo de representación finito.

<u>Demostración</u>: Denotemos por Γ al conjunto de representaciones inescindibles de (Q,I) que son sumandos de ΣV para algún $V \in \operatorname{mod}(\tilde{Q},\tilde{I})$

inescindible. Probaremos que Γ es una componente conexa del carcaj de Auslander-Reiten de (Q,I).

Sea $V \in \mathrm{mod}(Q,I)$ inescindible con $V | \Sigma\bar{V}$ para $\bar{V} \in \mathrm{mod}(\bar{Q},\bar{I})$ inescindible también. Por (8.7), hay una raíz n-ésima de 1 con $n = |G_{\bar{V}}|$ tal que $V \cong \bar{V}_{\omega}$.

Supongamos que $V \xrightarrow{h} W$ es flecha en el carcaj de Auslander-Reiten de (Q,I).

Tomamos una sucesión de Auslander-Reiten para $\bar{V}$ en $\mathrm{mod}(\bar{Q},\bar{I})$, $0 \to \bar{V} \xrightarrow{f} \bar{W} \xrightarrow{g} \bar{U} \to 0$. Si dicha sucesión no existe, entonces $\bar{V}$ es simple inyectivo, pero entonces $n=1$ y $V = \Sigma\bar{V}$ es también simple inyectivo.

Ahora, $0 \to V = \bar{V}_{\omega} \to W' \to (\bar{U})_{s(\omega)} \to 0$ es la sucesión de Auslander-Reiten para V, y W' es sumando de $\Sigma\bar{W}$, por (7.9).

Supongamos que $\bar{W} = \bigoplus_{i=1}^{m} \bar{W}_i$ descomposición en inescindibles. Entonces, $\Sigma\bar{W} = \Sigma \bigoplus_{i=1}^{m} \bar{W}_i = \bigoplus_{i=1}^{m} \Sigma\bar{W}_i = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{\omega^{n_i}=1} (\bar{W}_i)_{\omega}$ con $n_i = |G_{\bar{W}_i}|$. Hay una $i \in \{1,\dots,m\}$ y $\omega^{n_i} = 1$ con $W = (\bar{W}_i)_{\omega} | \Sigma\bar{W}_i$ y $W \in \Gamma$. De esta forma Γ es componente conexa.

Además, en $\mathrm{mod}(\bar{Q},\bar{I})$ hay un número finito de inescindibles no isomorfos $\bar{V}_1,\dots,\bar{V}_n$ tales que cualquier otro $\bar{V}$ inescindible es de la forma $\bar{V}_i^{g}$ para alguna $i \in \{1,\dots,n\}$ y $g \in G$ — se pueden escoger como los inescindibles no isomorfos que no se anulan en algún vértice de $A \subset \bar{Q}_0$ con $|A| = |Q_0|$ finito y $\pi A = Q_0$ —. Sean $U_1,\dots,U_m$ todos los sumandos de $\Sigma\bar{V}_i$, $i=1,\dots,n$. Sea $U \in \Gamma$, $U | \Sigma\bar{V}$ para $\bar{V} \in \mathrm{mod}(\bar{Q},\bar{I})$ inescindible; luego $\bar{V} \cong \bar{V}_i^{g}$ con $i \in \{1,\dots,n\}$, $g \in G$. Obviamente, $\Sigma\bar{V} \cong \Sigma\bar{V}_i^{g} \cong \Sigma\bar{V}_i$ y U debe ser alguna U_j. Así, Γ es finito y entonces (Q,I) es de tipo de representación finita. //

9. AUTOMORFISMOS EN CATEGORIAS DE AUSLANDER.

Como ya se esbozaba al final de la sección anterior, de particular importancia es el estudio de las relaciones entre las cubiertas del carcaj de Auslander-Reiten y las del carcaj ordinario. En esta dirección P. Gabriel propuso en la III Conferencia Internacional sobre Representaciones de Algebras, Puebla, México, 1980, la siguiente conjetura:

Para una categoría de Auslander $M \simeq \mathrm{ind}_\Lambda$, un automorfismo g que actúa libremente en los proyectivos inescindibles, actúa libremente sobre todos los Λ-módulos inescindibles.

En esta sección daremos una prueba corta de esta afirmación y mostraremos algunas de las importantes consecuencias que se pueden obtener.

Usaremos repetidamente los conceptos introducidos en la sección 2.

Sea M una categoría de Auslander, $M \cong \mathrm{ind}_\Lambda$ que es la subcategoría plena de mod Λ formada por representantes de los módulos inescindibles. Sabemos por [8], —ver (2.9)— que la categoría de Riedtmann $k(\Gamma_\Lambda)$ es una categoría de Auslander, $k(\Gamma_\Lambda) \cong \mathrm{ind}\,\Lambda_s$ donde Λ_s denotan los vértices proyectivos de Γ_Λ; además, el carcaj de Auslander-Reiten de Λ_s se identifica con Γ_Λ.

Usamos estos hechos para probar el siguiente lema.

(9.1) Lema: Sea g un automorfismo de la categoría de Auslander $M \cong \mathrm{ind}\,\Lambda$. Sea Γ_Λ el carcaj de Auslander-Reiten de Λ.

y $k(\Gamma_\Lambda) \simeq \mathrm{ind}\,\Lambda_s$ la categoría estandard asociada. Entonces:

a). g induce un automorfismo g_s de $k(\Gamma_\Lambda)$

b). Si g actúa libremente en proyectivos, entonces g_s actúa también libremente en proyectivos.

c). Si M tiene un inescindible no proyectivo X tal que $X^g \simeq X$, entonces, entonces $k(\Gamma_\Lambda)$ tiene un objeto no proyectivo Y con $Y^{g_s} = Y$.

Demostración: Recordamos que el carcaj de Auslander Γ_Λ tiene como puntos las clases de isomorfía de los Λ-módulos inescindibles y una flecha $[X] \to [Y]$ si y solo si hay un irreducible $\alpha: X \to Y$, y translación $\tau[Y] = [D\mathrm{tr}Y]$ definida para los Y no proyectivos.

Los vértices proyectivos de Γ_Λ, ie. aquellos para los que τ no está definida, corresponden con las clases de isomorfía de los proyectivos inescindibles. $g: \mathrm{ind}\,\Lambda \to \mathrm{ind}\,\Lambda$ se extiende a una equivalencia $g: \mathrm{mod}\,\Lambda \to \mathrm{mod}\,\Lambda$. Como cualquier equivalencia preserva sucesiones de Auslander-Reiten, módulos proyectivos y morfismos irreducibles, entonces g induce un automorfismo de carcajes con translación $g_s: \Gamma_\Lambda \to \Gamma_\Lambda$.

i). g mueve proyectivos si y solo si g_s lo hace.

ii). $X^g \simeq X$ si y solo si para el vértice correspondiente $[X]$, $[X]^{g_s} = [X]$.

De aquí, g_s se extiende a un automorfismo de la categoría de Riedtmann, $g_s: k(\Gamma_\Lambda) \to k(\Gamma_\Lambda)$ que satisface b) y c). //

El teorema se seguirá de (9.1) y los dos lemas siguientes.

(9.2) Lema: Sea $g: \Gamma \to \Gamma$ un automorfismo de un carcaj de Auslander-Reiten tal que $g(x)=x$, para algún $x \in \Gamma_0$. Sea $\pi: \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ la cubierta universal de Γ. Entonces existen un punto $y \in \tilde{\Gamma}_0$ y un automorfismo de carcajes con traslación $h: \tilde{\Gamma} \to \tilde{\Gamma}$ tales que:

a). $h(y)=y$

b). $\pi h = g\pi$

c). Si g actúa libremente en proyectivos también lo hace h.

Demostración: Recordamos primero la definición de $\tilde{\Gamma}$, ver [8]. Un camino en Γ es una trayectoria formada por Γ_1 y los inversos formales α^{-1} de las flechas $\alpha \in \Gamma_1$. Introducimos la relación de homotopía $\sim$ en el conjunto de caminos generada por las siguientes relaciones:

a). $\alpha\alpha^{-1} \sim e_x$ y $\alpha^{-1}\alpha \sim e_y$ para cada flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Γ, donde e_x denota el camino estacionario en x.

b). Para cada dos flechas $x_1 \xrightarrow{\alpha} x$, $x_2 \xrightarrow{\beta} x$ con x no proyectivo, definimos $\alpha\sigma\alpha \sim \beta\sigma\beta$ y $(\sigma\alpha)^{-1}\alpha^{-1} \sim (\sigma\beta)^{-1}\beta^{-1}$, donde $\tau x \xrightarrow{\sigma\alpha} x_1$ en Γ.

c). La relación $v \sim v'$ implica $wvu \sim wv'u$ siempre que estos productos tengan sentido.

La cubierta universal en el punto x, $\tilde{\Gamma}$ de Γ es el siguiente carcaj con traslación: los puntos de $\tilde{\Gamma}$ son las clases de homotopía $\overline{w}$ de caminos w de Γ que comienzan en x y terminan en algún punto $e(w) \in \Gamma_0$. Para cada flecha $\alpha \in \Gamma_1$, se pone una flecha $\overline{w} \xrightarrow{\alpha} \overline{\alpha w}$ siempre que $e(w)$ sea el punto inicial de α. Finalmente, la traslación de $\tilde{\Gamma}$ está definida por la fórmula $\tau\overline{w} = \overline{\sigma(\alpha)^{-1}\alpha w}$, donde α

es cualquier flecha que termina en $e(\omega)$ que siempre existe cuando $e(\omega)$ no es proyectivo —ya que Γ es de Auslander-Reiten—. Cuando $e(\omega)$ sea proyectivo, $\bar{\omega}$ será un punto proyectivo de $\tilde{\Gamma}$.

Procedemos ahora a definir h:

Sea $\bar{\omega}$ un vértice de $\tilde{\Gamma}$. Extendemos g a los caminos de Γ, definiendo $g(\alpha^{-1}) = g(\alpha)^{-1}$ para las flechas $\alpha \in \Gamma_1$ y definimos $h(\bar{\omega}) = \overline{g(\omega)}$.

Debemos mostrar que h no depende de la elección de ω, para ello basta probar que g preserva la homotopía. Claramente, es suficiente checar la condición b)., pero esto se sigue del hecho de que g conmuta con la translación de Γ y envía flechas en flechas. Así, h está bien definida y es una función en $\tilde{\Gamma}_0$.

Ahora, si $\bar{\omega}_1 \xrightarrow{\alpha} \bar{\omega}_2$ es una flecha en $\tilde{\Gamma}$, entonces $e(\omega_1) \xrightarrow{\alpha} e(\omega_2)$ es una flecha con $\omega_2 = \alpha\omega_1$ y $g(\alpha)$ es una flecha con $g(\omega_2) = g(\alpha)g(\omega_1)$. Esto significa que $\overline{g(\omega_1)} \xrightarrow{g(\alpha)} \overline{g(\omega_2)}$ es una flecha en $\hat{\Gamma}$ y ponemos $h(\alpha) = g(\alpha)$. Así, $h: \tilde{\Gamma} \longrightarrow \hat{\Gamma}$ es un morfismo de carcajes. Probaremos que conmuta con la translación de $\tilde{\Gamma}$.

Sea $\bar{\omega}$ un vértice no proyectivo de $\tilde{\Gamma}$, entonces $\pi(\bar{\omega}) = e(\omega)$ es no proyectivo en Γ. Luego, $\tau\bar{\omega} = \overline{\sigma(\alpha)^{-1}\alpha^{-1}\omega}$ para alguna flecha α que termina en $e(\omega)$. Entonces, $h\tau\bar{\omega} = \overline{g(\sigma(\alpha)^{-1}\alpha^{-1}\omega)} = \overline{\sigma g(\alpha)^{-1} g(\alpha)^{-1} g(\omega)} = $
$= \tau\, \overline{g(\omega)} = \tau\, h(\bar{\omega})$.

Es claro que $\pi h = g\pi$. Además, si $y = \bar{e}_x$, entonces como $g(x) = x$, $h(y) = \overline{g(e_x)} = \bar{e}_x = y$.

Asumimos que g actúa libremente en los vértices proyectivos de Γ.

Sea p un vértice proyectivo en $\tilde{\Gamma}$. Por construcción $\pi(p)$ es un vértice proyectivo de Γ. Entonces, $h(p)=p$ implicará $\pi h(p) = \pi(p) = g\pi(p)$.

Además, es claro que h es un automorfismo, ya que un levantamiento similar de g^{-1} dará h^{-1}. //

(9.3) <u>Lema</u>: Sea M una categoría de Auslander, $M \cong \operatorname{ind}\Lambda$ y supongamos que Λ es simplemente conexa (en el sentido de [8]). Entonces un automorfismo $g: M \to M$ que actúa libremente en proyectivos inescindibles, actúa libremente en todos los inescindibles.

<u>Demostración</u>: Decimos que Λ es simplemente conexa si es l.r.f. y su carcaj de Auslander-Reiten es simplemente conexo, o sea $\tilde{\Gamma}_\Lambda \xrightarrow{\pi} \Gamma_\Lambda$ es un isomorfismo de Γ_Λ y su cubierta universal $\tilde{\Gamma}_\Lambda$.

Sabemos por (2.11) que $k(\Gamma_\Lambda) \simeq M$ y por (2.10) que Γ_Λ no tiene ciclos orientados.

Asumamos que hay un Λ-módulo X inescindible y no proyectivo con $X^g \cong X$, $X \in \operatorname{ind}\Lambda$. Sabemos que g se extiende a un automorfismo $g: \operatorname{mod}\Lambda \to \operatorname{mod}\Lambda$.

Sea $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} X \to 0$ una presentación proyectiva mínima. De aquí, $P_1^g \xrightarrow{f_1^g} P_0^g \xrightarrow{f_0^g} X^g \to 0$ es también una presentación proyectiva mínima de $X \cong X^g$ y $P_0^g \cong P_0$, $P_1^g \cong P_1$. Definimos por P la suma de todos los sumandos directos no isomorfos de $P_0 \oplus P_1$; se sigue que $P^g \cong P$.

Sabemos por [1] que hay una inclusión plena

$$\Lambda \otimes_P - : \operatorname{mod} P \to \operatorname{mod}\Lambda$$ y que preserva proyectivos.

La imagen B consiste de todos los Λ-módulos Y con presentación

$Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ proyectiva mínima con $Q_1 \oplus Q_0$ un sumando de P^n para algún entero n. De aquí que $\mathcal{C}$ sea estable bajo g.

Cualquier objeto en $\mathcal{C}$ es un factor de P^n para alguna $n \in \mathbb{N}$, así $\mathrm{sop}\, Y \subset \mathrm{sop}\, P$ para $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Como Λ es l.r.f. implica que $\mathcal{C}$ tiene sólo un número finito de Λ-módulos inescindibles no isomorfos.

Sea $\Lambda_0 := \mathrm{End}_\Lambda(P)^{op}$ k-álgebra de dimensión finita con $\mathrm{mod}\,\Lambda_0 \cong \mathrm{mod}\,P$, luego Λ_0 es de tipo de representación finita. Además, es claro que g induce una equivalencia $g_0 : \mathrm{mod}\,\Lambda_0 \longrightarrow \mathrm{mod}\,\Lambda_0$ tal que:

a). g_0 actúa libremente en proyectivos inescindibles.

b). Si $\varphi : \mathrm{mod}\,\Lambda_0 \longrightarrow \mathcal{C}$ es la equivalencia dada arriba y $\varphi(X') = X$, entonces X' es inescindible no proyectivo con $X'^{g_0} = X'$.

El carcaj de Auslander-Reiten Γ_{Λ_0} de Λ_0 no tiene ciclos dirigidos, de otra forma la inclusión plena $\mathrm{mod}\,\Lambda_0 \longrightarrow \mathrm{mod}\,\Lambda$ induciría un ciclo en Γ_Λ. De aquí para todo Λ-módulo no proyectivo Y, existe un entero n con $\tau^n Y$ proyectivo.

Cualquier automorfismo preserva sucesiones de Auslander-Reiten, por tanto $(\tau Y)^{g_0} = \tau(Y^{g_0})$. En particular, $\tau^n X' = P$ proyectivo y $P^{g_0} \cong (\tau^n X')^{g_0} \cong \tau^n (X'^{g_0}) = \tau^n X' = P$ que es una contradicción. //

Ahora, el Teorema se sigue fácilmente.

(9.4) <u>Teorema</u>: Para una categoría de Auslander $M \simeq \mathrm{ind}\,\Lambda$, un automorfismo g de M que actúa libremente en los proyectivos inescindibles, actúa libremente en todos los Λ-módulos inescindibles.

<u>Demostración</u>: Asumamos que existe un inescindible no proyectivo

X tal que $X^{g} \cong X$.

Γ_Λ es el carcaj de Auslander-Reiten de Λ y $k(\Gamma_\Lambda) \cong \mathrm{ind}\,\Lambda_S$ tiene por (9.1) un automorfismo g_s que actúa libremente en los inescindibles proyectivos y fija un vértice no proyectivo x de Γ_Λ.

Por (9.2), g_s se extiende a un automorfismo $\hat{g}_s : k(\tilde{\Gamma}_\Lambda) \longrightarrow k(\tilde{\Gamma}_\Lambda)$ donde $\tilde{\Gamma}_\Lambda$ es la cubierta universal de Γ_Λ, $\hat{g}_s$ actúa libremente en vértices proyectivos y fija un vértice no proyectivo y.

Como $k(\Gamma_\Lambda)$ es categoría de Auslander, por [8] $k(\tilde{\Gamma}_\Lambda)$ también lo es. Supongamos que $k(\tilde{\Gamma}_\Lambda) \cong \mathrm{ind}\,\tilde{\Lambda}$, con $\tilde{\Lambda}$ categoría l.r.f. —ver (2.8)—. Además como habíamos observado el carcaj de Auslander-Reiten de $\tilde{\Lambda}$ se identifica con $\tilde{\Gamma}_\Lambda$ que es simplemente conexo; por tanto $\tilde{\Lambda}$ es categoría simplemente conexa. Esto contradice (9.3). //

Con este resultado podemos generalizar algunos teoremas de Gabriel [14] y los resultados de la sección 8.

Recordamos algunas definiciones de [14]. Si M es una k-categoría localmente de dimensión finita y G un grupo de k-automorfismos de M, decimos que la acción de G en M es libre si para todo $1 \neq g \in G$ y cualquier $x \in \mathrm{Ob}\,M$, $gx \neq x$; y es localmente acotada si para cada par (x,y) hay solo finitas $g \in G$ con $M(x, gy) \neq 0$.

Entonces se puede definir M/G categoría localmente de dimensión finita y un funtor cubriente $F: M \longrightarrow M/G$ tal que $Fg = F$ para $g \in G$ y es universal con esta propiedad.

(9.5) Teorema: Si H es una categoría localmente de representación finita también lo es H/G.

Demostración: Como G actúa libremente en H, actúa libremente en los proyectivos inescindibles de $\text{ind}\,H$ que es una categoría de Auslander. Por (9.4), G actúa libremente en $\text{ind}\,\Lambda$. Y el resultado se sigue del Teorema 3.6 de [14]. //

Respecto a los resultados de la sección 8 tenemos el siguiente.

(9.6) Teorema: Sea $\pi:(\tilde{Q},\tilde{I})\to(Q,I)$ cubierta definida por la acción del grupo admisible G. Y supongamos que $(\tilde{Q},\tilde{I})$ es l.r.f. Se tiene:

i). Si $V\in \text{mod}(\tilde{Q},\tilde{I})$ inescindible, G_V es trivial.

ii). $\Sigma: \text{mod}(\tilde{Q},\tilde{I})\to \text{mod}(Q,I)$ preserva inescindibles y sucesiones de Auslander-Reiten.

iii). (Q,I) también es l.r.f.

Demostración: i): $\text{ind}(\tilde{Q},\tilde{I})$ es categoría de Auslander y siendo G admisible, G actúa libremente en sus vértices proyectivos. Luego que G_V sea trivial es el contenido de (9.4).

ii): Directo de i). por (7.6) y (7.8).

iii). Cada $g\in G$ induce un automorfismo $\bar{g}=k(g): k(\tilde{Q},\tilde{I})\to k(\tilde{Q},\tilde{I})$, y por (3.8), $E=k(\pi): k(\tilde{Q},\tilde{I})\to k(Q,I)$ es funtor cubriente. Claramente, $E\bar{g}=E$ para $g\in G$. Además, el funtor cubriente $F: k(\tilde{Q},\tilde{I})\to k(\tilde{Q},\tilde{I})/G$ es universal con esta propiedad ya que G actúa libremente y es localmente acotado. Así, existe un funtor $H: k(\tilde{Q},\tilde{I})/G\to k(Q,I)$ con $E=HF$. Obviamente, H es denso ya que ambas categorías tienen los mismos objetos. Pero además por ser E y F cubientes, H es fiel y pleno. O sea, $k(\tilde{Q},\tilde{I})/G \cong k(Q,I)$ y el resultado se sigue de (9.5). //

El siguiente resultado nos será de gran utilidad, muestra ya más claramente la relación entre las cubiertas del carcaj ordinario y de las del carcaj de Auslander-Reiten.

(9.7) Lema: Sea $\pi:(\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (Q,I)$ cubierta definida por la acción del grupo admisible G. Supongamos que $(\tilde{Q},\tilde{I})$ es l.r.f. Sea Γ_Λ el carcaj de Auslander-Reiten de $\Lambda = k(Q,I)$ y $\Gamma_{\tilde{\Lambda}}$ el de $\tilde{\Lambda} = k(\tilde{Q},\tilde{I})$.

El funtor Σ induce un morfismo de carcajes con translación $\Sigma: \Gamma_{\tilde{\Lambda}} \longrightarrow \Gamma_\Lambda$ cubiente definido por la acción de G que es grupo admisible en $\Gamma_{\tilde{\Lambda}}$.

Demostración: Por (9.6), Σ es morfismo de carcajes con translación bien definido. Además, por la observación en iii). de (9.6) y el teorema 3.6 de [14], Σ es suprayectivo.

Si $g \in G$, entonces $\Sigma V = \Sigma V^g$ en Γ_Λ. Y si $\Sigma V = \Sigma U$ con $V, U \in \Gamma_{\tilde{\Lambda}}$, por (5.6), existe $g \in G$ con $V = U^g$ en $\Gamma_{\tilde{\Lambda}}$. Entonces Σ está definido por la acción de G. Además, G es admisible en $\Gamma_{\tilde{\Lambda}}$: si $g \in G$ y $U, U^g \in V^+$ en $\Gamma_{\tilde{\Lambda}}$, tendríamos en caso de que $g \neq 1$ a $\Sigma U \oplus \Sigma U^g = (\Sigma U)^2$ en el término central de la sucesión de Auslander-Reiten que comienza en ΣV en Γ_Λ. Pero por (9.6) Λ es l.r.f. y entonces esto no es posible por un resultado bien conocido [5] — ver otra demostración en [13] —. //

10. LA CUBIERTA UNIVERSAL DE UNA CATEGORIA ESTANDAR.

En esta parte del trabajo trataremos de las relaciones entre la cubierta universal del carcaj de Auslander-Reiten y de la cubierta universal del carcaj ordinario de una categoría localmente de representación finita.

Veremos que la construcción de la cubierta universal que dimos en la sección 4 coincide en ciertos casos importantes con la dada por Gabriel en [14]: si N es una categoría localmente de representación finita y $F: k(\tilde{\Gamma}_N) \longrightarrow \operatorname{ind} N$ el funtor cubriente asociado a la cubierta universal $\tilde{\Gamma}_N$ del carcaj de Auslander-Reiten de N, llamamos M a la subcategoría plena de los proyectivos de $k(\tilde{\Gamma}_N)$ de forma que la restricción de F, $F|: M \longrightarrow N$ es cubriente. La categoría M es la cubierta universal de N.

(10.1) <u>Definición</u> [8]: Una k-categoría localmente de dimensión finita $\mathcal{C}$ se llama libre de cuadrados si los espacios $r\mathcal{C}(a,b)/r^2\mathcal{C}(a,b)$ tienen dimensión ≤ 1 sobre k para toda pareja $a, b \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, donde $r\mathcal{C}$ denota el radical de la categoría $\mathcal{C}$.

Si $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor cubriente y $\mathcal{D}$ es libre de cuadrados, obviamente $\mathcal{C}$ también lo es.

(10.2) <u>Definición</u>: Sea $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtor cubriente, llamaremos $\mathcal{G}(F)$ al grupo de automorfismos de $\mathcal{C}$ que preservan F.

Un grupo de equivalencias G de $\mathcal{C}$ se dice que actúa libremente en flechas de $\mathcal{C}$ si para cualquier $g \in G$ tal que $gx = x$

para algún $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, se tiene $g|_{\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} = id$ y para cualquier $\alpha \in r\mathcal{C}(y,z)$ con $0 \neq \bar{\alpha} \in r\mathcal{C}(y,z)/r^2\mathcal{C}(y,z)$ se tiene $g\alpha=\alpha$.

Recordemos que para una categoría $\mathcal{C}$ localmente de dimensión finita hay asociado un carcaj localmente finito Q, y que $\mathcal{C}$ es una categoría conexa si y solo si Q es conexo.

(10.3) <u>Proposición</u>: Sea $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ un funtor cubriente entre categorías libres de cuadrados y $\mathcal{C}$ conexa, entonces $\mathcal{G}(F)$ actúa libremente en las flechas de $\mathcal{C}$.

<u>Demostración</u>: Sea $g\in\mathcal{G}(F)$ tal que $gx=x$ para algún $x\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Sea Q el carcaj asociado a $\mathcal{C}$, $y\to x$ flecha en Q. Tenemos entonces $r\mathcal{C}(y,x)/r^2\mathcal{C}(y,x)\neq 0$. Asumamos que $gy\neq y$; como $gx=x$ y g es una equivalencia de $\mathcal{C}$, tenemos también $r\mathcal{C}(gy,x)/r^2\mathcal{C}(gy,x)\neq 0$. Pero siendo F un funtor cubriente, (ver [8], 3.3):

$$r\mathcal{C}(y,x)/r^2\mathcal{C}(y,x) \oplus r\mathcal{C}(g(y),x)/r^2\mathcal{C}(g(y),x) \hookrightarrow \bigoplus_{Fz=Fy} r\mathcal{C}(z,x)/r^2\mathcal{C}(z,x) \cong \frac{r\mathcal{D}(Fy,Fx)}{r^2\mathcal{D}(Fy,Fx)}$$

que contradice el hecho de que este último espacio tenga dimensión menor o igual a 1. Por tanto $gy=y$ y siendo Q conexo, $g|_{\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}=id$.

Ahora, tomamos $\alpha\in r\mathcal{C}(z,y)$ tal que $0\neq\bar{\alpha}\in r\mathcal{C}(z,y)/r^2\mathcal{C}(z,y)$. Como g es la identidad en objetos, $0\neq \overline{g\alpha}\in r\mathcal{C}(z,y)/r^2\mathcal{C}(z,y)$ que tiene dimensión 1 sobre k. Así, existen $\lambda\in k^*$, $m\in r^2\mathcal{C}(z,y)$ con $g\alpha=\lambda\alpha+m$. Aplicamos a esta identidad el funtor F, $F\alpha=Fg\alpha=\lambda F\alpha+Fm$. Usando otra vez que F es cubriente, $(1-\lambda)F\alpha=Fm\in r^2\mathcal{D}(Fz,Fy)$ y $0\neq \overline{F\alpha}\in r\mathcal{D}(Fz,Fy)/r^2\mathcal{D}(Fz,Fy)$. Por tanto $\lambda=1$ y $Fm=0$. Pero esto implica que $m=0$ y $g\alpha=\alpha$. //

Dado el funtor cubriente $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ decimos que un grupo de automorfismos G de $\mathcal{C}$, define F en objetos cuando $Fx=Fy$ para dos objetos $x,y\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ si y solo si existe un elemento $g\in G$ con $gx=y$.

Veremos que sucede cuando $\mathcal{G}(F)$ define a F en objetos. Esta situación aparecerá más tarde.

(10.4) Proposición: Sea $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ un funtor cubriente entre categorías libres de cuadrados. Asumamos que $\mathcal{C}$ es conexa y que $\mathcal{G}(F)$ define a F en objetos. Sea Q el carcaj asociado a $\mathcal{D}$ y $\bar{Q}$ el asociado a $\mathcal{C}$. Existe entonces un morfismo de carcajs $\pi:\bar{Q}\to Q$ y dos funtores $r:k\bar{Q}\to\mathcal{C}$ y $\rho:kQ\to\mathcal{D}$ tal que

$$\begin{array}{ccccc} k\bar{Q} & \xrightarrow{r} & \mathcal{C} & \to & 0 \\ {\scriptstyle k\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} & & \\ kQ & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{D} & \to & 0 \end{array}$$

es exacto y conmutativo.

Demostración: Definimos $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}\subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\times\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ de forma que $(x,y)\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ si y solo si $r\mathcal{C}(x,y)/r^2\mathcal{C}(x,y)\neq 0$. Observemos que si $g\in\mathcal{G}(F)$ y $(x,y)\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$, entonces $(gx,gy)\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$. En esta forma $\mathcal{G}(F)$ actúa en $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ e induce una partición $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}=\bigcup_{(x,y)\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}}[(x,y)]^{\mathcal{G}(F)}$. Para una clase

θ de esta partición escogemos un representante $(x,y)\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ tal que $\theta=[(x,y)]_{\mathcal{G}(F)}$ y para esta selección tomamos un $\alpha_{(x,y)}\in r\mathcal{C}(x,y)$ con $0\neq\bar{\alpha}_{(x,y)}\in r\mathcal{C}(x,y)/r^2\mathcal{C}(x,y)$. Para cualquier $g\in\mathcal{G}(F)$ ponemos $\alpha_{(gx,gy)}=g\alpha_{(x,y)}$ que es también irreducible. Esto es una buena definición: en efecto, si $(gx,gy)=(hx,hy)$ para $g,h\in G$, tendríamos $x=h^{-1}gx$ y por (10.3) $h^{-1}g\,\alpha_{(x,y)}=\alpha_{(x,y)}$, o sea $g\alpha_{(x,y)}=h\alpha_{(x,y)}$. De esta forma hemos definido un único $\alpha_{(x,y)}\in\mathcal{C}(x,y)$ irreducible para cada $(x,y) \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$.

Como $\mathcal{C}$ es libre de cuadrado, si $r\mathcal{C}(x,y)/r^2\mathcal{C}(x,y) \neq 0$, entonces $\overline{d_{(x,y)}}$ es una base del espacio. Así, $r: k\bar{Q} \longrightarrow \mathcal{C}$, $(x\to y) \longmapsto d_{(x,y)}$ está bien definido y es un funtor pleno y denso.

Como F es cubriente, para cada $(x,y) \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ entonces $\overline{Fd_{(x,y)}}$ es una base de $r\mathcal{D}(Fx,Fy)/r^2\mathcal{D}(Fx,Fy)$ y cuando este espacio no es trivial, se tiene $(x,y) \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$. Ponemos $\rho: kQ \longrightarrow \mathcal{D}$, $(Fx\to Fy) \longmapsto Fd_{(x,y)}$ que probaremos que está bien definido. Sea $a \to b$ una flecha en Q. Tomamos $x \in \bar{Q}_0$ con $Fx=a$. Como F da una biyección $\bigoplus_{Fy=b} r\mathcal{C}(x,y)/r^2\mathcal{C}(x,y) \xrightarrow{\cong} r\mathcal{D}(Fx,b)/r^2\mathcal{D}(Fx,b)$ entonces hay una única $y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ con $r\mathcal{C}(x,y)/r^2\mathcal{C}(x,y) \neq 0$. Así, $(x,y) \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ y $Fd_{(x,y)}$ tiene sentido. Pero si $(x',y') \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ con $Fx'=a$, $Fy'=b$, como $\mathcal{G}(F)$ define a F en objetos, existe una $g \in \mathcal{G}(F)$ con $gx=x'$. Ahora tenemos también $(x',y'')=(gx,gy) \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$, o equivalentemente $r\mathcal{C}(x',y'')/r^2\mathcal{C}(x',y'') \neq 0$, por unicidad $y'=y''$. Esto significa que $(x',y')=(gx,gy)$ y de aquí $Fd_{(x',y')} = Fd_{(gx,gy)} = Fg\,d_{(x,y)} = Fd_{(x,y)}$. Esto muestra que ρ está bien definida y es también denso y pleno.

Obviamente, $\pi: \bar{Q} \longrightarrow Q$ tal que $(x\to y) \longmapsto (Fx \to Fy)$ es morfismo de carcajes tal que su extensión $k\pi: k\bar{Q} \longrightarrow kQ$ satisface $Fr = \rho k\pi$. ▮

Los morfismos r, ρ que acabamos de definir, producen ideales admisibles $I, \bar{I}$ con la propiedad que $\mathcal{C} \cong k(\bar{Q},\bar{I})$ inducido por r y $\mathcal{D} \cong k(Q,I)$ inducido por ρ. De manera que $\pi: (\bar{Q},\bar{I}) \longrightarrow (Q,I)$ es un morfismo de carcajes con relaciones tal que $F = k(\pi)$ inducido por π.

(10.5) <u>Proposición</u>: Con las mismas hipótesis y notación que en (10.4)
Si $\mathcal{G}(\pi)$ denota el grupo de automorfismos de $(\bar{Q},\bar{I})$ que preserva a π, entonces: a). $\mathcal{G}(F)\cong\mathcal{G}(\pi)$

b). $\pi:(\bar{Q},\bar{I})\longrightarrow(Q,I)$ es un morfismo cubriente definido por la acción de $\mathcal{G}(F)$.

<u>Demostración</u>: a): Sea $g\in\mathcal{G}(\pi)$, hay un único funtor inducido $\varphi(g)$ tal que

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \bar{I} & \longrightarrow & k\bar{Q} & \xrightarrow{r} & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle kg} & & \downarrow{\scriptstyle kg} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(g)} & & \\ 0 & \longrightarrow & \bar{I} & \longrightarrow & k\bar{Q} & \xrightarrow{r} & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmuta.

Obviamente, $\varphi(g)$ es una autoequivalencia de $\mathcal{C}$.

Como $\pi g=\pi$, entonces $k\pi\circ kg=k\pi$ para los morfismos inducidos y $F\varphi(g)r=Frkg=\rho k\pi kg=\rho k\pi=Fr$ y siendo r denso y pleno, $F\varphi(g)=F$. Así, $\varphi(g)\in\mathcal{G}(F)$ y φ es también morfismo de grupos.

Tomemos $\bar{g}\in\mathcal{G}(F)$ arbitraria. Observemos que si $x\to y$ es flecha en $\bar{Q}$, como $\bar{g}$ es equivalencia en $\mathcal{C}$, hay una única flecha $\bar{g}x\to\bar{g}y$ en $\bar{Q}$. De esta forma $g:\bar{Q}\longrightarrow\bar{Q}$ con $g(x\to y)=\bar{g}x\to\bar{g}y$ es un morfismo de carcajes bien definido.

Además, para $x\xrightarrow{\alpha}y$ en $\bar{Q}$, tenemos $kg(\alpha)=\bar{g}x\longrightarrow\bar{g}y$ y $rkg(\alpha)=$
$=\alpha_{(\bar{g}x,\bar{g}y)}=\bar{g}\alpha_{(x,y)}=\bar{g}r(\alpha)$, que significa que $rkg=\bar{g}r$. Necesitamos probar que g preserva el ideal $\bar{I}$. En efecto, sea $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i\in\bar{I}(x,y)$ con $u_i=l_{in_i}\cdots l_{i1}$ camino dirigido y $x_{ij}\xrightarrow{l_{ij}}x_{i(j+1)}$ una flecha.

Por tanto, $r\left(kg\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i r\left(g(l_{in_i})\cdots g(l_{i1})\right)=$

$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\alpha_{(\bar{g}y,\bar{g}x_{in_i})}\cdots\alpha_{(\bar{g}x_{i2},\bar{g}x)}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\bar{g}(\alpha_{(y,x_{in_i})})\cdots\bar{g}(\alpha_{(x_{i2},x)})=$

$=\bar{g}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\alpha_{(y,x_{in_i})}\cdots\alpha_{(x_{i2},x)}\right)=\bar{g}r\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_i\right)=0.$ Así, $kg\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_i\right)\in\bar{I}(gx,gy)$

y $g:(\bar{Q},\bar{I})\longrightarrow(Q,I)$ es un morfismo de carcajes con relaciones.

Además, si $x\xrightarrow{l}y$ es flecha en $\bar{Q}$, $\pi g(l)=\pi(\bar{g}x\longrightarrow\bar{g}y)=f\bar{g}x\longrightarrow f\bar{g}y=$
$=fx\longrightarrow fy=\pi(l)$. Entonces $g\in\mathcal{G}(\pi)$ con $\bar{g}=\varphi(g)$.

Si hay otra $g'\in\mathcal{G}(\pi)$ con $\bar{g}=\varphi(g')$, entonces g y g' son iguales en flechas en otras palabras $g=g'$ y φ es biyectiva. $\mathcal{G}(\pi)\overset{\varphi}{=}\mathcal{G}(f)$.

b): Probaremos primero que $\mathcal{G}(\pi)$ define a π. Como $\mathcal{G}(f)$ define a f en objetos, entonces $\mathcal{G}(\pi)$ define a π en vértices.

Asumamos que $x_1\xrightarrow{l_1}y_1$, $x_2\xrightarrow{l_2}y_2$ son dos flechas en $\bar{Q}$ con $\pi(l_1)=\pi(l_2)$. Tenemos que $f\,d_{(x_1,y_1)}=\rho\pi(l_1)=\rho\pi(l_2)=f\,d_{(x_2,y_2)}$. Entonces hay alguna $\bar{g}\in\mathcal{G}(f)$ tal que $x_2=\bar{g}x_1$. Como $\bar{g}$ es equivalencia hay un morfismo irreducible de $x_2=\bar{g}x_1$ a $\bar{g}y_1$, pero $f\bar{g}y_1=fy_1=fy_2$. Como f es cubriente, tendremos $y_2=\bar{g}y_1$. Así, $x_2\xrightarrow{l_2}y_2=\bar{g}x_1\longrightarrow\bar{g}y_1$ en $\bar{Q}$. Sea $g\in\mathcal{G}(\pi)$ el elemento correspondiente a $\bar{g}$, entonces $g(l_1)=\bar{g}x_1\longrightarrow\bar{g}y_1=l_2$.

Por otra parte, si $g(l_1)=l_2$, $l_2=\bar{g}x_1\longrightarrow\bar{g}y_1$ para $\bar{g}\in\mathcal{G}(f)$ y $\pi(l_2)=$ $f\bar{g}x_1\longrightarrow f\bar{g}y_1=fx_1\longrightarrow fy_1=\pi(l_1)$. Así, la acción de $\mathcal{G}(\pi)$ define a π.

Ya sabemos también que $\pi:(\bar{Q},\bar{I})\longrightarrow(Q,I)$ es un morfismo de carcajes con relaciones. Para probar que es cubierta, basta probar que $I\subset\pi(\bar{I})$.

Sea $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i\in I(x,y)$ relación. Escojamos $\bar{x}\in\bar{Q}_0$ con $\pi\bar{x}=x$. Como π está definido por la acción de $\mathcal{G}(\pi)$, sabemos por (3.2) que hay un único camino v_i de $\bar{x}$ a $\bar{y}_i\in\bar{Q}_0$ con $\pi v_i=u_i$ para $i=1,\dots,n$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $1=n_0<n_1<\dots<n_t=n+1$ de forma que para dos $j,j'\in\{n_i,\dots,n_{i+1}-1\}$, $\bar{y}_j=\bar{y}_{j'}$ y los $\bar{y}_i$ en diferentes intervalos son diferentes.

Definamos $\phi_{\bar{y}_{n_j}} = \sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} \lambda_i r(v_i) \in k(\tilde{Q},\bar{I})(\bar{x},\bar{y}_{n_j})$ para cada $j=1,\ldots,t$.

Así, $(\phi_{\bar{y}_{n_j}})_{j=1}^{t} \in \bigoplus_{F\bar{y}=y} k(\tilde{Q},\bar{I})(\bar{x},\bar{y}_{n_j})$ con la propiedad de que

$$\sum_{j=1}^{t} F\phi_{\bar{y}_{n_j}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Fr(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho\pi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho(\mu_i) = \rho\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i\Big) = 0.$$

Como F es cubriente, $\phi_{\bar{y}_{n_j}} = 0$ para cada $j=1,\ldots,t$. Esto significa que $\sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} \lambda_i v_i \in \bar{I}(\bar{x},\bar{y}_{n_j})$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i = \sum_{j=1}^{t} \pi\Big(\sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} \lambda_i v_i\Big) \in \pi(\bar{I})$.

Lo que prueba el resultado. //

Fijemos ahora una categoría Λ localmente de representación finita y sea Γ el carcaj de Auslander-Reiten de Λ. Sabemos que Γ es el carcaj asociado a la categoría $\operatorname{ind}\Lambda$, y que hay algún ideal J con $\operatorname{ind}\Lambda \cong k(\Gamma,J)$. Tomemos $p:(\tilde{\Gamma},\tilde{J}) \longrightarrow (\Gamma,J)$ la cubierta universal de (Γ,J). Por P_Λ denotemos la subcategoría plena de los proyectivos de $\operatorname{ind}\Lambda$, y por $\mathcal{C}$ la subcategoría plena de $k(\tilde{\Gamma},\tilde{J})$ tal que $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ si y solo si $px \in P_\Lambda$. La situación es:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \hookrightarrow & k(\tilde{\Gamma},\tilde{J}) \\ {\scriptstyle \bar{F}}\,\downarrow & & \downarrow\,{\scriptstyle F = k(p)} \\ P_\Lambda & \hookrightarrow & \operatorname{ind}\Lambda \cong k(\Gamma,J) \end{array}$$

donde F es el funtor inducido por p que sabemos que es cubriente y $\bar{F}$ es la restricción de F a $\mathcal{C}$, que está bien definido ya que P_Λ es subcategoría plena de $\operatorname{ind}\Lambda$. Claramente, $\bar{F}$ es también funtor cubriente.

Obviamente, estamos asumiendo que Λ es inescindible, que implica que P_Λ y $\mathcal{C}$ son conexas. Como Λ es l.r.f., entonces $P_\Lambda \cong \Lambda$ es categoría libre de cuadrados — ya que no puede haber flechas dobles en el carcaj asociado a Λ —. Como $\bar{F}$ es cubriente, $\mathcal{C}$ también es libre de cuadrados. Para poder aplicar a esta situación (10.4) y (10.5) solo necesitamos probar:

(10.6) <u>Lema</u>: $\mathcal{G}(F)$ define a $\bar{F}$ en objetos.

<u>Demostración</u>: Sean $x, y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ dos objetos con $\bar{F}x = \bar{F}y$. Por tanto $Fx = Fy$. Por definición de la cubierta universal, hay un automorfismo de carcajes $g: (\tilde{\Gamma}, \tilde{J}) \longrightarrow (\tilde{\Gamma}, \tilde{J})$ con $g \in \mathcal{G}(p)$ y tal que $g(x) = y$. Entonces, $k(g): k(\tilde{\Gamma}, \tilde{J}) \longrightarrow k(\tilde{\Gamma}, \tilde{J})$ es una equivalencia con $F k(g) = k(p) k(g) = k(p) = F$, o sea $k(g) \in \mathcal{G}(F)$ y $k(g)(x) = y$.

Definimos $\bar{g}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ la restricción de $k(g)$ a $\mathcal{C}$. Si $x \in \mathcal{C}$, entonces $Fx \in P_\Lambda$, esto implica que $F k(g)(x) = Fx \in P_\Lambda$ y $\bar{g}$ está bien definida. Por ser $\mathcal{C}$ plena, obviamente $\bar{g}$ es equivalencia tal que $\bar{F}\bar{g} = \bar{F}$ con $\bar{g}(x) = y$. ∎

Sea Q el carcaj de Λ y $\bar{Q}$ el de $\mathcal{C}$. Por el anterior, sabemos que hay ideales I de Q y $\bar{I}$ de $\bar{Q}$ y un morfismo de carcajes con relaciones $\bar{\pi}: (\bar{Q}, \bar{I}) \longrightarrow (Q, I)$ tal que:

$$\begin{array}{ccccc} k(\bar{Q}, \bar{I}) \cong & \mathcal{C} & \hookrightarrow & k(\tilde{\Gamma}, \tilde{J}) \\ {\scriptstyle k(\bar{\pi})}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle \bar{F}} & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ k(Q, I) \cong & P_\Lambda & \hookrightarrow & \mathrm{ind}\,\Lambda \end{array} \quad \text{conmuta.}$$

Mostraremos que en algunos casos de importancia, $\bar{\pi}: (\bar{Q}, \bar{I}) \longrightarrow (Q, I)$ resulta ser cubierta universal.

(10.7) <u>Definición</u> [8]: Sea Λ una k-categoría localmente de representación finita y Γ su carcaj de Auslander Reiten. Λ se llama estandar si y solo si $\mathrm{ind}\,\Lambda \cong k(\Gamma)$.

La relevancia de las categorías estandar queda de manifiesto a través de los resultados de [8], —ver también la siguiente sección—.

Nuestro principal resultado aquí, muestra que la cubierta universal del carcaj ordinario de una categoría estandar, puede construirse a partir del carcaj de Auslander-Reiten de la categoría. Además, esta cubierta universal resulta sin ciclo dirigido.

(10.8) Teorema: Sea Λ una categoría estandar y Γ su carcaj de Auslander-Reiten. Sea $p: \hat{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ la cubierta universal de este carcaj con translación. Entonces existe un ideal admisible I con $\Lambda \cong k(Q,I)$ de forma que la cubierta universal $\pi: (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (Q,I)$ satisface que el siguiente cuadrado es un pullback:

$$\begin{array}{ccc} k(\tilde{Q},\tilde{I}) & \longrightarrow & k(\hat{\Gamma}) \\ {\scriptstyle k(\pi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k(p)} \\ k(Q,I) & \longrightarrow & k(\Gamma). \end{array}$$

Además, $\tilde{Q}$ no tiene ciclo dirigidos.

Demostración: Hemos construido un ideal admisible I con $\Lambda \cong k(Q,I)$ y $\bar{\pi}: (\bar{Q},\bar{I}) \longrightarrow (Q,I)$ una cubierta de forma que el siguiente cuadrado es un pullback:

$$\begin{array}{ccc} k(\bar{Q},\bar{I}) & \longrightarrow & k(\hat{\Gamma}) \\ {\scriptstyle k(\bar{\pi})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k(p)} \\ k(Q,I) & \longrightarrow & k(\Gamma) \cong \operatorname{ind}\Lambda. \end{array}$$

Mostraremos que $\bar{\pi}: (\bar{Q},\bar{I}) \longrightarrow (Q,I)$ es cubierta universal.

Sea $\pi: (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (Q,I)$ la cubierta universal. Por (3.4) hay un morfismo cubriente $\pi': (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (\bar{Q},\bar{I})$ con $\bar{\pi}\pi' = \pi$.

Supongamos que π' está definido por la acción del grupo H.
Como (Q,I) es l.r.f., por (5.7) $(\tilde{Q},\tilde{I})$ también es l.r.f. Sean ahora $\Gamma_{\tilde{\Lambda}}$ el carcaj de Auslander. Reiten de $\tilde{\Lambda}=k(\tilde{Q},\tilde{I})$ y $\Gamma_{\bar{\Lambda}}$ el de $\bar{\Lambda}=k(\bar{Q},\bar{I})$.
Por (9.7), se tiene un morfismo cubriente de carcaje con translación $\Sigma: \Gamma_{\tilde{\Lambda}} \longrightarrow \Gamma_{\bar{\Lambda}}$ definido por la acción de H que es admisible en $\Gamma_{\tilde{\Lambda}}$.
Como Λ es l.r.f., $k(\Gamma)\cong \operatorname{ind}\Lambda$ es una categoría de Auslander, por (2.9) en [ ], $k(\tilde{\Gamma})$ también lo es. Por (2.6), (2.7) y (2.4) de [ ], $k(\tilde{\Gamma})$ es la categoría de inescindibles de la subcategoría plena de sus vértices proyectivos, que es precisamente $\tilde{\Lambda}$. Así, $k(\tilde{\Gamma})\cong \operatorname{ind}\tilde{\Lambda}$ y el carcaj de Auslander-Reiten de $\tilde{\Lambda}$ se identifica con $\tilde{\Gamma}$ — por ser el carcaj asociado a la categoría —, o sea $\tilde{\Gamma}=\Gamma_{\tilde{\Lambda}}$. Pero este carcaj es simplemente conexo y entonces $\Sigma: \Gamma_{\tilde{\Lambda}} \longrightarrow \Gamma_{\bar{\Lambda}}=\tilde{\Gamma}$ es la identidad. Esto implica que H es trivial y $\pi':(\tilde{Q},\tilde{I})\longrightarrow(\bar{Q},\bar{I})$ es la identidad lo que equivale a decir que $\bar{\pi}:(\bar{Q},\bar{I})\longrightarrow(Q,I)$ es la cubierta universal.

Como $\tilde{\Gamma}$ no tiene ciclos orientados y la inclusión $k(\bar{Q},\bar{I})\longrightarrow k(\tilde{\Gamma})$ es fiel, $\bar{Q}$ tampoco tiene ciclos orientados. //

Observemos que por (6.10) dado cualquier ideal admisible I' con $\Lambda\cong k(Q,I')$, su cubierta universal $(\tilde{Q}',\tilde{I}')\xrightarrow{\pi'}(Q,I')$ en caso de no tener ciclos dirigidos sirve para llenar el cuadrado conmutativo de (10.8).

Finalmente, recordemos que en la sección 6 conjeturábamos que dado un carcaj con relaciones (Q,I) que satisface las condiciones (C) y (D) tiene una cubierta sin ciclos dirigidos. Esta conjetura es cierta si $k(Q,I)$ es estandar.

(10.9) <u>Lema</u>: Sea (Q,I) un carcaj con relaciones que satisface (D) y (C) y tal que $k(Q,I)$ es estandar. Entonces si $\pi: (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (Q,I)$ es su cubierta universal, $\tilde{Q}$ no tiene ciclos dirigidos.

<u>Demostración</u>: Por (10.8) existe un ideal admisible I' en kQ con $k(Q,I) \cong k(Q,I')$, de forma que $\pi': (\tilde{Q}', \tilde{I}') \longrightarrow (Q,I')$ la cubierta universal es tal que $\tilde{Q}'$ no tiene ciclos dirigidos. Por (6.2) y (6.8) se tiene que $\tilde{Q}' = \tilde{Q}$. //

11. CATEGORIAS SCHURIAN Y ESTANDAR.

En esta sección estudiaremos algunas relaciones entre las categorías estandar y las schurian. Caracterizaremos por medio de estos conceptos a las categorías cuyos carcajes ordinarios no tienen ciclos dirigidos. También se caracteriza a las categorías simplemente conexas a través de propiedades intrínsecas a la categoría misma, sin hacer referencia a su carcaj de Auslander-Reiten.

Por la observación en (2.5) es claro que una categoría Λ es estandar si y solo si se pueden "elegir irreducibles", esto es hay una familia de representantes $\{M_i\}_{i\in I}$ de los módulos inescindibles y una función φ que a cada flecha $[M_i] \xrightarrow{\alpha} [M_j]$ en Γ_Λ le asocia un morfismo irreducible $\varphi(\alpha): M_i \longrightarrow M_j$ de tal manera que para toda $i\in I$,
$0 \to D\mathrm{tr}M_i \xrightarrow{(\varphi(\alpha_j))} \bigoplus_{j=1}^{t} M_j \xrightarrow{(\varphi(\beta_j))} M_i \to 0$ es una sucesión de Auslander-Reiten, donde $\{M_j \mid j=1,\dots,t\}$ son los representantes de $[M_i]^-$ y
$[D\mathrm{tr}M_i] \xrightarrow{\alpha_j} [M_j] \xrightarrow{\beta_j} [M_i]$ son las flechas correspondientes en Γ_Λ.
Por medio de esta identificación, podemos considerar $k(\Gamma_\Lambda) = \mathrm{ind}\,\Lambda$ la subcategoría plena de $\mathrm{mod}\,\Lambda$ de los representantes $\{M_i\}_{i\in I}$. Así, dada una flecha $M_i \xrightarrow{\alpha} M_j$ en Γ_Λ, su clase $\bar{\alpha}$ en $k(\Gamma_\Lambda)$ será precisamente el irreducible $\varphi(\alpha)$. Con esta convención probaremos el siguiente Lema.

(11.1) <u>Lema</u>: Sea Λ una categoría estandar y sean A, B Λ-módulos inescindibles. Para cada $n\in\mathbb{N}$, llamamos L_n al subespacio de $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$ generado por las clases de caminos de longitud n en Γ_Λ. Entonces, $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L_n$.

Demostración: Definimos $\varphi: \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L_n \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$.
$$(f_s)_{s\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{s\in\mathbb{N}} f_s$$

Claramente, basta probar que φ es inyectiva. Supongamos $\sum_{s\in\mathbb{N}} f_s = 0$.
Probaremos $f_s = 0$ para $s\in\mathbb{N}$, por inducción sobre s.

En general tenemos $f_s = \sum_{i=1}^{n_s} \lambda_{si}\, \bar{u}_{si}$ con u_{si} camino de longitud s en Γ_Λ.
Así, $\sum_{i=1}^{n_1} \lambda_{1i}\, u_{1i} + \sum_{s>1} \sum_{i=1}^{n_s} \lambda_{si}\, u_{si}$ está en el ideal de malla que es admisible. Por tanto $\lambda_{1i}=0$, $i=1,\dots,n_1$ y $f_1=0$.

Supongamos $s>1$ y $f_1=\dots=f_{s-1}=0$.

Sean $A \xrightarrow{d_i} C_i$, $i=1,\dots,m$ las flechas que salen de A. Entonces,
$u_{si} = u'_{(s-1)i}\, d_{\sigma(i)}$ y ${}_s\gamma_j = \sum_{i \text{ con } \sigma(i)=j} \lambda_i u_{si} = \left(\sum_{i \text{ con } \sigma(i)=j} \lambda_i u'_{(s-1)i}\right) d_j = {}_s\gamma'_j\, d_j$
Si llamamos ${}_s\gamma'_j = \sum_{i \text{ con } \sigma(i)=j} \lambda_i u'_{(s-1)i}$. También, $\gamma_j = \sum_{s\in\mathbb{N}} {}_s\gamma_j$ y $\gamma'_j = \sum_{s\in\mathbb{N}} {}_s\gamma'_j$.

Siendo A estandar, $A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\bar{d}_1\\ \vdots \\ \bar{d}_m\end{pmatrix}} \bigoplus_{i=1}^m C_i \xrightarrow{(\bar{\beta}_1,\dots,\bar{\beta}_m)} T = \tau^{-1}A$ es sucesión de Auslander Reiten, donde $\beta_i = \sigma^{-1} d_i$.

Como $(\bar{\gamma}'_1,\dots,\bar{\gamma}'_m): \bigoplus_{i=1}^m C_i \longrightarrow B$ con $\sum_{i=1}^m \bar{\gamma}'_i \bar{d}_i = \sum_{i=1}^m \bar{\gamma}_i = \sum_{s\in\mathbb{N}} f_s = 0$,
existe $h: T \to B$ con $\bar{\gamma}'_i = h\bar{\beta}_i$ para toda $i=1,\dots,m$.

Ponemos $h = \sum_{j=1}^t \mu_j \bar{v}_j$ con v_j camino de longitud l_j, y podemos suponer que $l_1,\dots,l_{t'} \leq s-2$ y son todos los de esta longitud.
Como $0 = \bar{\gamma}'_i - h\bar{\beta}_i = \sum_{r=1}^{s} {}_r\bar{\gamma}'_i - \sum_{j=1}^{t'} \mu_j \bar{v}_j \bar{\beta}_i + \sum_{r>s} {}_r\bar{\gamma}'_i - \sum_{j=t'+1}^{t} \mu_j \bar{v}_j \bar{\beta}_i$,
por hipótesis de inducción ${}_s\bar{\gamma}'_i = \sum_{j=1}^{t''} \mu_j \bar{v}_j \bar{\beta}_i$ donde $l_1 = \dots = l_{t''} = s-2$ y son todos los de esta longitud. Así, ${}_s\bar{\gamma}_i = {}_s\bar{\gamma}'_i \bar{d}_i = \sum_{j=1}^{t''} \mu_j \bar{v}_j \bar{\beta}_i \bar{d}_i$
y $f_s = \sum_{i=1}^{n_s} \lambda_{si} \bar{u}_{si} = \sum_{i=1}^m \sum_{j \text{ con } \sigma(j)=i} \lambda_j \bar{u}_{sj} = \sum_{i=1}^m {}_s\bar{\gamma}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{t''} \mu_j \bar{v}_j \bar{\beta}_i \bar{d}_i\right) =$
$$= \left(\sum_{j=1}^{t''} \mu_j \bar{v}_j\right)\left(\sum_{i=1}^m \bar{\beta}_i \bar{d}_i\right) = 0 \,.\ //$$

La siguiente Proposición, es un resultado similar a (6.6) donde se dá una base multiplicativa formada por clases de caminos del carcaj ordinario, ahora los caminos están en el carcaj de Auslander.

(11.2) <u>Proposición</u>: Sea Λ categoría estandar. Para cada dos projectivos inescindibles P, Q existe una familia de caminos $u^{(1)}_{P,Q}, \ldots, u^{(n_{P,Q})}_{P,Q}$ en Γ_Λ tal que si $\varepsilon^{(i)}_{P,Q} = \overline{u^{(i)}_{P,Q}}$ su clase en $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q)$, $\{\varepsilon^{(i)}_{P,Q} \mid i=1,\ldots,n_{P,Q}\}$ es base de $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q)$. Además, dado un tercer projectivo T y dos elementos de las respectivas bases, $\varepsilon^{(i)}_{P,Q}, \varepsilon^{(j)}_{Q,T}$, existe $l \in \{1,\ldots,n_{P,T}\}$ tal que $\varepsilon^{(j)}_{Q,T}\,\varepsilon^{(i)}_{P,Q} = c\,\varepsilon^{(l)}_{P,T}$ con $c \in k$.

<u>Demostración</u>: Como Λ es l.r.f., $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q)$ es uniserial sobre $\mathrm{End}_\Lambda(P)$ sin pérdida de generalidad. Como en (6.6) debe haber un camino δ de P en Q en Γ_Λ de forma que $\bar\delta \notin \mathrm{rad}_{\mathrm{End}_\Lambda(P)} \mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q)$ y un ciclo w en P en Γ_Λ con $\bar w \notin \mathrm{rad}^2 \mathrm{End}_\Lambda(P)$. Definimos $u^{(i)}_{P,Q} = \delta w^i$, $i=0,\ldots,n_{P,Q}$ hasta donde $\varepsilon^{(i)}_{P,Q} = \overline{u^{(i)}_{P,Q}} \neq 0$. Como en (6.6), $\{\varepsilon^{(i)}_{P,Q} \mid i=1,\ldots,n_{P,Q}\}$ es base de $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q)$. La propiedad multiplicativa se sigue directamente de (11.1) debido a que todos los elementos de la base construida tienen longitudes diferentes. //

El siguiente resultado es importante.

(11.3) <u>Teorema</u> [15]: Toda categoría schuriana l.r.f es estandar.

<u>Demostración</u>: Esta prueba fue obtenida independientemente y por eso la incluimos aquí. Sea Λ categoría schuriana l.r.f.

En [3] se prueba que $\bar\Lambda = \bigoplus_{p,q} (\mathrm{Gr\,ind}\Lambda)(p,q)$ es categoría estandar, con p,q projectivos inescindibles y $(\mathrm{Gr\,ind}\Lambda)(p,q) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} r^n \mathrm{ind}\Lambda(p,q) / r^{n+1}\mathrm{ind}\Lambda(p,q)$

Nosotros veremos que $\Lambda = \bar{\Lambda}$: Sean P, Q proyectivos inescindibles.

Como Λ es schurian, $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q) = r\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q) = \ldots = r^k\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q)$ con $r^{k+1}\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q)$ el módulo 0. O sea, $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(P,Q) = r^k\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q)$ y basta mostrar que el producto preserva la graduación.

Sea Γ el carcaj de Auslander-Reiten de Λ y $\tilde{\Gamma} \xrightarrow{\pi} \Gamma$ la cubierta universal.

Por [8], tenemos $F: k(\tilde{\Gamma}) \longrightarrow \mathrm{ind}\Lambda$ funtor cubriente con $F(x) = \pi(x)$ en objetos. Sea $0 \neq f = f_k \ldots f_1 \in r^k\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q)$ con f_i irreducible de H_i en H_{i+1}, con $H_1 = P$, $H_{k+1} = Q$.

Sea $\bar{P}$ vértice de $\tilde{\Gamma}$ con $F(\bar{P}) = P$. Como F es cubriente, hay un único vértice $\bar{H}_2 \in \tilde{\Gamma}_0$ con $F(\bar{H}_2) = H_2$ y $\bar{P} \xrightarrow{\alpha_1} \bar{H}_2$ flecha en $\tilde{\Gamma}$. Similarmente, $\bar{H}_1 = \bar{P} \xrightarrow{\alpha_1} \bar{H}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \xrightarrow{\alpha_k} \bar{H}_{k+1} = \bar{Q}$ camino en $\tilde{\Gamma}$ con $F(\bar{H}_i) = H_i$.

Como F es cubriente, $F(\alpha_1)$ es irreducible entonces $F(\alpha_1) = \lambda_1 f_1 + r_1$ con $\lambda_1 \neq 0$, $r_1 \in r^2\mathrm{Hom}_\Lambda(P, H_2)$, similarmente $F(\alpha_2) = \lambda_2 f_2 + r_2$ con $\lambda_2 \in k^*$ y $r_2 \in r^2\mathrm{Hom}_\Lambda(H_2, H_3)$. Así, $F(\alpha_2\alpha_1) = \lambda_1\lambda_2 f_2 f_1 + (\lambda_2 f_2 r_1 + \lambda_1 r_2 f_1 + r_2 r_1)$ con $\lambda_1\lambda_2 \in k^*$ y $\lambda_2 f_2 r_1 + \lambda_1 r_2 f_1 + r_2 r_1 \in r^3\mathrm{Hom}_\Lambda(P, H_3)$. Inductivamente obtenemos, $F(\alpha_k \ldots \alpha_1) = \lambda f + r$ con $\lambda \in k^*$ y $r \in r^{k+1}\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q) = 0$.
Se sigue que $f = F(\lambda^{-1}\alpha_k \ldots \alpha_1)$. Llamamos $u_f = \alpha_k \ldots \alpha_1$, $\lambda_f = \lambda^{-1}$.

Sean $0 \neq f \in r^k_\Lambda(P,Q) - r^{k+1}_\Lambda(P,Q)$ y $0 \neq g \in r^l_\Lambda(Q,T) - r^{l+1}_\Lambda(Q,T)$ con $gf \neq 0$. u_f camino de $\bar{P}$ a $\bar{Q}$ de longitud k y u_g camino de $\bar{Q}$ a $\bar{T}$ de longitud l. Sabemos, $F(\lambda_f u_f) = f$, $F(\lambda_g u_g) = g$ entonces, $F(u_g u_f) = (\lambda_f\lambda_g)^{-1} gf \neq 0$, y $u_g u_f$ tiene longitud $k+l$ de $\bar{P}$ a $\bar{T}$. Sea $0 \neq h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P,T)$, entonces como Λ es schurian, u_h es camino de $\bar{P}$ a $\bar{T}$, ya que F es cubriente. Como $\tilde{\Gamma}$ es simplemente conexa, la longitud de u_h es también $k+l$.

Esto indica que $h \notin r^{k+l+1}\mathrm{Hom}_\Lambda(P,T)$, que es entonces 0. Lo que muestra que $\Lambda = \tilde{\Lambda}$ como álgebras y Λ es estandar. //

Podemos ahora caracterizar a las categorías simplemente conexas en el sentido de [8], o sea haciendo referencia al carcaj de Auslander Reiten por medio de la conexidad simple pero del carcaj ordinario.

(11.4) Teorema: Sea Λ categoría l.r.f. Son equivalentes:

i). Λ es simplemente conexa

ii). Existe (Q,I) carcaj con relaciones, con $\Lambda \cong k(Q,I)$ de forma que Q no tiene ciclos dirigidos y (Q,I) es su propia cubierta universal.

iii). Para todo carcaj con relaciones (Q,I) con $\Lambda \cong k(Q,I)$, Q no tiene ciclos dirigidos y (Q,I) es su propia cubierta universal.

Demostración: i) → ii): Por [8], Λ es categoría estandar. Basta entonces aplicar el Teorema (10.8) y observar que (Q,I) es su propia cubierta ya que $\tilde{\Gamma} = \Gamma$.

ii) → iii): Supongamos $\Lambda \cong k(Q,I')$. Por (6.8), $\Pi_1(Q,I) = \Pi_1(Q,I')$ trivial y (Q,I') es su propia cubierta universal

iii) → i): Por (6.1), Λ es Schurian y por (11.3) Λ es estandar. Luego, podemos volver a aplicar la construcción de (10.8) y observar que $\Pi_1(\Gamma_\Lambda)$ actúa sobre la cubierta universal de (Q,I) que es trivial. Así, $\Pi_1(\Gamma_\Lambda) = \{1\}$ y Γ_Λ es su propia cubierta universal, o sea Λ es simplemente conexa. //

Sabemos que $\Pi_1(\Gamma_\Lambda)$ es grupo libre si Λ es l.r.f., nos preguntamos por $\Pi_1(Q,I)$ cuando $\Lambda \cong k(Q,I)$. Tenemos ahora el siguiente importante Corolario.

(11.5) Teorema: Sea (Q,I) carcaj con relaciones l.r.f. y Q finito. Sea $\pi:(\hat{Q},\hat{I})\longrightarrow(Q,I)$ cubierta universal con $\hat{Q}$ sin ciclos dirigidos, entonces $\Pi_1(Q,I)=\Pi_1(\Gamma_\Lambda)$ con $\Lambda=k(Q,I)$ y es entonces libre.

Demostración: Sabemos por (9.1) que tenemos un morfismo cubriente $\Sigma:\Gamma_{\hat{\Lambda}}\longrightarrow\Gamma_\Lambda$ definido por $\Pi_1(Q,I)$ donde $\hat{\Lambda}=k(\hat{Q},\hat{I})$. Por (11.4), $\hat{\Lambda}$ es simplemente conexa, o sea $\Gamma_{\hat{\Lambda}}=\tilde{\Gamma}_{\hat{\Lambda}}=\tilde{\Gamma}_\Lambda$. Pero por la propiedad universal de $\tilde{\Gamma}_\Lambda$, Σ está definido por $\Pi_1(\Gamma_\Lambda)$. Como ambos grupos actúan libremente, $\Pi_1(Q,I)=\Pi_1(\Gamma_\Lambda)$ que es libre por [ ]. //

También podemos caracterizar la condición de la cubierta universal de no tener ciclos dirigidos, sin hacer referencia directa a su carcaj.

(11.6) Proposición: Sea (Q,I) carcaj con relaciones l.r.f. y $\pi:(\hat{Q},\hat{I})\longrightarrow(Q,I)$ su cubierta universal. Entonces, $\tilde{Q}$ no tiene ciclos dirigidos si y solo si $k(\hat{Q},\hat{I})$ es schurian.

Demostración: Siendo $(\hat{Q},\hat{I})$ l.r.f., si $\hat{Q}$ no tiene ciclos dirigidos, (6.1) nos dice que $k(\hat{Q},\hat{I})$ es schurian. Si $k(\hat{Q},\hat{I})$ es schurian, por (11.3) $k(\hat{Q},\hat{I})$ es estandar. Entonces (10.8) asegura que $k(\hat{Q},\hat{I})\simeq k(\tilde{Q},\tilde{I}')$ de forma que su cubierta universal $\bar{\pi}:(\bar{Q},\bar{I})\longrightarrow(\tilde{Q},\tilde{I}')$ es tal que $\bar{Q}$ no tiene ciclos dirigidos. Por (6.2), $(\tilde{Q},\tilde{I}')$ satisface (C) y (D).

Pero, $id:(\hat{Q},\hat{I})\longrightarrow(\hat{Q},\hat{I})$ es también cubierta universal y siendo $k(\hat{Q},\hat{I})$ schurian, es claro que $(\hat{Q},\hat{I})$ satisface también las condiciones (C) y (D). Por (6.8), $\hat{Q}=\bar{Q}$ sin ciclos dirigidos. //

Usando (11.5) y (11.6) podemos ver que las álgebras con cubierta universal sin ciclos, pueden construirse a partir de las álgebras schurian.

(11.7) <u>Teorema</u>: Sea Λ álgebra t.r.f. de dimensión finita sobre k. Entonces existe (Q,I) carcaj con relaciones tal que $\Lambda \cong k(Q,I)$ y la cubierta universal $\pi:(\hat{Q},\hat{I}) \longrightarrow (Q,I)$ no tiene ciclos dirigidos, si y solo si existe un álgebra schurian $\bar{\Lambda}$ de dimensión finita sobre k y un morfismo $p:\bar{\Lambda} \longrightarrow \Lambda$ cubriente —ie. hay carcajes con relaciones asociados a Λ y a $\bar{\Lambda}$ con un morfismo cubriente entre ellos—.

<u>Demostración</u>: Si $p:(\bar{Q},\bar{I}) \longrightarrow (Q,I)$ es cubriente con $k(\bar{Q},\bar{I})$ schurian. la cubierta universal común $(\hat{Q},\hat{I})$ es también schurian. Por (11.6) $\hat{Q}$ no tiene ciclos dirigidos. Supongamos ahora que $\pi:(\hat{Q},\hat{I}) \longrightarrow (Q,I)$ es la cubierta universal con $\Lambda \cong k(Q,I)$ y $\hat{Q}$ sin ciclos dirigidos. π está definido por la acción de G que por (11.5) es libre. Llamamos $\tilde{\Lambda} = k(\tilde{Q},\tilde{I})$ que es schurian. Procederemos como en 5.2 de [8]: para cada $x \in Q_0$ fijamos $\tilde{x} \in \tilde{Q}_0$ con $\pi\tilde{x} = x$. $R_x := \{\tilde{y} \in \tilde{Q}_0 \mid \mathrm{Hom}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{x},\tilde{y}) \neq 0\}$ es finito y como G actúa libremente en $\tilde{Q}_0$, $S := \{\gamma \in G \setminus \{1\} \mid \text{existe } x \in Q_0 \text{ con } R_x \cap \gamma(R_x) \neq \emptyset\}$ es finito. Siendo G grupo libre, G es residualmente finito y existe $P \triangleleft G$ de índice finito con $P \cap S = \emptyset$.

Tenemos
$$\begin{tikzcd}
(\tilde{Q},\tilde{I}) \arrow[d, "\bar{\pi}"', "G"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
(\bar{Q},\bar{I}) \arrow[r, dashed, "\pi'"] & (Q,I)
\end{tikzcd}$$
de forma que $\bar{\pi}$ está definido por P y π' por G/P. $\bar{\Lambda} = k(\bar{Q},\bar{I})$ es un álgebra de dimensión finita ya que $|\bar{Q}| = |Q|\,|G/P|$, además es de t.r.f. Probaremos que es schurian.

Sean $s,t \in \bar{Q}_0$ con $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(s,t) \neq 0$. Tomamos $\tilde{s} \in \tilde{Q}_0$ con $\bar{\pi}(\tilde{s}) = s$, y $\bar{\pi}(\tilde{t}) = t$ con $\mathrm{Hom}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{s},\tilde{t}) \neq 0$. Existe $\gamma \in G$, $x \in Q_0$ con $\gamma\tilde{s} = \tilde{x}$.

Supongamos que $\pi\bar{t}'=t$ con $\mathrm{Hom}_{\tilde{\Lambda}}(\bar{s},\bar{t}')\neq 0$ y $\bar{t}\neq\bar{t}'$. Existe entonces $1\neq\delta\in P$ con $\delta\bar{t}=\bar{t}'$ ya que $t\in\bar{Q}_0=\tilde{Q}_0/P$. Como $0\neq\mathrm{Hom}_{\tilde{\Lambda}}(\gamma\bar{s},\gamma\bar{t})=$ $=\mathrm{Hom}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{x},\gamma\bar{t})$ por tanto $\gamma\bar{t}\in R_x$, similarmente $\gamma\delta\bar{t}=\gamma\bar{t}'\in R_x$. Tenemos, $1\neq\gamma\delta\gamma^{-1}$ tal que $\gamma\delta\gamma^{-1}(\gamma\bar{t})=\gamma\delta\bar{t}\in R_x$. Luego, $\gamma\delta\gamma^{-1}\in S$ pero $P\triangleleft G$ y $\gamma\delta\gamma^{-1}\in P$ lo que es absurdo. Así, $\bar{t}=\bar{t}'$, y como $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(s,t)=\bigoplus_{\pi\bar{t}=t}\mathrm{Hom}_{\tilde{\Lambda}}(\bar{s},\bar{t})=\mathrm{Hom}_{\tilde{\Lambda}}(\bar{s},\bar{t})$ y $\tilde{\Lambda}$ es Schurian, tenemos que $\bar{\Lambda}$ también lo es. //

(11.8) <u>Corolario</u>: Si Λ es álgebra estandar, existe $p:\bar{\Lambda}\longrightarrow\Lambda$ cubierta con $\bar{\Lambda}$ álgebra schurian.

<u>Demostración</u>: Directo de (10.8) y (11.7). /

(11.9) <u>Ejemplo</u>: En (11.5) mostramos que el grupo fundamental $\Pi_1(Q,I)$ de un carcaj con relaciones (Q,I) es libre en caso de que (Q,I) sea t.r.f. y $\pi:(\tilde{Q},\tilde{I})\longrightarrow(Q,I)$ la cubierta universal sea sin ciclos dirigidos.

Mostramos un ejemplo donde $\Pi_1(Q,I)$ no es libre a pesar de que $(\hat{Q},\hat{I})$ no tiene ciclos dirigidos.

Sea $\tilde{Q}$ el carcaj formado de la manera siguiente: $\tilde{Q}_0=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ con flechas $(i,j)\xrightarrow{\alpha_{(i,j)}}(i,j+1)$ y $(i,j)\xrightarrow{\beta_{(i,j)}}(i+1,j)$ para $i,j\in\mathbb{Z}$. $\tilde{I}$ el ideal generado por las relaciones $\begin{cases}\alpha_{(i,j+1)}\,\alpha_{(i,j)}=0=\beta_{(i+1,j)}\,\beta_{(i,j)}\\ \beta_{(i,j+1)}\,\alpha_{(i,j)}=\alpha_{(i+1,j)}\,\beta_{(i,j)}.\end{cases}$

Consideremos el automorfismo $f\in\mathrm{Aut}(\hat{Q},\hat{I})$ dado por

$$f(\alpha_{(i,j)})=\alpha_{(i,j+1)}\qquad f(\beta_{(i,j)})=\beta_{(i,j+1)}$$

y $h \in Aut(\hat{Q},\hat{I})$ dado por $h(\beta_{(i,j)}) = \beta_{(i+2,j)}$ $h(\alpha_{(i,j)}) = \alpha_{(i+2,j)}$.

Obviamente, $fh = hf$ y el grupo de automorfismos generado por f, h es $G = \langle f, h \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Observemos también que el segundo grupo de relaciones nos dice que $(\hat{Q},\hat{I})$ es su propia cubierta universal.

El cociente $\pi : (\hat{Q},\hat{I}) \longrightarrow (Q,I)$ dado por la acción de G es tal que Q es:

$$Q: \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\alpha_1"] \arrow[r, bend left, "\beta_1"] & \bullet \arrow[loop right, "\alpha_2"] \arrow[l, bend left, "\beta_2"] \end{tikzcd}$$

con I generado por las relaciones $\begin{cases} \beta_2\beta_1 = 0 = \alpha_1^2 = \alpha_2^2 \\ \alpha_2\beta_1 = \beta_1\alpha_1 \ , \ \beta_2\alpha_2 = \alpha_1\beta_2 . \end{cases}$

Por tanto $\Lambda = k(Q,I)$ es algebra de dimensión finita, de forma que $\Pi_1(Q,I) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no es libre.

Bibliografía.

[1] Auslander, M. Representation theory of artin algebras I, Comm. Algebra 1 (1974), 177-268

[2] Auslander M. Representation theory of artin algebra II, Comm. Algebra 1 (1974), 269-310.

[3] Auslander M y Reiten I., Representation theory of artin algebra III. Comm. Algebra 3 (1975) 239-294.

[4] Auslander M. Large modules over artin algebras. Ac. Press, 1975.

[5]. Bautista R. Irreducible maps and the radical of a category. preprint. Mexico 1979.

[6] Bautista R. y Brenner S. On the number of terms in the middle of an almost split sequence, preprint 1981, 1-8.

[7] Bongartz K. Zykellose Algebren sind nicht zügellos preprint. Switzerland.

[8] Bongartz K. y Gabriel P., Covering spaces in representation theory, preprint 1981, 1-70.

[9] Cibils C., Larrión F. y Salmerón L., Métodos diagramáticos en teoría de representaciones, preprint 1981.

[10] de la Peña, A y Martínez Villa R., On automorphisms of an Auslander Category, preprint 1981.

[11] Fuller K. y Anderson F. Rings and categories of modules, GTM 13 Springer-Verlag (1973)

[12] Gabriel, P. Indecomposable representations II. Instituto Nazionale di alta Matematica, Symposia Math 11 (1973), 81-104.

[13] Gabriel P. , Auslander Reiten sequences and representation-finite Algebras, in Rep. Theory II, Ottowa 1979.

[14] Gabriel P. The universal cover of a representation-finite algebra, preprint 1981.

[15] Gabriel P. Notas tomadas por R. Martínez Villa durante el congreso de

[16] Gordon, E y Green, Group-graded algebras and the zero relation problem. preprint 1980.

[17] Jans, J. , On the indecomposable representation of algebras, Ann. of Math. 66, 1957, 418-429.

[18] Kupish H., Symmetrische Algebren mit endlich vielen unzerlegbaren Darstellungen I, Jour. für die R. 219, 1965, 1-25.

[19] Riedtmann, Ch., Algebren, Darstellungsköcher, Ueberlagerungen und zurück, Comm. Math. Helv. 55 (1980), 199-224.

[20] Riedtmann, Ch. Representation-finite selfinjective algebras of class An, in Rep. Theory II, Proc. of the second Int. Conf. on Rep. of Alg., Ottowa 1979, Springer Lecture notes 832 (1980), 449-520.

[21] Warfield, R. A Krull-Schmidt theorem for infinite sums of modules, Proc. Amer. Math. Soc. 22, 1969, 460-465.

[22] Waschbüsch, J. Universal coverings of selfinjective algebras preprint (1980)