UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
UNIDAD ACADEMICA DE ESTUDIOS PROFESIONALES
Y DE POST-GRADO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMATICAS APLICADAS
Y EN SISTEMAS

TEOREMAS LIMITES PARA CAMPOS ALEATORIOS RAMIFICADOS

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
MAESTRO EN ESTADISTICA
E
INVESTIGACION DE OPERACIONES
PRESENTA

MARIA ASUNCION BEGOÑA FERNANDEZ FERNANDEZ

MEXICO, 1986

CONTENIDO

INTRODUCCION

Los sistemas infinitos de partículas son modelos matemáticos de fenómenos que se presentan en el campo de la Física, la Biología y otras ciencias, y aunque estos sistemas no existen en la realidad, los resultados matemáticos que se obtienen de ellos son útiles como aproximaciones para sistemas finitos muy grandes que sí ocurren, por ejemplo, en transporte de neutrones, evolución de colonias de bacterias, crecimiento de tumores cancerosos.

El antecedente matemático más significativo en el estudio de esta clase de sistemas es el artículo de Martin-Löf [33], apenas publicado en 1976, en el cual se estudia un sistema de Poisson de movimientos Brownianos independientes. Esta referencia es importante por dos razones: una, porque en ella se plantea el estudio de estos sistemas como procesos estocásticos que toman valores en espacios de distribuciones de Schwartz; y otra porque en este trabajo se relacionan dos aspectos distintos de la Teoría de la Difusión: La probabilista y la física. En ambas es básica la ecuación de Fokker-Planck $\frac{d\mu}{dt} = A^{*}\mu$ para la densidad μ (A es el generador infinitesimal del movimiento Markoviano de las partículas). En la teoría probabilista se estudia el movimiento aleatorio de una partícula individual y μ es interpretada como la densidad de probabilidad para su posición en el espacio. En la teoría física se estudia un gas de partículas y μ es interpretada como la densidad real de partículas en el espacio. En el primer caso μ es una cantidad determinista y en el segundo μ es una cantidad aleatoria puesto que las partículas se mueven aleatoriamente. La pregunta que surge de esto es entonces ¿en qué sentido estarán relacionadas estas dos interpretaciones?

La interpretación que han dado los físicos es que aun en un volumen infinitesimal hay muchas partículas; así en algún sentido la densidad es grande y las fluctuaciones deben ser muy pequeñas, de manera que la densidad real puede ser aproximada por su promedio, el cual está dado por la densidad de probabilidad. Sin embargo, esto requiere de una justificación matemática rigurosa.

Lo que hace Martin-Löf es considerar el sistema más simple donde esta pregunta puede ser rigurosamente estudiada: el gas consiste de partículas que no interactúan y el movimiento de cada una es Markoviano y definido por el operador A. En cualquier tiempo las partículas forman un sistema de Poisson en el espacio con una densidad determinada por la ecuación de Fokker-Planck. Para obtener una situación en la cual la densidad es grande se toma la densidad como $\rho\mu$ donde μ es fija y $\rho \to \infty$. El autor demuestra que el número de partículas dividido por ρ converge en probabilidad a la densidad determinista μ dada por la ecuación de Fokker-Planck. Esta es la ley de los grandes números para el sistema. Asimismo, estudia las fluctuaciones alrededor del equilibrio normalizadas por $\sqrt{\rho}$ en el límite cuando $\rho \to \infty$, y prueba un teorema de límite central que muestra que estas fluctuaciones se distribuyen en el límite de acuerdo con cierto campo aleatorio Gaussiano generalizado. Por último, prueba que el proceso límite de las fluctuaciones es un proceso de Markov que satisface una ecuación de Langevin generalizada cuyo operador es precisamente A^*. De la ley de los grandes números, el teorema de fluctuación y la ecuación de Langevin generalizada se concluye que asintóticamente el número de partículas dividido por ρ satisface la ecuación de Fokker-Planck más un campo aleatorio generalizado Gaussiano en espacio-tiempo con valor medio cero, el cual desaparece en el límite. Queda así explicada la relación entre las dos interpretaciones de la densidad.

Tomando como modelo este trabajo, se puede estudiar el comportamiento asintótico de sistemas infinitos más complejos en el límite de alta densidad o bajo distintos cambios de escala en espacio-tiempo, o cuando algunos de sus parámetros son muy grandes o muy pequeños. Se buscan leyes de grandes números y distribuciones límites de las fluctuaciones alrededor de los valores medios, así como descripciones detalladas de los procesos límites de las fluctuaciones. En particular interesan casos en los que el proceso límite de las fluctuaciones es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck generalizado y encontrar la ecuación de Langevin que lo rige.

Al tratar sistemas más complejos que el estudiado por Martin-Löf aumenta considerablemente la complejidad de los cálculos; esto requiere una búsqueda de métodos adecuados. Por otra parte, Martin-Löf probó la convergencia de las fluctuaciones sólo para cada tiempo fijo, sin embargo es importante demostrar la convergencia del proceso de las fluctuaciones (es decir, en todo el intervalo de tiempo), lo cual es bastante más difícil; para ello es muy útil la técnica de martingalas empleada por Holley y Stroock [20] en particular en relación con la compacidad de los procesos.

Entre los trabajos más importantes de este tipo están los de Holley y Stroock [20] y Dawson [9], quienes consideraron sistemas infinitos de movimientos Brownianos con ramificación crítica bajo un cambio de escala en espacio-tiempo, y Gorostiza [15], quien estudió un sistema infinito de movimientos Brownianos ramificados con ramificación general y alta densidad, y posteriormente añadiendo inmigración y con cambios de escala en espacio-tiempo y en la ley de ramificación [14], [16]. Uno de los objetivos de Gorostiza era encontrar una metodología unificada que abarcara todas estas posibilidades.

El considerar movimientos Brownianos ramificados como un modelo matemático conveniente requiere justificación. Otros modelos más adecuados para una variedad de fenómenos reales lo constituyen los llamados procesos de transporte ramificados. Sin embargo, puede demostrarse que en determinadas circunstancias un proceso de transporte ramificado converge a un movimiento Browniano ramificado, por lo que este último es útil como una aproximación. Esto fue hecho por Gorostiza y Griego [17] para el caso de una dimensión.

Recientemente se han desarrollado algunas técnicas generales útiles para este tipo de estudios, que fueron sin duda motivadas por los mismos y que permiten obtener resultados más fuertes que los de Martin-Löf. En particular es importante mencionar los trabajos de Mitoma [37], [38], [39], acerca de la continuidad y la convergencia débil de procesos estocásticos con valores en espacios de distribuciones de Schwartz, y el de Bojdecki y Gorostiza [3], que permite determinar si un proceso Gaussiano generalizado es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck y encontrar la ecuación de Langevin generalizada que lo rige y la relación de fluctuación-disipación correspondiente. En [3] se obtienen soluciones de las ecuaciones de Langevin en un sentido un poco más fuerte que en [33]. Los procesos generalizados de Ornstein-Uhlenbeck considerados en [3] son en general no estacionarios, como es el caso que ocurre en este trabajo. Itô ha elaborado teorías generales de procesos de Ornstein-Uhlenbeck generalizados estacionarios [23] y de ecuaciones diferenciales estocásticas (de Langevin) para procesos generalizados [24].

En este trabajo consideramos un sistema infinito de movimientos Brownianos ramificados (ramificación general) con inmigración, donde el campo aleatorio inicial y el campo aleatorio de inmigración son campos de Poisson homogéneos, y analizamos el comportamiento asintótico de alta densidad del sistema, es decir, cuando las intensidades de los dos campos de Poisson tienden a infinito. Se demostrará una ley de grandes números y un teorema de convergencia del proceso de las fluctuaciones, y se estudiarán las propiedades del proceso límite de las fluctuaciones, en particular la distribución límite cuando el tiempo tiende a infinito en el caso subcrítico con inmigración positiva.

Algunos de estos resultados aparecen en los artículos [3], [14] y [16], donde se presentan también otros resultados asintóticos para este sistema con cambios de escala en espacio-tiempo y de la ley de ramificación. Sin embargo, aunque en ellos se explica la técnica unificada de análisis, no se incluyen todas las demostraciones.

El objetivo principal de este trabajo es realizar en detalle las demostraciones para los límites de alta densidad del sistema citado, algunas de las cuales habían sido elaboradas de manera esquemática por el Dr. Luis G. Gorostiza. El trabajo se realizó bajo la dirección del Dr. Gorostiza y se presenta como tesis de Maestría en Estadística e Investigación de Operaciones del I.I.M.A.S.*

Debido a que algunas de las técnicas empleadas no son aún muy conocidas, en la primera parte de la tesis se presenta el material preliminar necesario y se dan referencias generales de cada tema tratado al principio de cada sección; los resultados que no se encuentran en éstas tienen su propia referencia.

En el Apéndice se incluyen algunas definiciones y resultados adicionales que complementan la información sobre el material preliminar.

Por último quisiera agradecer al Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, UNAM y al Departamento de Matemáticas del CINVESTAV del IPN las facilidades prestadas para la realización de este trabajo.

---

* Este trabajo forma parte del proyecto PCCBBNA 002042 "Sistemas de Partículas y Campos Aleatorios", dirigido por el Dr. Luis G. Gorostiza con auspicio del CONACyT.

I. TEMAS PRELIMINARES

En este capítulo se exponen los resultados que serán utilizados en el análisis de los procesos a estudiar. No se pretende hacer una exposición exhaustiva de cada uno de los temas, pues éstos son sólo los elementos de la teoría empleados en el trabajo. No todas las secciones están tratadas de la misma manera; en particular, los apartados sobre variables aleatorias con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ y convergencia débil de procesos en $D_{S'}[0,\infty[$ son más extensos y detallados.

Esto se debe en el primer caso a que el ruido blanco (variable aleatoria en $S'(\mathbb{R}^d)$), juega un papel central en el trabajo, pues aparece como el límite de ciertas medidas aleatorias.

En lo que respecta a la convergencia débil en $D_{S'}[0,\infty[$, éste es uno de los principales problemas que se tratan y sólo se encuentra en artículos especializados.

En la Sección 5 se considera la propiedad de Markov para procesos con valores en un espacio métrico completo y para procesos con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ (que no es un espacio métrico) sólo se analiza el caso Gaussiano, ya que esta propiedad sólo será utilizada en este caso.

En general no se dan las demostraciones, pero sí las referencias en que se pueden consultar; se incluyen aquellas que no están en referencias, así como algunas que conviene destacar.

1. Los Espacios de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ y $S'(\mathbb{R}^d)$, y los Espacios de las Medidas de Radon $M(\mathbb{R}^d)$, $M_T(\mathbb{R}^d)$, $M_p(\mathbb{R}^d)$.

(Referencias: Treves [40], Gelfand-Vilenkin [12], Gelfand-Shilov [13], Itô [24])

Los procesos que se estudiarán son procesos que toman valores en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (espacio de las distribuciones temperadas de Schwartz) o en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ (espacio de las medidas de Radon). En este apartado se dan las definiciones y las principales propiedades. Las definiciones de espacio de Hilbert contable nuclear y espacio nuclear pueden consultarse en el Apéndice.

1.1. Los Espacios de Schwartz .

Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ el espacio de las funciones $\phi:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, infinitamente diferenciables, tales que

$$\|\phi\|_p = \max_{0\leq |k|\leq p} \sup_x \prod_{j=1}^{d} (1+|x_j|)^p |D^k\phi(x)| < \infty \qquad (1)$$

para toda $p = 0,1,\ldots$, donde $x = (x_1,\ldots,x_d)$, $k = (k_1,\ldots,k_d)$, $|k| = k_1 + \ldots + k_d$ y $D^k = \partial^{|k|}/\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_d^{k_d}$.

Las funciones $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se llaman funciones rápidamente decrecientes (con todas sus derivadas) en infinito, y son conocidas como funciones de prueba.

Obsérvese que para cada $p \geq 0$, $\|\cdot\|_p$ definida por (1) es una norma (mas no una norma de Hilbert) [ver Apéndice]. Introducimos en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ la topología de espacio vectorial topológico localmente convexo inducida por el sistema de normas $\{\|\cdot\|_p,\ p \geq 0\}$.

Sea $\{|\!|\!|\cdot|\!|\!|_p,\ p \geq 0\}$ el sistema de normas de Hilbert en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definido por

$$|||\phi|||_p^2 = \sum_{|k|=0}^{p} \int_{\mathbf{R}^d} \prod_{j=1}^{d} (1+|x_j|)^p |D^k\phi(x)|^2 dx. \qquad (2)$$

Los sistemas de normas $\{\|\cdot\|_p,\ p \geq 0\}$ y $\{|||\cdot|||_p,\ p \geq 0\}$ son equivalentes (en el sentido que inducen en $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ la misma topología) ya que se puede demostrar que [18] para toda $p \geq 1$, existen constantes positivas C_p y D_p, tales que para cada ϕ en $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$

$$C_p|||\phi|||_{p-1} \leq \|\phi\|_p \leq D_p|||\phi|||_{p+1}.$$

El espacio $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ con la topología inducida por el sistema de normas $\{|||\cdot|||_p,\ p \geq 0\}$ es un espacio metrizable, separable y completo, con métrica [12]

$$d(\phi,\psi) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{-p}|||\phi-\psi|||_p}{1+|||\phi-\psi|||_p} \quad . \qquad (3)$$

En particular $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ es un espacio de Fréchet. Obsérvese que si $n<m$, entonces

$$|||\cdot|||_n \leq |||\cdot|||_m \cdot \qquad (4)$$

Puesto que $\{|||\cdot|||_p,\ p \geq 0\}$ es un sistema de normas de Hilbert, $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ es un espacio de Hilbert contable (ver Apéndice).

Denotaremos por $\mathcal{S}_p(\mathbf{R}^d)$ la completación de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ con respecto a la norma $|||\cdot|||_p$.

Por (4), si $n<m$,

$$\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^d)$$

y por ser $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ completo,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^d).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de Hilbert, en particular $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)$.

Sean $\mathcal{S}_n'(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ los espacios duales de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ respectivamente. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ se conoce como el espacio de las distribuciones temperadas de Schwartz.

El espacio $\mathcal{S}_n'(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de Hilbert con norma

$$\|F\|_{-n} = \sup_{|||\phi|||_n = 1} \langle F,\phi\rangle, \qquad F \in \mathcal{S}_n'(\mathbb{R}^d), \phi \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^d),$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la forma bilineal canónica en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, esto es,

$$\langle F,\phi\rangle = F(\phi), \qquad F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) .$$

Si $n < m$,

$$\mathcal{S}_n'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_m'(\mathbb{R}^d) \tag{5}$$

y

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n'(\mathbb{R}^d) . \tag{6}$$

Sea Λ la familia de todos los subconjuntos acotados de $S(\mathbb{R}^d)$; introducimos en $S'(\mathbb{R}^d)$ la topología inducida por la colección de seminormas $\{\|\cdot\|_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ dadas por

$$\|F\|_\lambda = \sup_{\phi \in \lambda} |<F,\phi>| \ .$$

Esta es la llamada topología fuerte, y $S'(\mathbb{R}^d)$ con esta topología se llama el dual fuerte de $S(\mathbb{R}^d)$.

Observaciones:

1) $L^2(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d)$, Lebesgue$)$ es un espacio de Hilbert, por lo que es isomorfo con su dual; así

$$S(\mathbb{R}^d) \subset S_n(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \cong (L^2(\mathbb{R}^d))' \subset S_n'(\mathbb{R}^d) \subset S'(\mathbb{R}^d) \ .$$

Estos encajes son continuos y densos. Las ternas

$$S(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \subset S'(\mathbb{R}^d) \ ,$$

y

$$S_n(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \subset S_n'(\mathbb{R}^d)$$

se llaman ternas de Gelfand.

También se tiene $S_n(\mathbb{R}^d) \cong S_n'(\mathbb{R}^d)$ por ser $S_n(\mathbb{R}^d)$ espacio de Hilbert, pero en la terna de Gelfand $S_n(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \subset S_n'(\mathbb{R}^d)$ se utiliza la topología en $S_n(\mathbb{R}^d)$ inducida por L^2, la cual es más débil que la topología de $S_n(\mathbb{R}^d)$.

2) Las funciones $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ están representadas en $S'(\mathbf{R}^d)$ por

$$<f,\phi> = \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)f(x)dx, \quad \phi \in S(\mathbf{R}^d).$$

El espacio $S'(\mathbf{R}^d)$ contiene además a otros objetos que no son funciones, por ejemplo, la δ de Dirac y sus derivadas:

$$<\delta_x,\phi> = \phi(x) \quad <\delta_x^{(k)},\phi> = (-1)^k \phi^k(x)$$

y las medidas temperadas de Radon (Sección 1.2).

3) Los espacios $S(\mathbf{R}^d)$ y $S'(\mathbf{R}^d)$ son nucleares (Apéndice). La nuclearidad de $S'(\mathbf{R}^d)$ se sigue de que el dual fuerte de un espacio de Fréchet nuclear es nuclear (Teorema 4, Apéndice).

1.2. Los Espacios de Medidas de Radon.

(Referencias: Choquet [6], Gelfand-Vilenkin [12], Bourbaki [5])

Sea $B(\mathbf{R}^d)$ la σ-álgebra de conjuntos de Borel de $\mathbf{R}^d$, y $M^+(\mathbf{R}^d)$ el espacio de todas las medidas no negativas μ sobre $(\mathbf{R}^d, B(\mathbf{R}^d))$ tales que $\mu(A) < \infty$ para cada conjunto compacto A; los elementos de $M^+(\mathbf{R}^d)$ se llaman medidas de Radon positivas.

Introducimos en $M^+(\mathbf{R}^d)$ la topología de la convergencia vaga definida de la siguiente manera: Denotemos por $C_K(\mathbf{R}^d)$ la familia de todas las funciones continuas de $\mathbf{R}^d$ en $\mathbf{R}$ con soporte compacto. Para μ en $M^+(\mathbf{R}^d)$ y f en $C_K(\mathbf{R}^d)$, sea

$$<\mu,f> = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)d\mu(x)$$

Una sucesión $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $M^+(\mathbb{R}^d)$ se dice que converge vagamente a μ en $M^+(\mathbb{R}^d)$, y lo denotaremos por $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, si

$$\langle\mu_n,f\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle\mu,f\rangle$$

para cada $f \in C_K(\mathbb{R}^d)$.

El espacio $M^+(\mathbb{R}^d)$ con la topología de la convergencia vaga es un espacio metrizable, separable y completo [6], es decir, es un espacio polaco.

Se dice que una medida μ en $M^+(\mathbb{R}^d)$ es temperada si existe un p positivo tal que

$$\langle\mu,\phi_p\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_p(x)d\mu(x) < \infty ,$$

donde

$$\phi_p(x) = (1+|x|^2)^{-p},\ x \in \mathbb{R}^d .$$

El espacio $M_T^+(\mathbb{R}^d)$ de todas las medidas temperadas está caracterizado por [12]

$$M_T^+(\mathbb{R}^d) = M^+(\mathbb{R}^d) \cap S'(\mathbb{R}^d)$$

y sus miembros son los elementos positivos de $S'(\mathbb{R}^d)$.

Dada p, sean

$$M_p^+(\mathbb{R}^d) = \{\mu: \mu \in M_T(\mathbb{R}^d),\ <\mu,\phi_p> < \infty\}$$

y

$$C_{K,p}(\mathbb{R}^d) = C_K(\mathbb{R}^d) \cup \{\phi_p\}\ .$$

Una sucesión $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $M_p^+(\mathbb{R}^d)$ se dice que converge p-vagamente a $\mu \in M_p^+(\mathbb{R}^d)$ si

$$<\mu_n, f> \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} <\mu, f>$$

para cada $f \in C_{K,p}$, y lo denotaremos por

$$\mu_n \xrightarrow{p\cdot v} \mu\ .$$

Si introducimos en $M_p^+(\mathbb{R}^d)$ la topología de la convergencia p-vaga, entonces $M_p^+(\mathbb{R}^d)$ es un espacio polaco (la prueba de esto es análoga a la demostración de que $M^+(\mathbb{R}^d)$ es polaco).

Observación: Una medida μ signada sobre $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ se dice que es una medida de Radon si μ puede ser expresada como la diferencia de dos medidas de Radon positivas. Denotaremos por $M(\mathbb{R}^d)$ a las medidas signadas de Radon, y por $M_T(\mathbb{R}^d)$ a las temperadas (diferencias de medidas de Radon positivas temperadas).

Obsérvese que si μ es una medida de Radon signada, la medida de variación de μ se define como

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-,$$

donde μ^+ y μ^- son medidas de Radon positivas. Por lo tanto, si A en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ es compacto,

$$|\mu(A)| = \mu^+(A) + \mu^-(A) < \infty .$$

La medida de variación también está dada por

$$|\mu(A)| = \sup_{\{A_i\}_{i=1}^k} \sum |\mu(A_i)| ,$$

donde $\{A_i\}_{i=1}^k$ es una partición de A y el supremo se toma sobre todas las particiones.

Observación: En $M(\mathbb{R}^d)$ se puede definir también la topología de la convergencia vaga [6], pero no es adecuada para este trabajo por ser demasiado fuerte ya que trabajaremos con sucesiones de medidas (aleatorias) en $M(\mathbb{R}^d)$ cuyos límites no tienen variación finita sobre compactos, y por lo tanto no están en $M(\mathbb{R}^d)$. Sin embargo, se tendrá convergencia en la topología inducida en $M_T(\mathbb{R}^d)$ por $S'(\mathbb{R}^d)$, que es una topología más débil, y dichos límites estarán en $S'(\mathbb{R}^d) \setminus M_T(\mathbb{R}^d)$.

2. Variables Aleatorias con Valores en $S'(\mathbb{R}^d)$.

Intuitivamente, una función aleatoria es una función que se mide mediante un experimento aleatorio. Si $(\Omega, F, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad y los resultados del experimento corresponden a puntos $\omega \in \Omega$, se lleva a cabo un proceso de medición para obtener en cada instante del tiempo t un número $X_t(\omega)$. Así, $X(\omega) = \{X_t(\omega), t \in T\}$ es una función del espacio muestral Ω en un espacio de funciones definidas sobre el intervalo de tiempo T.

Esta noción de función aleatoria está basada en la hipótesis de que es posible medir el valor de dicha función en cada tiempo t sin calcular su valor en otros momentos. Sin embargo, al realizar un experimento en el cual se mide una función aleatoria X por medio de un aparato que posee cierta inercia, la lectura que se obtiene no es el valor de la función X en el instante t, sino más bien un valor promedio,

$$\Phi(\phi) = \int \phi(t)X(t)dt,$$

donde $\phi(t)$ es una función que caracteriza al aparato. Estas cantidades dependen linealmente de ϕ y cambios pequeños de la función $\phi(t)$ causan cambios pequeños en $\Phi(\phi)$.

Así, como consecuencia de la medición de una función aleatoria por medio de un aparato, obtenemos una funcional lineal continua, lo que nos lleva a definir variables aleatorias con valores en espacios de funcionales lineales continuas, o más generalmente variables aleatorias con valores en un espacio topológico.

DEFINICION 1. *Sean* (Ω,F,P) *un espacio de probabilidad y* E *un espacio topológico con* σ*-álgebra de Borel** E. *Se dice que un mapeo* $X:\Omega \to E$

---
* La σ-álgebra de Borel es la mínima σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos abiertos de E.

es una variable aleatoria sobre Ω *con valores en* E, *o un elemento aleatorio de* E, *si* $X^{-1}(B) \in F$ *para toda* $B \in E$.

Sea X una variable aleatoria sobre Ω con valores en E. La distribución de X es la medida de probabilidad $P = \mathbb{P}X^{-1}$ sobre (E,E) definida por

$$P(A) = \mathbf{P}(X^{-1}(A)) = \mathbf{P}\{\omega | X(\omega) \in A\} \equiv \mathbf{P}\{X \in A\},\ A \in E.$$

Nótese que $\mathbf{P}$ es una medida de probabilidad sobre un espacio abstracto, mientras que P está definida sobre un espacio topológico.

Cualquier medida de probabilidad sobre un espacio topológico es la distribución de alguna variable aleatoria sobre algún espacio de probabilidad: Dada P sobre (E,E), sea $(\Omega,F,\mathbf{P}) = (E,E,P)$, y definimos X como la identidad: $X(\omega) = \omega$, $\omega \in \Omega = E$. X es una variable aleatoria sobre Ω con valores en E y tiene a P como su distribución.

Definir variables aleatorias con valores en espacios de funcionales lineales continuas, además de tener la motivación física mencionada al inicio de este apartado, tiene también una motivación matemática, como veremos en 2.1 y 2.2, relacionada con la existencia de una medida Gaussiana estándar.

En 2.1 recordamos la definición y algunas propiedades de las medidas Gaussianas sobre $\mathbf{R}^d$ y se demuestra que si E es un espacio de Hilbert no existe una medida μ Gaussiana estándar sobre E tal que $\mu(E) = 1$.

En 2.2 se tratan variables aleatorias con valores en $S'(\mathbf{R}^d)$, la funcional característica, el teorema sobre la correspondencia uno a uno entre ambas, y el teorema de Bochner-Minlos (generalización del teorema de Bochner para funciones características). Como caso particular, el teorema de Bochner-Minlos garantiza la existencia de una medida Gaussiana estándar sobre $S'(\mathbb{R}^d)$, llamada ruido blanco Gaussiano (más precisamente, por lo citado arriba, el ruido blanco Gaussiano es un elemento aleatorio de $S'(\mathbb{R}^d)$ cuya distribución es dicha medida Gaussiana).

La sección 2.3 está dedicada a las medidas Gaussianas sobre $S'(\mathbb{R}^d)$ y se pone especial atención al ruido blanco.

Por último, en la sección 2.4 se definen procesos estocásticos con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$, llamados usualmente procesos generalizados, y se consideran procesos Gaussianos generalizados.

2.1. Medidas Gaussianas.

(Referencias: Hida [18], Ibrahinov y Rozanov [25])

DEFINICION 2. *Una medida de probabilidad* μ *sobre* $\mathbb{R}^d$ *se dice que es Gaussiana si su función característica*

$$\hat{\mu}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle y,x\rangle}\mu(dx)$$

está dada por

$$\hat{\mu}(y) = e^{i\langle y,m_\mu\rangle - 1/2\,\langle Q_\mu y,y\rangle}, \quad y \in \mathbb{R}^d, \tag{7}$$

donde m_μ *es el vector de valor medio y* $Q_\mu:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *es un operador lineal positivo llamado operador de covarianza (su matriz respecto a la* *base canónica de* $\mathbf{R}^d$ *es la matriz de covarianza). En este caso,* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *es el producto interior en* $\mathbf{R}^d$.

Se tiene

$$\langle y, m_\mu\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} \langle y,x\rangle \mu(dx), \qquad y \in \mathbf{R}^d$$

y

$$\langle Q_\mu y, z\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} [\langle y,x\rangle - \langle y,m_\mu\rangle][\langle z,x\rangle - \langle z,m_\mu\rangle]\mu(dx), \; y, \; z \in \mathbf{R}^d$$

Para $d = 1$, $\hat{\mu}(y) = e^{imy - 1/2\ \sigma^2 y^2}$, con

$$m = \int_{\mathbf{R}} x\mu(dx), \; Q = \sigma^2 = \int_{\mathbf{R}} (x-m)^2 \mu(dx).$$

La medida μ con valor medio m y covarianza Q está concentrada en un hiperplano L de $\mathbf{R}^d$ de dimensión K, donde K es el rango de la matriz de covarianza. Esto es, $\mu(\mathbf{R}^d \setminus L) = 0$ y μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en L, con densidad

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi)^{K/2} \det Q} \exp\{-\tfrac{1}{2}\langle Q^{-1}(x-m), x-m\rangle\}, \; x \in L, \quad (8)$$

en donde Q se entiende como el operador Q restringido al subespacio $Q\mathbf{R}^d$, $\det Q$ es el determinante de la matriz asociada y Q^{-1} es el operador inverso restringido a dicho subespacio (el hiperplano L es $m + Q\mathbf{R}^d$). Si $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$, entonces

$$\mu(A) = \int_{A \cap L} \rho(x)dx .$$

En el caso $d = 1$, una medida Gaussiana siempre tiene densidad (excepto si $\sigma^2 = 0$, en cuyo caso es una medida de Dirac δ_m).

DEFINICION 3. *Una medida Gaussiana en* $\mathbb{R}^d$ *se dice que es estándar si es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^d$ *y su función de densidad está dada por*

$$\rho(x) = \frac{e^{-\|x\|^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} . \tag{9}$$

Así, si μ es una medida Gaussiana estándar en $\mathbb{R}^d$, su función característica es

$$\hat{\mu}(x) = e^{-\|x\|^2/2} , \tag{10}$$

esto es, μ tiene valor medio cero y operador de covarianza $Q = I$.

De la definición de medida Gaussiana se tiene que para toda $y \in \mathbb{R}^d$ y para toda $u \in \mathbb{R}$

$$\hat{\mu}(uy) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iu<y,x>}\mu(dx)$$
$$= e^{iu<y,m> - 1/2\ u^2<Qy,y>} . \tag{11}$$

Por lo tanto, tenemos que la medida μ es Gaussiana si y sólo si para cada y en $\mathbb{R}^d$ fija, la variable aleatoria real $<y,\cdot>$ sobre $\mathbb{R}^d$

es Gaussiana, esto es, si la proyección de μ en cada dirección y es Gaussiana.

Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita con producto interior $<\cdot,\cdot>$ y norma $<x,x>^{1/2}$.

DEFINICION 4. *Dada una medida finita* μ *sobre* H *la transformada de Fourier* $\hat{\mu}$ *de* μ *está dada por*

$$\hat{\mu}(y) = \int_H e^{i<y,x>}\mu(dx), \ y \in H.$$

El problema que trataremos es el siguiente: ¿Existe una medida μ Gaussiana estándar sobre H? Puesto que la medida de Lebesgue no existe en H, y la medida Gaussiana estándar es una medida absolutamente continua con respecto a ésta, es necesario precisar la pregunta anterior. Se podría plantear de la siguiente manera: ¿Existe una medida de probabilidad μ sobre H tal que $\hat{\mu}$ es de la forma

$$\hat{\mu}(y) = e^{-1/2\|y\|^2} \ ? \tag{12}$$

Supongamos que sí existe, y sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de H. Entonces para toda $u \in \mathbb{R}$ y para toda n,

$$\int_H e^{iu<e_n,x>}\mu(dx) = e^{-1/2\|ue_n\|^2} = e^{-1/2\,u^2}$$

Por la igualdad de Parseval, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} <e_n,x>^2 = \|x\|^2 < \infty,$$

y de aquí que $\langle e_n, x\rangle \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{n\to\infty} \int_H e^{iu\langle e_n, x\rangle} \mu(dx) = 1 \quad \text{para toda} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Se tiene así una contradicción.

Considerando la misma base ortonormal $\{e_n\}$, y $u_1, u_2, \ldots \in \mathbb{R}$, se tiene que para toda n

$$\int_H e^{i\sum_{j=1}^{n} u_j\langle e_j, x\rangle} \mu(dx) = \int_H e^{i\langle \sum_{j=1}^{n} u_j e_j, x\rangle} \mu(dx)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left\| \sum_{j=1}^{n} u_j e_j \right\|^2} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} u_j^2} = \prod_{j=1}^{n} \int_H e^{iu_j\langle e_j, x\rangle} \mu(dx),$$

por lo que las variables aleatorias $\langle e_j, x\rangle$, $j = 1, \ldots$, son Gaussianas estándar independientes en $(H, \mathcal{B}(H), \mu)$. Entonces, por la ley de los grandes números,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x\rangle^2 \overset{\mu\text{-c.d.}}{=} E\langle e_1, \cdot\rangle^2 = 1$$

y, así

$$\sum_{j=1}^{n} \langle e_j, \cdot\rangle^2 \underset{n\to\infty}{\to} \infty \quad \mu\text{-c.d.},$$

pero por Parseval

$$\sum_{j=1}^{n} <e_j,\cdot>^2 \underset{n\to\infty}{\to} \|\cdot\|^2 < \infty .$$

Nuevamente una contradicción.

Puesto que $<e_j,x>$ son las coordenadas de x, las contradicciones anteriores sugieren que el soporte de μ debe ser más amplio que H, y que $\mu(H) = 0$.

Si tratamos de definir la medida Gaussiana estándar en H como una medida que cumple otras propiedades de la medida de Gauss estándar sobre $\mathbb{R}^d$, por ejemplo invarianza bajo rotaciones, se llega también a contradicciones.

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para la existencia de una medida sobre H cuya transformada de Fourier está dada por $e^{-1/2\,\|Ay\|^2}$.

<u>TEOREMA</u> 1. *Sea* H *un espacio de Hilbert separable. La función* $e^{-1/2\,\|Ay\|^2}$ *en* H *es la tansformada de Fourier de una medida finita si y solo si* $A:H\to H$ *es un operador de Hilbert-Schmidt* (Apéndice).

Si H es de dimensión infinita, el operador identidad no es de Hilbert-Schmidt, pues todos sus valores propios son iguales a 1, por lo que en H no existe una medida μ con transformada de Fourier $e^{-1/2\|y\|^2}$.

2.2. Variables Aleatorias en $S(\mathbb{R}^d)$.

(Referencias: Gelfand-Vilenkin [12], Itô [24])

Consideremos el espacio de las distribuciones temperadas de Schwartz $S'(\mathbb{R}^d)$, con la topología fuerte, y denotemos por $\mathcal{B}(S')$ a la σ-álgebra de Borel de $S'(\mathbb{R}^d)$.

Sea (Ω,F,P) un espacio de probabilidad. De acuerdo a la Definición 1, una variable aleatoria con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ es un mapeo de Ω en $S'(\mathbb{R}^d)$ tal que $X^{-1}(B) \in F$ para toda $B \in \mathcal{B}(S')$. Esto es, a cada $\omega \in \Omega$ se le asocia una funcional lineal continua $X(\omega) = \{<X,\phi>(\omega),\ \phi \in S(\mathbb{R}^d)\}$.

Observación.

En algunos textos [12] a las variables aleatorias en $S'(\mathbb{R}^d)$ se les llama variables aleatorias generalizadas si $d = 1$, y campos aleatorios generalizados si $d > 1$; y se definen como un sistema de variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad (Ω,F,P):

$$\{<X,\phi>(\omega),\ \phi \in S(\mathbb{R}^d)\}\ ,$$

con espacio de parámetros $S(\mathbb{R}^d)$, tales que $<X,\phi>(\omega)$ es continua y lineal en ϕ.

En general, si se consideran otros espacios de funcionales lineales continuas, la Definición 1 y la anterior no son necesariamente equivalentes, pero para $S'(\mathbb{R}^d)$ sí lo son.

DEFINICION 5. *Sea* $X = \{<X,\phi>,\ \phi \in S(\mathbb{R}^d)\}$ *una variable aleatoria* *con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$ *definida sobre* (Ω,F,P) . *La función con valores complejos definida sobre* $S(\mathbb{R}^d)$ *por*

$$C_X(\phi) = E\{e^{i<X,\phi>}\}, \quad \phi \in S(\mathbb{R}^d).$$

se llama la funcional característica de X.

TEOREMA 2. *Sea* X *una variable aleatoria con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$. *Entonces* $C(\phi) = C_X(\phi)$ *satisface las siguientes propiedades:*

(C.1) $C(\phi)$ *es positiva definida, esto es,*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j \bar{a}_k C(\phi_j - \phi_k) \geq 0, \qquad n \in \mathbb{N},\ a_j \in \mathbb{C},\ \phi_j \in S(\mathbb{R}^d)$$

(C.2) $C(0) = 1$.

(C.3) $C(\phi)$ *es continua en* $\phi = 0$.

DEFINICION 6. *Sea* μ *una medida de probabilidad sobre* $(S'(\mathbb{R}^d), B(S'))$.

$$C_\mu(\phi) = \int_{S'(\mathbb{R}^d)} e^{i<x,\phi>}\mu(dx),\ \phi \in S(\mathbb{R}^d) \qquad (14)$$

se llama la funcional característica de μ.

Una funcional con valores complejos $C(\phi)$, $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, se llama una funcional característica sobre $S(\mathbb{R}^d)$, si $C(\phi) = C_\mu(\phi)$ para alguna μ.

Obsérvese que si X es una variable aleatoria con valores en

$S'(\mathbb{R}^d)$ y P es su distribución, entonces

$$C_X = C_P .$$

<u>TEOREMA</u> 3. *La correspondencia* $\mu \to C_\mu$ *es* 1-1, *esto es, si* $C_\mu = C_\nu$, *entonces* $\mu = \nu$.

El siguiente teorema es una generalización del Teorema de Bochner.

<u>TEOREMA</u> 4 (Bochner-Minlos). *Una función con valores complejos* $C(\phi)$, $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, *es una funcional característica si* $C(\phi)$ *satisface las condiciones* (C.1), (C.2) *y* (C.3) *del Teorema* 2.

Consideremos la terna de Gelfand

$$S(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \subset S'(\mathbb{R}^d).$$

Obsérvese que si $f \in L^2$, $<f,\phi>$ es el producto interior en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Para $S'(\mathbb{R}^d)$ el problema de la existencia de una medida Gaussiana estándar puede plantearse de la siguiente manera: ¿Existe una medida Gaussiana μ sobre $S'(\mathbb{R}^d)$ tal que su funcional característica está dada por

$$C_\mu(\phi) = e^{-1/2\,\|\phi\|^2}, \qquad \phi \in S(\mathbb{R}^d)\,?$$

El Teorema de Bochner-Minlos asegura la existencia de tal medida, y ésta es llamada medida de ruido blanco Gaussiana. Se tiene $\mu(L^2(\mathbb{R}^d)) = 0$, y existe n tal que $\mu(S_n'(\mathbb{R}^d)) = 1$ (para $d = 1$, $n = 1$).

2.2.1. Operaciones con Variables Aleatorias en $S'(\mathbb{R}^d)$.

(Referencias: Gelfand-Vilenkin [12])

Las operaciones con variables aleatorias en $S'(\mathbb{R}^d)$ son definidas de manera análoga a las que se definen para funciones generalizadas.

Sean (Ω,F,P) un espacio de probabilidad y X_1, X_2 variables aleatorias sobre Ω con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$. Entonces la variable aleatoria $\alpha X_1 + \beta X_2$ en $S'(\mathbb{R}^d)$ está definida por

$$(\alpha X_1 + \beta X_2)(\omega) \equiv \{\alpha<X_1,\phi>(\omega) + \beta<X_2,\phi>(\omega),\ \phi \in S(\mathbb{R}^d)\} .$$

La derivada X' de una variable aleatoria en $S'(\mathbb{R})$ está definida por

$$X'(\omega) = \{-<X,\phi'>(\omega),\ \phi \in S(\mathbb{R})\}$$

donde ϕ' es la derivada de ϕ.

Nótese que mientras la derivada de un proceso estocástico ordinario puede no ser un proceso del mismo tipo, la derivada de una variable aleatoria en $S'(\mathbb{R})$ siempre existe y es una variable aleatoria en $S'(\mathbb{R})$. En particular, como veremos en 2.3, la derivada del proceso de Wiener no es un proceso ordinario, pero sí es una variable aleatoria en $S'(\mathbb{R})$.

2.2.2. Momentos de Variables Aleatorias en $S'(\mathbb{R}^d)$.

Si X es una variable aleatoria en $S'(\mathbb{R}^d)$, a cada $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ le corresponde la variable aleatoria real $\langle X,\phi\rangle$. Supongamos que cada una de las variables aleatorias $\langle X,\phi\rangle$ tiene media $m(\phi)$, la cual es continua en ϕ. Entonces $m(\phi)$ es una funcional lineal continua sobre $S(\mathbf{R}^d)$ y la llamaremos la media de la variable aleatoria X. Si la media de la variable aleatoria $\langle X,\phi\rangle\langle X,\psi\rangle$ existe para toda ϕ y ψ, y es continua en ambas, llamaremos a dicha media la funcional de covarianza de X, y la denotaremos por $K(\phi,\psi)$. Por la linealidad de la función $\langle X,\phi\rangle$ se sigue que $K(\phi,\psi)$ es una funcional bilineal sobre $S(\mathbf{R}^d)\times S(\mathbf{R}^d)$. Ya que la variable aleatoria $\langle X,\phi\rangle^2$ es positiva, $K(\phi,\psi)$ también lo es. Por lo tanto, la funcional de covarianza es positiva definida.

2.3. Variables Aleatorias Gaussianas en $S'(\mathbf{R}^d)$.

(Referencias: Gelfand-Vilenkin [12], Hida [18]).

DEFINICION 7. *Sea* X *una variable aleatoria con valores en* $S'(\mathbf{R}^d)$. *Decimos que* X *es Gaussiana si su funcional característica está dada por*

$$C(\phi) = \exp\left[im(\phi) - \tfrac{1}{2}K(\phi,\phi)\right],\ \phi\in S(\mathbf{R}^d), \tag{15}$$

donde m *es una funcional lineal continua sobre* $S(\mathbf{R}^d)$ *y* $K(\phi,\psi)$ *es una forma bilineal positiva definida sobre* $S(\mathbf{R}^d)\times S(\mathbf{R}^d)$. *En este caso,* m *y* K *son las funcionales de media y de covarianza de* X, *respectivamente.*

Obsérvese que el ruido blanco, cuya funcional característica está dada por $C_\mu(\phi) = e^{-1/2\|\phi\|^2}$, $\phi\in S(\mathbf{R}^d)$, es una medida Gaussiana con media 0 y funcional de covarianza

$$K(\phi,\psi) = \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \delta(x-y)\phi(x)\psi(y)dxdy,$$

donde $\delta(x-y)$ es la delta de Dirac en $\mathbf{R}^d$.

Sea X una variable aleatoria Gaussiana en $S'(\mathbf{R}^d)$ con media m y covarianza K y consideremos una combinación lineal finita de las variables aleatorias $<X,\phi_j>$, $j = 1,\ldots,n$, esto es

$$Y = \sum_{j=1}^{n} a_j<X,\phi_j>, \quad a_j \in \mathbf{R}, \; j = 1,\ldots,n. \tag{16}$$

Es fácil ver que Y es una variable aleatoria Gaussiana con media $m(\sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j)$ y varianza $K(\sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j, \sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j)$. En efecto, denotando por μ a la distribución de X, la función característica de Y está dada por

$$\int \exp\left[it \sum_{j=1}^{n} a_j<x,\phi_j>\right] d\mu(x) =$$

$$= \int \exp\left[i<x, \sum_{j=1}^{n} ta_j\phi_j>\right] d\mu(x)$$

$$= \exp\left[im(\sum_{j=1}^{n} ta_j\phi_j) - \frac{1}{2}K(\sum_{j=1}^{n} ta_j\phi_j, \sum_{j=1}^{n} ta_j\phi_j)\right]$$

$$= \exp\left[itm(\sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j) - \frac{1}{2}t^2K(\sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j, \sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j)\right], t \in \mathbf{R}. \tag{17}$$

Por lo tanto Y es una variable aleatoria Gaussiana con media $m(\sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j)$ y varianza $K(\sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j, \sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j)$. Haciendo $t = 1$ en (17) y viendo a las a_j como variables, vemos que la media de $<X,\phi_j>$ es $m(\phi_j)$, pues

$$m(\sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j m(\phi_j),$$

y la covarianza de $<X,\phi_j>$ con $<X,\phi_k>$ es $K(\phi_j,\phi_k)$, ya que

$$K(\sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j, \sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j a_k K(\phi_j,\phi_k).$$

2.3.1. <u>El Ruido Blanco</u>.

Sea $W \equiv \{W_t, t \geq 0\}$ el proceso de Wiener de dimensión 1; entonces

$$W_t \overset{\mathcal{D}}{=} N(0,t) \quad y \quad Cov(W_t,W_s) = \min(s,t),$$

donde $N(0,t)$ es la distribución normal con media cero y varianza t. Este proceso puede considerarse como una variable aleatoria en $S'(\mathbb{R})$ con media 0 y funcional de covarianza

$$K(\phi,\psi) = \int_0^\infty \int_0^\infty \phi(t)\psi(s)\min(s,t)\,dt\,ds,$$

la cual, haciendo algunos cálculos, tiene la forma

$$K(\phi,\psi) = \int_0^\infty \hat{\phi}(t)\hat{\psi}(t)\,dt,$$

donde

$$\hat{\phi}(t) = \int_t^{\infty} \phi(u)du, \quad t \geq 0,$$

y cuya funcional característica está dada por

$$C(\phi) = \exp\{-\frac{1}{2}\int_0^{\infty} |\hat{\phi}(t)|^2 dt\}. \tag{18}$$

Es bien conocido que como proceso estocástico el proceso de Wiener no tiene derivada. Sin embargo, como variable aleatoria en $S'(\mathbf{R})$ podemos considerar su derivada. La funcional característica de la derivada del proceso de Wiener se obtiene sustituyendo en (18) ϕ por $-\phi'$ (véase 2.2.1):

$$C(\phi) = \exp\{-\frac{1}{2}\int_0^{\infty} |\phi'(t)|^2 dt\} = \exp\{-\frac{1}{2}\|\phi\|^2\}, \tag{19}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma en L^2. Así, vemos que la derivada del proceso de Wiener es precisamente el ruido blanco Gaussiano.

Por su media y funcional de covarianza vemos que el ruido blanco es estacionario (invariante bajo traslaciones); por lo tanto podemos considerarlo definido en todo $\mathbf{R}$.

Intuitivamente, puede pensarse que el ruido blanco en dimensión 1 es un proceso Gaussiano cuyas trayectorias no son funciones ordinarias sino funciones generalizadas (elementos de $S'(\mathbf{R}^d)$), las cuales son las derivadas generalizadas de las trayectorias del proceso de Wiener.

Denotaremos al ruido blanco por $\dot{W}$, y formalmente podemos escribir

$$\dot{W}_t = \frac{d}{dt} W_t.$$

Por otra parte, sea $\tilde{W}$ una medida aleatoria signada sobre $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que

$$\tilde{W}(A) \overset{\mathcal{D}}{=} N(0,|A|),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

para A acotado y

$$\text{Cov}(\tilde{W}(A),\tilde{W}(B)) = |A \cap B|,$$

donde $|\cdot|$ es la medida de Lebesgue. Es claro que si A y B son ajenos $\tilde{W}(A)$ y $\tilde{W}(B)$ son independientes.

A continuación calculamos la funcional característica de $\langle\tilde{W},\phi\rangle$, $\phi \in S(\mathbb{R})$. Sean $A_1,\ldots,A_n$ en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ acotados y mutuamente ajenos y sea ϕ definida por

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} a_j I_{A_j}, \qquad a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R};$$

entonces

$$\langle\tilde{W},\phi\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{W}(A_j).$$

Puesto que las A_j son ajenas, las $\tilde{W}(A_j)$ son independientes; luego

$$E\{e^{i\langle\tilde{W},\phi\rangle}\} = \prod_{j=1}^{n} E\, e^{ia_j\tilde{W}(A_j)}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} e^{-1/2\, a_j^2|A_j|} = e^{-1/2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2|A_j|}$$

$$= e^{-1/2 \int_{-\infty}^{\infty}(\phi(t))^2 dt} .$$

Sea $\phi \in S(\mathbf{R}^d)$. Aproximando a ϕ por funciones simples, obtenemos de lo anterior

$$E\{e^{i\langle\tilde{W},\phi\rangle}\} = e^{-1/2 \int_{-\infty}^{\infty}(\phi(t))^2 dt} = e^{-1/2\, \|\phi\|^2} ;$$

esto es, la medida aleatoria $\tilde{W}$ tiene como su distribución al ruido blanco Gaussiano.

Sin embargo, W no es una medida de Radon. En efecto, sea $A = [a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^{(n)}$, donde $\{A_i^{(n)}\}$ es una partición de A en n subintervalos iguales. Por lo tanto, $|A| = n|A_1^{(n)}|$.

La medida de variación de $\tilde{W}$ sobre A es

$$\|\tilde{W}(A)\| = \sup_{\{A_i\}_{i=1}^{k}} \sum_{i=1}^{k} |\tilde{W}(A_i)| ,$$

donde el supremo se toma sobre todas las posibles particiones de A. Basta demostrar (véase 1.1.2)

$$\|\tilde{W}(A)\| = \infty \quad \text{c.s.},$$

para lo cual basta probar que

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{W}(A_i^{(n)})| \xrightarrow[n \to \infty]{c.s.} \infty .$$

Se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{W}(A_i^{(n)})| \overset{\mathcal{D}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |X_i| ,$$

donde $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes con distribución $N(0,|A|)$.

Por la ley fuerte de los grandes números

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i| \xrightarrow[n \to \infty]{c.s.} E|X_1| > 0$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |X_i| \xrightarrow[n \to \infty]{c.s.} \infty ,$$

de donde se sigue el resultado.

Por lo tanto $\tilde{W}$ no es una medida de Radon aleatoria. Hemos dado los argumentos anteriores para $d = 1$. Se tienen los mismos resultados para cualquier valor de d.

La relación entre $\tilde{W}$ y $\dot{W}$ es (formalmente)

$$\tilde{W}(A) = \int_A \dot{W}_t dt, \; A \in B(\mathbb{R}^d).$$

2.4. Procesos Estocásticos con Valores en $S'(\mathbb{R}^d)$.

(Referencias: Mitoma [37], [38])

DEFINICION 8. *Un proceso estocástico* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$ *es una colección de variables aleatorias* X_t *de un espacio de probabilidad completo* (Ω, F, P) *en* $(S'(\mathbb{R}^d), B(S'(\mathbb{R}^d))$.

DEFINICION 9. *Un proceso estocástico* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$ *se dice que es Gaussiano si la familia de variables aleatorias reales* $\{\langle X_t, \phi\rangle;\ t \geq 0, \phi \in S(\mathbb{R}^d)\}$ *forma un sistema Gaussiano, es decir, si para toda colección finita* $t_1, \ldots, t_m$ *en* $[0,\infty)$ *y* $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m \in S(\mathbb{R}^d)$, *el vector aleatorio*

$$(\langle X_{t_1}, \phi_1\rangle, \ldots, \langle X_{t_m}, \phi_m\rangle)$$

tiene distribución Gaussiana en $\mathbb{R}^m$.

Dos procesos estocásticos $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$, $Y \equiv \{Y_t, t \geq 0\}$ definidos sobre el mismo espacio de probabilidad con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ se dice que son versiones uno del otro si

$$P(X_t = Y_t) = 1 \quad \text{para toda} \quad t \geq 0.$$

Obsérvese que es la misma definición que en el caso real.

3. Convergencia Débil.

(Referencias: Billingsley [2], Bourbaki [5])

La teoría de la convergencia débil se refiere a la convergencia de variables aleatorias (en el sentido que definiremos más adelante) que toman valores en un espacio topológico. Dada la equivalencia entre medidas de probabilidad y medidas de distribución, los resultados que se presentan a continuación serán enunciados en ambas versiones.

Sea E un espacio topológico y $\mathcal{E}$ la σ-álgebra de Borel de E.

DEFINICION 10. *Si* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* P *son medidas de probabilidad sobre* $(E,\mathcal{E})$ *tales que satisfacen*

$$\int_E f\, dP_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f\, dP \tag{20}$$

para cada función f *real, continua y acotada sobre* E, *diremos que* P_n *converge débilmente a* P *y lo denotaremos por* $P_n \Rightarrow P$.

DEFINICION 10'. *Una familia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aleatorias que toman valores en* $(E,\mathcal{E})$, *diremos que converge en distribución a la variable aleatoria* X, *y escribiremos*

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X\ ,$$

si las distribuciones P_n *de las variables aleatorias* X_n *convergen débilmente a la distribución* P *de la variable aleatoria* X, *esto es, si* $P_n \Rightarrow P$.

TEOREMA 5. *Sea* E *un espacio topológico completamente regular**, *y* P, Q *dos medidas de probabilidad sobre* $(E,\mathcal{E})$. *Si*

$$\int_E f\, dP = \int_E f\, dQ$$

para cada función real continua y acotada f *sobre* E, *entonces*

$$P = Q.$$

Obsérvese que para medidas de probabilidad en un espacio topológico completamente regular, si $P_n \Rightarrow P$ el teorema 5 asegura la unicidad del límite P.

TEOREMA 6. *Sean* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* P *medidas de probabilidad sobre* $(E,\mathcal{E})$. *Entonces* $P_n \Rightarrow P$ *si y sólo si cada subsucesión* $\{P_{n'}\}_{n'}$ *contiene una subsucesión* $\{P_{n''}\}_{n''}$ *tal que* $P_{n''} \Rightarrow P$.

Sean E y E_1 dos espacios topológicos completamente regulares con σ-álgebras de Borel $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_1$ respectivamente. Entonces si h es un mapeo medible de E en E_1, cada medida de probabilidad P sobre $(E,\mathcal{E})$ induce sobre $(E_1,\mathcal{E}_1)$ una medida de probabilidad única, definida por Ph^{-1}, donde

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A) \qquad \text{para} \qquad A \in \mathcal{E}_1 .$$

---

* Se dice que E es completamente regular si y sólo si para cada $x \in E$ y cada vecindad U de x existe una función continua $f: E \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(E \setminus U) = 1$.

Si h es una función continua, puesto que $f(h(x))$ está acotada y es continua sobre E siempre que $f(y)$ sea acotada y continua sobre E_1, si $P_n \Rightarrow P$, entonces

$$\int f(h(x))P_n(dx) \to \int f(h(x))P(dx).$$

Transformando las integrales obtenemos

$$\int f(y)P_nh^{-1}(dy) \to \int f(y)Ph^{-1}(dy),$$

por lo tanto $P_nh^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$. Esto es, si $P_n \Rightarrow P$ entonces $P_nh^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$ para h continua de E en E_1.

Esta hipótesis de continuidad puede ser debilitada, como se muestra en el Teorema 7.

Supongamos que h es medible, y sea D_h el conjunto de discontinuidades de h. Entonces $D_h \in E$.

<u>TEOREMA</u> 7. *Si* $P_n \Rightarrow P$ *y* $P(D_h) = 0$, *entonces*

$$P_nh^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}.$$

En las siguientes secciones se dan condiciones para la convergencia débil de variables aleatorias con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ y de procesos estocásticos con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$, continuos por la derecha con límites por la izquierda.

3.1. Convergencia Débil en $S'(\mathbb{R}^d)$.

(Referencias: Boulicaut [4])

Si μ es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, la función característica de μ está dada por:

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<t,x>} d\mu(x), \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

donde $<\cdot,\cdot>$ denota el producto interior en $\mathbb{R}^d$. En este caso, si μ_n, μ son medidas de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ con funciones características $\hat{\mu}_n$, $\hat{\mu}$, respectivamente, el teorema de continuidad de Lévy nos da una condición necesaria y suficiente para la convergencia débil de μ_n a μ.

TEOREMA 8 (Lévy). *Sean* $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* μ *medidas de probabilidad sobre* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. *Una condición necesaria y suficiente para* $\mu_n \Rightarrow \mu$ *es*

$$\hat{\mu}_n(t) \to \hat{\mu}(t) \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

donde $\hat{\mu}_n$ *y* $\hat{\mu}$ *son las funciones características de* μ_n *y* μ *respectivamente.*

El siguiente teorema es una generalización del teorema de continuidad de Lévy para variables aleatorias con valores en E', el dual de un espacio E de Hilbert contable nuclear (Apéndice).

TEOREMA 9 [4]. *Sean* μ_n, μ *medidas de probabilidad sobre* E', *donde* E' *es el dual fuerte de un espacio de Hilbert contable nuclear, y* $\hat{\mu}_n$ $\hat{\mu}$ *las funcionales características de* μ_n *y* μ *respectivamente. Entonces una condición necesaria y suficiente para* $\mu_n \Rightarrow \mu$ *es*

$$\hat{\mu}_n(\phi) \to \hat{\mu}(\phi) \quad \textit{para toda} \quad \phi \in E.$$

Puesto que $S(\mathbf{R}^d)$ es un espacio de Hilbert contable nuclear, el espacio $S'(\mathbf{R}^d)$ con la topología fuerte cumple con las condiciones del Teorema 9.

3.2. Convergencia Débil en $D([0,\infty),S'(\mathbf{R}^d))$.

(Referencias: Mitoma [39])

Sea $D_{S'}[\infty] \equiv D([0,\infty),S'(\mathbf{R}^d))$ el espacio de todos los mapeos del intervalo $[0,\infty)$ en $S'(\mathbf{R}^d)$, continuos por la derecha con límites por la izquierda en la topología fuerte de $S'(\mathbf{R}^d)$. En este apartado daremos condiciones para la convergencia débil de procesos estocásticos $X \equiv \{X_t, t \in [0,\infty)\}$ cuyas trayectorias muestrales pertenecen a $D_{S'}[\infty]$. Dado que estas condiciones dependen de la topología en $D_{S'}[\infty]$, en la sección 3.2.1 la definiremos, y en la sección 3.2.2 daremos las condiciones de convergencia.

3.2.1. Topología.

Para definir la topología en $D_{S'}[\infty]$ requerimos de algunas definiciones preliminares que presentamos a continuación.

Dado un espacio topológico E, denotaremos por $D_E \equiv D([0,1],E)$ al espacio de todos los mapeos del intervalo $[0,1]$ en E, continuos por la derecha, con límites por la izquierda.

Sea Θ la clase de todas las funciones continuas, estrictamente crecientes, del intervalo $[0,1]$ sobre sí mismo.

En $D_{\mathbf{R}}$ definimos la métrica

$$d(x,y) = \inf_{\theta\in\Theta} \{ \sup_{t\in[0,1]} |x(t)-y(\theta(t))| + \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ s\neq t}} |\log \frac{\theta(t)-\theta(s)}{t-s}| \}. \quad (21)$$

El espacio $D_{\mathbf{R}}$ con la topología inducida por $d(x,y)$ es un espacio métrico, separable y completo [2]. Esta es la llamada topología de Skorohod.

Análogamente, en $D_{S'_p}$ con la topología $\|\cdot\|_{-p}$ sobre S'_p definimos la topología de Skorohod como la topología inducida por la métrica

$$d_p(x,y) = \inf_{\theta\in\Theta} \{ \sup_{t\in[0,1]} \|x(t)-y(\theta(t))\|_{-p} + \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ s\neq t}} |\log \frac{\theta(t)-\theta(s)}{t-s}| \} \quad (22)$$

Con esta topología $D_{S'_p}$ es un espacio métrico, completo y separable.

Sea $\{\|\cdot\|_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ la familia de seminormas que definen la topología fuerte en $S'(\mathbf{R}^d)$, y consideremos las siguientes semimétricas:

$$d_\lambda(x,y) = \inf_{\theta\in\Theta} \{ \sup_{t\in[0,1]} \|x(t)-y(\theta(t))\|_\lambda + \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ s\neq t}} |\log \frac{\theta(t)-\theta(s)}{t-s}| \}, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Definimos sobre $D_{S'}$ la topología del límite proyectivo de

$\{d_\lambda(\cdot,\cdot), \lambda \in \Lambda\}$. Con esta topología $D_{S'}$ es un espacio topológico completamente regular.

Observación. $D_{S'} = \bigcup_{p=0}^{\infty} D_{S'_p}$, donde esta igualdad debe entenderse como igualdad de conjuntos.

Sea $D_{S'}[\infty] = D_{S'}([0,\infty), S'(\mathbb{R}^d))$, $(D_{\mathbb{R}}[\infty] = D([0,\infty), \mathbb{R})$, $D_{S'_p}[\infty] = D([0,\infty), S'_p(\mathbb{R}^d))$ el espacio de todos los mapeos del intervalo $[0,\infty)$ en $S'(\mathbb{R}^d)$ (en $\mathbb{R}$ y $S'_p(\mathbb{R}^d)$ respectivamente), continuos por la derecha con límites por la izquierda en la topología fuerte de $S'(\mathbb{R}^d)$ (en la topología de $\mathbb{R}$ y $S'_p(\mathbb{R}^d)$ respectivamente).

En forma semejante a Lindvall [31] se utilizan las topologías en $D_{S'}$, $D_{\mathbb{R}}$ y $D_{S'_p}$ para introducir topologías en $D_{S'}[\infty]$, $D_{\mathbb{R}}[\infty]$ y $D_{S'_p}[\infty]$. Con esta topología $D_{S'}[\infty]$ es un espacio topológico completamente regular y $D_{\mathbb{R}}[\infty]$ y $D_{S'_p}[\infty]$ son espacios métricos separables y completos.

Observación. $D_{S'}[\infty] = \bigcup_{p=0}^{\infty} D_{S'_p}[\infty]$, donde la igualdad debe entenderse como igualdad de conjuntos.

3.2.2. Convergencia Débil.

i) Distribuciones Finito-Dimensionales.

Sea x un mapeo del intervalo $[0,1]$ en $S'(\mathbb{R}^d)$. Supongamos que x_t converge a x_s cuando $t \to s$. Entonces, por definición de la topología fuerte, para toda $\lambda \in \Lambda$

$$\|x_t - x_s\|_\lambda \to 0 \text{ cuando } t \to s.$$

En particular, si $\phi \in S(\mathbf{R}^d)$, $\lambda = \{\phi\} \in \Lambda$ y

$$\|x_t - x_s\|_{\{\phi\}} = \sup_{\phi \in \{\phi\}} |<x_t - x_s, \phi>| = |<x_t, \phi> - <x_s, \phi>| ,$$

esto es,

$$|<x_t, \phi> - <x_s, \phi>| \to 0 \text{ cuando } t \to s.$$

Así, para cada $\phi \in S(\mathbf{R}^d)$ denotamos por Π_ϕ el mapeo de $D_{S'}$ en $D_{\mathbf{R}}$ definido por

$$\Pi_\phi : x \to <x, \phi> .$$

<u>PROPOSICION</u> 1. *El mapeo* Π_ϕ *es continuo.*

<u>DEMOSTRACION</u>. Supongamos que $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un filtro en $D_{S'}$ y que $x_\alpha \to x$; entonces, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\lim_{\alpha \in A} d_\lambda(x_\alpha, x) = 0 .$$

Sea $\lambda = \{\phi\}, \phi \in S(\mathbf{R}^d)$. Entonces $\lambda \in \Lambda$ y

$$d_\lambda(x_\alpha, x) = d(<x_\alpha, \phi>, <x, \phi>),$$

donde d es la distancia definida por (21). Por lo tanto,

$$\lim_{\alpha \in A} \langle x_\alpha, \phi \rangle = \langle x, \phi \rangle .$$

Para elementos $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m \in S(\mathbb{R}^d)$ y puntos $t_1, t_2, \ldots, t_m$ en $[0,1]$ sea $\Pi^{t_1,\ldots,t_m}_{\phi_1,\ldots,\phi_m}$ el mapeo de $D_{S'}$ en $\mathbb{R}^m$ definido por

$$\Pi^{t_1,\ldots,t_m}_{\phi_1,\ldots,\phi_m} : x \in D_{S'} \to (\langle x_{t_1}, \phi_1 \rangle, \langle x_{t_2}, \phi_2 \rangle, \ldots, \langle x_{t_m}, \phi_m \rangle) \in \mathbb{R}^m.$$

Obsérvese que $\Pi^{t_1,\ldots,t_m}_{\phi_1,\ldots,\phi_m} = \Pi_{t_1,\ldots,t_m} \circ \Pi_{\phi_1,\ldots,\phi_m}$, donde

$$\Pi_{\phi_1,\ldots,\phi_m} : x \in D_{S'} \to (\langle x, \phi_1 \rangle, \ldots, \langle x, \phi_m \rangle) \in (D_{\mathbb{R}})^m$$

y

$$\Pi_{t_1,\ldots,t_m} : (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) \in (D_{\mathbb{R}})^m \to (x^{(1)}_{t_1}, \ldots, x^{(m)}_{t_m}) \in \mathbb{R}^m .$$

<u>PROPOSICION</u> 2. *Sea* $\Phi = \{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *un conjunto denso numerable en* $S(\mathbb{R}^d)$. *Entonces para cada medida de probabilidad* P *sobre* $D_{S'}$ *existe un conjunto denso* T_P, $T_P \subset [0,1]$, *tal que para* $\phi_1, \ldots, \phi_m \in \Phi$, *y* $t_1, \ldots, t_m \in T_P$, *el mapeo* $\Pi^{t_1,\ldots,t_m}_{\phi_1,\ldots,\phi_m}$ *es continuo excepto en un conjunto de medida* P *igual a cero.*

<u>DEMOSTRACION</u>. El mapeo $\Pi^{t_1,\ldots,t_m}_{\phi_1,\ldots,\phi_m}$ es continuo si $\Pi^{t_i}_{\phi_i}$ es continuo para cada i, y puesto que Π_ϕ es continuo (Proposición 1), basta analizar la continuidad de Π_{t_i}.

El mapeo Π_t es continuo en $x \in D_{\mathbb{R}}$ si y sólo si x es continuo en t. Además, para una medida de probabilidad P sobre $D_{\mathbb{R}}$ el conjunto de las $t \in [0,1]$ tales que Π_t es continuo excepto en un conjunto de medida P igual a cero es denso [2]. Dada $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, para una medida de probabilidad P sobre $D_{S'}$ sea T_P^ϕ el conjunto de las $t \in [0,1]$ para las cuales $\Pi_t : \Pi_\phi D_{S'} \to \mathbb{R}$ es continuo excepto en un conjunto de medida P igual a cero. Esto es, $t \in T_P^\phi$ si y sólo si $P(J_t^\phi) = 0$, donde

$$J_t^\phi = \{x \in D_{S'} : \langle x_t, \phi\rangle \neq \langle x_{t-}, \phi\rangle\}.$$

Sea

$$T_P = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} T_P^{\phi_i}, \quad \Phi = \{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Obviamente T_P es denso, y para $t_1, \ldots, t_m \in T_P$ y $\phi_1, \ldots, \phi_m \in \Phi$, el mapeo $\Pi_{\phi_1, \ldots, \phi_m}^{t_1, \ldots, t_m}$ es continuo excepto en un conjunto de medida P igual a cero.

Además, el mapeo $\Pi_{\phi_1, \ldots, \phi_m}^{t_1, \ldots, t_m}$ es medible para toda $t_1, \ldots, t_m \in [0,1]$, y $\phi_1, \ldots, \phi_m$ en $S(\mathbb{R}^d)$, pues Π_ϕ es continuo y Π_t medible [2].

Denotaremos por $B(D_{S'})$ a la σ-álgebra de los conjuntos de Borel en $D_{S'}$.

<u>PROPOSICION</u> 3. *Sea* $B(D_{S'})$ *la colección de todos los subconjuntos de la forma*

$$\{x \in D_{S'} : (\langle x_{t_1}, \phi_1\rangle, \ldots, \langle x_{t_m}, \phi_m\rangle) \in A\}$$

con

$$A \in B(\mathbb{R}^m), \ t_i \in T, \ \phi_i \in \Phi \quad y \quad m \in \mathbb{N},$$

(llamados cilindros), donde Φ *es un conjunto numerable denso en* $S(\mathbf{R}^d)$, T *un conjunto denso en* $[0,1]$ *y* $1 \in T$. *Entonces la mínima* σ*-álgebra que contiene a* $B(D_{S'})$ *coincide con* $B(D_{S'})$.

DEMOSTRACION. Como $S(\mathbf{R}^d)$ es Fréchet nuclear, por la Proposición 5.3 de [27],

$$B(D_{S'}) = \sigma\{\Pi^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(B(S'(\mathbf{R}^d)))^{\otimes m} : t_1,\dots,t_m \in [0,1],\ m \in \mathbf{N}\} =$$

$$= \sigma\{\Pi^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(H_m) : t_1,\dots,t_m \in [0,1],\ m \in \mathbf{N}\},$$

donde H_m es una clase que genera a $(B(S'(\mathbf{R}^d)))^{\otimes m}$. Se puede tomar $H_m = H^m$, donde H es la familia de todos los conjuntos de la forma

$$\{\xi \in S'(\mathbf{R}^d) : \langle\xi,\phi\rangle \leq a,\ a \in \mathbf{R},\ \phi \in S(\mathbf{R}^d)\},$$

debido a que la σ-álgebra de Borel fuerte de $S'(\mathbf{R}^d)$ coincide con su σ-álgebra de Kolmogorov, pues $S(\mathbf{R}^d)$ es Hilbert contable [24]. Basta tomar ϕ en un subconjunto numerable denso Φ de $S(\mathbf{R}^d)$, por la continuidad de $\xi \in S'(\mathbf{R}^d)$ sobre $S(\mathbf{R}^d)$, y basta tomar $t_1, t_2, \dots$ en un subconjunto numerable denso T de $[0,1]$ que contenga a 1, porque $\langle x,\phi\rangle \in D_{\mathbf{R}}$ para cada $x \in D_{S'}$, y $\phi \in S(\mathbf{R}^d)$.

Análogamente tenemos las siguientes proposiciones para $D_{S'}[\infty]$.

PROPOSICION 1'. *Sea* Π_ϕ *el mapeo de* $D_{S'}[\infty]$ *en* $D_{\mathbf{R}}[\infty]$ *definido por*

$$\Pi_\phi : x \to \langle x,\phi\rangle ;$$

entonces Π_ϕ *es continuo*.

PROPOSICION 2'. *Sea* $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *un conjunto denso numerable en* $S(\mathbb{R}^d)$. *Entonces, para cada medida de probabilidad* P *sobre* $D_{S'}[\infty]$ *existe un conjunto denso* T_P, $T_P \subset [0,\infty)$, *tal que para* $\phi_1,\ldots,\phi_m \in \Phi$ *y* $t_1,\ldots,t_m \in T_P$, *el mapeo* $\Pi_{\phi_1,\ldots,\phi_m}^{t_1,\ldots,t_m}$ *es continuo excepto en un conjunto de medida* P *igual a* 0, *donde*

$$\Pi_{\phi_1,\ldots,\phi_m}^{t_1,\ldots,t_m} : x \in D_{S'}[\infty] \to (\langle x_{t_1},\phi_1\rangle,\ldots,\langle x_{t_m},\phi_m\rangle) \in \mathbb{R}^m .$$

Denotaremos por $B(D_{S'}[\infty])$ a la σ-álgebra de los conjuntos de Borel en $D_{S'}[\infty]$.

PROPOSICION 3'. *Sea* $\mathcal{B}(D_{S'}[\infty])$ *la colección de todos los subconjuntos de la forma*

$$\{x \in D_{S'}[\infty] : (\langle x_{t_1},\phi_1\rangle,\ldots,\langle x_{t_m},\phi_m\rangle) \in A\},\ A \in B(\mathbb{R}^m),\ t_i \in T,\ \phi_i \in \Phi,\ m \in \mathbb{N},$$

donde Φ *es un conjunto numerable denso en* $S(\mathbb{R}^d)$ *y* T *es denso en* $[0,\infty)$. *Entonces la mínima σ-álgebra que contiene a* $\mathcal{B}(D_{S'}[\infty])$ *coincide con* $B(D_{S'}[\infty])$.

DEFINICION 11. *Sea* P *una medida de probabilidad sobre* $D_{S'}[\infty]$. *Llamaremos a las medidas*

$$\{P(\Pi_{\phi_1,\ldots,\phi_m}^{t_1,\ldots,t_m})^{-1},\ t_1,\ldots,t_m \in [0,\infty),\ \phi_1,\ldots,\phi_m \in S(\mathbb{R}^d),\ m \in \mathbb{N}\},$$

las distribuciones finito-dimensionales de P.

Como consecuencia de la Proposición 3', tenemos:

PROPOSICION 4. *Si* P *y* Q *son medidas de probabilidad sobre* $D_{S'}[\infty]$ *tales que sus distribuciones finito-dimensionales coinciden tomando a* t *en* $T_P \cap T_Q$ *y a* ϕ *en un conjunto denso* Φ *en* $S(\mathbb{R}^d)$, *entonces* $P = Q$.

DEFINICION 11'. *Sea* $X = \{X_t, t \in [0,\infty)\}$ *un proceso estocástico con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$, *cuyas trayectorias muestrales pertenecen a* $D_{S'}[\infty]$. *Para cualesquiera* $\phi_1,\ldots,\phi_m \in S(\mathbb{R}^d)$ *y* $t_1,\ldots,t_n \in [0,\infty)$, *consideremos el vector aleatorio* $(\langle x_{t_1},\phi_1\rangle,\ldots,\langle x_{t_m},\phi_m\rangle)$ *en* $\mathbb{R}^m$. *Las distribuciones finito-dimensionales de* X *son las distribuciones de estos vectores aleatorios.*

PROPOSICION 4'. *Sean* $X \equiv \{X_t, t \in [0,\infty)\}$ *y* $Y = \{Y_t, t \in [0,\infty)\}$ *dos procesos estocásticos cuyas trayectorias muestrales están en* $D_{S'}[\infty]$. *Si las distribuciones finito-dimensionales de* X *y* Y *coinciden, entonces* X *y* Y *tienen la misma distribución.*

ii) Convergencia Débil de Procesos.

PROPOSICION 5. *Sean* $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* X *procesos estocásticos con trayectorias en* $D_{S'}[\infty]$ *tales que* $X^n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$. *Entonces, si* $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es un conjunto denso en* $S(\mathbb{R}^d)$ *y* P *es la distribución de* X, *existe un conjunto denso* T_P, $T_P \subset [0,\infty)$, *tal que si* $\phi_1,\ldots,\phi_m \in \Phi$ *y* $t_1,\ldots,t_m \in T_P$,

$$(\langle X^n_{t_1},\phi_1\rangle,\ldots,\langle X^n_{t_m},\phi_m\rangle) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\langle X_{t_1},\phi_1\rangle,\ldots,\langle X_{t_m},\phi_m\rangle)$$

excepto en un conjunto de medida P *igual a cero.*

DEMOSTRACION. Es una consecuencia del Teorema 7 y la Proposición 2'.

Como es bien sabido el recíproco de la proposición anterior en general no es válido [2]. Esto es, la convergencia débil de las distribuciones finito-dimensionales no es una condición suficiente para la convergencia débil. Sin embargo, con una condición adicional, llamada compacidad relativa, se cumple el recíproco.

DEFINICION 12. *Sea* Π *una familia de medidas de probabilidad sobre un espacio topológico completamente regular* $(E,\mathcal{E})$. *Diremos que* Π *es secuencialmente relativamente compacta si cada sucesión de elementos de* Π *contiene una subsucesión débilmente convergente; esto es, si para cada sucesión* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* Π, *existe una subsucesión* $\{P_{n'}\}_{n'}$ *y una medida de probabilidad* Q *(definida sobre* $(E,\mathcal{E})$ *pero no necesariamente un elemento de* Π*) tal que* $P_{n'} \Rightarrow Q$.

Supongamos que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y P son medidas de probabilidad sobre $D_{S'}[\infty]$, que las distribuciones finito-dimensionales de P_n convergen débilmente a las correspondientes de P, y que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacta. Entonces cada subsucesión $\{P_{n'}\}$ contiene una subsucesión $\{P_{n''}\}$ que converge débilmente. Denotemos por Q el límite de $\{P_{n''}\}$. Por la Proposición 2' para ϕ en un conjunto denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y $t_i \in T_P \cap T_Q$, las distribuciones finito-dimensionales de Q deben coincidir con los límites débiles de aquellas de $P_{n''}$, y por lo tanto con las distribuciones finito-dimensionales de P. Pero, por la Proposición 4, P = Q. Así, cada subsucesión $\{P_{n'}\}$ contiene una subsucesión débilmente convergente a P, y por el Teorema 6 tenemos que $P_n \Rightarrow P$. Aún más, sean Φ y T conjuntos densos en $S(\mathbb{R}^d)$ y $[0,\infty)$ respectivamente. Supongamos que $\{P_n\}$ es relativamente compacta y que para cualesquiera $t_1,\dots,t_m$ en T, $\phi_1,\dots,\phi_m$ en Φ y $m \in \mathbb{N}$

$$P_n(\pi^{t_1,\dots,t_m}_{\phi_1,\dots,\phi_m})^{-1} \Rightarrow \mu^{t_1,\dots,t_m}_{\phi_1,\dots,\phi_m},$$

donde $\mu^{t_1,\dots,t_m}_{\phi_1,\dots,\phi_m}$ es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ (no se supone que $\mu^{t_1,\dots,t_m}_{\phi_1,\dots,\phi_m}$ son distribuciones finito-dimensionales de una medida de probabilidad sobre $(D_{S'}[\infty],\mathcal{B}(D_{S'}[\infty]))$). Entonces cada subsucesión $\{P_{n'}\}_{n'}$ contiene una subsucesión $\{P_{n''}\}_{n''}$ débilmente convergente a algún límite. Este límite debe tener a $\mu^{t_1,\dots,t_m}_{\phi_1,\dots,\phi_m}$ como sus distribuciones finito-dimensionales, para $t_1,\dots,t_m$ en T y $\phi_1,\dots,\phi_m$ en Φ. Por lo tanto, el límite es único.

Así, tenemos la siguiente proposición.

<u>PROPOSICION</u> 6. *Sea* $\{P_n\}$ *una sucesión de medidas de probabilidad sobre* $(D_{S'}[\infty],\mathcal{B}_{S'}[\infty])$. *Si* $\{P_n\}$ *es relativamente compacta, y* $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *un conjunto denso en* $S'(\mathbb{R}^d)$, T *un conjunto denso en* $[0,\infty)$, *y para cualesquiera* $\phi_1,\dots,\phi_m$ *en* Φ, $t_1,\dots,t_m$ *en* T, $m \in \mathbb{N}$,

$$P_n(\Pi_{\phi_1,\ldots,\phi_m}^{t_1,\ldots,t_m})^{-1} \Rightarrow \mu_{\phi_1,\ldots,\phi_m}^{t_1,\ldots,t_m},$$

donde $\mu_{\phi_1,\ldots,\phi_m}^{t_1,\ldots,t_m}$ *es una medida de probabilidad sobre* $\mathbb{R}^m$, *entonces existe una única medida de probabilidad* P *sobre* $D_{S'}[\infty]$ *tal que* $P_n \Rightarrow P$.

PROPOSICION 5'. *Sea* $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de procesos estocásticos en* $D_{S'}[\infty]$, $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *un conjunto denso en* $S(\mathbb{R}^d)$ *y* T *un conjunto denso en* $[0,\infty)$. *Si las distribuciones* P^n *de* X^n *forman una familia relativamente compacta y para cualesquiera* $\phi_1,\ldots,\phi_m \in \Phi$, $t_1,\ldots,t_m \in T$, $m\in\mathbb{N}$, *las distribuciones de*

$$(\langle X_{t_1}^n,\phi_1\rangle,\ldots,\langle X_{t_m}^n,\phi_m\rangle)$$

convergen débilmente a una distribución de probabilidad en $\mathbb{R}^m$, *entonces existe un único proceso* X *en* $D_{S'}[\infty]$ *tal que* $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$.

TEOREMA 10. *Sea* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de medidas de probabilidad sobre* $D_{S'}[\infty]$. *Supongamos que para cada* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ *la sucesión* $\{P_n\Pi_\phi^{-1}\}$ *es relativamente compacta en* $D_{\mathbb{R}}[\infty]$. *Entonces la sucesión* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es relativamente compacta en* $D_{S'}[\infty]$.

Obsérvese que estos resultados reducen el problema de la compacidad relativa en $D_{S'}[\infty]$ a la compacidad relativa en $D_{\mathbb{R}}[\infty]$, el cual es un espacio métrico completo y separable.

TEOREMA 10'. *Sea* $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de procesos estocásticos en* $D_{S'}[\infty]$. *Si para cada* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ *la sucesión de distribuciones de* $<X^n,\phi>$ *es relativamente compacta en* $D_{\mathbb{R}}[\infty]$, *entonces la sucesión de distribuciones de* X^n *en* $D_{S'}[\infty]$ *es relativamente compacta en* $D_{S'}[\infty]$.

TEOREMA 11. *Sea* $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de procesos estocásticos en* $D_{S'}[\infty]$, $F^n_{t,\phi} = \sigma\{<X^n_s,\phi>, s \le t\}$, $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *un conjunto denso en* $S(\mathbb{R}^d)$ *y* $T\subset[0,\infty)$, *denso. Entonces, si para cualesquiera* $\phi_1,\ldots,\phi_m \in \Phi$, $t_1,\ldots,t_m \in T$ *y* $m \in \mathbb{N}$, *el vector aleatorio*

$$(<X^n_{t_1},\phi_1>,\ldots,<X^n_{t_m},\phi_m>)$$

converge en distribución a alguna distribución de probabilidad en $\mathbb{R}^m$, *y existe* $\beta > 0$ *tal que para* τ, $\delta>0$, *existen variables aleatorias* $\gamma^\tau_{n,\phi}(\delta)\ge 0$ *tales que*

$$E[|<X^n_{t+\delta},\phi> - <X^n_t,\phi>|^\beta | F^n_{t,\phi}] \le E[\gamma^\tau_{n,\phi}(\delta)|F^n_{t,\phi}], \quad 0 \le t \le \tau, \tag{22}$$

y

$$\lim_{\delta\to 0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ E[\gamma^\tau_{n,\phi}(\delta)] = 0, \tag{23}$$

existe un único proceso X *en* $D_{S'}[\infty]$ *tal que*

$$X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X.$$

DEMOSTRACION. Se sigue del Teorema 10' y de Kurtz [30].

Las condiciones (22) y (23) implican la compacidad relativa de $\{X^n\}$. El siguiente resultado es útil para verificarlas y es de la forma empleada por Holley y Stroock [20].

<u>LEMA</u> 1. *Sea* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *un proceso en* $D_{\mathbb{R}}[\infty]$, *y* $\{F_t\}_{t \geq 0}$ *una filtración tal que* X *está adaptado a* $\{F_t\}$. *Si existen procesos adaptados* $\{\Theta_t^{(1)}, t \geq 0\}$ *y* $\{\Theta_t^{(2)}, t \geq 0\}$ *tales que*

$$M_t = X_t - \int_0^t \Theta_s^{(1)} ds, \quad t \geq 0,$$

es una martingala de cuadrado integrable con proceso creciente (en la descomposición de Doob-Meyer)

$$\int_0^t \Theta_s^{(2)} ds, \quad t \geq 0,$$

entonces, para cada $\tau > 0$ *y* $\delta > 0$ *existe una variable aleatoria* $\gamma_\tau(\delta) \geq 0$ *tal que*

$$E\left[(X_{t+\delta} - X_t)^2 \,|\, F_t\right] \leq E\left[\gamma_\tau(\delta) \,|\, F_t\right], \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Una tal variable aleatoria es

$$\gamma_\tau(\delta) = 2\Big[\delta \sup_{0 \leq t \leq \tau+\delta} \Theta_t^{(2)} + \delta^2 \sup_{0 \leq t \leq \tau+\delta} (\Theta_t^{(1)})^2\Big].$$

(Obsérvese que $\Theta_t^{(2)} \geq 0$*).*

DEMOSTRACION.

$$E[(X_{t+\delta}-X_t)^2|F_t] =$$

$$= E[(X_{t+\delta} - \int_0^{t+\delta}\Theta_s^{(1)}ds - (X_t - \int_0^t\Theta_s^{(1)}ds) + \int_t^{t+\delta}\Theta_s^{(1)}ds)^2|F_t]$$

$$\leq 2E[(M_{t+\delta} - M_t)^2|F_t] + 2E[(\int_t^{t+\delta} 1\cdot\Theta_s^{(1)}ds)^2|F_t]$$

$$\leq 2E[(M_{t+\delta} - M_t)^2|F_t] + 2E[\int_t^{t+\delta} 1\cdot ds \int_t^{t+\delta}|\Theta_s^{(1)}|^2 ds|F_t]$$

$$= 2E[(M_{t+\delta} - M_t)^2|F_t] + 2E[\delta\int_t^{t+\delta}(\Theta_s^{(1)})^2 ds|F_t] . \tag{24}$$

$$E[(M_{t+\delta} - M_t)^2|F_t] = E[M_{t+\delta}^2 - 2M_tM_{t+\delta} + M_t^2|F_t]$$

$$= E[M_{t+\delta}^2|F_t] - 2M_tE[M_{t+\delta}|F_t] + M_t^2$$

$$= E[M_{t+\delta}^2|F_t] - M_t^2$$

$$= E[M_{t+\delta}^2 - M_t^2|F_t]$$

$$= E[M_{t+\delta}^2 - \int_0^{t+\delta}\Theta_s^{(2)}ds - (M_t^2 - \int_0^t\Theta_s^{(2)}ds) + \int_t^{t+\delta}\Theta_s^{(2)}ds|F_t]$$

$$= E\Big[\int_t^{t+\delta} \Theta_s^{(2)} ds \,|\, F_t\Big]. \tag{25}$$

Substituyendo (25) en (24), obtenemos

$$E[(X_{t+\delta} - X_t)^2 | F_t] \leq$$

$$\leq 2E\Big[\int_t^{t+\delta} \Theta_s^{(2)} ds \,|\, F_t\Big] + 2E\Big[\delta\int_t^{t+\delta} (\Theta_s^{(1)})^2 ds \,|\, F_t\Big]$$

$$\leq 2E\Big[\int_t^{t+\delta} \sup_{0\leq s\leq \tau+\delta} \Theta_s^{(2)} ds \,|\, F_t\Big] + 2E\Big[\delta\int_t^{t+\delta} \sup_{0\leq s\leq \tau+\delta} (\Theta_s^{(1)})^2 ds \,|\, F_t\Big]$$

$$= 2E\big[\delta \sup_{0\leq s\leq \tau+\delta} \Theta_s^{(2)} \,|\, F_t\big] + 2E\big[\delta^2 \sup_{0\leq s\leq \tau+\delta} (\Theta_s^{(1)})^2 \,|\, F_t\big].$$

4. Versiones Continuas de Procesos con Valores en $S'(\mathbb{R}^d)$.

(Referencias: Mitoma [37, 38], Yeh [41]).

Sea E un espacio topológico; denotaremos por $C_E[\infty] = C([0,\infty),E)$ al espacio de todos los mapeos continuos del intervalo $[0,\infty)$ en E. En este apartado daremos condiciones bajo las cuales las trayectorias muestales de un proceso estocástico $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ pertenecen a $C_{S'}[\infty]$ ó a $D_{S'}[\infty]$.

TEOREMA 12. *Sea* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *un proceso estocástico con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$ *tal que para cada* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, *el proceso estocástico real*

$\langle X,\phi\rangle \equiv \{\langle X_t,\phi\rangle, t \geq 0\}$ *tiene una versión en* $C_{\mathbb{R}}[\infty]$. *Entonces* X *tiene una versión en* $C_{S'}[\infty]$.

TEOREMA 13. *Sea* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *un proceso estocástico con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$ *tal que para cada* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, *el proceso estocástico real* $\langle X,\phi\rangle$ *tiene una versión en* $D_{\mathbb{R}}[\infty]$. *Entonces* X *tiene una versión en* $D_{S'}[\infty]$.

Sea F_+ el conjunto de todas las funciones positivas localmente acotadas sobre $[0,\infty)$.

TEOREMA 14. *Sea* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *un proceso Gaussiano con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$. *Entonces existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* X *es continuo en la norma* $\|\cdot\|_{-p}$ *casi seguramente si y sólo si existe* f *en* F_+ *tal que*

$$\sup_{T \in \mathbb{R}_+} \frac{V_T(\phi)}{f(T)} < \infty,$$

donde

$$V_T(\phi) = E \sup_{0 \leq t \leq T} \langle X_t,\phi\rangle^2 .$$

Obsérvese que los teoremas anteriores reducen el problema de que las trayectorias muestrales de un proceso estocástico $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ pertenezcan a $D_{S'}[\infty]$ ó a $C_{S'}[\infty]$, al mismo problema pero para procesos reales.

El siguiente teorema nos da condiciones para que las trayectorias muestrales de un proceso estocástico real Gaussiano pertenezcan a $C_{\mathbb{R}}[\infty]$.

TEOREMA 15. *Sea* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *un proceso estocástico Gaussiano real sobre un espacio de probabilidad* (Ω, B, P). *Si para un intervalo* $T \subset \mathbb{R}$ *se satisface*

$$E(X_t) = 0 \quad \textit{para} \quad t \in T,$$

$$\mathrm{Var}(X_{t'} - X_{t''}) \leq B|t' - t''|^{\beta}$$

para $t', t'' \in T, B, \beta > 0$, *entonces el proceso* X *tiene una versión continua casi seguramente en* T. *Si además* X *es separable, entonces* X *mismo es continuo c.s.*

5. Procesos de Markov.

En la sección 5.1 definiremos procesos de Markov para procesos con valores en un espacio métrico, y se darán algunas de sus propiedades. En particular, estos resultados se pueden aplicar a procesos con valores en los espacios $M_T(\mathbb{R}^d)$, y $M_p(\mathbb{R}^d)$ definidos en 1.1.2.

En la sección 5.2 consideraremos procesos Gaussianos con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$; se definirán y darán condiciones para que un proceso tal sea un Proceso de Markov.

5.1. Procesos de Markov en Espacios Polacos.

(Referencia: Kurtz [30]).

Sea $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico sobre un espacio de probabilidad (Ω, F, P), con valores en un espacio métrico (E, E), separable y completo; y sea $\{F_t\}_{t\geq 0}$ una filtración tal que X está adaptado a ella.

Un proceso de Markov es un proceso para el cual un observador con memoria perfecta no es mejor para predecir el futuro que un observador sin memoria; precisando:

DEFINICION 13. *Un proceso estocástico* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *definido sobre* (Ω, F, P) *con valores en* (E, E) *es un proceso de Markov con respecto a una filtración* $\{F_t\}_{t\geq 0}$ *si para toda* $f \in B(E)$ *(el espacio de Banach de las funciones reales, medibles, acotadas sobre* E*) se cumple*

$$E[f(X_{t+s})|F_t] = E[f(X_{t+s})|X_t], \quad s,t \geq 0 . \tag{26}$$

El lado derecho de (26) puede ser tomado como $h(X_t)$ para alguna $h \in B(E)$. En general h dependerá de f, s, t. Si h depende solamente de s y f y no de t, decimos que el proceso es temporalmente homogéneo, y denotamos h por $T(s)f$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned} T(s+u)f(X_t) &= E[f(X_{t+s+u})|F_t] \\ &= E[E[f(X_{t+s+u})|F_{t+s}]|F_t] \\ &= T(s)T(u)f(X_t), \end{aligned} \tag{27}$$

por lo que $\{T(s), s \geq 0\}$ es un semigrupo de operadores lineales sobre $B(E)$, y es fácil ver que son contracciones (i.e. $\|T(s)\| \leq 1$, $s \geq 0$).

Dado un semigrupo de contracciones $\{T(s),\ s \geq 0\}$, definido sobre un subespacio de Banach $L \subset E$, decimos que un proceso de Markov X corresponde a $\{T(s)\}$ si

$$E[f(X_{t+s})|F_t] = T(s)f(X_t), \quad f \in L. \tag{28}$$

Nótese que (28) implica (27), si L es denso en $B(E)$ en la topología de convergencia acotada puntual.

Sea L un subespacio de Banach de $B(E)$ y $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de contracción definido sobre L tal que $T(t)f(x)$ es $B(\mathbb{R}_+) \otimes B(E)$-medible para toda $f \in L$.

Definimos el generador infinitesimal L de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ como el operador $L: D(L) \to L$ (donde $D(L) \subset L$) dado por

$$Lf = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)f - f}{t} \tag{29}$$

(límite en la norma $B(E)$) y $D(L)$ es el subconjunto de funciones en L para las cuales (29) existe. $D(L)$ se llama dominio del generador infinitesimal L.

TEOREMA 16. *Sea* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *un proceso estocástico definido sobre* (Ω, F, P) *con valores en* (E, E). *Si* X *es un proceso de Markov con respecto a la filtración* $\{F_t\}_{t\geq 0}$ *que corresponde a un semigrupo de contracciones* $\{T(s)\}_{s\geq 0}$ *sobre* L *(subespacio de Banach de* $B(E)$*) con generador infinitesimal* L, *entonces para cada* $f \in D(L)$ *el proceso* $Y \equiv \{Y_t, t \geq 0\}$ *dado por*

$$Y_t = f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s)ds, \qquad t \geq 0, \tag{30}$$

es una martingala con respecto a $\{F_t\}_{t\geq 0}$. *Si además* (30) *es de cuadrado integrable y* $f^2 \in D(L)$, *existe un proceso creciente único* $A \equiv \{A(t), t \geq 0\}$ *tal que* Y^2-A *es martingala y* A *está dado por*

$$A_t = \int_0^t H_f(X(s))ds, \qquad t \geq 0,$$

donde

$$H_f(x) = [Lf^2 - 2fLf](x), \qquad x \in E.$$

Observación: Si f no es acotada, pero Lf existe y el proceso (30) es integrable, entonces también en este caso (30) es martingala.

5.2. Procesos de Markov Gaussianos en $S'(\mathbb{R}^d)$.

Para procesos Gaussianos centrados reales, Doob [10] demuestra que la propiedad de Markov es equivalente a

$$E[X_t|F_s] = E[X_t|X_s], \qquad s \leq t, \tag{31}$$

donde $F_s = \sigma\{X_r, r \leq s\}$. Esta definición se extiende a procesos Gaussianos $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$.

DEFINICION 14. *Sea* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *un proceso estocástico con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$, *Gaussiano centrado. Se dice que* X *es un proceso de*

Markov con respecto a $\{F_s\}_{s\geq 0}$, $F_s = \sigma\{\langle X_r,\psi\rangle,\ r \leq s,\ \psi \in S(\mathbb{R}^d)\}$, *si para toda* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$,

$$E[\langle X_t,\phi\rangle | F_s] = E[\langle X_t,\phi\rangle | \langle X_s,\psi\rangle,\ \psi \in S(\mathbb{R}^d)]\ ,\ s \leq t. \tag{32}$$

TEOREMA 17. *Sea* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *un proceso Gaussiano centrado con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$. *Entonces* X *es un proceso de Markov si para toda* $t_0 < t$, $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, *existe* $\hat{\phi} \in S(\mathbb{R}^d)$ *tal que*

$$E\langle X_t,\phi\rangle\langle X_s,\psi\rangle = E\langle X_{t_0},\hat{\phi}\rangle\langle X_s,\psi\rangle,\quad s \leq t_0 < t, \tag{33}$$

para toda $s \leq t_0$ *y para toda* $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$.

DEMOSTRACION. Es claro que (33) implica

$$(\langle X_t,\phi\rangle,\langle X_{r_1},\phi_1\rangle,\ldots,\langle X_{r_n},\phi_n\rangle) \overset{\mathcal{D}}{=} (\langle X_{t_0},\hat{\phi}\rangle,\langle X_{r_1}\phi_1\rangle,\ldots,\langle X_{r_n},\phi_n\rangle)$$

para $r_1<\ldots<r_n \leq s \leq t_0 < t$, $\phi_1,\ldots,\phi_n \in S(\mathbb{R}^d)$. Por lo tanto

$$E[\langle X_t,\phi\rangle | \langle X_r,\psi\rangle,\ r \leq s,\ \psi \in S(\mathbb{R}^d)\ ] = E[\langle X_{t_0},\hat{\phi}\rangle | \langle X_r,\psi\rangle,\ r \leq s,\ \psi \in S(\mathbb{R}^d)\ ],$$

y en particular, para $s = t_0$,

$$E[\langle X_t,\phi\rangle | \langle X_r,\psi\rangle,\ r \leq s,\ \psi \in S(\mathbb{R}^d)\ ] = \langle X_s,\hat{\phi}\rangle. \tag{34}$$

Análogamente se demuestra que (33) implica

$$E[\langle X_t,\phi\rangle | \langle X_s,\psi\rangle,\ \psi \in S(\mathbb{R}^d)] = \langle X_s,\hat{\phi}\rangle. \qquad (35)$$

Así, (34) y (35) implican

$$E[\langle X_t,\phi\rangle | \langle X_r,\psi\rangle,\ r \le s,\ \psi \in S(\mathbb{R}^d)] =$$

$$= E[\langle X_t,\phi\rangle | \langle X_s,\psi\rangle,\ \psi \in S(\mathbb{R}^d)],$$

esto es, $X \equiv \{X_t, t \ge 0\}$ es un proceso de Markov.

Para obtener un resultado análogo al Teorema 16 para procesos Gaussianos centrados con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$, necesitamos extender la noción de generador infinitesimal para un semigrupo de operadores sobre $S(\mathbb{R}^d)$.

DEFINICION 15. *Sea* $\{T_t\}_{t\ge 0}$ *un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales continuos de* $S(\mathbb{R}^d)$ *en* $S(\mathbb{R}^d)$. *Un operador lineal* $A: S(\mathbb{R}^d) \to S(\mathbb{R}^d)$ *se dice que es generador infinitesimal de* $\{T_t\}_{t\ge 0}$ *si satisface*

$$T_t\phi - \phi = \int_0^t T_s A\phi\, ds = \int_0^t A T_s \phi\, ds, \qquad t \ge 0, \phi \in S(\mathbb{R}^d).$$

(Véase [28]).

Obsérvese que esta definición extiende a $S(\mathbb{R}^d)$ la propiedad usual de los generadores infinitesimales de semigrupos (no necesariamente de contracciones) en espacios de Banach.

TEOREMA 18. *Sea* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *un proceso Gaussiano centrado, con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$, *tal que satisface*

$$\mathrm{Cov}(\langle X_s,\psi\rangle, \langle X_t,\phi\rangle) = \mathrm{Cov}(\langle X_s,\psi\rangle, \langle X_s, T_{t-s}\phi\rangle), \quad s \leq t, \tag{36}$$

donde $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales continuos sobre* $S(\mathbb{R}^d)$ *con generador infinitesimal* A. *Entonces para toda* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X_t,\phi\rangle - \int_0^t \langle X_s, A\phi\rangle ds, \qquad t \geq 0, \tag{37}$$

es una martingala de cuadrado integrable con respecto a la filtración $F_t = \sigma\{\langle X_r,\psi\rangle, r \leq t, \psi \in S(\mathbb{R}^d)\}$, $t \geq 0$.

DEMOSTRACION. Basta demostrar la propiedad de martingala. Obsérvese que la expresión (36) es análoga a (33) con $\hat{\phi} = T_{t-s}\phi$ y $t_0 = s$, por lo que por (35) tenemos, tomando esperanza condicional con respecto a F_s

$$E[\langle X_t,\phi\rangle | F_s] = \langle X_s, T_{t-s}\phi\rangle, \qquad s \leq t;$$

por lo tanto, para $s \leq t$,

$$E\left[\langle X_t,\phi\rangle - \int_0^t \langle X_r, A\phi\rangle dr \,\middle|\, F_s\right] = \langle X_s, T_{t-s}\phi\rangle - \int_0^s \langle X_r, A\phi\rangle dr - \langle X_s, \int_s^t T_{r-s}A\phi dr\rangle$$

$$= \langle X_s,\phi\rangle - \int_0^s \langle X_r, A\phi\rangle dr,$$

donde hemos usado la Definición 15.

Observaciones: 1) La condición (36) implica a la vez la propiedad de Markov (32) y la propiedad de martingala de (37) con respecto a la filtración $F_t = \sigma\{\langle X_r,\psi\rangle, r \leq t, \psi \in S(\mathbb{R}^d)\}$. Del Teorema 19 resulta que (37) es también martingala con respecto a la filtración (más chica) $F'_t = \sigma\{\langle X_r,\phi\rangle, r \leq t\}$, debido a que $\{\langle W_t,\phi\rangle\}_t$ es martingala adaptada a $\{F'_t\}_t$ (véase (40)). 2) El Teorema 18 no es exactamente análogo al Teorema 16 (con $f(x) = x$) porque no se ha pedido que $\{T(t)\}_t$ sea el semigrupo que corresponde al proceso de Markov; de hecho, si $T(t)$ se extiende a algún $S_p(\mathbb{R}^d)$, no tiene porqué ser una contracción.

6. Proceso de Wiener Generalizado, Ecuación de Langevin Generalizada y Relación de Fluctuación-Disipación.

(Referencias: Bojdecki y Gorostiza [3]).

Sea $A: S(\mathbb{R}^d) \to S(\mathbb{R}^d)$ un operador lineal continuo y $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ un proceso Gaussiano con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$. En este apartado presentamos condiciones bajo las cuales el proceso X satisface (en algún sentido) una ecuación de Langevin generalizada de la forma

$$dX_t = A^* X_t dt + dW_t , \tag{38}$$

donde A^* es el operador adjunto de A y $W = \{W_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$, en general no homogéneo en el tiempo. El significado preciso de una solución de (38) es un cierto tipo de solución débil (Definición 17). Los procesos que satisfacen (38) se llaman procesos de Ornstein-Uhlenbeck generalizados.

DEFINICION 16. *Un proceso estocástico* $W = \{W_t, t \geq 0\}$ *con valores* *en* $S'(\mathbf{R}^d)$, *Gaussiano centrado, es llamado un proceso de Wiener generalizado si tiene trayectorias continuas y su funcional de covarianza*

$$K(s,\phi;t,\psi) = E(<W_s,\phi><W_t,\psi>)$$

tiene la forma

$$K(s,\phi;t,\psi) = \int_0^{s\wedge t} <Q_u\phi,\psi>du, \qquad s,t \geq 0, \phi,\psi \in S(\mathbf{R}^d) \; , \qquad (39)$$

donde los operadores $Q_u : S(\mathbf{R}^d) \to S'(\mathbf{R}^d)$ *tienen las siguientes propiedades:*

i) Q_u *es lineal, continuo, simétrico y positivo para cada* $u \geq 0$, *y*

ii) *La función* $u \to <Q_u\phi,\psi>$ *es continua por la derecha con límites por la izquierda para cada* ϕ, $\psi \in S(\mathbf{R}^d)$.

Decimos que W está asociado a $Q \equiv \{Q_u, u \geq 0\}$.

Observaciones:

a) De la definición se sigue inmediatamente que si W es un proceso de Wiener con valores en $S'(\mathbf{R}^d)$, entonces $W_0 = 0$, y W tiene incrementos independientes en el sentido que para cualesquiera $0 \leq s < t$ y $\phi \in S(\mathbf{R}^d)$, la variable aleatoria real $<W_t,\phi> - <W_s,\phi>$ es independiente de la σ-álgebra generada por $\{<W_u,\psi>; 0 \leq u \leq s, \psi \in S(\mathbf{R}^d)\}$.

b) El proceso de Wiener estándar uni-dimensional $W = \{W_t, t \geq 0\}$ puede ser considerado como un proceso de Wiener con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$. De hecho, para $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fija, arbitraria, el proceso $\mathcal{W} = W\delta_{x_0}$ satisface las condiciones de la Definición 16, con

$$Q_u\phi = \phi(x_0)\delta_{x_0}, \quad u \geq 0.$$

Puede hacerse una identificación análoga para el proceso de Wiener estándar n-dimensional.

La existencia del proceso de Wiener generalizado está probada en [3].

DEFINICION 17. *Sea* $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *un proceso con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$ *; decimos que* X *es una solución débil de* (38) *si para cada* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$,

$$<X_t,\phi> = <X_0,\phi> + \int_0^t <X_u, A\phi>du + <\mathcal{W}_t,\phi>, \qquad t \geq 0. \tag{40}$$

TEOREMA 19. *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

a) $X \equiv \{X_t, t \geq 0\}$ *es un proceso con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$ *, continuo, Gaussiano centrado, con funcional de covarianza*

$$K(s,\phi;t,\psi) = \mathrm{Cov}(<X_s,\phi>,<X_t,\psi>), \quad s,t \geq 0, \phi,\psi \in S(\mathbb{R}^d). \tag{41}$$

b) *Para cada* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ *la función*

$$s \to K(s,\phi;s,\phi)$$

es continuamente diferenciable.

c) $\{T_t, t \geq 0\}$ *es un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales continuos sobre* $S(\mathbb{R}^d)$, *tal que su generador infinitesimal* A *es continuo de* $S(\mathbb{R}^d)$ *en él mismo* (Definición 15).

d) *Para cada* $0 \leq s \leq t$ *y* $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^d)$, K *satisface*

$$K(s,\phi;t,\psi) = K(s,\phi;s,T_{t-s}\psi). \tag{42}$$

Entonces X *es un proceso de Markov, y existe un proceso de Wiener* W *con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$ *tal que* X *es una solución de* (38). W *está asociado a la familia* $Q \equiv \{Q_u, u \geq 0\}$ *definida por:*

$$\langle Q_u\phi,\psi\rangle = \frac{d}{du} K(u,\phi;u,\psi) - K(u,A\phi;u,\psi) - K(u,\phi;u,A\psi),$$

$$\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^d). \tag{43}$$

Observaciones:

1) En esta formulación los procesos de Ornstein-Uhlenbeck generalizados, soluciones de ecuaciones del tipo (38), pueden ser no estacionarios. Son estacionarios cuando $Q_u = Q$ es constante en u, i.e.

$$K(s,\phi;t,\psi) = (s \wedge t)\langle Q\phi,\psi\rangle .$$

Itô |23| ha desarrollado una teoría general de procesos de Ornstein-Uhlenbeck estacionarios.

2) La fórmula (43) se llama relación de fluctuación-disipación.

3) Los resultados anteriores se pueden generalizar al caso en que el operador A depende de t [Bojdecki-Gorostiza; en preparación].

7. Relación entre Campos Aleatorios Generalizados y Ordinarios. Medida Espectral.

(Referencias: Gelfand-Vilenkin [12], Meidan [34,35]).

Un proceso estocástico ordinario es un mapeo definido sobre los reales con valores en un espacio vectorial topológico de variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad.

Por otro lado, un proceso estocástico generalizado es un operador lineal continuo de un espacio vectorial de funciones de prueba sobre $\mathbb{R}$ en un espacio de variables aleatorias.

Bajo ciertas condiciones naturales un proceso estocástico ordinario induce de manera única un proceso estocástico generalizado; de aquí que estos últimos sean una generalización de los primeros. Esta generalización es análoga a la teoría de las distribuciones de Schwartz para generalizar a las funciones ordinarias.

En este apartado presentamos algunas relaciones entre los procesos estocásticos ordinarios y generalizados de segundo orden (i.e. con segundo momento finito) y con parámetro (tiempo) en $\mathbb{R}^d$ en lugar de $\mathbb{R}$ (en este caso los procesos se suelen llamar campos aleatorios).

7.1. Campos Aleatorios Generalizados y Ordinarios.

Sea (Ω,F,P) un espacio de probabilidad fijo y $L^2(\Omega)$ el espacio de variables aleatorias sobre (Ω,F,P) con segundo momento finito. $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la norma inducida por el producto escalar

$$(x,y) = \int_\Omega x(\omega)y(\omega)dP(\omega) .$$

Un mapeo de $\mathbf{R}^d$ en $L^2(\Omega)$ se llama un campo aleatorio ordinario de segundo orden. Una variable aleatoria con valores en $S'(\mathbf{R}^d)$ con segundo momento finito se llama un campo aleatorio generalizado de segundo orden.

<u>DEFINICION</u> 18. *Sea* X *un campo aleatorio generalizado de segundo orden con media cero y funcional de covarianza* $K(\phi,\psi)$. *La medida de covarianza de* X *es la medida* $K(dx,dy)$ *en* $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ *tal que*

$$K(\phi,\psi) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)\psi(y)K(dx,dy), \qquad \phi,\psi \in S(\mathbb{R}^d) .$$

En el caso en que

$$K(dx,dy) = k(x,y)dxdy,$$

donde $k(x,y)$ *es una función ordinaria, a* $k(x,y)$ *se le llama el núcleo de covarianza de* X.

La noción de núcleo de covarianza se extiende al caso en que $k(x,y)$ es una función generalizada.

En el caso de ruido blanco $\dot{W}$ en $\mathbf{R}^d$ se tiene

$$k(x,y) = \delta(x-y),$$

pues

$$\mathrm{Cov}(\langle\dot{W},\phi\rangle,\langle\dot{W},\psi\rangle) = \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)\psi(x)dx.$$

DEFINICION 19. *Se dice que una variable aleatoria* X *en* $S'(\mathbf{R}^d)$ *de segundo orden está inducida por un campo aleatorio ordinario* $\tilde{X}$ *continuo en norma, si para toda* $\phi \in S(\mathbf{R}^d)$, $\langle X,\phi\rangle$ *se puede escribir en la forma*

$$\langle X,\phi\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{X}(x)\phi(x)dx\ ,$$

donde la función $x \to \tilde{X}(x)$ *es continua de* $\mathbf{R}^d$ *en* $L^2(\Omega)$ *con la norma* L^2, *y la integral es una integral de Bochner.*

TEOREMA 20. *Si* X *es una variable aleatoria Gaussiana centrada en* $S'(\mathbf{R}^d)$, *una condición necesaria y suficiente para que* X *esté inducida por un campo aleatorio Gaussiano ordinario y continuo en la norma es que el núcleo de covarianza* $k(x,y)$ *de* X *sea una función positiva definida y continua en* (x,y).

De aquí que el ruido blanco no está inducido por un campo aleatorio Gaussiano ordinario y continuo en norma.

7.2. Medida Espectral.

DEFINICION 20. *Se dice que una variable aleatoria* X *en* $S'(\mathbb{R}^d)$ *es homogénea, estacionaria o invariante bajo traslaciones, si para toda* $\phi_1,\ldots,\phi_m \in S(\mathbb{R}^d)$, $m \in \mathbb{N}$ *y para toda* $h \in \mathbb{R}^d$

$$(\langle X,\phi_1\rangle,\ldots,\langle X,\phi_m\rangle) \overset{\mathcal{D}}{=} (\langle X,\phi_1(\cdot+h)\rangle,\ldots,\langle X,\phi_m(\cdot+h)\rangle) .$$

El ruido blanco $\dot{W}$ en $\mathbb{R}^d$ es homogéneo porque tiene media 0 y su funcional de covarianza es claramente invariante bajo traslaciones.

TEOREMA 21. *Si* X *es una variable aleatoria homogénea en* $S'(\mathbb{R}^d)$, *su funcional de covarianza se puede escribir en la forma*

$$\mathrm{Cov}(\langle X,\phi\rangle,\langle X,\psi\rangle) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\phi}(z)\tilde{\psi}(z)\sigma(dz),$$

en donde $\tilde{\phi}$ *es la transformada de Fourier de* ϕ, *i.e.*

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(z,x)}\phi(x)dx,$$

donde $(\cdot,\cdot)$ *es el producto interior en* $\mathbb{R}^d$, *y* σ *es una medida de Radon no negativa temperada* (Sección 1.2).

La medida σ se llama medida espectral de X. La medida espectral del ruido blanco $\dot{W}$ es

$$\sigma(dz) = dz \quad \text{(medida de Lebesgue).}$$

TEOREMA 22 [22]. *Un campo aleatorio generalizado homogéneo está inducido por un campo aleatorio ordinario si y sólo si su medida espectral es finita.*

Esto también indica que el ruido blanco no está inducido por un campo aleatorio ordinario.

II. CAMPO ALEATORIO RAMIFICADO CON INMIGRACION Y RESULTADOS LIMITES

(Referencias: Bojdecki-Gorostiza [3], Gorostiza [14,15,16]).

1. Descripción del Sistema.

Consideremos un sistema de partículas en el espacio euclidiano d-dimensional $\mathbf{R}^d$, sujeto en su evolución temporal a migración, reproducción e inmigración de las partículas, con las siguientes propiedades (suponemos que existe un espacio de probabilidad (Ω,F,P) en el que está definido el sistema):

1) En el tiempo inicial $t = 0$ las partículas están distribuídas de acuerdo a un campo aleatorio de Poisson homogéneo con intensidad $\gamma \geq 0$. Esto es, si denotamos por N_0 el número de partículas iniciales, tenemos que

i) N_0 es una variable aleatoria

$$N_0 : \Omega \to M^+(\mathbf{R}^d),$$

donde $M^+(\mathbf{R}^d)$ tiene la topología de la convergencia vaga (Sección 1.1.2.).

ii) Si $A,B \in B(\mathbf{R}^d)$ tienen medida de Lebesgue finita y $A \cap B = \phi$, entonces $N_0(A)$ y $N_0(B)$ son variables aleatorias de Poisson independientes con parámetros $\gamma\lambda(A)$ y $\gamma\lambda(B)$ respectivamente; esto es,

$$P[N_0(A) = n] \quad \frac{(\gamma\lambda(A))^n e^{-\gamma\lambda(A)}}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots$$

y

$$EN(A) = \gamma\lambda(A)\,,$$
$$VarN(A) = \gamma\lambda(A),$$

donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. (Para demostrar la existencia de un campo aleatorio de Poisson se puede usar una generalización del teorema de consistencia de Kolmogorov. En este caso el conjunto de índices es la familia de los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ con medida de Lebesgue finita [26].)

2) Al transcurrir el tiempo cada partícula migra independientemente de las otras con un movimiento Browniano estándar en $\mathbb{R}^d$; recordemos que la probabilidad de transición tiene densidad

$$p(t,x,y) = (2\pi t)^{-d/2}\exp(-\|x-y\|^2/2t), \quad x,y \in \mathbb{R}^d, \;\; t \geq 0\,.$$

3) Cada partícula se reproduce independientemente de las otras y de la migración de acuerdo a una ley de ramificación $\{p_n\}_{n=0,1,\ldots}$, donde p_n es la probabilidad de que el número de partículas nuevas sea n, después de un tiempo de vida distribuído exponencialmente con parámetro V. Las nuevas partículas aparecen en el mismo lugar en el que se ramificaron sus progenitoras, y se reproducen y migran de la misma manera. Supondremos que la ley de ramificación tiene varianza finita, y su media y segundo momento factorial los denotaremos por m_1 y m_2, respectivamente.

4) Partículas de una fuente externa inmigran en $\mathbb{R}^d$ de acuerdo a

un campo aleatorio de Poisson en espacio-tiempo $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ con intensidad $\beta \geq 0$, y cada partícula inmigrante independientemente migra y se reproduce según la descripción en 2) y 3).

Llamaremos al sistema así descrito un campo aleatorio ramificado con inmigración.

El proceso que estudiaremos relativo a este sistema es $N = \{N_t, t \geq 0\}$, donde N_t es una medida aleatoria definida por $N_t(A)$ = número de partículas del sistema en $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ en el tiempo t. Veremos que N toma valores en $M_T^+(\mathbb{R}^d)$ (Proposición 3).

Observaciones:

i) La existencia de un sistema tal puede consultarse en [7]. Debido a que cada partícula migra de acuerdo a un movimiento Browniano y que la distribución del tiempo de vida es exponencial, el proceso N es un proceso de Markov.

ii) El semigrupo de operadores sobre el espacio $C(\mathbb{R}^d)$ de las funciones reales continuas acotadas sobre $\mathbb{R}^d$ asociado con el movimiento Browniano está definido por

$$T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x,y) f(y) dy, \; f \in C(\mathbb{R}^d), \; x \in \mathbb{R}^d, \; t \geq 0,$$

y su generador infinitesimal es

$$L = \frac{1}{2} \Delta,$$

donde Δ es el Laplaciano.

iii) El sistema está compuesto de dos subpoblaciones: Las partículas cuyo primer ancestro es una partícula inicial, y aquellas que provienen de partículas inmigrantes. Así, si denotamos por $N^I \equiv \{N_t^I, t \geq 0\}$ y $N^{II} \equiv \{N_t^{II}, t \geq 0\}$ a los procesos correspondientes a las partículas iniciales e inmigrantes respectivamente, tenemos que

$$N = N^I + N^{II}.$$

iv) En un proceso de ramificación el parámetro de Malthus para m_1 y G, donde G es la distribución del tiempo de vida, es la solución α de la ecuación

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} dG(t) = \frac{1}{m_1}.$$

En este caso tenemos que el parámetro de Malthus es la solución de

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} V e^{-Vt} dt = \frac{1}{m_1},$$

y por lo tanto, $\alpha = V(m_1-1)$.

Para $\alpha = 0$ $(\alpha < 0, \alpha > 0)$ el proceso de ramificación se llama crítico (subcrítico, supercrítico).

Denotaremos por $N^T \equiv \{N_t^T, t \geq 0\}$ el proceso definido arriba donde $\gamma = \gamma T$ y $\beta = \beta T$. Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento asintótico de N^T cuando $T \to \infty$; es decir, el comportamiento de "alta densidad".

Como veremos (Corolario 1), $E\langle N_t^T,\phi\rangle$ está dada por

$$E\langle N_t^T,\phi\rangle = Te^{\alpha t}[\gamma+\beta(1-e^{-\alpha t})/\alpha] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)dx$$

y la varianza de $\langle N_t^T,\phi\rangle$ es del orden de T.

Demostraremos que para cada $t \geq 0$,

$$T^{-1}\langle N_t^T,\phi\rangle \xrightarrow[T\to\infty]{L^2} e^{\alpha t}[\gamma+\beta(1-e^{-\alpha t})/\alpha] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)dx$$

(ley de los grandes números).

Sea M^T el proceso de las fluctuaciones definido por

$$M^T = \frac{N^T-EN^T}{T^{1/2}} \quad . \tag{1}$$

Demostraremos que M^T converge débilmente en $D_{S'}[\infty]$ (teorema límite central funcional) e investigaremos las propiedades del proceso límite.

Observación: Sea N_0^T un campo aleatorio de Poisson con intensidad T; por lo tanto

$$E\, N_0^T(A) = T\lambda(A) \quad \text{y} \quad \mathrm{Var}\, N_0^T(A) = T\lambda(A)\ .$$

Consideremos M_0^T definido por

$$M_0^T = \frac{N_0^T-EN_0^T}{T^{1/2}} \quad .$$

Del hecho que N_0 y EN_0 toman valores en $M_T^+(\mathbb{R}^d)$ (Proposición 3), M_0^T es una variable aleatoria con valores en $M_T(\mathbb{R}^d)$ (y por lo tanto en $S'(\mathbb{R}^d)$, Sección 1.1.2). Nos interesa la distribución límite de M_0^T cuando la intensidad $T \to \infty$. Por lo tanto, por el Teorema I.9 basta calcular el límite cuando $T \to \infty$ de la funcional característica de M_0^T.

La función característica ρ_X de una variable aleatoria X Poisson con parámetro λ está dada por

$$\rho_X(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Entonces, para $u \in \mathbb{R}$ y $A \in B(\mathbb{R}^d)$ con medida finita, se tiene

$$\rho_{M_0^T(A)}(u) = E\, e^{iuM_0^T(A)} = e^{-iuT^{1/2}\lambda(A)}\, E\, e^{iuN_0^T(A)/T^{1/2}} =$$

$$= e^{-iuT^{1/2}\lambda(A)} e^{T\lambda(A)((iu/T^{1/2})-(u^2/2T)\, + o\,(T^{-1}))}$$

$$= e^{-(u^2/2)\lambda(A)\, +\, To(T^{-1})},$$

luego,

$$\rho_{M_0^T(A)}(u) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} e^{-(u^2/2)\lambda(A)} .$$

Sea f una función simple sobre $\mathbb{R}^d$, i.e.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{A_j}(x), \qquad a_j \in \mathbb{R},\ A_j \in B(\mathbb{R}^d) \text{ ajenos con medida finita,}$$

$$n \geq 1 ;$$

entonces

$$\langle M_0^T, f\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} f dM_0^T = \sum_{j=1}^n a_j M_0^T(A_j),$$

y por la independencia de $M_0^T(A_j)$, $j = 1,\ldots,n$ tenemos

$$E\, e^{i\langle M_0^T, f\rangle} = E\, e^{i\sum_{j=1}^n a_j M_0^T(A)} = \prod_{j=1}^n E\, e^{ia_j M_0^T(A_j)} .$$

Así, por lo anterior, cuando $T \to \infty$

$$E\, e^{i\langle M_0^T, f\rangle} \longrightarrow \prod_{j=1}^n e^{-a_j^2/2(\lambda(A_j))} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n a_j^2 \lambda(A_j)} = e^{-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} f^2(x)dx}.$$

Para $f \in S(\mathbf{R}^d)$, aproximando por funciones simples se tiene también

$$E\, e^{i\langle M_0^T, f\rangle} \xrightarrow[T \to \infty]{} e^{-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} f^2(x)dx} ;$$

esto es, la funcional característica de M_0^T converge cuando $T \to \infty$ a la funcional característica del ruido blanco $\dot{W}$ sobre $\mathbf{R}^d$, por lo tanto (Teorema I.9)

$$M_0^T \xrightarrow[T \to \infty]{\mathcal{D}} \dot{W} .$$

Sin embargo, sabemos que $\dot{W}$ toma valores en $S'(\mathbf{R}^d)\setminus M(\mathbf{R}^d)$ (Secciones

I.2.3, I.2.3.1), por lo que la convergencia de M_0^T a $\dot{W}$ no puede ocurrir en $M(\mathbb{R}^d)$ (véase la observación en la Sección I.1.2). Fin de la observación.

Demostraremos que N_t^T es una medida de Radon temperada aleatoria para cada $t \geq 0$ (Proposición 3); por lo tanto, podemos considerar a N_t^T y a M_t^T como procesos con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$. Más aún, veremos que los procesos N^T y M^T se pueden realizar en $D_{S'}[\infty]$ (Proposiciones 5 y 7), por lo que utilizaremos el Teorema I.11 en la prueba de la convergencia débil de M^T.

Denotaremos por $M \equiv \{M_t, t \geq 0\}$ al límite débil de M^T y estudiaremos sus propiedades. En particular, probaremos que M cumple con las condiciones de los Teoremas I.14, I.18, I.19, por lo que es un proceso generalizado de Markov, Gaussiano centrado, continuo, que es solución "débil" de una ecuación de Langevin, y existe $p \in \mathbb{N}$ tal que M es continuo en S_p'. También se estudiará la convergencia débil de M_t cuando $t \to \infty$, obteniéndose que sólo para $\alpha < 0$, $\beta > 0$ (el caso subcrítico con inmigración) $M_t \overset{\mathcal{D}}{\to} M_\infty$, donde M_∞ es una variable aleatoria Gaussiana en $S'(\mathbb{R}^d)$. Por último, se verá que M_t y M_∞ son campos aleatorios generalizados homogéneos y se calcularán sus medidas espectrales.

2. Resultados Límites.

Los resultados que se demostrarán son los siguientes:

2.1. Ley de los Grandes Números.

TEOREMA 1. *Para cada* $t \geq 0$ *y* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$,

$$T^{-1}\langle N_t^T,\phi\rangle \xrightarrow{L^2} \begin{cases} e^{\alpha t}[\gamma+\beta(1-e^{-\alpha t})/\alpha]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)dx, & \text{si } \alpha \neq 0 \\ [\gamma+\beta t]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)dx, & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

cuando $T \to \infty$.

2.2. Convergencia Débil de las Fluctuaciones.

Sea $M^T \equiv \{M_t^T, t \geq 0\}$ el proceso de las fluctuaciones definido por (1).

TEOREMA 2. *Existe un proceso* $M \equiv \{M_t, t \geq 0\}$ *Gaussiano centrado, con valores en* $S'(\mathbb{R}^d)$, *con funcional de covarianza*

$$\mathrm{Cov}(\langle M_s,\phi\rangle,\langle M_t,\psi\rangle) =$$

$$= \begin{cases} e^{\alpha t}[\gamma+\beta(1-e^{-\alpha s})/\alpha]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{t-s}\psi(x)dx, & \text{si } \alpha \neq 0 \\ [\alpha+\beta s]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{t-s}\psi(x)dx, & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

$$+ e^{\alpha t}\gamma m_2 V\int_0^s e^{\alpha(s-r)}\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{t+s-2r}\psi(x)dxdr$$

$$
+\begin{cases} e^{\alpha t}\beta m_2 V \int_0^s e^{\alpha(s-r)}(1-e^{-\alpha r})/\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) T_{t+s-2r}\psi(x)\,dx\,dr, & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \beta m_2 V \int_0^s r \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) T_{t+s-2r}\psi(x)\,dx\,dr, & \text{si } \alpha = 0, \end{cases}
$$

$$s \leq t,$$

tal que $M^T \xrightarrow{\mathcal{D}} M$ en $D_{S'}[\infty]$ cuando $T \to \infty$, donde

$$T_t\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) e^{-\|x-y\|^2/2t} (2\pi t)^{-d/2} dy, \quad t \geq 0.$$

2.3. Propiedades del Proceso Límite de las Fluctuaciones.

TEOREMA 3. *Las trayectorias muestrales del proceso* M *pertenecen a* $C_{S'}[\infty]$. *Más aún, existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* M *es continuo en la norma* $\|\cdot\|_{-p}$ *c.s.*

Observación: El proceso M también se puede realizar como un proceso continuo con valores en un espacio de Sobolev contenido en $S'(\mathbb{R}^d)$ (véase [29]).

TEOREMA 4. M *es un proceso de Markov y es solución de la ecuación de Langevin generalizada*

$$dM_t = \left(\frac{1}{2}\Delta+\alpha\right)M_t dt + dW_t, \quad t \geq 0,$$

$$M_0 = \gamma^{1/2}\dot{W},$$

donde $\dot{W}$ *es el ruido blanco Gaussiano en* $\mathbf{R}^d$ *y el proceso de Wiener generalizado* W *está determinado por*

$$\langle Q_t\phi,\psi\rangle = \gamma e^{\alpha t}[(m_2V-\alpha)\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\psi(x)dx$$

$$+\int_{\mathbf{R}^d}\nabla\phi(x)\cdot\nabla\psi(x)dx]$$

$$+\beta\{[m_2V(e^{\alpha t}-1)/\alpha + 2-e^{\alpha t}]\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\psi(x)dx$$

$$+(e^{\alpha t}-1)/\alpha\int_{\mathbf{R}^d}\nabla\phi(x)\cdot\nabla\psi(x)dx\},$$

en donde $\cdot$ *denota el producto interior en* $\mathbf{R}^d$.

TEOREMA 5. *Para* $\alpha < 0$, $\beta > 0$ *(caso subcrítico con inmigración)*

$$M_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{D}} M_\infty,$$

donde M_∞ *es una variable aleatoria Gaussian centrada en* $S'(\mathbf{R}^d)$ *con funcional de covarianza*

$$\mathrm{Cov}(\langle M_\infty,\phi\rangle,\langle M_\infty,\psi\rangle) = -\frac{\beta}{\alpha}\{\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\psi(x)dx +$$

$$+ m_2 V \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\psi(x)k(x,y)dxdy\},$$

donde

$$k(x,y) = \begin{cases} e^{-(-2\alpha)^{1/2}\|x-y\|}/2(-2\alpha)^{1/2}, & \text{si } d = 1 \\ (-2\alpha)^{d/4-1/2}K_{d/2-1}((-2\alpha)^{1/2}\|x-y\|)/(2\pi)^{d/2}\|x-y\|^{d/2-1}, & \text{si } d \geq 2, \end{cases}$$

y $K_{d/2-1}$ *es la función de Bessel modificada.* $k(x,y)$ *tiene el siguiente comportamiento asintótico para* $d \geq 2$:

$$k(x,y) \sim \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log((-2\alpha)^{1/2}\|x-y\|), & d = 2, \\ \Gamma(d/2-1)/4\pi^{d/2}\|x-y\|^{d-2}, & d \geq 3, \end{cases}$$

cuando $\|x-y\| \to 0$, *donde* Γ *es la función gamma, y*

$$k(x,y) \sim \frac{(-2\alpha)^{(d-3)/4}e^{-(-2\alpha)^{1/2}\|x-y\|}}{2(2\pi)^{(d-1)/2}\|x-y\|^{(d-1)/2}}\ [1 +$$

$$+ \frac{\mu-1}{8(-2\alpha)^{1/2}\|x-y\|} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2![8(-2\alpha)^{1/2}\|x-y\|]^2} +$$

$$+ \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3![8(-2\alpha)^{1/2}\|x-y\|]^3} + \cdots),$$

donde $\mu = 4(\frac{d}{2} - 1)^2$, *cuando* $\|x-y\| \to \infty$. (*Esta serie tiene un número finito de términos para* $d \geq 3$). *Esto indica que* M_∞ *tiene dependencia muy pequeña a distancias grandes.*

Obsérvese que M_∞ sólo depende de la inmigración; la progenie de las partículas iniciales desaparece, lo cual se debe a que $\alpha < 0$. Nótese también que $k(x,y)$ es un medio del núcleo potencial del movimiento Browniano en $\mathbf{R}^d$ terminado en un tiempo independiente con distribución exponencial con parámetro $-\alpha$.

TEOREMA 6. *Para cada* $t \geq 0$, M_t *no está inducido por un campo aleatorio Gaussiano ordinario y continuo en norma.*

TEOREMA 7. *Para cada* $t \geq 0$, M_t *es homogéneo y su medida espectral* $\sigma_t(dz)$ *está dada por* $\ell_t(z)dz$, *donde*

$$\ell_t(z) = e^{\alpha t}\gamma m_2 V \frac{e^{(\alpha-\|z\|^2)t}-1}{\alpha-\|z\|^2} +$$

$$+ \begin{cases} e^{\alpha t}[\gamma+\beta(1-e^{-\alpha t})/\alpha], & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \gamma+\beta t, & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

$$+\ \beta m_2 V \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha}\left\{ \dfrac{e^{(\alpha-\|z\|^2)t}-1}{\alpha-|z|^2} + e^{-\alpha t}\ \dfrac{e^{(2\alpha-\|z\|^2)t}-1}{|z|^2-2\alpha}\right\}, & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \begin{cases} \dfrac{t}{\|z\|^2} + \dfrac{1}{\|z\|^4}\ (e^{-\|z\|^2 t}-1), \ \text{si } |z| \neq 0 \\ t^2/2, \ \text{si } |z| = 0 \end{cases} & \text{si } \alpha = 0 . \end{cases}$$

Para M_∞ dado por el Teorema 5 se tiene:

<u>TEOREMA</u> 8. M_∞ *no está inducido por un campo aleatorio ordinario.*

<u>TEOREMA</u> 9. M_∞ *es homogéneo y su medida espectral* $\sigma_\infty(dz)$ *está dada por* $\ell_\infty(z)dz$, *donde*

$$\ell_\infty(z) = -\frac{\beta}{\alpha}\ \left(1 + \frac{m_2 V}{|z|^2-2\alpha}\right).$$

<u>Observación</u>: De lo anterior se deduce que la transformada inversa de Fourier de la función $k(x,y)$ dada en el Teorema 5 es la función

$$\hat{k}(z,w) = \frac{\delta(z+w)}{\|z\|^2-2\alpha} .$$

III. DEMOSTRACIONES

1. Función Característica, Esperanza y Covarianza.

Sea $N \equiv \{N_t, t \geq 0\}$ el proceso definido en el Capítulo II. Por el momento denotaremos por $\langle N_t, \phi \rangle$ a la expresión

$$\langle N_t, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) dN_t(x) \tag{1}$$

para aquellas $\phi: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ continuas para las cuales tiene sentido. Más adelante demostraremos que N_t es una medida de Radon temperada, por lo que esta expresión será válida para toda ϕ en $S(\mathbf{R}^d)$.

PROPOSICION 1. *Sean* $t_1 \leq \dots \leq t_m$ *en* $[0,\infty)$ *y* $\phi_1, \dots, \phi_m$ *en* $S(\mathbf{R}^d)$. *La función característica del vector aleatorio* $(\langle N_{t_1}, \phi_1 \rangle, \dots, \langle N_{t_m}, \phi_m \rangle)$ *está dada por*

$$F(u_1, \dots, u_m) = \exp\{\gamma \int_{\mathbf{R}^d} E[\exp\{ i \sum_{j=1}^m u_j \langle N_{t_j}^x, \phi_j \rangle\} - 1] dx$$

$$+ \beta \int_0^{t_m} \int_{\mathbf{R}^d} E[\exp\{ i \sum_{j=1}^m u_j \langle N_{t_j - s}^x, \phi_j \rangle\} - 1] dx ds\}, \tag{2}$$

$$u_1, \dots, u_m \in \mathbf{R},$$

donde $N_{t_j}^x(\cdot)$ *denota el número de partículas en* $\cdot$ *en el tiempo* t_j *que provienen de una partícula que al tiempo* 0 *está en la posición* x (notación: $N_t^x = 0$ para $t < 0$).

DEMOSTRACION. Sean N^I y N^{II} los números de partículas que provienen de partículas iniciales e inmigrantes, respectivamente.

Consideremos una sucesión $\{A_K\}_{K\in\mathbb{N}}$ de conjuntos compactos en $\mathbb{R}^d$, tal que $A_K \uparrow \mathbb{R}^d$, y supongamos que el campo aleatorio de Poisson inicial y el campo aleatorio de Poisson de la inmigración están restringidos a A_K y a $A_K \times [0,t_m]$ respectivamente.

Denotaremos por $\langle N^I_{t_j},\phi_j\rangle_{A_K}$ y $\langle N^{II}_{t_j},\phi_j\rangle_{A_K}$ a $\langle N^I_{t_j},\phi_j\rangle$ y $\langle N^{II}_{t_j},\phi_j\rangle$ restringidos a la condición mencionada.

Así, tenemos que

$$\langle N^I_{t_j},\phi_j\rangle_{A_K} = \sum_{i=1}^{N_0} \langle N^{x_i}_{t_j},\phi_j\rangle , \tag{3}$$

donde N_0 es un campo aleatorio de Poisson en A_K con parámetro γ y $N^{x_i}_{t_j}(\cdot)$ denota el número de partículas en $\cdot$ en el tiempo t_j que provienen de la partícula de N_0 en la posición x_i.

Análogamente,

$$\langle N^{II}_{t_j},\phi_j\rangle_{A_K} = \sum_{r=1}^{N_1} \langle N^{x_r}_{t-\tau_r},\phi_j\rangle , \tag{4}$$

donde N_1 es un campo aleatorio de Poisson en $A_K \times [0,t_j]$ con parámetro β, y τ_r es el tiempo en el que inmigró la partícula de N_1 en la posición x_r.

Dado que

$$\langle N_{t_j},\phi_j\rangle = \langle N^I_{t_j},\phi_j\rangle + \langle N^{II}_{t_j},\phi_j\rangle$$

y que N^{I} y N^{II} son independientes, la función característica del vector aleatorio

$$(\langle N_{t_1},\phi_1\rangle_{A_K}, \ldots, \langle N_{t_m},\phi_m\rangle_{A_K}) \tag{5}$$

es el producto de las funciones características de los vectores aleatorios

$$(\langle N^{I}_{t_1},\phi_1\rangle_{A_K}, \ldots, \langle N^{I}_{t_m},\phi_m\rangle_{A_K}) \tag{6}$$

y

$$(\langle N^{II}_{t_1},\phi_1\rangle_{A_K}, \ldots, \langle N^{II}_{t_m},\phi_m\rangle_{A_K}). \tag{7}$$

Sea $F_{I,A_K}(u_1,\ldots,u_m)$ la función característica del vector aleatorio (6) esto es,

$$F_{I,A_K}(u_1,\ldots,u_m) = E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N^{I}_{t_j},\phi_j\rangle_{A_K} \}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[\exp\{ i \sum_{i=1}^{m} u_j \langle N^{I}_{t_j},\phi_j\rangle_{A_K} \} | N_0 = n] P[N_0 = n] \tag{8}$$

Como N_0 es un campo aleatorio de Poisson sobre A_K con parámetro γ

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n \lambda(A_K)^n e^{-\gamma\lambda(A_K)}}{n!} E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N^{I}_{t_j},\phi_j\rangle_{A_K} \} | N_0 = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n \lambda(A_K)^n e^{-\gamma\lambda(A_K)}}{n!} E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j (\sum_{k=1}^{n} \langle N^{X_k}_{t_j},\phi_j\rangle_{A_K}) \}]$$

donde $X_1,\ldots,X_n$ son variables aleatorias independientes, uniformemente distribuidas en A_K (ésta es una propiedad de los campos aleatorios de Poisson [19])

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n \lambda(A_K)^n e^{-\gamma\lambda(A_K)}}{n!} E[\exp\{ i \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_j <N_{t_j}^{X_k}, \phi_j>_{A_K}\}]$$

Obsérvese que $\sum_{j=1}^{m} u_j <N_{t_j}^{X_k}, \phi_j>_{A_K}$ $k = 1,\ldots,n$ son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuídas, por lo tanto,

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n \lambda(A_K)^n e^{-\gamma\lambda(A_K)}}{n!} \prod_{k=1}^{n} E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j <N_{t_j}^{X_k}, \phi_j>_{A_K}\}] \ .$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n \lambda(A_K)^n e^{-\gamma\lambda(A_K)}}{n!} (E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j <N_{t_j}^{X_1}, \phi_j>_{A_K}\}])^n$$

$$= e^{-\gamma\lambda(A_K)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\gamma\lambda(A_K) E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j <N_{t_j}^{X_1}, \phi_j>_{A_K}\}])^n$$

y como X_1 tiene distribución uniforme en A_K

$$= \exp\{ \gamma \int_{A_K} E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j <N_{t_j}^{x}, \phi_j>\} - 1]\, dx \}. \tag{9}$$

Análogamente, si denotamos por $F_{II,A_K}(u_1,\ldots,u_m)$ a la función característica del vector aleatorio (7), obtenemos

$$F_{II,A_K}(u_1,\dots,u_m) = \exp\{\beta \int_0^{t_m} \int_{A_K} E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j < N^x_{t_j-s}, \phi_j >\} - 1] dxds\}. \tag{10}$$

Por lo tanto, la función característica del vector aleatorio (5) es

$$F_{A_K}(u_1,\dots,u_m) = F_{I,A_K}(u_1,\dots,u_m)\ F_{II,A_K}(u_1,\dots,u_m)$$

$$= \exp\{ \gamma \int_{A_K} E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j < N^x_{t_j}, \phi_j >\} - 1] dx +$$

$$+ \beta \int_0^{t_m} \int_{A_K} E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j < N^x_{t_j-s}, \phi_j >\} - 1] dxds\}.$$

Tomando el límite cuando $K \to \infty$ y usando el teorema de convergencia dominada, se obtiene la expresión (2).

Para $m = 1$, derivando la expresión (2) en u y evaluando en $u = 0$, obtenemos

$$E < N_t, \phi > = \gamma \int_{\mathbb{R}^d} E < N^x_t, \phi > dx + \beta \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} E < N^x_{t-s}, \phi > dxds. \tag{11}$$

Para $m = 2$, derivando en u_1 y u_2 y evaluando en $u_1 = u_2 = 0$, obtenemos

$$\mathrm{Cov}(\langle N_{t_1},\phi_1\rangle,\langle N_{t_2},\phi_2\rangle) = \gamma \int_{\mathbf{R}^d} E\,\langle N^x_{t_1},\phi_1\rangle\langle N^x_{t_2},\phi_2\rangle\, dx$$

$$+ \beta \int_0^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d} E\,\langle N^x_{t_1-s},\phi_1\rangle\langle N^x_{t_2-s},\phi_2\rangle\, dxds, \quad t_1 \le t_2. \qquad (12)$$

Definimos el semigrupo sobre $C(\mathbf{R}^d)$

$$T^\alpha_t = e^{\alpha t}\, T_t, \quad t \geq 0,$$

donde α es el parámetro de Malthus y T_t es el semigrupo Browniano

$$T_t\phi(x) = \int_{\mathbf{R}^d} \phi(y) e^{-\|y-x\|^2/2t}\, (2\pi t)^{-d/2}\, dy, \quad t \geq 0.$$

T^α_t tiene generador infinitesimal

$$A^\alpha = \frac{1}{2}\Delta + \alpha$$

y se cumple

$$T^\alpha_t\phi - \phi = \int_0^t A^\alpha T^\alpha_s \phi ds. \qquad (13)$$

En el siguiente lema se calculan las integrales que aparecen en las expresiones (11) y (12).

<u>LEMA</u> 1 [15]. *Para* $\phi, \psi \in C^2_b(\mathbf{R}^d) \cup S(\mathbf{R}^d)$ (C^2_b *es el espacio de las*

funciones con derivadas continuas y acotadas hasta de segundo orden)

$$\int_{\mathbf{R}^d} E\,\langle N_t^x,\phi\rangle dx = e^{\alpha t}\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)dx,\quad t\geq 0, \tag{14}$$

y

$$\int_{\mathbf{R}^d} E\,\langle N_s^x,\phi\rangle\langle N_t^x,\psi\rangle dx =$$

$$= e^{\alpha t}\{\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)T_{t-s}\psi(x)dx + m_2 V\int_{\mathbf{R}^d}\int_0^s e^{\alpha r}T_{2r}\phi(x)drT_{t-s}\psi(x)dx\},$$

$$0\leq s\leq t, \tag{15}$$

si estas expresiones son finitas.

DEMOSTRACION. Sea τ el tiempo de vida de la partícula inicial. Por lo tanto τ tiene distribución exponencial con parámetro V; entonces,

$$\langle N_t^x,\phi\rangle = \langle N_t^x,\phi\rangle\, 1_{[\tau>t]} + \langle N_t^x,\phi\rangle 1_{[\tau\leq t]}$$

y

$$E\,\langle N_t^x,\phi\rangle = E\,\langle N_t^x,\phi\rangle\, 1_{[\tau>t]} + E\,\langle N_t^x,\phi\rangle\, 1_{[\tau\leq t]}. \tag{16}$$

Si $\tau > t$, N_t^x es sólo un movimiento Browniano iniciado en x, por lo que

$$E\,\langle N_t^x,\phi\rangle\, 1_{[\tau>t]} = \int_{\mathbf{R}^d}\phi(y)e^{-\|y-x\|^2/2t}(2\pi t)^{-d/2}dy\quad P[\tau>t]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) e^{-\|y-x\|^2/2t} (2\pi t)^{-d/2} dy \, e^{-Vt}. \tag{17}$$

Si $\tau = s$, $s \leq t$, el número de partículas en el tiempo t es la suma de los números de partículas que provienen de las partículas producidas en la ramificación que ocurre en el tiempo s y en el punto y. Por lo tanto, condicionando con respecto a la primera ramificación, obtenemos

$$E \langle N_t^x, \phi \rangle \, 1_{[\tau \leq t]} =$$

$$= \int_0^t Ve^{-Vs} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|y-x\|^2/2s} (2\pi s)^{-d/2} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \, E \sum_{i=1}^{n} \langle N_{t-s}^{y,i}, \phi \rangle dy ds, \tag{18}$$

donde $N_{t-s}^{y,i}(\cdot)$ es el número de partículas en $\cdot$ que provienen de la i-ésima partícula producida en la ramificación al tiempo s en la posición y, en el tiempo $t-s$ después de su nacimiento, y ya que

$$E \sum_{i=1}^{n} \langle N_{t-s}^{y,i}, \phi \rangle = n \, E \langle N_{t-s}^{y}, \phi \rangle ,$$

tenemos

$$E \langle N_t^x, \phi \rangle \, 1_{[\tau \leq t]} = m_1 \int_0^t Ve^{-Vs} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|y-x\|^2/2s} (2\pi s)^{-d/2} E \langle N_{t-s}^{y}, \phi \rangle dy ds. \tag{19}$$

Así,

$$E \langle N_t^x, \phi \rangle = e^{-Vt} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) e^{-\|y-x\|^2/2t} (2\pi t)^{-d/2} dy$$

$$+ m_1 \int_0^t Ve^{-Vs} \int_{\mathbb{R}^d} E <N_{t-s}^y,\phi> e^{-\|y-x\|^2/2s}(2\pi s)^{-d/2}dyds. \qquad (20)$$

El procedimiento que hemos seguido para obtener la expresión (20) se llama un argumento de renovación.

Integrando (20) con respecto a x y empleando el Teorema de Fubini y el hecho de que $e^{-\|y-x\|^2/2s}(2\pi s)^{-d/2}$ es una densidad de probabilidad, se obtiene una ecuación de renovación para $\int E<N_t^x,\phi>dx$ que nos permite calcular esta integral. Sin embargo seguiremos otro procedimiento que nos será útil también para lo que sigue. Definimos

$$F(s,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} E <N_{t-s}^x,\phi>\psi(y)e^{-\|y-x\|^2/2s}(2\pi s)^{-d/2}dxdy,$$

$$0 \leq s \leq t. \qquad (21)$$

Multiplicando (20) por $\psi(x)$ e integrando en x vemos que $F(s,t)$ satisface

$$F(0,t) = e^{-Vt}F(t,t) + m_1 \int_0^t F(s,t)Ve^{-Vs}ds,$$

y se puede verificar que la solución de esta ecuación es

$$F(s,t) = e^{\alpha(t-s)} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\psi(y)e^{-\|y-x\|^2/2t}(2\pi t)^{-d/2}dxdy. \quad (22)$$

En particular, para $s = 0$ y $\psi \equiv 1$, tenemos de (21) y (22)

$$\int_{\mathbb{R}^d} E <N_t^x,\phi>dx = e^{\alpha t}\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx,$$

con lo que queda probado (14).

Probaremos (15) primero para $s = t$. Utilizando nuevamente un argumento de renovación encontramos

$$E <N_t^x,\phi><N_t^x,\psi> = e^{-Vt}\int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)\psi(y)e^{-\|y-x\|^2/2t}(2\pi t)^{-d/2}dy$$

$$+ \int_0^t Ve^{-Vs}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|y-x\|^2/2s}(2\pi s)^{-d/2}\sum_{n=0}^{\infty} p_n\; E\sum_{i=1}^{n}<N_{t-s}^{y,i},\phi>\sum_{i=1}^{n}<N_{t-s}^{y,i},\phi>dyds, \tag{23}$$

donde $N_{t-s}^{y,i}$ es como en el caso anterior, y usando la independencia,

$$E\sum_{i=1}^{n}<N_{t-s}^{y,i},\phi>\sum_{i=1}^{n}<N_{t-s}^{y,i},\psi> =$$

$$= n\; E <N_{t-s}^{y},\phi><N_{t-s}^{y},\psi> + n(n-1)E <N_{t-s}^{y},\phi><N_{t-s}^{y},\psi>.$$

Así, integrando (23)

$$\int_{\mathbb{R}^d} E <N_t^x,\phi><N_t^x,\psi>dx = e^{-Vt}\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\psi(x)dx$$

$$+ m_1\int_0^t Ve^{-Vs}\int_{\mathbb{R}^d} E <N_{t-s}^x,\phi><N_{t-s}^x,\psi>dxds$$

$$+ m_2 \int_0^t Ve^{-Vs} \int_{\mathbf{R}^d} E <N^x_{t-s},\phi> E <N^x_{t-s},\psi> dxds . \quad (24)$$

Para obtener una ecuación funcional para $\int E <N^x_t,\phi><N^x_t,\psi>dx$ debemos calcular el último término de (24). Usando

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{e^{-\|y-x\|^2/2s}}{(2\pi s)^{d/2}} \frac{e^{-\|z-x\|^2/2t}}{(2\pi t)^{d/2}} dx = \frac{e^{-\|y-z\|^2/2(s+t)}}{(2\pi(s+t))^{d/2}} .$$

y el teorema de Fubini, de (20) tenemos

$$\int_{\mathbf{R}^d} E <N^x_t,\phi> E <N^x_t,\psi>dx = e^{-2Vt} \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \phi(y)\psi(z) \frac{e^{-\|y-z\|^2/4t}}{(4\pi t)^{d/2}} dydz$$

$$+ m_1 e^{-Vt}\int_0^t Ve^{-Vs}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} [\phi(y)E<N^z_{t-s},\psi> + \psi(y)E<N^z_{t-s},\phi>] \frac{e^{-\|y-z\|^2/2(t+s)}}{(2\pi(t+s))^{d/2}} dydzds$$

$$+ m_1^2\int_0^t\int_0^t Ve^{-Vs} Ve^{-Vr}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} E<N^y_{t-s},\phi>E<N^z_{t-r},\psi> \frac{e^{-\|y-z\|^2/2(s+r)}}{(2\pi(s+r))^{d/2}} dydzdsdr. \quad (25)$$

Usando (21) y (22) en el segundo término de la derecha en (25) e integrando en s, obtenemos

$$\int_{\mathbf{R}^d} E<N^x_t,\phi>E<N^x_t,\psi>dx = e^{-2Vt}(2e^{Vm_1 t}-1)\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \phi(y)\psi(z) \frac{e^{-\|y-z\|^2/4t}}{(4\pi t)^{d/2}} dydz$$

$$+ m_1^2\int_0^t\int_0^t Ve^{-Vs}Ve^{-Vr}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} E<N^y_{t-s},\phi>E<N^z_{t-r},\psi> \frac{e^{-\|y-z\|^2/2(r+s)}}{(2\pi(r+s))^{d/2}} dydzdsdr. \quad (26)$$

Sea

$$G(r,s,t) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} E\langle N^y_{t-s},\phi\rangle E\langle N^z_{t-s},\psi\rangle \frac{e^{-\|y-z\|^2 2(r+s)}}{(2\pi(r+s))^{d/2}}\, dydz \quad 0 \leq r,\ s \leq t.$$

Así, (26) queda como sigue:

$$G(0,0,t) = e^{-2Vt}(2e^{Vm_1 t}-1)G(t,t,t) + m_1^2\int_0^t\int_0^t Ve^{-Vs}Ve^{-Vr}G(r,s,t)drds,$$

y se puede verificar que la solución de esta ecuación es

$$G(r,s,t) = e^{\alpha(2t-r-s)}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \phi(y)\psi(z)\, \frac{e^{-\|y-z\|^2/4t}}{(4\pi t)^{d/2}}\, dydz,\ 0 \leq r,\ s \leq t;$$

en particular, para $s = r = 0$, tenemos la solución de (26):

$$\int_{\mathbf{R}^d} E\langle N^x_t,\phi\rangle\ E\ \langle N^x_t,\psi\rangle dx = e^{2\alpha t}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \phi(y)\psi(z)\, \frac{e^{-\|y-z\|^2/4t}}{(4\pi t)^{d/2}}\, dydz. \qquad (27)$$

Sustituyendo (27) en (24), obtenemos una ecuación de renovación para

$$H(t) \equiv \int_{\mathbf{R}^d} E\ \langle N^x_t,\phi\rangle\langle N^x_t,\psi\rangle dx,$$

a saber

$$H(t) = e^{-Vt}\Big(\int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)\psi(x)dx + m_2\int_0^t Ve^{V(2m_1-1)s}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \phi(y)\psi(z)\frac{e^{-\|y-z\|^2/4s}}{(2\pi s)^{d/2}}\, dydzds\Big)$$

$$+\ m_1\int_0^t H(t-s)Ve^{-Vs}ds,$$

cuya solución es

$$H(t) = e^{\alpha t}[\int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)\psi(x)dx + m_2 V\int_0^t e^{\alpha r}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \phi(y)\psi(x)\ \frac{e^{-\|y-x\|^2/4r}}{(4\pi r)^{d/2}}\ dydxdr],$$

con lo que se prueba (15) para $s = t$.

Para probar (15) en general, usamos el hecho que

$$<N_t^x,\psi> - \int_0^t <N_s^x,A^\alpha\psi>ds,\quad t \geq 0,\quad \psi \in S(\mathbf{R}^d),$$

es una martingala (Corolario 3); de aquí, que para $s \leq t$,

$$E[<N_t^x,\psi>|<N_r^x,\phi>,\quad r \leq s,\ \phi \in S(\mathbf{R}^d)\,]$$

$$= <N_s^x,\psi> + E[\int_s^t <N_r^x,A^\alpha\psi>dr|<N_r^x,\phi>,\quad r \leq s,\quad \phi \in S(\mathbf{R}^d)\,]$$

y por lo tanto

$$E <N_s^x,\phi><N_t^x,\psi> = E <N_s^x,\phi><N_s^x,\psi> + \int_s^t E <N_s^x,\phi><N_r^x,A^\alpha\psi>dr\,. \tag{28}$$

Definimos

$$\psi_t(x) = T_t^\alpha\psi(x),\quad t \geq 0\,, \tag{29}$$

por lo tanto, $\psi_0 = \psi$. Verificaremos que la solución de (28) es

$$E <N_s^x,\phi><N_t^x,\psi> = E <N_s^x,\phi><N_s^x,\psi_{t-s}>,\quad s \leq t\,. \tag{30}$$

En efecto, suponiendo (30),

$$\int_s^t E <N_s^x,\phi><N_r^x,A^\alpha\psi>dr = E <N_s^x,\phi><N_s^x,\int_s^t A^\alpha\psi_{r-s}dr>$$

$$= E <N_s^x,\phi><N_s^x, \int_0^{t-s} A^\alpha T_r^\alpha\psi dr > \qquad \text{(por (13))}$$

$$= E <N_s^x,\phi><N_s^x,\psi_{t-s}-\psi>$$

$$= E <N_s^x,\phi><N_t^x,\psi> - E <N_s^x,\phi><N_s^x,\psi>,$$

lo cual nos da (28). Entonces de (15) con $s=t$, (29) e integrando (30) se obtiene (15).

PROPOSICION 2. *La esperanza y la covarianza de* N_t *están dadas por las siguientes expresiones para* $\alpha \neq 0$:

$$E <N_t,\phi> = [\gamma e^{\alpha t} + \beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)dx, \quad t \geq 0 \qquad (31)$$

$$\begin{aligned} Cov(<N_s,\phi>,<N_t,\psi>) &= C(s,\phi;t,\psi) \\ &= e^{\alpha t}[\gamma+\beta(1-e^{-\alpha s})/\alpha] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)T_{t-s}\psi(x)dx \\ &+ e^{\alpha t}\gamma m_2 V\int_0^s e^{\alpha(s-r)}\int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)T_{t+s-2r}\psi(x)dxdr \qquad (32) \\ &+ e^{\alpha t}\beta m_2 V\int_0^s e^{\alpha(s-r)}(1-e^{-\alpha r})/\alpha\int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)T_{t+s-2r}\psi(x)dxdr, \\ &\qquad s \leq t, \end{aligned}$$

y para $\alpha = 0$,

$$E \langle N_t,\phi\rangle = [\gamma + \beta t] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)dx, \tag{31'}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\langle N_s,\phi\rangle,\langle N_t,\psi\rangle) &= [\gamma + \beta t] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)T_{t-s}\psi(x)dx \\ &+ \gamma m_2 V \int_0^s \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)T_{t+s-2r}\psi(x)dxdr \\ &+ \beta m_2 V \int_0^s r \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)T_{t+s-2r}\psi(x)dxdr, \quad s \leq t. \end{aligned} \tag{32'}$$

Observación: Las expresiones (31') y (32') son casos particulares de (31) y (32).

DEMOSTRACION. Para $\alpha \neq 0$, sustituyendo (14) en (11)

$$E \langle N_t,\phi\rangle = \gamma e^{\alpha t} \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)dx + \beta\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)dxds;$$

cambiando el orden de integración e integrando se obtiene (31)

Sustituyendo (15) en (12),

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}(\langle N_s,\phi\rangle,\langle N_t,\psi\rangle) \\ &= \gamma e^{\alpha t} \{ \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)T_{t-s}\psi(x)dx + m_2 V \int_{\mathbf{R}^d} \int_0^s e^{\alpha r}T_{2r}\phi(x)drT_{t-s}\psi(x)dx\} \\ &+\beta \int_0^s e^{\alpha(t-u)} \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)T_{t-s}\psi(x)dxdu \end{aligned}$$

$$+ \beta m_2 V \int_0^s e^{\alpha(t-u)} \int_{\mathbf{R}^d} \int_0^{s-u} e^{\alpha r} T_{2r}\phi(x) dr T_{t-s}\psi(x) dx du \qquad (33)$$

cambiando el orden de integración, integrando y agrupando,

$$= e^{\alpha t}[\gamma + \beta(1-e^{\alpha s})/\alpha] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) T_{t-s}\psi(x) dx$$

$$+ e^{\alpha t}\gamma m_2 V \int_0^s e^{\alpha r} \int_{\mathbf{R}^d} T_{2r}\phi(x) T_{t-s}\psi(x) dx dr$$

$$+ \beta m_2 V \int_0^s e^{\alpha(t-u)} \int_{\mathbf{R}^d} \int_0^{s-u} e^{\alpha r} T_{2r}\phi(x) dr T_{t-s}\psi(x) dx du .$$

Observando que

$$\int_{\mathbf{R}^d} T_{2r}\phi(x) T_{t-s}\psi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) T_{t-s+2r}\psi(x) dx$$

y cambiando r por $s-r$, tenemos

$$\mathrm{Cov}(\langle N_s,\phi\rangle, \langle N_t,\psi\rangle)$$

$$= e^{\alpha t}[\gamma + \beta(1-e^{\alpha s})/\alpha] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) T_{t-s}\psi(x) dx$$

$$+ e^{\alpha t}\gamma m_2 V \int_0^s e^{\alpha(s-r)} \int_{\mathbf{R}^d} \phi(y) T_{t+s-2r}\psi(x) dy dr$$

$$+ \beta m_2 V \int_0^s e^{\alpha(t-u)} \int_u^s e^{\alpha(s-r)} \int_{\mathbf{R}^d} \phi(y) T_{t+s-2r}\psi(y) dy dr du$$

cambiando el orden de integración en el último término

$$= e^{\alpha t}[\gamma+\beta(1-e^{\alpha s})/\alpha] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)T_{t-s}\psi(x)dx$$

$$+ e^{\alpha t}\gamma m_2 V \int_0^s e^{\alpha(s-r)} \int_{\mathbf{R}^d} \phi(y)T_{t+s-2r}\psi(x)dydr$$

$$+ e^{\alpha t}\beta m_2 V \int_0^s e^{\alpha(s-r)}(1-e^{-\alpha r})/\alpha \int_{\mathbf{R}^d} \phi(y)T_{t+s-2r}\psi(y)dydr.$$

Sea $N^T \equiv \{N_t^T, t \geq 0\}$ el proceso descrito arriba con $\gamma = \gamma T$ y $\beta = \beta T$.

COROLARIO 1.

$$E <N_t^T,\phi> = T[\gamma e^{\alpha t}+\beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)dx, \quad t \geq 0. \quad (34)$$

y

$$\mathrm{Cov}(<N_s^T,\phi>,<N_t^T,\psi>) = TC(s,\phi,t,\psi), \quad (35)$$

donde $C(s,\phi;t,\psi)$ está dado por (32).

PROPOSICION 3. *Los procesos* $N \equiv \{N_t, t \geq 0\}$ *y* $N^T \equiv \{N_t^T, t \geq 0\}$ *toman valores en* $M_p^+(\mathbf{R}^d)$ *para* $p > \frac{d}{2}$.

DEMOSTRACION. En efecto, $E <N_t,\phi> < \infty$ para $\phi \in S(\mathbf{R}^d)$ no negativa por la Proposición 2, para cualquier compacto $K \subset \mathbf{R}^d$ existe ϕ no negativa tal que $1_K \leq \phi$, y es claro que

$$E\, N_t(K) \leq E\langle N_t,\phi\rangle .$$

Luego, $E\, N_t(K) < \infty$ y por lo tanto, $N_t(K) < \infty$ c.s. El resultado para N_t^T se sigue del Corolario 1.

Queda por demostrar que N_t y N_t^T son temperadas con $p > \frac{d}{2}$, pero esto es inmediato del hecho que

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{dx}{(1+|x|^2)^p} < \infty$$

y la Proposición 2.

<u>COROLARIO</u> 2. $M^T \equiv \{M_t^T, t \geq 0\}$, *donde*

$$M_t^T = \frac{N_t^T - E\, N_t^T}{T^{1/2}} ,$$

toma valores en $\mathcal{M}_p(\mathbf{R}^d)$ *para* $p > \frac{d}{2}$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Por la Proposición 3 N^T y $E\, N^T$ toman valores en $\mathcal{M}_p^+(\mathbf{R}^d)$ con $p > \frac{d}{2}$.

2. <u>Demostración de la Ley de los Grandes Números</u>.

Por la Proposición 2 y el Corolario 1,

$$E|T^{-1}\langle N_t^T,\phi\rangle - [\gamma e^{\alpha t} + \beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)dx|^2$$

$$= T^{-2}E\langle N_t^T,\phi\rangle^2 - 2T^{-1}E\langle N_t^T,\phi\rangle[\gamma e^{\alpha t} + \beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)dx$$

$$+ \{[\gamma e^{\alpha t}+\beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha]\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)dx\}^2$$

$$= T^{-2}E<N_t^T,\phi>^2 - 2\{[\gamma e^{\alpha t}+\beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha]\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)dx\}^2$$

$$+ \{[\gamma e^{\alpha t}+\beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha]\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)dx\}^2$$

$$= T^{-2}\mathrm{Var}(<N_t^T,\phi>) + T^{-2}\{T[\gamma e^{\alpha t}+\beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha]\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)dx\}^2$$

$$- \{[\gamma e^{\alpha t}+\beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha]\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)dx\}^2$$

$$= T^{-1}\mathrm{Var}(<N_t,\phi>);$$

cuando $T \to \infty$, esta última expresión tiende a cero.

3. Generador Infinitesimal y Cálculo de Martingalas.

Como mencionamos en la descripción del modelo, dado que el movimiento de las partículas es Browniano y que el tiempo de vida de cada una de ellas es exponencial, $N^T \equiv \{N_t^T, t \geq 0\}$ es un proceso de Markov. Hemos demostrado que N^T toma valores en $M_p^+(\mathbf{R}^d)$, el cual es un espacio polaco (1.2), por lo que los resultados de I.5.1 son aplicables en este caso.

Sea $B(M_p^+(\mathbf{R}^d))$ el espacio de las funciones continuas acotadas de $M_p^+(\mathbf{R}^d)$ en $\mathbf{R}$, y consideremos f en $B(M_p^+(\mathbf{R}^d))$ de la forma

$$F(\mu) = f(<\mu,\phi>),\ f \in C_b^2(\mathbf{R}),\ \phi \in S(\mathbf{R}^d),\ \mu \in M_p^+(\mathbf{R}^d),$$

donde $C_b^2(\mathbf{R})$ es el espacio de las funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ con derivadas hasta de orden 2 continuas acotadas.

Sea

$$Lf(<\mu,\phi>) = f'(<\mu,\phi>)\ <\mu, \tfrac{1}{2}\Delta\phi> +$$

$$+ \tfrac{1}{2} f''(<\mu,\phi>)\ <\mu, |\nabla\phi|^2>)$$

$$+ V \int_{\mathbf{R}^d} \sum_{n=0}^{\infty} p_n [f(<\mu,\phi> + (n-1)\phi(x)) - f(<\mu,\phi>)]\mu(dx)$$

$$+ \beta T \int_{\mathbf{R}^d} [f(<\mu,\phi> + \phi(x)) - f(<\mu,\phi>)]dx. \tag{36}$$

PROPOSICION 4 [7]. *El operador* L *es el generador infinitesimal del proceso de Markov* N^T, *y para cada* $f \in C_b^2(\mathbf{R})$ *y* $\phi \in S(\mathbf{R}^d)$,

$$f(<N_t^T,\phi>) - \int_0^t Lf(<N_s^T,\phi>)ds, \quad t \geq 0, \tag{37}$$

es una martingala con respecto a la filtración $F_t = \sigma\{<N_s^T,\psi>, s \leq t, \psi \in S(\mathbf{R}^d)\}$, $t \geq 0$.

Obsérvese que en (36) los dos primeros términos corresponden al generador infinitesimal del movimiento Browniano, el tercero proviene de la ramificación y el cuarto se debe a la inmigración. Para $f(x) = x$ (36) queda como sigue:

$$Lf(<\mu,\phi>) = <\mu, \tfrac{1}{2}\Delta\phi>$$

$$+ V \int_{\mathbf{R}^d} \sum_{n=0}^{\infty} p_n[<\mu,\phi> + (n-1)\phi(x) - <\mu,\phi>]\mu(dx)$$

$$+ \beta \int_{\mathbf{R}^d} [<\mu,\phi> + \phi(x) - <\mu,\phi>]dx$$

$$= <\mu, \frac{1}{2}\Delta\phi> + V(m_1-1)<\mu,\phi> + \beta T<\lambda,\phi>$$

$$= <\mu, \frac{1}{2}\Delta\phi> + \alpha<\mu,\phi> + \beta T<\lambda,\phi>,$$

donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbf{R}^d$. Así, por la Proposición 4

$$<N_t^T,\phi> - \int_0^t [<N_s^T,(\frac{1}{2}\Delta + \alpha)\phi> + \beta T<\lambda,\phi>]ds, \quad t \geq 0, \tag{38}$$

es una martingala. (En este caso f no es acotada, pero el hecho de que el proceso (38) es integrable implica que también en este caso es martingala; véase observación al Teorema I.16).

<u>COROLARIO</u> 3. *Si se comienza con una sola partícula en el punto* x *y no hay inmigración, entonces*

$$<N_t^x,\phi> - \int_0^t <N_s^x,(\frac{1}{2}\Delta + \alpha)\phi>ds, \quad t \geq 0,$$

es una martingala.

<u>PROPOSICION</u> 5. *Existe una versión del proceso* N^T *con trayectorias muestrales en* $D([0,\infty),S'(\mathbf{R}^d))$.

DEMOSTRACION. Puesto que el operador $\frac{1}{2}\Delta+\alpha$ es autoadjunto, la expresión (38) puede escribirse como sigue:

$$\langle N_t^T - \int_0^t [(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)N_s^T + \beta T\lambda]ds, \phi\rangle, \quad t \geq 0. \tag{39}$$

Para cada ϕ en $S(\mathbb{R}^d)$ (39) es martingala; por lo tanto, para cada ϕ tiene una versión continua por la derecha con límites por la izquierda (para esto, suponemos que la filtración satisface las llamadas "condiciones usuales" [36]), y por el Teorema I.13,

$$N_t^T - \int_0^t [(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)N_s^T + \beta T\lambda]ds, \quad t \geq 0,$$

tiene una versión en $D_{S'}[\infty]$. Por otro lado, es claro que

$$\int_0^t \langle(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)N_s^T + \beta T\lambda, \phi\rangle ds \quad t \geq 0,$$

es continuo en t para cada ϕ; así por el Teorema I.12,

$$\int_0^t [(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)N_s^T + \beta T\lambda]ds, \quad t \geq 0,$$

tiene una versión en $C_{S'}[\infty]$.

De aquí que N^T se puede realizar en $D_{S'}[\infty]$.

Sea $M^T = \{M_t^T, t \geq 0\}$ el proceso de fluctuación definido en II.1(1).

PROPOSICION 6. *Para cada* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle M_t^T,\phi\rangle - \int_0^t \langle M_s^T,(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi\rangle ds, \quad t \geq 0, \tag{40}$$

es martingala con respecto a la filtración $F_t^T = \{M_s^T, s \leq t\}$, $t \geq 0$.

DEMOSTRACION.

$$\langle M_t^T,\phi\rangle - \int_0^t \langle M_s^T,(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi\rangle ds$$

$$= T^{-1/2}\{\langle N_t^T - (T[\gamma e^{\alpha t}+\beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha]\lambda,\phi\rangle) - \int_0^t \langle N_s^T - T[\gamma e^{\alpha s}+\beta(e^{\alpha s}-1)/\alpha]\lambda,(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi\rangle ds\}$$

puesto que $\langle\lambda,\Delta\phi\rangle = 0$

$$= T^{-1/2}\{\langle N_t^T,\phi\rangle - \int_0^t \langle N_s^T,(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi\rangle ds - T[\gamma e^{\alpha t}+\beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha]\langle\lambda,\phi\rangle$$

$$+ T\int_0^t [\gamma e^{\alpha s}+\beta(e^{\alpha s}-1)/\alpha]ds\,\alpha\langle\lambda,\phi\rangle\}$$

$$= T^{-1/2}\{\langle N_t^T,\phi\rangle - \int_0^t \langle N_s^T,(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi\rangle ds - T[\gamma e^{\alpha t}+\beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha]\langle\lambda,\phi\rangle$$

$$+ T[\gamma e^{\alpha t}+\beta(e^{\alpha t}-1)/\alpha]\langle\lambda,\phi\rangle - \gamma T\langle\lambda,\phi\rangle - \beta T\int_0^t \langle\lambda,\phi\rangle ds\}$$

$$= T^{-1/2}\{\langle N_t^T,\phi\rangle - \int_0^t [\langle N_s^T,(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi\rangle + \beta T\langle\lambda,\phi\rangle]ds - \gamma T\langle\lambda,\phi\rangle\}. \tag{41}$$

Por (38), (41) es martingala.

De la definición de M^T y de la Proposición 5 se tiene:

PROPOSICION 7. *El proceso* $M^T \equiv \{M_t^T, t \geq 0\}$ *tiene una versión en* $D_{S'}[\cdots]$.

Las martingalas (38) y (40) son de cuadrado integrable, por lo que tienen descomposición de Doob-Meyer. A continuación encontramos sus procesos crecientes. El proceso creciente de la martingala

$$<N_t^T,\phi> - \int_0^t [<N_s^T,(\frac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi> + \beta T<\lambda,\phi>]ds, \quad t \geq 0, \tag{42}$$

está dado por (Teorema I.16)

$$\int_0^t H_f(<N_s,\phi>)ds, \tag{43}$$

donde

$$H_f(x) = (Lf^2 - 2fLf)(x),$$

y L está dado por (36). Para $f(x) = x$, tenemos

$$Lf^2(<\mu,\phi>) = 2<\mu,\phi><\mu,\frac{1}{2}\Delta\phi> + <\mu,|\nabla\phi|^2>$$

$$+ V\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=0}^{\infty} p_n[(<\mu,\phi> + (n-1)\phi(x))^2 - <\mu,\phi>^2]\mu(dx)$$

$$+ \beta T\int_{\mathbb{R}^d} [(<\mu,\phi> + \phi(x))^2 - <\mu,\phi>^2]dx$$

$$= 2<\mu,\phi><\mu,\frac{1}{2}\Delta\phi> + <\mu,|\nabla\phi|^2>$$

$$+ V \int_{\mathbb{R}^d} [\sum_{n=0}^{\infty} p_n(<\mu,\phi>^2 + (n-1)^2\phi^2(x) + 2<\mu,\phi>(n-1)\phi(x) - <\mu,\phi>^2)]\mu(dx)$$

$$+ \beta T\int_{\mathbb{R}^d} [<\mu,\phi>^2 + \phi^2(x) + 2<\mu,\phi>\phi(x) - <\mu,\phi>^2]dx$$

$$= 2<\mu,\phi><\mu,\tfrac{1}{2}\Delta\phi> + <\mu,|\nabla\phi|^2>$$

$$+ V \int_{\mathbb{R}^d} [\sum_{n=0}^{\infty} p_n(n(n-1))\phi^2(x) - \sum_{n=0}^{\infty} p_n(n-1)\phi^2(x) +$$

$$+ 2<\mu,\phi> \sum_{n=0}^{\infty} p_n(n-1)\phi(x)]\mu(dx)$$

$$+ \beta T\int_{\mathbb{R}^d} [\phi^2(x) + 2<\mu,\phi>\phi(x)]dx$$

$$= 2<\mu,\phi><\mu,\tfrac{1}{2}\Delta\phi> + <\mu,|\nabla\phi|^2>$$

$$+ V \int_{\mathbb{R}^d} [m_2\phi^2(x) - (m_1-1)\phi^2(x) + 2<\mu,\phi>(m_1-1)\phi(x)]\mu(dx)$$

$$+ \beta T\int_{\mathbb{R}^d} [\phi^2(x) + 2<\mu,\phi>\phi(x)]dx$$

$$= 2<\mu,\phi><\mu,\tfrac{1}{2}\Delta\phi> + <\mu,|\nabla\phi|^2> + V(m_2-m_1+1)<\mu,\phi^2>$$

$$+ 2<\mu,\phi>V(m_1-1)<\mu,\phi> + 2\beta T <\mu,\phi><\lambda,\phi> + \beta T<\lambda,\phi^2>.$$

Así,

$$H_f(<\mu,\phi>) = 2<\mu,\phi><\mu,\tfrac{1}{2}\Delta\phi> + <\mu,|\nabla\phi|^2>$$

$$+ V(m_2-m_1+1)\langle\mu,\phi^2\rangle + 2\alpha\langle\mu,\phi\rangle^2 + 2\beta T\langle\mu,\phi\rangle\langle\lambda,\phi\rangle$$

$$+ \beta T\langle\lambda,\phi^2\rangle - 2\langle\mu,\phi\rangle(\langle\mu,(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi\rangle + \beta T\langle\lambda,\phi\rangle)$$

$$= \langle\mu,|\nabla\phi|^2 + V(m_2-m_1+1)\phi^2\rangle + \beta T\langle\lambda,\phi^2\rangle.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$(\langle N_t^T,\phi\rangle - \int_0^t [\langle N_s^T,(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi\rangle + \beta T\langle\lambda,\phi\rangle]ds)^2$$

$$- \int_0^t [\langle N_s^T,|\nabla\phi|^2 + V(m_2-m_1+1)\phi^2\rangle + \beta T\langle\lambda,\phi^2\rangle]ds, \quad t \geq 0, \tag{44}$$

es martingala.

En forma análoga se puede encontrar el proceso creciente de la martingala (40), utilizando (44); se encuentra que

$$(\langle M_t^T,\phi\rangle - \int_0^t \Theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds)^2 - \int_0^t \Theta_{T,\phi}^{(2)}(s)ds, \quad t \geq 0, \tag{45}$$

es martingala, donde

$$\Theta_{T,\phi}^{(1)}(s) = \langle M_s^T,(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi\rangle \tag{46}$$

y

$$\Theta_{T,\phi}^{(2)}(s) = T^{-1}\langle N_s^T,|\nabla\phi|^2 + V(m_2-m_1+1)\phi^2\rangle + \beta\langle\lambda,\phi^2\rangle \tag{47}$$

4. Demostración del Teorema de Fluctuación.

Estudiaremos el comportamiento asintótico de M^T cuanto $T \to \infty$. Puesto que M^T se puede realizar en $D_{S'}[\infty]$ (Proposición III.7), podemos emplear el Teorema I.11 para establecer la convergencia débil de M^T cuando $T \to \infty$.

En la demostración de la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales se utilizará el desarrollo de la función característica dado por el siguiente lema.

LEMA 2. *Si una variable aleatoria real* X *tiene momento finito de orden* n, *entonces*,

$$E\, e^{iuX} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!} EX^k + \frac{(iu)^n}{n!} [EX^n + \delta(u)], \quad u \in \mathbf{R}, \qquad (48)$$

donde $\delta(u) \to 0$ *cuando* $u \to 0$ *y* $|\delta(u)| \leq 2E|X|^n$ *para toda* u.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 2. Por el Teorema I.11 basta demostrar:

a) Las distribuciones finito-dimensionales de M^T convergen débilmente a las correspondientes de M cuando $T \to \infty$.

b) Compacidad relativa débil. Para cada $\phi \in S(\mathbf{R}^d)$ y $F^T_{t,\phi} = \sigma\{\langle M^T_s, \phi\rangle, s \leq t\}$ se tiene que para $\tau > 0$ y $\delta > 0$, existen variables aleatorias $\gamma^\tau_T(\delta) \geq 0$ tales que

$$E[|\langle M^T_{t+\delta}, \phi\rangle - \langle M^T_t, \phi\rangle|^2 | F^T_{t,\phi}] \leq E[\gamma^\tau_T(\delta) | F^T_{t,\phi}], \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

y

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{T \to \infty}} E[\gamma^\tau_T(\delta)] = 0.$$

a) Convergencia de las Distribuciones Finito-Dimensionales. Sean $t_1 \leq \cdots \leq t_m$ en $[0,\infty)$, $\phi_1,\ldots,\phi_m$ en $S(\mathbb{R}^d)$, y $u_1,\ldots,u_m$ en $\mathbb{R}$. De las expresiones (2), (11), (12), (31), (32), (34), tenemos

$$E \exp\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j \langle M_{t_j}^T, \phi_j \rangle \}$$

$$= \exp\{ -iT^{-1/2} \sum_{j=1}^{m} u_j E\langle N_{t_j}^T, \phi_j \rangle \} \; E \exp\{ iT^{-1/2} \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j}^T, \phi_j \rangle \}$$

Por (27) y (34)

$$= \exp\{ -iT^{-1/2} \sum_{j=1}^{m} u_j E \langle N_{t_j}^T, \phi_j \rangle \}$$

$$\cdot \exp\{ \gamma T \int_{\mathbb{R}^d} E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} T^{-1/2} u_j \langle N_{t_j}^x, \phi_j \rangle \} - 1] dx$$

$$+ \beta T \int_0^{t_m} \int_{\mathbb{R}^d} E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} T^{-1/2} u_j \langle N_{t_j - s}^x, \phi_j \rangle \} - 1] \, dx ds \}$$

$$= \exp\{ T \int_{\mathbb{R}^d} \gamma E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} T^{-1/2} u_j \langle N_{t_j}^x, \phi_j \rangle \} - 1 - iT^{-1/2} \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j}^x, \phi_j \rangle] dx$$

$$+ T \int_0^{t_m} \int_{\mathbb{R}^d} \beta E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} T^{-1/2} u_j \langle N_{t_j - s}^x, \phi_j \rangle \} - 1 - iT^{-1/2} \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j - s}^x, \phi_j \rangle] dx ds \}$$

Sumando y restando $\frac{1}{2} \gamma T^{-1} \sum_{j,k} u_j u_k E\langle N_{t_j}^x, \phi_j \rangle \langle N_{t_k}^x, \phi_k \rangle$ y

$\frac{1}{2} \beta T^{-1} \sum_{j,k} u_j u_k \, E\langle N_{t_j - s}^x, \phi_j \rangle \langle N_{t_k - s}^x, \phi_k \rangle$ en la primera y en la segunda integral respectivamente

$$= \exp\{ T \int_{\mathbb{R}^d} \gamma E[\exp\{ i \sum_{j=1}^{m} T^{-1/2} u_j \langle N_{t_j}^x, \phi_j \rangle \} - 1$$

$$-iT^{-1/2}\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle + \frac{1}{2}T^{-1}\sum_{j,k} u_j u_k \langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle\langle N^x_{t_k},\phi_k\rangle]dx$$

$$+ T\int_0^{t_m}\int_{\mathbf{R}^d} \beta E[\exp\{\, i\sum_{j=1}^{m} T^{-1/2}u_j\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle\} - 1 - iT^{-1/2}\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle$$

$$+ \frac{1}{2}T^{-1}\sum_{j,k} u_j u_k\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle\langle N^x_{t_k-s},\phi_k\rangle]dxds\}\cdot$$

$$\cdot\exp\{-\frac{1}{2}\gamma\int_{\mathbf{R}^d}\sum_{j,k} u_j u_k E\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle\langle N^x_{t_k},\phi_k\rangle dx$$

$$-\frac{1}{2}\beta\int_0^{t_m}\int_{\mathbf{R}^d}\sum_{j,k} u_j u_k E\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle\langle N^x_{t_k-s},\phi_k\rangle dxds\}.$$

Para $u = T^{-1/2}$ y $X_1 = \sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle$ y $X_2 = \sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle$, por el Lema 2 tenemos

$$= \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k} u_j u_k C(t_j,\phi_j;t_k,\phi_k)\}\cdot$$

$$\cdot\exp\{T\int_{\mathbf{R}^d} T^{-1}\delta_x^{(1)}(T^{-1/2})dx + T\int_0^{t_m}\int_{\mathbf{R}^d} T^{-1}\delta_x^{(2)}(T^{-1/2})dxds\},$$

donde

$$|\delta_x^{(1)}(T^{-1/2})| \le 2E|\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle|^2 \le KE\sum_{j=1}^{m} u_j^2\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle^2,$$

$$|\delta_x^{(2)}(T^{-1/2})| \le 2E|\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle|^2 \le KE\sum_{j=1}^{m} u_j^2\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle^2$$

y

$$\int_{\mathbf{R}^d} E\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle^2 dx < \infty \quad y \quad \int_0^{t_m}\int_{\mathbf{R}^d} E\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle^2 dxds < \infty .$$

Por lo tanto, por el Teorema de Convergencia Dominada,

$$\lim_{T\to\infty} E \exp\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j\langle M^T_{t_j},\phi_j\rangle\}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \{ \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k} u_j u_k C(t_j,\phi_j;t_k,\phi_k)\} \cdot$$

$$\cdot \exp\{\int_{\mathbf{R}^d} \delta_x^{(1)}(T^{-1/2})dx + \int_0^{t_m}\int_{\mathbf{R}^d} \delta_x^{(2)}(T^{-1/2})dxds\}\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k} u_j u_k C(t_j,\phi_j;t_k,\phi_k)\} \cdot$$

$$\cdot \exp\{\int_{\mathbf{R}^d} \lim_{T\to\infty} \delta_x^{(1)}(T^{-1/2})dx + \int_0^{t_m}\int_{\mathbf{R}^d} \lim_{T\to\infty} \delta_x^{(2)}(T^{-1/2})dxds\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k} u_j u_k C(t_j,\phi_j;t_k,\phi_k)\}. \tag{49}$$

(49) es la función característica de un vector aleatorio de dimensión m, Gaussiano centrado, con covarianzas $C(t_j,\phi_j;t_k,\phi_k)$. Por el Teorema de Continuidad de Lévy, el vector aleatorio

$$(\langle M^T_{t_1},\phi_1\rangle ,\ldots, \langle M^T_{t_m},\phi_m\rangle)$$

converge en distribución a dicho vector aleatorio Gaussiano cuando $T\to\infty$.

b) <u>Compacidad Relativa</u>. Debido a (45), (46) y (47) el proceso $<M^T,\phi>$ cumple con las condiciones del Lema I.1, así

$$E[(<M_{t+s}^T,\phi> - <M_t^T,\phi>)^2 | F_{t,\phi}^T\} \leq E[\gamma_T^\tau(\delta)|F_{t,\phi}^T], \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Obsérvese que la filtración $\{F_{t,\phi}^T\}$ no es la de la Proposición 6; sin embargo, $F_{t,\phi}^T \subset F_t^T$, por lo que se sigue cumpliendo esta relación. Por lo tanto, sólo queda por demostrar

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{T\to\infty}} E[\gamma_T^\tau(\delta)] = 0,$$

donde, por el Lema I.1, (46) y (47),

$$\gamma_T^\tau(\delta) = 2\delta^2 \sup_{0\leq s\leq \tau+\delta} (\Theta_{T,\phi}^{(1)}(s))^2 + 2\delta \sup_{0\leq s\leq \tau+\delta} \Theta_{T,\phi}^{(2)}(s)$$

y

$$\Theta_{T,\phi}^{(1)}(s) = <M_s^T,(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi>,$$

$$\Theta_{T,\phi}^{(2)}(s) = T^{-1}<N_s^T,|\nabla\phi|^2 + V(m_2-m_1+1)\phi^2> + \beta<\lambda,\phi^2>.$$

En el siguiente desarrollo se obtiene una cota para $E \sup_{0\leq t\leq\tau} <M_t^T,\phi>^2$.

$$E \sup_{0\leq t\leq\tau} <M_t^T,\phi>^2 = E \sup_{0\leq t\leq\tau} (<M_t^T,\phi> - \int_0^t \Theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds + \int_0^t \Theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds)^2$$

$$\leq 2E \sup_{0\leq t\leq \tau} (\langle M_t^T,\phi\rangle - \int_0^t \Theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds)^2 + 2E \sup_{0\leq t\leq\tau} (\int_0^t \Theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds)^2$$

$$\leq 2E \sup_{0\leq t\leq \tau} (\langle M_t^T,\phi\rangle - \int_0^t \Theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds)^2 + 2E \sup_{0\leq t\leq\tau} t\int_0^t (\Theta_{T,\phi}^{(1)})^2(s)ds$$

$$\leq 2E \sup_{0\leq t\leq \tau} (\langle M_t^T,\phi\rangle - \int_0^t \Theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds)^2 + 2\tau E\int_0^\tau (\Theta_{T,\phi}^{(1)})^2(s)ds. \tag{50}$$

Por la desigualdad de Doob para martingalas,

$$[E \sup_{0\leq t\leq \tau} (\langle M_t^T,\phi\rangle - \int_0^t \Theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds)^2]^{1/2}$$

$$\leq 2[E(\langle M_\tau^T,\phi\rangle - \int_0^t \Theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds)^2]^{1/2}$$

$$\leq 2[E\langle M_\tau^T,\phi\rangle^2]^{1/2} + 2[E(\int_0^\tau \Theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds)^2]^{1/2}$$

$$\leq 2[E\langle M_\tau^T,\phi\rangle^2]^{1/2} + 2\tau^{1/2}[\int_0^\tau E(\Theta_{T,\phi}^{(1)})^2(s)ds]^{1/2}. \tag{51}$$

Por (35),

$$E\langle M_t^T,\phi\rangle^2 = T^{-1}\ \mathrm{Var}\ \langle N_t^T,\phi\rangle = C(t,\phi;t,\phi)$$

$$= e^{\alpha t}[\gamma+\beta(1-e^{-\alpha t})/\alpha] \int_{\mathbf{R}^d} \phi^2(x)dx$$

$$+ e^{\alpha t}\gamma m_2 V \int_0^t e^{\alpha(t-r)} \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) T_{2(t-r)}\phi(x)dxdr$$

$$+ e^{\alpha t}\beta m_2 V \int_0^t e^{\alpha(t-r)}(1-e^{-\alpha r})/\alpha \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) T_{2(t-r)}\phi(x)dxdr. \tag{52}$$

Obsérvese que

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\phi(x)T_{2(t-r)}\phi(x)|dx = \int_{\mathbf{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{(1+|x_j|)^2}{(1+|x_j|)^2} |\phi(x)||T_{2(t-r)}\phi(x)|dx$$

$$\leq \int_{\mathbf{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{(1+|x_j|)^2} \sup_x \prod_{j=1}^{d} (1+|x_j|)^2|\phi(x)| \sup_x|T_{2(t-r)}\phi(x)|dx$$

Debido a que $T_{2(t-r)}$ es una contracción en $C(\mathbf{R}^d)$,

$$\leq \|\phi\|_2^2 \int_{\mathbf{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{(1+|x_j|)^2} dx.$$

Sea

$$K = \int_{\mathbf{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{(1+|x_j|)^2} dx < \infty .$$

Entonces, de (52),

$$E\langle M_t^T,\phi\rangle^2 \leq \{ e^{\alpha t}[\gamma+\beta(1-e^{-\alpha t})/\alpha]$$

$$+ e^{\alpha t}\gamma m_2 V \int_0^t e^{\alpha(t-r)}dr$$

$$+ e^{\alpha t}\beta m_2 V \int_0^t e^{\alpha(t-r)}(1-e^{-\alpha r})/\alpha \; dr \,\} \, \|\phi\|_2^2 \, K$$

$$= e^{\alpha t}\{ \gamma+\beta(1-e^{-\alpha t})/\alpha + \gamma m_2 V(e^{\alpha t}-1)/\alpha$$

$$+ \beta m_2 V \,[\, \frac{(e^{\alpha t}-1)}{\alpha^2} + \frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2\alpha^2} \,]\,\} \, \|\phi\|_2^2 \, K \qquad (\text{caso} \quad \alpha \neq 0)$$

$$\leq M\|\phi\|_2^2 \, e^{2\alpha t}, \tag{53}$$

donde $M < \infty$ es una constante. Por lo tanto,

$$E(\Theta^{(1)}_{T,\phi}(s))^2 \leq M \, \| \tfrac{1}{2}\, \Delta\phi + \alpha\phi\|_2^2 \, e^{2\alpha s} \tag{54}$$

y

$$\int_0^\tau E(\Theta^{(1)}_{T,\phi}(s))^2 ds \leq M \, \| \tfrac{1}{2}\, \Delta\phi + \alpha\phi\|_2^2 \, \frac{e^{2\alpha\tau}-1}{2\alpha} \, . \tag{55}$$

Así, sustituyendo (53) y (55) en (51),

$$[E \sup_{0\leq t\leq\tau} (\langle M_t,\phi\rangle - \int_0^t \Theta^{(1)}_{T,}(s)ds)^2]^{1/2}$$

$$\leq M_1\{\|\phi\|_2 \, e^{\alpha\tau} + \| \tfrac{1}{2}\, \Delta\phi + \alpha\phi\|_2 \, \tau^{1/2} \, (\, \frac{e^{2\alpha\tau}-1}{\alpha} \,)^{1/2}\}, \tag{56}$$

donde $M_1 < \infty$ es una constante.

Sustituyendo (55) y (56) en (50),

$$E \sup_{0\leq t\leq \tau} \langle M_t^T,\phi\rangle^2 \leq M_2\{\|\phi\|_2^2\, e^{2\alpha\tau} + \|\tfrac{1}{2}\,\Delta\phi + \alpha\phi\|_2^2\, \tau(\frac{e^{2\alpha\tau}-1}{\alpha})\},$$

donde $M_2 < \infty$ es una constante.

Por lo tanto,

$$\lim_{\delta\to 0}\ \overline{\lim_{T\to\infty}}\ \delta^2\, E \sup_{0\leq s\leq \tau+\delta} (\Theta_{T,\phi}^{(1)}(s))^2 = 0\,. \tag{57}$$

Para N_s^T, siguiendo el mismo procedimiento anterior se encuentra una cota para $E \sup_{0\leq t\leq\tau} \langle N_t^T,\phi\rangle^2$, y puesto que $E \sup_{0\leq t\leq\tau} \langle N_t^T,\phi\rangle \leq [E \sup_{0\leq t\leq\tau}\langle N_t^T,\phi\rangle^2]^{1/2}$,

$$\lim_{\delta\to 0}\ \overline{\lim_{T\to\infty}}\quad E \sup_{0\leq t\leq \tau+\delta} \Theta_{T,\phi}^{(2)}(s) = 0\,. \tag{58}$$

Por lo tanto, de (57) y (58),

$$\lim_{\delta\to 0}\ \overline{\lim_{T\to\infty}}\ E[\gamma_T^{\tau}(\delta)] = 0.$$

Así, hemos probado que $M^T \overset{\mathcal{D}}{\to} M$ en $D_{S'}[\infty]$, donde M es un proceso Gaussiano centrado con valores en $S'(\mathbf{R}^d)$ cuya funcional de covarianza está dada por

$$\mathrm{Cov}(\langle M_s,\phi\rangle,\langle M_t,\psi\rangle) = C(s,\phi;t,\psi).$$

5. Demostraciones de Propiedades del Proceso Límite de las Fluctuaciones.

PROPOSICION 8. *Sea* $M \equiv \{M_t, t \geq 0\}$ *el proceso límite de las fluc-*

tuaciones; entonces

$$<M_t,\phi> - \int_0^t <M_s,(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi>ds,\ t \geq 0, \tag{59}$$

es martingala de cuadrado integrable con respecto a la filtración $F_t = \sigma\{<M_r,\phi>, r \leq t\}$, $t \geq 0$, *para cada* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$.

DEMOSTRACION. Por el Teorema I.18 (Observación (1)) basta demostrar que

$$\mathrm{Cov}(<M_s,\phi>,<M_t,\psi>) = \mathrm{Cov}(<M_s,\phi>,<M_s,T^{\alpha}_{t-s}\psi>),\ s \leq t,$$

donde $\{T^{\alpha}_t\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo con generador infinitesimal $A = \frac{1}{2}\Delta+\alpha$. Recordemos que $T^{\alpha}_t = e^{\alpha t}T_t$. Del Teorema 2 tenemos

$$\mathrm{Cov}(<M_s,\phi>,<M_t,\psi>) =$$

$$= e^{\alpha t}[\gamma+\beta(1-e^{-\alpha s})/\alpha]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{t-s}\psi(x)dx$$

$$+ e^{\alpha t}\gamma m_2 V\int_0^s e^{\alpha(s-r)}\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{t+s-2r}\psi(x)dxdr$$

$$+ e^{\alpha t}\beta m_2 V\int_0^s e^{\alpha(s-r)}(1-e^{-\alpha r})/\alpha\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{t+s-2r}\psi(x)dxdr$$

$$= e^{\alpha s}[\gamma+\beta(1-e^{-\alpha s})/\alpha]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)e^{\alpha(t-s)}T_{t-s}\psi(x)dx$$

$$+ e^{\alpha s}\gamma m_2 V \int_0^s e^{\alpha(s-r)} \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) e^{\alpha(t-s)} T_{t+s-2r}\psi(x)dxdr$$

$$+ e^{\alpha s}\beta m_2 V \int_0^s e^{\alpha(s-r)}(1-e^{-\alpha r})/\alpha \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) e^{\alpha(t-s)} T_{t+s-2r}\psi(x)dxdr$$

Usando la propiedad de semigrupo de T_t,

$$= e^{\alpha s}[\gamma+\beta(1-e^{-\alpha s})/\alpha] \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) e^{\alpha(t-s)} T_{t-s}\psi(x)dx$$

$$+ e^{\alpha s}\gamma m_2 V \int_0^s e^{\alpha(s-r)} \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) T_{2s-2r}\, e^{\alpha(t-s)} T_{t-s}\psi(x)dxdr$$

$$+ e^{\alpha s}\beta m_2 V \int_0^s e^{\alpha(s-r)}(1-e^{-\alpha r})/\alpha \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) T_{2s-2r} e^{\alpha(t-s)} T_{t-s}\psi(x)dxdr$$

$$= \mathrm{Cov}(\langle M_s,\phi\rangle, \langle M_s, T^{\alpha}_{t-s}\psi\rangle).$$

<u>DEMOSTRACION</u> <u>DEL</u> <u>TEOREMA</u> 3. Para probar que M tiene trayectorias en $C_{S'}[\infty]$, por el Teorema I.12 basta demostrar que para cada $\phi \in S(\mathbf{R}^d)$ el proceso

$$M_\phi \equiv \{\langle M_t,\phi\rangle, t \geq 0\} \tag{60}$$

es continuo. M_ϕ es un proceso Gaussiano real, centrado, por lo que por el Teorema I.15, si

$$\mathrm{Var}[\langle M_{t'},\phi\rangle - \langle M_{t''},\phi\rangle] \leq B|t'-t''|^{\beta}$$

para $B,\beta > 0$ y $t',t'' \in [0,\tau]$, entonces M_ϕ es continuo sobre $[0,\tau]$.

Esto puede hacerse para τ arbitrario de varias maneras. Por ejemplo, mediante cálculos con la covarianza de M (en forma similar a [15]), o empleando la martingala de la Proposición 6 y el Lema I.1 de manera semejante a la demostración de la parte b) del Teorema 2.

Sin embargo, como la continuidad de las trayectorias de M se sigue de la continuidad en $\|\cdot\|_{-p}$ para algún $p \in \mathbb{N}$, probaremos solamente esta última.

Por el Teorema I.14 basta demostrar que existe $f \in F_+$ tal que

$$\sup_{T \in \mathbb{R}_+} \frac{V_T(\phi)}{f(T)} < \infty,$$

donde

$$V_T(\phi) = E \sup_{0 \leq t \leq T} \langle M_t,\phi\rangle^2 .$$

Empleando la martingala de la Proposición 8 y siguiendo el mismo procedimiento que en la demostración del Teorema 2, parte b),

$$E \sup_{0\leq t\leq T} \langle M_t,\phi\rangle^2 \leq 2E \sup_{0\leq t\leq T} (\langle M_t,\phi\rangle - \int_0^t \langle M_s,(\tfrac{1}{2}\Delta + \alpha)\phi\rangle ds)^2$$

$$+ 2T[\int_0^T E\langle M_s,(\tfrac{1}{2}\Delta + \alpha)\phi\rangle^2 ds]$$

$$\leq 8E\langle M_T,\phi\rangle^2 + 10T\Big[\int_0^T E\langle M_s,(\tfrac{1}{2}\Delta+\alpha)\phi\rangle^2 ds\Big]$$

$$\leq 8K\|\phi\|_2^2\, g(T) + 10K\,\|\tfrac{1}{2}\Delta\phi + \alpha\phi\|_2^2 \int_0^T g(t)dt\,,$$

donde $K < \infty$ es una constante y

$$g(t) = e^{\alpha t}(\gamma+\beta(1-e^{-\alpha t})/\alpha + \gamma m_2 V(e^{\alpha t}-1)t +$$

$$+ \beta m_2 V[(e^{\alpha t}-1)/\alpha^2 + (e^{\alpha t}-e^{-\alpha t})/2\alpha^2]\} \quad (\text{caso } \ \alpha \neq 0)$$

Entonces, tenemos

$$V_T(\phi) \leq (8K\|\phi\|_2^2 + 10K\,\|\tfrac{1}{2}\Delta\phi + \alpha\phi\|_2^2) f(T),$$

donde

$$f(T) = g(T) + \int_0^T g(t)dt.$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4. Basta verificar las condiciones del Teorema I.19 y encontrar $\langle Q_t\phi,\psi\rangle$ con la expresión I (43). Hemos demostrado ya que M es un proceso generalizado Gaussiano centrado, continuo, cuya funcional de covarianza satisface

$$\mathrm{Cov}(\langle M_s,\phi\rangle,\langle M_t,\psi\rangle) = \mathrm{Cov}(\langle M_s,\phi\rangle,\langle M_s,T^{\alpha}_{t-s}\psi\rangle),\ s \leq t,$$

donde T_t^α es el semigrupo $T_t^\alpha = e^{\alpha t}T_t$, y $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo Browniano, y el generador infinitesimal de T_t^α es $A^\alpha = \frac{1}{2}\Delta+\alpha$, el cual es continuo de $S(\mathbb{R}^d)$ en sí mismo.

Lo único que resta es calcular la expresión

$$\langle Q_t\phi,\psi\rangle = \frac{d}{dt} K(t,\phi;t,\psi) - K(t,A^\alpha\phi;t,\psi) - K(t,\phi;tA^\alpha\psi),$$

donde

$$K(t,\phi;t,\psi) = \mathrm{Cov}(\langle M_t,\phi\rangle,\langle M_t,\psi\rangle).$$

En los siguientes cálculos emplearemos notación abreviada.

Del Teorema 2 tenemos

$$K(t,\phi;t,\psi) = \gamma\{e^{\alpha t} \int\phi\psi + m_2V\int\phi \int_0^t e^{\alpha r}T^\alpha_{2(t-r)}\psi dr\}$$

$$+ \beta\{ \frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha} \int\phi\psi + m_2V\int\phi \int_0^t \frac{e^{\alpha r}-1}{\alpha} T^\alpha_{2(t-r)}\psi dr\}.$$

Usando la regla de Leibniz y $\frac{d}{dt} T_t^\alpha = T_t^\alpha A^\alpha$ se encuentra

$$\frac{d}{dt} K(t,\phi;t,\psi) = \gamma\{ \alpha e^{\alpha t}\int\phi\psi + e^{\alpha t}m_2V\int\phi\psi + m_2V\int\phi\int_0^t e^{\alpha r}T^\alpha_{2(t-r)}A^\alpha\psi dr \} +$$

$$+ \beta\{ e^{\alpha t}\int\phi\psi + m_2V \frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha} \int\phi\psi + 2m_2V\int\phi \int_0^t \frac{e^{\alpha r}-1}{\alpha} T^\alpha_{2(t-r)}A^\alpha\psi dr\}.$$

Entonces

$$\langle Q_t\phi,\phi\rangle = \frac{d}{dt} K(t,\phi;t,\phi) - 2K(t,A^\alpha\phi;t,\phi) =$$

$$= \gamma\{\alpha e^{\alpha t}\int\phi^2 + e^{\alpha t}m_2V\int\phi^2 + 2m_2V\int\phi \int_0^t e^{\alpha r}T^\alpha_{2(t-r)}A^\alpha\phi dr$$

$$- 2e^{\alpha t}\int\phi A^{\alpha}\phi - 2m_2V\int\phi\int_0^t e^{\alpha r}T^{\alpha}_{2(t-r)}A^{\alpha}\phi dr\} +$$

$$+ \beta\{e^{\alpha t}\int\phi^2 + m_2V\,\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\int\phi^2 + 2m_2V\int\phi\int_0^t\frac{e^{\alpha r}-1}{\alpha}\,T^{\alpha}_{2(t-r)}A^{\alpha}\phi dr$$

$$- 2\,\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\int\phi A^{\alpha}\phi - 2m_2V\int\phi\int_0^t\frac{e^{\alpha r}-1}{\alpha}\,T^{\alpha}_{2(t-r)}A^{\alpha}\phi dr\}$$

$$= \gamma\{\alpha e^{\alpha t}\int\phi^2 + e^{\alpha t}m_2V\int\phi^2 - 2e^{\alpha t}(\int\phi\,\tfrac{1}{2}\,\Delta\phi + \alpha\int\phi^2)\}$$

$$+ \beta\{e^{\alpha t}\int\phi^2 + m_2V\,\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\int\phi^2 - 2\,\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\,(\int\phi\,\tfrac{1}{2}\,\Delta\phi + \alpha\int\phi^2)\}$$

Usando $\int\phi\Lambda\phi = -\int|\nabla\phi|^2$,

$$= \gamma\{e^{\alpha t}(m_2V-\alpha)\int\phi^2 + e^{\alpha t}\int|\nabla\phi|^2\}$$

$$+ \beta\{(m_2V\,\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha} + 2-e^{\alpha t})\int\phi^2 + \frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\int|\nabla\phi|^2\}\,,$$

de donde se obtiene $<Q_t\phi,\psi>$ mediante la identidad

$$<Q_t\phi,\psi> = \frac{1}{2}\{<Q_t(\phi+\psi),\phi+\psi> - <Q_t\phi,\phi> - <Q_t\psi,\psi>\}\,.$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 5. Puesto que M_t es una variable aleatoria en $S'(\mathbb{R}^d)$ por el Teorema I.9 M_t converge débilmente a una variable aleatoria M_∞ en $S'(\mathbb{R}^d)$ cuando $t \to \infty$ si y sólo si $\hat{\mu}_t(\phi) \to \hat{\mu}(\phi)$ para toda ϕ en $S(\mathbb{R}^d)$, donde $\hat{\mu}_t$ y $\hat{\mu}$ son las funcionales características de M_t y M_∞ respectivamente.

M_t es una variable aleatoria Gaussiana centrada en $S'(\mathbb{R}^d)$, con funcional característica

$$\hat{\mu}_t(\phi) = e^{-\frac{1}{2} C(t,\phi,t,\phi)},$$

donde $C(t,\phi;t,\psi)$ es su funcional de covarianza.

Para $\alpha < 0$, $\beta > 0$, por el Teorema 2 se tiene

$$\lim_{t\to\infty} C(t,\phi,t,\psi)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \{ [e^{\alpha t}(\gamma+\beta(1-e^{-\alpha t})/\alpha] \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\psi(x)dx$$

$$+ e^{\alpha t}\gamma m_2 V \int_0^t e^{\alpha(t-s)} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)T_{2(t-r)}\psi(x)dxdr$$

$$+ e^{\alpha t}\beta m_2 V \int_0^t e^{\alpha(t-r)}(1-e^{-\alpha r})/\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)T_{2(t-r)}\psi(x)dxdr\}$$

Calculando el límite del primer término y sustituyendo

$$T_{2(t-r)}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y)e^{-\|y-x\|^2/4(t-r)} (4\pi(t-r))^{-d/2}dy,$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\psi(x)dx$$

$$+\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\gamma m_2 V\int_0^t e^{\alpha(t-r)}\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\int_{\mathbf{R}^d}\psi(y)\frac{e^{-\|x-y\|^2/4(t-r)}}{(4\pi(t-r))^{d/2}}dydxdr$$

$$+\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\beta m_2 V\int_0^t e^{\alpha(t-r)}(1-e^{-\alpha r})/\alpha\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\int_{\mathbf{R}^d}\psi(y)\frac{e^{-\|x-y\|^2/4(t-r)}}{(4\pi(t-r))^{d/2}}dydxdr$$

Cambiando el orden de integración y haciendo $s = t-r$,

$$= -\frac{\beta}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\psi(x)dx$$

$$+\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\gamma m_2 V\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\int_{\mathbf{R}^d}\psi(y)\int_0^t e^{\alpha s}\frac{e^{-\|y-x\|^2/4s}}{(4\pi s)^{d/2}}dsdydx \tag{61}$$

$$+\lim_{t\to\infty}\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\beta m_2 V\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\int_{\mathbf{R}^d}\phi(y)\int_0^t e^{\alpha s}\frac{e^{-\|y-x\|^2/4s}}{(4\pi s)^{d/2}}dsdydx$$

$$-\lim_{t\to\infty}\frac{\beta}{\alpha}m_2 V\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\int_{\mathbf{R}^d}\psi(y)\int_0^t e^{2\alpha s}\frac{e^{-\|y-x\|^2/4s}}{(4\pi s)^{d/2}}dsdydx.$$

Ahora bien, para $\alpha < 0$,

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{\alpha s}\,\frac{e^{-\|y-x\|^2/4s}}{(4\pi s)^{d/2}}\,ds = \int_0^\infty e^{\alpha s}\,\frac{e^{-\|y-x\|^2/4s}}{(4\pi s)^{d/2}}\,ds < \infty ,$$

y como $e^{\alpha t} \to 0$ cuando $t \to \infty$, los dos primeros límites de la expresión (61) son cero. Por lo tanto

$$\lim_{t\to\infty} C(t,\phi;t,\psi) = -\frac{\beta}{\alpha}\{\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\psi(x)dx +$$

$$+ m_2 V \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\phi(y)\int_0^\infty e^{2\alpha s}\,\frac{e^{-\|y-x\|^2/4s}}{(4\pi s)^{d/2}}\,dsdydx\}.$$

Por [21, pp. 17, 233]

$$= -\frac{\beta}{\alpha}\{\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\psi(x)dx + m_2 V\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\phi(y)k(x,y)dxdy\}, \tag{62}$$

donde $k(x,y)$ es la función que se enuncia en el teorema.

Si $\beta > 0$, (62) es una funcional continua y positiva definida y, si la denotamos por $K(\phi,\psi)$,

$$\hat{\mu}(\phi) = e^{-\frac{1}{2}K(\phi,\phi)}$$

es la funcional característica de una variable aleatoria Gaussiana centrada M_∞ con valores en $S'(\mathbf{R}^d)$ con funcional de covarianza $K(\phi,\psi)$. Las propiedades asintóticas de $k(x,y)$ se pueden deducir de [1, pp. 375

y 378].

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 6. Basta observar del Teorema 2 que el núcleo de covarianza $k_t(x,y)$ de M_t está dado por

$$k_t(x,y) = e^{\alpha t} \{ [\gamma+\beta(1-e^{-\alpha t})/\alpha]\delta(x-y) +$$

$$+ \gamma m_2 V \int_0^t \frac{e^{\alpha(t-u)-\|x-y\|^2/4(t-u)}}{(4\pi(t-u))^{d/2}} du +$$

$$+ \beta m_2 V \int_0^t e^{\alpha(t-u)} \frac{(1-e^{-\alpha u})}{\alpha} \frac{e^{-\|x-y\|^2/4(t-u)}}{(4\pi(t-u))^{d/2}} du \}$$

Por el Teorema I.20, puesto que $\delta(x-y)$ aparece en el primer término de $k_t(x,y)$, M_t no está inducido por un campo aleatorio ordinario y continuo en norma.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 7. De la demostración del Teorema 6 se ve que

$$k_t(x,y) = k_t(x+h,y+h) \quad \text{para todo } h \in \mathbb{R}^d,$$

y por ser M_t Gaussiano, entonces es homogéneo. Calcularemos su medida espectral.

$$\mathrm{Cov}(\langle M_t,\phi\rangle,\langle M_t,\psi\rangle) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\psi(y)k_t(x,y)dxdy \tag{63}$$

Sustituyendo a $\phi(x)$ y $\psi(y)$ por sus transformadas inversas de Fourier

$$= \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \{ \int_{\mathbf{R}^d} \frac{e^{i(z,x)}\tilde{\phi}(z)}{(2\pi)^{d/2}}dz \} \{ \int_{\mathbf{R}^d} \frac{e^{i(w,y)}\tilde{\psi}(w)}{(2\pi)^{d/2}}dw \} k_t(x,y)dxdy$$

cambiando orden de integración

$$= \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}\tilde{\phi}(z)\tilde{\psi}(w)h_t(z,w)dzdw, \tag{64}$$

donde

$$h_t(z,w) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{i[(z,x)+(w,y)]}k_t(x,y)dxdy \tag{65}$$

Para $\alpha \neq 0$,

$$h_t(z,w) = e^{\alpha t}\{ [\gamma+\beta(1-e^{-\alpha t})/\alpha] \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{i[(z,x)+(w,y)]}\delta(x-y)dydx$$

$$+ \gamma m_2 V\int_0^t e^{\alpha(t-u)}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{i(z,x)}\int_{\mathbf{R}^d} e^{i(w,y)}\frac{e^{-\|y-x\|^2/4(t-u)}}{(4\pi(t-u))^{d/2}}dydxdu$$

$$+ \beta m_2 V\int_0^t e^{\alpha(t-u)}\frac{1-e^{-\alpha u}}{\alpha}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{i(z,x)}\int_{\mathbf{R}^d} e^{i(w,y)}\frac{e^{-\|x-y\|^2/4(t-u)}}{(4\pi(t-u))^{d/2}}dydxdu \}.$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i[(z,x)+(w,y)]}\delta(x-y)dydx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(z+w,x)}dx = \delta(z+w) \tag{66}$$

(véase [32]), luego,

$$\int_0^t e^{\alpha(t-u)} \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(z,x)}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(w,y)} \frac{e^{-\|y-x\|^2/4(t-u)}}{(4\pi(t-u))^{d/2}} dydxdu$$

$$= \int_0^t e^{(\alpha-\|w\|^2)(t-u)} \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(z+w,x)}dxdu$$

$$= \delta(z+w)\int_0^t e^{(\alpha-\|w\|^2)u}du = \delta(z+w)\frac{e^{(\alpha-\|w\|^2)t}-1}{\alpha-\|w\|^2}, \tag{67}$$

donde se usó el hecho que la integral con respecto a y es la función característica de una densidad Gaussiana con valor medio x y varianza $2(t-u)$.

Análogamente al caso anterior,

$$\int_0^t e^{\alpha(t-u)} \frac{1-e^{-\alpha u}}{\alpha} \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(z,x)}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(w,y)} \frac{e^{-\|x-y\|^2/4(t-u)}}{(4\pi(t-u))^{d/2}} dydudx$$

$$= \delta(z+w)\int_0^t \frac{1-e^{-\alpha u}}{\alpha} e^{(\alpha-\|w\|^2)(t-u)}du$$

$$= \delta(z+w)\ \{\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{(\alpha-\|w\|^2)u}du - \frac{e^{(\alpha-\|w\|^2)t}}{\alpha}\int_0^t e^{(\|w\|^2-2\alpha)u}du\}$$

$$= \delta(z+w)\ \{\frac{1}{\alpha}\ \frac{e^{(\alpha-|w|^2)t}-1}{\alpha-|w|^2} - \frac{e^{(\alpha-|w|^2)t}}{\alpha}\ \frac{e^{(\|w\|^2-2\alpha)t}-1}{\|w\|^2-2\alpha}\} =$$

$$= \delta(z+w)\ \{\frac{1}{\alpha}\ \frac{e^{(\alpha-\|w\|^2)t}-1}{\alpha-|w|^2} + \frac{1}{\alpha}\ e^{-\alpha t}\ \frac{e^{(2\alpha-\|w\|^2)t}-1}{|w|^2-2\alpha}\}\ . \tag{68}$$

Para $\alpha = 0$,

$$h_t(z,w) = [\gamma+\beta t]\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{i[(z,x)+(w,y)]}\delta(x-y)dydx$$

$$+ \gamma m_2 V\int_0^t \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{i(z,x)}\int_{\mathbf{R}^d} e^{i(w,y)}\ \frac{e^{-|y-x|^2/4(t-u)}}{(4\pi(t-u)^{d/2}}\ dydxdu \tag{69}$$

$$+ \beta m_2 V\int_0^t u\int_{\mathbf{R}^d} e^{i(z,x)}\int_{\mathbf{R}^d} e^{i(w,y)}\ \frac{e^{-\|x-y\|^2/4(t-u)}}{(4\pi(t-u))^{d/2}}\ dydxdu.$$

Los primeros dos términos pueden obtenerse por medio de (66) y haciendo $\alpha = 0$ en (68); el tercer término lo obtenemos a continuación.

$$\int_0^t u\int_{\mathbf{R}^d} e^{i(z,x)}\int_{\mathbf{R}^d} e^{i(w,y)}\ \frac{e^{-|x-y|^2/4(t-u)}}{(4\pi(t-u))^{d/2}}\ dydxdu$$

$$= \delta(z+w)\int_0^t u\ e^{-\|w\|^2(t-u)}du = \delta(z+w)e^{-|w|^2 t}\int_0^t u\ e^{|w|^2 u}du$$

$$= \delta(z+w) \begin{cases} e^{-\|w\|^2 t} \, [e^{\|w\|^2 t} \left(\frac{t}{\|w\|^2} - \frac{1}{\|w\|^4} \right) + \frac{1}{\|w\|^4}], & \text{si } w \neq 0 \\ \frac{t^2}{2}, & \text{si } w = 0 \end{cases}$$

$$= \delta(z+w) \begin{cases} \frac{t}{\|w\|^2} + \frac{1}{\|w\|^4} \left(e^{-\|w\|^2 t} - 1\right), & \text{si } w \neq 0 \\ t^2/2, & \text{si } w = 0. \end{cases} \tag{70}$$

Sea

$$\ell_t(w) = e^{\alpha t} \gamma m_2 V \; \frac{e^{(\alpha - \|w\|^2)t} - 1}{\alpha - \|w\|^2} \; +$$

$$+ \begin{cases} e^{\alpha t} [\gamma + \beta (1 - e^{-\alpha t})/\alpha] & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \gamma + \beta t & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

$$+ \beta m_2 V \begin{cases} e^{\alpha t} \left\{ \frac{1}{\alpha} \; \frac{e^{(\alpha - \|w\|^2)t} - 1}{\alpha - \|w\|^2} + \frac{1}{\alpha} \; e^{-\alpha t} \; \frac{e^{(2\alpha - \|w\|^2)t} - 1}{\|w\|^2 - 2\alpha} \right\}, & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \left. \begin{array}{ll} \frac{t}{\|w\|^2} + \frac{1}{\|w\|^4} \left(e^{-\|w\|^2 t} - 1\right), & \text{si } \|w\| \neq 0 \\ t^2/2, & \text{si } \|w\| = 0 \end{array} \right\} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases} \tag{71}$$

Entonces, por (65), (67), (68), (69), (70) y (71),

$$h_t(z,w) = \delta(z+w) \ell_t(w).$$

Así,

$$\mathrm{Cov}(\langle M_t,\phi\rangle,\langle M_t,\psi\rangle) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \tilde{\phi}(z)\tilde{\psi}(w)\delta(z+w)\ell_t(w)dzdw =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{\phi}(z)\,\{\int_{\mathbf{R}^d} \tilde{\psi}(w)\ell_t(w)\delta(z+w)dw\}\,dz$$

$$= \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{\phi}(z)\tilde{\psi}(-z)\ell_t(-z)dz$$

$$= \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{\phi}(z)\bar{\tilde{\psi}}(z)\ell_t(z)dz.$$

Por lo tanto, la medida espectral de M_t es $\sigma_t(dz) = \ell_t(z)dz$.

<u>DEMOSTRACION</u> <u>DEL</u> <u>TEOREMA</u> 8. Basta observar del Teorema 5 que el núcleo de covarianza de M_∞ está dado por

$$k_\infty(x,y) = -\frac{\beta}{\alpha}\,\{\,\delta(x-y) + m_2Vk(x,y)\}.$$

Por el Teorema I.20, puesto que $\delta(x-y)$ aparece en el primer término de $k_\infty(x,y)$, M no está inducido por un campo aleatorio ordinario y continuo en norma.

<u>DEMOSTRACION</u> <u>DEL</u> <u>TEOREMA</u> 9. M es homogéneo, pues

$$k_\infty(x,y) = k_\infty(x+h,y+h) \quad \text{para toda } h \in \mathbf{R}^d.$$

Del Teorema 7 tenemos, para $\alpha < 0$ y $\beta > 0$,

$$\sigma_\infty(dz) = \lim_{t\to\infty} \sigma_t(dz) = \lim_{t\to\infty} \ell_t(z)dz =$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha}\{1 + \frac{m_2 V}{\|z\|^2 - 2\alpha}\} dz.$$

APENDICE

A1. Operadores de Hilbert-Schmidt y Operadores Nucleares.

(Referencias: Treves [40], Gelfand-Vilenkin [12]).

Dados dos espacios de Hilbert reales H_1 y H_2 y un operador lineal $A:H_1 \to H_2$, se dice que A es compacto o completamente continuo si mapea cualquier conjunto acotado en un conjunto cuya cerradura es compacta.

A continuación H_1, H_2, H_3 denotan espacios de Hilbert y $(\cdot,\cdot)_i$, $i = 1,2,3$, el producto escalar en cada uno de ellos.

<u>TEOREMA</u> 1. *Sea* $A:H_1 \to H_2$ *un operador compacto. Entonces* A *tiene la forma* $A = UT$, *donde* $T:H_1 \to H_1$ *es un operador compacto, positivo-definido* ($(Tx,x)_1 \geq 0$ *para* $x \in H_1$) *y* $U:H_1 \to H_2$ *es un operador isométrico* ($|Ux|_2 = |x|_1$ *para* $x \in H_1$) *que mapea el rango de* T *en el espacio* H_2.

La representación $A = UT$ se llama descomposición polar de A.

<u>TEOREMA</u> 2. *Un operador compacto* $A:H_1 \to H_2$ *puede ser representado como la suma de la serie*

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x,e_n)_1 h_n, \tag{1}$$

donde e_n, h_n *son los elementos de conjuntos ortonormales en* H_1 *y* H_2 *respectivamente, y* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *son números positivos* ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *son los valores propios del operador* T), *los cuales tienden a cero cuando* $n \to \infty$. *Recíprocamente, cada serie de la forma* (1), *en la cual* e_n, h_n *y* λ_n

tienen las propiedades antes mencionadas, define un operador compacto.

DEFINICION 1. *Un operador* $A:H_1 \to H_2$ *compacto se dice que es de Hilbert-Schmidt si en la representación* (1), $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$.

DEFINICION 2. *Un operador* $A:H_1 \to H_2$ *compacto se dice que es nuclear si en la representación* (1), $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ implica $\sum_{n=1} \lambda_n^2 < \infty$, todo operador nuclear es de Hilbert-Schmidt.

TEOREMA 3. *Sean* $A:H_2 \to H_3$, $B:H_1 \to H_2$ *dos operadores de Hilbert-Schmidt. Entonces el operador* $C:H_1 \to H_3$ *definido por* $C = AB$ *es un operador nuclear. Recíprocamente, todo operador nuclear es el producto de dos operadores de Hilbert-Schmidt.*

A2. Espacios Nucleares.

Sea E un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ una norma sobre E. Se dice que la norma es de Hilbert si proviene de un producto escalar, esto es si

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \text{ para toda } x,y \in E,$$

y en este caso el producto escalar está dado por

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Supongamos que hemos dado un sistema contable de normas de Hilbert $\{|\cdot|_n, n \in \mathbb{N}\}$ en el espacio E, las cuales son compatibles en el siguiente sentido: Si una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de E converge a cero en la norma $\|\cdot\|_m$ y es una sucesión fundamental en la norma $|\cdot|_n$, entonces también converge a cero en esta última. Introducimos en E la topología inducida por el sistema de normas compatibles $\{\|\cdot|_n, n \in \mathbb{N}\}$. Esta topología está definida por la métrica

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}, \quad x,y \in E. \tag{2}$$

<u>DEFINICION</u> 3. *Un espacio vectorial* E *con la topología inducida por un sistema de normas compatibles* $\{\|\cdot\|_n, n \in \mathbb{N}\}$, *se dice que es un espacio de Hilbert contable si es completo con respecto a esta topología.*

<u>Observación</u>: Una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en E es una sucesión fundamental con respecto a la métrica (2) si y sólo si es fundamental con respecto a cada una de las normas $\|\cdot\|_n$. Por lo tanto $x_k \to x$ en E si y sólo si $x_k \to x$ con respecto a cada una de las normas $|\cdot|_n$, $n \in \mathbb{N}$.

En general, se considera que un sistema de normas compatibles $\|\cdot\|_n$, $n \in \mathbb{N}$, sobre un espacio E, es tal que para cualquier $x \in E$ se satisfacen las siguientes desigualdades

$$\|x\|_0 \leq \|x\|_1 \leq \cdots \leq \|x\|_n \leq \cdots . \tag{3}$$

Esta condición no representa ninguna restricción, pues en caso de no cumplirse, el sistema de normas dado puede ser reemplazado por otro equivalente (en el sentido que definen la misma topología) que sí satisface (3).

Sea E un espacio de Hilbert contable y E_n la completación de E con respecto a la norma $\|\cdot\|_n$. (3) implica

$$\dots \subset E_2 \subset E_1 \subset E_0 \tag{4}$$

y de la completez de E se sigue que

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n .$$

Puesto que cada norma es de Hilbert, los espacios E_n son espacios de Hilbert.

Sean E' y E_n' los espacios duales de E y E_n respectivamente y denotemos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la forma bilineal canónica en $E' \times E$, esto es,

$$\langle f,x\rangle = f(x), \quad f \in E' \ \text{ y } \ x \in E.$$

Los espacios E_n' con las normas correspondientes

$$\|f\|_{-n} = \sup_{\|x\|_n = 1} \langle f,x\rangle, \quad f \in E_n' \ \text{ y } \ x \in E_n,$$

son espacios de Hilbert, y cumplen

$$E_0' \subset E_1' \subset \dots \subset E_n' \subset \dots . \tag{5}$$

Dado que E_0 es un espacio de Hilbert, existe un isomorfismo entre E_0

y E_0'. Denotaremos por $E_0 \simeq E_0'$ la identificación de E_0 con E_0' por medio de tal isomorfismo. Entonces, tenemos

$$E \subset E_n \subset E_0 \simeq E_0' \subset E_n \subset E'.$$

Las ternas $E \subset E_0 \subset E'$ y $E_n \subset E_0 \subset E_n'$ se llaman ternas de Gelfand. En la segunda terna de Gelfand se utiliza la topología en E_n inducida por E_0, la cual es más débil que la topología de E_n, para definir el dual E_n'. Por último, se puede demostrar que

$$E' = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n',$$

en donde la igualdad es en el sentido de igualdad de conjuntos.

En el espacio E' consideraremos dos topologías, la topología débil y la topología fuerte.

La topología débil en E' es la inducida por la familia de seminormas*

$$p_{x_1,\dots,x_n}(f) = \sup_{1 \le j \le n} |\langle f, x_j \rangle|, \quad f \in E', \tag{6}$$

---

* Una seminorma sobre un espacio vectorial E es una función real no negativa p sobre E tal que: 1) $p(x+y) \le p(x)+p(y)$, 2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, para toda $x, y \in E$ y escalares $\alpha \in K$ (K campo sobre el cual es espacio vectorial E). Una seminorma es una norma si satisface : 3) $p(x) \ne 0$ si $x \ne 0$.

para todos los subconjuntos finitos $x_1,\dots,x_n$ de E.

Para definir la topología fuerte, introduciremos el concepto de conjunto acotado en E. Un conjunto $A \subset E$ se dice que es acotado si para cualquier vecindad U de cero en E existe un natural n tal que $A \subset nU$.

Sea Λ la familia de todos los subconjuntos acotados de E. La topología fuerte en E' es la topología inducida por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, donde

$$\|f\|_\lambda = \sup_{x \in \lambda} |\langle f,x\rangle|, \quad \lambda \in \Lambda, \quad f \in E'. \tag{7}$$

Sea E un espacio de Hilbert contable. E es denso en cada uno de los espacios E_n. Por hipótesis, si $m \leq n$, entonces $\|\cdot\|_m \leq \|\cdot\|_n$; de aquí que el mapeo $x^{(n)} \to x^{(m)}$ (donde $x^{(n)}$, $x^{(m)}$ denotan el mismo elemento x de E pero considerado como elemento de E_n y E_m respectivamente) es continuo. Este mapeo se puede extender a un operador lineal continuo T_m^n que mapea el espacio E_n sobre un conjunto denso en E_m. Así pues, en (4) los encajes son continuos y densos, y por dualidad lo son en (5). Obsérvese que $T_m^p = T_m^n T_n^p$, $m \leq n \leq p$.

DEFINICION 4. *Un espacio de Hilbert contable* E *se llama nuclear si para cualquier* m *existe* $n \geq m$ *tal que el mapeo* $T_m^n : E_n \to E_m$ *es nuclear.*

Obsérvese que debido al Teorema 3 se puede pedir que el operador T_m^n sea de Hilbert-Schmidt.

Una generalización del concepto de espacio de Hilbert contable nucelar es la de espacio vectorial topológico nuclear. Este concepto se introduce de manera análoga, con la diferencia de que la topología en E está definida por un conjunto no numerable de seminormas. Ejemplos de estos espacios son los duales fuertes de espacios de Hilbert contables nucleares, los cuales tratamos a continuación.

Sea E un espacio de Hilbert contable y E' su dual fuerte; esto es, la topología de E' es la inducida por el sistema de seminormas (7).

Llamaremos núcleo de una seminorma $\|\cdot\|_\lambda$ sobre E', al conjunto de las $f \in E'$ tales que $\|f\|_\lambda = 0$, y lo denotaremos por $\mathrm{Ker}\ \lambda$. El conjunto $\mathrm{Ker}\ \lambda$ es un subespacio lineal de E'.

Para cada seminorma $\|\cdot\|_\lambda$, definimos el conjunto $E'/\mathrm{Ker}\ \lambda$ de clases de equivalencia para la relación $f \sim g$ Mod $\mathrm{Ker}\ \lambda$. Existe un mapeo canónico de E' sobre $E'/\mathrm{Ker}\ \lambda$: A cada $f \in E'$ le asigna su clase módulo la relación $f-g \in \mathrm{Ker}\ \lambda$.

Obsérvese que si f,g pertenecen a la misma clase de equivalencia, tenemos que

$$\|f-g\|_\lambda = 0$$

y

$$\left|\|f\|_\lambda - \|g\|_\lambda\right| \leq \|f-g\|_\lambda = 0 \ ,$$

y además: 1) si $f \sim g$ Mod $\mathrm{Ker}\ \lambda$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\lambda f \sim \lambda g \ ,$$

2) si $f \sim g$ Mod $\mathrm{Ker}\ \lambda$ y $f' \in E'$, entonces

$$f+f' \sim g+f' \text{ Mod Ker } \lambda.$$

Por lo tanto, podemos definir la suma y multiplicación por escalar en $E'/\text{Ker } \lambda$: si $\Theta(f)$ es la clase de f Mod Ker λ,

$$\lambda\Theta(f) = \Theta(\lambda f) \text{ y } \Theta(f) + \Theta(g) = \Theta(f+g).$$

Introducimos en $E'/\text{Ker } \lambda$ la topología inducida por el sistema de normas $\{\|\cdot\|_{\dot\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$ definidas por

$$\|\dot f\|_{\dot\lambda} = \|f\|_\lambda$$

para alguna $f \in E'$ tal que $\theta(f) = \dot f$.

Para cada norma $\|\cdot\|_\lambda$, sean E'_λ los espacios $E'/\text{Ker}\lambda$ con la norma $\|\cdot\|_{\dot\lambda}$, y $\hat{E}'_\lambda$ la completación de E'_λ con respecto a esta norma.

Si $\|\cdot\|_\lambda \leq \|\cdot\|_{\lambda'}$, entonces $\text{Ker } \lambda' \subset \text{Ker } \lambda$. Por lo tanto hay un mapeo canónico de $E'/\text{Ker } \lambda'$ sobre $E'/\text{ker } \lambda$; además este mapeo es continuo si introducimos las normas $\|\cdot\|_{\dot\lambda}$ y $\|\cdot\|_{\dot\lambda'}$ en $E'/\text{Ker } \lambda$ y $E'/\text{ker } \lambda'$ respectivamente.

DEFINICION 5. *Sea* E' *el dual fuerte de un espacio de Hilbert contable. Se dice que* E' *es nuclear si para cada seminorma* $\|\cdot\|_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ *sobre* E' *existe una seminorma* $\|\cdot\|_{\lambda'}$, $\lambda' \in \Lambda$ *sobre* E' *tal que* $\|\cdot\|_{\lambda'} \geq \|\cdot\|_\lambda$ *y el mapeo canónico*

$$\hat{E}'_{\lambda'} \to \hat{E}'_\lambda$$

es nuclear.

<u>Observación</u>. En este caso el mapeo canónico $\hat{E}'_{\lambda'} \to \hat{E}'_{\lambda}$ es nuclear en un sentido que generaliza la representación (1) con $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ (véase [40], pp. 482), ya que $\hat{E}'_{\lambda'}$ y $\hat{E}'_{\lambda}$ son espacios de Banach pero no de Hilbert.

<u>TEOREMA</u> 4. *Sea* E' *el dual fuerte de un espacio de Hilbert contable* E. *Entonces* E' *es nuclear si y sólo si* E *es nuclear.*

BIBLIOGRAFIA

1. Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (Editors). "Handbook of Mathematical Functions". National Bureau of Standards. Applied Mathematical Series 55, (1965).
2. Billingsley, P. "Convergence of Probability Measures". Wiley, New York, (1968).
3. Bojdecki, T. and Gorostiza, L.G. "Langevin Equations for S'-valued Gaussian Processes and Fluctuation Limits of Infinite Particle Systems". Por aparecer en Z. Wahrsch. verw. Geb.
4. Boulicaut, P. "Convergence Cylindrique et Convergence Etroite d'une Suite de Probabilités de Radon". Z. Wahrsch. verw. Geb., Vol. 28, 43-52, (1973).
5. Bourbaki, N. "Éléments of Mathématique". Fascicule XXXV, Livre VI, Intégration. Chapitre IX. Herman, Paris, (1969).
6. Choquet, G. "Lectures on Analysis", Vol. I. Integration and Topological Vector Spaces. Benjamin, New York, (1969).
7. Dawson, D. "Sistemas de Población con Distribuciones Espaciales Estocásticas". Conferencias sobre Sistemas Estocásticos. Depto. de Matemáticas, CINVESTAV, (1980).
8. Dawson, D. and Ivanoff, G. "Branching Diffusions and Random Measures". In "Branching Processes", Ed. A. Joffe and P. Ney. Dekker, New York, (1978).
9. Dawson, D. "Limit Theorems for Interaction Free Geostochastic Systems". Seria Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, Vol. 24, 27-47, (1980).
10. Doob, J.L. "Stochastic Processes". Wiley, New York, (1962).
11. Dudley, R.M. "Random Linear Functionals". Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 136, 1-24, (1969).
12. Gelfand, I.M. and Vilenkin, N.V. "Generalized Functions", Vol. 4, Academic Press, New York, 1966.
13. Gelfand, I.M. and Shilov, G.E. "Generalized Functions", Vol. 2, Academic Press, New York, (1968).
14. Gorostiza, L.G. "Asymptotics and Spatial Growth of Branching Random Fields". Technical Report No. 58. Ser. Lab. Res. Stat. Prob. Carleton University, Ottawa, (1985).

15. Gorostiza, L.G. "High Density Limit Theorems for Infinite Systems of Unscaled Branching Brownian Motions". Ann. Prob. Vol. 11, No. 2, 374-392, (1983).
16. Gorostiza, L.G. "Space Scaling Limit Theorems for Infinite Particle Branching Brownian Motions with Inmigration". In: "Stochastic Differential Systems" (M. Metivier and E. Pardoux, Eds.). Lect. Notes in Control and Inf. Sci. Vol. 69, 91-99. Berlin, Springer-Verlag (1985).
17. Gorostiza, L.G. and Griego, R.J. "Convergence of Branching Transport Processes to Branching Brownian Motion". Stochastic Process. Appl. Vol. 8, 269-276, (1979).
18. Hida, T. "Brownian Motion". Springer Verlag, New York, (1980).
19. Hoel, P.G., Port, S., Stone C.J. "Introduction to Probability Theory". Houghton Mifflin, Boston, (1971).
20. Holley, R.A. and Stroock, D.W. "Generalized Ornstein-Uhlenbeck Processes and Infinite Particle Branching Brownian Motions". Publ. RIMS, Kyoto Univ. Vol. 14, 741-788, (1978).
21. Itô, K. and McKean, H.P. "Diffusion Processes and their Sample Paths". Springer Verlag, Berlin, (1965).
22. Itô, K. "Stationary Random Distributions". Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., Ser. A. Vol. 28, No. 3, 209-223, (1954).
23. Itô, K. "Infinite Dimensional Ornstein-Uhlenbeck Processes". In Proc. Taniguchi Internat. Symp. Stochastic Analysis, Katata and Kyoto 1982, (K. Itô, Ed.), 197-224, North-Holland, (1984).
24. Itô, K. "Foundations of Stochastic Differential Equations in Infinite Dimentional Spaces". SIAM, Philadelphia, (1984).
25. Ibrahimov, I., et Rozanov, Y. "Processus Aléatories Gaussianes". Ed. Mir. Moscou, (1974).
26. Jagers, P. "Aspects of Random Measures and Point Processes". Adv. in Probability and Related Topics. Vol. 3 (P. Ney and S. Port, Eds.) Dekker, New York, (1974).
27. Jakubowski, A. "On the Skorohod Topology" (por aparecer).
28. Kisynski, J. "Semigroup of Operators and some of their Applications to Partial Differential Equations". En Control Theory and Topics in Functional Analysis. Vol. III, International Atomic Energy Agency, Vienna, (1976).
29. Kotelenz, P. "On the Semigroup Approach to Stochastic Evolution Equations".

En Stochastic Space-Time Models and Limit Theorems, Reidel, Dordrecht, (1985).

30. Kurtz, T.G. "Approximation of Population Processes". SIAM, Philadelphia, (1981).
31. Lindvall, T. "Weak Convergence of Probability Measures and Random Functions in the Function Space $D[0,\infty)$". J. Appl. Probab., Vol. 10, 109-121, (1973).
32. Lighthill, M.J. "Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions". Cambridge University Press, Cambridge, (1962).
33. Martin-Löf, A. "Limit Theorems for the Motion of a Poisson System of Independent Markovian Particles with High Density". Z. Wahrsch. verw. Geb., Vol. 34, 205-223, (1976).
34. Meidan, R. "Reproducing Kernel Hilbert Spaces of Distributions and Generalized Stochastic Processes". SIAM J. Math. Anal., Vol. 10, No. 1, 61-70, (1979).
35. Meidan, R. "On the Connection between Ordinary and Generalized Stochastic Processes". J. Math. Anal. Appl., Vol. 76, 124-133, (1980).
36. Meyer, P.A. "Probability and Potentials", Blaisdell, Massachusetts, (1966).
37. Mitoma, I. "On the Norm Continuity of S'-valued Gaussian Processes". Nagoya Math. J., Vol. 82, 209-220, (1981).
38. Mitoma, I. "On the Sample Continuity of S'-processes". J. Math. Soc. Japan, Vol. 35. No. 4, 629-636, (1983).
39. Mitoma, I. "Tightness of Probabilities on $C([0,1],S')$ and $D([0,1],S')$" Ann. Prob. Vol. 11, No. 4, 989-999, (1983).
40. Treves, F. "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels". Academic Press, New York, (1967).
41. Yeh, J. "Stochastic Processes and the Wiener Integral". Dekker, New York, (1973).