UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

División de Estudios de Posgrado

NUCLEOS, R-DIGRAFICAS Y R^{-}DIGRAFICAS.

T E S I S

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (Matemáticas)

Presenta la Matemática

HORTENSIA GALEANA SANCHEZ

México, D. F. 1982

INTRODUCCION

El concepto de núcleo de una digráfica fue introducido por John Von Neuman y Oskar Morgenstern(N.M.1) en 1953 como herramienta de interés en la Teoría de Juegos. Demostraron que toda digráfica finita sin ciclos posee un núcleo único. Posteriormente y ya con un enfoque puramente gráfico, Richardson invenstigó diversas clases de digráficas que poseen núcleo. En particular encontró los siguientes resultados:

(R.1) Las digráficas bipartitas (finitas o infinitas) tienen núcleo.

(R.2) Las digráficas finitas sin ciclos impares tienen núcleo. La demostración original del Teorema de Richardson (R.2) es bastante complicada; en el año 1971 Víctor Neumann Lara (VN 1) introdujo el concepto de seminúcleo que permitió una nueva demostración mucho más simple.

En 1975 Romanowicz, Zbiqniew (R.Z.1) demostró que una digráfica en la cual cada ciclo impar no simétrico tiene una diagonal simétrica que es imparmente acíclica, tiene núcleo.

Posteriormente en 1979 P. Ducket (D.1) presentó en su tesis doctoral algunos resultados interesantes sobre la existencia de núcleos en digráficas.

Paralelamente y de manera independiente Víctor Neumann Lara y Hortensia Galeana Sánchez hemos trabajado en la investigación en la Teoría de Núcleos en Digráficas obteniendo resultados de interés, la mayoría de los cuales forman el material del presente trabajo.

Conceptos Preliminares

Una digráfica es un par (V,F) donde V es un conjunto finito no vacío y F un subconjunto de V^2 que no contiene pares de la forma (v,v). Los elementos de V son los vértices de D y los de F las flechas. Si $f = (v_1,v_2) \in F$ diremos que f va de v_1 a v_2 que v_1 y v_2 son las terminales de f; más aún diremos que v_1 es el vértice terminal inicial de f y v_2 es el vértice terminal final de f. Si además $v_1 \in S_1 \subseteq V$ y $v_2 \in S_2 \subseteq V$, se dirá que f va de v_1 a S_2, de S_1 a v_2 y de S_1 a S_2. Cuando $(v_2, v_1) \in F$ diremos que $f = (v_1,v_2)$ es una flecha simétrica.

En general, se denotará por $V(D)$ (o simplemente por V si no hay ambigüedad) al conjunto de vértices de la digráfica D y por $F(D)$ o F al de sus flechas.

Si $A \subseteq F(D)$, denotaremos por $t(A)$ al conjunto de los vértices terminales de los elementos de A; $t^f(A)$ denotará al conjunto de vértices terminales finales de los elementos de A y $t^i(A)$ denotará al conjunto de vértices terminales iniciales de los elementos de A.

Sea $u \in V(D)$, denotaremos por $\Gamma^+(u)$ al conjunto de los vértices terminales finales de las flechas que tienen a u como vértice terminal inicial, y por $\Gamma^-(u)$ al conjunto de los vértices iniciales de flechas con vértice terminal final u. Si $B \subseteq V(D)$ denotamos $\Gamma^+(B) = \bigcup_{v\in B} \Gamma^+(v)$ y $\Gamma^-(B) = \bigcup_{v\in B} \Gamma^-(v)$. Denotaremos por $F^+(u)$ al conjunto de flechas de D con vértices terminal inicial u y por $F^-(u)$ al conjunto de flechas de D con vértice terminal final u; para $A < V(D)$, denotaremos $F^+(A) = \bigcup_{v\in A} F^+(v)$ y $F^-(A) = \bigcup_{v\in A} F^-(v)$.

Sea H una digráfica; diremos que H es una subdigráfica de D cuando $V(H) < V(D)$ y $F(H) < F(D)$. Sea $v_0 < V$, $v_0 \neq \Phi$; la subdigráfica D_0 de D inducida por v_0 se define como sigue: $V(D_0) = V_0$ y $F(D_0) = F(D) \cap V_0^2$ y se denota $D_0 = D[V_0]$. Se dirá que D_0 es una subdigráfica plena o inducida de D si es la subdigráfica de D inducida por $V(D_0)$.

Dadas dos digráficas D y H denotaremos $D \cup H$; la unión de D y H que es la digráfica definida como sigue:

$F(D \cup H) = F(D) \cup F(H)$ y $V(D \cup H) = V(D) \cup V(H)$.

Si D_0 es una subdigráfica de D una flecha de D que no es flecha de D_0 es una pseudodiagonal de D_0 siempre y cuando ambos puntos terminales de la flecha sean vértices de D_0. Si $f = (v_1, v_2)$ con $v_1 \in S_1 \subseteq V(D_0)$, - - $v_2 \in S_2 \subseteq V(D_0)$ es una pseudodiagonal de D_0 , se dirá que f es una - - v_1S_2 - pseudodiagonal de D_0 , una S_1v_2 - pseudodiagonal de D_0 ó una - S_1S_2 - pseudodiagonal de D_0 . Sea $f = (v_1 , v_2)$ una pseudodiagonal de D_0 , se dirá que f es una diagonal de D_0 cuando $(v_2,v_1) \notin F(D_0)$, si $v_1 \in S_1 \subseteq V(D_0)$ y $v_2 \in V_2 \subseteq V(D_0)$ se dirá que f es una v_1S_2 - diagonal de D_0 , una - - S_1v_2 - diagonal de D_0 ó una S_1S_2 - diagonal de D_0 .

Un camino es una sucesión $(v_0,v_1,\ldots,v_n)$ de vértices tal que $(v_{i-1},v_i) \subset F$ para $i=1,2,\ldots,n$ si $v_0 = v_n$, el camino se denotará cerrado. La longitud del camino es n y si $C = (v_0,v_1,\ldots,v_n)$ es un camino denotamos su longitud por $\ell(C)$; así $\ell(C) = n$.

Una trayectoria es un camino en el cual ningún vértice se repite, una trayectoria $(u = u_0,u_1,\ldots u_n = v)$ se dice que conecta o une u y v y la llamamos una uv-trayectoria. Sea $T = (u_0,u_1,\ldots,u_n)$ una trayectoria denotaremos:

$T^0_{u_0} = \{w_{2i}/0 < 2i < n\}$ y por $T^1_{u_0} = \{w_{2i-1}/0 < 2i-1 < n\}$.

Un <u>ciclo</u> es un camino cerrado $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ tal que cuano $i \neq 0, n$ se tiene $v_i \neq v_j$ para toda $j \neq i$. Diremos que un ciclo es un <u>ciclo impar</u> si n es impar y es un <u>ciclo par</u> si n es par.

Sean D una digráfica, H subdigráfica y D y $f \in F(D)$, f es <u>imparmente acíclica en</u> H si no existe ciclo impar en H que pase por f (es decir f no es flecha de ciclos impares de H); $u \in V(D)$ diremos que u es <u>imparmente acíclico en</u> H si no existe ciclo impar en H que contenga a u.

Sea C un ciclo de D, denotaremos $\ell(C)$ su longitud; si $u, v \in V(C)$, denotaremos por (u,C,v) a la uv-trayectoria contenida en C y por $\ell(u,C,v)$ a su longitud; consideramos $(u,C,u) = (u)$ y $\ell(u,C,u) = 0$. Denotaremos por:

$P(C) = \{f \in F(D)/f$ es pseudodiagonal de $C\}$

$t(C) = \{z \in V(C)/z$ es terminal final de alguna pseudodiagonal de $C\} = t^f(P(C))$

$i(C) = \{z \in V(C)/z$ es terminal inicial de alguna pseudodiagonal de $C\} = t^i(P(C))$.

Sea C un cilo impar de una digráfica D, $u \in V(C)$; numeramos los vértices de C en el sentido de recorrido de C y a partir de $u = u_0$, así

$C = (u = u_0, u_1, \ldots, u_{2n}, u_{2n+1} = u)$ denotaremos:

$C^0_u = \{u_i \in V(C)/i$ es par $i \neq 0\}$.

$C^1_u = \{u_i \in V(C)/i$ es impar $i \neq 2n+1\}$.

Claramente $V(C) = C^0_u \cup C^1_u \cup \{u\}$.

V Sea $V_0 \subset V(D)$; V_0 es <u>independiente</u> si no existen flechas de D con ambas terminales en V_0.

Diremos que una digráfica D *es simétrica*, cuando y sólo cuando $f = (u,v) \in F(D)$ implica $f' = (v,u) \in F(D)$.

Sea D una digráfica, consideramos en V(D) la siguiente relación binaria $\sim$; $u,v \in V(D)$ $u \sim v$ si y sólo si existe una uv-trayectoria en D y una vu-trayectoria en D; $\sim$ es de equivalencia; las clases de equivalencia son - las *componentes fuertemente conexos* de D o componentes fuertes; si D tiene una única componente fuerte se dirá que D es *fuertemente conexa*.

Se dirá que D *es conexa* si dados $u,v \in V(D)$ existe una uv-trayectoria o una vu-trayectoria.

Una gráfica G consiste de un conjunto finito no vacío V=V(G) de p puntos (o vértices) junto con un conjunto X de q pares no ordenados de distintos puntos de V. Cada par $x = \{u,v\}$ de punto en X es una *arista* de G.
La *gráfica subyacente* de una digráfica D es la gráfica que se obtiene de D reemplazando cada flecha de D por una arista.
Un *punto de corte do una digráfica* D es un punto de corte de la gráfica subyacente de D.
Un *bloque de una digráfica* D es un bloque de la gráfica subyacente de D.
Un *corte lineal* de una digráfica D es un conjunto $A \subseteq F(D)$ tal que D - A no es conexa.
Un *corte lineal fuerte* de una digráfica D es un conjunto $A \subseteq F(D)$ tal que D - A no es fuertemente conexa.

CAPITULO I

Sección 1. Conceptos y Teoremas Fundamentales

Definición 1.1 (Von Neumann y Morgenstern).

Sea D una digráfica $S \subseteq V$. S es un núcleo de D si (a) S es independiente y (b) Para todo x V - S existe una flecha de x a X.

El resto de los conceptos y teoremas de esta sección 1 fueron obtenidos por Víctor Neumann Lara (VN 1)(1971) y son fundamentales para el desarrollo del resto del presente trabajo.

Definición 1.2

Sea D una digráfica. Diremos que $S \subseteq V$ es seminúcleo de D si las dos siguientes condiciones se cumplen:

(a) S es independiente

(b) Para cada flecha f que va de S a x (en virtud de la condición anterior $x \in V - S$) existe una flecha f' que va de x a S.

Claramente Φ es un seminúcleo de D.

Teorema 1.1

Sea S un seminúcleo de D.

$B = \{v \in V - S$/No existe flecha de v a S$\}$, y S' un seminúcleo de la subdigráfica $\overline{B}$ de D inducida por B. Entonces $S \cup S'$ es un seminúcleo de D.

Y como consecuencia del Teorema 1.1 tenemos:

Teorema 1.2

Sea S un seminúcleo de una digráfica D.
$B = \{v \in V - S$/No existe flecha de v a S$\}$, y N' un núcleo de la subdigrá fica $\overline{B}$ de D inducida por B. Entonces $S \cup N'$ es núcleo de D.

Definición 1.3

Diremos que D es R-digráfica si toda subdigráfica plena de D posee un seminúcleo no trivial (es decir no vacío).

Observación 1.1

Es claro que si D es R-digrárica y D_0 es subdigráfica plena de D entonces D_0 también es R-digráfica.

Teorema 1.3

Toda R-digráfica posee al menos un núcleo.

Sección 2 Seminúcleos Módulo R y Trayectorias K-normales.

Todos los conceptos y Teoremas expuestos en el resto de este capítulo excepto D.1 y RZ1 fueron obtenidos por Hortensia Galeana Sánchez y Víctor Neumann Lara (GN1).

Definición 2.1

Sea D una digráfica; $I,R \subseteq V(D)$. Se dirá que I es seminúcleo módulo R de D si se cumplen las condiciones

(2.1.i) $I \cap R^c$ es independiente.

(2.1.ii) Si $(u,v) \in F(D)$, $u \in I \cap R^c$ y $v \in I^c \cap R^c$ entonces existe $w \in I$ tal que $(v,w) \in F(D)$.

Si en lugar de la condición (2.1.i) se cumple la condición más fuerte (2.1.i') se dirá que I <u>es seminúcleo fuerte de</u> D <u>módulo</u> R.

(2.1.i') No existen $(I \cap R^c)I$ - flechas.

<u>Definición 2.2</u>

Si $K \subset V(D)$, la trayectoria $T = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ sería llamada <u>K-normal</u> si

(2.2.i) $V(T) \cap K = T^0_{w_0}$ ó $V(T) \cap K = T^1_{w_0}$

(2.2.ii) $\forall\, w_j \in K^c;\ j < n\ ,\ w_s \in K$ con $s < j\ ;\ (w_j\ ,\ w_s) \notin F(D)$

<u>Observación 2.1</u>

Nótese que una trayectoria K-normal pasa alternadamente por K y K^c.

<u>Teorema 2.1</u>

Sean Io , I, R $\subset V(D)$ tales que $I_0 \subset I$, $I_0 \cap R = \phi$.

Si se satisfacen.

(a) I es seminúcleo fuerte de D módulo R y

(b) Toda IoR-trayectoria I-normal pasa por $u = \Gamma^-(Io) \cap R^c$. Entonces $S = \{w \in I /$ Iow-trayectoria I-normal que no pasa por u$\}$ es seminúcleo de D que satisface $Io \subset S \subset I \cap R^c$.

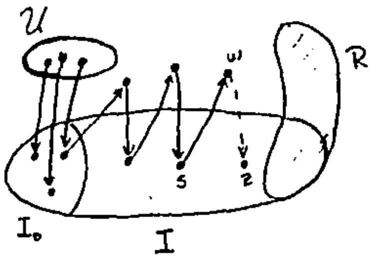
<u>Demostración</u>

Obsérvese en primer lugar que por (a), $u \subset I^c \cap R^c$.

Además Io es independiente y por lo tanto, $Io \subset S$.

Por (b), $S \subset R^c$, luego $S \subset I \cap R^c$ y, nuevamente por (a) no existen SI-flechas. En particular S es independiente. Sea $(s,w) \in F(D)$ con $s \in S$ y supóngase que no existe ninguna wS-flecha en D. Considérese cualquier Ios-trayectoria I-normal T que no pasa por u. Como $w \in I^c$, la trayectoria T' que se obtiene extendiendo T con (s,w) es también I-normal.

Necesariamente w R pues de otro modo se contradiría (b). Se tiene entonces $w \in I^c \cap R^c$ y, por (a) existe $(w,z) \in F(D)$ con $z \in I$. La trayectoria T" que resulta de extender T' con (w,z) es I-normal y no pasa por u. Por lo tanto $z \in S$ lo que contradice el que no existan wS-flechas en D. Se sigue S es seminúcleo de D.



Como corolano se obtiene la siguiente versión ligeramente distinta del Teorema 2.1 que es de aplicación más directa.

Teorema 2.2

Sean Io, I,R $\subset$ V(DO tales que

(i) I es seminúcleo fuerte de D módulo R

(ii) D no contiene ningún seminúcleo S tal que $Io \subset S \subset I \cap R^c$. Entonces existe una IoR-trayectoria I-normal directa

$T = (t_0,\ldots,t_n)$ (e.d $V(T) \cap Io = \{to\}$ y $V(T) \cap R = \{tn\}$) que no pasa por $\Gamma^-(Io) \cap R^c$ y tal que:

(1) $(t_{2i}, t_j) \notin F(D)$ para $0 < 2i < j < n$ $j \neq 2i+1$

(2) $(t_{2i+1}, t_{2j}) \notin F(D)$ para $0 < 2i+1 < 2j < n$ $j \neq i+1$

Demostración

Por el Teorema 2.1 existe una IoR-trayectoria I-normal T que no pasa por $\Gamma^-(Io) \cap R^c$. Si se elige de longitud mínima posible, T satisface claramente las propiedades (1) y (2).

Observación 2.2

(1) T no tiene $(V(T) - \{tn\}\ T^{o}_{to}$ - pseudodiagonales

(2) T tiene longitud par o impar según tn I ó tn I.

Un caso particular del Teorema 2.2 es el

Teorema 2.3

Sean Io, I, R $\subset$ V(D) tales que $\phi \neq Io \subseteq I$, $Io \cap R = \phi$. Si

(i) I es seminúcleo fuerte de D módulo R.

(ii) D no tiene núcleo.

(iii) D - (Io U Γ^{-}(Io)) es R - digráfica.

Entonces existe una IoR - trayectoria I-normal directa que no pasa por $\Gamma^{-}(Io) \cap R^{c}$ y que satisface (1) y (2) del Teorema 2.2 y por lo tanto las - condiciones de la observación 2.2.

Demostración

Si no existiera T con las condiciones establecidas, existiría un semi-núcleo S tal que $\phi \neq Io \subset S \subset I \cap R^{c}$. Usando (iii), Teorema 1.2 y Teorema 1.3; se concluiría la existencia de un núcleo de D, lo que contradice a (ii).

Teorema 2.4

Sea D una digráfica, u $\in$ V(D) y Nu núcleo de D - {u}. Si

(i) D - {u} es R-digráfica).

(ii) D no tiene núcleo.

Entonces existe una vu-trayectoria Nu-normal que no tiene $(V(T)-\{u\})T^{i}_{v}$-pseudo-diagonales donde i es el residuo de $\ell(T)+1$ módulo 2.

Demostración.

Sea $I=Nu$, $R = \{u\}$ y defínase Io como sigue: $Io = \{v\}$ si $v \in Nu$; $Io = \Gamma^+(v) \cap Nu$ si $v \notin Nu$. Claramente se satisfacen las condiciones del Teorema 2.3 y la afirmación se sigue inmediatamente.

(Ver fig. 2)

Corolario 2.1

Sea D una digráfica sin núcleo, $f = (u,v) \in F(D)$ tal que:

(i) D-u tiene núcleo.

(ii) D-v es R-digráfica.

Entonces existe un ciclo impar C por f que no tiene $V(C)C_u^o$ - pseudodiagonales.

Teorema 2.5

Sean D una digráfica, $u \in V(D)$, $\phi \neq A \subset F^+(u)$, Io el conjunto de vértices terminales finales de las flechas de A. Supóngase que

(i) D-A tiene núcleo pero D-A' no tiene núcleo si $A' \subset A$.

(ii) $D-(Io \cup \Gamma^-(Io))$ es R-digráfica.

Entonces existe un ciclo impar C que pasa por alguna $f \in A$, no pasa por $\Gamma^-(Io) - \{u\}$ y no tiene $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$-pseudodiagonales.

Demostración

Por (i) D no tiene núcleo. Sea I un núcleo de D - A y $R = \{u\}$. Claramente I es seminúcleo fuerte de D módulo R y $Io \cup \{u\} \subset I$; así por el Teorema 2.3 existe una to u-trayectoria I-normal directa con $to \in Io$ que no pasa por $(\Gamma^-(Io)-\{u\})$ y que satisface las condiciones de la observación 2.2. El ciclo $C = T \cup (u,to)$ satisface las propiedades del enunciado.

(ver fig. 4).

Corolario 2.2

Sea $f=(u,v) \in F(D)$, si D no tiene núcleo y $D-f$ es R-digráfica entonces existe un ciclo impar por f; C que no tiene $V(C)(C_u^1 \cup (u))$-pseudodiagonales.

(Ver fig. 5).

Corolario 2.3

Sea D una digráfica, $u \in V(D)$, si D no tiene núcleo y D-u es R-digráfica entonces, existe un ciclo impar C que pasa por u y sin $V(C)(C_u^1 \cup (u))$-pseudodiagonales.

Demostración

Ya que {u} es seminúcleo de $D-F^+(u)$ y D-u es R-digrárica, por lo Teoremas 1.2 y 1.3 se sigue que $D-F^+(u)$ tiene núcleo. Eligiendo A (del Teorema 2.5) del modo adecuado y aplicando el Teorema 2.5 se concluye la demostración.

Teorema 2.6

Sean D una digráfica $u \in V(D)$, $\Phi \neq B \subset F^-(u)$. Si

(i) D-B tiene núcleo.

(ii) D-B' no tiene núcleo para toda $B' \subset B$

(iii) $D-(\Gamma^-(u) \cup \{u\})$ es R-digráfica.

Entonces existe un ciclo impar C que pasa por alguna $(w,u) = f \in B$, no pasa por $(\Gamma^-(u)-\{w\})$ y no tiene $V(C)C_u^0$ -pseudodiagonales.

Demostración

Sea I núcleo de D-B y tómese $Io = \{u\}$ y R el conjunto de vértices terminales iniciales de las flechas de B. Por (ii) $R \cup \{u\} \subset I$. Por el Teorema 2.3 existe una uw-trayectoria I-normal directa T que no pasa por

$\Gamma^-(u) \cap R^c$, y tal que $w \in R$. El ciclo $C = T \cup (w,u)$ satisface las propiedades requeridas.

(Ver fig. 6)

Colorario 2.4

Sea D una digráfica, $u \in V(D)$. Si D no tiene núcleo y D-u es R-digráfica, entonces para alguna $f=(v,u) \in F(D)$, existe un ciclo impar C por f que no tiene $V(C)(C_v^1 \cup \{v\})$-pseudodiagonales.

Demostración

Sea Nu núcleo de D-u. Como D no tiene núcleo, no existen flechas de u a N_u y, por lo tanto, $N' = N_u \cup \{u\}$ es núcleo de $D-F^-(u)$. Eligiendo B (del Teorema 2.6) de manera adecuada y aplicando el Teorema 2.6 se concluye la demostración.

Sección 3. Estructura de las R^- digráficas

Definición 3.1

Una digrafica D es una R^- digráfica si D no tiene núcleo y para cada $u \in V(D)$, D-u es R-digráfica.

Teorema 3.1

Si D es una R^- digráfica y $u,v \in V(D)$ entonces existe una vu-trayectoria $T=(w_0,w_1,\ldots,w_n)$, $w_0 = v$, $w_n = u$ que no tiene $V(T)T_v^i$ - pseudodiagonales, donde i es el residuo de n+1 módulo 2.

Demostración

Es consecuencia directa del Teorema 2.4.

Teorema 3.2

Si D es una R^- digráfica entonces para cada $f=(u,v) \in F(D)$ existe un ciclo impar C por f que no tiene $V(C)C_u^0$ - pseudodiagonales (en particular C_u^0 es un conjunto independiente).

Demostración

Se sigue del Corolario 2.1.

Corolario 3.1

Si D es R^- digráfica, entonces para cada $u \in V(D)$ existe un ciclo impar C por u que no tiene $V(C)C_u^0$ - pseudodiagonales ni u C - pseudodiagonales.

Teorema 3.3

Si D es R^- digráfica, entonces para cada $u \in V(D)$ existe un ciclo impar C por u que no tiene $V(C)(C_u^1 \cup' \{u\})$ - pseudodiagonales.

Demostración

Se sigue inmediatamente del Corolario 2.3.

Teorema 3.4

Si D es una R^- digráfica y $u \in V(D)$, entonces para alguna $f=(v,u) \in \dot{F}(D)$ existe un ciclo impar C por f que no tiene $V(C)(C_v^1 \cup' \{u\})$ - pseudodiagonales.

Demostración

Es consecuencia inmediata del Corolario 2.4.

Sección 3.A Aplicaciones

(1) Si D es una R^- digráfica que no es un ciclo impar y $u \in V(D)$; entonces existe $f=(v,u) \in F(D)$ que está en al menos dos ciclos impares.

Demostración

En D todo ciclo impar tiene alguna pseudodiagonal.

Sea $u \in V(D)$; por el Teorema 3.4 para alguna $f=(v,u) \in F(D)$ existe un ciclo impar C por f que no tiene $V(C)(C_v^1 \cup' \{v\})$ - pseudodiagonales y por el Teorema 3.2 existe C' un cilo impar por f que no tiene $V(C')(C'^0_v$ - pseudodiagonales. Se sigue que $C \neq C'$.

(2) Si D es una R^- digráfica que no es un ciclo impar y $u \in V(D)$; entonces existe $f=(u,v) \in F(D)$ que está en al menos dos ciclos impares.

Demostración

En D todo ciclo impar tiene alguna pseudodiagonal.

Sea $u \in V(D)$; por el Teorema 3.3 existe $f=(u,v) \in F(D)$ y un ciclo impar C por f que no tiene $V(C)C_u^1 \cup \{u\})$ - pseudodiagonales y por el Teorema 3.2 existe C' un ciclo impar por f que no tiene $V(C')C'^0_u$ - pseudodiagonales. Se sigue que $C \neq C'$.

(3) Si D es una R^- digráfica que no es un ciclo impar y $u \in V(D)$, entonces u está en al menos $\Delta_D(u) + 1$ ciclos dirigidos impares de D, donde $\Delta_D(u) = \text{máx } \{|\Gamma^-(u)|, |\Gamma^+(u)|\}$.

Sección 4. R-digráficas

Teorema 4.1

Sea D una digráfica, $T \in V(D)$ tal que D-T es R-digráfica y para cada $u \in T$ al menos una de las dos siguientes propiedades se satisface:

(a) Cada ciclo dirigido impar C por u tiene alguna $V(C)C_u^0$ - pseudodiagonal.

(b) Cada ciclo impar C por u tiene alguna $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$-pseudodiagonal.

Entonces D es R-digráfica.

Demostración

Si D no es R-digráfica, D contiene una subdigráfica inducida H que es R^- digráfica. Ya que D-T es R-digráfica $H \cap T \neq \Phi$. Sea $u \in H \cap T$. Por el Teorema 3.2 u no satisface (a) en H y por el Teorema 3.3 u no satisface (b) en H. Se sigue que u no satisface (a) ni (b) en D lo que contradice - la hipótesis.

Teorema 4.2

Sea D una digráfica; $A \in F(D)$ tal que para cada $f=(u,v) \in A$ se satisface la siguiente propiedad:

(i) Cada ciclo impar C por f tiene alguna $V(C)C_u^0$ - pseudodiagonal.

Entonces; D es R-digráfica si y sólo si toda subdigráfica plean H de D tal que $H \cap A = \Phi$, es R-digráfica.

Demostración

Si D no es R-digráfica: D contiene una subdigráfica inducida H que es R^- digráfica; $H \cap A \neq \Phi$; sea $f=(v,u) \in H \cap A$. Por hipótesis f satisface (i) en D, pero por el Teorema 3.2 f no satisface (i) en H. Se obtiene así una contradicción; se sigue que D es R-digrafica. El recíproco es obvio.

Sea D una digráfica y C un ciclo impar de D; denotaremos:

$$C^{(0)} = \bigcup_{v \in t^f(C)} C_v^1 \qquad y \qquad C^{(1)} = \bigcup_{u \in t^f(C)} C_u^0 \cup t^f(C)$$

Teorema 4.3

Sea D una digráfica y $T \subset V(D)$ tal que D-T es R-digráfica y para cada ciclo dirigido impar C tal que $C \cap T \neq \phi$, se tiene $V(C) = C^{(1)}$. Entonces D es R-digráfica.

Demostración

Si C es un ciclo dirigido impar tal que $V(C) = C^{(1)}$ y $u \in V(C)$, entonces C tiene alguna $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$-pseudodiagonal. Así el Teorema 4.3 se sigue del Teorema 4.1

Teorema 4.4

Sean D una digráfica y $A \subset F(D)$ tal que para cada ciclo impar C con $C \quad A \neq \Phi$ se satisface $V(C) = C^{(0)}$. Entonces D es R-digráfica si y sólo si toda subdigráfica plena H de D tal que $H \cap A = \Phi$ es R-digráfica.

Demostración

Si C es un ciclo impar tal que $V(C) = C^{(0)}$ y $f = (u,v) \in F(C)$, C tiene alguna $V(C)C_u^0$ - pseudodiagonal. Así el Teorema 4.4 se sigue inmediatamente del Teorema 4.2.

En las aplicaciones de los Teoremas 4.3 y 4.4 es útil contar con los siguientes criterios.

Criterio 1

Sea $C = (1,2,\ldots,2n+1,1)$ un ciclo impar de una digráfica D,

$$t^f(C) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \quad ; \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_k \; .$$

Entonces $V(C) = C^{(1)}$ si y sólo si al menos una de las dos siguientes condiciones se cumple:

(i) $i_{j+1} = i_j + 1$ para algún $j \in \{1,\ldots,k\}$

(ii) $\ell(i_j, C, i_{j+1}) \equiv \ell(i_\ell, C, i_{\ell+1}) \equiv 1 \pmod{2}$ para $j \neq \ell$, $\{j, \ell\} \subset \{1,\ldots,k\}$.

Demostración

Se sigue de observar que para $i,j \in t^f(C)$ (sin perder generalidad podemos suponer $i=1$, $j=2k+1 < 2n+1$)

$C_i^0 \cup C_j^0 \cup \{i,j\} = \{1,2,3,\ldots,2k+1,2k+3,2k+5,\ldots,2n+1\}$

Criterio 2

Bajo las hipótesis del Criterio 1 se tiene; $V(C) = C^{(0)}$ si y sólo si $\ell(i_j, C, i_{j+1}) \equiv \ell(i_\ell, C, i_{\ell+1}) \equiv 1 \pmod{2}$ para $j \neq \ell$ y $\{j,\ell\} \subset \{1,2,\ldots,k\}$

Sea D una digráfica y $C=(1,2,\ldots,2n+1,1)$ un ciclo impar de D; para $i \in t^f(C)$ denotaremos:

$F_i^1(C) = \{(i+2k, i+2k+1) \mid 0 \leq k < n\}$ (notación módulo zn+1) y denotamos:

$$F^1(C) = \bigcup_{j \in t^f(C)} F_j^1(C) \; .$$

Teorema 4.5

Sea D una digráfica, si existe $T \subset V(D)$ tal que para cada ciclo dirigido impar C de D con $V(C) \cap T \neq \Phi$ tenemos $F(C) = F^1(C)$. Entonces D es R-digráfica si y sólo si D-T es R-digrafica.

Demostración

Si C es un ciclo dirigido impar tal que $F(C) = F^1(C)$ y $u \in V(C)$, existe $f=(u,v) \in F(C)$ y como $F(C) = F'(C)$ C tiene alguna $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$-pseudodiagonal. Así el Teorema 4.5 se sigue del Teorema 4.1.

Criterio 3.

Sea $C=(1,2,\ldots,2n+1,1)$ un ciclo impar de una digráfica D $t^f(C) = \{i_1,\ldots,i_k\}$ $i_1 < \ldots < i_k$. Entonces $F(C) = F^1(C)$ si y sólo si al menos una de las dos siguientes condiciones se satisface:

(i) $i_{j+1} = i_j+1$ para algún $j \in \{1,\ldots,k\}$.

(ii) $\ell(i_j, C, i_{j+1}) \equiv \ell(i_\ell, C, i_{\ell+1}) \equiv 1 \pmod{2}$ (notaciones módulo k).

Sección 4.A Aplicaciones

Del Teorema 4.3

(1) Sean D una digráfica, $T \subset V(D)$ tal que D-T es R-digráfica y cada ciclo impar $C = (1,2,\ldots,2n+1,1)$ tal que $C \cap T \neq \Phi$ tiene dos pseudodiagonales $f=(i,j)$, $g=(k,j+1)$. Entonces D es R-digráfica.

Nota 1. Este implica el siguiente resultado obtenido por P. Duchet.
(DM1) P. Dichet (1979).

Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido impar $(1,2,\ldots,2n+1,1)$ de D posee dos diagonales de la forma (k_1k+2) y $(k+1,k+3)$. Entonces D tiene núcleo.

(2) Una digráfica D es R-digráfica si y sólo si D-B es R-digráfica; donde $B \subset \{z \in V(D) | z$ es imparmente acíclico en $D\}$.

(3) Sea D una digráfica tal que todo ciclo impar no simétrico de D posee una pseudodiagonal f_C tal que para cada ciclo impar C' por f_C, $C' = C'^{(i)}$. Entonces D es R-digráfica.

<u>Nota 2</u> Este implica el siguiente resultado obtenido por Romanowicz, Zbigniew. (RZ1) Romanowicz, Zbiqniew (1975)

Sea D una digráfica tal que para cada ciclo impar no simétrico C, existe $f=(u,v) \in F(C)$ tal que $(v,u) \in F(C)$ y (v,u) es imparmente acíclica. Entonces D tiene núcleo.

<u>Del Teorema 4.4</u>

(4) Sea D una digráfica, $F_{I.A.}(D) = \{f \in F(D) | f$ es imparmente acíclica en $D\}$ D es R-digráfica si y sólo si toda subdigráfica plena H de D tal que $H \cap F_{I.A.}(D) = \phi$ es R-digráfica.

(5) Sea D una digráfica, si $D-F_{I.A.}(D)$ es R-digráfica, entonces D es R-digráfica.

<u>Nota 3</u> El recíproco de (5) es falso. Basta considerar un ciclo impar con alguna pseudodiagonal imparmente acíclica.

<u>De 3.A</u>

(6) Sea D una digráfica que no contiene ciclos impares inducidos, $T \subset V(D)$ tal que para cada $u \in T$; u está en a lo más $\Delta_D(u)$ ciclos dirigidos impares. Entonces D es R-digráfica si y sólo si D-T es R-digráfica.

CAPITULO II

Algunos Resultados sobre R^- digráficas y R-digráficas.

(H. Galeana Sánchez y V. Neumann Lara) (GN. 2)

Teorema 1.1

Sea D una digráfica, si V(D) posee una partición $\{V_1,V_2\}$ tal que toda V_1V_2 - flecha en D es simétrica y $D[V_1]$ y $D[V_2]$ son R-digráficas, entonces D es R-digráfica.

Demostración

Sea D' una subdigráfica inducida de D. Si $D' \subseteq D[V_1]$ ó $D' \subseteq D[V_2]$, D' posee núcleo (observación 1.1 y Teorema 1.3 Cap. 1). En caso contrario, todo núcleo de $D' \cap D[D_1]$ es seminúcleo de D'

Corolario 1.1

Si D es R^- digráfica, D no posee un corte lineal fuerte formado por flechas simétricas.

En otras palabras, la parte asimétrica de una R^- digráfica es fuertemente conexa.

Teorema 1.2

Si D_1 y D_2 son subdigráficas inducidas de D tales que $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \{u\}$ entonces D es R-digráfica si y sólo si D_1 y D_2 son R-digráficas.

Demostración.

Sea H una subdigráfica inducida no vacía de D. Si $H \subseteq D_1$ ó $H \subseteq D_2$, claramente H tiene núcleo. Supóngase que $H \cap (D_1 - u) \neq \phi$ y $H \cap (D_2 - u) \neq \phi$ y sea N_i núcleo de $H_i = D_i[V(H) \cap V(D_i)]$. Si $u \in N_1 \cap N_2$, $N_1 \cup N_2$ es núcleo de H. En caso contrario podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $u \notin N_1$. considerando N'_2 un núcleo de $H_2 - \{u\}$ tenemos que N_1 N_2' es núcleo de H. Luego, D es R-digráfica. El recíproco es obvio.

Corolario 1.2

Si D es R^- digráfica, D no tiene puntos de corte.

Corolario 1.3

D es R-digráfica si y sólo si todo bloque de cada componenete fuerte do D es R-digráfica.

De manera más general se tiene el siguiente

Corolario 1.4

D es R-digráfica si y sólo si todo bloque es R-digráfica.

En lo que sigue denotaremos por $D(f/T_{2k+1})$ a la digráfica que se obtiene de D al sustituir $f=(u,v) \in F(D)$ por una uv-trayectoria T_{2k+1} de longitud 2k+1.

Teorema 1.3

D tiene núcleo si y sólo si $D(f/T_{2k+1})$ tiene núcleo.

Demostración

(i) Es fácil ver que si D tiene núcleo $D(f/T_{2k+1})$ también tiene núcleo.

(ii) Si N' es núcleo de $D(f/T_{2k+1})$, $N' \cap V(D)$ es núcleo de D.

Teorema 1.4

Sea D una digráfica tal que D-f es R-digráfica.

$D' = D(f/T_{2k+1})$ es R-digráfica si y sólo si D es R-digráfica.

Demostración

(i) Supongamos que D' es R-digráfica y sea H una subdigráfica inducida no vacía de D. Probaremos que H tiene núcleo. Si $f \notin F(H)$, $H \subseteq D-f$ y por lo tanto tiene núcleo. Podemos entonces suponer que $f=(u,v) \in F(H)$; $H' = H(f/T_{2k+1})$ es subdigráfica inducida de D'; luego tiene núcleo y por el Teorema 1.3, H tiene núcleo.

(ii) Supongamos que D es R-digráfica y sea M una subdigráfica inducida de D'. Si $T_{2k+1} \nsubseteq M$, se sigue del Teorema 1.2 que M es R-digráfica. Supongamos que $T_{2k+1} \subseteq M$ y denotemos por M* la subdigráfica de D inducida por $V(M) \cap V(D)$. Claramente M* tiene núcleo y por el Teorema 1.3, $M=M^*(f/T_{2k+1})$ tiene núcleo.

Teorema 1.5

Sea D una digráfica, $\Phi \neq A \subseteq F(D)$ y D' una digráfica obtenida a partir de D sustituyendo cada flecha (u,v) de A por una uv-trayectoria de longitud impar. Supóngase que para toda A' tal que $\Phi \neq A' \subseteq A$, D-A' es R-digráfica. Entonces D es R-digráfica si y sólo si D' es R-digráfica.

Demostración

Por inducción sobre $|A|$.

(i) Supóngase que D es R-digráfica.

Sea $f_0 \in A$ y D" la digráfica obtenida a partir de D sustituyendo las flechas en $A-f_0$ por las uv-trayectorias correspondientes en D' . Por hipótesis de inducción D" y D"-f_0 son R-digráficas y, por el Teorema 1.4, D' es R-digráfica.

(ii) Supóngase que D' es R-digráfica.

Aplicando (i) a D-f_0 se sigue que D"-f_0 es R-digráfica y, por el Teorema 1.4, D" es R-digráfica, lo que implica por hipótesis de inducción que D es R-digráfica.

Teorema 1.6

Sea D una digráfica tal que D-f es R-digráfica, $f \in F(D)$. Entonces $D'=D(f/T_{2k+1})$ es R^- digráfica si y sólo si D es R^- digráfica.

Demostración

(i) Supongamos que D' es R^- digráfica.

Por el Teorema 1.3, D no tiene núcleo. Sea H una subdigráfica inducida propia de D. Probaremos que H tiene núcleo. Si $f \notin F(H)$ el resultado se sigue de que D-f es R-digráfica. Si $f \in F(H)$, $H'=H(f/T_{2k+1})$ es R-digráfica. Como H-f es R-digráfica ya que H-f es subdigráfica inducida de D-f, aplicando el Teorema 1.4 se sigue que H es R-digráfica.

(ii) Si D es R^- digráfica; D no tiene núcleo; y por el Teorema 1.3, D' no tiene núcleo. Sea M una subdigráfica inducida propia de D'. Si $T_{2k+1} \not\subset M$, M es R-digráfica por los Teoremas 1.2 y 1.4. Puede suponerse entonces que $T_{2k+1} \subset M$. Sea M* la subdigráfica propia de D inducida por $V(M) \cap V(D)$. Por el Teorema 1.4; M* es R-digráfica y $M=M^*(f/T_{2k+1})$ es R-digráfica.

Teorema 1.7

Sea D una digráfica, $\phi \neq A \subseteq F(D)$ y D' una digráfica obtenida a partir de D sustituyendo cada flecha (u,v) de A por una uv-trayectoria de longitud impar. Supóngase que para toda A' tal que $\phi \neq A' \subset A$, D-A' es R-digráfica. Entonces D es R^- digráfica si y sólo si D' es R^- digráfica.

Demostración

Por inducción sobre $|A|$. Sean $f_0 \in A$ y D" como en la demostración del Teorema 1.5.

(i) Supongamos que D es R^- digráfica.

Por hipótesis de inducción D" es R^- digráfica y por el Teorema 1.5 D"-f_0 es R-digráfica. Por el Teorema 1.6 D' es R^- digráfica.

(ii) Supóngase que D' es R^- digráfica.

Ya que D"-f_0 es R-digráfica por el Teorema 1.5, se sigue por el Teorema 1.6 que D" es R^- digráfica. Esto implica por hipótesis de inducción, que D es R^- digráfica.

Definición 1.1

Sea D una digráfica y $(\alpha u)_{u \in V(D)}$ una familia de digráficas ajenas dos a dos. Se define $\sum\limits_{u,D} \alpha u$ de la siguiente manera:

(i) $V(\sum\limits_{u,D} \alpha u) = \bigcup\limits_{u \in V(D)} V(\alpha u)$;

(ii) $(w_1,w_2) \in F(\sum\limits_{u,D} \alpha u)$ si y sólo si

1. $w_1, w_2 \in V(\alpha u)$ para algún $u \in V(D)$ y $(w_1, w_2) \in F(\alpha u)$

ó.

2. $w_1 \in V(\alpha u)$; $w_2 \in V(\alpha v)$ y $(u,v) \in F(D)$.

(Ver fig. 7)

Teorema 1.8

$\sum\limits_{u,D} \alpha u$ es R-digráfica si y sólo si D y cada αu es R-digráfica.

Demostración

Supóngase que D y todas las αu son R-digráficas. Toda subdigráfica inducida de $\sum\limits_{u,D} \alpha u$ es de la forma $\sum\limits_{u,D'} \alpha' u$ donde D' y $\alpha' u$ son subdigráficas inducidas de D y la respectivamente. Es claro que si Qu es núcleo de $\alpha' u$ y k es núcleo de D', entonces $\sum\limits_{u,k} Qu$ es núcleo de $\sum\limits_{u,D'} \alpha' u$.

El recíproco se sigue inmediatamente observando que $\sum\limits_{u,D} \alpha u$ contiene como subdigráficas inducidas a las αu y a una copia isomorfa de D.

Corolario 1.5

Si D y α son R-digráficas $D(\alpha)$ es R-digráfica.

Observación 1.1

En [4] se definió el número dicromático de una digráfica D como el mínimo número de colores necesario para colorear los vértices de D de tal forma que las clases cromáticas induzcan subdigráficas acíclicas en D.

El Corolario 1.5 hace ver que, para cada $k > 0$ existen gráficas orientadas (digráficas sin flechas simétricas) que son R-digráficas, con número dicromático mayor o igual que k ([V.N.2] , Teorema 8). Obsérvese que el Teorema de Richardson incluye únicamente R-digráficas de número dicromático menor o igual que 2 ([V.N.2], Corolario 1).

Teorema 1.9

Sean D_1 y D_2 digráficas ajenas tales que existe $f_i = (u_i,v_i)$ una flecha simétrica de D_i; denotemos $H_i=D_i-\{(u_i,v_i),(v_i,u_i)\}$ $i=1,2$ y D la digráfica que se obtiene de $H_1 \cup H_2 \cup \{(u_1,u_2),(u_2,u_1)\}$ identificando v_1 con v_2.

(i) Si D tiene núcleo, entonces al menos una de las dos digráficas D_1 ó D_2 tiene núcleo.

(ii) Si H_i, $H_i - \{u_i\}$, $H_i - \{v_i\}$, $H_i - \{u_i,v_i\}$ para $i=1,2$ tienen núcleo y D_1 ó D_2 tiene núcleo, entonces D tiene núcleo.

Demostración

(i) Sea N un núcleo de D y v el punto de D que resulta de indentificar v_1 con v_2 en $H_1 \cup H_2 \cup \{(u_1,u_2),(u_2,u_1)\}$. Si $v \in N$; $N \cap V(D_i)$ es núcleo de D_i para $i \in \{1,2\}$ y tal que $u_i \notin N$. Si $v \notin N$, $N \cap V(D_i)$ es núcleo de D_i para $i \in \{1,2\}$ y tal que $u_i \in N$. Cuando $v \notin N$, $u_1 \notin N$ y $u_2 \notin N$, $N_i = N \cap V(D_i)$ es núcleo de D_i para $i \in \{1,2\}$ y tal que existe flecha de v a N_i.

(ii) Supongamos que D_i tiene núcleo.

Si existe $N(D_1)$ un núcleo de D_1 tal que $v_1 \notin N(D_1)$ entonces $N(D_1) \cup N(H_2-u_2)$ es un núcleo de D (donde $N(H_2-u_2)$ es un núcleo de H_2-u_2), cuando $u_1 \in N(D_1)$ y no existe flecha en $D_1 - \{(v_1,u_1)\}$ de v_1 a $N(D_1)$; y $N(D_1) \cup N(H_2-(v_2,u_2))$ es núcleo de D (donde $N(H_2-(v_2,u_2))$ es un núcleo de $H_2-(v_2,u_2)$) cuando $u_1 \in N(D_1)$ y existe flecha en $D-\{(v_1,u_1)\}$ de v_1 a $N(D_1)$, también tenemos que $N(D_1) \cup N(H_2-v_2)$ es núcleo de D ($N(H_2-v_2)$ es núcleo de H_2-v_2) cuando $u_1 \notin N(D_1)$. De manera análoga se puede encontrar un núcleo de D cuando existe un núcleo de H_i que no contiene a v_i. Luego podemos suponer que v_i está en todo núcleo de H_i y v_1 está en todo núcleo de D_1. Si existe N'_i núcleo de H_i tal que $u_i \notin N'_i$ entonces $N'_i \cup N(H_j)$ es núcleo de D donde $N(H_j)$ es núcleo de H_j, $i \neq j$, $i,j \in \{1,2\}$. De otro modo sea $N(D_1)$ un núcleo de D_1 y $N(H_2)$ un núcleo de H_2, entonces $N(D_1) \cup N(H_2)$ es núcleo de D.

Teorema 1.10

Sean H_1, H_2, D_1, D_2 y D como en el Teorema 1.9.

Si H_1 y H_2 son R-digráficas entonces D es R^- digráfica si y sólo si D_1 y D_2 son R^- digráficas.

Demostración

(i) D es R^- digráfica.

D_i no tiene núcleo de otro modo por (ii) del Teorema 1.9 Cap. II se sigue que D tiene núcleo. Sea D_1' una subdigráfica inducida propia de D_1, podemos suponer que $u_1, v_1 \in V(D'_1)$, denotemos $H'_1 = D'_1 - \{(u_1,v_1),(v_1,u_1)\}$ y sea D' la digráfica que se obtiene de $H_1' \cup H_2 \cup \{(u_1,u_2),(u_2,u_1)\}$ identificando v_1 con v_2, D' tiene núcleo y por (i) del Teorema 1.9 Cap. II, D_1' tiene núcleo. Así D_1 es R^- digráfica y análogamente se prueba que D_2 es R^- digráfica.

(ii) Supongamos que D_1 y D_2 son R^- digráficas. Por (i) del Teorema 1.9 del Cap. II D no tiene núcleo. Sea D' una subdigráfica inducida propia de D y $D_i' = D_i[V(D') \cap V(D_i)]$ para i=1,2; D_i' es subdigráfica inducida propia de D_i y por lo tanto es R-digráfica, para alguna i (1,2). Se sigue de (ii) del Teorema 1.9 Cap. II que D' tiene núcleo.

(Ver fig. 8)

Teorema 1.11

Sean D_1, D_2, H_1, H_2 y D como en el Teorema 1.9 Cap. II. Si H_1 y H_2 son R-digráficas, entonces D es R-digráfica si y sólo si al menos una de las digráficas D_1 y D_2 es R-digráfica.

Demostración

(i) Supongamos que D es R-digráfica.

Si D_1 no es R-digráfica, sea D_1* una R^- digráfica inducida en D_1, por el Teorema 1.2 del Cap. II $v_1, u_1 \in V(D_1*)$. Consideramos para D'_2 cualquier subdigráfica inducida (propia o no) de D_2 tal que $u_2, v_2 \in V(D'_2)$; $D[V(D_1*) \cup V(D_2')]$ tiene núcleo por lo tanto por el Teorema 1.9 del Capítulo II D_2' tiene núcleo. Si $u_2 \notin V(D_2')$ ó $v_2 \notin V(D_2')$, D_2' es subdigráfica inducida de D y por lo tanto D_2 es R-digráfica.

(ii) Supongamos que D_1 es R-digráfica. Sea D' cualquier subdigráfica inducida de D si $\{u_1, u_2, v\} \not\subseteq D'$ se sigue del Teorema 1.2 Cap. II que D es R-digráfica, de otro modo aplicando (ii) del Teorema 1.9 a $D_i = D_i[V(D') \cap V(D_i)]$ se sigue que D' tiene núcleo. Luego D es R-digráfica.

Sección 2 Extensiones de R-digráficas

Teorema 2.1

Sea D una digráfica, $f=(v,u) \in F(D)$ y D' la digráfica definida como sigue; $V(D')=V(D) \cup \{z,w\}$ y $F(D')=F(D) \cup \{(u,z),(z,w),(w,v)\}$. Entonces se satisfacen;

(a) Si D tiene núcleo, entonces D' tiene núcleo.

(b) D es R-digráfica si y sólo si D' es R-digráfica.

Demostración

(a) Sea N un núcleo de D; si $v \in N$ entonces $N \cup \{z\}$ es un núcleo de D' y si $v \notin N$ entonces $N \cup \{w\}$ es un núcleo de D'.

(b) Supongamos que D es R-digráfica y sea H' una subdigráfica inducida de D', por el Teorema 1.2 del Cap. II, podemos suponer que $\{u,v,z,w\} \subseteq V(H')$, sea $H=D[V(H') \cap V(D)]$ se sigue apli ando (a) a H que H' tiene núcleo. Luego D' es R-digráfica.

El recíproco es obvio.

Teorema 2.2

Sea D una R-digráfica; existe una R-digráfica H tal que:

(i) D es subdigráfica inducida de H.

(ii) H tiene una trayectoria $T=(x_1,\ldots,x_p)$ con $V(H)=V(T)$ y $(x_{i+1},x_i) \notin F(D)$ para $i=1,\ldots,p-1$

Demostración

Sea D una R-digráfica; $V(D)=\{v_1,\ldots,v_n\}$, consideramos; D' una digráfica definida como sigue;

$V(D') = V(D) \cup \{z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\}$

$F(D') = F(D) \cup \{(v_i, z_i), (v_{i+1}, z_i) \; / \; i=1,2,\ldots,n-1\}.$

Se sigue del Corolario 1.3 Cap. II que D' es R-digráfica. Así tenemos la sucesión $(v_1, z_1, v_2, z_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, z_{n-1}, v_n)$ que es una sucesión de los vértices de D', donde $(v_i, z_i) \in F(D')$ y $(v_{i+1}, z_i) \in F(D')$.

Definimos ahora H como sigue;

$V(H) = V(D') \cup \{w_i, u_i \; / \; i=1,2,\ldots,n-1\}$

$F(H) = F(D') \cup \{(z_i, u_i), (u_i, w_i), (w_i, v_{i+1}) / i=1,2,\ldots,n-1\}$

Si sigue del Teorema 2.1 que H es R-digráfica, por construcción D es subdigráfica inducida de H y

$T = (v_1, z_1, u_1, w_1, v_2, \ldots, v_i, z_i, u_i, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}, z_{n-1}, u_{n-1}, w_{n-1}, v_n)$

es una trayectoria en H que satisface las propiedades requeridas.

<u>Teorema 2.3</u>

Sea D una R-digráfica; existe una R^- digráfica D* tal que D es subdigráfica inducida de D*.

Consideremos H una R-digráfica con las propiedades (i) y (ii) del Teorema 2.2 del Cap. II; $V(H) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$.

Definimos D* como sigue:

$V(D^*) = V(H) \cup \{x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{3p+3}, x_{3p+4}\}$

$$F(D^*) = F(H) \cup \{(x_i, x_{i+1}) / p < i < 3p+3\} \cup \{(x_{3p+4}, x_1)\} \cup \{x_i, x_{p+1}) / 1 < i < p\}$$
$$\cup \{(x_i, x_j), (x_j, x_i) / p+1 < i < 3p+4 \;\text{ y }\; 2 < \ell(x_i, C, x_j) < p\}$$
$$\cup \{(x_i, x_j), (x_j, x_i) / p+1 < j < 3p+4 \;\text{ y }\; 2 < \ell(x_i, C, x_j) < p\}$$

donde C es el ciclo $C=(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{3p+4}, x_1)$.

Probamos ahora que D* es R^- digráfica.

D^* no tiene núcleo. Supongamos que D^* tiene núcleo y sea N^* un núcleo de D^*; $N^* \cap (V(D^*)-V(H)) \neq \phi$ (de otro modo $x_{p+1} \notin N^*$ y no existiría flecha en D^* de x_{p+1} a N^*), consideramos $i_0 = \min. \{i \,/\, x_i \in N^* \cap (V(D^*)-V(H))\}$ $p+1 < i_0 < 2p+1$, así $x_{i_{0+1}} \notin N^*$ por lo tanto existe una flecha en D^* de $x_{i_{0+1}}$ a N^*; se sigue que $x_{i_{0+p+1}} \in N^*$, así $x_{i_{0+p+2}} \notin N^*$ por lo tanto existe flecha en D^* de $x_{i_{0+p+2}}$ a N^*, se sigue que $x_j \in N^*$ donde x_j es el punto de D^* tal que $\ell(x_{i_{0+p+1}}, C, x_j) = p+1$. Luego, $N^* = \{x_{i_0}, x_{i_{0+p+1}}, x_j\}$ y $x_{j+1} \notin N^*$ (donde $x_{j+1} = x_1$ cuando $x_j = x_{3p+4}$) y no existe flecha en D^* de x_{j+1} a N^* lo que contradice a la definición de núcleo. Así D^* no tiene núcleo.

Sea $z \in V(D^*)$ probaremos que $D^* - z$ es R-digráfica.

Si $z = x_i$ para $3p+4 < i < p+1$ ó $i=1$ entonces D^*-z es R-digráfica (esto es consecuencia inmediata de los Corolarios 1.1 y 1.3 Cap. II). Si $z = x_i$ para $2 < i < p$, consideramos D' una subdigráfica inducida de $D^* - z$, cuando $x_i \notin D'$ para algún $3p+4 < i < p+1$ ó $i=1$, D' tiene núcleo; y cuando $x_i \in D'$ para todo $3p+4 < i < p+1$ y $i=1$, consideramos $j_0 = \min\{i \,/\, x_i \notin D'\}$, $2 < j_0 < p$ y ahora, es fácil checar que $\{j_0-1, j_{0+p+1}, j_{0+2p+2}\}$ es un núcleo de D'. Así $D^* - z$ es R-digráfica para cualquier $z \in V(D^*)$.

(Ver fig. 9)

<u>Corolario 2.1</u>

Para cada $k > 0$ existen R^- digráficas de número dicromático mayor o igual que k.

<u>Demostración</u>

Es consecuencia inmediata del Corolario 1.5 del Cap. I y del Teorema 2.3 Cap. II.

Capítulo III Acerca de una Conjetura de H. Meyniel sobre R-digráficas.

Sección 1. Un contraejemplo a una Conjetura de H. Meyniel sobre R-digráficas.

(H. Galeana Sánchez) (H.G.1)

He probado que la siguiente conjetura es falsa.

Conjetura 1.1 (D.M.1) (H. Meyniel 1976).

Sea D una digráfica si todo ciclo impar de D posee dos pseudodiagonales entonces D es R-digráfica.

Claramente el siguiente Teorema prueba la falsedad de la Conjetura 1.1

Teorema 1.1

Para todo $k > 2$, $k \in \mathbb{N}$, existe una digráfica sin núcleo en la cual cada ciclo impar tiene al menos k pseudodiagonales.

Demostración

A lo largo de la demostración todas las sumas serán escritas módulo 8k+4.

Sea D la digráfica con conjunto de vértices:

$V(D) = \{0,1,\ldots,8k+3\}$ y flechas:

$(i,i+1)$ para todo $0 < i < 8k+3$, $(i_0+2i, 4k+2+i_0)$ para todo $0 < i < k$ para todo $i_0 \in \{0,2k+1,4k+2,6k+3\}$. Sea $C = (0,1,2,\ldots,8k+3,0)$ el ciclo par de D con $V(C)=V(D)$; es fácil ver que lo ciclos impares de D son:

$(4k+2+i_0, C, i_0+2i) \cup (i_0+2i, 4k+2+i_0)$ para todo $0 < i < k$ y para todo $i_0 \in \{0, 2k+1, 4k+2, 6k+3\}$. Claramente el ciclo dirigido impar $(4k+2+i_0, C, i_0+2i) \cup (i_0+2i, 4k+2+i_0)$ tiene las diagonales $(4k+2+i_0+2j, i_0)$ para todo $0 < j < k$. D no tiene núcleo:

En otro caso, supongamos que N es un núcleo de D entonces:

$0 \in N \Rightarrow (4k+2 \notin N, 2k+1 \notin N, 6k+3 \notin N)$

$6k+3 \notin N$ y $4k\ 2 \notin N \Rightarrow 2k\ 2 \notin N$.

Así, $0 \in N \Rightarrow (2k\ 1 \notin N, 2k\ 2 \notin, 6k\ 3 \notin N)$.

Esto es imposible, y concluimos $0 \notin N$. Similarmente, podemos probar que $2k+1 \notin N$, $4k+2 \notin N$ y $6k+3 \notin N$. También $0 \notin N$ y $4k+2 \notin N \Rightarrow 2k \notin N$. Así, obtenemos $2k \notin N$, $2k+1 \notin N$ y $4k+2 \notin N$, lo cual es imposible también. Concluimos que D no tiene núcleo.

D-z es R-digráfica para cada $z \in V(D)$

Supongamos primero $0 < z < 2k$; cuando $z+1 < 2k$ tenemos que $z+1$ está en a lo más un ciclo impar de D-z, así por 4.A(6) tenemos que D-z es R-digráfica si y sólo si $D-\{z,z+1\}$ es R-digráfica. Del mismo modo tenemos que D-z es R-digráfica si y sólo si $D-\{i | z < i < 2k\}$ es R-digráfica. Ahora consideramos $z-1$; si $z-1 > 0$, entonces $z-1$ está en a lo más un ciclo impar de $D-\{i | z < i < 2k\}$, así por 4.A(6) tenemos que $D-\{i | z < i < 2k\}$ es R-digráfica si y sólo si $D-(\{i | z < i < 2k\} \cup \{z-1\})$ es R-digráfica. Del mismo modo tenemos que $D-\{i | z < i < 2k\}$ es R-digráfica si y sólo si $D-(\{i | z < i < 2k\} \cup \{j | 0 < j < z\})$ es R-digráfica. Notamos ahora que $8k+3$ está en exactamente un ciclo de $D-\{i | 0 < i < 2k\}$; por 4.A(6) tenemos que $D-\{i | 0 < i < 2k\}$ es R-digráfica si y sólo si

$D-\{i | 0 < i < 2k\} \cup \{8k+3\}$ es R-digráfica y del mismo modo se tiene que

$D-\{i|0 < i < 2k\}$ es R-digráfica si y sólo si,

$D' = D-(\{i|0 < i < 2k\} \cup \{j|6k+4 < j < 8k+3\})$ es R-digráfica, D' tiene exactamente un ciclo impar, luego por 4.A(6) D' es R-digráfica. Y se concluye que D-z es R-digráfica.

Así; D es R^- digráfica.

(Ver fig. 10)

$D-(0,1)$ es R-digráfica si $D-\{1\}$ es R-digráfica; luego $D-(0,1)$ es R-digráfica. Aplicando el Teorema 1.6 del Capítulo II es posible encontrar un conjunto infinito de comtraejemplos a la Conjetura 1.1 a partir del contraejemplo aquí exhibido.

Fig. 2

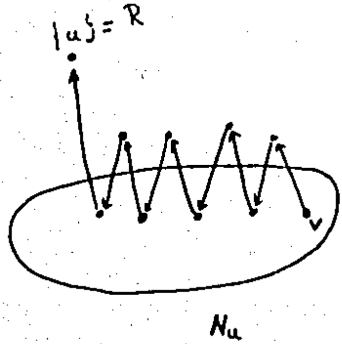


Fig. 3

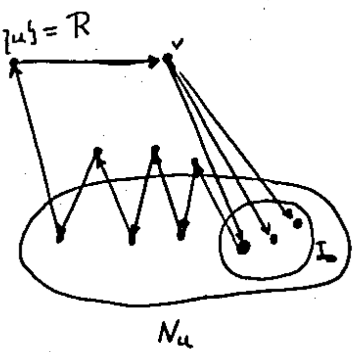


Fig. 4

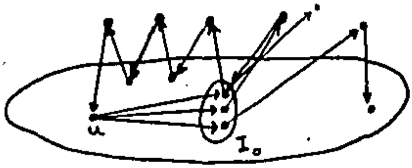


Fig. 5

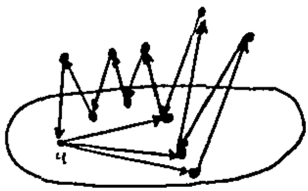
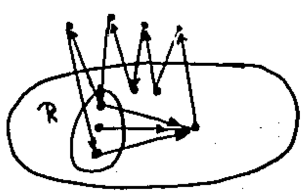


Fig. 6



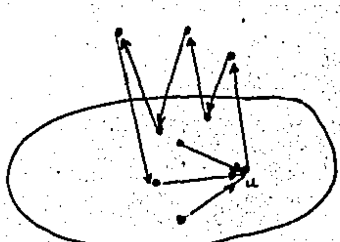
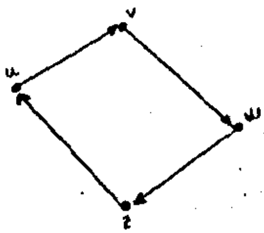
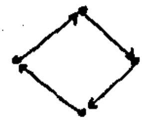


Fig. 7

$D =$



$\alpha_v =$



$\alpha_w = \bullet$

$\alpha_z =$

$\alpha_u = \bullet$

$$\sum_{u,D} \alpha_u$$

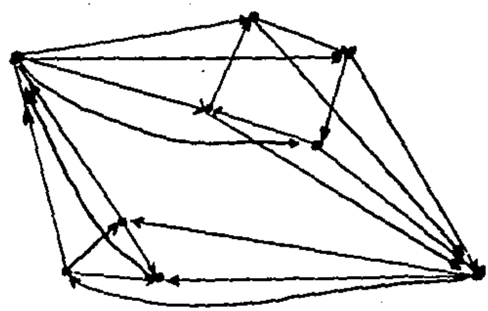
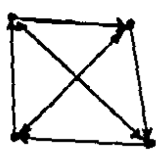
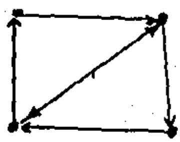


Fig. 8

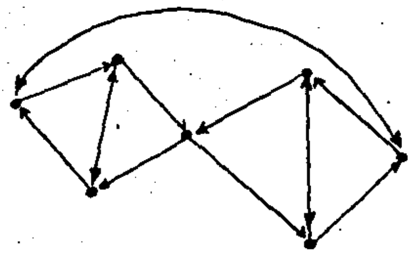
$D =$



es R^- digráfica



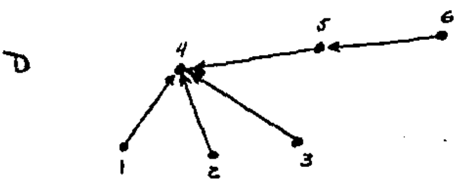
es R-digráfica



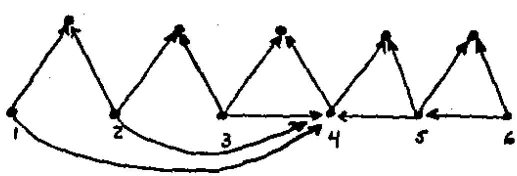
es R^- digráfica

Fig. 9

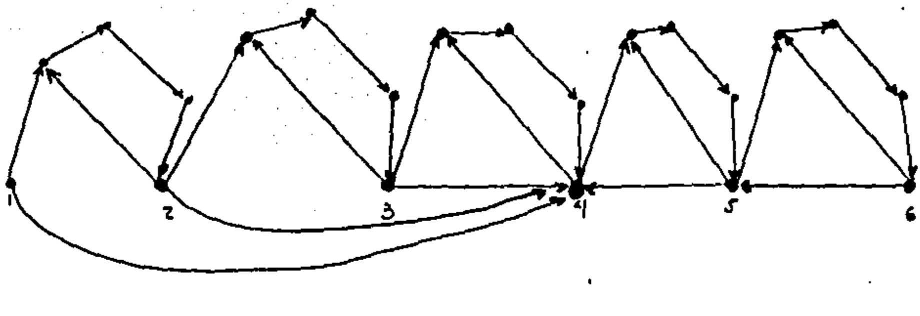
Extensión de una R-digráfica a una R-digráfica que tiene una trayectoria generadora.



1er. paso



2do. paso



Extensión de una R-digráfica que tiene una trayectoria generadora a una R^- digráfica.

Ilustramos el caso p=4

Sea D una R-digráfica con $p=|V(D)|=4$

$T=(z_1,z_2,z_3,z_4)$ una trayectoria generadora de D.

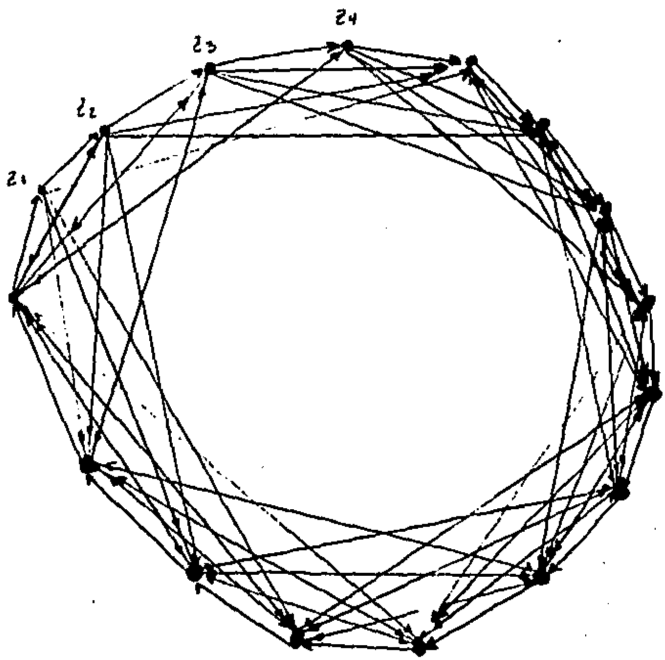
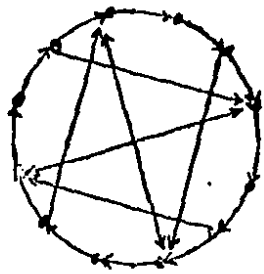


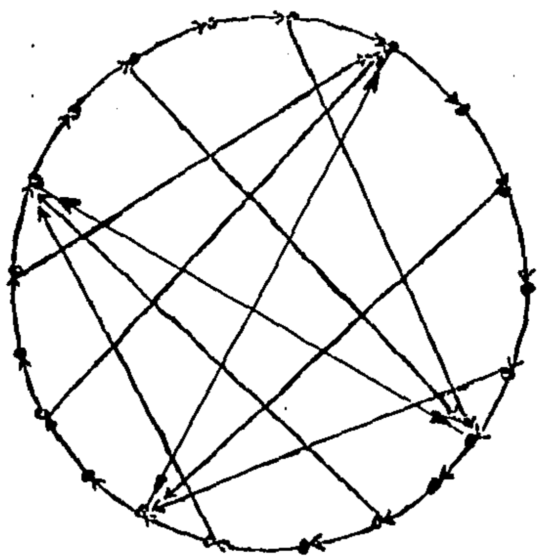
Fig. 10

Contraejemplo k=1



D_1

Contraejemplo k=2



D_2

Análisis

En la Sección 1 del Capítulo I se presentan los conceptos y teoremas fundamentales que constituyen una herramienta imprescindible para el desarrollo del presente trabajo; el Teorema 1.1 y Teorema 1.2 permiten extender un seminúcleo no trivial a un núcleo y así mismo nos dicen que una R^- digráfica no puede tener un seminúcleo no vacío (un hecho simple que permitió encontrar propiedades interesantes de las R^- digráficas).

En la Sección 2 del Capítulo I se encuentran relaciones entre la existencia de seminúcleos fuertes módulo R y trayectorias k-normales; el principal Teorema de esta Sección es el Teorema 2.1 del cual se deducen de manera fácil los Teoremas 2.2 y 2.3, sin embargo los Teoremas 2.2 y 2.3 son resultados de aplicación más directa para la investigación de las R^- digráficas. El resto de los resultados del Capítulo I son casos particulares (en los que $R=\{u\}$ $u \in V(D)$ y $k=N_v$ núcleo de D-V) de los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.3, pero que están ya intimamente relacionados con la estructura de R^- digráficas.

En la Sección 3 del Capítulo I, se hace una recopilación de lo antes expuesto, (para las R^- digráficas) en esta Sección se exponen algunas propiedades interesantes de las R^- digráficas; todas son consecuencia inmediata de los Teoremas de la Sección 2 del Capítulo I.

En la Sección 4 del Capítulo I; en vista del hecho de que una digráfica que no es R-digráfica contiene una R^- digráfica inducida y usando las propiedades de las R^- digráficas obtenidas en la Sección 3 del Capítulo I, se dan condiciones suficientes para que una digráfica sea R-digráfica; esto se hace pidiendo que toda subdigráfica inducida tenga alguna propiedad que haga imposible que se satisfagan las propiedades ya conocidas de las R^- digráficas.

En el Capítulo II se investigan algunas operaciones que aplicadas a R^- digráficas permiten obtener nuevas R^- digráficas y que aplicadas a R-digráficas se obtienen R-digráficas; permitiéndonos obtener una gran variedad de interesantes ejemplos de R^- digráficas y de R-digráficas (esto en la Sección 1).

En la Sección 2 del Capítulo II se hace ver que si D es una R-digráfica, siempre existe una R^- digráfica D' tal que D es subdigráfica inducida de D'; lo cual nos dice que no es posible dar una caracterización de las R^- digráficas a través de subdigráficas prohibidas.

En el Capítulo III se da un contraejemplo a una conjetura planteada por H. Meyniel.

Bibliografía

(D.1) P. Dichet.

Representation; noyaux en theorie des graphes et hipergraphes. 1979.

(D.M.1) P. Dichet y H. Meyniel, A note on Kernel Critical Graphs, Discrete Mathematics 33 (1981) 103-105 (North-Holland Publishing Company).

(G.N.1) H. Galeana Sánchez y Víctor Neumann Lara. Sobre Núcleos y Seminúcleos en Digráficas. En Preparación.

(G.N.2) H. Galeana Sánchez y Víctor Neumann Lara. Sobre R⁻ digráficas. En Preparación.

(H.G.I.) Hortensia Galeana Sánchez. A Counterexample to a Conjeture of Meyniel on KP-Graphs. Discrete Mathematics 41(1982) 105-107 (North-Holland Publishing Company).

(N.M.1) John Von Neumann and Oskar Morgestern. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press.

(R.Z.1) Romanowicz, Zbiqniew. An note on the theorem of Richardson (Polish. English and Russian Summaries). 1975.

(V.N.1) Víctor Neumann Lara. Seminúcleos de una digráfica Anales del Instituto de Matemáticas II año 1971 Universidad Nacional Autónoma de México.

(V.N.2) Víctor Neuman Lara. El número dicromático de una digráfica. Publicaciones Preliminares del Instituto de Matemáticas No. 24 del año 1981. Universidad Nacional Autónoma de México.

'ggm.