01168 1ej. 2

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA

ESPECIALIZACION DEL METODO PRIMAL-DUAL A PROBLEMAS DE REDES DE FLUJO

CRÉDITOS ASIGNADOS A LA TESIS 11 ONCE

APROBADO POR EL JURADO

Presidente:	M en I Rubén Téllez Sánchez	RSánchez
Vocal:	Dr. Sergio Fuentes Maya	
Secretario:	M en I Victor Flores Zavala	
Suplente:	M en C José Luis Mora Castro	
Suplente:	M en I Arturo Fuentes Zenón	

Universidad Nacional Autónoma

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

Profr. SERGIO FUENTES MAYA
P r e s e n t e

Comunico a usted que a propuesta del COORDINADOR DE LA SECC. DE INV. DE OPERACIONES ha sido designado como director de tesis del alumno(a) DOLORES DONJUAN MORALES para obtener el grado de M EN INVESTIGACION DE OPERACIONES.

Mucho he de agradecerle su comunicación, por escrito, de la aceptación a esta designación y el nombre de la tesis a desarrollar.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria a 15 de abril de 1986.
EL JEFE DE LA DIVISION

DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE

E.5.1

CONTENIDO

INTRODUCCION.

Una de las ramas de la investigación de operaciones mas estudiada y popularizada es la programación lineal debido a su flexibilidad para modelar diversas situaciones problemáticas y el éxito que han tenido sus métodos generales de solución, particularmente, el método simplex propuesto por Dantzing. Aunque los métodos generales de solución de la programación lineal siguen siendo investigados y nuevos enfoques han sido propuestos, la línea de mayor desarrollo se tiene en la especialización de los métodos básicos a problemas lineales con una estructura especial como es el caso de los problemas de rédes.

Uno de los aspectos relevantes de los problemas lineales que pueden representarse por medio de redes de flujo es su fácil representación esquemática por medio de una gráfica. Asimismo, resulta interesante mencionar que los problemas básicos de redes como ruta mas corta, flujo máximo, transporte, entre otros, han sido estudiados y resueltos usando métodos distintos a los propuestos por la programación lineal. Sin embargo, recientemente, se ha demostrado que la especialización de los métodos primales y primales-duales de la programación lineal equivalen a tales métodos, lograndose con esto una unificación de los métodos de solución.

La idea fundamental de los métodos primales de la programación lineal es el concepto de base de un sistema de ecuaciones. En dichos métodos, la base corresponde a soluciones factibles del problema original y lo que se desea es determinar aquella base que está asociada a una solución óptima. En el caso de redes de flujo, la matriz base equivale a una gráfica denominada árbol con raíz que es sencilla de manipular con lo que las operaciones básicas de la programación lineal pueden realizarse de manera eficiente. La especialización de los métodos primales de la programación lineal son conocidos en la literatura.

En este trabajo se estudian los métodos básicos de solución de la programación lineal denominados métodos primales-duales, cuya característica es partir de una solución factible básica del problema dual e ir iterando, por medio de la solución de problemas lineales restringidos (y sencillos) hasta obtener una solución dual factible que es óptima. El propósito del trabajo es estudiar la especialización de estos métodos al caso de problemas básicos de redes de flujo. La contribución de este trabajo es la síntesis e unificación de diversos métodos de solución de problemas de redes, explicados como casos particulares de la especialización del método primal-dual, particularmente, en el caso del problema de redes de flujo a costo mínimo.

Por ejemplo, los algoritmos clásicos de Hitchcock, determinación de circuitos negativos y ruta mas corta-flujo máximo, se demuestran que son casos particulares del método primal-dual.

Este trabajo se desarrolla como sigue:

En el primer capítulo se describen los conceptos más importantes y resultados básicos de programación lineal, en particular se describen los resultados de teoría de dualidad y la manera en que se utiliza para generar el correspondiente método Primal-Dual.

En el segundo capítulo se ven los conceptos más importantes para desarrollar los métodos primales para los problemas de transporte, asignación, flujo a costo mínimo, ruta más corta y flujo máximo.

En el tercer capítulo, se realiza la especialización del método Primal-Dual para los problemas de transporte, de asignación, ruta más corta y de flujo máximo.

En el cuarto capítulo se efectúa la especialización del método Primal-Dual para el problema de flujo a costo mínimo, dando dos opciones para su solución. También se ve el método Primal-Dual para el problema de Hitchcock el cual se podría particularizar al problema de asignación.

Finalmente se tienen las conclusiones y se incluyen dos apéndices, en uno se describe el método simplex con un ejemplo y en el otro los conceptos básicos de redes.

CAPITULO I

PROGRAMACIÓN LINEAL: TEORÍA DE DUALIDAD

Uno de los aspectos más importantes de la programación lineal es su aplicación a diversas situaciones problemáticas. En algunos casos, la naturealeza misma del problema establece en forma sencilla el correspondiente modelo lineal. Sin embargo, existen otras en donde es necesario reestructurar el planteamiento o modelo original, con el propósito de obtener una estructura lineal. La ventaja de este último enfoque es que podemos usar la exhaustivamente investigada teoría de programación lineal en el análisis del modelo modificado.

En este capítulo se describen los conceptos y resultados básicos de programación lineal y se discute en detalle su relación con el correspondiente problema dual asociado. En particular, se describen los resultados básicos de teoría de dualidad que son usados por los diversos métodos de soluciones de la programación lineal.

El énfasis principal radica en el método Primal-Dual debido a su aplicación posterior en problemas de redes.

El capítulo se desarrolla como sigue: en las secciones uno y dos se presentan las definiciones y notación que se maneja a lo largo del trabajo. En la tercera sección se define el problema dual asociado a un problema de programación lineal y se muestra la mecánica de su obtención. La cuarta sección presenta los teoremas de dualidad y holgura complementaria que caracterizan las soluciones óptimas de los problemas lineales duales, mientras que la quinta sección describe en detalle el método primal-dual. Finalmente, se presentan varios ejemplos que ilustran la aplicación del método primal-dual.

1.1 EL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL.

Un problema de programación lineal es un problema de optimización en el cual la función objetivo es lineal y las restricciones consisten de igualdades y desigualdades lineales en las mismas variables. La forma de estas restricciones puede diferir de un problema a otro, pero cualquier problema de programación lineal puede transformarse en la siguiente forma estándar:

$$\min c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \ldots, \; x_n \geq 0$$

donde las b_i, c_i, a_{ij}, $i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,m$, son constantes reales fijas y las x_i son números reales a determinar. Suponemos que cada ecuación ha sido multiplicada por menos, si es necesario, para que cada b_i sea no negativa.

En notación matricial el problema en forma estándar se convierte en:

...

$$\min \quad c^t x$$

sujeto a

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

donde x es un vector columna n-dimensional;

c^t vector renglón n-dimensional;

b vector columna m-dimensional;

A matriz mxn

El vector $x \geq 0$ significa que cada componente de x es no negativa.

Ejemplos de problemas lineales convertidas en forma estándar son:

Ejemplo 1. Considere el problema:

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \; , \ldots , \; x_n \geq 0$$

[illegible]

[illegible] expresado

en forma estándar como:

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeto a

$$
\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + & y_2 & = b_2 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + & y_m & = b_m
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$$

Las nuevas variables no negativas, denotadas y_i, introducidas para convertir las desigualdades a igualdades son llamadas variables de holgura, tenemos ahora n + m variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$. La matriz de orden m x (n+m) que describe las restricciones de igualdades lineales es de la forma [A,I], esto es, sus columnas pueden ser particionadas en dos conjuntos; el primero con n columnas de la matriz A y el otro con m columnas, es una matriz identidad mxm.

lentemente a $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - y_i = b_i$ con $y_i \geq 0$. En este caso las variables tales como y_i, para convertir desigualdades "mayores o iguales" a igualdades son llamadas variables <u>excedentes</u>.

<u>Ejemplo 3</u>. Si un problema de programación lineal es dado en forma estándar, excepto que una o más variables no son restringidas, el problema puede ser transformado a la forma estándar usando dos técnicas simples. Para describir la primera técnica, suponga que en (1), por ejemplo la restricción $x_1 \geq 0$ no se presenta y por lo tanto x_1 es libre para tomar un valor positivo o negativo. Entonces escribimos:

$$x_1 = \mu_1 - v_1 \qquad (3)$$

donde $\mu_1 \geq 0$ y $v_1 \geq 0$. Si sustituimos $\mu_1 - v_1$ por x_1 en (1), la linealidad de las restricciones se conserva y todas las variables son ahora no negativas. Entonces el problema es expresado en términos de las n + 1 variables $\mu_1, v_1, x_2, \ldots, x_n$.

Existe obviamente un cierto grado de redundancia introducido por esta técnica, sin embargo una constante añadida a μ_1 y v_1 no cambia x_1, esto es, la representación de un valor

Un segundo método para convertir el problema a la forma estándar cuando x_1 no es restringida es eliminar x_1 junto con una de las m restricciones con coeficiente diferente de cero para x_1. Por ejemplo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \qquad (4)$$

donde $a_{i1} \neq 0$. Entonces x_1 puede ser expresado como una combinación lineal de las otras variables mas una constante. Si esta expresión es sustituída por x_1 en (1), tenemos un nuevo problema de la misma forma pero expresado en términos de las variables $x_2,\ldots,x_n$. Además la i-ésima ecuación usada para determinar x_1, es ahora cero y también puede ser eliminada. Este esquema de sustitución es válido, ya que cualquier combinación de variables no negativas x_2, $x_3,\ldots,x_n$ deja a x_1 factible de (4); x_1 es no restringida. Como resultado de esta simplificación, obtenemos un programa lineal estándar teniendo n-1 variables y m-1 restricciones. El valor de la variable x_1 puede ser determinado después de su solución a través de (4).

1.2 SOLUCIONES BASICAS.

Considere el sistema de igualdades:

$$Ax = b \tag{5}$$

donde: x es un vector con n componentes;

b vector con m componentes

A matriz $m x n$

Suponga que de las n columnas de A seleccionamos un conjunto de m columnas linealmente independientes (el conjunto existe si el rango de A es m). Para simplificar la notación suponemos que seleccionamos las primeras m columnas de A y denotamos la matriz $m x m$ por B. La matriz B es entonces no singular y resuelve la ecuación

$$B\, x_B = b \tag{6}$$

para el vector x_B de m componentes. Haciendo $x = [x_B, 0]$, es decir, los primeros m elementos de x es el vector x_B y los demás son cero, obtenemos una solución para $Ax = b$.

<u>Definición</u>: Dado el conjunto de m ecuaciones lineales simultáneas con n incógnitas (5), sea B una submatriz no singular formada por las columnas de A. Entonces, si todos los n-m componentes de x no asociados con las columnas de B son cero, el espacio solución que resulta de las ecuaciones es

llamado solución básica para (5) con respecto a la base B. Las componentes de x asociadas con las columnas de B son llamadas variables básicas.

En la definición nos referimos a B como una base, ya que B consiste de m columnas linealmente independientes que puede ser considerada como una base para el espacio E^m. La solución básica corresponde a una expresión para el vector b como una combinación lineal de esos vectores base.

En general la ecuación (5) podría no tener soluciones básicas. Sin embargo, podríamos evitar trivialidades y dificultades no esenciales haciendo ciertas suposiciones elementales considerando la estructura de la matriz A. Primero suponemos que n > m, esto es, el número de variables x_i excede al número de ecuaciones. Segunda suposición, los renglones de A son linealmente independientes, correspondiendo independencia lineal a las m ecuaciones. Si hay dependencia lineal entre los renglones de A podríamos llegar a una contradicción y por tanto no tiene solución (5) o una redundancia que podemos eliminar.

Suposición de rango completo. La matriz A de mxn tiene m<n y los m renglones de A son linealmente independientes. Bajo esta suposición, el sistema (5) siempre tendrá una solución y de hecho siempre tiene al menos una solución básica. Las

variables básicas en una solución básica no son necesariamente todas ceros.

Definición: Si una o más de las variables básicas en una solución básica tiene valor cero, esta solución es llamada solución básica degenerada.

Notamos que en una solución básica no degenerada las variables básicas y por lo tanto la base B, puede ser identificada directamente por medio de las componentes positivas de la solución.

Observe que hemos tratado únicamente las restricciones de igualdad de (5) sin mencionar a las restricciones no negativas $x \geq 0$, sin embargo, definiciones similares se aplican. Finalmente, considere el sistema

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

esto es, las restricciones del problema de programación lineal en forma estándar.

Definición: Un vector x que satisface (7) se llama factible para esas restricciones. Una solución factible para (7) que es tambien básica, se llama solución básica factible; si esta solución es solución básica degenerada, se llama solución básica factible degenerada.

1.3 PROBLEMAS LINEALES DUALES.

Asociado con todo problema de programación lineal existe su correspondiente problema de programación lineal dual. Ambos problemas son construídos con los mismos coeficientes de costos y restricciones, pero en cada uno de ellos, si uno es de minimización el otro será de maximización y el valor óptimo de las funciones objetivo correspondientes, si es finito son iguales. Las variables del problema dual pueden ser interpretadas como precios asociados con las restricciones del problema primal y a través de esta asociación es posible dar una interpretación económica al problema dual.

Definimos la dualidad a través del par de problemas:

Primal	Dual	
min $c^t x$	max $\lambda^t b$	
s.a $Ax \geq b$	s.a $\lambda^t A \leq c^t$	(8)
$x \geq b$	$\lambda \geq 0$	

Si A es una matriz de mxn, entonces x es un vector columna de n componentes; b vector columna de m componentes; c^t vector renglón de n componentes; y λ^t vector renglón de m componentes. El vector x es la variable del problema primal y λ es la variable del problema dual.

El par de problemas (8) es llamado la forma <u>simétrica</u> de dualidad, puede ser usada para definir el dual de un problema de programación lineal. Es importante notar que el primal y el dual pueden ser invertidos. Así, estudiando en detalle el proceso por el cual el dual es obtenido del primal; intercambiando el vector de costos por las restricciones, trasponiendo la matriz de coeficientes, invirtiendo las desigualdades y cambiando de minimización a maximización; vemos que este mismo proceso aplicado al dual da el primal. De otra forma, si el dual es transformado multiplicando la función objetivo y las restricciones por una unidad negativa, entonces tiene la estructura del primal (expresado en términos de λ) y su correspondiente dual sería equivalente al primal original.

El dual de cualquier problema de programación lineal lo podemos encontrar convirtiendo el problema a la forma del problema primal anterior. Por ejemplo dado un problema de programación lineal en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

escribimos en forma equivalente

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.a} & Ax \geq b \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

el cual está en la forma del primal (8), pero con la matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix}$.

Usando el vector dual particionado como $[\mu, v]$, el correspondiente dual es

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu^t b - v^t b \\ \text{s.a} \quad & \mu^t A - v^t A \leq c^t \\ & \mu \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{aligned}$$

siendo $\lambda = \mu - v$ podemos simplificar la representación del problema dual, así obtenemos el par de problemas:

$$\begin{array}{llcll} \multicolumn{2}{c}{\text{Primal}} & & \multicolumn{2}{c}{\text{Dual}} \\ \min & c^t x & & \max & \lambda^t b \\ \text{s.a} & Ax = b & & \text{s.a} & \lambda^t A \leq c^t \\ & x \geq 0 & & & \lambda \text{ no restringida} \end{array} \qquad (9)$$

Esta es la forma simétrica de dualidad. Transformaciones similares se pueden hacer para pasar al siguiente problema de programación lineal a el primal de la forma (8), obteniendo el dual y simplificándolo.

En general, si algunas de las desigualdades lineales en el problema primal de (8) son cambiadas a igualdades, las componentes correspondientes de λ en el dual se convierten en variables libres. Si algunas de las componentes de x en el primal son variables libres, entonces las desigualdades correspondientes en $\lambda^t A \leq c^t$ son cambiadas a igualdades en el dual. Estas no son reglas arbitrarias sino es consecuencia directa de la definición original y las equivalencias de problemas de programación lineal.

<u>Ejemplo 4</u>. El problema de la dieta. Este problema fué planteado por un dietista tratando de seleccionar una combinación de comida con ciertos requerimientos nutricionales a costo mínimo. Este problema tiene la forma

$$\begin{aligned} \min\ & c^t x \\ \text{s.a } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

y por tanto puede ser considerado como el problema primal de (8). Una interpretación del problema dual es:

Imagine a una compañía farmacéutica que produce pastillas con cada uno de los nutrientes considerados por la dietista. La compañía farmacéutica trata de convencer al dietista de comprar pastillas y suplir los nutrientes, en vez de de comprar varios alimentos. El problema planteado por la compañía es determinado por unidades de precio positivas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ para los nutrientes, así como los beneficios máximos, mientras que al mismo tiempo empieza la competencia con los alimentos. Para ser competitivo con los alimentos, el costo por unidad de alimento sintético i no debe exceder a c_i, es decir, los precios de los alimentos en el mercado. Así denotamos por a_i el i-ésimo, la compañía debe satisfacer $\lambda^t a_i \leq c_i$ para cada i. En forma matricial esto es equivalente a $\lambda^t A \leq c^t$; b_j unidades del j-ésimo nutriente será comprado.

El problema en este caso queda como

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda^t b \\ \text{s.a} \quad & \lambda^t A \leq c^t \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

que es el problema dual.

1.4 TEOREMAS DE DUALIDAD Y SUS EQUIVALENCIAS.

Consider s el problema primal en forma estándar

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (10)$$

y su correspondiente dual

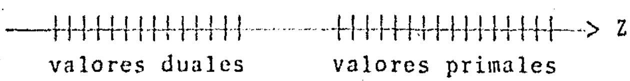
$$\begin{array}{ll} \max & \lambda^t b \\ \text{s.a} & \lambda^t A \leq c^t \\ & \lambda \text{ no restringida} \end{array} \qquad (11)$$

No necesariamente A es de rango completo. El siguiente lema da una relación importante entre los dos problemas.

<u>Lema de dualidad débil</u>. Si x y λ son factibles para (10) y (11) respectivamente, entonces $c^t x \geq \lambda^t b$.

<u>Prueba</u>. Tenemos que $\lambda^t b = \lambda^t Ax \leq c^t x$. La desigualdad es válida ya que $x \geq 0$ y $\lambda^t A \leq c^t$ ∎

Este lema prueba que un vector factible para cualquier problema establece un límite sobre el valor del otro problema. Los valores asociados con el primal son mas grandes que los valores asociados con el dual.



Ya que el problema primal busca un mínimo y el dual un máximo, cada uno busca alcanzar al otro. De aquí tenemos el siguiente corolario.

<u>Corolario</u>. Si x_0 y λ_0 son factibles para (10) y (11), respectivamente y si $c^t x_0 = \lambda_0^t b$, entonces x_0 y λ_0 son óptimos para sus respectivos problemas.

El corolario muestra que si un par de vectores factibles puede ser encontrado para los problemas primal y dual con valores objetivos iguales, entonces ambos son óptimos.

El resultado mas general que se tiene en este sentido se resume en el teorema de dualidad de la programación lineal descrito en la página siguiente, cuya demostración se basa en un argumento de separación de conjuntos convexos por medio de un hiperplano.

Teorema de dualidad de programación lineal. Si alguno de los problemas (10) u (11) tiene una solución óptima finita, entonces los correspondientes valores de las funciones objetivo son iguales. Si uno de los problemas tiene valor objetivo no acotado, entonces el otro problema no tiene solución factible.

Prueba. Notamos primeramente que la segunda afirmación es consecuencia inmediata del lema de dualidad débil. Si el primal es no acotado y λ es factible para el dual, debemos tener que $\lambda^t b \leq - M$ para M arbitrariamente grande, lo cual es imposible. Segundo, notamos que aunque el primal y dual no están en la forma simétrica, es suficiente probar la primera afirmación; suponemos que el primal tiene una solución óptima finita y mostramos que el dual tiene una solución con el mismo valor. Esto se sigue porque cualquier problema puede ser transformado a la forma estándar y el primal y dual son invertibles.

Suponga que (10) tiene una solución óptima finita con valor z_0. En el espacio E^{m+1} definimos el conjunto convexo:

$$C = \{(r,w) \mid r = tz_0 - c^t x,\ w = tb - Ax,\ x \geq 0,\ t \geq 0\}$$

Aquí C es un cono convexo cerrado. El punto (1,0) no está en C. Si $w = t_0 b - A x_0 = 0$ con $t_0 > 0$, $x_0 \geq 0$, entonces $x = x_0/t_0$ es factible para (10) y $r/t_0 = z_0 - c^t x \leq 0$ por lo que $r \leq 0$. Si $t_0 = 0$, $w = -Ax_0 = 0$ con $x_0 \geq 0$, $c^t x_0 = -1$ y si x es una solución factible para (10), entonces $x + \gamma x_0$ es factible para $\gamma \geq 0$ y da arbitrariamente un valor objetivo pequeño cuando γ es incrementada. Esto contradice nuestra suposición sobre la existencia de un óptimo finito y así concluímos que x_0 no existe. Por lo tanto $(1,0) \notin C$.

Como C es un conjunto convexo cerrado, hay un hiperplano de separación entre C y $(1,0)$. Esto es, existe un vector diferente de cero $[s,\lambda] \epsilon E^{m+1}$ y una constante c tal que

$$s < c = \inf\{sr + \lambda^t w \mid (r,w) \epsilon C\}$$

Como C es un cono $c \geq 0$. Si $(r,w) \epsilon C$ tal que $sr + \lambda w < 0$, entonces $\gamma(r,w)$ para γ grande podría violar la desigualdad del hiperplano. Por otro lado, ya que $(0,0) \epsilon C$ debemos tener que $c \leq 0$. Así $c = 0$. Como una consecuencia $s < 0$, y sin pérdida de generalidad suponemos $s = -1$.

Este punto establece la existencia de $\lambda \epsilon E^m$ tal que $-r + \lambda^t w \geq 0$ para todo $(r,w) \epsilon C$. Equivalentemente, usando la definición de C, se tiene que $(c - \lambda^t A)x - tz_0 + t\lambda^t b \geq 0$, para toda $x \geq 0$, $t \geq 0$. Siendo $t = 0$ de $x^t A \leq c^t$, por lo cual decimos que λ es factible para el dual. Siendo $x = 0$ y $t = 1$ da $\lambda^t b \geq z_0$, por el lema de dualidad débil y el corolario anterior, probamos que λ es óptimo para el dual. ∎

Las soluciones óptimas para los problemas primal y dual satisfacen una relación adicional que tiene una interpretación económica para cualquier par de problemas de programación lineal. Esta relación se resume en el siguiente resultado.

Teorema de holgura complementaria, forma asimétrica. Sea x y λ soluciones factibles para los problemas primal y dual respectivamente, en (9). Una condición necesaria y suficiente para que ambas sean soluciones óptimas es que para toda i se cumpla:

$$\text{i)}\quad x_i > 0 \Rightarrow \lambda^t a_i = c_i$$

$$\text{ii)}\quad x_i = 0 \Leftarrow \lambda^t a_i < c_i.$$

Prueba. Si las condiciones establecidas se cumplen, entonces $(\lambda^t A - c^t)x = 0$. Así $\lambda^t b = c^t x$, y por el corolario del lema de dualidad débil, las dos soluciones son óptimas. Recíprocamente, si las dos soluciones son óptimas, por el teorema de dualidad $\lambda^t b = c^t x$ y $(\lambda^t A - c^t)x = 0$. Puesto que cada componente de x es no negativa y cada componente de $\lambda^t A - c^t$ es no-positiva, las condiciones (i) e (ii) se cumplen. ∎

Una forma alternativa de presentar este resultado, para el caso de problemas lineales duales se tiene a continuación.

Teorema de holgura complementaria, forma simétrica. Sean x y λ soluciones factibles para los problemas primal y dual respectivamente, en (8). Una condición necesaria y suficiente para que ambas soluciones sean óptimas es que para toda i, j:

i) $x_i > 0 \Rightarrow \lambda^t a_i = c_i$

ii) $x_i = 0 \Leftarrow \lambda^t a_i < c_i$

iii) $\lambda_j > 0 \Rightarrow a^j x = b_j$

iv) $\lambda_j = 0 \Leftarrow a^j x > b_j$

donde a^j es el j-ésimo renglón de A.

Prueba. Suponemos que x y λ son soluciones factibles. Sean $\alpha = (Ax - b) \geq 0$ y $\beta = (c - \lambda A)x \geq 0$ por las condiciones (i) e (ii), $\beta = 0$ y por las condiciones (iii) e (iv) $\alpha = 0$, lo que implica, sumando $\alpha + \beta = cx - \lambda b = 0$. Ahora bien x y λ son soluciones óptimas si y solo si $cx = \lambda b$ que equivale a $\alpha = \beta = 0$. Recíprocamente si las dos soluciones son óptimas entonces $cx = \lambda b$, por lo tanto $cx - \lambda b = \lambda(Ax-b) + (c-\lambda A)x = 0$, lo que implica $\lambda(Ax-b) = 0$ y las condiciones (iii) y (iv) se cumplen y $(c-\lambda A)x = 0$; las condiciones (i) e (ii) tambien se cumplen. ■

Una interpretación económica de este resultado es como sigue: si en el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

se tiene una restricción activa, esto es $a^j x = b_j$, entonces el precio a que se compraría una unidad adicional del recurso j es igual a λ_j. Además, si la restricción es no activa, esto es, $a^j x > b_j$, el precio a que se compraría la unidad adicional de recurso es igual a cero. De este resultado se justifica que los elementos λ_j, $j=1,2,\ldots,m$ sean denominados los precios sombra o precios de oportunidad.

1.5 MÉTODO PRIMAL-DUAL

Describiremos un procedimiento para resolver problemas de programación lineal trabajando simultáneamente con los problemas primal y dual. Empezaremos con una solución factible para el dual y la mejoraremos en cada paso, optimizando un problema primal restringido. El método trata de alcanzar las condiciones de holgura complementaria en condiciones óptimas. Originalmente el método primal-dual fué desarrollado para resolver una clase especial de problemas de programación lineal en redes de flujo y fué extendido al caso general de la programación lineal.

Consideramos el problema:

$$\begin{aligned} \min\quad & c^t x \\ \text{s.a}\quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

y su correspondiente dual

$$\begin{aligned} \max\quad & \lambda^t b \\ \text{s.a}\quad & \lambda^t A \leq c^t \\ & \lambda \text{ no restringida} \end{aligned} \tag{13}$$

Dada una solución factible λ para el problema dual, definimos el subconjunto P de $\{1,2,\ldots,n\}$ por $i \varepsilon P$ si $\lambda^t a_i = c_i$, donde a_i es la i-ésima columna de A, esto es, ya que λ

es dual factible, se sigue que si $i \notin P$ implica que $\lambda^t a_i < c_i$. Para λ y P definimos el primal restringido como:

$$\begin{array}{lll} \min & I^t y & \\ \text{s.a} & Ax + y = b & \\ & x \geq 0 \quad x_i = 0 \text{ para } i \notin P & \\ & y \geq 0 & \end{array} \tag{14}$$

donde $I = (1,1,\ldots,1)$ vector con m componentes. El dual de este primal restringido es llamado dual restringido. Así,

$$\begin{array}{lll} \max & \mu^t b & \\ \text{a.a} & \mu^t a_i \leq 0, & i \in P \\ & \mu \leq I & \end{array} \tag{15}$$

La condición de optimalidad del método primal-dual es expresada en el siguiente teorema.

Teorema de optimalidad Primal-Dual. Suponga que λ es factible para el dual y que x es factible, además $y = 0$ (y desde luego óptimo) para el primal restringido. Entonces x e λ son óptimos para los problemas originales primal y dual respectivamente.

Prueba. Claramente x es factible para el primal y tenemos que $c^t x = \lambda^t Ax$, porque $\lambda^t A$ es idéntico a c^t sobre las componentes correspondientes a los elementos diferentes de cero de x. Así $c^t x = \lambda^t Ax = \lambda^t b$, siguiendo la optimalidad del lema de dualidad débil.

El método primal-dual permanece con una solución factible para el dual y entonces optimiza el primal restringido. Si la solución óptima para el primal restringido es no factible para el primal, la solución factible para el dual se mejora y determinamos un nuevo primal restringido.

El método se describe detalladamente en la página siguiente. Para probar la convergencia de este método primero verificamos la afirmación hecha en el paso 3, así para $\mu_0^t\, a_j \leq 0$ para toda j implica que el primal no tiene solución factible. El vector $\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\, \mu_0$ es factible para el problema dual para todo ε positivo, ya que $\mu_0{}^t A \leq 0$. Además $\lambda_\varepsilon^t\, b = \lambda_0^t b + \varepsilon\, \mu_0^t b$ y $\mu_0^t b = I^t y > 0$, como ε es incrementada obtenemos una solución no acotada para el dual. Por el teorema de dualidad, esto implica que no existe solución para el primal.

Suponga que se cumple la suposición en el paso 3, para al menos una j, $\mu_0^t a_j > 0$. Defina la familia de vectores $\lambda\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\, \mu_0$. Puesto que μ_0 es solución de (15) tenemos que $\mu_0^t\, a_i \leq 0$ para $i \in P$, y para ε pequeña positiva el vector λ_ε es factible para el dual. Incrementamos ε para el primer punto donde una de las desigualdades $\lambda_{\varepsilon}^{t} a_j < c_j$, $j \notin P$ se convierte en igualdad. Esto determina $\varepsilon_0 > 0$ y k. El nuevo vector λ corresponde a un valor incrementando la función objetivo del dual $\lambda^t b = \lambda_0^t b + \varepsilon\ \mu_0^t b$. Además, el nuevo conjunto P incluye el índice k. Algún otro indice i que corresponde a un valor positivo de x_i en el primal restringido está en P, ya que por holgura complementaria $\mu_0^t\ a_i = 0$ para alguna i y así $\lambda^t a_i = \lambda_0^t\ a_i + \varepsilon_0 \mu_0^t\ a_i = c_i$. Esto significa que la solución primal anterior es factible para el nuevo primal restringido y que a_k puede entrar a la base. Puesto que $\mu_0^t a_k > 0$, pivoteando sobre a_k decrementaremos el valor del primal restringido.

En resumen ha sido mostrado que en cada paso una mejora en el primal se produce o una condición de infactibilidad es detectada. Suponiendo no degeneración, esto implica que esa base del primal no se repite, y puesto que solamente existe un número finito de bases posibles, la solución es alcanzada en un número finito de pasos.

ALGORITMO.- Primal-Dual

PROPOSITO: Resolver el problema de programación lineal cuando se tiene una solución dual factible.

DESCRIPCION

Paso 1. Dada una solución factible λ_0 para el problema dual (13), determine el primal restringido de acuerdo a (14).

Paso 2. Optimize el primal restringido. Si el valor mínimo de este problema es cero, la correspondiente solución es óptima para el problema primal original por el teorema de optimalidad primal-dual.

Paso 3. Si el valor mínimo del primal restringido es estrictamente positivo, obtenemos del último tableau simplex del primal restringido la solución μ_0 del dual restringido (15). Si no existe j tal que ${\mu_0}^t a_j > 0$ concluímos que no tiene soluciones factibles. Si por el contrario existe al menos una j tal que ${\mu_0}^t a_j > 0$, definimos el nuevo vector factible.

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_0 \mu_0$$

donde
$$\varepsilon_0 = \frac{c_k - {\lambda_0}^t a_k}{{\mu_0}^t a_k} = \min_j \left\{ \frac{c_j - {\lambda_0}^t a_j}{{\mu_0}^t a_j} \,\middle|\, {\mu_0}^t a_j > 0 \right\}$$

regresamos al paso 1 usando esta λ.

Ejemplo 5. El siguiente ejemplo ilustra el método primal-dual e indica como implementarlo en un tableau. Considere

$$\min \quad 2x_1 + x_2 + 4x_3$$

$$\text{sujeto a} \qquad x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$$

como todos los coeficientes en la función objetivo son no negativos, $\lambda = (0,0)$ es un vector factible para el dual. El cual es:

$$\max \quad 3\lambda_1 + 5\lambda_1$$

$$\text{sujeto a} \qquad \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$$

$$2\lambda_1 + 5\lambda_2 \leq 4$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \text{ no restringidas}$$

El tableau queda de la siguiente manera:

Primera iteración:

a_1	a_2	a_3	.	.	b
1	1	2	1	0	3
2	1	3	0	1	5
0	0	0	1	1	0

Para formar este tableau tuvimos que agregar variables artificiales

	a_1	a_2	a_3	.	.	b
	1	1	2	1	0	3
	2	1	3	0	1	5
	-3	-2	-5	0	0	-8
$c_i - \lambda^t a_i \rightarrow$	2	1	4	.	.	.

El tercer renglón da los coeficientes de costos del problema primal, el renglón podría ser usado como en el procedimiento de la fase I. En el cuarto renglón están los $c_i - \lambda^t a_i$ para λ. Las columnas consideradas en el primal restringido están determinadas por los ceros en el último renglón.

Como no hay ceros en el último renglón no podemos mejorar el primal restringido y por lo tanto la solución original $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $y_1 = 3$, $y_2 = 5$ es óptima para λ. La solución μ_0 para el dual restringido es $\mu_0 = (1,1)$, puesto que el primal y dual restringidos son:

$$\begin{array}{lllll} \min & y_1 + y_2 & \qquad & \max & 3\mu_1 + 5\mu_2 \\ \text{s.a} & y_1 \qquad = 3 & & \text{s.a} & \mu_1 \qquad \leq 1 \\ & \qquad y_2 = 5 & & & \qquad \mu_2 \leq 2 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 & & & \mu_1,\ \mu_2 \ \text{no restringidos} \end{array}$$

$y = (3,5)$ y como y_1, $y_2 > 0 \Rightarrow \lambda^t a_i = c_i$ por holgura complementaria. Los números $-\mu_0{}^t a_i$, $i = 1,2,3$ son iguales a los tres primeros elementos en el tercer renglón. Así calculando ε_0 tenemos que

$$\varepsilon_0 = \min \{2/3;\ 1/2,\ 4/5\} = 1/2$$

Ahora los nuevos valores para el cuarto renglón son sumando ε_0 veces los tres primeros elementos del tercer renglón al cuarto renglón, tenemos:

<u>Segunda</u> <u>iteración</u>:

a_1	a_2	a_3	.	.	b
1	1	2	1	0	3
2	1	3	0	1	5
-3	2	-5	0	0	-8
$^1/_2$	0	$^3/_2$	.	.	.

minimizando el nuevo primal restringido por el pivote indicado obtenemos:

a_1	a_2	a_3	.	.	b
1	1	2	1	0	3
1	0	1	-1	1	2
-1	0	-1	2	0	-2
$^1/_2$	0	$^3/_2$	.	.	.

Calculando $\epsilon_0 = \min\{^1/_2\ , ^3/_2\} = {^1/_2}$ y sumando este múltiplo del tercer renglón al cuarto, obtenemos el siguiente tableau:

<u>Tercera</u> <u>iteración</u>:

a_1	a_2	a_3	.	.	b
1	1	2	1	0	3
1	0	1	-1	1	2
0	0	1	.	.	.

Optimizando el nuevo primal restringido obtenemos:

a_1	a_2	a_3	.	.	b
0	1	1	2	-1	1
1	0	1	-1	1	2
0	0	0	1	1	0
0	0	1	.	.	.

habiendo obtenido factibilidad en el primal, conclufmos que la solución también es óptima: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. El valor de la función objetivo es $x_0 = 5$.

1.6 EJEMPLOS ILUSTRATIVOS.

Ejemplo 6. Considere el siguiente problema:

$$\min\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 10x_6$$

$$\text{sujeto a}\quad \begin{array}{lllllll}
x_1 + x_2 + x_3 & & & & & = & 8 \\
x_1 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & & = & 5 \\
x_1 & + x_4 & & & & = & 6 \\
x_2 & & + x_5 & & & = & 4 \\
x_3 & & & + x_6 & & = & 3
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$$

Como todos los coeficientes en la función objetivo son no-negativos, $\lambda = (0, 0, 0, 0, 0)$ es un vector factible para el dual, el cual es:

$$\max\ 8\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 4\lambda_4 + 3\lambda_5$$

$$\text{sujeto a}\quad \begin{array}{lllll}
\lambda_1 & + \lambda_3 & & & \leq 9 \\
\lambda_1 & & + \lambda_4 & & \leq 7 \\
\lambda_1 & & & + \lambda_5 & \leq 4 \\
\lambda_2 & + \lambda_3 & & & \leq 2 \\
\lambda_2 & & \lambda_4 & & \leq 6 \\
\lambda_2 & & & + \lambda_5 & \leq 10
\end{array}$$

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5 \ \text{no restringidas}$$

La solución con el método primal-dual es como sigue:

Primera iteración.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.	.	.	b
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	8
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	5
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	6
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0

Tuvimos que agregar variables artificiales. El sexto renglón nos dará los coeficientes de costos del primal.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.	.	.	b
	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	8
	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	6
	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
$c_i-\lambda^t a_j \rightarrow$	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	-26
	9	7	4	2	6	10	.	.	.	.	.	.

En el séptimo renglón están los $c_i-\lambda^t a_j$ para λ.

Las columnas consideradas para el primal restringido están determinadas por los ceros en el último renglón. La solución $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ y $y_1 = 8$, $y_2 = 5$, $y_3 = 6$, $y_4 = 4$, $y_5 = 3$ es óptima para λ. La solución μ_0 para el dual restringido es $\mu_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$ y los númernos $-\mu_0^t a_i$, $i = 1,2,3,4,5$ son iguales a los seis primeros elementos del sexto renglón. Calculando ε_0 tenemos que

$$\varepsilon_0 = \min \{9/2,\ 7/2,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5\} = 1$$

Los nuevos valores para el séptimo renglón son sumando ε_0 veces los seis primeros elementos del renglón sexto al séptimo.

Segunda iteración:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.	.	.	b
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	8
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	6
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
-2	-2	-2	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	-26
7	5	2	0	4	8	.	.	.	.	.	.

Minimizando el nuevo primal restringido obtenemos:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.	.	.	b
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	8
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
-2	-2	-2	0	0	0	0	2	0	0	0	-16
7	5	2	0	4	8	.	.	.	.	.	.

Calculando $\varepsilon_0 = \min \{7/2,\ 5/2,\ 1\} = 1$

<u>Tercera iteración</u>:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.	.	.	b
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	8
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
-2	-2	-2	0	0	0	0	2	0	0	0	-16
5	3	0	0	4	8	.	.	.	.	.	.

minimizando el nuevo primal restringido:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.	.	.	b
1	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	-1	5
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
-2	-2	0	0	0	2	0	2	0	0	-2	-10
5	3	0	0	4	8	.	.	.	.	.	.

calculando $\varepsilon_0 = \min\{5/2,\ 3/2\} = 3/2$

<u>Cuarta</u> <u>iteración</u>:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.	.	.	b
1	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	-1	5
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
-2	-2	0	0	0	2	0	2	0	0	2	-10
2	0	0	0	4	11	.	.	.	.	.	.

minimizando el nuevo primal restringido:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.	.	.	b
1	0	0	0	-1	-1	1	0	0	-1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	3
-2	0	0	0	2	2	0	2	0	2	0	-2
2	0	0	0	4	4	.	.	.	.	.	.

Calculando $\varepsilon_0 = \min \{1\} = 1.$

<u>Quinta iteración</u>:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.	.	.	b
1	0	0	0	-1	-1	1	0	0	-1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
-2	0	0	0	2	2	0	2	0	2	0	-2
0	0	0	0	8	15	.	.	.	.	.	.

minimizando el nuevo primal restringido

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.	.	.	b
0	0	0	0	0	0	1	1	-1	-1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0
0	0	0	0	0	15	.	.	.	.	.	.

Habiendo obtenido factibilidad en el primal, concluímos que la solución también es óptima: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$. El valor óptimo de la función objetivo es $x_0 = 59$.

Ejemplo 7. Considere el siguiente problema:

$$\min \quad x_1 \qquad + 2x_3 - x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 \geq 5$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

El problema anterior primero lo ponemos en forma estándar, esto es:

$$\min \quad x_1 \qquad 2x_3 - x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad &= 6 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 \qquad - x_6 &= 5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

El tableau queda:

Primera iteración:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		b
1	1	1	1	1	0	0	6
-2	1	-3	3	0	-1	1	5
0	0	0	0	0	0	1	0

Agregando solo una variable artificial y usuando el procedimiento de la fase I para obtener los coeficientes de costos del problema primal, tenemos:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	b
	1	1	1	1	1	0	0	6
	-2	1	-3	3	0	-1	1	5
	2	-1	3	-3	0	1	0	-5
$c_i = \lambda^t a_i$ +	1	0	2	$\boxed{-1}$	0	0	.	.

Las columnas consideradas en el primal restringido están determinadas por los ceros en el último renglón. Como aparece el coeficiente $c_i - \lambda^t a_i$ de la cuarta columna negativo, primero debemos buscar una solución factible, esto es:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	b
$5/3$	$2/3$	2	0	1	$1/3$	$-1/3$	$13/3$
$-2/3$	$1/3$	-1	1	0	$-1/3$	$1/3$	$5/3$
0	0	0	0	0	0	1	0
$1/3$	$1/3$	1	0	0	0	.	.

Habiendo obtenido factibilidad en el primal, concluímos que la solución también es óptima, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5/3$, $x_5 = 13/3$, $x_6 = 0$. El valor óptimo de la función objetivo es $x_0 = -5/3$.

Ejemplo 8. Considere el siguiente problema:

$$\max \quad x_1 + 6x_2$$

$$\text{sujeto a} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Este problema lo transformamos primeramente a la forma estándar, esto es:

$$\min \quad -x_1 - 6x_2$$

$$\text{sujeto a} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 \qquad &= 2 \\ x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

El tableau queda:

Primera iteración:

a_1	a_2	a_3	a_4		b
1	1	-1	0	1	2
1	3	0	1	0	3
0	0	0	0	1	0

Agregando una variable artificial y usando el procedimiento de la fase I para obtener los coeficientes de costo del problema primal, tenemos:

Ejemplo 8. Considere el siguiente problema:

$$\max \quad x_1 + 6x_2$$

$$\text{sujeto a} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0 \,,\; x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Este problema lo transformamos primeramente a la forma estándar, esto es:

$$\min \quad -x_1 - 6x_2$$

$$\text{sujeto a} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

El tableau queda:

Primera iteración:

a_1	a_2	a_3	a_4	.	b
1	1	-1	0	1	2
1	3	0	1	0	3
0	0	0	0	1	0

Agregando una variable artificial y usando el procedimiento de la fase I para obtener los coeficientes de costo del problema primal, tenemos:

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & . & b \\
 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
c_i - \lambda^t a_i \rightarrow & -1 & \boxed{-6} & 0 & 0 & . & .
\end{array}
$$

Como podemos observar los $c_i - \lambda^t a_i$ son negativos, debemos primero buscar una solución factible; escogiendo la segunda columna tenemos que:

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & . & b \\
 & 2/3 & 0 & -1 & -1/3 & 1 & 1 \\
 & 1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1 \\
 & -2/3 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1 \\
c_i - \lambda^t a_i \rightarrow & 1 & 0 & 0 & 2 & . & .
\end{array}
$$

Las columnas consideradas en el primal restringido están determinadas por los ceros en el último renglón. En este caso no podemos mejorar el primal restringido por lo que calculamos ε_0, esto es

$$\varepsilon_0 = \min \{3/2\} = 3/2 .$$

Segunda iteración:

a_1	a_2	a_3	a_4	.	b
$2/3$	0	-1	$-1/3$	1	1
$1/3$	1	0	$1/3$	0	1
$-2/3$	0	1	$1/3$	0	-1
0	0	$3/2$	$5/2$	.	.

minimizando el nuevo primal restringido

a_1	a_2	a_3	a_4	.	b
1	0	$-3/2$	$-1/2$	$3/2$	$3/2$
0	1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
0	0	0	0	1	0
0	0	$3/2$	$5/2$	.	.

Habiendo obtenido factibilidad en el primal, concluímos que la solución también es óptima: $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. El valor óptimo de la función objetivo es $x_0 = 3/2$.

CAPITULO II

ANALISIS DE PROBLEMAS DE REDES: METODOS PRIMALES

Problemas de estructura especial son importantes por su aplicación y teoría. Tales como el problema de transporte, el de asignación, el de ruta más corta y flujo máximo. Aquí veremos los conceptos más importantes para desarrollar los métodos primales de éstos problemas.

En la primera parte de este capítulo se describe el problema de transporte. En la segunda un método para encontrar una solución básica factible inicial, mientras que en la tercera se demuestra una propiedad importante: triangularización de la base. En la cuarta sección se proporciona el algoritmo de transporte con un ejemplo ilustrativo. En la quinta, se describe el problema de asignación que es un caso particular del problema de transporte. En la sexta, se desarrolla una interpretación de los conceptos de redes para el problema de transporte desarrollado en términos algebraicos; considerando el problema de flujo a costo mínimo. En la séptima, se describe el problema de flujo máximo y en la octava parte el problema de ruta más corta.

2.1 EL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

Suponga que las cantidades a_1, $a_2,\ldots,a_m$ de un cierto producto son transportadas de m localidades a n destinos cuyas demandas son $b_1,b_2,\ldots,b_n$. Asociado con el embarque de una unidad de producto de un origen i a un destino j, existe un costo c_{ij}. Se desea determinar el patrón de embarques de los orígenes a los destinos que minimice el costo total del transporte.

Con el propósito de formular este problema como uno de programación lineal, considere el arreglo:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{|cccc|c}
\hline
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & a_1 \\
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & a_2 \\
\vdots & & & & \vdots \\
x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & a_m \\
\hline
\end{array} \\
\begin{array}{cccc}
b_1 & b_2 & \cdots & b_n
\end{array}
\end{array}
$$

donde el i-ésimo renglón define las variables asociadas con el i-ésimo origen, mientras que la j-ésima columna define las variables asociadas con el j-ésimo destino. El problema da lugar a variables no negativas x_{ij}, donde la suma del i-ésimo renglón es a_i, la suma de la j-ésima columna es b_j y

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} \; x_{ij}$$

representan los costos de transporte a minimizar.. Entonces tenemos el siguiente problema de programación lineal:

$$\min \quad \sum_{ij} c_{ij} \; x_{ij}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \text{para } i=1,\ldots,m \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \text{para } j=1,\ldots,n \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{para } i=1,\ldots,m$$
$$j=1,\ldots,n$$

para que las restricciones (1) y (2) sean consistentes, suponemos que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \; ,$$

es decir, la oferta total es igual a la demanda total.

El problema de transporte tiene nm variables. Las ecuaciones (1) y (2) pueden ser combinadas y expresadas en forma matricial y los coeficientes de ésta matriz de orden (m+n)x(mn) consiste de ceros y unos, a saber:

$$
\begin{array}{lllll}
x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} & & & & = a_1 \\
 & x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} & & & = a_1 \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} & = a_m \quad (3) \\
x_{11} & + x_{21} & & + x_{m1} & = b_1 \\
\quad x_{12} & \quad + x_{22} & & \quad + x_{m2} & = b_2 \\
\quad \ddots & \quad \ddots & & \quad \ddots & \vdots \\
\quad\quad x_{1n} & \quad\quad x_{2n} & & \quad\quad x_{mn} & = b_n
\end{array}
$$

En la práctica no es necesario escribir las restricciones del problema de transporte de la forma (3). Un problema específico de transporte es generalmente definido como:

$$
\begin{array}{l}
a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \\
b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)
\end{array}
\qquad
C = \begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\
\vdots & & & \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}
\end{bmatrix}
$$

La solución puede ser representada en un arreglo de mxn y los cálculos pueden hacerse en un arreglo similar.

Ejemplo 1. Un problema de transporte con 4 orígenes y 5 destinos es definido por:

$$a = (30,\ 80,\ 10,\ 60) \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$b = (10,\ 50,\ 20,\ 80,\ 20)$$

note que los requerimientos son satisfechos, ya que la suma de la oferta y la demanda es 180.

FACTIBILIDAD Y REDUNDANCIA.

Un primer paso para estudiar la estructura del problema de transporte es mostrar que siempre existe una solución factible; esto establece que el problema está bien definido. Podemos encontrar una solución factible distribuyendo embarques de orígenes a destinos en proporción a la oferta y requerimientos demandados. Específicamente sea S la oferta total (que es igual a la demanda total). Entonces $x_{ij}=a_i b_j/S$ para $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$. Las soluciones son acotadas ya que cada x_{ij} es acotada por a_i (y por b_j). Un problema de optimización acotado con una solución factible tiene una solución óptima. Así, un problema de transporte siempre tiene una solución óptima.

Un segundo paso para estudiar la estructura del problema de transporte se basa en examinar las restricciones. Hay m ecuaciones que corresponden a las restricciones de oferta y n ecuaciones que corresponden a las restricciones de demanda; un total de m + n restricciones. Sin embargo, notamos que la suma de las ecuaciones de oferta son:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad (4)$$

y la suma de las ecuaciones de demanda son:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5)$$

Los lados izquierdos de estas ecuaciones son iguales. Observe que estas ecuaciones fueron formadas por combinaciones lineales de las ecuaciones originales, es por ello que las ecuaciones del sistema original no son independientes. Los lados derechos de (4) y (5) son iguales por la suposición de que el sistema es equilibrado, y por lo tanto las dos ecuaciones son consistentes. Sin embargo el sistema original de ecuaciones es redundante. Esto significa que una de las restricciones puede ser eliminada sin cambiar el espacio de soluciones factibles.

TEOREMA. Un problema de transporte siempre tiene una solución factible y tiene exactamente una restricción de igualdad redundante. Cuando alguna de las restricciones es eliminada, el sistema de $n + m - 1$ restricciones es linealmente independiente.

Prueba. La existencia de una solución y la redundancia fueron ya establecidas anteriormente. Por lo tanto alguna restricción puede ser expresada como una combinación lineal de las otras y puede ser eliminada.

Suponga que una ecuación es eliminada, la última. Suponemos que hubo una combinación lineal de las ecuaciones restantes que fué cero. Sean los coeficientes de tal combinación α_i, $i = 1,\ldots,m$ y β_j, $j = 1,\ldots,n-1$. En referencia a(3), vemos que cada x_{in}, $i = 1,\ldots,m$, aparece en la i-ésima ecuación (ya que la última ha sido eliminada). Esto es, $\alpha_i = 0$ para $i = 1,\ldots,n$. El resto de las ecuaciones x_{ij} aparece en una ecuación, y $\beta_j = 0$, $j = 1,\ldots,n-1$. De aquí la combinación lineal que da cero es la combinación cero, y por tanto el sistema de ecuaciones es linealmente independiente. ■

Una base para el problema de transporte consiste de $m+n-1$ vectores y una solución básica factible no degenerada consiste de $m+n-1$ variables. La solución encontrada anteriormente en esta parte no es una solución básica.

2.2 SOLUCION BASICA FACTIBLE.

Existen varios métodos para encontrar una solución básica factible inicial en el problema de transporte. En esta parte discutimos solo uno. Este método es rápido y nos introduce al proceso computacional que es fundamental para la solución general que se basa en la técnica del método simplex.

LA REGLA DE LA ESQUINA NOROESTE.

Este método se lleva a cabo mediante el siguiente arreglo:

x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\cdots$	x_{1n}	a_1
x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\cdots$	x_{2n}	a_2
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	$\cdots$	x_{mn}	a_m
b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_n	

(6)

Los elementos del arreglo aparecen en celdas y representan una solución. Una celda vacía denota el valor de cero. Empezando con todas las celdas vacías, el procedimiento es como sigue:

Paso 1. Comenzamos con la celda de la esquina superior izquierda.

Paso 2. Asignamos el máximo factible correspondiente al renglón y columna de los requerimientos involucrados en la celda. (Al menos uno de esos requerimientos será satisfecho).

Paso 3. Nos movemos una celda a la derecha si hay algún requerimiento en el renglón. En otro caso nos movemos una celda hacia abajo. Si todos los requerimientos son satisfechos paramos. En otro caso regresamos al paso 2.

El procedimiento es llamado regla de la esquina noroeste porque en cada paso selecciona la celda de la esquina superior izquierda del subarreglo, tomando en cuenta los requerimientos por renglón y columna diferentes de cero. La ilustración gráfica de como la regla de la esquina noroeste asigna valores a las variables con m=4 y n=5 es:

B	B				a_1
	B	B	B		a_2
			B		a_3
			B	B	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	

Paso 2. Para algún nodo etiquetado sin búsqueda del nodo i, encuentre todos los nodos alcanzables a i sin que estos esten etiquetados. Etiquete esos nodos con i.

Paso 3. Si el nodo m es etiquetado pare; una trayectoria se ha conseguido, una ruta existe. Si hay nodos no etiquetados que no pueden ser etiquetados, pare; no existe una ruta conectada. En otro caso vaya al paso 2.

El proceso se ilustra como sigue:

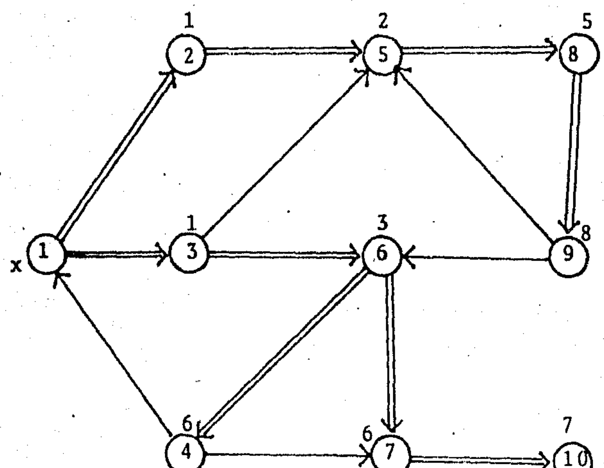


Figura 4. El procedimiento de búsqueda.

10	20				30	20	0	
	30	20	30		80	50	30	0
			10		10	0		
			40	20	60	20	0	
10	50	20	80	20				
0	30	0	50	0				
	0		40					
			0					

Nótese que se tiene el número requerido de variables básicas a saber, 8 = m + n - 1. Las celdas en blanco son no básicas y las variables asociadas tienen valor cero.

Existe la posibilidad de que en algún renglón y columna se satisfagan requerimientos correspondientes. La próxima entrada será cero, indicando una solución básica degenerada. Según la posición del cero existen dos posibles soluciones básicas degeneradas como puede observarse a continuación

30				30	0	
20	20			40	20	0
	0	20		20	0	
		20	40	60	40	0
50	20	40	40			
20	0	20	0			
0			0			

30				30	0	
20	20	0		40	20	0
		20		20	0	
		20	40	60	40	0
50	20	40	40			
20	0	20	0			
0		0				

La regla de la esquina noroeste puede ser usada para obtener diferentes soluciones básicas factibles, permutando los renglones y columnas del arreglo antes de aplicar el procedimiento. O equivalentemente, podemos hacer esto indirectamente, comenzando el procedimiento en una celda arbitraria y entonces consideramos renglones y columnas sucesivas en un orden arbitrario.

2.3 CARACTERIZACION DE LA BASE.

En esta sección estableceremos una propiedad importante para el problema de transporte: la triangularización de la base. Esta propiedad simplifica el proceso de solución de un sistema de ecuaciones cuyos coeficientes corresponden a una base, permitiendo una implementación eficiente del método simplex.

MATRICES TRIANGULARES.

<u>Definición</u>: Una matriz cuadrada no singular M se llama <u>triangular</u> si por una permutación de sus renglones y columnas está en la forma de una matriz triangular inferior.

Es inmediato que una matriz triangular inferior no singular es triangular de acuerdo a la definición. Una matriz triangular superior no singular es también triangular, ya que invirtiendo el orden de sus renglones y columnas se convierte en triangular inferior.

Un procedimiento simple para determinar si una matriz M es triangular es dado como sigue:

<u>Paso 1</u>. Encontrar un renglón con exactamente un elemento diferente de cero.

<u>Paso 2</u>. Forme una submatriz de la matriz utilizada en el paso 1, cruzando el renglón y columna correspondiente al elemento diferente de cero en ese renglón. Regrese al paso 1 con la submatriz.

Si el procedimiento lo podemos continuar hasta que todos los renglones han sido eliminados, entonces la matriz es triangular. Podemos ponerla en la forma explícita de triangular inferior, arreglando los renglones y columnas en el orden que fué determinado por el procedimiento.

Ejemplo 3. Del lado izquierdo está la matriz antes de aplicar el procedimiento, indicando a los lados el orden en que deben ir los renglones y columnas de acuerdo al procedimiento. Del lado derecho está la matriz después de aplicar el procedimiento, cuando sus renglones y columnas son permutados de acuerdo al orden encontrado.

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{array} & \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

La importancia de triangularización es, desde luego, el método asociado de sustitución hacia atrás para el sistema triangular de ecuaciones. Suponga que M es triangular. Una permutación de renglones es una reordenación simple de las ecuaciones y una permutación de columnas es una reordenación sim ple de las variables. Así después de una reordenación apropiada, el sistema de ecuaciones $Mx = d$ toma la forma triangular inferior y puede ser resuelto: primero para x_1 de la primera ecuación, sustituyendo este valor en la segunda ecuación, resolviendo para x_2 y así sucesivamente.

Este método también se aplica a sistemas de la forma $\lambda^t M = c^t$. En este caso las componentes de λ serán determinadas en orden inverso, empezando con λ_n ya que la matriz está de la forma triangular superior (que corresponde a la eliminación gaussiana en un sistema arbitrario).

Un aspecto importante del problema de transporte es que cada una de sus bases es una matriz triangular.

<u>Teorema de triangularización de bases</u>. Cada una de las bases del problema de transporte es triangular.

<u>Prueba</u>. Refiriéndonos al sistema de restricciones (3). Cambiamos el signo a la mitad del sistema, entonces la matriz de coeficientes del sistema consiste de + 1, - 1 ó 0. Siguiendo el resultado del teorema de la primera sección, quitamos una de las ecuaciones para eliminar redundancia. De los coeficientes de la matriz resultante formamos una base B, seleccionando un subconjunto no singular de m + n - 1 columnas.

Cada columna de B contiene a lo más dos elementos diferentes de cero, + 1 y - 1. Entonces hay a lo mas 2(m+n-1) elementos diferentes de cero en la base. Sin embargo, si cada columna contiene dos elementos diferentes de cero, entonces la suma de todos los renglones sería cero, contradiciendo la no-singularidad de B. De este modo, al menos una columna de B contiene solamente un elemento diferente de cero. Esto significa que el número total de elementos diferentes de cero en B es menor que 2(m+n-1).

Entonces existe un renglón con un elemento diferente de cero; si cada renglón tiene dos o más elementos diferentes de cero, el número total podría ser al menos 2(m+n-1). Esto significa que el primer paso del procedimiento para verificar triangularidad se satisface. Un argumento similar puede ser aplicado para la submatriz de B obtenida al cruzar el renglón con la columna correspondiente a estos elementos, esta submatriz también debe contener un renglón con un elemento diferente de cero. Este argumento establece que la base B es triangular. ∎

<u>Ejemplo 4</u>. Como ilustración del teorema de triangularización de bases, considere la base seleccionada por la regla de la esquina noroeste del ejemplo 2. En esta base solamente las variables básicas son indicadas, no así sus valores.

x	x				30
	x	x	x		80
			x		10
			x	x	60
10	50	20	80	20	

Un reglón en una matriz básica corresponde a una ecuación en el sistema original y está asociada con -una restricción sobre el total de un renglón o columna. En este ejemplo la ecuación correspondiente a la suma de la primera columna contiene solamente una variable básica, x_{11}. El valor de esta variable lo podemos encontrar rápidamente, es 10. La siguiente ecuación corresponde a la suma del primer renglón. La variable es x_{12} la cual tiene valor de 20 ya que x_{11} es conocida. Este procedimiento es equivalente al método de sustitución hacia atrás.

Ejemplo 5. Representando otra base para el ejemplo 2. Debemos buscar sobre los renglones y columnas para encontrar una variable básica. El valor de esta variable podemos encontrarlo facilmente. Tales renglones o columnas siempre existen, ya que toda base es triangular. Entonces este renglón o columna es cruzado y el procedimiento repetido. Los números en las celdas indican un orden aceptable para su cálculo, aunque hay otros.

x^{1}		x^{5}		x^{6}	30
	x^{2}		x^{3}		80
		x^{4}			10
			x^{8}	x^{7}	60
10	50	20	80	20	

SOLUCIONES ENTERAS.

Como cualquier matriz básica es triangular y todos sus elementos diferentes de cero son iguales a uno (o menos uno, si el signo de algunas ecuaciones es cambiado), el proceso de sustitución hacia atras implicará sumas y restas repetidamente del total de los renglones y columnas. La multiplicación no se requiere. Por lo tanto si el total de los renglones y columnas originales son enteros, los valores de todas las variables básicas son enteras. Esto es un resultado importante, el cual se resume en el siguiente corolario de triangularidad de bases.

Corolario. Si los totales de los renglones y columnas de un problema de transporte son enteros, entonces las variables básicas en cualquier solución básica son enteras.

2.4 METODO SIMPLEX PARA EL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

MULTIPLICADORES SIMPLEX.

Los multiplicadores simplex están asociados con las restricciones. En este caso particionamos el vector de multiplicadores como $\lambda = (\mu, v)$. Aquí μ_i representa los multiplicadores asociados con el i-ésimo renglón y v_j representa los multiplicadores asociados con la j-ésima columna. Ya que una de las restricciones es redundante, un valor arbitrario debe ser asignado a uno de los multiplicadores. Para simplificar la notación $v_n = 0$.

Dada una base B, los multiplicadores simplex se encontrarán en la ecuación $\lambda^t B = C^t{}_B$. Para determinar la forma explícita de estas ecuaciones, nos referiremos al sistema original de restricciones (3). Si x_{ij} es básica, entonces la correspondiente columna de A será incluída en B. Esta columna tiene dos elementos + 1: uno es la i-ésima posición y otro en la j-ésima. Esta columna genera a los multiplicadores simplex de la ecuación $\mu_i + v_j = c_{ij}$, ya que μ_i y v_j son las componentes correspondientes del vector de multiplicadores. Las ecuaciones de los multiplicadores simplex son:

$$\mu_i + v_j = c_{ij} \qquad (8)$$

para toda i, j, para los cuales x_{ij} es básica. La matriz de coeficientes de este sistema es la transpuesta de la matriz básica y por tanto es triangular. De este modo el sistema puede ser resuelto por sustitución hacia atrás. Esto es similar al procedimiento para encontrar los valores de las variables básicas y por consiguiente, tenemos otro corolario del teorema de triangularización de bases para los multiplicadores simplex.

COROLARIO. Si los costos c_{ij} de un problema de transporte son enteros, entonces (suponiendo que un multiplicador símplex está en un conjunto entero), los multiplicadores simplex asociados con cada base son enteros.

Una vez que los multiplicadores simplex son conocidos, los coeficientes de costo relativo para las variables no básicas pueden ser encontrados de la manera usual como $r_D^t = c_D^t - \lambda^t D$. En este caso los coeficientes de costo relativo son

$$r_{ij} = c_{ij} - \mu_i - v_j \qquad \text{para } i=1,\ldots,m \quad j=1,\ldots,n \tag{9}$$

Esta relación es válida para variables básicas; con costo relativo cero.

Dada una base, el cálculo de los multiplicadores simplex es similar a calcular los valores de las variables básicas. Los cálculos son facilmente ejecutados sobre un arreglo de la siguiente forma, donde los elementos en círculo corresponden a la posición de las variables básicas en la base.

$$\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccc}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\
\vdots & & & & \vdots \\
c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn}
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m
\end{array} \\
\begin{array}{ccccc}
v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n
\end{array}
\end{array}$$

En este caso la parte principal del arreglo con los coeficientes c_{ij} permanecen fijos y calculamos las columnas y renglones correspondientes a μ o v.

El procedimiento para calcular los multiplicadores simplex es:

Paso 1. Asignar un valor arbitrario a algunos de los multiplicadores.

Paso 2. Buscar en los renglones y columnas del arreglo hasta encontrar un elemento c_{ij} en círculo tal que μ_i o v_j (no ambos) haya sido determinado.

Paso 3. Calcular μ_i o v_j de la ecuación $c_{ij} = \mu_i - v_j$. Si todos los multiplicadores son determinados pare. En otro caso regrese al paso 2.

La triangularización de la base garantiza que este procedimiento determina a todos los multiplicadores simplex.

Ejemplo 6. Considere el siguiente arreglo de costos. Los elementos en círculo corresponden a la solución básica factible (encontrada por la regla de la esquina noroeste). Solamente estos números son usados en el cálculo de los multiplicadores.

3	4	6	8	9
2	2	4	5	5
2	2	2	3	2
3	3	2	4	2

Arbitrariamente sea $v_5 = 0$. Entonces buscamos en la celdas, un solo elemento en círculo debe ser determinado. Este es el elemento de la esquina derecha de abajo y da $\mu_4 = 2$. Entonces de la ecuación $4 = 2 + v_4$, se tiene que $v_4 = 2$. Ahora μ_3 y μ_2 son determinadas, entonces v_3 y v_2, y finalmente μ_1 y v_1. El resultado es

						μ
	3	4	6	8	9	5
	2	2	4	5	5	3
	2	2	2	3	2	1
	3	3	2	4	2	2
v	-2	-1	1	2	0	

CAMBIO DE CICLO.

De acuerdo con el procedimiento general del simplex, si una variable no básica tiene asociado un coeficiente de costo relativo negativo, entonces ésta variable es un candidato para entrar a la base. Como el valor de esta variable es incrementado gradualmente, los valores de las variables básicas cambiarán continuamente para mantener factibilidad. Entonces el valor de la nueva variable es incrementado, mientras que una de las variables básicas se hace cero.

Si el nuevo vector básico es d, entonces el cambio en las otras variables está dado por $-B^{-1}d$, donde B es la base.

TEOREMA. Sea B una base de A (ignorando un renglón) y sea d una columna. Entonces las componentes del vector $y = B^{-1}d$ son 0, + 1, o - 1.

Prueba. Sea y la solución de la ecuación By - d. Entonces y es la representación de d en términos de la base. Esta ecuación se puede resolver por la regla de Cramer, esto es,

$$Y_k = \frac{\det B_k}{\det B},$$

donde B_k es la matriz obtenida al reemplazar la k-ésima columna de B por d. B y B_k son submatrices de la matriz de restricciones original A. La matriz B podemos ponerla en la forma triangular con todos los elementos en la diagonal iguales a + 1. Por tanto, considerando el cambio del signo que resulta de intercambiar los renglones y columnas, det B = + 1 ó - 1. Así mismo podemos mostrar que det B_k = 0, + 1, ó -1. Concluímos que cada componente de y es 0, + 1 ó - 1. ∎

La implicación de este resultado es que cuando una nueva variable es añadida a la solución en una unidad, las variables básicas cambiarán a + 1, - 1 ó 0. Si las nuevas variables tienen el valor de Θ, entonces las variables básicas cambian a + Θ, - Θ ó 0 correspondientemente. Por lo tanto es necesario determinar los signos de cambio para cada variable básica.

La determinación de estos signos es una búsqueda sobre los renglones y columnas. Operacionalmente, una asignación + a la celda de la variable que entra representa un cambio + Θ, que será determinada. Entonces +, - y 0. son asignados uno por uno a las celdas de algunas variables básicas, indicando cambios de +Θ, - Θ ó 0 para mantener una solución factible. Después de cada paso habrá una ecuación que determina el signo asignado a la variable básica. El resultado será una secuencia de + y - asignados a las celdas que forman un ciclo, primero la celda de la variable que entra. En esencia, el cambio es parte de un ciclo de redistribución del flujo en un sistema de transporte.

Una vez que la secuencia de + , - y 0 es determinada, la nueva solución básica factible se encuentra colocando el nivel de cambio Θ. Esto es, poniendo una de las variables básicas en cero. Debemos examinar las variables básicas para las cuales un signo menos ha sido asignado, para estas, son los unos los que se decrementarán cuando la nueva variable entra. Entonces Θ es igual a la magnitud más pequeña de estas variables. Este valor es sumado a todas las celdas que tengan asignado + y restado de todas las celdas que tengan asignado -. El resultado será la nueva solución básica factible.

El procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

<u>Ejemplo 7</u>. Un arreglo solución es el siguiente:

		10^0			10
		20^-		10^+	30
20^+	10^0			30^-	60
10^0					10
10^-		+	40^0		50
40	10	30	40	40	

En este ejemplo x_{53} es la variable que entra, así un signo + es asignado allí. Los signos de las otras celdas son determinados en el orden x_{13}, x_{23}, x_{25}, x_{35}, x_{32}, x_{31}, x_{41}, x_{51}, x_{54}. La variable mas pequeña con un signo menos asignado es $x_{51} = 10$. Así Θ = 10, quedando:

		10			10
		10		20	30
30	10			20	60
10					10
		10	40		50
40	10	30	40	40	

ALGORITMO DE TRANSPORTE:

Ahora es posible reunir las componentes desarrolladas hasta aquí en la forma de un procedimiento simplex revisado para el problema de transporte.

Descripción.

Paso 1. Calcular una solución inicial básica factible, usando la regla de la esquina noroeste, o algún otro método.

Paso 2. Calcular los multiplicadores simplex y los coeficientes de costos relativos. Si todos los coeficientes de costos relativos son negativos, paramos, la solución es óptima. En otro caso ir al paso 3.

Paso 3. Seleccione una variable no básica correspondiente a un coeficiente de los costos negativos para entrar a la base (generalmente el que tiene el coeficiente de costo mas negativo). Calcule el ciclo de cambio y sea θ igual a la variable básica más pequeña con signo menos asignado. Ir al paso 2.

Ejemplo 8. Ahora podemos resolver completamente el problema en el ejemplo 1. Los requerimientos y una solución básica factible obtenida por la regla de la esquina noroeste, son los siguientes:

10	20				30
	30	20	30		80
			10		10
			40	20	60
10	50	20	80	20	

Los coeficientes en un círculo corresponden a las variables básicas. Los multiplicadores simplex calculados por la búsqueda de renglones y columnas (en el ejemplo 6) son los siguientes:

						μ_i
	3	4	6	8	9	5
	2	2	4	5	5	3
	2	2	2	3	2	1
	3	3	2	4	2	2
v_j	-2	-1	1	2	0	

Los coeficientes de costos relativos son calculados de restar $\mu_i + v_j$ de c_{ij}:

		0	1	4
1				2
3	2	0		1
3	2	-1		

En este caso resulta negativo solamente la celda (4,3); así la variable x_{43} entrará a la base. Un signo + se pone en la celda del arreglo original, y el ciclo de 0, + 1, -1 es determinado. (no es necesario continuar la búsqueda una vez que el ciclo está determinado):

10	20				30
	30	20^-	30^+		80
			10°		10
		+	40°	20°	60
10	50	20	80	20	

La variable básica con signo menos más pequeño es 20, entonces 20 es sumado o restado de los elementos del ciclo como indican los signos. La nueva solución básica factibles es:

10	20				30
	30		50		80
			10		10
		20	20	20	60
10	50	20	80	20	

Los nuevos multiplicadores simplex correspondientes a la nueva base con calculados y los costos del arreglo revisados:

						μ_i
	3	4	6	8	9	5
	2	2	4	5	5	3
	2	2	2	3	2	1
	3	3	2	4	2	2
v_j	-2	-1	0	2	0	

Los coeficientes de costo relativo son:

		1	1	4
1		1		2
3	2	1		1
4	2			

En este caso todos los coeficientes de costo relativo son positivos, indicando que la solución es óptima.

DEGENERACION.

Todo problema de programación lineal degenerado tiene variables básicas con valor cero, esto puede ocurrir en el problema de transporte. Si hay degeneración en el procedimiento simplex, podemos introducir el método estándar de perturbación. En este método a la variable básica con valor cero se le asigna el valor ε y se continúa de manera usual. Si deja la base, entonces ε puede ser eliminado.

<u>Ejemplo 9</u>. Para ilustrar el método con degeneración, considere una modificación del ejemplo 8, el cuarto renglón de 60 a 20 y la cuarta columna de 80 a 40. Entonces la solución básica factible por la regla de la esquina noroeste es degenerado. Una ε en el lugar de la variable básica con valor cero se pone en el arreglo:

10	20				30
	30	20	30		80
			10		10
			0	20	20
10	50	20	40	20	

10	20				30
	30	20^-	30^+		80
			10°		10
		+	ε^-	20°	20
10	50	20	40	20	

Los coeficientes de costo relativo son los mismos que en el ejemplo 8, x_{43} es el candidato a entrar a la base, y el cambio de ciclo es el mismo. En este caso, sin embargo, el cambio es solo ε y la variable x_{44} deja la base.

10	20				30
	30	20	30		80
			10		10
				20	20
10	50	20	40	20	

Los nuevos multiplicadores simplex correspondientes a la nueva base son calculados, al igual que los coeficientes de costo relativo:

						μ_i
	3	4	6	8	9	6
	2	2	4	5	5	4
	2	2	2	3	2	2
	3	3	2	4	2	2
v_j	-3	-2	0	1	0	

		0	3
1			1
3	2	0	0
4	3		

Los nuevos coeficientes de costo relativo son positivos, indicando que la nueva solución es óptima. La ε puede ser eliminada en la solución final.

2.5 EL PROBLEMA DE ASIGNACION.

El problema de asignación es un caso particular del problema de transporte. El ejemplo clásico del problema de asignación es optimizar la asignación de n trabajadores a n empleos. Si el trabajador i es asignado al empleo j, hay un beneficio de c_{ij}. Cada trabajador debe ser asignado a un empleo y viceversa. Hay que maximizar el valor total de la asignación.

La formulación general del problema de asignación es encontrar x_{ij} $i=1,...,n$, $j=1,...,n$ para:

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \ x_{ij} \\ \text{s.a} \ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1,\ldots,n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{para } j = 1,\ldots,n \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \text{para } i = 1,\ldots,n \\ & \qquad\qquad\quad\ \ j = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{10}$$

se requiere que cada una de las variables tome el valor de cero o uno, en otro caso la solución no tiene sentido ya que no es posible hacer asignaciones fraccionarias.

TEOREMA. Una solución básica factible del problema de asignación tiene todas las x_{ij} igual a cero o uno.

Prueba. De acuerdo al corolario del Teorema de triangularización de bases, todas las variables básicas en alguna solución básica son enteras. Las variables no pueden exceder a uno porque el lado derecho de las restricciones son uno. Por lo tanto todas las variables deben ser cero o uno. ∎

Se sigue que hay al menos n variables básicas que tienen el valor de uno porque debe haber un uno en cada renglón (y en cada columna). En un problema de transporte de esta dimensión, una solución básica no degenerada podría tener 2n-1 variables positivas. De este modo, las soluciones básicas factibles para el problema de asignación son altamente degeneradas, con n-1 variables básicas iguales a cero.

El problema de asignación puede ser resuelto por el algoritmo de transporte, es un poco tedioso. Un algoritmo eficiente fué desarrollado para el problema de asignación por dos matemáticos húngaros, después fué generalizado a la forma del método primal-dual para programación lineal. (Se verá en el capítulo III).

2.6 FLUJO A COSTO MINIMO.

En esta sección consideramos el problema básico de flujo a costo mínimo, el cual generaliza el problema de transporte. El objetivo principal de esta sección es desarrollar una interpretación de los conceptos de redes para el problema de transporte desarrollado en términos algebráicos.

Consideramos una red con n nodos. Correspondiendole a cada nodo i un número b_i, representando la oferta disponible al nodo. (Si $b_i < 0$, entonces hay un requerimiento demandado). Suponemos que la red está balanceada en el sentido que

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$$

Asociado con cada arco (i,j) hay un número c_{ij}, representando la unidad de costo por flujo para el arco. El problema de flujo a costo mínimo está determinado por flujos $x_{ij} \geq 0$ en cada arco de la red, así el flujo neto en cada nodo i es b_i, mientras que minimizamos el costo total. En términos matemáticos el problema es:

$$\min \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = b_i \qquad i=1,\ldots,n \qquad (11)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i,j=1,\ldots,n$$

El problema de transporte es un caso especial de este problema, correspondiendole una red con arcos que van solo de nodos de oferta a nodos de demanda, el cual refleja que los embarques estan restringidos en este problema para ir directamente del nodo oferta al nodo demanda. El problema mas general permite configuraciones de redes mas complicadas, el flujo de un nodo oferta puede ir a nodos intermedios antes de alcanzar su destino.

ESTRUCTURA DEL PROBLEMA.

El problema (11) es un problema de programación lineal. La matriz de coeficientes A de las restricciones de flujo es la matriz de incidencia nodos-arcos de la red. La columna correspondiente al arco (i,j) tiene una entrada +1 en el renglón i y -1 en el renglón j. Ya que la suma de todos los renglones es el vector cero, la matriz A tiene rango menor o igual a n-1, y algún renglón de A puede ser eliminado para obtener una matriz de coeficientes de rango igual a la original. Mostraremos usando los conceptos de redes que el rango de la matriz de coeficientes es n-1, bajo una suposición simple sobre la red.

Para establecer la suposición requerida, definimos la gráfica G de la red. Cada arco de la red está incluído en G, independientemente de su dirección. (La orientación de los arcos no es considerada porque solo nos interesa

...

El problema de transporte es un caso especial de este problema, correspondiendole una red con arcos que van solo de nodos de oferta a nodos de demanda, el cual refleja que los embarques estan restringidos en este problema para ir directamente del nodo oferta al nodo demanda. El problema mas general permite configuraciones de redes mas complicadas, el flujo de un nodo oferta puede ir a nodos intermedios antes de alcanzar su destino.

ESTRUCTURA DEL PROBLEMA.

El problema (11) es un problema de programación lineal. La matriz de coeficientes A de las restricciones de flujo es la matriz de incidencia nodos-arcos de la red. La columna correspondiente al arco (i,j) tiene una entrada +1 en el renglón i y -1 en el renglón j. Ya que la suma de todos los renglones es el vector cero, la matriz A tiene rango menor o igual a n-1, y algún renglón de A puede ser eliminado para obtener una matriz de coeficientes de rango igual a la original. Mostraremos usando los conceptos de redes que el rango de la matriz de coeficientes es n-1, bajo una suposición simple sobre la red.

Para establecer la suposición requerida, definimos la gráfica G de la red. Cada arco de la red está incluído en G, independientemente de su dirección. (La orientación de los arcos no es considerada porque solo nos interesa

...

las propiedades lineales de A). Debemos suponer que G es conectada. Esto implica que G contiene al menos un árbol de expansión.

Para probar que el rango de A es n-1, seleccionamos un renglón para eliminarlo de A y denotamos la nueva matriz por $\bar{A}$. Consideramos el árbol de expansión T en la gráfica G. Este árbol consistirá de n-1 arcos sin ciclos. Refiriéndonos al nodo correspondiente del renglón que fué eliminado de A tiene la raíz del árbol. Sea A_T submatriz de orden (n-1)x(n-1) de A; consiste de n-1 columnas correspondientes a los arcos en el árbol. Al menos dos nodos del árbol debe tener solo un arco de T, y al menos uno de estos no es una raíz. Esto significa que el renglón correspondiente de A_T tiene una entrada diferente de cero. Imagine que cruzamos el renglón y la columna correspondiente a esta entrada. En términos del árbol, esto corresponde a eliminar el nodo y el arco tocado. Los n-2 arcos restantes de T forman un árbol para la red reducida de n-1 nodos, incluyendo la raíz. El procedimiento puede ser repetido consecutivamente, eliminando todos los nodos excepto la raíz hasta que todos los renglones de A_T sean eliminados.

Es claro que este procedimiento es equivalente al procedimiento de triangularización de la sección 3. En otras palabras A_T es una submatriz triangular no singular de (n-1)x(n-1).

Por tanto A tiene rango igual a n-1.

ESTRUCTURA DE UNA BASE.

Hemos mostrado que un árbol de expansión G corresponde a una base, ya que define a la submatriz no singular $\tilde{A}$. Una base corresponde a escoger n-1 columna linealmente independiente de A. Cada columna corresponde a un arco de la red, así la selección de una base es equivalente a seleccionar n-1 arcos. Queremos mostrar que esos arcos deben formar un árbol de expansión. Suponemos que la colección de arcos correspondientes a la base contiene un ciclo de m arcos. Cuando estan colocados en ciclo tienen la forma (n_1, n_2), (n_2,n_3), (n_3,n_4), ..., $(n_m;n_1)$. En este orden algunos arcos pueden preservar su orientación original y algunos pueden ser invertidos. Ahora consideramos las columnas correspondientes de A a_1, a_2, ...,a_m. Formando la combinación lineal $\pm a_1, \pm a_2, \pm a_3 \pm \ldots \pm a_m$ donde en cada caso el coeficiente es + si la orientación del arco es la misma en el ciclo como en la gráfica original y - si no lo es. La i-ésima columna en esta combinación corresponde al arco (n_i, n_{i+1}) del ciclo y tiene +1 en el renglón correspondiente a n_i y -1 en el renglón correspondiente a n_{i+1}. Como un resultado, los +1 y -1 se cancelan en la combinación. Así la combinación es el vector cero, contradiciendo la independencia lineal de $a_1,a_2,\ldots,a_m$. Tenemos por lo tanto establecido que la colección de arcos correspondientes a la base no contiene ciclos ya que hay n-1 arcos y n nodos, es fácil concluir que los arcos deben formar un árbol de expansión.

Concluímos que hay una correspondencia uno a uno entre los arcos (columnas) en una base y el árbol de expansión. Conocemos también que la base es triangular y por tanto unimodular. Las características del problema de transporte nos llevan al problema general de flujo a costo mínimo.

Dada una base, la solución básica correspondiente puede ser encontrada por el método de sustitución hacia atrás, usando la estructura triangular. En este proceso vemos la ecuación que tiene una variable básica indeterminada correspondiéndole un arco de flujo indeterminado x_{ij}. Esta ecuación es resuelta para x_{ij}, y entonces tal ecuación se encuentra. En términos de concepto de redes, primero vemos el final del árbol de expansión correspondiente a la base, esto es, encontramos un nodo que toca solamente un arco del árbol. El flujo en este arco es determinado por la oferta (o demanda) en ese nodo. Con sustitución hacia atrás resolvemos los flujos de los arcos del arbol de expansión, comenzando por el último y así sucesivamente eliminando arcos.

EL METODO SIMPLEX

El método simplex revisado puede ser aplicado para generalizar el problema de flujo a costo mínimo. Describiremos los pasos junto con una discusión breve para su interpretación con redes.

Propósito: Determinar el flujo a costo mínimo en una red.

Descripción

Paso 1. Empiece con una solución básica factible.

Paso 2. Calcule los multiplicadores simplex x_i para cada nodo i. Esto para resolver las ecuaciones

$$\lambda_i - \lambda_j = c_{ij} \tag{12}$$

para cada i, j correspondientes a un arco básico. Esto se sigue porque el arco (i,j) corresponde a una columna en A con +1 en el renglón i y -1 en el renglón j. Las ecuaciones se resuelven colocando el valor de alguno de los multiplicadores. Una ecuación con un solo multiplicador indeterminado se calcula y este a su vez determina a otro y así sucesivamente.

Los coeficientes de costos relativos para los arcos no básicos son:

$$r_{ij} = c_{ij} - (\lambda_i - \lambda_j) \tag{13}$$

Si todos los coeficientes de costo relativo son no negativos, pare; la solución es óptima. En otro caso ir al paso 3.

Paso 3. Seleccione un flujo no básico con coeficiente de costo relativo negativo para entrar a la base. Añadiendo este arco al árbol de expansión de la base anterior, tendremos un ciclo como se muestra en la figura:

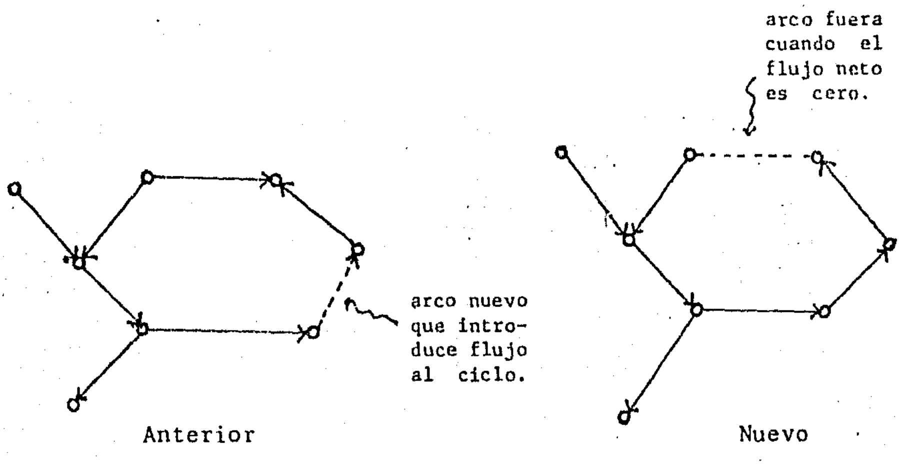


Figura 3. Base de un árbol de expansión

Introduce un flujo positivo a este ciclo de Θ. Como Θ es incrementado, algún flujo básico anterior se decrementará, así Θ se escoge del valor mas pequeño del flujo neto de uno de los arcos básicos iguales a cero. Esta variable sale de la base. El nuevo árbol de expansión es obtenido añadiendo un arco para formar un ciclo y eliminando otro arco del ciclo.

CONSIDERACIONES ADICIONALES

Características adicionales pueden ser incorporadas como en otras aplicaciones del método simplex. Por ejemplo, una solución básica factible si existe, puede ser buscada usando variables artificiales en el procedimiento de la fase I. Esto lo podemos hacer introduciendo un nodo adicional con oferta cero y con un arco conectado (dirigido al nodo con demanda y lejos del nodo con oferta). Una solución básica inicial es construída con el flujo del nodo artificial. Durante la fase I, el costo del arco artificial es la unidad y cero en los demás. Si el costo total se reproduce a cero, obtenemos una solución básica factible para el problema original.

Una extensión importante del problema es la inclusión de límites superiores (capacidades) sobre magnitudes de flujo tolerables en un arco.

Finalmente deberíamos hacer hincapié de que hay varios procedimientos para organizar la información requerida por el método simplex. En el procedimiento se trabaja con la forma algebraica definida por la matriz de incidencia nodos-arcos. Otros procedimientos estan basados en representaciones de redes mas completas, asignando flujo a los arcos y multiplicadores simplex para los nodos.

2.7 FLUJO MAXIMO.

Un tipo diferente de problemas de flujo se discutirá en esta sección, aquél que determina el flujo máximo posible de un nodo fuente a uno final bajo arcos con capacidades restringidas. Un problema preliminar cuya solución consiste en determinar una trayectoria de un nodo a otro en una gráfica dirigida.

PROCEDIMIENTO DEL ARBOL.

Recordando que el nodo j es alcanzable al nodo i en una gráfica dirigida si hay una ruta del nodo i al j. Para gráficas simples podemos inspeccionar la alcanzabilidad, no así para gráficas grandes. El problema puede ser resuelto sistemáticamente por un proceso de etiquetas, buscando varios nodos en la gráfica. Este procedimiento es la base de un número de métodos para resolver gráficas mas complejas y problemas de redes.

Suponemos que queremos determinar si una ruta del nodo uno al m existe. En cada paso del algoritmo: cada nodo no es etiquetado, etiquetado pero no hay búsqueda, o etiquetado y hay búsqueda. El procedimiento es el siguiente:

<u>Paso 1</u>. Etiquetar el nodo 1. Los demás nodos no son etiquetados.

Paso 2. Para algún nodo etiquetado sin búsqueda del nodo i, encuentre todos los nodos alcanzables a i sin que estos esten etiquetados. Etiquete esos nodos con i.

Paso 3. Si el nodo m es etiquetado pare; una trayectoria se ha conseguido, una ruta existe. Si hay nodos no etiquetados que no pueden ser etiquetados, pare; no existe una ruta conectada. En otro caso vaya al paso 2.

El proceso se ilustra como sigue:

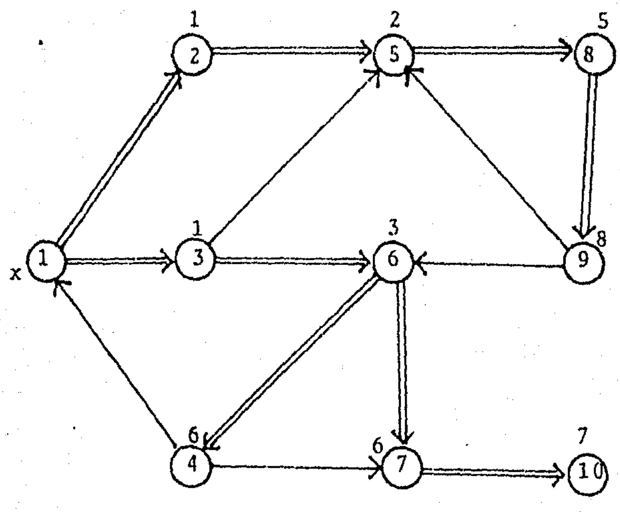


Figura 4. El procedimiento de búsqueda.

Observe que una ruta entre el nodo 1 y 10 se encuentra. Los nodos han sido etiquetados y la búsqueda es en el orden 1,2, 3,5,6,8,4,7,9,10. Las etiquetas están indicadas próximas a los nodos. Los arcos que fueron usados en el proceso de búasqueda están indicados por líneas gruesas. Note que la colección de nodos y arcos seleccionada por el proceso, considerada como una gráfica no dirigida, forma un árbol (sin ciclos). Si estamos interesados solo en determinar si una ruta conectada existe y no necesitamos encontrar la ruta por sí misma, entonces las etiquetas necesitan estar con una marca sencilla, mas bien en el nodo índice. Sin embargo; si los nodos índices son usados como etiquetas, entonces después de terminar completamente el algoritmo, la ruta actual conectada puede ser encontrada trazando hacia atrás el nodo m siguiendo las etiquetas. En el ejemplo empezamos en 10 y nos movemos al nodo 7, después al 6, 3, y 1. La ruta sigue la inversa de esta secuencia.

Es fácil probar que el algoritmo resuelve la existencia de una ruta conectada. En cada paso del proceso, un nuevo nodo es etiquetado, es imposible continuar, o el nodo m es etiquetado y el proceso termina. Claramente el proceso puede continuar para al menos n - 1 pasos, donde n es el número de nodos en la gráfica. Suponemos que en algún paso es imposible continuar. Sea S el conjunto de nodos etiquetados en este paso y sea $\bar{S}$ el conjunto de nodos no etiquetados.

Es claro que el nodo 1 esta en S y el m en $\bar{S}$. Si hubiera una r u t a conectando el nodo 1 con el m, entonces debería haber un arco en esa r u t a de un nodo k en S a un nodo en $\bar{S}$. Sin embargo esto podría implicar que el nodo k no fué buscado, esto es una contradicción. Si el algoritmo continua hasta alcanzar el nodo m, entonces es claro que una r u t a conectada puede ser construída hacia atrás.

CAPACIDAD EN REDES.

En algunas aplicaciones de redes es usual suponer que hay un límite superior sobre el flujo tolerable en varios arcos. Esto motiva los conceptos de una red con capacidad.

Definición: Una red con capacidad es una red en la cual algunos arcos están asignados con capacidades no negativas, definiendo el flujo máximo tolerable en esos arcos. La capacidad de un arco (i,j) es denotádo por k_{ij}, y esta capacidad es indicada sobre la gráfica por k_{ij} adyacente al arco.

En esta sección se supone que todas las capacidades son enteras no negativas. En la siguiente figura se muestra un ejemplo de una red con las capacidades indicadas, Así la capacidad del nodo 1 al 2 es 12, mientras que del nodo 2 al 1 es 6.

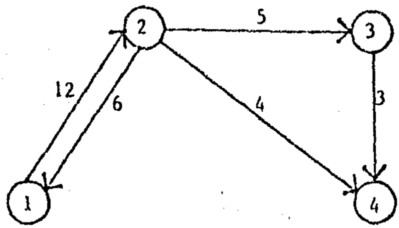


Figura 5. Una red con capacidades.

EL PROBLEMA DE FLUJO MAXIMO.

Considere una red con capacidades en la cual los nodos fuente y final son distinguidos facilmente: Son el nodo 1 y el nodo m respectivamente. Los demás nodos deben satisfacer los requerimientos, esto es, el flujo neto en estos nodos debe ser cero. Sin embargo, el nodo fuente debe tener una salida de flujo neto y el nodo final una entrada de flujo neto. Que deben ser iguales como una consecuencia de conservación de los otros nodos. Un conjunto de arcos con flujo que satisfacen estas condiciones, se dice que es un flujo en la red con valor f. El problema de flujo máximo está determinado por el flujo máximo que puede pasar en una red. Esto es:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f \\
\text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{1j} - \sum_{j=1}^{n} x_{j1} - f = 0 \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} ji \qquad = 0 \qquad i \neq 1,m \qquad (14) \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{mj} - \sum_{j=1}^{n} x_{jm} + f = 0 \\
& 0 \leq x_{ij} \leq k_{ij} \qquad \forall i,j
\end{aligned}
$$

donde los pares i,j corresponden a los arcos permitidos.

El problema puede ser expresado en forma mas compacta, en términos de la matriz de incidencia nodos-arcos. Sea x el vector con flujos x_{ij} (ordenado). Sea A la matriz de incidencia nodos-arcos. Finalmente sea e un vector con dimensión igual al número de nodos, teniendo $+1$ en la componente del nodo 1 y -1 en la del nodo m, en los demás componentes cero. El problema de flujo máximo es:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f \\
\text{s.a.} \quad & Ax - fe = 0 \qquad\qquad (15) \\
& 0 \leq x \leq k
\end{aligned}
$$

La matriz de coeficientes de este problema es igual a la matriz de incidencia nodos-arcos con una columna adicional para la variable de flujo f. Alguna base de esta matriz es triangular. El método simplex puede ser empleado para resolver este problema. Sin embargo en lugar del método simplex podemos usar un algoritmo mas eficiente basado en el procedimiento del árbol.

La estrategia básica del algoritmo es simple. Primero admitimos que es posible enviar un flujo diferente de cero del nodo 1 al m, solamente si el nodo m es alcanzable del nodo 1. El procedimiento del árbol puede ser usado para determinar si m es alcanzable, si lo es, el algoritmo dará una ruta de 1 a m. Examinando los arcos de esta ruta, podemos determinar la capacidad mínima. Entonces debemos construir un flujo con esta capacidad de 1 a m usando esta ruta. Esto nos da un flujo inicial positivo (y entero).

Luego consideramos la naturaleza de la red en este punto en términos del flujo adicional que debe ser asignado. Si hay un flujo x_{ij} en el arco (i,j), entonces la capacidad de este arco es reducida por x_{ij} (a $k_{ij} - x_{ij}$), ya que este es el flujo máximo adicional que puede ser asignado a este arco. Por otro lado, la capacidad inversa sobre el arco (j,i) es incrementada por x_{ij} (a $k_{ji} + x_{ij}$), ya que un incremento pequeño hacia atrás de flujo es actualmente realizado como una reducción en el flujo enviado a través del arco. Una vez que estos cambios con capacidades se han llevado a cabo, el procedimiento del árbol puede ser usado otra vez para en-asignado (queda una ruta aumentada). Finalmente, si m no es alcanzable de 1, no puede haber flujo adicional asignado, y el procedimiento se completa.

El método está basado sobre aplicaciones repetidas del procedimiento del árbol, el cual es implementado por etiquetas y búsquedas. Incluyendo más información en las etiquetas del algoritmo del árbol, el arco con capacidad mínima de la ruta aumentada puede ser determiado durante la búsqueda inicial, en vez de reexaminar los arcos después de la ruta que se encontró. Una etiqueta del nodo i tiene la forma (k,c_i) donde k denota un precursor del nodo y c_i es el flujo máximo que debe ser enviado del nodo fuente al nodo i a través de la ruta creada por etiquetas y búsqueda. El procedimiento es el siguiente:

ALGORITMO DE FLUJO MAXIMO.

Propósito: Determinar el flujo máximo en una red con nodo fuente uno y nodo terminal n.

Descripción

Paso 0. Sean todas las $x_{ij} = 0$ y $f = 0$.

Paso 1. Etiquete el nodo 1 con $(-,\infty)$. Los otros nodos no son etiquetados.

Paso 2. Seleccione alguna etiqueta del nodo i para la búsqueda, tiene etiqueta (k, c_i). Para todos los nodos j no etiquetados, tales que (i,j) es un arco con $x_{ij} < k_{ij}$, asigne la etiqueta (i, c_j), donde $c_j = \min\{c_i, k_{ij} - x_{ij}\}$. Para todos los nodos j no etiquetados tales que (j,i) es un arco con $x_{ij} > 0$, asigne la etiqueta (i,c_j) donde $c_j = \min\{C_i, x_{ji}\}$.

Paso 3. Repita el paso 2 hasta que el nodo m es etiquetado o hasta que no se pueden asignar mas etiquetas. En este caso la solución es óptima.

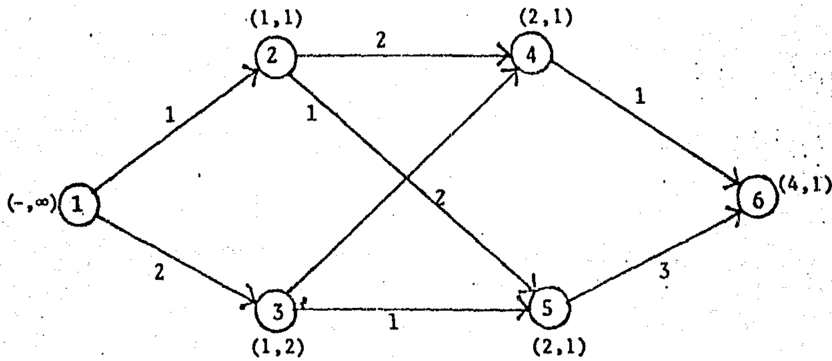
Paso 4. (Aumento). Si el nodo m es etiquetado (i, c_m), entonces incrementamos f y el flujo sobre el arco (i,m) está dado por c_m continue hacia atrás en la r u t a aumentada por los nodos, incrementando el flujo en cada arco de la - - r u t a por c_m. Regresar al paso 1.

La validación del algoritmo debiera ser evidente. Sin embargo, una prueba completa es considerada hasta ver el teorema de flujo máximo-cortadura mínima. No obstante la convergencia del algoritmo se establece.

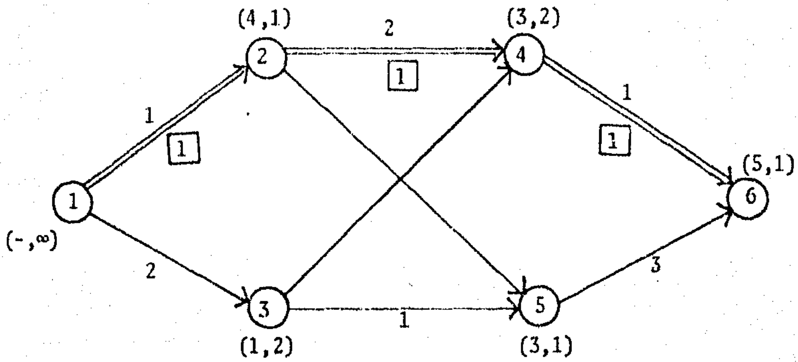
PROPOSICION. El algoritmo de flujo máximo converge en un número finito de iteraciones.

Prueba. (Recordando nuestra suposición de que todas las capacidades son enteras no negativas). El flujo es acotado (al menos por la suma de las capacidades). Empezando con flujo cero, la capacidad mínima disponible en toda la fase será un entero, y según el flujo, será aumentado por un entero en todo paso. Este proceso debe terminar en un número finito de pasos, ya que el flujo es acotado.∎

Ejemplo 10. Un ejemplo de este procedimiento es mostrado en la siguiente figura. El nodo 1 es el fuente y el 6 el final. La red original tiene las capacidades sobre los arcos. También se muestra la etiqueta inicial obtenida por el procedimiento. En este caso el nodo final está etiquetado, indicando un flujo de una unidad.

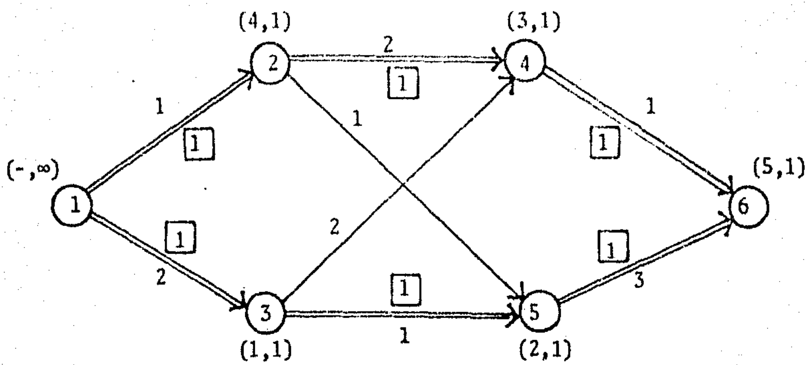


La ruta aumentada de este flujo es:

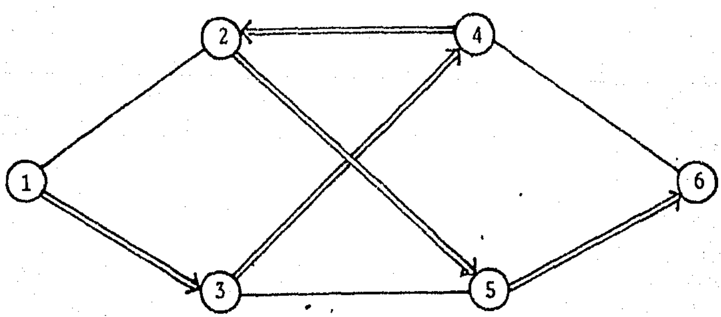


El número en el cuadrito indica el flujo total en un arco. Las nuevas etiquetas son encontradas y añadidas. Note que el nodo 2 no puede ser etiquetado del nodo 1 porque no hay capacidad en esta dirección. El nodo 2 puede ser etiquetado por el nodo 4, ya que el flujo existe dando una capacidad inversa de una unidad. Volvemos a etiquetar el nodo final y una unidad más de flujo puede ser construída.

La ruta aumentada es:



Una nueva etiqueta es añadida a esta figura. El nodo final es etiquetado y una unidad adicional de flujo puede ser enviada del nodo fuente al nodo final. La ruta de esta unidad es:



Note que incluye un flujo del nodo 4 al 2, sin embargo flujo i gual no fué permitido en esta dirección en la red original. Este flujo es permitido porque ya hay un flujo en la dirección opuesta. El flujo total es:

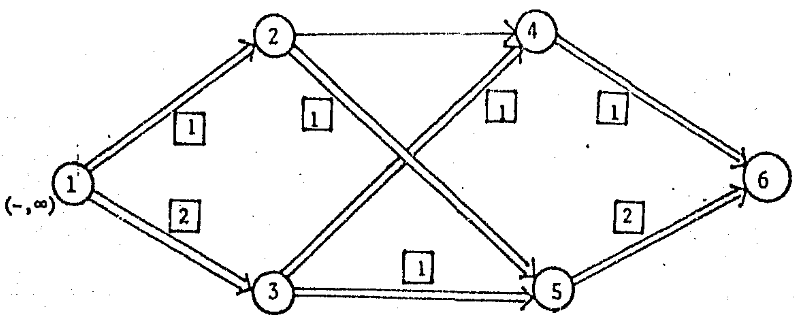


Figura 6. Ejemplo de un problema de flujo máximo.

Los niveles de flujo aparecen en el cuadrito. Este es el flujo máximo, ya que solamente el nodo fuente puede ser etiquetado.

TEOREMA DE FLUJO MAXIMO-CORTADURA MINIMA.

Algunos resultados adicionales pueden ser obtenidos a través de la notación de cortadura en una red. Dada una red con un nodo fuente 1 y uno final m, se divide arbitrariamente en dos conjuntos S y $\bar{S}$ de tal manera que el nodo fuente está en S y el nodo final en $\bar{S}$. El conjunto de arcos desde S a $\bar{S}$ es una cortadura que se denota $(S,\bar{S})$. La capacidad de la cortadura es la suma de las capacidades de los arcos en la cortadura.

Un ejemplo de una cortadura se muestra como sigue:

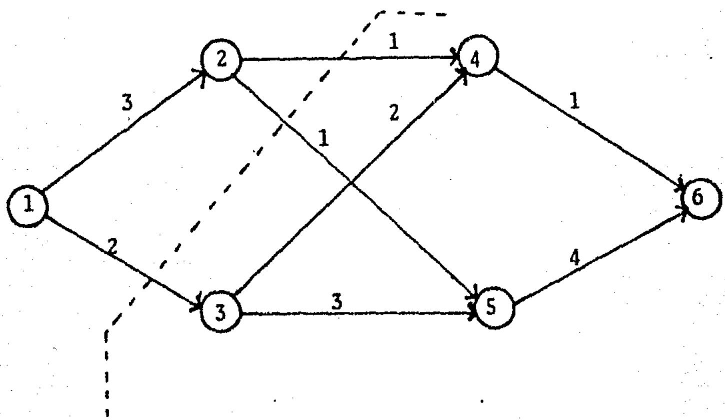


Figura 7. Una cortadura

El conjunto S consiste de los nodos 1 y 2, y el $\bar{S}$ de los nodos 3, 4, 5 y 6. La capacidad de esta cortadura es 4.

Debería ser claro que una ruta del nodo 1 al m debe incluir al menos un arco en alguna cortadura, para la ruta debe tener un arco del conjunto S al conjunto $\bar{S}$. Además, es claro que el flujo máximo que puede enviar a través de una cortadura es igual a su capacidad. Así cada cortadura da un límite superior sobre el valor del problema de flujo máximo. El teorema de flujo máximo-cortadura mínima manifiesta que la igualdad se consigue para alguna cortadura. Esto es, el flujo máximo es igual a la capacidad de la cortadura mínima. Deberíamos notar que la prueba del teorema también establece la maximización del flujo obtenido por el algoritmo de flujo máximo.

TEOREMA de flujo máximo-cortadura mínima. En una red el flujo máximo entre el nodo fuente y el final es igual a la capacidad de cortadura mínima de todas las cortaduras que separan a los nodos fuente y final.

Prueba. Observe que la capacidad de cada cortadura debe ser mayor o igual al flujo máximo; es por ello necesario exhibir un flujo y una cortadura para que la igualdad se cumpla. Empezando con un flujo en la red que no puede ser aumentado por el algoritmo de flujo máximo. Para este arco encontramos la capacidad del arco de todos los arcos que incrementan su flujo y aplicamos el procedimiento de etiquetas del algoritmo de flujo máximo. De no existir la ruta aumentada, el algoritmo debe terminar antes de etiquetar al nodo final.

Sea S y $\bar{S}$ los conjuntos de nodos etiquetados y no etiquetados respectivamente. Esto define una cortadura de separación del nodo fuente al final. Todos los arcos originados en S y terminados en $\bar{S}$ tienen capacidad de incremento cero, o de lo contrario un nodo en $\bar{S}$ podría haber sido etiquetado. Esto significa que cada arco en la cortadura está saturado por el flujo original, esto es, el flujo es igual a la capacidad. Algún arco originado en $\bar{S}$ y terminado en S, del otro lado, debe tener flujo cero; o de lo contrario esto implicaría un incremento positivo de la capacidad en la dirección inversa y el nodo originado en S podría ser etiquetado. Así hay un flujo total de S a $\bar{S}$ igual a la capacidad de la cortadura, y un flujo ce-

cero de $\bar{\bar{S}}$ a S. Esto significa que el flujo del nodo fuente al final es igual a la capacidad de cortadura. Así la capacidad de cortadura debe ser mínima y el flujo máximo. ∎

En la red de la figura 6 la mínima cortadura corresponde a S que consiste solo del nodo fuente. Esta capacidad de cortadura es 3. Note que de acuerdo al teorema, esto es igual al valor de flujo máximo y la cortadura mínima es determinada por la etiqueta final. En la figura 7 la cortadura mostrada también es mínima.

DUALIDAD.

El teorema de flujo máximo y cortadura mínima sugiere una conección con el teorema de Dualidad. El problema de flujo máximo es un problema de programación lineal expresado en (15). Su problema dual es

$$\begin{aligned} \min \quad & w^t k \\ \text{s.a.} \quad & \mu^t A = w^t \\ & \mu^t e = 1 \\ & w \geq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Cuando lo escribimos con detalle el dual es:

$$\min \sum_{ij} w_{ij} k_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \mu_i - \mu_j = w_{ij} \qquad (17)$$

$$\mu_1 - \mu_m = 1$$

$$w_{ij} = 0$$

Un par i,j está incluído solamente si (i,j) es un arco en la red. Una solución factible del problema dual se puede encontrar en términos de un conjunto de cortadura $(S, \bar{S})$. En particular, es fácil ver que

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \varepsilon S \\ 0 & \text{si} \quad i \varepsilon \bar{S} \end{cases} \qquad (18)$$

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j) \varepsilon (S,\bar{S}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una solución factible. El valor del problema dual correspondiente a esta solución es la capacidad de cortadura. Si tomamos al conjunto de cortadura por uno determinado por el procedimiento de etiquetas del algoritmo de flujo máximo, podemos ver que la optimalidad se verifica por las condiciones de holgura complementaria. El valor mínimo del dual es igual a la capacidad de cortadura mínima.

2.8 RUTA MAS CORTA

Suponga que se tiene una red G con m nodos y n arcos, y un costo c_{ij} asociado con cada arco (i,j) en G. El problema de la ruta más corta es: Encontrar la ruta (menos costosa) más corta del nodo 1 al nodo m en G. El costo de la ruta es la suma de los costos sobre los arcos en la ruta.

Se puede pensar en el problema de la ruta más corta dentro del contexto de flujo en una red si se diseña una red en la que se desea enviar una sola unidad de flujo del nodo 1 al nodo m con un costo mínimo. Luego, $b_1 = 1$, $b_m = -1$, y $b_i = 0$ para $i \neq 1$ ó m. La formulación matemática viene a ser:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{m} x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = 1 \\ 0 & \text{si} \quad i \neq 1 \text{ ó } m \\ -1 & \text{si} \quad i = m \end{cases} \qquad (19)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ó } 1 \quad i,j = 1,2,\ldots,m$$

en donde las sumas y los requerimientos 0,- 1 se toman sobre arcos existentes en G. Las restricciones $x_{ij} = 0$ ó 1 indican que cada arco está en la ruta o no está.

Ignorando las restricciones 0,- 1, se encuentran de nuevo las ecuaciones usuales de conservación de flujo. La matriz de incidencia nodos-arcos asociada con las ecuaciones de conservación de flujo es totalmente unimodular. Por lo tanto, si se

2.8 RUTA MAS CORTA

Suponga que se tiene una red G con m nodos y n arcos, y un costo c_{ij} asociado con cada arco (i,j) en G. El problema de la ruta más corta es: Encontrar la ruta (menos costosa) más corta del nodo 1 al nodo m en G. El costo de la ruta es la suma de los costos sobre los arcos en la ruta.

Se puede pensar en el problema de la ruta más corta dentro del contexto de flujo en una red si se diseña una red en la que se desea enviar una sola unidad de flujo del nodo 1 al nodo m con un costo mínimo. Luego, $b_1 = 1$, $b_m = -1$, y $b_i = 0$ para $i \neq 1$ ó m. La formulación matemática viene a ser:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{m} x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \text{ ó } m \\ -1 & \text{si } i = m \end{cases} \tag{19}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ó } 1 \quad i,j = 1,2,\ldots,m$$

en donde las sumas y los requerimientos 0,- 1 se toman sobre arcos existentes en G. Las restricciones $x_{ij} = 0$ ó 1 indican que cada arco está en la ruta o no está.

Ignorando las restricciones 0,- 1, se encuentran de nuevo las ecuaciones usuales de conservación de flujo. La matriz de incidencia nodos-arcos asociada con las ecuaciones de conservación de flujo es totalmente unimodular. Por lo tanto, si se reemplaza $x_{ij} = 0$ ó 1 por $x_{ij} \geq 0$, y si existe una solución óptima, entonces del método simplex aún se obtendría una solución óptima entera en la que el valor de cada variable es cero o uno. Así, se puede resolver como un problema de programación lineal. Esto es:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \text{ ó } m \\ -1 & \text{si } i = m \end{cases} \qquad (20)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i,j = 1,\ldots,m$$

Puesto que el problema de la ruta más corta es un problema de flujo a costo mínimo en una red, se puede resolver por alguno de los métodos descritos anteriormente.

Considérese el dual del problema de la ruta más corta:

$$\max \quad \omega_1 - \omega_m$$

$$\text{s.a.} \quad \omega_1 - \omega_j \leq C_{ij} \quad i,j = 1,2,\ldots,m \qquad (21)$$

$$w_i \text{ nó restringido } \; i = 1,2,\ldots,m$$

Es conveniente hacer la sustitución $w_i' \equiv -w_i$. Como se verá en la solución óptima, $w_i' - w_1'$ es la distancia más corta del nodo 1 al nodo i. Por lo tanto, se puede obtener la distancia más corta del nodo 1 a todos los nodos de la red.

Existen varios métodos para encontrar la ruta más corta, algunos solo consideran los costos no negativos, otros los costos negativos y otros costos arbitrarios. Aquí veremos un algoritmo que considera los costos arbitrarios utilizando etiqüetas.

Supongase que con cada nodo j se asocia una etiqueta (i, w_j'), donde la primera componente i da el nodo inmediato anterior al nodo j en la ruta y la segunda componente, w_j', indica el costo (longitud) de la "mejor" ruta actual del nodo 1 al nodo j. Sea $c_0 = \sum_{c_{ij}<0} c_{ij}$. El algoritmo de etiquetado resulta como sigue:

ALGORITMO DE RUTA MAS CORTA.

Propósito: Obtener la ruta más corta en una red que admite cualquier costo.

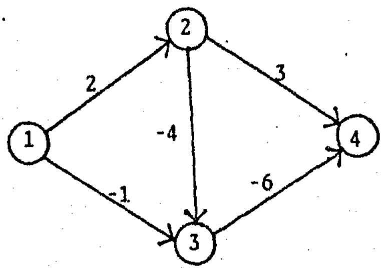
D e s c r i p c i ó n

Paso 1. Se etiqueta el nodo 1 como $(-,0)$ y el nodo i como $(-,\infty)$ para $i = 2,\ldots,m$.

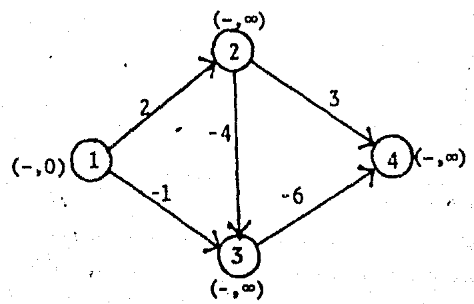
Paso 2. Si $w_j' \leq w_i' + c_{ij}$ para $i,j=1,\ldots,m$, se termina; se ha obtenido la solución óptima. En caso contrario, se selecciona (p,q) tal que $w_q' > w_p' + c_{pq}$ y el nodo q se hace $(P, w_q' = w_p' + c_{pq})$. Si $w_q' < c_0$, se termina; hay un circuito negativo en G. En caso contrario, se repite el paso 2.

Para identificar los arcos en la ruta más corta, se empieza en el nodo m. Si la segunda componente α'_m en el nodo m es ∞, entonces no existe una ruta del nodo 1 al m en G. En caso contrario, la primera componente en el nodo m, por ejemplo k, da el nodo anterior en la ruta más corta. Se busca hacia atrás el nodo k y se repite el proceso hasta alcanzar el nodo 1.

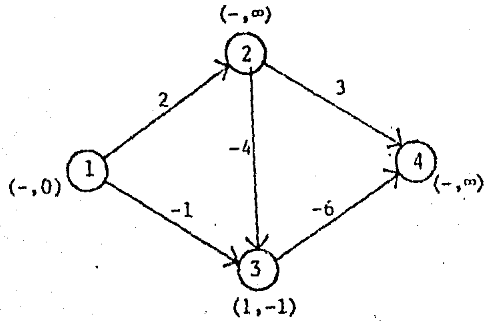
Ejemplo 11. Considere la red de la siguiente figura, en la que se desea encontrar la ruta más corta del nodo 1 al 4.



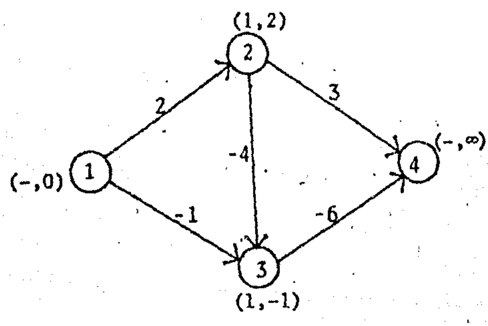
No hay un orden requerido en el que se deban considerar los arcos para que el algoritmo converja. Primero empezamos con c_0=-1 - 4 - 6 =-11. Etiquetando los nodos tenemos:



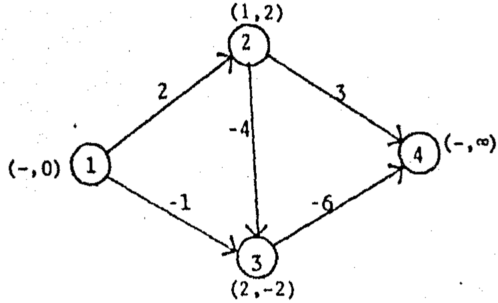
seleccionamos el arco (1,3) tal que $w'_3 > w'_1 + c_{13}$, $\infty > -1$, por lo tanto la etiqueta del nodo 3 queda (1,-1):



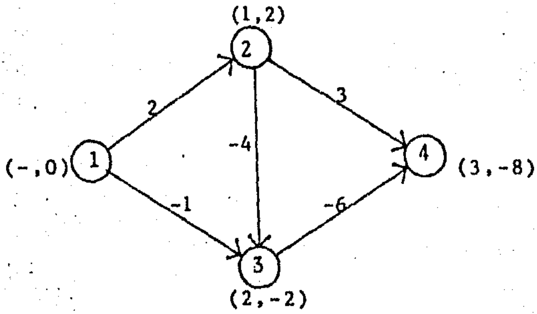
Seleccionamos el arco (1,2) tal que $w'_2 > w'_1 + c_{12}$, $\infty > 2$, por lo tanto la etiqueta del nodo 2 es (1,2):



Seleccionamos el arco (2,3) tal que $w'_3 > w'_2 + c_{23}$, $-1 > -2$, por lo tanto la etiqueta del nodo 3 es (2,-2):



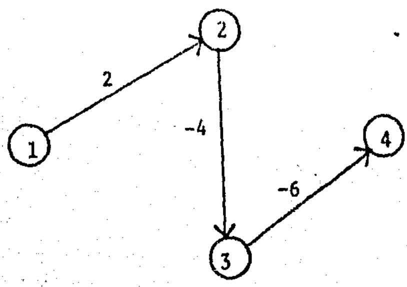
seleccionamos el arco (3,4) tal que $w_4' > w_3' + c_{34}$, $\infty > -8$, por lo tanto la etiqueta del nodo 4 es (3,-8):



Todo $w_j' \leq w_j + c_{ij}$, verificando tenemos que:

$$-2 = w_2' \leq w_1' + c_{11} = \quad 2$$
$$-2 = w_3' \leq w_1' + c_{13} = -1$$
$$-2 = w_3' \leq w_2' + c_{23} = -2$$
$$-8 = w_4' \leq w_2' + c_{24} = \quad 6$$
$$-8 = w_4' \leq w_3' + c_{34} = -8$$

Por lo tanto es óptimo, lo que implica que existe una ruta más corta con longitud -8, la ruta es (1,2), (2,3) ,y (3,4) siguiendo la trayectoria hacia atrás, es decir, a partir del nodo final, en este caso el nodo 4.



CAPITULO III

ANALISIS DE PROBLEMAS DE REDES: METODOS PRIMALES DUALES.

El algoritmo primal-dual es un algoritmo general para resolver problemas de programación lineal. Este algoritmo fué desarrollado a partir de uno menos general considerado para ciertos problemas de redes, y proporciona las ideas claves para generar algoritmos especializados para problemas de redes.

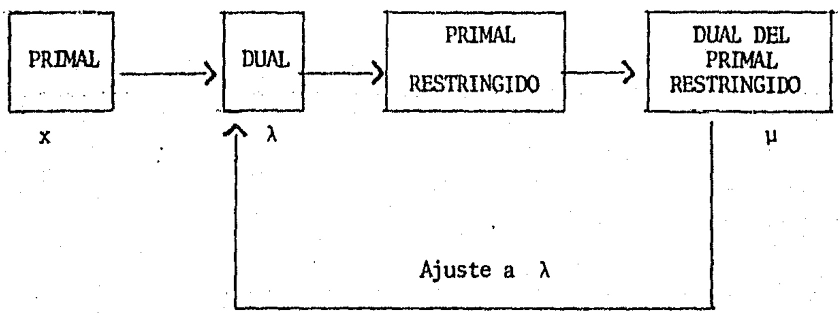
La idea básica del método primal-dual es partir de una solución factible del problema dual (la que se propone como aproximación a la solución óptima) y generar un denominado problema primal restringido cuya solución proporciona uno de los siguientes resultados:

a). La solución óptima del problema primal.

b). Una solución del dual del primal restringido que mejora la solución factible del problema dual original.

En el primer caso, el proceso termina mientras que en el segundo caso se mejora la solución factible del problema dual y el proceso se repite.

Un aspecto importante del proceso efectuado por el método primal-dual es que termina en un número finito de iteraciones. El proceso de terminación es equivalente a que las soluciones primal y dual sean factibles y satisfagan las condiciones de holgura complementaria de la programación lineal. Una forma esquemática del proceso primal-dual se tiene en la figura.



El algoritmo primal-dual es considerado propiamente un algoritmo dual, debido a que se parte de una λ factible en el problema dual y se mantiene siempre la factiblidad dual. En caso de que $c \geq 0$, se puede tomar $\lambda = 0$ como una solución inicial dual factible. Cuando c es no negativa, no bostante, se puede encontrar una λ factible.

En este capítulo se efectúa la especialización del método primal-dual para cada uno de los siguientes problemas: de transporte, de asignación, de ruta más corta y de flujo máximo.

3.1 EL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

Considere el problema de transporte en la forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i=1,\ldots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j=1,\ldots,n \\ & x_{ij} \geq 0 \qquad \forall\, i,j \end{aligned} \tag{1}$$

donde suponemos que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ y $c_{ij} \geq 0$. También suponemos que las a_i y b_j son enteros no negativos. El correspondiente problema dual es:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j \\ \text{s.a.} \quad & \mu_i + v_j \leq c_{ij} \end{aligned} \tag{2}$$

El algoritmo primal-dual se inicia con una solución factible para el dual (toda $\mu_i = 0$ y $v_j = 0$ son adecuadas). De acuerdo a este algoritmo, correspondiente a la solución dual factible se dice que el par (i,j) pertenece al conjunto admisible S si la (i,j) -ésima restricción dual se satisface con igualdad, esto es, el par (i,j) es <u>admisible</u> si $\mu_i - v_j = c_{ij}$. En este caso el problema primal restringido se define en terminos de los indices admisibles. Específicamente la definición general del problema es:

$$\min \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i = a_i, \qquad i=1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + z_j = b_j, \qquad j=1,\dots,n \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall\ i,j$$

$$y_i \geq 0 \qquad \forall\ i$$

$$z_j \geq 0 \qquad \forall\ j$$

$$x_{ij} = 0 \qquad \text{para } i,j \notin S.$$

debido a la condición de balance se tiene que $\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} z_j$ en alguna solución. Alternativamente, el problema puede ponerse en forma de un problema de flujo máximo. La función objetivo la reescribiremos como:

$$\sum_{i=1}^{m} (a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} (b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij})$$

de la cual se ve que un problema equivalente es maximizar $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ sujeto a las restricciones en (3). Este es un problema de flujo máximo sobre la red siguiente:

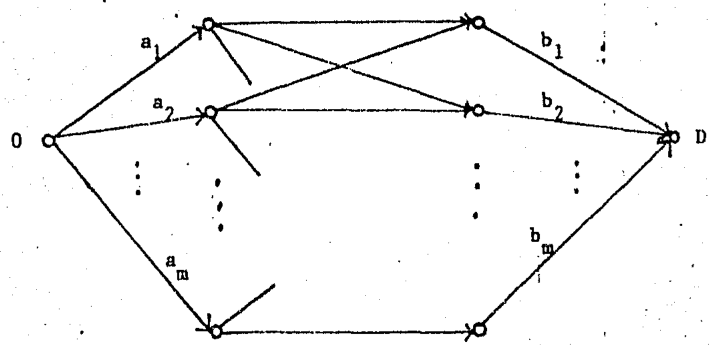


Figura 1. El problema de transporte en una red de flujo.

En la figura el flujo va del nodo 0 al D. Las a_i y b_j, indican las capacidades para los arcos origen y los terminales respectivamente. Los arcos centrales tienen una capacidad infinita de envío (la cual puede ser representada por un número entero grande), pero tal arco se presenta en la red solo si corresponde a un par (i,j) admisible. Si x_{ij} denota el flujo en el arco (i,j)-ésimo, entonces $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ es el flujo total que deja el nodo i.

Este también es el flujo de entrada del nodo i a la ezquierda y este flujo no debe ser mas grande que a_i. El flujo total que deja el nodo 0 es $f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$. El problema primal restringido maximiza este flujo. El problema puede ser resuelto por el algoritmo de flujo máximo. Si el resultado es factible para el problema original, también es óptimo. De otro modo es necesario cambiar las variables duales y empezar otra vez.

La solución del problema dual asociada al problema primal restringido (3) determina la manera en que la solución dual inicial debe ser cambiada. Dicho dual es, específicamente, el problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_i a_i r_i + \sum_j b_j s_j \\ \text{s.a.} \quad & r_i + s_j \leq 0 \qquad i,j \in S \\ & r_i \leq 1 \\ & s_j \leq 1 \end{aligned} \tag{4}$$

La solución para este dual puede ser determinada directamente de la etiqueta final del algoritmo de flujo máximo. Específicamente,

$$r_i = \begin{cases} +1 & \text{si el nodo } i \text{ es etiquetado} \\ -1 & \text{si el nodo } i \text{ no esta etiquetado} \end{cases}$$

$$s_j = \begin{cases} -1 & \text{si el nodo } j \text{ es etiquetado} \\ +1 & \text{si el nodo } j \text{ no es etiquetado} \end{cases} \tag{5}$$

De acuerdo con el algoritmo general primal-dual, la solución dual factible original es actualizada al añadir un múltiplo de la solución dual restringida. El múltiplo se determina introduciendo uno o mas arcos admisibles. Para encontrar el múltiplo apropiado, sea I y J los conjuntos de etiquetas para los nodos de oferta y demanda respectivamente. Entonces definimos:

$$h = \min_{\substack{i \in I \\ j \notin J}} (c_{ij} - \mu_i - v_j) > 0 \qquad (6)$$

De acuerdo al método general primal-dual, $h/_2$ veces la solución (5) debería ser sumada a la solución factible original del dual. Sin embargo, primero sumando $h/_2$ a todas las μ_i y sustraemos $h/_2$ de todas las v_j (una operación que no altora la factibilidad o la admisibilidad del arco). La forma actualizada toma la forma:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_i &= \mu_i + h, & i &\in I \\ \hat{\mu}_i &= \mu_i, & i &\notin I \\ \hat{v}_j &= v_j - h, & j &\in J \\ \hat{v}_j &= v_j, & j &\notin J \end{aligned} \qquad (7)$$

Esta es la fórmula convencional usada para el problema de transporte. El algoritmo continua buscando los arcos admisibles y el flujo máximo.

FORMA DEL ARREGLO.

Todos los cálculos requeridos para el algoritmo primal-dual pueden ser ejecutados sobre arreglos solución y coeficientes de costos como en el método simplex para el problema de transporte. No es necesario construir la red explícitamente.

ALGORITMO PRIMAL-DUAL.

Propósito. Resolver el problema de transporte cuando se tiene una solución dual factible.

Descripción

Paso 1. Inicialización. Primero del arreglo de coeficientes de costos encontrar una solución dual factible. Un procedimiento común es que $\mu_i = \min_i c_{ij}$ para el renglón i y $v_j = \min_j (c_{ij}-\mu_i)$ para la columna j. Esto garantiza que $c_{ij}=\mu_i + v_j$, se obtiene al menos una vez en cada renglón y columna. Enseguida establecemos un tableau solución en donde los requerimientos a_i y b_j están en una columna y renglón extras, respectivamente. En las celdas con un círculo se da igualdad $c_{ij}=\mu_i+v_j$ para las i,j correspondientes. El tableau es como sigue (inicialmente todos los flujos son cero):

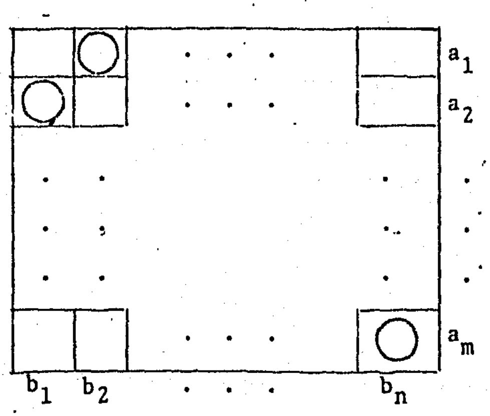


Tableau solución

Paso 2. Encontrar el flujo máximo. El flujo máximo es asignado las celdas admisibles (círculo). El flujo máximo se encuentra por el procedimiento de etiquetas. Las etiquetas de la forma (k, c_i) están junto a los renglones y columnas. En cada fase las celdas en círculo deben tener números, denotando los niveles de flujo.

a). Etiquetar todos los renglones en donde hay oferta excedente. Si el renglón i es de esta clase asigne la etiqueta (s, c_i), donde c_i es el excedente en el renglón.

b). En cada renglón etiquetado i, vea las celdas con círculo. Si tal celda ocurre en la columna j, etiquete la columna con (i, c_j) donde $c_j = c_i$. Si una columna con excedente es etiquetada, una trayectoria existe, ir al paso (e).

c). En cada columna etiquetada j, vea las celdas con círculo para las cuales $x_{ij} > 0$. Si tal celda se encuentra y el renglón i no ha sido etiquetado, etiquete el renglón con (j, c_i), donde $c_i = \min(c_j, x_{ij})$.

d). Repita el paso (b) y (c) hasta encontrar la trayectoria o demostrar que no es posible etiquetar mas renglones o columnas. En el primer caso ir al paso (e). En el segundo caso pare, el flujo es máximo.

e). Suponga que la trayectoria existe en la columna k. Sea f el mínimo de c_k y el excedente en la columna k. Entonces, si el excedente en la columna k es (μ, c_k), modifique el flujo a $\hat{x}_{uk} = x_{uk} + f$. Si la etiqueta en el renglón μ es (j, c_u), sea $\hat{x}_{uj} = x_{uj} - f$. Continue hacia atrás a través de la cadena, incrementando y decrementando alternativamente los flujos, hasta que un renglón alcance la etiqueta s del nodo fuente. Quite todas las etiquetas y regrese al paso (a).

Paso 3. Las variables duales actualizadas. Si el flujo máximo que se encontró en el paso 2 no tiene excedente, entonces tenemos una solución factible para el problema original y por tanto es óptima. Si por el contrario hay excedentes, las variables duales son actualizadas de acuerdo a (7). Haga un círculo al nuevo espacio de celdas admisibles, borre las etiquetas y regrese al paso 2.

<u>Ejemplo 1</u>. Considere el problema de transporte del ejemplo 1 capítulo II. Procederemos a resolverlo usando este método. El arreglo de los coeficientes es como sigue:

						μ_i
	3	4	6	8	9	3
	2	2	4	5	5	2
	2	2	2	3	2	2
	3	3	2	4	2	2
v_j	0	0	0	1	0	

Ciclo 1, solución dual factible.

con los renglones y columnas mostrando la solución factible inicial para el dual obtenida en el paso 1. Los círculos indican donde $c_{ij} = \mu_i + v_j$.

<u>Iteración 1</u>. El tableau solución es construído con círculos en las mismas celdas correspondientes. Inicialmente ya que hay excedente en todos los renglones y columnas, el procedimiento de etiquetas es trivial y conduce a repetir la trayectoria. Esta fase se comporta como una modificación de la regla de la esquina noroeste, restringida a las celdas admisibles. La solución resultante de esta fase es la siguiente:

Ejemplo 1. Considere el problema de transporte del ejemplo 1 capítulo II. Procederemos a resolverlo usando este método. El arreglo de los coeficientes es como sigue:

						μ_i
	3	4	6	8	9	3
	2	2	4	5	5	2
	2	2	2	3	2	2
	3	3	2	4	2	2
v_j	0	0	0	1	0	

Ciclo 1, solución dual factible.

con los renglones y columnas mostrando la solución factible inicial para el dual obtenida en el paso 1. Los círculos indican donde $c_{ij} = \mu_i + v_j$.

Iteración 1. El tableau solución es construído con círculos en las mismas celdas correspondientes. Inicialmente ya que hay excedente en todos los renglones y columnas, el procedimiento de etiquetas es trivial y conduce a repetir la trayectoria. Esta fase se comporta como una modificación de la regla de la esquina noroeste, restringida a las celdas admisibles. La solución resultante de esta fase es la siguiente:

10					30
	50				50
		10			10
		10		20	60
10	50	20	80	20	

Ciclo 1. Solución primal factible.

Para ejecutar el procedimiento de etiquetas los renglones con oferta excedente primero se etiquetan. En este caso, los renglones 1, 2 y 4 son etiquetados. La etiqueta es (s,c) donde s denota el nodo fuente y c es igual al excedente. Después las columnas 1, 2, 3 y 5 serán etiquetadas porque contienen círculos en las celdas de los renglones etiquetados:

	(1,20)	(2,30)	(4,30)	(3,20)	(4,30)	
(S,20)	10					30
(s,30)		50				80
(3,10)			10			10
(S,30)			10		20	60
	10	50	20	80	20	

Ciclo 1, solución primal factible

El renglón 3 es etiquetado porque contiene una celda con flujo positivo en la columna etiquetada. En este caso c = 10, ya que el flujo 10 es menor que la etiqueta c de 30 en la tercer columna. Finalmente la columna 4 es etiquetada porque tiene un círculo en la celda del renglón 3. Esta es una trayectoria porque la columna cuatro tiene un excedente.

El flujo es ajustado siguiendo la ruta hacia atrás: + 10 en la celda (3,4); -10 en (3,3), +10 en (4,3). La ruta termina en el renglón 4 ya que el "nodo fuente" es etiquetado.

Después el tableau es ajustado y las etiquetas recalculadas. El resultado es:

	(1,20)	(2,30)	(4,20)		(4,20)	
(S,20)	10					30
(S,30)	○	50				80
	○	○	○	10	○	10
(S,20)			20		20	60
	10	50	20	80	20	

Ciclo 1, solución primal óptima.

En este caso no hay trayectoria, así el flujo es máximo. De cualquier modo debe ser actualizado y empezar otro ciclo. El valor de h es

$$h = \min \left(c_{ij} - \mu_i - v_j\right)$$

para i = 1,2,4, j = 4. El mínimo ocurre para i=4 y h=1.

Las variables duales son revisadas de acuerdo a (7). Los nuevos valores junto con los coeficientes de costo son:

Iteración 2:

						μ_i
	3	4	6	8	9	4
	2	2	4	5	5	3
	2	2	2	3	2	2
	3	3	2	4	2	3
v_j	-1	-1	-1	1	-1	

Ciclo 2, solución dual factible

Note que hay menos celdas admisibles que en el caso original. Sin embargo, todas las celdas usadas actualmente en el flujo son aún admisibles y una nueva celda admisible aparece en el lugar 4, 4.

En el siguiente paso el tableau solución es modificado por los valores del flujo, pero actualizando los lugares de las celdas que corresponden a los lugares admisibles. Entonces el flujo máximo se encuentra para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

	(1,20)	(2,30)				
(S,20)	10					30
(S,30)		50				80
				10		10
			20	20	20	60
	10	50	20	80	20	

Ciclo 2, solución primal óptima

Se etiquetan los renglones con excedente, en este caso son los renglones 1 y 2. Después las columnas 1, 2 son etiquetadas porque contienen círculos en las celdas de los renglones etiquetados. Como ya no se pueden etiquetar mas renglones y columnas, el flujo es máximo. Entonces actualizamos el dual, para i=1,2 y j = 3,4,5. El mínimo ocurre para i = 2 y j = 4, h = 1. Las variables duales son revisadas de acuerdo a (7). Los nuevos valores junto con los coeficientes de costo son:

Iteración 3:

						μ_i
	3	4	6	8	9	5
	2	2	4	5	5	4
	2	2	2	3	2	2
	3	3	2	4	2	3
v_j	-2	-2	-1	1	-1	

Ciclo 3, solución dual factible

Note que hay una nueva celda admisible que aparece en el lugar 2, 4. En el siguiente paso el tableau solución es modificado por los valores del flujo, pero actualizando los lugares de las celdas en círculo que corresponden a los lugares admisibles. Entonces el flujo máximo se encuentra para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

	(1,20)					
(s,20)	10					30
		50		30		80
				10		10
			20	20	20	60
	10	50	20	80	20	

Ciclo 3, solución primal óptima.

Se etiquetan los renglones con excedente, en este caso solo es el renglón 1. La columna 1 es etiquetada porque contiene un círculo en la celda del renglón etiquetado. Ya no se pueden etiquetar renglones y columnas, por tanto el flujo es máximo. Entonces actualizamos el dual para i=1 y j=2,3,4,5. El mínimo ocurre para i=1 y j=2, h=1. Las variables duales son revisadas de acuerdo a (7). Los nuevos valores junto con los coeficientes de costo son:

<u>Iteración 4.</u>

						μ_i
	3	4	6	8	9	6
	2	2	4	5	5	4
	2	2	2	3	2	2
	3	3	2	4	2	3
v_j	-3	-2	-1	1	-1	

Ciclo 4, solución dual factible

Note que hay una nueva celda admisible que aparece en el lugar 1,2. En el siguiente paso el tableau solución lo modificamos por los valores del flujo, pero actualizando los lugares de las celdas en círculo que corresponden a los lugares admisibles. Entonces el flujo máximo se encuentra para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

10	20				30
	30		50		80
			10		10
		20	20	20	60
10	50	20	80	20	

Ciclo 4, solución primal óptima

Como el flujo máximo no tiene excedentes, entonces la solución que se tiene es factible para el problema original y por tanto es óptima. La solución óptima es: $x_{11}=10$, $x_{12}=20$, $x_{22}=30$, $x_{24}=50$, $x_{34}=10$, $x_{43}=20$, $x_{44}=20$, $x_{45}=20$ y las $x_{ij}=0$ restantes, $x_0=610$.

3.2 EL PROBLEMA DE ASIGNACION.

Considere el problema de asignación en la forma:

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{para } i=1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{para } j=1,\dots,n \qquad (8)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{para } i,j=1,\dots,n$$

Se requiere que cada una de las variables tome el valor de 0 ó 1, en otro caso la solución no tiene sentido ya que no es posible hacer asignaciones fraccionarias. El correspondiente problema dual es:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$$

$$\text{s.a} \quad \mu_i + v_j \leq c_{ij} \qquad (9)$$

$$\mu_i \text{ y } v_j \text{ no restringidas}$$

El problema de asignación es un caso especial del problema de transporte y su estructura permite una mayor eficiencia en la aplicación del algoritmo primal-dual. El procedimiento puede ser llevado a un arreglo y el proceso de etiquetas se simplifica. El resultado es el método húngaro, el cual fué la primera forma del algoritmo primal-dual.

ALGORITMO PRIMAL-DUAL.

Propósito: Resolver el problema de asignación.

Descripción

Paso 1. Inicialización. Primero del arreglo de coeficientes de costos encontrar una solución dual factible. Se encuentran las μ_i como $\mu_i = \min c_{ij}$ para el i-ésimo renglón, entonces los coeficientes de costo estan modificados por $c_{ij} - \mu_i$. Después los $v_j = \min(c_{ij}-\mu_i)$ para la j-ésima columna, entonces los coeficientes del arreglo están formados por $c_{ij}-\mu_i-v_j$. Los coeficientes con cero representan las celdas admisibles. Así el problema original es transformado en uno equivalente, fácil de resolver. Restando una constante de algún renglón o columna de la matriz de coeficientes no cambia la solución óptima porque cualquier solución debe tener $x_{ij} = 1$ en tal renglón o columna.

Paso 2. Encontrar el flujo máximo. El flujo máximo es asignado a los coeficientes con cero que representan las celdas admisibles. El flujo se encuentra por el procedimiento de etiquetas; en este caso la etiqueta solo necesita el índice apropiado del renglón o columna, la capacidad de la etiqueta no se requiere ya que siempre es igual a la unidad.

a). Etiquetar todos los renglones donde no hay celda asignada. Si el renglón i es tal renglón, ponga s.

b). En cada renglón etiquetado i vea los coeficientes con valor cero(es decir, las celdas admisibles). Si ocurre en la columna j, etiquete la columna j por i. Si una columna con excedente es etiquetada (es decir, una columna sin celda es etiquetada), ir a (e).

c). En cada columna etiquetada j ver los coeficientes asignados para los cuales $x_{ij} = 1$. Si tal celda se encuentra y el renglón i no ha sido etiquetado, etiquételo con j.

d). Repita el paso (b) y (c) hasta encontrar la trayectoria (es decir, que pueda etiquetar una columna sin celda asignada) o no es posible etiquetar mas renglones o columnas. En el primer caso ir a (e). En el segundo pare, el flujo es máximo.

e). Suponga que la trayectoria ocurre en la columna k. Entonces modifique el flujo. Si la etiqueta en el renglón μ es j, continúe hacia atrás a través de la cadena, incrementando y decrementando alternativamente los flujos, hasta que un renglón alcance la etiqueta s del nodo fuente. Quite todas las etiquetas, y regrese al paso (a).

<u>Paso 3</u>. Las variables duales actualizadas. Si el flujo máximo encontrado no tiene excedentes, es decir, se completa una asignación, entonces la solución es factible para el problema

original y por tanto es óptima. La solución óptima es aquella en que $x_{ij} = 1$ si la celda (i,j) es asignada y $x_{ij} = 0$ para las celdas restantes. Si por el contrario hay excedente, es decir, no se completa una asignación, las variables duales son actualizadas. Hacemos una búsqueda sobre todas las celdas correspondientes a los renglones etiquetados y columnas no etiquetadas para el valor mínimo de $c_{ij} - \mu_i - v_j$ en el arreglo. Entonces actualizamos los coeficientes de costo del arreglo restando este valor de todos los renglones etiquetados y sumando este valor a las columnas etiquetadas, borre las etiquetas y regrese al paso 2.

Ejemplo 2. Considere el problema de asignación con los siguientes coeficientes de costo:

12	7	6	5	10
8	5	9	6	8
6	13	9	6	10
10	5	8	9	12
11	12	5	6	3

Las variables duales iniciales se encuentran por el procedimiento descrito anteriormente. Primero las μ_i se encuentran por $\mu_i = \min c_{ij}$ en el i-ésimo renglón. Entonces los coeficientes de costo del arreglo están modificados por $c_{ij}-\mu_i$, los cuales son:

Iteración 1

7	2	1	0	5
3	0	4	1	3
0	7	3	0	4
5	0	3	4	7
8	9	2	3	0

Después los v_j se encuentran de este nuevo arreglo por $v_j = \min(c_{ij}-\mu_i)$ de la j-ésima columna. Entonces los coeficientes del arreglo están formados por $c_{ij} - \mu_i - v_j$.

Los cuales son:

7	2	0	0	5
3	0	3	1	3
0	7	2	0	4
5	0	2	4	7
8	9	1	3	0

No es necesario recordar los valores de las μ_i y v_j. Solamente los coeficientes de costo son necesarios. Los coeficientes con cero representan las celdas admisibles.

Una interpretación útil de este procedimiento de inicialización es que el problema original es transformado en uno equivalente más fácil de resolver. Restando una constante de algún renglón o columna de la matriz de coeficientes no cambia la solución óptima porque cualquier solución debe tener $x_{ij}=1$ en tal renglón o columna. Así la función objetivo se decrementará (por el valor restado), pero la solución no cambiará. En términos del nuevo arreglo, es claro que podríamos hacer asignaciones en las posiciones que tienen valor cero. Si después de este procedimiento de sustracción una asignación completa se puede hacer sobre los elementos cero, tal asignación podría ser óptima.

El siguiente paso del procedimiento es maximizar el flujo usando el método de etiquetas. En este caso la etiqueta solo necesita el índice apropiado del renglón o columna, la capacidad de la etiqueta no se requiere ya que siempre es igual a la unidad. El resultado de maximizar el flujo es el siguiente indicando con un cuadro los lugares asignados:

		4			
	7	2	$\boxed{0}$	0	5
2	3	$\boxed{0}$	3	1	3
	$\boxed{0}$	7	2	0	4
5	5	0	2	4	7
	8	9	1	3	$\boxed{0}$

La solución obtenida no completa una asignación, así las variables duales (o equivalentemente el arreglo de costo modificado) debe ser actualizado. Hacemos esta búsqueda sobre todas las celdas correspondientes a los renglones etiquetados y columnas no etiquetadas para el valor mínimo de $c_{ij} - \mu_i - v_j$ en el arreglo. En este caso el valor mínimo es uno. Entonces actualizamos los coeficientes de costo del arreglo restando este valor de todos los renglones etiquetados y sumando este valor a las columnas etiquetadas. El resultado es el siguiente:

Iteración 2:

		4		2	
	7	3	$\boxed{0}$	0	5
2	2	$\boxed{0}$	2	0	2
	$\boxed{0}$	8	2	0	4
5	4	0	1	3	6
	8	10	1	3	$\boxed{0}$

La rutina de flujo máximo es iniciada sobre el nuevo arreglo, el cual etiquetamos. La trayectoria ocurre en la columna 4. La nueva asignación se encuentra hacia atrás, es la siguiente:

7	3	$\boxed{0}$	0	5
2	0	2	$\boxed{0}$	2
$\boxed{0}$	8	2	0	4
4	$\boxed{0}$	1	3	6
8	10	1	3	$\boxed{0}$

Es una asignación completa y por tanto óptima. La solución optima es: $x_{13} = x_{24} = x_{31} = 42 = x_{55} = 1$ y las $x_{ij} = 0$ restantes. $x_0 = 26$.

3.3 EL PROBLEMA DE RUTA MAS CORTA.

Considere el problema de ruta más corta en la forma:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \Sigma x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \text{ ó } m \\ -1 & \text{si } i = m \end{cases} \tag{10}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i,j = 1,\ldots,m$$

El problema de la ruta más corta es un problema de flujo con costo mínimo en una red. El correspondiente problema dual es:

$$\max \quad w_1 - w_m$$

$$\text{s.a} \quad w_i - w_j \leq c_{ij} \qquad i,j=1,\ldots,m \tag{11}$$

$$w_i, \quad w_j \quad \text{no restringida } i,j=1,\ldots,m$$

Es conveniente hacer la sustitución $w_i^t = -w_i$, ya que en la solución óptima $w_i^t - w_1^t$ es la distancia mas corta del nodo uno al nodo i. Por lo tanto se puede obtener la distancia mas corta del nodo uno a todos los nodos de la red.

Para utilizar el método primal-dual al problema de la ruta más corta, planteamos como sigue el problema:

$$\min \quad c^t f$$

$$\text{s.a} \quad Af = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \text{ ó } m \end{cases} \tag{12}$$

$$f \geq 0$$

donde A es una matriz de incidencia nodos-arcos para una gráfica dirigida con m nodos y n arcos, en donde el renglón correspondiente al nodo final m ha sido eliminado, f con componentes 0 ó 1 y c es el vector de costos. Su correspondiente problema dual es:

$$\max \quad \lambda_1$$

$$\text{s.a} \quad \lambda_i - \lambda_j \leq c_{ij}$$

$$\lambda_i \quad \text{no restringida } \forall i \tag{13}$$

$$\lambda_m = 0$$

λ_m se fija a $\lambda_m = 0$ debido a que se omite su renglón. Y de acuerdo al procedimiento definido; el conjunto de arcos admisibles es definido por:

$$P = \{\text{arcos } (i,j) \mid \lambda_i - \lambda_j = c_{ij}\}$$

El problema primal restringido es:

$$\min \quad I^t y$$

$$\text{s.a} \quad Af + y = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i \neq 1 \text{ ó } m \end{cases} \qquad (14)$$

$$f \geq 0$$

$$f_i = 0 \qquad i \notin P$$

$$y \geq 0$$

donde $I = (1,1,\ldots,1)$ vector con $m-1$ conponentes. Finalmente el dual del primal restringido es:

$$\max \quad \mu_1$$

$$\text{s.a} \quad \mu_i - \mu_j \leq 0 \quad \text{para todos los arcos } (i,j) \in P \qquad (15)$$

$$\mu_i \leq 1 \quad \forall\, i$$

$$\mu_i \quad \text{no restringida}$$

Se propone iterar sobre el problema primal restringido con el objeto de ir mejorando la solución, pero en este caso la solución del problema dual restringido es más facil debido a lo siguiente:

$$\mu_0 = \begin{cases} 1 & \text{para los nodos alcanzables con trayectorias desde el nodo fuente usando arcos de P (por la propagación de } \mu_1 = 1 \text{ con arcos en P)} \\ 0 & \text{para los nodos desde los cuales el nodo final es alcanzable usando los arcos de P (por la propagación de } \mu_m = 0 \text{ con arcos en P)} \\ 1 & \text{para los otros nodos } (\mu_i - \mu_j \leq 0) \end{cases}$$

Podemos entonces calcular:

$$\varepsilon_0 = \min_{\text{arcos } (i,j) \notin P} \{c_{ij} - (\lambda_i - \lambda_j) \mid \mu_i - \mu_j > 0\}$$

actualizando μ y P, resolver el problema dual restringido. Si tenemos una trayectoria del nodo fuente al nodo final (es decir de 1 a m) usando los arcos en P, $\mu_1 = 0$ entonces tenemos el óptimo ya que el mínimo es igual al máximo igual a cero. Alguna trayectoria del nodo fuente al nodo final usando solo los arcos en P es óptima. Así el algoritmo primal-dual simplifica el problema de ruta más corta.

ALGORITMO PRIMAL-DUAL

Propósito: Resolver el problema de ruta más corta cuando se tiene una solución dual factible.

Descripción

Paso 1. Inicialización. Dadas las soluciones iniciales factibles $\lambda_0 = (0,0,\ldots,0)$ para el problema dual (13) y $\mu_0 = (1,1,\ldots,1)$ para el problema dual restringido (15), $\mu_1 = 0$ y $P = \{\phi\}$.

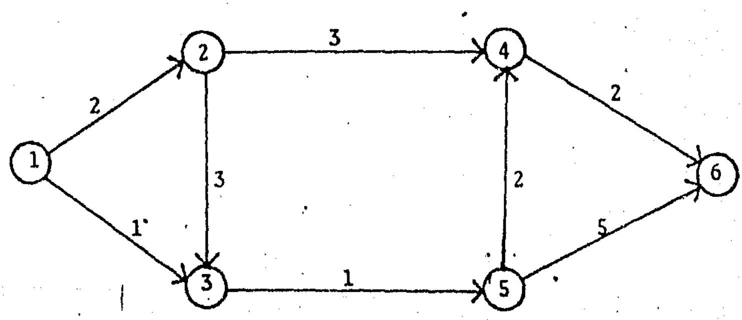
Paso 2. Calcular:

$$\varepsilon_0 = \min_{(i,j)\notin P} \{c_{ij} - (\lambda_i - \lambda_j) \mid \mu_i - \mu_j > 0\}$$

Paso 3. Calcular: $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_0\mu_0$ y hacer $\mu_i = 0$ para la μ_i que determina ε_0.

Paso 4. Si $\mu_i \neq 0$ para alguna i, regresar al paso 2. En caso contrario P = {conjunto de arcos considerados en trayectoria más corta del nodo 1 al m}.

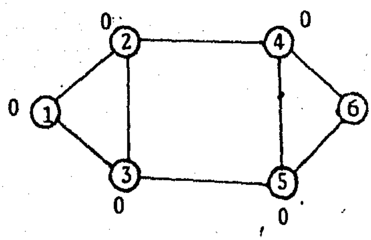
Ejemplo 3. Considere la red:



con la capacidad máxima indicada sobre los arcos.

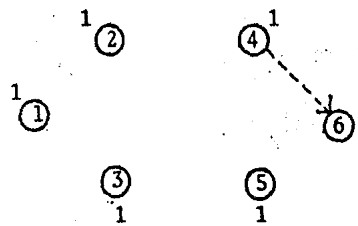
Iteración 1: Como los costos son no-negativos, podemos empezar con $\lambda = (0,0,0,0,0)$

DUAL



$p = \{\phi\}$

DUAL RESTRINGIDO



$\lambda_0 = (0,0,0,0,0)$ solución inicial factible.

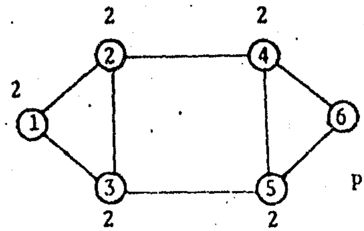
$\mu_0 = (1,1,1,1,1)$ solución inicial factible $\mu_i - \mu_j \leq 0$

para los arcos (4,6): $2-(0-0) = 2$

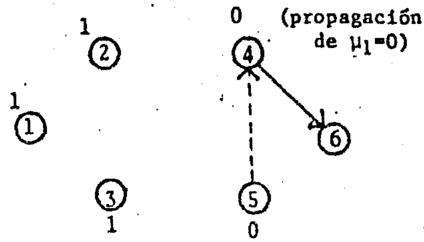
(5,6): $5-(0-0) = 5$

$\therefore$ $\varepsilon_0 = 2$ por el arco (4,6)

Iteración 2:



$P = \{(4,6)\}$



$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_0\mu_0$

$= (0,0,0,0,0) + 2(1,1,1,1,1)$

$= (2,2,2,2,2)$

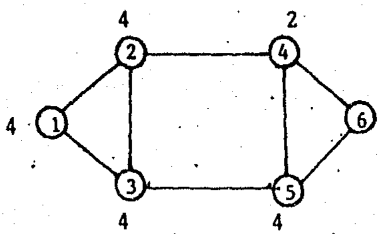
$\mu_0 = (1,1,1,0,1)$

para los arcos (5,4): $2-(2-2)=2$

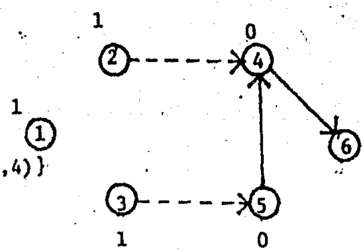
(2,4): $3-(2-2)=3$

$\therefore\ \varepsilon_0 = 2$ por el arco (5,4).

Iteración 3:



$P=\{(4,6),(5,4)\}$



$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_0\mu_0$

$= (2,2,2,2,2) + 2(1,1,1,0,1)$

$= (4,4,4,2,4)$

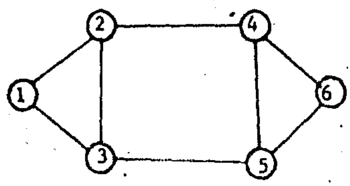
$\mu_0 = (1,1,1,0,0)$

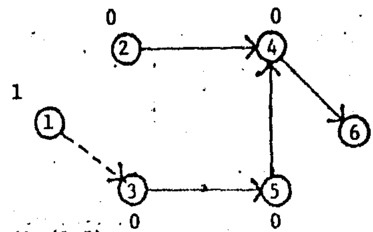
para los arcos (2,4): $3-(4-2)=1$

(3,5): $1-(4-4)=1$

$\therefore\ \varepsilon_0=1$ para los arcos (2,4) y (3,5)

Iteración 4:





p={(4,6),(5,4),(2,4),(3,5)}

$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_0\mu_0$

$= (4,4,4,2,4) + 1(1,1,1,0,0)$

$= (5,5,5,2,4)$

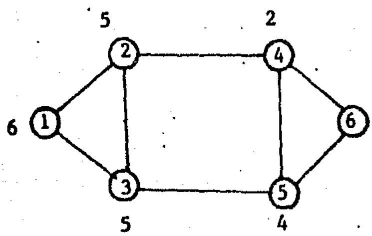
$\mu_0 = (1,0,0,0,0)$

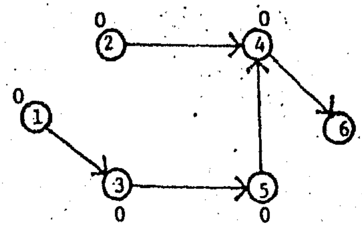
para los arcos (1,2): $2-(5-5) = 2$

(1,3): $1-(5-5) = 1$

$\therefore\ \varepsilon_0 = 1$ para el arco (1,3)

Iteración 5:





p={(4,6),(5,4),(2,4),(3,5),(1,3)}

$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_0\mu_0$

$= (5,5,5,2,4) + 1(1,0,0,0,0)$

$= (6,5,5,2,4)$

$\mu_0 = (0,0,0,0,0)$

Finalmente después de cinco iteraciones del método primal-dual alcanzamos el óptimo para $\lambda = (6,5,5,2,4)$ y el correspondiente conjunto P, el cual contiene la trayectoria óptima. Cualquier trayectoria del nodo fuente al final en el conjunto de arcos admisibles final satisface la holgura complementaria y por tanto es óptima, en este caso la trayectoria es (1,3), (3,5), (5,4), (4,6) con costo igual a seis.

El ejemplo anterior permite visualizar el algoritmo, partiendo directamente del procedimiento primal-dual, el cual en primera instancia sería para $c_{ij} > 0$.

El algoritmo de Dijkstra es una aplicación eficiente del algoritmo primal-dual para ruta más corta. Se supone que los costos en los arcos son no-negativos. Este método se basa en la asignación de etiquetas "permanentes" a los nodos para los cuales ya se conocen las longitudes de las rutas más cortas del nodo fuente a ellos. Sea S este conjunto de nodos permanentes. Las etiquetas de los nodos de S representan precisamente las longitudes de las rutas más cortas buscadas. Los nodos restantes se etiquetan "temporalmente" con una cota superior de la longitud más corta del nodo fuente al nodo etiquetado. En la primera iteración el conjunto S contendrá únicamente el nodo fuente, es decir, el nodo uno estará etiquetado permanentemente. Las etiquetas temporales se mejoran continuamente y en cada iteración se agrega exactamente un nodo i a S, este nodo es aquél tal que la longitud desde el nodo fuente es la más corta posible.

Puesto que todos los arcos tienen costos no-negativos, siempre puede encontrarse una ruta más corta del nodo fuente al nodo i que pase sólo por nodos de S; en este caso la etiqueta i representa la longitud de la ruta más corta correspondiente. Una vez que todos los nodos estén en S, las etiquetas de todos los nodos serán las correspondientes a las longitudes más cortas desde el nodo fuente y por lo tanto se habrá encontrado la solución deseada. En el caso en que se desee sólo la ruta más corta entre dos nodos específicos, se obtendrá la solución cuando se etiquete "permanentemente" el nodo final del camino buscado.

ALGORITMO DE DIJKSTRA.

Propósito: Obtener la trayectoria de la ruta más corta en una red con costos no negativos en los arcos.

Descripción

Paso 1. Inicialización de etiquetas. Sea $d(i)$ una etiqueta asociada al nodo i para todo i. Sea $d(1) = 0$ (nodo fuente) y márquese ésta etiqueta como permanente. Sea $d(i) = \infty$ para $i = 2,\ldots,m$ y considérense estas etiquetas como temporales. Sea $a(i)$ una etiqueta asociada al nodo i para $i \neq 1$ (nodo fuente) y sea $d(i,j)$ la longitud del arco i,j. Sea $k = 1$ (nodo fuente).

Paso 2. Actualización de etiquetas. Para toda $i \in \Gamma$ que tenga etiqueta temporal, actualizar etiquetas de acuerdo a:

$$d(i) = \min\{d(i),\ d(k) + d(k+i)\}$$

si $d(i)$ se modificó, hacer $a(i) = p$. Sea i^* tal que $d(i^*) = \min\ \{d(i)\ |\ d(i) \text{ es temporal}\}$. Si $d(i^*) = \infty$, terminar. En este caso no existe trayectoria alguna. En otro caso ir al paso 3.

Paso 3. Etiquetación permanente. Marcar la etiqueta $d(i^*)$ como permanente. Sea $k = i^*$.

Paso 4. (i) Si sólo se desea la ruta del nodo fuente al nodo final: Si k = m, terminar; d(k) es la longitud del camino más corto. Si k ≠ m, ir al paso 2. (ii) Si se desea la trayectoria: Si todos los nodos tienen etiquetas permanentes, terminar; ésta es la longitud del camino deseado y el conjunto de arcos (a(i),i) forman la trayectoria de caminos más cortos. En otro caso ir al paso 2.

Observe que el algoritmo termina en un número finito de iteraciones, ya sea en el paso 2 ó en el paso 4, puesto que el número de nodos es finito. Se justificará la optimalidad del algoritmo.

Note que si el algoritmo termina en el paso 4, la gráfica generada tendrá n-1 arcos y el nodo fuente como raíz; por esta razón, dicha gráfica es una trayectoria. Por otro lado, se tiene que, por construcción, d(i) es la longitud del único camino del nodo fuente a i en esta trayectoria. Ahora se probará que la trayectoria generada es de ruta más corta. Para ello se demostrará, por inducción sobre el número de iteraciones, que las etiquetas permanentes de los nodos son las longitudes de las rutas más cortas del nodo fuente a i, para toda i. Esto es claro en la primera iteración. Supóngase que también es válido en la k-ésima iteración. Sean S el conjunto de nodos con etiquetas permanentes y $\bar{S}$ el conjunto de nodos con etiquetas temporales en la iteración k.

Al final del paso 2 de la iteración k + 1 la etiqueta temporal $d(i)$, para $i\varepsilon\bar{S}$, es la longitud de una ruta más corta del nodo fuente a i que contiene solamente nodos de S.

En efecto, en cada iteración, sólo se etiqueta permanentemente un nodo, por lo tanto, sólo es necesaria la comparación efectuada en el paso 2. En particular, ésto sucede para i^* (nodo con la mínima etiqueta temporal). Supóngase ahora que la ruta más corta de la raíz (nodo fuente) a i^* no contiene sólo nodos de S. Sea j al primer nodo, en el camino más corto del nodo fuente a i^*, que no está en S. Puesto que los costos de los arcos son no negativos, entonces la longitud de la porción del camino del nodo fuente a i^*, que une a j con i^*, es no negativa. Sea D esta longitud. Note que la porción del camino del nodo fuente a i^*, que une al nodo fuente con j, es un camino que contiene sólamente nodos de S. Pero $d(j)$ es la longitud de una ruta más corta que contiene todos sus nodos en S, luego:

$$d(j) + D < d(i^*)$$

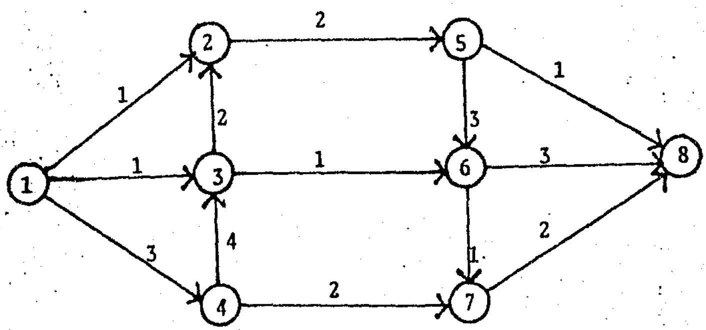
lo que implica:

$$d(j) < d(i^*) - D < d(i^*),$$

lo cual constituye una contradicción puesto que $d(i^*)$ es el mínimo de las etiquetas temporales. Luego se concluye que la ruta más corta del nodo fuente a i^* contiene sólo nodos de S, y por lo tanto, $d(i^*)$ es su longitud. Por lo tanto, la etiqueta permanente de i es igual a la longitud de la ruta más corta del nodo fuente a i en la iteración k+1.

Finalmente observe que si $d(i^*) = \infty$ (paso 2) en alguna iteración, entonces existe algún nodo (i^* y todos los que tengan etiqueta temporal) para el cual no existe ruta alguna desde el nodo fuente; puede entonces concluirse que el problema no tiene solución puesto que en este caso el nodo fuente no es raíz de la red.

Ejemplo 4. Considere la red:



con la capacidad máxima sobre los arcos. Determinaremos la trayectoria de ruta mas corta usando el algoritmo de Dijkstra.

<u>Iteración 1</u>: $d(1) = 0$, etiqueta permanente; $d(i) = \infty$ para $i = 2,\ldots,8$, etiquetas temporales. $K = 1$.

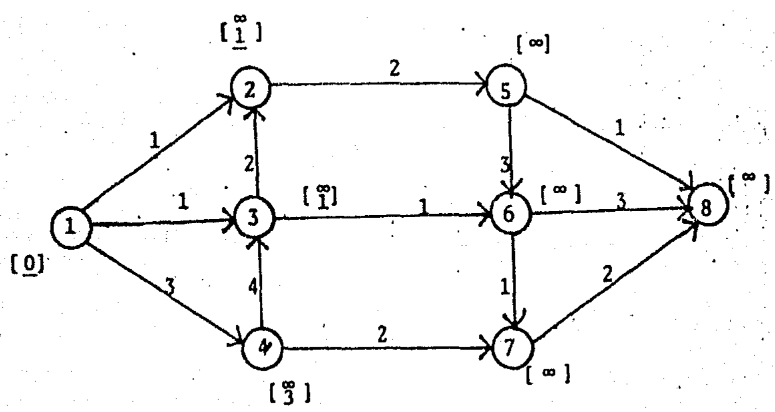
Actualización de etiquetas: $\Gamma(k) = \{2,3,4\}$

$$d(2) = \min\{\infty,1\} = 1 \qquad a(2) = 1$$

$$d(3) = \min\{\infty,1\} = 1 \qquad a(3) = 1$$

$$d(4) = \min\{\infty,3\} = 3 \qquad a(4) = 1$$

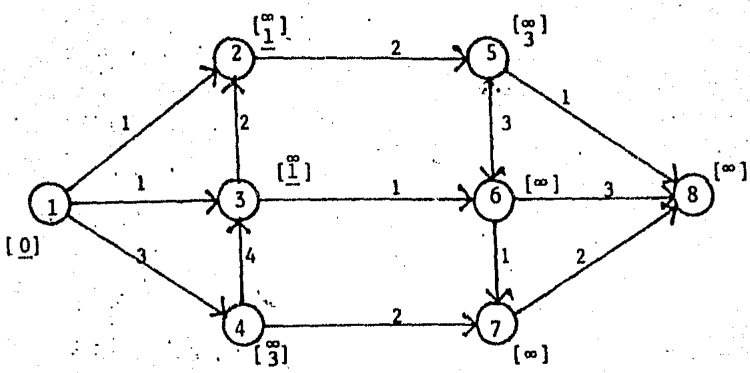
De donde $i^*=2$ puesto que es el nodo con mínima etiqueta temporal (los empates se rompen arbitrariamente). Se marca $d(2)$ como permanente; $k = 2$ ($k \neq m = 8$)



Iteración 2: Actualización de etiquetas, $\Gamma(k) = \{5\}$

$$d(5) = \min\{\infty, 3\} = 3 \quad a(5) = 2$$

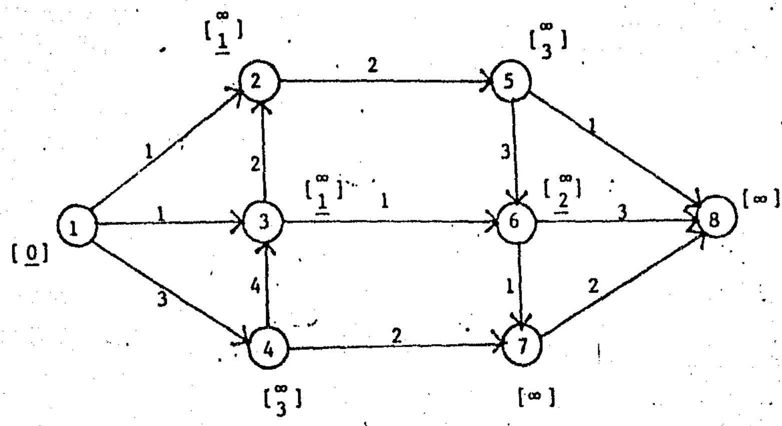
donde $i^* = 3$ nodo con mínima etiqueta temporal. Se marca d(3) como permanente. $K = 3$ $(k \neq m = 8)$



Iteración 3: Actualización de etiquetas $\Gamma(k) = \{6\}$

$$d(6) = \min\{\infty, 2\} = 2 \quad a(6) = 3$$

donde $i^* = 6$ nodo con mínima etiqueta temporal. Se marca d(6) como permanente. $K = 6$ $(k \neq m = 8)$



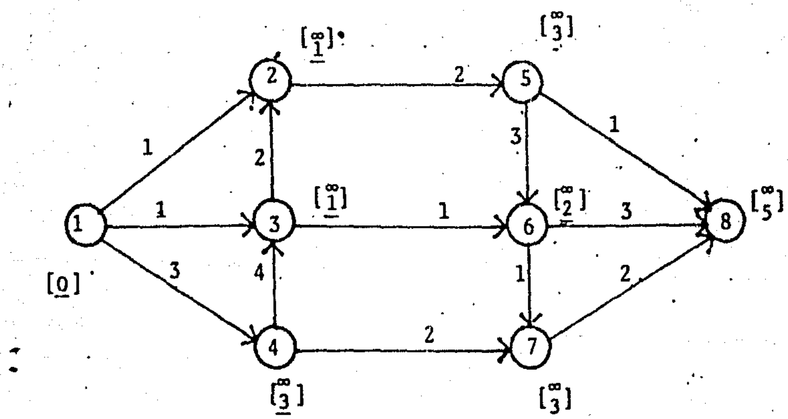
<u>Iteración 4</u>: Actualización de etiquetas $\Gamma(k) = \{7,8\}$

$d(7) = \min\{\infty,3\} = 3 \quad a(7) = 6$

$d(8) = \min\{\infty,5\} = 5 \quad a(8) = 6$

donde $i^* = 4$. Se marca $d(4)$ como permanente. $K = 4$

$(k \neq m = 8)$

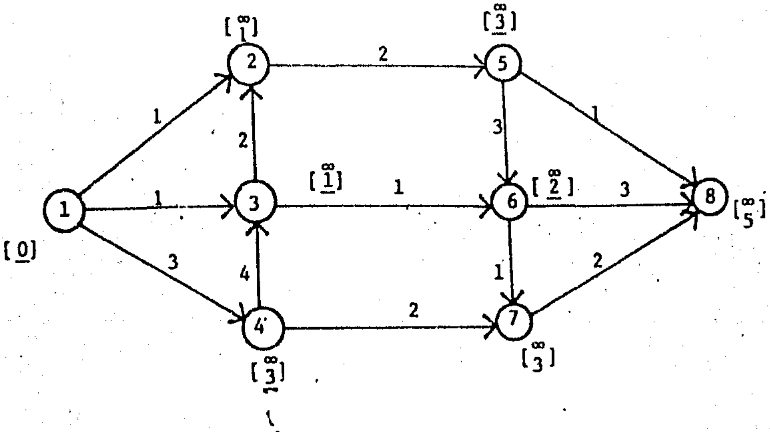


Iteración 5: Actualización de etiquetas Γ(k) = {7}

d(7) = min {3,5} = 3   a(7) no se modifica

donde i^* = 5. Se marca d(5) como permanente. K = 5

(K ≠ n = 8)

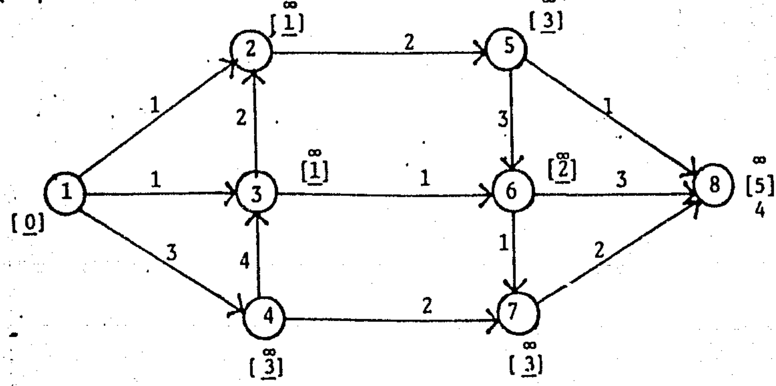


Iteración 6: Actualización de etiquetas Γ(k) = {8}

d(8) = {5,4} = 4   a(8) = 5

donde i^* = 7. Se marca d(7) como permanente. K = 7

(k ≠ m = 8)

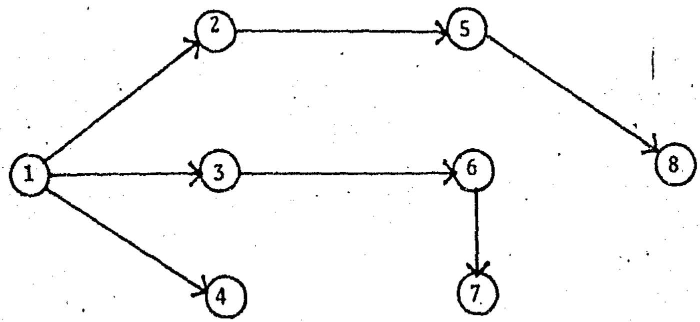


Iteración 7: Actualización de etiquetas $\Gamma(k) = \{8\}$

$$d(8) = \{4,5\} = 5 \quad a(8) \text{ no se modifica}$$

Todos los nodos tienen etiqueta permanente. ALTO.

La trayectoria de ruta más corta de raíz en el nodo uno, está formada por el conjunto de arcos (i,a(i)). Esta trayectoria es:



RUTA MAS CORTA ENTRE TODO PAR DE NODOS.

Este procedimiento fué desarrollado por R.W. Floyd (1962) y es aplicable a redes que admiten cualquier costo en sus arcos. En el algoritmo de Floyd se supondrá una numeración de los nodos de la red 1, 2,...,n y se utilizará una matriz C, de nxn, para calcular las longitudes de las rutas más cortas entre todo par de nodos; al terminar de aplicar el algoritmo, la longitud de la ruta más corta entre los nodos i y j estará dada por el elemento (i,j) de C. En la k-ésima iteración se calcula la longitud de la ruta más corta, entre i y j, que puede admitir a los primeros k nodos, o algunos de ellos, como nodos intermedios; este número se almacena en la entrada (i,j) de la matriz C. Al principio se asigna el costo del arco (i,j) al elemento (i,j) de la matriz C, si $i \neq j$; si este arco no existe entonces se asigna ∞. Los valores de la diagonal serán cero. Con esto quedan calculadas las longitudes de las rutas más cortas entre todo par de nodos i y j, que no contengan ningún nodo como nodo intermedio. Al principio de la k-ésima iteración, la entrada (i,j) de C es igual a la longitud de la ruta más corta, entre i y j, que contiene a los primeros k-1 nodos, o alguno de ellos, como nodos intermedios, entre i y k y k y j; de esta manera se obtiene la ruta más corta, entre i y j, que contiene a los primeros k nodos, o alguno de ellos, como nodos intermedios. Procediendo de este modo se tendrá que, al final de la n-ésima iteración, la entrada (i,j) de C es la longitud de la ruta más corta, entre i y j, que contiene a los primeros n nodos como nodos intermedios o algunos de ellos; es decir, se habrá calculado la longitud de la ruta más corta entre i y j.

Debe observarse que si, al finalizar de aplicar el algoritmo, alguna entrada de C es igual a ∞, ésto querrá decir que no existe ruta alguna entre los nodos correspondientes. Por otro lado si algún elemento de la diagonal de C, supóngase el (i,j), es menor que cero en alguna iteración, se habrá encontrado una ruta de i a i de longitud negativa (es decir, un cirtuito negativo). Luego, en este caso, el problema no tiene solución. Por ésto mencionado últimamente, este algoritmo será de gran utilidad en problemas de detección de circuitos negativos.

ALGORITMO DE FLOYD.

Propósito: Obtener las rutas más cortas entre todo par de nodos en una red con n nodos.

Descripción

Paso 1. Constrúyase la matriz C, de nxn, de elementos c_{ij}

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si } (i,j) \notin A \\ d(i,j) & \text{si } (i,j) \in A \end{cases}$$

donde A es el conjunto de arcos de la red. Hágase $k = 0$.

Paso 2: Hacer $k = k+1$. Para todo $i \neq k$ tal que $c_{ij} \neq \infty$ y para todo $j \neq k$ tal que $c_{kj} \neq \infty$, hacer:

$$c_{ij} = \min\{c_{ij}, c_{ik} + c_{kj}\}$$

Paso 3: (i) Si $c_{ii} < 0$ para alguna i, terminar. En este caso existe un circuito negativo que contiene al nodo i y por lo tanto no hay solución.

(ii) Si $c_{ii} \geq 0$, para toda i, y $k = n$, terminar; c_{ij} es la longitud del camino más corto de i a j.

(iii) Si $c_{ii} \geq 0$, para toda i, y $k < n$, ir al paso 2.

Para recuperar las rutas más cortas puede construirse una matriz A de dimensión nxn; el elemento a_{ij} de esta matriz será el predecesor del nodo j en la ruta de i a j encontrada en cada iteración. Dada la definición de A, sus entradas se inicializarán $a_{ij} = i$, para todo par de nodos i,j. A será modificada en el paso 2 de la k-ésima iteración de acuerdo con:

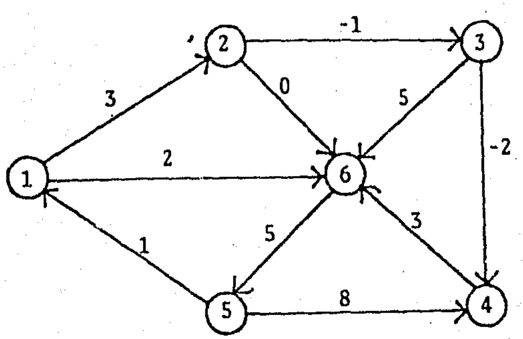
$$a_{ij} \begin{cases} a_{kj} & \text{si } c_{ik} + c_{kj} < c_{ij} \\ \text{no cambia} & \text{si } c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj} \end{cases}$$

El algoritmo de Floyd termina en exactamente n iteraciones, donde n es el número de nodos de la red, a menos que termine en el inciso (i,) del paso 3; en este último caso, se terminará en menos de n iteraciones. Se mostrará la optimalidad por inducción sobre el número de iteraciones.

Al principio de la iteración 1 (paso 1) la entrada (i,j) de la matriz representa la longitud de la ruta más corta, que no contiene ningún nodo intermedio, entre los nodos i y j. Durante el paso 2 de esta iteración se realiza una comparación entre dicha longitud (c_{ij}) y la de aquella -ruta formada por la unión de la ruta entre i y 1 y la ruta entre 1 y j ($c_{i1} + c_{ij}$); de este modo se obtiene la longitud de la ruta más corta, entre los nodos i y j, que no contiene ningún nodo intermedio o que contiene al nodo 1 como intermedio. Supóngase que al final de la iteración k-1, c_{ij} representa la longitud de la ruta más corta, entre i y j, que contiene a los primeros k-1 nodos como nodos intermedios, o a algunos de ellos. Durante el paso 2, de la iteración k, se realiza la comparación entre esta última longitud (c_{ij}) y la de aquella ruta formada por la unión de las rutas más cortas, que admiten a los primeros k-1 nodos como nodos intermedios, entre i y k y entre k y j ($c_{ik}+c_{kj}$); entonces, al final de la k-ésima iteración, c_{ij} es igual a la longitud de la ruta más corta, entre i y j, que contiene a los primeros k nodos como intermedios o a algunos de ellos.

De lo anterior se concluye que, al final de la iteración n, c_{ij} es la longitud de la ruta más corta entre los vértices i y j.

<u>Ejemplo 5</u>. Considere la siguiente red:



con la capacidad máxima sobre los arcos. Determinaremos las rutas más cortas entre todo par de nodos mediante el algoritmo de Floyd.

Iteración 1: Las matrices C y A resultantes son:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 0 & -1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & -2 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & \infty & \infty & 8 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Se asigna: $k = 1$ y se actualizan las matrices C y A

$$c_{52} = \min\{\infty, 1+3\} = 4 \qquad a_{52} = a_{12} = 1$$

$$c_{56} = \min\{\infty, 1+2\} = 3 \qquad a_{56} = a_{16} = 1$$

Estos son los unicos elementos que se modifican puesto que $c_{i1} = \infty$, para $i = 2,3,4,6$ y $c_{ij} = \infty$ para $j = 3,4,5$.
Las matrices resultantes son:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 0 & -1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & -2 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & 4 & \infty & 8 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

puesto que $k < n = 6$, $c_{ii} = 0$ para todo i aún no se han terminado de revisar las rutas:

<u>Iteración 2</u>: Se asigna $k = 2$ y se actualizan los elementos

$c_{13} = \min\{\infty, 3-1\} = 2 \quad a_{13} = a_{23} = 2$

$c_{53} = \min\{\infty, 4-1\} = 3 \quad a_{53} = a_{23} = 2$

$c_{16} = \min\{2, 3+0\} = 2$ no se modifica a_{16}

$c_{56} = \min\{3, 4+0\} = 3$ no se modifica a_{56}

Las matrices resultantes en esta iteración son:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 0 & -1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & -2 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

puesto que $k = 2 < n = 6$ y $c_{ii} = 0$, para todo i, se realiza otra iteración.

<u>Iteración 3</u>: Se asigna $k=3$ y se actualizan los elementos

$c_{14} = \min\{\infty, 2-2\} = 0 \quad a_{14} = a_{34} = 3$

$c_{16} = \min\{2, 2+5\} = 2$ no se modifica a_{16}

$c_{24} = \min\{\infty, -1-2\} = -3 \quad a_{24} = a_{34} = 3$

$c_{26} = \min\{0,-1+5\} = 0$ no se modifica a_{26}

$c_{54} = \min\{8, 3-2\} = 1.$ $a_{54} = a_{34} = 3$

$c_{56} = \min\{3, 3+5\} = 3$ no se modifica a_{56}

Las matrices resultantes de esta iteración son:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 0 & -1 & -3 & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & -2 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

como $k < n$, aún no se tiene la solución.

<u>Iteración 4</u>: Se asigna $k = 4$ y se actualizan los elementos

$c_{16} = \min\{2, 0+3\} = 2$ no se modifica a_{16}

$c_{26} = \min\{0,-3+3\} = 0$ no se modifica a_{26}

$c_{36} = \min\{5,-2+3\} = 1$ $a_{36} = a_{46} = 4$

$c_{56} = \min\{3, 1+3\} = 3$ no se modifica a_{56}

en base a lo anterior se tienen las siguientes matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 0 & -1 & -3 & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & -2 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$k < n$, aún no se determina la solución.

<u>Iteración 5</u>: Se asigna $k = 5$ y se actualiza los elementos

$c_{61} = \min \{\infty, 1+5\} = 6 \qquad a_{61} = a_{51} = 5$

$c_{62} = \min \{\infty, 4+5\} = 9 \qquad a_{62} = a_{52} = 1$

$c_{63} = \min \{\infty, 3+5\} = 8 \qquad a_{63} = a_{53} = 2$

$c_{64} = \min \{\infty, 1+5\} = 6 \qquad a_{64} = a_{54} = 3$

$c_{66} = \min \{0, 3+5\} = 0$ no se modifica a_{66}

se tiene entonces, que las nuevas matrices son:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 0 & -1 & -3 & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & -2 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 8 & 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$k < n$, entonces se realiza otra iteración.

Iteración 6. Se asigna $k = 6$. Se actualizan los elementos:

$c_{11} = \min \{0, 6+2\} = 0$ no se modifica a_{11}

$c_{12} = \min \{3, 9+2\} = 3$ no se modifica a_{12}

$c_{13} = \min \{2, 8+2\} = 2$ no se modifica a_{13}

$c_{14} = \min \{0, 6+2\} = 0$ no se modifica a_{14}

$c_{15} = \min \{\infty, 5+2\} = 7$ $a_{15} = a_{65} = 6$

$c_{21} = \min \{\infty, 6+0\} = 6$ $a_{21} = a_{61} = 5$

$c_{22} = \min \{0, 9+0\} = 0$ no se modifica a_{22}

$c_{23} = \min \{-1, 8+0\} = -1$ no se modifica a_{23}

$c_{24} = \min \{-3, 6+0\} = -3$ no se modifica a_{24}

$c_{25} = \min \{\infty, 5+0\} = 5$ $a_{25} = a_{65} = 6$

$c_{31} = \min \{\infty, 6+1\} = 7$ $a_{31} = a_{61} = 5$

$c_{32} = \min \{\infty, 9+1\} = 10$ $a_{32} = a_{62} = 1$

$c_{33} = \min \{0, 8+1\} = 0$ no se modifica a_{33}

$c_{34} = \min \{-2, 6+1\} = -2$ no se modifica a_{34}

$c_{35} = \min \{\infty, 5+1\} = 6$ $a_{35} = a_{65} = 6$

$c_{41} = \min \{\infty, 6+3\} = 9$ $a_{41} = a_{61} = 5$

$c_{42} = \min \{\infty, 9+3\} = 12$ $a_{42} = a_{62} = 1$

$c_{43} = \min \{\infty, 8+3\} = 11$ $a_{43} = a_{63} = 2$

$c_{44} = \min \{\infty, 5+3\} = 8$ $a_{45} = a_{65} = 6$

$c_{51} = \min\{1, 6+3\} = 1$ no se modifica a_{51}

$c_{52} = \min\{4, 9+3\} = 4$ no se modifica a_{52}

$c_{53} = \min\{3, 8+3\} = 3$ no se modifica a_{53}

$c_{54} = \min\{1, 6+3\} = 1$ no se modifica a_{54}

$c_{55} = \min\{0, 5+3\} = 0$ no se modifica a_{55}

De lo anteriormente calculado, se tiene las siguientes matrices C y A:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 7 & 10 & 0 & -2 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & 11 & 0 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 8 & 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Puesto que $k = n = 6$, la última matriz es la matriz de longitudes más cortas entre todo par de nodos.

Para recuperar las rutas se utiliza la matriz A. Por ejemplo, la ruta de 1 a 1 se obtiene de la siguiente manera: el predecesor de 1 en la ruta 1 a 1 es 1; es decir se tiene la ruta vacía de longitud cero. La ruta entre los nodos 3 y 1 se obtiene del modo siguiente: el predecesor de 1, en la ruta de 3 a 1 es $a_{31} = 5$; el predecesor de 5 en la ruta de 3 a 5 es $a_{35} = 6$; el predecesor de 6 en la ruta de 3 a 6 es

$a_{36} = 4$; el predecesor de 4 en la ruta de 3 a 4 es $a_{34} = 3$. Entonces la ruta entre los nodos 3 y 1 es 3,4,6,5,1 de longitud $c_{31} = 7$. Para encontrar la ruta de 6 a 5 se tiene: el predecesor de 5 en la ruta de 6 a 5 es 6; entonces la ruta más corta entre los nodos 6 y 5 es 6, 5 de longitud $c_{65} = 5$. Análogamente se obtienen las demás rutas.

3.4 EL PROBLEMA DE FLUJO MAXIMO.

El problema de flujo máximo puede plantearse como un flujo del nodo fuente al nodo final de valor v definido por:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad v \\
&\text{s.a} \\
&Af = \begin{cases} +v & \text{nodo fuente} \\ -v & \text{nodo final} \\ 0 & \text{otros} \end{cases} \\
&f \leq b \qquad\qquad (16) \\
&f \geq 0
\end{aligned}
$$

donde A es la matriz de incidencia nodos-arcos de una gráfica dirigida, y f y b $\varepsilon\ \mathbb{R}^m$ son los vectores de flujo y capacidad respectivamente.

Reescribiremos el problema (16) usando el vector $d \varepsilon \mathbb{R}^n$ definido por:

$$
d_i = \begin{cases} -1 & i = 1 \ \text{(nodo fuente)} \\ +1 & i = n \ \text{(nodo final)} \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}
$$

Entonces el problema de programación lineal es:

$$\begin{aligned} \max \quad & v \\ Af + dv &\leq 0 \\ f &\leq b \\ -f &\leq 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

La reformulación del problema anterior se parece al dual de un problema estándar de programación lineal, la idea es encontrar el dual del primal restringido directamente del dual (17) sin pasar por el primal restringido. De acuerdo al procedimiento definido para la obtención del dual restringido se puede apreciar ciertas reglas que son: reemplazar el vector del lado derecho por $\underline{0}$, eliminar los renglones que no estan en P, agregar las restricciones f, v $\leq$ 1. Esto es, el dual restringido es:

$$\begin{aligned} &\max \ v \\ &\text{s.a } Af + dv \leq 0 \quad \text{para todos los renglones} \\ &\qquad\qquad f \leq 0 \quad \text{para renglones con } f = b \text{ en } (17) \\ &\qquad\quad -f \leq 0 \quad \text{para renglones donde } f = 0 \text{ en } (17) \qquad (18) \\ &\qquad\qquad f \leq 1 \\ &\qquad\qquad v \leq 1 \end{aligned}$$

Este problema se puede interpretar como: encontrar una trayectoria del nodo fuente al nodo final (para un flujo con valor 1); que use los arcos en la siguiente forma: arcos saturados en dirección inversa; arcos con flujo cero en dirección hacia adelante; y todos los otros arcos en cualquier dirección.

El próximo paso en el algoritmo primal-dual es encontrar una trayectoria aumentada, que corresponde a aumentar un flujo f tan grande como sea posible; esto es, hasta atravesar un arco en dirección inversa quedando sin flujo (todo el flujo es cancelado) o hasta atravesar un arco en dirección hacia delante saturado.

Se aprecia que la solución al dual restringido, de acuerdo al procedimiento definido arriba, no requiere el uso del simplex una vez encontrada la solución del dual restringido se procede a actualizar el dual (el cual corresponde directamente al problema de flujo máximo) agregándole el flujo encontrado en la trayectoria aumentada. Y con los planteamientos del dual actualizado se procede a resolver nuevamente el dual restringido hasta que no se puede definir una trayectoria aumentada del nodo fuente al nodo final en cuyo caso el flujo definido en (17) es el flujo máximo.

Este procedimiento se establece en una forma más eficiente con el algoritmo de Ford-Fulkerson que consiste en lo siguiente: se inicia con cualquier flujo factible. Primeramente se etiqueta el nodo fuente con dos etiquetas $[s,\infty]$ indicando que en este nodo se dispone de cualquier cantidad de flujo. Después, si j es un nodo etiquetado y puede enviarse flujo de j a i, i recibe dos etiquetas [+j, f(i)]. La primera etiqueta será de la forma +j si $i\epsilon\Gamma^{+}(j)$; es decir, si puede aumentarse el flujo a través del arco (j,i). Será de la forma -j si $i\epsilon\Gamma^{-}(j)$; es decir, si puede disminuirse el flujo a través del arco (i,j). La segunda etiqueta es la cantidad de flujo que puede enviarse de j a i y se calculará por tanto como el mínimo entre f(j) y h, donde:

$$h = \begin{cases} q_{ij} - f_{ji} & \text{si } i\epsilon\Gamma^{+}(j) \\ \\ f_{ij} & \text{si } i\epsilon\Gamma^{-}(j) \end{cases}$$

debe observarse que si h = 0 no puede enviarse flujo de j a i por lo cual no se etiquetará i con [±j, f(i)].

Este proceso de asignación de etiquetas a nodos se repetirá mientras sea posible. Si el nodo final n recibe etiquetas entonces, dado el modo de etiquetar, existe una cadena aumentante del nodo fuente al nodo final con capacidad incremental igual a f(n) y por tanto se procederá a determinar ésta, con la ayuda de la primera etiqueta, y se actualizará el flujo a través de ella. Si, por el contrario, el nodo final n no recibe etiqueta alguna, entonces se habrá determinado el flujo máximo.

Para justificar esto último considérese el conjunto de arcos que tienen extremo inicial etiquetado y extremo final no etiquetado; este conjunto forma una cortadura de capacidad igual al valor del último flujo definido y por lo tanto éste es máximo. En efecto, nótese la similitud de este algoritmo con la demostración del teorema flujo máximo cortadura mínima. Por esta razón, la justificación de optimalidad y convergencia del algoritmo está dada por dicho teorema. Además de la manera de etiquetar los nodos, el algoritmo servirá también en casos donde sea de interés determinar la cortadura de capacidad mínima.

Es importante observar que el algoritmo converge sólo si las capacidades para el flujo en ios arcos son enteras; sin embargo, en casos donde las capacidades sean racionales, pueden transformarse éstas en enteras, multiplicándolas por la potencia de 10 adecuada. De este modo, el algoritmo puede utilizarse también en estos casos.

ALGORITMO DE FORD Y FULKERSON.

Propósito: Determinar el flujo máximo entre el nodo fuente y el nodo final en una red.

Descripción

Paso 1. Iniciar con cualquier flujo factible f

Paso 2. Etiquetar el nodo fuente con $[s,\infty]$

Paso 3. Elegir un nodo etiquetado y no examinado; sea j éste nodo y sean $[\pm k, f(j)]$ sus etiquetas.

(i) A todo $i \varepsilon \Gamma^{+}(j)$ que no esté etiquetado y tal que $f_{ji} < q_{ij}$ asignar la etiqueta $[+j, f(i)]$, donde $f(i) = \min \{f(j), q_{ji} - f_{ji}\}$.

(ii) A todo $i \varepsilon \Gamma^{-}(j)$ que no esté etiquetado y tal que $f_{ij} > 0$ asignar la etiqueta $[-j, f(i)]$, donde $f(i) = \min \{f(j), f_{ij}\}$.

Se dice que el nodo j ha sido examinado.

Paso 4. Repetir el paso 3 hasta que suceda (i) o (ii):

(i) El nodo final n no tiene etiqueta y todos los nodos etiquetados han sido examinados. Terminar, ya que el flujo factible f es máximo.

(ii). El nodo final n recibe etiqueta. Ir al paso 5.

Paso 5. Sea $x = n$.

(i) Si la etiqueta de x es de la forma $[+z, f(x)]$ hacer

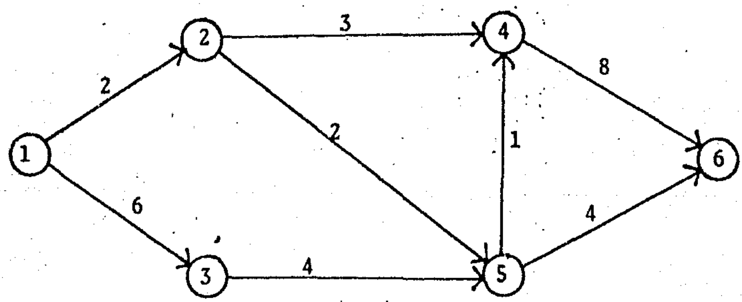
$f_{zx} = f_{zx} + f(n)$.

(ii) Si la etiqueta de x es de la forma $[-z, f(x)]$ hacer

$f_{xz} = f_{xz} - f(n)$.

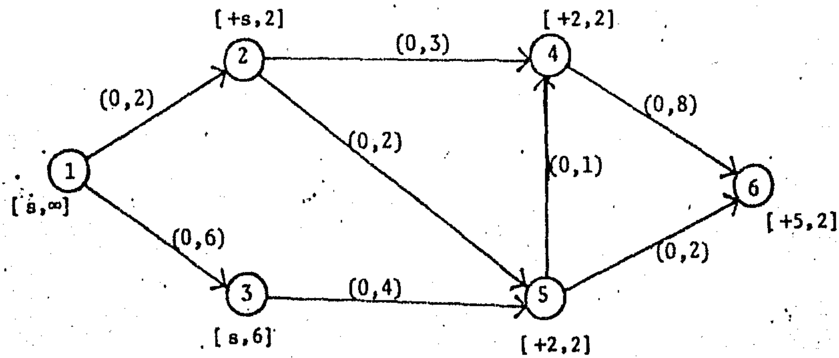
Paso 6. Si $z = s$ borrar todas las etiquetas y regresar al paso 2. Si $z \neq s$, hacer $x = z$ y regresar al paso 5.

Ejemplo 5. Determínese el flujo máximo del nodo fuente al nodo final en la siguiente red mediante el algoritmo de Ford y Fulkerson. En número asociado a cada arco representa su capacidad.



Se aplicará el algoritmo utilizando inicialmente un flujo igual a cero a través de todos los arcos de la red.

Iteración 1. A continuación se muestran las etiquetas asignadas a los nodos durante ésta iteración. Los números asociados a cada arco son el flujo a través de él y su capacidad.



Primeramente se etiquetó el nodo 1 con [s,∞], después se calcularon las otras etiquetas conforme a los pasos 3 y 4 del algoritmo.

Se elige el nodo 1 puesto que está etiquetado pero no examinado. Los sucesores i de 1 no etiquetados y tales que $f_{1i} < q_{1i}$ son 2 y 3, por lo que:

2 recibe etiqueta [+ s, min {∞, 2}]

3 recibe etiqueta [+ s, min {∞, 6}]

Se elige el nodo 2 puesto que está etiquetado pero no examinado. Los sucesores i de 2 no etiquetados tales que

$f_{2i} < q_{2i}$ son 4 y 5, por lo que:

4 recibe etiqueta [+ 2, min {2, 3}]

5 recibe etiqueta [+ 2, min {2, 2}]

El nodo 2 ha sido examinado.

Se elige el nodo 5. El sucesor i de 5 no etiquetado y tal que $f_{5i} < q_{5i}$ es 6, de donde:

6 recibe etiqueta [+ 5, 2]

El nodo 5 ha sido examinado.

Puesto que el nodo n = 6 recibió etiqueta existe una cadena aumentante del nodo fuente al final, es decir del nodo 1 al 6. Se determinará ésta y se actualiza el flujo a través de ella en los pasos 5 y 6 del algoritmo:

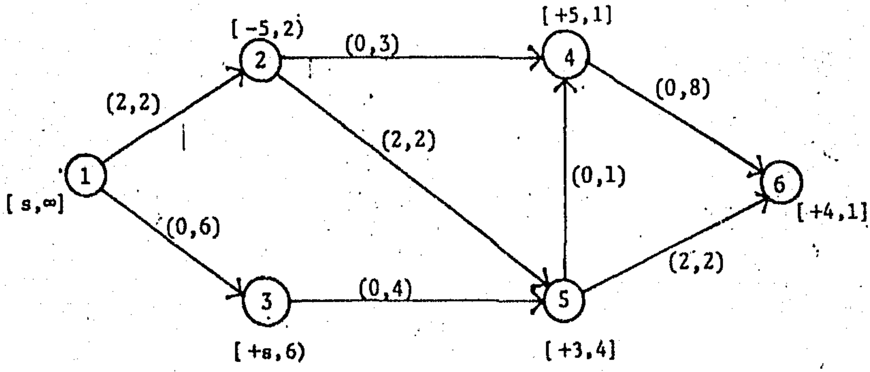
x = 6, su etiqueta es [+5, 2], entonces $f_{5t} = 2$

x = 5, su etiqueta es [+2, 2], entonces $f_{24} = 2$

x = 2, su etiqueta es [+s, 2], entonces $f_{s1} = 2$

Con este nuevo flujo de valor 2 se realiza otra iteración.

Iteración 2. Las etiquetas resultantes de esta iteración se muestran en la siguiente red:



De nuevo se etiquetó el nodo fuente con [s, ∞], después:

Se elige el nodo 1. El vecino i de 1 no etiquetado y tal que $f_{1i} < q_{1i}$ es 3, de donde:

> 3 recibe etiqueta [+ s, min {∞, 6}]
> El nodo 1 ha sido examinado.

Se elige el nodo 3. El único sucesor no etiquetado de 3 es 5 y $f_{35} < q_{35}$ por lo que:

5 recibe etiqueta [+ 3, min {6, 4}]

El nodo 3 ha sido examinado.

Se elige el nodo 5. El sucesor i no etiquetado de 5 tal que $f_{5i} < q_{5i}$ es 4, de donde:

4 recibe etiqueta [+ 5, min {4, 1}]

El predecesor de 5 no etiquetado es 2 y $f_{25} > 0$ de donde:

2 recibe etiqueta [- 5, min {4, 2}]

El nodo 5 ha sido examinado.

Se elige el nodo 4. El sucesor no etiquetado de 4 es 6 y $f_{46} < q_{46}$, de donde:

6 recibe etiqueta [+ 4, min {1, 8}]

El nodo 4 ha sido examinado.

Puesto que 6 recibió etiqueta, existe una cadena aumentante de 1 a 6 con capacidad incremental igual a 1. Se determina ésta y se actualiza el flujo a través de ella:

$x = 6$, su etiqueta es [+4, 1], entonces $f_{46} = 1$

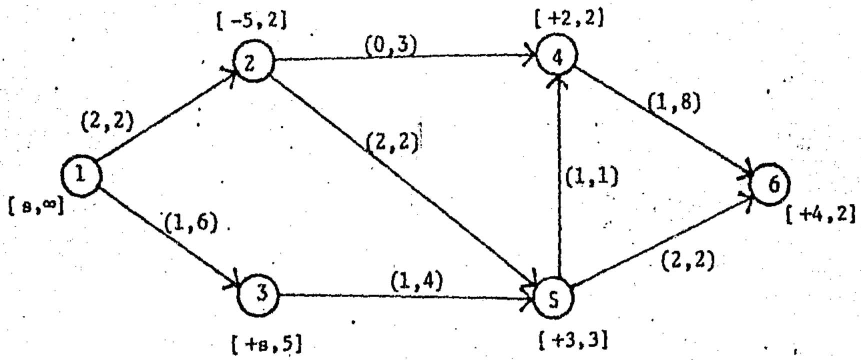
$x = 4$, su etiqueta es [+5, 1], entonces $f_{54} = 1$

$x = 5$, su etiqueta es [+3, 4], entonces $f_{35} = 1$

$x = 3$, su etiqueta es [+s, 6], entonces $f_{13} = 1$

Con este nuevo flujo factible de valor 3 se realiza otra iteración.

Iteración 3. De nuevo, las etiquetas asignadas se muestran en la siguiente red:



De nuevo, se etiquetó el nodo 1 con [s, ∞]. Luego:

Se elige el nodo 1. El sucesor de 1 no etiquetado es 3 y $f_{13} < q_{13}$, entonces:

3 recibe etiqueta [+ s, min {∞, 6-1}]

El nodo 1 ha sido examinado.

Se elige el nodo 3. El sucesor no etiquetado de 3 es 5 y

$f_{35} < q_{35}$, entonces:

5 recibe etiqueta [+3, min {5, 4-1}]

El nodo 3 ha sido examinado.

Se elige el nodo 5. El predecesor no etiquetado de 5 es 2 y $f_{25} > 0$, luego:

2 recibe etiqueta [- 5, min {3, 2}]

El nodo 5 ha sido examinado.

Se elige el nodo 2. El sucesor no etiquetado de 2 es 4 y $f_{24}' < q_{24}$, por tanto:

4 recibe etiqueta [+ 2, min {2, 3}]

El nodo 2 ha sido examinado.

Se elige el nodo 4. El sucesor no etiquetado de 4 es 6 y $f_{46} < q_{46}$, por tanto:

6 recibe etiqueta [+ 4, min 2, 8-1]

El nodo 4 ha sido examinado.

El nodo 6 recibió etiqueta por lo cual existe una cadena au mentante de capacidad incremental 2. Se determina ésta y se actualiza el flujo:

x = 6, su etiqueta es [+4, 2], entonces f_{46} = 1 + 2 = 3

x = 4, su etiqueta es [+2, 2], entonces f_{24} = 2

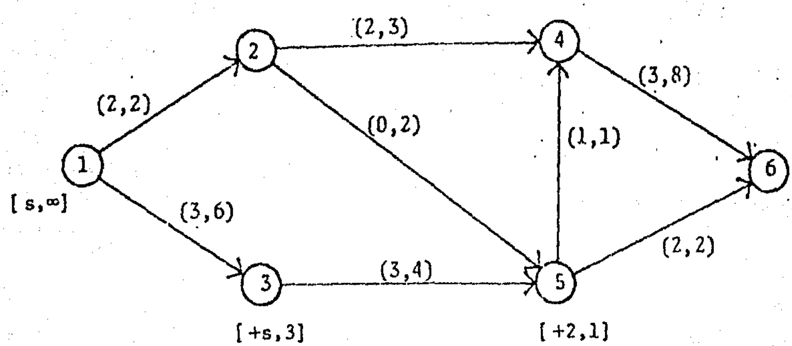
x = 2, su etiqueta es [-5, 2], entonces f_{25} = 2 - 2 = 0

x = 5, su etiqueta es [+3, 3], entonces f_{35} = 1 + 2 = 3

x = 3, su etiqueta es [+s, 5], entonces f_{13} = 1 + 2 = 3

con este nuevo flujo factible de valor 5 se realiza otra iteración:

<u>Iteración 4</u>. Las etiquetas asignadas se muestran a continuación:



De nuevo la etiqueta del nodo 1 es $[s, \infty]$, después:

Se elige el nodo 1. El sucesor i no etiquetado de 1 tal que $f_{1i} < q_{1i}$ es 3, por tanto:

3 recibe etiqueta $[+s, \min \{\infty, 6-3\}]$.

El nodo 1 ha sido examinado.

Se elige el nodo 3. El sucesor no etiquetado de 3 es 5 y $f_{35} < q_{35}$, de donde:

5 recibe etiqueta $[+2, \min \{3, 4-3\}]$

El nodo 3 ha sido examinado.

Se elige el nodo 5. Ningún vecino de 5 puede recibir etiqueta.

Todos los nodos etiquetados han sido examinados y 6 no recibió etiqueta. Por tanto, el último flujo es máximo.

Por otro lado, el conjunto de nodos etiquetados es $\{1,3,5\}$; por lo tanto, la cortadura mínima es $\{(1,2), (5,4), (5,6)\}$. Obsérvese que su capacidad es $2 + 1 + 2 = 5$ que es igual al valor del flujo máximo.

CAPITULO IV

ANALISIS DE PROBLEMAS DE REDES : METODOS-PRIMALES DUALES II

En este capítulo se continúa con la especialización del método primal-dual a problemas de redes de flujo. El problema que se analiza es el denominado problema de redes de flujo a costo mínimo. Dicho problema es una generalización de todos los problemas estudiados en el capítulo anterior y los métodos desarrollados en el presente capítulo son aplicables. Sin embargo, el énfasis principal es en el estudio del problema de redes de flujo a costo mínimo.

Uno de los aspectos más interesantes del presente capítulo es la unificación de los métodos clásicos de ciclo negativo y ruta mas corta-flujo máximo como casos especiales de la especialización del método primal-dual. En el caso del método de ciclo negativo, se demuestra que la búsqueda de dicho ciclo equivale a la solución del primal-restringido cuyo resultado es la solución óptima del problema original o bien, a través del correspondiente dual-restringido, un mejoramiento de la solución dual factible disponible. Una explicación semejante se tiene para el caso del método de ruta más corta-flujo máximo.

El clásico problema de Hitchcock es descrito y resuelto usando el método primal-dual. La equivalencia de este proble ma de flujo a costo mínimo se discute y se proporciona un ejemplo.

Este capítulo se desarrolla como sigue:

En la primera sección se define el problema de flujo a costo mínimo. En la segunda y tercer sección se dan dos opciones respectivamente para su solución a través del método primal-dual. En la cuarta se ve el método primal-dual para el problema de Hitchcock el cual se puede particularizar al problema de asignación y en la quinta se ve una transformación del problema de flujo a costo mínimo a uno de Hitchcock.

4.1 EL PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MINIMO.

Estudiaremos un problema importante en redes, con costos y restricciones no triviales. Aplicaremos el algoritmo primal-dual especializado, como en los problemas de flujo máximo y ruta más corta. Existen dos formas para llevarlo a cabo: considerando el problema original como el dual, de un cierto problema primal y llegar a resolver un subproblema de costo mínimo; o podemos considerar el problema original como el primal en el método primal-dual.

El problema a considerar se define como sigue:

Sea N una red de flujo en una gráfica dirigida G, con pesos sobre los arcos, c_{ij}; para todo arco (i,j) y valores de flujo v_0. El problema de flujo a costo mínimo consiste en encontrar un flujo factible del nodo fuente al nodo final de valor v_0 que tiene un costo mínimo. En la forma de un problema de programación lineal queda:

$$\begin{array}{lll} \min & c^t f & \\ \text{s.a} & Af = -v_0 d & \\ & f \leq b & \text{para todos los arcos} \\ & f \geq 0 & \text{para todos los arcos} \end{array} \qquad (1)$$

donde A es la matriz de incidencia nodos-arcos y

$$d_i = \begin{cases} -1 & i = 1 \quad \text{nodo fuente} \\ 1 & i = n \quad \text{nodo final} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \qquad (2)$$

4.2 ALGORITMO DEL CICLO.

Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & -vod\,\alpha + b\beta \\ \text{s.a} \quad & A\alpha + I\beta - I\gamma = -c^t \\ & \alpha \text{ no restringida} \\ & \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

El correspondiente problema dual es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max \quad & -c^t f \\ \text{s.a} \quad & Af = -vod \\ & f \leq b \quad \text{para todo arco} \\ & -f \leq 0 \quad \text{para todo arco} \end{aligned} \qquad (4)$$

Note que el problema dual (4) es el problema de flujo a costo mínimo (1), excepto porque en la función objetivo es máximo en lugar de mínimo, pero es equivalente. La idea es resolver por el método primal-dual el problema de flujo a costo mínimo, considerando el primal como el dual, haciendo el cambio en la función objetivo, es decir, multiplicar por -1 la función objetivo en (1), dándonos (4). No es difícil encontrar un flujo factible de valor v_0 en el dual (4), usando flujo máximo por ejemplo.

Siguiendo con el método primal-dual, se inicia con una solución factible para el dual. Correspondiente a la solución dual factible se dice que el par (i,j) pertenece al conjunto admisible si la (i,j)-ésima restricción se satisface con igualdad. El problema primal restringido se define en términos de los índices admisibles. Específicamente, el problema primal restringido es:

$$\begin{array}{ll} \min & I'y \\ \text{s.a} & A\alpha + I\beta + I\gamma + y = -c^t \\ & \alpha \quad \text{no restringida} \\ & \beta \geq 0 \\ & \gamma \geq 0 \\ & y \geq 0 \\ & \alpha = 0 \text{ para los arcos que no son admisibles} \\ & \gamma = 0 \text{ ara los arcos que no son admisibles} \end{array} \qquad (5)$$

El dual del primal restringido puede ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
&\max\ -c^t f \\
&\qquad Af = 0 \\
&\qquad f \leq 0 \quad \text{para arcos saturados} \qquad\qquad (6) \\
&\qquad f \geq 0 \quad \text{para arcos vacíos} \\
&\qquad f \geq -1 \quad \text{para todos los arcos (ya que } - c \leq 0)
\end{aligned}
$$

Con $Af = 0$ volvemos a tener clara la indicación de conservación de flujo en todo nodo. Un flujo factible satisfaciendo $Af = 0$ tiene un significado especial para nosotros, el cual se distingue por un nombre.

Definición: Un flujo factible f que satisface $Af = 0$ es llamado una circulación. Su costo es $c^t f$.

La solución óptima para el problema dual restringido es una circulación de una clase especial: debe tener flujo no negativo sobre un arco vacío, un flujo positivo sobre un arco saturado, y no valer menos que -1 sobre algún arco. Es conveniente definir un nuevo peso en la red en la cual estas restricciones son incorporadas.

Definición. Dado un flujo factible f en una red N, definimos el peso incremental en una red de flujo $N'(f)$ como: N' tendrá el mismo conjunto de nodos como N. Para cada arco $e=(i,j)$ en N con flujo v, capacidad d, y costo c, proponemos dos arcos en N': un arco (i,j) con capacidad $d-v \geq 0$ y costo c; y otro arco (j,i) con capacidad $v \geq 0$ y costo $-c$. Omitimos todos los arcos con capacidad cero.

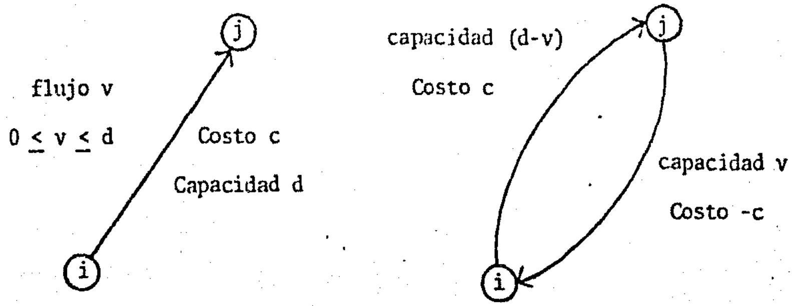


Figura 1. Un arco en una red de flujo y los arcos correspondientes en la red incremental N'(f).

De esta definición se sigue que una trayectoria del nodo fuente al nodo final en N'(f) con peso x determina un aumento del nodo fuente al final de la trayectoria en N; y que un incremento con el valor del flujo f del nodo fuente al final en N a lo largo de esta trayectoria por una unidad resulta un incremento en el costo total del flujo por x unidades. Asimismo, una circulación $\bar{f}$ en N'(f) de costo x determina un nuevo flujo f + $\bar{f}$ del nodo fuente al final en N del mismo valor, con un incremento del costo de x. Ahora podemos dar la condición de optimal dual para el problema dual restringido en la forma siguiente:

TEOREMA. Un flujo f del nodo fuente al nodo final es un flujo óptimo de costo mínimo si y solo si no hay ciclos en N'(f) con costo negativo.

Prueba. El algoritmo primal-dual nos dice que el flujo f es óptimo si y sólo si la solución óptima para el problema dual restringido tiene costo cero, el cual es equivalente a tener circulaciones con costos no negativos en N'(f). La red incremental N'(f) tiene una circulación con costo negativo si y solo si tiene un ciclo con costo negativo. ∎

El algoritmo primal-dual puede ser implementado comenzando con algún flujo f de valor v_0 y buscando un ciclo con costo negativo usando el algoritmo de Ford y Fulkerson para encontrar ciclos con peso negativo. Al final del algoritmo primal-dual se suma el ciclo de flujo f. El algoritmo de ciclo primal-dual para flujo a costo mínimo es como sigue:

ALGORITMO DEL CICLO:

<u>Propósito:</u> Determinar el flujo a costo mínimo de valor v_0 en una red.

<u>Descripción</u>

<u>Paso 1.</u> Use el algoritmo de flujo máximo para encontrar un flujo de valor v_0.

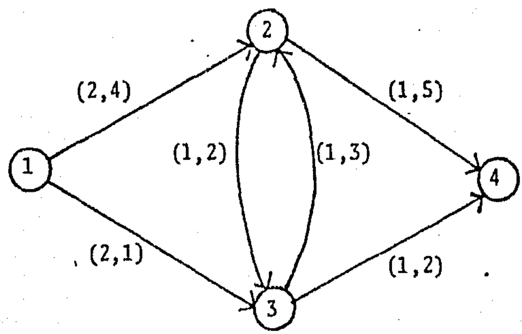
<u>Paso 2.</u> Constrúyase la red incremental, con respecto a $f, N'(f)$.

<u>Paso 3.</u> Mediante algún algoritmo de rutas más cortas, identifíquese algún ciclo con costo negativo c en $N'(f)$. Si no existen ciclos con costo negativo terminar. El flujo actual f es el requerido; en otro caso, sea C el ciclo con costo negativo. Ir al paso 4.

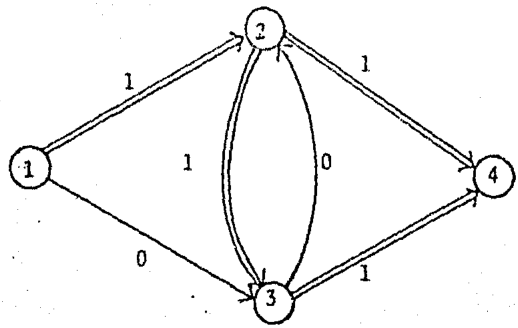
<u>Paso 4.</u> Sea $d = \min\limits_{(i,j)\epsilon C}$ {capacidad de los arcos $N'(f)$}

aumente el flujo en C hasta N' no mas grande que el que está contenido en C. Con este nuevo flujo ir al paso 2.

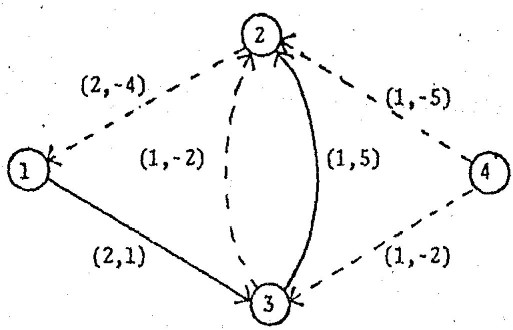
Ejemplo 1. Considere la siguiente red G con cuatro nodos y seis arcos. El problema de flujo a costo mínimo es encontrar un flujo de valor 2 del nodo fuente al nodo final con costo mínimo. Los números en el paréntesis indican la capacidad y el costo respectivamente:



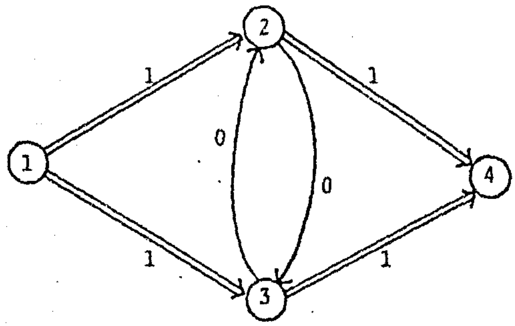
Suponga que hay un flujo de una unidad en las trayectorias (1,2,4) y (1,2,3,4). con un costo total de 17.



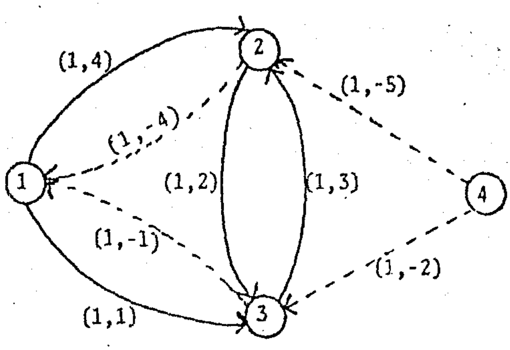
La red incremental G' es la siguiente:



Note que el ciclo con costo negativo (1,3,2,1) es una circulación $\bar{f}$ de costo -5. Podemos sumar una unidad de la circulación $\bar{f}$ para la f original, produciendo un flujo de una unidad en (1,2,4) y (1,3,4), con un costo total de 7-5 = 12



La nueva red incremental es la siguiente:



La red incremental G' no tiene ciclos con costo negativo, y por tanto el flujo es óptimo.

4.3 ALGORITMO DE CONSTRUCCION.

La segunda opción para aplicar el primal-dual a un problema de flujo a costo mínimo es la combinación de los costos, considerando el problema como primal. Esto se complica ya que hemos tratado con el correspondiente dual para encontrar un conjunto admisible. Esto se hace explícitamente por Ford y Fulkerson, en donde dejan el valor v del flujo como una variable. Maximizan la función de costos:

$$pv - c^t f \tag{7}$$

para incrementar los valores de p, con esto se obtiene una secuencia de flujos del valor incrementado, cada uno de costo mínimo. El objetivo es llegar a un algoritmo que evite el problema dual. El resultado puede ser resumido en el siguiente teorema.

<u>TEOREMA</u>. Sea f_1 un flujo óptimo de valor v en un problema de flujo a costo mínimo. Sea f_2 un flujo de valor 1 en una trayectoria aumentada P del nodo fuente al nodo final en $N'(f_1)$ de costo mínimo. Entonces $f_1 + f_2$ es un flujo óptimo de valor v + 1.

<u>PRUEBA</u>. Si $f_1 + f_2$ no es óptimo, entonces por el teorema anterior, hay un ciclo de costo negativo c en la red incremental $N'(f_1 + f_2)$. Este ciclo apareció en la red incremen

tal cuando el flujo fué incrementado de v a v + 1, porque el flujo de valor v fué óptimo y por lo tanto $N'(f_1)$ no tiene ciclos con costo negativo. Por tanto C tiene un arco e = (i,j) de costo -c correspondiente a un arco (j,i) sobre P, como se muestra en la siguiente figura:

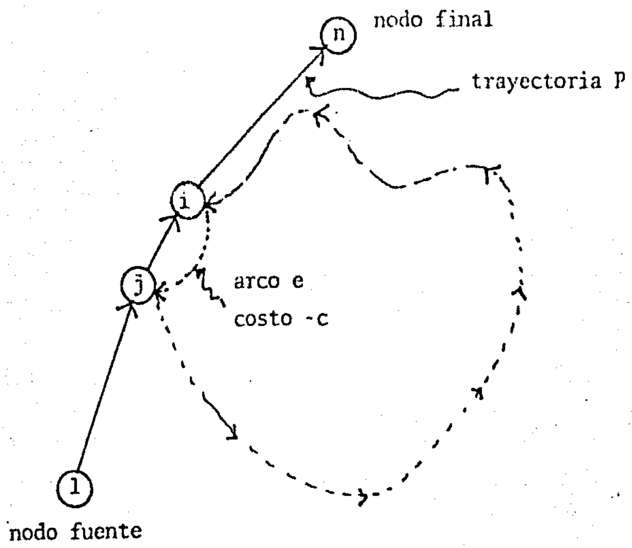


Figura 2. Construcción en la prueba del teorema: El ciclo de costo negativo c deja un costo interior en la trayectoria P.

Reemplace el arco (j,i) en P por C-{e}. El efecto sobre el costo en la trayectoria P se incrementa por

$$-c + (\text{costo del costo restante de } C) = \text{costo de } C < 0$$

Por lo tanto P no fué la trayectoria menos cara del nodo fuente al nodo final en $N'(f_1)$; esta contradicción muestra que $f_1 + f_2$ es óptima.■

Con este teorema podemos construir un flujo óptimo paso a paso, sumando flujos en la trayectoria de aumento de costo mínimo en N'. En cada paso encontramos una trayectoria de aumento de costo mínimo P en N', y entonces aumentamos el flujo en P hasta que el flujo alcanza el valor v, o hasta que P no sea más grande que la trayectoria de aumento de costo mínimo porque uno de estos arcos desaparece debido a la saturación o es vacío el arco correspondiente a N. Note que algún arco en N' puede tener costo negativo y el algoritmo de la ruta más corta para encontrar P debe tratarse en esta caso. Sin embargo, porque siempre tomamos algún nivel, el flujo óptimo de valor $f < v$, nunca tiene ciclos de costo negativo en N'. El algoritmo es el siguiente (para flujo a costo mínimo):

ALGORITMO DE CONSTRUCCION.

Propósito. Determinar el flujo a costo mínimo de valor v en una red.

Descripción

Paso 1. Determínese un flujo factible f de costo mínimo de valor cero en la red.

Paso 2. Constrúyase la red incremental, con respecto a f, N'(f).

Paso 3. Si el flujo f < v_0, entonces encontrar una trayectoria de ruta más corta P del nodo fuente al nodo final en N'.

Paso 4. Sea $d = \min_{(i,j)\varepsilon P}$ {capacidad de los arcos N'(f)} aumente el flujo a lo largo de P hasta alcanzar v_0 ó hasta que P no sea más grande que la trayectoria de aumento de costo mínimo.

En contraste al algoritmo del ciclo, el algoritmo de construcción no da un flujo factible de valor v_0 hasta que termina, así lo llamaremos un algoritmo de problema-infactible.

Paso 1. Determínese un flujo factible f de costo mínimo de valor cero en la red.

Paso 2. Constrúyase la red incremental, con respecto a f, N'(f).

Paso 3. Si el flujo f < v_0, entonces encontrar una trayectoria de ruta más corta P del nodo fuente al nodo final en N'.

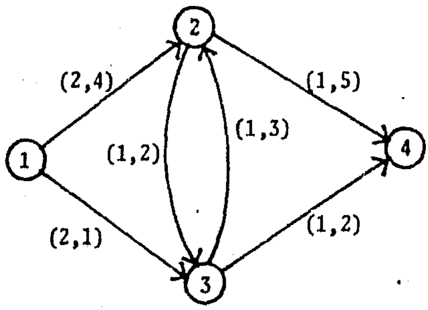
Paso 4. Sea $d = \min\limits_{(i,j)\epsilon P}$ {capacidad de los arcos N'(f)}

aumente el flujo a lo largo de P hasta alcanzar v_0 ó hasta que P no sea más grande que la trayectoria de aumento de costo mínimo.

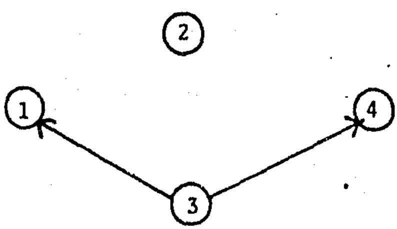
En contraste al algoritmo del ciclo, el algoritmo de construcción no da un flujo factible de valor v_0 hasta que termina, así lo llamaremos un algoritmo de problema-infactible.

Ejemplo 2. Considerando el problema 1, empezamos con un flujo cero en la red:

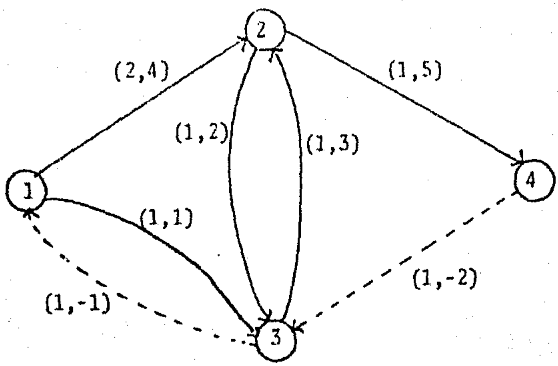
Ejemplo 2. Considerando el problema 1, empezamos con un flujo cero en la red:



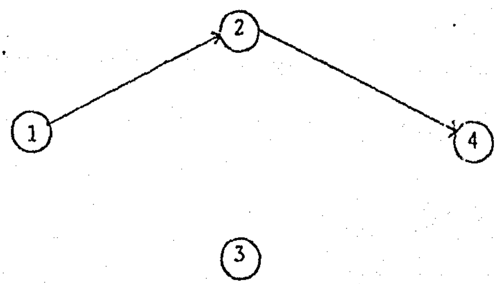
Si se define flujo igual a cero a través de todos los arcos de la red se obtiene un flujo de valor cero de costo mínimo puesto que la red incremental, con respecto a este flujo, coincide con la original y no existen en ella ciclos con costo negativo. El costo mínimo del nodo 1 al 4 es la trayectoria (1,3,4), y el aumento a lo largo de esta trayectoria produce un flujo de valor 1 y costo 3.



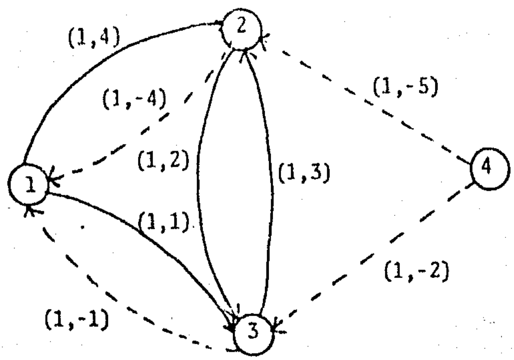
Por lo que la red incremental N' es:



Una trayectoria de costo mínimo del nodo fuente al nodo final en la red incremental N' es (1,2,4), con flujo 1 y costo 9.



La nueva red incremental N' es:



De este modo se obtiene el flujo a costo mínimo de valor v = 2, da el mismo flujo óptimo de valor 2 y costo 12 como el algoritmo del ciclo.

4.4 ALGORITMO PRIMAL-DUAL PARA EL PROBLEMA DE HITCHCOCK - ALGORITMO ALFABETA.

Un problema que es un caso especial del problema de flujo a costo mínimo, es analizado en esta sección, el problema de Hitchchock. Está motivado por la siguiente situación:

Tenemos m nodos fuentes, cada uno tiene una oferta de a_i unidades, $i = 1,\ldots,m$ y n nodos finales, cada uno tiene una demanda de b_j unidades, $j = 1,\ldots,n$. Además el costo por unidad del nodo i al j es c_{ij}. ¿Cómo satisfacemos la demanda a un costo mínimo?. Como un problema de programación lineal, tenemos lo siguiente.

<u>Definición</u>. Dados m y n enteros positivos; nodos de oferta a_i, $i=1,\ldots,m$; nodos de demanda b_j, $j=1,\ldots,n$ y costos $c_{ij} \geq 0$ $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$; el problema de Hitchcock es el siguiente problema de programación lineal con variables f_{ij}:

$$\min \sum_{ij} c_{ij} f_{ij}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{n} f_{ij} = a_i \qquad i=1,\ldots,m \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{ij} = b_j \qquad j=1,\ldots,n \qquad (9)$$

$$f_{ij} \geq 0$$

donde

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Note que podríamos haber formulado el problema con las desigualdades:

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \leq a_i \qquad i=1,\ldots,m \qquad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{ij} \geq b_j \qquad j=1,\ldots,n \qquad (11)$$

donde a_i esta disponible como oferta y b_j es la demanda que debe ser encontrada. Las igualdades (8) y (9) pueden ser usadas sín pérdida de generalidad, sin embargo, ya que siempre podemos introducir un nodo final ficticio (n+1) con demanda

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (12)$$

y costos

$$c_{i,\ n+1} = 0 \qquad i=1,\ldots,m$$

cuando todos los a_i y b_j son 1, el problema de Hitchcock es llamado el problema de asignación.

Nuestro plan es examinar el dual explícitamente. Asignamos variables α_i y β_j a las igualdades (8) y (9), respectivamente, tenemos el dual:

$$\max w = \sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j$$

$$\text{s.a} \quad \alpha_i + \beta_j \leq c_{ij} \qquad \forall\ i=1,\ldots,m \text{ y } j=1,\ldots,n \tag{13}$$

$$\alpha_i\ ,\ \beta_j \text{ no rest.}$$

Una solución inicial factible para el dual puede ser escrita inmediatamente.

$$\alpha_i = 0$$
$$\beta_j = \min_{1 \leq i \leq m} \{c_{ij}\} \tag{14}$$

Definimos el conjunto admisible IJ de índices de las variables en el primal restringido por los pares (i,j) para los cuales la igualdad se consigue en (11).

$$IJ = \{(i,j) \mid \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\}$$

El primal restringido se define como sigue:

$$\min \xi = \sum_{i=1}^{m+n} y_i$$

$$\text{s.a} \qquad \sum_j f_{ij} + y_i = a_i \quad i=1,\ldots,m \tag{15}$$

$$\sum_i f_{ij} + y_{m+j} = b_j \quad j=1,\ldots,n$$

$$y_i \geq 0 \quad i=1,\dots,m+n$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad (i,j)\varepsilon\ IJ$$

$$f_{ij} = 0 \quad (i,j)\notin IJ$$

donde hemos llamado a y_i, $i=1,\dots,m+n$ variables artificiales.

El costo en el primal restringido puede ser escrito como:

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j - 2 \sum_{(i,j)\varepsilon IJ} f_{ij} \tag{16}$$

Minimizando ξ es por lo tanto equivalente a maximizar el flujo total sobre los arcos admisibles. Debemos entonces reescribir el primal restringido sin variables artificiales pero con restricciones de desigualdad, es:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{(i,j)\varepsilon IJ} f_{ij} & \\ \text{s.a} & \sum_{j} f_{ij} \leq a_i & i=1,\dots,m \\ & \sum_{i} f_{ij} \leq b_j & j=1,\dots,n \\ & f_{ij} \geq 0 & (i,j)\varepsilon IJ \\ & f_{ij} = 0 & (i,j)\notin IJ \end{array} \tag{17}$$

Este es el problema de flujo máximo, mostrado en la siguiente figura:

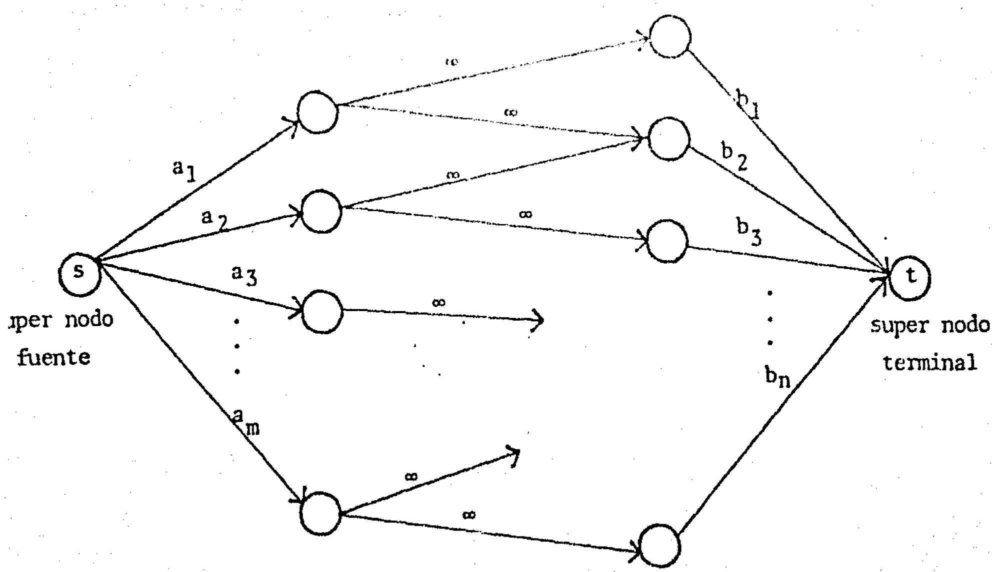


Figura 3. Un problema de flujo máximo equivalente a un problema primal restringido de Hitchchock; la capacidad infinita de los arcos corresponde a los índices admisibles en el dual.

Creamos un super-nodo fuente y un super-nodo terminal; del nodo fuente a cada uno de los m nodos terminales ponemos un arco con capacidad a_i; de cada uno de los n nodos terminales ponemos un arco con capacidad b_j. De un nodo fuente a un nodo terminal ponemos el arco (i,j) con capacidad infinita, exactamente cuando $(i,j)\varepsilon IJ$. Esto asegura que la variable f_{ij} puede ser mas grande que cero solamente cuando el par indexado (i,j) es admisible.

El resultado del algoritmo primal-dual, mejorando la solución dual factible α, β con el dual óptimo, se dice $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ del primal restringido. Necesitamos una terminología para discutir la aplicación del algoritmo de etiquetas al problema de Hitchcock.

<u>Definición</u>: Cuando conseguimos la optimalidad después de la aplicación del algoritmo de etiquetas para el primal restringido (15), decimos que no tenemos una trayectoria. Una no trayectoria, es:

$$I^* = \{i \mid \text{nodo fuente } i \text{ es etiquetado}\}$$

$$J^* = \{j \mid \text{nodo terminal } j \text{ es etiquetado}\}$$

<u>Lema</u>. Una no trayectoria es la solución del primal restringido (17), una solución óptima para el dual del primal restringido (15) esta dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i &= 1 & i &\in I^* \\ \bar{\alpha}_i &= -1 & i &\notin I^* \\ \bar{\beta}_j &= -1 & j &\in J^* \\ \bar{\beta}_j &= 1 & j &\notin J^* \end{aligned} \tag{18}$$

podemos mostrar que $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ son factibles en el dual del primal restringido y que su costo es óptimo para el primal restringido (15).

Si $\xi = 0$ una no trayectoria, hemos obtenido una solución óptima para nuestro problema original, con un valor del flujo:

$$\sum_{(i,j)\varepsilon IJ} f_{ij} = \sum_i a_i = \sum_j b_j$$

Si $\xi > 0$, tenemos dos casos en el algoritmo primal-dual:

<u>Caso 1</u>. $\bar{\alpha}_i + \bar{\beta}_j \leq 0 \quad \forall\ (i,j) \notin IJ$

<u>Caso 2</u>. $\bar{\alpha}_i + \bar{\beta}_j > 0$ para algún $(i,j) \notin IJ$.

El caso 1 implica que el primal fué infactible y por tanto debe ser imposible porque nuestra formulación del primal siempre tiene una solución factible. Por lo tanto el caso 2 se sostiene y calculamos:

$$\Theta_1 = \min_{i,j} \left[\frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{\bar{\alpha}_i + \bar{\beta}_j} \right]$$

$$\text{tal que} \quad \bar{\alpha}_i + \bar{\beta}_j > 0 \quad \text{y } (i,j) \varepsilon IJ \tag{19}$$

$$= \min_{\substack{i \varepsilon I^* \\ j \notin J^*}} \left[\frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{2} \right]$$

De la ecuación anterior se sigue que $\bar{\alpha}_i + \bar{\beta}_j$ puede exceder a cero solo cuando $i \,\varepsilon I^*$ y $j \notin J^*$, en tal caso es igual a 2; en este caso hemos asegurado que $(i,j) \notin IJ$, en otro caso j podría haber sido etiquetada. La nueva solución dual Π se obtiene por:

$$\alpha_i^* = \begin{cases} \alpha_i + \Theta_1 & i \,\varepsilon\, I^* \\ \alpha_i - \Theta_1 & i \notin I^* \end{cases}$$

$$\beta_j^* = \begin{cases} \beta_j - \Theta_1 & j \,\varepsilon\, J^* \\ \beta_j + \Theta_1 & j \notin J^* \end{cases} \tag{20}$$

Un arco que no lleve flujo puede hacerse inadmisible, justo como una columna no básica puede hacerse inadmisible en el al goritmo general primal-dual. Esto nos capacita para continuar etiquetando en el algoritmo de Ford-Fulkerson del flujo que fué óptimo en la no trayectoria previa. Esto determina completamente el algoritmo, para que alcancemos, el flujo maximo $\sum a_i = \sum b_j$. El algoritmo primal-dual para el problema de Hitchcock es el siguiente:

ALGORITMO ALFABETA.

Paso 1. Escoja α, β factibles en el dual, (13).

Paso 2. Resuelva el problema de flujo máximo del primal restringido, (15) usando solamente los arcos admisibles.

Paso 3. Encuentre los renglones y columnas etiquetadas en la no trayectoria, para I* y J*;

Paso 4. Calcule Θ_1 y actualice α, β; (19) y (20). Si el flujo es máximo pare. En otro caso ir al paso 2.

Combinando los costos en el problema de Hitchcock da el flujo máximo como un subproblema. El flujo máximo es resuelto combinando las capacidades, dando un subproblema para encontrar un flujo en la trayectoria de aumento. Hemos así usado la idea del primal-dual en una anidación para reemplazar dos vectores de datos, costos y capacidades, por dos lazos anidados en un problema combinado simple, como se muestra en la siguiente figura:

Hitchcock

Combinando costos

Flujo máximo

Combinando capacidades

Encontrar una trayectoria del nodo fuente al final

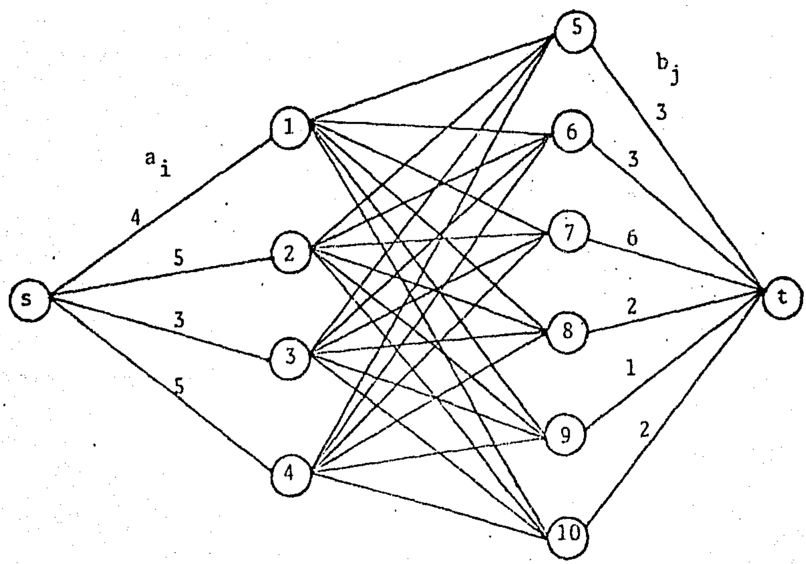
Figura 4. Una representación esquemática del algoritmo alfabeta como dos lazos anidados.

Si usamos una versión de Dijkstra que maneje arcos con costos negativos, resolvemos los subproblemas en ciclo ó construcción, entonces la misma interpretación se aplica para estos algoritmos.

<u>Ejemplo 3</u>. Considere el siguiente problema de Hitchcock. Se desea resolver usando el procedimiento primal-dual.

a_i \ b_j	3	3	6	2	1	2
4	5	3	7	3	8	5
5	5	6	12	5	7	11
3	2	8	3	4	8	2
5	9	6	10	5	10	9

Las entradas de la matriz son los costos c_{ij}. Gráficamente



Una solución factible inicial para el problema dual es:

$$\alpha_i = 0 \qquad\qquad i = 1,\ldots,4$$

$$\beta_j = \min_{1 \le i \le m} \{c_{ij}\} \qquad\qquad j = 1,\ldots,6$$

El conjunto admisible de índices IJ de las variables en el primal restringido, son los pares (i,j) para los cuales se obtienen la igualdad en el problema dual:

$$IJ = \{(i,j) \mid \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\}$$

$$= \{(3,1),(1,3),(3,3),(1,4),(2,5),(3,6)\}$$

De donde

							α_i
	5	3	7	3	8	5	0
	5	6	12	5	7	11	0
	2	8	3	4	8	2	0
	9	6	10	5	10	9	0
β_j	2	3	3	3	7	2	

Solución dual factible.

El tableau solución es construído con círculos en las mismas celdas correspondientes. Se procederá a encontrar la solución primal factible y el flujo máximo como se hizo en el ejemplo 1 de la sección 3.1 del capítulo III. La solución resultante es:

							a_i
		3		1			4
					1		5
	3						3
							5
b_j	3	3	6	2	1	2	

Solución primal factible

Para el procedimiento de etiquetas, los renglones con oferta excedente primero se etiquetan. En este caso los renglones 2 y 4. La etiqueta es (s,c) donde se denota el "nodo fuente" y c es igual al excedente de flujo. Después la columna 5 será etiquetada porque contiene un círculo en la celda del renglón etiquetado:

					(2,4)		a_i
		3		1			4
(s,4)					1		5
	3						3
(s,5)							5
b_j	3	3	6	2	1	2	

Solución primal óptima

En este caso no existe trayectoria, así el flujo es máximo. De cualquier modo debe ser actualizado y empezar otra iteración. Así $I^*=\{2,4\}$, $\bar{I}^*=\{1,3\}$, $J^*=\{5\}$, $\bar{J}^*=\{1,2,3,4,6\}$. Calculamos el valor de Θ_1.

$$\Theta_1 = \min\left\{ \frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{2} \middle| i\epsilon I^*,\ j\notin J^* \right\}$$

$$= \left\{ {}^3/_2,\ {}^3/_2,\ {}^9/_2,\ 1,\ {}^9/_2,\ {}^5/_2,\ {}^3/_2,\ {}^7/_2,\ 1,\ {}^7/_2 \right\} = 1$$

el mínimo es obtenido en las celdas 2,4 y 4,4. Entonces actualizamos las variables duales y añadimos un círculo en las celdas 2,4 y 4,4, quedando:

							α_i
	5	3	7	3	8	5	-1
	5	6	12	5	7	11	1
	2	8	3	4	8	2	-1
	9	6	10	5	10	9	1
β_j	3	4	4	4	6	3	

Solución dual factible

En el siguiente paso el tableau solución es modificado por los valores del flujo, pero actualizando los lugares de las celdas que corresponden a los lugares admisibles. Entonces el flujo máximo se encuentra para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

	(1,1)		(2,3)	(2,3)		a_i
(4,1)		3		1			4
(s,3)				1	1		5
	3						3
(s,5)							5
b_j	3	3	6	2	1	2	

Solución primal óptima.

Se etiquetan los renglones con excedente, en este caso son los renglones 2 y 4. Después las columnas 4 y 5 son etiquetadas porque contienen circulos en las celdas de los renglones etiquetados. El renglón uno es etiquetado porque contiene una celda con flujo positivo en la columna etiquetada. En este caso c = 1, ya que el flujo 1 es menor que la etiqueta c de 3 en la cuarta columna. Finalmente la columna 2 es etiquetada porque tiene un círculo en la celda del renglón uno. Como ya no se pueden etiquetar mas renglones y columnas, el flujo es máximo. Entonces actualizamos el dual $I^* = \{1,2,4\}$ y $\bar{J}^* = \{1,3,6\}$, el mínimo ocurre para $i = 2$ y $j = 1$, por lo que $\Theta_1 = \frac{1}{2}$. Las variables duales son revisadas de acuerdo a:

$$\alpha_i^* = \begin{cases} \alpha_i + \Theta_1 & i \in I^* \\ \alpha_i - \Theta_1 & i \notin I^* \end{cases}$$

$$\beta_j^* = \begin{cases} \beta_j - \Theta_1 & j \in J^* \\ \beta_j + \Theta_1 & j \notin J^* \end{cases}$$

Los nuevos valores junto con los coeficientes de costo son:

							α_i
	5	3	7	3	8	5	-.5
	5	6	12	5	7	11	1.5
	2	8	3	4	8	2	-1.5
	9	6	10	5	10	9	1.5
β_j	3.5	3.5	4.5	3.5	5.5	3.5	

Solución dual factible.

Note que hay una nueva celda admisible que aparece en el lugar 2,1. En el siguiente paso el tableau solución es modificado por los valores de flujo, pero actualizando los lugares de las celdas en círculo que corresponden a los lugares admisibles. Entonces el flujo máximo se encuentra para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

	(2,1)	(1,1)		(4,5)	(2.1)		a_i
(4,1)		3		1			4
(4,1)	3			1	1		5
			3				3
(s,5)							5
b_j	3	3	6	2	1	2	

Solución primal óptima.

Se etiqueta el renglón 4 que es el único que tiene excedente. La columna 4 es etiquetada por que contiene un círculo en la celda del renglón etiquetado. Los renglones 1 y 2 son etiquetados porque contienen una celda con flujo positivo en la columna etiquetada, en ambos c = 1, ya que el flujo 1 es menor que la etiqueta c de 5 en la cuarta columna. Finalmente las columnas 1 y 2 son etiquetadas porque contienen un círculo en la celda de los renglones 1 y 2. Como ya no se pueden etiquetar más renglones y columnas, el flujo es máximo. Entonces actualizamos el dual para $I^* = \{1,2,4\}$ y $\bar{J}^* = \{3,6\}$, el mínimo ocurre para $i=1$, y $j=6$, por lo que $\Theta_1 = 1$. Los nuevos valores junto con los coeficientes de costo son:

							α_i
	5	3	7	3	8	5	.5
	5	6	12	5	7	11	2.5
	2	8	3	4	8	2	-2.5
	9	6	10	5	10	9	2.5
β_j	2.5	2.5	5.5	2.5	4.5	4.5	

Solución dual factible.

Note que hay una nueva celda admisible en el lugar 1,6 y que perdemos una en el lugar 3,1. En el siguiente paso el tableau solución lo modificamos por los valores del flujo, pero actualizando los lugares de las celdas en círculo que corresponden a los lugares admisibles. Entonces el flujo máximo se encuentra para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

	(2,1)	(1,1)		(4,5)	(2,1)	(1,1)	α_i
(4,1)		3		-1		+	4
(4,1)	3			1	1		5
			3				3
(s,5)				+			5
β_j	3	3	6	2	1	2	

Solución primal factible.

Se etiquetan renglones y columnas como hasta ahora lo hemos hecho. Esta es una trayectoria porque la columna 6 tiene un excedente. El flujo es ajustado siguiendo la trayectoria hacia atras: +1 en la celda 1, 6; -1 en la celda 1, 4 y +1 en la 4,4. La trayectoria termina en el renglón 4 ya que el "nodo fuente" es etiquetado.

Después el tableau es ajustado y las etiquetas recalculadas. El resultado es:

	(2,1)			(4,4)	(2,1)		a_i
		3				1	4
(4,1)	3			1	1		5
			3				3
(s,4)				1			5
b_j	3	3	6	2	1	2	

Solución primal óptima.

En este caso no hay trayectoria, así el flujo es máximo. De cualquier modo debe ser actualizado y empezar otra iteración. Entonces actualizamos el dual para $I^* = \{2,4\}$ y $\bar{J}^* = \{2,3,6\}$, el mínimo ocurre para i = 2,4 y j = 2, por lo que $\theta_1 = 1$. Los nuevos valores junto con los coeficientes de costo son:

							α_i
	5	3	7	3	8	5	0
	5	6	12	5	7	11	3
	2	8	3	4	8	2	-3
	9	6	10	5	10	9	3
β_j	2	3	6	2	4	5	

Solución dual factible.

En el siguiente paso el tableau solución es modificado por los valores del flujo. Entonces el flujo máximo se encuentra para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

	(2,1)	(4,4)		(4,4)	(2,1)	(1,3)	a_i
(2,3)		-3				+1	4
(4,1)	3			1	1		5
			3				3
(s,4)		+		1			5
b_j	3	3	6	2	1	2	

Solución primal factible

Esta es una trayectoria porque la columna 6 tiene un excedente. El flujo es ajustado siguiendo la trayectoria hacia atrás: +1 en la cela 1,6; -1 en la celda (1,2) y +1 en la celda 4,2. La trayectoria termina en el renglón 4 ya que el "nodo fuente" es etiquetado.

Después el tableau es ajustado y las etiquetas recalculadas. El resultado es:

	(2,1)	(4,3)		(4,3)	(2,1)	(1,2)	a_i
(2,2)		2				2	4
(4,1)	3			1	1		5
			3				3
(s,3)		1		1			5
b_j	3	3	6	2	1	2	

Solución primal óptima

En este caso no hay trayectoria, así el flujo es máximo. Entonces actualizamos el dual para $I^* = \{1,2,4\}$ y $\bar{J}^* = \{3\}$, el mínimo ocurre para $i = 1,4$, $j = 3$, por lo que $\theta_1 = \frac{1}{2}$. Los nuevos valores junto con los coeficientes de costo son:

							α_i
	5	3	7	3	8	5	.5
	5	6	12	5	7	11	3.5
	2	8	3	4	8	2	-3.5
	9	6	10	5	10	9	3.5
β_j	1.5	2.5	6.5	1.5	3.5	4.5	

Solución dual factible.

En el siguiente paso el tableau solución lo modificamos por los valores de flujo. Entonces el flujo máximo se encuentra para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

							a_i
		2				2	4
	3			1	1		5
			3				3
		1	3	1			5
b_j	3	3	6	2	1	2	

Solución primal óptima

Como el flujo máximo no tiene excedente, entonces la solución que se tiene es factible para el problema original y por tan-

4.5 UNA TRANSFORMACION DE FLUJO A COSTO MINIMO PARA HITCHCOCK.

El problema de Hitchocock es un caso especial del problema de flujo a costo mínimo. Esto es inmediato de la construcción en la figura 3 con todos los arcos admisibles. Simplificamos la oferta de todos los nodos fuentes con un nodo super-fuente recogemos el flujo de todos los nodos terminales con un nodo super-terminal. Significa que dado un ejemplo de flujo a costo mínimo, podemos construir un ejemplo de Hitchcock que tiene la misma solución. La transformación del problema de redes a costo mínimo en uno de Hitchchock es como sigue:

Flujo a cósto mínimo	Hitchocock
arco (i,j)	nodo fuente ij
nodo i	nodo terminal i
costo c_{ij}	arco (ij,j) con costo c_{ij} y capacidad infinita
- - -	arco (ij,i) con costo cero y capacidad infinita
capacidad b_{ij}	oferta b_{ij} al nodo fuente ij

Para especificar la demanda, necesitamos primero la notación

$$b_{iv} = \sum_{\substack{\text{todo } j \text{ tal que} \\ (i,j) \in E}} b_{ij} \qquad (21)$$

Esto es, b_{iv} es la capacidad total fuera del nodo i.

La demanda al nodo terminal i es entonces:

$$\begin{array}{ll} b_{iv} - v_0 & i = s \\ b_{iv} + v_0 & i = t \\ b_{iv} & i \neq s,t \end{array} \qquad (22)$$

La construcción está ilustrada en la siguiente figura:

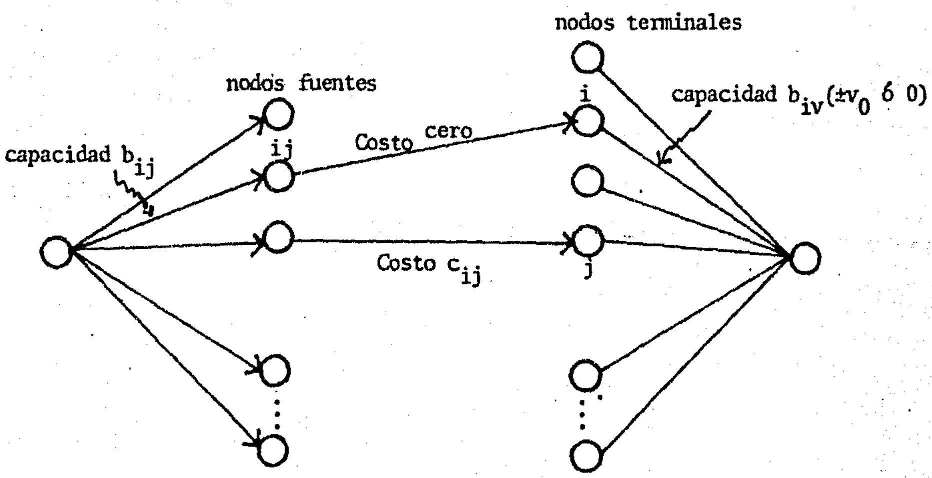


Figura 5. El problema Hitchcock construído de un problema de flujo a costo mínimo.

El problema de Hitchcock es encontrar un flujo $f_{ij,k}$ tal que

$$f_{ij,j} + f_{ij,i} = b_{ij} \qquad (23)$$

(la oferta al nodo fuente ij es usada completamente);

$$\sum_j (f_{ij,i} + f_{ji,i}) = \begin{cases} b_{iv} - v_0 & i = s \\ b_{iv} + v_0 & i = t \\ b_{iv} & i \neq s,t \end{cases} \qquad (24)$$

(la demanda en el nodo i está llena); y

$$f_{ij,k} \geq 0 \qquad \forall\ i,j,k \qquad (25)$$

en

$$\min \sum_{\substack{\text{todos los} \\ \text{nodos fuente} \\ ij}} f_{ij,j}\, c_{ij,j} \qquad (26)$$

oferta

Note que la foerta total es igual a la demanda total en Hitchcock.

<u>Lema</u>. El problema original de flujo a costo mínimo y el problema construído de Hitchcock son equivalentes en el sentido de que un flujo factible en cualquiera de los dos, corresponde a un flujo factible en el otro con el mismo costo.

<u>Prueba</u>. Sea f_{ij} un flujo factible en el problema de flujo a costo mínimo. Entonces, en el problema de Hitchcock, si tomamos:

$$f_{ij,j} = f_{ij} \qquad \geq 0 \tag{27}$$

$$f_{ij,i} = b_{ij} - f_{ij} \geq 0 \tag{28}$$

estos flujos satisfacen la ecuación (21). Sustituyendo en la ecuación (22), obtenemos:

$$\sum_j (b_{ij} - f_{ij} + f_{ji}) = b_{iv} + \sum_j (f_{ji} - f_{ij})$$

$$= \begin{cases} b_{iv} - v_0 & i = s \\ b_{iv} + v_0 & i = t \\ b_{iv} & i \neq s,t \end{cases} \tag{29}$$

así requerido.

Luego, suponemos que tenemos un flujo factible $f_{ij,k}$ en el problema de Hitchcock. Este es diferente de cero solo cuando $k = i$ ó j. En el problema original de flujo a costo mínimo, definimos:

$$f_{ij} = f_{ij,j} \qquad (30)$$

Entonces $0 \leq f_{ij} \leq b_{ij}$ por la oferta en el nodo fuente ij. También, el flujo neto fuera del nodo i en el problema de flujo a costo mínimo es:

$$\sum_j f_{ij,j} - \sum_j f_{ji,i} = \sum_j (b_{ij} - f_{ij,i}) - \sum_j f_{ji,i}$$

$$= b_{iv} - \sum_j (f_{ij,i} + f_{ji,i}) \qquad (31)$$

$$= \begin{cases} v_0 & i = s \\ -v_0 & i = t \\ 0 & i \neq s,t \end{cases}$$

en donde utilizamos las ecuaciones (23) y (24), por tanto todas las restricciones se satisfacen. Finalmente, es fácil ver que los costos de los flujos, los cuales corresponden a las ecuaciones (27) y (30) son iguales en sus respectivos problemas. ∎

APENDICE A

EL METODO SIMPLEX.

La idea del método simplex es avanzar de una solución básica factible (que es un punto extremo) de un conjunto de restricciones de un problema en forma estándar a otro, de tal manera de que se vaya decrementando el valor de la función objetivo hasta alcanzar el mínimo.

Dado el siguiente problema de programación lineal, desarrollamos el método simplex:

$$
\begin{aligned}
\min\ & c^t x \\
\text{s.a}\ & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

donde x es un vector columna de n componentes

c^t es un vector renglón de n componentes

A es una matriz de mxn y

b es un vector columna de m componentes.

Suponemos que empezamos con una solución básica factible y que el tableau correspondiente a $Ax = b$ está en forma canónica para esta solución. Adjuntamos un renglón es la parte inferior que consiste en los coeficientes de costo y el negativo de la función de costos. El resultado es un tableau simplex.

Esto es, si suponemos que las variables básicas son (en orden) $x_1, x_2, \ldots, x_m$, el tableau simplex toma la forma inicial mostrada en la siguiente figura:

a_1	a_2	$\cdots$	a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n	b
1	0	$\cdots$	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	y_{1n}	y_{10}
0	1	$\cdots$	.	.	.		.		.	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$									
0	0		.	$y_{i,m+1}$	y_{2im+2}	$\cdots$	y_{ij}	$\cdots$	y_{in}	y_{i0}
$\vdots$	$\vdots$									
0	0		1	$y_{m,m+1}$	$y_{m\ m+2}$	$\cdots$	$y_{m\ j}$	$\cdots$	y_{mn}	y_{m0}
0	0		0	r_{m+1}	r_{m+2}	$\cdots$	r_j	$\cdots$	r_n	$-z_0$

Figura 1. Tableau canónico simplex.

La solución básica correspondiente a este tableau es:

$$x_i = \begin{cases} y_{i0} & 0 \leq i \leq m \\ 0 & m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

la cual suponemos que es factible, esto es, $y_{i0} \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,m$. El correspondiente valor de la función objetivo es z_0.

Los coeficientes de costo r_j indican si el valor de la función objetivo se incrementará o decrementará si x_j es pivoteado en la solución. Si estos coeficientes son no-negativos, entonces la solución es óptima. Si algunos son negativos, se puede mejorar (suponiendo no degeneración). Llevando las componentes correspondientes en la solución. Cuando mas de uno de los coeficientes de costo es negativo, se debe seleccionar uno de ellos para determinar en cual columna pivotear. Comúnmente se escoge el más negativo.

Consideramos a z como una variable adicional y

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - z = 0$$

como otra ecuación. Una solución básica para el sistema aumentado será m+1 variables básicas, pero puede requerirse que z sea una de ellas. Por esta razón no es necesario añadir la columna correspondiente a z, ya que podría ser $(0,0,\ldots,0,1)$. De este modo, inicialmente, el último renglón que consiste de los c_i y del lado derecho de ceros puede estar en el arreglo en forma estándar para representar esta ecuación adicional. Usando en el pivote operaciones elementales, los elementos en este renglón correspondiente a las variables básicas puede ser reducido a cero. Esto es equivalente a transformar la ecuación adicional a la forma

$$r_{m+1}\, x_{m+1} + r_{m+2}\, x_{m+2} + \ldots + r_n x_n - z = - z_0$$

Esto debe ser equivalente a

$$c^t x = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j$$

y por tanto los r_j obtenidos son los coeficientes de costo. Así, el último renglón puede ser tratado operacionalmente como otro renglón más: comenzado con los c_j y reduciendo los términos correspondientes de las variables básicas a cero con operaciones elementales por renglón.

Después se selecciona una columna q en la cual se pivotea, la selección final de los elementos pivote se hace calculando la razón y_{i0}/y_{iq} para los elementos positivos y_{iq}, $i=1,2,\ldots,m$, de la q-ésima columna y seleccionando el elemento p que da la razón mínima. Pivoteando sobre estos elementos mantendremos factibilidad así como (suponiendo no degeneración) decrementar el valor de la función objetivo. Si no hay elementos no-negativos en la columna, el problema es no-acotado. Después actualizamos el tableau con y_{pq} como pivote y transformamos el último renglón de la misma manera que los otros (excepto el renglón q), obtenemos un nuevo tableau en forma canónica. Los nuevos valores de la función objetivo otra vez aparecen en la parte inferior derecha del tableau.

ALGORITMO SIMPLEX.

Paso 1. Forme un tableau como en la figura 1, correspondiente a la solución básica factible.

Paso 2. Si cada $r_j \geq 0$, pare; la solución básica factible es óptima.

Paso 3. Seleccione q tal que $r_q < 0$ para determinar cual variable no básica entra a la base.

Paso 4. Calcule y_{i0}/y_{iq} para $y_{iq} > 0$, $i=1,2,\ldots,m$. Si no es $y_{iq} > 0$, pare; el problema es no acotado. En otro caso, seleccione p como el índice i correspondiente al cociente mínimo.

Paso 5. Pivotee sobre el pq-ésimo elemento, actualizando todos los renglones, incluyendo el último. Regrese al paso 2.

El problema termina solamente si la optimalidad es alcanzada o se descubre no-acotamiento. Si ninguna de las condiciones anteriores se dan, entonces la función objetivo es decrementada. Ya que hay un número finito de posibles soluciones básicas factibles, y no se repite la base porque la función objetivo se decrementa, el algoritmo debe alcanzar una base satisfaciendo una de las dos condiciones.

Ejemplo. Considere el problema:

$$\max \quad 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Para transformar el problema a la forma estándar, aplicamos el procedimiento simplex, cambiamos de maximización a minimización multiplicando la función objetivo por menos uno, e introducimos tres variables de holgura x_4, x_5, x_6. Entonces tenemos el siguiente talbeau inicial:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
	2	1	1	1	0	0	2
	1	2	3	0	1	0	5
	2	2	1	0	0	1	6
r^t	-3	-1	-3	0	0	0	0

Primer tableau

El problema está en forma canónica con tres variables de holgura sirviendo como variables básicas. Tenemos en este punto $r_j = c_j - z_j = c_j$, ya que los costos de las variables de holgura son cero. Aplicando el criterio para seleccionar una columna, se muestran en las tres primeras columnas que podrían mejorar la solución. En cada una de estas columnas el pivote apropiado es determinado las razones y_{i0}/y_{ij} y seleccionando uno, el más pequeño positivo. Los tres pivotes son permitibles y estan en un círculo sobre el tableau Es necesario determinar solo uno. Para este ejemplo seleccionamos el 1:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
2	1	1	1	0	0	2
-3	0	1	-2	1	0	1
-2	0	-1	-2	0	1	2
-1	0	-2	1	0	0	2

Segundo tableau

Note que la función objetivo - usando el negativo de la original - se ha decrementado de cero a menos dos. Otra vez el pivote es 1:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
5	1	0	3	-1	0	1
-3	0	1	-2	1	0	1
-5	0	0	-4	1	1	3
-7	0	0	-3	2	0	4

Tercer tableau

El valor de la función objetivo tiene ahora un decremento de menos cuatro y debemos pivotear en la primera o cuarta columna. Seleccionamos 5:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
1	$1/5$	0	$3/5$	$-1/5$	0	$1/5$
0	$3/5$	1	$-1/5$	$2/5$	0	$8/5$
0	1	0	-1	0	1	4
0	$7/5$	0	$6/5$	$3/5$	0	$27/5$

Cuarto tableau

Como el último renglón no tiene elementos negativos, concluímos que la solución correspondiente al cuarto tableau es óptima. Así $x_1 = 1/5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8/5$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 4$ es la solución óptima con una valor de $-27/5$ en la función objetivo.

APENDICE B

CONCEPTOS BASICOS DE REDES.

Definición. Una gráfica consiste de una colección finita de elementos llamados nodos y un subconjunto formado por pares de nodos llamados arcos.

Los nodos de una fráfica generalmente son numerados, esto es, 1,2,3,...,n. Un arco entre los nodos i y j, está representado por el par (i,j). Los nodos están designados por círculos, con su número correspondiente. Los arcos están representados por líneas entre los nodos. Una gráfica es representada de la siguiente manera:

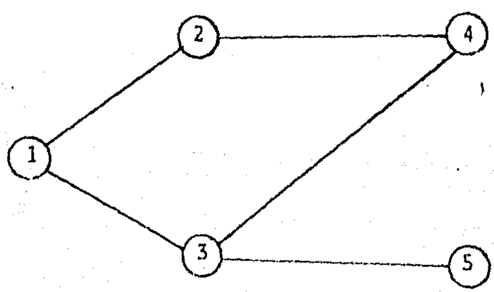


Figura 1. Una gráfica

Hay otras definiciones elementales asociadas con las gráficas que describen su estructura. Una cadena entre los nodos i y j es una secuencia de arcos conectados. La secuencia debe tener la forma (i, k_1), (k_1, k_2), (k_2, k_3),... .., (k_m, j). En la figura 1 (1,2), (2,4), (4,3) es una cadena entre los nodos 1 y 3. Si una dirección de movimiento a lo largo de una cadena es especificado - del nodo i al j - es llamada una ruta de i a j. Un ciclo es una cadena que empieza en el nodo i, y termina en el nodo i. La cadena (1,2), (2,4), (4,3) y (3,1) es un ciclo para la gráfica en la figura 1.

Una gráfica es conectada si hay una cadena entre cada par de nodos. Así la gráfica de la figura 1 es conectada. Una gráfica es un árbol si es conectada y no tiene ciclos. Eliminando algunos de los arcos (1,2), (1,3), (2,4) ó (3,4) podríamos transformar la gráfica de la figura 1 en un árbol. Algunas veces consideramos un árbol en una gráfica G, el cual es precisamente un árbol construído del subconjunto de arcos de G. Tal árbol es un árbol de expansión si toca todos los nodos de G. Es fácil ver que una gráfica es conectada si y sólo si contiene un árbol de expansión.

Nuestro principal interés está sobre las gráficas dirigidas, en la cual un sentido de orientación está dado por un arco.

En este caso un arco es considerado un par ordenado de nodos (i,j) y decimos que el arco va del nodo i al nodo j como se muestra de la siguiente forma:

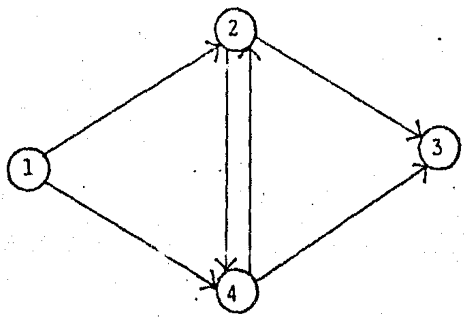


Figura 2. Una gráfica dirigida.

Cuando trabajamos con gráficas dirigidas algunos pares de nodos pueden tener un arco en ambas direcciones. Indicando ambos arcos en tal caso que es equivalente a un arco no dirigido. Las notaciones de ruta y ciclos pueden ser aplicadas a las gráficas dirigidas. En resúmen decimos que el nodo j es alcanzable al i si hay una ruta del nodo i al nodo j.

Para la representación de una gráfica dirigida, caracterizada por la figura 2, otro método común de representación está en términos de una matriz de incidencia nodos-arcos.

Esta es construída listando los nodos verticalmente y los arcos horizontalmente. Entonces en la columna del arco (i,j) está un +1 en la posición correspondiente al nodo i y un -1 en la posición correspondiente al nodo i y un -1 en el nodo j. La matriz de incidencia para la gráfica de la figura 2 es la siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{ccccc} (1,2) & (1,4) & (2,3) & (2,4) & (4,2) \end{array}$$

	(1,2)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(4,2)
1	1	1			
2	-1		1	1	-1
3			-1		
4		-1		-1	1

Toda la información acerca de la estructura de la gráfica está en la matriz de incidencia nodos-arcos. Esta representación es muy usual para propósitos computacionales, ya que es muy fácil almacenarlos en una computadora.

FLUJOS EN REDES.

Una gráfica es una manera efectiva para representar la comunicación estructurada entre nodos. Cuando existe la posibilidad de flujos en los arcos, nos referimos a una gráfica dirigida como una red. En aplicaciones, las redes representan un sistema de transporte o una red de comunicación, o simplemente una representación para propósitos matemáticos (tal como en el problema de asignación).

Un flujo en un arco dirigido (i,j) es un número $x_{ij} \geq 0$. Flujos en los arcos de la red deben articularse satisfaciendo un criterio de conservación en cada nodo. Específicamente, a menos de que el nodo sea un nodo fuente o final, el flujo no puede ser creado o perdido en un nodo; el flujo total que entra en un nodo debe ser igual al flujo total que sale del nodo. Así en cada nodo i

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = 0$$

La primera suma es el flujo total de i, y la segunda suma es el flujo total a i (desde luego x_{ij} no existe si no hay un arco de i a j). Para que flujos diferentes de cero existan en una red sin nodo fuente o final, la red debe tener un ciclo.

En muchas aplicaciones, algunos nodos son designados nodo fuente o final (o alternativamente nodo oferta o nodo demanda). El flujo neto fuera de un nodo fuente debe ser positivo, y el nivel de su flujo neto puede ser fijo o variable, dependiendo de la aplicación. Similarmente, el flujo neto dentro de un nodo final debe ser positivo.

CONCLUSIONES.

Una de las ramas mas interesantes y estudiadas de la investigación de operaciones es la relacionada con la programación lineal y sus estructuras especiales. Una de estas estructuras es la programación en redes de flujo, esto es, problemas lineales que pueden representarse y analizarse en términos de redes. Como es de esperarse, la especialización de los métodos generales de la programación lineal al caso de problemas de redes, resulta en nuevos y eficientes métodos de análisis que en años recientes se han popularizado.

En este trabajo se han analizado las bases generales de la programación lineal y, en particular, se han descrito las dos lineas básicas de métodos de solución: los métodos primales y los métodos primales-duales. La especialización de los métodos primales a problemas básicos de redes es conocida y una descripción breve de los mismos ha sido desarrollada en este trabajo. Sin embargo, la especialización de los métodos primales-duales a problemas básicos de redes es poco conocida en la literatura.

La contribución que se tiene en este trabajo es la unificación y comparación de los métodos primales-duales especializados a problemas básicos de redes. Métodos clásicos de solución como el de ciclos negativos y ruta más corta-flujo máximo se ha demostrado que son casos particulares de la especialización del método primal-dual y su convergencia es sencilla de demostrarse, evitandose discusiones tediosas de teoría de gráficas.

Entre los aspectos a extender de este trabajo se tienen la tecnología de implantación de los algoritmos de programación lineal especializados a redes y su respectiva comparación.

B I B L I O G R A F I A

[1]. Bazaraa, M.S. y Jarvis, J.J.
"Programación lineal y Flujo en Redes".
Limusa. 1981.

[2]. Ford, L.R. y Fulkerson D.R.
"Flows in Networks".
Princenton. 1962.

[3]. Luenberger, D.G.
"Linear and Nonlinear Programming"
Addison Wesley. 1984.

[4]. Murty, K.G.
"Linear and Combinatorial Programming"
John Wiley. 1976.

[5]. Papadimitriou, C.H. y Steiglitz, K.
"Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity".
Prentice Hall. 1982.

[6]. Prawda, J.
"Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones". (Vol. I).
Limusa. 1982.