

01170
2ej. 6

CONTROL ADAPTABLE DE UN CANAL DE RIEGO.

VICTOR MANUEL RUIZ CARMONA

Tesis

Presentada a la División de Estudios de
Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener
el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA

(ELECTRICA)

CIUDAD UNIVERSITARIA

Marzo de 1987

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

R E S U M E N

En este trabajo se estudia la estabilidad del flujo en un tramo de canal abierto realimentado, con control P y PI tomando la información del nivel del agua en uno o dos puntos del tramo de canal, usando la teoría de estabilidad para sistemas de convolución. Se encontró que al realimentar el nivel aguas arriba y aguas abajo del tramo de canal, aumenta el margen de ganancia y se reduce el tiempo de establecimiento.

Se estudió además el funcionamiento de un controlador predictor general (GPC) aplicado a un tramo de canal abierto, observando que este último presenta un mejor comportamiento ante la no-linealidad del sistema comparado con el control de parámetros constantes P-PI.

I N D I C E

Capítulo 1 :	página
Introducción.	1-1
Capítulo 2 :	
Estudio de la estabilidad del control del flujo en un canal abierto.	
1.- Introducción.	2-1
2.- Teoría de estabilidad en sistemas de convolución.	2-1
3.- Aplicación a un tramo de canal abierto rectangular.	2-4
3.1 - Modelo matemático y linealización.	2-4
3.2 - Función de transferencia.	2-7
3.3 - Ubicación de los polos de $G(s)$.	2-9
3.4 - Estudio de la estabilidad del control.	2-12
4.- Conclusiones.	2-21
Capítulo 2 :	
Empleo de un controlador predictor general en un canal abierto.	
1.- Introducción.	3-1
2.- Predictor multipaso.	3-2
2.1 - Predictor a un paso	3-2
2.2 - Extensión del predictor a un paso al predictor para $r > 1$ pasos.	3-4
2.3 - Predictor multipaso autosintonizable.	3-6

2.4 - Representación de estados del predictor multipaso.	3-8
3.- Ley de control con base en la predicción.	3-9
4.- Aplicación de un controlador predictor general a un tramo de un canal abierto rectangular (teoría lineal).	3-14
5.- Canal rectangular abierto (modelo no lineal).	3-17
6.- Conclusiones.	3-24
 Capítulo 4 :	
Conclusiones comentarios y perspectivas	4-1
 Apéndice A :	
Obtención de las ecuaciones para el estudio de estabilidad del flujo en un canal rectangular abierto (teoría lineal).	A-1
 Apéndice B :	
Comparación de la respuesta en frecuencia teórica y práctica en un tramo de canal (teoría lineal).	B-1
 Apéndice C :	
Empleo del método de Preissman para la solución numérica de una aproximación lineal de un canal rectangular.	C-1
 Apéndice D :	
Representación del predictor multipaso en forma de ecuación de estados.	D-1
 Bibliografía :	 E-1

C A P I T U L O I

Introducción

En este trabajo se estudia el control de canales abiertos, con el objeto de hacer más eficiente el manejo del agua que a través de ellos se transporta.

En los algoritmos de control usados en un tramo de canal abierto la variable a regular es el nivel del agua en algún punto del tramo, ya que éste nos da información sobre variaciones en el gasto requerido por los siguientes tramos, o bien, por las tomas laterales.

Clásicamente se han usado dos tipos de estrategias de control, las cuales son :

- a) Control aguas abajo.
- b) Control aguas arriba.

donde los términos "aguas arriba" y "aguas abajo", se refieren a la ubicación relativa del tirante a controlar respecto a la posición de la compuerta de control.

De estos dos algoritmos se ha encontrado que el que presenta un mejor funcionamiento, ya que permite variaciones en los gastos de las tomas laterales, sin afectar el gasto requerido por los siguientes tramos de canal, es el control aguas abajo [Mah.1].

Existen tres distintos tipos de control aguas abajo, que están determinados por la ubicación del tirante a supervisar, éstos son :

- Control del nivel aguas arriba del tramo.
- Control del nivel aguas abajo del tramo.
- Control bival.

En el control aguas arriba del tramo (llamado posteriormente en este trabajo, "control aguas arriba") el nivel a regular es el tirante aguas abajo de la compuerta de control (tirante inicial). Para el control aguas abajo del tramo (llamado posteriormente en este trabajo, "control aguas abajo") el nivel regulado es el tirante más alejado de la compuerta de control, es decir, el tirante aguas arriba de la compuerta de control del siguiente tramo (tirante final). En el control bival se regula un promedio pesado de los tirantes antes mencionados, aguas abajo de la

compuerta de control del tramo y aguas arriba de la compuerta de control del siguiente tramo.

Regular el nivel del tramo de canal más alejado de la compuerta de control presenta la ventaja de requerir bordos en el canal de menor altura, además de dar información inmediata sobre las variaciones en los gastos laterales y en el gasto usado por los tramos siguientes. Se ha encontrado que si, además de realimentar el tirante final del tramo, se realimenta el tirante inicial, se observa que los tiempos de respuesta se reducen, al igual que el error en estado estable a una entrada escalón.

Para entender mejor el funcionamiento del control del nivel aguas abajo, aguas arriba y bival, en el capítulo II de este trabajo, se estudia la estabilidad del flujo en un tramo de canal realimentado alrededor de un punto de funcionamiento, usando la teoría para sistemas de convolución desarrollada por Descer [Des.1], Vidyasager [Vid.1] y Callier [Cal.1].

Debido a la no linealidad presentada por el flujo en el tramo de canal y al hecho de que perturbaciones (apertura de la compuerta aguas abajo del tramo de canal, cambio en el tirante (nivel) aguas arriba de la compuerta de control, cambio en el tirante aguas abajo de la compuerta de control, etc.) producen cambios en el modelo de la planta (relación entre las compuertas y los tirantes aguas arriba y aguas abajo del tramo de canal), se ve la necesidad de usar un algoritmo de control que permita tener un funcionamiento óptimo en distintos puntos de operación de la planta. Se decidió usar un control adaptable.

Dada la complejidad de la planta, puesto que se trata de un sistema de parámetros distribuidos no lineal (el modelo varía con el punto de funcionamiento al igual que el retardo), se opta por seleccionar un algoritmo adaptable que requiriera poca información a priori del sistema, siendo seleccionado el Controlador Predictor General (GPC). El estudio de este tipo de control adaptable aplicado al flujo en un tramo de canal aparece en el capítulo III.

Este trabajo es un primer estudio sobre el control de un sistema de distribución de agua, en el que no se consideraron las interacciones que existen entre los distintos tramos de canal que forman el sistema de distribución. Por lo tanto, para finalizar este trabajo en el capítulo IV, se mencionan algunos de los problemas que existen al tener tramos interconectados.

C A P I T U L O II

Estudio de la estabilidad del control del flujo en un canal abierto

1. - Introducción:

La teoría de estabilidad fue desarrollada inicialmente para sistemas de parámetros concentrados. Su generalización a sistemas de parámetros distribuidos, como es el caso del flujo en un canal abierto, no es inmediata.

Para estudiar la estabilidad de los sistemas realimentados de parámetros distribuidos se usan los resultados obtenidos por Zober y Vidyasagar [Des.1], para sistemas de convolución.

En este capítulo se aplica la teoría de sistemas de convolución al flujo en un canal rectangular abierto, requiriéndose linealizar las ecuaciones diferenciales parciales que los describen. Con las ecuaciones linealizadas se procede a obtener su función de transferencia en "s" (transformada de Laplace), pudiéndose encontrar de este modo su respuesta en frecuencia. Esto permite el estudio de la estabilidad de los algoritmos de control proporcional y proporcional - integral, aplicados al tramo de canal en estudio alrededor de un punto de funcionamiento.

2. - Teoría de estabilidad en sistemas de convolución [Des.1]:

Para hablar de la teoría de estabilidad es necesario, como primer paso, definir lo que se entiende por sistema de convolución.

Un sistema de convolución es aquel sistema lineal e invariante en el tiempo, cuya relación entrada-salida se puede representar por una convolución, estos sistemas lineales incluyen a los sistemas de parámetros concentrados, distribuidos y con retardo.

Sea $A^{(n \times n)}$ el conjunto de matrices de dimensión $n \times n$, cuyos elementos g_{ij} ($i, j=1..n$) son de la forma:

$$g_{ij} = \begin{cases} g_{ij}^a(t) + \sum_{k=0}^{\infty} g_{ij}^k \delta(t-t_k) & \text{para } t \geq 0. \\ 0 & \text{para } t < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

donde:

$$g_{ij}^a(t) \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad g_{ij}^k \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |g_{ij}^k| < \infty \quad ; \quad \text{con } t_0 = 0 \quad \text{y}$$

$t_k > 0$ para toda k .

En $A^{n \times n}$ están definidas tres operaciones: la adición de dos elementos, la multiplicación de un elemento por un escalar, y la multiplicación de dos elementos (convolución). Bajo las dos primeras se comporta como un espacio vectorial lineal sobre los reales, mientras que la tercera operación es asociativa, distributiva sobre la suma y conmutativa respecto de la multiplicación por un escalar. Además $A^{n \times n}$ es cerrado bajo la operación de multiplicación de dos elementos, por lo tanto, $A^{n \times n}$ es un álgebra no conmutativa (la multiplicación de dos elementos) con unidad, siendo la unidad $\delta(t) I_{n \times n}$ (matriz identidad de $n \times n$).

Si se toma la definición de norma para $G \in A^{n \times n}$ como:

$$\|G\| = \max_i \sum_{j=1}^n \|g_{ij}(t)\|_A ; g_{ij} \text{ elemento } (i,j) \text{ de } G \quad (2.2)$$

$$\text{con } \|g_{ij}(t)\|_A = \|g_{ij}^2(t)\|_1 + \sum_{k=0}^{\infty} |g_{ij}^k|$$

se tiene un álgebra de Banach (completa) con unidad.

Considérese el conjunto $\hat{A}^{n \times n}$ formado por las transformadas de Laplace de todos los elementos de $A^{n \times n}$ ($\hat{A} = \mathcal{L}(A)$, con asíntota de convergencia cero) y el sistema realimentado siguiente:

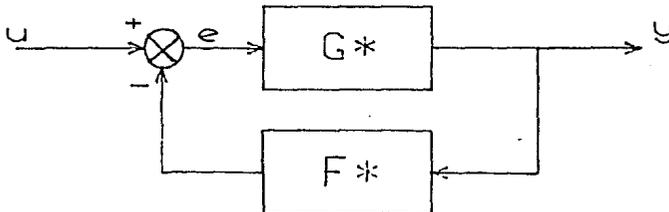


Figura 2.1 Sistema realimentado estudiado.

donde:

- u es la entrada.
- y es la salida.
- e es el error ($e = u - F * y$)
- G y F son sistemas lineales invariantes en el tiempo.

y cuya transformada de Laplace de la relación entrada-salida está descrita por la expresión:

$$\hat{H}(s) = \hat{G}(s) [I + \hat{F}(s) \hat{G}(s)]^{-1} \quad (2.3)$$

Desear enuncia que " $H(\cdot)$ (la respuesta al impulso de $H(s)$) es estable si $H(\cdot) \in A^{n \times n}$ ". Cuando esto se cumple:

$$\|y\|_p \leq \|H\|_A \|u\|_p \text{ para } 1 \leq p \leq \infty.$$

el sistema en lazo cerrado es LP estable para toda $p \in [1, \infty]$, en especial si $p = \infty$ es BIBO (entrada acotada, salida acotada) estable.

De las definiciones del algebra $A^{n \times n}$ y del conjunto $\hat{A}^{n \times n}$ se tiene: si $H(s) \in A^{n \times n}$, entonces $H(\cdot) \in \hat{A}^{n \times n}$ y, por lo tanto, $H(s)$ es estable.

El siguiente teorema establece las condiciones suficientes y necesarias para obtener la estabilidad de la relación entrada-salida de los sistemas de convolución (figura 1):

Teorema 1 :

Sea $G(s)$ de la forma :

$$G(s) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} R_{ij} / (s-p_i)^j + \hat{G}_b(s) = \hat{G}_u(s) + \hat{G}_b(s) \quad (2.4)$$

donde $\text{Re } p_i \geq 0$ para toda i , $G_b \in A^{n \times n}$, R_{ij} una matriz constante de $n \times n$, k el número de polos en el lado derecho del plano complejo y m_i la multiplicidad de cada polo.

Sea $\hat{G}_u(s) = \hat{N}(s) \hat{D}(s)^{-1}$, donde $\hat{N}(s)$ y $\hat{D}(s)$ son matrices polinomiales coprimas por la derecha (el máximo divisor derecho de $\hat{N}(s)$ y $\hat{D}(s)$ es unimodular [Wol.11] y además $\hat{D}(s)$ es propia por columnas (el rango de la matriz formada por los coeficientes de los términos de mayor grado de cada columna es completo).

Supóngase que $\hat{F}(s) \in \hat{A}^{n \times n}$.

Entonces $\hat{H}(s) = \hat{G}(s) (I + \hat{F}(s) \hat{G}(s))^{-1} \in A^{n \times n}$ si y sólo si :

$$i) \inf_{\text{Re } s \geq 0} |\det [I + \hat{F}(s) \hat{G}(s)]| > 0. \quad (2.5)$$

y

$$ii) \det [\hat{D}(p_i) + \hat{F}(p_i) \hat{N}(p_i) + \hat{F}(p_i) \hat{G}(p_i) \hat{D}(p_i)] \neq 0. \quad (2.6)$$

para $i=1..k$

La condición i) del teorema anterior, puede verificarse para un caso especial usando el llamado test gráfico [Des.2, Cal.1, Vid.11]. Para la segunda condición se evalúa el determinante (2.6) para cada uno de los polos de $\hat{G}(s)$ (2.4) ubicados en el semiplano derecho del plano complejo y se verifica que el valor del determinante sea distinto de cero.

Se supone $\hat{F}(s) = \text{cte.}$ y :

$$\det [I + \hat{F} \hat{G}(s)] = 1 + \hat{g}(s) = 1 + \hat{g}_a(s) + \sum_{i=0}^{\infty} g_i e^{-st_i} + \sum_{k=1}^{l_0} \sum_{\alpha=1}^{m_k} r_{k\alpha} / (s-p_k)^\alpha \quad (2.7)$$

con $g_k \in L^1$, $\operatorname{Re} p_k \geq \sigma$ para toda k , $\sum_0^\infty |g_k| < \infty$, $t_0 = 0$, $t_i > 0$ para $i > 0$, "lo" el número de polos en el lado derecho del plano complejo y μ_k la multiplicidad de cada polo.

Defínase como :

$$\theta(j\omega) \triangleq \arg [1 + \hat{G}(j\omega)] \quad (2.8)$$

y

$$g_0 = \hat{G}(s) \text{ cuando } s \rightarrow \infty \text{ sobre el eje real.}$$

Teorema 2 (Test Gráfico) :

Sea el sistema (2.4), con el determinante (2.7) ($\hat{F}(s) = \text{cte.}$) y la definición (2.8), considérese que las t_i de (2.7) están relacionadas racionalmente, es decir, que $t_i = n_i \tau$ para todo $i \in (N \cup \emptyset)$ con $(n_i)_0^\infty$ una secuencia de enteros no negativos, $\tau > 0$ y $n_0 = 0$.

$$\inf_{\operatorname{Re} s \geq 0} \det [I + F \hat{G}(s)] > 0$$

si y sólo si

$$i) \quad 1 + g_0 \neq -0 \quad (2.9)$$

$$ii) \quad 1 + \hat{G}(j\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$iii) \quad \theta = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} [\theta(j\Omega) - \theta(-j\Omega)] = \sum_{k=1}^{l_0} \mu_k \triangleq n_p \quad (2.10)$$

donde esta última condición implica que, a medida que ω aumenta de $-\infty$ a $+\infty$, la imagen de $1 + \hat{G}(j\omega)$ sigue la curva de Nyquist y circunda al origen n_p veces en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

En el Teorema 2 la primera condición indica que g_0 debe ser distinto de -1 , en cuanto a las últimas dos condiciones se refieren al empleo del criterio de Nyquist [Gsa.1].

3.- Aplicación a un trazo de canal abierto rectangular.

3.1 Modelo matemático y linealización :

Usando balance de cantidad de movimiento y de masa en un intervalo diferencial del canal y tomando en cuenta las siguientes hipótesis :

- H₁ - La variación de la superficie del agua es gradual, es decir, la aceleración vertical es despreciable.
- H₂ - La distribución de velocidades a través del área hidráulica es constante.
- H₃ - El movimiento de una onda puede tomarse como bidimensional en un plano vertical.
- H₄ - La pendiente media del fondo del canal respecto a la horizontal es pequeña ($\operatorname{tg}(\alpha) \approx \alpha \approx \operatorname{sen}(\alpha)$).

H₅ - Las pérdidas por fricción en el flujo no permanente no son significativamente distintas a las de flujo permanente.

se obtiene un par de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, conocidas como ecuaciones de Saint-Venant [Cho.1].

Para el balance de cantidad de movimiento se tiene la ecuación :

$$\frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial t} = -g \frac{\partial \bar{y}(x,t)}{\partial x} - \bar{v}(x,t) \frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial x} - g (S_f(x,t) - \alpha) \quad (2.11)$$

mientras que el balance de masa está dado por:

$$\frac{\partial \bar{y}(x,t)}{\partial t} = -\bar{v}(x,t) \frac{\partial \bar{y}(x,t)}{\partial x} - \bar{y}(x,t) \frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial x} \quad (2.12)$$

donde :

$\bar{v}(x,t)$ es la velocidad en la posición $0 \leq x \leq l$ y el tiempo $0 \leq t \leq \infty$.

$\bar{y}(x,t)$ es el tirante (altura del nivel de agua sobre la plantilla) en la posición $0 \leq x \leq l$ y el tiempo $0 \leq t \leq \infty$.

α es la pendiente del canal (constante para $0 \leq x \leq l$).

g es la aceleración de la gravedad.

$S_f(x,t)$ es el coeficiente de fricción.

l es la longitud del canal.

El coeficiente de fricción está expresado por la ecuación empírica de Manning [Cho.1], mediante :

$$S_f(x,t) = (n Q)^2 P^{-2} \left[\frac{P}{A} \right]^{4/3} \quad (2.13)$$

en esta última ecuación para un canal rectangular :

$P = T + 2 \bar{y}(x,t)$ perimetro mojado.

$A = T \bar{y}(x,t)$ área de la sección transversal.

n es el coeficiente de Manning.

Q es el gasto.

T es el ancho de la plantilla del canal.

Las condiciones de frontera, determinadas por las compuertas aguas arriba y aguas abajo, se encuentran expresadas por la ecuación :

$$q = C_D W [2 g \Delta \bar{y}]^{1/2} \quad (2.14)$$

en la cual :

C_D es el coeficiente de descarga.

W es la apertura de la compuerta.

q es el flujo por unidad de ancho del canal.

$\Delta \bar{y}$ es la diferencia de niveles del agua de uno y otro lado de cada compuerta.

Se estudiará la estabilidad del canal realimentado linealizando las ecuaciones (2.11) y (2.12), en un punto de operación de flujo uniforme (velocidad = cte. y tirante = cte. a lo largo del canal); dado por el tirante " Y_0 ", la velocidad " V_0 " y las aperturas en compuertas " W_{01} " y " W_{02} ".

Considérese que $v(x,t)$, $y(x,t)$, w_1 y w_2 son las desviaciones respecto al punto de operación, en las velocidades, el tirante y las apertura de las compuertas; el tirante aguas arriba de la compuerta 1 y el tirante aguas abajo de la compuerta 2 son " Y_u " y " Y_d ", respectivamente (figura 2.2). Con estos datos se linealizan las ecuaciones (2.11) y (2.12) alrededor del punto de flujo uniforme, usando una aproximación mediante series de Taylor donde, tomando únicamente el primer término, así como usando los resultados siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{f}(x,t) \frac{\partial \bar{g}(x,t)}{\partial x}); \quad (\bar{f}(x,t) - \bar{f}(x,0)) = f(x,t) \frac{\partial \bar{g}(x,0)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial g} (\bar{f}(x,t) \frac{\partial \bar{g}(x,t)}{\partial x}); \quad (\bar{f}(x,t) - \bar{f}(x,0)) = \bar{f}(x,0) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial g} (\bar{g}(x,t) \frac{\partial \bar{g}(x,t)}{\partial x}); \quad (\bar{f}(x,t) - \bar{f}(x,0)) = g(x,t) \frac{\partial \bar{g}(x,0)}{\partial x} + \bar{g}(x,0) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x}$$

para:

$\bar{f}(x,t)$ y $\bar{g}(x,t)$ funciones de x y t .

$\bar{f}(x,0)$ y $\bar{g}(x,0)$ punto de funcionamiento para la linealización.

$f(x,t)$ y $g(x,t)$ variación respecto a la función que describe el punto de funcionamiento para toda x .

y considerando flujo uniforme:

$$\frac{\partial \bar{v}(x,0)}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \bar{y}(x,0)}{\partial x} = 0 \quad (2.16)$$

debido a que se tomó gasto establecido en régimen uniforme, se obtiene [Con.1]:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -g \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - V_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - a g y(x,t) - b g v(x,t)$$

y

(2.17)

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -V_0 \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - Y_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

en la cual :

$$a = \frac{\partial S_f(V_0, Y_0)}{\partial y} \quad b = \frac{\partial S_f(V_0, Y_0)}{\partial v} \quad (2.18)$$

En forma similar, también usando series de Taylor, se linealizan las ecuaciones de frontera (2.14) encontrando :

Para la compuerta 1 :

$$y(0, t) = d_{f1} v(0, t) + d_{f2} w_1. \quad (2.19)$$

Para la compuerta 2 :

$$y(1, t) = d_{f3} v(1, t) + d_{f4} w_2. \quad (2.20)$$

donde :

$$\begin{aligned} d_{f1} &= \frac{2 Y_0 (Y_0 - Y_u)}{Y_0 (2 Y_u - Y_0)} \\ d_{f2} &= \frac{2 Y_0 (Y_u - Y_0)}{W_0 (2 Y_u - Y_0)} \\ d_{f3} &= \frac{2 Y_0 (Y_0 - Y_1)}{V_0 (2 Y_1 - Y_0)} \\ d_{f4} &= \frac{2 Y_0 (Y_1 - Y_0)}{W_0 (2 Y_1 - Y_0)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Con lo anterior, el sistema a controlar queda reducido a un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales lineales, con condiciones de frontera que son función del tiempo.

En la figura (2.2a y 2.2b) aparece una comparación entre la respuesta (a entrada cuadrada) del modelo lineal y el no lineal, se puede observar que son muy parecidas si las variaciones respecto al punto de operación son pequeñas.

3.2 Función de transferencia

Para encontrar la función de transferencia que relaciona las entradas (posiciones de las compuertas) y las salidas (tirantes en $x=0$, inicial y $x=1$, final) en el dominio de la frecuencia (requerido para el estudio de la estabilidad), es necesario obtener la transformada de Laplace de las ecuaciones (2.17), con condiciones iniciales nulas ($v(x, 0) = 0$ y $y(x, 0) = 0$ para $0 \leq x \leq 1$) y condiciones de frontera expresadas por las ecuaciones (2.19) y (2.20).

Para aplicar la transformada de Laplace a ecuaciones

diferenciales parciales lineales con coeficientes constantes se deben considerar los siguientes teoremas [Gou.1] :

Teorema 3 :

Si $f(t,x)$ es transformable con respecto a "t", teniendo como transformada a $F(s,x)$ y los límites :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(t,x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} F(s,x) \quad (2.22)$$

existen, entonces :

$$\mathcal{L}_t \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} f(t,x) \right\} = \lim_{x \rightarrow x_0} F(s,x) \quad (2.23)$$

Teorema 4 :

Si $f(t,x)$ es transformable con respecto a "t", teniendo como transformada a $F(s,x)$ y $f(x,t)/x$ existe, entonces :

$$\mathcal{L}_t \left\{ \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \right\} = \frac{\partial F(s,x)}{\partial x} \quad (2.24)$$

Teorema 5 :

Si $f(t,x)$ es transformable con respecto a "t", teniendo como transformada a $F(s,x)$ y $f(0^+,x)$ es el valor inicial de $f(t,x)$, entonces :

$$\mathcal{L}_t \left\{ \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} \right\} = sF(s,x) - f(0^+,x) \quad (2.25)$$

Con base en los teoremas anteriores se obtiene la transformada de Laplace de las ecuaciones (2.17) :

$$s \hat{V}(x,s) = -g \frac{\partial \hat{V}(x,s)}{\partial x} - U_0 \frac{\hat{V}(x,s)}{x} - a g \hat{V}(x,s) - b g \hat{V}(x,s) \quad (2.26)$$

$$s \hat{Y}(x,s) = -U_0 \frac{\partial \hat{Y}(x,s)}{\partial x} - Y_0 \frac{\partial \hat{V}(x,s)}{\partial x}$$

como ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera expresadas por la transformada de Laplace de las ecuaciones (2.19) y (2.20), siendo para $x=0$, compuerta 1 (2.19):

$$\hat{Y}(0,s) = d_{f1} \hat{V}(0,s) + d_{f2} \hat{W}_1(s) \quad (2.27)$$

y para $x=1$ la compuerta 2 (2.16):

$$\hat{Y}(1,s) = d_{f3} \hat{V}(1,s) + d_{f4} \hat{W}_2(s) \quad (2.28)$$

Efectuando operaciones y simplificando (Apendice A), se obtiene una relación que vincula las entradas ($\hat{W}_1(s)$, $\hat{W}_2(s)$) y salidas ($\hat{Y}(0,s)$, $\hat{Y}(1,s)$) de la forma :

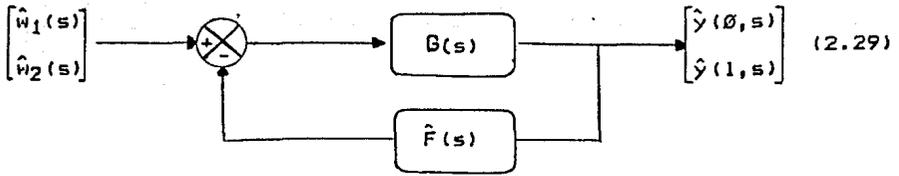


Figura 2.3 Relación entada-salida de un tramo de canal abierto rectangular (teoría lineal).

con :

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} a_1 \hat{D}_1(s) + \hat{a}_3(s) & a_1 \hat{D}_2(s) + \hat{a}_3(s) \\ (a_1 \hat{D}_1(s) + \hat{a}_3(s))e^{\hat{D}_1(s)l} & (a_1 \hat{D}_2(s) + \hat{a}_3(s))e^{\hat{D}_2(s)l} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\hat{a}_2(s) [e^{\hat{D}_2(s)l} - e^{\hat{D}_1(s)l}]} \begin{bmatrix} e^{\hat{D}_2(s)l} & -1 \\ -e^{\hat{D}_1(s)l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{f2}/d_{f1} & 0 \\ 0 & d_{f4}/d_{f3} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$F(s) = \begin{bmatrix} 1/d_{f2} & 0 \\ 0 & 1/d_{f4} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

donde :

$$\begin{aligned} a_1 &= V_0 - g Y_0/V_0 & b_1 &= a_1 \\ \hat{a}_2(s) &= a g - s g /V_0 & \hat{b}_2(s) &= s - a g Y_0/V_0 \\ \hat{a}_3(s) &= s + b g & \hat{b}_3(s) &= - (s + b g) Y_0/V_0 \\ \hat{D}_{1,2}(s) &= (-\hat{d}_1(s) \pm [\hat{d}_1(s)^2 - 4 \hat{d}_2(s)]^{1/2})/2. & (2.32) \\ \hat{d}_1(s) &= \hat{a}_3(s)/a_1 + \hat{b}_2(s)/b_1 \\ \hat{d}_2(s) &= \hat{b}_2(s)\hat{a}_3(s)/(a_1 b_1) - \hat{b}_3(s)\hat{a}_2(s)/(b_1 a_1) \end{aligned}$$

3.3 Ubicación de los polos de $\hat{G}(s)$:

Los polos del sistema en lazo abierto ($G(s)$) dados por la ecuación (2.30), están determinados por los ceros de la expresión:

$$\hat{a}_2(s) (e^{\hat{D}_2(s)l} - e^{\hat{D}_1(s)l}) = 0 \quad (2.33)$$

El cero de $\hat{a}_2(s)$ se obtiene anulando la ecuación (2.32) :

$$\hat{a}_2(s) = a g - s g / V_0 = \sigma + \omega j \quad (2.34)$$

haciendo $s = \sigma + j\omega$ y tomando las partes real e imaginaria por separado se tiene :

$$\text{Parte real : } \sigma = a V_0 \quad (2.35)$$

$$\text{Parte imaginaria : } \omega = \theta$$

Las expresiones para $\hat{D}_1(s)$ y $\hat{D}_2(s)$ se encuentran sustituyendo en (2.32), las definiciones (2.32) :

$$D_{1,2}(s) = 1 [-(2s + g(b - a Y_0/V_0)) \pm (4s^2 g Y_0/V_0^2 + 4s g (g b Y_0/V_0^2 - a Y_0/V_0) + g^2(b - Y_0/V_0)^2)^{1/2}] / (V_0 - g Y_0/V_0) \quad (2.36)$$

cuya forma, por simplicidad, se escribe como:

$$\hat{D}_{1,2}(s) = (\alpha s + \beta) [\hat{\psi}_1(s) + i \hat{\psi}_2(s)] \quad (2.37)$$

Tomando la forma propuesta en (2.37) el segundo factor de la expresión (2.33) queda como :

$$e^{-(\alpha s + \beta) [e^{-(\hat{\psi}_1(s) + i\hat{\psi}_2(s))} - e^{(\hat{\psi}_1(s) + i\hat{\psi}_2(s))}] } \quad (2.38)$$

Teniendo en cuenta que "s" es una variable compleja, el primer factor de (2.37) puede ser reescrito como :

$$e^{-(\Psi_1 + i \Psi_2) s} = e^{-(\Psi_1) s} (\cos \Psi_2 s - \text{sen } \Psi_2 s i) \quad (2.39)$$

Esta expresión se anula, solamente cuando $\Psi_1 = \infty$; ya que el coseno y el seno nunca son cero en un mismo ángulo (Ψ_2). Con lo anterior ; considerando que Ψ_1 y Ψ_2 son elementos de los reales, el primer factor de (2.38) no tiene raíces.

El segundo factor de la expresión (2.38), puede ser escrito como :

$$e^{-(\hat{\psi}_1(s))} (\cos \hat{\psi}_2(s) - i \text{sen } \hat{\psi}_2(s)) - e^{(\hat{\psi}_1(s))} (\cos \hat{\psi}_2(s) + i \text{sen } \hat{\psi}_2(s)) \quad (2.40)$$

Para que la anterior expresión se anule se requiere que los exponentes de los términos $e^{(\pm \hat{\psi}_1(s))}$ sean iguales, esto implica que $\hat{\psi}_1(s) = 0$, con objeto de buscar aquellos valores de $\hat{\psi}_2(s)$ que hacen posible:

$$(\cos \hat{\psi}_2(s) - i \text{sen } \hat{\psi}_2(s)) - (\cos \hat{\psi}_2(s) + i \text{sen } \hat{\psi}_2(s)) = 0 + 0 i \quad (2.41)$$

Se puede ver que la expresión (2.41) sólo tendrá términos en función del seno, el cual es cero en $\hat{\psi}_2(s) = n\pi$ con $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Los resultados encontrados indican que el segundo factor de la ecuación (2.38), se anula cuando :

$$\hat{\psi}_1(s) + i \hat{\psi}_2(s) = 0 + n\pi i \quad ; \quad \text{con } n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.42)$$

Recordando las definiciones de $\hat{D}_{1,2}(s)$ (2.36), y la expresión (2.38) tenemos que :

$$\hat{\psi}_1(s) + \hat{\psi}_2 i(s) = (\xi_1 s^2 + \xi_2 s + \xi_3)^{1/2} i \quad (2.43)$$

donde :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 4 \beta Y_0 / V_0^2 / \xi_4 \\ \xi_2 &= 4 \beta (g b Y_0 / V_0^2 - a Y_0 / V_0) / \xi_4 \\ \xi_3 &= g^2 (E - Y_0 / V_0)^2 / \xi_4 \\ \xi_4 &= (V_0 - g Y_0 / V_0)^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Elevando al cuadrado (2.42) y (2.43) e igualándolas se obtiene una expresión que permite encontrar los valores de "s" en los que se anula el segundo factor de (2.38):

$$\xi_1 s^2 + \xi_2 s + \xi_3 = -(\pm n\pi / i)^2 + 0 \quad ; \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.45)$$

Para encontrar los valores de $s = \sigma + j \omega$ que cumplen con la ecuación anterior, se descompone el miembro izquierdo de (2.45) en partes real e imaginaria, de lo que resulta que:

$$\text{real :} \quad \xi_1 (\sigma^2 - \omega^2) + \xi_2 \sigma + \xi_3 = -(\pm n\pi / i)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{imaginaria :} \quad \xi_1 2 \sigma \omega + \xi_2 \omega = 0 \quad (2.46)$$

de las que surge :

$$\begin{aligned} \sigma &= -\xi_2 / 2 \xi_1 = \text{cte.} \\ \omega &= \pm [(\xi_1 \sigma^2 + \xi_2 \sigma + \xi_3 + (\pm n\pi / i)^2) / \xi_1]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Los resultados encontrados indican que el segundo factor de (2.38) presenta un número infinito de ceros, cuya parte real es constante, ubicándose sobre una recta paralela al eje imaginario.

3.4 Estudio de la estabilidad del control

Considérese un tramo de canal abierto rectangular con las siguientes características hidráulicas que en gasto establecido en régimen uniforme son :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0.0001 \\
 T &= 3.043 \text{ m.} \\
 n &= 0.0225 \\
 V_0 &= 0.4109 \text{ m/s} \\
 Y_0 &= 2.1324 \text{ m.} \\
 Y_u &= 2.49936 \text{ m.} \\
 Y_l &= 1.76784 \text{ m.} \\
 W_{01} &= 0.7257 \text{ m.} \\
 W_{02} &= 0.7253 \text{ m.} \\
 a &= -0.000026 \text{ (ecuación 2.16, modelo lineal)} \\
 b &= 0.000439 \text{ (ecuación 2.19, modelo lineal)} \\
 l &= 1500.0 \text{ mts.} \\
 g &= 9.81 \text{ m/s}^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

Con estos datos se obtienen los polos de la relación (2.30) $G(s)$, o bien, los ceros de la ecuación (2.33) aplicando las expresiones (2.35) y (2.46).

En base a la ecuación (2.35), se encuentra un polo en :

$$\begin{aligned}
 \sigma &= a V_0 = -1.0663 \times 10^{-5} \\
 \omega &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{por lo tanto } s = -1.0663 \times 10^{-5} + 0j.$$

Con las expresiones (2.44) se consigue :

$$\xi_4 = 2553.035$$

$$\xi_1 = 495.8722/2553.035 = 0.1942$$

$$\xi_2 = 2.324041/2553.035 = 0.000934$$

$$\xi_3 = 0.60052/2553.035 = 2.35218 \times 10^{-5}$$

las que se substituyen en la ecuación (2.47), obteniendo los polos faltantes del sistema, que están dados por :
para la parte real

$$\sigma = -0.002404$$

en cuanto a la parte imaginaria que depende del valor de $(n\pi/l)^2$ con $n \in N$ "o" $n = 0$. Para $n=0$:

$$\omega = [(0.0029 + (-0.005141) + 0.060052 + 0) / 495.8722]^{1/2} \\ = 0.010906$$

y para $n \geq 1$

$$\omega = [(0.000467 - 2.244 \times 10^{-6} + 2.35216 \times 10^{-6} + (n\pi/1)^2) / \\ 0.1924]^{1/2} \quad \text{para } n \leq N$$

Con las expresiones anteriores se encuentra un número infinito de polos de $\hat{G}(s)$ (2.30), los cuales están ubicados sobre una recta paralela al eje imaginario.

De los polos encontrados se observa que todos ellos tienen parte real negativa.

Considérese el esquema de control para un tramo de canal abierto descrito por la figura (2.4) :

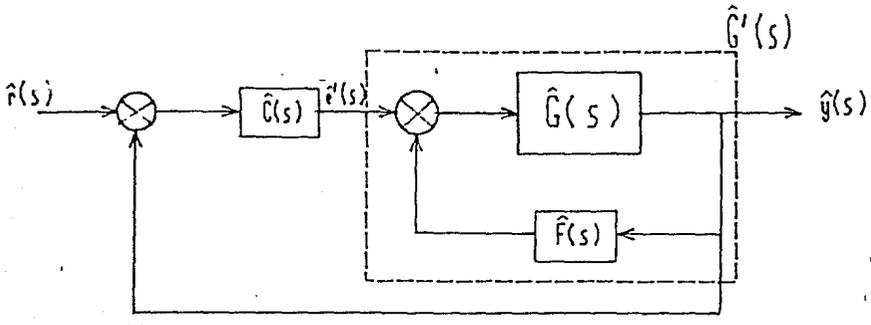


Figura 2.4 Control de un tramo de canal abierto

Para estudiar la estabilidad del control aplicado a un tramo de canal abierto (figura 2.4) se requiere, como primer paso, tener la estabilidad de la expresión (2.29, $\hat{G}'(s)$), que describe la relación entrada-salida de un tramo de canal.

El estudio de estabilidad de la relación (2.29), se inicia observando que esta ecuación presenta una estructura similar a la descrita por la figura 1, donde $\hat{G}(s)$ es igual a la ecuación (2.30) y $\hat{F}(s)$ es igual a la ecuación (2.31).

Para aplicar el teorema-1 (estabilidad) a la relación (2.29) es necesario primero verificar las suposiciones referentes a la matriz de realimentación y la estructura de la planta, es decir, que $\hat{F}(s)$ es $\hat{A}^{n \times n}$ y $\hat{G}(s)$ es $\hat{A}^{n \times n}$ (2.4) ($\hat{G}(s)$ no tiene polos en el lado derecho del plano complejo). En cuanto a la aplicación del teorema se requiere probar solamente la primera condición ya que $\hat{G}(s)$ no presenta polos del lado derecho del plano complejo.

Para verificar la condición $\hat{F}(s)$ es $\hat{A}^{n \times n}$ se debe encontrar la antitransformada de Laplace de los elementos de $\hat{F}(s)$ y ver que

éstos sean de la forma descrita por (2.1). La antitransformada de $\hat{F}(s)$ es :

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{F}(s)) = \begin{bmatrix} 1/d_f 2\delta(t) & 0 \\ 0 & 1/d_f 4\delta(t) \end{bmatrix}$$

analizando $F(t)$, se observa que sus elementos cumplen con la definición (2.1) para los elementos de $A^{n \times n}$, por lo tanto $\hat{F}(s) \in \hat{A}^{n \times n}$.

Para verificar que el sistema $\hat{G}(s) \in \hat{A}^{n \times n}$, se necesita tener la antitransformada de $\hat{G}(s)$ y verificar que sus elementos de $G(t)$ sean de la forma descrita por (2.1). Como no fue posible obtener la antitransformada de Laplace de $\hat{G}(s)$, no se pudo comprobar la condición: $G(t) \in A^{n \times n}$.

Para demostrar la condición i del Teorema-1 de estabilidad, única condición a cumplir en este caso, se hace uso del test gráfico. El test gráfico, necesita que el sistema sea de la forma descrita por (2.4) y que el determinante $[I + F \hat{G}(s)]$ posea la estructura que da la relación (2.7). En el apéndice A ecuación (A.49) se encuentra la expresión para este determinante, en la que se muestra que tiene una estructura similar a (2.7); de esta expresión sólo resta por comprobar que $g_a \in L^1$. Esta última condición implica encontrar la antitransformada de Laplace de la relación $\hat{G}_a(s)$, la cual no se pudo obtener, dando como resultado que no se pueda concluir que: $g_a \in L^1$.

En la expresión (A.33) se ve que la primera condición del test gráfico (2.9) aplicada al canal se satisface :

$$1 + g_0 \approx 1$$

En cuanto a las condiciones ii y iii del test gráfico se obtienen en base a el diagrama de Nyquist de la relación $\det[I + F \hat{G}(s)]$ (figura 2.5). En esta figura la curva encontrada no cruza y no circunda el punto $(0,0)$, cumpliendo la segunda y tercera condición ($n_p = 0$, número de polos en el semiplano derecho del plano complejo) del test gráfico.

Con los resultados anteriores y suponiendo que las condiciones $G(t) \in A^{n \times n}$ y $g_a \in L^1$ se cumplen, el test gráfico se verifica, ya que:

$$\inf_{\text{Re } s \geq 0} |\det [I + F \hat{G}(s)]| > 0$$

este resultado al ser usado en el teorema-1, hace cierta la condición i, lo que hace que se cumpla dicho teorema-1. Esto indica que el sistema descrito por la relación (3.29, $\hat{G}'(s)$) pertenece al conjunto $A^{n \times n}$, es decir, que es estable.

El siguiente punto a estudiar es la estabilidad del control en un canal abierto rectangular. Sin embargo, antes de continuar, es conveniente mencionar que en los esquemas de control usados en

el control de canales abiertos en este trabajo, se toma como entrada al sistema la compuerta-1 y como salidas: el tirante aguas arriba (control aguas arriba), el tirante aguas abajo (control aguas abajo) o una combinación de las dos anteriores (control bival). Con lo antes mencionado se llega a que en el esquema de control considerado (figura 2.4) se tiene:

$$\hat{G}'(s) = \text{ecuación (2.29)}$$

$$\hat{C}(s) = \begin{bmatrix} \hat{m}(s) & \hat{n}(s) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con :

control aguas arriba $\hat{m}(s) \neq 0$ y $\hat{n}(s) = 0$.

control aguas abajo $\hat{m}(s) = 0$ y $\hat{n}(s) \neq 0$.

control bival $\hat{m}(s) \neq 0$ y $\hat{n}(s) \neq 0$.

y

$$e' = \begin{bmatrix} w_1(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

El primer paso en el estudio de estabilidad del control para un canal de riego, consiste en reescribir el sistema en una forma similar a la mostrada en la figura 2.1, se tendrá entonces que, en este caso, la planta (figura 2.1, $\hat{G}(s)$) será igual a $\hat{G}'(s)$, $\hat{C}(s)$ y la realimentación unitaria (matriz identidad de 2x2).

De los resultados encontrados sobre estabilidad para la ecuación (2.29), se sabe que la planta $\hat{G}'(s) \in \hat{A}^{n \times n}$ y sus polos están ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo. Tomando a $\hat{C}(s) = \text{cte.}$ y recordando los resultados antes encontrados para la matriz $\hat{P}(s)$ en el caso anterior, se llega a que $\hat{C}(s) \in \hat{A}^{n \times n}$. Como $\hat{G}'(s), \hat{C}(s) \in \hat{A}^{n \times n}$ y considerando que $\hat{A}^{n \times n}$ es un algebra no conmutativa con unidad, entonces:

$$\hat{G}'(s) \hat{C}(s) \in \hat{A}^{n \times n} \quad \text{y} \quad I \in \hat{A}^{n \times n}$$

Con estos resultados se aplica el Teorema-1 para estudiar la estabilidad del control. Como la planta $\hat{G}'(s) \hat{C}(s)$ no presenta polos del lado derecho (polos de $\hat{G}'(s)$) sólo es necesario verificar la condición i del teorema-1. Para verificar esta condición se hace uso del test gráfico (teorema-2).

En la aplicación del test gráfico primeramente se encuentra que el determinante de $[I + \hat{G}'(s) \hat{C}(s)]$ sea de la forma descrita por (2.7). De la definición de $\hat{C}(s)$ se aprecia que la matriz $\hat{G}'(s) \hat{C}(s)$ es de 2x2, por lo que $\det [I + \hat{G}'(s) \hat{C}(s)]$:

$$\begin{vmatrix} 1 + \hat{m}(s) \hat{G}'_{11}(s) & \hat{n}(s) \hat{G}'_{11}(s) \\ \hat{m}(s) \hat{G}'_{21}(s) & 1 + \hat{n}(s) \hat{G}'_{21}(s) \end{vmatrix}$$

$$= 1 + m(s) G'_{11}(s) + n(s) G'_{21}(s)$$

donde $\hat{G}'_{ij}(s)$ es el elemento ij de $\hat{G}'(s)$.

En base a los resultados encontrados sobre la estabilidad de la ecuación (2.29) ($\hat{G}'(s)$ es $\hat{A}^{n \times n}$) y considerando $\hat{C}(s) = \text{cte.}$ ($\hat{m}(s) = \text{cte.}$ y $\hat{n}(s) = \text{cte.}$), se cumple la condición del determinante (2.7), ya que la transformada inversa de Laplace de cada elemento de la matriz de función de transferencia ($\hat{G}'(s)$, 2.29) es de la forma descrita por (2.1), y el conjunto $A^{n \times n}$, es un algebra.

Tratado lo referente a la estructura presentada por el determinante $[I + \hat{G}'(s) \hat{C}(s)]$ se aplica el test gráfico, y se encuentra para la primera condición que:

$$1 + g_0 \approx 1$$

Las condiciones ii y iii se obtienen del diagrama de Nyquist, tanto para control aguas arriba (figuras 2.6, $\hat{m}(s)=1$), como aguas abajo (figuras 2.7, $\hat{n}(s)=1$) y bival (figuras 2.8, $\hat{n}(s)=0.5$, $\hat{m}(s)=0.5$).

De las figuras (2.6), (2.7) y (2.8) se puede apreciar que, a medida que la frecuencia aumenta, la curva de Nyquist tiende a crecer en magnitud y a deformarse. Estos resultados, no esperados en alta frecuencia, originaron una revisión a la deducción de las ecuaciones de Saint-Venant (2.11, 2.12), encontrando que sólo son válidas si la variación en el tirante es gradual, es decir, la longitud de onda de la señal formada por la altura de los tirantes es grande (baja frecuencia). Estos resultados indican que es necesario encontrar un nuevo conjunto de ecuaciones que permitan describir el comportamiento del canal en una gama mayor de frecuencias, con objeto de poder verificar las condiciones 2 y 3 del test gráfico.

Analizando las gráficas de Nyquist ($\hat{C}(s) = \text{cte.}$) para bajas frecuencias, se llegó a las siguientes conclusiones:

- Control aguas arriba (Compuerta 1 - tirante inicial figura 2.6) ($\hat{m}(s)=1$, $\hat{n}(s)=0$):

El canal presenta su ganancia mayor en la frecuencia $\omega=0$ (d.c.), ésta disminuye conforme aumenta la frecuencia, formando unos círculos centrados fuera del origen, esto sugiere la existencia de una acción directa entre la puerta 1 y el tirante aguas arriba. También se puede observar que su margen de ganancia es infinito (el control es estable incondicionalmente).

- Control aguas abajo (Compuerta 1 - tirante final figura 2.7) ($\hat{m}(s)=0$, $\hat{n}(s)=1$) :

Al igual que en el caso anterior, la frecuencia en que la ganancia del sistema es mayor se encuentra en $\omega=0$ y tiende a disminuir conforme aumenta la frecuencia. El diagrama de Nyquist forma círculos alrededor del origen (más que círculos, se diría que parecen "ochos"), siendo los puntos de menor magnitud aquéllos cuya fase es aproximadamente ± 90 grados; esto es debido a que las ondas que viajan en el sentido compuerta-1 - compuerta-2 y las que son reflejadas por la compuerta-2 se suman desfazadas 180 grados, resultando una adición destructiva. La suma no es cero ya que no toda la ola se refleja sino sólo parte, puesto que la compuerta-2 está abierta. El ángulo en el que se presenta el punto de menor magnitud no es 90 grados sino menor, debido a que la velocidad que tiene el agua en el sentido compuerta-1 a compuerta-2 es mayor que la velocidad de compuerta-2 a compuerta-1. En este tipo de control se observa que el margen de ganancia del sistema es aproximadamente 5.5 (estabilidad condicional).

- Control Bival (Compuerta 1 - tirante inicial y final (figura 2.8)) ($\hat{m}(s)=0.5$, $\hat{n}(s)=0.5$) :

Las curvas de Nyquist obtenidas son similares a las encontradas para el control aguas abajo, sin embargo, tienen la ventaja de estar desplazadas a la derecha, presentando un margen de ganancia infinito, si se admite que el modelo de Saint-Venant es válido para frecuencias menores a 0.3 rad/seg.

Como la planta es la simulación de un canal rectangular lineal abierto, se compara la respuesta en frecuencia obtenida por simulación (introduciendo señales sencillas de distintas frecuencias apéndice B) y la respuesta en frecuencia teórica, encontrando que son parecidas, siempre y cuando la razón del paso de integración en distancia y el paso de integración en tiempo usadas por el método numérico (apéndice C), sea igual a la celeridad de disturbios de pequeña amplitud (celeridad = $[g Y_0]^{1/2}$).

Ahora se verá la repuesta temporal del sistema usando el control aguas abajo y el control bival :

El primer tipo de control estudiado es un control proporcional donde se realimenta el tirante final (control aguas abajo). En la figura (2.9) aparece la respuesta en seguimiento a una señal escalón (0.15 cm.) del canal realimentado empleando una ganancia en el control proporcional igual a 3. En esta gráfica se aprecia que el sistema nunca alcanza la referencia, presentando error en estado estable.

Con objeto de disminuir el error se aumenta la ganancia proporcional a 5, obteniendo la figura (2.10). En esta figura se observa que el sistema presenta oscilaciones que tienden a desaparecer. El sistema presenta error en estado estable, aunque menor al caso anterior (figura 2.9).

El siguiente paso fue aumentar la ganancia a 6, obteniendo la figura (2.11) en la que el sistema muestra oscilaciones que aumentan de amplitud conforme transcurre el tiempo.

Estos resultados eran esperados, tal como lo muestra la figura (2.7), en la que se ve que el margen de ganancia para el control compuerta-1 - tirante final es aproximadamente 5.5, por lo tanto, con ganancias mayores a ésta, el sistema es inestable.

Otro de los algoritmos de control estudiado, es el control bival, en donde se realimenta el tirante inicial y el tirante final. De la respuesta en seguimiento a una señal escalón (0.15 cm.) en la referencia (figura 2.12), en la que se realimentan los tirantes, inicial y final, con ganancia 3, se observa que el sistema responde más rápidamente y sin sobretiros grandes, además se puede ver que su error en estado estable es menor que en el caso del control aguas abajo, figura (2.9). Este algoritmo de control presenta un margen de ganancia infinito (figura 2.8a), debido a que se está realimentando el tirante inicial, que da información sobre el futuro del tirante final.

En los estudios de control aguas abajo y control bival el periodo de muestreo se elige igual al paso de integración en tiempo del algoritmo numérico. Las oscilaciones presentadas por el sistema en las figuras (2.9 a 2.12) poseen un periodo igual al doble del retraso del sistema, es decir el tiempo que tarda una onda en recorrer dos veces el canal.

De los resultados encontrados, tanto en frecuencia como en tiempo, se observa que las gráficas de Bode obtenidas para baja frecuencia describen satisfactoriamente el comportamiento del tramo de canal, no así las gráficas en alta frecuencia, donde la falta de un término que contemple la inercia vertical del agua en las ecuaciones de Saint-Venant, hace que se obtengan resultados no sospechados. En base a las prácticas y a discusiones tenidas, se espera que el flujo en un canal tienda a comportarse como un filtro pasa bajas, ya que el agua no puede responder rápidamente debido a su inercia.

El siguiente punto a tratar es el diseño de un controlador discreto que tenga un error en estado estable igual a cero a una entrada escalón, para el tirante final (este tirante es de gran importancia ya que de él depende el suministro de agua a las tomas laterales y a los siguientes tramos del canal).

Como el sistema en estudio (canal rectangular abierto, parámetros distribuidos) presenta un amplio espectro en frecuencia, hubo la necesidad de implementar unos filtros antirrecubrimiento en los tirante inicial y final, los cuales permiten, además de evitar el posible traslape en frecuencia que aparece por el muestreo, eliminar el ruido de alta frecuencia existente en las medidas (viento, reflejo de las olas, etc.).

Se tomó un filtro Chebychev pasa bajas :

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + .865 \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2.49)$$

- y se estudiaron tres distintas frecuencias de corte (ω_0) :

- 1.- $\omega_0 = 0.019040$ rad/s figura 2.13
- 2.- $\omega_0 = 0.003159$ rad/s figura 2.14
- 3.- $\omega_0 = 0.000455$ rad/s figura 2.15

en las figuras (2.13), (2.14) y (2.15) aparecen las respuestas al escalón para tirante final tanto con el filtro, como sin él. En base a las frecuencias de corte de los filtros y tomando una regla propuesta por Astrom [Mat.1], que indica que la frecuencia de muestreo del sistema debe de ser 2π veces más rápida que la del filtro antirrecubrimiento, se logran los siguientes periodos de muestreo :

	periodo de muestreo	tiempo de integración
1.-	50 seg	5 seg
2.-	110 seg	11 seg
3.-	200 seg	20 seg

Con objeto de tomar al canal y al filtro como sistemas continuos, el paso de integración en tiempo se toma 10 veces más chico que el periodo de muestreo. Como se menciona anteriormente, la relación entre el paso de integración en distancia y el paso de integración en tiempo se debe mantener, por lo tanto, al disminuir el paso de integración en tiempo, debe disminuir en igual proporción el paso de integración en distancia. Esto ocasiona que se requieran más secciones del canal de menor longitud (paso de integración en distancia) para cubrir todo el canal, aumentando por consiguiente el tiempo empleado por la computadora para la integración de las ecuaciones. Este aumento en tiempo de computo, aunado a la pequeña diferencia entre las respuestas al escalón del sistema usando los filtros $\omega_0 = 0.019040$ y $\omega_0 = 0.003159$ (periodo de integración de 50 y 110 seg.) y tomando en cuenta que el margen de ganancia del sistema es el mismo para ambos filtros y que su comportamiento en frecuencia es similar para bajas frecuencias de 0 a -270 grados (evitar los reflejos en la ola $-180 - 2\pi n$ grados con $n=1,2,3,\dots$, figura 2.16), originan que se seleccione, como periodo de muestreo, el de 110 seg.

Además de los filtros anteriores, se implementa un mecanismo que hace que la velocidad de apertura o cierre de la compuerta 1, no sea mayor a 1 metro/minuto (esta velocidad es la que se presenta en la mayoría de las compuertas usadas en el control de canales).

Reuniendo los aspectos mencionados se estudia el comportamiento de un control en el que se realimenta el tirante inicial en forma proporcional y el tirante final en forma proporcional-integral [Ise.1] :

$$u(k+1) = u(k) + K_{p1} * e_{t1}(k+1) + (K_{p2} + K_{i2} T/2) e_{tf}(k+1) - K_{p1} * e_{t1}(k) + (-K_{p2} + K_{i2} T/2) e_{tf}(k) \quad (2.50)$$

donde :

- K_{p1} constante proporcional para tirante inicial.
- K_{p2} constante proporcional para tirante final.
- K_{i2} constante integral para tirante final.
- e_{t1} error entre la consigna para tirante 1 y el valor de éste.
- e_{tf} error entre la consigna para tirante final y el valor de éste.
- T periodo de muestreo.

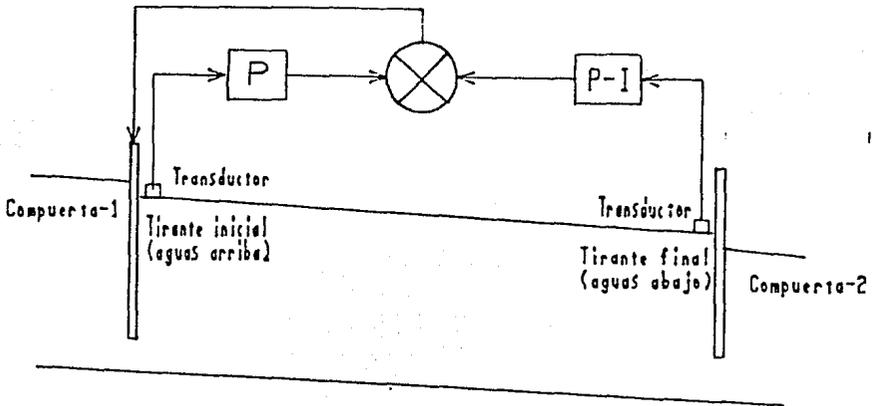


Figura 2.17 Control proporcional proporcional-integral.

En la figura (2.18) aparece el comportamiento en seguimiento del tirante final del canal a una señal escalón filtrada de 0.15 cm., tanto para tirante final como para tirante inicial, con constantes en el control $K_{p1} = 2.8$, $K_{p2} = 0.8$ y $K_{i2} = 0.0049$. En esta figura (2.18) se observa que el error en estado estable es cero.

Cabe mencionar que el trabajo requerido para obtener los parámetros del control es arduo debido a que no se dispone de ningún método que no sea el de prueba y error.

El comportamiento en seguimiento del control aparece en la

figura (2.19), en este ejemplo las constantes usadas en el control son : $K_{p1} = 2.8$, $K_{p2} = 0.8$ y $K_{i2} = 0.0049$. En la gráfica (2.20) se observa que al presentarse una perturbación (variación en la apertura de la compuerta-2), la forma en que el sistema sigue la consigna cambia, sin embargo, el error en estado estable, es cero. De las figuras (2.19) y (2.20) se observa que el sistema presenta un retardo respecto a la referencia, el cual es de 330 seg. (figura 2.21), igual al retraso propio del sistema (canal).

En la figura (2.22) se ve que, si la consigna se da por anticipado al sistema 440 seg (4 periodos de muestreo), la planta sigue casi "perfectamente" a la consigna.

En cuanto al comportamiento en regulación, los resultados aparecen en la figura (2.23). En esta última gráfica se observa que el control presenta un buen desempeño en regulación al eliminar el error debido a la perturbación (cambio en la apertura de la compuerta-2).

4.- Conclusiones

La falta de un modelo adecuado para describir el comportamiento para toda frecuencia en los canales abiertos (altas frecuencias no presenta un canal real), así como los requerimientos existentes en la teoría de estabilidad, en cuanto a que se necesita conocer ciertas propiedades en el dominio del tiempo del sistema, son factores que limitan la realización de un estudio completo sobre la estabilidad del control de canales abiertos.

Aún con las limitaciones encontradas se puede, en base a la información de baja frecuencia, explicar el funcionamiento de algunos algoritmos de control aplicados a canales y ver cómo la introducción del tirante-1 en el control (control bival) permite aumentar el margen de ganancia, obteniéndose acciones de control más suaves y tiempos de establecimiento más cortos.

Se estudió la incorporación de una acción integral sobre el tirante final en el control bival de un tramo de canal teoría lineal, encontrándose que el error en estado estable a una señal tipo escalón, es cero; esto permite un comportamiento satisfactorio en regulación. Para seguimiento, se observó que el desempeño del control cambia ante variaciones en la apertura de la compuerta-2, haciéndose necesario reajustar sus coeficientes. Estos resultados sugieren el uso de un control que permita variar sus parámetros para mejorar el funcionamiento de la planta. En lo tocante al retraso existente entre la referencia y la respuesta del sistema (figura 2.19 y 2.20) se sabe que no es posible eliminarlo a menos que se le dé la referencia por anticipado al sistema (figura 2.20).

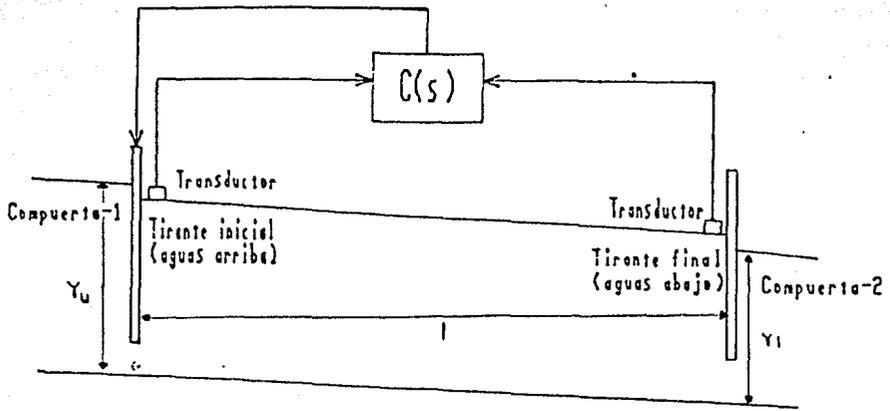


Figura 2.2 Canal abierto.

Frecuencia de 0 a 0.15 rad/seg.

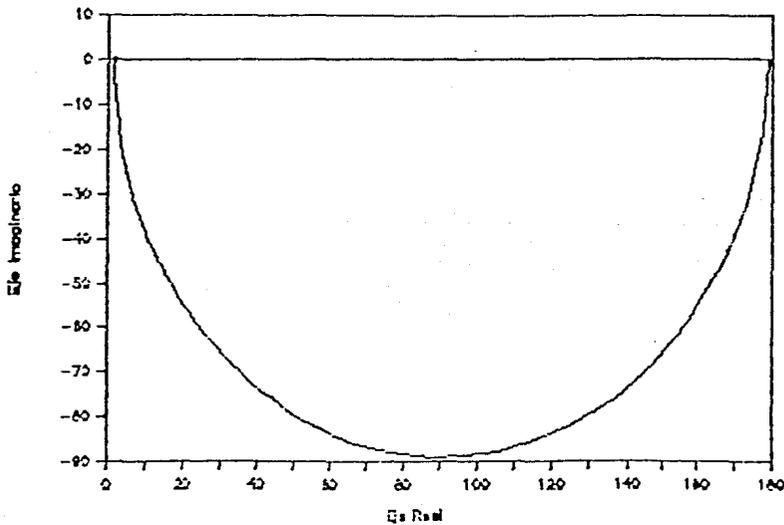


Figura 2.5 Gráfica de Nyquist de $G(s)$.

Canal linealizado

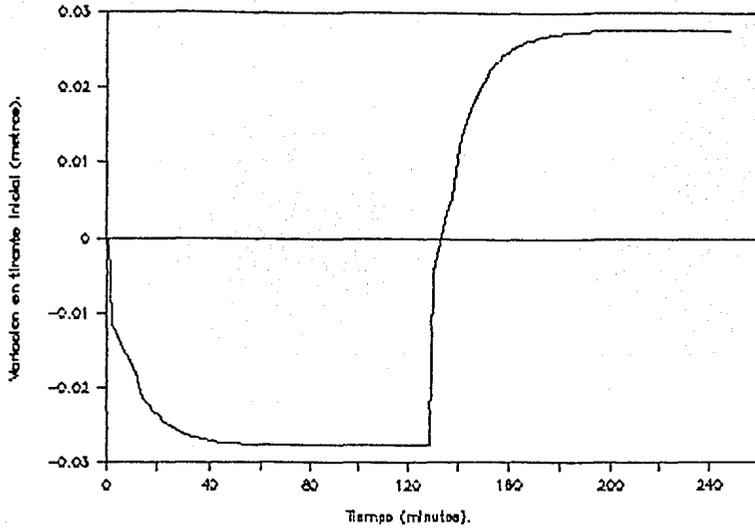
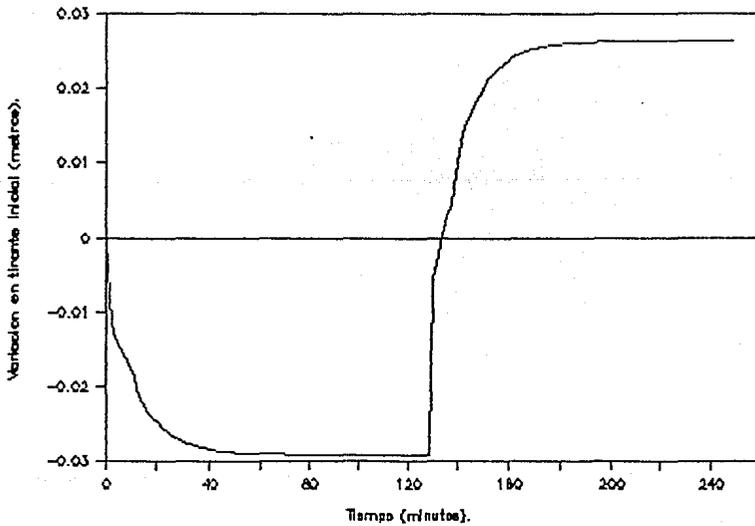


Figura 2.2 a Resposta del sistema a una entrada cuadrada de 5 cm. de amplitud sumada a la apertura de la compuerta-1 en el punto de operación.

Canal no lineal



Canal linealizado

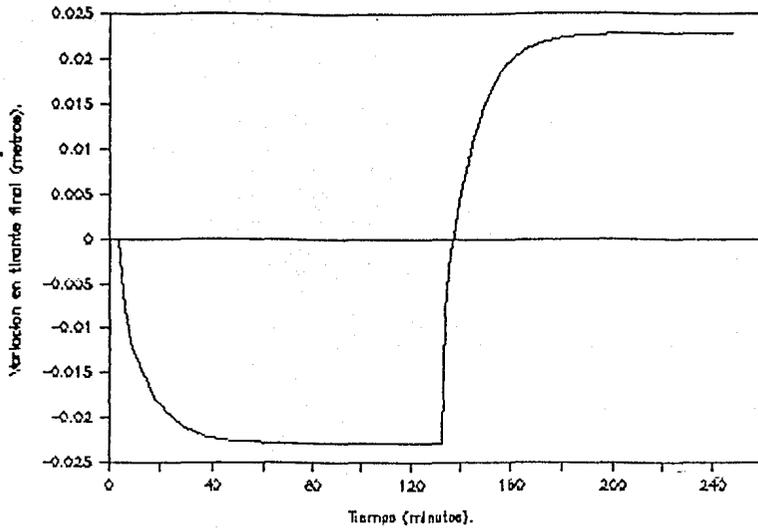
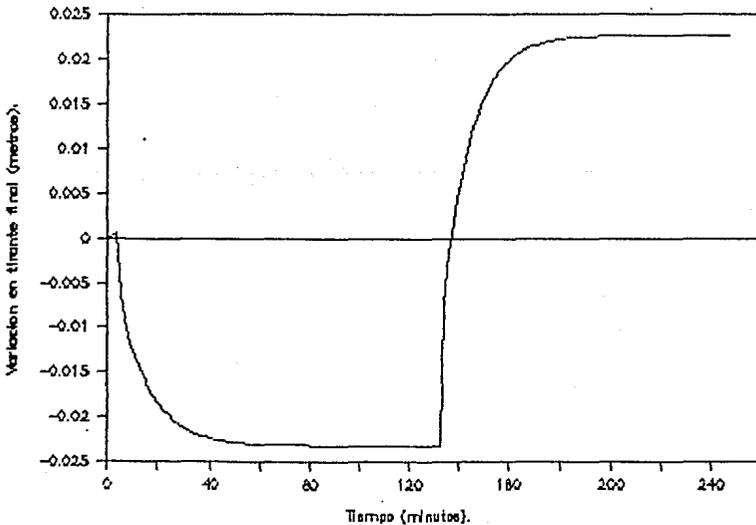


Figura 2.2 a Respuesta del sistema a una entrada cuadrada de 5 cm. de amplitud sumada a la apertura de la compuerta-1 en el punto de operación.

Canal no lineal



Canal linealizado

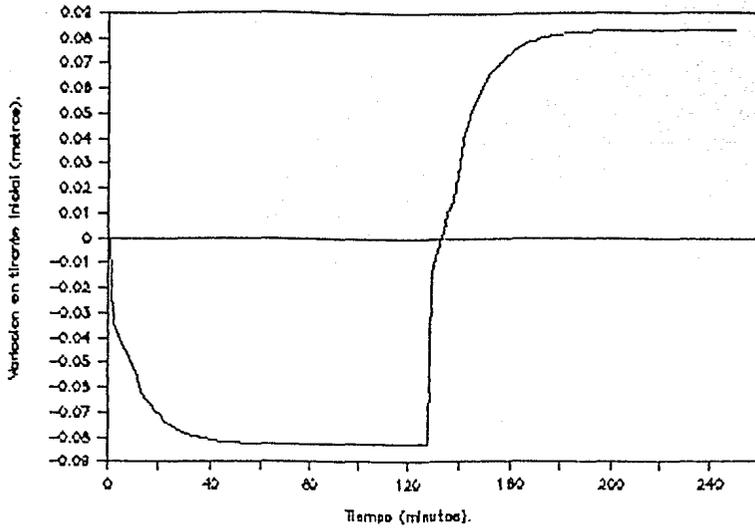
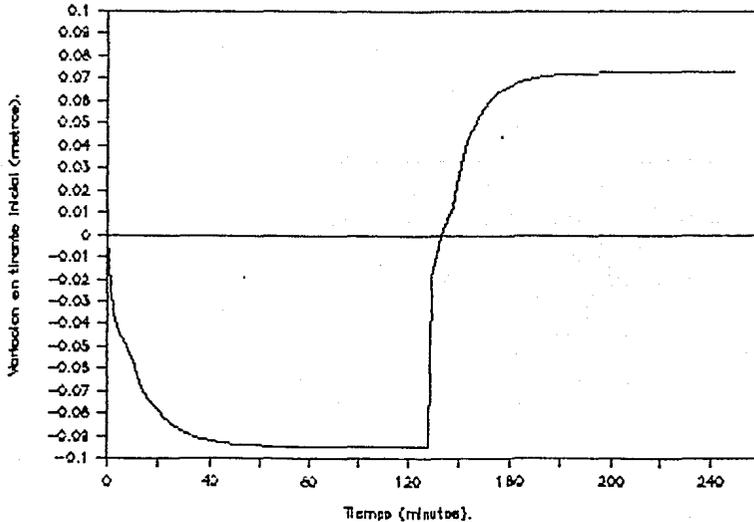


Figura 2.2 b Respuesta del sistema a una entrada cuadrada de 10 cm. de amplitud sumada a la apertura de la compuerta-1 en el punto de operación.

Canal no lineal



Canal linealizado

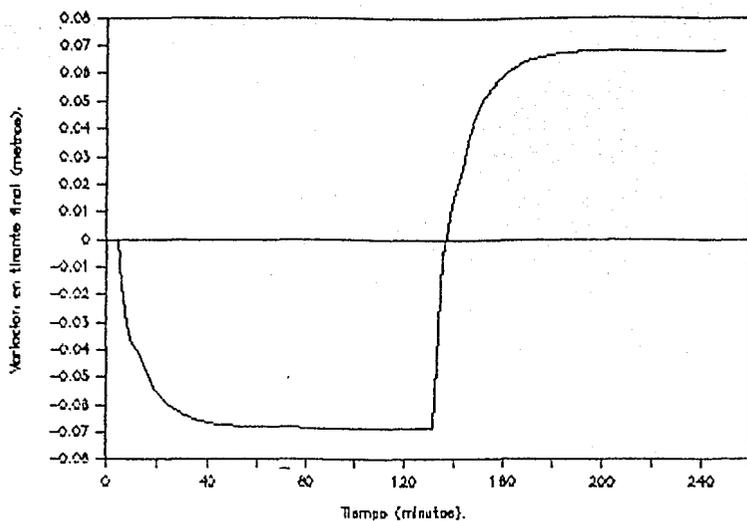
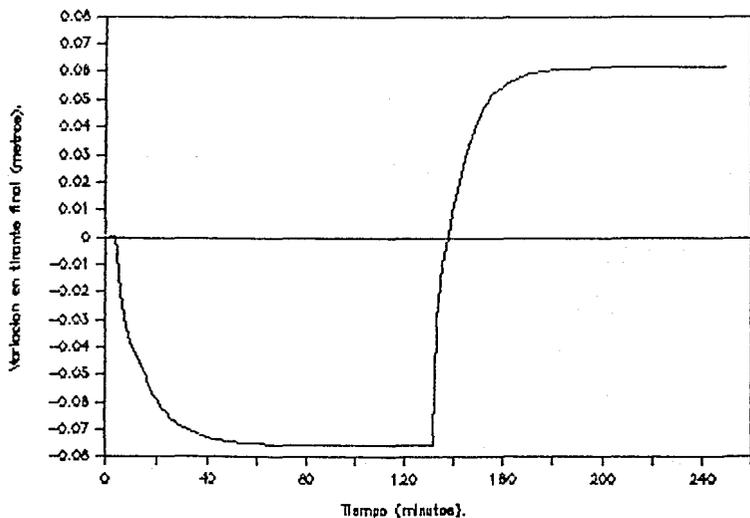


Figura 2.2 b Respuesta del sistema a una entrada cuadrada de 10 cm. de amplitud sumada a la apertura de la compuerta-1 en el punto de operación.

Canal no lineal



Frecuencia de 0.00001 a 0.12 rad/seg.

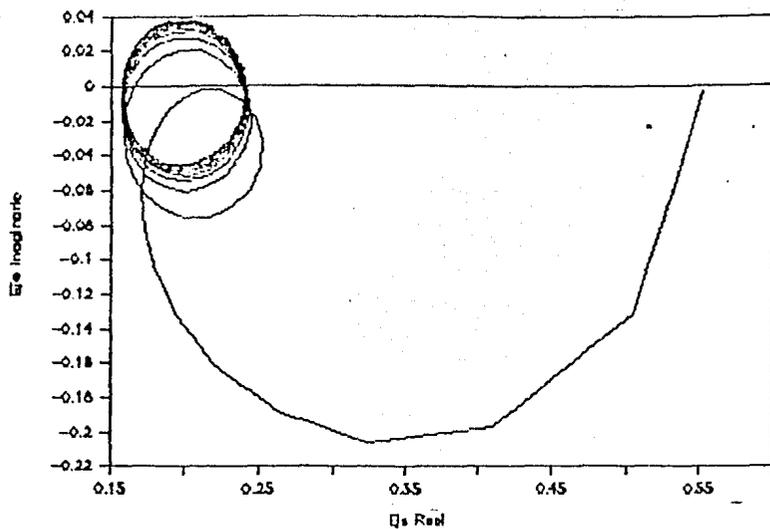
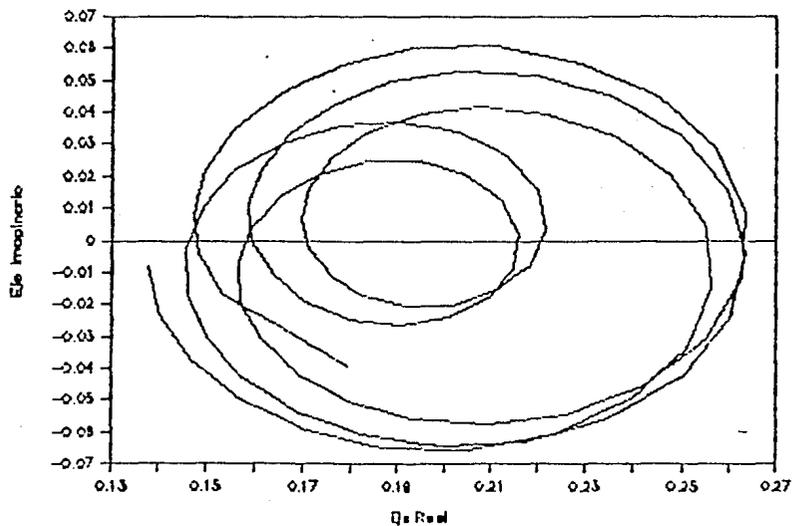


Figura 2.6 Gráfica de Nyquist (control aguas arriba).

Frecuencia de 0.25 a 0.3 rad/seg.



Frecuencia de 1.0 a 1.125 rad/seg.

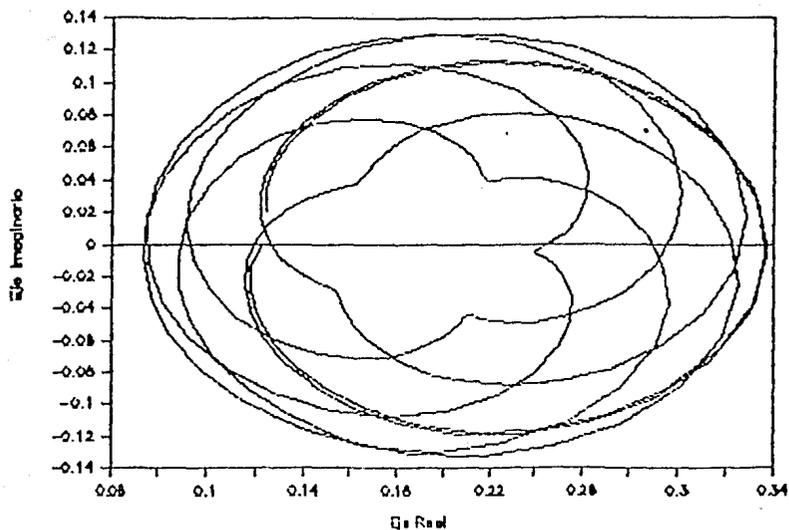
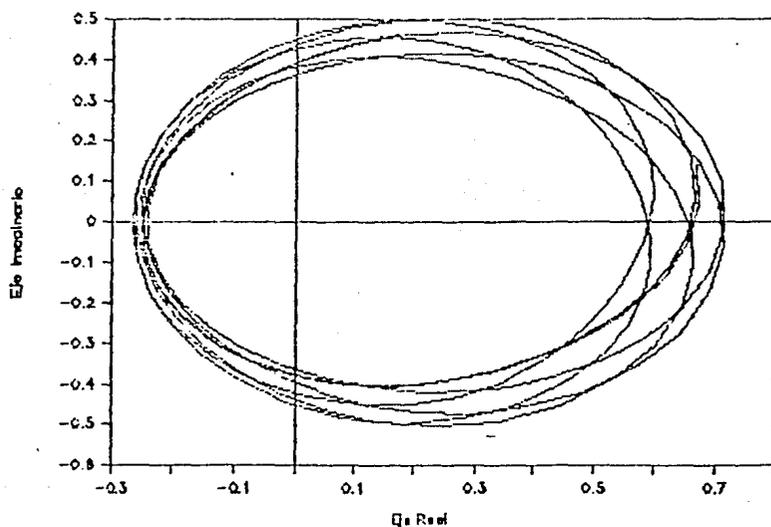


Figura 2.6 Gráfica de Nyquist (control aguas arriba).

Frecuencia de 5.0 a 5.12 rad/seg.



Frecuencia de 0.00001 a 0.12 rad/seg.

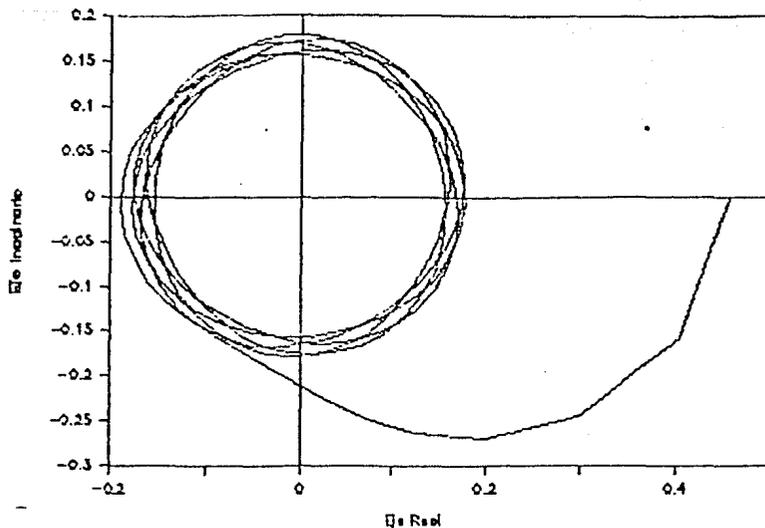
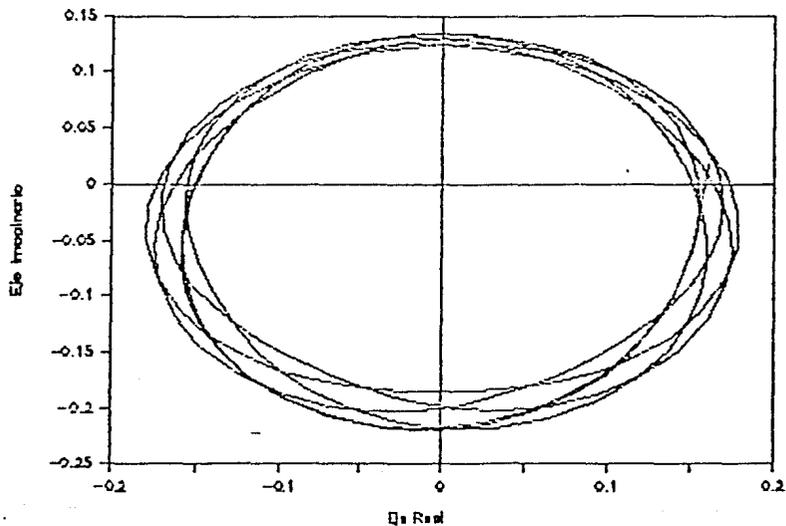


Figura 2.7 Gráfica de Nyquist (control aguas abajo).

Frecuencia de 0.25 a 0.375 rad/seg.



Frecuencia de 1.0 a 1.125 rad/seg.

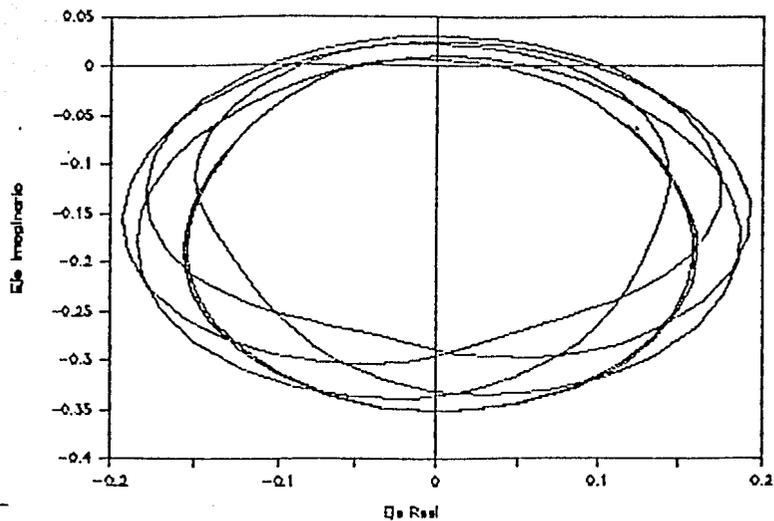
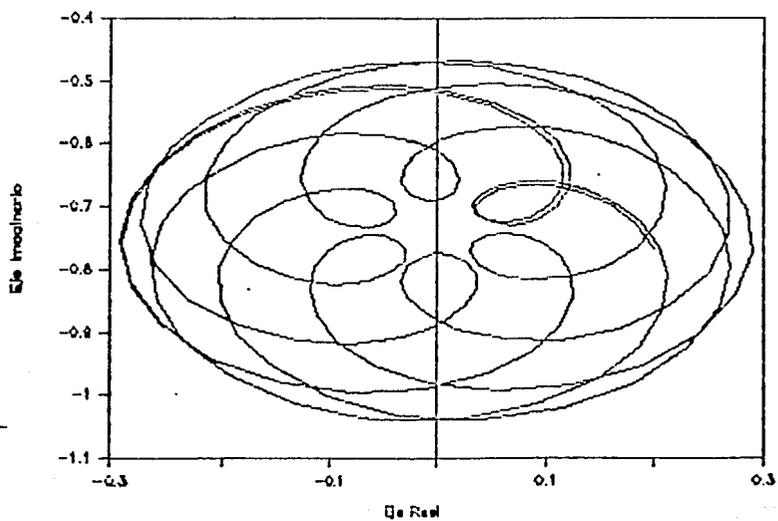


Figura 2.7 Gráfica de Nyquist (control aguas abajo).

Frecuencia de 5.0 a 5.12 rad/seg.



Frecuencia de 0.00001 a 0.12 rad/seg.

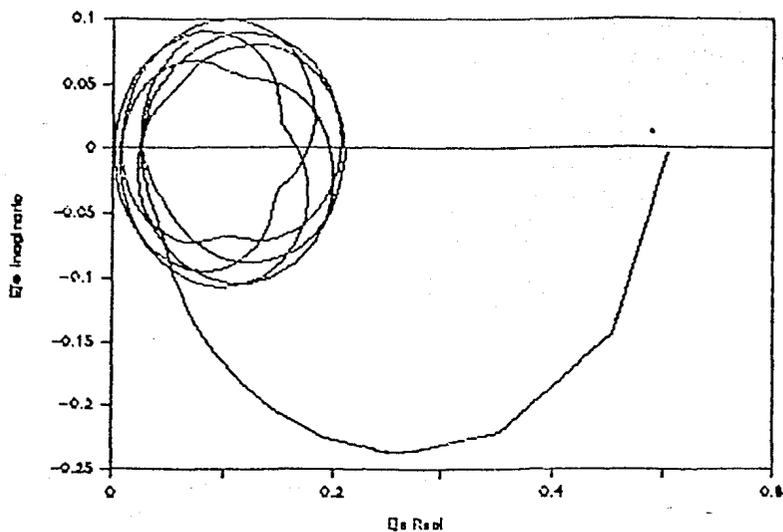
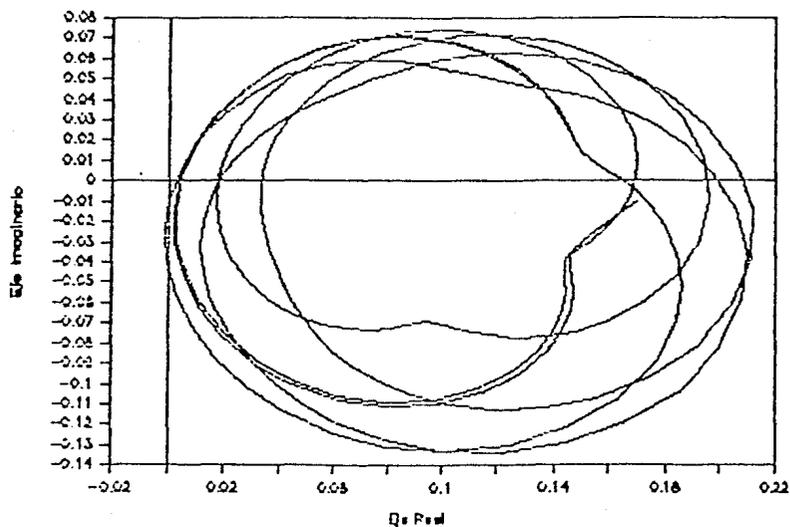


Figura 2.8 Gráfica de Nyquist (control Bival).

Frecuencia de 0.25 a 0.3 rad/seg.



Frecuencia de 1.0 a 1.125 rad/seg.

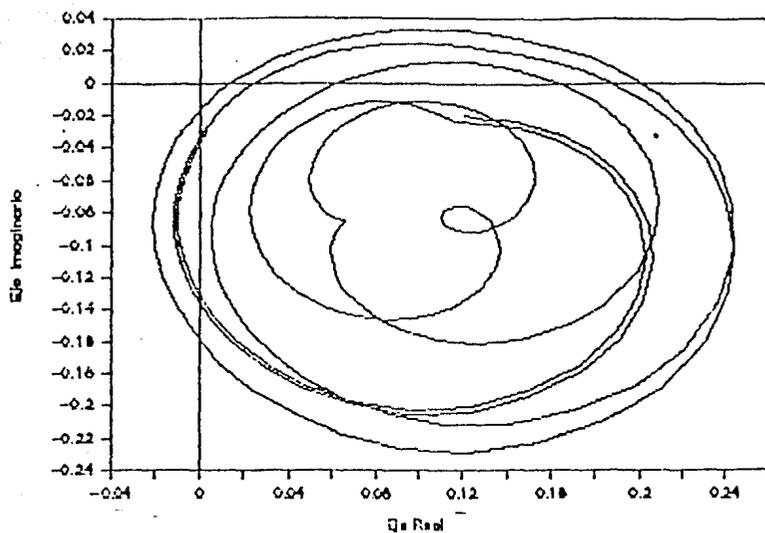
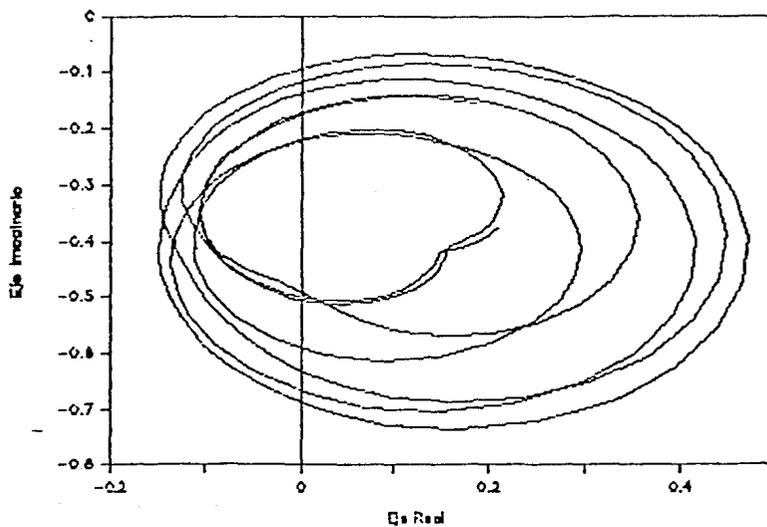


Figura 2.3 Gráfica de Nyquist (control Bival).

Frecuencia de 5.0 a 5.12 rad/seg.



Canal linealizado

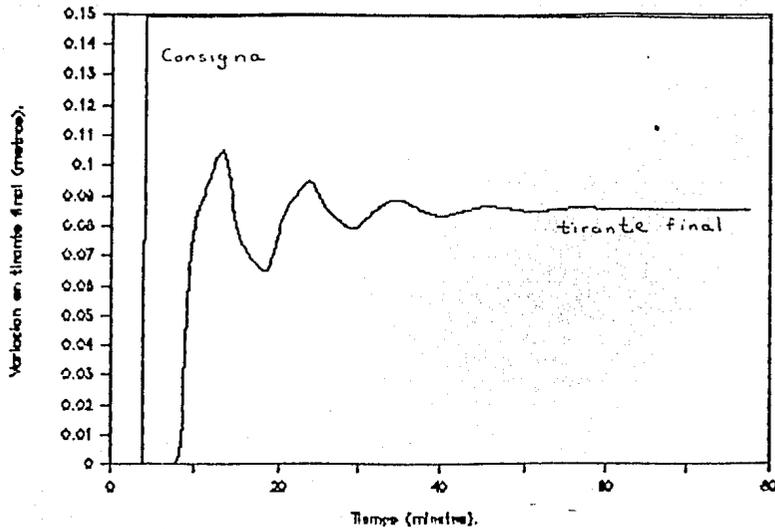


Figura 2.9 Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento a una entrada escalón usando control aguas abajo ($K_p = 3$).

Canal linealizado

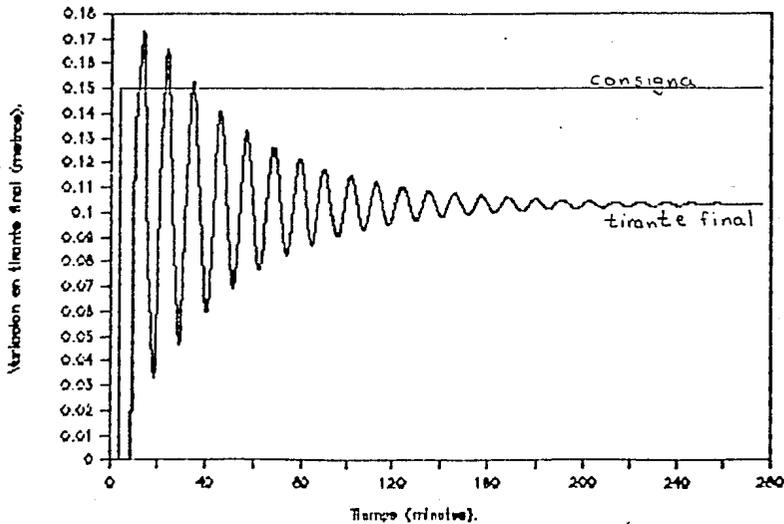


Figura 2.10 Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento a una entrada escalón usando control aguas abajo ($K_p = 5$).

Canal linealizado

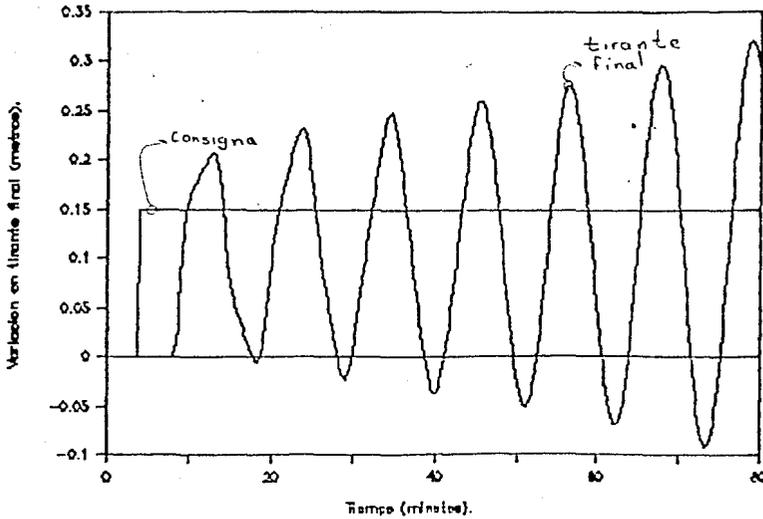


Figura 2.11 Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento a una entrada escalón usando control aguas abajo ($K_p = 6$).

Canal linealizado

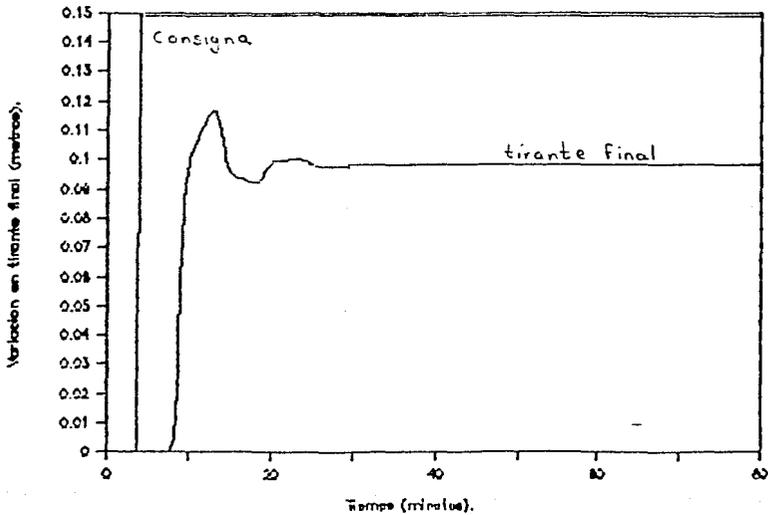


Figura 2.12 Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento a una entrada escalón usando control Bival.

Canal linealizado

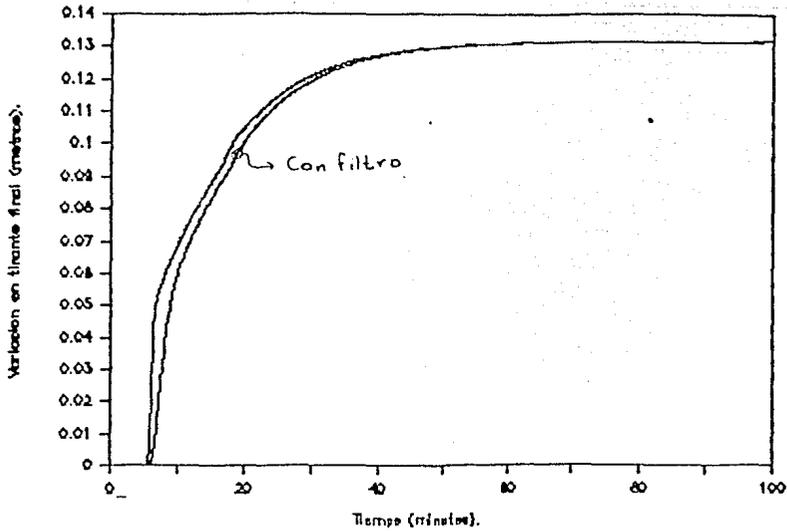


Figura 2.13 Comparación entre la respuesta del sistema (tirante final) al escalón con y sin filtro ($\omega_0 = 0.019640$).

Canal linealizado

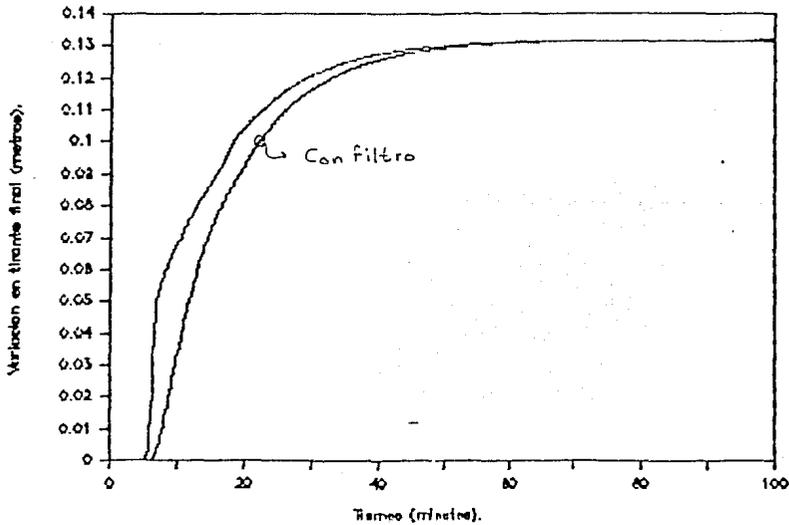


Figura 2.14 Comparación entre la respuesta del sistema (tirante final) al escalón con y sin filtro ($\omega_0 = 0.008159$).

Canal linealizado

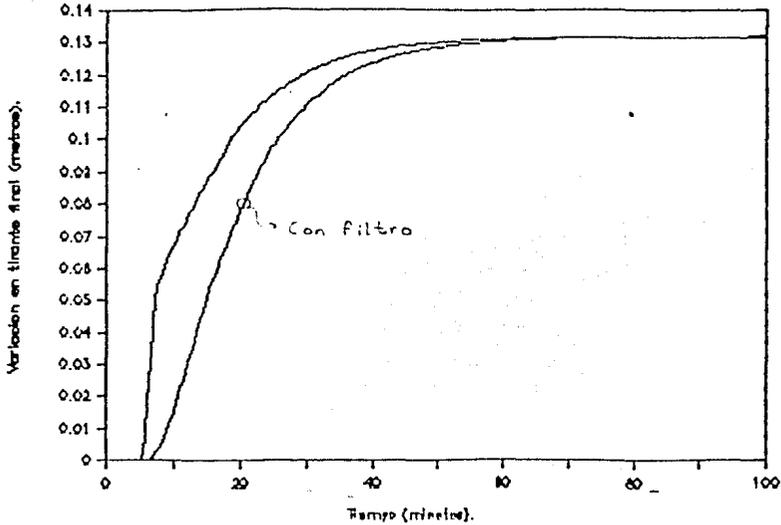


Figura 2.15 Comparación entre la respuesta del sistema (tirante final) al escalón con y sin filtro ($\omega_D = 0.000455$).

Frecuencia de 0.00001 a 0.1 rad/seg.

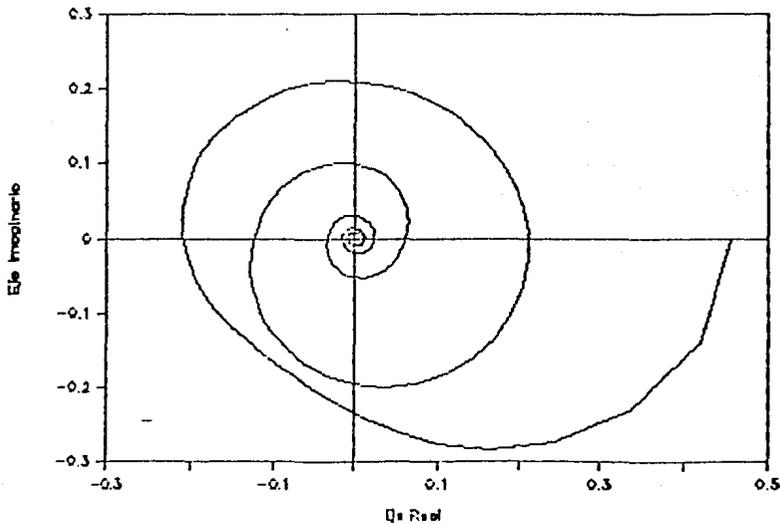


Figura 2.16 (a) Gráfica de Nyquist usando filtro para control aguas abajo ($\omega_D = 0.019040$).

Frecuencia de 0.00001 a 0.1 rad/seg.

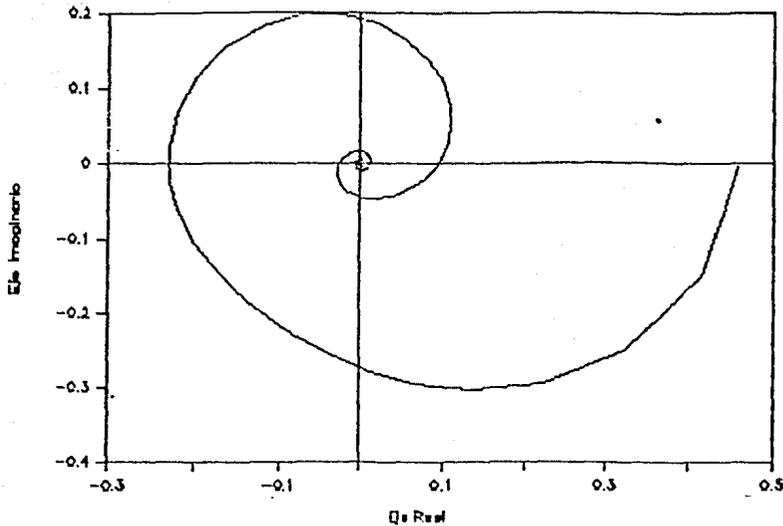


Figura 2.16 (b) Gráfica de Nyquist usando filtro para Control aguas abajo ($\omega_0 = 0.002159$).

Canal linealizado

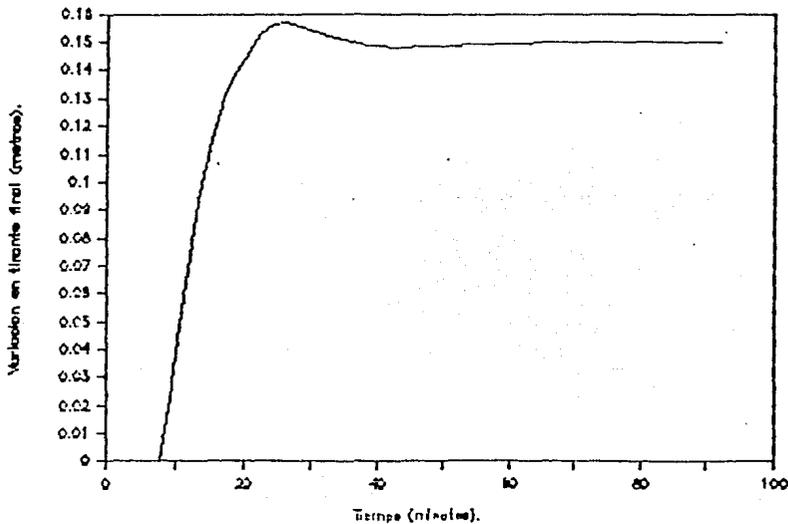


Figura 2.18 Respuesta del sistema (tirante final) a una entrada escalón filtrada usando control P-PI ($K_{p1} = 2.8$, $K_{p2} = 0.8$ y $K_{i2} = 0.0049$).

Canal linealizado

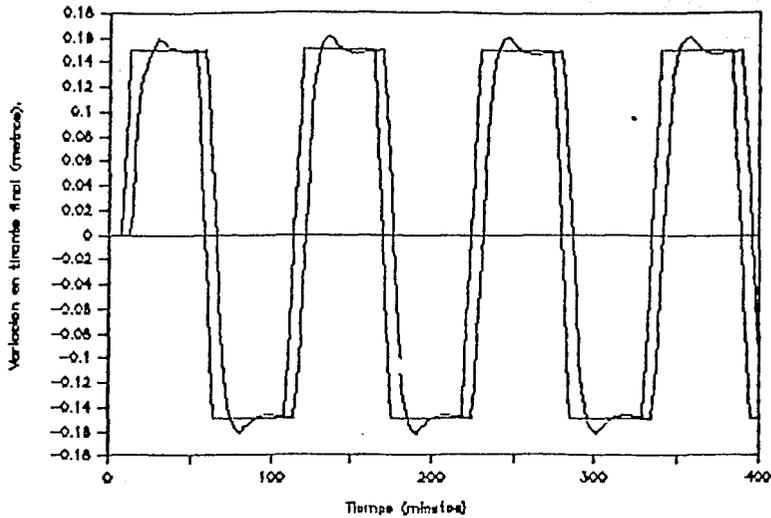


Figura 2.19 Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando control P-PI ($K_{p1} = 2.8$, $K_{p2} = 0.8$ y $K_{i2} = 0.0049$).

Canal linealizado

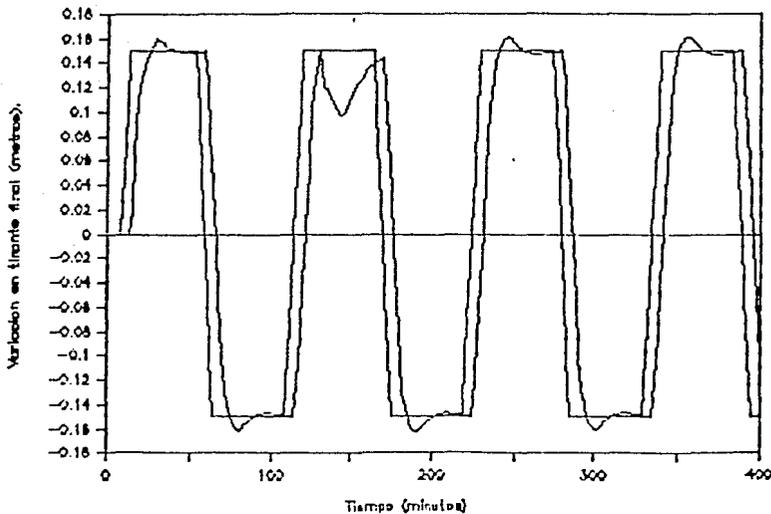


Figura 2.20 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento ante perturbaciones usando el control P-PI ($K_{p1} = 2.8$, $K_{p2} = 0.8$ y $K_{i2} = 0.0049$).

Canal linealizado

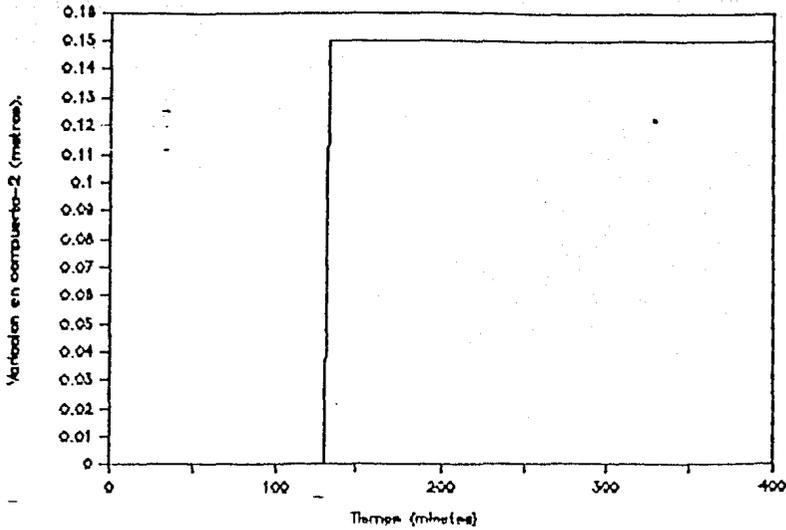


Figura 2.20 (b) Perturbación al sistema (apertura compuerta-2).

Canal linealizado

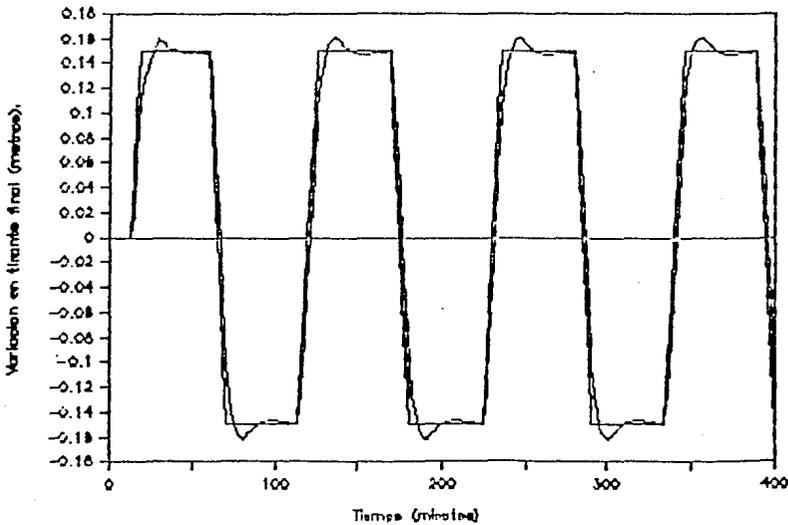


Figura 2.21 Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando P-PI, la referencia se da 330 seg antes. ($K_{p1} = 2.8$, $K_{p2} = 0.8$ y $K_{i2} = 0.0049$).

Canal linealizado

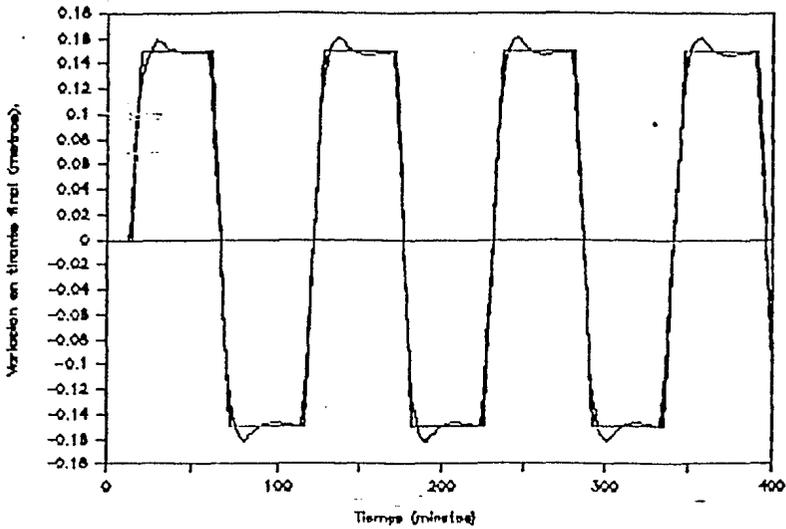


Figura 2.22 Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando P-PI, la referencia se da 440 seg antes. ($K_{p1} = 2.8$, $K_{p2} = 0.8$ y $K_{i2} = 0.0049$).

Canal linealizado

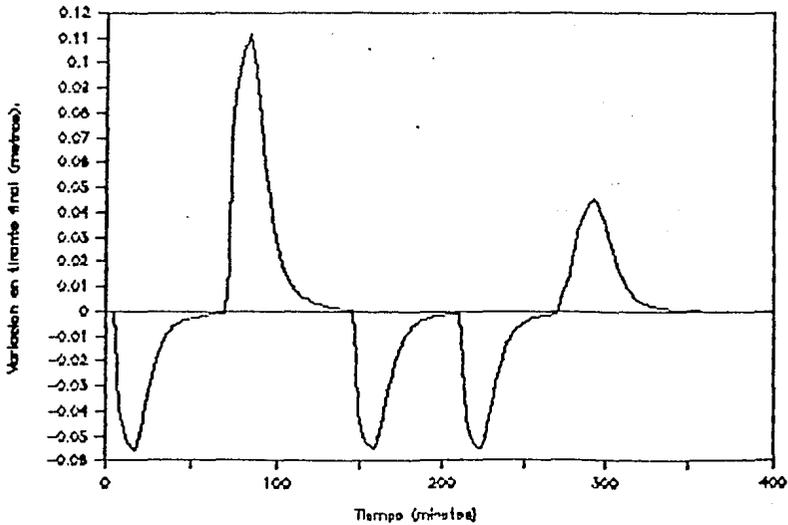


Figura 2.23 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en regulación ante perturbaciones en compuerta-2.

Canal linealizado

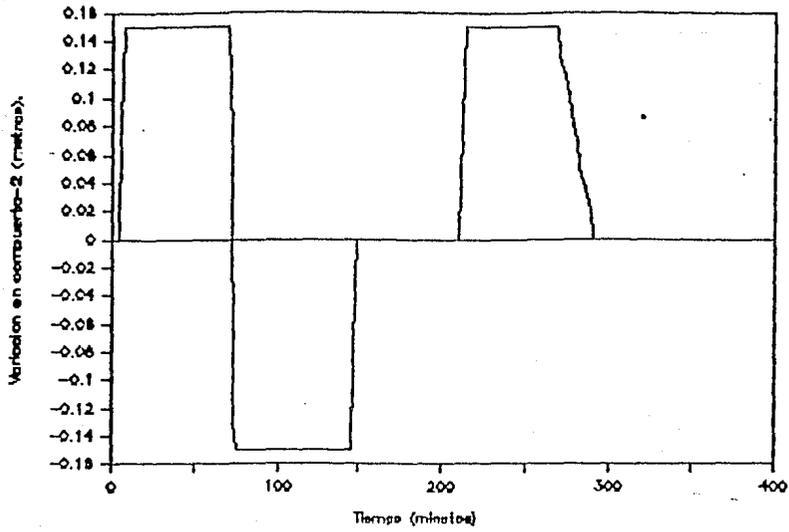


Figura 2.23 (b) Perturbação, abertura em comporta-2.

C A P I T U L O I I I

Empleo de un controlador predictor general en un canal abierto

1.- Introducción

En la sección 5 de este capítulo se muestra cómo el control (2.50) con parámetros fijos no puede lograr un funcionamiento adecuado en un tramo de canal abierto rectangular (teoría no lineal) ante perturbaciones. Además se encuentra (capítulo II) que, en un controlador del tipo descrito por (2.50), no es posible eliminar el retardo existente entre la referencia y la salida del sistema. Esto sugiere el uso de un control adaptable que varíe sus parámetros según el criterio seleccionado, y de un mecanismo que disminuya el retardo entre la referencia y el sistema.

La mayoría de los algoritmos de control adaptable requieren conocimiento a priori del sistema (orden relativo del proceso, retardo del sistema, .. etc). En el caso del flujo en un canal abierto (sistema de parámetros distribuidos) esta información en ocasiones no se puede especificar, o bien, varía según el punto de funcionamiento (por ejemplo el retardo existente entre compuerta 1 y tirante final cambia según la altura del tirante promedio a lo largo del canal). Ante tal situación se selecciona, de los algoritmos de control adaptable disponibles, uno que requiera poca información a priori de la planta y que además es capaz de compensar el retardo en la planta. El controlador adaptable seleccionado es el controlador predictor general (GPC) [C1a.1]. Este controlador presenta la ventaja de realizar sus acciones con base en el comportamiento futuro de la planta y la consigna deseada, logrando así eliminar el retardo que aparece entre la referencia y la respuesta del sistema con el control (2.50).

El análisis del controlador predictor general (GPC) que se presenta a continuación comienza con el estudio del predictor a un paso, el cual puede ser extendido a "n" pasos como lo muestran España [Esp.1] y Goodwin [Goo.1], se continúa con una versión autosintonizable del mismo y su representación en forma de ecuación de estados [Esp.2], para finalmente llegar al controlador (GPC). Después se estudia el funcionamiento tanto para seguimiento como para regulación del control (GPC) aplicado a un canal rectangular abierto simulado.

2.- Prediccion multipaso

2.1 Prediccion a un paso :

Considèrese el sistema discreto :

$$y(t) = (1 - A(q^{-1})) y(t) + q^{-k} B(q^{-1}) u(t) + C(q^{-1}) e(t) \quad (3.1)$$

donde

- A(q⁻¹) : polinomio en q⁻¹, mónico de orden n_a.
- B(q⁻¹) : polinomio en q⁻¹, de orden n_b.
- C(q⁻¹) : polinomio en q⁻¹, mónico de orden n_c.
- y(t) : salida del sistema.
- u(t) : entrada del sistema.
- e(t) : proceso estocástico estacionario, independiente y centrado, con variancia σ², que representa las perturbaciones externas.
- k : retardo implícito del sistema.

Lo que se desea en la prediccion es encontrar un estimador de la variable y(t+r) (r > 0), denotado por $\hat{y}(t+r/t)$, función de todas las medidas de la entrada y la salida tomadas hasta el instante t (y(t), y(t-1), ..., u(t), u(t-1), ...), de tal manera que minimice la variancia del error entre el valor real y su estimación :

$$E((y(t+r) - \hat{y}(t+r/t))^2/t). \quad (3.2)$$

Reescribaze como sigue el sistema descrito por la ecuación (3.1) para t = t + r :

$$y(t+r) = q^{-k} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t+r) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(t+r) \quad (3.3)$$

el último término se puede descomponer en la forma :

$$\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = 1 + q^{-1} \frac{N(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (3.4)$$

en la cual :

$$N(q^{-1}) = n_0 + n_1 q^{-1} + \dots + n_n q^{-(n)} \quad (3.5)$$

con n_n = max (n_a, n_c) - 1

Usando (3.3) y (3.4), para r=1 se obtiene :

$$y(t+1) = q^{-k} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t+1) + e(t+1) + \frac{N(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(t) \quad (3.6)$$

donde e(t+1) es desconocido e independiente de todas las medidas

tomadas hasta el instante "t". En cuanto al último término, éste depende de valores medidos en el presente y pasado, como se puede mostrar empleando la ecuación (3.1) :

$$e(t) = \frac{A(q^{-1}) y(t) - q^{-k} B(q^{-1}) u(t)}{C(q^{-1})} \quad (3.7)$$

así, el último término de (3.2) queda como :

$$\frac{N(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(t) = \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) - q^{-k} \frac{N(q^{-1}) B(q^{-1})}{A(q^{-1}) C(q^{-1})} u(t) \quad (3.8)$$

Substituyendo (3.8) en (3.6) se llega a:

$$y(t+1) = q^{-k} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \left[1 - q^{-1} \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} \right] u(t+1) + \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + e(t+1) \quad (3.9)$$

De (3.4) se obtiene que :

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1}) + q^{-1} N(q^{-1}) \quad (3.10)$$

$$1 - q^{-1} \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}$$

por tanto (3.9) se escribe como :

$$y(t+1) = q^{-k} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t+1) + \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + e(t+1) \quad (3.11)$$

reemplazando (3.11) en el criterio a minimizar (3.2) y recordando que $r = 1$, se llega a:

$$E \left(\left(q^{-k} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t+1) + \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + e(t+1) - \hat{y}(t+1/t) \right)^2 / t \right) =$$

$$E \left(\left(q^{-k} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t+1) + \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) - \hat{y}(t+1/t) \right)^2 / t \right) +$$

$$E \left((e(t+1))^2 / t \right) \quad (3.12)$$

de donde la última igualdad surge de la hipótesis sobre $e(t)$.

El término en $e(t+1)$ de la ecuación (3.12) se desconoce y es independiente de todas las medidas tomadas hasta "t", mientras que los demás términos (inclusive la predicción $\hat{y}(t+1/t)$) dependen exclusivamente del presente (t) y del pasado. Con los datos hasta "t", el predictor cumple con la desigualdad :

$$E \left((y(t+1) - \hat{y}(t+1/t))^2 / t \right) \geq E \left((e(t+1))^2 / t \right) \quad (3.13)$$

De modo que el mejor predictor a un paso (que aquí se defina como óptimo) será:

$$\hat{y}(t+1/t) = q^{-k} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t+1) + \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) \quad (3.14)$$

siendo el error en la predicción :

$$e(t+1/t) \triangleq y(t+1) - \hat{y}(t+1/t) = e(t+1) \quad (3.15)$$

La ecuación (3.14) puede reescribirse como :

$$C(q^{-1}) \hat{y}(t+1/t) = q^{-k} B(q^{-1}) u(t+1) + N(q^{-1}) y(t) \quad (3.16)$$

substituyendo (3.10) en la anterior :

$$A(q^{-1}) \hat{y}(t+1/t) = q^{-k} B(q^{-1}) u(t+1) + N(q^{-1}) (y(t) - q^{-1} \hat{y}(t+1/t)) \quad (3.17)$$

dado que $q^{-1} \hat{y}(t+1/t) = \hat{y}(t/t-1)$ y usando la ecuación (3.15) se llega a la expresión :

$$A(q^{-1}) \hat{y}(t+1/t) = q^{-k} B(q^{-1}) u(t+1) + N(q^{-1}) e(t/t-1) \quad (3.18)$$

Esta ecuación permite obtener el valor de la predicción a un paso.

A continuación se estudiará la forma de extenderlo a un predictor de "r" pasos.

2.2 Extensión del predictor a un paso al predictor para $r > 1$ pasos (predictor multipaso) [Esp.1].

Defínase :

$$\hat{y}(t+m) = \begin{cases} \hat{y}(t+m/t) & \text{si } m > 0 \\ y(t+m) & \text{si } m \leq 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

y

$$\tilde{e}(t+m) = \begin{cases} e(t+m/t) & \text{si } m > 0 \\ 0 & \text{si } m \leq 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

donde :

$$e(t+m/t) \triangleq y(t+m) - \hat{y}(t+m/t) \quad \text{si } m > 0. \quad (3.21)$$

Las definiciones anteriores permiten escribir :

$$y(t+m) = \hat{y}(t+m) + \tilde{e}(t+m) \quad \forall m \quad (3.22)$$

Para el caso del predictor a $l+1 = r$ pasos, se toma $y(t+1)$ en lugar de $y(t)$, por lo que la ecuación (3.6) se escribe:

$$y(t+1+1) = q^{-k} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t+1+1) + \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t+1) + e(t+1+1) \quad (3.23)$$

la que, al introducir (3.22), se transforma en:

$$y(t+1+1) = \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} \hat{y}(t+1) + q^{-k} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t+1+1) + \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} \hat{z}(t+1) + e(t+1+1) \quad (3.24)$$

De esta ecuación el primer término del segundo miembro es función de las medidas hasta el instante "t", el segundo es función de las entradas pasadas o presente si $l \leq k$, y futuras si $l > k$, mientras que el tercero, según la definición (3.20), es función de los errores de predicción $z(t+m/t)$; $1 \leq m \leq l$. España muestra [Esp.1] que los errores de predicción $z(t+m/t)$ ($1 \leq m \leq l$) son combinaciones lineales de valores futuros de la sucesión $\{e(t)\}$ y resultan independientes de las medidas tomadas hasta el instante "t". El término $e(t+1+1)$ es independiente de todas las medidas anteriores por hipótesis.

Aplicando el criterio (3.2) para obtener $\hat{y}(t+1+1/t)$ (estimador de $y(t+1+1)$ con medidas tomadas hasta "t"), se tiene:

$$E \left(\frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} \hat{y}(t+1) + q^{-k} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t+1+1) + \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} \hat{z}(t+1) + e(t+1+1) - \hat{y}(t+1+1/t) \right)^2 / t \quad (3.25)$$

al igual que en la expresión (3.12), la anterior puede descomponerse de la siguiente manera [Esp.1]:

$$E \left(\left(\frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} \hat{y}(t+1) + q^{-k} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t+1+1) \right) - \hat{y}(t+1+1/t) \right)^2 / t + E \left(\frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} \hat{z}(t+1) + e(t+1+1) \right)^2 / t \quad (3.26)$$

De aquí, dado que el segundo término es independiente de las medidas tomadas hasta "t" y depende del futuro, el mejor predictor expresado en función de las medidas hasta el instante "t", es:

$$\hat{y}(t+1+1/t) = q^{-k} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t+1+1) + \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} \hat{y}(t+1), \quad (3.27)$$

siendo el error de predicción :

$$e(t+1+1/t) = \frac{N(q^{-1})}{C(q^{-1})} \hat{y}(t+1) + e(t+1+1) \quad (3.28)$$

como puede observarse en la ecuación (3.27), la predicción en cualquier instante futuro ($\hat{y}(t+1+1/t)$, $1 \geq 0$) se obtiene utilizando el predictor a un paso y las definiciones (3.19) y (3.20.)

Una manera de calcular recursivamente las predicciones para toda $1 \geq 0$ se obtiene expresando (3.27) como sigue :

$$\hat{y}(t+1+1/t) = (1 - C(q^{-1})) \hat{y}(t+1+1/t) + q^{-k} B(q^{-1}) u(t+1+1) + N(q^{-1}) \hat{y}(t+1) \quad (3.29)$$

que puede ser llevada a una forma similar a (3.16) usando la identidad (3.13) :

$$A(q^{-1}) \hat{y}(t+1+1/t) = N(q^{-1}) (\hat{y}(t+1) - \hat{y}(t+1/t)) + q^{-k} B(q^{-1}) u(t+1+1) \quad (3.30)$$

la ecuación (3.30) es la que España y Canetti [Esp.3] llaman predictor multipaso recursivo.

Esta forma de obtener el predictor a $1+1$ pasos es parecida a la expuesta por Goodwin [Goo.1] conocida como "Propiedad de Concatenación", usando como predictor a un paso la ecuación (3.14).

Tanto España [Esp.1] como Goodwin [Goo.1], muestran que las predicciones derivadas de usar el predictor óptimo a un paso, son óptimas.

2.3 Predictor multipaso autosintonizable. [Esp.1, Wit.1]

En esta etapa se desea poder predecir a $1+1$ pasos la salida de un sistema cuyos parámetros son desconocidos.

Para resolver este problema existen dos posibles caminos:

- identificar los parámetros de la planta en línea y determinar a partir de ellos los parámetros del predictor, haciendo uso de la definición (3.4).
- identificar directamente la ecuación del predictor (3.18).

Este segundo método es el que se desarrolla debido a su velocidad de cálculo, ya que no requiere resolver identidades polinómicas en líneas. [Can.1].

Se utiliza un algoritmo de mínimos cuadrados para identificar la ecuación (3.18), tal que el error de predicción (3.15) se

minimice, como lo describe [God.1,Can.1] :

$$\theta(t) = \theta(t-1) + \frac{P(t-2) \sigma(t-1) [y(t) - \hat{y}(t/t-1)]}{1 + \sigma(t-1)^t P(t-2) \sigma(t-1)}$$

$$P(t-1) = P(t-2) - \frac{P(t-2) \sigma(t-1) \sigma(t-1)^t P(t-2)}{1 + \sigma(t-1)^t P(t-2) \sigma(t-1)}$$

(3.31)

$$\hat{y}(t/t-1) = \sigma(t-1) \theta(t-1)$$

$$\sigma(t-1) = [\hat{y}(t-1/t-2), \dots, \hat{y}(t-n_a/t-n_a-1), u(t-k), \dots, u(t-k-n_b), s(t-1/t-2), \dots, s(t-n_n-1/t-n_n-2)]$$

$$\theta(t) = [-a_1, \dots, -a_{n_a}, b_0, \dots, b_{n_b}, n_0, \dots, n_n]$$

Para aplicar este algoritmo se consideran los siguientes puntos :

- Con el fin de evitar que el algoritmo de minimos cuadrados pierda capacidad de adaptación ante variaciones en la planta, y olvide las primeras estimaciones rápidamente, se implementa un algoritmo con factor de olvido variable [Lun.1,Can.1] expresado por :

$$\alpha(t) = \alpha_0 \alpha(t-1) + .96 (1 - \alpha_0) \quad (3.32)$$

con $\alpha(0) = 0.9$ y $\alpha_0 = 0.92$.

- Cuando el predictor se encuentre estimando en forma adecuada la salida del sistema y el valor absoluto del error de predicción sea menor que un cierto umbral (umbral de predicción), la información con la que se actualiza el algoritmo de minimos cuadrados, puede no ser lo suficientemente buena y perjudicar su desempeño, por lo tanto, en estos casos, no se actualiza dicho algoritmo.

- Se incluye en el regresor $\sigma(t-1)$ un "1" (sesgo) con el objeto de determinar el valor constante existente en la salida. Esto permite tomar en cuenta variaciones en el punto de funcionamiento en el caso de sistemas no lineales.

El esquema usado queda como :

Si $|y(t) - \hat{y}(t/t-1)| > \text{umbral de predicción}$,

entonces :

$$\theta(t) = \theta(t-1) + \frac{P(t-2) \alpha(t-1) [\hat{y}(t) - \hat{y}(t/t-1)]}{\alpha(t) + \alpha(t-1)^t P(t-2) \alpha(t-1)}$$

$$P(t-1) = \frac{1}{\alpha(t)} (P(t-2) - \frac{P(t-2) \alpha(t-1) \alpha(t-1)^t P(t-2)}{\alpha(t) + \alpha(t-1)^t P(t-2) \alpha(t-1)})$$

$$\hat{y}(t/t-1) = \alpha(t-1) \theta(t-1) \quad (3.33)$$

$$\alpha(t-1) = [\hat{y}(t-1/t-2), \dots, \hat{y}(t-n_A/t-n_A-1), u(t-k), \dots, u(t-k-n_B), \varepsilon(t-1/t-2), \dots, \varepsilon(t-n_n-1/t-n_n-2), 1]$$

y

$$\theta(t) = [-a_1, \dots, -a_{n_A}, b_0, \dots, b_{n_B}, n_0, \dots, n_n, v_s]$$

donde v_s es el coeficiente debido al sesgo.

Nota :

El predictor a un paso (3.16) puede ser reescrito usando las ecuaciones (2.16) :

$$C(q^{-1}) \varepsilon(t+1/t) = q^{-k} B(q^{-1}) u(t+1) + N(q^{-1}) \varepsilon(t/t-1) - A(q^{-1}) \hat{y}(t+1/t) + \varepsilon(t+1)$$

Wittenmark [Mit.1] demuestra que si los parámetros de la ecuación anterior son identificados en línea mediante el método de mínimos cuadrados recursivos, solamente pueden converger a los parámetros óptimos (propiedad de autosintonía).

2.4 Representación de estados del predictor multipaso [Esp.2] (apéndice D).

El predictor multipaso (3.30) se puede escribir en la forma de una ecuación de estados de la siguiente manera :

$$x(t+1) = A(t) x(t) + B(t) u(t-k+1) \quad (3.34)$$

$$\hat{y}(t+1/t) = C(t) x(t+1)$$

Con :

$$x(t) = [\hat{y}(t/t-1), \dots, \hat{y}(t-n_A+1/t-n_A), u(t-k), \dots, u(t-k-n_B+1), \varepsilon(t/t-1), \dots, \varepsilon(t-n_n/t-n_n-1), 1]$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n_a} & b_1 & \dots & b_{n_b} & n_0 & \dots & n_{n_n} & v_s \\ & I_{n_a} - 1 & & 0 & & & 0 & & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & & & 0 & & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & I_{n_b} - 1 & & 0 & & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 & & 0 & & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 & & 0 & & & I_{n_n} - 1 & & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 & & 0 & & & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$B(t)^t = [b_0, c, \dots, c, 1, 0, \dots, 0]$$

$$C(t) = [1, 0, \dots, \dots, 0]$$

$$D(t) = 0$$

donde I_n es la matriz identidad de orden $n \times n$ y v_s es el valor del sesgo (esta última columna es opcional pero será de utilidad en la versión adaptable). En las matrices $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ se incluye el tiempo (t) ya que estas matrices serán función de los valores que tengan las polinomios $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ y $C(q^{-1})$ en el instante "t", -o bien, los encontrados en "t" en la versión adaptable.

Con lo anterior el predictor a $l+1$ pasos se puede escribir, mediante la evolución del estado, en la forma:

$$\hat{y}(t+l+1/t) = C(t) [A(t)^{l+1} x(t) + \sum_{j=1}^{l+1} A(t)^{l+1-j} B(t) u(t-k+j)] \quad (3.36)$$

3.- Ley de control con base en la predicción

Supóngase que se dispone de los valores futuros deseados a la salida (referencia) para los tiempos de $t=1$ a $t=m$ expresados por $w(t+j)$, con $j=1 \dots m$.

Se desea que las salidas futuras de la planta ($y(t+j)$ con $0 < j < l+1$), conocidas las entradas y salidas hasta "t" sigan a la referencia $w(t+j)$, por lo que se hace necesario encontrar $u(t+j)$ futuros.

Una forma de atacar el problema es tratando de minimizar el criterio :

$$J_t = E \left(\sum_{j=k+1}^{l+1} [w(t+j) - y(t+j)]^2 + \lambda(t) \Delta u^2(t+j-k) \right) / t \quad (3.37)$$

el cual puede ser reescrito usando la definición (3.21) como :

$$J_t = E \left(\sum_{j=k+1}^{l+1} [(w(t+j) - \hat{y}(t+j/t) - e(t+j/t))^2 + \lambda(t) \Delta u^2(t+j-k)] \right) \quad (3.38)$$

Como $\hat{y}(t+j/t)$ (3.27) es conocido en el instante "t" y $e(t+j/t)$ (3.28) se desconoce y es independiente de las medidas hasta el instante "t" el criterio (3.37) se reescribe como :

$$J_t = \sum_{j=k+1}^{l+1} [(w(t+j) - \hat{y}(t+j/t))^2 + \lambda(t) \Delta u^2(t+j-k)] - E \left(\sum_{j=k+1}^{l+1} [e(t+j/t)]^2 \right) \quad (3.39)$$

quedando descrito por una parte determinística y una parte que depende de $e(t+j/t)$, que es desconocida en "t", por lo tanto, el criterio a trabajar finalmente es:

$$J_t = \sum_{j=k+1}^{l+1} [(w(t+j) - \hat{y}(t+j/t))^2 + \lambda(t) \Delta u^2(t+j-k)] \quad (3.40)$$

donde $\Delta u(t+n)$ representa la variación del control en $t+n$ respecto del control anterior en $t+n-1$. (Como el sistema presenta un cierto retardo k , existen una serie de acciones de control de $u(t-k)$ a $u(t-1)$ que ya ingresaron al sistema en "t" y una acción de control $u(t)$ que ingresa en este instante; éstas no pueden ser modificadas, aunque su efecto sobre la salida todavía no aparezca. En el criterio (3.40) se pesaron los incrementos en el control y no el control (por una función $\lambda(t)$), con objeto de evitar que el control varíe en forma brusca. Al tener variaciones pequeñas entre las acciones del control ($u(t+j)$ y $u(t+j+1)$), no se producen cambios bruscos (alta frecuencia) en la planta (flujo en un canal abierto), permitiendo así, que un predictor de orden pequeño pueda estimar en forma adecuada al sistema (parámetros distribuidos).

Bajo estos lineamientos, se considera que los controles $u(t+1), u(t+2), \dots, u(t+1+1)$ se pueden escribir como variaciones respecto del anterior, obteniéndose:

$$\begin{aligned} u(t+1) &= u(t) + \Delta u(t+1) \\ u(t+2) &= u(t) + \Delta u(t+1) + \Delta u(t+2) \\ u(t+3) &= u(t) + \Delta u(t+1) + \Delta u(t+2) + \Delta u(t+3) \\ &\vdots \\ u(t+1+k) &= u(t) + \Delta u(t+1) + \dots + \Delta u(t+1+k) \end{aligned} \quad (3.41)$$

si además se considera la ecuación (3.36) del predictor en forma de estado, queda expresado por :

$$\hat{y}(t+k+1/t) = C(t) [A(t) x(t+k) + B(t) (u(t) + \Delta u(t+1))]$$

$$\hat{y}(t+k+2/t) = C(t) [A^2 x(t+k) + A(t) B(t) (u(t) + \Delta u(t+1)) + B(t) (u(t) + \Delta u(t+1) + \Delta u(t+2))]$$

$$\hat{y}(t+k+3/t) = C(t) [A^3 x(t+k) + A(t)^2 B(t) (u(t) + \Delta u(t+1)) + A(t) B(t) (u(t) + \Delta u(t+1) + \Delta u(t+2)) + B(t) (u(t) + \Delta u(t+1) + \Delta u(t+2) + \Delta u(t+3))]$$

(3.42)

donde :

$$x(t+k) = A(t)^k x(t) + \sum_{j=1}^k A(t)^{k-j} B(t) u(t-k+j) \quad (3.43)$$

En consecuencia el predictor se puede escribir como :

$$\hat{y}(t+k+1/t) = \hat{y}_h(t+k+1) + \hat{y}_p(t+k+1) \text{ con } 1 \leq k. \quad (3.44)$$

en el que :

$$\hat{y}_h(t+k+1) = C(t) [A(t)^{1+k} x(t) + \sum_{j=0}^{1-k} A(t)^j B(t) u(t)] \quad (3.45)$$

$$\hat{y}_p(t+k+1) = C(t) \left[\sum_{j=0}^{1-k} \sum_{i=1}^{j+1} A(t)^{1-k-j} B(t) \Delta u(t+i) \right] \quad (3.46)$$

Con lo anterior, si se consideran las predicciones $\hat{y}(t+k+1/t)$ con $1 \leq k$, y se forma un vector " \hat{Y} " con ellas, se llega a :

$$\hat{Y}(t) = \hat{Y}_h(t) + S \Delta U(t) \quad (3.47)$$

$$\hat{Y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+k+1/t) \\ \hat{y}(t+k+2/t) \\ \hat{y}(t+k+3/t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+k+1/t) \end{bmatrix} \hat{Y}_h(t) = C(t) \begin{bmatrix} A(t) x(t+k) + B(t) u(t) \\ A(t)^2 x(t+k) + (B(t) + A(t)B(t)) u(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ A(t)^{1+k} x(t+k) + \sum_{j=0}^{1-k} A(t)^j B(t) u(t) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$G = \begin{bmatrix} C(t)B(t) & 0 & \dots & 0 \\ C(t)[A(t)F(t)+B(t)] & C(t)B(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ I-k & I-k-I & \dots & 0 \\ C(t) \sum_{j=0}^{I-k} A(t)^j B(t) & C(t) \sum_{j=0}^{I-k-1} A(t)^j B(t) & \dots & C(t)B(t) \end{bmatrix}$$

$$\Delta U(t) = \begin{bmatrix} \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \\ \Delta u(t+3) \\ \vdots \\ \Delta u(t+1+I-k) \end{bmatrix}$$

donde :

- \hat{Y} es de orden $(I-k) \times 1$.
- \hat{Y}_h es de orden $(I-k) \times 1$.
- S es de orden $(I-k) \times (I-k)$.
- ΔU es de orden $(I-k) \times 1$.

Tomando las definiciones anteriores para el vector de predicciones \hat{Y} , el vector de variaciones de la entrada (ΔU), y $W(t) = \text{cte.}$, se describe el criterio (3.42) como :

$$J_t = [W(t) - \hat{Y}(t)]^T S + \lambda [\Delta U(t)]^T S \quad (3.49)$$

con $W(t) = [w(t+1) \dots w(t+1+I-k)]^T$ de orden $(I-k) \times 1$, (3.50)

(el horizonte de optimización h_0 es de $k+1$ a $I+1$)

Para encontrar el mejor vector de ΔU , que minimice el criterio, se substituye (3.47) en (3.49):

$$[W(t) - \hat{Y}_h(t) - G \Delta U(t)]^T (W(t) - \hat{Y}_h(t) - G \Delta U(t)) + \lambda [\Delta U(t)]^T S \Delta U(t) \quad (3.51)$$

se calcula el gradiente respecto a $\Delta U(t)$ y se iguala con cero :

$$J_t = 2 [- G^T (W(t) - \hat{Y}_h(t) - G \Delta U(t)) + \lambda \Delta U(t)] = 0 \quad (3.52)$$

despejando $\Delta U(t)$ se tiene el vector óptimo de variaciones en los controles que minimizan el criterio, expresado por [Cla.1], [Lue.1] :

$$\Delta U(t) = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (W(t) - \hat{Y}_h(t)) \quad (3.53)$$

Una vez que el vector $\Delta U(t)$ ha sido encontrado, se aplica el primer elemento de él, según la ecuación (3.41). A continuación, siguiente instante de muestreo, se repite el proceso de

Dentro de la implementación hecha del GPC se observa que, cuando el sistema alcanza la referencia $W(t)$ (referencia de tipo escalón) el control $U(t)$ obtenido por el GPC, presenta pequeñas oscilaciones (debidas al error cometido en la predicción). Con objeto de evitar el ruido de baja amplitud que aparece en el control se creó un mecanismo que suma el valor absoluto del error existente entre las predicciones y la consigna en el horizonte de optimización " h_0 " ($t+1$ a $t+1$), revisando si esta suma es menor que un umbral (umbral control), en cuyo caso el control que se usará en el siguiente periodo de tiempo $u(t+j+1)$, será igual al anterior $u(t+j)$, siendo entonces cero el incremento en el control.

4.- Aplicación de un controlador predictor general a un flujo de un canal abierto rectangular (línea lineal)

El primer paso para el uso de un controlador predictor general, es encontrar los órdenes adecuados de los polinomios del predictor que permitan estimar la salida de la planta (dada una entrada conocida) con el menor error de predicción. Estas estimaciones serán usadas en el cálculo del control.

Con objeto de encontrar los órdenes de los polinomios del predictor que estimen adecuadamente el tirante final de un tramo de canal rectangular (2.48 sección 2.4) conociendo el valor de la abertura de la compuerta-1 (aguas arriba), se exita el sistema con una señal binaria pseudoaleatoria, con periodo de 64 muestras (repetido 2 veces) y amplitud 0.1m montada sobre una señal constante de 0.1m (aplicada a la compuerta-1). Para suavizar los cambios en la compuerta-1 (cambios en la señal binaria), se emplea un mecanismo que cada 440 seg. toma el valor siguiente de la señal y los cambios entre un valor y otro de la señal binaria son por incrementos de 5cm de amplitud cada 11 seg (periodo de integración), ésto queda determinado por la velocidad máxima de apertura de la compuerta que se fijó en : 27.3 cm./minuto.

Con los datos obtenidos de la simulación anterior se hicieron distintas pruebas en los órdenes de los polinomios del predictor multiaso autosintonizable ($A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ y $N(q^{-1})$), para poder encontrar los órdenes que permitan estimar el comportamiento del flujo en un canal rectangular lineal presentando el menor error de predicción. Tomando un algoritmo de mínimos cuadrados con sesgo (predictor con sesgo) y considerando que errores de predicción menores a 0.001m. (umbral de predicción) no introducen nueva información al algoritmo, se encuentra que la suma de los errores de predicción al cuadrado para distintos órdenes en los polinomios del predictor son (la salida del sistema estimada por el predictor es el tirante final filtrado (2.49)) :

orden de $A(q^{-1})$	orden de $B(q^{-1})$	orden de $H(q^{-1})$	retardo	suma de errores en la predicción al cuadrado $(y(t) - \hat{y}(t/t-1))^2$
2	1	1	2	0.0225619
2	1	1	3	0.0069428
3	2	2	2	0.0067723
3	2	2	3	0.0032625
4	3	3	3	0.0027354
3	1	1	3	0.0064129
3	2	1	3	0.0033412
3	1	2	3	0.0062349

En base a los resultados anteriores y los valores de los parámetros del predictor obtenidos en cada caso (el valor del coeficiente de $B(q^{-1})$ asociado con retardo 2 es mucho menor que los asociados a retrasos mayores), se encuentra que el retraso del sistema es de 3 periodos de muestreo (330 seg.). Este retraso coincide con el encontrado teóricamente, dado por la razón de la distancia del canal y la celeridad. Para el canal estudiado el retardo, calculado teóricamente, es de 326 segundos.

En cuanto a los órdenes del polinomio $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ y $H(q^{-1})$, los más adecuados según los resultados del error obtenido son de 2, 3 y 1 para $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ y $H(q^{-1})$ respectivamente. Esta selección se basa en el hecho de que al aumentar el orden en los polinomios no se reduce en forma substancial el error de predicción y si aumenta el tiempo de cómputo; por el contrario, a disminuciones en los órdenes, aumenta en forma considerable el error de predicción.

Una vez conocido el orden de los polinomios se debe verificar su funcionamiento.

El funcionamiento del predictor se comprobó comparando las estimaciones que realiza sobre las salidas futuras de la planta y los valores reales de ésta, conociendo los valores futuros en la entrada. En la figura (3.1) se ve que las estimaciones encontradas de la salida con el predictor son casi iguales a la salida real del sistema una vez pasada la parte inicial de adaptación de parámetros. En la figura (3.2) aparece el error de predicción entre las estimaciones y la salida de la planta.

Obtenidos los órdenes de los polinomios del predictor y comprobado su buen funcionamiento se pasa a la etapa del control (el predictor estimará la altura del tirante final filtrada de un canal rectangular abierto linealizado, cuya entrada actúa sobre la compuerta-1 en forma de rampas hasta alcanzar el valor deseado, figura 3.3).

Considérese el controlador predictor general (GPC) con :

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.01 \\ n_c &= 1 \\ h_c &= 5 \end{aligned}$$

y tómesese como valores iniciales para los parámetros del predictor, así como para la matriz de covariancia, los últimos obtenidos de las pruebas para determinar el orden.

La respuesta del sistema en seguimiento utilizando los parámetros anteriores en el GPC aparecen en la figura (3.4), donde se observa que la salida del sistema sigue la referencia presentando un pequeño error y adelanto respecto a ella. El adelanto es debido a que la información tomada del sistema y usada para calcular el control, está filtrada (filtro Chebychev 2.49). El hecho de filtrar la señal produce un retraso en la salida del sistema filtrada respecto a la salida real del sistema, ocasionando un adelanto entre la salida del sistema y la referencia.

En la figura (3.5) se compara el valor de la referencia con el valor del tirante filtrado, encontrando que el seguimiento de la salida filtrada a la consigna es satisfactorio y no presenta retardo o adelanto alguno.

El siguiente paso es introducir una perturbación al sistema (variación en la apertura de la compuerta-2). La figura (3.6) corresponde a la respuesta en seguimiento del sistema al cual se le ha introducido una perturbación. En esta figura se observa que, al aparecer la perturbación, el control trata de corregirla cometiendo algunos errores, sin embargo, al transcurrir el tiempo el funcionamiento del control mejora presentando errores cada vez más pequeños.

En cuanto a regulación (figura 3.7), al aparecer una perturbación en el sistema, el control GPC corrige rápidamente el error entre la referencia y la salida del sistema, sin embargo, no puede eliminarlo por completo, apareciendo un error en estado estable. Este hecho es debido a :

- Errores cometidos en la predicción, ya que la presencia de un umbral en el algoritmo de mínimos cuadrados ocasiona que, para errores de predicción menores al umbral de predicción, no se actualice el algoritmo (no se modifican los parámetros del predictor), ocasionando que no se mejore la estimación de la salida del sistema.

- Presencia de un mecanismo en el control que mantiene fijo el valor de éste si el error entre la respuesta del sistema estimada y la referencia es menor que un cierto umbral.

De los dos problemas anteriores el primero es el más importante.

Comparando la figura (3.6) con la obtenida para el controlador (2.53) (figura 2.20), al aparecer la perturbación el

GPC trata de corregir rápidamente el error, a diferencia del control de parámetros constantes (2.50) que requiere más tiempo para alcanzar la consigna. En cuanto al seguimiento observado después de que aparece la perturbación y se cambia la consigna, es deficiente en el GPC en comparación con el controlador (2.50), debido a que el algoritmo de mínimos cuadrados todavía no ha encontrado los coeficientes adecuados para los polinomios del predictor. Transcurrido el tiempo en que el predictor obtiene los parámetros adecuados para estimar el comportamiento de la planta con perturbación, se observa que la respuesta en seguimiento de la planta, usando el GPC, es mejor que cuando se usó el control (2.50).

En lo concerniente a regulación se observa que el error que aparece entre la referencia y la salida del sistema, al presentarse una perturbación, es menor en el caso del GPC (figura 3.7), sin embargo, el control (2.50) (figura 2.23) elimina por completo el error y el GPC no.

De los resultados obtenidos para el controlador (2.50) y los obtenidos para el GPC en el caso de un canal rectangular (teoría lineal) se concluye que es suficiente con usar el control (2.50) (parámetros constantes) para obtener un buen funcionamiento en seguimiento y regulación en este sistema.

Es importante recordar en este momento, que nuestro interés no radica en controlar el flujo en un tramo de canal lineal ("ideal"), sino en un tramo de canal real regido por ecuaciones diferenciales parciales no lineales, por lo tanto, en la siguiente sección se completa el estudio del GPC y se aplica a un canal real.

5.- Canal rectangular abierto (modelo no lineal)

En esta sección se compara el funcionamiento del controlador predictor general con el control proporcional proporcional - integral (2.50) estudiado en el capítulo 2, usando el tramo de canal rectangular en gasto establecido en régimen uniforme (2.48) descrito en la sección 2.4.

Antes de hablar del control se presentan las pruebas realizadas para determinar los órdenes en los polinomios del predictor ($A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ y $N(q^{-1})$) así como el retardo del sistema (k). El canal fue exitado con una señal binaria de características similares a la usada para el caso lineal sumada a la apertura de la compuerta-1 requerida para gasto establecido en régimen uniforme (2.48):

orden de $A(q^{-1})$	orden de $E(q^{-1})$	orden de $N(q^{-1})$	retardo (k)	suma de errores de predicción al cuadrado $(y(t) - \hat{y}(t/t-1))^2$
2	1	1	2	0.022506
2	1	1	3	0.0020673
3	2	2	2	0.1246042
3	2	2	3	0.013545
4	3	3	3	0.6424274
3	1	1	3	0.0061453
3	2	1	3	0.0085109
3	1	2	3	0.0162742
2	2	1	3	0.0020544
2	2	2	3	0.01366
2	1	2	3	0.009247

De los resultados obtenidos, así como de los coeficientes de los polinomios de cada caso se encuentra que, al igual que para el canal (teoría lineal), el retardo del sistema es tres periodos de muestreo (330 seg).

En base a la tabla anterior se aprecia que si los polinomios $A(q^{-1})$, $E(q^{-1})$ y $N(q^{-1})$ tienen órdenes de 2, 2 y 1 respectivamente, se logra el menor error de predicción, encontrando una buena estimación de la salida del canal rectangular abierto (no lineal, figura 3.3).

Al igual que en el caso del canal (teoría lineal), el predictor estima el tirante final filtrado a partir de una entrada (conocida) que ingresa al sistema por la compuerta-1 variándola en forma gradual (rampa) hasta obtener la abertura especificada (entrada) (figura 3.3).

Se comienza el estudio del control analizando el comportamiento del sistema bajo el control P - PI(2.50), usando iguales parámetros en el control a los obtenidos para el canal teoría lineal.

El comportamiento en seguimiento de este tipo de algoritmo aplicado al canal modelo no lineal aparece en la figura (3.9). En ella se observa que existe un comportamiento distinto del sistema cuando la consigna está en 2.1836 cm. y en 1.9836 cm., poniendo de manifiesto la existencia de una no linealidad en la planta.

El comportamiento del sistema ante perturbaciones en la abertura de la compuerta-2 (aguas abajo) y el nivel del tirante aguas abajo de la compuerta-2 son :

abertura compuerta-2	nivel aguas abajo compuerta-2	figura
+ 15.0 cm	0.0 cm	3.10
- 15.0 cm	0.0 cm	3.11
0.0 cm	+ 10.0 cm	3.12
0.0 cm	- 10.0 cm	3.13

De las figuras (3.10) y (3.11) se puede apreciar que el funcionamiento del control se deteriora al haber cambios en la abertura de la compuerta-2. En el primer caso (figura 3.10) el sistema no puede alcanzar la consigna. En cuanto a la segunda figura (3.11) (se cierra compuerta-2), el sistema alcanza la referencia y presenta sobrepasos.

Los comportamientos antes mencionados se pueden explicar con base en el siguiente razonamiento: "Abrir la compuerta-2 respresenta un aumento en el gasto de salida, de tal manera que si se quiere mantener el tirante, hay que aumentar el gasto de entrada, es decir, abrir la compuerta-1; en el caso de que se cierra la compuerta-2 ocurre lo contrario".

Tomando en cuenta el razonamiento anterior se observa que un aumento en la apertura de la compuerta, produce una disminución en la ganancia del sistema (compuerta-1 tirante final), es decir, la salida del sistema (tirante final) no alcanza la referencia. En el caso opuesto cuando se cierra la compuerta-2, ocurre un aumento en la gancia del sistema, ocasiona que la respuesta presente sobrepasos.

Como se podrá ver a lo largo de las distintas pruebas, las situaciones en las que el gasto debe de disminuir son las que presentan un comportamiento más difícil de explicar, controlar y predecir.

Las figuras (3.12) y (3.13), correspondientes a las respuestas en seguimiento del sistema ante perturbaciones en el nivel aguas abajo de la compuerta-2, muestran que no existen diferencias apreciables respecto al comportamiento sin perturbaciones (3.6).

En cuanto al desempeño en regulación los resultados aparecen en la figura (3.14), donde se ve que una perturbación causada por el cierre de la compuerta-2, produce un mayor error entre la salida del sistema y la referencia que cuando se abre dicha compuerta (manifestándose la no linealidad de la planta). También se puede ver que el control (2.50) elimina por completo el error, alcanzando la referencia.

Para finalizar este estudio del control (2.50) es importante mencionar que usando este control (proporcional, proporcional - integral), la velocidad de respuesta del sistema recae sobre la parte proporcional (insensible a cambios en la planta), principalmente en el tirante inicial (predecir el funcionamiento del tirante final), y la capacidad de regulación en la acción integral del tirante final que, al tener un coeficiente pequeño, limita la acción integral.

Ahora se estudia el comportamiento del controlador predictor general (GPC) analizando el efecto que produce el variar algunos de los parámetros del control (GPC), sobre la respuesta en seguimiento del canal (modelo no lineal).

Tomando :

umbral de predicción = 0,001m

se tiene :

λ	n_u	m_c	h_0	umbral control	Resultado (figura)
0.1	1	0	5	0.01	3.15
0.01	1	0	5	0.01	3.16
0.05	1	0	5	0.04	3.17
0.05	1	0	5	0.0025	3.18
0.05	2	2	5	0.01	3.19
0.05	2	3	5	0.01	3.20
0.05	2	4	5	0.01	3.21
0.05	2	5	5	0.01	3.22
0.05	1	0	7	0.01	3.23
0.05	1	0	3	0.01	3.24

De las figuras anteriores se puede apreciar que todas ellas presentan un comportamiento similar en el primer periodo de la señal de referencia, que corresponde a una fase de adaptación en la que el predictor encuentra los parámetros adecuados para estimar la salida de la planta.

De las figuras (3.15) y (3.16) se observa que un aumento en λ produce una disminución en la magnitud de las acciones de control (3.49), presentando oscilaciones de menor amplitud en la respuesta del sistema durante el primer periodo de la señal de referencia (periodo de adaptación).

Comparando los resultados lanzados por las figura (3.17) y (3.18) se nota que al aumentar el umbral en el control (error permitido entre la respuesta del sistema y la referencia), el control presenta menos cambios, produciendo oscilaciones de menor amplitud a la salida del sistema en la fase de adaptación. En cuanto al error obtenido en cada caso al seguir la consigna, se ve que no existe una diferencia apreciable y más aún, hay situaciones en las que el error entre la consigna y la respuesta del sistema es menor cuando el umbral del control es mayor. Estos resultados indican que, en el caso de un canal rectangular abierto, es preferible mantener el control constante y no variarlo continuamente para alcanzar la referencia.

En las figuras (3.19) a (3.22) se considera que se tienen dos posibles acciones (cambios) en el control para lograr que la respuesta del sistema siga la referencia. Cuando la segunda acción de control se calcula para ser aplicada en el siguiente periodo de muestreo a la primera acción de control (figura 3.19),

se ve que el control aplicado al sistema (primera acción de control), presenta oscilaciones de menor amplitud en la fase de adaptación y los controles aplicados son más pequeños. Conforme el periodo de muestreo en el que se aplica la segunda acción del control se distancia del periodo de muestreo en el que se aplica la primera, el control aplicado al sistema tienden a aumentar y la respuesta del sistema tiende a parecerse más a la del sistema con una sola acción de control (figura 3.25). Una explicación ha este fenómeno radica en el hecho de que el sistema en estudio, se caracteriza por ser un almacenador de agua, presentando un comportamiento similar al de un integrador; por lo tanto, mientras más tiempo esté presente una acción de control, más efecto tendrá sobre el comportamiento del sistema, de ahí que si se aplica la segunda acción del control inmediatamente después de la primera acción, la magnitud del primer control se verá reducida más que si la segunda acción se aplicara tiempo después.

Con las figura (3.23) y (3.24) se presenta el caso en el que se cambia el número de periodos de muestreo sobre los que se desea buscar el control adecuado para seguir la referencia. En estas gráficas observamos que, al aumentar el horizonte de optimización, la magnitud de los controles disminuye en forma apreciable y por lo tanto, las oscilaciones que presenta el sistema en la fase de adaptación son menores. Aunque hay disminución en los errores cometidos en la fase de adaptación se puede ver que el error entre la referencia y la respuesta del sistema, una vez que la referencia permanece constante, es mayor mientras más grande sea el horizonte de optimización. Esto se debe a que, si bien, el tener una idea del futuro permite buscar controles más adecuados, también introduce errores, ya que el predictor multipaso autosintonizable al tener que predecir el comportamiento de la planta sobre un horizonte mayor, comete más errores que sobre uno menor, puesto que las predicciones futuras se basan en las anteriores, se provoca que los errores cometidos en cada estimación se vayan sumando y al final se tenga un error grande.

A continuación se estudia el comportamiento del controlador predictor general (GPC) para seguimiento y regulación. Para tal efecto se toman los siguientes parámetros del controlador :

$\lambda = 0.05$
 $n_u = 1$
 $h_0 = 5$
umbral control = 0.01
umbral de predicción = 0.001

Los valores iniciales de los parámetros del predictor, así como los valores de la matriz de covariancia, son los últimos obtenidos en el experimento de determinación de los órdenes (2,2,1).

El comportamiento en seguimiento del controlador predictor general aparece en la figura (3.25), aquí se percibe que pasada la etapa de adaptación la salida del sistema sigue a la referencia presentándose un error pequeño entre éstas.

El desempeño del GPC en seguimiento ante perturbaciones en la abertura de la compuerta-2 y en el nivel aguas abajo de la compuerta-2 es :

Abertura en compuerta-2	nivel aguas abajo en compuerta-2	figura
+ 0.15 cm.	0.0 cm.	3.26
- 0.15 cm.	0.0 cm.	3.27
0.0 cm.	+ 10.0 cm.	3.28
0.0 cm.	- 10.0 cm.	3.29

En las figura (3.26) a (3.29) se introduce una perturbación pasado el primer periodo de la señal de referencia (periodo de adaptación). En todas las figuras se observa que al presentarse la perturbación, el control trata de corregirla, logrando hacerlo. Sin embargo, al igual que en la fase de adaptación se presentan oscilaciones en la respuesta del sistema cuando sigue la consigna en su valor menor. Las oscilaciones tienden a disminuir conforme el tiempo transcurre. Este resultado sugiere que, al aparecer la perturbación, el predictor requiere encontrar nuevos parámetros para estimar adecuadamente la salida del sistema, logrando esto poco a poco conforme el tiempo transcurre, pudiendo por lo tanto, encontrar los controles correctos para seguir la referencia.

En cuanto al comportamiento en regulación se encuentra que el sistema usando el GPC no es capaz de eliminar el error que aparece en la salida del sistema debida a una perturbación (abertura compuerta-2), presentando un error en estado estable menor a 1.5 cm. (figura 3.30).

Esta deficiencia existente en regulación es debida a dos factores :

- El predictor presenta errores, debidos a que no es capaz de predecir el comportamiento de un sistema de parámetros distribuidos.

- El umbral en el control.

Los efectos antes mencionados se ponen de manifiesto con este comentario : Cuando la respuesta del sistema es muy cercana a la referencia (referencia constante) y el umbral de predicción es menor a .001 cm., el algoritmo de mínimos cuadrados no se actualiza (no cambian los parámetros de predictor), se observa que las estimaciones realizadas con el predictor son tales, que muestran cómo la salida de la planta alcanza la consigna e

inclusive la pasa al evolucionar sobre el horizonte de optimización con el control presente, ocasionando que éste se mantenga constante. Observando la respuesta de la planta con el control calculado por el GPC vemos que la salida del sistema no alcanza la referencia sino que permanece constante, presentándose el error entre la salida del sistema y la consigna. Este hecho lleva a la conclusión siguiente: el error existente, tanto en seguimiento como en regulación, es debido a que el predictor no estima adecuadamente la salida de la planta.

Para terminar el estudio del controlador predictor general (GPC) se analiza el comportamiento presentado por los parámetros de predictor (3.27), obtenidos por el algoritmo de mínimos cuadrados (3.33) durante el estudio del desempeño del GPC en seguimiento sin perturbaciones aplicado a un tramo de canal rectangular (modelo no lineal) (figura 3.25).

En las figuras (3.31) a (3.35) se presenta la evolución en el tiempo de los parámetros del predictor (3.22), en estas figuras se observa cómo en un principio aparecen cambios bruscos en los parámetros, los cuales tienden a disminuir conforme transcurre el tiempo, es decir, hasta que encuentra los parámetros óptimos. Pasada esta etapa de aprendizaje se ve que sólo se presentan cambios en los parámetros cuando la consigna cambia, es decir, al cambiar de punto de funcionamiento el canal.

Como se puede observar de los resultados anteriores, en el caso del GPC, no se desea que los parámetros del predictor converjan a un valor, sino que puedan estimar adecuadamente la salida del sistema.

Comparando los dos algoritmos de control, se observa que el comportamiento del canal usando el control proporcional - integral (2.50), es distinto cuando se sigue el mayor valor de la consigna, que cuando se sigue el menor; a diferencia del GPC que, si bien, presenta una fase de aprendizaje donde hay oscilaciones en la respuesta del sistema, pasada esta etapa, su comportamiento es mucho mejor (tanto para el valor superior como para el inferior de la consigna), que en el caso del control (2.50) y además mejora conforme pasa el tiempo.

En cuanto al comportamiento del sistema en seguimiento ante perturbaciones, al aparecer la perturbación el GPC reduce su efecto sobre el tirante final y lo corrige rápidamente; una vez pasado esto, se observa cómo, al transcurrir el tiempo, el GPC mejora el seguimiento, no así el control (2.50), que siempre presenta un comportamiento igual y en algunos casos es muy deficiente.

Para regulación se observa que al entrar una perturbación al sistema el GPC corrige rápidamente su efecto, apareciendo un menor error entre la salida del sistema (tirante final) y la referencia, sin embargo, el GPC no alcanza la referencia, sino se queda dentro de una franja de 1.5 cm. alrededor de ésta, mientras que el control (2.50) elimina por completo el error gracias a su acción integral en tirante final.

6.- Conclusiones

De los resultados obtenidos sobre la predicción del nivel de agua en un canal rectangular, se encontró que las predicciones obtenidas usando un predictor multipaso autosintonizable con modelo ARMA (con sesgo) presentan un error tal, que permite un funcionamiento adecuado del control ante seguimiento (la salida del sistema sigue una referencia o consigna determinada) y no así para regulación (la salida del sistema debe mantener un valor determinado en presencia de perturbaciones).

De las variaciones hechas en los distintos parámetros del algoritmo de control del GPC se encontró, que si se desean acciones de control más suaves y por lo tanto, errores menores entre la consigna y la referencia en la parte de adaptación, es necesario para el caso de un canal abierto, aumentar el valor de λ (el peso de la variaciones en el control en el criterio de optimización), incrementar h_0 (el horizonte de trabajo sobre el que se realiza la optimización) y considerar dos acciones de control, donde la segunda acción empiece a actuar un instante de muestreo después de la primera. En cuanto al umbral en el control, se pudo observar que un aumento en éste ocasiona que el control presente menos variaciones.

Con las respuesta del control (2.50) y GPC en seguimiento, se observa que un control proporcional proporcional-integral (2.50) de parámetros constantes, no presenta un funcionamiento adecuado ante la no linealidad de la planta y ante perturbaciones en la compuerta-2, al contrario de la versión adaptable, en la que el predictor usado por el GPC estima adecuadamente la salida de la planta una vez pasada la parte de adaptación, dando como resultado una selección adecuada del control a ser usado. Esto nos lleva a pensar que " para controlar bien hay que predecir bien".

De los resultados obtenidos para el canal (modelo no lineal), se deduce que en las situaciones en las que hay que reducir el flujo que entra al canal, el algoritmo de control P - PI (2.50) y el GPC presentan un deterioro mayor en su funcionamiento, sugiriendo un cambio en el modelo de la planta más brusco al disminuir el flujo que al aumentarlo.

Predicción del modelo lineal

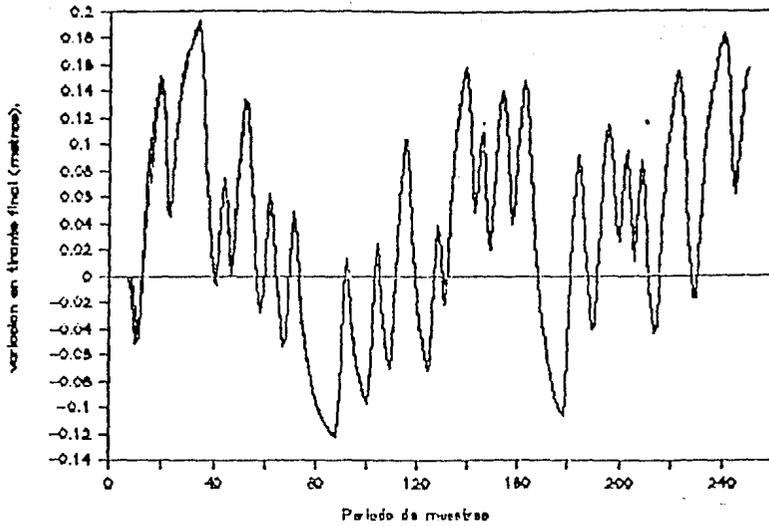


Figura 3.1 Comparación entre la salida del sistema (tirante final filtrado) y su predicción.

Predicción del modelo lineal

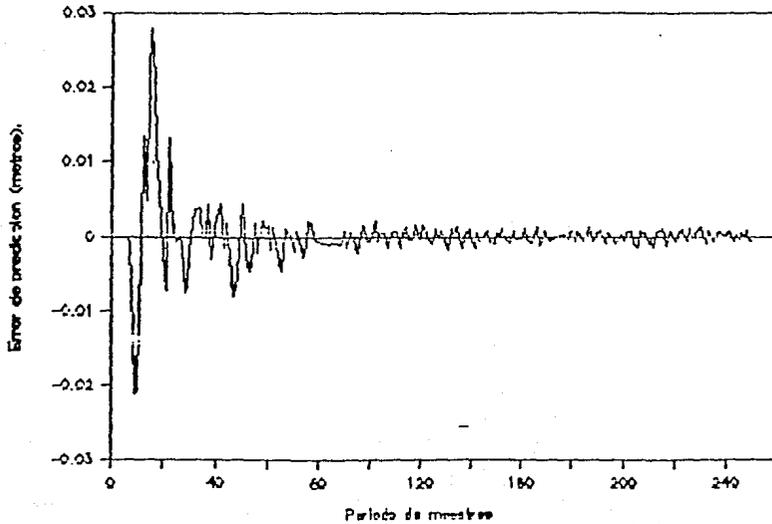


Figura 3.2. Error de predicción $(y(t) - \hat{y}(t/t-1))$.

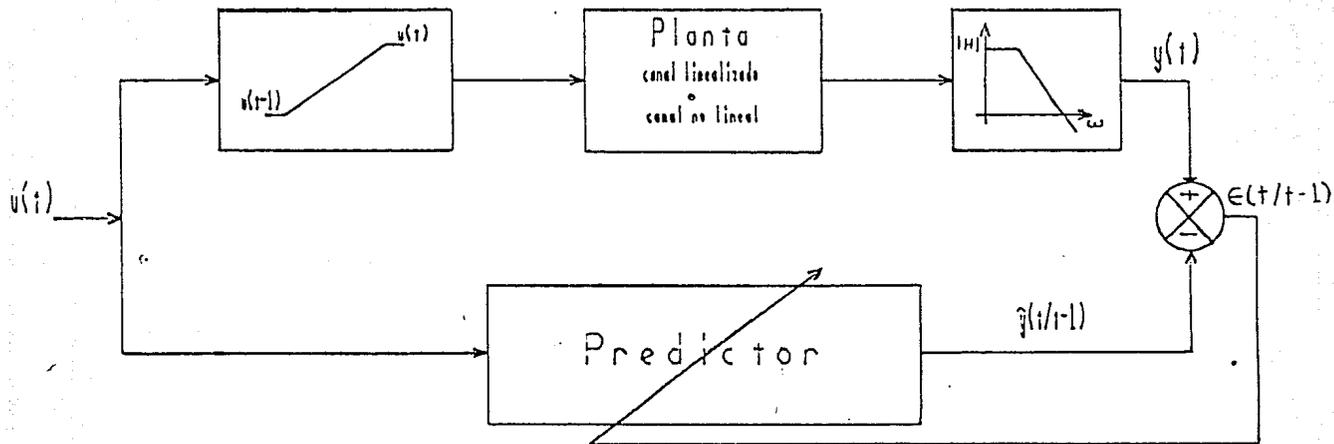


Figura 3.3 Esquema del predictor.

Canal linealizado

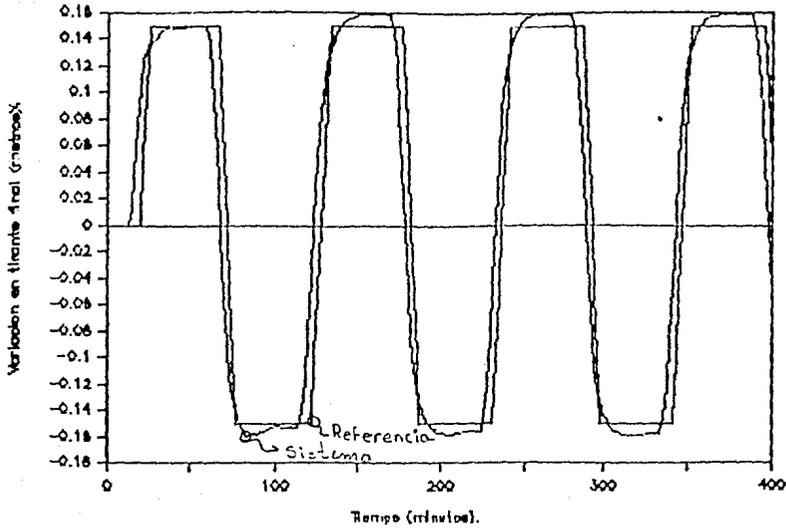


Figura 3.4 Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el GPC.

Canal linealizado

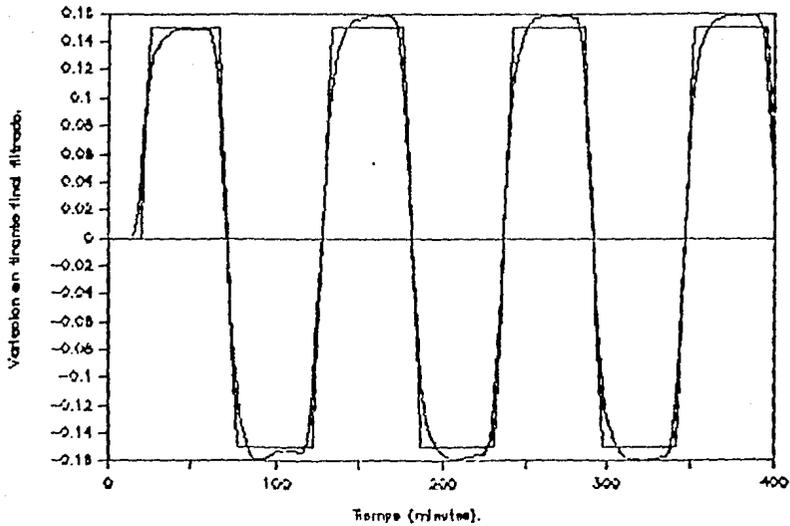


Figura 3.5 Respuesta del tirante final filtrado en seguimiento usando el GPC.

Canal linealizado

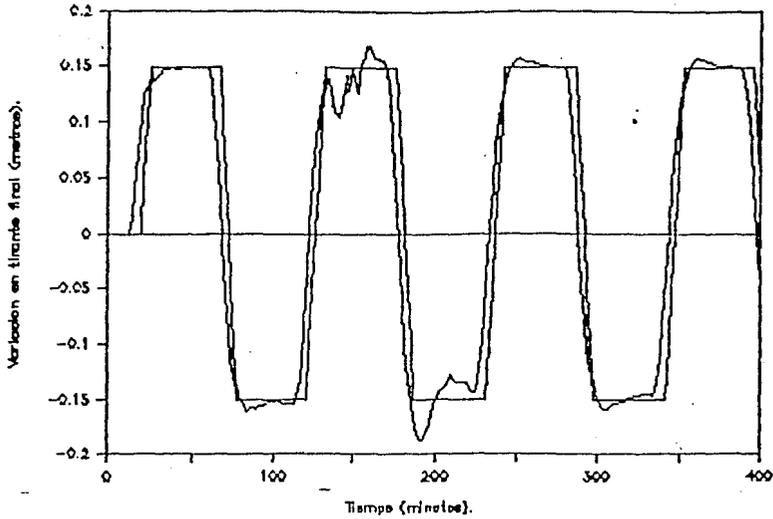


Figura 3.6 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento ante perturbaciones.

Canal linealizado

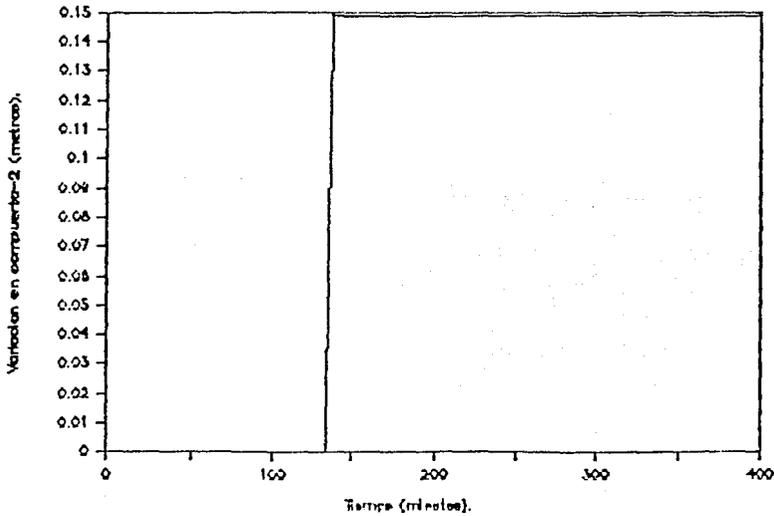


Figura 3.6 (b) Perturbación, apertura de compuerta-2.

Canal linealizado

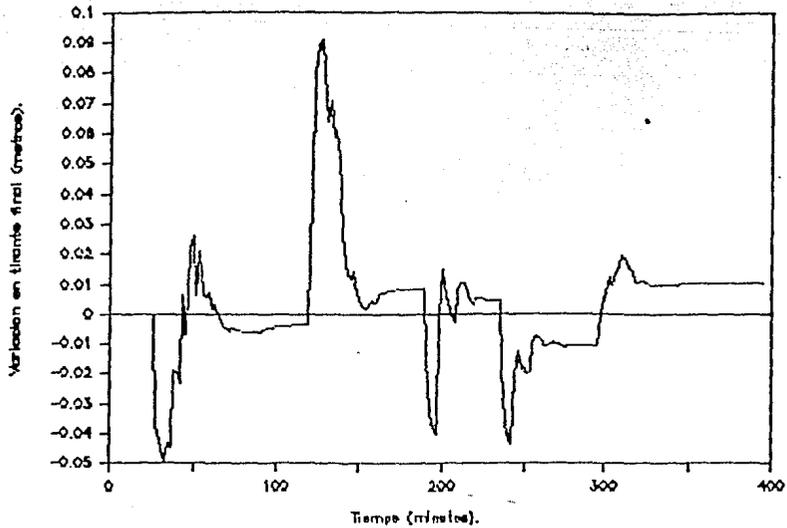


Figura 3.7 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en regulación ante perturbaciones.

Canal linealizado

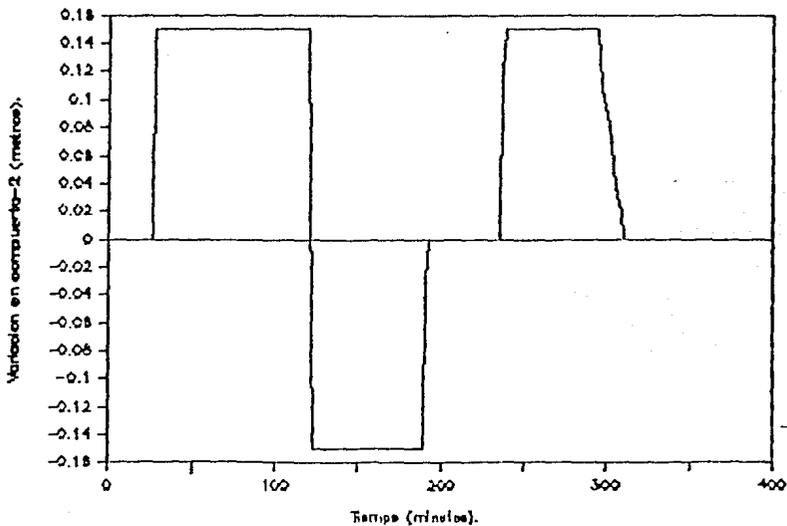


Figura 3.7 (b) Perturbación, apertura de compuerta-2.

Predicción del modelo no lineal

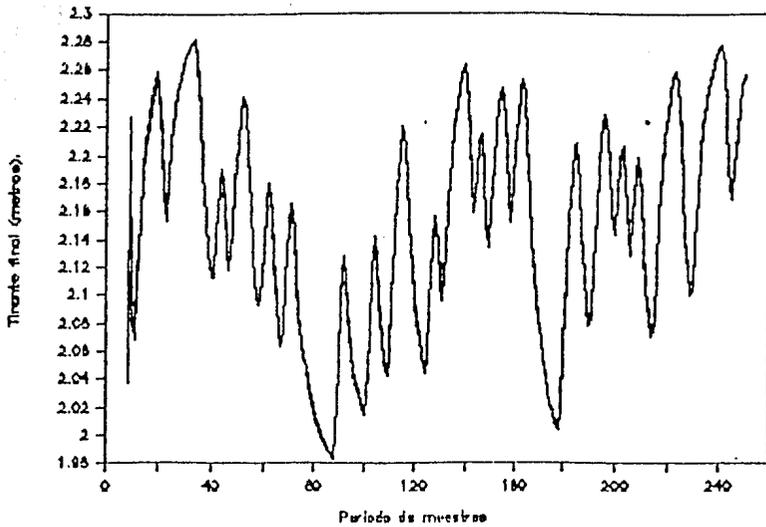


Figura 3.8 (a) Comparación entre la salida del sistema (tirante final filtrado) y su predicción.

Predicción del modelo no lineal

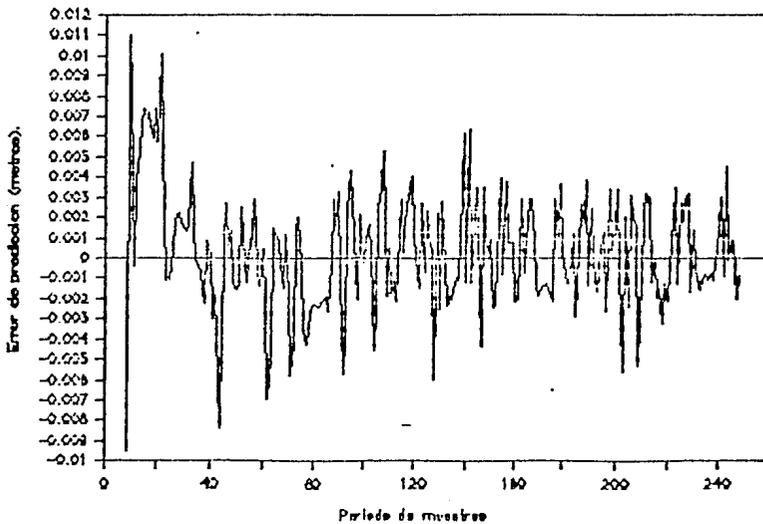


Figura 3.8 (b) Error de predicción ($y(t) - \hat{y}(t/t-1)$).

Canal no lineal

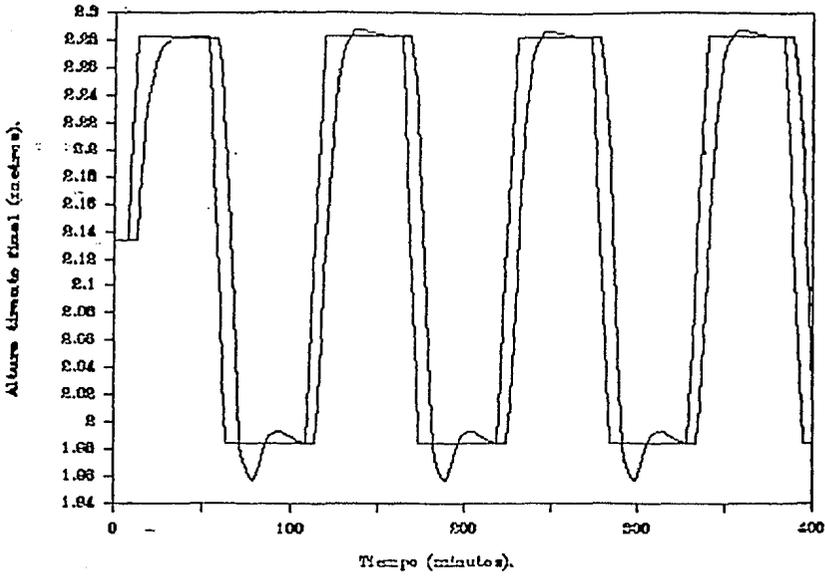


Figura 3.9 Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el control P - PI.

Canal no lineal

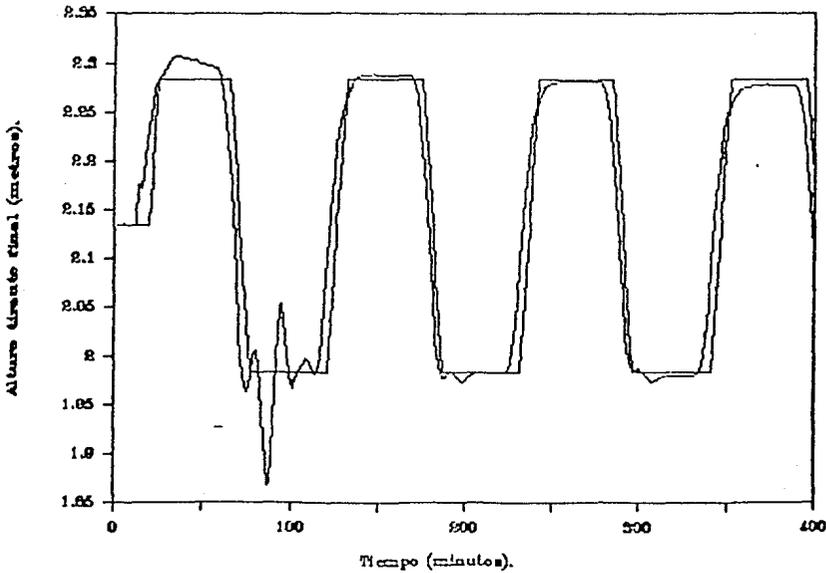


Figura 3.25 Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el GPC.

Canal no lineal

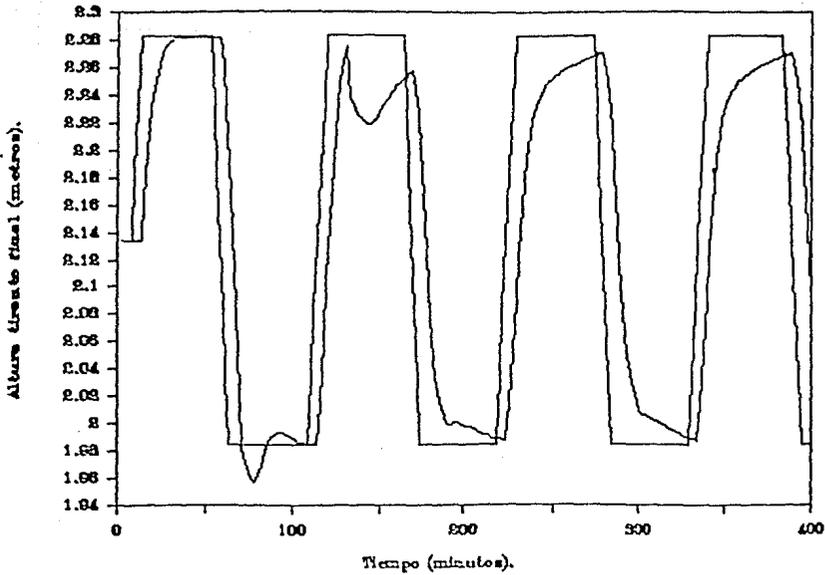


Figura 3.10 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento ante perturbaciones (P - PI).

Canal no lineal

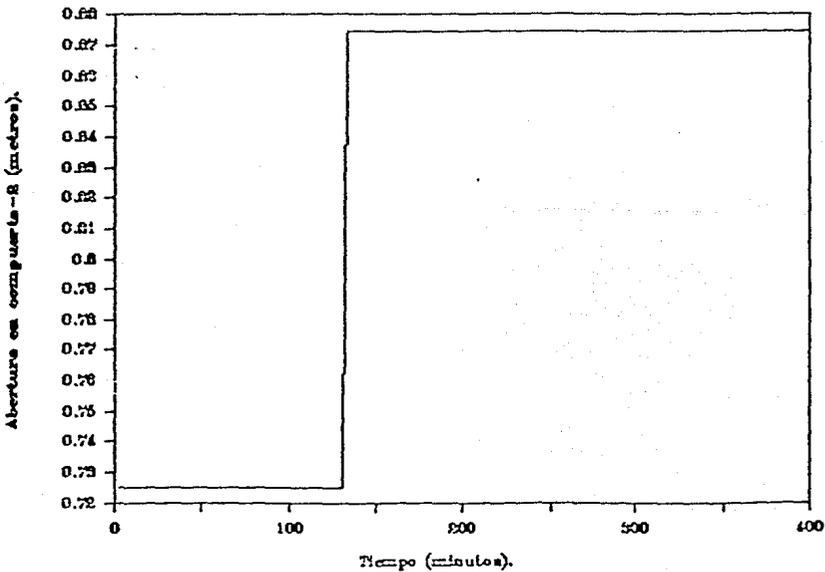


Figura 3.10 (b) Cambio en la apertura de compuerta-2 (+ 15 cm.).

Canal no lineal

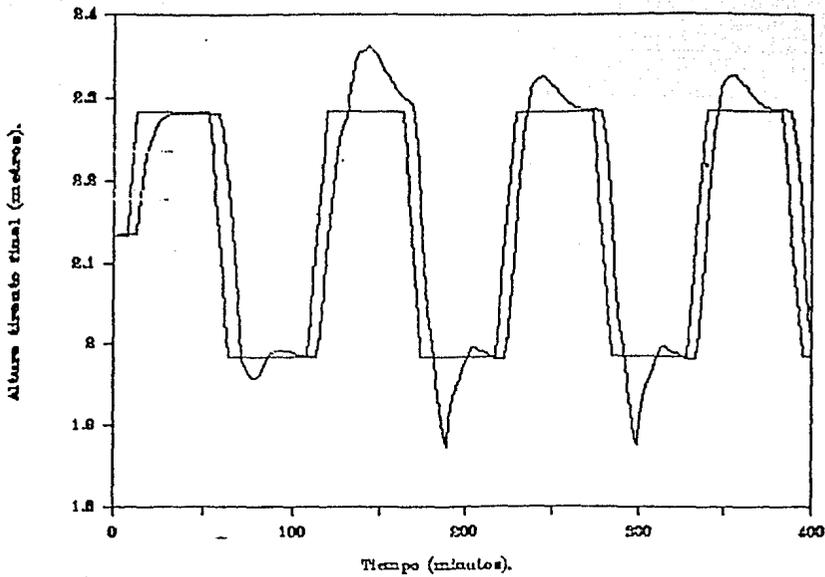


Figura 3.11 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento ante perturbaciones (P - PI).

Canal no lineal

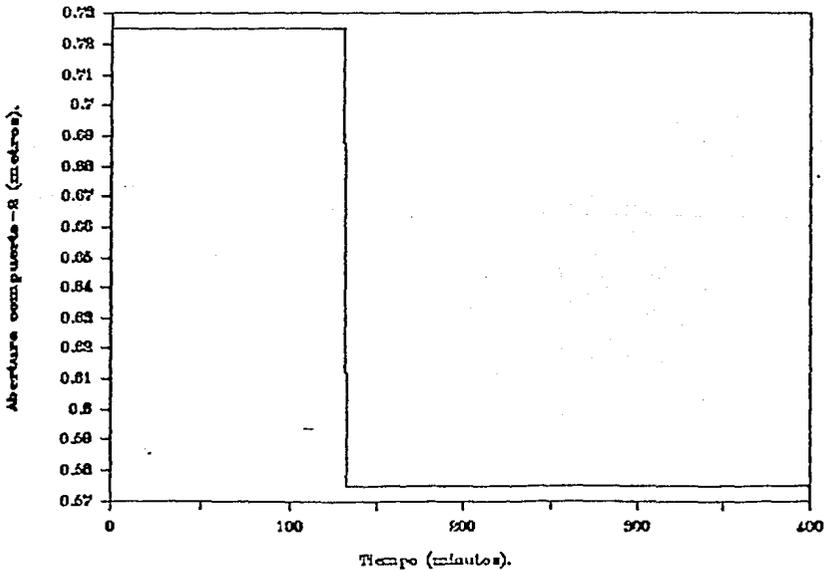


Figura 3.11 (b) Cambio en la apertura de compuerta-2 (- 15 cm.).

Canal no lineal

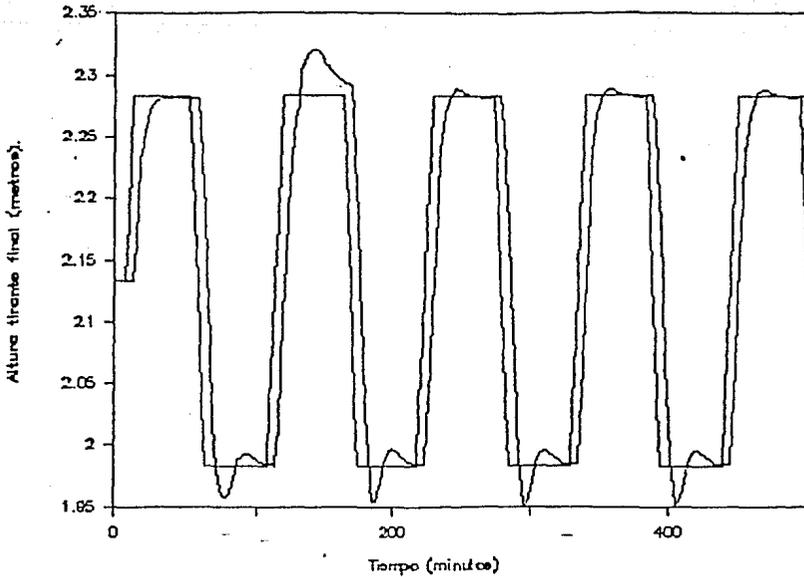


Figura 3.12 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento ante perturbaciones (P - PI).

Canal no lineal

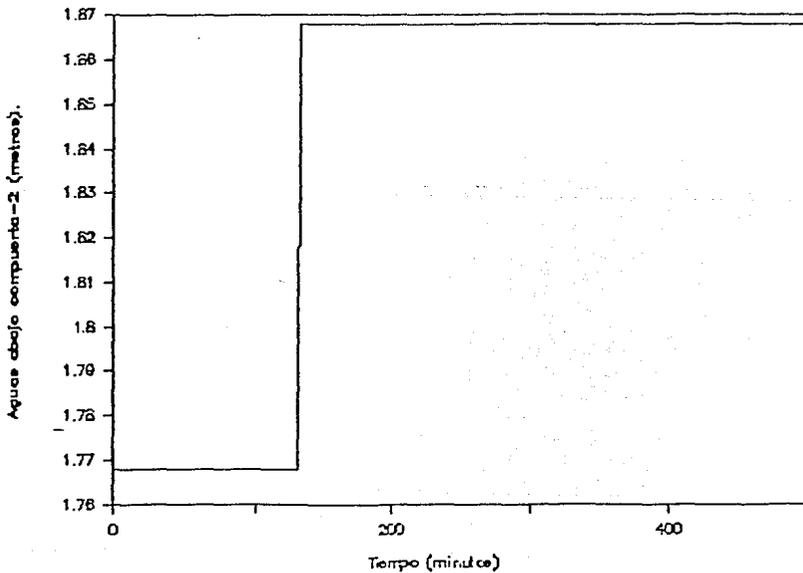


Figura 3.12 (b) Cambio en el tirante aguas abajo de la compuerta-2 (+ 10 cm.).

Canal no lineal

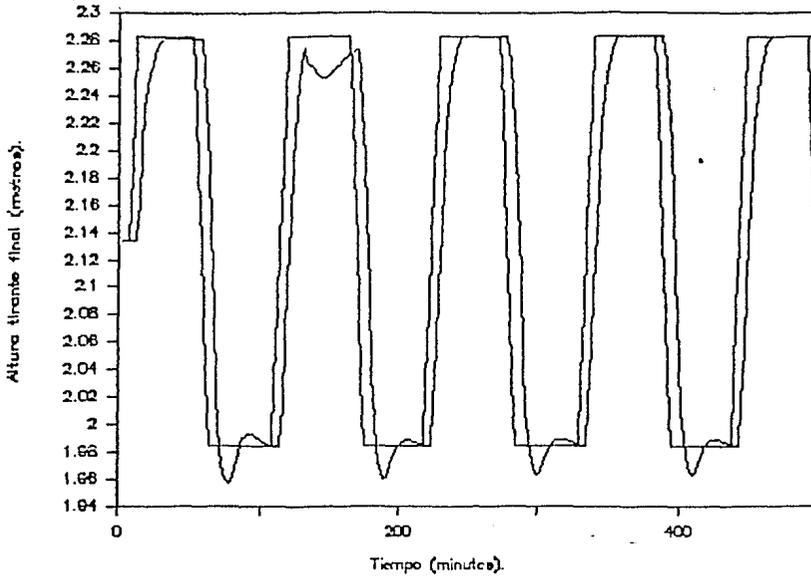


Figura 3.13 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento ante perturbaciones (P - PI).

Canal no lineal

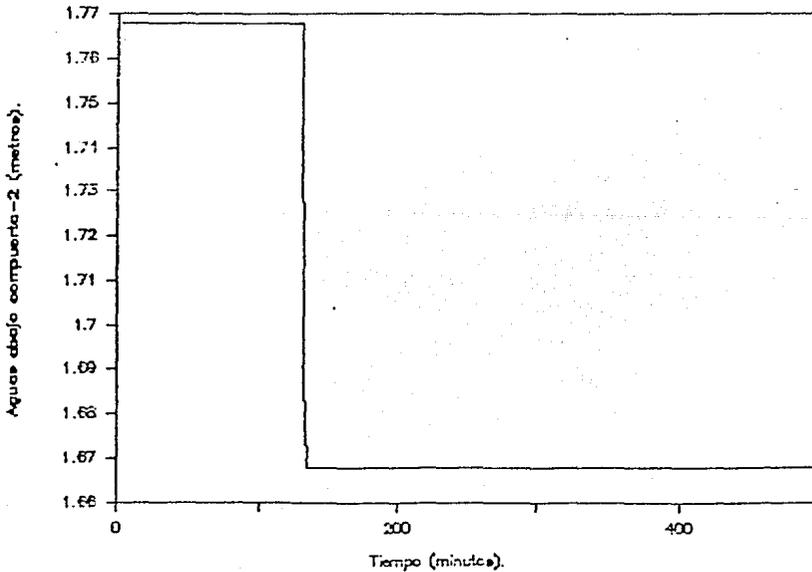


Figura 3.13 (b) Cambio en el tirante aguas abajo de la compuerta-2 (- 10 cm.).

Canal no lineal

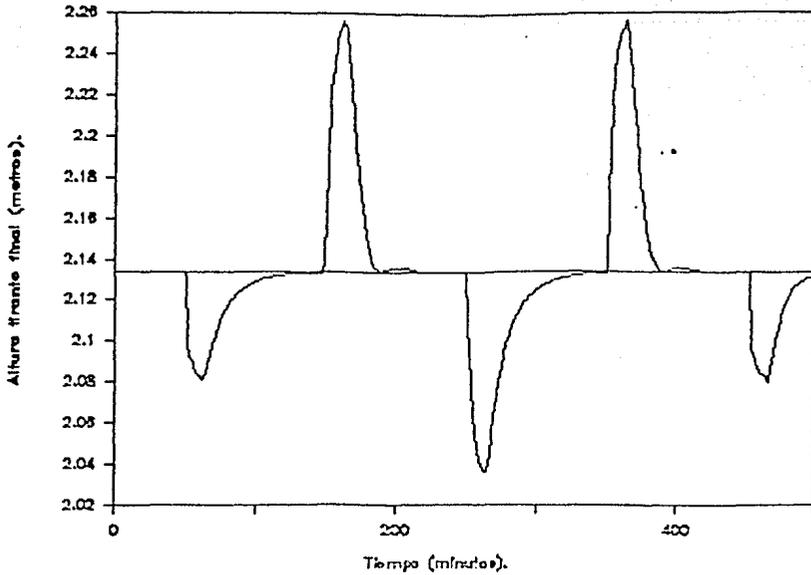


Figura 3.14 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en regulación usando el control P - PI.

Canal no lineal

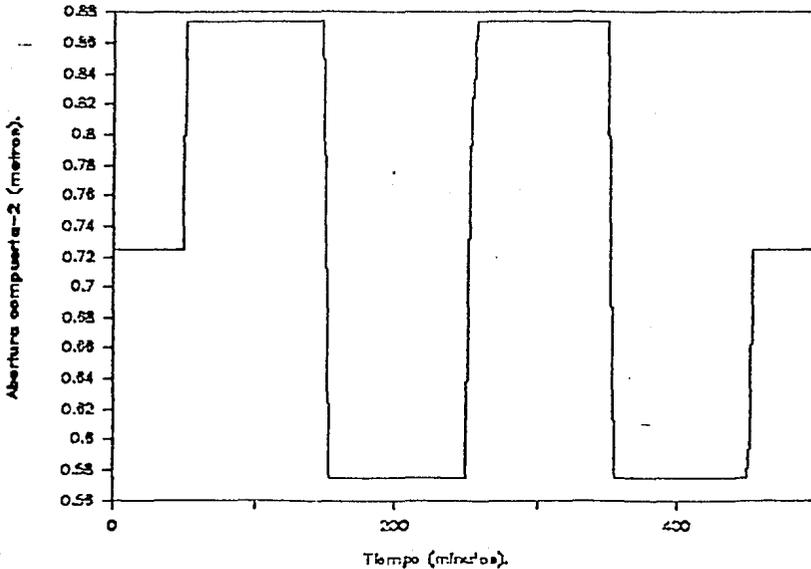


Figura 3.14 (b) Cambio en la apertura de compuerta-2.

Canal no lineal

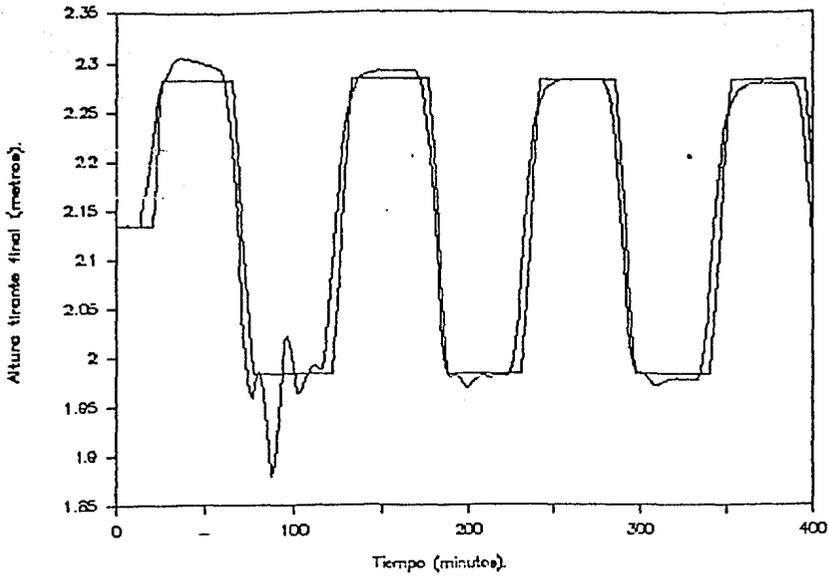


Figura 3.15 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el GPC.

Canal no lineal

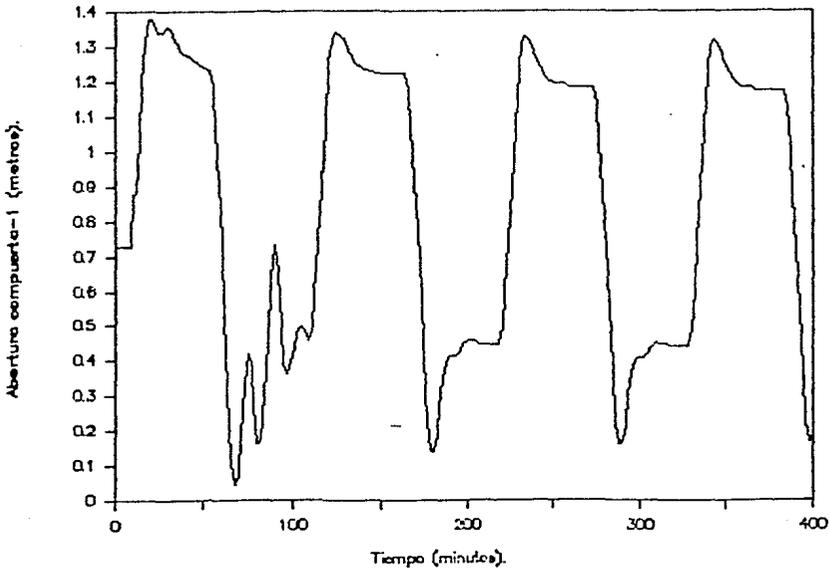


Figura 3.15 (b) Acción de control, compuerta-1.

Canal no lineal

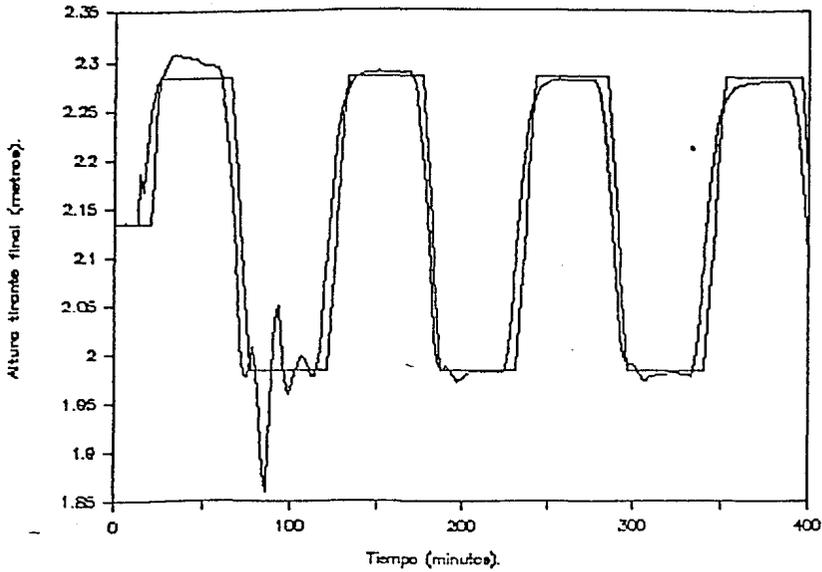


Figura 3.16 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el GPC.

Canal no lineal

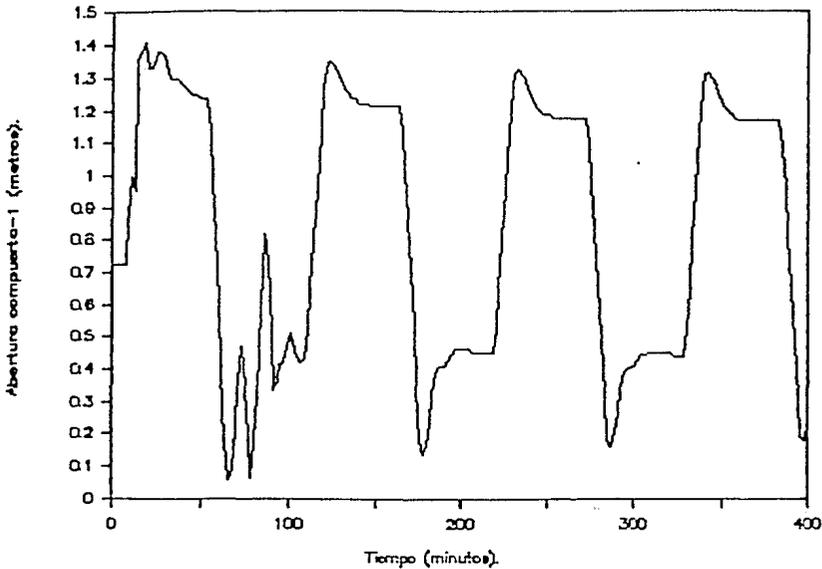


Figura 3.16 (b) Acción de control, compuerta-1.

Canal no lineal

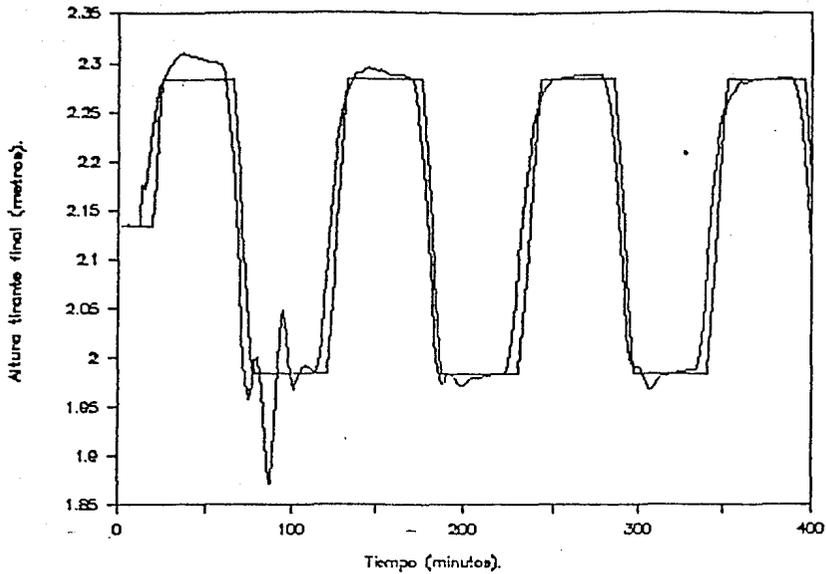


Figura 3.17 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el GPC.

Canal no lineal

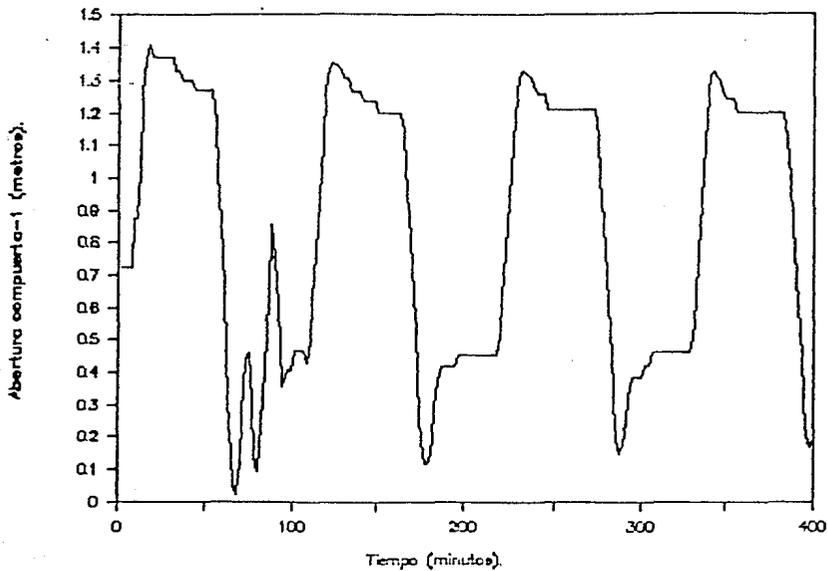


Figura 3.17 (b) Acción de control, compuerta-1.

Canal no lineal

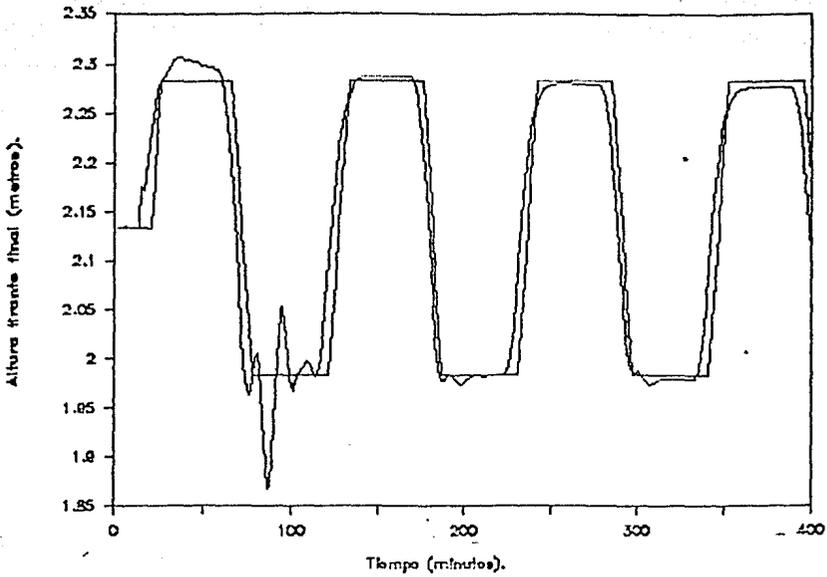


Figura 3.18 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el GPC.

Canal no lineal

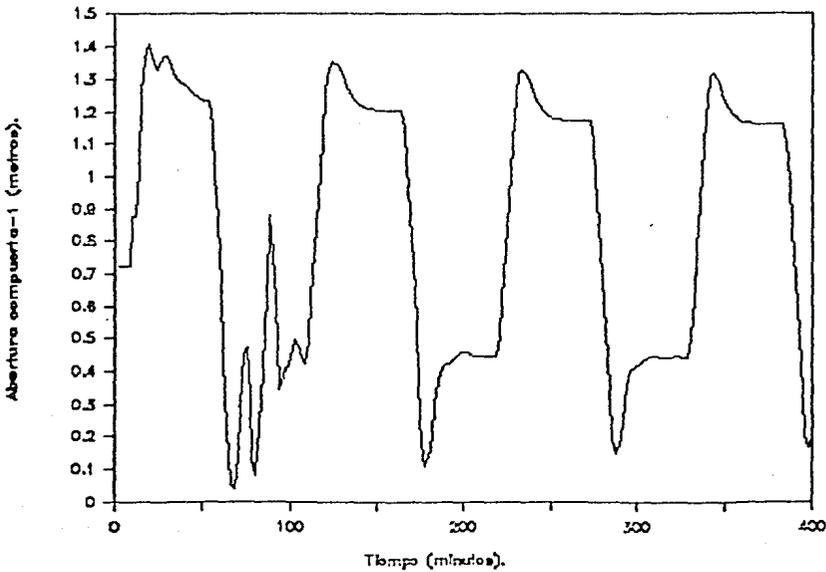


Figura 3.18 (b) Acción de control, compuerta-1.

Canal no lineal

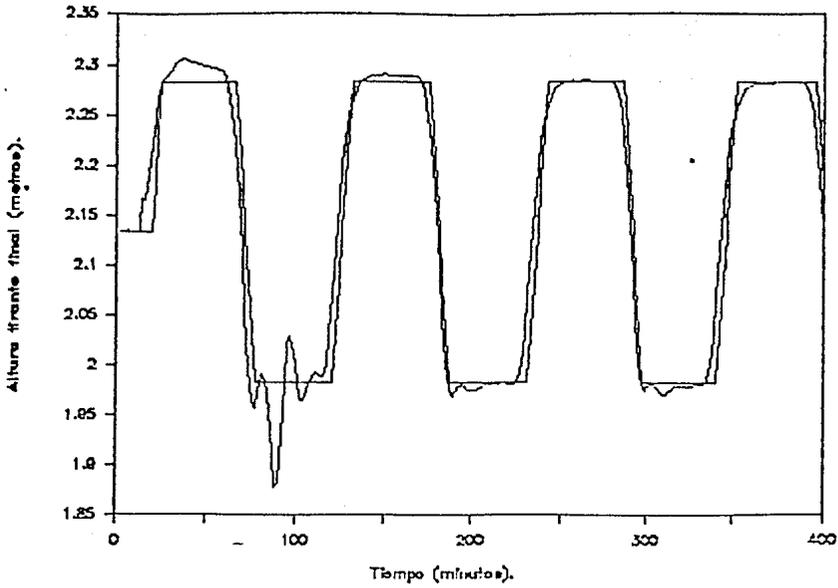


Figura 3.19 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el GPC.

Canal no lineal

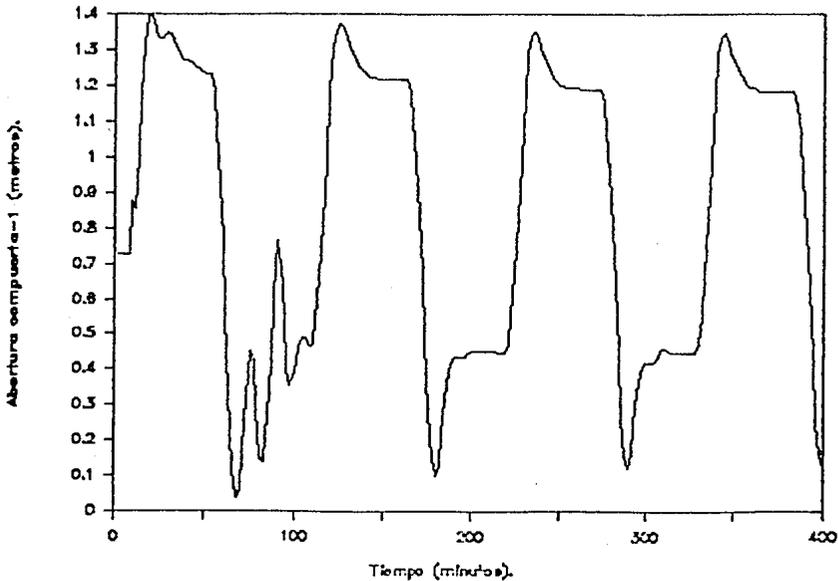


Figura 3.19 (b) Acción de control, compuerta-1.

Canal no lineal

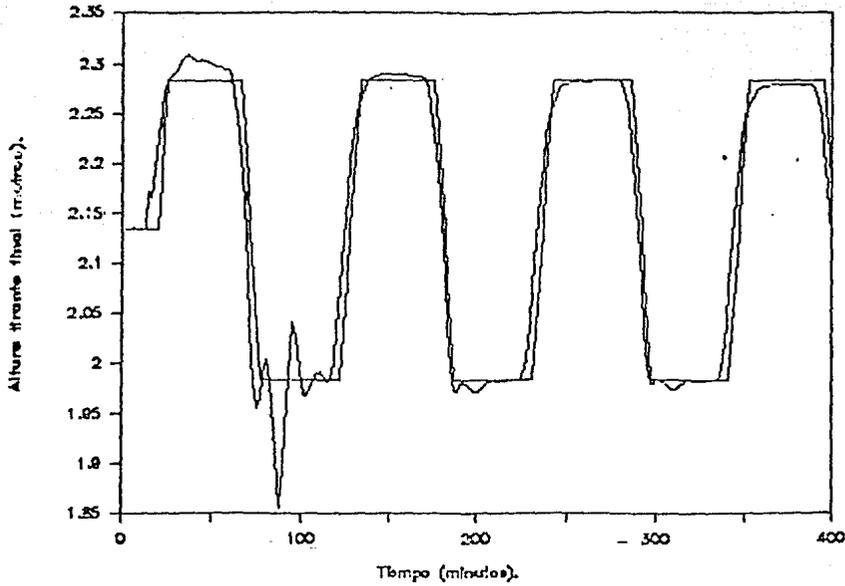


Figura 3.20 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el GPC.

Canal no lineal

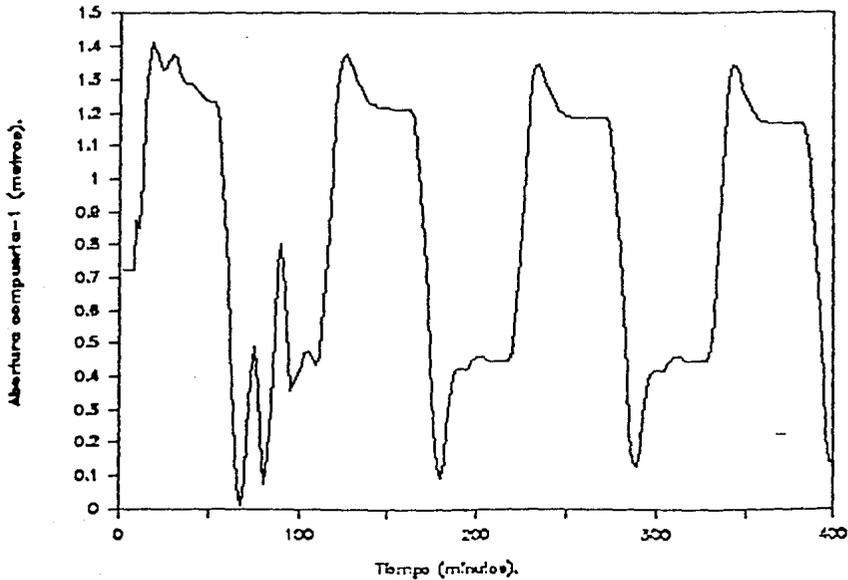


Figura 3.20 (b) Accion de control, compuerta-1.

Canal no lineal

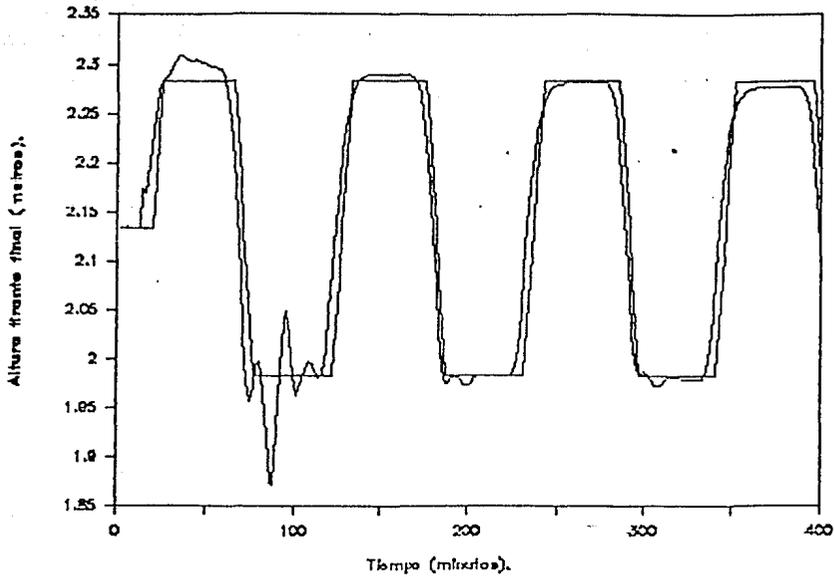


Figura 3.21 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el GPC.

Canal no lineal

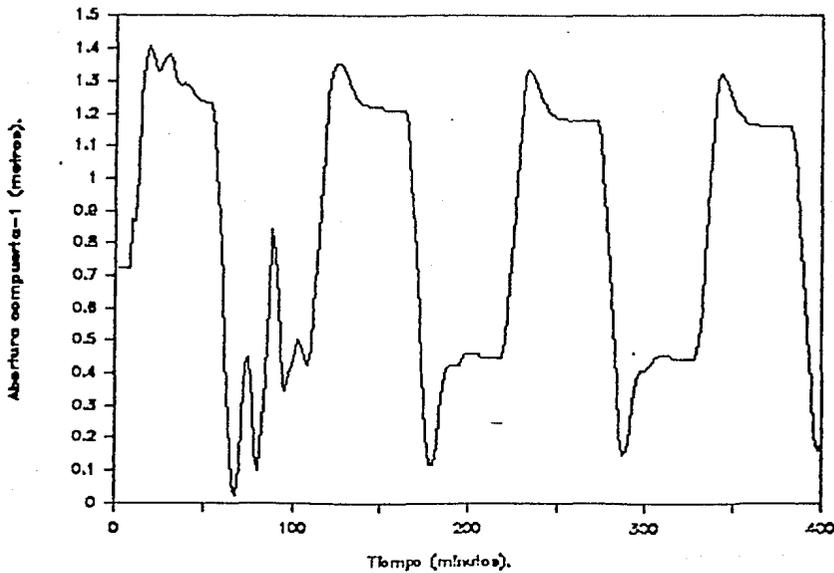


Figura 3.21 (b) Acción de control, compuerta-1.

Canal no lineal

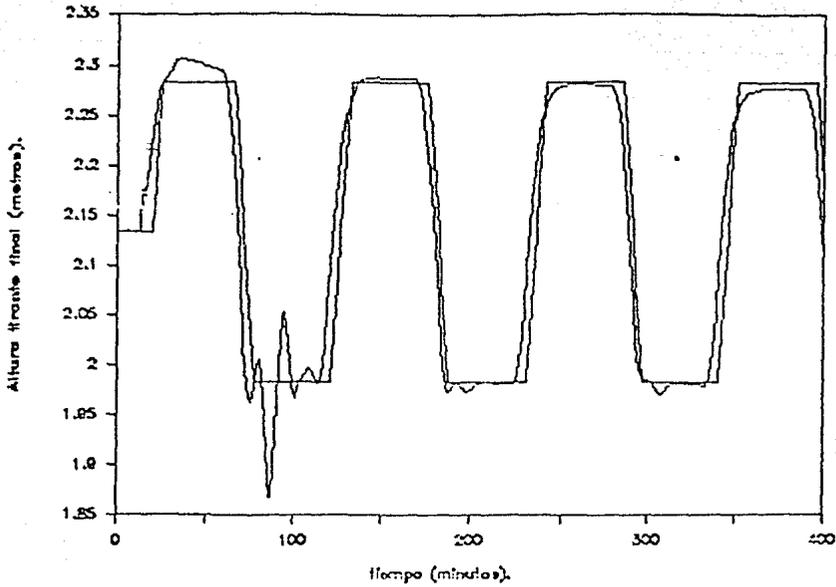


Figura 3.22 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el GPC.

Canal no lineal

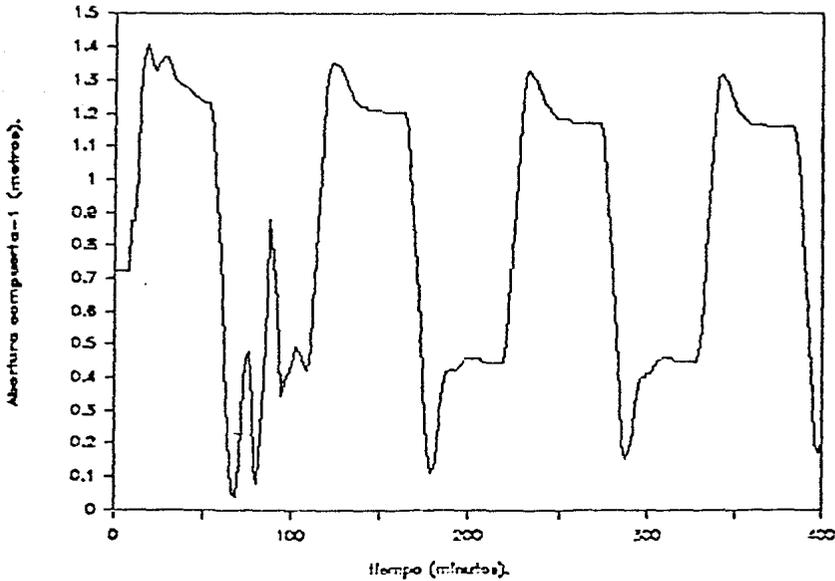


Figura 3.22 (b) Acción de control, compuerta-1.

Canal no lineal

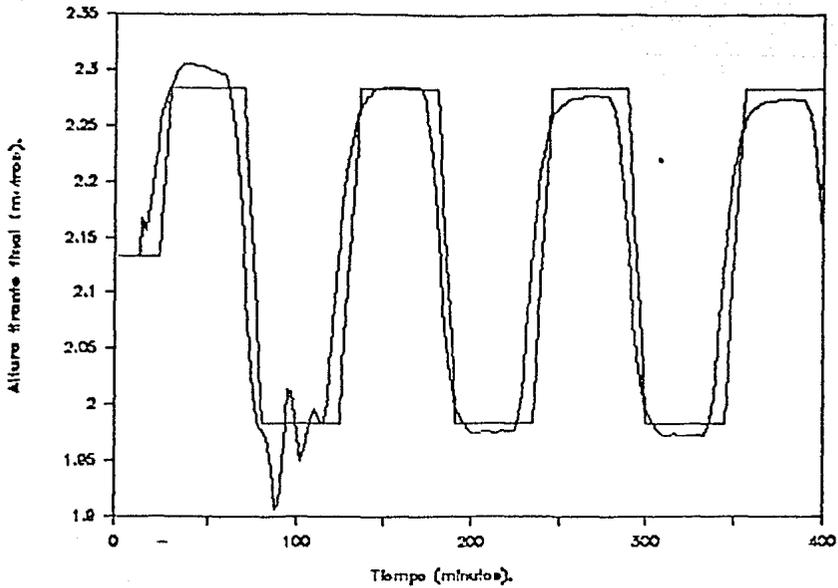


Figura 3.23 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el GPC.

Canal no lineal

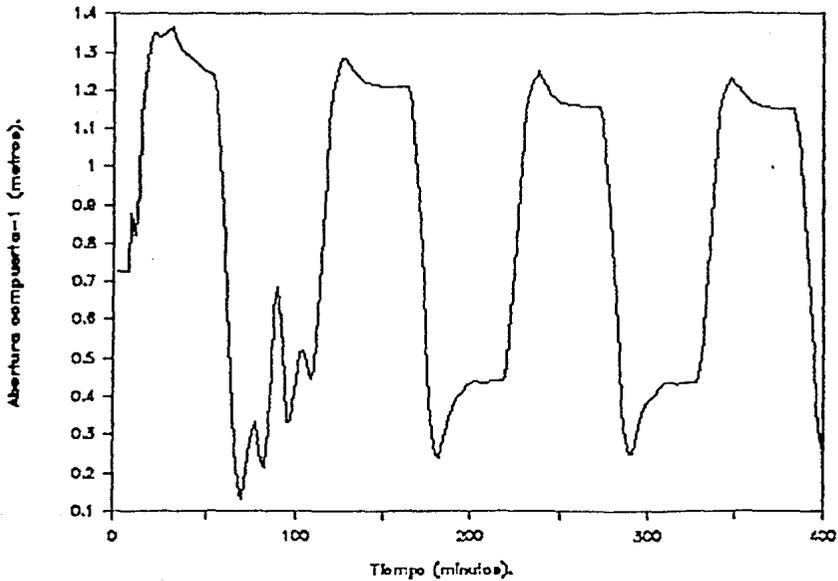


Figura 3.23 (b) Acción de control, compuerta-1.

Canal no lineal

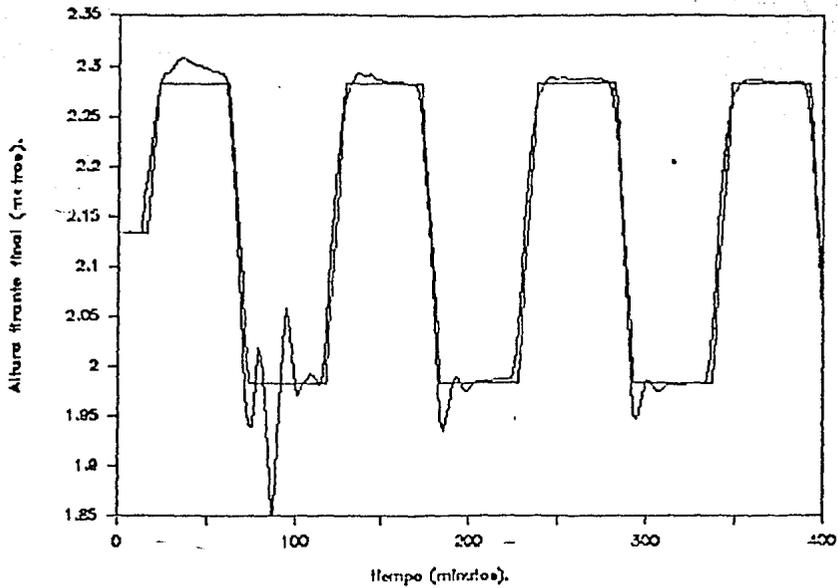


Figura 3.24 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento usando el GPC.

Canal no lineal

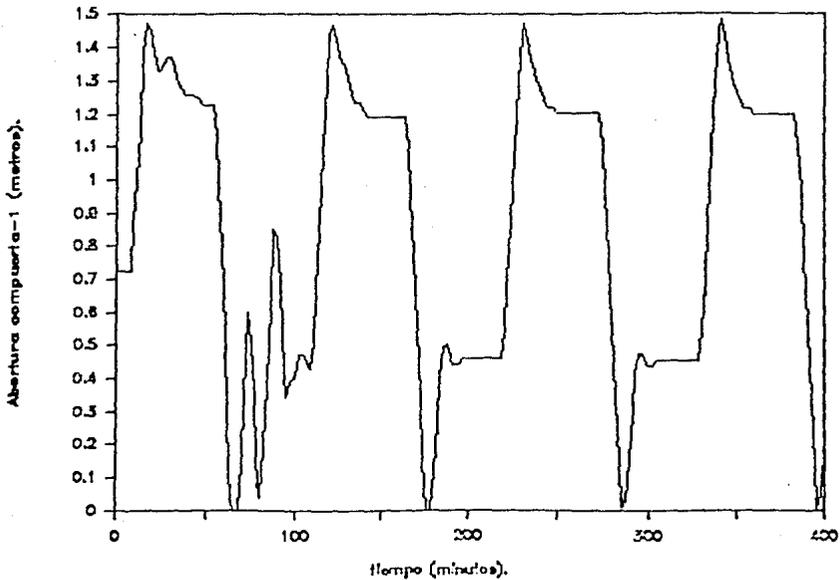


Figura 3.24 (b) Acción de control, compuerta-1.

Canal no lineal

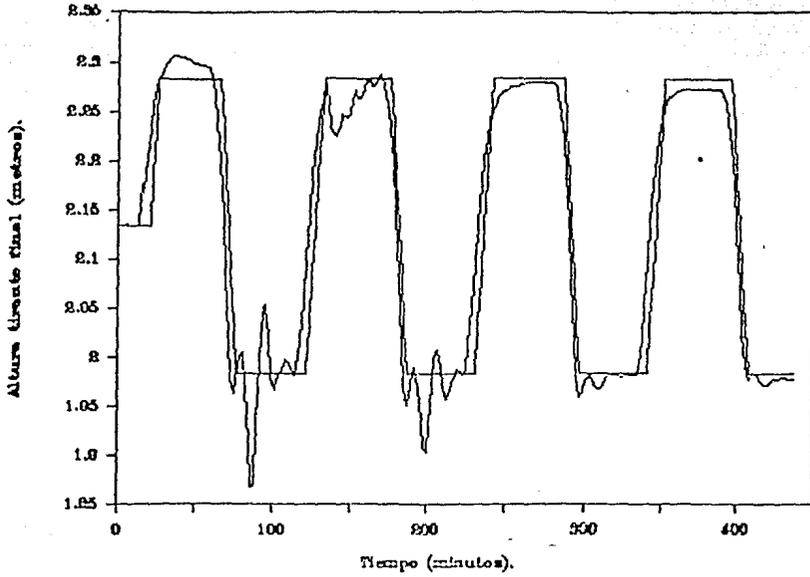


Figura 3.26 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento ante perturbaciones (GPC).

Canal no lineal

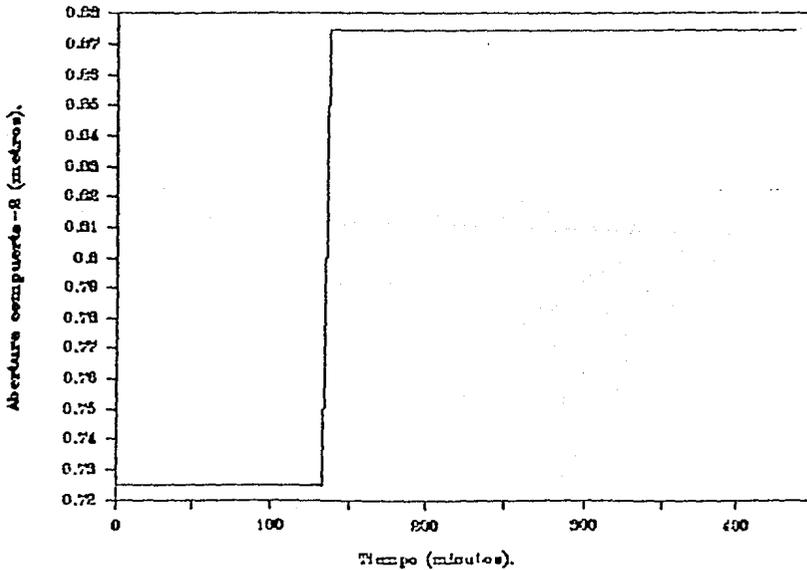


Figura 3.26 (b) Perturbación, apertura en compuerta-2 (+15 cm.).

Canal no lineal

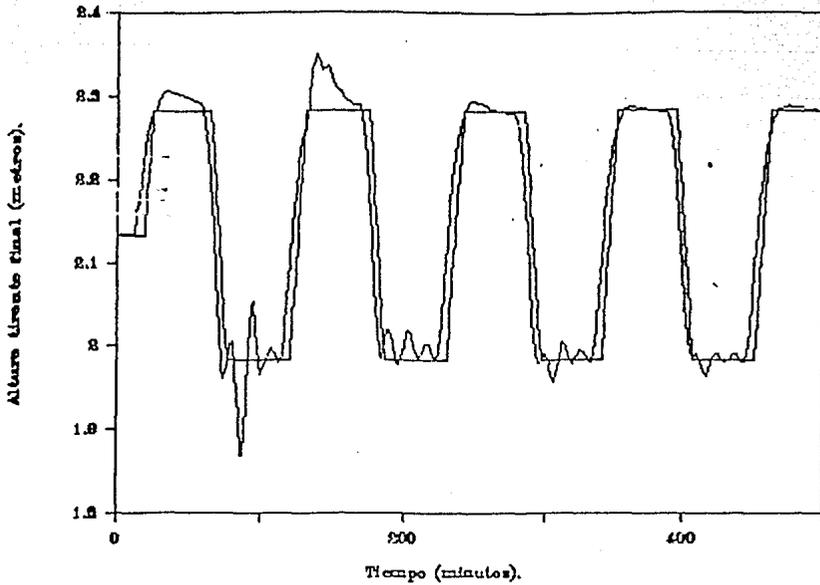


Figura 3.27 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento ante perturbaciones (GPC).

Canal no lineal

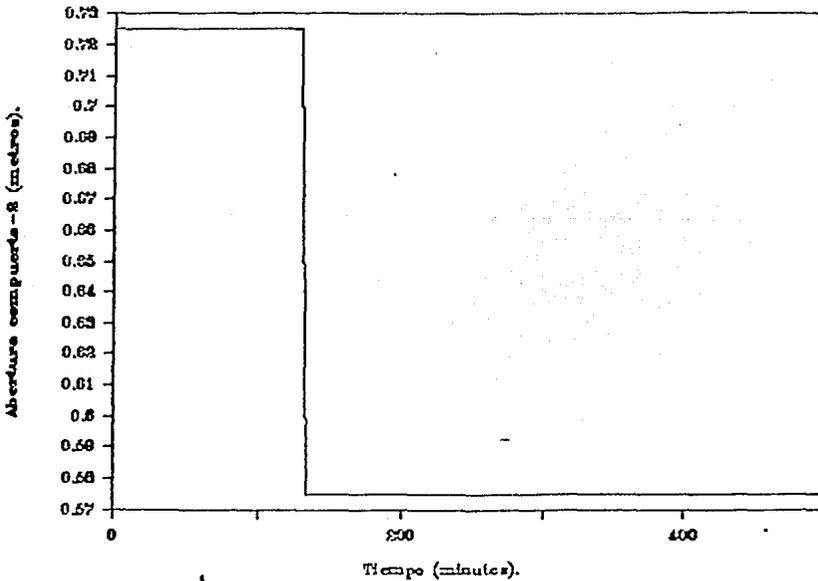


Figura 3.27 (b) Perturbación, apertura en compuerta-2 (-15 cm.).

Canal no lineal

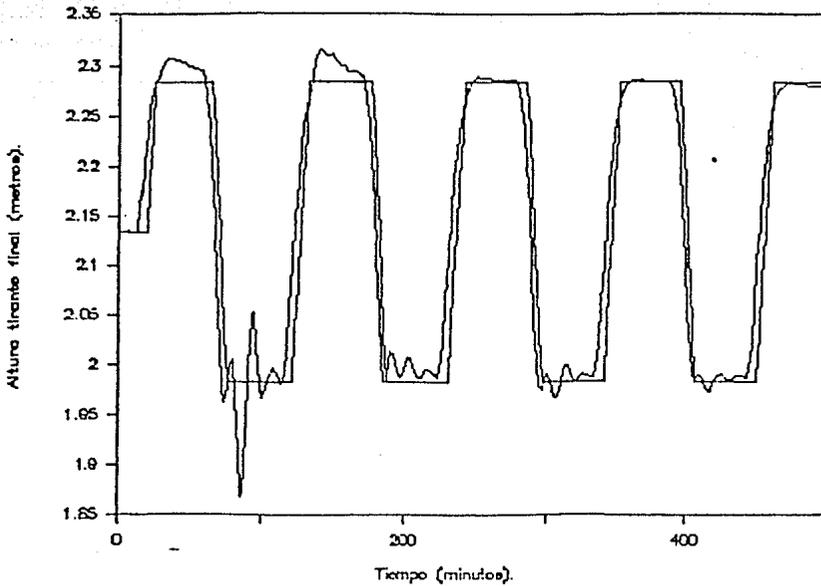


Figura 3.28 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento ante perturbaciones (GPC).

Canal no lineal

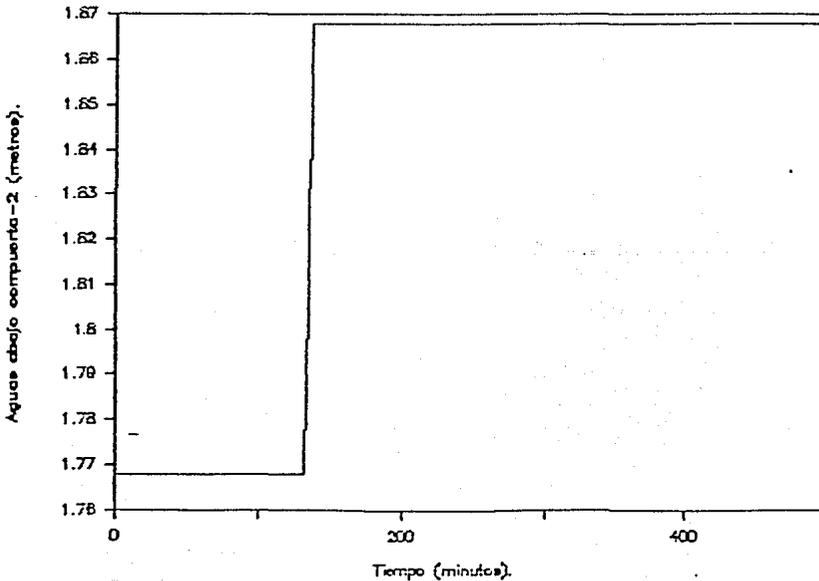


Figura 3.28 (b) Perturbación, cambio en el tirante aguas abajo de la compuerta-2 (+10 cm.).

Canal no lineal

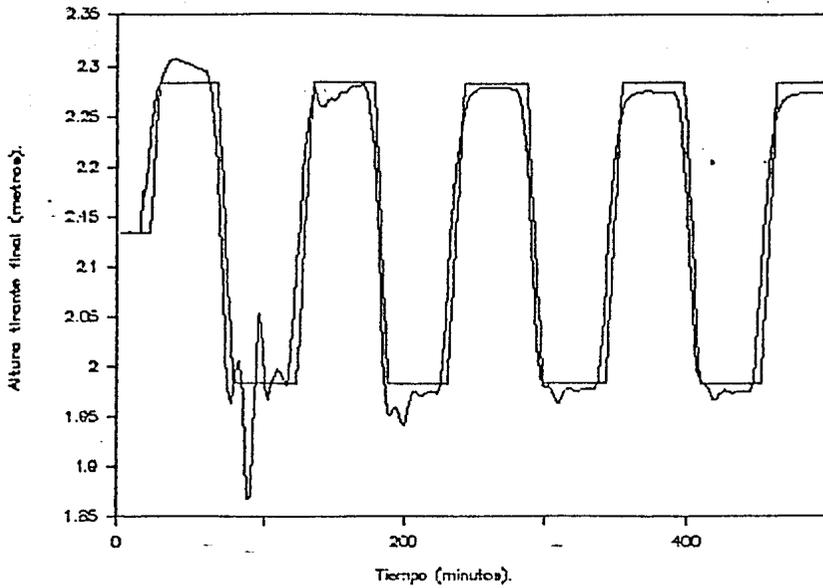


Figura 3.29 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento ante perturbaciones (GPC).

Canal no lineal

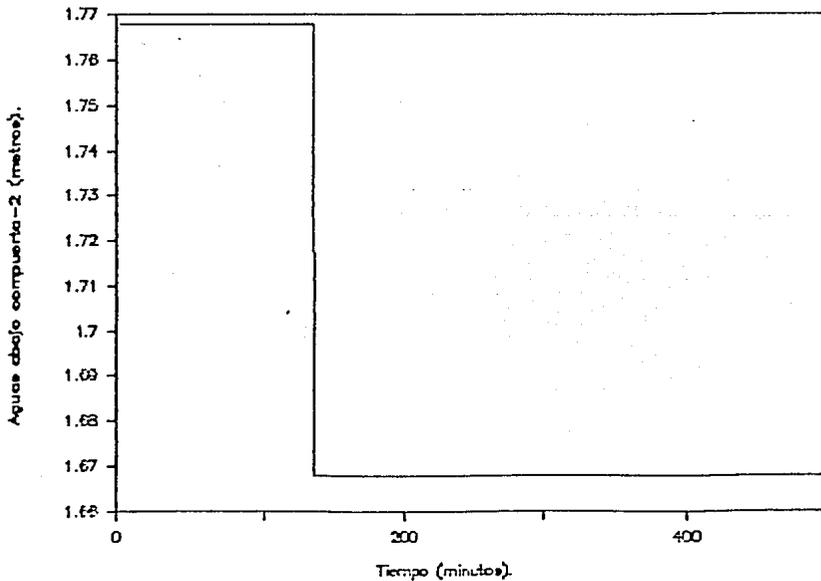


Figura 3.29 (b) Perturbación, cambio en el tirante aguas abajo de la compuerta-2 (-10 cm.).

Canal no lineal

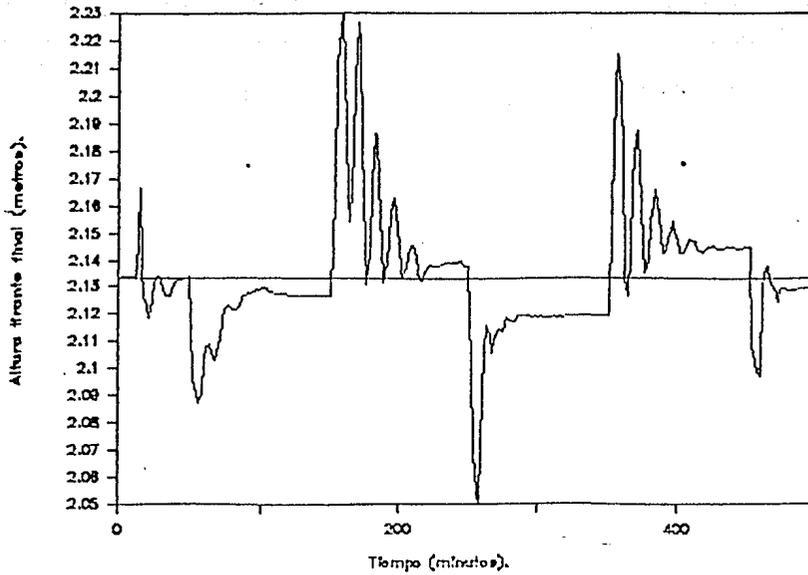


Figura 3.30 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en regulación usando el control GPC.

Canal no lineal

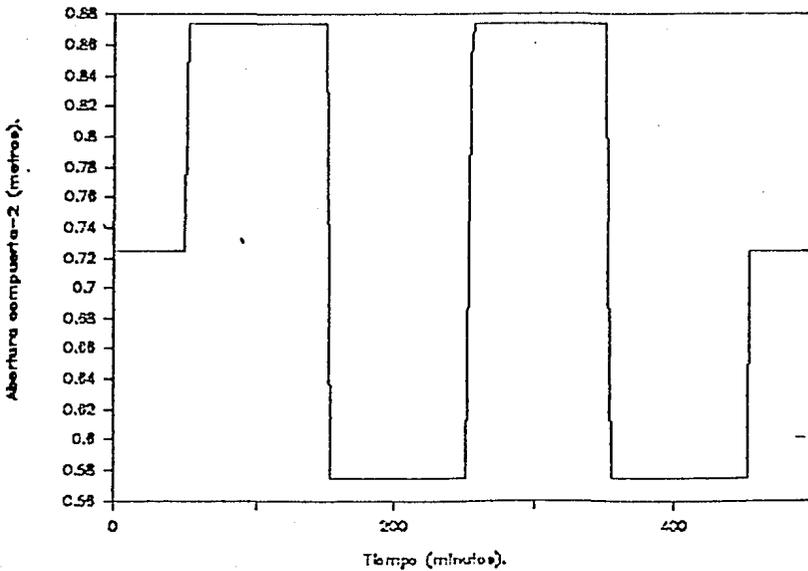


Figura 3.30 (b) Perturbación, apertura compuerta-2.

Parametros Predictor.

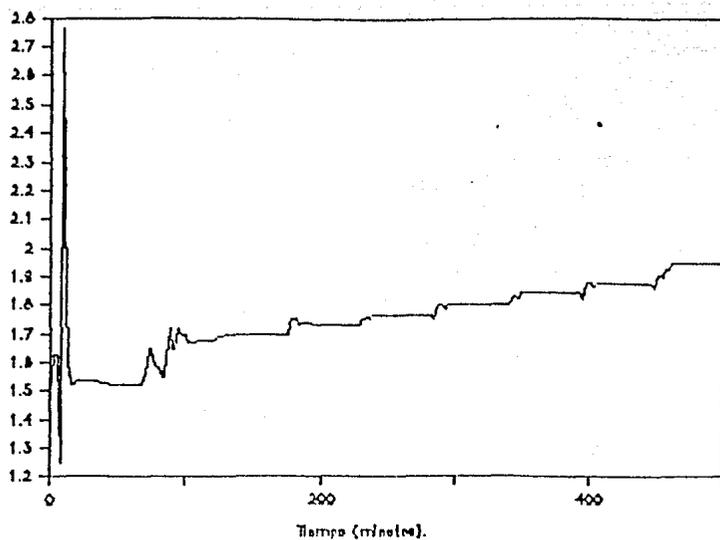


Figura 3.31 Evolución del parámetro n_g del predictor.

Parametros Predictor.

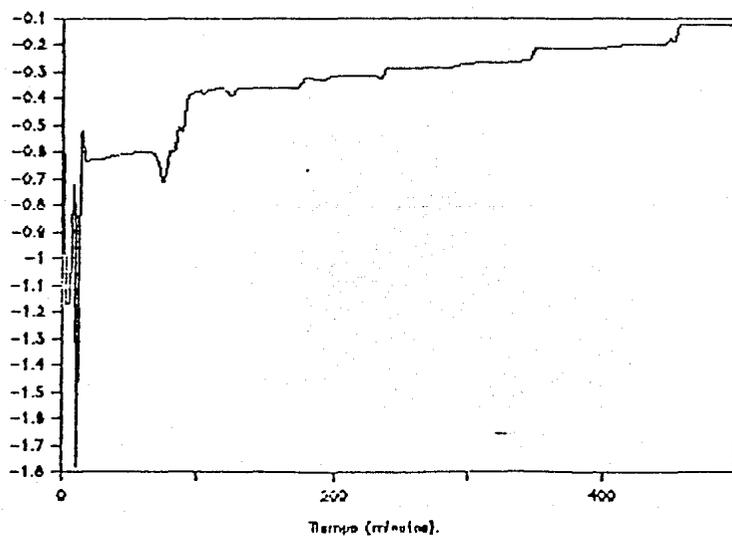


Figura 3.32 Evolución del parámetro n_1 del predictor.

Parametros Predictor.

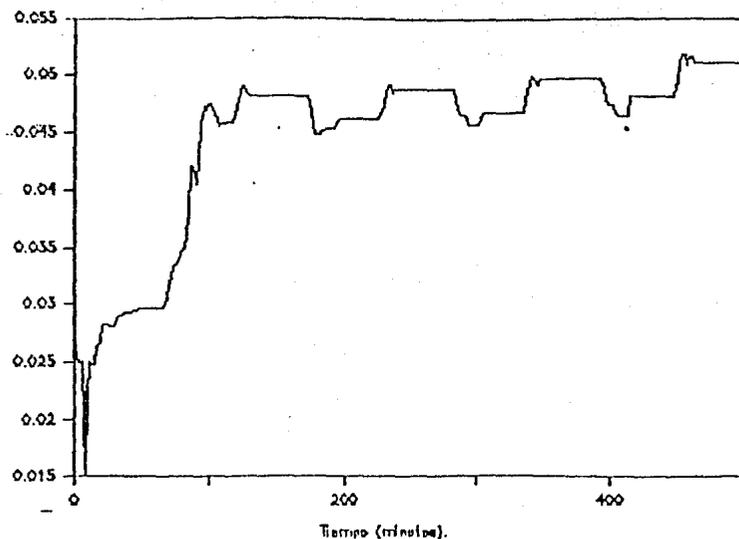


Figura 3.33 Evolución del parámetro b_0 del predictor.

Parametros Predictor.

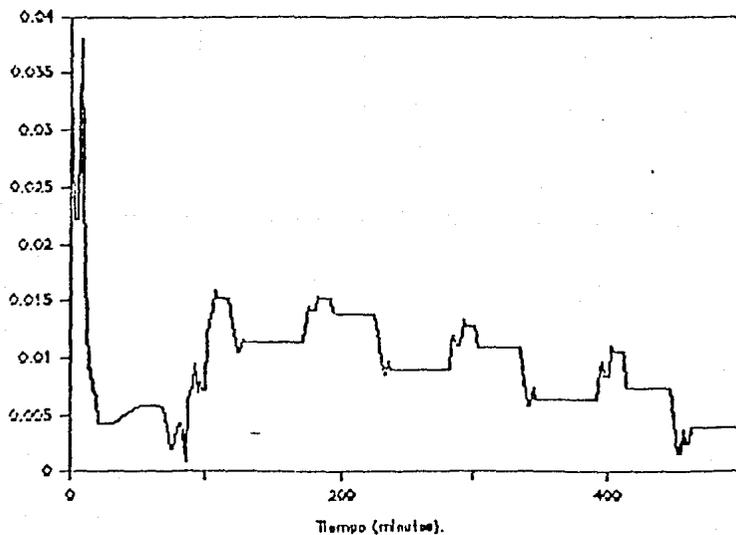


Figura 3.34 Evolución del parámetro b_1 del predictor.

Parametros Predictor.

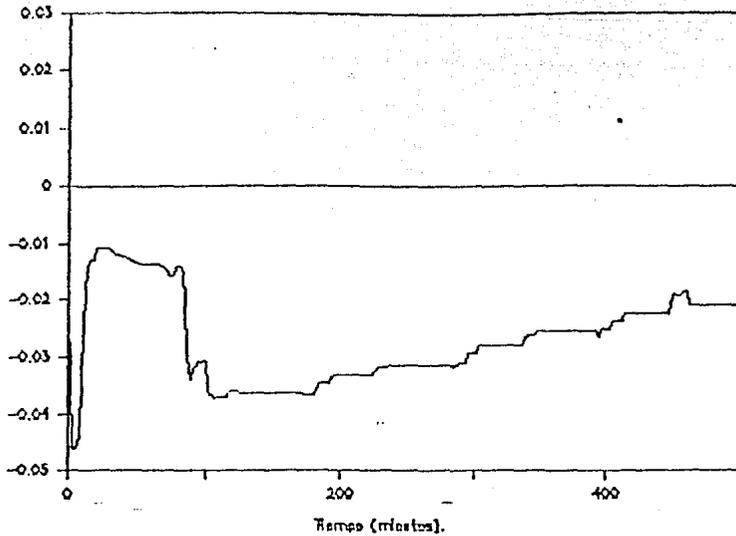


Figura 3.35 Evolución del parámetro b_2 del predictor.

Parametros Predictor.

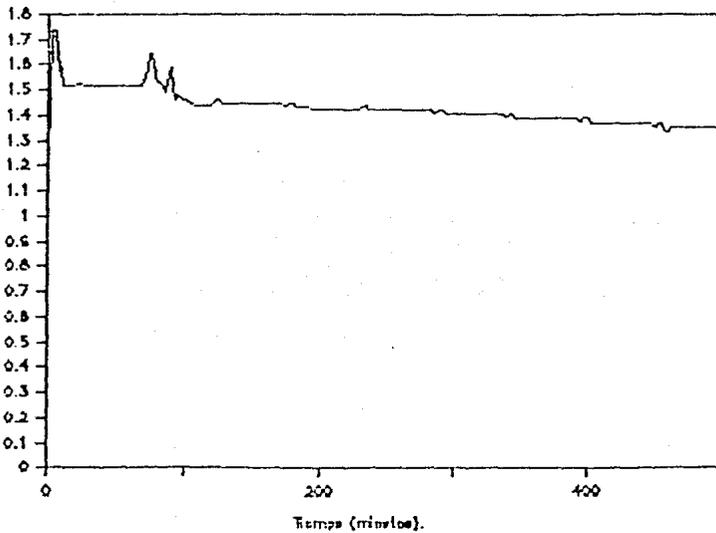


Figura 3.36 Evolución del parámetro a_1 del predictor.

Parametros Predictor.

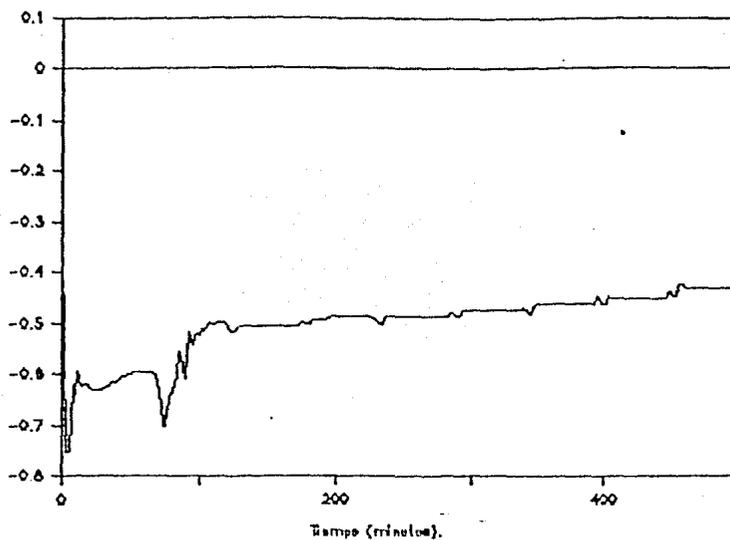


Figura 3.37 Evolución del parámetro a_2 del predictor.

Parametros Predictor.

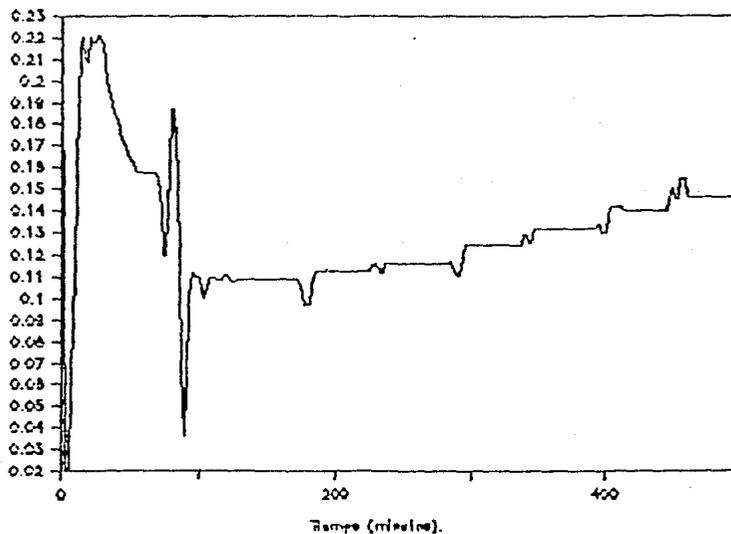


Figura 3.38 Evolución del parámetro v_5 del predictor.

C A P I T U L O IV

Conclusiones comentarios y perspectivas

En el control de canales abiertos se desea mantener un valor determinado (seguimiento o regulación) en el tirante final (nivel aguas abajo) de un tramo de canal, con objeto de poder suministrar tanto al tramo siguiente como a las tomas laterales (ubicadas cerca de la compuerta-2), el gasto necesario.

Seleccionado el control aguas abajo (nivel aguas abajo), se estudió su estabilidad para el tramo de canal cuyas características hidráulicas aparecen en el capítulo II (2.48), donde se encontró que el canal realimentado presenta un margen de ganancia de 5.5. En base a la respuesta (tirante final) en tiempo a una señal escalón se observó que se presenta error en estado estable.

Con objeto de poder reducir el error en estado estable y aumentar el margen de ganancia, se estudió el efecto de incorporar en la realimentación el tirante inicial (control bival). De los resultados encontrados se vió que el margen de ganancia aumentaba e inclusive llegaba a ser infinito. En cuanto a la respuesta al escalón del sistema, se obtuvo, para tirante final, un error en estado estable menor al del control aguas abajo.

Para poder eliminar el error en estado estable que aparece en el tirante final, se pensó en incorporar una acción integral en el control sobre el tirante final. Para ello se diseñó un controlador discreto con acción proporcional sobre el tirante inicial y acción proporcional e integral sobre el tirante final. La parte más difícil en el diseño de este algoritmo fue la selección de los parámetros del control (2.50).

Los valores de las constantes de control P - P I (2.50) fueron seleccionadas para tener una buena respuesta en seguimiento para el canal (teoría lineal), dando como resultado que la constante proporcional para el tirante inicial es de 2.8, la constante proporcional para tirante final igual a 0.8 y la constante integral para tirante final de 0.0048. De estos valores el de mayor peso es la parte proporcional del tirante inicial. Esto permite:

- aumentar el margen de ganancia del control P - P I.
- El tirante final presenta sobretiros más pequeños, gracias a que el tirante inicial da información sobre el futuro del

tirante final (predicción).

Con los valores seleccionados para el control P - P I se encuentra que la velocidad de respuesta del sistema es bastante alta en seguimiento sin perturbaciones (igual al adaptable); sin embargo, en cuanto a regulación, al presentarse un error en el tirante final el sistema tarda mucho en corregirlo debido a los pequeños valores de las constantes proporcional e integral para tirante final.

Los resultados en regulación muestran que es necesario aumentar los coeficientes del control relacionados con el tirante final, mientras que para seguimiento, la situación es lo opuesto (lo importante es predecir).

En las pruebas para el P - P I efectuadas en este trabajo se introdujo una señal de referencia, que el tirante final debe mantener o bien seguir. Para la consigna del tirante inicial no se tiene un valor deseado, por lo tanto, se optó por darle el mismo que el del tirante final.

Para evitar los problemas que presenta el control P - P I en seguimiento ante perturbaciones y en regulación, actualmente está en estudio un algoritmo que permite seleccionar la consigna adecuada para el tirante inicial, con base en la consigna deseada para tirante final, esperando de esta forma poder responder rápida y adecuadamente en seguimiento (predicción (tirante-1) de las no linealidades en la planta) y en regulación (reducción de la magnitud del error debido a perturbaciones y tiempos más cortos para recuperar el valor de la referencia).

Para corregir el mal funcionamiento del control P - P I en seguimiento ante perturbaciones se usó un control adaptable, siendo seleccionado el controlador predictor general (GPC).

Usando el controlador predictor general se encontró que el sistema presentaba un buen comportamiento en seguimiento (con o sin perturbaciones). En regulación, el error que aparece en la salida del sistema, debido a perturbaciones es menor que el obtenido con el control P - P I; sin embargo, el GPC no puede eliminar el error por completo y el P - P I sí.

El error en estado estable que presenta en el control GPC en regulación es debido a los pequeños errores cometidos por el predictor al estimar la respuesta del canal. Estos errores cometidos por el predictor son tan pequeños que no afectan significativamente el comportamiento en seguimiento (2.5% de la señal de referencia), no así en regulación, donde se ponen de manifiesto.

Actualmente se está trabajando en la forma de mejorar el comportamiento del predictor, disminuyendo el valor del umbral

del predictor, incorporando más información del canal en él (tirante inicial, tirante aguas arriba compuerta-1, tirante aguas abajo compuerta-2, apertura de la compuerta-2) y usando un modelo CARIMA en el predictor. Un ejemplo de lo anterior es la figura (4.1) donde se ha introducido al predictor información sobre las perturbaciones (medibles) del sistema (compuerta-2), presentándose un error menor entre la referencia y la salida del sistema y un error en estado estable menor al encontrado en la figura (3.30).

Como se ha mencionado, en los controles GPC y P - P I se tiene un mecanismo que está dando información sobre el futuro del tirante final, predictor multipaso y tirante inicial respectivamente. Ante esta situación ha aparecido la duda sobre cuál de los dos "predictores" es el mejor. El primero estima la salida (tirante final) del sistema usando una ecuación lineal cuyos parámetros son obtenidos por un algoritmo de mínimos cuadrados y el segundo es una salida del sistema (parámetros distribuidos no lineal). En base a lo anterior y a que no se requiere de ningún cálculo para obtener el segundo, se considera que el control P - P I es una alternativa, que si bien, actualmente no presenta un funcionamiento adecuado en seguimiento, puede mejorarse encontrando una forma adecuada de usar la información que se tiene del tirante inicial.

Hasta el momento se ha considerado que tenemos un canal abierto en el cual el tirante aguas arriba de la compuerta-1 y el nivel aguas abajo de la compuerta-2, así como la compuerta-2 permanecen constantes, o bien, presentan perturbaciones aisladas y los gastos laterales son cero. Cuando se tiene un tramo de canal en un sistema de distribución de agua el problema es más complicado debido a la presencia de los siguientes fenómenos :

- El tirante aguas arriba de la compuerta-1 disminuye al abrirse la compuerta-1, esto puede llegar a ocasionar que el tirante descienda a una altura igual a la del tirante del canal aguas abajo de la compuerta-1, presentándose una saturación (por más que se abra la compuerta no entra más agua).

- Las variaciones en la abertura de la compuerta-2 no son en forma de escalón, ya que de ésta depende el control del siguiente tramo, por lo tanto, es de esperarse que su comportamiento sea similar al de la compuerta-1. Al abrir la compuerta-2 se deja pasar más agua al tramo aguas abajo ocasionando que el tirante aguas abajo de la compuerta-2 aumente.

- Tomas laterales. No todo el agua que entra por la compuerta-1 sale por la compuerta-2.

Actualmente se está iniciando el estudio de un pequeño sistema de distribución de aguas de riego formado por un tanque y dos secciones de canal que presentan tomas laterales.

El primer paso en este estudio es :

- Variar el tirante aguas arriba de la compuerta-1 según la apertura de ésta (si aumenta la apertura disminuye el tirante).
- Variar el tirante aguas abajo de la compuerta-2 según la apertura de ésta (si aumenta la apertura aumenta el tirante).

Los resultados obtenidos para seguimiento usando el control GPC y el P - P I, aparecen en las figura (4.2) y (4.3) respectivamente. En estas figuras se puede ver que conforme el control abre la compuerta-1, el tirante aguas arriba disminuye, presentándose una saturación. En el caso del GPC ésta última es más marcada, debido a que este control abre por completo la compuerta (acciones de controles grandes) para seguir la referencia y así la deja hasta que cambia de consigna. Para el control P - P I la situación es distinta, ya que se observa que la salida del sistema disminuye conforme transcurre el tiempo, es decir, conforme el control abre la compuerta-1 (acción integral).

En cuanto al comportamiento del sistema al seguir la consigna de menor valor, se observa que el controlador P - P I no alcanza la referencia, a diferencia del GPC que sí lo hace, aunque presentando oscilaciones, las cuales disminuyen conforme el tiempo pasa, es decir, conforme el predictor aprende a estimar la salida de la planta.

En regulación se presenta un fenómeno similar a lo descrito anteriormente; el GPC (figura 4.4) presenta errores de menor magnitud que el P - P I (figura 4.5), pero no puede eliminar el error. Además se observa que, al repetirse la perturbación en el sistema, usando el GPC, la planta presenta un mejor funcionamiento que en la primera ocasión en que se presentó la perturbación.

De los resultados para seguimiento y regulación se observa que el GPC responde más rápidamente a cambio de acciones en el control más bruscos, que ocasionan oscilaciones en la salida del sistema.

Los resultados anteriores muestran algunos de los posibles problemas que se pueden presentar al interconectar tramos de canal y ponen de manifiesto la gran interacción (acoplo) que tiene un tramo de canal con el que lo antecede y el que lo precede. Estas interacciones deben ser tratadas con mucho cuidado ya que pueden dañar el funcionamiento del control y producir inestabilidad en el sistema.

Canal no lineal

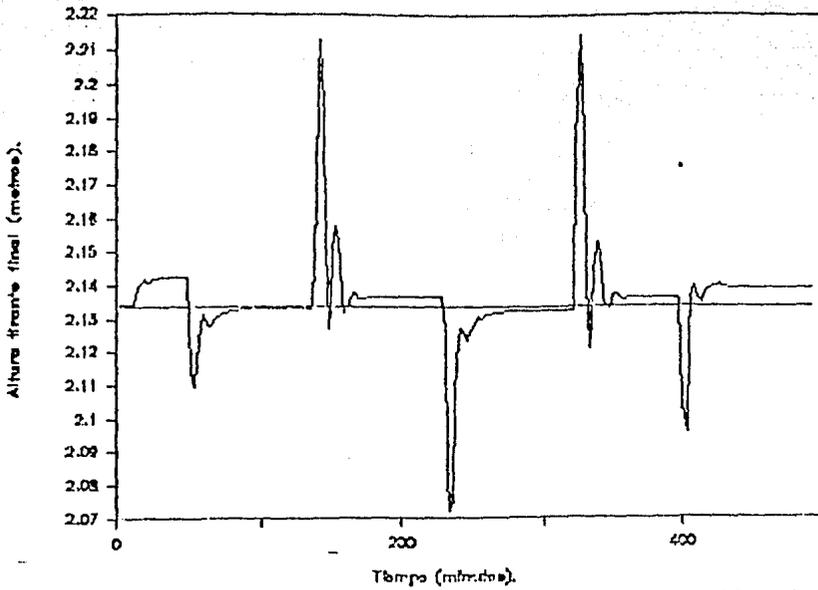


Figura 4.1 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en regulación tomando como perturbación medible la apertura en la compuerta-2 (GPC).

Canal no lineal

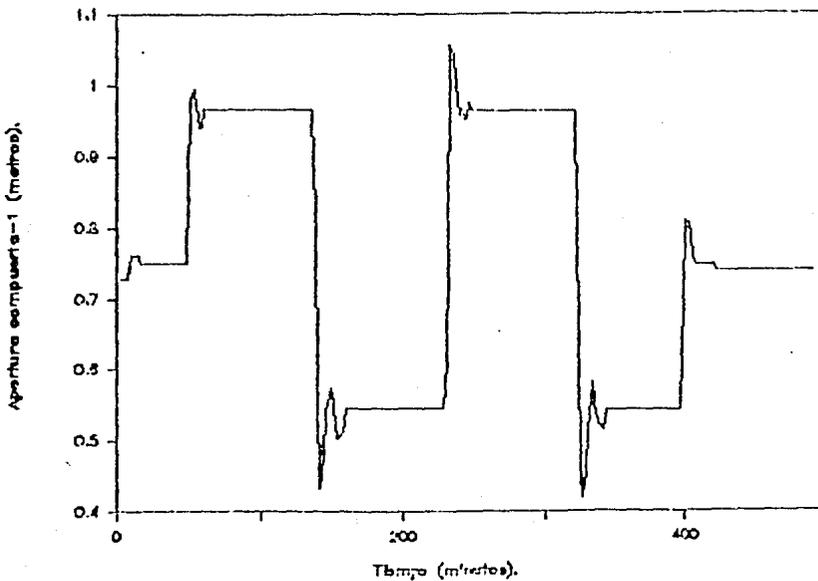


Figura 4.1 (b) Acción del control, apertura compuerta-1.

Canal no lineal

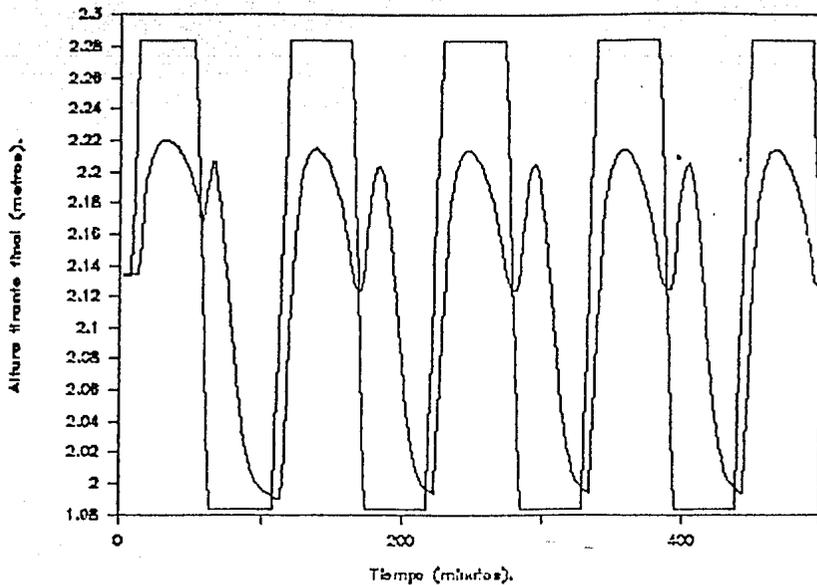


Figura 4.3 Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento considerando saturación (P-PI).

Canal no lineal

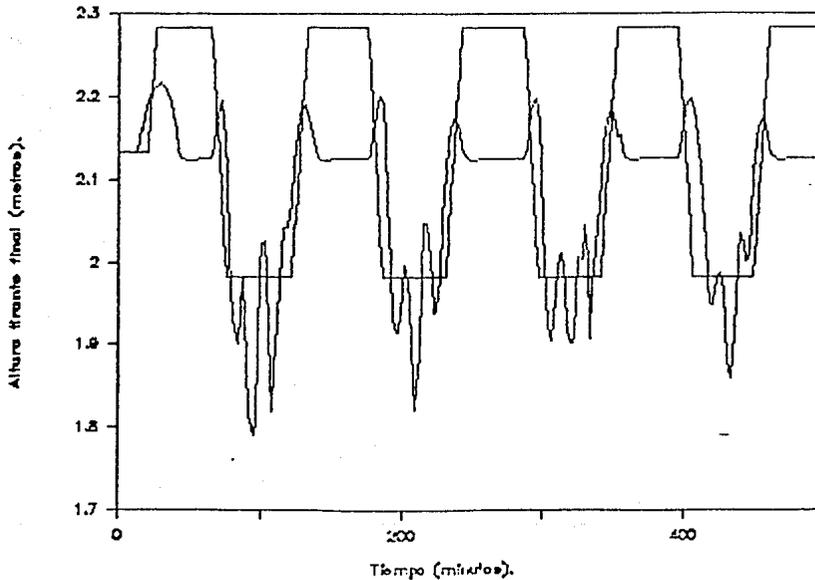


Figura 4.2 Respuesta del sistema (tirante final) en seguimiento considerando saturación (GPC).

Canal no lineal

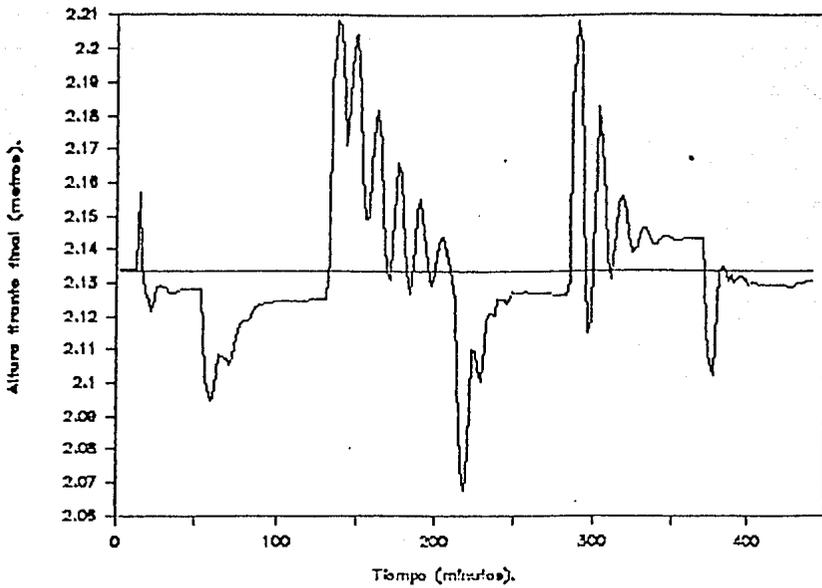


Figura 4.4 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en regulación usando el control GPC.

Canal no lineal

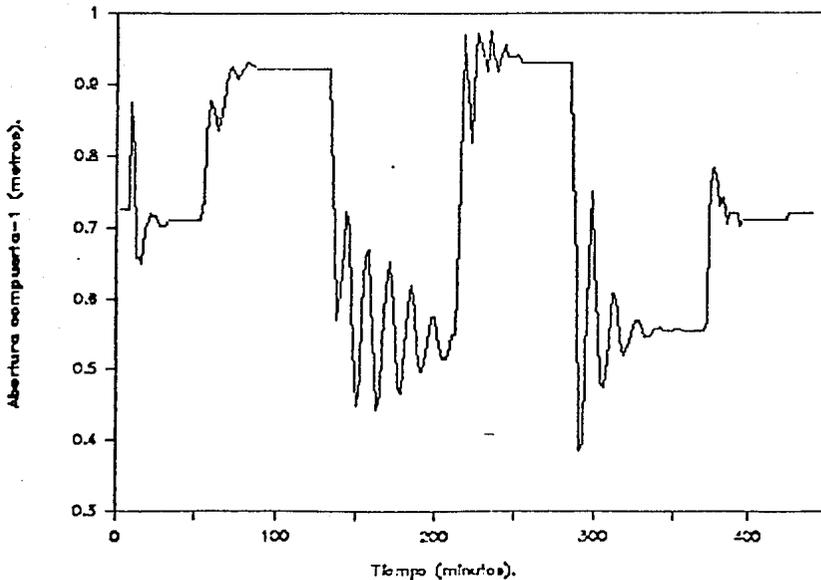


Figura 4.4 (b) Acción del control, apertura compuerta-1.

Canal no lineal

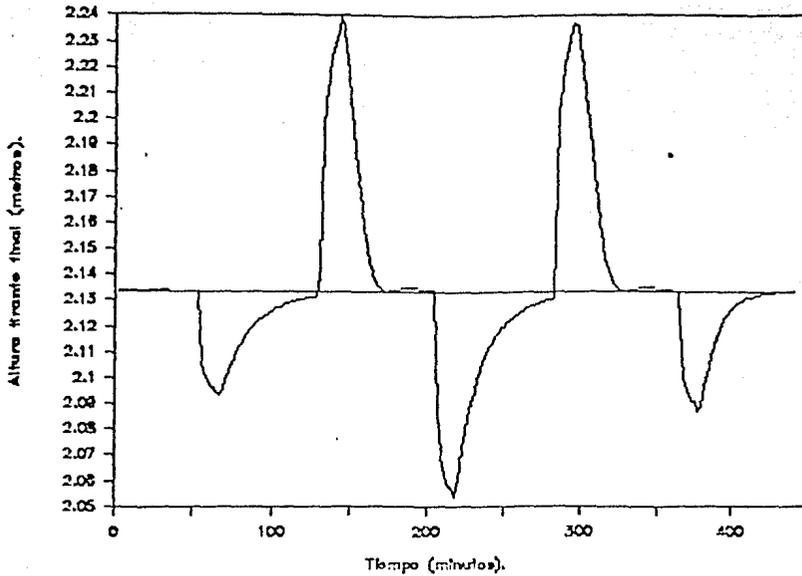


Figura 4.5 (a) Respuesta del sistema (tirante final) en regulación usando el control GPC.

Canal no lineal

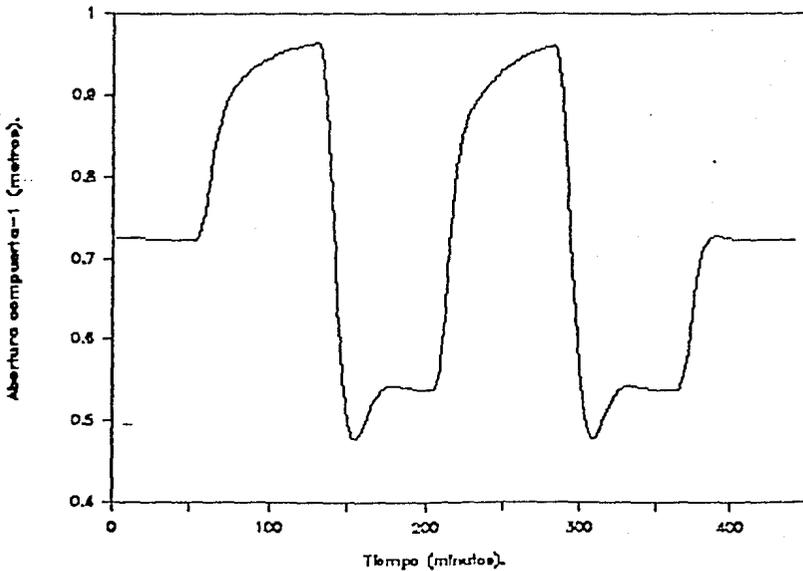


Figura 4.5 (b) Acción del control, apertura compuerta-1.

A P E N D I C E A

Obtención de las ecuaciones para el estudio de estabilidad del flujo en un canal rectangular abierto teoría lineal

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del flujo de agua en un tramo de canal rectangular, son las ecuaciones de Saint-Venant [Con.1] (2.11) y (2.12) con condiciones de frontera (compuertas aguas arriba y aguas abajo) expresadas por la ecuación (2.14).

Para estudiar la estabilidad del control aplicado a un tramo de canal (alrededor de un punto de funcionamiento) es necesario obtener la función de transferencia (H(s)) que relacione entradas (aperturas de las compuertas) y salidas (tirante en $x=0$ y $x=l$) del tramo, requiriéndose linealizar las ecuaciones (2.11), (2.12) y sus condiciones de frontera (2.14), alrededor de un punto de operación (gasto normal, velocidad y tirante constante a lo largo del canal figura 2.2), obteniendo (2.15) y (2.16) [Con.1] :

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -g \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - V_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - a g y(x,t) - b g v(x,t)$$

(A.1)

y

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -V_0 \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - Y_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

con :

$$a = \frac{\partial S_f(V_0, Y_0)}{\partial y} \quad b = \frac{\partial S_f(V_0, Y_0)}{\partial v} \quad (A.2)$$

donde :

$y(x,t)$: variación en el tirante respecto del tirante en gasto establecido en regimen uniforme en la posición $0 \leq x \leq l$ y en el tiempo $0 \leq t \leq \infty$.

$v(x,t)$: variación en la velocidad respecto a la velocidad en gasto establecido en regimen uniforme en la posición $0 \leq x \leq l$ y en el tiempo $0 \leq t \leq \infty$.

V_0 : velocidad del agua en gasto establecido en regimen uniforme.

Y_0 : tirante normal.

g : aceleración de la gravedad.

S_f : Coeficiente de fricción estática (ecuación 2.14).

l : longitud del canal.

En forma similar, para la ecuación de condiciones de frontera (2.13) se tiene [Cos.1] :

Para la compuerta-1 (2.17):

$$y(0,t) = df_1 v(0,t) + df_2 w_1(s), \quad (A.3)$$

Para la compuerta-2 (2.18) :

$$y(1,t) = df_3 v(1,t) + df_4 w_2(s), \quad (A.4)$$

donde :

$$\begin{aligned} df_1 &= \frac{2 Y_0 (Y_0 - Y_U)}{V_0 (2 Y_U - Y_0)} \\ df_2 &= \frac{2 Y_0 (Y_U - Y_0)}{W_{01} (2 Y_U - Y_0)} \\ df_3 &= \frac{2 Y_0 (Y_0 - Y_1)}{V_0 (2 Y_1 - Y_0)} \\ df_4 &= \frac{2 Y_0 (Y_1 - Y_0)}{W_{02} (2 Y_1 - Y_0)}. \end{aligned} \quad (A.5)$$

con :

- Y_U : tirante aguas arriba de la compuerta-1.
- Y_1 : tirante aguas abajo de la compuerta-2.
- W_{01} : posición de la compuerta-1 en gasto establecido en regimen uniforme.
- W_{02} : posición de la compuerta-2 en gasto establecido en regimen uniforme.

Para encontrar la función de transferencia que relaciona las entradas (posiciones de las compuertas) y las salidas (tirantes en $x=0$ y $x=1$) en el dominio de la frecuencia (requerido para el estudio de la estabilidad), es necesario obtener la transformada de Laplace de las ecuaciones (A.1), con condiciones iniciales nulas y condiciones de frontera expresadas por las ecuaciones (A.3) y (A.4).

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales parciales lineales (A.1) y considerando los teoremas 3, 4 y 5 [Gou.1] del capítulo II, se obtienen :

$$s \hat{Q}(x,s) = -g \frac{\partial \hat{Y}(x,s)}{\partial x} - V_0 \frac{\partial \hat{Q}(x,s)}{\partial x} - a g \hat{Y}(x,s) - b g \hat{Q}(x,s) \quad (A.6)$$

$$s \hat{Y}(x,s) = -V_0 \frac{\partial \hat{Q}(x,s)}{\partial x} - Y_0 \frac{\partial \hat{Q}(x,s)}{\partial x} \quad (A.7)$$

dos ecuaciones diferenciales lineales con condiciones de frontera expresadas por la transformada de Laplace de las ecuaciones (A.3) y (A.4), siendo para $x=0$ compuerta-1 (A.3):

$$\hat{y}(0,s) = df_1 \hat{v}(0,s) + df_2 \hat{w}_1(s) \quad (A.8)$$

y para $x=1$ la compuerta-2 (A.4):

$$\hat{y}(1,s) = df_3 \hat{v}(1,s) + df_4 \hat{w}_2(s) \quad (A.9)$$

Para simplificar las ecuaciones (A.6) y (A.7) se reescriben, éstas últimas, de tal forma que se obtenga un sistema de ecuaciones donde cada ecuación contenga un sólo término con derivada en x . Para tal efecto se despeja de (A.7) el término :

$$\frac{\partial \hat{y}(x,s)}{\partial x}$$

teniendo :

$$\frac{\partial \hat{y}(x,s)}{\partial x} = \frac{1}{V_0} [-Y_0 \frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x} - s \hat{y}(x,s)] \quad (A.10)$$

sustituyendo (A.10) en la ecuación (A.6):

$$V_0 \frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x} + \frac{g}{V_0} [-Y_0 \frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x} - s \hat{y}(x,s)] + (s + b g) \hat{v}(x,s) + a g \hat{y}(x,s) = 0 \quad (A.11)$$

Despejando de la ecuación (A.6) el término : $\frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x}$

se llega a:

$$\frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x} = \frac{1}{V_0} [-g \frac{\partial \hat{y}(x,s)}{\partial x} - (s + b g) \hat{v}(x,s) - a g \hat{y}(x,s)] \quad (A.12)$$

sustituyendo (A.12) en (A.7) se obtiene :

$$V_0 \frac{\partial \hat{y}(x,s)}{\partial x} + \frac{Y_0}{V_0} [-g \frac{\partial \hat{y}(x,s)}{\partial x} - (s + b g) \hat{v}(x,s) - a g \hat{y}(x,s)] + s \hat{y}(x,s) = 0 \quad (A.13)$$

Reescribiendo las ecuaciones (A.11) y (A.13) se llega a :

$$a_1 \frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x} + \hat{a}_2(s) \hat{y}(x,s) + \hat{a}_3(s) \hat{v}(x,s) = 0. \quad (A.14)$$

$$b_1 \frac{\partial y(x,s)}{\partial x} + \hat{b}_2(s) \hat{y}(x,s) + \hat{b}_3(s) \hat{v}(x,s) = 0. \quad (A.15)$$

con :

$$\begin{aligned} a_1 &= V_0 - g Y_0/V_0 & b_1 &= a_1 \\ \hat{a}_2(s) &= a g - s g /V_0 & \hat{b}_2(s) &= s - a g Y_0/V_0 \\ \hat{a}_3(s) &= s + b g & \hat{b}_3(s) &= - (s + b g) Y_0/V_0 \end{aligned} \quad (A.16)$$

Hasta este momento se tiene un conjunto de ecuaciones (A.14) y (A.15) con condiciones de frontera (A.8) y (A.9) función de $\hat{v}(x,s)$, $\hat{y}(x,s)$, $\hat{u}_1(s)$ y $\hat{u}_2(s)$, sin embargo, se desea encontrar una relación entrada-salida que vincule $\hat{u}_1(s)$, $\hat{u}_2(s)$ con $\hat{y}(1,s)$, $\hat{y}(0,s)$, por lo tanto se tratará de eliminar la dependencia de $\hat{v}(x,s)$.

Despejando de la ecuación (A.14) el término $\hat{y}(x,s)$, se tiene :

$$y(x,s) = - \frac{a_1}{\hat{a}_2(s)} \frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x} - \frac{\hat{a}_3(s)}{\hat{a}_2(s)} \hat{v}(x,s) \quad (A.17)$$

Derivando (A.17) respecto de x :

$$\frac{\partial y(x,s)}{\partial x} = - \frac{a_1}{\hat{a}_2(s)} \frac{\partial^2 \hat{v}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{\hat{a}_3(s)}{\hat{a}_2(s)} \frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x} \quad (A.18)$$

sustituyendo (A.17) y (A.18) en (A.15) :

$$\begin{aligned} b_1 \left(- \frac{a_1}{\hat{a}_2(s)} \frac{\partial^2 \hat{v}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{\hat{a}_3(s)}{\hat{a}_2(s)} \frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x} \right) + \hat{b}_2(s) \left(- \frac{a_1}{\hat{a}_2(s)} \frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x} - \frac{\hat{a}_3(s)}{\hat{a}_2(s)} \hat{v}(x,s) \right) + \hat{b}_3 \hat{v}(x,s) = 0 \end{aligned} \quad (A.19)$$

multiplicando la anterior ecuación por $-\hat{a}_2(s)/b_1 a_1$ y reagrupando:

$$\frac{\partial^2 \hat{v}(x,s)}{\partial x^2} + \left[\frac{\hat{a}_3(s) + \hat{b}_2(s)}{a_1} \right] \frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x} + \left[\frac{\hat{b}_2(s) \hat{a}_3(s) + \hat{b}_3(s) \hat{a}_2(s)}{b_1 a_1} \right] \hat{v}(x,s) = 0 \quad (A.20)$$

simplificando se obtiene :

$$\frac{\partial^2 \hat{v}(x,s)}{\partial x^2} + \hat{d}_1(s) \frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x} + \hat{d}_2(s) \hat{v}(x,s) = 0 \quad (A.20)$$

donde :

$$\begin{aligned} \hat{d}_1(s) &= \hat{a}_3(s)/a_1 + \hat{b}_2(s)/b_1 \\ \hat{d}_2(s) &= \hat{b}_2(s) \hat{a}_3(s)/(a_1 b_1) - \hat{b}_3(s) \hat{a}_2(s)/(b_1 a_1) \end{aligned} \quad (A.21)$$

El siguiente paso es resolver la ecuación diferencial homogénea (A.20). La solución es de la forma :

$$\hat{v}(x,s) = \hat{C}_1(s) e^{\hat{D}_1(s)x} + \hat{C}_2(s) e^{\hat{D}_2(s)x} \quad (A.22)$$

con :

$$\hat{D}_{1,2}(s) = (-\hat{d}_1(s) \pm [\hat{d}_1(s)^2 - 4\hat{d}_2(s)]^{1/2})/2. \quad (A.23)$$

Con la ecuación (A.22) se obtiene el valor de $\hat{v}(x,s)$ en función de las características del canal.

De la ecuación (A.14) se observa que es posible obtener el valor de $\hat{y}(x,s)$ si se conoce $\hat{v}(x,s)$ y su derivada respecto a x .

Derivando la ecuación (A.22) respecto de x se obtiene:

$$\frac{\partial \hat{v}(x,s)}{\partial x} = \hat{C}_1(s) \hat{D}_1(s) e^{\hat{D}_1(s)x} + \hat{C}_2(s) \hat{D}_2(s) e^{\hat{D}_2(s)x} \quad (A.24)$$

Sustituyendo la ecuación (A.22) y (A.24) en (A.14) se tiene :

$$\hat{y}(x,s) = -a_1/\hat{a}_2(s) [\hat{C}_1(s)\hat{D}_1(s)e^{\hat{D}_1(s)x} + \hat{C}_2(s)\hat{D}_2(s)e^{\hat{D}_2(s)x}] - \hat{a}_3(s)/\hat{a}_2(s) [\hat{C}_1(s)e^{\hat{D}_1(s)x} + \hat{C}_2(s)e^{\hat{D}_2(s)x}] \quad (A.25)$$

La ecuación (A.25) se reescribe como :

$$\hat{y}(x,s) = -1/\hat{a}_2(s) [(a_1\hat{C}_1(s)\hat{D}_1(s) + \hat{a}_3(s)\hat{C}_1(s)) e^{\hat{D}_1(s)x} + (a_1\hat{C}_2(s)\hat{D}_2(s) + \hat{C}_2(s)\hat{a}_3(s)) e^{\hat{D}_2(s)x}] \quad (A.26)$$

Con la ecuación (A.26) se tiene una expresión que permite obtener el valor de las salidas (tirantes inicial y final). Sólo resta obtener las expresiones de $\hat{C}_1(s)$ y $\hat{C}_2(s)$. Usando las condiciones de frontera (A.8,A.9) se despejan $\hat{v}(0,s)$ y $\hat{v}(1,s)$. La ecuación para $\hat{v}(0,s)$ se iguala a la ecuación (A.22) con $x=0$, llegando a:

$$\hat{v}(0,s) = \hat{C}_1(s) + \hat{C}_2(s) = 1/d_{f1} (\hat{y}(0,s) - d_{f2} \hat{w}_1(s)) \quad (A.27)$$

en forma similar la expresión de $\hat{v}(1,s)$ se iguala a la ecuación (2.32) con $x=1$:

$$\hat{v}(1,s) = \hat{C}_1(s) e^{\hat{D}_1(s)1} + \hat{C}_2(s) e^{\hat{D}_2(s)1} = 1/d_{f3} (\hat{y}(1,s) - d_{f4} \hat{w}_2(s)). \quad (A.28)$$

Reescribiendo (A.27) y (A.28) en la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\hat{U}_1(s)l} & e^{\hat{U}_2(s)l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}_1(s) \\ \hat{C}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/d_{f1} (\hat{y}(0,s) - d_{f2} \hat{w}_1(s)) \\ 1/d_{f3} (\hat{y}(1,s) - d_{f4} \hat{w}_2(s)) \end{bmatrix}, \quad (A.29)$$

y de (A.29) se despejan los coeficientes $\hat{C}_1(s)$ y $\hat{C}_2(s)$, logrando:

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_1(s) \\ \hat{C}_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{e^{\hat{U}_2(s)l} - e^{\hat{U}_1(s)l}} \begin{bmatrix} e^{\hat{U}_2(s)l} & -1 \\ -e^{\hat{U}_1(s)l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/d_{f1} (\hat{y}(0,s) - d_{f2} \hat{w}_1(s)) \\ 1/d_{f3} (\hat{y}(1,s) - d_{f4} \hat{w}_2(s)) \end{bmatrix} \quad (A.30)$$

Tomando la ecuación (A.26) y evaluándola en $x=0$ y $x=1$ se tiene, respectivamente:

$$\hat{y}(0,s) = -1/\hat{a}_2(s) [(a_1 \hat{U}_1(s) + \hat{a}_3(s)) \hat{C}_1(s) + (a_1 \hat{U}_2(s) + \hat{a}_3(s)) \hat{C}_2(s)] \quad (A.31)$$

$$\hat{y}(1,s) = -1/\hat{a}_2(s) [(a_1 \hat{C}_1(s) \hat{U}_1(s) + \hat{a}_3(s) \hat{C}_1(s)) e^{\hat{U}_1(s)l} + (a_1 \hat{C}_2(s) \hat{U}_2(s) + \hat{C}_2(s) \hat{a}_3(s)) e^{\hat{U}_2(s)l}] \quad (A.32)$$

Las ecuaciones (A.31) y (A.32) se reescriben como :

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(0,s) \\ \hat{y}(1,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \hat{U}_1(s) + \hat{a}_3(s) & a_1 \hat{U}_2(s) + \hat{a}_3(s) \\ (a_1 \hat{U}_1(s) + \hat{a}_3(s)) e^{\hat{U}_1(s)l} & (a_1 \hat{U}_2(s) + \hat{a}_3(s)) e^{\hat{U}_2(s)l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}_1(s) \\ \hat{C}_2(s) \end{bmatrix} \quad (A.33)$$

substituyendo en (A.33) la ecuación (A.30) se tiene :

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(0,s) \\ \hat{y}(1,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \hat{U}_1(s) + \hat{a}_3(s) & a_1 \hat{U}_2(s) + \hat{a}_3(s) \\ (a_1 \hat{U}_1(s) + \hat{a}_3(s)) e^{\hat{U}_1(s)l} & (a_1 \hat{U}_2(s) + \hat{a}_3(s)) e^{\hat{U}_2(s)l} \end{bmatrix} \frac{-1}{\hat{a}_2(s) [e^{\hat{U}_2(s)l} - e^{\hat{U}_1(s)l}]} \begin{bmatrix} e^{\hat{U}_2(s)l} & -1 \\ -e^{\hat{U}_1(s)l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/d_{f1} (\hat{y}(0,s) - d_{f2} \hat{w}_1(s)) \\ 1/d_{f3} (\hat{y}(1,s) - d_{f4} \hat{w}_2(s)) \end{bmatrix} \quad (A.34)$$

De la expresión (A.35) se tiene finalmente una relación que vincula las entradas (posición de las compuertas) y las salidas (tirantes final e inicial), sin embargo, se observa que tanto en el miembro derecho como en el izquierdo aparecen las salidas (tirantes). Recordando algunos de los conceptos de algebra de

bloques [Oga.1], se encuentra que una ecuación de la forma :

$$\hat{y}(s) = \hat{G}(s) [-\hat{F}(s) \hat{y}(s) + \hat{w}(s)] \quad (\text{A.35})$$

se puede representar como sigue :

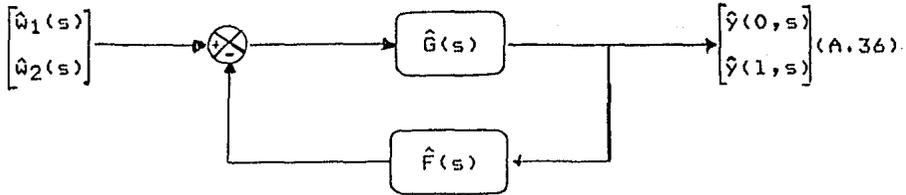


Figura A.1 Relación entrada-salida del canal rectangular abierto (teoría lineal).

con :

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} a_1 \hat{U}_1(s) + \hat{a}_3(s) & a_1 \hat{U}_2(s) + \hat{a}_3(s) \\ (a_1 \hat{U}_1(s) + \hat{a}_3(s))e^{(\hat{U}_1(s)l)} & (a_1 \hat{U}_2(s) + \hat{a}_3(s))e^{(\hat{U}_2(s)l)} \end{bmatrix}$$

$$\hat{a}_2(s) [e^{(\hat{U}_2(s)l)} - e^{(\hat{U}_1(s)l)}] \begin{bmatrix} e^{(\hat{U}_2(s)l)} & -1 \\ -e^{(\hat{U}_1(s)l)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} df_2/df_1 & 0 \\ 0 & df_4/df_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

$$\hat{F}(s) = \begin{bmatrix} 1/df_2 & 0 \\ 0 & 1/df_4 \end{bmatrix} = \text{cte.} \quad (\text{A.38})$$

Comparando la figura (A.1) con la figura (2.1) observamos que tienen una estructura similar, por lo tanto, es posible estudiar la estabilidad de relación (A.37) usando los teoremas 1 y 2 descritos en el capítulo II.

Para ello es necesario obtener :

$$\det [I + F \hat{G}(s)] \quad (\text{A.39})$$

El primer paso en la obtención del determinante es lograr una forma simplificada para $\hat{G}(s)$ (A.38).

Definiendo :

$$\hat{O}(s) = \hat{a}_2(s) [e^{(\hat{U}_2(s)l)} - e^{(\hat{U}_1(s)l)}] \quad (\text{A.40})$$

$$\hat{G}_{11}(s) = df_2/df_1 \{ [a_1 \hat{U}_1(s) + \hat{a}_3(s)] e^{(\hat{U}_2(s)l)} - [a_1 \hat{U}_2(s) + \hat{a}_3(s)] e^{(\hat{U}_1(s)l)} \} / \hat{O}(s) \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned}\hat{G}_{12}(s) &= d_{f4}/d_{f3} \{-[a_1 \hat{U}_1(s) + \hat{a}_3(s)] + [a_1 \hat{U}_2(s) + \hat{a}_3(s)]\} / \hat{O}(s) \\ &= d_{f4}/d_{f3} (a_1 [\hat{U}_2(s) - \hat{U}_1(s)]) / \hat{O}(s) \quad (A.42)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{G}_{21}(s) &= d_{f2}/d_{f1} \{ [a_1 \hat{U}_1(s) + \hat{a}_3(s)] e^{(\hat{U}_1(s) + \hat{U}_2(s))} - \\ &\quad - [a_1 \hat{U}_2(s) + \hat{a}_3(s)] e^{(\hat{U}_2(s) + \hat{U}_1(s))} \} / \hat{O}(s) \quad (A.43) \\ &= d_{f2}/d_{f1} (a_1 [\hat{U}_1(s) - \hat{U}_2(s)] e^{(\hat{U}_1(s) + \hat{U}_2(s))}) / \hat{O}(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{G}_{22}(s) &= d_{f4}/d_{f3} \{-[a_1 \hat{U}_1(s) + \hat{a}_3(s)] e^{(\hat{U}_1(s))} + [a_1 \hat{U}_2(s) + \\ &\quad + \hat{a}_3(s)] e^{(\hat{U}_2(s))} \} / \hat{O}(s) \quad (A.44)\end{aligned}$$

se tiene para $\hat{G}(s)$ (A.38) :

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s) & \hat{G}_{12}(s) \\ \hat{G}_{21}(s) & \hat{G}_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (A.45)$$

y para $F \hat{G}(s)$:

$$F \hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s)/d_{f2} & \hat{G}_{12}(s)/d_{f2} \\ \hat{G}_{21}(s)/d_{f4} & \hat{G}_{22}(s)/d_{f4} \end{bmatrix} \quad (A.46)$$

Sustituyendo (A.46) en (A.39) :

$$\det[I + F \hat{G}(s)] = \begin{vmatrix} 1 + \hat{G}_{11}(s)/d_{f2} & \hat{G}_{12}(s)/d_{f2} \\ \hat{G}_{21}(s)/d_{f4} & 1 + \hat{G}_{22}(s)/d_{f4} \end{vmatrix} \quad (A.48)$$

$$\begin{aligned}&= 1 + \hat{G}_{11}(s)/d_{f2} + \hat{G}_{22}(s)/d_{f4} + \hat{G}_{11}(s) \hat{G}_{22}(s)/(d_{f2} d_{f4}) - \\ &\quad - \hat{G}_{21}(s) \hat{G}_{12}(s)/(d_{f2} d_{f4}) \quad (A.49)\end{aligned}$$

Observando la ecuación (A.49) y considerando las definiciones (A.40), (A.41), (A.42), (A.43) y (A.44) se ve que (A.39) presenta una estructura similar a (2.7) :

$$1 + g(s) = 1 + g_0(s) + \sum_{i=0}^{\infty} g_i e^{-st_i} + \sum_{k=1}^{l_0} \sum_{\alpha=1}^{\mu_k} r_{k\alpha} / (s-p_k)^\alpha \quad (A.50)$$

donde $\text{Re } p_k \geq 0$ para toda k , $\sum_{i=0}^{\infty} |g_i| < \infty$, $t_0 = 0, t_i > 0$ para $i > 0$, l_0 el número de polos en el lado derecho del plano complejo y μ_k la multiplicidad de cada polo, sin embargo, de los términos de

(A.50) los únicos que existen en (A.49) son :

$$1 + g_n(s) \quad (A.51)$$

debido que (A.39) no presenta polos en el lado derecho del plano complejo, ya que sus polos son iguales a los de (A.37) (capítulo II) y a que no se tienen términos de la forma :

$$g_i e^{-st_i}.$$

A P E N D I C E B

Comparación de la respuesta en frecuencia teórica y práctica en un tramo de canal (teoría lineal)

Considèrese un tramo de canal rectangular (teoría lineal) con las siguientes características hidráulicas :

$\alpha = 0.0001$
 $T = 0.02225 \text{ m.}$
 $V_0 = 0.4109 \text{ m/s.}$
 $Y_0 = 2.1336 \text{ m.}$
 $Y_u = 2.49936 \text{ m.}$
 $Y_1 = 0.7257 \text{ m.}$
 $W_{01} = 0.227784 \text{ m.}$
 $W_{02} = 0.22713 \text{ m.}$
 $a = -0.000026$
 $b = 0.003489$
 $l = 150.0 \text{ m.}$
 $g = 100 \text{ m/s}^2.$

La celeridad del canal se obtiene usando la ecuación :

$$\text{celeridad} = (g Y_0)^{1/2}$$

para el canal estudiado en este apèndice la celeridad es igual a 14.6068 mts./seg.

Con los datos anteriores se hace la gràfica de Nyquist en forma teórica, utilizando los programas usados en el capítulo II, encontrando la figura (B.1).

En cuanto a los resultados pràcticos, se obtuvieron exitando el canal simulado (apèndice C) con señaes senoidales de distintas frecuencias (de 0.006 rad/seg a 0.166 rad/seg), tomando muestras de las salidas (tirante inicial y tirante final), una vez que el sistema alcanzò el estado estable.

Se realizaron dos simulaciones distintas. En la primera se seleccionò el paso de integración en distancia y el paso de integración en tiempo, de tal forma que su razón fuera lo más parecida a la celeridad del canal, encontrando que el paso de integración en tiempo debe ser igual a 1 min. y el paso de integración en distancia igual a 15 mts.. Los resultados aparecen en la figura (B.2).

En la segunda simulación se seleccionó el paso de integración en tiempo igual a 4 y el paso de integración en distancia igual a 15, obteniendo una razón entre el paso en distancia y el paso en tiempo igual a 3.75, la cual es distinta al valor de la celeridad. Los resultados aparecen en la figura (B.3).

Comparando los resultados tanto teóricos, como prácticos (figuras (B.1), (B.2) y (B.3)), se observa que no existe diferencia apreciable entre las magnitudes obtenidas por cualquiera de los métodos, sin embargo, se presenta una variación en fase entre los resultados teóricos y prácticos, siendo mayor la diferencia cuando la razón entre el paso de integración en distancia y el paso de integración en tiempo, no es igual a la celeridad (13 grados cuando la curva de Nyquist cruza los -90 grados). Para la simulación donde la razón de los pasos de integración en distancia y tiempo son casi iguales a la celeridad, la diferencia en fase fue de 5 grados cuando la curva de Nyquist cruzó los -90 grados.

En base a los resultados anteriores puede verse que, si se escogen adecuadamente los pasos de integración en distancia y tiempo, para que su razón sea lo más parecida a la celeridad del tramo de canal, los resultados que se obtengan por simulación corresponderán a los obtenidos teóricamente.

Grafica de Nyquist.

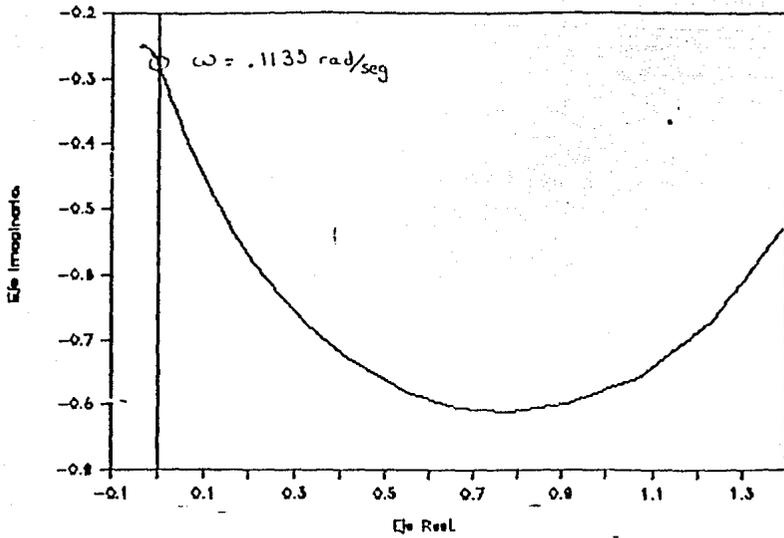


Figura B.1 (a) Gráfica de Nyquist teórica (aguas abajo).

Grafica de Nyquist.

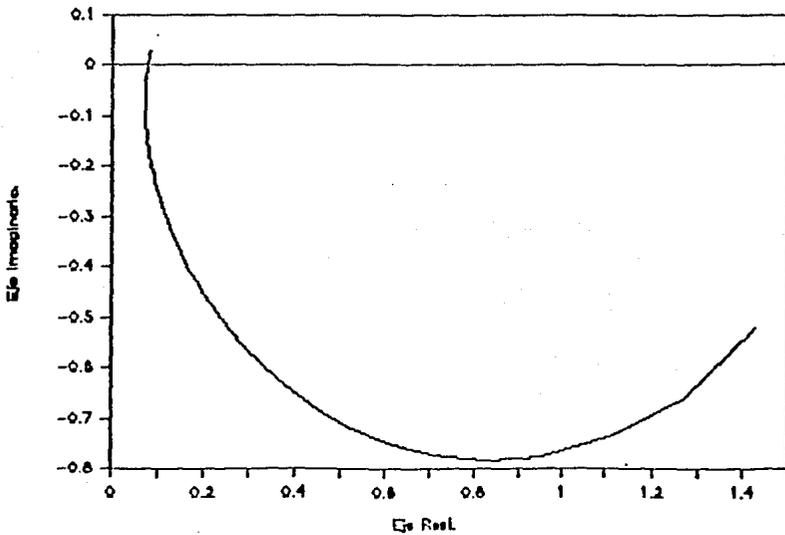


Figura B.1 (b) Gráfica de Nyquist teórica (aguas arriba).

Grafica de Nyquist.

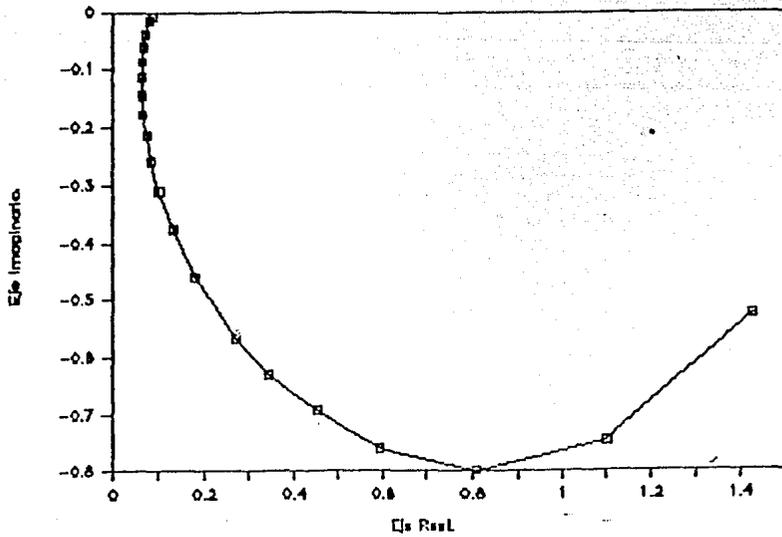


Figura B.2 (a) Gràfica de Nyquist pràctica (aguas arriba).

Grafica de Nyquist.

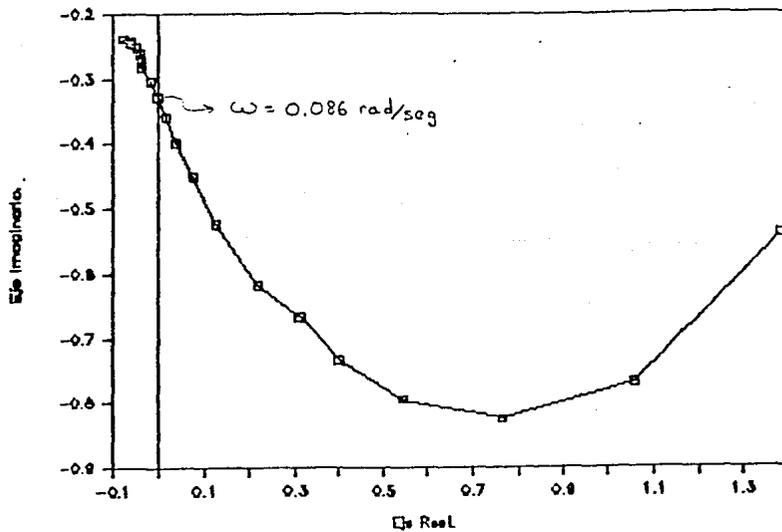


Figura B.2 (b) Gràfica de Nyquist pràctica (aguas abajo).

Grafica de Nyquist.

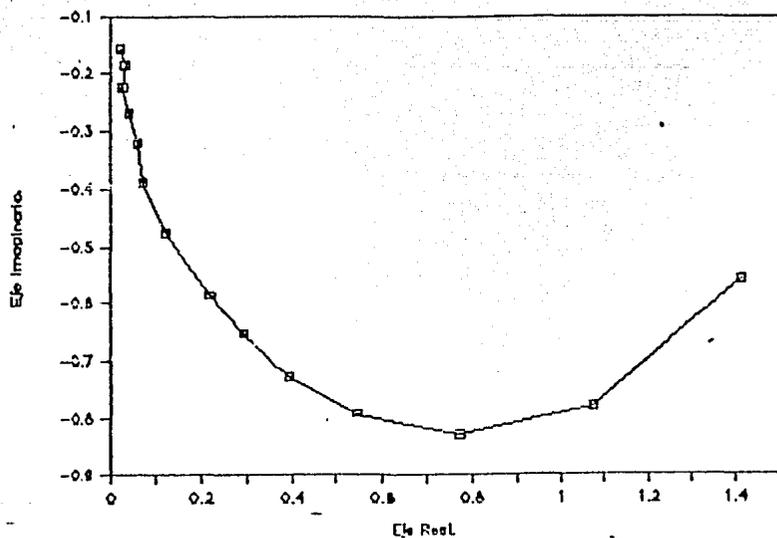


Figura B.3 (a) Gráfica de Nyquist práctica (aguas arriba).

Grafica de Nyquist.

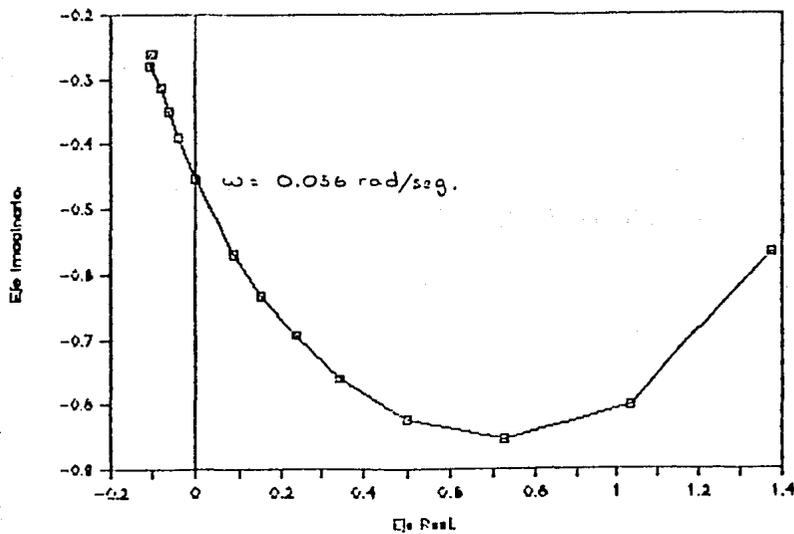


Figura B.3 (b) Gráfica de Nyquist práctica (aguas abajo).

A P E N D I C E C

Empleo del método de Preissman para la solución numérica de una aproximación lineal de un canal rectangular. [Tab. II.]

Las ecuaciones que describen el comportamiento del flujo en un canal rectangular (teoría lineal) son (2.17) :

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + g \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + V_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + a g y(x,t) + b g v(x,t) = 0 \quad (C.1)$$

y

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + V_0 \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (C.2)$$

Con objeto de encontrar una solución numérica a las ecuaciones anteriores, se emplea un método de diferencias finitas, en el cual se aproxima la integración de las ecuaciones (C.1) y (C.2), mediante la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas.

A continuación, se muestra la discretización de las variables dependientes y sus derivadas usadas en el método de Preissmann :

$$f(x,t) = \theta/2 (\Delta f_{j+1} + \Delta f_j) + 1/2 (f_{j+1}^n + f_j^n)$$

$$f(x,t) = \theta \frac{(\Delta f_{j+1} - \Delta f_j)}{\Delta x} + \frac{(f_{j+1}^n - f_j^n)}{\Delta x} \quad (C.3)$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\Delta f_{j+1} + \Delta f_j}{2 \Delta t}$$

donde :

$f(x,t)$: función dependiente de x y t .

θ : coeficiente de ponderación, es un factor que da estabilidad en la solución numérica.

$\Delta f_{j+1} = f_{j+1}^n - f_{j+1}^{n-1}$ incremento de la función entre n y $n+1$ para el tramo $j+1$.

j : denota la sección del canal en estudio.

$j+1$: denota la siguiente sección del canal.

n : instante de tiempo actual.

$n+1$: siguiente instante de tiempo.

Δx : incremento en posición (paso de integración en x).

Δt : incremento en tiempo (paso de integración en t).

Aplicando en (C.2) las discretizaciones (C.3) se tiene :

$$\frac{\Delta Y_{j+1} + \Delta Y_j}{2 \Delta t} + V_0 \left[\theta \frac{\Delta Y_{j+1} - \Delta Y_j}{\Delta x} + \frac{Y_{j+1}^n - Y_j^n}{\Delta x} \right] + Y_0 \left[\theta \frac{\Delta V_{j+1} - \Delta V_j}{\Delta x} + \frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{\Delta x} \right] = 0 \quad (C.4)$$

si se multiplica la expresi3n anterior por $2 \Delta t$, se llega a :

$$\begin{aligned} \Delta Y_{j+1} \left[1 + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} V_0 \theta \right] + \Delta Y_j \left[1 - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} V_0 \theta \right] + \\ \Delta V_{j+1} \left[2 Y_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \theta \right] + \Delta V_j \left[-2 Y_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \theta \right] + \\ 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} Y_0 (V_{j+1}^n - V_j^n) + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} V_0 (Y_{j+1}^n - Y_j^n) \end{aligned} \quad (C.5)$$

Esta ultima expresi3n se puede reescribir como :

$$H_j \Delta Y_{j+1} + B_j \Delta V_{j+1} = C_j \Delta Y_j + D_j \Delta V_j + G_j \quad (C.6)$$

con :

$$\begin{aligned} H_j &= \left[1 + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} V_0 \theta \right] & B_j &= \left[2 Y_0 \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \right] \\ C_j &= \left[-1 + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} V_0 \theta \right] & D_j &= B_j \\ G_j &= - \left[2 \frac{\Delta t}{\Delta x} Y_0 (V_{j+1}^n - V_j^n) + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} V_0 (Y_{j+1}^n - Y_j^n) \right] \end{aligned} \quad (C.7)$$

Substituyendo en (C.1) las discretizaciones (C.3) usadas por el m3todo de Preissmann, se tiene :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_{j+1} + \Delta V_j}{2 \Delta t} + g \left[\theta \frac{\Delta Y_{j+1} - \Delta Y_j}{\Delta x} + \frac{Y_{j+1}^n - Y_j^n}{\Delta x} \right] + \\ V_0 \left[\theta \frac{\Delta V_{j+1} - \Delta V_j}{\Delta x} + \frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{\Delta x} \right] + a g \left[\frac{\theta}{2} (\Delta Y_{j+1} + \Delta Y_j) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} (Y_{j+1}^n + Y_j^n) \right] + b g \left[\frac{\theta}{2} (\Delta V_{j+1} + \Delta V_j) + \frac{1}{2} (V_{j+1}^n + V_j^n) \right] = 0 \end{aligned} \quad (C.8)$$

multiplicando por $2 \Delta t$:

$$\begin{aligned} & \Delta V_{j+1} \left[1 + \frac{2 \Delta t}{\Delta x} \theta V_0 + b g \theta \Delta t \right] + \Delta Y_{j+1} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} 2 \theta g + a g \theta \Delta t \right] + \\ & \Delta V_j \left[-1 + \frac{2 \Delta t}{\Delta x} \theta V_0 - b g \theta \Delta t \right] + \Delta Y_j \left[2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \theta g - a g \theta \Delta t \right] - \\ & - g \frac{(Y_{j+1}^n - Y_j^n)}{\Delta x} 2 \Delta t - V_0 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{j+1}^n - V_j^n) - a g \Delta t (Y_{j+1}^n + Y_j^n) \\ & - b g \Delta t (V_{j+1}^n + V_j^n) = 0 \end{aligned} \quad (C.9)$$

reagrupando se llega a la expresión :

$$H'_j \Delta Y_{j+1} + B'_j \Delta V_{j+1} = C'_j \Delta Y_j + D'_j \Delta V_j + G'_j \quad (C.10)$$

-con :

$$\begin{aligned} H'_j &= \Delta t \theta g \left[\frac{2}{\Delta x} + a \right] & B'_j &= 1 + \Delta t \theta \left[\frac{2 V_0}{\Delta x} + b g \right] \\ C'_j &= \Delta t \theta g \left[\frac{2}{\Delta x} - a \right] & D'_j &= -1 + \Delta t \theta \left[\frac{2 V_0}{\Delta x} - b g \right] \\ G'_j &= \Delta t \left[-2 g \frac{(Y_{j+1}^n - Y_j^n)}{\Delta x} - \frac{2 V_0}{\Delta x} (V_{j+1}^n - V_j^n) + \right. \\ & \quad \left. + a g (Y_{j+1}^n + Y_j^n) - b g (V_{j+1}^n + V_j^n) \right] \end{aligned}$$

Con las ecuaciones (C.6) y (C.10) se pueden obtener los valores de velocidad "V" y tirante "Y" para todo tiempo "n" y toda sección j (j=1..m). Sin embargo, se tienen sólo 2(M-1) ecuaciones y 2m incógnitas (m velocidades y m tirantes, ya que son m secciones en las que se divide el canal para su cálculo). Se requiere de dos ecuaciones más para encontrar la solución única al problema, estas dos ecuaciones son las que expresan las condiciones de frontera (compuerta aguas arriba y compuerta aguas abajo), las cuales aparecen en el capítulo dos (2.19 y 2.20).

Las 2m ecuaciones se resuelven mediante el método del doble barrido [Mah.1], obteniendo las velocidades y tirantes para todos los tramos del canal para el tiempo n+1.

A P E N D I C E D

Representación del predictor multipaso en forma de ecuación de estados

El predictor multipaso recursivo (3.29) con sesgo puede ser escrito como :

$$\hat{y}(t+1/t) = (1 - A(q^{-1})) \hat{y}(t+1/t) + N(q^{-1})(\hat{y}(t+1) - \hat{y}(t+1/t)) + q^{-k} B(q^{-1}) u(t+1) + v_s \quad (D.1)$$

con :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \quad (D.2)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \quad (D.3)$$

$$N(q^{-1}) = n_0 + n_1 q^{-1} + n_2 q^{-2} + \dots + n_{n_n} q^{-n_n} \quad (D.4)$$

$$\hat{y}(t+m) = \begin{cases} \hat{y}(t+m/t) & \text{si } m > 0 \\ y(t+m) & \text{si } m \leq 0 \end{cases} \quad (D.5)$$

v_s : coeficiente del sesgo.

$$\varepsilon(t+m/t) = y(t+m) - \hat{y}(t+m/t)$$

y

$$q^{-n} \hat{y}(t+m/t) = \begin{cases} \hat{y}(t+m-n/t) & \text{si } m > n \\ \hat{y}(t+m-n/t-1+m-n) & \text{si } m \leq n \end{cases} \quad (D.6)$$

Tomando las definiciones (D.2), (D.3), (D.4), (D.5) y (D.6) la ecuación (D.1) se reescribe, para $l=0$, como el producto escalar de dos vectores más un escalar, quedando de la forma :

$$\hat{y}(t+1/t) = \theta_0 \sigma^t + b_0 u(t-k+1) \quad (D.7)$$

con :

$$\theta_0 = [-a_1, -a_2, \dots, -a_{n_a}, b_1, b_2, \dots, b_{n_b}, n_0, n_1, \dots, n_{n_n}, v_s]$$

$$\sigma_0 = [\hat{y}(t/t-1), \hat{y}(t-1/t-2), \dots, \hat{y}(t-n_a+1/t-n_a), u(t-k), u(t-k-1), \dots, u(t-k-n_b+1), \varepsilon(t/t-1), \varepsilon(t-1/t), \dots, \varepsilon(t-n_n/t-n_n-1), 1] \quad (D.8)$$

De manera similar a (D.7), la ecuación (D.1) para $l=1$ es de la forma :

$$\hat{y}(t+2/t) = \theta_1 \sigma^t + b_g u(t-k+2) \quad (D.9)$$

con :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= [-a_1, -a_2, \dots, -a_{n_a}, b_1, b_2, \dots, b_{n_b}, n_g, n_1, \dots, n_{n_n}, v_s] \\ \sigma_1 &= [\hat{y}(t+1/t), \hat{y}(t/t-1), \dots, \hat{y}(t-n_a+2/t-n_a-1), u(t-k+1), \\ &\quad , u(t-k), \dots, u(t-k-n_b+2), \emptyset, \varepsilon(t/t-1), \dots, \\ &\quad , \varepsilon(t-n_n+1/t-n_n), 1] \end{aligned} \quad (D.10)$$

La ecuación (D.1) para $l=2$ es de la forma :

$$\hat{y}(t+3/t) = \theta_2 \sigma^t + b_g u(t-k+3) \quad (D.11)$$

con :

$$\begin{aligned} \theta_2 &= [-a_1, -a_2, \dots, -a_{n_a}, b_1, b_2, \dots, b_{n_b}, n_g, n_1, \dots, n_{n_n}, v_s] \\ \sigma_2 &= [\hat{y}(t+2/t), \hat{y}(t+1/t), \dots, \hat{y}(t-n_a+3/t-n_a-2), u(t-k+2), \\ &\quad , u(t-k+1), \dots, u(t-k-n_b+3), \emptyset, \varepsilon(t/t-1), \dots, \\ &\quad , \varepsilon(t-n_n+2/t-n_n+1), 1] \end{aligned} \quad (D.12)$$

De las expresiones del predictor para $l=0$ (D.7), $l=1$ (D.9) y $l=2$ (D.11) se observa que los vectores $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_1$ son iguales, así como el escalar (b_g) que multiplica la entrada $u(t+1+1)$.

Como el vector θ_1 y el escalar b_g son constantes e independientes del paso al que se desea la predicción, se ve claramente que esta última sólo dependerá del vector σ . Surge entonces la necesidad de encontrar un algoritmo que nos permita calcular en forma rápida y sencilla los vectores σ , para obtener las predicciones.

Una forma de atacar el problema es haciendo uso de una ecuación de estados, con la siguiente estructura :

$$\sigma_{1+1} = A \sigma_1 + B u(t+1+1-k) \quad 1 \geq 0 \quad (D.13)$$

$$\hat{y}(t+1+1/t) = C \sigma_{1+1} \quad (D.14)$$

donde σ_{1+1} y σ_1 son vectores cuyas componentes son las entradas pasadas, predicciones (para $m \leq 1$) y errores de predicción

- [Esp.2] España M. y Ortega R., "On Optimal Recursive Multistep Prediction and Generalized Predictive Control : A State Space Formulation. Por publicar.
- [Esp.3] España M. y Barrera J., "Estudio del Control en Simulación de una Canal de Riego". Reporte 5118, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1986.
- [Goo.1] Goodwin G. C. y Sin K. S., "Adaptive filtering, prediction and control", Prentice Hall, 1984.
- [Goo.2] Goodwin G. C. y Payne R. L., "Dynamic System identification : Experiment Design and Data Analysis" Academic Press, 1977
- [Gou.1] Gould L. A., "Chemical Process Control: Theory and Applications". Addison-Wesley, 1969.
- [Ise.1] Isermann Rolf, "Digital Control Systems". Springer-Verlag, 1981
- [Lju.1] Ljung L. y Soderstrom T., "Theory and Practice of Recursive Identification". MIT press, 1963
- [Mah.1] Mahmood K. y Yevjevich., " Unsteady Flow in Open Channels". Water Resources Publications, Vols. 1, 2, 1975.
- [Oga.1] Ogata Katsuhiko, "Ingeniería de Control Moderna", Prentice-Hall, 1980.
- [Vid.1] Vidyasagar M., "Simplified graphical stability criteria for distributed feedback systems", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 20, pp. 440-442, Junio 1975.
- [Wit.1] Wittenmark Bjorn, "A self-tuning predictor", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 19, pp. 848-851, Diciembre 1974.
- [Wol.1] Wolovich W.A., "Linear Multivariable Systems". Springer-Verlag, 1974.

B I B L I O G R A F I A

- [Cal.1] Callier F. M. y Desoer C. A., "On simplifying a graphical stability criterion for linear distributed systems", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 21, pp. 128-129, febrero 1976.
- [Cal.2] Callier F. M. y Desoer C. A., "An algebra of transfer functions for distributed linear time-invariant systems", IEEE Trans. on Circuit and Systems. Vol. 25 pp. 651-662, septiembre de 1978
- [Cla.1] Clark D.W., Mohtadi C., Tuffs P.S., "Generalized Predictive Control Part 1 : The Basic Algorithm". Reporte 1555/84, Departamento de Ciencias de la Ingeniería, Oxford 1984.
- [Cla.2] Clark D.W., Mohtadi C., Tuffs P.S., "Generalized Predictive Control Part 2 : Extensions and Interpretations". Reporte 1557/84, Departamento de Ciencias de la Ingeniería, Oxford 1984.
- [Can.1] Canetti R., "Identificación de Sistema Variables en el Tiempo", Tesis de maestría, DEEFI-UNAM, 1986.
- [Can.2] Canetti R., "Algunos Algoritmos de Identificación de Sistemas Discreto". Reporte 5103, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1986.
- [Cho.1] Chow, V. T., "Open-Channel hydraulics", Mc Graw Hill.
- [Con.1] Constantinides C. T., Kia-Koojoori T. y Jacquot R., "Stability of a feedback controlled distributed system by modal representation", Int. J. Systems Sci. Vol 7, No. 9, pp. 989-1033, 1976.
- [Des.1] Desoer C. A. y Vidyasagar M., "Feedback Systems: Input-Output properties", Academic Press, 1975.
- [Des.2] Desoer C. A. y Wang Y., "On the generalized Nyquist stability criterion", IEEE Trans. Automatic. Contr. Vol. 25, pp. 187-196, abril 1980.
- [Esp.1] España Martín, "Algoritmos de Predicción Lineal Óptima para Sistemas Discretos Monovariabes. Serie Azul del Instituto de Ingeniería, UNAM 1984.