0 1168
1ej. 1

TEORIA GENERAL DE SISTEMAS:
TEORIA DE RELACIONES Y APLICACIONES

JOSE RAUL AGUILERA OSEGUERA

TESIS

Presentada a la División de Estudios de
Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

de la
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener
el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA
(INVESTIGACION DE OPERACIONES)

CIUDAD UNIVERSITARIA

Septiembre 1986

INDICE

P R O L O G O

Este trabajo es el resultado de varios factores. En primer lugar mi convicción de que es posible conocer las bases comunes en las que se sustentan una serie de temas aparentemente muy diversos, como la Teoría de Decisiones, los Procesos Estocásticos y los sistemas llamados humanos. En segundo lugar, relacionado con lo anterior, a través del curso Teoría Matemática de Sistemas (semestre 85-2) me dí cuenta que la Teoría de Relaciones ha sido insuficientemente explotada, para hacer claros los conceptos que intervienen en temas como los antes señalados. Cabe observar que en la literatura examinada encontré únicamente desarrollos parciales ò exclusivamente especializados en un tema, sin la visión de conjunto deseada.

Agradezco al M. en I. Servio Tulio Guillen, su orientación en la realización de esta tesis y el haberme ayudado en la clarificación de algunos de los conceptos que aquí se presentan.

INTRODUCCION

Uno de los propósitos de la Teoría General de Sistemas es buscar la unidad de las ciencias a través de modelos conceptuales aplicables a diversas disciplinas. Se ha observado que ciertas propiedades de los sistemas no dependen de la naturaleza específica de éstos, sino que son comunes a sistemas de muy distinta naturaleza*. Estas propiedades comunes, conocidas como analogías entre sistemas, se basan en las semejanzas de los modelos simbólicos que pueden describir a los sistema en cuestión.

El objetivo principal de esta tesis es mostrar que la Teoría de Relaciones puede ocupar un lugar fundamental en la Teoría General de Sistemas, porque a partir de ella se pueden derivar temas aparentemente disímbolos como la Teoría de Decisiones, los Procesos Estocásticos, la Lógica de Circuitos, la Teoría de la Medición entre otros. Por su amplitud, en este trabajo no se cubren todas las aplicaciones.

Para lograr este objetivo, en el capítulo 1 se muestran los elementos básicos de la Teoría de relaciones; en el 5 se introducen las condiciones adicionales sobre las relaciones binarias para que formen retículas y después se considera un ca_

*Ver las referencias Nos[4], [11] y [12].

so particular muy importante de retícula, que es el álgebra booleana. En el capítulo 2 se presentan tres aplicaciones, la primera se refiere a la minimización del número de estados de un sistema o circuito lógico. La segunda es la partición de un conjunto, lo cual es sumamente usado en la práctica, y en la tercera es la clasificación de los conceptos científicos, siguiendo las ideas de Jesús Mosterin[22]. Los capítulos 3 y 4 muestran la utilidad de las relaciones al considerar el estado de un sistema dinámico y en la toma de decisiones, respectivamente. En los dos últimos capítulos, 6 y 7, se incluyen cuatro aplicaciones de las álgebras booleanas, que son: álgebra de proposiciones, álgebra de interruptores, álgebra de conjuntos y procesos estocásticos.

Aunque son temas de gran interés, pero por no estar aún suficientemente desarrollados, aquí no se consideran, entre otros, los siguientes: procesos de equilibrio y redes de comunicación en sistemas humanos[6].

CAPITULO 1

TEORIA DE RELACIONES

En este capítulo se dan las definiciónes, propiedades y conceptos básicos de las principales relaciones binarias. Se consideran relaciones tanto simples como compuestas. Se muestran mediante una tabla, las conexiones existentes entre las relaciones simples. Al final del capítulo se indican algunas maneras de representar las relaciones. El material mostrado aquí, es fundamental para entender los siguientes capítulos.

1.1. GENERALIDADES

Definición. Una relación n-ARIA R sobre los conjuntos $E_1, E_2, \dots, E_n$ es un subconjunto de $E_1 \times E_2 \times \dots E_n$*.

En el caso particular de tener sólo dos conjuntos E_1, E_2 SE TIENE UNA RELACION BINARIA; la cual es un subconjunto de $E_1 \times E_2$. Este tipo de relaciones son las que vamos a manejar aquí. Nos referiremos a ellas simplemente con el nombre de relaciones. Nótese que una relación binaria R también puede ser un subconjunto de $E_1 \times E_1$. De lo hasta aquí dicho, podemos ver que una función es una relación en

*$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ representa el producto cartesiano de dichos conjuntos.

$E_1 \times P(E_1)$*; con la característica de que a cada elemento de E_1 le corresponde uno y sólo uno de $P(E_1)$.

DOMINIO DE DEFINICION. Def. Se llama dominio de definición de R, el conjunto de las primeras coordenadas de R; ésto es

$$\mathcal{D} = \{a \mid a \in E_1, (a,b) \in R\}$$

CODOMINIO. Def. Se llama codominio de R, el conjunto de los segundos elementos de R, o sea

$$F = \{b \mid b \in E_2, (a,b) \in R\}$$

CORTE DE UNA RELACION. Def. Se denomina corte de una relación R en $x \in E_1$, al conjunto formado por los elementos $y \in E_2$ tales que $(x,y) \in R$, ésto es

$$R(x) = \{y \mid x \in E_2, (x,y) \in R\}$$

También de forma equivalente, se define el corte de una relación R según $y \in E_2$.

CONJUNTO COCIENTE POR CORTE. Def. Es el conjunto de todos los cortes $R(x)$, para todos los elementos de $x \in E_1$ y su notación es E_2/R, o sea

$$E_2/R = \{R(x) \mid x \in E_1\}$$

*$P(E_1)$ representa el conjunto potencia de E_1.

De la misma manera se define E_1/R.

La relación Universal se define como $U = E_1 \times E_2$, la Vacía como $\phi = U^c$ y la relación de Diagonal como $\Delta = \{(x,x) \mid x \in E_1\}$.

1.2. OPERACIONES

Una relación ha sido definida como un conjunto de pares ordenados. Por lo tanto es posible definir las siguientes operaciones:

1) UNION DE RELACIONES. Sean R y S dos relaciones sobre E_1 y E_2, entonces la unión viene dada por:

$$R \cup S = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \ \text{ó} \ (x,y) \in S\}$$

2) INTERSECCION DE RELACIONES. Se define como

$$R \cap S = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \ \text{y} \ (x,y) \in S\}$$

3) RELACION COMPLETO DE R. Se define como

$$R^c = \{(x,y) \mid (x,y) \in E_1 \times E_2,\ (x,y) \notin R\}$$

4) RELACION RECIPROCA DE R. Se define como la relación sobre $E_2 \times E_1$, por

$$R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$$

5) RELACION DIFERENCIA. Viene dada por

$$R - S = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \ \text{y} \ (x,y) \notin S\}$$

6) RELACION PRODUCTO O COMPOSICION. Si $R\subset E_1 \times E_2$ y $S\subset E_2\times E_3$ entonces se define la relación producto $RS\subset E_1\times E_3$, como:

$$RS=\{(x,z)\mid \exists y\in E_2 \Rightarrow (x,y)\in R \text{ y } (y,z)\in S\}$$

7) RELACION SUMA. Si $R\subset E_1\times E_2$ y $S\subset E_2\times E_3$ entonces se define la relación suma $R+S\subset E_1\times E_3$, como:

$$R+S=\{(x,z)\mid \forall y\in E_2 \Rightarrow (x,y)\in R \text{ ó } (y,z)\in S\}$$

8) RELACION KR. Si $R\subset E_1\times E_1$, se define la relación KR como

$$KR=R+R+\cdots+R \qquad (K=2,3,\ldots)$$

9) RELACION R^K. Si $R\subset E_1\times E_1$, se define la relación R^K como

$$R^K=RR^{K-1} \qquad (K=2,3,\ldots)$$

1.3. PROPPIEDADES DE LAS OPERACIONES

Con base en las definiciones anteriores, se pueden demostrar las siguientes propiedades, suponiendo que las operaciones en las que intervienen las relaciones R, S, T, V están bien definidas*:

1) $R(ST)=(RS)T=RST$ (asociatividad)

2) $R\phi=\phi$, $\phi R=\phi$

3) $R\Delta=R$, $\Delta R=R$

4) $(R\subset S, T\subset V)\Rightarrow RT\subset SV$, $A\subset B\Rightarrow A^2\subset B^2$

*Ver referencia #2

5) $(R\subset S, T\subset V) \Rightarrow R+T\subset S+V$

6) $R'\subset S' \Leftrightarrow R\subset S$

7) $R\subset S \Rightarrow TRV\subset TSV$ (homogeneidad)

8) $R(S\cup T)=RS\cap RT$, $(R\cup S)T=RT\cup ST$ (distribitividad), y en general para un número finito o contable de uniones:

$(\bar{\cup}_i R_i)(\bar{\cup}_j S_j)=\bar{\cup}_{i,j} R_i S_j$

9) $(R\cup S)'=R'\cup S'$, $(R\cap S)'=R'\cap S'$

10) $(\tilde{R})'=(\tilde{R'})=\tilde{R}'$

11) $(RS)'=(R')(S')$, $(R+S)'=S'+R'$, $(A^2)'=(A')^2=A'^2$

12) $(\widetilde{RS})=\tilde{R}+\tilde{S}$, $(\widetilde{R+S})=\tilde{R}\tilde{S}$

13) $(R\cup S)+(R\cup S)=(R+R)\cup(S+S)$

14) $(R\cap S)^2=R^2\cap S^2$

15) $\Delta'=\Delta$, $\emptyset'=\emptyset$, $U'=U$

Las siguientes propiedades son referidas a un conjunto E:

16) Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes entre sí:

$AB\cap C\neq\emptyset$ $C'A\cap B'\neq\emptyset$, $BC'\cap A'\neq\emptyset$

17) $(\tilde{A})^2\neq(\tilde{A}^2)$, $(\tilde{A}^2)=2\tilde{A}$

18) $\tilde{A}^2A'\subset\tilde{A}$ $(\Leftrightarrow A\subset A^2+\tilde{A}^2)$

1.4. RELACIONES SIMPLES

A continuación se definen las principales relaciones que contienen una sola característica; de ahí el nombre de simples:

1) RELACION REFLEXIVA. Def. Una relación R, definida en un conjunto E, es reflexiva si cualquiera que sea el elemento x del conjunto, la pareja (x,x) verifica la relación R. Entonces en E:

$$R \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow \forall x \in E,\ (x,x) \in R$$

$$\bullet\ R \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow \Delta \subset R$$

2) RELACION SIMETRICA. Una relación binaria R, definida en un conjunto E, es simétrica si cualquiera que sea la pareja (x,y) que verifica la relación, entonces la pareja (y,x) también la verifica. O sea

$$R \text{ es simétrica} \Leftrightarrow (xRy \Rightarrow yRx),\ \forall x,y \in E$$

$$\bullet\ R \text{ es simétrica} \Leftrightarrow R^{-1} \subset R \quad (\Leftrightarrow R^{-1} = R)$$

3) RELACION ANTISIMETRICA. Una relación binaria R, definida en un conjunto E, es antisimétrica si toda pareja (x,y) y su transpuesta (y,x) verifican simultáneamente la relación; entonces x es igual a y, es decir

$$R \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow [(xRy,\ yRx) \Rightarrow x = y]\ \forall x,y \in E$$

$$\bullet\ R \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subset \Delta$$

4) RELACION TRANSITIVA. Una relación binaria R, definida en un conjunto E, es transitiva si cualquiera que sean las parejas (x,y) y (y,z) que verifiquen la relación, entonces la pareja (x,z) también la verifica. O sea

$\mathcal{R}$ es transitiva $\Leftrightarrow [(xRy, yRz) \Rightarrow xRz] \; \forall x,y,z \in E$

• $\mathcal{R}$ es transitiva $\Leftrightarrow R^2 < R$

5) RELACION NEGATIVA TRANSITIVA. Una relación es negativa transitiva si, cualesquiera que sean las parejas (x,y) y (y,z) que no verifiquen la relación, entonces la pareja (x,z) también no la verifica. Esto es

$\mathcal{R}$ es negativa transitiva $\Leftrightarrow [(x\tilde{R}y, y\tilde{R}z) \Rightarrow x\tilde{R}z] \forall x,y,z \in E$

• $\mathcal{R}$ es negativa transitiva $\Leftrightarrow R < R+R$ ($\Leftrightarrow \tilde{R}$ es transitiva)

6) RELACION ASIMETRICA. Una relación binaria $\mathcal{R}$, definida en un conjunto E, es asimétrica si cualquiera que sea la pareja (x,y) que verifica la relación, entonces la pareja (y,x) no la verifica. O sea

$\mathcal{R}$ es asimétrica $\Leftrightarrow (xRy \Rightarrow y\tilde{R}x) \; \forall x,y \in E$

• $\mathcal{R}$ es asimétrica $\Leftrightarrow R^2 < \tilde{\Delta}$ ($\Leftrightarrow R' < \tilde{R}$)

7) RELACION DEBILMENTE CONECTADA. Una relación binaria $\mathcal{R}$, definida en un conjunto E, es débilmente conectada si para (si para) todo $x \neq y$ se tiene que $(x,y) \in R$ o $(y,x) \in R$. Esto es:

$\mathcal{R}$ es débilmente conectada $\Leftrightarrow [x \neq y \Rightarrow (xRy \text{ o } yRx)] \forall x,y \in E$

• $\mathcal{R}$ es débilmente conectada $\Leftrightarrow \tilde{\Delta} < R \cup R'$

8) RELACION CONECTADA O CONEXA. Una relación binaria $\mathcal{R}$, definida en un conjunto E, es conexa si cualquiera que sea la pareja (x,y) que no verifica la relación, entonces la pareja (y,x) si la verifica. O sea

$\mathcal{R}$ es conectada $\Leftrightarrow (x\tilde{R}y \Rightarrow yRx) \; \forall x,y \in E$

• $\mathcal{R}$ es conectada $\Leftrightarrow U < R \cup R'$ ($\Leftrightarrow \tilde{R} < R'$)

9) RELACION IRREFLEXIVA. Una relación R, definida en un conjunto E, es irreflexiva si cualquiera que sea el elemento x del conjunto, la pareja (x,x) no verifica la relación R. Entonces

$$R \text{ es irreflexiva} \Leftrightarrow x\tilde{R}x \quad \forall\, x\in E$$

- R es irreflexiva $\Leftrightarrow R\subset\tilde{\Delta}$

10) RELACION ACICLICA. Una relación R, definida en un conjunto E, es acíclica si cualquiera que sea la pareja (x,y) que verifica la relación R^{k-1}, entonces la pareja (y,x) no la verifica . O sea

$$R \text{ es acíclica} \Leftrightarrow (xR^{k-1}y \Rightarrow y\tilde{R}x) \;\forall\, x,y\in E$$

- R es acíclica $\Leftrightarrow R^{K}\subset\tilde{\Delta} \;\forall\, K\geq 1$ (K entero)

11) RELACION DENSA. Una relación R, definida en un conjunto E, es densa si cualquiera que sea la pareja (x,y) que verifica la relación, entonces las parejas (x,z) y (z,y) verifican la relación para algún $z\in E$. Esto es

$$R \text{ es densa} \Leftrightarrow xRy \Rightarrow (xRz,\, zRy) \;\forall\, x,y\in E \text{ y para algún } z\in E$$

- R es densa $\Leftrightarrow R\subset R^{2}$

12) RELACION IDEMPOTENCIA. Una relación R, definida en un conjunto E, es idempotencia siempre y cuando la pareja (x,y) pertenecerá a la relación, si y sólo si las parejas (x,z) y (z,y) pertenezcan también a la relación para algún $z\in E$. O sea

$$R \text{ es idempotencia} \Leftrightarrow [xRy \Leftrightarrow (xRz,\, zRy)] \;\forall\, x,y\in E \text{ y para algún } z\in E$$

- R es idempotencia $\Leftrightarrow R=R^{2}$ ($\Leftrightarrow R$ tansitiva y densa)

13) RELACION DIRIGIDA Una relación R, definida en un conjunto E, es dirigida, si para todo $x, y \in E$ existe $z \in E$, tal que las parejas (z, x) y (z, y) pertenecen a la relación, esto es

$$R \text{ es dirigida} \Leftrightarrow [\exists z \in E \cdot \ni \cdot (zRx, zRy)] \forall x, y \in E$$

- R es dirigida $\Leftrightarrow R'R = U$

14) RELACION NO SIMETRICA. Una relación R, definida en un conjunto E, es no simétrica si existe $x, y \in E$, tal que la pareja (x, y) está relacionada y la pareja (y, x) no lo está. O sea

$$R \text{ es no simétrica} \Leftrightarrow [\exists x, y \in E \cdot \ni \cdot (xRy, y\tilde{R}x)]$$

- R es no simétrica $\Leftrightarrow R = R'$

15) RELACION NO TRIVIAL. Una relación R, definida en un conjunto E, es no trivial si existe $x, y \in E$ tal que, la pareja (x, y) no está relacionada. O sea

$$R \text{ es no trivial} \Leftrightarrow \exists x, y \in E \cdot \ni \cdot x\tilde{R}y$$

- R es no trivial $\Leftrightarrow U \not\subset R$

16) RELACION NO VACIA. Una relación R, definida en un conjunto E, es no vacía si existe $x, y \in E$ tal que la pareja (x, y) está relacionada, ésto es

$$R \text{ és no vacía} \Leftrightarrow \exists x, y \in E \cdot \ni \cdot xRy$$

- R es no vacía $\Leftrightarrow R \not\subset \emptyset \; (U \not\subset \tilde{R})$

En la tabla* 1 se indican los anteriores términos que

*Tomada de la referencia # 2

TABLA 1

Nombre		Definición		Implicada por	Incompatible con
1	Transitiva	$R^2 \subset R$	$\forall x, y, z \in X\ (xRy, yRz) \Rightarrow xRz$	(2,6), (2,4), (12)	
2	Negativa transitiva	$R \subset R + R$ ($\Leftrightarrow \tilde{R}$ es transitiva)	$\forall x, y, z \in X\ (x\tilde{R}y, y\tilde{R}z) \Rightarrow x\tilde{R}z$	(1,4)	
3	Débilmente conectada	$\tilde{\Delta} \subset R \cup R'$	$\forall x, y \in X\ x \neq y \Rightarrow (xRy \text{ o } yRz)$	(4)	
4	Conectada o conexa	$U \subset R \cup R'$ $(\Leftrightarrow \tilde{R} \subset R')$	$\forall x, y \in X\ x\tilde{R}y \Rightarrow yRx$		5, 6, 7
5	Irreflexiva	$R \subset \tilde{\Delta}$	$\forall x \in X\ \ x\tilde{R}x$	(6), (7)	4, 8, 10
6	Asimétrica	$R^2 \subset \tilde{\Delta}$ $(\Leftrightarrow R' \subset \tilde{R})$	$\forall x, y \in X\ \ xRy \Rightarrow y\tilde{R}x$	(1,5), (7)	4, 8, 9, 10
7	Acíclica	$R^k \subset \tilde{\Delta}\ \forall\ k > 1$ (*k entero*)	$\forall x, y \in X\ \ xR^{k-1}y \Rightarrow y\tilde{R}x$	(1,5), (1,6)	4, 8, 9, 10
8	Reflexiva	$\Delta \subset R$	$\forall x \in X\ \ xRx$	(4), (1,9, 16)	5, 6, 7
9	Simétrica	$R' \subset R$ $(\Leftrightarrow R' = R)$	$\forall x, y \in X\ \ xRy \Rightarrow yRx$	$(\tilde{14})$	6, 7, 14
10	Antisimétrica	$R \cap R' \subset \Delta$	$\forall x, y \in X\ (xRy, yRx) \Rightarrow x = y$	(6)	
11	Densa	$R \subset R^2$	$\forall x, y \in X\ \ xRy \Rightarrow (xRz, zRy)$ *para algún* $z \in X$	(8), (12)	
12.	Idempotencia	$R^2 = R$ ($\Leftrightarrow R$ *transitiva y densa*)	$\forall x, y \in X\ \ xRy \Leftrightarrow (xRz, zRy)$ *para algún* $z \in X$	(1,8), (1, 11)	
13	Dirigida	$U = R'R$	$\forall x, y \in X\ \exists z \in X$ *tal que* (zRx, zRy)	(1,4)	
14	No simétrica	$R' \neq R$	$\exists x, y \in X$ *tal que* $(xRy, y\tilde{R}x)$	(6, 16), $(\tilde{9}$, 16)	9, 16
15	No trivial	$U \not\subset R$	$\exists x, y \in X$ *tal que* $x\tilde{R}y$	(14), (6, 16), (4,15)	
16	No vacía	$U \not\subset \tilde{R}$	$\exists x, y \in X$ *tal que* xRy	(14), (8)	

son aplicables a relaciones en un conjunto E, de los cuales se pueden considerar los siguientes agrupados en dos columnas:

$R^2 \subset R$ transitiva (1)	$R \subset 2R$ negativa transitiva(2)
$R \subset \tilde{\Delta}$ irreflexiva (5)	$\Delta \subset R$ reflexiva (8)
$R' \subset \tilde{R}$ asimétrica (6)	$\tilde{R} \subset R'$ conexa o conectada (4)
$R \cap R' \subset \Delta$ antisimétrica (10)	$\tilde{\Delta} \subset R \cup R'$ débilmente conexa (3)
$U \not\subset R$ no trivial (15)	$R \neq \phi$ no vacía (16)

Los números entre paréntesis corresponden a la tabla 1. Se pueden demostrar tres propiedades en relación con la anterior:

a) Una relación pertenece a la categoría de la izquierda si, y sólo si, su complemento pertenece a la correspondiente categoría de la derecha.

b) Si R cumple una condición del lado izquierdo, excepto la transitiva, cualquier subconjunto de R también la cumple; si R cumple una propiedad del lado derecho, excepto la negativa transitiva, cualquier relación en E, que contenga a R también la cumple.

c) Las propiedades del lado izquierdo son invariables bajo intersecciones y las propiedades del lado derecho lo son bajo uniones.

1.5. RELACIONES COMPUESTAS

Con base en las anteriores definiciones podemos construir relaciones que contengan dos o más características, de ahí el nombre de compuertas, siendo las de mayor uso:

1) SUBORDEN. Una relación binaria $\mathcal{R}$, en E, es un suborden si y sólo si $\mathcal{R}$ es acíclica ($\Leftrightarrow \mathcal{R}^t$ es irreflexiva).

2) ORDEN PARCIAL ESTRICTO. Una relación binaria $\mathcal{R}$, en E, es un orden parcial estricto si y sólo si $\mathcal{R}$ es irreflexiva y transitiva.

3) RELACION DE SIMILITUD (DE PARECIDO O DE PROXIMIDAD). Una relación binaria $\mathcal{R}$, en E, es de similitud sii $\mathcal{R}$ es reflexiva y simétrica.

4) PREORDEN. Una relación binaria $\mathcal{R}$, en E, es una relación de preorden sii $\mathcal{R}$ es reflexiva y transitiva.

5) ORDEN DEBIL. Una relación binaria $\mathcal{R}$, en E, es un orden débil sii $\mathcal{R}$ es asimétrica y negativa transitiva.

6) ORDEN ESTRICTO. Una relación binaria $\mathcal{R}$, en E, es un orden estricto sii $\mathcal{R}$ transitiva y asimétrica ($\Leftrightarrow$ es un orden débil conectado débilmente).

7) ORDEN LINEAL. Una relación binaria $\mathcal{R}$, en E, es un orden lineal sii $\mathcal{R}$ es transitiva, irreflexiva y débilmente conexa.

8) RELACION DE EQUIVALENCIA. Una relación binaria $\mathcal{R}$, en E, es de equivalencia sii $\mathcal{R}$ es simétrica, reflexiva y

transitiva.

9) ORDEN PARCIAL. Una relación binaria R, en E, es un orden parcial sii R es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

10) ORDEN TOTAL. Una relación binaria R, en E, es un orden total sii R es reflexiva, transitiva, antisimétrica y conexa ($\Leftrightarrow$ es un orden parcial conexo).

1.6. DESCOMPOSICION DE UNA RELACION

Las partes asimétrica y simétrica de una relación binaria R, en E, son las relaciones binarias, en E, definidas por

$$P=\{(x,y)\mid xRy,\ y\hat{R}x\}=R\cap\hat{R}'$$
$$I=\{(x,y)\mid xRy,\ yRx\}=R\cap R'$$

respectivamente

Las relaciones anteriores cumplen con:

a) $\{P,I\}$ es una partición de R, o sea

$$R=P\cup I\ ,\quad P\cap I=\emptyset$$

b) P determina a R (por lo tanto también a I) sii R es conexa, en cuyo caso

$$R=\{(x,y)\mid xPy\ \text{ o }\ y\tilde{P}x\}=P\cup\tilde{P}'$$
$$I=\{(x,y)\mid x\tilde{P}y\ ,\ y\tilde{P}x\}=\tilde{P}\cap\tilde{P}'=\widetilde{(P\cup P')}=R\cap R'$$

c) R transitiva $\Leftrightarrow$ P asimétrica y negativa transitiva

$\Rightarrow$ I equivalencia

d) $\mathcal{R}$ transitiva $\Leftrightarrow$ P e I transitivas

$\mathcal{R}$ reflexiva $\Leftrightarrow$ I reflexiva

$\mathcal{R}$ conexa y antisimétrica $\Leftrightarrow$ P débilmente conexa e I reflexiva.

1.7. REPRESENTACION DE RELACIONES

Una relación puede representarse de varias maneras:

a) En un sistema de coordenadas, en donde cada elemento (x,y) de la relación $\mathcal{R}$ es un punto en el plano $E_1 \times E_2$, donde $x \in E_1$, y $y \in E_2$. La relación $\mathcal{R}$ queda entonces representada por un subconjunto del plano $E_1 \times E_2$.

b) Si la relación $\mathcal{R} \subset E_1 \times E_2$ es numerable, entonces $\mathcal{R}$ puede representarse mediante nodos y flechas, esto es; se colocan en forma paralela los elementos (nodos) de E_1 y de E_2 y mediante una flecha se hace corresponder cada elemento de E_1 con los de E_2 y recíprocamente.

c) Una relación $\mathcal{R}$ numerable de un conjunto E_1 a un conjunto E_2 puede también representarse por una matriz, llamada matriz de la relación $\mathcal{R}$. Esta puede ser definida de la siguiente forma

$$r_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_i \not{\mathcal{R}}\, y_j \\ 1 & \text{si} \quad x_i \,\mathcal{R}\, y_j \end{cases}$$

donde r_{ij} es el elemento de la matriz, colocado en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna. Nótese que los elementos de E_1 se corresponden uno a uno con los renglones y los de E_2 con las columnas.

A partir de la matriz de una relación R, se pueden observar algunas de sus propiedades; si una relación es reflexiva, entonces todos los elementos de la diagonal principal son unos. Si una relación es simétrica, entonces la matriz de la relación es simétrica. Si una relación es antisimétrica, entonces su matriz es tal que $r_{ji} = 0$ si $r_{ij} = 1$ para $i \neq j$.

d) Si una relación R es numerable y si además $R \subset E \times E$, entonces ella puede representarse gráficamente por flechas. Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ son los elementos, ellos se representan por puntos llamados nodos. Estos nodos son llamados vértices. Si $x_i R x_j$, entonces conectamos los nodos x_i y x_j por medio de un arco y ponemos una cabeza de flecha en el arco en la dirección de x_i a x_j. Si $x_i R x_i$, tenemos un arco el cual empieza y termina en x_i. Tal arco es llamado loop.

La anterior representación de una relación corresponde al concepto de RED (o grafo) de Berge y König*. De la misma manera que en la representación matricial, en este caso también, es posible observar algunas de las propiedades pertenecientes a las relaciones.

*La teoría de redes viene a ser el estudio de las relaciones binarias arbitrarias (ver referencia # 8).

CAPITULO 2

APLICACIONES

En este capítulo aplicaremos los conceptos introducidos en el anterior. No haremos aplicaciones del caso de relaciones arbitrarias, ya que será transcribir lo que se ha hecho en la teoría de grafos o redes*. Lo que haremos es ilustrar algunos usos de las relaciones de similitud y de equivalencia; para después en los siguientes capítulos hacer aplicaciones de las relaciones de orden y de las relaciones que nos conducen a las retículas y álgebras booleanas.

2.1. PROBLEMAS DE SWITCHS

Los circuitos de switches digitales son aquellos sistemas cuya señal en el circuito (voltaje o corriente) puede tomar un número finito de valores discretos. Los más frecuentes tipos de estos circuitos, tienen la característica que cada señal puede tomar solo uno de los valores, denotados por los símbolos 0 y 1.

Se puede estudiar el comportamiento lógico de estos sistemas, considerando circuitos elementales llamados compuer_

*Tampoco consideramos el caso particular de las relaciones, cuando son funciones.

tas cuyas entradas y salidas solamente toman los valores denotados por 0 y 1. Tales sistemas son llamados circuitos lógicos. Una vez que un circuito ha sido diseñado en el nivel lógico, el correspondiente circuito físico puede ser obtenido por interconección apropiada de subcircuitos, implementando las compuertas usadas en el circuito lógico.

Se puede distinguir en el diseño de circuitos lógicos, dos tipos específicos: los CIRCUITOS COMBINATORIOS y los CIRCUITOS SECUENCIALES.

Si f es una función de switches, que va de $(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in K, 1 \leq i \leq n$ a $K=\{0,1\}$ o sea una función con entradas $\bar{X}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y salida $z \in K$; diremos que es una función combinacional si el valor de la salida z depende solo del valor presente de $\bar{X}$ y es completamente independiente de valores previos de $\bar{X}$. Una realización de una función combinacional es llamada circuito combinacional.

Una función cuyos valores dependen no solamente de sus entradas presentes; sino también de anteriores entradas es llamada una FUNCION SECUENCIAL. Una realización de una función secuencial es llamada circuito secuencial. Un método para describir una función secuencial es por medio de un modelo matemático llamado una MAQUINA SECUENCIAL. Este es el tipo de circuitos que nos interesan.

Una máquina secuencial recibe símbolos de entrada de un conjunto finito llamado su alfabeto de entrada I y produce símbolos de salida de un conjunto finito llamado su alfabeto de salida σ. Tiene un número de estados internos (o simplemente, estados). Las entradas, las salidas y los estados de la máquina se asumen ser de interés en instantes de tiempo discreto. Consideraremos máquinas secuenciales con un número finito de estados. Tales máquinas son llamadas MAQUINAS DE ESTADOS FINITOS.

Sea Q el conjunto de estados de la máquina. La operación de la máquina es como sigue: Supongamos que la máquina inicialmente está en algún estado $q_i \in Q$. Si recibe una entrada $I_m \in I$, produce una salida $z_k \in \sigma$ y va al estado $q_j \in Q$ en el siguiente instante de tiempo. El estado siguiente q_j y la salida z_k están determinados únicamente por el presente estado y la entrada.

Una máquina secuencial de estados finitos puede ser representada por una TABLA DE ESTADOS la cual tiene un renglón correspondiendo a todo estado interno de la máquina y una columna correspondiendo a todo símbolo de entrada (algunas veces llamado estado de entrada). La entrada en el renglón q_i, columna I_j representa el siguiente estado y la salida producida si I_j es aplicada cuando la máquina está en el estado q_i. Esta entrada será denotada por $N(q_i, I_j)$, $Z(q_i, I_j)$, donde N y Z son llamados el estado siguiente y la función salida respectivamente de la máquina. Este tipo de máquina secuencial cuya salida es una función de la entrada y del presente estado, o sea la asociación de la salida con la transición de estado, es llamada MAQUINA DE MEALY. Matemáticamente se puede representar por una quinteta (I, σ, Q, N, Z), donde I es el alfabeto de entrada, σ es el alfabeto de salida, Q es el conjunto de los estados, N es un mapeo de $I \times Q$ en Q y Z es un mapeo de $I \times Q$ en Z. Otro modelo de máquina secuencial, llamada la MAQUINA De MOORE asocia salidas con estados más bien que con transiciones. También puede esta máquina representarse por una quinteta (I, σ, Q, N, Z). Donde a diferencia de la máquina de Mealy, Z es un mapeo de Q en σ. Nosotros usaremos la máquina secuencial de Mealy.

La tabla de estados de una función secuencial puede contener entradas inespecíficadas (o sea de no interés). Estas representan condiciones donde el estado siguiente y/o la salida no necesitan ser especificadas para una transición dada del estado q_i entrada I_K porque la entrada I_K no puede ocurrir (o no está permitida a ocurrir) cuando la máquina está en el estado q_i o porque el estado siguiente y/o la salida son irrelevantes por alguna otra razón cuando la entrada I_K ocurre en el estado q_i.

El primer paso en el diseño, del comportamiento deseado, de un circuito secuencial que describa parte del mundo es la construcción de una tabla de estados, describiendo la operación del circuito. Dicha tabla puede contener más esta dos de los necesarios. Ya que la complejidad de un circuito secuencial, con frecuencia, depende del número de estados en la tabla; por lo cual es deseable reducir el número de estados.

Dada una tabla de estados M, desearíamos obtener una tabla de estados M' la cual tuviera menos estados que M, tal que para cualquier secuencia de entrada, M' produjera la misma secuencia de salida que M, suponiendo apropiados estados iniciales. Si la tabla M está incompletamente especificada, es suficiente requerir que la tabla reducida M' produzca las mismas salidas que M cuando ésta última esté especificada. Un estado q' de una tabla M' cubre a un estado q de una tabla M si para cualquier secuencia de entrada, las secuencias de salida de M' en estado inicial q' y M en estado inicial q son idénticas cuando la salida de M está especificada. La tabla M' cubre a M si todo estado de M está cubierto por algún estado de M'.

El problema de minimización* o reducción de una tabla de estados puede ser establecido como sigue: Para una tabla M dada, encontrar una tabla M' la cual cubra a M tal que para cualquier otra tabla M'' la cual cubra a M, el número de estados en M' no excede el número de M''.

*Ver referencia # 9

El problema anterior puede resolverse para dos casos:

1) Cuando M está completamente especificada.

2) Cuando M está incompletamente especificada.

El primer caso es bastante fácil de resolver, dado que trabajamos con una relación de equivalencia sobre los estados de M. Mientras que en el caso dos se trabaja con una relación de Parecido o de Similitud; haciendo más difícil la solución del problema. Sin embargo los iremos tratando paralelamente.

Para poder tratar el problema, primeramente tenemos que introducir algunas definiciones y resultados.

Si una tabla M puede ser cubierta por otra tabla M' que tiene menos estados que M, entonces algún estado de M' debe cubrir más de un estado de M. Si un conjunto de estados de M puede ser cubierto por el mismo estado de alguna otra tabla M', llamaremos a este conjunto un conjunto compatible (o simplemente un compatible). Dos estados q_i y q_j de una tabla M son compatibles si ellos nunca generan diferentes salidas especificadas para cualquier secuencia de entrada. Dos estados q_i y q_j se dice que son compatibles afuera si $Z(q_i, I_k)=Z(q_j, I_k)$ para toda I_k para las cuales ambos de ellas estén especificados. Son incompatibles o sea no compatibles sii q_i y q_j son incompatibles afuera o para algún I_k, $N(q_i, I_k)$ y $N(q_j, I_k)$ no son compatibles.

El proceso para encontrar pares compatibles para una tabla de n estados, puede ser tabularizado usando una carta de pares tal como se muestra en la referencia # 9 (pags. 123, 124 y 125). Para determinar los conjuntos compatibles de estados con más de dos elementos, para el caso de tablas completamente especificadas, se hace usando de la propiedad transitiva; mientras que para el otro tipo de tabla no es posible.

Recuérdese que para tablas incompletamente inespecificadas, $q_i \sim q_j$* no implica que la secuencias de salidas generadas con estados iniciales q_i y q_j sean idénticas, para cualquier secuencia de entrada, sino solamente son iguales cuando ambas salidas están especificadas. Así, la compatibilidad es una relación de equivalencia solamente para tablas de estados completamente especificados. Para estas tablas, como se dijo, los conjuntos compatibkes de estados pueden ser fácilmente determinados por transitividad. Se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente para que un conjunto de estados $Q=\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, de una tabla M no especificada completamente, sea compatible es qué para todo par de estados $(q_i, q_j) \in Q$, $q_i \sim q_j$.

En general, una tabla de estados puede tener un gran número de conjuntos compatibles de estados. Sin embargo, nos

* $q_i \sim q_j$ significa que el estado q_i es compatible al q_j.

interesan compatibles que no sean subconjuntos de cualquier otro conjunto compatible. Estos son llamados compatibles máximos ($CM's$)*.

Si una tabla M es reducida a M', los renglones (espacios) de M' deben corresponder a conjuntos compatibles de estados de M. Si un renglón de M' corresponde al conjunto compatible C_i, entonces la entrada en la columna I_j de M' debe corresponder a algún conjunto compatible C_m tal que las entradas de los estados siguientes en la columna I_j de todos los estados en C_i deben estar contenidos en C_m.

Sea C_i un conjunto de estados compatibles, sea $C_{ij} = \{q_k \mid q_k = N(q_m, I_j) \; \forall q_m \in C_i\}$. Esto es, C_{ij} es el conjunto de las entradas de los estados siguientes de los estados en C_i para la entrada I_j. Se dice que C_{ij} es implicado por C_i. Un conjunto compatible $C = \{C_1, C_2, \ldots\}$ es CERRADO si para todo $C_i \in C$, todos los conjuntos implicados C_{ij} están contenidos en algún elemento de C para toda I_j. El conjunto de los conjuntos compatibles correspondiendo a los renglones (estados) de M' debe ser cerrado. El problema de minimizar el número de estados en una tabla M, se reduce al problema de encontar un conjunto cerrado C de estados compatibles, de cardinalidad mínima, el cual cubra todos los estados de M, esto es, una COVERTURA CERRADA MINIMA (CCM). No

*Ver el proceso, en la referencia # 9, para obtener los (CM's).

te que el conjunto de todos los $CM's$ es cerrado, pero no ne_ cesariamente de cardinalidad mínima para una tabla en gene_ ral. Sin embargo para una tabla completamente especificada_ los $CM's$ son disjuntos y puede demostrarse, para este caso, que el conjunto de todos ellos es una covertura cerrada mí_ nima.

De lo anterior nos damos cuenta, que para minimizar una tabla M, completamente especificada, simplemente necesita_ mos determinar el conjunto $CM's$ y construir una tabla M' cu_ yos estados correspondan a los $CM's$.

El problema de encontrar una COM para una tabla incomple_ tamente especificada, es considerablemente más difícil. Es_ to es, porque existe la posibilidad que una covertura cerra_ da consistiendo solamente de $CM's$, contenga más conjuntos_ que una covertura cerrada, en la cual algunos (o todos) de_ los conjuntos compatibles son subconjuntos propios de $CM's$. Esto parecería indicar que todos los conjuntos compatibles, podrían ser considerados en la obtención de una COM para ta_ bla incompletamente especificada. Sin embargo el concepto_ de conjuntos COMPATIBLES DOMINANTES, que a continuación se_ define, simplifica la tarea de encontrar una COM.

Sea C_i un conjunto compatible de estados y C_{ij}, el con_ junto de estados siguientes implicado por C_i para la entra_ da I_j. El conjunto CLASE P_i implicado por C_i es el conjunto de todos los conjuntos C_{ij} implicados por C_i para todas las entra_ das I_j , tal que:

1) C_{ij} tiene más de un elemento

2) $C_{ij} \not\subset C_i$

3) $C_{ij} \not\subset C_{ik}$ si $C_{ik} \in P_i$

Un compatible C_i DOMINA a un compatible C_j si $C_i \supset C_j$ y $P_i \subseteq P_j$, donde P_i y P_j son las clases implicadas por C_i y C_j, respectivamente. Por lo tanto no es necesario considerar a C_j en la determinación de una covertura mínima. Un conjunto compatible de estados que no es dominado por cualquier otro conjunto compatible es llamado un conjunto PRIMO COMPATIBLE (PC). Nótese que un estado particular q_i puede ser un PC si todo conjunto compatible C_i, con más que un estado y conteniendo a q_i implica a un conjunto con más de un estado. Se puede demostrar que para cualquier tabla M existe una tabla mínima M', la cual cubre a M, cuyos estados corresponden, todos, a conjuntos primos compatibles de M.

Una vez que los primos compatibles de una tabla han sido determinados, el siguiente paso es obtener un conjunto de covertura mínima de primos compatibles. Esto se puede hacer de varias maneras* para tablas pequeñas y en forma general, se puede formular como un problema de programación lineal entera.

*Ver referencia # 9

2.2. PARTICIONES

Quizá una de las aplicaciones más interesantes de las relaciones de equivalencia, sea el hecho de que generan particiones de conjuntos. Esto es muy importante en muchas áreas de estudio; ya que cuando trabajamos con conjuntos de cualquier tipo, nos es necesario clasificar sus elementos o identificar clases de equivalencia. Por esta razón recordaremos primero qué es una partición y después demostraremos que una relación de equivalencia es equivalente a una partición de un conjunto. Aplicaremos lo anterior, en la siguiente sección, a la clasificación de conceptos.

Def. Sea E un conjunto dado y $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, donde cada A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, es un subconjunto de E y $\cup_1^m A_i = E$; entonces el conjunto A es llamado cobertura de E, y los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ se dice que cubren a E. Si los elementos de A, son mutuamente excluyentes, entonces A es llamada una partición de E, y los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son llamados los bloques de la partición.

Recordemos que una relación de equivalencia R, es una relación binaria sobre E que es reflexiva, simétrica y transitiva, o sea

$$\Delta \subset R = R^{-1} = R^2$$

Debemos notar que estas tres propiedades nos conducen a la siguiente definición.

Def. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto E.

Para cualquier $x \in E$, el conjunto $R(x) \subseteq E$ dado por

$$R(x) = \{y \mid y \in E, xRy\}$$

es llamada clase de equivalencia según R, generado por $x \in E$.

Podemos observar las siguientes propiedades, de las clases de equivalencia generadas por los elementos de E:

a) Para cualquier elemento $x \in E$, tenemos xRx porque R es reflexiva $\therefore x \in R(x)$.

b) Sea $y \in E$ cualquier otro elemento tal que xRy, así que $y \in R(x)$. Como R es simétrica, yRx y $x \in R(y)$. Ahora si hay un elemento $z \in R(y)$, entonces z debe estar en $R(x)$ porque yRz y xRy implica que xRz. Así $R(y) \subseteq R(x)$. Por simetría tenemos también $R(x) \subseteq R(y)$. $\therefore$ $R(x) = R(y)$.

c) Si $x \not R y$, entonces $R(x)$ y $R(y)$ son mutuamente excluyentes: Supongamos lo contrario o sea que hay al menos un elemento $z \in R(x)$ y también $z \in R(y)$; esto es, xRz y yRz; pero por simetría zRy y por transitividad xRy, lo cual es una contradicción.

De lo anterior vemos que cada elemento de E genera una clase de equivalencia según R, la cual es no vacía.

Estando formada cada una de las clases por elementos todos ellos equivalentes, puede elegirse arbitrariamente uno de ellos para representar su clase de equivalencia, y se llama "REPRESENTANTE DE LA CLASE":

Se acostumbra llamar al conjunto de todas las clases de equivalencia, generadas por todos los elementos de E, "con junto COCIENTE" o sea:

$$E/R=\{R(x)\mid x\in E\}$$

Ahora sí enunciaremos el siguiente resultado importante

TEOREMA 1. Toda relación de equivalencia R en un conjunto E, determina una "única" partición del conjunto; los bloques de esta partición corresponden a las clases de equivalencia. Recíprocamente, toda partición de E, determina una única relación de equivalencia.

Demostración. Para demostrar la primera parte, tenemos que demostrar:

1) $E=\bigcup_{x\in E}R(x)$

2) $R(x)\cap R(y)\neq\emptyset$, entonces $R(x)=R(y)$

como R es reflexiva, es decir, como cada elemento está relacionado consigo mismo, $x\in R(x)\ \forall x\in E$ entonces $\bigcup_{x\in E}R(x)=E$.

La demostración del inciso 2) es precisamente la propiedad 2), de las relaciones de equivalencia, que ya se ha probado.

Para demostrar la parte recíproca del teorema considere una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}=A$ tal, que

$$\bigcup_{i\in I}A_i=E$$

y para todo i y todo j: $A_i\cap A_j=\emptyset$, si $i\neq j$. Entonces para cualquier $x\in E$ hay un conjunto $A_i\in A$ tal que $x\in A_i$ y no pertenece a cualquier otro elemento de A. Ahora tomemos todos los elementos de $A_i\times A_i$ como miembros de una relación R. Así todo elemento de E que está en A_i está en la relación R con todo otro elemento de A_i. Más aún, ningún otro elemento de E el cual no esté en A_i está relacionado con los elemen_ tos de A_i. Similarmente, para todos los otros miembros de la partición de A, formamos elementos de la Relación R. Como _ $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, entonces $R = (C_1 \times C_1) \cup (C_2 \times C_2) \cup \ldots \cup (C_m \times C_m)$. Lo único que nos hace falta probar es que R es _ una relación de equivalencia.

1) Si $x \in A_i$ entonces $(x, x) \in A_i \times A_i$ $\therefore$ $(x, x) \in R$ y $\therefore$ R es reflexiva.

2) Si $x \in A_i$ y $y \in A_i$ entonces $(x, y) \in A_i \times A_i$ pero también_ $(y, x) \in A_i \times A_i$ $\therefore$ $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$. $\therefore$ R es simé__ trica.

3) Si $(x, y) \in R$, existe un A_i tal que $x \in A_i$ y $y \in A_i$; si $(y, z) \in R$, existe un A_j tal que $y \in A_j$ y $z \in A_j$; pero A_i y A_j tienen pues común al elemento y, lo cual no es posi ble más que si $i = j$, ya que A_i y A_j están separados _ cuando $i \neq j$. Podemos ver entonces que existe un A_i tal que $x \in A_i$ y $z \in A_i$, luego $(x, z) \in R$ y $\therefore$ la relación es transitiva.

Podemos concluir entonces que hay una correspondencia __ biunívoca entre todas las particiones de un conjunto E y to das las relaciones de equivalencia en E .

2.3. LA ESTRUCTURA DE LOS CONCEPTOS CIENTIFICOS

Entendemos por objetos conceptuales una creación mental (cerebral) independientemente de sus presentaciones lingüísticas, que son objetos concretos (escritos o hablados). Distinguiendo cuatro clases básicas de objetos conceptuales: conceptos, proposiciones, contextos y teorías.

Los conceptos son los elementos básicos o unidades que forman el sistema conceptual. En el caso particular del subsistema conceptual científico, es posible, desde un punto de vista formal o matemático, reducir los conceptos científicos a tres tipos básicos*: Los conceptos clasificatorios, los comparativos y los métricos.

-CONCEPTOS CLASIFICATORIOS.

Los conceptos clasificatorios nos sirven para referirnos a un grupo determinado de objetos o sucesos que tienen algo en común. En la ciencia, los conceptos clasificatorios no suelen introducirse aisladamente, sino en conjuntos llamados clasificaciones. Para que una clasificación o sistema de conceptos clasificatorios sea aceptable ha de cumplir dos tipos de condiciones de adecuación. Por un lado, unas condiciones formales de adecuación, comunes a todas las ciencias, y por otro lado, ciertas condiciones materiales de adecuación peculiares de la ciencia que se trate.

*Tomado de la referencia # 32

En general, cuando hablamos de una clasificación esperamos que esté perfectamente delimitado cual sea el ámbito o dominio de individuos que vamos a clasificar, que a cada concepto clasificatorio corresponda al menos un individuo de ese ámbito, que ningún individuo caiga bajo dos conceptos clasificatorios distintos y que todo individuo del ámbito en cuestión caiga bajo alguno de los conceptos de la clasificación.

La extensión de un concepto es la clase de las cosas a las que ese concepto se aplica. Si identificamos los conceptos clasificatorios con sus extensiones, entonces podemos resumir las condiciones formales de adecuación de una clasificación diciendo que la clasificación debe construir una partición. O sea, si A es una clase de objetos, B_1, B_2,...., B_n sus extensiones, es decir, clases de objetos de A, entonces decimos que $H=\{B_1, \ldots, B_n\}$ es una clasificación si y sólo si se cumple que:

1) $\phi \notin H$
2) $\forall B_i, B_j \in H$ se tiene que si $B_i \neq B_j \Rightarrow B_i \cap B_j = \phi$
3) $\bigcup_1^n B_i \Rightarrow A$

El hecho de que una clasificación también deba satisfacer ciertas condiciones materiales de adecuación, peculiares de la ciencia de que se trate; nos conduce a buscar clasificaciones naturales, o sea, clasificaciones cuyos conceptos sean más fecundos teóricamente, en el sentido de que sirven para formular leyes más generales o más precisas o con más poder explicativo o predictivo, que los de algunas otras.

Dadas dos clasificaciones del mismo dominio de objetos, a veces es posible compararlas en cuanto a finura y, a veces, no. Si $A=\{A_1, \ldots, A_n\}$ y $B=\{B_1, \ldots, B_m\}$ son dos clasificaciones o particiones del mismo dominio D; entonces podemos decir que A es tanto o más finas que B si y sólo si para cada $A_i \in A$ y cada $B_j \in B$ ocurre que $A_i \subset B_j$ o $A_i \cap B_j = \emptyset$.

De lo anterior podemos construir una jerarquía, entendida como una sucesión de clasificaciones comparables entre sí y de finura decreciente; más precisamente, decimos que H es una jerarquía taxonómica sobre D si y sólo si hay $B_1, \ldots, B_n$, tales que: a) $H=\{B_1, \ldots, B_n\}$, b) para cada i $(1 \leq i \leq n)$, B_i, es una partición de D; c) para cada i $(1 \leq i \leq n)$, B_i es tanto o más fina que B_{i+1}.

-CONCEPTOS COMPARATIVOS

Los conceptos comparativos sirven para establecer comparaciones en más y menos. Si identificamos los conceptos cualitativos con los clasificatorios y los cuantitativos con los métricos, resulta que en la ciencia se usan otros tipos de conceptos además de los cualitativos y cuantitativos: los conceptos comparativos. Los conceptos comparativos no sólo permiten diferenciar más finamente que los clasificatorios, sino que además representan un primer paso para la posterior introducción de conceptos métricos.

Introducir un concepto comparativo para una característi_ca que los individuos de un dominio poseen en mayor o menor grado consiste en definir dos relaciones de coincidencia y precedencia respecto a esa característica, es decir, indi_car cuándo dos objetos de ese dominio coinciden respecto a esa característica y cuándo uno precede al otro respecto a ella.

Llamemos K y P a las relaciones de coincidencia y prece_dencia respecto a una característica determinada que los ob_jetos de un dominio A poseen en mayor o menor grado. El con_cepto comparativo $\langle K, P\rangle$ ha de cumplir ciertas condiciones (condiciones) formales de adecuación para ser científicamente aceptable. En primer lugar, K ha de ser una relación de equivalencia en A. P ha de ser transitiva en A. Además P ha de ser K-irreflexiva, es decir, dados dos objetos cuales_quiera, o bien coinciden entre sí, o bien uno de ellos es más o menos que el otro respecto a la característica de que se trate.

Se pueden resumir las condiciones formales de adecuación de un concepto comparativo $\langle K, P\rangle$ en un dominio A, exigien_do que $\langle A, K, P\rangle$ constituya un sistema comparativo. O sea si $K \subset A \times A$ y $P \subset A \times A$, entonces $\langle A, K, P\rangle$ es un sistema com_parativo si y sólo si, para toda $x, y, z \in A$, se tiene que:

1) xKx

2) si $xKy \Rightarrow yKx$

3) si xKy y $yKz \Rightarrow xKz$

4) si xPy y $yPz \Rightarrow xPz$
5) si $xKy \Rightarrow x \not P y$
6) xKz o xPz o zPx

-CONCEPTOS METRICOS

Los conceptos métricos asignan números reales o vectores a objetos o sucesos. La representación de un sistema empírico en otro numérico, constituye la esencia del concepto métrico. Podemos decir que un concepto métrico f es un homomorfismo de un sistema empírico en un sistema numérico homólogo. Un sistema está constituido por un dominio de individuos y una serie de relaciones y funciones en ese dominio. Dos sistemas son homólogos si tienen el mismo número de relaciones y de funciones y los "órdenes" de las relaciones se corresponden. O sea si $\mathcal{A} = \langle A, R_1 \ldots R_n, g_1 \ldots g_m \rangle$ y $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S_1 \ldots S_n, h_1 \ldots h_m \rangle$ son dos sistemas homólogos; decimos que f es un Homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{R}$ sii se cumple que:

1) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$
2) Para cualquier $(a_l, a_q) \in R_i \Rightarrow (f(a_l), f(a_q)) \in S_i$ donde $a_l, a_q \in A$ y $f(a_l), f(a_q) \in \mathbb{R}$.
3) si $\left[g_i : (A \times A \times \ldots \times A) \longrightarrow A\right] \Rightarrow \left[h_i : (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}\right]$ tal que $g_i(a_1 \ldots a_n) = a_{n+1} \Rightarrow h_i(f(a_1) \ldots f(a_n)) = f(a_{n+1})$.

Vemos que un concepto métrico es un homomorfismo entre un sistema empírico y un sistema numérico.

Podemos observar que una Escala es un homomorfismo específico de un sistema empírico en un sistema numérico y un concepto métrico es la clase de todos los homomorfismos del primer sistema en el segundo.

Nótese que el serclasificatorio comparativo o métrico, como el ser cualitativo o cuantitativo, no son propiedades de las cosas, sino de los conceptos que empleamos para pensar en las cosas y hablar de las cosas.

En este capítulo hemos podido constatar que relaciones sencillas como la de similitud y de equivalencia tienen aplicación en temas muy diversos. Esto hace ver que existe un núcleo común de conceptos en estos temas, los cuales pertenecen precisamente a la Teoría de Relaciones. La primera aplicación, la minimización de una tabla de estados, se refiere a sistemas reales o sea a circuitos de switcheo digitales; la segunda es una aplicación (particiones) a un sistema abstracto y la última, la estructura de los conceptos científicos, se refiere a un sistema conceptual. Todo ésto muestra que, la Teoría de Relaciones es aplicable a sistemas de diferente naturaleza; lo cual es uno de los propósitos de esta tesis.

CAPITULO 3

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

ESTADOS DE UN SISTEMA DINAMICO

Aquí presentamos una aplicación muy importante de las relaciones de equivalencia; el concepto de estado de un sistema. Primeramente damos la definición de sistema, usando una relación, después definimos Causalidad para poder definir lo que es un sistema dinámico. A continuación, se llega a que los estados son las clases de equivalencia de las entradas. Por último con base en lo anterior y al número de estados, se habla de las diferentes descripciones y clasificaciones de los sistemas dinámicos.

3.1. DEFINICION DE SISTEMA DINAMICO

Para definir el concepto de estado de un sistema, en una forma general, es necesario primero definir qué es un sistema*. Mesarovic lo ha definido como una relación -aria** sobre conjuntos arbitrarios. Pero es demasiado general para el propósito de este capítulo, por lo que, lo definiremos de la siguiente manera; un sistema es una relación binaria sobre dos conjuntos de funciones del tiempo. Si al primer con_

*La referencia # 17 trae, en el capítulo 1, una discusión muy interesante sobre varias definicines de sistema.

** Ver referencias # 30 , 18

junto le llamamos conjunto de entradas y al segundo de salidas una definición factible es; un sistema es una relación entre entradas y salidas.

Para poder formalizar lo anterior, antes, definamos los siguientes conceptos:

1) Si G es algún conjunto parcialmente ordenado por $R \subset G \times G$ y $t \in G$, entonces el conjunto $\mathcal{T}(t) = \{t' \mid tRt'\}$ es la t-sección de G.

2) Un objeto del tiempo es cualquier conjunto $V \subset A^T = \{v \mid v: T \to A\}$ tal que A y T son conjuntos y $T = \mathcal{T}(t_0)$ en algún conjunto ordenado G. Si V es un objeto del tiempo y $v \in V$, entonces v es una función del tiempo.

Entonces ahora sí, un sistema es cualquier relación binaria $S \subset A^T \times B^T$ tal que A, B y T son conjuntos y $T = \mathcal{T}(t_0)$ en algún conjunto ordenado G. Los objetos temporales $DS = \{x \mid xSy\}$ y $RS = \{y \mid xSy\}$ son, respectivamente, el conjunto de entradas (o dominio) y el conjunto de salidas (o rango) de S. A, B y T son el espacio de entradas, el espacio de salidas y el conjunto de tiempos (generalmente) de S, respectivamente.

Si hacemos la suposición de UNICIDAD(o determinismo), esto es, que a cada entrada le corresponde una y sólo una salida, entonces la relación S es una función; o sea $y = S(x)$.

Consideraremos asociado a cada sistema un tiempo t_c, tiempo de creación, que representa el instante en que principia la existencia del sistema (no se excluye que t_c sea $-\infty$).

Decimos que un sistema es casual o no anticipatorio si para cualquier t_0, el valor de la salida $y(t_0)$ depende únicamente de la función de entrada x en el intervalo $[t_c, t_0]$, o sea, la salida en un instante dado no depende del valor de la entrada en instantes posteriores.

Un sistema que es casual y determinista se conoce con el nombre de SISTEMA DINAMICO*, o sea es un sistema tal que, si para dos entradas cualesquiera $x'_{[t_c,\infty)}$** y $x''_{[t_c,\infty)}$, para todos los valores de t en que se cumple la igualdad

$$x'_{[t_c,t]} = x''_{[t_c,t]}$$

las salidas correspondientes

$$y'_{[t_c,\infty]} = S(x'_{[t_c,\infty)}) ; y''_{[t_c,\infty]} = S(x''_{[t_c,\infty)})$$

satisfacen

$$y'_{[t_c,t]} = y''_{[t_c,t]}$$

En los sistemas dinámicos, para cualquier $t > t_c$, se cumple que

$$y_{[t_c,t]} = S(x_{[t_c,t]})$$

o sea que el segmento de salida $y_{[t_c,t]}$ depende únicamente del de entrada $x_{[t_c,t]}$.

En particular, para este tipo de sistemas, el valor de la

*Ver referencia # 3

**$x_{[t_1,t_2]}$ representa el segmento de la función del tiempo definido, en el intervalo $[t_1, t_2]$ que coincide con la función x en dicho intervalo.

salida en un instante arbitrario t_0 es una función del segmento de entrada aplicado hasta entonces.

3.2. ESTADOS DE UN SISTEMA DINAMICO

Construyamos una relación, $Q \subset DS \times DS$, sobre el conjunto de entradas de un sistema dinámico, de tal manera que para $t_0 > t_c$ se tiene que $x Q \bar{x}$ si y sólo si para toda t y todo segmento de función $z_{[t_0, t]}$, los segmentos de las salidas y y $\bar{y}$, definidas como

$$y_{[t_c, t]} = S(x_{[t_c, t_0]} \dot{+} z_{[t_0, t]})^*$$
$$\bar{y}_{[t_c, t]} = S(\bar{x}_{[t_c, t_0]} \dot{+} z_{[t_0, t]})$$

son iguales en el intervalo $[t_0, t]$, es decir,

$$y_{[t_0, t]} = \bar{y}_{[t_0, t]}$$

Lo anterior significa, que dos entradas definidas en un intervalo $[t_c, t_0]$ están en la relación si producen el mismo efecto en la salida a partir de t_0.

Se puede probar, fácilmente, que la anterior relación es una relación de equivalencia, ya que cumple, dado un sistema S, con:

*El signo $\dot{+}$, recibe el nombre de CONCATENACION DE SEGMENTOS, significa que a partir de dos segmentos de funciones, $w'_{[t_1, t_2]}$ y $w''_{[t_2, t_3]}$, puede construirse el segmento de función $w_{[t_1, t_3]} = w'_{[t_1, t_2]} \dot{+} w''_{[t_2, t_3]}$ de tal manera que se cumpla $w(t) = w'(t)$ si $t_1 \leq t \leq t_2$ y $w(t) = w''(t)$ si $t_2 \leq t < t_3$. Ver referencia # 3

1) $x_1 Q x_1$ en cualquier $t_0 > t_c$

2) $x_1 Q x_2 \Rightarrow x_2 Q x_1$ en t_0

3) si $x_1 Q x_2$ y $x_2 Q x_3 \Rightarrow x_1 Q x_3$ en t_0

Como vimos en el capítulo anterior, toda relación de equivalencia induce una partición y recíprocamente, entonces en nuestro caso si $x \in DS$ y $t_0 > t_c$, entonces $Q(x)$ es la clase de equivalencia de x en DS bajo Q. También,

$$DS/Q = \{Q(x) \mid x \in DS\}$$

es una partición de DS.

Vemos, pues, que el conjunto de todas las entradas definidas en un intervalo $[t_c, t_0]$ puede agruparse en clases, de modo que cada una esté formada por todas las entradas equivalentes entre sí.

Entonces, dado un sistema dinámico, pueden identificarse las clases de equivalencia de las entradas para cada instante de tiempo. Estas clase de equivalencia de las entradas se denominan comúnmente ESTADOS DEL SISTEMA.

Cada clase de equivalencia puede identificarse con uno o varios números reales, de tal manera que al decir que un sistema en t_0 está en la clase de equivalencia $X(t_0)$*, se podrá determinar la salida a partir de t_0 cuando se aplique cualquier entrada definida en el intervalo $[t_0, t]$. Así, no es

*Ver referencia # 3

necesario conocer la entrada que se le ha aplicado al sistema de t_c a t_0, sino la clase de equivalencia a la cual dicha entrada pertenece en t_0. Entonces, no es indispensable conocer exactamente $x_{[t_c,t_0]}$ para obtener la salida $y_{[t_0,t_1]}$, donde $t_c < t_0 \leq t_1 < \infty$.

Como hemos visto, para un sistema dinámico, se tiene que

$$y_{[t_c,t]} = S(x_{[t_c,t]})$$

y como

$$x_{[t_c,t]} = x_{[t_c,t_0]} \dot{+} x_{[t_0,t]}$$

y $[t_0,t] \subset [t_c,t]$, entonces

$$y_{[t_0,t]} = S(x_{[t_c,t_0]} \dot{+} x_{[t_0,t]})$$

Sabemos que para $t \geq t_0$, $y(t)$ depende de la clase de equivalencia de la entrada en t_0 y de $x_{[t_0,t]}$, lo que se denota como

$$y_{[t_0,t]} = F(X(t_0), x_{[t_0,t]})$$

donde $X(t_0)$ es la clase de equivalencia a la cual pertenece $x_{[t_c,t_0]}$. Esta ecuación indica que el valor de la salida en un instante $t > t_0$, depende únicamente del estado en que se encuentra el sistema en el tiempo t_0 y la entrada en el intervalo $[t_0,t]$.

Si en la anterior ecuación hacemos $t = t_0$, puede deducirse que

$$y(t_0) = f[X(t_0), u(t_0)]$$

lo cual significa que el valor de la salida en cualquier tiempo t_0 depende únicamente del estado y el valor de la entrada en ese instante.

Por lo anterior, es importante saber cómo evolucionan los estados, o sea que si un sistema dinámico está en un estado_ $X(t_0)$ y aplicamos una entrada $x_{[t_0,t_1]}$, queremos conocer en qué estado se encontrará el sistema en $t_2>t_0$.

Como $y_{[t_0,t]}=F(X(t_0),x_{[t_0,t_1]}+x_{[t_1,t]})$ el estado en t_2 de un sistema, está bien definido, pues corresponde a la cla se de equivalencia, de la entrada formada por la concatena_ ción de cualquier elemento que pertenece a $X(t_0)$ con $x_{[t_0,t_1]}$. Entonces existe una función $\phi[t_1,x_{[t_0,t_2]},X(t_0),t_0]$, ley de evolución de estados, que relaciona el estado de un siste ma dinámico en un instante con el estado del sistema en otro posterior cuando se le aplica un segmento de entrada entre _ estos dos tiempos.

3.3. DESCRIPCION Y CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS DINAMICOS

Considerando lo hasta aquí dicho, podemos describir a los sistemas dinámicos mediante cuatro formas diferentes, pero _ equivalentes*:

1) Descripción entrada-salida.
2) Mediante una relación entrada-salida entre segmentos de funciones.
3) Mediante una función que relaciona el estado y un segmen to de entrada con un segmento de salida.

*Tomado de la referencia # 3

4) Usando dos funciones : una que determina el estado final a partir del estado inicial y un segmento de entrada, ley de evolución de estados, y otra que determina el valor de la salida en el tiempo final, a partir del estado final y y el valor final de la entrada.

Los sistemas dinámicos pueden clasificarse de acuerdo con varios criterios ; número de estados, linealidad de la relación entrada-salida, invariancia con el tiempo de la relación entrada-salida, etc.

Si usamos como criterio de clasificación el número de estados diferentes, podemos distinguir cinco tipos de sistemas dinámicos :

1) SISTEMA ALGEBRAICO. Es aquel, que para cualquier instante de tiempo, t, todas las entradas pertenecen a la misma clase o sea el estado es único.

2) SISTEMA AUTOMATA FINITO. Es un sistema que para cualquir tiempo t, el número de clases de equivalencia de las entradas es finito.

3) SISTEMA AUTÓMATA INFINITO. Si el número de clases de equivalencia es infinito pero numerable.

4) SISTEMA DE PARAMETROS CONCENTRADOS. Es aquel en el cual existe una correspondencia biunívoca, entre las clases de equivalencia de las entradas para $t > t_1$ y todos los números reales.

5) **SISTEMA DE PARAMETROS DISTRIBUIDOS.** Es un sistema con un número infinito no numerables de estados, que no es posible ponerlos en correspondencia biunívoca con los números reales.

Esta aplicación hace ver claramente la utilidad de la Teoría de Relaciones, ya que podemos mediante ésta definir con precisión lo que se entiende por sistema y además lo que es el estado de un sistema dinámico. Las relaciones viene a ser una base matemática fundamental en el Análisis de Sistemas, que es parte de la Teoría General de Sistemas.

C A P I T U L O 4

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

TEORIA DE DECISIONES

En este capítulo veremos la importancia que tienen las relaciones en la teoría de decisiones. Esta teoría se apoya en una teoría de preferencia y en el modelado de estas preferencias. Una teoría de preferencia se basa en un conjunto de axiomas, que dan cierta estructura a una relación binaria básica ω, definida en un conjunto de alternativas X y su modelado está formado por una función $f: X \rightarrow Y$ y una relación binaria M en un conjunto, que depende del modelo, Y. Limitaremos nuestro estudio para el caso en que la teoría de preferencia sea algebraica, la relación binaria básica sea transitiva y el modelado se haga mediante la teoría de UTILIDAD.

4.1. CONCEPTOS GENERALES

En la tema de decisiones con objetivos múltiples (o en la de un objetivo) intervienen cuando menos los siguientes pasos*:

a) Identificación de las opciones alternativas.

b) Identificación de los atributos relevantes (o del atributo relevante).

*ver refernoia # 2

c) Asociación a cada opción de un vector de atributos _ (o de un ascalar).

d) Selección de la mejor opción.

Nuestro estudio se centrará exclusivamente en el punto d). Así, se puede considerar que a cada opción alternativa le corresponde un vector de atributos (o un escalar) y el _ problema se reduce a encontrar la mejor opción; ya que no existe un ordenamiento natural inducido sobre el conjunto de vectores de atributos (de escalares).

Las ideas intuitivas de mejor, peor, inferior, etc. y el concepto de elección están relacionados con el concep_ to de preferencia (Von Wright, 1967); aún cuando la elec_ ción sea de tipo potencial.

La mayor parte de las teorías de preferncia han sido _ desarrolladas suponiendo, que el resultado de comparar _ dos alternativas es independiente de la presencia de una tercera disponible (condición de independencia de altern_ tivas irrelevantes; Arrow, 1953), entonces las preferen_ cias pueden modelarse mediante una relación binaria P, de modo que xPy indica que "x es preferido a y". Para deno_ tar expresiones como "x es al menos tan preferible como y" se usará xQy, y para denotar "x indiferente a y" se usará la relación I. Se puede definir una de las relaciones P o Q apartir de la otra.

El empleo de una teoría de la preferencia puede tomar uno de dos puntos de vista: el descriptivo, que intenta predecir la conducta electiva, y el normativo, que trata de prescribirla. En ambos casos puede hablarse de una teoría o modelo de preferencias cuando los resultados de las comparaciones obedecen cierta estructura, que por lo general se da explícitamente mediante los llamados axiomas de preferencia.

En teoría de decisiones, el punto de vista normativo considera que los axiomas de preferencia, definidos a priori, sirven para normar, es decir, hacer racional el proceso de llegar a la mejor decisión.

Las teorías de preferencia pueden clasificarse, siguiendo a Luce y Suppes (1965), en algebraicas, probabilísticas y estocásticas. Las primeras se subdividen en bajo certeza, bajo incertidumbre y bajo riesgo.

Las teorías estocásticas se asocian al comportamiento transitorio, que puede interpretarse como un proceso de aprendizaje, mientras las algebraicas se relacionan con el comportamiento asintótico o estacionario, es decir, en estado de equilibrio.

4.2. RELACIONES DE ORDEN

Con base en nuestras consideraciones anteriores una relación de orden*, es cualquier relación que es transitiva. Una relación de orden es orden parcial estricto, orden débil u orden lineal si ella es irreflexiva, asimétrica y negativa transitiva o irreflexiva y débilmente conexa respectivamente.

Se pueden demostrar, si R es una relación binaria en X, las siguientes propiedades**:

1) R es un orden lineal $\Rightarrow R$ es un orden débil $\Rightarrow R$ es un orden parcial estricto.
2) Si R es un orden parcial estricto entonces existe un orden débil S tal que $R \subset S$; si R es un orden débil entonces existe un orden lineal S tal que $R \subset S$. La primera de estas implicaciones resulta de que todo orden parcial estricto está incluido en algún orden lineal (teorema de Szpilrajn, 1930), el cual es un orden débil. La última implicación resulta de que un orden débil es un orden parcial estricto; un orden parcial estricto está contenido en un orden lineal; por tanto un orden débil está contenido en un orden lineal.

Nótese que cualquiera de los órdenes anteriores contiene la propiedad acíclica.

*Ver referencia #4

**Ver referencias# 23, 11, 7

Se dice que una relación binaria Q en X establece un orden en X sii su parte asimétrica es acíclica, esto es, sii P^k es irreflexiva para todo entero $K>0$ o equivalentemente, sii la cerradura transitiva de P, definida por $P^t = P \cup P^2 \cup P^3 \cup \ldots$, es irreflexiva.

Si la relación binaria Q establece un orden X se dice también que Q es un ordenamiento de X. Si Q no es conexa entonces la relación binaria en X definida por

$$N = \widetilde{(Q \cup Q')} = \widetilde{Q} \cap \widetilde{Q}' = \{(x,y) \mid x \widetilde{Q} y,\ y \widetilde{Q} x\}$$

no es vacía. Si xNy se dice que $x, y \in X$ no son Q-comparables.

Un ordenamiento Q de X es un orden parcial estricto, un orden débil o un orden lineal según su parte asimétrica, P ; sea un orden parcial estricto, un orden débil o un orden lineal, respectivamente.

Si Q establece un orden en X, y si I denota su parte simétrica y P su parte asimétrica, entonces existen ciertas interrelaciones entre las propiedades de estas tres relaciones. En la tabla 2 se presentan estos resultados.

	P	Q	I
	Asimétrica	⇔ Conectada	⇒ Simétrica
	⇓	⇓	
	Irreflexiva	⇔ Reflexiva	⇒ Reflexiva
O.P.E.	Transitiva	⇔ Negativa Transitiva	—
O.D.	Negativa Transitiva	⇔ Transitiva	⇒ Transitiva
O.L.	Débilmente conexa	⇔ Antisimétrica	⇒ Antisimétrica

TABLA* 2

*Tomada de la referencia #2

4.3. ORDENAMIENTO DE PREFERENCIAS

Para construir un modelo de preferencias conviene definir una relación binaria básica. Para este propósito se han empleado dos relaciones:

a) Prefernoia en el sentido "x es preferible a y"*

b) Preferencia-indiferencia en el sentido "x es al menos tan preferible como y"**

La primera relación se denotará $x \succ y$ y la segunda $x \succsim y$. Generalmente, se establece la forma de obtener una de ellas en función de la otra: así, dada la relación $\succsim$, resulta natural definir $\succ$ como

$$\succ \; = \; \succsim \cap (\widetilde{\succsim})'$$

o sea que "x preferible a y" equivale a decir que "x es al menos tan preferible como y, y además y no es preferible a x". De manera análoga, para pasar de $\succ$ a $\succsim$ puede usarse la siguiente igualdad

$$\succsim \; = \; \succ \cup (\widetilde{\succ})'$$

Si se aceptan las dos últimas ecuaciones, de hecho se está suponiendo que

a) $\succ$ es asimétrica

b) $\succsim$ es conectada

c) $\succ \; = (\widetilde{\succsim})'$

*Ver referencia # 2

**Ver referencia # 4

Las condiciones de asimetría de $\succ$ y conectividad de $\succsim$ son, sin embargo, generalmente aceptadas en las estructuras de preferencia.

La relación de indiferencia, denotada por $\sim$, que corresponde al concepto de ausencia de preferencia, se define formalmente como

$$\sim = \tilde{\succ} \cap (\tilde{\succ})' = \widetilde{(\succ \cup \succ')}$$

o bien

$$\sim = \succsim \cup \succsim'$$

Por tanto, $\sim$ es una relación simétrica. Si identificamos a la relación $\succ$ en X con P, la parte asimétrica del ordenamiento de preferencias Q, entonces

$$\sim = I \cup N \quad \text{y} \quad \succsim = Q \cup N$$

pero como hemos supuesto que Q es conexa resulta que $\sim = I$.

En nuestro caso la relación binaria básica que usaremos es, $P = \succ$. En el caso de que se quiera ver el uso de Q, ver referencia #4 *.

Hemos supuesto que $\succ$ asimétrica; pues es una condición "obvia" para la preferencia. Ella puede verse como un criterio de consistencia. Si una persona prefiere x a y, no podrá preferir simultáneamente y a x.

*En esta referencia se maneja la relación Q y con base en la composición de relaciones, se construye una álgebra de las relaciones de orden. Con esta álgebra y un conjunto de axiomas se estructura la Teoría de Utilidad.

Al comienzo del capítulo también hemos exigido que, $\succ$ sea transitiva ya que es un criterio razonable; si una persona prefiere x a y y prefiere y a z, entonces usando el sentido común preferirá x a z.

Dos maneras en que se pueden cumplir las exigencias anteriores es que $\succ$ sea un orden débil o un orden parcial estricto. En el primer caso, la relación de indiferencia $\sim$ es transitiva* y en el segundo no. La condición de que la estructura de preferencias sea un orden débil, se critica frecuentemente por implicar que la relación de indiferencia debe ser transitiva. Según Amstrong (1950) la intransitividad se origina por la imposibilidad de los humanos de distinguir dos opciones cuando la diferencia entre ellas no excede a cierta magnitud o según Luce (1956) la intransitividad de esta relación no se debe, necesariamente, a la irracionalidad del que toma las decisiones, sino más bien a la falta de descriminación entre las alternativas.

Existen para ambos casos, varios métodos** para construir modelos de preferencia; en los cuales la relación de indiferencia puede ser transitiva o no.

*Ver referencia # 2

**Ver referencia # 7

4.4. TEORIA DE LA UTILIDAD

Como se mencionó, una teoría de preferencia contiene un conjunto de axiomas que dan cierta estructura a la relación binaria $\succ$. En la práctica se requiere, además, un modelo del que se puedan deducir los resultados de comparar dos opciones cualesquiera y que, por lo tanto, contendrá la misma estructura de la relación $\succ$. Formalmente, si $\succ$ es una relación bianaria en X, entonces un modelo de $\succ$ es una función $f: X \rightarrow Y$ y una relación M en Y tal que

$$x \succ y \Rightarrow f(x) M f(y) \quad \forall\ x, y \in X$$

Se puede tener la implicación, también, en sentido contrario.

Uno de estos métodos, en la toma de decisiones, se basa en la teoría de la utilidad, esto es, a cada curso de acción (o medida de probabilidad) X se le asocia un escalar* $u(x)$ (o un valor esperado $E(u, X)$), de modo que las preferencias del que decide pueden traducirse en desigualdades entre los escalares (o valores esperados) asociados a cada acción**. La conexión entre la toma de decisiones y la teoría de la utilidad es que, una vez obtenida la función de utilidad, el problema de tomar el mejor curso de acción puede ser traducido al de maximizar la utilidad.

*Ver condiciones de existencia en la referencia # 7

**Nótese que $f = u$ es una función real y $\succ = >$.

4.5. EL PROBLEMA DE TOMA DE DECISIONES

Haciendo lo menos restrictiva a la relación de preferencias $\succ$, un problema de toma de decisiones consiste en determinar*:

1) Un conjunto A excluyente y exhaustivo de eventos decidibles, denominados cursos de acción,
2) un conjunto $\mathcal{E}$, llamado conjunto de estimación de consecuencias,
3) una función subyectiva $e: A \to \mathcal{E}$, llamada función de estimación de consecuencias,
4) una relación binaria asimétrica $\succ$ en el conjunto $\mathcal{E}$, denominada relación de preferencia, y
5) un curso de acción $a \in A$ tal que $e(a) \succsim e(b)$ para todo $b \in A$, llamado solución (del problema de toma de decisiones).

El conjunto $\mathcal{E}$ y la función e se especifican a partir de:

6) un conjunto C excluyente y exhaustivo de eventos, denominado conjunto de consecuencias, cada uno de cuyos elementos representa la consecuencia de llevar a cabo algún curso de acción en A, y
7) el conocimiento que se tenga de una función $c: A \to C$ tal que $c(a) \in C$ representa, la consecuencia de llevar a cabo el curso de acción $a \in A$; la existencia de dicha función se supone a priori (antes de llevar a ca

*Ver referencia # 11

be algún curso de acción).

La función $e: A \to \mathcal{E}$ representa el estimado de la $c: A \to C$, es decir, $e(a)$ es el estimado de $c(a)$, la consecuencia de llevar a cabo el curso de acción $a \in A$. Sobre la estructuración de $\mathcal{E}$ a partir de C se puede tener que para todo $a \in A$, $e(a)$ sea un elemento de C o un subconjunto de C (no se tiene una medida (una medida) de probabilidad) o una medida de probabilidad en C; dependiendo de que el problema de toma de decisiciones sea bajo certeza o incertidumbre o riesgo respectivamente. Como se ve, el conjunto $\mathcal{E}$ para es último caso está formado por medidas de probabilidad.

Para determinar la relación de preferencia $\succ$ en $\mathcal{E}$ se requiere conocer normalmente:

8) un ordenamiento en C, denotado también por $\succ$ por no presentarse a confusión, independientemente de los cursos de acción asociados a las consecuencias.

En la toma de decisiones bajo certeza, $\succ$ en C coincide con $\succ$ en $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E} = C$), en la toma de decisiones bajo incertidumbre hay una infinidad de posibilidades, para $\succ$ en C, dependiendo del método para resolver el problema* y en la bajo riesgo, si se usa modelo de utilidad, mediante una función real (medible) sobre C, U, llamada función de utili_

*Ver referencia # 11

dad, tal que

$$R \succ S \iff E(u,R) > E(u,S) \quad \forall\, R,S \in \mathcal{E}$$

donde $E(u,R)$ es el valor esperado de u respecto de la medi da $R \in \mathcal{E}$.

En la toma de decisiones bajo incertidumbre y riego se puede presentar el caso de que sean conocidos:

9) Un conjunto S excluyente y exhaustivo (conjunto muestral) de eventos, denominados estados del mundo, y

10) una función $C': S \times A \rightarrow C$, tal que la consecuencia del curso de acción $a \in A$ es $c'(s,a)$, donde s es el estado del mundo, el cual no se conoce con certeza.

Finalmente la solución a un problema bajo certeza se reduce a un problema de optimización si la relación de preferencia $\succ$ en C admite una representación numérica a través de una función real* (llamada de valor), la solución de un problema bajo incertidumbre depende del método a usar** y en el caso de riesgo si la función de utilidad existe y es conocida, entonces, el problema se reduce, también, a uno de optimización. Para este último caso existe un procedimiento usual para estimar la función de utilidad que representa a $\succ$ en $\mathcal{E}$***.

En este capítulo se ha mostrado la importancia que tienen las relaciones de orden en la toma de decisiones. Mediante ellas se establecen las condiciones para que las preferencias del decisor sean "racionales" y los requisitos complementarios para que además se puedan modelar éstas por una función de utilidad. La importancia de la Toma de Decisiones dentro de la Teoría General de Sistemas, estriba en que permite modelar sistemas concretos en que intervienen decisiones.

*Ver referencia #7
**Ver referencia #11
***Ver referencia #5

CAPITULO 5

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

RETICULAS Y ALGEBRAS BOOLEANAS

Se define el concepto de retículas como un conjunto parcialmente ordenado tal que cada subconjunto finito tiene un ínfimo y un supremo. Las álgebras booleanas se introducen como un caso particular de las retículas. Se termina el capítulo definiendo homomorfismo de retículas y de álgebras booleanas.

5.1. SUPREMO E INFIMO

Recordemos la definición de un conjunto parcialmente ordenado. Un conjunto no vacío E y una relación binaria sobre E, $\leq$, forman un conjunto parcialmente ordenado sii $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva:

a) $x \leq x \ \forall x \in E$ (reflexiva)

b) si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$ (antisimétrica)

c) si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$ (transitiva)

Nótese:

1) Que la relación dual, definida de la siguiente manera, $x \geq y$ sii $y \leq x$, es también reflexiva, antisimétrica y transitiva (es decir, es también un orden parcial).

2) Que la relación $\leq$ es conexa, entonces E es un conjunto linealmente (totalmente) ordenado.

3) Que cualquier subconjunto no vacío de un conjunto parcialmente ordenado, es también un conjunto parcialmente ordenado bajo la misma relación binaria.

Def. Supremo. Sea E un conjunto parcialmente ordenado y A una colección no vacía de elementos de E; se dice que $z \in E$ es un supremo de A sii

1) $x \leq z \quad \forall\ x \in A$

2) si $x \leq v\ \forall\ x \in A$, entonces $z \leq v$ $(\forall\ v \in E)$

Si la colección $A \subset E$ tiene un supremo, entonces este es único y se denota por $\sup. A$. Nótese que si z está en A entonces la condición 1) es suficiente.

Def. INFIMO. Sea E un conjunto parcialmente ordenado y A una colección no vacía de elementos de E; se dice que $z \in E$ es un ínfimo de A sii

1) $z \leq x \quad \forall\ x \in A$

2) si $v \leq x\ \forall\ x \in A$, entonces $v \leq z$ $(\forall\ v \in E)$

Si la colección $A \subset E$ tiene un ínfimo, entonces este es único y se denota por $\text{Inf}. A$. Nótese que si z está en A entonces la condición 1) es suficiente.

Sea $A=\{a_t | t\in I\}\subset E$ una colección cualquiera no vacía de elementos de E, donde I es un conjunto de índices; si el supremo y el ínfimo de dicha colección existen en E, entonces ellos se denotan respectivamente por

$$\bigvee_{t\in I} a_t = \operatorname{Sup}_t^{I} a_t \qquad y \qquad \bigwedge_{t\in I} a_t = \operatorname{Inf}_t^{I} a_t$$

Un conjunto parcialmente ordenado E, es m-completo, donde m es un número cardinal distinto de cero, sii toda colección $\{a_t | t\in I\}$ en E con $0<I\leq m$ (I= número cardinal) tiene un supremo y un ínfimo en E. Entonces, si E es m-completo necesariamente, es m'-completo para todo $m'\leq m$ ($m'>0$). Además, E es $\aleph$-completo sii E es m-completo para cualquier m finito distinto de cero, y en este caso se dice que E es una retícula.

5.2. RETICULAS Y PROPIEDADES

Def. Una retícula es un conjunto parcialmente ordenado E, en el cual todo par de elementos $x, y\in E$ tienen un supremo y un ínfimo.

Podemos observar que todo conjunto totalmente ordenado es una retícula, pero no lo es todo conjunto parcialmente ordenado.

Toda retícula finita se puede representar gráficamente, mediante un diagrama de nodos en diferentes niveles, unidos por líneas no dirigidas.

Para retículas es posible formular el principio de DUALIDAD siguiente:

Cualquier afirmación verdadera acerca de retículas implicando las operaciones $\wedge$ y $\vee$ y las relaciones $\leq$ y $\geq$, permanece cierta si $\wedge$ es reemplazada por $\vee$, $\vee$ por $\wedge$, $\leq$ por $\geq$ y $\geq$ por $\leq$.

PROPIEDADES

En una retícula E, las operaciones binarias $\wedge$ y $\vee$ satisfacen las relaciones siguientes:

a) Conmutativa: $x \vee y = y \vee x \quad , \quad x \wedge y = y \wedge x$

b) Asociativa: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \, , \, x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

c) Idempotencia: $x \vee x = x \, , \, x \wedge x = x$

d) Ley de Absorción: $x \vee (x \wedge y) = x \, , \, x \wedge (x \vee y) = x$

e) $x \leq y \iff x \wedge y = x \iff x \vee y = y$

f) Isotonicidad: $y \leq z \Rightarrow (x \wedge y \leq x \wedge z \, , x \vee y \leq x \vee z)$

g) Desigualdades distributivas: $\begin{cases} x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{cases}$

h) Desigualdad Modular: $x \leq z \iff x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$

La propiedad e) establece una conexión entre la relación de orden parcial $\leq$ y las dos operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ en una retícula E, de manera que una forma equivalente de definir una retícula es la siguiente:

Def. Una retícula es un sistema algebraico $\langle E, \vee, \wedge \rangle$ con dos operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ en E las cuales son ambas (1) conmutativa, (2) asociativa y (3) satisfacen las leyes de la absorción.

La ventaja de considerar una retícula como un sistema algebraico es que muchos conceptos, los cuales son asociados con sistemas algebraicos, pueden ser aplicados a retículas. Así es posible definir subretículas, producto directo de retículas, homomorfismos de retículas, etc.

Para terminar esta sección, daremos la definición de subretículas y la de producto directo de retículas.

Def. Una subretícula de una retícula E, es un subconjunto no vacío $A \leq E$, el cual es cerrado bajo las operaciones de la retícula $\vee$ y $\wedge$.

De la definición se sigue que una subretícula es ella misma una retícula. Sin embargo no todo subconjunto de una retícula es una retícula.

Def. Sea $\langle E, *, \oplus \rangle$ y $\langle D, \wedge, \vee \rangle$ dos retículas. El sistema algebraico $\langle E\times D, \cdot, + \rangle$ en el cual las operaciones binarias $+$ y $\cdot$ en $E\times D$ son tales que para cualquier (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en $E\times D$

$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1 * x_2, y_1 \wedge y_2)$$

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1 \oplus x_2, y_1 \vee y_2)$$

es llamado el PRODUCTO DIRECTO de las retículas $\langle E, *, \oplus \rangle$ y $\langle D, \wedge, \vee \rangle$.

Podemos observar que el producto directo es una retícula.

La definición de homomorfismo la daremos en la última sección de este capítulo.

5.3. RETICULAS ESPECIALES

σ-RETICULA. Def. Una retícula X se dice que es una σ-retícula sii todo subconjunto contable (numerable o finito) de X tiene un supremo y un ínfimo, es decir, sii es "Alef cero" completo.

RETICULA COMPLETA. Def. Una retícula es llamada completa sii es m-completa para todo cardinal m, o sea, si cada uno de sus subconjuntos no vacíos, tiene un supremo y un ínfimo.

Obviamente, toda retícula finita es completa. También, toda retícula completa debe tener un elemento ínfimo y un elemento supremo. El supremo y el ínfimo de la retícula, si existen, son llamados límites de la retícula y son denotados por e (elemento unidad) y ϕ (Elemento cero) respectivamente. Una retícula con ambos límites es llamada retícula LIMITADA. En una retícula limitada $\langle E,\wedge,\vee,\phi,e\rangle$, un elemento $y\in E$ es llamado un COMPLEMENTO de un elemento $x\in E$ si

$$x\wedge y=\phi\ ,\ x\vee y=e$$

RETICULA COMPLEMENTADA. Def. Una retícula $\langle E,\wedge,\vee,\phi,e\rangle$ es complementada si todo elemento de E, tiene al menos un complemento.

RETICULA DISTRIBUTIVA. Def. Se dice que una retícula , es distributiva sii se cumple cualquiera de las siguientes condiciones, las cuales son equivalentes entre sí

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z),\ x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

Podemos darnos cuenta que todo conjunto totalmente ordenado es una retícula distributiva. Igualmente sucede para el producto directo de cualquiera dos retículas distributivas y para cualquiera subretícula de una retícula distributiva.

Una consecuencia importante de una retícula distributiva E, es que si un elemento $x\in E$ tiene un complemento, entonces debe ser único.

Si consideramos, por último, aquellas retículas las cuales son complementadas así como distributivas, entonces estamos asumiendo que todo elemento de una de estas retículas tiene un único complemento y denotamos el complemento de un elemento $x\in E$ por x^c. Las retículas que son complementadas y distributivas son llamadas álgebras booleanas.

5.4. ALGEBRAS BOOLEANAS

Def. Una Algebra Booleana $\langle B,\wedge,\vee,^c,\phi,e\rangle$ es una retícula distributiva, con elemento unidad, elemento cero y complementada. Equivalentemente, una álgebra booleana es una álgebra con dos operaciones binarias $\wedge$ y $\vee$, y con una operación unitaria ^{c} (formación de complementos, i,e ; un mapeo $x \to x^c$ de B en el mismo) satisfaciendo las si_ guientes propiedades*:

1) $x \vee y = y \vee x$ $\qquad x \wedge y = y \wedge x$

2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ $\qquad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

3) $x \vee x = x$ $\qquad x \wedge x = x$

4) $x \vee (x \wedge y) = x$ $\qquad x \wedge (x \vee y) = x$

5) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ $\qquad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

6) $x \vee \phi = x$ $\qquad x \wedge e = x$

7) $x \wedge \phi = \phi$ $\qquad x \vee e = e$

8) $x \vee x^c = e$ $\qquad x \wedge x^c = \phi$

Nótese que siguiendo esta última definición, bajo el ordenamiento parcial sobre B, $\leq$, definida para toda $x, y \in B$ por

$x \leq y$ sii $x \wedge y = x$ (o equivalente $x \vee y = y$)

B es una retícula distributiva, con elemento unidad e, e_ lemento cero ϕ y complementada.

Nos podemos dar cuenta que las dos operaciones bina_ rias $\wedge$ y $\vee$, la operación unaria ^{c} y los elementos ϕ y e no son todos independientes, porque unos se pueden definir a partir de otros. Uno puede definir una álgebra booleana, por ejemplo, en términos de las operaciones $\vee$ y $\wedge$ y un _

*Podemos con base en estas propiedades, deducir muchas _ otras.

conjunto de propiedades independientes satisfechas por estas operaciones*. Este es el caso de la definición dada por Huntington, en la que ninguna propiedad puede deducirse de las propiedades restantes y viene dada por: una clase de elementos $\mathcal{B}$ junto con dos operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ es una álgebra booleana sii se verifican las siguientes propiedades:

1) Las operaciones $\wedge$ y $\vee$ son conmutativas.
2) Existen en $\mathcal{B}$ distintos elementos identidad ϕ y e relativos a las operaciones $\vee$ y $\wedge$, respectivamente.
3) Cada operación es distributiva respecto a la otra.
4) Para cada $x \in \mathcal{B}$ existe un elemento x' de $\mathcal{B}$, tal que $x \vee x' = e$ y $x \wedge x' = \phi$

Una álgebra booleana es degenerada si ella contiene solo un elemento y trivial si contiene solo dos elementos (ϕ y e).

SUBALGEBRA BOOLEANA. Def. Sea $\langle \mathcal{B}, \wedge, \vee, {}^c, \phi, e \rangle$ una álgebra booleana y $A \subseteq \mathcal{B}$. Si A contiene los elementos ϕ y e, y es cerrado bajo las operaciones $\wedge$, $\vee$ y ^{c}, entonces $\langle A, \vee, \vee, {}^c, \phi, e \rangle$ es llamada subálgebra booleana.

Nótese que para cualquier $x, y \in \mathcal{B}$, $x \vee y = (x^c \wedge y^c)^c$, $e = (x \wedge x^c)^c$ y $\phi = x \wedge x^c$; por lo que en la práctica no es ne

*El principio de dualidad también vale para álgebras booleanas.

nesario rectificar la cerradura respecto a las tres operaciones $\wedge$, $\vee$ y ^{c} ni es necesario, tampoco, rectificar que e y ϕ estén en A. Unicamente la cerradura respecto al conjunto de operaciones $\langle \wedge, ^c \rangle$ o $\langle \vee, ^c \rangle$ garantiza que A es una subálgebra, conteniendo como elemento unidad y cero a los mismos que B respectivamente. Podemos también observar que toda subálgebra booleana es una álgebra booleana y que no todo subconjunto de una a.b. es álgebra booleana. Se puede demostrar que la intersección de cualquier número de subálgebras de B es una subálgebra de B.

PRODUCTO DIRECTO DE A.B. Def. sean $\langle B_1, \wedge_1, \vee_1, ', \phi_1, e_1 \rangle$ y $\langle B_2, \wedge_2, \vee_2, '', \phi_2, e_2 \rangle$ dos álgebras booleanas. El producto directo de las dos álgebras está definido como una álgebra booleana que está dada por $\langle B_1 \times B_2, \wedge_3, \vee_3, ''', \phi_3, e_3 \rangle$ en la cual las operaciones están definidas para cualquier (a_1, b_1) y $(a_2, b_2) \in B_1 \times B_2$ como

$$(a_1, b_1) \wedge_3 (a_2, b_2) = (a_1 \wedge_1 a_2, b_1 \wedge_2 b_2)$$
$$(a_1, b_1) \vee_3 (a_2, b_2) = (a_1 \vee_1 a_2, b_1 \vee_2 b_2)$$
$$(a_1, b_1)''' = (a_1', b_1'')$$
$$\phi_3 = (\phi_1, \phi_2) \quad y \quad e_3 = (e_1, e_2)$$

El producto directo de álgebras booleanas nos permite definir nuevas álgebras booleanas. Así, por ejemplo, de una álgebra booleana B de dos elementos, podemos generar $B \times B = B^2$, $B \times B \times B = B^3$, ..., B^n, hasta una álgebra con elementos que son n-adas.

5.5. HOMOMORFISMOS

Def. Sean $\langle E, *, \oplus \rangle$ y $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ dos retículas. Una función $h: E \to A$ es llamada un homomorfismo (de retículas) si para cualquier $x, y \in E$

1) $h(x * y) = h(x) \wedge h(y)$, 2) $h(x \oplus y) = h(x) \vee h(y)$

Obsérvese que ambas operaciones deben ser preservadas. Si se cumple 1) la función se conoce como multiplicativa o si se cumple 2) se conoce como función aditiva. Puede verse fácilmente que un homomorfismo h preserva el orden, es decir, si $x, y \in E$ tal que $x \leq y$ entonces $h(x) \leq' h(y)$, con $h(x), h(y) \in A$.

Si h es un homomorfismo uno a uno, entonces h es llamado un isomorfismo. Si existe un isomorfismo subyectivo entre dos retículas, entonces estas son llamadas isomorfas.

Def. Sean $\langle B, *, \oplus, ', \emptyset, e \rangle$ y $\langle P, \wedge, \vee, ^c, \alpha, \beta \rangle$ dos álgebras booleanas. Una función $h: B \to P$ es llamada un homomorfismo (de álgebras booleanas) sii todas las operaciones del a.b. son preservadas, esto es; para cualquier $x, y \in B$

$$h(x * y) = h(x) \wedge h(y) \quad , \quad h(x \oplus y) = h(x) \vee h(y)$$

$$\text{y} \qquad h(x') = [h(x)]^c$$

Por las leyes de De Morgan la definición de homomorfismo de a.b. puede ser simplificada aceptando que $h: B \to P$ preserve únicamente las operaciones $*$ y $'$ o las operaciones $\oplus$ y ^{c}. Es inmediato que un homomorfismo de a.b. de B

en P, es un homomorfismo de retícula, esto es; una función que preserva las operaciones * y ⊕, la cual mapea el cero y la unidad de B en el cero y la unidad de P respectivamente.

Cabe hacer notar que la imagen $h(B) \leq P$ de un homomorfismo $h: B \to P$ es una subálgebra de P.

Una función h de B en P es un Isomorfismo (de a.b.) sii h es un homomorfismo uno a uno. Si h es un isomorfismo, entonces la función inversa $h^{-1}: h(B) \to B$ es también un isomorfismo. Si existe un isomorfismo subyectivo de P sobre B, entonces las a.b. P y B se dice que son isomorfas; en este caso h^{-1} es un isomorfismo de B en P.

Un caso muy importante de a.b. isomorfas, es el que muestra el TEOREMA DE REPRESENTACIONES DE STONE, que dice: Cualquier álgebra booleana es isomorfa a un campo de conjuntos.

C A P I T U L O 6

APLICACIONES

En el capítulo anterior hemos dado los conceptos necesarios sobre álgebras booleanas. En éste utilizaremos esos conceptos para constatar que las álgebras de proposiciones, de interruptores y de conjuntos son casos particulares de las álgebras booleanas. Haremos notar que las dos primeras son mucho más restringidas que una álgebra de conjuntos; de hecho, este concepto es tan general que toda álgebra booleana puede interpretarse como una álgebra de conjuntos.

6.1. ALGEBRA DE PROPOSICIONES

La Lógica trata del estudio y el análisis de métodos de razonamiento o argumentación. La Lógica Simbólica o Lógica Matemática se ocupa de los aspectos matemáticos de estos métodos.

Como sabemos, la lógica se centra alrededor del concepto de proposición (declaración). La herramienta principal para el tratamiento de proposiciones es el álgebra de proposiciones, la cual es una álgebra booleana, como se va a demostrar.

Por proposición entendemos toda oración declaratoria que está libre de ambigüedad por tener la propiedad de que es cierta o falsa, pero no ambos. Entonces, los términos cierto y falso se excluyen mutuamente y uno de ellos se aplica necesariamente a cada proposición. La verdad o falsedad de una proposición se llama su valor de verdad.

Vamos a denotar las proposiciones con letras minúsculas (con o sin subíndices) $p, q, r, \ldots$. Cuando no se les da un significado específico, estas se llaman variables proposicionales y se usan para representar proposiciones arbitrarias.

De cualquier proposición o conjunto de proposiciones, se pueden formar otras, con la propiedad fundamental de que su valor de verdad está determinado por completo por el valor de verdad de cada uno de los enunciados (o proposiciones) que las forman y por el modo como se les reúne para formar la proposición compuesta. Existen varias proposiciones compuestas básicas formadas por otras, aquí sólo veremos cinco:

1) Negación de una proposición p. Dada una proposición p, se puede formar otra, que se llama negación de p, escribiendo "es falso que p" y la denotamos por p'. El valor de verdad de esta proposición debe cumplir que si p es cierto, p' es falsa y cuando p es falsa, p' es cierta.

2) CONJUNCION DE p y q. Las proposiciones p y q se pueden combinar para formar otra, que se llama conjun

ción de p y q, escribiendo "ambas p y q". Se denota ésta por $p \cdot q$. El valor de verdad de esta proposición es: $p \cdot q$ es cierta cuando p y q son ciertas y falsa cuando una o ambas son falsas.

3) DISYUNCION DE p y q. La proposición disyunción de p y q se forma como "o p o q o ambas". Se denta por $p+q$. Se necesita que esta proposición sea cierta cuando una u otra o ambas sean ciertas y falsa cuando ambas p y q sean falsas.

4) CONDICIONAL DE p y q (implicación material). Se define la proposición $\rightarrow$, llamada condicional, por la ecuación $(p \rightarrow q) = p' + q$ para proposiciones arbitrarias p y q. O sea $p \rightarrow q$ es equivalente a la proposición "o no p o q".

La proposición $p \rightarrow q$ no indica que q pueda deducirse sistemáticamente de p; la igualdad con que se define esta proposición considera solamente los valores de verdad y no su significado.

5) BICONDICIONAL DE p y q. (Equivalencia material). Para dos proposiciones cualesquiera p y q, la relación $\leftrightarrow$, llamada bicondicional, se define como $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow p)$. O sea $p \leftrightarrow q$ es verdadera si p y q tienen, en todos los casos, el mismo valor verdad; si p y q tienen, en algún caso, valores de verdad opuestos, entonces $p \leftrightarrow q$ es falso.

Nótese que $p = q$ no es una proposición como $p \leftrightarrow q$, sino una declaración acerca de proposiciones.

Se dice que toda combinación finita de variables proposicionales mediante las operaciones (+), (·) y ('), o si se quisiera, por las operaciones (+), (·), ('), (→) y (↔), es una función o polinomio proposicional. Se dice que dos funciones son iguales (o lógicamente equivalentes) si y sólo si tienen el mismo valor verdad para cada forma posible de asignar valores a las n variables que intervienen en las funciones. Una manera fácil de comprobar si dos funciones son o no iguales, es haciendo una tabla en donde se consideren todas las posibles combinaciones de valores asignados a las variables proposicionales que aparecen en las dos funciones. A estas tablas se les da el nombre de tablas de verdad.

Dos proposiciones muy útiles son: V, la proposición que siempre es cierta y F, la que siempre es falsa. Entendiendo por $p = V$, que p es verdadera y $q = F$ que q es falsa.

Una proposición (o una función proposicional) $P(p_1, p_2, \ldots)$ que siempre es verdadera, sean cuales fueren las proposiciones $p_{10}, p_{20}, \ldots$ que toman las variables $p_1, p_2, \ldots$, se le conoce con el nombre de TAUTOLOGIA; o sea una tautología sólo contiene V en la última columna de su tabla de verdad. En el caso contrario que $P(p_1, p_2, \ldots)$ siem-

pre sea falso se le conoce con el nombre de CONTRADIC___
CION. Como se ve la negación de una tautología es una contradicción y viceversa.

Recordando que P y Q son lógicamente equivalentes si sus tablas de verdad son idénticas. Esto se denota por $P \equiv Q$ o sea que $P \equiv Q$ sii $P \leftrightarrow Q$ es una tautología. Nótese que la relación definida, entre proposiciones, por $P \equiv Q$ es una relación de equivalencia.

Si ahora consideramos el conjunto de todas las proposiciones $\mathcal{P}$ y los conectivos (u operaciones) $(+)$, $(\cdot)$ y $(')$; con marco de referencia todo lo anteriormente expuesto, obtenemos una álgebra de proposiciones que es un caso particular de una álgebra booleana. Pues, se puede ver que se cumplen todas las propiedades y leyes de una a.b., o sea según la definición de Huntington, se tiene que $\langle \mathcal{P}, +, \cdot \rangle$ cumple con:

1) si $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$

$$P_1 + P_2 \equiv P_2 + P_1 \quad \text{y} \quad P_1 \cdot P_2 \equiv P_2 \cdot P_1$$

2) Existe $V, F \in \mathcal{P}$ tal que

$$P_1 + F \equiv P_1 \quad \text{y} \quad P_1 \cdot V \equiv P_1$$

3) Si P_1, P_2 y $P_3 \in \mathcal{P}$

$$P_1 + (P_2 \cdot P_3) \equiv (P_1 + P_2) \cdot (P_1 + P_3) \text{ y } P_1 \cdot (P_2 + P_3) \equiv (P_1 \cdot P_2) + (P_1 \cdot P_3)$$

4) Para cada $P_1 \in \mathcal{P}$ existe un elemento $P_1' \in \mathcal{P}$, tal que

$$P_1 + P_1' \equiv V \qquad P_1 \cdot P_1' \equiv F$$

Nótese que V es una tautología y F una contradicción.

Para demostrar cada una de estas propiedades se puede hacer mediante las tablas de verdad correspondientes.

Como vemos, se tiene una álgebra booleana de proposiciones $\langle \mathcal{P}, +, \cdot, ', V, F \rangle$, con las operaciones conjunción, disyunción y negación, con elemento cero F y elemento unidad V.

Para terminar esta aplicación, la pregunta que nos queda de contestar es: ¿En el álgebra de proposiciones, cuál es la relación de orden, en el conjunto $\mathcal{P}$?. Para contestarla introduscamos el concepto de IMPLICACION LÓGICA.

Se dice que una proposición $P(p_1, p_2, \ldots)$, implica lógicamente una proposición $Q(p_1, p_2, \ldots)$, denotada por $P \Rightarrow Q$, si se verifica una de las condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & P' + Q & \text{es una tautología} \\ 2) & P \cdot Q' & \text{es una contradicción} \\ 3) & P \rightarrow Q & \text{es una tautología} \end{array}\right\} \cdots (1)$$

Como se ve hemos formado una relación entre proposiciones dada por $P \Rightarrow Q$, la cual puede demostrarse que es reflexiva, antisimétrica y transitiva, o sea una relación de orden parcial.

Para darnos cuenta de lo anterior, recordemos que para toda $x, y \in B$, $x \leq y$ sii $x \wedge y' = \emptyset$ (lo cual es equivalen te a que $x \wedge y = x$). En nuestro caso para P y $Q \in \mathcal{P}$, $P \leq Q$ sii $P \cdot Q' \equiv F$ o empleando la ley de DE-MORGAN, $P' + Q \equiv V$ es decir $P \Rightarrow Q \equiv V$ (por ①). Esto es lo mismo que decir que $P \Rightarrow Q$ es una tautología. Por tanto $P \leq Q$ sii $P \Rightarrow Q$ tautológicamente. Hemos encontrado, por lo tanto, la relación de orden sobre $\mathcal{P}$.

Vemos pues que $\langle \mathcal{P}, \cdot, +, ', F, V \rangle$ es un álgebra booleana en donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de proposiciones, $\cdot$, $+$ y $'$ son las operaciones conjunción, disyunción y negación respectivamente. Los elementos F, V denotan proposiciones las cuales son contradicciones y tautologías respectivamente. Dos proposiciones que son equivalentes, la una a la otra, son consideradas iguales. La relación de orden parcial correspondiente a las operaciones $\cdot$ y $+$ es la implicación lógica.

6.2. ALGEBRA DE INTERRUPTORES

Esta álgebra cae dentro del caso general de un álgebra booleana, con dos elementos. Esto implica que, excepto por el significado, es idéntica al álgebra de proposiciones desde un punto de vista abstracto. Cualquiera de estas álgebras booleanas es mucho más restringida que un álgebra de conjuntos. Como sabemos toda álgebra booleana puede interpretarse como un álgebra de conjuntos.

En esta álgebra el estado de los dos elementos, varía_ con los dispositivos usados (diodos, transistores, núcleos _ magenéticos, etc.) incluyendo estados conductivos y no con_ ductivos, cerrados y abiertos, cargados y descargados, magne tizados y no magnetizados, etc.

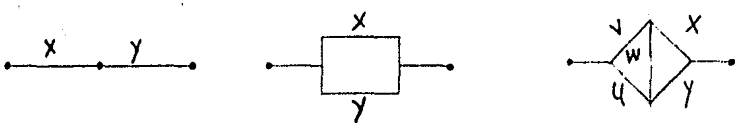
En la actualidad es la aplicación del álgebra booleana _ que más se está utilizando en el diseño y simplificación de circuitos de computadoras electrónicas y gran variedad de _ dispositivos de control electrónico.

Se discutirá paralelamente, dos tipos específicos de cir_ cuitos de interruptores: circuitos de contactos y circuitos_ lógicos. Los primeros son dispositivos de alambres y contac_ tos* (interruptores) que se pueden construir mediante combi_ naciones en serie y en paralelo; una manera de representar__ los es mediante una red. Las segundas son combinaciones de _ elementos lógicos, llamados compuertas (elementos cuyas en_ tradas y salidas sólo pueden tomar dos valores 0 y 1). Estos circuitos constituyen el comportamiento lógico de los circui tos digitales. Los circuitos digitales están caracterizados_ por el hecho de que las señales en el circuito (voltajes o _ corrientes) asumen un número finito de de valores discretos. Principalmente estos circuitos son usados en las computado__ ras digitales y sistemas de switches telefónico. Considera__

*Un contacto (interruptor) es un dispositivo que sirve para cerrar o abrir un circuito eléctrico.

remos solamente, los más usados, aquellos donde cada señal puede asumir solamente uno de dos valores, denotados por los símbolos 0 y 1.

Dos contactos x, y están conectados en serie sii, el circuito está cerrado cuando los dos interruptores están cerrados, y abierto si uno de los interruptores está abierto. Dos interruptores x, y están conectados en paralelo sii, el circuito está cerrado cuando uno o ambos interruptores están cerrados y abierto cuando los interruptores están abiertos. Si dos contactos operan en tal forma que el primero siempre está abierto cuando el segundo está cerrado y viceversa, designaremos al primero con una letra, digamos x, y al segundo con x'. Una combinación de interruptores que no está conectada ni en serie ni en paralelo se llama un puente. Gráficamente tenemos:



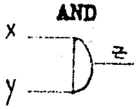
$x \cdot y$ serie $\quad x+y$ paralelo $\quad$ puente

Convenimos en asignar el valor 1 a una letra si esta representa un conmutador (contacto) cerrado, y el valor 0 si representa un conmutador abierto. Un conmutador que siempre está cerrado está representando por 1, y uno que siempre está abierto, por 0.

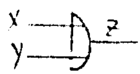
Combinando interruptores mediante las operaciones +, · y ' se obtienen nuevos interruptores; los cuales se conocen como funciones o polinomios de contactos. O sea, si X denota la n-ada de conmutadores (contactos) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y K conjunto de todos los contactos entonces la función anterior es un mapeo de X en K, definido por la especificación de los elementos $y \in K$ correspondientes a cada n-ada.

En el caso de los circuitos lógicos las operaciones que tenemos son: AND, OR y NOT representadas por las compuertas siguientes:

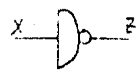
AND



OR



NOT



x	y	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	z
0	1
1	0

Nótese que la operación de una compuerta está descrita completamente especificando el valor de su salida para cada posible combinación de los valores de entrada.

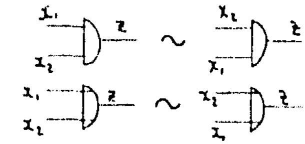
Combinando compuertas AND, OR y NOT, se obtienen o una función combinacional o una función secuencial. La diferencia entre estas dos funciones es que, los valores de la primera dependen solamente de sus presentes entradas y la segunda no. Aquí nos referiremos sólo a las primeras. O sea si X denota las n-adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $x_i \in E$, $1 \leq i \leq n$, entonces una función combinacional $f(X)$ es un mapeo de X en E; donde $E = \{0,1\}$ y $f(X)$ depende solamente del valor presente de X.

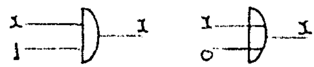
Si usamos las variables x_1 y x_2 por ejemplo, para representar las entradas de la compuerta AND y z para representar la salida, entonces ésta puede ser descrita como $z = x_1 \cdot x_2$. Lo cual es equivalente a tener dos contactos en serie representados por x_1 y x_2. Similarmente OR es representado por $z = x_1 + x_2$ y el NOT por $z = \bar{x}$. Lo que corresponde a tener dos contactos en paralelo y el contrario de uno que funciona respectivamente.

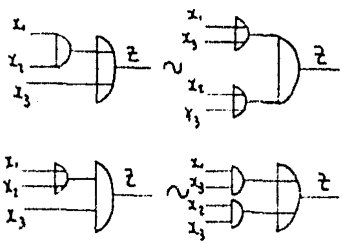
Por lo anterior, todo lo que se diga de las compuertas será aplicable para los contactos. También podemos darnos cuenta que lo que se diga para una o varias compuertas será válido para una o varias funciones de compuertas.

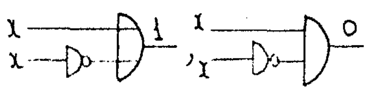
Para conocer el valor de una función de compuertas o conmutadores se puede usar una tabla de verdad, dándole a las variables los valores de cero o uno.

Si ahora consideramos el conjunto de todas las funciones combinacionales C y las compuertas AND, OR y NOT. Con marco de referencia todo lo anteriormente expuesto, obtenemos una álgebra de compuertas* que es un caso particular de una álgebra booleana. Pues se puede ver que se cumplen todas las propiedades y leyes de una a.b., o sea según la definición de Huntington, se tiene que $\langle C, AND, OR \rangle$ cumple con:

1) 

2) 

3) 

4) 

Notemos que realmente en este caso y en el del álgebra de proposiciones tenemos una combinación de álgebras booleanas generada, cada una, por un conjunto con dos elementos. O sea si $\langle B, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ es una álgebra booleana generada por $B = \{0,1\}$ entonces podemos generar nuevas álgebras booleanas mediante el producto directo $B \times B = B^2$,

*El elemento 0 es una entrada que siempre tiene el valor de 0, y el elemento 1 es una entrada que siempre tiene el valor de 1.

$B\times B\times B=B^3$,...., hasta el a.b. de n-adas B^n, la cual viene_ dada por B_n el conjunto de n-adas cuyos miembros son 0 ó 1. Así $a\in B_n$ sii $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ donde $a_i=0$ ó 1 para $i=1,2,\ldots,n$. Para cualquier $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, y $a,b\in B_n$

$$a*b=(a_1\wedge b_1,a_2\wedge b_2,\ldots,a_n\wedge b_n)$$
$$a\oplus b=(a_1\vee b_1,a_2\vee b_2,\ldots,a_n\vee b_n)$$
$$\neg a=(a_1',a_2',\ldots,a_n')$$

donde $\wedge$, $\vee$ y $'$ son las operaciones usadas en el álgebra _ de proposiciones o en la de interruptores generados con _ dos elementos. El álgebra $\langle B_n,*,\oplus,',0_n,1_n\rangle$ es un ál_ gebra booleana en la cual 0_n y 1_n son n-adas cuyos miem_ bres todos son 0_s y 1_s respectivamente.

6.3. ALGEBRA DE CONJUNTOS

Una de las aplicaciones más importantes del álgebra __ booleana es la que surge con los conjuntos, cuando se in_ vestiga la forma en que pueden combinarse éstos.

Sabemos que un conjunto es una colección de objetos __ bien definidos. Llamaremos a los objetos que constituyen un conjunto, elementos. Como símbolos para representar a los conjuntos, usaremos las letras del alfabeto en mayúsculas (A, B, X, etc.) y las letras minúsculas (a, b, x, y, etc.), para representar a los elementos*. Para denotar que un e_

*Representamos también un conjunto, enlistando todos sus ele_ mentos dentro de $\{\ \}$.

lemento pertenece a un conjunto, usaremos el símbolo $\in$; en caso contrario $\notin$. Nótese que el álgebra discutida aquí, es una álgebra para conjuntos, no para elementos de conjuntos.

Diremos que un conjunto X es subconjunto de un conjunto Y sii $\forall x \in X \Rightarrow x \in Y$, y lo denotamos por $X \subset Y$. Entonces se dirá que dos conjuntos son iguales, y escribimos $X = Y$, sii contienen exactamente los mismos elementos.

Se define al conjunto que contiene a todos los elementos, en cuetión, como el conjunto universal y se denota por Ω. Al conjunto que no contiene ningún elemento le llamamos, conjunto vacío y lo representamos por $\emptyset$.

Definamos ahora las operaciones mediante las cuales los conjuntos pueden combinarse para formar nuevos conjuntos:

1) La UNION de dos conjuntos arbitrarios A y B se define como $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$; o sea es el conjunto que consta de todos los elementos que están en A o en B o en ambos.

2) La INTERSECCION de A y B, para conjuntos arbitrarios A y B, se define como $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$; o sea es el conjunto que consta de aquellos elementos que están tanto en A como en B.

3) El COMPLEMENTO de A, se define como $A^c = \{x \mid x \notin A\}$; esto es A^c es el conjunto de todos los elementos, del con

junto universal en cuestión, que no son elementos de A.

Podemos entonces ahora sí darnos cuenta que el álgebra de conjuntos es una álgebra booleana. O sea si $\mathcal{A}$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de Ω en cuestión, entonces $\{\mathcal{A}, \cap, \cup, ^c, \phi, \Omega\}$ es una álgebra booleana, porque se cumple que:

1) si $A, B \in \mathcal{A}$
$A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$

2) $\exists\ \Omega, \phi \in \mathcal{A}$ tal que
$A \cup \phi = A$ y $A \cap \Omega = A$

3) si A, B y $C \in \mathcal{A}$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) Para cada $A \in \mathcal{A}$ $\exists$ un elemento $A' \in \mathcal{A}$ tal que
$A \cup A^c = \Omega$ y $A \cap A^c = \phi$

Para demostrar cada una de estas propiedades se puede hacer mediante elementos genéricos.

Nos damos cuenta que la relación de orden parcial en $\mathcal{A}$ correspondiendo a las operaciones $\cap$ y $\cup$ es la relación subconjunto $\subset$; ya que para A y $B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ sii $A \cap B^c = \phi$.

Esta aplicación de las álgebras booleanas es una de las más importantes, ya que con base en el teorema de representación de M. H. Stone, toda álgebra booleana abstracta es isomorfa a una álgebra de conjuntos. Esto nos conduce a que es posible reemplazar un sistema abstracto por un sistema equivalente e intuitivo en alto grado, lo cual puede sugerirnos nuevas ideas y teoremas que de otra forma sería difícil descubrirlas.

Teorema de Stone. Toda álgebra Booleana B es isomorfa a un campo F de subconjuntos de un conjunto Ω con $\Omega \in F$. El campo F, se dice que es el campo de Stone o la representación de Stone de B por un campo.

En este capítulo se han mostrado aplicaciones de relaciones con condiciones adicionales. Las diferentes álgebras consideradas nos hacen constatar la existencia de un núcleo común para estudiar sistemas abstractos y conceptuales, como se indicó en el capítulo dos. Esto está conforme con la Teoría General de Sistemas que busca la unificación de la ciencia.

CAPITULO 7

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

PROCESOS ESTOCASTICOS

En este último capítulo trataremos a los procesos estocásticos desde el punto de vista de las álgebras booleanas de eventos aleatorios, considerando el caso general, en el cual los eventos en las distintas álgebras booleanas $\{Y_t\}_{t\in T}$ son interdependientes. Si ocurren independientemente, el álgebra de todos los eventos, X, es un producto booleano. Para el caso general se usa el concepto de relación booleana*, el cual es un subconjunto del producto booleano que a su vez es una álgebra booleana. Para que se puedan especificar las relaciones entre eventos en a.b's. Y_t diferentes es necesario que cualquier elemento o evento aleatorio** de toda álgebra Y_t, tenga un representante en el álgebra X, en el sentido de que cada evento en Y_t es equivalente, como evento, a su representante en X. Esto permite que una medida de probabilidad sobre X determine las correspondientes medidas de probabilidad sobre las Y_t. Con base en el teorema de Stone es posible ver la relación entre ambas representaciones (homomorfismos

*Este concepto ha sido definido por Servio T. Guillen, en el proyecto 3526 "Representación de Sistemas de Eventos Aleatorios mediante Algebras Booleanas" Instituto de Ingeniería U.N.A.M.

**Entendemos por evento aleatorio aquel que puede o no ocurrir.

y mapeos medibles).

7.1. GENERALIDADES

Un proceso estocástico se define como una familia de variables aleatorias, cada una de las cuales es un mapeo medible. De manera más explícita, en un proceso estocástico se consideran:

1) Un conjunto de índices, T.
2) Un conjunto de eventos elementales, Ω.
3) Para cada $t \in T$, un espacio de eventos elementales, S_t.
4) Un campo de conjuntos de Ω, X.
5) Para cada $t \in T$ un campo de conjuntos de S_t, Y_t.
6) Para cada $t \in T$ un mapeo medible (respecto de los campos de conjuntos X, Y_t), $\varphi_t : \Omega \rightarrow S_t$.
7) Una medida de probabilidad sobre X, P.

Entiéndase que el proceso estocástico está formado por un conjunto de mapeos medibles $\{\varphi_t : t \in T\}$ y por la medida de probabilidad P.

En la anterior definición cada evento aleatorio es un conjunto formado por eventos elementales mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Se puede observar también que esta representación, del sistema de eventos aleatorios, está desligada del concepto de probabilidad. Podemos, sin embargo, notar que $\{\varphi_t : \Omega \rightarrow S_t\}_{t \in T}$ es la parte no aleatoria (determinista) del proceso estocástico, la cual es equivalente a la definición de sistema (cap. 3) como una relación cartesiana. La condición de que cada mapeo $\varphi_t: \Omega \to S_t$ sea medible es equivalente a que cada evento aleatorio $y \in Y_t$, donde $y \subset S_t$, tiene un representante en X, el cual es $\varphi_t^{-1}(y) \subset \Omega$, donde $\varphi_t^{-1}(y) \in X$. Se puede demostrar que si φ_t es medible, entonces $\varphi_t^{-1}: Y_t \to X$ es un homomorfismo del campo de eventos de Y_t en el campo de eventos de X, denominado homomorfismo inducido por la función medible φ_t.

Entonces, en un proceso estocástico las funciones medibles son directamente un modelo "determinista" del proceso y sus inversos, o sea, los correspondientes homomorfismos inducidos, dan una representación del sistema de eventos aleatorios $\{Y_t\}_{t \in T}$.

En relación con lo anterior, cabe la pregunta de si existen sistemas de eventos aleatorios que no tengan asociado un modelo determinista, es decir, sistemas de eventos aleatorios que no puedan representarse mediante un proceso estocástico. La respuesta a ésta pregunta es negativa para cuando se tiene una σ-álgebra booleana*; este es el caso que traba y le interesa a la probabilidad. Sin embargo es interesante plantear cómo puede ser representado en general un sistema de eventos aleatorios sin_

*Ver referencia #27 . Pags. 117 y 137.

recurrir a funciones medibles (las cuales, como se dijo, contienen en sí a un modelo determinista).

7.2. EVENTOS ALEATORIOS

Como sabemos, un evento aleatorio es un evento que puede ocurrir o no. Sean $\{Y_t\}_{t\in T}$ álgebras booleanas cuyos elementos se interpretan como eventos aleatorios. Se desea encontrar relaciones entre eventos en a.b. distintas. En el a.b. producto de las $\{Y_t\}_{t\in T}$ cada evento en cualquier a.b. Y_t tiene un representante en el producto, por lo que si en esta a.b. producto se eliminan todas las combinaciones imposibles, se obtiene una a.b. . Por tanto, si $h_t(y)$ es el representante en X del evento $y\in Y_t$, entonces $h_t: Y_t \to X$ es un homomorfismo:

$h_t(y^c) = h_t^c(y)$	el representante de y^c es $h_t^c(y)$
$h_t(y_1 \vee y_2) = h_t(y_1) \vee h_t(y_2)$	el representante de $y_1 \vee y_2$ es el supremo de sus representantes

Nótese que $\{h_t\}_{t\in T}$ es un conjunto indexado de subálgebras de X. Se dice que el par $\{\{h_t\}_{t\in T}, X\}$ es una RELACIÓN BOOLEANA sii

a) X es un álgebra booleana

b) para cada $t\in T$, h_t es un homomorfismo de Y_t en X

c) la unión de todas las subálgebras $h_t(Y_t)$, $t\in T$, genera X.

En particular si para cada $t \in T$, Y_t es una subálgebra booleana de X y $h_t : Y_t \to X$ es el mapeo identidad, entonces el a.b. X es una relación booleana de $\{Y_t\}_{t \in T}$ sii el par $\{\{h_t\}_{t \in T}, X\}$ es una relación booleana de $\{Y_t\}_{t \in T}$.

En el caso que los eventos en las distintas a.b's., ocurran independientemente se tiene que el conjunto indexado $\{h_t\}_{t \in T}$ de subálgebras de X es independiente* y se dice que el a.b. X es el PRODUCTO BOOLEANO de $\{h_t\}_{t \in T}$. Como se ve este producto es una clase particular de relaciones booleanas. Puede también definirse el producto booleano como una relación booleana $\{\{i_t\}_{t \in T}, P\}$ de $\{Y_t\}_{t \in T}$ en la que cada homomorfismo i_t, $t \in T$, es isomorfismo y el conjunto indexado $\{i_t(Y_t)\}_{t \in T}$ de subálgebras de P es independiente.

Se puede demostrar que todo conjunto indexado $\{Y_t\}_{t \in T}$ de a.b. no degeneradas tiene un producto booleano, el cual es único salvo isomorfismos y que toda relación booleana está determinada unívocamente por un homomorfismo subyectivo sobre el producto booleano.

*Un conjunto indexado $\{h_t\}_{t \in T}$ de subálgebras booleana de una a.b. X es independiente si para toda secuencia $\{a_{t_1}, a_{t_2}, \dots, a_{t_n}\}$ tal que $a_t \in h_t$ y $a_t \neq \emptyset_X$, para toda $t \in I = \{t_1, \dots, t_n\}$, se cumple la desigualdad $\bigwedge_{t \in I} a_t \neq \emptyset_X$.

7.3. MEDIDAS DE PROBABILIDAD

Una medida de probabilidad sobre una a.b. X (denotada por P_X) es una función real sobre X, P_X, tal que

1) $P_X(x) \geq 0$ para toda $x \in X$.
2) $P_X(e) = 1$
3) $x, y \in X$, $x \wedge y = \phi$ implica $P_X(x \vee y) = P_X(x) + P_X(y)$

donde e, ϕ son el elemento unidad y el elemento cero del a.b. X, respectivamente.

Directamente se puede verificar que h_t es un homomorfismo sii P_X es una medida de probabilidad y la función real P_t sobre Y_t, definida por $P_t(y) = P_X(h_t(y)) \; \forall \, y \in Y_t$, es una medida de probabilidad sobre el a.b. Y_t; esta medida se denomina medida marginal de probabilidad sobre Y_t inducida por P_X bajo el homomorfismo h_t.

Una medida de probabilidad sobre el sistema $\{\{h_t\}_{t \in T}, X\}$ * es una función real P sobre $Y = X \cup (\bigcup_{t \in T} Y_t)$ tal que sus restricciones $P_X = P|X$ y $P_t = P|Y_t$**, para todo $t \in T$, son medidas de probabilidad sobre X y $Y_t, t \in T$, respectivamente, los cuales se relacionan por

$$P_t(y) = P_X(h_t(y)) \quad \text{para todo } \; y \in Y_t, \; t \in T$$

*Un sistema de álgebras booleanas es un par $\{\{h_t\}_{t \in T}, X\}$ tal que X es una a.b. y para cada $t \in T$, h_t es un homomorfismo de Y_t en X.

**Estas probabilidades se denominan INDUCIDAS por la medida P sobre el sistema $\{\{h_t\}_{t \in T}, X\}$.

La anterior condición establece que la probabilidad de cada $y \in Y_t$, $t \in T$, es igual a la de su representante $h_t(y) \in X$.

7.4. RELACIONES ENTRE LAS DOS REPRESENTACIONES

Como hemos visto, cada proceso estocástico puede ser considerado como un conjunto indexado de homomorfismos entre álgebras booleanas; lo cual se puede entender por que toda a.b. X es isomorfa al campo de todos los subconjuntos abiertos-cerrados de un espacio compacto totalmente desconectado, el cual se denomina un Espacio de Stone del a.b. X y que en este espacio todo homomorfismo es inducido por una función medible.

Con base en lo anterior se puede probar que en cualquier relación booleana $\{\{h_t\}_{t \in T}, X\}$ de $\{Y_t\}_{t \in T}$, las a.b. Y_t y X se pueden representar por campos de subconjuntos de espacios S_t, S_X; respectivamente, y homomorfismos $h_t : Y_t \to X$ por funciones $\phi : S_X \to S_t$, cada una de las cuales debe ser una función medible.

Por último, a partir del resultado de Stone se puede probar la correspondencia biunívoca entre las relaciones booleanas de $\{Y_t\}_{t \in T}$ y las relaciones cartesianas de $\{S_t\}_{t \in T}$ o sea, cada relación booleana de $\{Y_t\}_{t \in T}$ tiene por espacio de Stone a una relación cartesiana de $\{S_t\}_{t \in T}$; en particular, el producto booleano de $\{Y_t\}_{t \in T}$ tiene por espacio de Stone al producto carte_ siano de $\{S_t\}_{t\in T}$.

Esta última aplicación ha sido considerada aquí porque muestra la utilización de las álgebras booleanas a un aspecto muy importante de los sistemas, que es su comportamiento aleatorio. Esto se presenta prácticamente en cualquier sistema, independientemente de su naturaleza.

C O N C L U S I O N E S

En el desarrollo de esta tesis esperamos haber mostrado que la Teoría de Relaciones contiene conceptos generales que, al hecrlos intervenir explícitamente en la formulación de una gran variedad de problemas, permiten una visión, unificadora de temas importantes que pueden considerarse dentro del ámbito de la Teoría General de Sistemas.

Lo anterior no significa que la Teoría de Relaciones sea suficiente para llegar a una Teoría General de Sistemas verdaderamente unificada, si es que ésto pudiera lograrse algún día.

Consideramos que algunas de las ideas expuestas en esta tesis podrían tener aplicación en la enseñanza de ciertos temas que tradicionalmente se presentan en forma separada, sin conexiones.

Hay que hacer notar que esta tesis se restringe a temas usualmente dentro del curriculum de las mestrías en ingeniería, por lo que no es exhaustiva en cuanto a los usos de la Teoría de Relaciones dentro de la Teoría General de Sistemas. Esto iría a más allá de los objetivos y alcances propuestos. Así, no se considera por ejemplo la Teoría de la Medición, la cual se construye sobre bases algo similares a las de la Teoría de Decisiones.

BIBLIOGRAFIA

1.- Bertalanffy Ludwig von. Teoría General de los Sistemas. Fondo de Cultura Económica. México. 1982.

2.- Canales R., Guillen S. T. y Moroos J. Toma de Decisiones con Objetivos Múltiples, Caso Determinista. Investigadores, Instituto de Ingeniería, UNAM. México.

3.- Canales Ruiz Roberto y Barrera Rivera Renato. Análisis de Sistemas Dinámicos y Control Automático. Editorial Limusa. México. 1980.

4.- Chipman Jhon S. The Fundations of Utility. Readings in Mathematical Psychology. Jhon Wiley and Sons, Inc. New York.

5.- Duncan Luce R. y Raiffa Howard. Games and Decisions: introduction and critical survey. Jhon Wiley & Sons, Inc.

6.- Ferrater Mora José y Leblanc Hugues. Lógica Matemática. Fondo de Cultura Económica. México. 1983.

7.- Fishburn Peter C. Utility Theory for Decision Making. Jhon Wiley & Sons, Inc. New York. 1970.

8.- Flament Claude, Teoría de Grafos y Estructuras de Grupos. Editorial Tecnos. Madrid. 1972.

9.- Friedman Arthur D. y Menon Premachandran R. Theory & Design of Switching Circuits. Computer Science Press, Inc. United States of América. 1975.

10.- Gigch, Jhon P. van. Teoría General de Sistemas Aplicada. Editorial Limusa. México. 1981.

11.- Guillen Servio T. Apuntes de clase: Teoría Matemática de Sistemas. DEPFI, UNAM, México. 1985.

12.- Guillen Servio T. Representación de Sistemas de Eventos Aleatorios Mediante Algebras Booleanas. Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM. México. 1985.

13.- Hill Frederick J. y Peterson Gerald R. Teoría de Conmutación y Diseño Lógico. Editorial Limusa. México. 1982.

14.- Jurdevic Velimir. On the Structure of Irreducible State Representations of a Causal System. Mathematical Systems Theory, Vol.8 No.1. Springer-Verlag. New York. 1974.

15.- Kappos D. A. Probability Algebras and Stochastic Spaces. Academic Press. Nueva York y Londres. 1969.

16.- Kaufmann A. y Précigout M. Curso de Matemáticas Nuevas. Editorial Continental. España. 1970.

17.- Klir George J. An Approach to General Systems Theory. Van Nostrand Renhold Company. United States of América. 1969.

18.- Klir George J. Tendencias en la Teoría General de Sistemas. Editorial Alianza Universidad. España. 1984.

19.- Lilienfeld Robert. Teoría de Sistemas: Orígenes y Aplicaciones en Ciencias Sociales. Editorial Trillas. México. 1984.

20.- Lipschutz Seymour. Teoría de Conjuntos y Temas Afines: Teoría y Problemas. McGraw-Hill. México. 1974.

21.- M. Bunger. Epistemología. Editorial Ariel. Barcelona-Caracas-México. 1980.

22.- Mosterin Jesús. La Estructura de los Conceptos Científicos. Investigación y Ciencia, edición en español de Scientific American No.16 enero de 1978.

23.- Mutafian Claude. Algebra, Generalidades y Grupos. Editorial Continental. México. 1979.

24.- Cohen Resse Fepipe Dr. Método de los Sistemas. DEPFI, UNAM. México. 1983.

25.- Pinzón Escamilla Alvaro. Conjuntos y Estructuras. Editorial HARLA. México. 1975.

26.- Selby Samuel y Sweet Leonard. Sets Relations Functions an Introduction. McGraw-Hill Book Company, Inc. United States of América. 1963.

27.- Sikorsky Roman. Boolean Algebras. Springer-Verlay. Germany. 1964.

28.- Tremblay J. P. y Manohar R. Discrete Mathematical Structures with Applications to Computer Science. McGraw-Hill. United States of América. 1975.

29.- Whitesitt J. Elden. Algebra Booleana y sus Aplicaciones. _ Editorial Continental. México. 1983.

30.- Windeknecht T. G. Mathematical Systems Theory, Vol.1 No.4. Springer-Verlag. New York.