00384
1
1ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

AUTOMORFISMOS, ALGEBRAS TORCIDAS Y CUBIERTAS.

T E S I S

Que para obtener el título de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

00384
1983

P r e s e n t a :

José Antonio Stephan de la Peña Mena

Becario del Instituto de Matemáticas

México, D. F. Febrero, 1983

Introducción

Recientemente, el uso de técnicas cubrientes se ha puesto en voga en la Teoría de Representaciones de Algebras (ver por ejemplo [BG], [G2], [BAG], [MP1]). En todos estos trabajos aparecen en forma natural grupos de automorfismos de álgebras y de otras estructuras asociadas (carcaj ordinario, carcaj de Auslander-Reiten). Parte de la motivación y desarrollo de este trabajo se avoca a la comprensión de la estructura de los grupos de automorfismos de álgebras y de sus conexiones con los automorfismos de las otras estructuras mencionadas.

Por otra parte, las cubiertas, que han demostrado ya ampliamente su utilidad, pueden verse como construcciones asociadas al álgebra en estudio y a ciertos grupos. Luego, resulta de amplio interés obtener nuevas construcciones asociadas a álgebras y a grupos, de forma que dichas construcciones reflejen las propiedades que nos interesa estudiar y simultáneamente tengan una estructura más simple.

Para que una construcción resulte de interés en la Teoría de Representaciones debería al menos preservar el tipo de representación de las álgebras. Además de las cubiertas ([G2], [MP2]), hay al menos una construcción que satisface estas propiedades: las álgebras torcidas ([RR]). En este trabajo estudiaremos este concepto y obtendremos importantes relaciones de éste con las cubiertas. Finalmente, aplicaremos los resultados obtenidos en algunos casos particulares.

La primera sección tiene caracter introductorio, en ella exponemos brevemente algunos resultados de la Teoría que nos serán de utilidad en el resto del trabajo.

En la segunda sección estudiamos el grupo de automorfismos de un álgebra básica e indescomponible (este es el caso más importante en la Teoría). Describimos algunos subgrupos importantes y sus relaciones con el carcaj de Auslander-Reiten.

Las secciones 3 y 4 introducen el concepto de álgebra torcida y algunas propiedades básica. Algunos de los resultados allí presentados se deben a I. Reiten y Ch. Riedtmann, sin embargo las pruebas fueron obtenidas independientemente.

En la sección 5 describimos la descomposición en módulos inescindibles para los módulos inducidos en el álgebra torcida. Estas descomposiciones serán muy útiles a lo largo del resto del trabajo. En particular aplicaciones de ella se dan en la sección 6, donde se prueba que ciertas propiedades importantes del álgebra (tilteada, tener (P)-familia, conexidad) se preservan bajo torcimiento.

En la sección 7 construímos el carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra torcida, conociendo el carcaj -el álgebra original.

Esto se hace por medio de ciertas relaciones entre los es tabilizadores de módulos inescindibles.

En la sección 8 probamos algunos de los resultados más importantes del trabajo. Vemos que torcer a un álgebra Λ por medio de un grupo de Λ-automorfismos que fije vértices, resulta en la construcción de una cubierta de Λ. El resultado inverso es también cierto, cubiertas de Λ determinadas por grupos solubles pueden obtenerse a partir de Λ por medio de sucesivas operaciones de torcimiento por medio de grupos que fijan vértices.

En las secciones 9 y 10 se aplican los resultados en casos particulares. En 9, se ve que la propiedad de que la cubierta universal de Λ tenga ciclos dirigidos puede leerse en el grupo de Automorfismos de Λ. Por medio de ello, caracterizamos las álgebras estándar.

En la última sección (10), vemos que el rango del grupo fundamental de un álgebra cociente de hereditaria (sin ciclos en su carcaj ordinario) puede calcularse inductivamente por medio de una función en los vértices del álgebra.

Indice

1.A: ALGEBRAS Y CARCAJES

En esta primera sección introduciremos los conceptos básicos que serán usados a lo largo del trabajo. Enunciaremos sin pruebas algunos de los resultados importantes.

Como referencias generales usaremos [AF] para anillos y módulos y [CLS] ó [G1] para la relación entre las álgebras, los carcajes y la teoría de representaciones de álgebras.

Fijamos ahora y para el resto del trabajo un campo k que supondremos algebraicamente cerrado.

Un carcaj Q es símplemente una gráfica orientada. Por Q_0 denotamos el conjunto de sus vértices y por Q_1 al de sus flechas. Además, tenemos funciones $s, e : Q_1 \longrightarrow Q_0$, donde para una flecha $\alpha \in Q_1$, $s(\alpha)$ denota el principio de α y $e(\alpha)$ su punto final.

Un camino dirigido en Q es una sucesión de flechas $\alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_1$ donde $s(\alpha_{i+1}) = e(\alpha_i)$ para $i=1,\dots,n-1$. Decimos que este camino va de $s(\alpha_1)$ a $e(\alpha_n)$ y que tiene longitud n. Dado un vértice $x \in Q_0$, llamamos τ_x al camino trivial que va de x en x, y que no involucra flecha alguna.

El álgebra de caminos kQ asociada a Q es la k-álgebra que como espacio vectorial es libre sobre la colección de todos los caminos dirigidos de Q. El producto de dos caminos se de fine pegando los caminos cuando esto es posible y como 0 si no lo es.

En este trabajo supondremos, salvo que se especifique lo contrario que Q es finito. En ese caso $1 = \sum_{x \in Q_0} \tau_x$ es el elemento unidad del álgebra kQ; además, $\{\tau_x | x \in Q_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de kQ.

La indescomponibilidad del álgebra kQ es equivalente a la conexidad del carcaj Q.

Por F denotaremos el ideal izquierdo de kQ generado por caminos de longitud 1 (las flechas). F resulta ser un ideal bilateral y como espacio vectorial tiene por base los caminos de longitud mayor o igual a 1.

Un ideal bilateral I de kQ se llama admisible si $I \subset F^2$ y para alguna $n \in N$, $F^n \subset I$.

Escribiremos $k(Q,I) := kQ/I$ que es una álgebra de dimensión finita sobre k, indescomponible y básica, con $\{\bar{\tau}_x | x \in Q_0\}$ como sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivas.

Una pareja de la forma (Q,I) con Q carcaj e I ideal admisible de kQ se llama carcaj con relaciones. Un morfismo $f : (Q,I) \longrightarrow (A,J)$ entre dos carcajes con relaciones, es una función que envía vértices de Q en vértices de A, flechas de Q en flechas de A, de forma que si $\alpha \in Q_1$,

$f(s(\alpha)) = s(f(\alpha))$ y $f(e(\alpha)) = e(f(\alpha))$. Además, f debe preservar las relaciones dadas: si $\rho = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\mu_i \in I$, con $\lambda_i \in k$ y μ_i camino dirigido en Q, $f(\rho) = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(\mu_i) \in J$.

Claramente, un morfismo de carcajes con relaciones $f(Q,I) \longrightarrow (A,J)$ induce un morfismo de k-álgebras, $k(f) : k(Q,I) \longrightarrow k(A,J)$.

Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Como estamos interesados en el estudio de las propiedades de la categoría de módulos $\mathrm{Mod}\Lambda$, podemos suponer que Λ es básica e indespomponible.

Podemos ahora asociar a Λ un carcaj Q de la manera si guiente: sea $\{e_i \mid i=1,\ldots,n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de Λ, Q tiene n vértices, $Q_0 = \{1,\ldots,n\}$ y si $i,j \in Q_0$ hay $n_{ij} := \dim_k \; e_j\frac{\mathrm{rad}\Lambda}{\mathrm{rad}^2\Lambda}e_i$ flechas de i en j.

Para cada $i,j \in Q_0$ escojamos una base $\{\bar{y}_\alpha\}_{\alpha\in A_{ij}}$, donde $y_\alpha \in e_j\mathrm{rad}\Lambda\, e_i$, de $e_j\frac{\mathrm{rad}\Lambda}{\mathrm{rad}^2\Lambda}e_i$ y podemos tomar $A_{ij}=\{\alpha \mid i\xrightarrow{\alpha}j\}$

Para definir $\phi : kQ \longrightarrow \Lambda$ basta dar sus valores en los elementos de la base de kQ sobre k. Así, $\phi(\tau_i) = e_i$ para $i \in Q_0$ y para $i \xrightarrow{\alpha} j$ en Q_0, $\phi(\alpha) = y_\alpha$. No es difícil mostrar que ϕ es suprayectiva y que $I = \mathrm{Ker}\phi$ es ideal admisible de kQ, de forma que resulta $\Lambda \cong k(Q,I)$.

De esta forma el estudio de las álgebras se puede reducir al de los carcajes con un ideal admisible. Veremos que ModA se puede interpretar también en este contexto.

Sea (Q, I) un carcaj con relaciones. Una relación $\rho \in I$ se llama legible si $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_i$ con $\lambda_i \in k$, γ_i camino dirigido en Q de forma que $s(\gamma_i) = s(\gamma_j)$, $e(\gamma_i) = e(\gamma_j)$, para todo par $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Siempre puede generarse I por medio de un número finito de relaciones legibles.

Una k-representación V de Q consta de una familia de k-espacios vectoriales $(V(x))x \in Q_0$ y de transformaciones lineales $(V(\alpha) : V(x) \longrightarrow V(y) \mid x \xrightarrow{\alpha} y$ en $Q_1)$. Un morfismo $\phi : V \longrightarrow V'$ de representaciones de Q es una colección de transformaciones lineales $\phi = (\phi_x : V(x) \longrightarrow V'(x))_{x \in Q_0}$ tal que para cada flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Q_1 el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} V(x) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "\phi_x"'] & V(y) \arrow[d, "\phi'_y"] \\ V'(x) \arrow[r, "V'(\alpha)"] & V'(y) \end{tikzcd}$$

Dado $\gamma = \alpha_n \cdot \ldots \cdot \alpha_1$ camino dirigido no trivial en Q, podemos evaluar la representación V de Q en γ como sigue:

$$V(\gamma) = V(\alpha_n) \ldots V(\alpha_1) : V(x) \longrightarrow V(y), \quad \text{donde}$$
$$x = s(\alpha_1), \; y = e(\alpha_n).$$

Si $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_i$ es relación legible, podemos evaluar V en ρ : $V(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V(\gamma_i)$. Decimos que V satisface la relación ρ si $V(\rho) = 0$.

En general V satisface el ideal admisible I, si $V(\rho) = 0$ para toda relación legible $\rho \in I$, ó equivalentemente, si V satisface un sistema generador de relaciones legibles.

Denotamos por $\mathrm{Mod}(Q,I)$ a la categoría de las k-representaciones que satisfacen I, con los morfismos de representaciones.

Si tenemos un álgebra Λ de dimensión finita sobre k, indescomponible y básica con $\Lambda \cong k(Q,I)$ con Q carcaj e I ideal admisible, obtenemos que $\mathrm{Mod}\Lambda \cong \mathrm{Mod}(Q,I)$. De esta forma el estudio de los módulos se reduce al de las representaciones de un carcaj que satisfacen un ideal admisible.

Los módulos finitamente generados $\mathrm{mod}\Lambda$ corresponden bajo este isomorfismo a las representaciones $V \in \mathrm{Mod}(Q,I)$ con $V(x)$ de dimensión finita para cada $x \in Q_0$. Esta subcategoría de $\mathrm{Mod}(Q,I)$ será denotada como $\mathrm{mod}(Q,I)$.

Algunos módulos especiales tienen en $\mathrm{mod}(Q,I)$ una descripción particularmente sencilla. Los módulos simples corresponden a las representaciones $(S_x)_{x\in Q_0}$, de forma que $S_x(y)$ tiene dimensión 1 ó 0 dependiendo de si $x = y$ ó no. Los mó dulos proyectivos inescindibles son de la forma $P_x = (x,-)$ con $x \in Q_0$ y los inyectivos inescindibles, $I_x = D(-,x)$ con $x \in Q_0$, donde D denota la dualidad usual respecto al campo k.

Una de las metas de la teoría de representaciones de Algebra es llegar a clasificar todas las álgebras Λ que tienen sólo un número finito de clases de isomorfía de módulos inescindibles finitamente generado. Un álgebra que satisface esta condición se dice que es de tipo de representación finito (t.r.f.).

Supongamos que $\Lambda = k(Q,I)$ es un álgebra de tipo de representación finita y que $P_1 = (x_1,-)$, $P_2 = (x_2,-)$ son dos proyectivos inescindibles. Un conocido resultado de Jans [J] nos dice que $(x_1,x_1) = End_\Lambda(P_1)$ es un álgebra uniserial -o sea, con una única serie de composición, a saber, la serie radical-, y que $(x_1,x_2) = Hom_\Lambda(P_1,P_2)$ es un $End_\Lambda(P_2)$ módulo izquierdo uniserial ó un $End_\Lambda(P_2)$ módulo derecho uniserial y en todo caso un bimódulo uniserial sobre estas álgebras.

También, de [J] y [GO] se sigue que en esta situación el carcaj Q no tiene flechas dobles, o sea, los números $n_{ij} = dim_k\, e_j \frac{rad\Lambda}{rad^2\Lambda} e_i$ son menores o iguales a 1.

Como la situación que nos interesa está relacionada con el tipo de representación finita, convendremos en suponer que los carcajes con lo que trabajamos no tienen flechas dobles.

Cuando el álgebra Λ es de tipo de representación finita, podemos esperar también describir totalmente la categoría ModΛ. Un conocido teorema de M. Auslander [A] nos dice que en esta situación todo Λ-módulo, finitamente generado ó no, es suma directa de módulos inescindibles finitamente generado; luego, basta describir los morfismos entre los módulos inescindibles. Para esta tarea, la herramienta más útil son los morfismos irreducibles. Un morfismo f en modΛ se dice irreducible si no es sección ni retracción, pero siempre que $f=gh$, h será sección ó g retracción. Se sabe que si Λ es de t.r.f. todo morfismo es combinación lineal de composiciones de morfismos irreducibles entre inescindibles, en caso de ir entre inescindibles y no ser isomorfismo.

Llamamos indΛ a la subcategoría plena de modΛ cuyos objetos son un representante de cada clase de isomorfía de los módulos inescindibles. Un morfismo irreducible $f : M \longrightarrow N$ en indΛ tiene una descripción simple si N es proyectivo ó si M es inyectivo. En efecto, en el primer caso f es la inclusión de un sumando directo de rad$N$, y en el segundo f es la proyección a un sumando directo de $M/\mathrm{soc}M$.

Para los casos restantes se introducen en [AR] las sucesiones que casi se dividen, también conocidas como sucesiones de Auslander-Reiten. Una sucesión exacta que no se escinde $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ con A y C inescindibles se dice de Auslander-Reiten cuando para todo morfismo $h : X \longrightarrow C$ que no sea restricción, existe $f : X \longrightarrow B$ tal que $h = gf$. Cuando C es un módulo inescindible y no proyectivo, existe una única sucesión de Auslander-Reiten que termina en C, $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$. La asociación $C \longrightarrow A$ establece una biyección entre los módulos inescindibles no proyectivos y los inescindibles no inyectivos. Dicha correspondencia se denota por Dtr y su inversa por TrD.

Si $A \xrightarrow{f_i} B_i$ $i \in 1,\ldots,n$ son todos los morfismos irreducibles que comienzan en A, entonces $f = (f_1,\ldots,f_n)$ y $B = \bigoplus_{i=1}^{n} B_i$, y dualmente para C.

1.B. CUBIERTAS

El concepto de carcaj de Auslander-Reiten tiene una generalización natural: un carcaj de translación Γ es un carcaj no necesariamente finito sin flechas dobles ni lazos junto con una inyección $\tau : \Delta \longrightarrow \Gamma_\circ$ definida en un subconjunto Δ de $\Gamma_\circ$ y tal que $x^- = (\tau x)^+$ para toda $x \in \Delta$, donde x^- denota los vértices de $\Gamma_\circ$ desde donde llegan flechas a x y x^+ los vértices a donde llegan flechas desde x. Las relaciones de malla en Γ forman el ideal M_Γ de $k\Gamma$ generado para cada $x \in \Delta$ por la suma de todos los caminos de longitud dos de τx a x. La categoría de malla de Γ, denotada por $k(\Gamma)$ es el cociente $k\Gamma/M_\Gamma$.

Obviamente un carcaj de Auslander-Reiten Γ_Λ es de translación con $\tau = Dtr$.

Si Λ es de t.r.f. y llamamos $\mathrm{ind}\Lambda$ a la subcategoría plena de $\mathrm{mod}\Lambda$ cuyos objetos son un representante de cada clase de isomorfía de Λ-módulos inescindibles, se dice que Λ es álgebra estándar si $\mathrm{ind}\Lambda \cong k(\Gamma_\Lambda)$. Para este concepto, consultar [BoG]. Si $\Lambda = k(Q,I)$ con Q sin ciclos dirigidos, Λ resulta estándar.

Un morfismo $\phi : (\Delta,\sigma) \longrightarrow (\Gamma,\tau)$ de carcajes con translación se dice que es cubriente si satisface:

i) para toda $x \in \Delta_\circ$, los morfismos $x^+ \longrightarrow (\phi(x))^+$ y

$x^- \longrightarrow (\phi(x))^-$ inducidos por ϕ son biyectivos.

ii) $\sigma(x)$ está definido siempre que $\tau(\phi(x))$ lo está.

Riedtmann prueba que para todo carcaj con translación (Γ,τ) existe un objeto universal $\Pi : (\tilde{\Gamma},\tilde{\tau}) \longrightarrow (\Gamma,\tau)$ en la categoría de las cubiertas de (Γ,τ). Dicha cubierta está definida por la acción de un grupo $\Pi_1(\Gamma,\tau)$ llamado el grupo fundamental de (Γ,τ).

Si $\Gamma = \Gamma_\Lambda$ el carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra Λ de t.r.f., resulta según [B, G] que $\Pi_1(\Gamma_\Lambda,\tau)$ es un grupo libre. Este resultado es muy importante.

Las cubiertas pueden ser definidas en general. De los varios posibles enfoques usaremos los desarrollados en [P], [MP1].

Sea (Q,I) un carcaj con relaciones, un grupo de automorfismos G de (Q,I) se llama admisible si ninguna órbita de G en Q_0 tiene más de un vértice en un conjunto de la forma x^+ ó x^- con $x \in Q_0$. En este caso, el carcaj de órbitas Q/G también resulta sin flechas dobles y el morfismo natural $\Pi : Q \longrightarrow Q/G$ induce biyecciones $x^+ \longrightarrow (\Pi(x))^+$ y $x^- \longrightarrow (\Pi(x))^-$. Si $\bar{I} = \Pi(I)$ es el ideal de $Q/G =: \bar{Q}$ inducido por I, se dice que $\Pi : (Q,I) \longrightarrow (\bar{Q}, \bar{I})$ es un morfismo cubriente de carcajes definido por la acción del grupo G.

Un carcaj con relaciones (Q,I) también admite una cubier ta universal (generalmente infinita) que se construye de la si guiente manera: sea W el conjunto de todos los caminos no orientados de Q, o sea, para cada flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Q admitimos $y \xleftarrow{\alpha^{-1}} x$. Denotamos por $\sim$ la relación de equivalencia en W inducida por las siguientes relaciones elementales:

a) Si $x \xrightarrow{\alpha} y$ es flecha en Q, entonces $\alpha\alpha^{-1} \sim \tau_y$, $\alpha^{-1}\alpha_x \sim \tau_x$.

b) Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \in I(x,y)$ es relación mínima, esto es, que para cualquier $\phi \neq K \subsetneq \{1,\ldots,n\}$, $\sum_{i \in K} \lambda_i \mu_i \notin I(x,y)$, $\mu_i \sim \mu_j$ para todo par $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

c) Si $\mu \sim \nu$ por medio de a) ó b) entonces $\omega'\mu\omega \sim \omega'\nu\omega$ siempre que estos productos estén definidos.

La relación $\sim$ se llama homotopía: $\tilde{Q}$ es una componente conexa de $W/\sim$ (todas las componentes son isomorfas), donde se pone $x_1 \longrightarrow x_2$ si y solamente si existen $\omega_1, \omega_2 \in W$ con $s(\omega_1) = s(\omega_2)$, $x_1 = [\omega_1]$, $x_2 = [\omega_2]$ y hay una flecha α en Q con $\omega_2 = \alpha\omega_1$.

Denotamos por $\Pi : \tilde{Q} \longrightarrow Q$ al morfismo que envía $[\omega] \longrightarrow e(\omega)$. Si $\tilde{I}$ es el ideal de $\tilde{Q}$ generado por los levantamientos de relaciones mínimas y cero, $\Pi : (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (Q,I)$ resulta ser la cubierta universal. Está determinada por la acción del grupo $\Pi_1(Q,I)$, el grupo fundamental de (Q,I)

según la relación de homotopía $\sim$. Este grupo también puede representarse de la siguiente forma: si x, y $\tilde{Q}_0$ con $\Pi(x) = \Pi(y)$, definimos $g_{x,y} : \tilde{Q}_0 \longrightarrow \tilde{Q}_0, z \longmapsto zx^{-1}y$, así, $\Pi_1(Q,I) = \{g_{x,y} \mid \Pi(x) = \Pi(y)\}$.

Dada una cubierta $p : (\bar{Q},\bar{I}) \longrightarrow (Q,I)$, el funtor inducido $k(p) : k(\bar{Q},\bar{I}) \longrightarrow k(Q,I)$ resulta ser cubriente, esto es, satisface la siguiente condición: para $x = p(\bar{x})$, $y \in Q_0$

$$\underset{\Pi\bar{y}=y}{\oplus} k(\bar{Q},\bar{I})(\bar{x},\bar{y}) \cong k(Q,I)(x,y) \quad \text{y} \quad \underset{\Pi\bar{y}=y}{\oplus} k(\bar{Q},\bar{I})(\bar{y},\bar{z}) \cong k(Q,I)(y,x),$$

mediante los morfismos inducidos por $k(p)$.

En el caso en que Λ es álgebra estándar, la cubierta universal coincide con la definida por Gabriel [G 2]. Sea $p : \tilde{\Gamma}_\Lambda \longrightarrow \Gamma_\Lambda$ la cubierta universal del carcaj de Auslander-Reiten Γ_Λ. Y $k(p) : k(\tilde{\Gamma}_\Lambda) \longrightarrow k(\Gamma_\Lambda)$ el funtor cubriente inducido. Siendo Λ estándar $\Lambda \hookrightarrow \operatorname{ind}\Lambda \cong k(\Gamma_\Lambda)$ y $k(p)$ puede restringirse a la imagen inversa de Λ, $\tilde{\Lambda}$ dando lugar al funtor cubriente F tal que

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Lambda} & \longrightarrow & k(\tilde{\Gamma}_\Lambda) \\ F \downarrow & G & \downarrow k(p) \\ \Lambda & \longrightarrow & k(\Gamma_\Lambda). \end{array}$$

Existen carcajes con relaciones $\tilde{\Lambda} = k(\bar{Q},\bar{I})$ y $\Lambda = k(Q,I)$ y un morfismo cubriente $\Pi : (\bar{Q},\bar{I}) \longrightarrow (Q,I)$ tal que $k(\Pi) = F$.

$\tilde{\pi}$ resulta ser la cubierta universal de (Q,I).

En este caso además, $(\tilde{Q},\tilde{I})$ no tiene ciclos dirigidos y $\Pi_1(Q,I) = \Pi_1(\Gamma_A)$ es un grupo libre.

2. EL GRUPO DE AUTOMORFISMOS DE UN ALGEBRA.

En esta sección veremos algunos resultados generales sobre la estructura del grupo de automorfismos de un álgebra y de algunos de sus subgrupos relevantes.

Supondremos que Λ es un álgebra básica e indescomponible de dimensión finita sobre el campo algebraicamente cerrado k. Además, el carcaj Q asociado a Λ no tiene flechas dobles. Elegimos un ideal admisible de forma que $\Lambda = k(Q,I)$.

Por $\mathrm{Aut}\Lambda$ denotaremos al grupo de k-automorfismos de Λ que determinan una permutación del conjunto de idempotentes $\{\bar{\tau}_x \mid x \in Q_0\}$ de Λ. O sea, $\mathrm{Aut}\Lambda$ es el grupo de automorfismos de la categoría asociada a Λ cuyos objetos son $\{\bar{\tau}_x \mid x \in Q_0\}$ y con homomorfismos de $\bar{\tau}_x$ a $\bar{\tau}_y$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_x, P_y)$. Esto lo hacemos así, debido a que las técnicas que empleamos son de caracter diagramático.

Un subgrupo importante de $\mathrm{Aut}\Lambda$ es el grupo de automorfismos que fija todos los vértices, a este subgrupo lo denotaremos $\mathrm{Aut}_0\Lambda$.

(2.1) <u>Lema</u>: $\mathrm{Aut}_0\Lambda$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}\Lambda$. $\mathrm{Aut}(Q,I)$ es subgrupo de $\mathrm{Aut}\Lambda$.

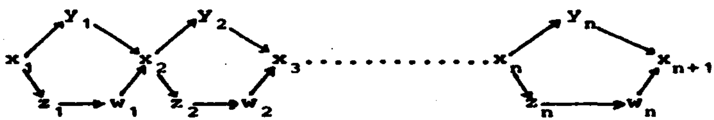
<u>Demostración</u>: La primera de las dos afirmaciones es clara. Para la segunda basta observar que $\sigma : \mathrm{Aut}(Q,I) \longrightarrow \mathrm{Aut}\Lambda, g \longmapsto k(g)$ es morfismo de grupos inyectivo//

Parte del trabajo se concentrará en el estudio de estos subgrupos de $\mathrm{Aut}\Lambda$. Comencemos por ver que se puede decir sobre ellos en general.

El grupo $\mathrm{Aut}(Q,I)$ es claramente finito, ya que sus elementos están determinados por su valor en los vértices de Q. Por lo demás este grupo puede ser cualquiera, como ahora se muestra.

(2.2) <u>Proposición</u>: Sea G grupo finito, existe un carcaj con relaciones (Q,I) de forma que $\Lambda = k(Q,I)$ es álgebra de t.r.f. y $G \cong \mathrm{Aut}(Q,I)$.

<u>Demostración</u>: Sea G grupo finito generado por n elementos. Sea Q el carcaj



Sea I el ideal generado por los productos de dos flechas sucesivas. Sea $\Pi : (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (Q,I)$ la cubierta universal definida por el grupo libre Π_1. Los siguientes hechos son inmediatos:

a) Por la lista dada en [BR] para los árboles con relaciones cero, se sigue que $(\tilde{Q},\tilde{I})$ es localmente de representación finita.

b) Como no hay homotopías dadas por relaciones no cero, Π_1 es libre con n generadores.

Sea $P \trianglelefteq \Pi_1$ de forma que $\Pi_1/P \cong G$. Por tanto, existe un carcaj con relaciones $(\bar{Q},\bar{I})$ y dos morfismos cubrientes $\Pi' : (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (\bar{Q},\bar{I})$ y $p : (\bar{Q},\bar{I}) \longrightarrow (Q,I)$ tales que $p\Pi' = \Pi$, y Π' está definido por la acción de P. De aquí, p está determinado por la acción de $\Pi_1/P \cong G$.

Como G es finito, $(\bar{Q},\bar{I})$ es un carcaj con relaciones finito y el álgebra asociada $\bar{\Lambda} = k(\bar{Q},\bar{I})$ es de t.r.f. Además, $G \subset \mathrm{Aut}(\bar{Q},\bar{I})$. De hecho se sabe -ver [P]- que $G = \{g \in \mathrm{Aut}(\bar{Q},\bar{I}) \mid pg = p\}$.

Sea $g \in \mathrm{Aut}(\bar{Q},\bar{I})$, probaremos que $pg = p$. Sea $x \in \bar{Q}_0$ tal que $px = x_1$. Luego, de gx deben salir 2 flechas y no puede entrar ninguna; esto sólo lo satisfacen los puntos en la fibra de x_1, o sea, $pgx = x_1$.

En $\bar{Q}$ tenemos la siguiente imagen

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[r] & a & \\
x \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & z \arrow[r] & w \arrow[r] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & y' \arrow[r] & a' & \\
gx \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & z' \arrow[r] & w' \arrow[r] & b'
\end{tikzcd}$$

de forma que en y, y', z, z', w, w' solo entra una flecha y sale solo una, mientras que en a, a', b, b' entran 2 flechas y salen 2. Si $gy = z'$, ya solo podría ser w' lo que es absurco. Por tanto, $gy = y'$, $gz = z'$, etc. Es claro que el mismo argumento puede aplicarse a todos los puntos y se obtiene $pg = p$. O sea, $G = \mathrm{Aut}(\bar{Q},\bar{I})$ que es lo que deseaba probarse.//

El caso de $\mathrm{Aut}_0\Lambda$ es muy diferente, por un lado puede ser infinito y por otro su estructura debe satisfacer algunas leyes.

(2.3) <u>Ejemplo</u>: Sea Q el carcaj $x \xrightarrow{\alpha} y$ β con I generado por $\beta^3 = 0$. Por [B,G], $\Lambda = k(Q,I)$ es t.r.f.

Sea g el morfismo de álgebras generado por $g(\alpha) = \alpha$, $g(\beta) = \beta + \beta^2$; como $g(\beta^3) = 0$, g es efectivamente un morfismo de Λ en sí misma. Es fácil checar que $h(\alpha) = \alpha, h(\beta) = \beta - \beta^2$ es su inverso y por tanto $g \in \mathrm{Aut}_0\Lambda$. Además, $g^n(\beta) = \beta + n\beta^2$ y si char$k=0$ este morfismo es libre de torsión. Otro elemento de $\mathrm{Aut}_0\Lambda$ es $\ell(\alpha) = \alpha + \beta\alpha$, $\ell(\beta) = \beta$ con inverso $\ell(\alpha) = \alpha - \beta\alpha + \beta^2\alpha$, $\ell(\beta) = \beta$. Se tiene para estos elementos $\ell g(\alpha) = \alpha + \beta\alpha$, $g\ell(\alpha) = \alpha + \beta\alpha + \beta^2\alpha$. Y por tanto $\mathrm{Aut}_0\Lambda$ no es abeliano.

El siguiente concepto se utiliza comunmente para grupos lineales (ver [H_u]).

(2.4) <u>Definición</u>: Un elemento $g \in \mathrm{Aut}_0\Lambda$ se llama unipotente si existe un endomorfismo n de Λ como k-espacio vectorial, n nilpotente y tal que $g = 1 + n$. $\mathrm{Aut}_u\Lambda =$ $= \{g \in \mathrm{Aut}_0\Lambda \mid g$ es unipotente$\}$.

(2.5) __Proposición:__ $\mathrm{Aut}_{\mu}\Lambda$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}_{0}\Lambda$. Como grupo es nilpotente.

__Demostración:__ Observemos primeramente que $g \in \mathrm{Aut}_0\Lambda$ es unipotente si y solamente sí para toda flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Q, $g(\alpha) = \alpha + r_\alpha$ con $r_\alpha \in \mathrm{rad}^2_\Lambda(x,y)$. En efecto, si g satisface esta condición, podemos poner $n = g - 1 \in \mathrm{End}_k\Lambda$ que envía los idempotentes τ_x a cero y dada una flecha α, $n(\alpha) = r_\alpha$. Así, $n(\alpha_1\alpha_2) = r_{\alpha_1\alpha_2} + \alpha_1 r_{\alpha_2} + r_{\alpha_1} r_{\alpha_2}$ que es un elemento de rad^3, de donde $n^2(\alpha) \in \mathrm{rad}^3_\Lambda(x,y)$. Procediendo inductivamente y debido a la nilpotencia de $\mathrm{rad}\Lambda$, es claro que n debe ser nilpotente. En el otro sentido, en caso de que $g = 1 + n$ y para alguna flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$ fuera $n(\alpha) \notin \mathrm{rad}^2_\Lambda(x,y)$ tendríamos $n(\alpha) = \lambda\alpha + r$ con $\lambda \in k^*$ y $r \in \mathrm{rad}^2_\Lambda(x,y)$, debido a que en Q no hay flechas dobles. Por tanto, $n^2(\alpha) = \lambda n(\alpha) + n(r) = \lambda^2\alpha + (\lambda r + n(r))$, donde el término entre paréntesis está en $\mathrm{rad}^2_\Lambda(x,y)$. En general, $n^t(\alpha) = \lambda^t\alpha + r'$ con $r' \in \mathrm{rad}^2_\Lambda(x,y)$ y n obviamente no es nilpotente.

De aquí se sigue claramente que la composición y el inverso de automorfismos unipotentes son unipotentes y que $\mathrm{Aut}_0\Lambda$ es subgrupo de $\mathrm{Aut}_0\Lambda$. Como la conjugación de un endomorfismo nilpotente por un automorfismo es también nilpotente, se tiene que $\mathrm{Aut}_\mu\Lambda$ es normal en $\mathrm{Aut}_0\Lambda$.

Finalmente, $\mathrm{Aut}_\mu\Lambda$ es un subgrupo de $G\ell_k(\Lambda)$ formado por elementos unipotentes. Como Λ es un k-espacio vectorial de dimensión finita, en [Hu, (17.5)] se muestra que $\mathrm{Aut}_\mu \Lambda$ debe ser un grupo nilpotente. //

Esto junto con un poco más de información nos dá el siguiente resultado.

(2.6) <u>Teorema</u>: $\mathrm{Aut}_0\Lambda$ es soluble.

<u>Demostración</u>: Por $\mathfrak{r}$ denotamos al radical de Λ. Por tanto $\mathfrak{r}^2$ es el ideal generado por los productos de dos flechas sucesivas en Q, donde Q es el carcaj asociado a Λ. Sea $p : \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{r}^2$ el cociente natural. Dado $g \in \mathrm{Aut}_0\Lambda$, existe un único $\phi(g) \in \mathrm{Aut}_0\Lambda/\mathfrak{r}^2$ que hace conmutativo el cuadro:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{g} & \Lambda \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Lambda/\mathfrak{r}^2 & \xrightarrow{\phi(g)} & \Lambda/\mathfrak{r}^2 \end{array}$$

$\phi : \mathrm{Aut}_0\Lambda \longrightarrow \mathrm{Aut}_0\Lambda/\mathfrak{r}^2$ es un morfismo de grupos..

$\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{Aut}_\mu\Lambda$: Sup $\phi(g) = 1$. Ponemos $g = 1 + n$, con $n \in \mathrm{End}\Lambda$. A los idempotentes $\bar{e}_x$, $x \in Q_0$, n los envía en 0. Sea α flecha en Q, $p(\alpha)$ es ineducible en $\Lambda/\mathfrak{r}^2$ y $p(\alpha) = \phi(g)(p(\alpha)) = pg(\alpha)$. De donde $g(\alpha) = \alpha + \mathfrak{r}_\alpha$ con

$r_\alpha \in \mathrm{rad}^2\mathrm{Hom}_\Lambda(x,y)$ si $x \xrightarrow{\alpha} y$. Así, $n(\alpha) = r_\alpha$ y es claro ahora que n es nilpotente. Por (2.5), $\mathrm{Ker}\phi$ es nilpotente.

$\mathrm{Aut}_0\Lambda/r^2$ es abeliano: Si $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Q, $\mathrm{Hom}_{\Lambda/r^2}(x,y) = k\alpha$. Luego, si $g \in \mathrm{Aut}_0\Lambda/r^2$, $g(\alpha) = \lambda\alpha$ con $\lambda \in k^*$. De la conmutatividad de k^* se sigue el resultado.

Por tanto, $\mathrm{Ker}\phi$ e $I_m\,\phi$ son ambos solubles y siendo $\mathrm{Aut}_0\Lambda$ extensión de ellos es también soluble.//

Usando el morfismo ϕ recién definido podemos probar el siguiente resultado.

(2.7) <u>Proposición</u>: Si G es subgrupo finito de $\mathrm{Aut}_0\Lambda$ tal que $\mathrm{char}k \nmid o(G)$, G es abeliano.

<u>Demostración</u>: Sea $g \in G$ y supongamos $\phi(g) = 1$. Por lo probado en (2.6) $g = 1 + n$ con n endomorfismo nilpotente. Sea $p = \mathrm{char}k$; si $p = 0$, g es libre de torsión lo que contradice que G sea finito. Luego, $p > 0$. Así, existe $t \in \mathbb{N}$ con $n^{p^t} = 0$ y $g^{p^t} = (1+n)^{p^t} = 1$. De donde, $p \mid o(g)$ que contradice la otra hipótesis. Hemos probado que $G \cong \phi(G) \subset \mathrm{Aut}_0\Lambda/r^2$ que es abeliano por (2.6).//

Veremos ahora de qué forma se relaciona $\mathrm{Aut}\Lambda$ con el carcaj de Auslander-Reiten de Λ, Γ_Λ.

Sea $g \in \mathrm{Aut}\Lambda$, $M \in \mathrm{Mod}\Lambda$. Por M^g denotamos al Λ módulo izquierdo con el mismo k-espacio vectorial subyacente de M

y con multiplicación $\lambda * m = g(\lambda)m$, para $\lambda \in \Lambda$, $m \in M$.

Claramente esto determina una acción de $\mathrm{Aut}\Lambda$ sobre $\mathrm{Mod}\Lambda$, o sea, $M^1 = M$, $(M^{g_1})^{g_2} = M^{g_1 g_2}$. Dicha acción preserva módulos inescindibles.

Si $M \xrightarrow{f} N$ es Λ morfismo, es claro que también $M^g \xrightarrow{g} N^g$ es Λ morfismo. De esta forma la acción de $\mathrm{Aut}\Lambda$ sobre $\mathrm{mod}\Lambda$ preserva también sucesiones de Auslander-Reiten.

Así, dado $g \in \mathrm{Aut}\Lambda$, podemos definir $\psi(g) : \Gamma_\Lambda \longrightarrow \Gamma_\Lambda$, $M \longmapsto M^g$ que es un morfismo de carcajes con translación. Como $\psi(g)^{-1} = \psi(g^{-1})$, $\psi : \mathrm{Aut}\Lambda \longrightarrow \mathrm{Aut}\Gamma_\Lambda$ es un morfismo de grupos, donde $\mathrm{Aut}\Gamma_\Lambda$ es el grupo de automorfismos del carcaj con translación Γ_Λ.

(2,8) <u>Teorema</u>: $1 \longrightarrow \mathrm{Aut}_0\Lambda \longrightarrow \mathrm{Aut}\Lambda \xrightarrow{\psi} \mathrm{Aut}\Gamma_\Lambda$ es una sucesión exacta, cuando Λ es álgebra de t.r.f.

<u>Demostración</u>: Sea $g \in \mathrm{Aut}\Lambda$ tal que $\psi(g) = 1$. En particular, g actúa trivialmente sobre los proyectivos inescindibles y $g \in \mathrm{Aut}_0\Lambda$.

Tomamos ahora $g \in \mathrm{Aut}_0\Lambda$ y deseamos probar que su acción en $\mathrm{mod}\Lambda$ es trivial. Que actúe trivialmente sobre los proyectivos inescindibles es sencillo: sea $x \in O_0$, $P_x = \Lambda\bar{\tau}_x$. Definimos $\psi : P_x \longrightarrow P_x^g$ por $\psi(\lambda\bar{\tau}_x) = g(\lambda)\tau_x$, para $\lambda \in \Lambda$. Dado $\lambda, \mu \in \Lambda$ tenemos:

$\psi(\mu(\lambda\bar{\tau}_x)) = g(\mu\lambda)\bar{\tau}_x = g(\mu)g(\lambda)\bar{\tau}_x = \mu * \psi(\lambda\bar{\tau}_x)$ y ψ es Λ-isomorfismo.

El resultado se sigue de un Teorema paralelo al demostrado en [MP2]; aquí esbozaremos solamente los pasos de la prueba: llamamos $g : \Gamma_\Lambda \longrightarrow \Gamma_\Lambda$ a la acción de g que fija proyectivos. Tomamos $M \in \Gamma_\Lambda$ y también $P \in \Gamma_\Lambda$ proyectivo. Sea $\Pi : \tilde{\Gamma}_\Lambda \longrightarrow \Gamma_\Lambda$ la cubierta universal

a) Existe $g : \tilde{\Gamma}_\Lambda \longrightarrow \tilde{\Gamma}_\Lambda$ automorfismo con $\Pi\tilde{g} = g\Pi$, tal que $\tilde{g}\tilde{P} = \tilde{P}$, donde $\Pi\tilde{P} = P$. Si restringimos $k(\Pi)$ a las categorías de proyectivos $\tilde{\Lambda}_s$ de $k(\tilde{\Gamma}_\Lambda)$ y Λ_s de $k(\Gamma_\Lambda)$ tenemos

$$\begin{tikzcd} \tilde{\Lambda}_s \arrow[r, hook] \arrow[d, "F"'] & k(\tilde{\Gamma}_\Lambda) \arrow[d, "k(\Pi)"] \\ \Lambda_s \arrow[r, hook] & k(\Gamma_\Lambda) \end{tikzcd}$$

donde F es la restricción de $k(\Pi)$ que resulta funtor cubriente.

Se tiene $F\tilde{g}| = g|F$, donde $g|$ y $\tilde{g}|$ son las restricciones a estas categorías. Como $\tilde{g}\tilde{P} = \tilde{P}$ y $g| = id_{\Lambda_s}$, por el levantamiento único de caminos de F se sigue que $\tilde{g}| = id_{\tilde{\Lambda}_s}$. Por tanto, $\tilde{g}$ fija proyectivos en $\tilde{\Gamma}_\Lambda$.

b) Sea $X \in \tilde{\Gamma}_\Lambda$ levantamiento de M, o sea $\Pi X = M$. Llamamos Q a la suma de todos los proyectivos en el soporte de X en $\widetilde{\Gamma}_\Lambda$. Y $\Lambda_\circ = \mathrm{End}_{k(\widetilde{\Gamma}_\Lambda)} Q'$, es álgebra de t.r.f. sin ciclos dirigidos en su carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma_{\Lambda_\circ}$. Además, $\widetilde{g}$ induce un automorfismo $\widetilde{g}_\circ : \Gamma_{\Lambda_\circ} \longrightarrow \Gamma_{\Lambda_\circ}$ de carcajes con translación que fija proyectivos. $X \in \Gamma_{\Lambda_\circ}$ de forma que $\widetilde{g}X = \widetilde{g}_\circ X$.

c) Como $\Gamma_{\Lambda_\circ}$ no tiene ciclos dirigidos y $\Lambda_\circ$ es álgebra t.r.f. existe $P_\circ \in \Gamma_{\Lambda_\circ}$ proyectivo y $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\mathrm{Dtr}^n X = P_\circ$. Equivalentemente, $X = \mathrm{Tr}D^n P_\circ$. Pero como $P_\circ$ está fijo por $\widetilde{g}_\circ$ y este preserva la translación $\widetilde{g}_\circ X = X$.

Por la definición de $\widetilde{g}_\circ$, $\widetilde{g}$ y g, se tiene que $M^g = M$.//

Recordamos que Λ se llama estándar cuando es de t.r.f. y $k(\Gamma_\Lambda) \cong \mathrm{ind}\Lambda$. En particular $\Lambda \hookrightarrow k(\Gamma_\Lambda)$.

(2.9) <u>Proposición</u>: Si Λ es álgebra estándar, $\mathrm{Aut}\Lambda$ es producto semidirecto de $\mathrm{Aut}_0\Lambda$ por $\mathrm{Aut}\Gamma_\Lambda$.

<u>Demostración</u>: Basta que mostremos que el morfismo $\psi : \mathrm{Aut}\Lambda \longrightarrow \mathrm{Aut}\Gamma_\Lambda$ se escinde. Si $g \in \mathrm{Aut}\Gamma_\Lambda$, tenemos el automorfismo de categorías inducido $k(g) : k(\Gamma_\Lambda) \longrightarrow k(\Gamma_\Lambda)$ que envía proyectivos en proyectivos, por tanto lo podemos restringir a un funtor entre su categoría de proyectivos

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \hookrightarrow & k(\Gamma_\Lambda) \\ {\scriptstyle \sigma(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k(g)} \\ \Lambda & \hookrightarrow & k(\Gamma_\Lambda) \end{array}$$

Por estar bien definida esta asociación, $\sigma : \mathrm{Aut}\Gamma_\Lambda \longrightarrow \mathrm{Aut}\Lambda$ es morfismo de grupos. Ahora, $\sigma(g)$ determina la acción dada por $\psi\sigma(g)$ en Γ_Λ, esta claramente satisface

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sigma(g)"'] & k(\Gamma_\Lambda) \arrow[d, "k(\psi\sigma(g))"] \\ \Lambda \arrow[r, hook] & k(\Gamma_\Lambda) \end{tikzcd}$$

Resulta que $\psi\sigma(g)$ y g tienen la misma acción sobre proyectivos. Por argumentos análogos a los de la demostración (2.8) se sigue que $g = \psi\sigma(g)$.//

Una herramienta útil en el estudio de la acción de grupos en un conjunto es la noción de estabilizador.

(2.10) Definición: Sea $G \subset \mathrm{Aut}\Lambda$ subgrupo y $M \in \mathrm{mod}\Lambda$, el estabilizador de M en G, es $G_M := \{g \in G \mid M^g \cong M\}$.

Claramente, G_M es un subgrupo de G. El siguiente resultado da una restricción importante en esta familia de subgrupos.

(2.11) Proposición: Sea G subgrupo de $\mathrm{Aut}(Q,I)$, con $\Lambda = k(Q,I)$ álgebra de t.r.f. Si $M \in \mathrm{mod}\Lambda$ es inescindible, G_M es soluble.

Demostración: Si $g \in G_M$, por [MP2] g debe fijar un proyectivo inescindible. Sea pues $x_0 \in Q_0$ tal que $gx_0 = x_0$. Por tanto, g determina una permutación de x_0^+. Como Λ es de t.r.f. este conjunto tiene a lo más 3 puntos, luego g^6 actúa en $x_\circ^+$ trivialmente. Similarmente g^6 actúa trivialmente en $x_\circ^-$. Procediendo de esta forma inductivamente sobre Q, como es conexo y finito se tiene que $O(g) = 2^a 3^b$ con $a, b \in \mathbb{N}$. De aquí que también el orden de G_M sea de esta forma. Por el conocido teorema de Burnside, G_M debe ser soluble. //

(2.12) <u>Corolario</u>: Si Λ es álgebra simplemente conexa, $\mathrm{Aut}\Lambda$ es grupo soluble.

<u>Demostración</u>: Por (2.6) y (2.8) basta mostrar que $\mathrm{Aut}\Gamma_\Lambda$ es soluble. Análogamente a (2.11) podemos probar que los estabilizadores de puntos en Γ_Λ son solubles.

Sea $Q\Gamma_\Lambda$ el carcaj de órbitas de Γ_Λ definido en [*BLS*]. Como Λ es simplemente conexa, $Q\Gamma_\Lambda$ resulta un árbol. Además, $\mathrm{Aut}\Gamma_\Lambda$ actúa sobre $Q\Gamma_\Lambda$. Por un conocido resultado -ver [*Se*, (*6.4*), (*6.5*)]-, $\mathrm{Aut}\Gamma_\Lambda$ debe fijar un vértice de $Q\Gamma_\Lambda$, luego debe fijar el proyectivo P cuya órbita corresponde a este vértice de $Q\Gamma_\Lambda$. Pero entonces, $\mathrm{Aut}\Gamma_\Lambda = (\mathrm{Aut}\Gamma_\Lambda)_P$ que es soluble por (2.11). //

3. ALGEBRAS TORCIDAS

En esta sección introducimos el concepto de álgebra torcida asociada a un álgebra y a un grupo que actúa sobre ella. Esta noción tiene la ventaja de encerrar en una sola estructura toda la información relativa al álgebra y al grupo que le dieron origen. Además, permite asociar a un álgebra dada álgebras con estructura más simple que sin embargo preservan muchas de las propiedades del álgebra original.

Algunos de los resultados que presentaremos fueron obtenidos por I. Reiten y Ch. Riedtmann y dados a conocer durante el Congreso de Representaciones de Algebras de Oberwolfach en 1981. Estos resultados los indicaremos por [RR]. Sin embargo, presentaremos algunas pruebas para permitir el completo desarrollo del trabajo; dichas demostraciones fueron obtenidas independientemente.

A lo largo de esta sección el álgebra Λ de dimensión finita sobre k quedará fija. Como no exigimos que Λ sea básica, por automorfismo entenderemos lo usual. Esta convención se mantendrá a lo largo del trabajo.

(3.1) Definición: Sea G un grupo finito de automorfismos de Λ. El álgebra torcida $\Lambda[G]$ es el conjunto de combinaciones lineales formales $\sum_{g\in G}\lambda_g g$ con coeficientes $\lambda_g \in \Lambda, g \in G$. Las operaciones en $\Lambda[G]$ están definidas de la siguiente manera:

$$\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right) + \left(\sum_{g\in G}\mu_g g\right) = \sum_{g\in G}(\lambda_g + \mu_g)g$$

y $(\lambda g)(\mu h) = \lambda g(\mu)gh$, producto que se extiende bilinealmente.

El álgebra resultante $\Lambda[G]$ es también de dimensión finita sobre k.

Las categorías de módulos de Λ y de $\Lambda[G]$ están ligadas de la siguiente manera: en primer lugar el álgebra Λ puede verse como subálgebra de $\Lambda[G]$ identificando λ con $\lambda.1$ para $\lambda \in \Lambda$. Luego, todo $\Lambda[G]$-módulo es un Λ-módulo restringiendo la multiplicación sólo a los elementos de esta forma, tenemos así el funtor restricción entre la categoría de módulos izquierdos:

$$\text{res}: \text{Mod}\Lambda[G] \longrightarrow \text{Mod}\Lambda.$$

Por otra parte, como Λ-módulo, $\Lambda[G]$ es suma de copias de Λ y tiene por tanto estructura de Λ-módulo derecho e izquierdo libre, lo que permite considerar el funtor inducción $\text{ind}: \text{Mod}\Lambda \longrightarrow \text{Mod}\Lambda[G]$, tal que a un módulo izquierdo M sobre Λ le asocia $\Lambda[G]\otimes_\Lambda M$.

Este par de funtores son claramente exactos.

Aquí, nos <u>restringiremos</u> al estudio del caso char$k \nmid o(G)$, de forma que $o(G)$ es una unidad sobre k. Las enormes ventajas de esta situación quedan de manifiesto en el siguiente resultado que es el paralelo del Teorema de Maschke para álgebras de grupo.

(3.2) <u>Lema</u>: Sea X sucesión exacta en $\mathrm{Mod}\Lambda[G]$ tal que $\mathrm{res}X$ se escinde en $\mathrm{Mod}\Lambda$, entonces X se escinde.

<u>Demostración</u>: Supongamos $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ es exacta en $\mathrm{Mod}\Lambda[G]$ y tal que $0 \longrightarrow \mathrm{res}M \xrightarrow{\mathrm{res}f} \mathrm{res}N$ se escinde en $\mathrm{Mod}\Lambda$.

Sea $\Pi : N \longrightarrow M$ en $\mathrm{Mod}\Lambda$ tal que $\Pi f = 1_M$.

Definimos $\hat{\Pi} : N \longrightarrow M$, $n \longmapsto \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{g \in G} g^{-1}\Pi(gn)$, función bien definida.

Sea $\mu h \in \Lambda[G]$, calculamos:

$$\hat{\Pi}(\mu h.n) = \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{g \in G} g^{-1}\Pi(g.\mu h.n) = \frac{1}{\mathcal{O}(G)}\, h \sum_{g \in G} h^{-1}g^{-1}\Pi(g(\mu)ghn) =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{O}(G)}\, h \sum_{g \in G} h^{-1}g^{-1}g(\mu)\Pi(ghn) = \frac{1}{\mathcal{O}(G)}\, h \sum_{g \in G} h^{-1}(\mu)(gh)^{-1}\Pi(ghn) =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{O}(G)}\, \mu h \sum_{g \in G} g^{-1}\Pi(gn) = \mu h \hat{\Pi}(n).$$

Por lo tanto, $\hat{\Pi}$ es $\Lambda[G]$-morfismo. Además,

$$\hat{\Pi} f(m) = \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{g \in G} g^{-1}\Pi(gf(m)) = \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{g \in G} g^{-1}\Pi f(gm) = m._{//}$$

Este resultado tiene importantes consecuencias para la estructura del álgebra $\Lambda[G]$.

(3.3) <u>Proposición</u>: [RR] : i). Si S es Λ-módulo simple, S^G es $\Lambda[G]$ módulo semisimple.

ii) $\mathrm{rad}\Lambda\cdot\Lambda[G] = \mathrm{rad}\Lambda[G] = \Lambda[G]\,\mathrm{rad}\Lambda$.

<u>Demostración</u>: i): Supongamos $S^G \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ es la sucesión exacta de $\Lambda[G]$-módulos. Al restringir a Λ, como $\mathrm{res}S^G = \bigoplus_{g\in G} S^g$ es Λ-módulo semisimple, $\mathrm{res}f$ se escinde. Por (3.2), f se escinde y S^G es semisimple.

ii): Probaremos primero que $\mathrm{rad}\Lambda.\Lambda[G]$ es nilpotente. Sean $r \in \mathrm{rad}\Lambda$, y $\sum_{g\in G}\lambda_g g \in \Lambda[G]$, entonces $r(\sum_{g\in G}\lambda_g g) = \sum_{g\in G}\lambda_g g$ con $r\lambda_g \in \mathrm{rad}\Lambda$.

Si en general tomamos $\sum_{g\in G}\lambda_g g \in \Lambda[G]$, con $\lambda_g \in \mathrm{rad}\Lambda$ para toda $g \in G$, tenemos:

$$(\sum_{g\in G}\lambda_g g)^n = \sum_{g\in G}\lambda_g^{(n)} g, \quad \text{donde} \quad \lambda_g^{(n)} = \sum_{h_n\cdots h_1=g}\lambda_{h_n} h_n(\lambda_{h_{n-1}})\cdots(h_n\cdots h_2)(\lambda_{h_1}) \in$$

$$\in \mathrm{rad}^n\Lambda.$$

Como $\mathrm{rad}\Lambda$ es nilpotente, $\mathrm{rad}\Lambda.\Lambda[G]$ es nilpotente.

Probaremos ahora que $\Lambda[G]/\mathrm{rad}\Lambda.\Lambda[G]$ es semisimple.

Para ello consideremos la sucesión exacta $0 \to \mathrm{rad}\Lambda \to \Lambda \to \Lambda/\mathrm{rad}\Lambda \to 0$. Al inducir a $\Lambda[G]$ se obtiene,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda[G]\otimes_\Lambda \mathrm{rad}\Lambda \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \Lambda[G]\otimes_\Lambda\Lambda \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \Lambda[G]\otimes_\Lambda \Lambda/\mathrm{rad}\Lambda \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda[G]\cdot\mathrm{rad}\Lambda \arrow[r] & \Lambda[G] & &
\end{tikzcd}$$

Por tanto, $\Lambda[G]/\Lambda[G]\cdot\mathrm{rad}\Lambda \cong \Lambda[G]\ {}_{\Lambda}\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ que es semisimple por i). Así, $\mathrm{rad}\Lambda\cdot\Lambda[G] \subset \Lambda[G]\cdot\mathrm{rad}\Lambda = \mathrm{rad}\Lambda[G]$ y la otra contención es obvia.//

También, (3.2) tiene repercusiones en la estructura de los funtores, res, ind que hemos antes definido.

(3.4) <u>Proposición</u> [RR]: i) Si $M \in \mathrm{Mod}\Lambda$, M es sumando directo de $\mathrm{res}M^G = \mathrm{res\ ind}M$.

ii) Si $N \in \mathrm{Mod}\Lambda[G]$, N es sumando directo de $\mathrm{ind\ res}N$.

<u>Demostración</u>: i): Si Λ^g es el Λ-módulo derecho con espacio subyacente Λ y $x \in \Lambda^g$, $\lambda \in \Lambda$, se tiene $x * \lambda = xg(\lambda)$. Es claro que $\mathrm{res}\Lambda[G] \cong \oplus_{g\in G}\Lambda^g$. Luego, para $M \in \mathrm{mod}\Lambda$, $\mathrm{res\ ind}M = \mathrm{res}\Lambda[G]\ {}_{\Lambda}M = (\oplus_{g\in G}\Lambda^g)\ {}_{\Lambda}M \cong \oplus_{g\in G}(\Lambda^g\ {}_{\Lambda}M)$. Pero, claramente $\Lambda^g\otimes_{\Lambda}M \cong M^{g^{-1}}$, $\lambda\ m \longmapsto g^{-1}(\lambda)m$. Además, $M^1 = M$ y tenemos el resultado deseado.

ii) Sea $N \in \mathrm{Mod}\Lambda[G]$, definimos $\Pi : \mathrm{ind\ res}N \longrightarrow N$, $\lambda g\otimes n \longmapsto \lambda g n$, que es $\Lambda[G]$ morfismo ya que

$$\Pi(\mu h(\lambda g\ n)) = \Pi(\mu h(\lambda)hg\ n) = \mu h(\lambda)hgn = (\mu h)\Pi(\lambda g\ n)$$

Por otro lado $i : N \longrightarrow \mathrm{ind\ res}N$, $n \longrightarrow 1\otimes n$ es claramente Λ-morfismo, y $\Pi i = 1_N$. Por (3.2), Π se escinde como $\Lambda[G]$-morfismo.//

De hecho, los morfismos construídos en (3.4) son naturales.

Este resultado tiene una sencilla aplicación que sin embargo muestra parte de la relevancia de las álgebras torcidas.

(3.5) <u>Teorema</u> [RR]: Λ es álgebra de t.r.f. si y solo si $\Lambda[G]$ es de t.r.f.

<u>Demostración</u>: Sup. que Λ es de t.r.f. y sean $M_1,\ldots,M_n$ representantes de las clases de isomorfía de Λ-módulos inescindibles. M_i^G es $\Lambda[G]$-módulo $\delta\cdot g$ y tiene una descomposición en $\Lambda[G]$-módulos inescindibles, $M_i^G = \oplus_{j=1}^{n_i} N_{ij}$, esto para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Sea ahora $N \in \mathrm{mod}\Lambda[G]$ inescindible, debe ser isomorfo a alguno de los módulos N_{ij}. La finitud de esta familia muestra que $\Lambda[G]$ es t.r.f. El converso es idéntico.//

Un empleo similar al hecho de (3.4) en (3.5) nos permite mostrar el siguiente resultado.

(3.6) <u>Teorema</u> [RR]: Sea Λ álgebra de t.r.f., Γ_Λ tiene ciclos dirigidos si y solo si $\Gamma_{\Lambda[G]}$ los tiene.

<u>Demostración</u>: $\Rightarrow$): Supongamos que $N_1 \xrightarrow{\delta_1} N_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_m \xrightarrow{\delta_m} N_1$ es un ciclo dirigido en $\Gamma_{\Lambda[G]}$. Por (3.2), $\mathrm{res}N_1 \xrightarrow{\mathrm{res}\delta_1} \mathrm{res}N_2$ no es invertible. Luego, debe haber sumandos inescindibles M_1 de $\mathrm{res}N_1$ y M_2 de $\mathrm{res}N_2$, de forma que el morfismo inducido por $\mathrm{res}\delta_1$, $M_1 \xrightarrow{g_1} M_2$ no es cero y no es invertible. Por tanto, en Γ_Λ aparece un camino dirigido $M_1 \quad M_2$. De la misma forma aparecen inescindibles M_2' de $\mathrm{res}N_2$ y M_3 de

resN_3 con un camino dirigido en Γ_Λ, $M_2^{\prime} \rightsquigarrow M_3$. Por lo demostrado en (3.5), existe un módulo inescindible $L \in \mathrm{mod}\Lambda$ tal que N_2 es sumando de ind$L$, de donde tanto M_2 como $M_2^{\prime}$ son sumandos de res ind$L = \bigoplus_{g\in G} L^g$. Por tanto, existe $g \in G$ tal que $M_2 = M_2^{\prime g}$. Aplicando g al camino entre $M_2^{\prime}$ y M_3 se obtiene un camino dirigido en Γ_Λ, $M_2 \rightsquigarrow M_3^g$.

Repitiendo el proceso se obtiene un camino dirigido en Γ_Λ de M_1 en un módulo de la forma M_1^h para alguna $h \in G$. Como G es finito, el orden de h es finito y aplicándolo sucesivas veces a este camino se obtiene un ciclo en M_1.

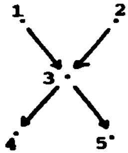
$\leftarrow$): Supongamos que $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_m \xrightarrow{f_m} M_1$ es un ciclo en Γ_Λ. El morfismo ind$M_1 \xrightarrow{\mathrm{ind} f_1}$ indM_2 no es invertible ya que f_1 es sumando de res indf_1. Escribamos ind$M_1 = \bigoplus_{j=1}^{n_1} N_{1j}$ descomposición en $\Lambda[G]$-módulos inescindibles. La restricción de indf_1 a N_{11}, tampoco es invertible y entonces debe haber un sumando de indM_2, digamos N_{21} de forma que la restricción indicida $N_{11} \xrightarrow{g_1} N_{21}$ no es cero ni invertible. Luego, hay en $\Gamma_{\Lambda[G]}$ un camino dirigido $N_{11} \rightsquigarrow N_{21}$. Continuando de esta forma se obtiene un camino dirigido de N_{11} en N_{1j}. Si $j=1$, hemos obtenido un ciclo en $\Gamma_{\Lambda[G]}$. Si digamos $j=2$, podemos volver a comenzar y obtener un camino dirigido de N_{12} en $N_{1j'}$, $j' \in \{1,\ldots,n_1\}$. Este proceso nos da finalmente un ciclo dirigido en $\Gamma_{\Lambda[G]}$.//

En particular, como la restricción y la inducción de proyectivos en proyectivo, tenemos que el carcaj Q asociado a Λ tiene ciclos dirigidos si y solo si los tiene el carcaj Q_G asociado a $\Lambda[G]$.

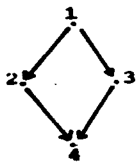
Presentaremos ahora algunos ejemplos. En algunos casos la teoría para obtenerlos se desarrollará más adelante, sin embargo, sirven ahora como ilustración.

(3.7) <u>Ejemplos</u>: a) La propiedad de ser simplemente conexa no se preserva bajo la operación de torcer.

Λ :

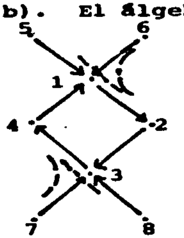


con todos los productos cero. El Automorfismo g que envía $1 \mapsto 2$, $4 \mapsto 5$, $2 \mapsto 1$, $5 \mapsto 4$ y a 3 lo deja fijo, es tal que $\Lambda[G]$ resulta



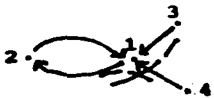
con todos los productos cero, donde $G = \langle g \rangle$.

b). El álgebra Λ dada por el carcaj



con todos los productos de 3 flechas 0

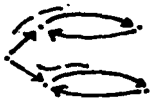
y los productos de flechas unidas por líneas punteadas también 0. El automorfismo $g : 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 1,\ 5 \mapsto 8,\ 6 \mapsto 7$, resulta no tener vértices fijos. Si $G = \langle g \rangle$, $\Lambda[G]$ está dado por



con el producto de 3 flechas cero.

Y los productos sobre las líneas punteadas 0.

El automorfismo de $\Lambda[G]$ definido por $h : 3 \mapsto 4$, 1 y 2 fijos, nos dá el álgebra $\Lambda[G][H]$ si $H = \langle h \rangle$.

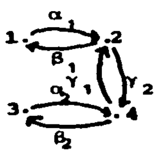
$\Lambda[G][H]$:  con los productos de 3 flechas 0 y también los productos sobre las líneas punteadas.

Observar que en el primer caso Λ es cubierta de $\Lambda[G]$.

c) El álgebra Λ 

con $\gamma^4 = 0$, $\beta\alpha = 0$, $\alpha\beta = \gamma^2$.

El automorfismo $g_1 : \Lambda \to \Lambda$, $\alpha \mapsto \alpha$, $\beta \mapsto \beta$, $\gamma \mapsto -\gamma$, produce el álgebra

$\Lambda[\langle g_1 \rangle]$ 

con $(\gamma_2\gamma_1)^2 = 0 = (\gamma_1\gamma_2)^2$, $\beta_1\alpha_2 = 0 = \beta_2\alpha_2$
$\alpha_1\beta_1 = \gamma_1\gamma_2$, $\alpha_2\beta_2 = \gamma_2\gamma_1$.

El automorfismo $g_2 : \Lambda \to \Lambda$, $\alpha \mapsto -\alpha$, $\beta \mapsto -\beta$, $\gamma \mapsto \gamma$, resulta en un álgebra disconexa igual a la suma de dos copias de Λ.

Observar que ahora $\Lambda[\langle g_1 \rangle]$ resultó cubierta de Λ.

4. REDUCCION DE ALGEBRAS TORCIDAS

Como hemos indicado en la sección anterior, las álgebras torcidas en ocasiones son más simples en su estructura que el álgebra que les dió origen. Veremos ahora que también el hecho de tener un grupo "complicado" puede en ocasiones simplificarse por medio de torcer repetidamente respecto a grupos más simples. Esto resultará importante como se verá en secciones posteriores.

El primer resultado expresa ya la idea anterior.

(4.1) <u>Proposición</u>: Sea G grupo finito de automorfismos de Λ. Supongamos $G = G_1 \times G_2$, entonces:

i) G_2 es grupo de automorfismos de $\Lambda[G]$

ii) $\Lambda[G_1][G_2] \cong \Lambda[G]$ como álgebras.

<u>Demostración</u>: i): Sea $g_2 \in G_2$. Para $\lambda g_1 \in \Lambda[G_1]$, definimos $\tilde{g}_2(\lambda g_1) = g_2(\lambda)g_1$. Si tenemos otro $\lambda' g_1' \in \Lambda[G]$

$$\tilde{g}_2(\lambda g_1 \lambda' g_1') = \tilde{g}_2(\lambda g_1(\lambda')g_1 g_1') = g_2(\lambda)g_2 g_1(\lambda')g_1 g_1' = g_2(\lambda)g_1 g_2(\lambda')g_1 g_1' =$$

$$= (g_2(\lambda)g_1)(g_2(\lambda')g_1') = \tilde{g}_2(\lambda g_1)\tilde{g}_2(\lambda' g_1') \text{ y } \tilde{g}_2 \in \mathrm{Aut}\Lambda[G].$$

Además, $g_2 g_2'(\lambda g_1) = g_2(g_2'(\lambda)g_1) = g_2 g_2'(\lambda)g_1 = g_2 g_2'(\lambda g_1)$. Luego, la asociación $\sim : G_2 \to \mathrm{Aut}\Lambda[G]$ es morfismo de grupos. Por último, si $\tilde{g}_2 = \mathrm{id}$ $\lambda = \tilde{g}_2(\lambda) = g_2(\lambda)$ para toda $\lambda \in \Lambda$ y $g_2 = \mathrm{id}$. Así, $G_2 \subset \mathrm{Aut}\Lambda[G]$.

ii) Definimos $\psi : \Lambda[G_1][G_2] \longrightarrow \Lambda[G]$, $(\lambda g_1)\tilde{g}_2 \longmapsto \lambda g_1 g_2$ función. $\psi(((\lambda g_1)\tilde{g}_2)(\lambda' g_1' \tilde{g}_2')) = \psi(\lambda g_1 \tilde{g}_2(\lambda' g_1')g_2 g_2') =$
$= \psi((\lambda g_1)(g_2(\lambda')g_1')g_2 g_2') = \psi((\lambda_1(g_1 g_2)(\lambda')g_1 g_1')g_2 g_2') =$
$= \lambda_1(g_1 g_2)(\lambda')g_1 g_1' g_2 g_2' = \lambda_1(g_1 g_2)(\lambda')g_1 g_2 g_1' g_2' = (\lambda g_1 g_2)(\lambda' g_1' g_2') =$
$= \psi(\lambda g_1 g_2)\psi(\lambda' g_1' g_2')$ y ψ es morfismo de álgebras.

Si $1 = \psi(\Sigma\lambda_{g_1\tilde{g}_2} g_1 \tilde{g}_2)$, $1 = \Sigma\lambda_{g_1\tilde{g}_2} g_1 g_2$.

Todos los coeficientes deben ser 0, salvo $\lambda_{g_1\tilde{g}_2} = 1$ para $g_1 g_2 = 1$. Pero esto sólo sucede cuando $g_1 = 1 = g_2$. Entonces, $\Sigma\lambda_{g_1\tilde{g}_2} g_1 \tilde{g}_2 = 1$.

Que ψ es sobre es evidente. Por tanto ψ es iso de álgebras.//

(4.2) <u>Corolario</u>: Si G es grupo abeliano finito de automorfismos de Λ, existen grupos cíclicos $G_1,\ldots,G_n \subset G$ tales que $\Lambda[G] \cong \Lambda[G_1][G_2]\ldots\ldots[G_n]$.//

Dado un grupo de automorfismos finito G de Λ, podemos considerar el grupo de caracteres de G,

$$X(G) := \{X : G \longrightarrow k^* \mid X \text{ es morfismo de grupos}\}$$

Sucede que $X(G)$ tiene una acción natural sobre $\Lambda[G]$: para $\chi \in X(G)$ definimos $\overline{\chi} : \Lambda[G] \longrightarrow \Lambda[G]$; $\lambda g \longmapsto \chi(g)\lambda g$. Es muy simple checar que $\overline{} : X(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}\Lambda[G]$ es morfismo de grupos. Si $\overline{\chi} = 1$, $g = \overline{\chi}(g) = \chi(g)g$, y $\chi(g) = 1$ para toda $g \in G$. O sea, $\chi = 1$ y el morfismo es inyectivo.

Por tanto, $X(G)$ es un grupo de automorfismos de $\Lambda[G]$.

Sin embargo, el comportamiento del grupo $X(G)$ respecto a G no siempre es el adecuado. Probamos el siguiente conocido resultado, ya que más tarde necesitaremos explícitamente la demostración.

(4.3) Lema: Si $\mathrm{char}k \nmid O(G)$, $X(G) \cong G/G'$

Demostración: Supongamos $n = O(G)$. Primeramente que G es cíclico generado por g. Sea ω una raíz n-ésima primitiva de 1 en k.

Definamos $\psi : G \longrightarrow X(G)$, $g \longmapsto \chi : G \longrightarrow k^*$ con $\chi(g^i) = \omega^i$. Como $O(\omega) = n$, ψ es homeomorfismo inyectivo.

Si $\chi' \in X(G)$, $\chi'(g)^n = \chi'(g^n) = 1$, y existe $i \in \mathbb{N}$, $\chi'(g) = \omega^i$.

Por tanto, $\psi(g^i) = \chi^i = \chi'$ y ψ es isomorfismo.

Si G es abeliano, $G = \bigoplus_{i=1}^{m} G_i$, cíclicos los G_i, $i=1,\dots,m$.

$$\chi(G) = \mathrm{Hom}\ (G,k^*) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Hom}\ (G_i,k^*) \cong G$$

Además, obviamente, $X(G) = X(G/G')$. //

(4.4) Corolario: Si $\mathrm{char}k \nmid O(G)$ y $g \in G\setminus G'$, existe un caracter $\chi \in X(G)$ tal que $\chi(g) \neq 1$.

Demostración: Basta mostrarlo en el caso abeliano. El caso cíclico es claro. Sea pues $G = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} G_i$ descomposición en ciclos. Sea $1 \neq g = g_1 \cdots g_n$ con $g_i \in G_i$. Podemos suponer $g_1 \neq 1$. Sea g_1' el generador de G_1. Sean $\psi_i : G_i \longrightarrow X(G_i)$ los isomorfismos de (4.3); $\overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} G_i \longrightarrow X(G)$, $(g_1', 0, \ldots, 0) \longmapsto \chi$ tal que $\chi(g) = \psi_1(g_1')(g_1) \neq 1$. //

Estamos ahora en condiciones de probar el siguiente importante resultado.

(4.5) __Teorema__ [RR]: Si $\mathrm{char}\, k \nmid O(G)$, entonces

$$\mathrm{Mod}\Lambda[G][X(G)] \sim \mathrm{Mod}\Lambda[G'].$$

__Demostración:__ Definimos el funtor $F : \mathrm{Mod}\Lambda[G][X(G)] \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathrm{Mod}\Lambda[G']$ que a un objeto $M \in \mathrm{Mod}\Lambda[G][X(G)]$ le asocia $M_\chi := \{m \in M \mid \chi\cdot m = m, \ \chi \in X(G)\}$. Si $g' \in G'$, $\chi \in X(G)$, $m \in M_\chi$, $\chi\cdot(g'm) = \chi(g')g'\chi\cdot m = g'm$. Por tanto, $g'm \in M_\chi$ y $M_\chi \in \mathrm{Mod}\Lambda[G']$. Si $f : M \longrightarrow N$ es morfismo en $\Lambda[G][X(G)]$, se tiene $M_\chi \xrightarrow{f} N_\chi$ ya que $m \in M_\chi \in \chi$, $\chi\cdot f(m) = f(\chi m) = f(m)$ y $f(m) \in N_\chi$.

Hemos probado que en efecto F es un funtor.

Sea $N \in \mathrm{Mod}\Lambda[G']$, $\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[G']} N \in \mathrm{Mod}\Lambda[G]$, y si $\chi \in X(G)$, $g\otimes n \in \Lambda[G]\otimes_{\Lambda[G']} N$ definimos $\chi\cdot(g\otimes n) = \chi(g)g\otimes n$.

Una fácil comprobación muestra que con esta estructura $\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[G']} N$ es un $\Lambda[G][X(G)]$-módulo. Además, si $f : N_1 \longrightarrow N_2$ es $\Lambda[G']$ morfismo, $\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[G']} f : \Lambda[G]\otimes_{\Lambda[G']} N_1 \longrightarrow \Lambda[G]\otimes_{\Lambda[G']} N_2$

es $\Lambda[G]$ morfismo que satisface $\Lambda[G]\otimes f(\chi\cdot g\otimes m) = \Lambda[G]\otimes f(\chi(g)g\otimes m)) = g\otimes f(\chi(g)m) = \chi(g)(g\otimes f(m)) = \chi\cdot(\Lambda[G]\otimes f)(g\otimes m)$ y es por tanto $\Lambda[G][X(G)]$-morfismo.

Así, $\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[G']}\longrightarrow : \mathrm{Mod}\Lambda[G'] \longrightarrow \mathrm{Mod}\Lambda[G][X(G)]$ es funtor.

Sea $M \in \mathrm{Mod}\Lambda[G][X(G)]$, definimos $\eta_M : \Lambda[G]\otimes_{\Lambda[G']} M_x \longrightarrow M$, $g\otimes m \longrightarrow gm$. η_M es $\Lambda[G]$-morfismo; $\eta_M(\chi\cdot g\otimes m) = \eta_M(\chi(g)g\otimes m) = \chi(g)\ gm = \chi(g)\ g\chi m = \chi\cdot(gm) = \chi\eta_M(g\otimes m)$ y es también $\Lambda[G][X(G)]$-morfismo. η es natural: Si $M \xrightarrow{f} N$ es $\Lambda[G][X(G)]$ morfismo,

$$f\eta_M(g\otimes m) = f(gm) = gf(m) = \eta_N(\Lambda[G]\otimes f)(g\otimes m).$$

η_M es inyectiva. Sean $1 = g_1, g_2, \ldots, g_n$ representantes de las clases laterales de G' en G. Luego, todo elemento de $\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[G']} M_x$ se escribe en forma única como $\sum_{i=1}^{n} g_i\otimes m_i$.

Supongamos que $0 = \eta_M(\sum_{i=1}^{n} g_i\otimes m_i) = \sum_{i=1}^{n} g_i m_i$. De forma que $0 \neq \sum_{i=1}^{n} g_i\otimes m_i$ tiene el mínimo posible de $m_j \neq 0$; $g_j^{-1}\sum_{i=1}^{n} g_i\otimes m_i$ tiene el coeficiente de 1 distinto de 0 y también η_M lo envía en 0. Podemos entonces suponer que $m_1 \neq 0$. Como $\eta_m(1\otimes m_1) = m_1$, debemos tener $j \neq 1$ con $m_j \neq 0$.

Por (4.4), como $g_j \notin G'$, existe $\chi \in X(G)$ con $\chi(g_j)\neq 1$. Entonces, $0 = \chi\cdot(\sum_{i=1}^{n} g_i m_i) = \sum_{i=1}^{n}\chi(g_i)g_i\chi m_i = \sum_{i=1}^{n}\chi(g_i)g_i m_i$. Por tanto, $0 = \sum_{i=1}^{n}(1 - \chi(g_i))g_i m_i = \sum_{i=2}^{n}(1 - \chi(g_i))g_i m_i$ que además satisface

$$\eta_M(\sum_{i=2}^{n} g_i\otimes(1-\chi(g_i)m_i)) = \sum_{i=2}^{n}(1-\chi(g_i))g_i m_i = 0; \text{ como}$$

$(1 - \chi(g_j))m_j \neq 0$, $0 \neq \sum_{i \neq 2}^{n} g_i\,(1 - \chi(g_i))m_i$ y además, tiene menos sumandos que $\sum_{i=1}^{n} g_i\, m_i$, lo que contradice su elección. η_M es entonces inyectiva.

Supongamos que M es finitamente generado, probaremos que η_M es sobre: Como antes, $g_1 = 1, g_2, \ldots, g_n$ son representantes de las clases laterales de G' en G.

Definimos $M_{i\chi} := \{m \in M \mid \chi(g\ )\chi m = m, \forall\, \chi \in X(G)\}$, de forma que $M_{i\chi} = M_{\chi}$. Como antes, estos son $\Lambda[G']$ módulos. Afirmamos que como $\Lambda[G']$ módulo, M es la suma directa de estos módulos $M_{i\chi}$.

Sea $p_i : M \longrightarrow M_{i\chi}$, $m \longmapsto \frac{1}{O(X(G))} \sum_{\chi \in X(G)} \chi(g_i)\chi m$.

En primer lugar está bien definido: $\chi'(g_i)\chi' p_i(m) = \frac{1}{O(X(G))} \cdot \sum_{\chi \in X(G)} \chi'(g_i)\chi'\chi m = \frac{1}{O(X(G))} \sum_{\chi \in X(G)} \chi(g_i)\chi m = p_i(m) \in M_{i\chi}$.

En segundo término es $\Lambda[G']$ morfismo: si $g' \in G'$, $p_i(\lambda g' m) = \frac{1}{O(X(G))} \Sigma\, \chi(g_i)\chi\lambda g' m = \lambda g' \frac{1}{O(X(G))} \sum_{\chi \in X(G)} \chi(g')\chi(g_i)\chi m = \lambda g' p_i(m)$.

$$\begin{tikzcd} & M_{i\chi} \arrow[dl, hook', "j_i"'] \arrow[d, equal] \\ M \arrow[r, "p_i"'] & M_{i\chi} \end{tikzcd}$$

$$p_i j_i(m) = \frac{1}{O(X(G))} \Sigma \chi(g_i)\chi m = m.$$

Sea $m \in M_{i\chi}$, $p_i j_i(m) = \frac{1}{O(X(G))} \Sigma \chi \cdot m = j_i p_i(m)$. ie.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{i\chi} \arrow[d, "j_i"] \\ M_{i\chi} \arrow[u, hook, "j_1"] \arrow[r, "p_1"'] & (M_{i\chi})_{1\chi} \end{tikzcd}$$

Pero, si $0 \neq n \in (M_{i\chi})_{i\chi} \subset M_{1\chi}$, $\chi \cdot n = n, \forall \chi \in X(G)$.

Luego, si $\chi \in X(G)$, $\chi(g_i)m = \chi(g_i)\chi.m = m$ y $\chi(g_i) = 1$.

Esto solo es posible cuando $g_i \in G'$, o sea $g_i = 1$.

Hemos probado así que $p_i j_i = 0$ para todo par $i \neq 1$.

Además, $\sum_{i=1}^{n} j_i p_i(m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{O(X(G))} \sum_{\chi\in X(G)} \chi(g_i)\chi m = \frac{1}{O(X(G))} \cdot$

$\sum_{\chi\in X(G)} (\sum_{i=1}^{n} \chi(g_i))\chi m$.

Probaremos que $\sum_{i=1}^{n} \chi(g_i) = \begin{cases} O(X(G)) & \text{si } \chi = 1 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

Supongamos $\chi \neq 1$, existe $g \in G$ con $\chi(g) \neq 1$. Evaluemos el producto

$$\sum_{i=1}^{n} \chi(g_i)(1 - \chi(g)) = \sum_{i=1}^{n} \chi(g_i) - \sum_{i=1}^{n} \chi(g_i g).$$

Existe una permutación σ de $\{1,\dots,n\}$ tal que $g_i g = h_i g_{\sigma(i)}$ con $h_i \in G'$. Luego, $\chi(g_i g) = \chi(g_{\sigma(i)})$ y $\sum_{i=1}^{n} \chi(g_i)(1-\chi(G)) = 0$, esto solo es posible si $\sum_{i=1}^{n} \chi(g_i) = 0$.

En conclusión, $\sum_{i=1}^{n} j_i p_i = id$ y $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_{i\chi}$ descomposición como $\Lambda[G']$-módulo.

Por otra parte, $\psi_i : M_{1\chi} \longrightarrow M_{i\chi}$, $m \longmapsto g_i^{-1}m$ es un k-isomorfismo, ya que $\chi(g_i)\chi(g_i^{-1}m) = \chi(g_i)\chi(g_i^{-1})g_i^{-1}\chi.m = g_i^{-1}m \in M_{i\chi}$.

Por tanto, $\dim_k M = n \dim_k M_{1\chi}$. Como también, $\Lambda[G]$ es un $\Lambda[G']$ módulo derecho libre con n generadores,

$$\dim_k \Lambda[G]\otimes_{\Lambda[G']} M_X = n \dim_k M_{1X}.$$

Como η_M conmuta con límites directos, esto prueba que η_M es un isomorfismo. Hasta aquí hemos mostrado que F es sección. El resto es sencillo:

Sea $N \in \mathrm{Mod}\Lambda[G']$, definimos $\varepsilon_N : N \longrightarrow (\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[G']} N)_X$, $n \longmapsto 1\otimes n$,

ε_N es un $\Lambda[G']$-morfismo, natural en N.

Obviamente, ε_N es inyectivo. Sea $y = \sum_{i=1}^{n} g_i\otimes n_i \in (\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[G']} N)_X$.
Sea $\chi \in X(G)$, $\sum_{i=1}^{n} g_i\otimes n_i = \chi(\sum_{i=1}^{n} g_i\otimes n_i) = \sum_{i=1}^{n}\chi(g_i)g_i\otimes n_i$.

Luego, para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$, $(1 - \chi(g_i))n_i = 0$. Esto muestra que $n_i = 0$, si $i \neq 1$. Por tanto, $y = 1\otimes n_1 = \varepsilon_N(n_1)$.
ε_N es isomorfismo.

F es ahora equivalencia, lo que muestra el resultado.//

Este resultado tiene una agradable aplicación.

Supongamos que G es soluble, o sea, existe $n \in \mathbb{N}$ con

$G \supset G' \supset G'' \supset \ldots \supset G^{(n)} = (1)$. Llamamos $X_i := X(G^{(i)})$ identificando $G^{(0)} = G$. Tenemos entonces:

$$\Lambda[G][X_0] \sim \Lambda[G'],\ \Lambda[G'][X_1] \sim \Lambda[G''],\ \ldots\ldots,\ \Lambda[G^{(n-1)}][X_{n-1}] \sim \Lambda.$$

Luego, el estudio de $\Lambda[G]$ podemos reducirlo mediante un "torcimiento" por el grupo X_0 que es abeliano al estudio de

$\Lambda[G']$ y así sucesivamente hasta que el doble torcimiento por los grupos $G^{(n-1)}$, X_{n-1} ambos abelianos nos reduce al estudio de los módulos sobre Λ. De donde, para el estudio de $\Lambda[G]$, nos basta con saber "torcer" por grupos abelianos. Pero más aún, en vista de (4.2) hemos reducido el estudio de los grupos solubles al de los grupos cíclicos. Esto es de particular importancia en vista de los resultados de la próxima sección.

5. DESCOMPOSICION DE LOS MODULOS EN ALGEBRAS TORCIDAS.

En esta sección regresamos al problema de relacionar los módulos sobre un álgebra con los módulos sobre un álgebra torcida. Para ello resultan de particular interés los funtores res, ind definidos en la sección 3. Aquí describiremos la descomposición en inescindibles de M^G con M un módulo inescindibles sobre el álgebra dada.

Para este desarrollo seguiremos parcialmente lo que hicimos en [*P*].

Fijamos un álgebra Λ y un grupo finito de automorfismos de Λ, G. Supondremos que $\operatorname{char} k \nmid o(G)$.

(5.1) <u>Definición</u>: $\operatorname{mod}^G\Lambda$ es la siguiente categoría.

a) $(M, (\psi_g)_{g\in G}) \in Ob \operatorname{mod}^G\Lambda$ si y solo si

$M \in \operatorname{mod}\Lambda$, $\psi_g : M \longrightarrow M^g$ es Λ-isomorfismo

ψ_1 es la identidad y $\psi_h\psi_g = \psi_{hg}$ para $h, g \in G$.

b) $f : (M, (\psi_g)_{g\in G}) \longrightarrow (N, (\phi_g)_{g\in G})$ es morfismo en $\operatorname{mod}^G\Lambda$ si $f : M \longrightarrow N$ es Λ-morfismo y para $g \in G$, el siguiente cuadro conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_g"'] & N \arrow[d, "\phi_g"] \\ M^g \arrow[r, "f"] & N^g \end{tikzcd}$$

(5.2) <u>Proposición</u>: Las categorías $\mathrm{mod}\Lambda[G]$ y $\mathrm{mod}^G\Lambda$ son equivalentes.

<u>Demostración</u>: Sea $R = \mathrm{res} : \mathrm{mod}\Lambda[G] \longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda$ el funtor restricción. Sea $M \in \mathrm{mod}\Lambda[G]$, definimos $\psi_g : RM \longrightarrow (RM)^g$, $m \longmapsto gm$. ψ_g es Λ-morfismo: $\psi_g(\lambda m) = g.\lambda.m = g(\lambda)m = \lambda^* gm = \lambda^* \psi_g(m)$.

Por tanto ψ_g es Λ-isomorfismo con $\psi_h\psi_g = \psi_{hg}$, $\psi_1 = 1$.

Además, dado $f : M \longrightarrow N$ en $\mathrm{mod}\Lambda[G]$, es claro que $\psi_g Rf = Rf\psi_g$.

Luego, el funtor R está bien definido de $\mathrm{mod}\Lambda[G]$ en $\mathrm{mod}^G\Lambda$.

Sean $f, g, \in \mathrm{Hom}_{\Lambda[G]}(M,N)$, si $Rf = Rg$ obviamente $f=g$. R es fiel.

Sea $f \in \mathrm{Hom}(RM, RN)$ en $\mathrm{mod}^G\Lambda$.

Por tanto, para toda $g \in G$

$$\begin{tikzcd} RM \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_g"'] & RN \arrow[d, "\psi_g"] \\ (RM)^g \arrow[r, "f"] & (RN)^g \end{tikzcd}$$

conmuta.

Por tanto, $f(\lambda g.m) = \lambda f(gm) = \lambda f\psi_g(m) = \lambda\psi_g f(m) = \lambda g f(m)$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\Lambda[G]}(M,N)$. R es pleno.

R es denso: Sea $(M, (\psi_g)_{g\in G}) \in \mathrm{mod}^G\Lambda$.

Definimos $\lambda g^* m = \lambda\psi_g(m)$. Probaremos que $*$ es $\Lambda[G]$-producto $(\mu h)^*(\lambda g(m) = (\mu h)^*(\lambda\psi_g(m)) = \mu\psi_h(\lambda\psi_g(m) = \mu h(\lambda)\psi_h\psi_g(m) =$ $= \mu h(\lambda)\psi_{hg}(m)$. $(\mu h.\mu g)^* m = (\mu h(\lambda)hg)^* m = \mu h(\lambda)\psi_{hg}(m)$.

Para M con este producto, $RM = (\mathrm{res}M, (\psi_g)_{g\in G})$.

Pero, $\psi_g : RM \longrightarrow (RM)^g$, $m \longrightarrow g^*m = \psi_g(m)$. Por tanto, R es denso.//

(5.3) <u>Corolario</u>: Si Λ es indescomponible y básica, $\Lambda = k(Q,I)$. G un grupo finito de automorfismos de (Q,I) que actúa sin vértices fijos, $\Pi : (Q,I) \longrightarrow (\overline{Q},\overline{I})$ la cubierta definida por la acción de G y $\overline{\Lambda} = k(\overline{Q},\overline{I})$, entonces $\Lambda[G]$ es Morita equivalente a $\overline{\Lambda}$.

<u>Demostración</u>: En [P,(5.3)] se prueba que $\mathrm{mod}^G\Lambda \sim \mathrm{mod}\overline{\Lambda}$. De (5.2) el Corolario se sigue inmediatamente.//

El Corolario (5.3) nos dice que el estudio de las álgebras torcidas generaliza el de las cubiertas finitas. Más adelante veremos que estos lazos son mucho más fuertes.

Sea $M \in \mathrm{mod}\Lambda$, recordamos que $G_M = \{g \in G \mid M \cong M^g\}$. Por el resto de la sección supondremos que M es inescindible y que G_M es cíclico. Esta última hipótesis es muy útil en vista del siguiente resultado que enunciamos sin prueba.

(5.4) <u>Lema</u> [G2]: Si $G_M = \{g_1,\dots,g_n\}$ cíclico, existen isomorfismos $\phi_i : M \longrightarrow M^{g_i}$ tales que $\phi_{g_j}\phi_{g_i} = \phi_{g_j g_i}$.//

Podemos ahora proceder a descomponer M^G en $\Lambda[G]$-módulos inescindibles.

Sea H una familia de representantes de las clases laterales derechas de G_M en G. Tenemos así, $G = \dot{\bigcup}_{h\in H} G_{mh}$, suponemos $1 \in H$.

Definimos: $M_i := \bigoplus_{h\in H} M^{g_i h}$ si $G_M = \{g_1,\ldots,g_n\}$.

(5.5) Lema: Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ se puede construir una familia $(\psi_{ig})_{g\in G}$ de automorfismos de M_i tal que $(M_i,(\psi_{ig})_{g\in G}) \in \mathrm{mod}^G\Lambda$. Además, cada dos de estos objetos resultan isomorfos en $\mathrm{mod}^G\Lambda$.

Demostración: Se comienza construyendo la familia de automorfismos de M_1 de forma que pertenezca a $\mathrm{mod}^G\Lambda$.

Sea $g \in G$, definimos $\delta_g : H \longrightarrow H$ y $\varepsilon_g : H \longrightarrow G_M$ funciones tales que para cualquier $h \in H$, $\delta_g(h)$ y $\varepsilon_g(h)$ son los únicos elementos con $hg^{-1} = \varepsilon_g(h)\delta_g(h)$.

Como $\varphi^{-1}_{\varepsilon_g(h)} : M^h \longrightarrow M^{\delta_g(h)g}$ es isomorfismo, si definimos

$$a_{h_2h_1} = \begin{cases} \varphi^{-1}_{\varepsilon_g(h_1)} & \text{si } h_2 = \delta_g(h_1), \text{ entonces la matriz} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$\psi_g = (a_{h_2h_1})_{h_2h_1\in H} : M_1 \longrightarrow M_1^g = \bigoplus_{h\in H} M^{hg}$ es un Λ-isomorfismo.

La laboriosa demostración de que $(M_1,(\psi_g)_{g\in G}) \in \mathrm{mod}^G\Lambda$ puede encontrarse en [P; (7.2)].

Los restantes morfismos para M_i se definen por

$\psi_{ig} = (a^{(i)}_{h_2h_1})_{h_2h_1 \in g_i H}$

donde $a^{(i)}_{h_2h_1} = \begin{cases} \psi^{-1}_{g_i \varepsilon_g(h) g_i^{-1}} & \text{si } h_1 = g_i h, h_2 = g_i \delta_g(h) \text{ con } h \in H \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

y $(M_i, (\psi_{ig})_{g \in G}) \in \operatorname{mod}^G \Lambda$.

Además, $\eta_i := \bigoplus_{h \in H} \psi_{g_i} : M_1 \longrightarrow M_i$ es $\operatorname{mod}^G\Lambda$ isomorfismo.//

(5.6) <u>Proposición</u>: M_1 es sumando directo de M^G. En particular M^G es inescindible si y solamente si G_M es trivial.//

La demostración de la Proposición anterior se omite, ya que es idéntica a la dada en [P].

Supongamos que $n = O(G_M)$ y que $G_M = \langle g_0 \rangle$. Sea ω una raíz n-ésima primitiva de la unidad en k. Definamos ahora $\psi_{\omega g_0^i} := \omega^i \psi_{g_0^i}$. Observemos que $(\psi_{\omega g})_{g \in G}$ es otra familia de isomorfismos que satisface $\psi_{\omega g_1} \psi_{\omega g_2} = \psi_{\omega g_1 g_2}$ para $g_1, g_2 \in G_M$. Para esta familia podemos construir el sumando directo $M_\omega = (\bigoplus_{h \in H} M^h, (\psi_{\omega g})_{g \in G}) \in \operatorname{mod}^G\Lambda$, de M^G exactamente en la forma en que se hizo antes (en realidad era el caso $\omega = 1$). Tenemos el siguiente Teorema cuya prueba es también como en [P].

(5.7) <u>Teorema</u>: $M^G = \bigoplus_{\omega^n = 1} M_\omega$ es una descomposición en inescindibles de $\Lambda[G]$.//

De hecho este resultado puede mejorarse dando mayor información acerca de los factores M_ω de la descomposición.

(5.8) <u>Proposición</u>: Si $\varepsilon^n = 1 = \omega^n$ son dos raíces diferentes de la unidad, $M_\varepsilon \not\cong M_\omega$.

<u>Demostración</u>: Consideremos $M_\varepsilon = (M_1, (\psi_{\varepsilon g})_{g\in G})$, $M_\omega = (M_1, (\psi_{\omega g})_{g\in G})$ elementos de $\mathrm{mod}^G\Lambda$.

Supongamos $t : M_\varepsilon \longrightarrow M_\omega$ es un isomorfismo en $\mathrm{mod}^G\Lambda$. $t = (t_{h_1h_2})_{h_1h_2\in H}$ tal que $t_{h_1h_2} : M^{h_2} \longrightarrow M^{h_1}$.

Por tanto, para toda $g \in G$ el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\psi_{\varepsilon g}"'] & M_1 \arrow[d, "\psi_{\omega g}"] \\ M_1^g \arrow[r, "t"] & M_1^g \end{tikzcd}$$

O sea, $t\psi_{\varepsilon g} = \psi_{\omega g}t$. Escribiremos explícitamente estos productos.

Como en (5.5), $a_{h_2h_1} = \begin{cases} \psi^{-1}_{\varepsilon\varepsilon_{g(h_1)}} & \text{si } h_2 = \delta_g(h_1), \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

De forma que $\psi_{\varepsilon g} = (a_{h_2h_1})$. Ahora podemos calcular:

$$t\psi_{\varepsilon g} = (t_{h_1h_2})(a_{h_1h_2}) = (\sum_{h\in H} t_{h_1h}a_{hh_2})_{h_1h_2\in H} = (t_{h_1\delta_g(h_2)}\psi^{-1}_{\varepsilon\varepsilon g(h_2)})_{h_1h_2}$$

donde $M^{h_2} \xrightarrow{\psi^{-1}_{e\varepsilon_g(h_2)}} M^{\delta_g(h_2)g} \xrightarrow{t_{h_1\delta_g(h_2)}} M^{h_1 g}$.

Similarmente $b_{h_2h_1} = \begin{cases} \psi^{-1}_{w\varepsilon_g(h_1)} & \text{si } h_2 = \delta_g(h_1) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$\psi_{wg}t = (b_{h_1,h_2})(t_{h_1h_2}) = (\sum_{h\in H} b_{h_1h}t_{hh_2})_{h_1h_2} = (\psi^{-1}_{w\varepsilon_g(h(h_1))}t_{h(h_1)h_2})_{h_1h_2}$.

Donde $h_1 = \delta_g(h(h_1))$ y $M^{h_2} \xrightarrow{t_{h(h_1)h_2}} M^{h(h_1)} \xrightarrow{\psi^{-1}_{w\varepsilon_g(h(h_1))}} M^{\delta_g(h(h_1))g} = M^{h_1 g}$.

Por tanto, $t_{h_1\delta_g(h_2)}\psi^{-1}_{e\varepsilon_g(h_2)} = \psi^{-1}_{w\delta_g(h(h_1))}t_{h(h_1)h_2}$ para todas $h_1, h_2 \in H$

Observemos que $\delta_g(\delta_{g^{-1}}(h_1)) = \delta_1(h_1) = h_1$ y $h(h_1) = \delta_{g^{-1}}(h_1)$.

De aquí, $\varepsilon_{g^{-1}}(h_1)\varepsilon_g(\delta_{g^{-1}}(h_1)) = \varepsilon_1(h_1) = 1$ y

$\varepsilon_g(h(h_1)) = \varepsilon_{g^{-1}}(h_1)^{-1}$.

Si $t_{h_1\delta g(h_2)}$ es iso, $t_{h_1\delta_g(h_2)} : M^{\delta_g(h_2)} \xrightarrow{\sim} M^{h_1}$.

O sea, $M \cong M^{\delta_g(h_2)h_1^{-1}}$ y $\delta_g(h_2)h_1^{-1} \in G_M$, pero siendo ambos elementos representantes de las clases laterales de G_M en G, $\delta_g(h_2) = h_1$.

Además, si $h_1 \in H$, siendo t invertible, existe $t' = (t'_{h_1h_2})$ matriz tal que $tt' = id$. O sea, $id = (t_{hh'})(t'_{hh'}) = (\sum_{h'} t_{hh'}t'_{h'h''})_{h,h''}$.

Por tanto, $\sum_{h'} t_{h_1h'}t'_{h'h_1} = 1$. Como M es inescindible, $\mathrm{End}_\Lambda M$ es local y debe por ello de existir $h' \in H$ con $t_{h_1h'}$ invertible.

Como $\delta_g : H \to H$ es iso, existe $h_2 \in H$ con $h' = \delta_g(h_2)$. Luego, $t_{h_1\delta_g(h_2)}$ es isomorfismo, pero acabamos de probar que entonces $\delta_g(h_2) = h_1$. Y por tanto, siempre se tiene $t_{h_1h'}$ es isomorfismo.

Así, para toda $h \in H$, $g \in G$, $t_{hh}\psi^{-1}_{e\varepsilon_g(\delta_g^{-1}(h))} = \psi^{-1}_{\omega\varepsilon_g(\delta_{g-1}(h))}t_{\delta_{g-1}(h)\delta_{g-1}(h)}$ es una igualdad de isomorfismos.

En particular, si $h \in H$, $g = h^{-1}$. Se tiene:

$$t_{hh}\psi^{-1}_{e\varepsilon_{h-1}(\delta_h(h))} = \psi^{-1}_{\omega\varepsilon_{h-1}(\delta_h(h))}t_{\delta_h(h)\delta_h(h)} \quad (1)$$

Como $\varepsilon_h(h)\delta_h(h) = h$ entonces $\delta_h(h) = 1$, $\varepsilon_{h-1}(1) = 1$ (ya que $\varepsilon_{h-1}(1) = h$). Debido a que $\psi^{-1}_{e1} = 1 = \psi^{-1}_{\omega 1}$, tenemos $t_{hh} = t_{11}$.

$t_{11} \in \mathrm{End}_\Lambda(M) = k \bullet \mathrm{rad}\,\mathrm{End}_\Lambda(M)$ ya que $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ es local.

Obtenemos $t_{11} = a + r$ con $a \in k$, $r \in \mathrm{rad}\,\mathrm{End}_\Lambda(M)$. Como t_{11} es isomorfismo, $a \neq 0$.

Como antes, pongamos $G_M = (g_o)$. Como $\varepsilon_{g_o^{-1}}(1)\delta_{g_o^{-1}}(1) = g_o$, tenemos $\varepsilon_{g_o^{-1}}(1) = g_o$. Ya que $\delta_{g_o} : H \longrightarrow H$ es biyección, encontramos $h \in H$ con $\delta_{g_o}(h) = 1$. Así, $\varepsilon_{g_o^{-1}}(\delta_{g_o}(h)) = g_o$.

Recordemos que $\psi_{eg_o} = e\psi_{g_o}$, $\psi_{wg_o} = w\psi_{g_o}$ con $\psi_{g_o}: M \xrightarrow{\sim} M^{g_o}$.

Sustituyendo en la ecuación (1),

$$(a+r)e^{-1}\psi_{g_o}^{-1} = t_{11}e^{-1}\psi_{g_o}^{-1} = t_{hh}\psi_{eg_o}^{-1} = \psi_{wg_o}^{-1}t_{11} = w^{-1}\psi_{g_o}^{-1}(a+r).$$

Luego, $a(e^{-1}-w^{-1})\psi_{g_o}^{-1} = r(w^{-1}-e^{-1})\psi_{g_o}^{-1} \in \text{rad End}_\Lambda(M)$.

Como ψ_{g_o} es isomorfo, $a(e^{-1}-w^{-1}) = 0$

siendo $a \neq 0$, $e = w$. //

Veremos ahora en qué sentido el funtor ind : mod$\Lambda \longrightarrow$ $\longrightarrow$ mod$\Lambda[G]$ preserva sucesiones de Auslander-Reiten. La construcción que haremos es un tanto diferente y da mayor información que la similar en [P].

Como g induce un automorfismo en modΛ para $g \in G$, debe preservar sucesiones de Auslander-Reiten. En particular $G_M = G_{\tau M}$, donde τM es el módulo Dtr$M$ asociado a M si no es proyectiva.

Supongamos que M no es proyectivo y sea $(\psi_g)_{g\in G_M}$ una familia de isomorfismos $\psi_g : M \xrightarrow{\sim} M^g$ compatibles con G_M, en el sentido de (5.4). Sea $(\psi'_g)_{g\in G_M}$ una familia similar para τM.

Sea $\eta : 0 \longrightarrow \tau M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{t} M \longrightarrow 0$ la sucesión de Auslander-Reiten en modΛ. Por tanto, $[\eta] \in \text{Soc Ext}_\Lambda(M, \tau M)$ y lo genera.

$Ext(\psi_g,\psi'_g) : Ext_\Lambda(M,\tau M) \longrightarrow Ext_\Lambda(M^g,\tau M^g)$ es un isomorfismo. Por tanto, $Ext(\psi_g,\psi'_g)([\eta]) \in Soc\ Ext_\Lambda(M^g,\tau M^g)$ y una sucesión correspondiente a esta clase es la Λ-sucesión de Auslander-Reiten que comienza en τM^g. Pero esta sucesión también es η^g. Por tanto, $\psi'_g\eta\psi_g = Ext(\psi_g,\psi'_g)([\eta]) \simeq \eta^g$.

$$\begin{tikzcd}
\eta: & 0 \arrow[r] & \tau M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\psi'_g"'] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d, dotted] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\psi'_g\eta: & 0 \arrow[r] & \tau M^g \arrow[r] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r] \arrow[d, dotted] & M \arrow[r] \arrow[d, "\psi_g"] & 0 \\
\psi'_g\eta\psi_g: & 0 \arrow[r] & \tau M^g \arrow[r] \arrow[d, equal] & E'' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & M^g \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\eta^g: & 0 \arrow[r] & \tau M^g \arrow[r, "\delta^g"] & E^g \arrow[r, "t^g"] & M^g \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El diagrama que acabamos de dibujar tiene todos sus subcuadrados conmutativos.

Sea $\hat{\psi}_g : E \longrightarrow E^g$ la composición de los isomorfismos de E en E^g que aparecen en el diagrama. Por tanto, $\hat{\psi}_g\delta = \delta\psi'_g$, $t\hat{\psi}_g = \psi_g t$.

Es un ejercicio para espacios vectoriales el probar que $\hat{\psi}_g$ es única satisfaciendo esta propiedad.

Si $g_1, g_2 \in G_M$, $\hat{\psi}_{g_1g_2}$ y $\hat{\psi}_{g_1}\cdot\hat{\psi}_{g_2}$ hacen conmutar los mismos diagramas, respecto a $\psi'_{g_1}\psi'_{g_2} = \psi'_{g_1g_2}$ y $\psi_{g_1}\psi_{g_2} = \psi_{g_1g_2}$. Por la unicidad, $\hat{\psi}_{g_1g_2} = \hat{\psi}_{g_1}\hat{\psi}_{g_2}$.

Definimos, $\tilde{\delta} = \bigoplus_{h\in H}\delta^h : (\tau M) = \bigoplus_{h\in H}\tau M^h \longrightarrow \bigoplus_{h\in H}E^h =: E_1$.

Similarmente, $\tilde{\varepsilon} = \underset{h\in H}{\oplus}\varepsilon^h : E_1 \longrightarrow M_1$.

(5.0) <u>Teorema</u>: Si $\omega^n = 1$ es raíz n-ésima de la unidad en k entonces, la sucesión $X_\omega : 0 \longrightarrow (\tau M) \xrightarrow{\tilde{\delta}} E_\omega \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} M_\omega \longrightarrow 0$ es de Auslander-Reiten en $\mathrm{mod}\Lambda[G]$.

<u>Demostración</u>: Sea $g \in G$, consideremos:

$$\begin{array}{ccc} (\tau M)_1 & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & E_1 \\ \psi_{\omega g}\downarrow & & \downarrow\hat{\psi}_{\omega g} \\ (\tau M)_1^g & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & E_1^g \end{array} \qquad (1)$$

Como antes, $\psi'_{\omega g} = (a_{h_1,h_2})_{h_1h_2\in H}$ donde $a_{h_1h_2} = \begin{cases} \psi'^{-1}_{\omega\varepsilon_g(h_2)} & \text{si } h_1 = \delta_g(h_2) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$$\psi'_{\omega g}\tilde{\delta} = (a_{h_1h_2})(\tilde{\delta}_{h_1h_2}) = (a_{h_1h_2}\tilde{\delta}_{h_2h_2})_{h_1,h_2}$$

$$a_{h_1h_2}\tilde{\delta}_{h_2h_2} = \begin{cases} \psi'^{-1}_{\omega\varepsilon_g(h_2)}\delta^{h_2} & \text{si } h_1 = \delta_g(h_2) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Por otra parte, $\tilde{\delta}^g\hat{\psi}_{\omega g} = (\tilde{\delta}^g_{h_1h_2})(\hat{a}_{h_1h_2}) = (\tilde{\delta}^g_{h_1h_1}\hat{a}_{h_1h_2})_{h_1h_2\in H}$

$$\tilde{\delta}_{h_1h_2}\hat{a}_{h_1h_2} = \begin{cases} \delta^{h_1}\hat{\psi}^{-1}_{\omega\varepsilon_g(h_2)} & \text{si } h_1 = \delta_g(h_2) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

De la propiedad que define a ψ_g, se sigue que (1) es conmutativo, y $\bar{s} : (\tau M)_\omega \longrightarrow E_\omega$ es $\Lambda[G]$-morfismo.

Similarmente, $\bar{t} : E_\omega \longrightarrow M_\omega$ es morfismo.

Como $X : 0 \longrightarrow \tau M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{t} M \longrightarrow 0$ exacta, X_ω es exacta.

Además, X_ω no se escinde: si $\bar{t}' : M_1 \longrightarrow E_1$ tal que $\bar{t}\bar{t}' = id_{M_1}$, se tendría en particular, $\bar{t}\bar{t}'_{11} = \bar{t}_{11}\bar{t}'_{11} = id_M$ y X se escindiría.

Sea $(N, (\chi_g)_{g\in G}) \in \mathrm{mod}^G\Lambda$ y $p : (N, (\chi_g)_{g\in G}) \longrightarrow M_\omega$ morfismo que no es epi que se escinde.

Supongamos que $N \xrightarrow{p} M_\omega = M_1 \xrightarrow{\Pi_1} M$ se escinde, esto es, existe $S : M \longrightarrow N$ Λ-morfismo con $\Pi_1 pS = id_M$. Modificando S si es necesario podemos asumir (ver [P, pág. 67]) que $S\psi_{\omega g} = \chi_g S$, para toda $g \in G_M$. Por tanto, existe $\bar{S} : M_1 \longrightarrow N$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & \bigoplus_{h\in H} M^h = M_1 \arrow[d, dashed, "\bar{S}"] \\ M^h \arrow[urr, "\sigma_h"] \arrow[r, "S^h"'] & N^h \arrow[r, "\chi_h^{-1}"'] & N \end{tikzcd}$$

Debido a las propiedades de S es fácil checar que $\bar{S} : M_\omega \longrightarrow N$ es $\Lambda[G]$-morfismo y $p\bar{S}$ es un isomorfismo.

Luego, $\pi_1 p : N \longrightarrow M$ no se escinde, y existe $b : N \longrightarrow E$ un Λ-morfismo que hace conmutativo el triángulo

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "p"] \arrow[ddl, dashed, "b"'] \\ & M_\omega \arrow[d, "\pi_1"] \\ E \arrow[r, "t"] & M \end{tikzcd}$$

Como antes, podemos suponer que $b\chi_g = \hat{\psi}_{\omega g} b$ para toda $g \in G_N$.

Definimos $\bar{b} := (b\chi_h)^t_{h \in H} : N \longrightarrow \oplus_{h\in H} E^h = E_1$, donde $(\ )^t$ es la matriz transpuesta.

Consideremos

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\bar{b}"] \arrow[d, "\chi_g"'] & E_1 \arrow[d, "\hat{\psi}_{\omega g}"] \\ N^g \arrow[r, "\bar{b}"] & E_1^g \end{tikzcd} \qquad (2).$$

La matriz $\hat{\psi}_{\omega g}\bar{b}$ es una matriz columna, cuya entrada en el renglón $h_1 = \delta_g(h_2)$ es $a_{h_1 h_2}\bar{b}_{h_2} = \hat{\psi}^{-1}_{\omega\varepsilon_g(h_2)} b\chi_{h_2} = b\chi^{-1}_{\varepsilon_g(h_2)}\chi_{h_2} = b\chi_{\varepsilon_g(h_2)^{-1}h_2}$. El renglón $h_1 = \delta_g(h_2)$ de $\bar{b}\chi_g$ es: $b\chi_{h_1}\chi_g = b\chi_{h_1 g}$.

Pero, $\varepsilon_g(h_2)\delta_g(h_2) = h_2 g^{-1}$ y entonces, $\varepsilon_g(h_2)^{-1}h_2 = h_1 g$.

Así, (2) es conmutativo y $\bar{b} : N \longrightarrow E_N$ es $\Lambda[G]$-morfismo.

Finalmente, consideremos el triángulo

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "\bar{b}"'] \arrow[d, "p"] \\ E_\omega \arrow[r, "\bar{t}"] & M_\omega \end{tikzcd} \qquad (3)$$

$\bar{t}\bar{b}$ es una matriz columna con entrada h, $tb\chi_h = \Pi_1 p\chi_h = \Pi_1\psi_{\omega h}p$.
Así, $\bar{t}\bar{b} = (\Pi_1\psi_{\omega h}p)_h$.

Ahora, el cuadrado $\begin{tikzcd} M_\omega \arrow[r, "\Pi_h"] \arrow[d, "\psi_{\omega h}"'] & M \arrow[d, equal] \\ M_\omega^h \arrow[r, "\Pi_1"] & M \end{tikzcd}$ es conmutativo, donde Π_h es la matriz con 1 en h y 0 en las demás entradas. En efecto, $\psi_{\omega h} = (a_{h_1h_2})$ como antes,

$\Pi_1\psi_{\omega h} = (\sum_{h_1}(\Pi_1)_{h_1}a_{h_1h_2})_{h_2} = (a_{1h_2})_{h_2}$.

$$\text{Donde} \quad a_{1h_2} = \begin{cases} \psi^{-1}_{\omega\varepsilon_h(h_2)} & \text{si} \quad 1 = \delta_h(h_2) \\ \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Como $\varepsilon_h(h)\delta_h(h) = hh^{-1} = 1$, $\delta_h(h) = 1 = \varepsilon_h(h)$. Siendo δ_h biyectiva, $h_2 = h$ y $\psi^{-1}_{\omega\varepsilon_h(h)} = \psi^{-1}_{\omega 1} = id_M$. Así, $\Pi_1\psi_{\omega h} = \Pi_h$.

De aquí se sigue que $\bar{t}\bar{b} = (\Pi_h p)_h = p$ y que (3) conmuta.

Hemos probado que X_ω es sucesión de Auslander-Reiten en mod$\Lambda[G]$. //

(5.10) <u>Corolario:</u> $X^G = \bigoplus_{w^{n}=1} X_w$. //

6. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS ALGEBRAS TORCIDAS.

En esta sección aplicaremos algunos de los resultados anteriores para obtener información de las álgebras torcidas. En concreto probaremos que la propiedad de un álgebra de ser tilteada se preserva bajo torcimiento. También la propiedad de tener una (P)-familia. Finalmente, el torcimiento bajo un grupo cíclico de automorfismos de un carcaj con relaciones preserva la conexidad del álgebra.

Comenzaremos con las álgebras tilteadas. Para nosotros (ver[HR]) un álgebra Λ se llama tilteada si existe un subconjunto $\mathcal{S} \subset \Gamma_\Lambda$ que satisface 3 propiedades: i) $\mathcal{S}$ no tiene ciclos dirigidos, ii) $\mathcal{S}$ es cerrado bajo la formación de caminos dirigidos. iii) $\mathcal{S}$ intersecta en uno y solo un punto cada τ-órbita de Γ_Λ. El conjunto $\mathcal{S}$ se llama rebanada completa.

Esta realidad es una caracterización de las álgebras tilteadas cuando Λ es de t.r.f. Además, en este caso se prueba que Γ_Λ no tiene ciclos dirigidos.

Sea Λ álgebra de t.r.f. tilteada. Si $M \in \Gamma_\Lambda$, debemos tener un número natural $n(M)$ tal que $\tau^{n(M)}M$ es proyectivo. Para un subconjunto $T \subset \Gamma_\Lambda$ pondremos $n(T) := \sum_{M \in T} n(M)$. También, definimos $P(M)$ el proyectivo tal que $\tau^{n(M)}M = P(M)$. Dadas dos rebanadas completas $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ diremos que $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2$, cuando para cada par de módulos $M_1 \in \mathcal{S}_1$, $M_2 \in \mathcal{S}_2$ con

$P(M_1) = P(M_2)$ se tenga $n(M_1) < n(M_2)$.

El siguiente resultado posiblemente sea bien conocido.

(6.1) <u>Proposición</u>: Si $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ son rebanadas completas de Γ_Λ, existe $\mathcal{S}$ rebanada completa tal que $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}_i$, $i=1,2$.

<u>Demostración</u>: Si $M_1 \in \mathcal{S}_1$, $M_2 \in \mathcal{S}_2$ con $P(M_1)=P(M_2)=:P$. Definimos $M(P) = M_1$ si $n(M_1) < n(M_2)$ ó $M(P) = M_2$ si no.

Sea $\mathcal{S} := \{M(P) \mid P \in \Gamma_\Lambda$ proyectivo$\}$, probaremos que $\mathcal{S}$ es una rebanada completa. Como Γ_Λ no tiene ciclos dirigidos, basta ver que $\mathcal{S}$ es cerrada bajo caminos dirigidos y que intersecta en un punto a cada τ-órbita.

La segunda propiedad es obvia. Supongamos entonces que $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow M_n$ es un camino dirigido en Γ_Λ con $M_1, M_n \in \mathcal{S}$.

Supongamos $M_{11} := M_1 \in \mathcal{S}_1$ y $M_{2n} := M_n \in \mathcal{S}_2$. Sean $M_{21} \in \mathcal{S}_2$ tal que $P(M_{11}) = P(M_{21})$ y $M_{1n} \in \mathcal{S}_1$ tal que $P(M_{1n}) = P(M_{2n})$. Por tanto, se debe tener $n(M_{11}) < n(M_{21})$ y $n(M_{2n}) < n(M_{1n})$.

Así, $M_{11} \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{2n} \searrow Y_1 \nearrow \tau^{-1}M_{2n} \searrow \cdots \nearrow M_{1n}$, es un camino dirigido con extremos en $\mathcal{S}_1$ y $M_{2n} \in \mathcal{S}_1$. Estando M_{1n} y M_{2n} en la misma τ-órbita, $M_{1n} = M_{2n} \in \mathcal{S}_1$.

Podemos así suponer que $M_{11} = M_1 \in \mathcal{S}_1$ y $M_{1n} = M_n \in \mathcal{S}_1$.

Por tanto, $M_2,\dots,M_{n-1} \in \mathcal{S}_1$. Definimos $M_{1i}:=M_i \in \mathcal{S}_1, i=2,\dots,n-1$.

Sea $M_{2i} \in \mathcal{S}_2$ con $P(M_{2i}) = P(M_{1i})$, $i=1,\dots,n$.

Supongamos que $n(M_{2i}) < n(M_{1i})$ con $i \in \{2,\dots,n-1\}$.

Por tanto,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
M_{2i} \arrow[dr] & & \tau M_{2i} \arrow[dr] & & M_{1i} \arrow[r] & M_{1(i+1)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_{1n} \arrow[dr] & & \tau M_{1n} \arrow[dr] & & M_{2n} \\
& Y_1 \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & & & & Z_1 \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

es un camino dirigido con extremos en $\mathcal{S}_2$. Así, $M_{1i} \in \mathcal{S}_2$ y $M_{1i} = M_{2i}$. Entonces, $n(M_{2i}) = n(M_{1i})$.

Hemos probado en general, $n(M_{1i}) \leq n(M_{2i})$ y $M_{1i} = M(P(M_{1i})) \in \mathcal{S}$. //

(6.2) <u>Teorema</u>: Sea G grupo de automorfismos de Λ, cíclicos y con $\operatorname{char} k \nmid o(G)$. Si Λ es álgebra t.r.f. tilteada, $\Lambda[G]$ también es tilteada.

<u>Demostración</u>: Sabemos ya por (3.5) que $\Lambda[G]$ es de t.r.f. Basta por ello probar que $\Lambda[G]$ tiene una rebanada completa.

Sea $\mathcal{S}_\Lambda$ una rebanada completa en Γ_Λ con $n(\mathcal{S}_\Lambda)$ mínimo.

Definimos $\mathcal{S} := \{N \in \Gamma_{\Lambda[G]} \mid N \mid M^G$ para alguna $M \in \mathcal{S}_\Lambda\}$; este es nuestro candidato a rebanada completa.

Por (3.6), $\Gamma_{\Lambda[G]}$ no tiene ciclos dirigidos y por tanto tampoco $\mathcal{S}$.

Sea $N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow N_n$ camino dirigido en $\Gamma_{\Lambda[G]}$ con $N_1, N_n \in \mathcal{S}$. Por tanto, existen $M_1, M_n \in \mathcal{S}_\Lambda$ con $N_n \mid M_1^G$ y $N_n \mid M_n^G$.

Si $E \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$ es casi se divide izquierda en Λ, también $E^G \longrightarrow M_n^G \longrightarrow 0$ lo es en $\Lambda[G]$, por (5.10). Como $N_{n-1} \longrightarrow N_n$ es $\Lambda[G]$-ineducible, $N_{n-1} \mid E^G$ y existe M_{n-1} Λ-inescindible tal que $N_{n-1} \mid M_{n-1}^G$. Por tanto, $M_{n-1} \to M_n$ en Γ_Λ. Continuando así se obtiene

$M_1' \longrightarrow M_2 \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_n$ en Γ_Λ de forma

que $N_i \mid M_i{}^G$ para $i = 2,\ldots,n$ y $N_1 \mid M_1'^G$. Luego, existe $g \in G$ tal que $M_1' = M_1^g \in \mathcal{S}_\Lambda^g$.

Observemos que $\mathcal{S}_\Lambda^g$ es rebanada completa. En efecto, si $K_1^g \longrightarrow K_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow K_n^g$ con $K_1, K_n \in \mathcal{S}_\Lambda$, se tiene $K_1 \longrightarrow K_2^{g^{-1}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow K_{n-1}^{g^{-1}} \longrightarrow K_n$ y entonces $K_2^{g^{-1}},\ldots,K_{n-1}^{g^{-1}} \in \mathcal{S}_\Lambda$. Si $N \in \Gamma_\Lambda$, existe $m \in Z$ con $\tau^m N^{g^{-1}} \in \mathcal{S}_\Lambda$ por tanto $\tau^m N \in \mathcal{S}_\Lambda^g$ es el único de esa órbita.

Sea $K_1 \in \mathcal{S}_\Lambda$ tal que $P(K_1) = P(M_1')$. Supongamos que $n(M_1') < n(K_1)$. Siendo $\mathcal{S}_\Lambda$ y $\mathcal{S}_\Lambda^g$ rebanadas completas, por (6.1) existe $\mathcal{S}'$ rebanada completa con $\mathcal{S}' < \mathcal{S}_\Lambda, \mathcal{S}_\Lambda^g$, pero entonces $n(\mathcal{S}') < n(\mathcal{S}_\Lambda)$ lo que contradice la elección de $\mathcal{S}_\Lambda$. Tenemos así que $n(K_1) < n(M_1')$, y por tanto un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] K_1 \arrow[dr] & & \tau K_1 \arrow[dr] & & M_1' \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_{n-1} \arrow[r] & M_n \\ & Y_1 \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & & & & \end{tikzcd}$$ con

$K_1, M_n \in \mathcal{S}_\Lambda$.

Por tanto, $M_2,\ldots,M_{n-1} \in \mathcal{S}_\Lambda$ y $N_2,\ldots,N_{n-1} \in \mathcal{S}$.

Sea $N \in \Gamma_{\Lambda[G]}$, existe por tanto $M \in \Gamma_\Lambda$ con $N|M^G$. Luego, hay alguna $n \in \mathbb{Z}$ con $\tau^n M \in \mathcal{S}_\Lambda$ y por (5.9), $\tau^n N \mid (\tau^n M)^G$, o sea $\tau^n N \in \mathcal{S}$.

Supongamos finalmente que $N, \tau^n N \in \mathcal{S}$ con $n > 0$. Existen $M_1, M_2 \in \mathcal{S}_\Lambda$ con $N|M^G$, y $\tau^n N|M_2^G$. También por (5.9), $\tau^n N|(\tau^n M_1)^G$, y debe entonces existir $g \in G$ tal que $\tau^n M_1 = M_2^g$. Esta situación la acabamos de enfrentar arriba y concluimos que $n = 0$. Esto es lo que deseaba probarse.//

(6.3) <u>Corolario</u>: Si G es grupo soluble con charkto(G) y Λ es de t.r.f. Entonces Λ es tilteada si y solo si $\Lambda[G]$ es tilteada.

<u>Demostración</u>: $\Leftarrow$): Por (4.2) el caso cíclico en (6.2) implica el abeliano. Como además, $\Lambda \sim \Lambda[G^{(n-1)}][X_{n-1}],\ldots,$ $\ldots,\Lambda[G'] \sim \Lambda[G][X(G)]$ donde $G^{(n)} = (1)$ y $X_i = X(G^{(i)})$, el resultado es claro.

$\Rightarrow$): Por (4.5), $\Lambda[G][X(G)] \sim \Lambda[G']$, por $\Leftarrow$) e inducción se sigue el Corolario.//

Observemos que de hecho se ha probado que si Λ es tilteada, existe un módulo tilteado M de Λ, de manera que M^G es un módulo tilteado para $\Lambda[G]$.

Para las (P)-álgebras también usamos una caracterización (ver [9]) : se dice que un álgebra Λ de t.r.f. es una (P)-álgebra si Γ_Λ tiene una cubierta estratificada de secciones; esto es, hay una familia F de secciones de Γ_Λ ajenas dos a dos y que satisfacen:

a) $\cup F = \Gamma_\Lambda$;

b) F posee una estratificación $h : F \longrightarrow \mathbb{N}$ (es decir, una función tal que para cada vértice x no proyectivo vale $h(\mathcal{S}_{\tau x}) = h(\mathcal{S}_x) - 1$ donde $\mathcal{S}_x$ denota la única sección de F que contiene a F.

(6.4) <u>Proposición</u>: Si G es grupo de automorfismos de Λ cíclico tal que $\operatorname{char} k \nmid o(G)$. Si Λ es de t.r.f. y (P)-álgebra, entonces $\Lambda[G]$ es también (P)-álgebra.

<u>Demostración</u>: Sea F una cubierta estratificada de secciones de Γ_Λ y $h : F \longrightarrow \mathbb{N}$ estratificación.

Observemos que $F^g = \{\mathcal{S}^g \mid \mathcal{S} \in F\}$ es también una cubierta estratificada de secciones de Γ_Λ y $h'(\mathcal{S}^g) = h(\mathcal{S})$ es una estratificación. En [BL] se prueba sin embargo que una familia así es única, luego $F^g = F$.

Otra observación: si $\mathcal{S} \in F$, $h(\mathcal{S}) = h(\mathcal{S}^g)$. En efecto, supongamos $h(\mathcal{S}) < h(\mathcal{S}^g)$, $m = h(\mathcal{S}^g) - h(\mathcal{S}) > 0$. Existe por tanto una cadena $\mathcal{S} - \mathcal{S}_1 - \ldots\ldots - \mathcal{S}_r - \mathcal{S}^g$ tal que m es el número de flechas hacia $\mathcal{S}^g$ menos el número de flechas hacia $\mathcal{S}$ (ver [L;(2.11)]).

Por tanto, $h(\mathcal{S}^{g^2}) - h(\mathcal{S}^g) = m$ y $h(\mathcal{S}) = h(\mathcal{S}^g) + m =$ $= h(\mathcal{S}^{g^2}) + 2m$.

Digamos que $g^n = 1$, entonces $h(\mathcal{S}) = h(\mathcal{S}^{g^n}) + nm = h(\mathcal{S}) + nm$. Por tanto $m = 0$.

Definamos $\mathcal{S}^G = \{N \in \Gamma_{\Lambda[G]} | \text{existe } M \in \mathcal{S},\ N|M^G\}$ para $\mathcal{S} \in F$.

y $F^G = \{\mathcal{S}^G \mid \mathcal{S} \in F\}$. Probaremos que ésta es la cubierta que buscábamos.

En primer lugar, si $\mathcal{S} \in F$, $\mathcal{S}^G$ es sección: Supongamos $N, \tau N \in \mathcal{S}^G$. Existen $M_1, M_2 \in \mathcal{S}$ con $N|M_1^G$, $\tau N|M_2^G$. Como en (6.2), existe $g \in G$ con $M_2 = (\tau M_1)^g$. Como $\tau M_1 \notin \mathcal{S}$, existe entonces $\mathcal{S}_1 \in F$ tal que $\tau M_1 \in \mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}$. $h(\mathcal{S}_1) = h(\mathcal{S}) - 1$, pero $M_2 = (\tau M_1)^g$ entonces $H(\mathcal{S}) = h(\mathcal{S}_1^g) = h(\mathcal{S}_1)$. . Si $N \longrightarrow X$ flecha en $\Gamma_{\Lambda[G]}$ tal que $N \in \mathcal{S}^G$ y $X \notin \mathcal{S}^G$. Como siempre, existe $M \in \mathcal{S}$ con $N|M^G$ y $Y \in \Gamma_\Lambda$ y una flecha $M \longrightarrow Y$ con $X|Y^G$, por (5.9). Sabemos que $Y \notin \mathcal{S}$, entonces $\tau Y \in \mathcal{S}$ y como $\tau X|(\tau Y)^G$, $\tau X \in \mathcal{S}^G$.

Que las secciones sean ajenas dos a dos es claro: si

$N \in \mathcal{S}_1^G \cap \mathcal{S}_2^G$, existen $M_1 \in \mathcal{S}_1$, $M_2 \in \mathcal{S}_2$ tales que $N|M_1^G$, M_2^G. Por tanto $M_2 = M_1^g$ para alguna $g \in G$. Por la primera observación, $\mathcal{S}_1^g \in F$ y $\mathcal{S}_1^g = \mathcal{S}_2$. Esto implica que $\mathcal{S}_1^G = \mathcal{S}_2^G$.

a): Claramente, $\cup F^G = \Gamma_{\Lambda[G]}$.

b): Definimos $h^G : F^G \longrightarrow \mathbb{N}$, $\mathcal{S}^G \longrightarrow h(\mathcal{S})$ que por la segunda observación al principio está bien definida.

Si $N \in \mathcal{S}^G$, existe $M \in \mathcal{S}$ tal que $N|M^G$, de donde $\tau N|(\tau M)^G$ y $\mathcal{S}_{\tau N}^G = (\mathcal{S}_{\tau M})^G$. Por tanto $h^G(\mathcal{S}_{\tau N}^G) = h^G(\mathcal{S}_N) - 1.$//

(6.5) <u>Corolario</u>: Si Λ es de t.r.f. y G es grupo soluble de automorfismos de Λ con $\mathrm{chark} \nmid o(G)$. Entonces Λ es (P)-álgebra si y solo si $\Lambda[G]$ es (P)-álgebra.

<u>Demostración</u>: Idéntica a la de (6.3).//

Hemos visto en (3.7) que la propiedad de ser simplemente conexa no se preserva bajo torcimientos. Sin embargo tenemos el siguiente:

(6.6) <u>Corolario</u>: Si Λ es simplemente conexa básica y G es grupo de automorfismos de Λ con $\mathrm{chark} \nmid o(G)$. Entonces $\Lambda[G]$ es (P)-álgebra.

<u>Demostración</u>: Por (2.12), G es soluble. Se aplica (6.5).//

Daremos ahora una aplicación de un tipo diferente. En

(3.7) se vió que el álgebra torcida de un álgebra indescomponible no es necesariamente indescomponible. Mostraremos ahora que para cierto tipo de grupos esta propiedad sí se preserva.

Fijemos primeramente el grupo G de automorfismos de Λ y supongamos $\operatorname{char} k \nmid o(G)$ y G es cíclico. Estamos evidentemente asumiendo que Λ es indescomponible de t.r.f.

(6.7) <u>Proposición</u>: Si $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ es inescindible y G_M trivial, entonces $\Lambda[G]$ es indescomponible.

<u>Demostración</u>: Definimos $N = M^G$, que por (5.6) es $\Lambda[G]$-inescindible. Sea $N_2 \in \operatorname{mod}\Lambda[G]$ inescindible, existe $M_2 \in \Gamma_\Lambda$ con $N_2 | M_2^G$. Como Λ es indescomponible de t.r.f., Γ_Λ es conexo, por tanto hay un diagrama

$$M = X_1 - X_2 - \dots\dots - X_{n-1} - M_2 = X_n \quad \text{en } \Gamma_\Lambda .$$

Si $X_{n-1} \longrightarrow X_n$, tomando $\eta : 0 \to X_{n-1} \to E \to X'_{n-1} \to 0$ la sucesión de Auslander-Reiten que comienza en X_{n-1}. Sea $X^G_{n-1} = \oplus_{i=1}^{m} X_{(n-1)i}$ descomposición en $\Lambda[G]$-inescindibles. Si η_i es la sucesión de Auslander-Reiten en $\operatorname{mod}\Lambda[G]$ que comienza en $X_{(n-1)i}$, se tiene $\eta^G = \oplus_{i=1}^{m} \eta_i$ por (5.10).

Como $X_n | E$, $X_n^G | E^G$ y existe $j \in \{1,\dots,m\}$ de forma que hay una flecha $X_{(n-1)j} \longrightarrow N_2$. En general, se prueba que hay una arista $X_{(n-1)j} \longrightarrow N_2$ y continuando, $X_{11} - X_{21} - \dots - X_{(n-1)1} - N_2$. Pero, $N = X_{11}$ y luego N_2 está contectado en $\Gamma_{\Lambda[G]}$ con N. Por tanto, $\Gamma_{\Lambda[G]}$ es conexo y $\Lambda[G]$ también lo es.//

Tomemos H un subgrupo de G, y sea $M \in \mathrm{mod}\Lambda[H]$ inescindible. Podemos tomar la inducción relativa del módulo M, $M^G = \Lambda[G]\otimes_{\Lambda[H]} M$. Este módulo lo descomponemos en $\Lambda[G]$-módulos inescindibles, $M^G = M_1\oplus\ldots\ldots\oplus M_r$. La pregunta que nos planteamos, es qué valor tiene esta r.

Elegimos $N \in \mathrm{ind}\Lambda$ tal que $M|N^H$. Podemos contestar la pregunta:

(6.8) <u>Lema</u>: Con las notaciones anteriores, $r=o(G_N)/o(H_N)$.

<u>Demostración</u>: Supongamos $N^H = N_1\oplus\ldots\ldots\oplus N_m$ es descomposición en $\Lambda[H]$-módulos inescindibles. Sin pérdida de generalidad, $M = N_1$. Sabemos además que $m = o(H_N)$, por (5.7).

Ahora, $N_1^G\oplus\ldots\ldots\oplus N_m^G = N^G = N_1'\oplus\ldots\ldots\oplus N_n'$ descomposición en $\Lambda[G]$-inescindibles. Aquí, $n = o(G_N)$. Los módulos $M_1,\ldots,M_r$ son algunos de los N_i'.

Por la teoría desarrollada en la sección 5, sabemos que

$\dim_k N_1 = \dim_k N_2 =\ldots\ldots=\dim_k N_m$ y $\dim_k N_1'=\ldots\ldots=\dim_k N_n'$.

Por tanto, también, $\dim_k M_1=\ldots\ldots=\dim_k M_r$.

De la última descomposición tenemos, $rm\dim_k N_1' = n\dim_k N_1'$. Y $r = n/m = o(G_N)/o(H_N)$ que es lo que deseaba probarse.//

(6.9) <u>Corolario</u>: Si $N \in \mathrm{mod}\Lambda$ inescindible, $M \in \mathrm{mod}\Lambda[H]$ inescindible con $M|N^H$ y si $G_N \subset H$ entonces M^G es $\Lambda[G]$-inescindible.

<u>Demostración</u>: Como $H \subset G$, $H_N \subset G_N$. Pero, $G_N \subset H$ implica que $H_N = G_N$. En (6.8), $r = 1$ y M^G es $\Lambda[G]$-inescindible.//

Algo similar a lo que acaba de hacerse para los módulos puede hacerse para las sucesiones de Auslander-Reiten.

En efecto, sea Y sucesión de Auslander-Reiten en $\mathrm{mod}\Lambda[H]$. Existe X una sucesión de Auslander-Reiten en $\mathrm{mod}\Lambda$ tal que

$X^H = X_1 \oplus \ldots \oplus X_m$ descomposición en sucesiones de Auslander-Reiten en $\mathrm{mod}\Lambda[H]$ y tal que $Y = X_1$.

$X_1^G \oplus \ldots . \oplus X_m^G = X^G = X_1' \oplus \ldots . \oplus X_n'$ descomposición en $\Lambda[G]$-sucesiones de Auslander-Reiten. Supongamos que Y comienza en M, con la misma notación de antes, X_1^G comienza en $M_1 \oplus \ldots \oplus M_r$. Y podemos suponer que X_i' comienza en M_i, $i=1,\ldots,r$.

Sea σ_i la inclusión del término final de X_i' en el término final de X^G y Π_i la proyección entre los iniciales.

Así, $X_i' = \Pi_i X^G \sigma_i$. Como $\Pi_i X_i^G$ es casi se divide derecha que comienza en M_i y como por (5.7) $i \neq j \Rightarrow M_i \ncong M_j$, el término final de X_i' debe aparecer como sumando del término final de X_i^G.

Por tanto, $Y^G = X_1^G = (\oplus_{i=1}^{r} \Pi_i) X^G (\oplus_{i=1}^{r} \sigma_i) = \oplus_{i=1}^{r} (\Pi_i X^G \sigma_i) = \oplus_{i=1}^{r} X_i'$.

Si G es grupo de automorfismos de (Q,I) y $\Lambda = k(Q,I)$, por (2.1) podemos ver a G como un grupo de automorfismos de Λ.

(6.10) Teorema: Si G es grupo de automorfismos de (Q,I) cíclico y $\Lambda = k(Q,I)$ es indescomponible de t.r.f., $\Lambda[G]$ es también indescomponible.

Demostración: Si el estabilizador G_M es trivial para algún $M \in \mathrm{mod}\Lambda$ inescindible, por (6.7) habríamos terminado. Podemos entonces suponer que $G_M \neq 1$ para todo inescindible $M \in \mathrm{mod}\Lambda$.

Ahora, si todos los estabilizadores fueran iguales, $G_M = G_N$ para cada dos inescindibles $M, N \in \mathrm{mod}\Lambda$, tomamos $g \in G_M$ con M inescindible, por tanto para todo proyectivo inescindible P, $P^G = P$. O sea, g actúa trivialmente sobre Q_o, pero entonces $g = 1$ y G_M sería trivial. Luego, existe un inescindible $M \in \mathrm{mod}\Lambda$ con $1 \neq G_M \subset G$.

Por inducción, $\Lambda[G_M]$ es indescomponible. Tomemos $N \in \mathrm{mod}\Lambda[G_M]$ inescindible con $N | M^{G_M}$. Por (6.9), N^G es $\Lambda[G]$-módulo inescindible. Por lo que acabamos de probar para la inducción relativa de sucesiones de Auslander-Reiten, la demostración puede seguirse exactamente como en (6.7). Por tanto $\Lambda[G]$ es indescomponible. //

7. RELACIONES ENTRE ESTABILIZADORES.

En esta sección deducimos algunas relaciones que satisfacen los estabilizadores de módulos inescindibles. Los resultados obtenidos permiten una descripción del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma_{\Lambda[G]}$ para un álgebra torcida conociendo Γ_Λ y los estabilizadores bajo la acción de G.

Fijamos para ello un álgebra Λ de t.r.f. y G un grupo de automorfismos de Λ cíclico y tal que $\operatorname{char} k \nmid o(G)$.

(7.1) <u>Definición</u>: Sea $0 \to M \to E \to \tau^{-1}M \to 0$ Λ-sucesión de Auslander-Reiten para M no inyectivo. Sea $E = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ descomposición en Λ-inescindibles. $M^G = \bigoplus_{w^n=1} M_w$, donde $n = o(G_M)$ es la descomposición de la sección 5 para M^G. Sea E_ω el término central de la $\Lambda[G]$-sucesión de Auslander-Reiten que comienza en M_ω.

Llamamos $r(M, M_j)$ al número de elementos de la órbita de M_j bajo la acción de G que aparecen como sumandos en E.

Llamamos $n(M, M_j, w)$ al número de sumandos de M_j^G que aparecen en la descomposición de E_ω.

(7.2) <u>Lema</u>: El número $n(M, M_j, w)$ no depende de w.

<u>Demostración</u>: Sean ε, w dos raíces n-ésimas de Λ en k..

Sea $M_j^G = \bigoplus_{i=1}^{t_j} M_{ji}$ descomposición en $\Lambda[G]$-inescindibles, para cada $j \in \{1,\dots,m\}$. res $M_{ji} = M_j{}^{[G:G_{M_j}]}$ para toda i,j.

De aquí, res $E_\omega = \bigoplus_{j=1}^{m}$ (res $M_{ji})^{n(M,M_j,\omega)} = \bigoplus_{j=1}^{m} M_j[G:G_{M_j}]n(M,M_j,\omega)$

Similarmente para E_ε, res $E_\varepsilon = \bigoplus_{j=1}^{m} M_j{}^{[G:G_{M_j}]n(M,M_j,\varepsilon)}$

Por otra parte, sabemos que res E_ω = res E_ε, y ambas descomposiciones en inescindibles son iguales. Por tanto $n(M,M_j,\omega) = n(M,M_j,\varepsilon)$ para toda $j \in \{1,\dots,m\}$.//

Debido a esto, escribiremos simplemente $n(M, M_j)$.

(7.3) <u>Proposición</u>: Para cada $j \in \{1,\dots,m\}$, $n(M,M_j)o(G_M) = \lambda(M,M_j)o(G_{M_j})$.

<u>Demostración</u>: Sea $j \in \{1,\dots,m\}$. El número total de sumandos inescindibles que aparece en $E^G = \bigoplus_{\omega^n=1} E_\omega$ es

$$\sum_{\omega^n=1} n(M,M_j,\omega) = n(M,M_j)o(G_M).$$

Por otra parte el número de sumandos inescindible de M_j^G es $o(G_{M_j})$. Como aparecen $\lambda(M,M_j)$ elementos de su órbita en la descomposición de E, el número total de sumandos inescindibles que aparece en E^G es $\lambda(M,M_j)o(G_{M_j})$ ya que además, M_j solo aparece una vez en la descomposición de E -porque Λ es de t.r.f.-

Por tanto, $n(M,M_j)o(G_M) = \lambda(M,M_j)o(G_{M_j})$.//

Esta fórmula permite conocer localmente al carcaj $\Gamma_{\Lambda[G]}$, dado Γ_Λ y los estabilizadores de sus módulos. Podemos dar alguna información acerca de estos números.

Por ejemplo, $r(M,M_j) \leq 3$ para toda $j \in \{1,\ldots,m\}$. Ya que por ser el álgebra Λ de t.r.f. necesariamente $m \leq 4$. Si $r(M,M_j) = 4$, existe entonces un único sumando inescindible de E que es proyectivo. Pero siendo estos sumandos elementos de la misma órbita bajo G, todos son proyectivos .

Los siguientes resultados además de expresar relaciones entre los estabilizadores de módulos inescindibles, permite ahondar en el asunto de los números recién definidos.

(7.4) <u>Proposición</u>: Supongamos $M \begin{array}{l} \xrightarrow{\delta_1} N \\ \xrightarrow[\delta_2]{} N^g \end{array}$ irreducibles en Γ_Λ, $g \in G$. Entonces $g \in G_M$.

<u>Demostración</u>: Supóngase que $g \notin G_M$.

Supongamos que δ_1 es sobre. Por tanto, $[M:k] > [N:k]$ y N no es proyectivo. Obtenemos:

$$\begin{tikzcd} & M^{g^{-1}} \arrow[dr, "\delta_2^{g^{-1}}"] & \\ \tau N \arrow[ur, "\sigma\delta_2^{g^{-1}}"] \arrow[dr, "\alpha\delta_1"'] & & N \\ & M \arrow[ur, "\delta_1"'] & \end{tikzcd}$$ irreducibles en Γ_Λ.

La sucesión de Auslander-Reiten que termina en N es de la forma

$$0 \to \tau N \to M \oplus M^{g-1} \oplus L \to N \to 0.$$

Por tanto, $[\tau N : k] = [M \oplus M^{g-1} \oplus L : k] - [N : k] > [M : k]$.

De donde, $\sigma\delta_1$ es sobre y M no es proyectivo. Repetimos el proceso:

$$\begin{tikzcd} & \tau N \arrow[dr, "\sigma\delta_1"] & \\ \tau M \arrow[ur, "\sigma^2\delta_1"] \arrow[dr, "\sigma^2\delta_2"'] & & M \\ & \tau N^g \arrow[ur, "\sigma\delta_2"'] & \end{tikzcd}$$

irreducibles en Γ_Λ.

La sucesión de Auslander-Reiten es de la forma

$$0 \to \tau M \to \tau N \oplus \tau N^g \oplus L' \to M \to 0$$

y como antes, $[\tau M : k] > [\tau N : k]$ y τN no es proyectivo.

Continuando en esta forma se obtiene la familia de inescindibles $\tau^s N$, $S \in \mathbb{N}$ que satisface $[\tau^s N : k] > [\tau^{s-1} M : k] > [\tau^{s-1} N : k]$.

Esto contradice el hecho de que Λ sea t.r.f.

Si δ_1 es mono, M no es inyectivo y se procede igual. //

(7.5) <u>Proposición</u>: Si $M \xrightarrow{f} N$ es Λ-ineducible, entonces

$$G_M \subset G_N \quad ó \quad G_N \subset G_M$$

<u>Demostración</u>: Supongamos falso el resultado. Tomamos $g \in G_M \quad G_N$ y $h \in G_N \quad G_M$.

Supongamos que f es sobre, $[M : k] > [N : k]$ y N no es proyectivo. Tenemos entonces el siguiente diagrama en Γ_Λ.

$$\begin{tikzcd}
 & M^h \arrow[dr, "f^h"] & \\
\tau N \arrow[ur, "\sigma f^h"] \arrow[dr, "\sigma f"'] & & N \\
 & M \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Procediendo como en (7.4), $[\tau N : k] > [M : k]$, σf es sobre y M no es proyectivo. Ahora tenemos:

$$\begin{tikzcd}
 & \tau N \arrow[dr, "\sigma f"] & & N \\
\tau M \arrow[ur, "\sigma^2 f"] \arrow[dr, "\sigma^2 f^g"'] & & M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & \tau N^g \arrow[ur, "\sigma f^g"'] & & N^g
\end{tikzcd}$$

Y satisface $[\tau M : k] > [\tau N : k]$, $\sigma^2 f$ es sobre y τN no es proyectivo. Continuando en esta forma se obtiene una familia infinita de módulos inescindibles con dimensión creciente.

Si f es mono, procedemos dualmente. //

(7.6) <u>Teorema</u>: Sea $M \xrightarrow{f} N$ irreducible.
Si $G_N \subset G_M$ entonces $r(M,N) = o(G_M)/o(G_N)$ y $n(M,N) = 1$.
Si $G_M \subset G_N$ entonces $r(M,N) = 1$ y $n(M,N) = o(G_N)/o(G_M)$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $G_N \subset G_M$.

Sean $g_1 = 1, \dots, g_n \in G$ elementos con $N^{g_i} \in M^+$ y de forma que $N^{g_i} \not\cong N^{g_j}$ si $i \neq j$. Por (7.4), $g_1, \dots, g_n \in G_M$.

Definimos $\psi : \{g_1, \dots, g_n\} \longrightarrow G_M/G_N$, $g_i \longmapsto \bar{g}_i$ función. Si $g \in G_M$, $M \begin{smallmatrix} \nearrow N \\ \searrow N^g \end{smallmatrix}$ y existe $i \in \{1, \dots, n\}$ con $N^g \cong N^{g_i}$.

Por tanto, $g g_1^{-1} \in G_N$ y $\bar{g} = \bar{g}_1$. Luego, ψ es sobre.

Además, si $\bar{g}_i = \bar{g}_j$ se tiene $g_i g_j^{-1} \in G_N$, $N^{g_i} \cong N^{g_j}$ y $g_i = g_j$.

Por tanto, ψ es biyección y $r(M,N) = O(G_M/G_N)$.

Por (7.3), $O(G_N) n(M,N) = r(M,N) O(G_M) = O(G_M)$ y $n(M,N) = 1$. Si $G_M \subset G_N$, supongamos que $N^g \in M^+$. Por (7.4), $g \in G_M \subset G_N$ y $N^g \cong N$; luego, $r(M,N) = 1$. Como antes, $n(M,N) = O(G_N/G_M)$. //

(7.7) <u>Corolario</u>: Si $M \xrightarrow{\delta} N$ ineducible y $G_N \subset G_M$, entonces $O(G_M/G_N) \leq 3$.

Bien puede suceder que $O(G_M/G_N) = 3$ como lo muestra el álgebra hereditaria

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}_3$ actúa sobre esta álgebra de forma que $G_x = \mathbb{Z}_3$ y $G_{y_1} = \{1\}$. Además, por ser hereditaria hay un ineducible $P_{y_1} \longrightarrow P_x$.

Sin embargo, tenemos el siguiente resultado cuando la flecha con esta propiedad es estable.

(7.8) <u>Proposición</u>: Si $M \xrightarrow{\delta} N$ es irreducible con $G_N \subset G_M$ $O(G_M/G_N) = 3$ y si además M y N son estables, Λ es autoinyectiva.

<u>Demostración</u>: Sean $g, h \in G_M$ tales que $\bar{g} \neq 1 \neq \bar{h} \neq \bar{g}$

en G_M/G_M.

Por tanto, N, N^h, N^g no son isomorfos.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & {} \\ M \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & N^g \\ & N^h \end{tikzcd}$$

Si existe otro módulo $P_1 \in M^+$, debe ser proyectivo inyectivo. En ese caso tenemos:

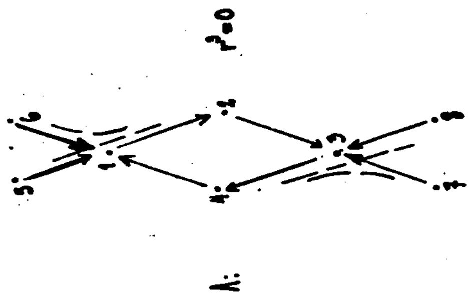
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \tau N \arrow[dr] & & N \arrow[dr] & \\ \tau M \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \tau N^g \arrow[r] & M \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & N^g \arrow[r] & \tau^{-1}M . \\ & \tau N^h \arrow[ur] & & N^h \arrow[ur] & \\ & & & P_1 \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

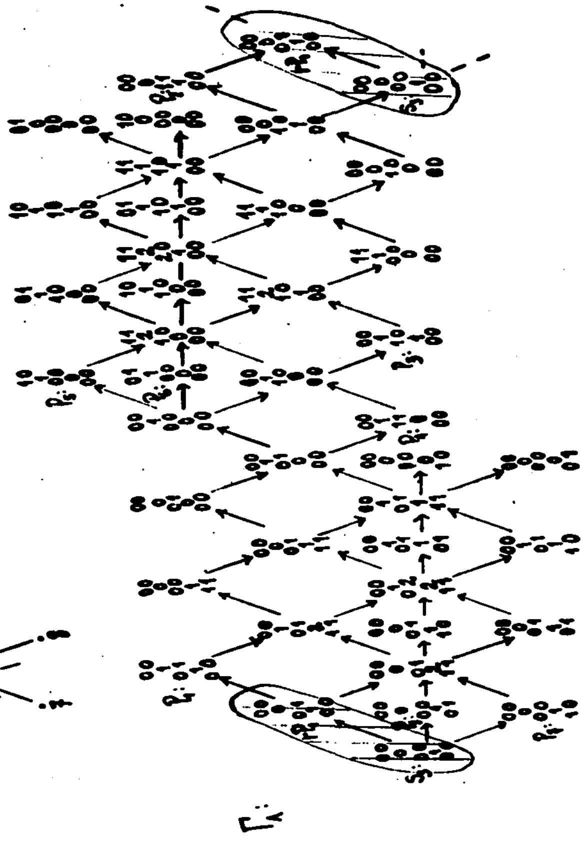
Observemos que de P_1 ya no sale ni entra otra flecha. En efecto, si $S = \mathrm{soc}P_1$ simple, $S \subset \mathrm{rad}P_1$ que es por tanto inescindible y $0 \longrightarrow \mathrm{rad}P_1 \longrightarrow P_1$ es sucesión de Auslander-Reiten. Además, $\mathrm{top}P_1/\mathrm{soc}P_1 = \mathrm{top}P_1$ simple y por tanto $P_1/\mathrm{soc}P_1$ es inescindible, $P_1 \longrightarrow P_1/\mathrm{soc}P_1 \longrightarrow 0$ es sucesión de Auslander-Reiten.

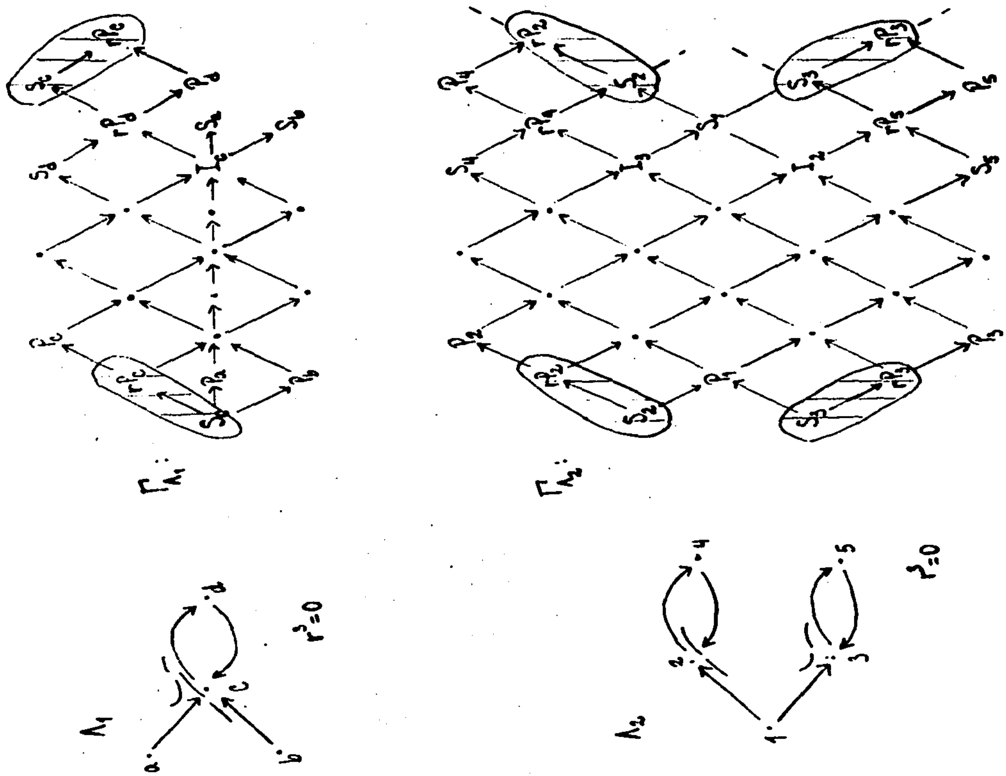
Por (7.6), $n(\tau N, M) = 3$. Nos preguntamos cuantas flechas pueden salir de τN. Sea K un $\Lambda[G]$-módulo tal que $K \mid \tau N^G$. Como $n(\tau N, M) = 3$, el término de en medio de la $\Lambda[G]$-sucesión de Auslander-Reiten que comienza en K, tiene 3 sumandos inescindibles de M^G. Luego, a lo más puede salir una flecha diferente de K, $K \longrightarrow L$. Como los sumandos de M^G no son proyectivos. L debe ser proyectivo-inyectivo. Solo en el caso de que esta flecha exista, se tiene también $\tau N \longrightarrow L' \cong N$, de forma que $L | L'^{G}$. Entonces L' debe ser proyectivo-inyectivo en $\mathrm{mod}\Lambda$.

Así, en caso de salir alguna flecha de τN, τN^{g} ó τN^{h} sale solo una y termina en un proyectivo-inyectivo.

De esta forma se puede continuar la construcción de Γ_{Λ}. Todos los proyectivos que aparecen son inyectivos y siendo esta la única componente de Γ_{Λ}, concluímos que Λ es autoinyectiva.//







8. ALGEBRAS TORCIDAS Y CUBIERTAS.

En esta sección estudiaremos la acción de grupos que fijan vértices sobre álgebras básicas. Veremos que torcer respecto a estos grupos resulta en la construcción de cubiertas finitas para el álgebra original. Para ello veremos también para qué grupos de este tipo el álgebra torcida resulta conexa.

Sea $\Lambda = k(Q,I)$ álgebra básica generada por el carcaj con relaciones (Q,I).

Sea G grupo cíclico finito de automorfismos de Λ que fijan vértices, i.e. $G \subset \mathrm{Aut}_o\Lambda$. Supondremos que $\mathrm{char}k \nmid o(G)$.

Observemos que por (2.7) los subgrupos finitos de $\mathrm{Aut}_o\Lambda$ cuyo orden no es divisible por chark, son abelianos. Luego, el estudio del caso en que el grupo es cíclico no es esencialmente restrictivo. En particular, si lo que nos interesa es obtener el álgebra torcida por (4.2) no hemos perdido generalidad.

Dado $g \in G$, una hipótesis agradable sería que g mandara a cada flecha de Q en un múltiplo de ella misma. Esta es una hipótesis que puede hacerse sin perder generalidad. En efecto, $g \in \mathrm{End}_k\Lambda$ y por el Teorema de descomposición de Jordan g debe ser semisimple (ya que $g = g_s g_\mu$ donde g_s es semisimple y g_μ unipotente y $o(g) = o(g_\mu)$ pero si g_μ no es libre de torsión, chark divide a $o(g_\mu)$). Por tanto g es diagonalizable, o sea, existe T un k-isomorfismo lineal de Λ

tal que $T^{-1}gT = D$ diagonal. Sea Λ' el álgebra con k-espacio vectorial subyacente Λ y multiplicación dada por $a * b = T^{-1}(T(a).T(b))$.

Como $T(a * b) = T(T^{-1}(a).T(b)) = T(a).T(b)$, $T : \Lambda' \longrightarrow \Lambda$ es isomorfismo de álgebras. Ahora D resulta ser un automorfismo de Λ':

$$D(a)*D(b) = T^{-1}(TD(a).TD(b)) = T^{-1}(gT(a).gT(b)) = T^{-1}g(T(a).T(b)) =$$

$$= DT^{-1}(T(a).T(b)) = D(a*b).$$

Además, el carcaj asociado a Λ' es el mismo que el de Λ y si $T(e)$ es un elemento fijo por g, $D(e) = T^{-1}gT(e) = e$. Luego, la imagen bajo T^{-1} de los vértices de Λ pueden tomarse como los vértices de Λ'. (Observar que estos elementos de Λ' forman un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales cuya categoría asociada es precisamente Λ').

Así, $D \in \mathrm{Aut}_o\Lambda'$. Llamamos $G = \langle g\rangle \subset \mathrm{Aut}_o\Lambda$, $H = \langle D\rangle \subset \mathrm{Aut}_o\Lambda'$. Definimos $\psi : \Lambda'[H] \longrightarrow \Lambda[G]$, $\lambda D^i \longrightarrow T(\lambda)g^i$ morfismo k-lineal.

$$\psi((\lambda_1 D^i)(\lambda_2 D^j)) = \psi(\lambda_1 D^i(\lambda_2)D^{i+j}) = T(\lambda_1)TD^i(\lambda_2)g^{i+j} =$$

$$= T(\lambda_1)g^iT(\lambda_2)g^{i+j} = (T(\lambda_1)g^i)(T(\lambda_2)g^j) = \psi(\lambda_1 D^i)\psi(\lambda_2 D^j).$$

Y ψ es un isomorfismo de álgebras.

Finalmente observemos que D tiene la propiedad deseada.

$\mathcal{D}$ envía flechas en un múltiplo de ellas mismas.

Haciendo lo indicado arriba para un generador de G, podemos asumir que G envía flechas en múltiplos de flechas.

Asumiremos esto por el resto de la sección. Ponemos $G = \langle g_o \rangle$.

Sea $x \in Q_o$, $P_x = \Lambda\tau_x$ el proyectivo asociado al vértice x.

Para $g \in G$, definimos $\psi_g : P_x = \Lambda\tau_x \longrightarrow P_x^g$, $\lambda\tau_x \longmapsto g(\lambda)\tau_x$ es Λ isomorfismo: $\mu \in \Lambda$, $\psi_g(\mu(\lambda\tau_x)) = g(\mu\lambda)\tau_x = g(\mu)g(\lambda)\tau_x = \mu^*\psi_g(\lambda\tau_x)$. Esta es una familia de isomorfismos compatible con el grupo $G_{P_x} = G$, ya que $\psi_g\psi_h = \psi_{gh}$, para todos $g,h \in G$.

Sea ω raíz primitiva n-ésima de 1 en k, donde $n = O(G)$. Por (5.7), $P_x^G = \bigoplus_{i=0}^{n-1} (P_x)_{\omega^i}$ descomposición en $\Lambda[G]$-proyectivos inescindibles. $(P_x)_\varepsilon$ tiene por Λ-módulo subyacente a P_x, si $g = g_o^j \in G$ la multiplicación por g está dada por

$$g \cdot (\lambda\tau_x) = \psi_{\varepsilon g}(\lambda\tau_x) = \varepsilon^j\psi_g(\lambda\tau_x) = \varepsilon^j g(\lambda)\tau_x.$$

(8.1) <u>Lema</u>: $\delta : P_x \longrightarrow P_y$ Λ-morfismo, entonces $\delta : (P_x)_1 \longrightarrow (P_y)_\varepsilon$ es $\Lambda[G]$-morfismo si y solo si $\delta(\tau_x) = \varepsilon g_o(\delta(\tau_x))$.

<u>Demostración</u>: $\Rightarrow)$: $\delta(\tau_x) = \delta(g_o\tau_x) = g_o * \delta(\tau_x) = \psi_{\varepsilon g_o}(\delta(\tau_x)) = \varepsilon g_o((\delta(\tau_x))$.

$\Leftarrow$) : Sea $\lambda \in \Lambda$, $i \in \{0,\ldots\ldots,n-1\}$

$$f(g_o^i(\lambda\tau_x)) = f(g_o^i(\lambda)\tau_x) = g_o^i(\lambda)f(\tau_x) = g_o^i(\lambda)\varepsilon g_o(f(\tau_x)) =$$

$$g_o^i * f(\lambda\tau_x) = \varphi_{\varepsilon g_o^i}(f(\lambda\tau_x)) = \varepsilon^i g_o^i(f(\lambda\tau_x)) = \varepsilon^i g_o^i(\lambda) g_o^i(f(\tau_x)) =$$

$$= \varepsilon^i g_o^i(\lambda)\ \varepsilon^{-i}(f(\tau_x)) = g_o^i(\lambda)f(\tau_x) = \varepsilon g_o^i(\lambda) g_o(f(\tau_x)).//$$

(8.2) <u>Proposición</u>: Si $x \xrightarrow{\alpha} y$ es flecha en Q, existe una única raíz de la unidad $\varepsilon, \varepsilon^n = 1$ tal que $(P_y)_1 \longrightarrow (P_x)_\varepsilon$ es irreducible en $\Lambda[G]$.

<u>Demostración</u>: Recordamos que ω es raíz primitiva n-ésima de la unidad en k, luego existe $j \in \{0,\ldots\ldots,n-1\}$ tal que $g_o(\alpha) = \omega^j\alpha$. Definimos $\varepsilon = \omega^{-j}$.

$(\alpha,-) = : f : P_y \longrightarrow P_x$ es Λ-morfismo. Afirmamos que $f : (P_y)_1 \longrightarrow (P_x)_\varepsilon$ es $\Lambda[G]$-morfismo. En efecto

$f(\tau_y) = \alpha = \varepsilon g_o(f(\tau_y))$ y (8.1) asegura que basta checar esto.

Además, es $\Lambda[G]$-ineducible: si

$$\begin{tikzcd} (P_y)_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & (P_x)_\varepsilon \\ & X \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

es una factorización de f con X $\Lambda[G]$-proyectivo, la restricción de Λ del diagrama sería una factorización de $f : P_y \longrightarrow P_x$ a través de un Λ-proyectivo. Como f es irreducible en Λ, f_1 ó f_2 deben escindirse en Λ. Por (3.2), alguno de ellos se escinde en $\Lambda[G]$.

Finalmente, supongamos que $(P_y)_1 \xrightarrow{\delta'} (P_x)_{\varepsilon'}$ es $\Lambda[G]$ irreducible. Entonces $P_y \xrightarrow{\delta'} P_x$ es Λ-ineducible (si esta restricción se factoriza por Λ-proyectivos, por lo que probamos antes, también por $\Lambda[G]$-proyectivos).

Así, existe $\lambda \in k^*$ y $\pi \in \mathrm{rad}^2_\Lambda(P_y, P_x)$ con $\delta' = \lambda\delta + \pi$.

$$\lambda\alpha + \pi(\tau_y) = \lambda\delta(\tau_y) + \pi(\tau_y) = \delta'(\tau_y) = \delta'(g_o\tau_y) = g_o{}^*\delta'(\tau_y) =$$

$$= \psi_{\varepsilon' g_o}(\delta'(\tau_y)) = \varepsilon'\psi_{g_o}(\lambda\delta(\tau_y)) + \pi(\tau_y)) = \varepsilon'\varepsilon^{-1}\lambda\alpha + \varepsilon'\psi_{g_o}(\pi(\tau_y)).$$

Como $\pi(\tau_y)$, $\psi_{g_o}(\pi(\tau_y)) \in \mathrm{rad}^2 P_x$, $\lambda(1-\varepsilon'\varepsilon^{-1})\alpha \in \mathrm{rad}^2 P_x$, pero siendo α flecha, el coeficiente debe ser cero, esto es $\varepsilon = \varepsilon'$. //

En vista de lo que acabamos de probar el siguiente resultado es importante.

(8.3) <u>Proposición</u>: $\Lambda[G]$ es álgebra básica.

<u>Demostración</u>: $\Lambda[G] = \Lambda^G = \bigoplus_{x\in Q_o} P_x^G$.

Para cada $x \in Q_o$, $P_x^G = \bigoplus_{i=0}^{n-1} (P_x)_{w^i}$ descomposición en $\Lambda[G]$-inescindibles. Por (5.8), sabemos que si $i \neq j$, $(P_x)_{w^i} \not\cong (P_x)_{w^j}$. Además, claramente si $(P_x)_\varepsilon \cong (P_y)_{\varepsilon'}$ entonces $x = y$.

Luego, $\Lambda[G] = \bigoplus_{x\in Q_o} \bigoplus_{i=0}^{n-1} (P_x)_{w^i}$ descomposición en $\Lambda[G]$-inescindibles no isomorfos dos a dos. Por tanto, $\Lambda[G]$ es básica. //

Lo que (8.3) afirma es que $\Lambda[G]$ es el álgebra asociada a un carcaj con relaciones (el carcaj posiblemente disconexo).

Por tanto en (8.2) hemos construído las flechas del carcaj de $\Lambda[G]$, ya que según la prueba estos son los únicos irreducibles.

Recordemos que $X(G)$ es el grupo de caracteres de G y que este grupo actúa sobre $\Lambda[G]$. Describamos explícitamente esta acción.

(8.4) <u>Lema</u>: Si $\chi_o : G \longrightarrow k^*$, $g_o \longmapsto \omega$ es el carácter de G que genera a $X(G)$, entonces $(P_x)_1^{\chi_o} = (P_x)_\omega$.

<u>Demostración</u>: Llamemos $\circ$ al producto en $(P_x)_1^{\chi_o}$ y $*$ al de $(P_x)_\omega$. Sea $m \in P_x$, $g_o \circ m = \chi_o(g_o)\cdot m = \omega g_o m = \omega\phi_{g_o}(m)$ y $g_o * m = \omega\phi_{g_o}(m)$. Luego, estos productos son iguales.//

(8.5) <u>Proposición</u>: $X(G)$ es un grupo admisible para $\Lambda[G]$. El cociente $\Lambda[G]/X(G)$ es isomorfo a Λ.

<u>Demostración</u>: Si la acción de $X(G)$ no fuera admisible, existiría $1 \neq \chi \in X(G)$ tal que

$$\begin{array}{ccl} & \nearrow & (P_y)_\varepsilon \\ (P_x)_1 & & \\ & \searrow & (P_y)_\varepsilon^\chi \end{array}$$

por la descripción de las flechas de $\Lambda[G]$ según (8.2). Supongamos que $\chi = \chi_o^i$ y $\varepsilon = \omega^j$ aplicando (8.4), $(P_y)_\varepsilon^\chi = ((P_y)_1^{\chi_o^j})^{\chi_o^i} = (P_y)_{\omega^{i+j}}$. Por (8.2), otra vez, $\omega^{i+j} = \varepsilon = \omega^j$, $i = 0$. Luego, $\chi = 1$.

Por tanto, tiene sentido obtener $\Lambda[G]/X(G)$. Por (5.3), este cociente es Morita equivalente al álgebra torcida $\Lambda[G][X(G)]$.

Siendo G abeliano, por (4.5), $\Lambda[G][X(G)] \sim \Lambda$. Luego, Λ y $\Lambda[G]/X(G)$ son Morita equivalentes, pero siendo ambas básicas deben ser isomorfas. //

Luego, en la situación considerada $\Lambda[G]$ resulta ser cubierta de Λ. Deseamos saber cuando es esta cubierta conexa. Además, $\Lambda[G]$ es cubierta de Λ definida por la acción de un grupo cíclico, nos preguntamos si todas las cubiertas de este tipo pueden obtenerse como álgebras torcidas de Λ. En lo que sigue contestaremos estas preguntas.

(8.6) <u>Teorema</u>: $\Lambda[G]$ es conexa si y solamente si existe un vértice $x_o \in Q_o$ y un camino $x_0 — x_1 — \dots — x_m — x_0 = x_{m+1}$ cerrado en Q, de manera que si ponemos $\sigma_{i+1} = 1$ si $x_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1}$ y $\sigma_{i+1} = -1$ si $x_i \xleftarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1}$ y además $g_o(\alpha_i) = c_i\alpha_i$ tengamos $\prod_{i=1}^{m+1} c_i^{\sigma_i} = \omega$.

<u>Demostración</u>: $\Rightarrow$): Sea $x_o \in Q_o$, siendo $\Lambda[G]$ conexo, existen $x_1, \dots, x_n \in Q_o$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ raíces n-ésimas de la unidad de forma que $(P_{x_o})_1 — (P_{x_1})_{\varepsilon_1} — \dots — (P_{x_n})_{\varepsilon_n} — (P_{x_o})_\omega$ camino en $\Lambda[G]$. Ponemos $\varepsilon_{n+1} = \omega$, $\varepsilon_o = 1$.

Por tanto, en Q hay un circuito de flechas
$x_o \xrightarrow{\alpha_1} x_1 — \dots \xrightarrow{\alpha_n} x_n \xrightarrow{\alpha_{n+1}} x_o$.

Supongamos $x_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1}$ y $g_o(\alpha_{i+1}) = c_{i+1}\alpha_{i+1}$.

Así, $(P_{x_{i+1}})_1 \longrightarrow (P_{x_i})_{c_{i+1}^{-1}}$ es flecha de $\Lambda[G]$.

Si $\varepsilon_{i+1} = w^{r_{i+1}}$, $(P_{x_{i+1}})_{\varepsilon_{i+1}} = (P_{x_{i+1}})_1^{\chi_0^{r_{i+1}}} \longrightarrow (P_{x_i})_{c_{i+1}^{-1}}^{\chi_0^{r_{i+1}}} =$

$= (P_{x_i})_{c_{i+1}^{-1}\varepsilon_{i+1}}$ es flecha en $\Lambda[G]$ y por la unicidad de (8.2) se debe tener $c_{i+1}^{-1}\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i$, $c_{i+1}^{\sigma_{i+1}} = \varepsilon_{i+1}\varepsilon_i^{-1}$ ya que $\sigma_{i+1} = 1$.

Si $x_i \xleftarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1}$, $g_o(\alpha_{i+1}) = C_{i+1}\alpha_{i+1}$; procediendo como antes $c_{i+1}^{-1}\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ y $c_{i+1}^{\sigma_{i+1}} = \varepsilon_{i+1}\varepsilon_i^{-1}$ ya que ahora $\sigma_{i+1} = -1$.

Por tanto, $\prod_{i=1}^{m+1} c_i^{\sigma_i} = \prod_{i=0}^{m} \varepsilon_{i+1}\varepsilon_i^{-1} = \varepsilon_{m+1} = w$.

$\Leftarrow$): Pongamos $\varepsilon_o = 1$ y supongamos definido ε_i.

Si $x_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1}$ entonces $\varepsilon_{i+1} := c_{i+1}\varepsilon_i$

Si $x_i \xleftarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1}$ entonces $\varepsilon_{i+1} := c_{i+1}^{-1}\varepsilon_i$. En conclusión, $\varepsilon_{i+1} = c_{i+1}^{\sigma_{i+1}}\varepsilon_i$.

Por (8.2), hay una flecha $(P_{x_i})_{\varepsilon_i} \longrightarrow (P_{x_{i+1}})_{\varepsilon_{i+1}}$ en $\Lambda[G]$ en el sentido opuesto al de α_{i+1}. Esto puede checarse por inducción, el caso $i = 0$ es directo; si por ejemplo $x_1 \xrightarrow{\alpha_2} x_2$, $(P_{x_2})_1 \longrightarrow (P_{x_1})_{c_2^{-1}}$ es flecha y

$(P_{x_2})_{\varepsilon_2} \longrightarrow (P_{x_1})_{\varepsilon_2 c_2^{-1}} = (P_{x_1})_{\varepsilon_1}$ es flecha, etcétera.

Por tanto $(P_{x_o})_1$ está conectado con $(P_{x_o})_w^{\chi_o} = (P_{x_o})_{w^2}$ y continuando es claro que todos los proyectivos $(P_{x_o})_{w^i}$ están conectados.

Si $x \in Q_o$, existe $x \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} x_o$ un camino. Si llamamos γ_o al circuito en x_o del enunciado, $\gamma^{-1}\gamma_o\gamma$ es circuito en x.

Si con la notación que hemos usado pusiéramos $c(\alpha_i) = c_i^{\sigma_i}$, esta definición se podría extender multiplicativamente a caminos. En particular $c(\gamma_o) = \omega$ y $c(\gamma^{-1}\gamma_o\gamma) = \omega$.

Entonces, según hemos probado todos los proyectivos de la forma $(P_x)_{\omega i}$ están conectados. Finalmente, si tomamos $x, y \in Q_o$ y dos raíces n-ésimas de $1, \varepsilon, \varepsilon'$, y conectamos $P_x \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} P_y$ en Λ encontramos que $(P_x)_1 \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} (P_y)_{\varepsilon''}$ es un camino en $\Lambda[G]$ para alguna raíz ε''. Pero, $(P_x)_\varepsilon$ está conectado con $(P_x)_1$, y $(P_y)_{\varepsilon''}$ con $(P_y)_{\varepsilon'}$, probando que todos los proyectivos de $\Lambda[G]$ están conectados. //

En la siguiente sección haremos más especificaciones acerca de la condición dada en (8.6) para la conexidad del álgebra torcida.

Ahora, contestaremos la segunda pregunta formulada. Sea $\bar{\Lambda} = k(\bar{Q}, \bar{I})$ cubierta conexa de Λ definida por la acción del grupo cíclico G. Una afirmación similar a la siguiente aparece sin prueba en [G].

(8.7) <u>Lema</u>: G es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}_o\Lambda$.

<u>Demostración</u>: Sea $\Pi : (\bar{Q}, \bar{I}) \longrightarrow (Q, I)$ la cubierta universal de (Q, I) definida por la acción del grupo Π.

Existen dos morfismos cubrientes $\bar{\Pi}$, p tales que

$$\begin{tikzcd} (\tilde{Q},\tilde{I}) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\Pi"'] & (\bar{Q},\bar{I}) \arrow[d, "\bar{\Pi}"] \\ & (Q,I) \end{tikzcd}$$ conmuta.

Supongamos que p está definida por la acción del grupo $R \lhd \Pi$, entonces $\Pi/R = G$. Sea $\upsilon : \Pi \longrightarrow G$ el cociente natural.

Fijamos el vértice $x_o \in Q_o$ y para cada vértice $x \in Q_o$, un camino $w(x)$ de x_o a x. Elegimos $w(x_o)$ como el camino trivial.

Si $x \xrightarrow{\alpha} y$ es flecha en Q, definimos $\psi(\alpha) = [w(y)^{-1}\alpha w(x)] \in \Pi$.

Así, $\psi : Q_1 \longrightarrow \Pi$ es función bien definida, obviamente multiplicativa de forma que la podemos considerar definida en los caminos de Q. A esta extensión la seguiremos llamando ψ. Observemos que ψ es compatible con las relaciones I de Λ: si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \in I(x,y)$ es mínima, $\mu_i \sim \mu_j$ y $\psi(\mu_i) = [w(y)^{-1}\mu_i w(x)] =$
$= [w(y)^{-1}\mu_j w(x)] = \psi(\mu_j)$.

Llamaremos $\bar{\psi} := \upsilon\psi$ función definida en los caminos de Q y con valores en G. Haremos ahora actuar a $X(G)$ sobre Λ:

Si $\chi \in X(G)$, $\alpha \in Q_1$ definimos $\chi\cdot\alpha = \chi(\bar{\psi}(\alpha))\alpha$. Esta acción sobre Q_1 extendida a caminos preserva relaciones. En efecto, si $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i \in I(x,y)$ es relación mínima, sabemos que $\bar{\psi}(\mu_i) = \bar{\psi}(\mu_j)$ para todas $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, luego $\chi\cdot(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\chi(\bar{\psi}(\mu_i))\mu_i = \chi(\bar{\psi}(\mu_1))\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i \in I(x,y)$.

Así, $\chi : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ es homeomorfismo bien definido, pero su inverso es claramente χ^{-1} y entonces $\chi \in \mathrm{Aut}_o\Lambda$.

Para probar que efectivamente $X(G)$ es subgrupo de $\mathrm{Aut}_o\Lambda$ debemos mostrar que la acción definida es fiel.

Supongamos $\chi \in \chi(G)$ actúa trivialmente sobre Λ. Así, para todo camino γ en Q, $\gamma = \chi\cdot\gamma = \chi(\bar{\psi}(\gamma))\gamma$ o sea, $\chi(\psi(\gamma)) = 1$. Entonces, $\chi(\mathrm{Im}\bar{\psi}) = 1$. Calculemos $\mathrm{Im}\bar{\psi}$.

Sea $g \in G$ y $h \in \Pi$ con $\upsilon(h) = g$. Por la definición de Π, existe un circuito γ en x_o con $h = [\gamma]$.

$\psi(\gamma) = [w(x_o)^{-1}\gamma w(x_o)] = [\gamma] = h$ y $\bar{\psi}(\gamma) = \upsilon(h) = g$.
En conclusión, $\bar{\psi}$ es sobre, $\chi(G) = 1$ y χ es trivial.

De esta forma $G \cong X(G)$ es subgrupo de $\mathrm{Aut}_o\Lambda$.//

(8.8) <u>Proposición</u>: $\Lambda[X(G)]$ es conexa.

<u>Demostración</u>: Sea $\chi_o : G \longrightarrow k^*$, $g_o \longmapsto w$ generador de $X(G)$, con $G = \langle g_o\rangle$. Tomaremos todas las notaciones de (8.7). Así existe un circuito γ en x_o con $h=[\gamma] \in \Pi$ y $\upsilon(h) = g_o$.

Supongamos que $\gamma = x_o \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \longrightarrow \ldots\, x_m \xrightarrow{\alpha_{m+1}} x_o$ y

$\sigma_i \in \{1, -1\}$ de forma que $\alpha_i^{\sigma_i}$ es la flecha como aparece en γ. O sea, $\gamma = \prod_{i=1}^{m+1} \alpha_i^{\sigma_i}$. Ponemos además $c_i = \chi_o(\bar{\Psi}(\alpha))$ de manera que $\chi_o \cdot \alpha_i = c_i \alpha_i$.

Entonces, $\prod_{i=1}^{m+1} c_i^{\sigma_i} = \prod_{i=1}^{m+1} \chi_o(\bar{\Psi}(\alpha_i))^{\sigma_i} = \chi_o \bar{\Psi}(\prod_{i=1}^{m+1} \alpha_i^{\sigma_i}) = \chi_o \bar{\Psi}(\gamma) =$

$$= \chi_o(g_o) = w.$$

Hemos checado la condición del Teorema (8.6), así $\Lambda[G]$ es conexa.//

Obtenemos ahora el resultado deseado:

(8.9) Teorema: $\Lambda[X(G)] \cong \bar{\Lambda}$.

Demostración: Sobre $\Lambda[X(G)]$ actúa $H = X(X(G))$ sin vértices fijos y por (8.5), $\Lambda[X(G)]/H = \Lambda$. Por tanto debe existir un carcaj con relaciones $(\bar{Q}', \bar{I}')$, un ideal admisible I' de kQ y una cubierta $\bar{\Pi}' : (\bar{Q}', \bar{I}') \longrightarrow (Q, I')$ definida por la acción de H, tales que $\Lambda[X(G)] = k(\bar{Q}', \bar{I}')$ y $\Lambda = k(Q, I')$.

Recordemos que $\bar{\Lambda} = k(\bar{Q}, \bar{I})$. Probaremos primero que $\bar{Q} = \bar{Q}'$.

Seguiremos aquí respetando la notación de (8.7).

Sean $\bar{x}_o' \in \bar{Q}_o'$, $\bar{x}_o \in \bar{Q}_o$ tales que $\bar{\Pi}'(\bar{x}_o') = x_o = \bar{\Pi}(\bar{x}_o)$.

Definimos $b(\bar{x}_o') = \bar{x}_o$. Si $x_o^{\bar{}} \xrightarrow{\bar{\alpha}'} \bar{y}'$ en $\bar{Q}'$,

$\bar{\pi}'(\bar{x}_o) = x_o \xrightarrow{\alpha} y = \bar{\pi}'(\bar{y}')$ en Ω y existe una única flecha en $\bar{\Omega}$, $\bar{x}_o \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{y}$ tal que $\bar{\pi}(\bar{\alpha}) = \alpha$.

Definimos $b(\bar{y}') = \bar{y}$, $b(\bar{\alpha}') = \bar{\alpha}$. Aprovechando la conexidad de $\bar{\Omega}'$ —(8.8) —, b puede extenderse por este procedimiento a todo $\bar{\Omega}'$.

Sin embargo, hay que probar que b está definida sin ambiguedades. Tenemos $\bar{y}' \in \bar{\Omega}'_o$. Si $\bar{\pi}'(\bar{y}') = y$, dos caminos que conecten a $\bar{x}'_o$ con $\bar{y}'$, según (8.2) deben verse:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(P_{x_o})_1 \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & (P_{x_1})_{\varepsilon_1} \arrow[r, dash] & \cdots\cdots \arrow[r, dash] & (P_{x_n})_{\varepsilon} \arrow[r, dash] & (P_y)_{\varepsilon} \\
& (P_{y_1})_{\varepsilon'_1} \arrow[r, dash] & \cdots\cdots \arrow[r, dash] & (P_{y_r})_{\varepsilon'_r} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Esto determina un circuito en x_o, $\gamma = \alpha_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \cdots\cdots \alpha_1^{\sigma_1}$ con $m > 1$, de forma que si $\chi_0(\alpha_i) = c_i\alpha_i$, $\prod_{i=1}^{m+1} c_i^{\sigma_i} = 1$.

Esta condición indica que $\chi_0(\bar{\Psi}(\gamma)) = 1$, y luego $\bar{\Psi}(\gamma) = 1$. Así, $[\gamma] = \psi([\gamma]) \in R$. De aquí se sigue que un levantamiento de γ a $\bar{\Omega}$ debe ser citcuito. En efecto, si $\bar{\gamma}$ es levantamiento de γ a $\bar{\Omega}$ comenzando en $\bar{x}_o$, tomamos $\tilde{x}_o \in \tilde{\Omega}_o$ tal que $p\tilde{x}_o = \bar{x}_o$. Levantamos $\bar{\gamma}$ a un camino $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{\Omega}$ que comienza en $\tilde{x}_o$, el punto final de $\tilde{\gamma}$ es $[\gamma]\tilde{x}_o$. El punto final de γ es $P([\gamma]\tilde{x}_o) = p\tilde{x}_o = \bar{x}_o$.

Hemos probado ya que b está bien definida. Además, $\bar{\pi}b = \bar{\pi}'$. Por la unicidad de los levantamientos de caminos de $\bar{\pi}$ y $\bar{\pi}'$, b es sobre. Siendo los carcajes finitos y con el mismo número de vértices (porque las fibras de $\bar{\pi}$ y $\bar{\pi}'$. ambas tienen $o(G)$ puntos), $b : \tilde{Q}' \longrightarrow \tilde{Q}$ es isomorfismo de carcajes.

Podemos ahora suponer que $\tilde{Q}' = \tilde{Q}$.

Si $y \xrightarrow{\alpha} x$ en Q, $(\alpha,-) = \delta_\alpha : P_x \longrightarrow P_y$ es una elección de irreducibles en Λ. Por (8.2), la flecha correspondiente $\bar{y} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{x}$ en $\tilde{Q}' = \tilde{Q}$ puede elegirse en $\Lambda[X(G)]$ como $(P_x)_1 \xrightarrow{\delta\alpha} (P_y)_\varepsilon$, donde $\chi_o \cdot \alpha = \varepsilon^{-1}\alpha$. Podemos suponer que el ideal $\bar{I}'$ está determinado por esta elección de irreducibles.

Sea $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mu_i$ relación mínima ó cero en $I(y,x)$. $\bar{\mu}_i$ el levantamiento de μ_i a $\tilde{Q}$ comenzando en $\bar{y}$. Por tanto, todos los caminos $\bar{\mu}_i$ terminan en un punto común $\bar{x} \in \tilde{Q}_o$. Si $\delta_{\bar{\mu}_i}$ es el producto de los irreducibles de $\Lambda[X(G)]$ asociado al camino $\bar{\mu}_i$, tenemos $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_{\bar{\mu}_i} = 0$ ya que $\delta_{\bar{\alpha}} = \delta_\alpha$ para cada flecha $\bar{\alpha}$ con $\bar{\pi}(\bar{\alpha}) = \alpha$. Así, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{\mu}_i \in \bar{I}'(\bar{y},\bar{x})$ y ya que el ideal $\bar{I}$ es el levantamiento del ideal I, $\bar{I} \in \bar{I}'$.

Ahora, dados $\bar{x},\bar{y} \in \tilde{Q}$, por la definición de morfismo cubriente

$$\bigoplus_{\bar{\pi}'\bar{y}'=y} k\tilde{Q}'(\bar{x},\bar{y}')/\bar{I}'(\bar{x},\bar{y}') \cong \Lambda(x,y) = \bigoplus_{\bar{\pi}\bar{y}'=y} k\tilde{Q}(\bar{x},\bar{y}')/\bar{I}(\bar{x},\bar{y}')$$

Siendo las fibras finitas e iguales y los cocientes de dimensión finita, $\bar{I}' = \bar{I}$. En conclusión, $\Lambda[X(G)] \simeq k(\bar{Q},\bar{I})' = \bar{\Lambda}$.//

(8.10) <u>Corolario</u>: Sea $\bar{\Lambda}$ cubierta de Λ dada por la acción del grupo soluble G con char$k \nmid o(G)$. Entonces, existen grupos cíclicos $G_1,\ldots,G_n$ de forma que G_i es subgrupo de $\mathrm{Aut}\Lambda[G_1]\ldots[G_{i-1}]$ para $i=1,\ldots,n$ y

$$\bar{\Lambda} \simeq \Lambda[G_1]\ldots[G_n].//$$

9. ALGEBRAS ESTANDAR

Sabemos por [*MP1*] que un álgebra básica de tipo de representación finito e indescomponible es estándar si y solamente si puede encontrarse para el álgebra un carcaj con relaciones asociado de forma que su cubierta universal no tiene ciclos dirigidos. En la sección anterior hemos visto que se tiene una forma de relacionar las cubiertas de un álgebra con sus automorfismos. Veremos en esta sección que estos dos hechos están estrechamente vinculados. Intentaremos desarrollar una generalización para el caso no-estándar.

Fijemos por el resto de la sección $\Lambda = k(Q,I)$ un álgebra asociada a un carcaj con relaciones conexo.

(9.1) <u>Definiciones</u>: i). Sea $g \in \mathrm{Aut}_o\Lambda$, asociada a g construimos una función $c(g) : Q_1 \longrightarrow k^*$ de la siguiente forma: si α es flecha en Q, $g(\alpha) = d\alpha + r$ con $r \in \mathrm{rad}^2\Lambda$, ponemos $c(g)(\alpha) = d$. A $c(g)$ la podemos extender multiplicativamente a caminos de Q, así si $\gamma = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\sigma_i}$ camino donde α_i es flecha y $\sigma_i \in \{1,-1\}$ indica la orientación con que aparece en γ, entonces $c(g)(\gamma) = \prod_{i=1}^{n} c(g)(\alpha_i)^{\sigma_i}$.

ii). Si $g \in \mathrm{Aut}_o\Lambda$ tiene orden n tal que $\mathrm{char}\,k \nmid n$ se dice que g actúa fuertemente sobre Λ si para algún vértice $x_o \in Q_o$ (equivalentemente, para todo vértice) existe un ciclo γ en x_o no necesariamente dirigido tal que $c(g)(\gamma)$ es una raíz primitiva n-ésima de la unidad en k.

iii). Un subgrupo cíclico G de $\mathrm{Aut}_o\Lambda$ se dice que actúa fuertemente sobre Λ si tiene un generador que lo hace.

Observar que si $g \in \mathrm{Aut}_o\Lambda$ envía flechas en múltiplos de flechas, por (8.6), g actúa fuertemente sobre Λ si y solo si $\Lambda[<g>]$ es conexa. De hecho, por la observación al principio de la sección 8, de que todo automorfismo $g \in \mathrm{Aut}_o\Lambda$ es en cierto sentido equivalente a uno que envía flechas en múltiplos de ellas mismas, se tiene que si g actúa fuertemente sobre Λ, $\Lambda[<g>]$ es conexa.

Enunciamos formalmente este hecho:

(9.2) <u>Proposición</u>: Si $g \in \mathrm{Aut}_o\Lambda$ actúa fuertemente sobre Λ, $\Lambda[<g>]$ es conexa.//

Una cuestión importante es que en la definición de $c(g)$ aparentemente sus valores dependen de la elección de irreducibles que se hizo, o sea, del ideal I que se tomó. Esto no es así como aclara el siguiente resultado.

(9.3) <u>Lema</u>: Si $g \in \mathrm{Aut}_o\Lambda$, $c(g)$ está bien definida independientemente de la elección del ideal I.

<u>Demostración</u>: Supongamos $k(Q,I) = \Lambda = k(Q,J)$ dos elecciones posibles de ideal para Λ. Sean $x,y \in Q_o$ tales que $\mathrm{rad}_\Lambda(x,y)/\mathrm{rad}^2_\Lambda(x,y) \neq 0$. Llamemos α la elección del irredu-

cible para I y α' para J.

Como Q no tiene flechas dobles, $\alpha' = \lambda\alpha + r$ con $\lambda \in k^*$ y $r \in \mathrm{rad}^2_\Lambda(x,y)$. Ahora supongamos $g(\alpha) = c\alpha + r'$ con $r' \in \mathrm{rad}^2_\Lambda(x,y)$. Entonces, $g(\alpha') = \lambda g(\alpha) + g(r) = \lambda c\alpha + \lambda r' + g(r) =$ $= \lambda c(\lambda^{-1}(\alpha' - r)) + \lambda r' + g(r) = c\alpha' + (\lambda r' + g(r) - cr)$, donde el término entre paréntesis está en $\mathrm{rad}^2_\Lambda(x,y)$. O sea, $c(g)(\alpha) = c(g)(\alpha')$.//

Una vez aclarada la dificultad veremos la conexión entre los automorfismos y las álgebras estándar.

(9.4) <u>Teorema</u>: Sea $\pi : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \longrightarrow (Q, I)$ la cubierta universal definida por el grupo Π. Entonces:

i) Si Λ es de t.r.f. y $\tilde{Q}$ no tiene ciclos dirigidos, para todo vértice $x_o \in Q_o$ y γ ciclo dirigido en x_o, Λ admite un automorfismo g que actúa fuertemente sobre Λ con $c(g)(\gamma) \neq 1$. Llamemos a esta condición (*).

ii) Si Λ satisface (*) con automorfismos que envían flechas en múltiplos de flechas, $\tilde{Q}$ no tiene ciclos dirigidos.

<u>Demostración</u>: i): Si $x, y \in Q_o$, $x \xrightarrow{\alpha} y$ flecha en Q, ponemos $g r\alpha = \max\{n \in \mathbb{N} \mid r^n I(P_y, P_x) = r\Lambda(P_y, P_x)\}$, donde $I = \mathrm{ind}\Lambda$ y rI denota al radical de la categoría I, similarmente $r\Lambda$ denota el radical de Λ como categoría.

Como Λ es estándar, por [BoG] gr puede extenderse a una graduación (función aditiva) de los caminos de Q en $\mathbb{N}$, en forma compatible con las relaciones. Así, si z es ciclo en Q tal que $[z] \in \Pi'$ tenemos $g\pi z = 0$.

Como siempre, existen cubiertas $\Pi' : (Q', I') \longrightarrow (Q, I)$ y $p : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \longrightarrow (Q, I)$ tales que p está definida por la acción de Π' y Π' por la acción de Π/Π' y $\Pi' p = \Pi$.

Afirmamos que Q' tampoco tiene ciclos dirigidos: si γ' fuera ciclo dirigido en $x' \in Q'_o$, $\gamma = \Pi'(\gamma')$ sería ciclo dirigido en el carcaj Q y con base en el punto $x = \Pi'(x')$. Tomamos $\tilde{x} \in \tilde{Q}_o$ tal que $p\tilde{x} = x'$, $[\gamma] \in \Pi$ el grupo fundamental de (Q, I) que podemos suponer basado en $\tilde{x}$. Como $p([\gamma]\tilde{x})$ es el punto final del camino γ', o sea x', $p([\gamma]\tilde{x}) = p(\tilde{x})$. Esto implica que $p[\gamma] = p$ y entonces $[\gamma] \in \Pi'$. Hemos ya indicado que en este caso $g\pi\gamma = 0$, pero siendo dirigido γ y $g\pi$ aditiva se debe tener que γ es trivial.

Comemzamos ahora a probar (*). Sea $x_o \in Q_o$ y γ ciclo dirigido en x_o. Luego, $[\gamma] \in \Pi$ y como Q' no tiene ciclos dirigidos, $\overline{[\gamma]}$ en Π/Π' tiene orden infinito.

Siendo Π/Π' abeliano finitamente generado, existe una proyección $p\pi : \Pi/\Pi' \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $p\pi\overline{[\gamma]}$ tiene orden infinito. Podemos entonces encontrar un subgrupo normal $R \triangledown \Pi$ con $\mathbb{Z} = \Pi/R$ y de forma que la clase de $[\gamma]$ en este cociente también tiene orden infinito. Seguiremos denotando esta nueva clase por $\overline{[\gamma]}$. Sea $\bar{\pi} : (\bar{Q},\bar{I}) \longrightarrow (Q,I)$ cubierta definida por la acción de $\Pi/R = \mathbb{Z}$. Finalmente, obtenemos otra cubierta $\hat{\pi} : (Q,I) \longrightarrow (Q,I)$ definida por un grupo $G = \Pi/N$ cíclico que satisface que el orden de $\overline{[\gamma]}$ en G es positivo, o sea $[\gamma] \notin N$. (Basta tomar por (Q,I) un cociente no trivial de $(\bar{Q},\bar{I})$).

Por (8.9), $X(G)$ actúa fuertemente sobre Λ. Sea χ_o un generador de $X(G) \cong G$. Según la notación de (8.8), $\bar{\psi}(\gamma)$ es la clase de $[\gamma]$ en $\Pi/N = G$, por tanto $\chi_o(\bar{\psi}(\gamma)) \neq 1$. Pero, este número es precisamente $c(\chi_o)(\gamma) \neq 1$ que es lo que deseaba probarse.

ii) Supongamos que Λ satisface (*) con automorfismos que envían flechas en flechas y que $\tilde{Q}$ tiene un ciclo dirigido $\tilde{\gamma}$ con punto base $\tilde{x}_o$. Sea $\pi\tilde{\gamma} = \gamma$ ciclo en Q con punto base $x_o = \pi\tilde{x}_o$. Por hipótesis existe un automorfismo g que actúa fuertemente sobre Λ, que envía flechas en flechas y que $c(g)(\gamma) \neq 1$. Sea $G = \langle g \rangle$ y por (8.5), $\Lambda[G]$ es cubierta de Λ. Podemos suponer que tenemos una cubierta $(\bar{Q},\bar{I}) \xrightarrow{\bar{\pi}} (Q,I)$ definida por $X(G)$ y tal que $\Lambda[G] = k(\bar{Q},\bar{I})$. En efecto, procediendo como en la demostración de (8.9), la elección de irreducibles de Λ puede transladarse a $\Lambda[G]$. Tomemos $\bar{x}_o \in \bar{Q}_o$ tal que $\bar{\pi}(\bar{x}_o) = x_o$. Por (8.2), el levantamiento $\bar{\gamma}$ de γ que une el punto $\bar{x}_o = (P_{x_o})_1$ con $(P_{x_o})_{c(g)(\gamma)^{-1}} \cong (P_{x_o})_1$ no puede ser un ciclo. Pero, si $\pi' : (\tilde{Q},\tilde{I}) \longrightarrow (\bar{Q},\bar{I})$ es cubierta con $\bar{\pi}\pi' = \pi$ entonces $\bar{\pi}\pi'(\tilde{\gamma}) = \pi\tilde{\gamma} = \gamma = \bar{\pi}\bar{\gamma}$ y $\bar{\gamma}$, $\pi'\tilde{\gamma}$ son dos levantamientos de γ por $\tilde{\Pi}$ que podemos hacer comenzar en el mismo punto. Debían ser iguales, pero $\Pi \cdot \tilde{\gamma}$ es ciclo ↯. //

(9.5) <u>Corolario</u>: Sea Λ álgebra de t.r.f., entonces Λ es estándar si y solo si existe una elección del carcaj con relaciones (Q, I) tal que $k(Q, I) = \Lambda$ y Λ satisface (*) para automorfismos que envían flechas en múltiplos de flechas. //

<u>Supongamos</u> ahora que Λ es álgebra estándar. En [MP3] se prueba, siguiendo una idea de Gabriel (que apareció más tarde en [B&G], que Λ tiene una base multiplicativa. Esto es, que para cada par de vértices $x, y \in Q_o$ hay una k-base ${}_yB_x$ de $\mathrm{Hom}_\Lambda(x, y)$ de forma que si ${}_y\varepsilon_x \in {}_yB_x$, ${}_z\varepsilon_y \in {}_zB_y$, entonces ${}_z\varepsilon_y\ {}_y\varepsilon_x$ es cero ó un elemento de ${}_zB_x$. De hecho se muestra que tomando una elección (Q, I) con $\Lambda = k(Q, I)$ tal que $\Pi : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \longrightarrow (Q, I)$ la cubierta universal no tiene ciclos dirigidos, cada básico ${}_y\varepsilon_x$ puede elegirse como la clase en Λ de un camino dirigido en Q. Llamemos $B = \bigcup_{x,y \in Q_o} {}_yB_x$ la base multiplicativa así construída.

Tomaremos otras definiciones de los trabajos arriba mencionados. Sea $S_o(\Lambda)$ el grupo abeliano libre en Q_o. $S_1(\Lambda)$ el grupo abeliano libre en B. $S_2(\Lambda)$ el grupo abeliano libre en $\{({}_y\varepsilon_x, {}_z\varepsilon_y) \in B^2 \mid {}_z\varepsilon_y\ {}_y\varepsilon_x \neq 0\}$. Estos son los primeros elementos de un complejo simplicial.

Se definen los morfismos de la cadena como:

$\delta_0 : S_1(\Lambda) \longrightarrow S_0(\Lambda)$, ${}_y\varepsilon_x \longmapsto y-x$

$\delta_1 : S_2(\Lambda) \longrightarrow S_1(\Lambda)$, $({}_y\varepsilon_x, {}_z\varepsilon_y) \longmapsto {}_z\varepsilon_x + {}_y\varepsilon_x - {}_z\varepsilon_y$, donde ${}_z\varepsilon_y\, {}_y\varepsilon_x = {}_z\varepsilon_x \in {}_zB_x$. Claramente $\delta_0\delta_1 = 0$.

Así, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_0(\Lambda), k^*) \xrightarrow{\delta_0^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_1(\Lambda), k^*) \xrightarrow{\delta_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_2(\Lambda), k^*)$ también satisface $\delta_1^*\delta_0^* = 0$.

Se define $H^1(\Lambda, k^*) = \mathrm{Ker}\delta_1^*/\mathrm{Im}\delta_0^*$ el primer grupo de cohomología de Λ con coeficientes en k^*.

(9.6) <u>Proposición</u>: $c : \mathrm{Aut}_0\Lambda \longrightarrow \mathrm{Ker}\delta_1^*$, $g \longmapsto c(g)$ es morfismo de grupos bien definido. Además, este morfismo se escinde y $\mathrm{Aut}_0\Lambda$ resulta ser producto semidirecto de $\mathrm{Aut}_\mu\Lambda$ por $\mathrm{Ker}\delta_1^*$.

<u>Demostración</u>: Sea $g \in \mathrm{Aut}_0\Lambda$, $c(g) : Q_1 \longrightarrow k^*$ es función que puede extenderse multiplicativamente a caminos de Q. Primeramente necesitamos saber que esta función sea compatible con las relaciones dadas. Esto es en efecto así, si definimos $h : kQ \longrightarrow \Lambda$ por $h(\alpha) = c(g)(\alpha)\bar{\alpha}$ para toda flecha α en Q, por [*MP1*,(2.7)] dado que $\mathcal{Q}$ no tiene ciclos dirigidos, h puede extenderse a un isomorfismo $h : \Lambda \longrightarrow \Lambda$. Por tanto, $c(g)$ está bien definida en clase de caminos de Λ, o sea, $c(g) : B \longrightarrow k^*$ está bien definida. Ahora puede extenderse linealmente a $c(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_1(\Lambda), k^*)$.

Sea $({}_y\varepsilon_x, {}_x\varepsilon_y) \in B^2$ con ${}_z\varepsilon_y\, {}_y\varepsilon_x = {}_z\varepsilon_x \in {}_zB_x$. Según in dicamos existen caminos $_y\mu_x, {}_z\mu_y, {}_z\mu_x$ tales que $_y\varepsilon_z = {}_y\bar{\mu}_x$, $_z\varepsilon_y = {}_z\bar{\mu}_y$, $_z\varepsilon_x = {}_z\bar{\mu}_x$. Esto significa que $_z\mu_y\, {}_y\mu_x - {}_z\mu_x \in$ $\in I(x,z)$. Volviendo a utilizar el hecho de que h es morfismo, se obtiene que $c(g)({}_z\mu_y)\; c(g)({}_y\mu_x) = c(g)({}_z\mu_x)$. Por tanto, $\delta_1^* c(g)({}_y\varepsilon_x, {}_z\varepsilon_y) = c(g)({}_z\varepsilon_x) c(g)({}_y\varepsilon_x)^{-1} c(g)({}_z\varepsilon_y)^{-1} = 1$ y $c(g) \in \mathrm{Ker}\delta_1^*$.

Si $t \in \mathrm{Ker}\delta_1^*$, definimos $\bar{t} : kQ \longrightarrow \Lambda$ por $\bar{t}(\alpha) = t(\alpha)\bar{\alpha}$. Como t preserva las relaciones, $\bar{t}$ puede extenderse a un isomorfismo de Λ en Λ. Luego, si $s : \mathrm{Ker}\delta_1^* \longrightarrow \mathrm{Aut}_\sigma\Lambda$, $t \longrightarrow \bar{t}$ es morfismo de grupos inverso derecho de c, $cs = 1_{\mathrm{Ker}\delta_1^*}$.

Mostremos finalmente que $\mathrm{Ker} c = \mathrm{Aut}_\mu\Lambda$: si $g \in \mathrm{Aut}_\mu\Lambda$, existe $n \in \mathrm{End}_k\Lambda$ nilpotente con $g = 1 + n$, $c(g) = 1$. Si $g \in \mathrm{Ker} c$, $c(g) = 1$, definimos $n = g - 1$ lo que resulta ser un k-endomorfismo de Λ nilpotente, ya que envía los idempotentes a cero y las flechas a elemento de $\mathrm{rad}^2\Lambda$. //

En vista de lo anterior se antoja natural la siguiente definición.

(9.7) <u>Definición</u>: Un automorfismo $g \in \mathrm{Aut}_o\Lambda$ se llama cerrado si para todo ciclo γ en Q, $c(g)(\gamma) = 1$. El conjunto de automorfismos cerrados se denota $\mathrm{Aut}_c\Lambda$.

Hay varias observaciones que hacer relativas a esta definición. En primer lugar, por (9.3) los automorfismos cerrados están bien definidos, es decir, su condición no depende de la elección de ineducibles hecha. Además, como c es multiplicativa, $\mathrm{Aut}_c\Lambda$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}_o\Lambda$. De hecho, $\mathrm{Aut}_\mu\Lambda \triangledown \mathrm{Aut}_c\Lambda \triangledown \mathrm{Aut}_o\Lambda$.

(9.8) <u>Proposición</u>: $1 \longrightarrow \mathrm{Aut}_\mu\Lambda \longrightarrow \mathrm{Aut}_c\Lambda \xrightarrow{c} Im\delta_o^* \longrightarrow 1$ es sucesión exacta. En consecuencia, $H^1(\Lambda,k^*) \cong \mathrm{Aut}_o\Lambda/\mathrm{Aut}_c\Lambda$.

<u>Demostración</u>: Es claro que $f \in Im\delta_o^*$ si y solamente si existe una función $h : Q_o \longrightarrow k^*$ tal que $f(\alpha) = h(y)h(x)^{-1}$ para $x \xrightarrow{\alpha} y$ flecha en Q. De aquí es obvio que para la función $s : \mathrm{Ker}\delta_1^* \longrightarrow \mathrm{Aut}_o\Lambda$ se tiene $s(Im\delta_o^*) \subset \mathrm{Aut}_c\Lambda$. Por otra parte, si se tiene $g \in \mathrm{Aut}_c\Lambda$ tomamos $x_o \in Q_o$ y es fácil definir $h : Q_o \longrightarrow k^*$ como $h(x_o) = 1$ y para otro vértice $x \in Q_o$, se toma un camino $w(x)$ de x_o en x y se hace $h(x) = c(g)(w(x))$. Como g es cerrado, h está bien definida. Para una flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$, $c(g)(w(y)^{-1}\alpha w(x)) = 1$ y $c(g)(\alpha) = h(y)h(x)^{-1}$.//

(9.9) <u>Corolario</u>: Si $g \in \mathrm{Aut}_o\Lambda$ actúa fuertemente sobre Λ, $c(g) \notin Im\delta_o^*$.//

Lo que por (9.8) resulta ser una caracterización en el caso estándar podemos convertirlo en definición para el caso general.

(9.10) <u>Definición</u>: Si Λ es álgebra básica definimos $Z(\Lambda,k^*) := \mathrm{Aut}_o\Lambda/\mathrm{Aut}_\mu\Lambda$, $B(\Lambda,k^*) := \mathrm{Aut}_c\Lambda/\mathrm{Aut}_\mu\Lambda$ y $H^1(\Lambda,k^*) := Z(\Lambda,k^*)/B(\Lambda,k^*)$.

Por la prueba de (2.6) se tiene que $Z(\Lambda,k^*)$ y por tanto $B(\Lambda,k^*)$ son grupos abelianos. Así, $H^1(\Lambda,k^*)$ es siempre grupo abeliano. Probaremos algunos resultados concernientes a la relación de este grupo con otros ya conocidos.

Si $\Lambda = k(Q,I)$, denotaremos $\Pi_1(Q,I)$ al grupo fundamental del carcaj con relaciones (Q,I).

(9.11) <u>Proposición</u>: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi_1(Q,I),k^*) \hookrightarrow h^1(\Lambda,k^*)$.

<u>Demostración</u>: Fijamos un vértice $x_o \in Q_o$ y para otro vértice $x \in Q_o$ tomamos un camino $w(x)$ de x_o y x, de forma que $w(x_o)$ es trivial.

Definimos $\nu : Q_1 \longrightarrow \Pi_1(Q,I)$, $\alpha \longmapsto [w(y)^{-1}\alpha w(x)]$ si $x \xrightarrow{\alpha} y$ es flecha.

Para un morfismo $\delta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi_1(Q,I),k^*)$, definimos $\psi(\delta) : Q_1 \longrightarrow kQ$ por $\psi(\delta)(\alpha) = \delta(\nu(\alpha))\alpha$ para toda flecha α. $\psi(\delta)$ se extiende multiplicativamente a kQ. Además, si $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i \in I(x,y)$ es relación mínima o cero, $\mu_i \sim \mu_j$ para todo par $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ y entonces $\nu(\mu_i) = \nu(\mu_j)$. O sea, $\psi(\delta)(\mu_i) = \psi(\delta)(\mu_j)$ y $\psi(\delta)$ puede extenderse a un endomorfismo de Λ y claramente $\psi(\delta) \in \mathrm{Aut}_o\Lambda$. Pasando al cociente, $\bar{\psi} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi_1(Q,I),k^*) \longrightarrow H^1(\Lambda,k^*)$ es un morfismo de grupos bien definido.

Si $\bar{\psi}(\delta) = 1$, $\psi(\delta) \in \mathrm{Aut}_c\Lambda$. Luego, si tomamos un ciclo γ en el punto base x_o, $1 = c(\psi(\delta))(\gamma) = \delta(\nu(\gamma)) = \delta([\gamma])$ y

$\delta = 1$.//

Tomamos $x_0 \in Q_0$ y llamamos Π al grupo fundamental de la gráfica Q con base en x_0.

Siguiendo la notación de [G2], llamamos P al subgrupo de Π generado por las clases de conjugación $c_{x_0}(v,w)$. Con (v,w) contorno en Λ. Recordemos brevemente lo que esto quiere decir: dados $a, b \in Q_0$, $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $d(n)$ el máximo $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que $\operatorname{rad}^n\operatorname{Hom}_\Lambda(a,b) = \mathfrak{r}^d\Lambda(a,b)$, donde $\mathfrak{r}\Lambda$ es el radical de la categoría Λ y $\operatorname{radHom}_\Lambda(a,b)$ el radical del $\operatorname{End}_\Lambda(a)$ - $\operatorname{End}_\Lambda(b)$ bimódulo $\operatorname{Hom}_\Lambda(a,b)$. Un morfismo que cae en $\operatorname{rad}^n\operatorname{Hom}_\Lambda(a,b)$ pero no en $\operatorname{rad}^{n+1}\operatorname{Hom}_\Lambda(a,b)$ se dice que tiene profundidad $d(n)$. Un camino dirigido $\gamma = \alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\cdots\alpha_1$ se dice estable si la profundidad de la composición $\bar{\alpha}_n\bar{\alpha}_{n-1}\cdots\bar{\alpha}_1$ permanece constante para cualquier elección de los irreducibles $\bar{\alpha}_i$. Una pareja (v,w) de caminos estables con los mismos extremos y la misma profundidad se llama un contorno. Si no tienen v y w más vértices comunes que los extremos el contorno se llama simple. Si el contorno $(v.w)$ va del vértice x al y, μ es un camino cualquiera de x_0 a x, $c_{x_0}(v.w) = \mu^{-1}w^{-1}v\mu$.

De la definición misma de contorno se sigue que P es un invariante de Λ, en el sentido de que no depende de la elección del ideal I tal que $\Lambda = k(Q,I)$. También, que $P \triangledown \Pi$.

(9.12) <u>Proposición:</u> $H^1(\Lambda,k^*) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi/P,k^*)$.

Demostración: Para diferenciar con la notación de (9.11), denotaremos por (γ) a la clase del camino γ en Π.

Dado $g \in \mathrm{Aut}_o\Lambda$, definimos $\psi(g) : \Pi \longrightarrow k^*$, $(\gamma) \longmapsto c(g)(\gamma)$. En (9.6) vimos que $c(g)$ estaba bien definida en clases de caminos de Λ, por tanto, $\psi(g)$ es morfismo de grupos bien definidos. Probaremos que este morfismo puede factorizarse a través de Π/P.

Sea (v,w) un contorno simple, mediante un cambio de elección de ineducibles, podemos suponer que $\bar{v} = \bar{w}$, en Λ.

Entonces, $g(\bar{v}) = c(g)(\bar{v})\bar{v} + r_v$, $g(\bar{w}) = c(g)(\bar{w})\bar{w} + r_w$ con $d(r_v) > d(\bar{v})$, $d(r_w) > d(\bar{w})$, donde $d(\bar{v})$ denota la profundidad del morfismo $\bar{v}$, implica que $c(g)(\bar{v})\bar{v} - c(g)(\bar{w})\bar{w} = r_w - r_v$. Por la definición de profundidad se debe tener, $c(g)(\bar{v}) = c(g)(\bar{w})$. O sea, $c(g)(w^{-1}v) = 1$.

Así, $\psi : \mathrm{Aut}_o\Lambda \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi/P, k^*)$, $g \longmapsto \psi(g)$ es morfismo de grupos bien definido.

Si $g \in \mathrm{Aut}_c\Lambda$, claramente $\psi(g) = 1$. Inversamente, si $\psi(g) = 1$ para todo camino cerrado γ, $c(g)(\gamma) = 1$ y $g \in \mathrm{Aut}_c\Lambda$. Luego, tenemos un morfismo inducido $\bar{\psi} : H^1(\Lambda, k^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi/P, k^*)$ que además, es inyectivo.//

Dado un carcaj con relaciones (Q,I) tal que $\Lambda = k(Q,I)$, llamemos $\psi_1 : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi_1(Q,I), k^*) \hookrightarrow H^1(\Lambda, k^*)$ a la inclusión de (9.11). y $\psi_2 : H^1(\Lambda, k^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi/P, k^*)$ a la inclusión de (9.12). Calculemos $\psi_2 \circ \psi_1$.

En primer lugar, definamos $\upsilon : \Pi \longrightarrow\!> \Pi_1(Q,I)$, $(\gamma) \mapsto [\gamma]$. Sea (v,w) un contorno simple de x a y. Por $\bar{v}$, $\bar{w}$ denotaremos sus clases en Λ según la elección asociada al ideal I. Siendo Λ de t.r.f., satisface las condiciones de Jans. Por ejemplo, $\mathrm{Hom}_\Lambda(x,y)$ es $\mathrm{End}_\Lambda(x)$-módulo uniserial. Como $d(\bar{v}) = d(\bar{w})$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ están en la misma potencia del radical de $\mathrm{Hom}_\Lambda(x,y)$. Así, $\bar{v} = \lambda\bar{w} + r$ con $\lambda \in k^*$, $d(r) > d(\bar{v}) = d(\bar{w})$. De donde, $v \sim w$ y $[w^{-1}v] = 1$ en $\Pi_1(Q,I)$. Por tanto, podemos extender $\upsilon : \Pi/P \longrightarrow \Pi_1(Q,I)$. Mostraremos que $\psi_2 \circ \psi_1 = \upsilon^*$. En efecto, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi_1(Q,I),k^*)$, $(\gamma) \in \Pi$

$\psi_2 \circ \psi_1(f)\overline{((\gamma))} = c(\psi_1(f))(\gamma) = c(\psi(f))(\gamma) = f(\upsilon(\gamma)) = f([\gamma]) =$

$= f \circ \upsilon\,\overline{((\gamma))} = \upsilon^*(f)(\overline{(\gamma)})$. Esto nos será útil en el siguiente Teorema:

(9.13) <u>Teorema</u>: Si char$k = 0$, ψ_2 es isomorfismo si y solo si Λ es álgebra estándar.

<u>Demostración</u>: Si Λ es estándar, podemos encontrar un ideal I tal que $\Lambda = k(Q,I)$ y la cubierta universal de (Q,I) no tiene ciclos dirigidos. En este caso todas las parejas de caminos que se relacionan son estables y $\upsilon : \Pi/P \longrightarrow \Pi_1(Q,I)$ es iso. Como $\psi_2 \circ \psi_1 = \upsilon^*$ iso, ψ_2 es sobre y también isomorfismo.

Supongamos ahora que ψ_2 es isomorfismo. Sea Λ_s el álgebra estándar asociada a Λ, según [BrG]. Además, $gr : Q_1 \longrightarrow$ ■

la graduación de las flechas de Q asociada a Λ_s como en (9.4). Podemos extender gr aditivamente a caminos arbitrarios en Q, por la construcción de Λ_s, es claro que $grP = \{1\}$.

Tomamos $a \in k^*$ libre de torsión y definimos $d_o : \Pi/P \longrightarrow k^*$, $\overline{(\gamma)} \longrightarrow a^{gr(\gamma)}$, morfismo multiplicativo. Siendo ψ_2 sobre, existe $g \in \mathrm{Aut}_o\Lambda$ con $\psi_2(\bar{g}) = d_o$.

Supongamos que $\Lambda = k(Q,I)$ tal que (Q,I) no satisface la condición (c) de [MP1,(2.3)]. Por medio de otro cambio de ineducibles, podemos supones que $x \overset{\mu}{\rightsquigarrow} z \overset{\nu}{\rightsquigarrow} y$ tales que $\bar{\nu}\bar{\mu} = \bar{\nu}\bar{z}\bar{\mu}$ en Λ. Sin pérdida de generalidad el punto base para la construcción de Π es z. Así, $c(g)(\bar{z}) = \psi_2(\bar{g})(\bar{z}) = d_o(g)$. Pero, $c(g)(\bar{\nu}\bar{\mu}) = c(g)(\bar{\nu}\bar{z}\bar{\mu})$, $c(g)(\bar{z}) = 1$. Por tanto, $1 = a^{gr(z)}$, y siendo a libre torsión, $gr(z) = 0$. Pero siendo z dirigido debía ser entonces trivial . Por tanto, Λ es estándar. //

10. ALGEBRAS SIN CICLOS DIRIGIDOS

Sea $\Lambda = k(Q,I)$ álgebra de t.r.f. y tal que Q no tiene ciclos dirigidos. Aplicamos algunos de los resultados obtenidos en la sección 9 a este caso particular.

Observemos en primer lugar que sin importar la elección de (Q,I), su cubierta universal no tiene ciclos dirigidos. En particular, $\Pi_1(\Lambda)$ el grupo fundamental asociado a (Q,I) está definido sin ambiguedad y por [MP1] es libre.

Dado un grupo G y un número primo p, denotaremos aquí por G_p a los elementos de G de orden 1 ó p. Si G es abeliano, G_p resulta subgrupo de G.

(10.1) Lema: Si $n = \operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda)$ y p es un número primo diferente de $\operatorname{char} k$, $H^1(\Lambda,k^*)_p \cong \mathbb{Z}_p^n$.

Demostración: Por la sección 9 ó por [BxG],

$H^1(\Lambda,k^*) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi_1(\Lambda),k^*) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n k^*) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},k^*)^n$.

Ahora bien $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},k^*)_p = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p,k^*) \cong \mathbb{Z}_p$, por ser $p \neq \operatorname{char} k$. //

Dado un subcarcaj Q' de Q, denotaremos por $\Lambda(Q')$ a la subálgebra plena de Λ con vértices en Q'. Dada una subálgebra Λ' plena de Λ, $Q_{\Lambda'}$ denotará su carcaj.

(10.2) Teorema: Sea Λ' subálgebra plena de Λ tal que $Q_{\Lambda'}$ es subcarcaj conexo y convexo de Q, entonces $\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda') \leq \operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda)$.

<u>Demostración</u>: Supongamos $\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda) = n$ y $\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda')>n$. Elegimos un número primo $p \neq \operatorname{char} k$. Por (10.1), $\mathbb{Z}_p^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^{\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda')} \cong H^1(\Lambda', k^*)_p$. Sean $g_1, \ldots, g_n, g_{n+1} \in \operatorname{Ker}\delta_1^{*}$ tales que $b(g_1), \ldots, b(g_n), b(g_{n+1}) \in H^1(\Lambda', k^*)_p$ son $\mathbb{Z}_p$ $\ell.i.$, donde $S_2(\Lambda') \xrightarrow{\delta_1^{*}} S_1(\Lambda') \xrightarrow{\delta_o^{*}} S_o(\Lambda')$ es el complejo asociado a Λ' y $b : \operatorname{Ker}\delta_1^{*} \longrightarrow H^1(\Lambda', k^*)$ es el cociente natural. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $o(g_i) = p$, para toda $i \in \{1, \ldots, n+1\}$.

Según el Lema (2.7) de [BrG], existe una sucesión de subcarcajes de Q convexos $Q_{\Lambda'} = c_o \subset c_1 \subset \ldots\ldots \subset c_m = Q$, de forma que $c_{i+1} - c_i = \{x_{i+1}\}$ con x_{i+1} extremal en c_{i+1}. Llamemos Λ_i a las subálgebras plenas con carcaj c_i.

Definimos $g_{oi} := g_i$, $\chi_{oi} := \delta(g_{oi}) \in \operatorname{Aut}_o \Lambda_o$. Extenderemos estas funciones a Λ_1.

Para (Q, I) podemos suponer que las flechas se han elegido multiplicativamente, es to es, si μ, ν son dos caminos dirigidos en Q de x a y, diferentes de cero, entonces $\bar{\mu} = \bar{\nu}$ en Λ.

Si x_1 no está conectado con c_o, ponemos $g_{1i} = g_{oi}$, $i = 1, \ldots, n+1$. Supongamos entonces que

$$x_1 \begin{array}{l} \xrightarrow{\alpha_1} y_1 \\ \quad\vdots \\ \xrightarrow{\alpha_m} y_m \end{array}$$

con $y_1, \ldots, y_m \in C_o$.

Si en c_o, $x \overset{\mu}{\underset{\nu}{\rightsquigarrow}} y$ son dos caminos no cero,

$$c(g_{oi})(\mu)\bar{\mu} = \chi_{oi}(\bar{\mu}) = \chi_{oi}(\bar{\nu}) = c(g_{oi})(\nu)\bar{\nu}.$$

Por [8], existen $\lambda_1,\ldots\ldots,\lambda_m \in k^*$ tales que para cada $y \in c_o$ y caminos μ_i, μ_j de forma que si

$$\begin{tikzcd} & y_i \arrow[dr, squiggly, "\mu_i"] & \\ x_1 \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\alpha_j"'] & & y \\ & y_j \arrow[ur, squiggly, "\mu_j"'] & \end{tikzcd}$$

con $\overline{\mu_i\alpha_i} \neq 0 \neq \overline{\mu_j\alpha_j}$ en Λ_1, entonces $\lambda_i c(g_{oi})(\mu_i)\overline{\mu_i\alpha_i} = \lambda_j c(g_{oi})(\mu_j)\overline{\mu_j\alpha_j}$ en Λ_1. Diremos que $\alpha_i \sim \alpha_j$ si existe una situación como la anterior.

Observemos que cualquier múltiplo de los coeficientes λ_i, $i = 1,\ldots.,m$ satisface la misma propiedad. Así, podemos suponer que $\lambda_1 = 1$. Si $\alpha_1 \sim \alpha_2$ $\lambda_2 = \lambda_1 c(g_{oi})(\mu_1)(c(g_{oi})(\mu_2))^{-1}$. Como $o(g_1) = p$, $\lambda_2^p = 1$. Si $\alpha_1 \sim \alpha_3$, también $\lambda_3^p = 1$.

Si tuviésemos $\alpha_1 \not\sim \alpha_2$, $\alpha_1 \sim \alpha_3$, entonces podríamos fijar libremente $\lambda_2 = 1$. Si además, $\alpha_2 \sim \alpha_3$, entonces $\lambda_3^p = 1$. Sino, hacemos $\lambda_3 = 1$. En conclusión, λ_1, λ_2, λ_3 (tal vez so lo existan λ_1, λ_2) pueden elegirse como raíces p-ésimas de 1.

Luego, definimos para $z \xrightarrow{\beta} w$, $g_{1i}(\beta) = \begin{cases} g_{oi}(\beta) & \text{si } z \neq x_1 \\ \lambda_i & \text{si } \beta = \alpha_i \end{cases}$

Por lo que acaba de hacerse, $g_{1i} \in \mathrm{Ker}\delta_1(\Lambda_1)^*$ y es de orden p. Si como antes, $b : \mathrm{Ker}\delta_1(\Lambda_1)^* \longrightarrow H^1(\Lambda_1, k^*)$ el cociente natural, probaremos que $b(g_{11}), \ldots, b(g_{1(n+1)})$ son $\mathbb{Z}_p$-$\ell.i.$ en $H^1(\Lambda_1, k^*)_p$.

Supongamos que $\sum_{i=1}^{n+1} n_i b(g_{1i}) = 0$ en $H^1(\Lambda_1, k^*)_p$, $n_i \in \{0, \ldots, p-1\}$. Por tanto, $\prod_{i=1}^{n+1} g_{1i}^{n_i} \in \mathrm{Im}\delta_o(\Lambda_1)^*$. Y debe existir $\psi : c_1 \longrightarrow k^*$ función, tal que si $x \xrightarrow{\alpha} y$ es flecha en c_1, $\prod_{i=1}^{n+1} g_{1i}^{n_i}(\alpha) = \psi(y)\ \psi(x)^{-1}$.

Definimos $\psi_o := \psi \mid c_o \longrightarrow k^*$. Si $x \xrightarrow{\alpha} y$ es flecha en c_o, $\prod_{i=1}^{n+1} g_{oi}^{n_i}(\alpha) = \prod_{i=1}^{n+1} g_{1i}^{n_i}(\alpha) = \psi_o(y)\psi_o(x)^{-1}$. Así, $\sum_{i=1}^{n+1} n_i b(g_{oi}) = 0$ en $H^1(\Lambda_1', k^*)_p$. Debe tenerse entonces, $n_i = 0$, $i = 1, \ldots, n+1$. O sea, $\mathbb{Z}_p^{n+1} \hookrightarrow H^1(\Lambda_1, k^*)_p$.

Es claro que se puede continuar por inducción, hasta $\mathbb{Z}_p^{n+1} \hookrightarrow H^1(\Lambda_m, k^*)_p = H^1(\Lambda, k^*)_p = \mathbb{Z}_p^n$. Por tanto, $\mathrm{rang}\Pi_1(\Lambda') \leq n$. //

En particular, esto muestra que las subálgebras plenas de simplemente conexas también lo son.

Recordemos también que un álgebra Λ es simplemente conexa si y solamente si satisface la condición (S) - ver [BL]-. <u>Enunciaremos</u> aquí dicha condición como se hace en

[BrG]. Para cada $s \in Q_0$, denotamos por Q_s el subcarcaj pleno de Q formado por los vértices $t \not> s$ -donde $a > b$ si hay un camino dirigido de b en a-. Por Σ_s el conjunto parcialmente ordenado $\{t < s \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(t,s) \neq 0\}$, donde $t < t'$ si y solo si $\mathrm{Hom}_\Lambda(t's) \cdot \mathrm{Hom}_\Lambda(t,t') \neq 0$. El punto s satisface (S) si cada componente conexa de Q_s contiene a lo más una componente conexa de Σ_s. Λ satisface (S) si todos sus puntos lo hacen.

Podemos fácilmente generalizar esta noción.

(10.3) <u>Definición</u>: Decimos que $x \in Q_0$ satisface (S^i) si cada componente conexa de Q_x contiene a lo más $i+1$ componentes conexas de Σ_x.

$$S(x) = i, \quad \text{si } x \text{ satisface } (S^i) \text{ pero no } (S^{i-1}).$$

Obviamente, la condición (S^0) es simplemente (S). Como Λ es de t.r.f., $S(x) \in \{0,1,2\}$ para todo $x \in Q_0$.

(10.4) <u>Proposición</u>: Sea $x_0 \in Q_0$ pozo de Q con $r = S(x)$. Sea $b : \mathrm{Ker}\delta_1^* \longrightarrow H^1(\Lambda,k^*)$ el cociente natural y p número primo $p \neq \mathrm{char}k$. Existen entonces funciones $h_1,\dots,h_r \in \mathrm{Ker}\delta_1^*$ de orden p tales que $b(h_1),\dots\dots,b(h_r)$ son $\mathbb{Z}_p$-$\ell.i.$ en $H^1(\Lambda,k^*)_p$ y $h_i \mid Q - \{x_0\} = 1$ para toda $i \in \{1,\dots,r\}$.

<u>Demostración</u>: Si $S(x_0) = 0$, no hay nada que probar. Probaremos el caso $S(x_0) = 2$, el $S(x_0) = 1$ es similar y más simple.

Supongamos $S(x_o) = 2$. Sean $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ componentes conexas diferentes de Σ_x en una misma componente conexa de Q_x. Por tanto, para cada $i \in \{1,2,3\}$, existe $x_i \in \Sigma_i$ y una flecha $x_i \xrightarrow{\alpha_i} x_o$.

Tomamos ω una raíz primitiva p-ésima de 1.

Definimos $g_1 : Q_1 \longrightarrow k^*$ tal que

$$g_1(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \neq \alpha_1 \\ \omega & \text{si } \alpha = \alpha_1 \end{cases}$$

Similarmente, $g_2 : Q_1 \longrightarrow k^*$ con

$$g_2(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \neq \alpha_2 \\ \omega & \text{si } \alpha = \alpha_2 \end{cases}$$

Mostremos que $g_1, g_2 \in \operatorname{Ker}\delta_1^*$. Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \in I(x,y)$ es relación, si $y \neq x_o$, para toda flecha α en algún camino μ_i, $g_j(\alpha) = 1$, por ser x_o pozo, y luego

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_j(\mu_i) \in I(x,y), \quad j = 1,2.$$

Si $y = x_o$, $\mu_i = \alpha_{j_i} \nu_i$ con $x_{j_i} \xrightarrow{\alpha_{j_i}} x_o$. Podemos asumir, $x_{j_i} = x_1 \in \Sigma_1$. Así, $\alpha_{j_i} = \alpha_1$ para toda $i = 1,\ldots,n$ y $g_1(\mu_i) = \omega$, $g_2(\mu_i) = 1$.

Finalmente, $b(g_1)$, $b(g_2)$ son $\mathbb{Z}_p \ell.i.$ en $H^1(\Lambda,k^*)_p$. En efecto, si $m_1,m_2 \in \{0,\ldots,p-1\}$ con $g_1^{m_1}g_2^{m_2} \in \mathbb{Z}m\delta_o^*$, como x_1 y x_3 están conectados en Q_{x_o}, existe $x_1 \overset{\gamma'}{\rightsquigarrow} x_3$ en Q_{x_o}.

Definimos $\gamma := \alpha_3\gamma'\alpha_1^{-1}$ circuito en x_o tal que

$$1 = g_1^{m_1}g_2^{m_2}(\gamma) = g_1(\alpha_3)^{m_1}g_2(\alpha_3)^{m_2}g_1(\alpha_1)^{-m_1}g_2(\alpha_1)^{-m_2} = g_1(\alpha_1)^{-m_1}\cdot\omega^{-m_1}.$$

Así, $m_1 = 0$. Similarmente $m_2 = 0$. //

Mostraremos ahora que el rango del grupo fundamental $\Pi_1(\Lambda)$ puede calcularse inductivamente por medio de la función S.

(10.5) <u>Teorema</u>: Sea $x \in Q_o$ pozo, $Q' = Q - \{x\}$ y $\Lambda' = \Lambda(Q')$, entonces $\mathrm{rang}\Pi_1(\Lambda) = S(x) + \mathrm{rang}\Pi_1(\Lambda')$.

<u>Demostración</u>: Sea p un número primo, $p \neq \mathrm{char}k$. Para morfismos asociados a las álgebras, las letras primadas corresponderán a Λ' y las letras sin primar a Λ.

Así, sean $f_1,\ldots,f_m \in \mathrm{Ker}\delta_1'^*$ tales que $b'(f_1),\ldots,b'(f_m)$ es base de $H^1(\Lambda',k^*)_p$. Como $Q' = Q_x$ es conexo en Q, por la demostración de (10.2), existen $g_1,\ldots,g_m \in \mathrm{Ker}\delta_1^*$ tales que $b(g_1),\ldots,b(g_m)$ son $\ell.i.$ en $H^1(\Lambda,k^*)_p$ y $g_i|Q' = f_i$.

Supongamos $r = S(x)$. Por (10.4), existen $h_1,\ldots,h_r \in \mathrm{Ker}\delta_1^*$ con $b(h_1),\ldots,b(h_r) \in H^1(\Lambda,k^*)_p$ $\ell.i.$ de forma que $h_i|Q' = 1$, $\forall_i \in \{1,\ldots,r\}$. Claramente, $b(g_1),\ldots,b(g_m)$, $b(h_1),\ldots,b(h_r)$ son $\ell.i.$ en $H^1(\Lambda,k^*)_p$: si $\prod_{i=1}^{m} g_i^{m_i} \cdot \prod_{j=1}^{r} h_j^{m_j} \in \mathbb{Z}m\delta_o'^*$ tomamos un ciclo γ en Q' y entonces $\prod_{i=1}^{m} g_i^{m_i}(\gamma) = 1$. Así, $\prod_{i=1}^{m} g_i^{m_i} \in \mathcal{I}m\delta_o^{'*}$ y $m_1 = \ldots\ldots = m_m = 0$.

Por tanto, también, $m_1' = \ldots\ldots = m_r' = 0$.

Estos elementos también generan $H^1(\Lambda, k^*)_p$: sea $\ell \in \mathrm{Ker}\delta_1^*$ y llamamos $\ell' = \ell|Q' \in \mathrm{Ker}\delta_1^{'*}$. Luego, deben haber $n_1, \ldots, n_m \in \{0, \ldots\ldots, p-1\}$ tales que $\ell' \mathfrak{f}_1^{n_1} \ldots\ldots \mathfrak{f}_m^{n_m} \in \mathcal{I}m\delta_o^{'*}$.

Sea $\bar{\ell} := \ell g_1^{n_1} \ldots\ldots g_m^{n_m}$ tal que $\bar{\ell}|Q' \in \mathcal{I}m\delta_o^{'*}$. Podemos suponer que $\bar{\ell}|Q' = 1$, ya que si $\mathfrak{f}$ es una extensión de $\ell' \mathfrak{f}_1^{n_1} \ldots\ldots \mathfrak{f}_m^{n_m}$ a $\mathcal{I}m\delta_o^*$, entonces $\bar{\ell}\mathfrak{f}^{-1}|Q' = 1$.

Supongamos que $\begin{matrix} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} \\ \vdots \qquad \\ x_n \xrightarrow{\alpha_n} \end{matrix} x$ y $h_i(\alpha_j) = w^{\delta_{ij}}$, $i \in \{1, \ldots\ldots, r\}$ $j \in \{1, \ldots\ldots, n\}$, donde w es una raíz primitiva p-ésima de 1. Supongamos que $\bar{\ell}(\alpha_i) = w^{m_i}$, $i \in \{1, \ldots\ldots, r\}$. Afirmamos que $\bar{\ell}h_1^{-m_1} \ldots\ldots h_r^{-m_r} \in \mathcal{I}m\delta_o^*$. En efecto, si γ es ciclo en Q, podemos suponer que pasa por x, así $\gamma = \alpha_i^{-1}\gamma'\alpha_j$ con γ' camino en Q' $\bar{\ell}h_1^{-m_1} \ldots h_r^{-m_r}(\gamma) = \bar{\ell}(\alpha_i)^{-1}\bar{\ell}(\alpha_j)h_i(\alpha_i)^{m_i}h_j(\alpha_j)^{-m_j} = 1$.

En conclusión, $\ell g_1^{n_1} \ldots\ldots g_m^{n_m} h_1^{-m_1} \ldots\ldots h_r^{-m_r} \in \mathcal{I}m\delta_o^*$.

De esta manera, $H^1(\Lambda, k^*) = \mathbb{Z}_p^{m+r}$ y por (10.1), $\mathrm{rang}\Pi_1(\Lambda) = m+r = \mathrm{rang}\Pi_1(\Lambda') + S(\lambda)$. //

Para concluir caracterizaremos a las álgebras que tienen grupo fundamental con $\mathrm{rang}\Pi_1(\Lambda) \leq 1$.

(10.6) <u>Teorema:</u> $\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda) \leq 1$ si y solamente si se satisfacen

1). $S(x) \leq 1$ para todo $x \in Q_0$.

2). Si $s(x) = 1$, $\Lambda(Q_x)$ es simplemente conexa.

<u>Demostración:</u> Supongamos $\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda) \leq 1$ y tomemos $x \in Q_0$. Formemos $\Lambda_x := \Lambda(Q_x \cup \{x\})$, tal que $Q_x \cup \{x\}$ es subcarcaj convexo de Q. Por (10.2), $\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda_x) \leq 1$.

Observemos que $\Sigma_x(\Lambda_x) = \Sigma_x(\Lambda)$ y como también Q_x es el mismo en ambas álgebras, $S_\Lambda(x) = S_{\Lambda x}(x)$. Pero, en Λ_x, x resulta ser un pozo y por (10.5) $S_{\Lambda x}(x) \leq 1$. Hemos probado (1).

También por (10.5), $\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda(Q_x)) = 0$ si $S_{\Lambda x}(x) = 1$. Entonces, $\Lambda(Q_x)$ debe ser simplemente conexa, probando (2).

Supongamos que Λ es álgebra de dimensión mínima que satisface (1) y (2) y sin embargo $\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda) > 1$. Sea $x \in Q_0$ pozo en Q. Llamemos $Q' = Q - \{x\}$ y $\Lambda' = \Lambda(Q')$. Afirmamos que Λ' satisface (1) y (2). En efecto, si $t \in Q'_0$, $\Sigma_t(\Lambda) = \Sigma_t(\Lambda')$ y si Q'_c es componente conexa de Q'_t, existe Q_c componente conexa de Q_t tal que $Q'_c \subset Q_c$, así $S_{\Lambda'}(t) \leq S_\Lambda(t) \leq 1$. Además, si $S_\Lambda(t) = 1$, también $S_\Lambda(t) = 1$ y por hipótesis, $\Lambda(Q_t)$ es simplemente conexa. Pero, Q'_t es subcarcaj convexo de Q_t así que por (10.2), $\Lambda(Q'_t)$ también es simplemente conexa. Claramente, $\Lambda'(Q'_t) =$

$= \Lambda(Q_t')$.

Luego, por minimalidad, $\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda') < 1$.

Pero, por (10.5) $\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda) = \operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda') + S(x)$, así que $S(x) > 1$. Por (1), $S(x) = 1$. Por (2), Λ' debe ser simplemente conexa ya que $Q' = Q_x$. Entonces, $\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda') = 0$ y todo junto da $\operatorname{rang}\Pi_1(\Lambda) = 1$ ↯ . //

BIBLIOGRAFIA

[AF] Anderson F, Fuller K. Rings and categories of modules GTM13 Springer Verlag (1973).

[A] Auslander, M. Large modules over Artin Algebras. Ac. Press (1975).

[AR] Auslander, M., Reiten, I. Representation Theory of Artin Algebras III Comm. Alg. 3 (1975) 239-294.

[BL] Bautista, R, Larrión F. Auslander Reiten quivers for certain algebras of finite representation type. J. London Math Soc. (2), 26 (1986). 43-52.

[BLS] Bautista, R, Larrión F, Salmerón L. On simple connected algebras Por aparecer en J. London Math. Soc.

[B] Bongartz, K. Zykellose Algebren sind nicht zugellos. in Rep. Th. II Springer Lecture Notes 832, (1980).

[BoG] Bongartz, K., Gabriel P. Covering spaces in Representation Theory Inv. Math. 65 (1982). 331-378.

[BR] Bongartz, K. Ringel, C. Representation finite tree algebras en Rep. of Algebras, Springer Lecture Notes 903 (1982).

[BrG] Bretscher, O., Gabriel, P. The standard form of a representation finite algebra. Por aparecer en Bull. Soc. Math. France.

[CLS] Cibils, Larrión, Salmerón. Métodos diagramáticos en teoría de Representaciones. Monografías del Inst. Mat. 11 UNAM (1982).

[G0] Gabriel, P. Indecomposable Representations II, Instituto Nazionale di alta Matematica, Symposia Math 11 (1973).

[G1] Gabriel P. Auslander-Reiten Sequences and Representation finite algebras, in Rep. Th. II, Otawa 1979.

[G2] Gabriel, P. The universal cover of a representation finite algebras, on Rep. of Algebras. Springer Lecture Notes 903 (1982).

[G] Green, E. Group graded algebras and the zero relation problem en Rep. of Algebras. Springer Lecture Notes 903 (1982).

[HR] Happel, D. Ringel, C. Tilted Algebras. Por aparecer en TAMS.

[Hu] Humphreys, J. Linear Algebraic groups. GTM 21 Springer Verlag (1975).

[J] Jans, J. On the indecomposable representation of algebras Ann. of Math. 66 (1957).

[L] Larrión, F. Algebras Forestales, tesis doctoral UNAM (1981).

[MP1] Martínez, R., de la Peña, J.A. The universal cover of a quiver with relations. Public. Prel. Inst. Mat. 40 UNAM (1982).

[MP2] Martínez, R., de la Peña, J.A. Automorphisms of algebras of finite representation type. Por aparecer en Inv. Math.

[MP3] Martínez, R., de la Peña, J.A. Multiplicative basis for algebras whose universal cover has no oriented cycles. Por aparecer en J. of Alg.

[P] de la Peña, J.A. La cubierta universal de un carcaj con relaciones, tesis de Maestría, UNAM (1982).

[S] Salmerón, L. Gráficas de Auslander sin ciclos dirigidos, tesis doctoral, UNAM (1982).

[Se] Serre, J.P., Trees, Springer Verlag.

[RR] Reiten, I., Riedtmann, Ch. Notas tomadas por el Dr. R. Martínez Villa de la conferencia dada por I. Reiten durante el Congreso de Oberwolfach, 1981.