

01174
2ej. 1

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
SECCION DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

TESIS QUE PRESENTA EL

ING. LEOBARDO FIERRO MURGA

para obtener el grado de

MAESTRO EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

CREDITOS POR TESIS 12

JURADO:

Dr. Sergio Fuentes Maya

Sergio Fuentes Maya

M. en I. Gabriel Auvinet Guichard

G. Auvinet Guichard

Dr. José de Jesús Acosta Flores

J. Acosta Flores

M. en I. Rubén Téllez Sánchez

R. Téllez Sánchez

Dr. Miguel Cobián Sela

M. Cobián Sela

JEFE DE LA SECCION

EL SECRETARIO ACADEM

Dr. Sergio Fuentes Maya

Sergio Fuentes Maya

Ubaldo Bonilla D.

DR. UBALDO BONILLA D.

C. U., México, D. F. Julio 1980

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

1	TEORIA DE GRAFICAS	
1.1	Introducción	1
1.2	Definición de Gráfica	2
1.3	Conceptos Orientados	5
1.4	Método de Descomposición de Gráficas en Subgráficas Fuertemente Conexas	18
1.5	Método para la Determinación de los Niveles de una Gráfica sin Circuitos	23
1.6	Gráficas Ponderadas	34
1.7	Método de Dijkstra	35
2	CADENAS DE MARKOV FINITAS Y HOMOGENEAS	
2.1	Introducción	40
2.2	Definición de Proceso Estocástico	41
2.3	Procesos Markovianos	44
2.4	Cadenas de Markov Finitas y Homogéneas	46
2.5	Clasificación de Estados	52
2.6	Probabilidades de Primera Visita a un Estado en N Pasos	64

2.7	Tiempos Medios de Ocupación	67
2.8	Probabilidades de Primera Visita	72
2.9	Tiempos Medios de Absorción	79
2.10	Tiempos Medios de Primer Paso y de Recurrencia	81
2.11	Comportamiento de Cadenas de Markov a Largo Plazo	84

3 SISTEMATIZACION

3.1	Introducción	109
3.2	Diagrama de Bloque	111
3.3	Interpretación de Variables	114
3.4	Diagrama de Flujo	123
3.5	Explicación del Uso del Programa para la Microcomputadora TRS-80	149
3.6	Listado del Programa para la Microcomputadora TRS-80 en BASIC	152

4 APLICACIONES

4.1	Introducción	155
4.2	Endogamia	155
4.3	La Peluquería	162
4.5	Presa de Almacenamiento	167

BIBLIOGRAFIA	175
--------------	-----

INDICE ALFABETICO	177
-------------------	-----

PREFACIO

El presente trabajo se ha realizado con el fin de proporcionar una herramienta sistematizada que facilite el análisis de las Cadenas - Markovianas.

El esfuerzo invertido aquí, para presentar la materia, se manifiesta fundamentalmente en el recurso utilizado, la Teoría de Gráficas, teoría que ha facilitado enormemente la tarea encomendada.

Las Cadenas Markovianas, tratadas en esta oportunidad, se limitan al caso particular, de un número finito de estados, aunado a la restricción de homogeneidad.

El entusiasmo que conllevó a la elaboración de este pensamiento materializado, fue la oportuna aplicación de la Teoría de Gráficas a - Cadenas de Markov, ya que se lleva a cabo la explotación de la relación de estos temas, relación que de ninguna manera es novedosa, - pero que no se presenta en forma plausible a la vista de todos aquellos que están familiarizados de alguna u otra manera con estas teorías.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos: el primer capítulo establece, sólo los conceptos necesarios de la Teoría de Gráficas, manipulados en la vinculación entre ambas teorías. El principal propósito

del segundo capítulo, es presentar en forma clara y sencilla, la Teoría de Cadenas Markovianas Finitas y Homogéneas. El tercero está relacionado con la elaboración del programa de computadora, programa que en su seguimiento ilustra paralelamente las teorías que han servido como fundamento para su realización. Finalmente las aplicaciones siguen en turno a este trabajo, en su cuarto capítulo.

Espero que la contribución que esta presentación pueda dar, sea de utilidad al estudioso del tema y que disemine en gran parte sus dudas, logrando así, la disminución del esfuerzo que haya experimentado en la comprensión de los conceptos presentados aquí.

Agradezco la intervención de todas aquellas personas que colaboraron en la elaboración de este trabajo, en especial al M. en I. Ing. Gabriel Auvinet Guichard, M. en I. Mat. Rubén Téllez Sánchez, quienes me ayudaron considerablemente, así como también al Dr. José Luis Farah y al Mat. José de Jesús Romo Moreno por su desinteresada cooperación; a todos ellos mi más sincera gratitud.

México, D. F.

Julio 1980

LEOBARDO FIERRO M.

TEORIA DE GRAFICAS

1.1 INTRODUCCION

Algunos sugieren, que esta teoría, se debería calificar como teoría de "Grafos", otros opinan que la palabra "Gramma", es la adecuada. Aclaremos ésto, situándonos en el significado de cada una.

Las tres palabras provienen del griego; "Grafo" es una palabra que ha sido usada como elemento compositivo pospuesto, en la formación de algunas voces españolas con el significado de escribir o grabar. Un uso similar lo ha tenido la palabra "Gramma", pero ésta, con el significado de escrito trazado o línea. Por otro lado "Gráfica" se relaciona con el arte de representar objetos por medio de líneas o figuras. Se ha convenido en que la palabra "Gráfica", de acuerdo con los significados anteriores, es la más adecuada, por lo que será utilizada en este trabajo.

El presente capítulo enuncia inicialmente, una secuencia de conceptos de Teoría de Gráficas orientadas o dirigidas, necesarios para comprender los métodos descritos en el mismo. Desde el punto de vista didáctico parece apropiado enunciar ejemplos ilustrativos, -

sólo en aquellos conceptos que presentan un cierto grado de dificultad para su comprensión. Así también, existirán desviaciones hacia otros conceptos que no son de Teoría de Gráficas, pero que son -- contenidos en ellos, por lo que su oportuna presentación facilita el entendimiento del concepto que se esté tratando.

Se ha considerado conveniente separar los conceptos relativos a Gráficas ponderadas, de los inicialmente enunciados, con objeto de anticiparlos a la descripción del Método de Dijkstra, método que es tratado al final del capítulo.

1.2 DEFINICION DE GRAFICA

Sea P un conjunto producto de n conjuntos E_1, E_2, \dots, E_n , es decir:

$$P = E_1 \times E_2 \times E_3 \times \dots \times E_n$$

y sea una bipartición del conjunto P formada por G y \bar{G} . Entonces se dice que el conjunto G constituye una gráfica definida en P . De forma similar \bar{G} . Un caso particular de interés el cuál será manejado aquí, lo constituye el producto P formado por:

$$P = E \times E, E \text{ es un conjunto a lo más numerable o contable}$$

(El caso numerable no será mencionado en este trabajo)

Existen diversas maneras de describir una gráfica como son las siguientes:

- i) Sea Γ una aplicación multívoca sobre E , entonces la gráfica G queda totalmente descrita por la pareja: (La aplicación multívoca se refiere a que la aplicación va de un conjunto Θ formado por subconjuntos de E al mismo conjunto)

$$G = (E, \Gamma)$$

De manera similar se puede describir la gráfica inversa así:

$$G^{-1} = (E, \Gamma^{-1})$$

- ii) Sea U el conjunto de correspondencias de la gráfica, es decir el conjunto de pares ordenados $(a,b) \in P$, entonces la gráfica queda descrita por el par:

$$G = (E, U)$$

Ilustremos estas descripciones mediante el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1.1

$$\text{Sea } E = \{a, b, c\}$$

$$\Rightarrow P = E \times E = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

Propongamos una bipartición de P :

$$G = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, d)\}$$

$$\text{y } \bar{G} = \{(a, c), (b, b), (c, a), (c, b)\}$$

$$\Rightarrow G \text{ puede ser descrita por: } E = \{a, b, c\}, \quad \begin{array}{l} \Gamma\{a\} = \{a, b\} \\ \Gamma\{b\} = \{a, c\} \\ \Gamma\{c\} = \{d\} \end{array}$$

Luego la gráfica G es descrita por E, Γ así definidos. Por otro lado el conjunto U sería:

$$U = \{ (a,a), (a,b), (b,a), (b,c), (c,d) \}$$

y la gráfica quedaría descrita por E y U tal que $G = (E, U)$

De lo anterior surgen múltiples representaciones de una gráfica. Algunas de ellas pueden establecerse en:

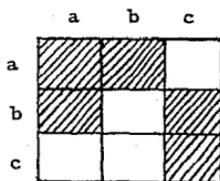
- Matriz Booleana
- Matriz de Casillero o Tablero
- Matriz Latina
- Un mapeo de $E \rightarrow E$
- Representación sagitaria o sagital

Para el ejemplo 1.1 esto luciría como en la fig. 1.1

a) Matriz Booleana

	a	b	c
a	1	1	0
b	1	0	1
c	0	0	1

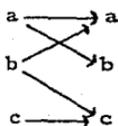
b) Matriz de Casillero o Tablero



c) Matriz Latina

	a	b	c
a	aa	ab	\emptyset
b	ba	\emptyset	bc
c	\emptyset	\emptyset	cc

d) Un mapeo de $E \rightarrow E$



e) Representación Sagitaria o Sagital

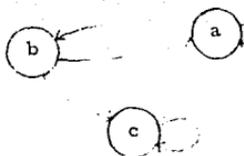


Fig. 1.1

Habiendo establecido lo anterior las siguientes observaciones son convenientes:

i) Para obtener la gráfica inversa a partir de las distintas representaciones de la gráfica en forma directa se tiene:

a) En las matrices Booleana, Casillero y Latina, basta leer por columnas dichas matrices

b) En la representación Sagitaria y el Mapeo, sólo hay que cambiar el sentido de las flechas

ii) La siguiente propiedad, es satisfecha por la aplicación \square :

$$\square\{a\} \cup \square\{b\} = \square\{a,b\}, \quad a, b \in E \text{ y } \cup \text{ significa unión}$$

1.3 CONCEPTOS ORIENTADOS

En este punto, es necesario repetir que la mayoría de los conceptos que se enunciarán en este trabajo, están relacionados con gráficas - dirigidas u orientadas, ya que sólo éstos son indispensables para el fin encomendado, la vinculación con cadenas de Markov.

Vértice

Todo elemento que pertenece al conjunto E se denomina vértice

Gráfica de Orden N

Cuando el conjunto E es de cardinalidad N , se dice que la gráfica es de orden N .

Arco

Un par ordenado de vértices se define como arco, es decir, todo par ordenado $(x_i, x_j) \in P$, es un arco. Se denotará por u_{ij} .

Extremos de un Arco

Dado el par ordenado de vértices (x_i, x_j) tal que $x_i, x_j \in E$, se dice que el vértice x_i es el extremo inicial del arco u_{ij} y x_j es el extremo final del mismo arco.

Otra terminología muy utilizada, es la de definir al extremo inicial de un arco como precedente y al extremo final como siguiente.

Lazos o Bucles

Un arco cuyo extremo inicial y final coinciden, se denomina Lazo o Bucle.

En las matrices Booleana, Casillero y Latina ocuparán los lugares de la diagonal.

Arcos Adyacentes

Los arcos que no constituyen lazos y que tienen un extremo en común (ya sea inicial o final) se califican de adyacentes.

Vértices Adyacentes

Dos vértices son adyacentes, sí son distintos y existe un arco que los une.

Arco Incidente a un Subconjunto de Vértices

Dada una gráfica $G = (E, \Gamma)$ y un subconjunto no vacío E_1 de $E - (E_1 \cap E)$, se dice que el arco $u_{ij} = (x_i, x_j)$, incide a E_1 , sí solo uno de sus extremos pertenece a E_1 . Si el extremo inicial x_i pertenece a E_1 , se dice que el arco u_{ij} incide hacia el exterior de E_1 . De otro modo, si el extremo final x_j del arco u_{ij} es el que pertenece a E_1 , entonces se dice que el arco u_{ij} incide hacia el interior de E_1 .

Gráfica Parcial

Sea una gráfica $G = (E, U)$. Se dice que $G^1 = (E, U^1)$ es una gráfica parcial de G si contiene todos los vértices de E y U^1 es un subconjunto propio de U .

Subgráfica

Considérese una gráfica $G = (E, \Gamma)$. Se dice que $G'' = (A, \Gamma'')$ es una subgráfica de G si G'' se construye sobre el conjunto de vértices A subconjunto de E conteniendo todos los arcos de G correspondientes al conjunto A .

Camino

Dada una gráfica $G = (E, \Gamma)$, una sucesión de arcos, tales que el extremo inicial de uno de ellos, coincide con el extremo final del arco anterior, constituyen un camino en la gráfica G . Notación. - un camino es una sucesión de arcos $(u_{12}, u_{23}, u_{34}, \dots)$. También puede ser denotado por $C(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ir})$ y abreviado como $C(x_{i1}, x_{ir})$.

Circuito

Con la definición de camino establecida, es fácil enunciar lo que significa un circuito. Un circuito es un camino que se inicia y termina en el mismo vértice.

Longitud de un Camino

Dado un camino, su longitud queda definida con el número de arcos que forman ese camino. Es de observar que un vértice es un camino de longitud nula. Notación. $-L(C(i, j))$ significa la longitud del camino del vértice i al vértice j .

Clausura o Cierre Transitivo

Este concepto, como los que siguen, son de fundamental importancia en la vinculación con cadenas de Markov, por lo que hay que tenerlos muy en cuenta:

Sea una gráfica $G = (E, \Gamma)$; las aplicaciones multívocas $\overset{2}{\Gamma}, \overset{3}{\Gamma}, \overset{4}{\Gamma}, \dots$

significan:

$$\overset{2}{\Gamma}\{x_i\} = \Gamma\{\overset{2}{\Gamma}\{x_i\}\}$$

$$\overset{3}{\Gamma}\{x_i\} = \Gamma\{\overset{2}{\Gamma}\{\overset{2}{\Gamma}\{x_i\}\}\} = \Gamma\{\Gamma\{\overset{2}{\Gamma}\{x_i\}\}\}$$

De la misma forma se establecen las aplicaciones multivocas inver-

sas $\overset{-2}{\square}, \overset{-3}{\square}, \dots$

Un ejemplo ilustrará la significación de este concepto

Ejemplo 1.2

Considérese $G = (E, \square)$ tal que $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

y sus correspondencias

$$\begin{aligned} \square \{a\} &= \{b, f, g\} & \square \{e\} &= \emptyset, \text{ donde } \emptyset \text{ es el conjunto nulo o vacío} \\ \square \{b\} &= \{a, b, c\} & \square \{f\} &= \{b, f\} \\ \square \{c\} &= \{d, e\} & \square \{g\} &= \{a, e\} \\ \square \{d\} &= \{c\} \end{aligned}$$

Trabajemos con el vértice a :

$$\begin{aligned} \square^2 \{a\} &= \square \{ \square \{a\} \} = \square \{b, f, g\} \quad \text{y por la propiedad dis-} \\ &= \square \{b\} \cup \square \{f\} \cup \square \{g\} \quad \text{distributiva (pág. 5 inci-} \\ &= \{a, b, c\} \cup \{b, f\} \cup \{a, e\} \quad \text{so ii)} \\ &= \{a, b, c, e, f\} \\ \square^3 \{a\} &= \square \{ \square^2 \{a\} \} = \square \{a, b, c, e, f\} \\ &= \square \{a\} \cup \square \{b\} \cup \square \{c\} \cup \square \{e\} \cup \square \{f\} \\ &= \{b, f, g\} \cup \{a, b, c\} \cup \{d, e\} \cup \emptyset \cup \\ &\quad \{b, f\} \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g\} \end{aligned}$$

Lo importante aquí es la interpretación de $\overset{n}{\Gamma}\{x_i\}$ y $\overset{-n}{\Gamma}\{x_i\}$. $\overset{n}{\Gamma}\{x_i\}$ es el subconjunto de vértices que pueden alcanzarse a partir de x_i

utilizando un camino de longitud igual o menor a n . Por otro lado

$\overset{-n}{\Gamma}\{x_i\}$ es el subconjunto de vértices a partir de los cuáles puede alcanzarse x_i siguiendo un camino de longitud igual o menor que n .

Con lo antes expuesto estamos en posición de definir la clausura transitiva: El cierre transitivo de un vértice $x_i \in E$ es la aplicación multívoca definida por:

$$\widehat{\Gamma}\{x_i\} = \{x_i\} \cup \overset{1}{\Gamma}\{x_i\} \cup \overset{2}{\Gamma}\{x_i\} \cup \dots$$

La interpretación de $\widehat{\Gamma}\{x_i\}$ es, el subconjunto de vértices de E que se pueden alcanzar a partir de x_i con un camino de longitud cualquiera.

Gráfica Fuertemente Conexa

Este concepto al igual que el anterior es de sustantiva importancia para la tarea perseguida.

Sea una gráfica $G = (E, \Gamma)$. Esta gráfica es fuertemente conexa si:

$$\forall x_i \in E : \widehat{\Gamma}\{x_i\} = E$$

es decir, si a partir de todo vértice x_i resulta posible alcanzar cualquier otro mediante un camino de la gráfica.

Aquí es de importancia notar que las subgráficas fuertemente conexas juegan un papel importante en la clasificación de estados de una cadena Markoviana, clasificación que será tratada en las segunda y tercera partes de este trabajo.

Subgráfica Fuertemente Conexas Máxima

Sea una gráfica $G = (E, \Gamma)$, diremos que una subgráfica G' de G es fuertemente conexas máxima, si no existe otra subgráfica fuertemente conexas G'' de G que contenga estrictamente a G' .

Se considera que este concepto, es el más poderoso de todos los definidos anteriormente ya que construye un considerable puente entre la Teoría de gráficas finitas y las cadenas Markovianas. Debido a su importancia será necesario remarcar una serie de consideraciones. Para ésto, es suficiente recordar algunas cuestiones referentes a Relaciones.

Relación.- Consiste en lo siguiente:

- i) Un conjunto A
- ii) Un conjunto B
- iii) Un enunciado formal $P(x, y)$ tal que $x \in A$, $y \in B$ y
 en donde $P(x, y)$ puede ser falso o verdadero para
 todo par $(x, y) \in A \times B$

Se dice entonces que una relación R es una relación entre A y B y se

le denota por:

$$R = (A, B, P(x, y))$$

El conjunto de pares (x, y) para los cuales $P(x, y)$ es verdadero se denota como el conjunto solución R^* de la relación R .

Cuando el conjunto $A=B$, entonces es común expresar: "una relación sobre un conjunto A " y no se hace explícito el producto cartesiano $A \times A$. Existen diversos tipos de relaciones como son: relaciones recíprocas, reflexivas, simétricas, transitivas, antisimétricas, asimétricas y de equivalencia. Las relaciones que interesan aquí son las relaciones de equivalencia. Para poder definir éstas es necesario establecer:

Relación Reflexiva. - Sea $R=(A, A, P(x, y))$ una relación sobre un conjunto A . Se dice que R es una relación reflexiva si para todo $a \in A$

$$(a, a) \in R$$

ó en otras palabras R es reflexiva, si todo elemento de A está relacionado consigo mismo.

Relación Simétrica. - Sea R una relación en A . R es una relación simétrica si:

$$(a, b) \in R \implies (b, a) \in R$$

es decir que si a está relacionada con b , entonces b está relacionada con a

Relación Transitiva. - Una relación R en un conjunto A se dice rela-

ción transitiva si:

$$(a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$$

Ahora bien habiendo cubierto ésto, se puede definir ya una relación de equivalencia.

Relación de Equivalencia.- Una relación es de equivalencia si la relación es:

- i) Reflexiva
- ii) Transitiva
- iii) Simétrica

De aquí podemos pasar a dar la siguiente definición:

Definición.- Si A es un conjunto y \sim es una relación de equivalencia sobre A, entonces la "clase de equivalencia" de $a \in A$ es el conjunto $\{x \in A / a \sim x\}$. Lo escribimos $cl(a)$

Para claridad de los conceptos de relaciones, citemos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 13 Sea S un conjunto cualquiera y definamos \sim en S por $a \sim b$ para $a, b \in S$ si y solo si $a=b$. Hemos definido claramente una relación de equivalencia por lo siguiente:

- i) Sea $a \in S \implies a=a$ luego $a \sim a \implies \sim$ es reflexiva
- ii) Si $a=b \implies a \sim b$ pero también $b=a \implies b \sim a$ luego \sim es simétrica

- iii) Si $a = b \Rightarrow a \sim b$ y si $b = c \Rightarrow b \sim c \Rightarrow a = c$
 luego $a \sim c$ y \sim es transitiva

En realidad, una relación de equivalencia es una generalización de la igualdad, que mide la igualdad hasta una cierta propiedad.

EJEMPLO 1.4 Sea I el conjunto de todos los enteros. Para $a, b \in I$ convengamos en que $a \sim b$ si $a-b$ es un entero par. Verificamos que ésto define una relación de equivalencia sobre I .

- i) Como $a-a=0$ y 0 es par $\Rightarrow a \sim a$ luego \sim es reflexiva
- ii) Si $a \sim b$, es decir, si $a-b$ es par, entonces $b-a=-(a-b)$ es también par, luego $b \sim a \Rightarrow \sim$ es simétrica
- iii) Si $a \sim b$ y $b \sim c$ entonces tanto $a-b$ como $b-c$ son pares, luego $a-c=(a-b)+(b-c)$ es también par, lo cuál prueba que $a \sim c$

EJEMPLO 1.5 Sea I el conjunto de todos los enteros y sea $n > 1$ un entero fijo.

Para $a, b \in I$ definimos \sim por $a \sim b$ si $a-b$ es un múltiplo de n . Probemos que \sim es una relación de equivalencia.

- i) Sea $k \in I \Rightarrow a-a=kn$ ésto se cumple para $k=0$
 $\Rightarrow a-a=0 \Rightarrow a \sim a$ luego \sim , es reflexiva
- ii) Si $a-b=kn \Rightarrow a \sim b$ pero $b-a = -(a-b)=-kn$
 luego $b \sim a \Rightarrow \sim$ es simétrica

iii) Si $a-b=kn$ y si $b-c=ln \ni k, l \in I$

$$\implies a-c=(a-b)+(b-c)=(kn-ln)=(k-l)n, \text{ como } k-l \in I$$

$$\implies a \sim c$$

En los ejemplos que acabamos de discutir ¿Cuáles son las clases de equivalencia?. En el ejemplo 1.3 la clase de equivalencia de a consiste tan sólo en a . En el ejemplo 1.4 la clase de equivalencia de a consiste en todos los enteros de la forma $a+2m$ donde $m=0, \pm 1, \pm 2 \dots$. Aquí hay dos clases de equivalencia distintas, la $cl(0)$ y $cl(1)$. En el ejemplo 1.5 la clase de equivalencia de a consiste en todos los enteros de la forma $a+kn$ donde $k=0, \pm 1, \pm 2 \dots$; en este ejemplo hay n clases de equivalencia distintas a saber, $cl(0), cl(1), cl(2) \dots cl(n-1)$.

Vamos a probar ahora el primer resultado genuino de este trabajo. La prueba de este teorema no es muy difícil, realmente es muy sencilla, pero no por ello el resultado que en él se presenta deja de ser de un gran uso para nosotros.

TEOREMA 1.1- Las distintas clases de equivalencia de una relación de equivalencia sobre A , nos proporcionan una descomposición de A como una unión de subconjuntos mutuamente ajenos y no vacíos. Recíprocamente, dada una descomposición de A como unión de subconjuntos mutuamente ajenos y no vacíos, podemos definir una relación de equivalencia sobre A para la que estos subconjuntos sean las dis

tintas clases de equivalencia.

Prueba.- Primero demostramos en un sentido. Denotemos por \sim la relación de equivalencia sobre A .

Notemos que para cualquier $a \in A$, $a \sim a$ y a debe estar en $cl(a)$, de donde la unión de todas las $cl(a)$ dan A .

Afirmamos ahora que dadas dos clases de equivalencia o son ajenas o son iguales. Supongamos que $cl(a)$ y $cl(b)$ no son ajenas, sino que \exists una x , tal que $x \in cl(a) \cap cl(b)$. Como $x \in cl(a)$ entonces $a \sim x$; como $x \in cl(b)$ entonces $b \sim x$, pero por la simetría de la relación $x \sim b$. Pero $a \sim x$ y $x \sim b$ implica que $a \sim b$ por transitividad. Supongamos ahora que $y \in cl(b)$, entonces $b \sim y$, pero $a \sim b$ y $b \sim y$, luego $a \sim y$, luego $y \in cl(a)$. Así todo elemento en $cl(b)$ está en $cl(a)$, lo que demuestra que $cl(b) \subset cl(a)$. El argumento es claramente simétrico, de donde se concluye que $cl(a) \subset cl(b)$, y las dos relaciones de contención opuestas nos dicen que $cl(a) = cl(b)$. Hemos probado que las distintas $cl(a)$ son mutuamente ajenas y que su unión es A . En el otro sentido basta definir una relación de equivalencia, que es simplemente "pertenecer a la clase que" para probarlo; es decir, definimos que para $a, b \in A$, $a \sim b$ si están en el mismo subconjunto. Así una relación de equivalencia \sim en un conjunto A produce una partición del conjunto A al obtener las diversas clases de equivalencia.

El conjunto de clases de equivalencia $\{cl(\alpha)\}_{\alpha \in A}$ se denota por: A/R y se llama el conjunto cociente.

Abandonaremos este t3pico definiendo, partici3n, previendo cualquier duda generada por lo referente a Relaciones.

Partici3n.- Dado un conjunto A , una familia de subconjuntos de A , B_i , no vac3os que cumple con:

- i) A es igual a $\bigcup_i B_i$, Tal que i pertenece a I , donde I es el conjunto indicador
- ii) Para cualesquiera conjuntos B_i y $B_j \subset A$ o bien $B_i = B_j$ o bien $B_i \cap B_j = \emptyset$

se dice una partici3n del conjunto A .

En particular y volviendo al concepto de Subgr3fica fuertemente conexa, se contiene, en tal concepto una relaci3n "existe un camino de $x_i \in E$ a $x_j \in E$ y rec3procamente", relaci3n que se puede demostrar, es de equivalencia (la demostraci3n es trivial por lo que se omite). Es de notarse que, dado un conjunto E y una relaci3n de equivalencia, 3sta no necesariamente incide sobre todo el conjunto E , por lo que en ocasiones, es necesario ampliarla, definiendo una relaci3n de equivalencia ajena a la anterior para cubrir todo el conjunto E as3 definido. Esta ampliaci3n de la relaci3n, se establece como "Est3 confundido con, o est3 sobre un mismo circuito con".

Gráfica Ordenada

Se dice que una gráfica está ordenada si es posible establecer niveles entre sus vértices. Esto es, que si un vértice pertenece al nivel k , cualquier vértice que le siga debe pertenecer a un nivel superior. Es obvio pensar que este tipo de gráficas no contienen circuitos, pues éstos no podrían ser ordenados en el sentido de niveles. Caeríamos en lo que se llama un círculo vicioso. Sin embargo si la gráfica contiene circuitos pueden establecerse clases de equivalencia (subgráficas fuertemente conexas máximas) y la gráfica se puede ordenar por clases, solventando así el problema de la ordenación de una gráfica con circuitos. Es de notar que toda gráfica ordenada se llama también gráfica secuencial.

1.4 METODO DE DESCOMPOSICION DE UNA GRAFICA EN SUBGRAFICAS FUERTEMENTE CONEXAS MAXIMAS (MALGRANGE, TOMESCU)

Habiendo definido los conceptos relacionados con gráficas, la visualización de este método resulta sencilla.

Sea $\widehat{\Gamma}\{x_i\}$ el cierre transitivo de x_i (conjunto de vértices que pueden alcanzarse desde x_i con caminos de longitud cualquiera) y $\widehat{\Gamma}^{-1}\{x_i\}$, el cierre transitivo inverso de x_i (conjunto de vértices desde los cuales puede alcanzarse x_i con caminos de longitud cualquiera). El conjunto $C(x_i) = \widehat{\Gamma}\{x_i\} \cap \widehat{\Gamma}^{-1}\{x_i\}$ define un conjunto de vértices que cumplen con la relación de equivalencia R "existe un camino de $x_i \in C(x_i)$

a $x_j \in C(x_i)$ y recíprocamente", lo que determina que $C(x_i)$ es una clase de equivalencia y una subgráfica fuertemente conexas.

El método consiste pues en tomar un vértice x_i arbitrario y en calcular $\widehat{C}\{x_i\}$, luego $\widetilde{C}\{x_i\}$ y por último $\widehat{C}\{x_i\} \cap \widetilde{C}\{x_i\}$ con lo que se obtiene la clase de x_i . En la gráfica correspondiente se suprimen los vértices pertenecientes a dicha clase y se empieza de nuevo con otro vértice arbitrariamente elegido y así sucesivamente hasta completar todos los vértices. Un ejemplo ilustrará totalmente lo afirmado.

EJEMPLO 1.6 Sea la gráfica cuya representación sagital se da a continuación:

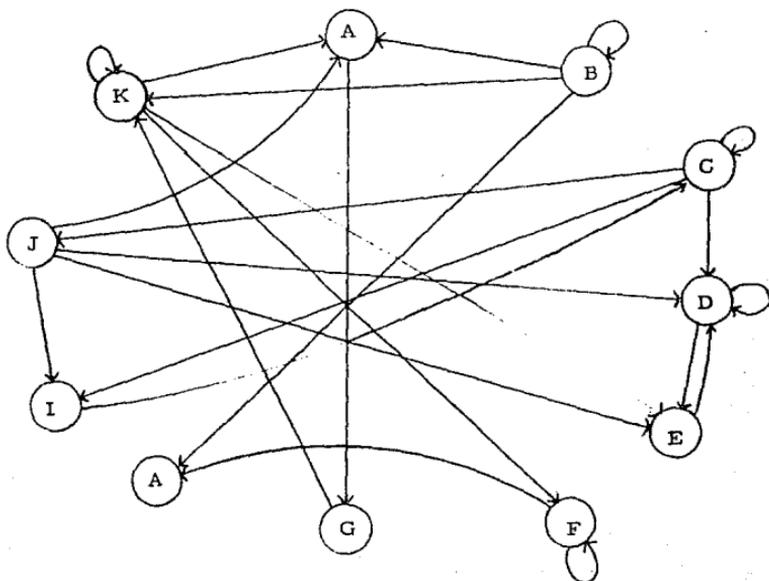


Fig. 1.2

Construyamos su matriz Booleana:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	\widehat{A}
A							1					0
B	1	1						1			1	
C			1	1					1	1		
D				1	1							4
E				1								3
F						1		1				3
G											1	1
H												4
I			1									
J	1			1	1				1			
K	1				1	1					1	2
\widehat{A}	0	1	2			2	3	1	1			

Fig. 1.3

La tediosa tarea de calcular los cierres transitivos tanto directo como inverso en la forma convenida en la definición de cierre, se simplifica de la siguiente forma; para el cierre transitivo directo la matriz Booleana se ataca por renglones, para el inverso por columnas:

- i) Selecciónese un vértice arbitrario x_i . Márquese con un 0 dicho vértice sobre un vector. Luego márchense con un 1, sobre el vector, los vértices que pueden alcanzarse a partir de x_i con caminos de longitud 1
- ii) Los vértices etiquetados o marcados en la etapa anterior deben ser investigados en la misma forma como fue investigado x_i . Es decir, si el vértice x_j fue

marcado al investigar x_i , al investigar x_j se deben marcar los vértices que se pueden alcanzar a partir de x_j con caminos de longitud 1. La marca que deben tener estos vértices debe ser igual a la marca que tiene x_j más 1.

- iii) Se procede como en el punto (ii) hasta que ningún vértice pueda ser etiquetado. En el caso en que se trate de etiquetar un vértice que ya ha sido marcado, la marca que ya estaba, debe ser respetada y la actual ignorada.

Es de observarse que las marcas consecutivas, van indicando los vértices que se alcanzan desde x_i con caminos de longitud igual a la marca. Este procedimiento se muestra en la figura 1.3. Los vértices marcados en cada uno de los vectores representan los cierres transitivos buscados.

$$\begin{aligned}
 \text{Se tiene: } & \widehat{A} = \{A, D, E, F, G, H, K\} \\
 & \text{y } \widehat{B} = \{A, B, C, G, I, J, K\} \\
 \Rightarrow & \widehat{A} \cap \widehat{B} = \{A, D, E, F, G, H, K\} \cap \\
 & \{A, B, C, G, I, J, K\} \\
 & = \{A, G, K\} = C(A)
 \end{aligned}$$

así la subgráfica $G' = \{A, G, K; \sqcap \{A, G, K\}\}$ es fuertemente conexa máxima

- iv) Se procede a eliminar los vértices obtenidos en la $C(x_1)$ encontrada y se reanuda el método en el punto (i) si todavía existen vértices que no pertenecen a ninguna de las - clases obtenidas.

Para el ejemplo resulta la siguiente matriz Booleana y aplicando de nuevo el procedimiento:

	B	C	D	E	F	H	I	J	\hat{B}
B	1						1		0
C		1	1					1	1
D			1	1					
E				1					
F							1	1	
H									1
I			1						
J				1	1			1	
$\hat{3}$	0								

Fig. 1.4

$$\begin{aligned} \text{así: } & \hat{B} = \{B, H\}, \quad \hat{B} = \{B\} \\ \Rightarrow & \hat{B} \cap \hat{B} = \{B, H\} \cap \{B\} = \{B\} = C(B) \end{aligned}$$

Obsérvese que el hecho de decir la clase de A ($C(A)$) no significa que no sea la clase de G o de K, ya que si se hubiera partido de G ó de K se hubiera obtenido lo mismo. Es decir la clase de A forma una clase de equivalencia de A y si se recuerda este concepto,

la clase de equivalencia de A es $\{x_i \in E/A \sim x_i\}$ donde \sim es la relación antes definida. Siguiendo se tiene:

	C	D	E	F	H	I	J	\widehat{F}
C	1	1				1	1	
D		1	1					
E		1						
F				1	1			0
H								1
I	1							
J	1	1				1		
\widehat{F}				0				

Fig. 1.5

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{\widehat{F}} &= \{F, H\} \quad \text{y} \quad \widehat{\widehat{\widehat{F}}} = \{F\} \\ \Rightarrow \widehat{\widehat{F}} \cap \widehat{\widehat{\widehat{F}}} &= \{F\} = C(F) \end{aligned}$$

Así podríamos seguir y se obtendrían las clases siguientes contando las ya obtenidas:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{A, G, K\} \\ C_2 &= \{B\} \\ C_3 &= \{F\} \\ C_4 &= \{D, E\} \\ C_5 &= \{C, I, J\} \\ C_6 &= \{H\} \end{aligned}$$

1.5 METODO PARA LA DETERMINACION DE LOS NIVELES DE - UNA GRAFICA SIN CIRCUITOS

Consideremos una gráfica $G=(E, \square)$ sin circuitos y definamos los

subconjuntos N_0, N_1, \dots, N_r tales que:

$$\begin{aligned} N_0 &= \left\{ x_i / \prod^{-1} \{ x_i \} = \emptyset \right\} \\ N_1 &= \left\{ x_i / \prod^{-1} \{ x_i \} \subset N_0 \right\} \\ N_2 &= \left\{ x_i / \prod^{-1} \{ x_i \} \subset N_0 \cup N_1 \right\} \\ &\vdots \\ N_r &= \left\{ x_i / \prod^{-1} \{ x_i \} \subset \bigcup_{k=0}^{r-1} N_k \right\} \end{aligned}$$

en donde r es el entero más pequeño tal que:

$$\prod^{-1} N_r = \emptyset$$

demostramos que la familia de subconjuntos de E , N_0, N_1, \dots, N_r forman una partición de E . Nuestra Hipótesis es, "dada una gráfica $G=(E, \prod^{-1})$, sin circuitos" y nuestra tesis se traduce en afirmar que " \prod^{-1} es una relación de equivalencia":

i) $x_i \sim x_j$, si $\prod^{-1} \{ x_i \} \subset \bigcup_{k=0}^s N_k$ donde \sim significa "está relacionado" y S es un término genérico

$$\text{y } \prod^{-1} \{ x_j \} \subset \bigcup_{k=0}^s N_k$$

$$\begin{aligned} \text{luego } \prod^{-1} \{ x_i \} \cup \prod^{-1} \{ x_j \} &= \prod^{-1} \{ x_i, x_j \} \\ &= \prod^{-1} \{ x_i \} \subset \left(\bigcup_{k=0}^s N_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^s N_k \right) \end{aligned}$$

así $\prod^{-1} \{ x_i \} \subset \bigcup_{k=0}^s N_k$ luego \prod^{-1} es reflexiva ya que $\forall x_i \in E$

x_i esta relacionada con sí mismo.

$$\text{ii) Si } x_i \sim x_j \implies \overset{-1}{\Gamma}\{x_i\} \in \bigcup_{k=0}^s N_k \text{ y } \overset{-1}{\Gamma}\{x_j\} \in \bigcup_{k=0}^s N_k$$

$$\begin{aligned} \text{pero } \overset{-1}{\Gamma}\{x_i\} \cup \overset{-1}{\Gamma}\{x_j\} &= \overset{-1}{\Gamma}\{x_i, x_j\} \in \left(\bigcup_{k=0}^s N_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^s N_k\right) \\ &= \overset{-1}{\Gamma}\{x_i, x_j\} \in \bigcup_{k=0}^s N_k \end{aligned}$$

pero la conmutatividad de x_i, x_j es válida, luego

$$\overset{-1}{\Gamma}\{x_j, x_i\} \in \bigcup_{k=0}^s N_k$$

y entonces regresamos el razonamiento:

$$\overset{-1}{\Gamma}\{x_j, x_i\} = \overset{-1}{\Gamma}\{x_j\} \cup \overset{-1}{\Gamma}\{x_i\} \in \bigcup_{k=0}^s N_k$$

luego $x_j \sim x_i$, la relación $\overset{-1}{\Gamma}$ es simétrica

$$\text{iii) Si } x_i \sim x_j \implies \overset{-1}{\Gamma}\{x_i, x_j\} \in \bigcup_{k=0}^s N_k$$

$$\text{Si } x_j \sim x_i \implies \overset{-1}{\Gamma}\{x_j, x_i\} \in \bigcup_{k=0}^s N_k$$

$$\implies \overset{-1}{\Gamma}\{x_i, x_j, x_i\} \in \bigcup_{k=0}^s N_k$$

$$\text{luego } x_i \sim x_i \text{ ya que } \overset{-1}{\Gamma}\{x_j\} \cup \overset{-1}{\Gamma}\{x_i, x_i\} \in \bigcup_{k=0}^s N_k$$

luego $\overset{-1}{\Gamma}$ es transitiva y por tanto queda demostrado que

$\overset{-1}{\Gamma}$ es una relación de equivalencia, lo cual es condición necesaria

y suficiente para afirmar que los conjuntos $N_k, k=0, 1, \dots, r$ son clases

de equivalencia y por consiguiente particionan a E . Un argumento simé

trico puede establecerse para demostrar que $\overset{-1}{\Gamma}$ también es una rela-

ción de equivalencia, bajo las hipótesis correspondientes

Además las clases de equivalencia N_k , $k=0, 1, \dots, r$ se encuentran estrictamente ordenadas por la relación:

$$N_k < N_{k'} \iff k < k'$$

Lo anterior puede enunciarse de manera informal pero más fácilmente comprensible; nos proponemos descomponer el conjunto de vértices de una gráfica sin circuitos en subconjuntos disjuntos no vacíos y ordenados de tal modo que si un vértice pertenece a uno de los subconjuntos al que le corresponde el subíndice k , todo vértice que le sigue debe pertenecer a otro subconjunto con un subíndice superior a k (Recuérdese - que no hay circuitos). Los subconjuntos de la partición se denominan - "niveles".

El método que se enuncia a continuación (DEMOUCRON) nos permite obtener los niveles de la gráfica. Lógicamente con todo lo anterior se ha justificado el método:

- i) Construyamos la matriz Booleana B , de la gráfica
- ii) Formemos un vector Λ_0 en el que aparece la suma de los renglones de la matriz. Es decir, si fijamos la columna 1, la suma que aparece en el primer elemento del vector es $\sum_{i=1}^n b_{i1}$ donde $b_{i1} \in B$ matriz Booleana y n su orden. Así también para la columna 2, 3, ..., n .

- iii) Los elementos del vector \wedge_0 que son iguales a cero determinan los vértices que pertenecen a N_0 , es decir, los vértices que no se encuentran precedidos por ningún otro vértice.
- iv) Supongamos que $x_i, x_j \in N_0$, entonces réstense de \wedge_0 los renglones de x_i y x_j de la matriz Booleana, para obtener \wedge_1 . Los elementos que son iguales a cero en el vector \wedge_1 constituyen el conjunto de vértices N_1 que son precedidos por N_0 . Repítase este paso iterativamente, hasta agotar todos los vértices y obtener N_r .

EJEMPLO 1.7

Sea la gráfica $G = (E, \Gamma)$ cuya representación sagital se muestra a continuación:

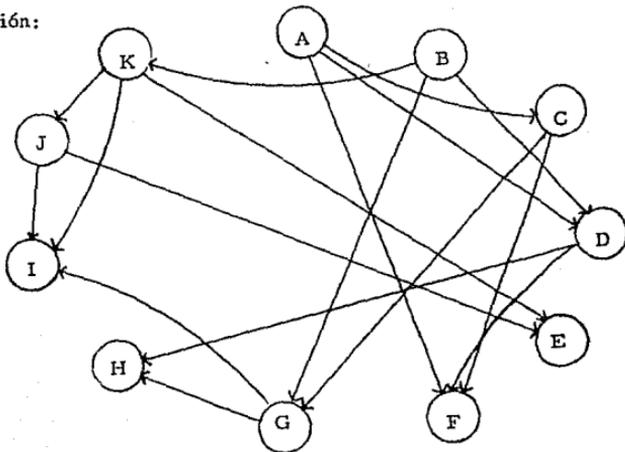


Fig. 1.6

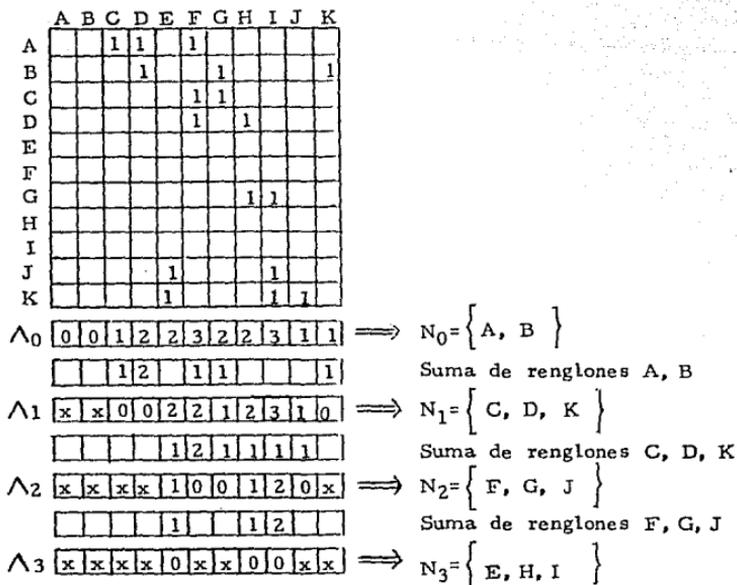


Fig. 1.7

Ahora podemos ilustrar la gráfica ordenada en la Fig. 1.8

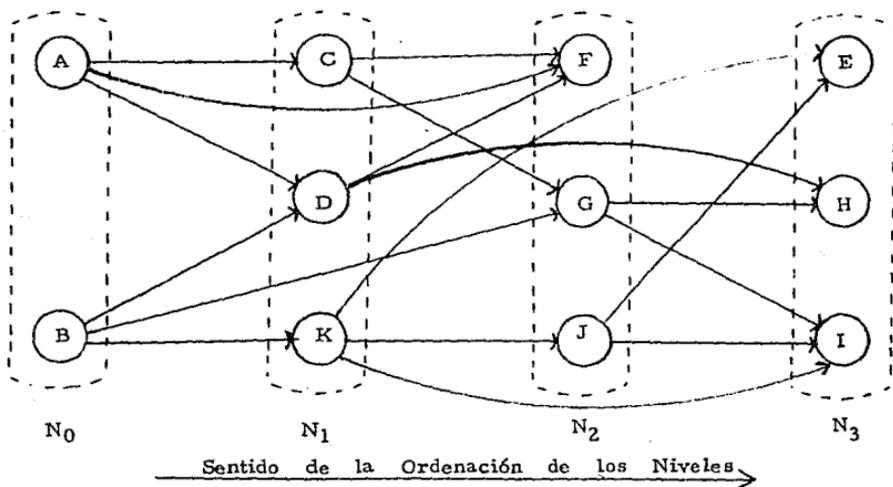


Fig. 1.8

Obsérvese el sentido de la ordenación. Generalmente la ordenación no es única, puesto que se puede definir a partir de los elementos mayores del conjunto ordenado, en lugar de partir de los menores ó incluso ordenar en un sentido descendente y en sentido contrario a partir de un vértice elegido arbitrariamente.

En este punto es fácil comprender la ordenación de una gráfica que contenga circuitos. Se debe hacer lo siguiente: Dada $G = (E, \Gamma)$

- i) Determinar las clases de equivalencia (Subgráficas fuertemente conexas máximas) utilizando el método debido a TOMESCU
- ii) Considerar cada clase como vértice
- iii) Con estos nuevos vértices, fórmese su matriz Booleana y llévase a cabo la ordenación de la gráfica con el criterio de ordenación que más convenga

Particularmente, nos interesa una ordenación a partir de los elementos mayores. El siguiente ejemplo ilustra los pasos enunciados anteriormente, conjuntamente con el criterio de ordenación de interés.

EJEMPLO 1.8

Sea la gráfica $G = (E, \Gamma)$ representada en la Fig. 1.9

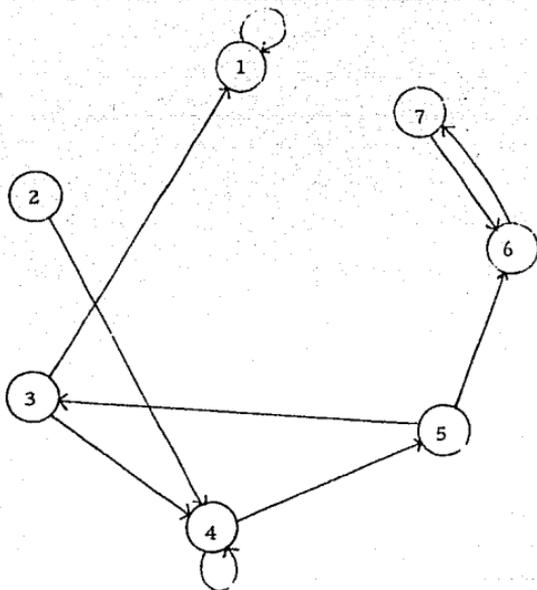


Fig. 1.9

i) Algoritmo de Tomescu

Formamos la matriz Booleana de la gráfica y aplicamos la primera iteración.

	1	2	3	4	5	6	7	\hat{C}_1
1	1							0
2				1				
3	1		1					
4				1	1			
5			1			1		
6							1	
7					1			

$$\Rightarrow \hat{C}_1 \cap \hat{C}_1 = \{1\}$$

$$\Rightarrow C_1 = \{1\}$$

$$\hat{C}_1 = [0 \ 4 \ 1 \ 3 \ 2 \ \]$$

La segunda iteración

	2	3	4	5	6	7	$\hat{C}_1\{3\}$
2			1				0
3			1				1
4			1	1			2
5		1			1		3
6						1	4
7					1		

$$\Rightarrow \hat{C}_2 = \{3, 4, 5\}$$

$$\hat{C}_1\{3\} \cap \hat{C}_2\{3\} = \{3, 4, 5\}$$

$$\hat{C}_1\{3\} \cap \hat{C}_2\{3\} = \{3, 4, 5\}$$

Tercera Iteración

	2	6	7	$\hat{C}_1\{7\}$
2				
6			1	1
7		1		0

$$\Rightarrow \hat{C}_3 = \{6, 7\}$$

$$\hat{C}_1\{7\} \cap \hat{C}_2\{7\} = \{6, 7\}$$

$$\hat{C}_1\{7\} \cap \hat{C}_2\{7\} = \{6, 7\}$$

y por lo tanto $C_4 = \{2\}$

Hemos determinado cuatro subgráficas fuertemente conexas máximas o clases de equivalencia.

ii) Consideremos que cada clase constituye un vértice; esto se muestra en la Fig. 1.10

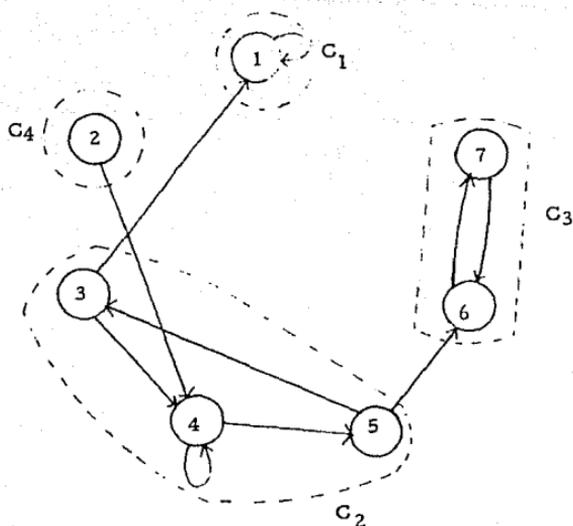
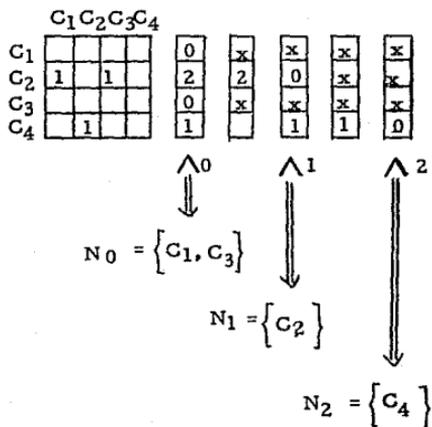


Fig. 1.10

- iii) Formemos la nueva matriz Booleana y apliquemos el algoritmo debido a Demoucron con el criterio de ordenación de los elementos mayores:



Así hemos ordenado las clases a partir de los elementos mayores.
 Dibujemos la gráfica y veamos como luce en la Fig. 1.11 al mismo tiempo que establecemos las siguientes definiciones:

Clase Cerrada. - Se llama clase cerrada de una gráfica $G=(E, \Gamma)$ a toda subgráfica fuertemente conexa máxima de G ubicada en el nivel "0" de acuerdo con el criterio de ordenación a partir de los elementos mayores.

Para el ejemplo citado las clases 1 y 3 son clases cerradas

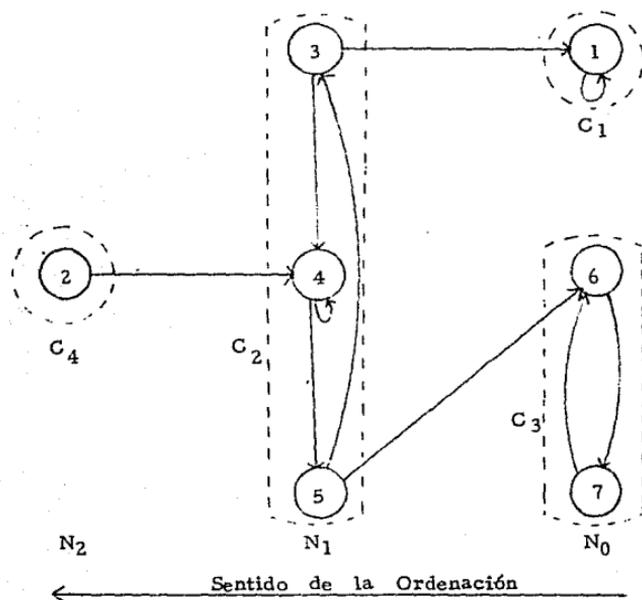


Fig. 1.11

Clase Abierta. - Una clase de una gráfica $G = (E, \Gamma)$ se dice abierta si no es cerrada, es decir, si se encuentra en cualquier nivel diferente del nivel "0"

1.6 GRAFICAS PONDERADAS

Sea una gráfica $G = (E, U)$. Al asociar números reales a los vértices de la gráfica, se dice que tenemos una gráfica pesada o ponderada en los vértices. Por otro lado, si los números reales son asociados a los arcos de la gráfica, tenemos una gráfica ponderada en sus arcos, en particular, son estos últimos los que nos interesan

Función Numérica sobre los arcos de una gráfica

Sea una gráfica $G = (E, U)$, si a cada arco $(x_i, x_j) \in U$, se le asocia el número $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ (Conjunto de Números Reales) entonces, se ha definido la función $f((x_i, x_j)) = \alpha_{ij}$ sobre los arcos de la gráfica.

Valor de un Camino sobre los Arcos de una Gráfica

Consideremos una Ley de Composición Binaria (*) interna en \mathbb{R} y asociativa. Si $v_{ij} = f(x_i, x_j)$, llamaremos valor del camino $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ir})$ por los arcos al número $v_{i1 i2} * v_{i2 i3} * v_{i3 i4} * \dots * v_{ir-1 ir}$

Este valor lo denotaremos:

$$M(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ir}) = v_{i1 i2} * v_{i2 i3} * \dots * v_{ir-1, ir}$$

Camino de Valor Mínimo

Sea P una propiedad que permite definir convenientemente un subconjunto de caminos en la gráfica $G = (E, U)$; llamemos a este subconjunto P . Si P está ordenado por los valores numéricos de cada uno de sus elementos y si existe un camino mínimo que corresponde al menor va los de él, se le llama camino de valor mínimo por los arcos.

1.7 METODO DE DIJKSTRA

Existen varios métodos para calcular caminos de valor mínimo, tanto para gráficas dirigidas como no dirigidas. Se ha seleccionado el método de DIJKSTRA, por su conveniente aplicación en cadenas de Markov periódicas. Esta conveniencia estriba, en que el proceso que demanda dicho método va proporcionando inmediatamente la información requerida y la adicional que pudiera proporcionar se puede eliminar. Esto, sería más claro, si se comparara este método con otros de la misma finalidad. Otra ventaja que ofrece el método de DIJKSTRA es la facili dad de programación debido a su sencillez.

Descripción del Método: Sea una gráfica $G = (E, \Gamma)$, selecciónese un vértice $S \in E$ deseado, en el sentido, de que a partir de este vértice se quieren conocer los valores de los caminos a los restantes vértices.

i) Hágase $M(S)=0$ permanentemente. Etiquétense los restantes vértices con $M(x_i)=\infty$ y considérense temporales dichas etiquetas. Hágase $P=S$

ii) Para todo vértice $x_i \in \Gamma \setminus \{P\}$ y con etiquetas temporales, actualícense éstas del modo siguiente:

$$M(P, x_i) = \text{mínimo} \left\{ M(x_i), M(P) + v_{Pi} \right\}$$

Obsérvese que la operación o ley de composición binaria utilizada es la suma

iii) Para todos los vértices con etiqueta temporal, encontrar aquel x_{i^*} tal que $M(x_{i^*}) = \text{mínimo} \left\{ M(x_i) \right\}$

iv) Fíjese como permanente la etiqueta de x_{i^*} y hacer $P=x_{i^*}$

v) Si todos los vértices tienen etiquetas permanentes o ya no es posible investigar ningún otro vértice, el algoritmo finaliza, en caso contrario pasar al paso (ii)

EJEMPLO 1.9

Sea una gráfica $G=(E, \Gamma)$ ponderada, cuya representación sagital y ponderaciones se muestran en la figura 1.9

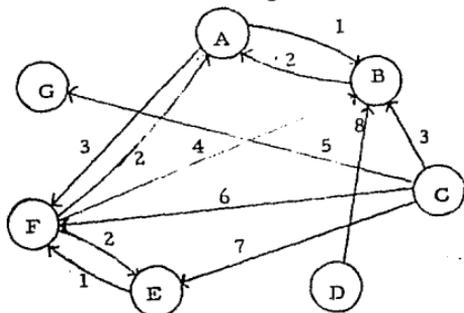
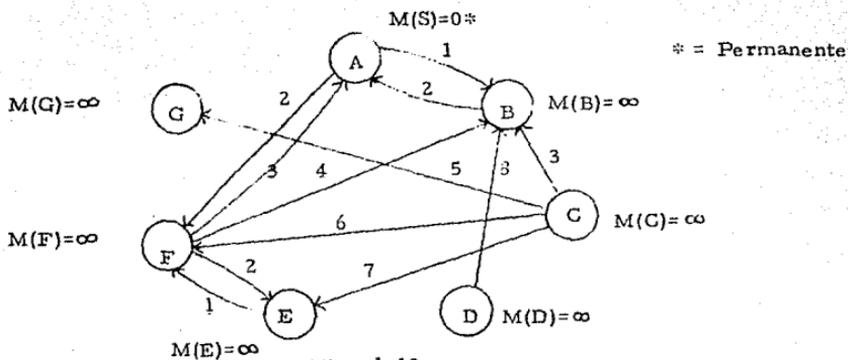
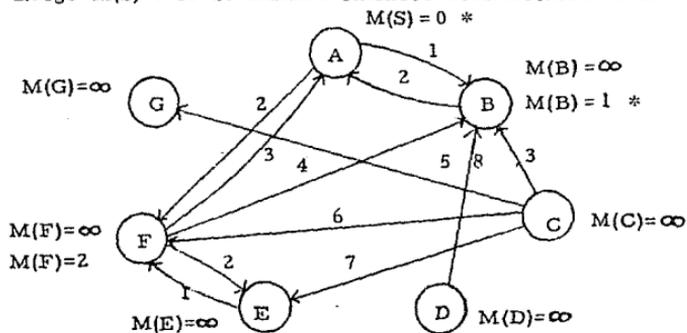


Fig. 1.12

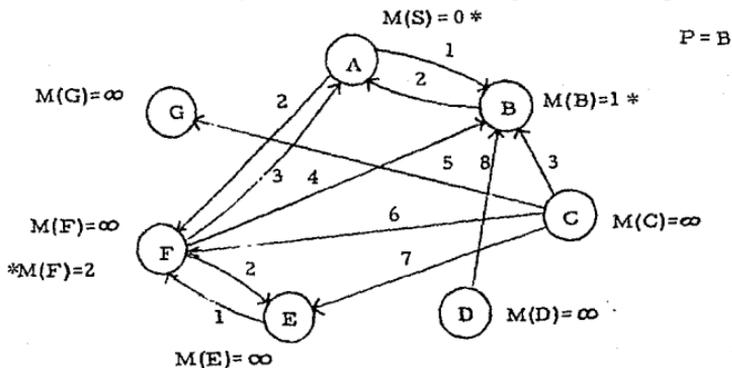
Seleccionamos $S=A$. Entonces $P=A$ y etiquetemos en la forma indicada



Luego $M(S)=0$ es el mínimo entonces actualicemos marcas:



Seleccionemos luego la menor marca temporal; corresponde al vértice B



Del vértice B no existen caminos hacia vértices con marca temporal, luego seleccionemos el vértice de marca menor temporal, el cuál corresponde al vértice F, entonces $P=F$

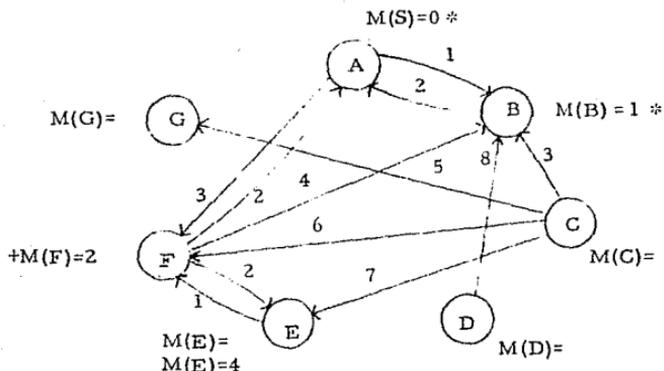


Fig. 1.15

Ahora seleccionemos el vértice E y lo etiquetamos permanentemente

$P=E$

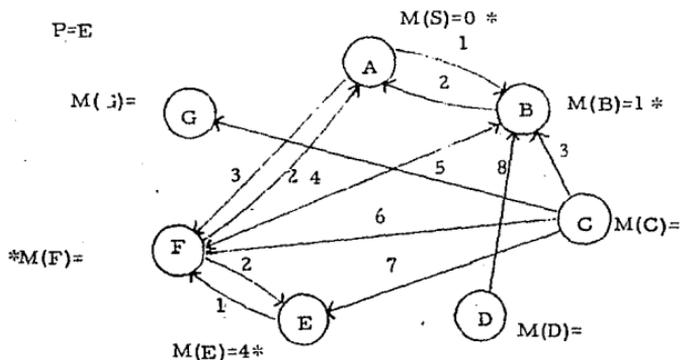


Fig. 1.17

Se puede representar en el siguiente vector, los valores de los caminos del vértice A a los restantes. La marca infinito (∞) significa la no existencia de un camino y por consiguiente carencia de valor al vértice en cuestión.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	∞	∞	4	2	∞

En la misma forma pueden calcularse los valores de los caminos de valor mínimo a partir de cualquier otro vértice.

Abandonaremos en este punto la teoría de gráficas, ya que con lo visto hasta aquí es suficiente para lo demandado por la aplicación a cadenas Markovianas.

CADENAS DE MARKOV FINITAS

2.1 INTRODUCCION

El mundo al que nos enfrentamos, nos somete a la comprensión de múltiples fenómenos. La comprensión de algunos de ellos, no es posible todo el tiempo, de donde la Teoría de la Probabilidad hace su aparición para explicarlos. El azar es una palabra que fue inventada con el objeto de tipificar situaciones que están fuera de nuestra mente o de nuestro completo dominio. De aquí que el azar tienda a desaparecer día a día y por consiguiente el uso de la Teoría de la Probabilidad, teniendo al humano, en su incesante progreso, la labor de crear un mundo determinístico. Hoy la Teoría de la Probabilidad se entiende como el estudio de modelos matemáticos de fenómenos aleatorios.

Desde el punto de vista práctico, la Teoría de la Probabilidad, se concretaba a identificar la correspondencia entre la situación real en cuestión, sujeta al azar y un modelo matemático que se traducía en una variable aleatoria y su función de densidad o bien su distribución de probabilidad, según, si esta variable era discreta o continua.

Sin embargo, esta identificación era de carácter estático, lo que -

originó la inquietud de conocer el comportamiento de esa variable aleatoria a través del tiempo. Así el tiempo fue el parámetro que vino a originar el carácter dinámico de la Teoría de la Probabilidad, carácter que se traduce en los hoy denominados Procesos Estocásticos. Cabe aclarar, que este parámetro tiempo, fue el inicial, más no el único que puede lograr la índole cambiante de la Teoría de la Probabilidad.

Dado que las Cadenas Markovianas constituyen un tipo particular de Proceso Estocástico, es necesario ubicarlas dentro de este contexto, por lo que el inicio de este capítulo tratará algunos conceptos de Procesos Estocásticos necesarios para llegar a las Cadenas de Markov. El resto del capítulo se dedicará a examinar las características de una Cadena Markoviana mostrando, en donde corresponda, su vinculación con la Teoría de Gráficas.

2.2 DEFINICION DE PROCESO ESTOCASTICO

Un proceso estocástico se define generalmente como un conjunto $\{x(t), t \in T\}$ de variables aleatorias, donde T es un conjunto denominado índice o indicador.

Los valores asumidos por $x(t)$ son llamados estados y el conjunto de posibles valores es llamado espacio de estados. Denotemos este espacio de estados por E .

De acuerdo con la definición de Procesos Estocásticos, éstos se clasifican tomando en consideración su espacio de estados y su conjunto indica

donde en:

- i) Procesos estocásticos con espacio de estados E y conjunto indicador T discretos
- ii) Procesos estocásticos con espacio de estados E discreto y conjunto indicador T continuo
- iii) Procesos estocásticos con espacio de estados E continuo y conjunto indicador T discreto
- iv) Procesos estocásticos con espacio de estados E y conjunto indicador T continuos

Es evidente que tanto el espacio de estados, como el conjunto indicador pueden ser contables o continuos.

En particular nos interesará el caso en donde E y T son discretos siendo E finito y T numerable.

Es necesario que el concepto de Proceso Estocástico quede bien definido, razón ésta, por la cual profundizaremos más: Al realizar un experimento se genera un espacio muestral Ω . Sea $w \in \Omega$, entonces es posible asociar a cada w , una función medible real o compleja de parámetro $t \in T$, donde T es el conjunto indicador, así:

$$x(t, w) \quad , \quad (w \text{ generalmente se omite por facilidad de notación})$$

define un proceso estocástico.

Por consiguiente $x(t)$ puede interpretarse en cuatro formas distintas:

- i) Como una familia de funciones del parámetro t .
Esto sucede cuando w varía sobre Ω y t varía sobre T
- ii) Como una función del tiempo. Si t varía sobre T y $w \in \Omega$, se fija
- iii) Una variable aleatoria. Si se fija t y w varía sobre Ω .
- iv) Un valor determinístico. Esto acontece si t y w son fijadas en valores determinados.

Descripción de un Proceso Estocástico

Como se afirmó antes, para un valor dado del parámetro t , $x(t)$ es simplemente una variable aleatoria y su correspondiente función de distribución puede ser obtenida. Sin embargo, cuando t varía sobre el conjunto indicador T , el proceso no es descrito por la simple función de distribución para un valor fijo de $t \in T$. Para poder describir al proceso completamente, necesitamos la función de distribución conjunta de la familia de variables aleatorias $\{x(t), t \in T\}$. Para propósitos prácticos es adecuado considerar que el proceso estocástico se puede describir mediante la función de distribución

de un cierto número finito de variables aleatorias. Por consiguiente especificando la Ley de Probabilidad conjunta de las n variables $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$, tal que $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ y para los reales $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ por:

$$F_{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P \left[x(t_1) \leq x_1, x(t_2) \leq x_2, \dots, x(t_n) \leq x_n \right]$$

se describe el proceso en forma completa.

Existen procesos estocásticos con características especiales, para los que sólo es necesario especificar la relación de dependencia entre las variables aleatorias. Algunos de estos procesos son: Procesos Estacionarios en el sentido estricto, Procesos Estacionarios de orden k , Estacionarios en el sentido amplio y algunas otras formas de estacionariedad, por otro lado también están los Procesos de Incrementos independientes, Martingalas, Procesos Markovianos, etc.

Habiendo especificado lo anterior, pasemos a la siguiente sección, en donde ubicaremos las cadenas Markovianas dentro del marco de procesos Markovianos.

2.3 PROCESOS MARKOVIANOS

En forma general un proceso es Markoviano, si para cualquier grupo de n valores t_1, t_2, \dots, t_n del parámetro t con $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

la función de distribución condicional de $x(t_n)$ dados los valores $x(t_1), x(t_2) \dots x(t_{n-1})$ depende solamente de $x(t_{n-1})$, es decir:

$$P \left[x(t_n) \leq x_n / x(t_1)=x_1, x(t_2)=x_2, \dots, x(t_{n-1})=x_{n-1} \right] = P \left[x(t_n) \leq x_n / x(t_{n-1})=x_{n-1} \right]$$

En una forma menos estricta, pero más comprensible, esta propiedad puede enunciarse como: Dado el estado presente del proceso, las probabilidades referentes a sus estados futuros, no dependen de sus estados pasados.

Los procesos de Markov se clasifican de acuerdo con:

- i) La naturaleza del conjunto índice del proceso, ya que este puede ser discreto o continuo
- ii) La naturaleza del espacio de estados del proceso. Al igual que el punto (i) el espacio de estados puede ser discreto o continuo.

Esto puede quedar plasmado en la siguiente tabla:

		ESPACIO DE ESTADOS	
		DISCRETO	CONTINUO
NATURALEZA DEL PARAMETRO	DISCRETO	Cadenas de Markov de Parámetro Discreto	Proceso de Markov de Parámetro Continuo
	CONTINUO	Cadena de Markov de Parámetro Continuo	Proceso de Markov con Parámetro Continuo

De la tabla deducimos que un proceso de Markov con espacio de estados discreto es una CADENA DE MARKOV.

Un proceso de Markov queda representado por una función de probabilidad de transición representada con frecuencia por $P(A, t/x, t_1)$ que representa la probabilidad condicional de que un estado del sistema pertenezca en el instante t al conjunto ACE, dado que en el instante t_1 ($t_1 < t$), el sistema se encuentra en el estado x .

2.4 CADENAS DE MARKOV FINITAS Y HOMOGENEAS DE PARAMETRO DISCRETO

El punto 2.3 ha establecido la definición de un proceso Markoviano, su clasificación atendiendo a un conjunto indicador T y a su espacio de estados E , desprendiéndose de ello, que un proceso Markoviano cuyo espacio de estados es discreto, constituye una Cadena Markoviana. Pues bien, este espacio de estados discreto puede ser numerable o finito, sin embargo, trataremos sólo el caso referente a espacio de estados finito, por lo que consideraremos Cadenas de Markov finitas.

Por otro lado, se dice que una Cadena Markoviana es homogénea (En general un proceso Markoviano) si tiene probabilidades de transición estacionarias, es decir si $P(A, t/x, t_0)$ sólo depende de t y t_0 a través de la diferencia $t-t_0$.

Existen cadenas Markovianas con parámetro discreto y continuo $t \in T$, siendo de nuestro interés, las cadenas de parámetro discreto. El conjunto indicador T se hará corresponder en lo que se sigue y por facilidad de notación, con el conjunto \mathbb{N} de números enteros no negativos y los elementos de ese conjunto por n . Denotemos la probabilidad de transición por:

$$P \left[x_n = j / x_m = i \right] = p_{ij}(m, n), \quad i, j \in E \text{ y } m, n \in \mathbb{N}$$

y cuando la cadena de que se trate sea homogénea, sus probabilidades de transición dependerán de $n-m (=k)$ y se denotará

$$P \left[x_n = j / x_m = i \right] = p_{ij}(k) \quad i, j \in E \text{ y } k \in \mathbb{N}$$

Estas probabilidades de transición son manipuladas más fácilmente por matrices, donde los renglones representan el estado en el cuál se encuentra la cadena y las columnas, los estados a donde puede pasar la cadena. Estas matrices deben cumplir con:

$$\sum_j p_{ij}(m, n) = 1, \quad \forall i, j \in E \text{ y } m, n \in \mathbb{N}$$

y

$$p_{ij}(m, n) \geq 0 \quad \forall i, j$$

Una cadena de Markov queda totalmente definida probabilísticamente

por las probabilidades siguientes:

- i) La distribución de probabilidad en cualquier instante del proceso:

$$p_j(n) = P[x_n = j], \quad j \in E \quad \text{y} \quad n \in \mathbb{N}$$

comúnmente llamadas, probabilidades de estado

- ii) Las probabilidades de transición

$$p_{ij}(m, n) = P[x_n = j / x_m = i], \quad i, j \in E, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

ya que para cualquier entero q y cualquier secuencia de tiempos n_1, n_2, \dots, n_q y estados j_1, j_2, \dots, j_q se obtiene por el teorema de multiplicación de probabilidades:

$$P[x_{n_1} = j_1, x_{n_2} = j_2, \dots, x_{n_q} = j_q] = p_{j_1}(n_1) p_{j_1 j_2}(n_1, n_2) p_{j_1 j_2 j_3}(n_1, n_2, n_3) \dots$$

$$p_{j_1 j_2 \dots j_q - 1 j_q}(n_1, n_2, \dots, n_{q-1}, n_q)$$

pero por la propiedad markoviana

$$= p_{j_1}(n_1) p_{j_1 j_2}(n_1, n_2) p_{j_2 j_3}(n_2, n_3) \dots$$

$$p_{j_{q-1} j_q}(n_{q-1}, n_q)$$

Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Esta ecuación de fundamental importancia en procesos Markovianos fue primero, aparentemente escrita por Louis Bachelier en "Theory of Speculation" Ann. Sci. Ecole Norm Sup (3) No. 1018 (Paris, Gauthier Villars, 1900). Para cualquier tiempo $u > u > m$ y para cualesquier estados k, j, i , la ecuación proporciona la probabilidad de que la cadena se mueva

al estado j en el paso n , dado que la cadena se encuentra, en el estado i en el paso m :

$$P_{ij}(m, n) = \sum_{\forall k \in E} P_{ik}(m, u) P_{kj}(u, n) \quad (2.1)$$

Para demostrar la validez de la ecuación de Chapman-Kolmogorov utilizamos la propiedad Markoviana y el Teorema de la probabilidad

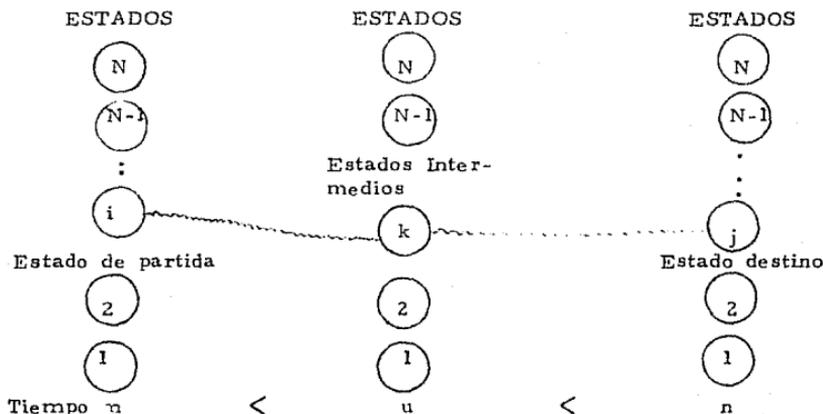


Fig. 2.1

total. Para hacer más plausible la ilustración de la demostración consideremos la Fig. 2.1, en donde hemos establecido la cardinalidad del conjunto E como N .

Es cierto que:

$$\begin{aligned}
 P\left[x_n=j/x_m=i\right] &= P\left[x_n=j/x_m=i, x_u=1\right] P\left[x_u=1/x_m=i\right] + P\left[x_n=j/x_m=i, x_u=2\right] \\
 &\quad P\left[x_u=2/x_m=i\right] + \\
 &\quad + P\left[x_n=j/x_m=i, x_u=3\right] P\left[x_u=3/x_m=i\right] + \dots \\
 &\quad + P\left[x_n=j/x_m=i, x_u=k\right] P\left[x_u=k/x_m=i\right] + \dots \\
 &\quad + P\left[x_n=j/x_m=i, x_u=N\right] P\left[x_u=N/x_m=i\right]
 \end{aligned}$$

pero debido a la propiedad Markoviana, lo anterior se transforma en:

$$\begin{aligned}
 P\left[x_n=j/x_m=i\right] &= P\left[x_n=j/x_u=1\right] P\left[x_u=1/x_m=i\right] + P\left[x_n=j/x_u=2\right] P\left[x_u=2/x_m=i\right] \\
 &\quad + \dots + P\left[x_n=j/x_u=k\right] P\left[x_u=k/x_m=i\right] + \dots \\
 &\quad + P\left[x_n=j/x_u=N\right] P\left[x_u=N/x_m=i\right]
 \end{aligned}$$

entonces volviendo a la notación anterior:

$$\begin{aligned}
 p_{ij}(m,n) &= p_{1j}(u,n) p_{i1}(m,u) + p_{2j}(u,n) p_{i2}(m,u) + \dots + p_{kj}(u,n) p_{ik}(m,u) + \\
 &\quad \dots + p_{Nj}(u,n) p_{iN}(m,u) \\
 &= \sum p_{ik}(m,u) p_{kj}(u,n) \quad \text{l. q. q. d.} \\
 &\quad \forall k \in E
 \end{aligned}$$

Expresando esto matricialmente; Sea $P(m,n)$ la matriz de probabilidades de transición del paso m al paso n , entonces:

$$P(m,n) = P(m,u) P(u,n)$$

Queda pues, establecido que para conocer $P(m,n)$, $m < n$, basta con conocer la secuencia de matrices de transición. En particular si la cadena es homogénea:

$$P(n) = P(1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ para } n \geq 1$$

Probabilidades de Estado

En muchas ocasiones estamos interesados acerca de la probabilidad de que un cierto estado sea ocupado después de n transiciones, sin incluir en nuestra notación el estado en el cuál el proceso comenzó. Llamamos a tales probabilidades, probabilidades de estado y las denotamos por:

$$P_j(n) = P[x_n = j]$$

Para su obtención es necesario, disponer, de la distribución de probabilidad inicial incondicional y la matriz de transición de n pasos.

Para el cálculo de estas probabilidades, de nuevo, el Teorema de Probabilidad total es de utilidad ya que:

$$P_j(n) = \sum_{\forall k \in E} P_k(0) P_{kj}(0, n) \quad \forall j \in E$$

lo que matricialmente se expresa:

$$p^T(n) = p^T(0) P(0, n), \quad p(n) \text{ es el vector columna de probabilidades de estado en el paso } n \text{ y } T \text{ significa transpuesta}$$

En particular, si la cadena es homogénea:

$$p^T(n) = p^T(0) P(1)^n$$

Es interesante conocer el comportamiento de la distribución de probabilidad incondicional cuando n tiende a infinito. Este tópico será analizado en la sección de Probabilidades Estacionarias.

Se señala que en lo sucesivo sólo se tratarán cadenas de Markov Finitas y Homogéneas.

2.5 CLASIFICACION DE ESTADOS

La causa de la clasificación de estados sólo se comprenderá totalmente, cuando se finalice este trabajo. Es decir, ésta, es la parte principal sobre la que gira todo el análisis de las cadenas Markovianas. Trataremos primero la clasificación tradicional que en el estudio de Cadenas de Markov se ha venido desarrollando.

Por otro lado la clasificación de estados mediante la Teoría de Gráficas ya ha sido establecida implícitamente y sólo restará mostrar la equivalencia entre ambas clasificaciones. Nótese que es en esta parte donde la Teoría de Gráficas hace su aparición.

Dada la representación de una Cadena de Markov finita y homogénea en forma matricial, es sencillo ver la correspondencia con las representaciones de una gráfica y en particular con la representación Booleana que será de nuestro interés.

Así, puntualizando, una cadena de Markov puede representarse gráficamente mediante una gráfica ponderada, en donde la función de arco asignará probabilidades a los arcos. Si la matriz de transición es de orden r , entonces, se tienen r^2 transiciones, de las cuáles existen -

transiciones posibles tales que $p_{ij}(n) > 0$ y transiciones imposibles donde $p_{ij}(n) = 0$ para alguna n (Obsérvese que la gráfica asociada a la cadena es para una n fija y póngase atención en la afirmación de la existencia de transiciones posibles e imposibles). Sólo es necesario dibujar los arcos de la gráfica con probabilidad positiva. Considérese el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.1

Sea la cadena Markoviana x_n con matriz de transición:

$$P(1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .5 & .2 & .3 & 0 \\ 0 & .1 & .5 & .4 \\ .5 & 0 & .5 & 0 \\ .3 & 0 & .3 & .4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

de esta matriz de transición podemos inferir la siguiente gráfica $G=(E, \Gamma)$:

$$E = \{1, 2, 3, 4\} \text{ y } \Gamma\{1\} = \{1, 2, 3\}, \Gamma\{2\} = \{2, 3, 4\}, \\ \Gamma\{3\} = \{1, 3\} \\ \Gamma\{4\} = \{1, 3, 4\}$$

y la siguiente función de arco cuyo dominio es;

$$U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\} :$$

$$\begin{array}{llll} f(1, 1) = .5 & f(2, 2) = .1 & f(3, 1) = .5 & f(4, 3) = .3 \\ f(1, 2) = .2 & f(2, 3) = .5 & f(3, 3) = .5 & f(4, 4) = .4 \\ f(1, 3) = .3 & f(2, 4) = .4 & f(4, 1) = .3 & \end{array}$$

así la gráfica ponderada resulta como la de la Fig. 2.2

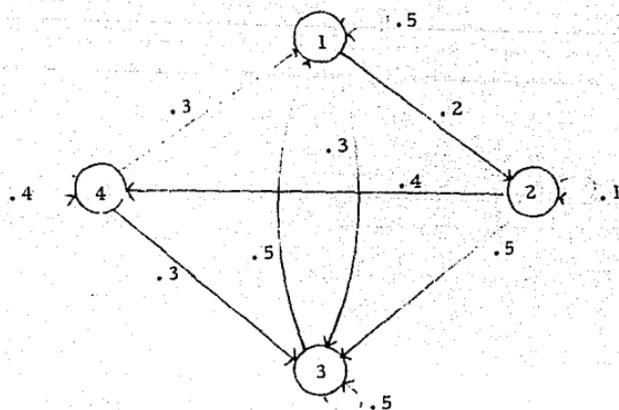


Fig. 2.2

Hemos mostrado la manera en que se plantea la gráfica asociada a una Cadena de Markov.

Por otro lado vayamos a la clasificación tradicional de estados motivada por preguntas tales como: ¿Hay estados que se dejan con la certeza de volver a ellos? o ¿Existen estados que se dejan con sólo una ligera esperanza de volver o incluso sin esperanza de vuelta, durante la vida de la cadena?

Sean dos estados $i, j \in E$. Afirmamos que j puede ser visitado a partir del estado i , si existe un entero $n \geq 1$, tal que $p_{ij}(n) > 0$, es decir que existe una probabilidad positiva de visitar j a partir de i en algún paso n . Así para $p_{ij}(n) > 0$ podemos establecer la relación "es accesible desde" por lo que $i \sim j$, si j es accesible desde i (Recordemos que \sim , significa relacionado)

Por otro lado, si adicionalmente se cumple que existe una m , tal que $m \geq 1$ para la que $p_{ji}(m) > 0$, entonces i es accesible desde j . Por lo tanto si $i \sim j$ y $j \sim i$ podemos formar una nueva relación que contenga lo anterior como; "comunica con" que significaría "es accesible con... y recíprocamente". Podemos demostrar que la nueva relación así establecida es una relación de equivalencia:

Denotemos la relación "comunica con" por el símbolo \longleftrightarrow .

Mostremos que \longleftrightarrow es simétrica:

Si para $i, j \in E$ se tiene que $i \longleftrightarrow j \implies j \longleftrightarrow i$, ya que la propia relación incluye en su enunciado formal "comunica con" la simetría, de aquí que \longleftrightarrow es simétrica.

Mostremos que es transitiva

Si $i \longleftrightarrow j$ y $j \longleftrightarrow k \implies \exists m, n \in \mathbb{N}$, tal que $p_{ij}(m) > 0$ y $p_{jk}(n) > 0$; por la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ik}(m+n) = \sum_{\forall l \in E} p_{il}(m) p_{lk}(n)$$

pero el producto $p_{ij}(m) p_{jk}(n) > 0$, es sólo un elemento de la sumatoria por lo que:

$$p_{ik}(m+n) = \sum_{\forall l \in E} p_{il}(m) p_{lk}(n) \geq p_{ij}(m) p_{jk}(n) > 0$$

luego $p_{ik}(m+n) > 0 \implies i \longleftrightarrow k$ luego \longleftrightarrow es transitiva

Por último mostremos la reflexividad:

Dado que \longleftrightarrow es transitiva y simétrica se tiene que:

Si $i \longleftrightarrow j \implies j \longleftrightarrow i$ por simetría

y por transitividad $\implies i \longleftrightarrow i$ luego \longleftrightarrow es reflexiva

Por lo tanto \longleftrightarrow es una relación de equivalencia, pero no sobre todo el conjunto E necesariamente. Es decir pueden existir estados que no comunican con nadie, ni consigo mismos y por tanto hay que establecer una relación que incida sobre este subconjunto de E . Esta deberá ser de equivalencia para que particione el conjunto sobre el cuál incide y ajena a la anterior, luego, denotemos esta relación por \rightsquigarrow y establezcámosla como sigue: $i \rightsquigarrow i$, si y sólo si $i \not\longleftrightarrow j \forall j \in E$. Obsérvese que esta relación es la negación de \longleftrightarrow y por tanto son ajenas, de aquí que inciden sobre conjuntos disjuntos. Recuérdese en este punto la convención que se estableció en la Teoría de Gráficas para obtener subgráficas fuertemente conexas máximas, que era la de "está confundido con o está sobre un mismo circuito con"; ésta serviría como ampliación a la relación "Existe un camino de $x_i \in E$ a $x_j \in E$ y recíprocamente" para poder cubrir todo el conjunto de vértices.

Demostremos ahora que \rightsquigarrow es una relación de equivalencia:

Si $i \not\longleftrightarrow j, \forall j \in E \iff i \rightsquigarrow i$ luego entonces $i \rightsquigarrow i$ por la propia definición de la relación, por lo tanto, \rightsquigarrow es reflexiva.

Por otro lado si $i \rightsquigarrow i$ e $i \rightsquigarrow i \implies i \rightsquigarrow i$, luego es transitiva y la simetría es obvia, así \rightsquigarrow es una relación de equivalencia.

De esta forma hemos particionado el conjunto E en clases de equivalencia, sin embargo, no hemos analizado el tipo de estados por los cuáles cada clase está formada, de aquí que consideremos las siguientes definiciones:

Estados Recurrentes

Un estado $j \in E$ de una cadena $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ se dice recurrente sí:

$$P[\text{Saliendo de } j, \text{ la cadena no vuelva jamás}] = 0$$

Estados Transitorios

Un estado $i \in E$ de una cadena $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ se dice transitorio si no es recurrente, o sea:

$$P[\text{Saliendo de } i, \text{ la cadena no vuelve jamás}] > 0$$

Nótese que las definiciones de estados Transitorios y Recurrentes son ajenas y por tanto determinan una partición en el conjunto E .

EQUIVALENCIA DE CLASIFICACIONES

Recuérdese la definición de clase cerrada dada en la parte de Teoría de Gráficas y considérese la siguiente definición:

Estados Final y de Paso

Llamaremos estado final a todo estado de una clase cerrada y estado de paso, a todo otro estado; o sea a estados que pertenecen a clases abiertas.

Al ser tanto los conceptos de Recurrente y Transitorio como los de Final y de paso, contrarios, basta establecer la equivalencia de las

dos clasificaciones demostrando que:

TEOREMA 2.1. - a) Todo estado final es recurrente

b) Todo estado de paso es transitorio

Dos estados que pertenecen a una misma clase de equivalencia son lógicamente equivalentes. Esbozemos la definición de estado final en términos ligeramente modificados en el siguiente lema: (se omite la demostración, ya que es trivial)

LEMA 2.1. - Para que un estado $j \in E$ sea final, es necesario y suficiente que ningún estado equivalente a j , tenga siguiente no equivalente a j .

de donde se deduce el siguiente lema:

LEMA 2.2. - Para que un estado $j \in E$ sea de paso, es necesario y suficiente que exista un estado k equivalente a j (eventualmente j puede ser igual a k) que tenga un siguiente l no equivalente a j .

Podemos ahora demostrar la parte (b) del teorema 2.1:

De acuerdo al lema 2.2, si $j \in E$ es un estado de paso, existe un camino de longitud finita a un estado l no equivalente a j . Esta longitud es finita ya que el número de estados lo es. Así pues, sea un posible camino:

$C(j, \dots, k, l)$ y sea su longitud $L(C(j, \dots, k, l)) = N$

el evento:

$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{En el transcurso de las } N \text{ primeras transiciones, el sistema sigue} \\ \text{el camino } C(j, \dots, k, l) \end{array} \right\}$

Esto implica el evento:

$$B = \left\{ \text{La cadena no vuelve jamás a } j \right\}$$

En efecto, dado que el estado l no es equivalente a j , no existe un camino de l a j , luego la probabilidad del evento A es no nula ya que existe una secuencia de N transiciones tal que:

$$P_{j, \cdot}(1), \dots, P_{k, l}(N) \text{ son mayores que cero y por tanto su producto:}$$

$$P[A] = P_{j, \cdot}(1) \times \dots \times P_{k, l}(N) > 0$$

pero éste es sólo uno de los caminos por medio de los cuales se podría salir de la clase de equivalencia de j , es decir pueden existir varios y no con la restricción de longitud N , de aquí que:

$$P[A] \leq P[B]$$

$$\text{pero } P[A] > 0 \text{ luego } P[B] > 0$$

y j que se afirmó, era de paso, es un estado transitorio. l.q.q.d

Pasemos ahora a la parte (a) de este teorema:

Sea j un estado final. Llamaremos $cl(j)$ a la clase cerrada a la que pertenece. Todo camino que describa la evolución de la cadena a partir de j es interior a $cl(j)$, y todo estado que encuentre es equivalente a j .

Sea C un camino "infinito" interior a la clase $cl(j)$ "finita" a partir de j . Existe por lo menos un estado $k \in cl(j)$ por el que la cadena pasa un número infinito de veces, ya que si no existiera por lo menos

un estado k que la cadena visita una infinidad de veces, todos los estados $k \in cl(j)$ serían visitados un número finito de veces, pero como C (camino) es infinito, esto contradice el hecho de que $cl(j)$ es finita.

Sea l un siguiente cualquiera de k . Cada vez que la cadena pasa por el estado k existe una probabilidad no nula $p_{kl}(1)$ por definición de siguiente (ya que la gráfica asociada a la cadena es la gráfica de las transiciones posibles) de que la transición siguiente sea al estado l independientemente de lo que haya pasado la última vez, por la propiedad Markoviana. La probabilidad de que la cadena no pase nunca al estado l sería igual a un producto (p) de probabilidades de Transición en donde el siguiente se restringiría a ser diferente de l . Un factor de ese producto sería:

$$p' = P \left[\text{La cadena no pasa nunca de } k \text{ a } l \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p_{kl}(1))^n = 0$$

pero dado que p' solo es un factor del producto p entonces:

$$p < p' = 0 \quad \text{luego } p = 0$$

por lo tanto la cadena visitará por lo menos una vez a l pero como k es visitado un número infinito de veces así también lo será l . La evolución ulterior se sigue; si la cadena visita l , entonces como se afirmó al principio volverá en algún paso a k puesto que k se visita una infinidad de veces y así la evolución ulterior se sucedería.

Este argumento se aplicará también al estado j ya que existe un camino de longitud finita de k a j y la cadena pasa una infinidad de veces por j .

El estado j es pues recurrente.

Hemos demostrado además:

TEOREMA 2.2. - Desde el momento en que un estado final es alcanzado, todo estado de su clase es alcanzado una infinidad de veces.

Por último un razonamiento análogo permite mostrar el resultado siguiente:

TEOREMA 2.3. - Hay una probabilidad nula de que la cadena no alcance jamás una clase cerrada.

Pasemos a ilustrar un ejemplo de clasificación de estados:

EJEMPLO 2.2

Sea la cadena x_n , $n \in \mathbb{N}$ y estados $E = \{1, 2, 3, 4\}$

$$P(1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dado que sólo representamos las transiciones posibles en la gráfica podemos obtener directamente la matriz Booleana:

$$B_1 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & \widehat{3} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \widehat{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow C_1 = \widehat{3} \cap \widehat{\widehat{3}} = \{3,4\} \end{matrix}$$

$$B_2 = \begin{matrix} & 1 & 2 & \widehat{1} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \widehat{1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow C_2 = \widehat{1} \cap \widehat{\widehat{1}} = \{1\} \\ & & & \text{luego } C_3 = \{2\} \end{matrix}$$

Así hemos particionado a E en tres clases de equivalencia. Determinemos de que tipo son dichas clases (Cerradas o Abiertas)

C_1	C_2	C_3						
C_1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ x \\ x \end{bmatrix}$	
			\wedge_0	\wedge_1			\wedge_2	
			$N_0 = \{C_2\}$	$N_1 = \{C_3\}$			$N_2 = \{C_1\}$	

Así C_2 es una clase cerrada y por tanto sus estados son recurrentes y C_1, C_3 son abiertas y sus estados transitorios.

Mostremos la gráfica ordenada asociada a la cadena:

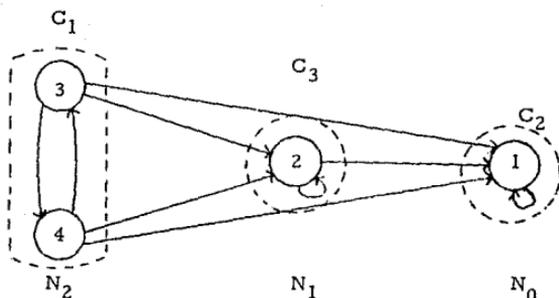


Fig. 2.3

Estado Absorbente

Cuando una clase cerrada está constituida por un solo estado; este estado se califica de absorbente. Es decir si $p_{ii}(1) = 1$, entonces i es absorbente.

Para el ejemplo al estado "1" es absorbente.

Estado sin Retorno

Cuando una clase abierta consta de un sólo estado i con probabilidad de transición $p_{ii}(1) = 0$ este estado es un estado sin retorno.

2.6 PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA A UN ESTADO EN N PASOS

Para ciertos problemas, resulta de interés, el calcular la probabilidad condicional, de visitar un determinado estado k a partir de un estado j , exactamente en n transiciones y no antes. Denotemos esta probabilidad por $f_{jk}(n)$ y sea el evento:

$$V_k(n) = [x_n = k, \quad x_m \neq k \text{ para } m=1, 2, \dots, n-1]$$

que significa que la cadena visita el estado k exactamente en el paso n y no en algún paso anterior a n . Si este evento lo condicionamos a que la cadena arranca en el estado j en el paso "0" tenemos:

$$f_{jk}(n) = P [V_k(n) / x_0 = j]$$

Apoyemos la ilustración del cálculo de $f_{jk}(n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ en la figura 2.4

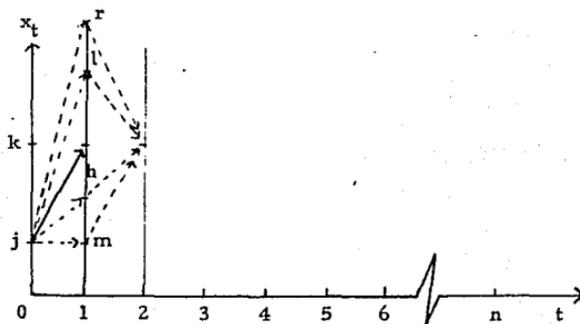


Fig. 2.4

Si $n=1$, entonces $f_{jk}(1)$ se identifica con la probabilidad de transición de un paso de j a k y se representa en la figura 2.4 mediante una flecha continua, así:

$$f_{jk}(n) = P_{jk}(n) \quad \text{si } n=1$$

Hagamos $n=2$ y veamos que en la figura 2.4 ha sido representado el evento $V_k(2)$ condicionado a $x_0=j$ mediante línea punteada. Esto equivale a realizar una serie de transiciones posibles en un paso conjuntamente con la probabilidad de primera visita $f_{ik}(1)$ para algún $i \neq k$ en el que sería posible caer. Luego:

$$\begin{aligned} f_{jk}(2) &= P_{ju}(1) f_{uk}(1) + P_{jl}(1) f_{lk}(1) + \dots + P_{jr}(1) f_{rk}(1) \\ &= \sum_{i \neq k} P_{ji}(1) f_{ik}(1) \end{aligned}$$

Si siguiéramos el análisis resultaría la siguiente fórmula:

$$f_{jk}(n) = \sum_{i \neq k} P_{ji}(1) f_{ik}(n-1) \quad \text{para } n \geq 2$$

Así tenemos que para $n \geq 2$ hemos obtenido en forma recursiva la fórmula anterior. Resumiendo

$$f_{jk}(n) = \begin{cases} P_{jk}(n) & \text{si } n=1 \\ \sum_{i \neq k} P_{ji}(1) f_{ik}(n-1) & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad (2.2)$$

EJEMPLO 2.3

Sea la cadena:

$$P(1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .25 & .25 & .25 & .25 \\ .2 & 0 & .4 & .4 \\ .3 & .4 & .2 & .1 \\ .1 & .2 & .3 & .4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Escojamos el estado j como estado inicial y el 4 como el estado final;

calculemos así $f_{j4}(1)$, $f_{j4}(2)$, $f_{j4}(3)$. \checkmark

De acuerdo con lo obtenido, ésto se puede manipular más fácilmente - mediante notación matricial:

Sea M_k una matriz a partir de $P(1)$ tal que se ha substituído la columna k - ésima por ceros:

$$\left\{ f_{j4}(1) \right\} = \begin{bmatrix} .25 \\ .4 \\ .1 \\ .4 \end{bmatrix}, \text{ luego } M_4 = \begin{bmatrix} .25 & .25 & .25 & 0 \\ .20 & 0 & .4 & 0 \\ .30 & .4 & .2 & 0 \\ .1 & .2 & .3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ f_{j4}(2) \right\} = \begin{bmatrix} .25 & .25 & .25 & 0 \\ .20 & 0 & .4 & 0 \\ .30 & .4 & .2 & 0 \\ .10 & .2 & .3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .25 \\ .4 \\ .1 \\ .4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1875 \\ 0.09 \\ 0.255 \\ 0.135 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ f_{j4}^{(3)} \right\} = \begin{bmatrix} .25 & .25 & .25 & 0 \\ .20 & 0 & .40 & 0 \\ .30 & .4 & .20 & 0 \\ .10 & .2 & .30 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .1875 \\ .09 \\ .255 \\ .135 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.133125 \\ 0.1395 \\ 0.14325 \\ 0.11325 \end{bmatrix}$$

1.7 TIEMPO MEDIO DE OCUPACION

Para ciertos problemas resulta de interés este concepto. Por ejemplo un problema de inventarios, en donde se desea conocer cuál es el nivel de inventario promedio sostenido en el manejo de un cierto producto, el cuál se traduce en calcular el tiempo medio de ocupación de diferentes niveles de inventario.

Denotemos el tiempo de ocupación del estado k en n pasos por $N_k(n)$:

Definamos la variable aleatoria $Z_k(n)$ en forma Booleana tal que:

$$Z_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n = k \\ 0 & \text{si } x_n \neq k \end{cases}$$

es decir $Z_k(n)$ vale 1 si la cadena visita el estado k en el paso n , en caso contrario vale cero. Luego $N_k(n)$ dado que la cadena estaba en $x_0=j$ será:

$$N_k(n)/x_0=j = \sum_{m=1}^n Z_k(m)$$

y si n tiende a infinito entonces

$$N_k(\infty)/x_0=j = \sum_{m=1}^{\infty} Z_k(m)$$

se denomina tiempo total de ocupación. En realidad el tiempo que se utiliza es el tiempo medio de ocupación, así bien:

$$\begin{aligned} E \left[N_k(\infty) / x_0 = j \right] &= E \left[\sum_{m=1}^{\infty} Z_k(m) \right] = \sum_{m=1}^{\infty} E \left[Z_k(m) \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[1 p_{jk}(m) + O(1 - p_{jk}(m)) \right] = \sum_{m=1}^{\infty} p_{jk}(m) \end{aligned}$$

Denotemos el tiempo medio de ocupación por r_{ij} , entonces:

$$r_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{jk}(m) \quad (2.3)$$

Dado que el conjunto E, de estados de una cadena se puede dividir en estados que la cadena visita un número infinito, analicemos los siguientes casos:

i) Si i, j recurrentes entonces puede suceder:

a) Que $i, j \in cl(i)$ es decir $i \longleftrightarrow j$, luego la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{ij}(m) \text{ no converge ya que como se vió } i, j$$

pertenecen a la misma clase cerrada y serán visitados un número infinito de veces, luego - siempre existirán $p_{ij}(n) > 0$ para alguna n .

Así:

$$r_{ij} = \infty \quad (\text{INFINITO})$$

b) Si i, j no comunican, entonces $P_{ij}(m) = 0 \forall m \in \mathbb{N}$

así:

$$r_{ij} = 0$$

es decir, no se puede ocupar un estado j recurrente a partir del estado i recurrente no equivalente a j .

ii) Si i es recurrente y j transitorio entonces:

a) Si i es accesible desde j , es decir si $\exists P_{ji}(m) > 0$

para alguna m , entonces, se cae en el caso (i) inciso

(a) y la serie no converge, luego:

$$r_{ji} = \infty$$

b) Como de un estado recurrente no se puede pasar a un estado transitorio; $p_{ij}(m) = 0 \forall m$, entonces:

$$r_{ij} = 0$$

iii) El único caso no trivial resulta cuando i, j son transitorios, ya que como se sabe, estos estados son visitados un número finito de veces, porque la cadena, en algún paso caerá en los estados recurrentes y no volverá jamás a los transitorios, luego la serie converge. Sea la matriz de transición $P(1)$. Como hemos establecido para cadenas homogéneas

$$P(n) = P(1)^n$$

Además si T' es el conjunto de todos los estados transitorios, podemos acomodar los estados en la matriz $P(1)$ de tal forma que en los primeros renglones situemos los estados recurrentes y en los últimos los transitorios.

$$P(1) = \begin{bmatrix} \bar{T}' & \begin{bmatrix} K & O \\ L & Q \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

donde K es la submatriz de transición entre estados recurrentes, L es la submatriz de transición de estados transitorios a recurrentes y Q , la submatriz de transición entre estados transitorios

$$P(m) = \begin{bmatrix} K^m & O \\ L_m & Q^m \end{bmatrix}$$

Luego denotando matricialmente la matriz de tiempos medios de ocupación por R , calificada como matriz potencial se tiene:

$$R = \sum_{m=1}^{\infty} P(m) = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} K^m & O \\ \sum_{m=1}^{\infty} L_m & \sum_{m=1}^{\infty} Q^m \end{bmatrix}$$

de donde extraemos $S = \sum_{m=1}^{\infty} Q^m$; analicemos la convergencia de esta serie y admitamos la siguiente convención

$$P_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.4)$$

así con la convención citada podemos establecer que:

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m = I + Q + Q^2 + \dots$$

Para demostrar que la serie converge, sin recurrir a espacios normados o demostraciones matemáticas tediosas podemos utilizar lo siguiente:

Q es una matriz que sólo contiene probabilidades de transición de estados transitorios a estados transitorios en un paso, así mismo Q^2 pero en transiciones de dos pasos y generalizando, Q^n será en n pasos. Como se sabe un estado transitorio j , por ser transitorio será visitado un número finito de veces. Eso implica que existe una $h_1 > 0$ y $h_1 < \infty$, tal que $p_{ij}(h_1) = 0$. El mismo argumento puede ser usado para todo k transitorio, es decir, existe $h_2 > 0$ y h_2 acotado, tal que $p_{ij}(h_2) = 0$. Sea N el mayor número escogido de entre las h_i ; entonces $p_{ij}(N) = 0 \quad \forall i, j \in T'$ así claramente si $N < \infty$ entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 0 \quad \forall i, j \in T'$$

$$\text{luego: } \sum_{m=0}^{\infty} Q^m = \sum_{m=0}^N Q^m + \sum_{m=N+1}^{\infty} Q^m$$

$$= \sum_{m=0}^N Q^m + 0$$

$$\text{así } S = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m \text{ converge}$$

Hemos determinado la convergencia, pero no a que converge:

Pasemos a determinar la matriz a la cuál converge:

Como:

$$S = I + Q + Q^2 + Q^3 + \dots$$

Luego:

$$QS = Q + Q^2 + Q^3 + Q^4 + \dots$$

$$S - QS = I \quad , \quad S(I - Q) = I \implies S = (I - Q)^{-1}$$

Donde $(I - Q)$ tendrá que tener inversa dado que S converge.

2.8 PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA

Son las probabilidades de visitar un estado k a partir de un estado inicial j en algún paso de la cadena. Se denota por f_{jk} y equivale a:

$$f_{jk} = P \left[N_k(\infty) - N_k(m) > 0 / x_{n=j} \right] = P \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} Z_k(m) > 0 / x_m=j \right]$$

admitiéndose que $P \left[x_m=j \right] > 0$

TEOREMA 2.4.- Para cualesquiera estados j, k se tiene que:

$$f_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jk}(n) \quad (2.5)$$

Probemos el teorema 2.4 partiendo de que:

$$\begin{aligned} f_{jk}(n) &= P \left[x_n=k, x_m \neq k, m=1, 2, \dots, n-1 / x_0=j \right] \ni P \left[x_0=j \right] > 0 \\ &= P \left[V_k(n) / x_0=j \right] \end{aligned}$$

Definamos el evento:

$$V_k = \left[x_n=k, \text{ en algún paso } n > 0 \right] = N_k(\infty) > 0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_k(n)$$

luego como $\forall_k(n) \forall_n > 0$ constituyen eventos disjuntos, entonces

$$\begin{aligned} P [V_k/x_0=j] &= P \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} V_k(n)/x_0=j \right] = \frac{P \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} V_k(n), x_0=j \right]}{P [x_0=j]} \\ &= \frac{P \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (V_k(n), x_0=j) \right]}{P [x_0=j]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P [V_k(n), x_0=j]}{P [x_0=j]} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P [V_k(n) / x_0=j] = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jk}(n) \quad \text{l. q. q. d.} \end{aligned}$$

Antes de pasar a calcular las f_{jk} para las distintas clases de estados enunciamos el siguiente teorema que nos será útil:

TEOREMA 2.5 .- Para cualesquiera estados j y k y $n \geq 1$:

$$P_{jk}(n) = \sum_{m=1}^n f_{jk}(m) P_{kk}(n-m) \quad (2.6)$$

admitiendo la convención establecida anteriormente: $P_{jk}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$

Demostremos ésto:

$$\begin{aligned} P [x_n=k / x_0=j] &= \sum_{m=1}^n P [x_n=k, x_m=k, x_q \neq k, q=1, \dots, m-1 / x_0=j] \\ &= \sum_{m=1}^n P [x_n=k / x_m=k] P [x_m=k, x_q \neq k, q=1, \dots, m-1 / x_0=j] \\ &= \sum_{m=1}^n P_{kk}(n-m) f_{jk}(m) \\ &= \sum_{m=1}^n f_{jk}(m) P_{kk}(n-m) \quad \text{l. q. q. d.} \end{aligned}$$

Analícemos los siguientes casos

i) Si j y k recurrentes entonces:

a) Dado que j es recurrente la probabilidad:

$$f_{jj} = P \left[x_n = j \text{ en algún paso } n / x_0 = j \right] = P \left[V_j / x_0 = j \right] = 1$$

Ya que j será visitado un número infinito de veces.

Ahora si $j \leftrightarrow k$, entonces por el teorema 2.2, se sigue que k también será visitado un número infinito de veces a partir de j por lo tanto:

$$f_{jk} = 1 \quad \forall j, k \text{ tal que } j \leftrightarrow k$$

b) Si $j \not\leftrightarrow k$ entonces no existe probabilidad de transición - $p_{jk}(n)$, es decir, $p_{jk}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, y como f_{jk} se deduce a partir de estas probabilidades entonces:

$$f_{jk} = 0$$

Los únicos casos no triviales son los siguientes:

ii) Sean j, k dos estados transitorios cualesquiera:

utilicemos la relación (2.6) del teorema 2.5 con-

juntamente con su convención:

$$p_{jk}(n) = \sum_{m=1}^n f_{jk}(m) p_{kk}(n-m)$$

Si sumamos sobre n

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n f_{jk}(m) p_{kk}(n-m)$$

Luego invirtiendo el orden de las sumatorias y adecuando índices:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} P_{jk}(n) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} f_{jk}(m) P_{kk}(n-m) \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} f_{jk}(m) P_{kk}(q) \quad \ni q=n-m \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} f_{jk}(m) \sum_{q=0}^{\infty} P_{kk}(q) \\
 &= f_{jk} \sum_{q=0}^{\infty} P_{kk}(q) \\
 f_{jk} &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P_{jk}(n)}{\sum_{q=0}^{\infty} P_{kk}(q)}
 \end{aligned}$$

Obsérvese lo siguiente: Si $j=k$ entonces:

$$f_{jk} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P_{jk}(n)}{\sum_{q=0}^{\infty} P_{kk}(q)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P_{jk}(n) + 1 - 1}{\sum_{q=0}^{\infty} P_{kk}(q)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} P_{jk}(n) - 1}{\sum_{q=0}^{\infty} P_{kk}(q)} = 1 - \frac{1}{\sum_{q=0}^{\infty} P_{kk}(q)}$$

Si se recuerda la expresión (2.3) específica el tiempo medio de ocupación del estado j a partir de i y si se admite la convención establecida se tiene

que:

$$f_{jk} = \begin{cases} \frac{r_{jk}}{r_{kk}} & \text{si } j \neq k \\ 1 - \frac{1}{r_{kk}} & \text{si } j = k \end{cases} \quad (2.7)$$

iii) Si j es transitorio y k recurrente entonces:

Como $f_{jk} = \sum_{m=1}^{\infty} f_{jk(m)}$ para cualesquiera $j, k \in E$

se tiene:

$$f_{jk} = f_{jk(1)} + \sum_{m=2}^{\infty} f_{jk(m)}$$

luego de acuerdo con la ecuación (2.2)

$$f_{jk} = p_{jk(1)} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\substack{i \in E \\ i \neq k}} p_{ji(1)} f_{ik(m-1)}$$

si invertimos las sumatorias:

$$f_{jk} = p_{jk(1)} + \sum_{\substack{i \in E \\ i \neq k}} p_{ji(1)} \sum_{m=2}^{\infty} f_{ik(m-1)} \quad \text{y} \quad f_{jk} = p_{jk(1)} + \sum_{\substack{i \in E \\ i \neq k}} p_{ji(1)} \sum_{q=1}^{\infty} f_{ik(q)}$$

$$f_{jk} = p_{jk(1)} + \sum_{\substack{i \in E \\ i \neq k}} p_{ji(1)} f_{ik}$$

pero E está particionado en estados transitorios y recurrentes. Sea

T' el conjunto de estados transitorios y \bar{T}' su complemento, luego:

$$f_{jk} = p_{jk(1)} + \sum_{i \in T'} p_{ji(1)} f_{ik} + \sum_{\substack{i \in \bar{T}' \\ i \neq k}} p_{ji(1)} f_{ik}$$

pero en \bar{T}' existen estados recurrentes que pueden o no comunicar con

k , luego si $i \in \text{cl}(k)$, entonces $f_{ik} = 1$, pero si $i \in \bar{T}'$ e $i \notin \text{cl}(k)$,

entonces $f_{ik} = 0$, así:

$$f_{jk} = p_{jk(1)} + \sum_{i \in T'} p_{ji(1)} f_{ik} + \sum_{\substack{i \in \text{cl}(k) \\ i \neq k}} p_{ji(1)}$$

$$\text{y} \quad f_{jk} = \sum_{i \in T'} p_{ji(1)} f_{ik} + \sum_{i \in \text{cl}(k)} p_{ji(1)} \quad \forall j \in T' \quad (2.8)$$

Así mediante la expresión (2.8) es posible calcular las probabilidades de primera visita de estados transitorios a recurrentes. Obsérvese que esta expresión representa un sistema de ecuaciones simultáneas, donde las incógnitas son f_{ik} y $\sum_{\forall i \in cl(k)} p_{ji}(1)$ es el término independiente. En forma más general la ecuación (2.8) se puede escribir como:

$$f_{jk} = \sum_{\forall i \in E} p_{ji}(1) f_{ik} \quad \forall j \in T'$$

Nótese que el término independiente obtenido en la ecuación (2.8) será idéntico $\forall i \in cl(k)$, de aquí que la solución para cada $i \in cl(k)$ es la misma, por lo que basta calcular las probabilidades de primera visita para un sólo estado de la $cl(k)$ cerrada para obtener las probabilidades de primera visita para todos los demás estados de esa clase cerrada. Otra observación, es el hecho de que los coeficientes de las incógnitas f_{jk} , son los mismos, independientemente de la clase cerrada a la cuál se está calculando las f_{jk} . Estos coeficientes constituyen la matriz Q antes enunciada. Si lo anterior lo llevamos a notación matricial:

Sean j_1, j_2, \dots, j_h estados transitorios y k_1, k_2, \dots, k_q estados recurrentes los cuáles pertenecen cada uno a una clase cerrada distinta es decir $k_1 \leftrightarrow k_2 \leftrightarrow k_3 \dots \leftrightarrow k_q$, entonces

$$\begin{bmatrix} f_{j1 k1} & f_{j1 k2} & \dots & f_{j1 kq} \\ f_{j2 k1} & f_{j2 k2} & \dots & f_{j2 kq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{jh k1} & \dots & \dots & f_{jh kq} \end{bmatrix} - Q = \begin{bmatrix} f_{j1 k1} & \dots & f_{j1 kq} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ f_{jh k1} & \dots & f_{jh kq} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i \in cl(k1)} P_{j1i(1)} & \dots & \sum_{i \in cl(kq)} P_{j1i(1)} \\ \sum_{i \in cl(k1)} P_{j2i(1)} & & \sum_{i \in cl(kq)} P_{j2i(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i \in cl(k1)} P_{jhi(1)} & \dots & \sum_{i \in cl(kq)} P_{jhi(1)} \end{bmatrix}$$

$\forall i \in cl(k1) \dots \forall i \in cl(kq)$

luego la solución es:

$$\begin{bmatrix} f_{j1 k1} & f_{j1 k2} & \dots & f_{j1 kq} \\ f_{j2 k1} & f_{j2 k2} & \dots & f_{j2 kq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{jh k1} & \dots & \dots & f_{jh kq} \end{bmatrix} = [I - Q]^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i \in cl(k1)} P_{j1i(1)} & \dots & \sum_{i \in cl(kq)} P_{j1i(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i \in cl(k1)} P_{jhi(1)} & \dots & \sum_{i \in cl(kq)} P_{jhi(1)} \end{bmatrix}$$

$\forall i \in cl(k1) \dots \forall i \in cl(kq)$

El calcular $[I - Q]^{-1}$, sólo una vez para obtener los tiempos medios de ocupación y las probabilidades de primera visita ofrece, grandes ventajas computacionales.

Si algunos de los estados $k_1, k_2 \dots k_q$ son estados absorbentes, a las

probabilidades de primera visita a ellos a partir de estados transitorios, se les llama PROBABILIDADES DE ABSORCION.

2.9 TIEMPOS MEDIOS DE ABSORCION

El tiempo que la cadena permanece en los estados transitorios a partir de un estado j transitorio, se denomina tiempo antes de absorción y se denota por N'_j . Lógicamente este tiempo será la suma de los tiempos de ocupación total, de cada estado transitorio a partir de j , por lo tanto:

$$N'_j = \sum_{\forall i \in T'} N_i(\infty) / x_{o=j} \quad \forall j \in T'$$

Si calculamos la esperanza de N'_j obtendremos un tiempo medio antes de absorción. Pero antes de esto, notemos que para que la cadena sea absorbida en algún estado recurrente, al tiempo antes de absorción debe ser sumado un paso, así el tiempo de absorción será:

$$N_j = N'_j + 1 \quad , j \in T'$$

Ahora tomemos la esperanza para obtener un tiempo medio de absorción:

$$\begin{aligned} E[N_j] &= E[N'_j + 1] = E[N'_j] + 1 = E\left[\sum_{\forall i \in T'} N_i(\infty) / x_{o=j}\right] + 1 \\ &= \sum_{\forall i \in T'} \left[E\left[N_i(\infty) / x_{o=j} \right] \right] + 1 \end{aligned}$$

pero $N_i(\infty) / x_{o=j} = \sum_{m=1}^{\infty} Z_i(m)$ luego:

$$E[N_j] = \sum_{\forall i \in T'} \left[E\left[\sum_{m=1}^{\infty} Z_i(m) \right] \right] + 1 = \sum_{\forall i \in T'} \sum_{m=1}^{\infty} E[Z_i(m)] + 1$$

pero $E [Z_i(m)] = 1 p_{ji}(m) + 0 (1 - p_{ji}(m)) = p_{ji}(m)$.

entonces

$$m_j = E[N_j] = 1 + \sum_{\forall i \in T'} \sum_{m=1}^{\infty} p_{ji}(m) \quad , j \in T'$$

y recordando la convención

$$m_j = 1 + \sum_{\forall i \in T'} \sum_{m=0}^{\infty} p_{ji}(m) - 1 = \sum_{\forall i \in T'} \sum_{m=0}^{\infty} p_{ji}(m)$$

luego $m_j = \sum_{\forall i \in T'} r_{ji}$, así los tiempos medios de absorción a partir de j , son la suma de los tiempos medios de ocupación r_{ji} $\forall i \in T'$.

Nótese que este resultado es debido a la convención establecida

$$p_{jk}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Denotemos lo anterior matricialmente

$$\begin{bmatrix} m_{j1} \\ m_{j2} \\ \vdots \\ m_{jh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\forall i \in T'} r_{jli} \\ \vdots \\ \sum_{\forall i \in T'} r_{jhi} \end{bmatrix} \quad \text{si denotamos por } \mathbf{m} \text{ el vector de tiempos de absorción y } \bar{\mathbf{1}} \text{ por un vector de unos:}$$

$$\mathbf{m} = [\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} \bar{\mathbf{1}} \quad (2.9)$$

La expresión (2.9) es la más utilizada para calcular los tiempos medios de absorción. De esta expresión es fácil visualizar la siguiente expresión, la cuál es ilustrada en la mayoría de los textos relacionados con el tema.

$$m_j = 1 + \sum_{\forall i \in T'} p_{ji(1)} m_i \quad , j \in T' \quad (2.10)$$

2.10 TIEMPOS MEDIOS DE PRIMER PASO Y DE RECURRENCIA

Una cadena Markoviana se califica de irreducible, si todos sus estados comunican entre sí, de tal forma que la cadena está constituida por una sola clase cerrada única. En realidad una clase cerrada puede -- considerarse como una cadena de Markov irreducible.

El concepto de tiempos medios de primer paso y de recurrencia sólo es aplicable a cadenas irreducibles y se interpreta como: dado que la cadena se encuentra en el estado j (obvio j recurrente), cuánto tiempo en promedio tardará la cadena en visitar el estado k . Si $j=k$, entonces el tiempo promedio se califica, de recurrencia; así para cada par de estados j, k de la clase cerrada, la secuencia de probabilidades condicionales de primer paso $f_{jk}(n)$, $n=1, 2, \dots$ constituye una distribución de probabilidad de la variable n cuya esperanza es la buscada, luego:

$$m_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jk}(n)$$

Para calcular m_{jk} es necesario hacer la siguiente consideración para facilitar su obtención: Dado un estado k , un tiempo medio de primer paso m_{jk} , $j \neq k$ puede ser considerado como un tiempo medio de absorción haciendo una ligera modificación a la cadena irreducible con la que se está tratando, de la siguiente manera:

Si $\{P_{jk}\}$ es la matriz de transición original se generará una nueva matriz $\{P'_{jk}\}$ en la cuál, si j es el estado inicial y k el estado final entonces:

$$P'_{iq} = 1 \quad \text{si } i=k \text{ y } q=k, \quad i, j, q, k \in E$$

$$P'_{iq} = 0 \quad \text{si } i=k \text{ y } q \neq k$$

$$P'_{iq} = P_{iq} \quad \text{si } i \neq k \text{ y } j \text{ cualquiera}$$

En otras palabras, si k es el estado para el cuál se quiere calcular el tiempo medio de primer paso a partir del estado j , k se convierte en estado absorbente. Esta modificación no altera el comportamiento de la cadena original antes de que ocurra el primer paso a k . De lo anterior es válida la expresión (2.10) expresada como:

$$m_{jk} = 1 + \sum_{\forall i \neq k} P_{ji(1)} m_{ik} \quad \text{para } j \neq k \quad (2.11)$$

Los tiempos medios de recurrencia podrán calcularse a partir de los tiempos medios de primer paso como:

$$m_{kk} = 1 + \sum_{\forall i \neq k} P_{ki(1)} m_{ik} \quad (2.12)$$

La expresión anterior resulta de que:

a) La cadena puede permanecer en el estado k en el primer paso y

b) La cadena puede salir de k en el primer paso así

se tiene que:

$$m_{kk} = P_{kk(1)} + \sum_{\forall i \neq k} P_{ki(1)} \{ 1 + m_{ik} \}$$

Se queda en k en el primer paso
La cadena sale de k en el primer paso
so

$$\begin{aligned}
 &= P_{kk(1)} + \sum_{\forall i \neq k} P_{ki(1)} + \sum_{\forall i \neq k} P_{ki(1)} m_{ik} \\
 &= 1 + \sum_{\forall i \neq k} P_{ki(1)} m_{ik}
 \end{aligned}$$

Estamos en posición de dar la siguiente definición:

Estados recurrentes positivos y nulos

Se dice que un estado k recurrente, es positivo, si su tiempo medio de recurrencia m_{kk} es finito. Si m_{kk} es infinito, entonces se dice que k es un estado recurrente nulo.

Obsérvese que los estados nulos no existen en cadenas de Markov finitas, ya que si un estado es recurrente y es visitado un número finito de veces, el número de estados de la cadena debe ser infinito. Esta afirmación se plantea como comentario, ya que este trabajo se limita a un conjunto de estados E finito.

Una cuestión particular que surge es: ¿Cuál será el tiempo que tardará la cadena en arribar a un estado específico j recurrente, a partir de un estado transitorio k ? Esta pregunta involucra tanto el concepto de tiempos medios de absorción como, tiempos medios de primer paso. Habíamos determinado antes, los tiempos de absorción. En este concepto no nos interesaba por cuál clase cerrada de las que pudieran existir, era absorbida la cadena y menos aún, cuál era el

estado, que el proceso visitaba primero dentro de la clase cerrada que lo hubiera podido absorber. Conjuntamos parte de los contenidos de los conceptos de tiempo medio de absorción y tiempo medio de primer paso en lo que calificaremos como: Tiempo Medio de -- Primera Absorción.

El tiempo medio de primera absorción del estado k a partir del estado j será infinito si el número de clases cerradas de la cadena, es mayor de uno. Esto se explica; si la cadena cae a otro estado l recurrente no equivalente a k entonces la cadena no saldrá jamás de la clase $cl(l)$ y por tanto k no será visitado nunca. Por tanto el tiempo de primera absorción de un estado k a partir del estado j será finito, si y solo si existe una sola clase cerrada.

Para calcular el tiempo medio de primera absorción del estado k , convertiremos este estado en absorbente. De esta forma todos los estados recurrentes equivalentes a k se convertirán en transitorios. Luego el tiempo medio de primera absorción se convierte en un tiempo medio de absorción. Esto se tendrá que hacer con cada estado $i \in cl(k)$.

2.11 COMPORTAMIENTO DE CADENAS DE MARKOV A LARGO PLAZO

Es interesante estudiar el comportamiento asintótico de las probabili-

dades de transición $p_{jk}(n)$, cuando n crece indefinidamente.

Sabemos por todo lo anterior que la cadena tarde o temprano visitará alguna clase cerrada de la cuál no podrá salir nunca. De esto es lógico pensar intuitivamente que dado un estado transitorio j :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 0 \quad \forall i$$

Desde que cada estado recurrente pertenece a una clase cerrada (Cadena Irreducible) cuyo comportamiento asintótico puede ser estudiado independientemente de los estados restantes que no pertenecen a tal clase cerrada, podemos concentrar nuestra atención sobre dichas clases cerradas.

En este punto surge una dificultad al tomar el límite de las probabilidades $p_{jk}(n)$ de los estados de una cadena irreducible, cuando n tiende a infinito. Esta dificultad estriba, en que, en ocasiones, este límite existe para ciertos números que son múltiplos de un valor t fijo, -denominado período. Esto da origen a las denominadas cadenas periódicas ($t \geq 2$)

Principiemos pues el estudio del comportamiento asintótico demostrando, el siguiente teorema:

TEOREMA 2.6. - Todos los estados de una cadena irreducible son del mismo tipo.

Prueba . - Sabemos, que por ser la cadena irreducible, para un par de estados cualesquiera j, k , existirán enteros r, s , tales que $P_{jk}(r) > 0$ y $P_{kj}(s) > 0$ y que por la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$P_{jj}^{(n+r+s)} \geq P_{jk}(r) P_{kk}^{(n)} P_{kj}(s) \quad \text{para una } n \text{ arbitraría.}$$

Supongamos que el estado j tiene período t . El lado derecho de la expresión anterior es positivo para $n=0$ así: $(P_{kk}(0)=1)$

$$P_{jk}(r) (1) P_{kj}(s) > 0$$

de aquí que el lado derecho muestra que $r+s=kt$, k es entero, es decir es múltiplo de t . De lo que se deduce que el lado izquierdo será nulo para valores de n que no sean múltiplos de t y por tanto el estado k tiene período múltiplo de t . Si intercambiamos los papeles de j, k vemos que estos estados tienen el mismo período.

Existen formas alternas de obtener la distribución estacionaria de una cadena de Markov. Aquí sólo presentamos la forma más sencilla y rápida que proviene del siguiente teorema:

TEOREMA 2.7 Dado el tiempo medio de recurrencia m_{jj} se tiene que:

i) Si j es aperiódico ($t=1$) entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{m_{jj}} \quad (2.13)$$

ii) Si j es periódico es decir $t \geq 2$ entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}(nt) = \frac{t}{m_{jj}} \quad (2.14)$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{jj}(k) = 0 \quad \forall k \text{ no múltiplo de } t$$

Prueba:

i) De acuerdo con el teorema 2.5 se tiene la relación (2.6)

$$p_{jj}(n) = \sum_{m=1}^n f_{jj}(m) p_{jj}(n-m)$$

y por convención $p_{jj}(0)=1$. Definamos además $f_{jj}(0)=0$

Si formamos la sucesión $\{r_n\}$ tal que:

$$r_n = f_{jj}(n+1) + f_{jj}(n+2) + \dots = \sum_{m=n+1}^{\infty} f_{jj}(m) \quad (2.15)$$

sabemos que la sucesión es decreciente y tiende hacia cero cuando n tiende a infinito, ya que $r_0 = 1$, porque $f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}(n)$ y j es recurrente.

Obsérvese que la serie infinita formada a partir de tal sucesión es de

la forma:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r_n &= (f_{jj}(1) + f_{jj}(2) + \dots) + (f_{jj}(2) + f_{jj}(3) + \dots) + \dots \\ &= f_{jj}(1) + 2f_{jj}(2) + 3f_{jj}(3) + \dots \end{aligned}$$

o sea el tiempo medio de recurrencia $m_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}(n)$

Como tenemos que: $r_0 = 1$

$$f_{jj}(1) = r_0 - r_1$$

$$f_{jj}(2) = r_1 - r_2 \text{ etc.}$$

Si sustituimos tales valores en:

$$P_{jj}(n) = f_{jj}(0) P_{jj}(n) + f_{jj}(1) P_{jj}(n-1) + \dots + f_{jj}(n) P_{jj}(0)$$

tenemos que:

$$P_{jj}(n)(r_0) = (r_0 - r_1) P_{jj}(n-1) + (r_1 - r_2) P_{jj}(n-2) + \dots + (r_{n-1} - r_n) P_{jj}(0)$$

así desarrollando:

$$P_{jj}(n)r_0 = r_0 P_{jj}(n-1) - r_1 P_{jj}(n-1) + r_1 P_{jj}(n-2) - r_2 P_{jj}(n-2) + \dots + r_{n-1} P_{jj}(0) - r_n P_{jj}(0)$$

y por tanto se obtiene que:

$$r_0 P_{jj}(n) + r_1 P_{jj}(n-1) + \dots + r_n P_{jj}(0) = r_0 P_{jj}(n-1) + r_1 P_{jj}(n-2) + \dots + r_{n-1} P_{jj}(0)$$

Ambos miembros de la ecuación representan lo mismo pero uno en función de n y el otro en función de $n-1$ por tanto:

$$r_0 P_{jj}(n) + r_1 P_{jj}(n-1) + r_2 P_{jj}(n-2) + \dots + r_n P_{jj}(0)$$

es una constante independiente de n . Como para $n=0$ queda:

$$r_0 P_{jj}(0) = 1$$

entonces para toda n :

$$r_0 P_{jj}(n) + r_1 P_{jj}(n-1) + \dots + r_n P_{jj}(0) = 1 \quad (2.16)$$

Como $r_0 = 1$ entonces $\sum_{m=1}^n f_{jj}(m) \leq 1$

y de acuerdo con la relación (2.6), si sustituimos en ella $P_{jj}(n-m) = 1$, para $m=1, 2, \dots, n$ entonces: $P_{jj}(n) \leq \sum_{m=1}^n f_{jj}(m) \leq 1$

Sabemos que las $P_{jj}(n)$, están en el intervalo cerrado y acotado (Conjunto Compacto $[0, 1]$) el cuál tiene infinitos puntos, de aquí que por -

el teorema de Bolzano-Weierstrass* existe por lo menos, un punto de acumulación. Pero incluso, si existen varios, se demuestra en Topología, que el "conjunto de puntos de acumulación" es cerrado y acotado y por tanto existe un número SUP denominado el supremo de los puntos de acumulación. (Como tal punto de acumulación pertenece al conjunto de puntos de acumulación, por ser este cerrado y acotado se le puede denominar al supremo, el máximo del conjunto de puntos de acumulación)

De igual modo existe un número denominado INF el cuál es el Infimo de los puntos de acumulación.

También se demuestra en Topología que dado un punto de acumulación se puede encontrar una subsucesión que tiende a él.

De lo anterior la subsucesión de las $p_{jj}(n)$, $\{ p_{jj}(n_1), p_{jj}(n_2), \dots, p_{jj}(n_p), \dots \}$, se puede encontrar tal que:

$$p_{jj}(np) \rightarrow \text{SUP}$$

luego se tiene que $p_{jj}(n) < \text{SUP} + \epsilon$ para toda n suficientemente grande.

Sea m_1 un entero fijo, tal que, $f_{jj}(m_1) > 0$. Mostremos que la nueva subsucesión:

$$p_{jj}(np - m_1) \rightarrow \text{SUP}$$

Llevemos a cabo ésto por contraposición:

Sabemos que $p_{jj}(np) \rightarrow \text{SUP}$ implica lógicamente que podemos encontrar:

$$p_{jj}(np) > \text{SUP} - \epsilon, \quad \text{para alguna } \epsilon > 0 \quad (2.17)$$

*NOTA. - Ver Mathematical Analysis segunda edición APOSTOL pág.54 Teorema 3.24

Ahora sí, neguemos que $p_{jj}(np-m_1) \rightarrow \text{SUP}$, entonces podemos encontrar un punto de acumulación $\text{SUP}' < \text{SUP}$ al que tienda la subsucesión $p_{jj}(np-m_1)$ así:

$$p_{jj}(np-m_1) < \text{SUP}' < \text{SUP}$$

Sea ahora $N > m_1$ y suficientemente grande para que $r_N < \epsilon$.

y $n_p > N$, o sea, $n_p > N > m_1$ entonces por la relación (2.6)

$$p_{jj}(np) \leq f_{jj}(1) p_{jj}(np-1) + f_{jj}(2) p_{jj}(np-2) + \dots + f_{jj}(N) p_{jj}(np-N) + \sum_{m=N+1}^{np} f_{jj}(m)$$

$$\text{pero: } r_N = \sum_{m=N+1}^{\infty} f_{jj}(m) = \sum_{m=N+1}^{np} f_{jj}(m) + \sum_{m=np+1}^{\infty} f_{jj}(m) = \sum_{m=N+1}^{np} f_{jj}(m) + r_{np} < \epsilon$$

entonces:

$$p_{jj}(np) < \sum_{m=1}^N f_{jj}(m) p_{jj}(np-m) + \epsilon$$

$$\text{y } p_{jj}(np) < \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq m_1}}^N f_{jj}(m) p_{jj}(np-m) + f_{jj}(m_1) p_{jj}(np-m_1) + \epsilon$$

pero las $p_{jj}(np-m)$ están dominadas por $\text{SUP} + \epsilon$ y adicionalmente

$p_{jj}(np-m_1) < \text{SUP}'$, así:

$$p_{jj}(np) < (\text{SUP} + \epsilon) \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq m_1}}^N f_{jj}(m) + \text{SUP}' f_{jj}(m_1) + \epsilon$$

Ahora, $r_0 = 1 \geq \sum_{m=1}^N f_{jj}(m)$ por lo tanto:

$$1 - f_{jj}(m_1) \geq \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq m_1}}^N f_{jj}(m)$$

así:

$$p_{jj}(np) < (\text{SUP} + \epsilon) (1 - f_{jj}(m_1)) + \text{SUP}' f_{jj}(m_1) + \epsilon$$

$$p_{jj}(np) < \text{SUP} + 2\epsilon - f_{jj}(m_1) (\text{SUP} - \text{SUP}') - f_{jj}(m_1)\epsilon$$

podemos despreciar $(f_{jj}(m_1)\epsilon)$ y la desigualdad no se altera.

Ahora podemos encontrar una ϵ suficientemente pequeña tal que

$$f_{jj}(m_1) (\text{SUP} - \text{SUP}') > 3\epsilon \quad (\text{obsérvese el signo menos}), \text{ luego:}$$

$$p_{jj}(np) < \text{SUP} + 2\epsilon - 3\epsilon = \text{SUP} - \epsilon \quad \text{o sea:}$$

$$p_{jj}(np) < \text{SUP} - \epsilon, \text{ lo que contradice (2.17)}$$

luego:

$$p_{jj}(np - m_1) \rightarrow \text{SUP} \quad \text{y es imposible que } \text{SUP}' < \text{SUP}$$

pero entonces también $p_{jj}(np - 2m_1) \rightarrow \text{SUP}$, etc.

a) Consideremos primero el caso en que $f_{jj}(1) > 0$ es decir que

$p_{jj}(1) > 0$ lo que garantiza que la cadena es aperiódica. Entonces para toda m_2 fija:

$$p_{jj}(np - m_2) \rightarrow \text{SUP}$$

Por la relación (2.16) se implica, que cualquiera que sea N fija:

$$r_0 p_{jj}(np) + r_1 p_{jj}(np-1) + \dots + r_N p_{jj}(np-N) \leq 1$$

Pero ya que $p_{jj}(np - m_2) \rightarrow \text{SUP}$ entonces

$$\left[r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_N \right] \text{SUP} \leq 1$$

Como N es arbitraria resulta que:
$$\sum_{m=1}^N m f_{jj}(m) \leq m_{jj}$$

donde m_{jj} es el tiempo medio de recurrencia y:

$$m_{jj} \text{ SUP} \leq 1$$

Por otro lado consideremos INF. El mismo razonamiento de antes permite demostrar que para cada sucesión np , tal que $p_{jj}(np) \rightarrow \text{INF}$ entonces $p_{jj}(np - m_2) \rightarrow \text{INF}$

También aquí podemos encontrar un N suficientemente grande tal que:

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} r_m < \epsilon \quad . \text{ Por la relación (2.16):}$$

$$\sum_{m=0}^N r_m p_{jj}(n-p-m) + \sum_{m=N+1}^{np} r_m \geq 1$$

pero

$$\sum_{m=N+1}^{np} r_m + \sum_{m=np+1}^{\infty} r_m < \epsilon$$

entonces:

$$\sum_{m=0}^N r_m p_{jj}(np-m) + \epsilon > 1$$

pero como: $p_{jj}(np-m) \rightarrow \text{INF}$:

$$\text{INF} \sum_{m=0}^N r_m + \epsilon > 1$$

Como N es arbitrariamente grande:

$$\text{INF} m_{jj} > 1 - \epsilon$$

Luego por definición $\text{INF} \leq \text{SUP}$ así $m_{jj} \text{ INF} \leq m_{jj} \text{ SUP}$

y

$$1 - \varepsilon < m_{jj} \text{ INF} \leq m_{jj} \text{ SUP} < 1$$

pero ε es arbitrariamente pequeña luego:

$$m_{jj} \text{ INF} = m_{jj} \text{ SUP} = 1$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}(n) = \frac{1}{m_{jj}}$ l. q. q. d.

b) Consideremos el caso en que $f_{jj}(1)=0$, es decir que $p_{jj}(1)=0$ y por tanto a simple vista no podemos afirmar que la cadena es aperiódica.

Pero por hipótesis la cadena es aperiódica y por tanto podemos encontrar un conjunto de números $M = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ finito de enteros positivos tal que $f_{jj}(n_i) > 0$ y cuyo máximo común divisor es 1. Así las sucesiones $\{p_{jj}(np - x_1, n_1)\}$, $\{p_{jj}(np - x_2, n_2)\}$, etc, tienden al SUP, luego la sucesión $p_{jj}(np - x_1, n_1 - x_2, n_2 - \dots) \rightarrow \text{SUP}$, cualesquiera que sean los enteros positivos x_i .

Existe un teorema de teoría de números que enuncia que dado un conjunto de números positivos enteros con máximo común divisor t , existe un entero M y enteros no negativos, tal que, $\bigvee m \geq M$:

$$mt = \sum_{j=1}^k C_j n_j$$

Es necesario ilustrar tal teorema para la comprensión de esta segunda parte de la demostración:

Sea A el conjunto $\{a_0, a_1, \dots\}$ donde $a_i = b_{i1} n_1 + b_{i2} n_2 + \dots + b_{ik} n_k$, es decir el conjunto A es el conjunto de las a_i que se pueden representar con las n_i para enteros b_{ij} .

Sea $t' = \text{INF} \{a_i/a_i > 0, a_i \in A\}$. Como t es el m.c.d. de las n_i , éste divide a las $a_i \in A$. De aquí que t , divide a t' y por consiguiente $t' > t$.

Consideremos cualquier elemento $a_i \in A$. Podemos escribir: (Por Euclides)

$$a_i = S t' + L, \quad S, L \in I(\text{enteros})$$

y donde $0 \leq L < t'$

Como:

$$a_i = \sum_{j=1}^k b_{ij} n_j$$

y

$$t' = \sum_{j=1}^k b'_{ij} n_j$$

tenemos que:

$$\sum_{j=1}^k b_{ij} n_j - S \sum_{j=1}^k b'_{ij} n_j = L$$

luego:

$$\sum_{j=1}^k (b_{ij} - S b'_{ij}) n_j = L$$

Ahora sabemos que $(b_{ij} - S b'_{ij})$ son enteros. Si hacemos $\alpha_j = b_{ij} - S b'_{ij}$

entonces obtenemos que:

$$L = \sum_{j=1}^k \alpha_j n_j$$

luego $L \in A$, pero t' es el entero más pequeño positivo en A y

$0 \leq L < t'$ por lo tanto $L=0$. Así

$$a_i = S t'$$

Debe ser observado que las $n_i \in A$ y de aquí que t' divide a las n_i ,

pero t es el m.c.d., luego:

$$t' \leq t$$

pero antes afirmamos que t divide a t' o sea que $t' > t$ por consiguien-

te:

$$t' = t$$

luego $t \in A$.

Así t puede ser representada en función de las n_i . Esta representación

puede contener b_i negativos y b_i positivos o sea que:

$$t = \sum_{i=1}^r b_i^+ n_i + \sum_{i=r+1}^k b_i^- n_i = \sum_{i=1}^r b_i^+ n_i - \sum_{i=r+1}^k b_i^- n_i$$

tal que $b_i^+, b_i^- \geq 0$. Hagamos $N_1 = \sum_{i=1}^r b_i^+ n_i$ y $N_2 = \sum_{i=r+1}^k b_i^- n_i$ luego:

$$t = N_1 - N_2$$

Existen dos casos:

1) Si $N_2=0$, entonces

$$mt = N_1 m = \sum_{i=1}^k C_i n_i, \quad C_i = b_i^+ m, \quad i=1, 2, \dots, r$$

$$\text{y } C_i = 0 = b_i^-, \quad i=r+1, \dots, k$$

2) Si $N_2 > 0$. Como el teorema dice que existe una M , pero no de que forma, hagamos

$$M = \frac{N_2^2}{t}$$

Como $m > M$, entonces por Euclides:

$$m = \frac{M + BN_2}{t} + L_1, \quad B, L_1 \in \mathbb{I} \quad \text{y } B \geq 0, \quad 0 \leq L_1 < \frac{N_2}{t}$$

luego:

$$m = \frac{N_2^2}{t} + \frac{BN_2}{t} + L_1$$

$$mt = N_2^2 + BN_2 + L_1 t$$

$$mt = N_2^2 + BN_2 + L_1 (N_1 - N_2)$$

$$mt = N_2 (N_2 + B - L_1) + L_1 N_1$$

Como $\frac{N_2}{t} > L_1$, entonces $N_2 > L_1$, luego $(N_2 + B - L_1) > 0$

por lo tanto se deduce que:

$$mt = \sum_{i=1}^k G_i n_i, \quad G_i \geq 0$$

Volviendo a la demostración $t=1$, luego las n_i son primos relativos y

se tiene que:

$$k_1 = \sum_{i=1}^k G_i n_i$$

donde podemos hacer que $M = \prod_{i=1}^k n_i$ para garantizar que M existe, luego

$k_1 > M$ y por tanto la sucesión $p_{jj} (np - k_1) \rightarrow \text{SUP}$, es decir, basta ma-

nejar la sucesión $p_{jj}(np-k_1)$ en la parte (a) del teorema y la demostración de esta segunda parte no cambia.

ii) Establecida la parte (i) del teorema, ésta resulta sencilla:

Sabemos que:

$$m_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}(n)$$

pero como la cadena tiene periodicidad t , entonces las $f_{jj}(nt)$ pueden llegar a ser positivas (no negativas) sólo para múltiplos de t , es decir, si se parte del estado j , sólo es posible volver a él en múltiplos de t , así:

$$m_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} nt f_{jj}(nt)$$

De esta forma hemos considerado sólo múltiplos de t , pero:

$$\frac{m_{jj}}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}(nt) = \tilde{m}_{jj}$$

Ahora la variable n en el producto con las $f_{jj}(nt)$ debe interpretarse con la n -ésima visita al estado j a partir de él mismo en longitudes de paso múltiplos de t (nt) exactamente.

Por la parte (i) de este teorema se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}(nt) = \frac{1}{\tilde{m}_{jj}} = \frac{1}{m_{jj}} = \frac{t}{m_{jj}} \quad \text{l. q. q. d.}$$

Estos resultados son los utilizados en el cálculo de las probabilidades estacionarias, en cuanto a estados recurrentes se refiere.

Sólo queda un caso que no es trivial. Este es el caso en que i es transitorio y j recurrente y se quiere calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}(n)$$

Para ello es necesario entender el siguiente teorema:

TEOREMA 2.8. Dado un estado recurrente j de tiempo medio de recurrencia m_{jj} se tiene que:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}(n) = f_{ij} \frac{1}{m_{jj}} \text{ si } j \text{ es aperiódico}$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}(nt+k) = f_{ij} \frac{t}{m_{jj}}$$

Prueba:

(i) Sabemos que por la relación (2.6)

$$P_{ij}(n) = \sum_{m=1}^n f_{ij}(m) P_{jj}(n-m)$$

Sabemos además que:

$$P_{ij}(n) \leq \sum_{m=1}^n f_{ij}(m) \leq 1$$

y debido a que $\sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}(m) \leq 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f_{ij}(m) p_{jj}(n-m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}(m) = f_{ij} \leq 1 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}(m) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}(n-m) \quad \text{y por el teorema 2.7} \end{aligned}$$

para una n suficientemente grande

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}(m) \frac{1}{m_{jj}} = \frac{1}{m_{jj}} f_{ij} \quad \text{l.q.q.d.}$$

ii) Es claro que k es una característica del estado de partida y por tanto las visitas al estado j ulteriores serán $k \bmod t$ donde $k=0, 1, \dots, t-1$, por lo que en la parte (i) bastará substituir n por $nt+k$ así:

$$\begin{aligned} p_{ij}(nt+k) &= \sum_{m=1}^{nt+k} f_{ij}(m) p_{jj}(nt+k-m) \\ &= \sum_{m=1}^{nt+k} f_{ij}(m) p_{jj}((n-m)t) \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(nt+k) = \sum_{m=1}^{nt+k} f_{ij}(m) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}((n-m)t)$$

y por la parte (ii) del teorema 2.7 tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}((n-m)t) = \frac{t}{m_{jj}}$$

entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(nt+k) = \frac{t}{m_{jj}} \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}(mt+k) = f_{ij} \frac{t}{m_{jj}} \text{ l. q. q. d.}$$

En realidad, éste y el anterior teorema han considerado una periodicidad t , pero no se ha dicho nada al respecto de como obtenerla, si es que en la cadena existiera.

Antes de ilustrar la forma en que la periodicidad, si existe o no, es obtenida, necesitamos el siguiente teorema:

TEOREMA 2.9 .- Sea una cadena irreducible finita con estados recurrentes periódicos, con período t . Entonces el conjunto de estados se puede particionar en t clases B_1, B_2, \dots, B_t tal que $p_{ij}(1)=0$, a menos que $i \in B_1$ y $j \in B_2$, ó $i \in B_2$ y $j \in B_3, \dots, \text{ó } i \in B_t$ y $j \in B_1$.

Prueba.- Desde que la cadena es irreducible, para cada par de estados $i, j \in E$ éstos comunican y por tanto sabemos que existen al menos un par de enteros fijos r, s , tal que $p_{ij}(r) > 0$ y $p_{ji}(s) > 0$. Sea m un entero (no fijo) para el cuál:

$$p_{ii}(m+s) = \sum_{\forall k \in E} p_{ik}(m) p_{ki}(s) \geq p_{ij}(m) p_{ji}(s)$$

Si $p_{ij}(m) > 0$, entonces, $p_{ii}(m+s) \geq p_{ij}(m) p_{ji}(s) > 0$

pero como cada estado de la cadena es periódico, i lo es, luego $m+s$, ha de ser un múltiplo de t , es decir, $m+s = nt$ donde n es algún entero. Como s es fijo y m varía entonces m es la que define la clase de

que se trate. Dado que m puede ser expresado en la forma $m=at + b$, $a, b \geq 0$ (Algoritmo de Euclides) y como m es una característica asociada al estado j , que se explica: "los estados j que se pueden visitar a partir de i en m pasos ($p_{ij}(m) > 0$)", entonces b define la clase B_b , ya que b no varía al variar m , luego j podrá ser visitado en paso de longitud $b, b+t, b+2t, \dots$ (Véase ejemplo 1.5 Capítulo 1) a partir de i .

Es claro que $b=0, 1, 2, \dots, t-1$ por lo que tendremos t clases $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{t-1}$.

Así B_{b+1} el conjunto de estados j que se pueden visitar a partir de i en pasos $m = at + b + 1$

l.q.q.d.

Estamos en posición de tratar la periodicidad t . Para ésto, el algoritmo de Dijkstra es útil. Vamos a fundamentar la utilización de este algoritmo estableciendo la correspondencia que el teorema 2.9 tiene con la teoría de gráficas.

En realidad es una clase periódica "el conjunto de transiciones" de un estado i a un estado j serán múltiplos, es decir, es claro que si j posee la característica a (refiriéndose al teorema 2.9) j podrá ser visitado en pasos de longitud $a, a+t, a+2t, \dots$. Pues bien al afirmar se que son múltiplos se está diciendo que la diferencia de cualesquiera dos transiciones pertenece a los enteros o sea:

$$(a+kt) - (a+ut) = a - a + t(k-u) = t(k-u) \text{ y } k-u \in I$$

donde I son los enteros. Esto mismo sucede en la Teoría de Gráficas. Mostrémoslo en el siguiente teorema:

TEOREMA 2.10.- Las longitudes de los caminos obtenidos entre dos vértices i, j cualesquiera, en una clase final (subgráfica fuertemente conexa máxima) son múltiplos entre sí:

Prueba.- Sea $C_1(i, j)$ un camino de i, j y $L(C_1(i, j))$ su longitud y sea $C(j, i)$ el camino de regreso. Por tener la gráfica de transiciones posibles, sólo será factible volver a i con caminos de longitud múltiplos de t , así:

$$L(C_1(i, j)) + L(C(j, i)) = nt = 0 \pmod{t}$$

Sea $C_2(i, j)$ otro camino y $L(C_2(i, j))$ su longitud. También:

$$L(C_2(i, j)) + L(C(j, i)) = mt = 0 \pmod{t}$$

así:

$$L(C_2(i, j)) - L(C_1(i, j)) = 0 \pmod{t} \quad \text{l. q. d.}$$

Del teorema anterior es fácil encontrar la correspondencia entre el teorema (2.7) y la teoría de gráficas, "definiendo" una distancia entre dos vértices cualesquiera de una gráfica como:

$$D(i, j) = L(C_1(i, j)) \pmod{t}$$

puediendo seleccionarse cualquier camino $C_1(i, j)$ fijo.

La distancia así introducida nos permite definir claramente t clases de equivalencia que particionan al conjunto de vértices.

Sea " v " un vértice arbitrario fijo de la gráfica. Así la partición resulta como:

$$C_n = \left\{ i / D(v, i) = n \right\} \quad n = 0, 1, 2, \dots, t-1$$

Es claro, que el concepto de período se ha hecho presente, implícitamente, a lo largo de la teoría que se ha desarrollado referente a cadenas Periódicas. Para que no queden cabos sueltos demos su definición.

Periodicidad. - El máximo común divisor t del conjunto de todas las $n \geq 1$ para las cuáles $p_{jj}(n) > 0$, se denomina periodicidad de una cadena Markoviana. Comúnmente se dice que una cadena Markoviana es aperiódica si $t=1$.

Ilustremos en un ejemplo todo lo referente a cadenas periódicas:

EJEMPLO 2

Sea la matriz de transición en un paso:

$$P(1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Obtengamos su matriz Booleana y calculemos circuitos de longitud no nula para cada uno de los vértices:

Principiemos con el vértice número 1 y apliquemos Dijkstra de la siguiente forma:

		1	2	3	4	5	6	7	L 1
*	1	0	0	1	1	1	0	0	3
	2	0	0	1	0	1	0	0	3
	3	0	0	0	0	0	1	1	1
B =	4	0	0	0	0	0	0	1	1
	5	0	0	0	0	0	1	1	1
	6	1	1	0	0	0	0	0	2
	7	1	1	0	0	0	0	0	2

Obsérvese que el vértice (1) a partir del cuál se quieren calcular las distancias, no es etiquetado inicialmente. Esto es lo que nos permite obtener circuitos de longitud no nula y establece una ligera modificación en el algoritmo de Dijkstra.

Computacionalmente nos interesa sólo, guardar un vector de distancias de un vértice cualquiera a todos los demás (lógicamente incluso él) para aplicar sobre este vector el Teorema (2.9)

Para el ejemplo ilustraremos la obtención de las distintas clases de equivalencia B_0, B_1, \dots, B_{t-1} en solo un vector de distancias.

El máximo común divisor es obtenido progresivamente por el algoritmo de Euclides.

Siguiendo, hemos calculado las distancias a partir del vértice 1 y hemos obtenido un circuito de longitud 3 es decir $L(C(1, 1))=1$

Pasemos al siguiente vértice:

$$B = \begin{array}{c} \\ \\ * \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} L_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \textcircled{3} \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

Así ya tenemos dos números a los cuáles se les puede calcular el máximo común divisor, es decir:

$$m. C. D_1 = (L(C(1, 1)), L(C(2, 2))) = (3, 3) = 3$$

Pasemos al vértice 3:

$$B = \begin{array}{c} \\ \\ * \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} L_3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ \textcircled{3} \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

El máximo común divisor será ahora:

$$m. C. D_2 = (m. C. D_1, L(C(3, 3))) = (3, 3) = 3$$

El vértice 4:

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 B = *4 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & L_4 \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c}
 2 \\
 2 \\
 3 \\
 \textcircled{3} \\
 3 \\
 4 \\
 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Luego m. C. $D_3 = (m. C. D_2, L(C(4, 4))) = (3, 3) = 3$

Pasemos al vértice 5:

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 B = 4 \\
 *5 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & L_5 \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c}
 2 \\
 2 \\
 3 \\
 3 \\
 \textcircled{3} \\
 1 \\
 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

y m. C. $D_4 = (m. C. D_3, L(C(5, 5))) = (3, 3) = 3$

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 * \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 L_6 \\
 \left[\begin{array}{c}
 1 \\
 1 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 \textcircled{3} \\
 3
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$m. C. D_5 = (m. C. D_4, L(C(6, 6))) = (3, 3) = 3$$

y por último:

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 * \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 L_7 \\
 \left[\begin{array}{c}
 1 \\
 1 \\
 2 \\
 2 \\
 2 \\
 3 \\
 \textcircled{3}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Así

$$t = (m. C. D_6, 3) = (3, 3) = 3$$

Tomemos el vector L_1 y apliquemos el teorema 2.9

$$L_1 \text{ mod } t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Así } B_0 = \{1, 2\} \quad B_1 = \{6, 7\} \quad B_2 = \{3, 4, 5\}$$

Ahora podemos comprobar mediante la matriz Booleana que se puede pasar de $B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_0$.

Esto significa que la cadena es periódica con periodicidad 3. La comprobación anterior se puede llevar a cabo con cualquiera de los L_i -- obtenidos y se obtendrán las mismas subclases, es decir la misma partición pero con los índices permutados circularmente.

Es en esta parte donde terminamos el análisis de las cadenas Markovianas.

Queda decir, que son muchos los puntos que se pueden tratar en dicho análisis, limitándose este trabajo a tratar sólo aquellos conceptos que fueron utilizados en el programa de computadora que se considerará en la siguiente parte.

SISTEMATIZACION

3.1 INTRODUCCION

Como se mencionó en alguna ocasión, la clasificación de estados ha facilitado enormemente el análisis de las Cadenas Markovianas.

A su vez, este análisis podría ser más ágil si fuera posible llevarlo a cabo mediante una computadora digital. El objetivo de este capítulo es mostrar como se puede sistematizar el análisis de las cadenas de Markov finitas y homogéneas, llevando a cabo la clasificación de esta dos mediante algoritmos de Teoría de Gráficas tratados en el primer capítulo de este trabajo, para con ello, pasar a la aplicación de los conceptos considerados en la segunda parte de este trabajo.

Como todo seguimiento realizado en la elaboración de un programa de computadora, se presenta un diagrama de bloque, y posterior a él su correspondiente diagrama de flujo.

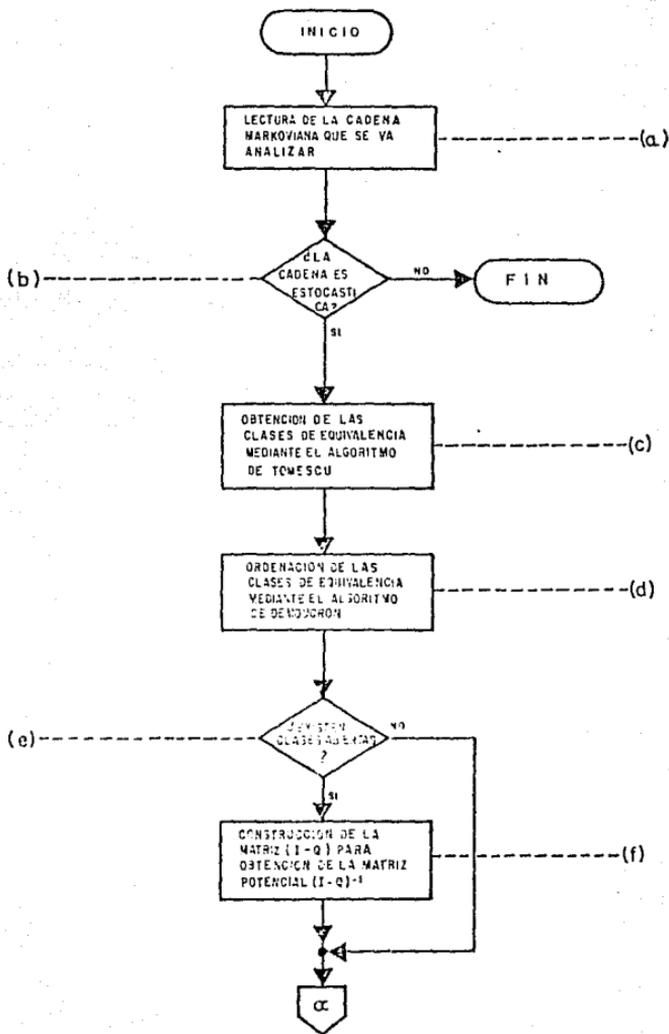
La presentación del diagrama de flujo se hace en forma particionada para llevar una mayor claridad en su exposición.

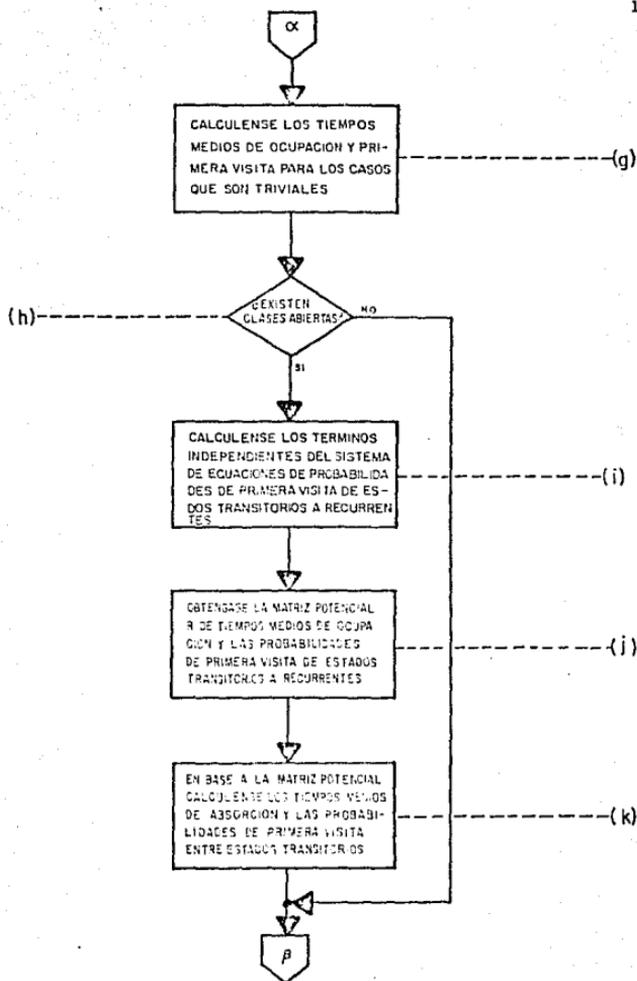
Es de observarse que el programa, fue probado en una microcomputadora en lenguaje de programación BASIC por lo que se anexa un lis

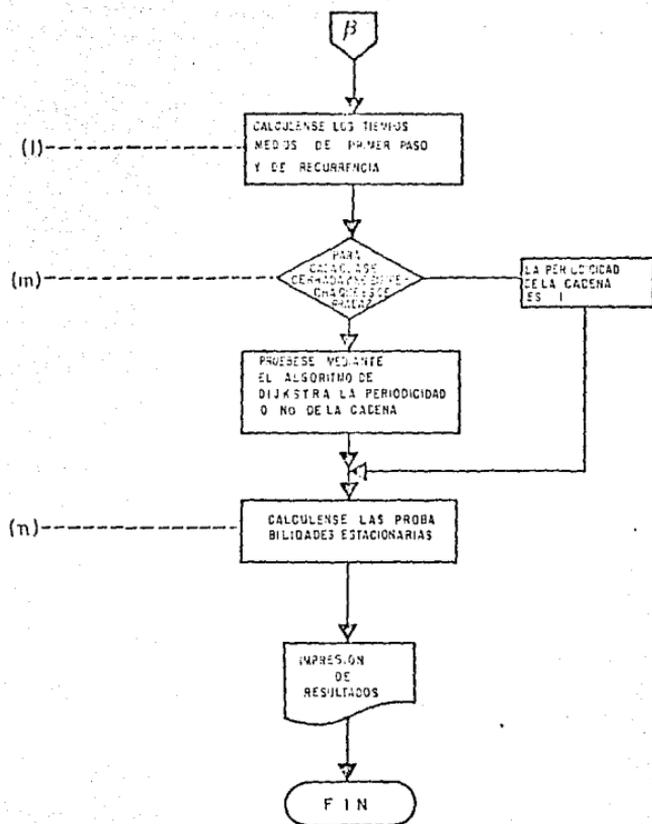
tado del programa en tal lenguaje y la forma de usarse.

En el programa se anexa una subrutina de inversión de matrices y resolución de ecuaciones simultáneas. Esta, no fue elaborada, sino que fue consultada en un libro de métodos numéricos, debido a que éste no presenta ninguna aportación.

3.2 DIAGRAMA DE BLOQUE







3.3 INTERPRETACION DE VARIABLES

- 1) A (I, J). - Arreglo bidimensional en el cuál se coloca una matriz que se va a invertir en la subrutina INVSOL. La subrutina procesa A(I, J) y devuelve, en el mismo arreglo, la inversa de la matriz. (PRECISION SIMPLE)

- 2) B (I, J). - Arreglo bidimensional, en el cuál se colocan los vectores de términos independientes de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas. Este arreglo es procesado por la subrutina INVSOL y la solución del sistema de ecuaciones, si existe, es colocada en el mismo arreglo B.

El último uso de este arreglo, es el de alojar la matriz de probabilidades estacionarias. (PRECISION SIMPLE)

- 3) IO. - Controla el orden de la matriz cambiante en el algoritmo de Tomescu.

En el algoritmo de Dijkstra, se utiliza como marca, es decir como la longitud de los caminos de longitud mínima de un vértice fijo a todos los demás. (ENTERA)

- 4) II. - Determina el número de clases de equivalencia (subgráficas fuertemente conexas) que se generan en el algoritmo de Tomescu (ENTERA).

- 5) IUD. - Es un índice que señala el número de vértice que se está analizando actualmente en forma directa, en el algoritmo de Tomescu. También es utilizado en la parte de tiempos medios de primer paso, como índice para construir la matriz necesaria para obtener dichos tiempos.
- Por último, es también utilizado en el algoritmo de Dijkstra para señalar, el número de vértice que se está analizando (ENTERA)
- 6) IUI. - Es un índice que señala el número de vértice que se está analizando actualmente en forma inversa en el algoritmo de Tomescu.
- Es utilizado también en la parte de tiempos medios de primer paso, como índice, para construir la matriz necesaria para obtener dichos tiempos.
- Es utilizado como residuo en el algoritmo de Euclides en la parte de cadenas periódicas. (ENTERA)
- 7) IFLAGI. - Señala que la condición ICI de convergencia ha sido alcanzada en forma inversa, en el algoritmo de Tomescu. Es utilizada como variable temporal en el cálculo de las probabilidades de primera visita y los tiempos medios de

ocupación que son triviales. (ENTERA)

- 8) IFLAGD. - Señala que la condición ICD de convergencia ha sido alcanzada en forma directa, en el algoritmo de Tomescu. Es utilizada como variable temporal en el cálculo de las probabilidades de primera visita y los tiempos medios de ocupación que son triviales. También es utilizada como señal en el algoritmo de Dijkstra para indicar que un vector de distancias se ha completado. (ENTERA)
- 9) ICI. - Condición de convergencia en forma inversa en el algoritmo de Tomescu. Contador. (ENTERA)
- 10) ICD - Condición de convergencia en forma directa en el algoritmo de Tomescu. Contador. (ENTERA)
- 11) II 1. - Es el número de niveles que se generan en el algoritmo de Demoucron (ENTERA)
- 12) IV (I). - Arreglo para manipular vértices durante todo el transcurso del programa. (ENTERO)
- 13) IUSCAD(I). - Este arreglo es utilizado en el algoritmo de Tomescu para manejar el conjunto de vértices que se han de investigar en forma directa. De la misma forma es -

utilizado en el algoritmo de Dijkstra (ENTERO)

- 14) IUSCAI(I). - Este arreglo es utilizado en el algoritmo de Tomescu para manejar el conjunto de vértices que se han de investigar en forma inversa.
Se utiliza en el algoritmo de Dijkstra para guardar un vector completo de distancias. (ENTERO)
- 15) IRELD(I). - Es usado como vector de cierre transitivo directo en el algoritmo de Tomescu.
Es usado como vector de \wedge^i en el algoritmo de Demoucron.
Es usado como vector de distancias en el algoritmo de Dijkstra (ENTERO)
- 16) IRELI(I). - Se utiliza como vector de cierre transitivo inverso en el algoritmo de Tomescu.
También se utiliza para guardar la periodicidad de cada cadena cerrada (ENTERO)
- 17) ICO. - Sirve como contador en el algoritmo de Tomescu para obtener el nuevo orden de la matriz que resulta de eliminar los vértices que pertenecen a la intersección de los cierres transitivos inverso y directo. -
Se utiliza también como variable temporal. (ENTERA)

- 18) ICLASE(I, J).- Arreglo bidimensional que trata los vértices j-ésimos de la clase i-ésima(ENTERO)
- 19) JV(I).- Arreglo para manipular vértices durante parte del programa.
Es usado como contador de vértices en la formación de las subclases de una clase cerrada en la parte de cadenas periódicas. (ENTERO)
- 20) KI.- Contador para el número de estados transitorios (ENTERA)
- 21) LI.- Contador de clases cerradas utilizado en el cálculo de probabilidades de primera visita de estados transitorios a recurrentes.
Variable que sirve para controlar el cambio de orden de la matriz en el algoritmo de Demoucron (ENTERA)
- 22) LABEL.- Variable Temporal (ALFANUMERICA)
- 23) MD.- Contador de índices de vértices que serán analizados en el algoritmo de Tomescu en forma directa.
Es utilizado en forma similar con el algoritmo de Dijkstra (ENTERA)
- 24) MI.- Contador de índices de vértices que serán analizados en el algoritmo de Tomescu en forma inversa. (ENTERA)

- 25) M CLASE (I, J). - Matriz de clases, formada a partir de las subgráficas fuertemente conexas obtenidas en el algoritmo de Tomescu. Establece la relación entre tales subgráficas.
- Además es utilizado en alojar las diferentes subclases que se generan en el algoritmo de Dijkstra en la parte de Cadenas periódicas.(ENTERO)
- 26) N . - Orden de la matriz de transición de un paso de la Cadena Markoviana que se está analizando.(ENTERA)
- 27) NN(I) . - Número de vértices de la clase i-ésima (ENTERA)
- 28) N1 (I) . - Número de clases que se encuentran en el nivel i-ésimo (ENTERO)
- 29) NIVEL(I, J) . - Clase o subgráfica fuertemente conexa j-ésima del nivel i-ésimo.(ENTERO)
- 30) PDPV(I, J) . - Arreglo bidimensional que memoriza las probabilidades de primera visita del estado I al estado J -- (PRECISION SIMPLE)
- 31) TMA (I) . - Arreglo unidimensional que aloja el tiempo medio de absorción a partir del estado I.(PRECISION SIMPLE)

- 32) TMO(I, J) .- Arreglo bidimensional que guarda los tiempos medios de ocupación del estado J a partir del estado I. (PRECISION SIMPLE)
- 33) TMPP(I, J, K). - Arreglo tridimensional que guarda los tiempos medios de primer paso y recurrencia del estado K a partir del estado J en la clase I (PRECISION SIMPLE)
- 34) X(I, J) .- Arreglo bidimensional que aloja la matriz de probabilidades de transición en un paso del estado I al estado J. (PRECISION SIMPLE)
- 35) Z .- Variable Temporal (PRECISION SIMPLE)

VARIABLES USADAS EN LA SUBROUTINA INVSOL

- 1) A (I, J) .- Arreglo bidimensional común al programa principal, el cuál almacena una matriz que se va a invertir y cuya inversa, es colocada, en este mismo arreglo (PRECISION SIMPLE)
- 2) B(I, J) .- Arreglo de términos independientes que se alimenta a la subrutina, y en el cuál se regresa, si la hay, la solución de un sistema de ecuaciones (PRECISION SIMPLE)

- 3) DET. - Variable que almacena el determinante de la matriz $A(I, J)$ (PRECISION SIMPLE)
- 4) IP(J). - Arreglo que indica si la columna (Renglón) j -ésima, ha sido convertida en columna. pivotal. Esto se hace en forma Booleana (ENTERA)
- 5) IR. - Variable que indica el renglón pivotal que se está analizando (ENTERA)
- 6) IC. - Variable que indica la columna pivotal que se está analizando (ENTERA)
- 7) IN(M, 1). - Memoriza los renglones que son cambiados de lugar, debido a que existe pivoteo completo (ENTERO)
- 8) IN (M, 2). - Memoriza las columnas que son cambiadas de lugar. - (ENTERO)
- 9) NB. - Número de columnas del arreglo $B(I, J)$. (ENTERA)
- 10) NS. - Orden de la matriz $A(I, J)$. (ENTERA)
- 11) PI. - Valor del pivote actual. (PRECISION SIMPLE)
- 12) ZM. - Variable artificial (PRECISION SIMPLE)

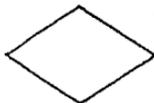
SIMBOLOS UTILIZADOS EN EL DIAGRAMA DE FLUJO



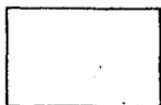
- - - - - Conector dentro de la misma página



- - - - - Conector fuera de la página que se está analizando



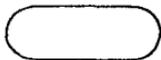
- - - - - Símbolo decisional



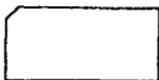
- - - - - Símbolo para procesar información



- - - - - Permite repetir una serie de instrucciones de acuerdo con los parámetros que se indiquen dentro de tal símbolo



- - - - - Indica el inicio o final de un programa o la llamada o regreso de alguna subrutina



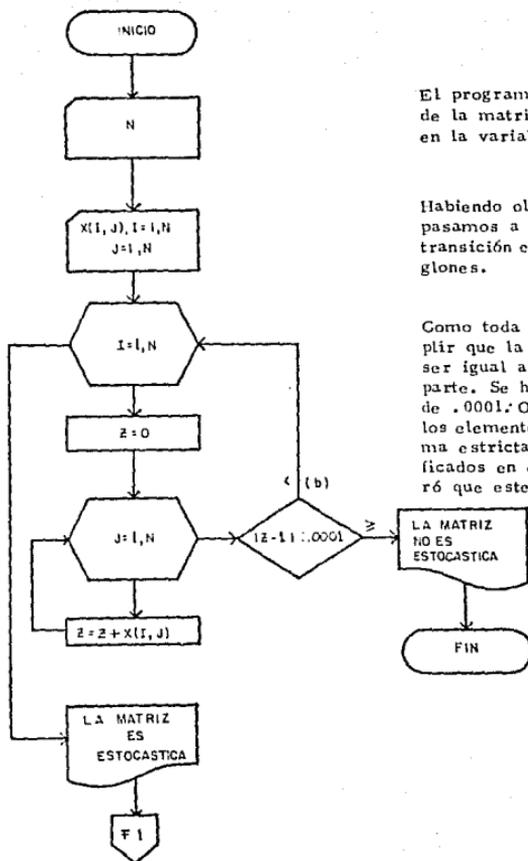
- - - - - Indica una entrada de datos al programa



- - - - - Indica la salida de información o impresión de resultados

3.4 DIAGRAMA DE FLUJO

(a)



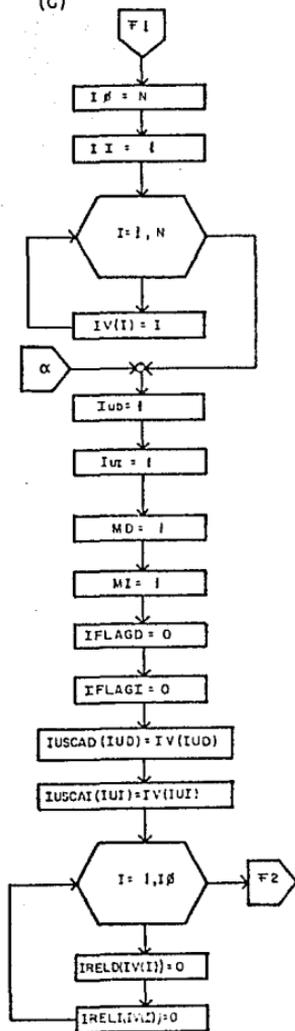
El programa empieza, leyendo el orden de la matriz de transición en un paso, en la variable entera N.

Habiendo obtenido el orden de la matriz pasamos a leer las probabilidades de transición en el arreglo $X(I, J)$, por renglones.

Como toda matriz estocástica, debe cumplir que la suma de sus renglones debe ser igual a 1, esto es revisado en esta parte. Se ha considerado una tolerancia de .0001. Obsérvese que la revisión de los elementos $X(I, J)$ no se hace en forma estricta, es decir, éstos no son verificados en el intervalo (0, 1). Se consideró que este error no puede ser cometido a estas alturas.

Por otro lado, no se revisa si la matriz es doblemente estocástica, ya que esto no es de interés en la estructura de este programa. Nótese que las matrices doblemente estocásticas sí ofrecen ventajas pero no aquí.

(C)



Aquí se inicia el algoritmo de Tomescu.

124

Cuando fue considerado, se observó que la matriz Booleana cambiaba su orden. IO es la variable que guarda este orden. Lógicamente IO debe empezar valiéndolo N. II es un contador referido al número de clases de equivalencia o subgráficas fuertemente conexas que se pueden generar.

Debido a que el comienzo del algoritmo es arbitrario en cuanto a vértices se refiere, no se sabrá a priori cuáles serán los vértices que se eliminarán. Para solventar el problema, manejaremos los vértices (estados) como arreglo. De éste será necesario inicializar el arreglo de vértices.

IUD es una variable que tiene la función de indicar cuál es el "número" de vértice que se está investigando en forma directa (Por renglones).

IUI, tiene la misma función que IUD pero la investigación es en forma inversa (por columnas).

MD es un contador para el número de vértices que se tendrá que investigar en forma directa.

MI es utilizado en la misma forma que MD pero en forma inversa.

IFLAGD es una condición de convergencia en forma directa, es decir, cuando en forma directa no es posible etiquetar ningún otro vértice, esta variable se vuelve 1, en caso contrario vale cero.

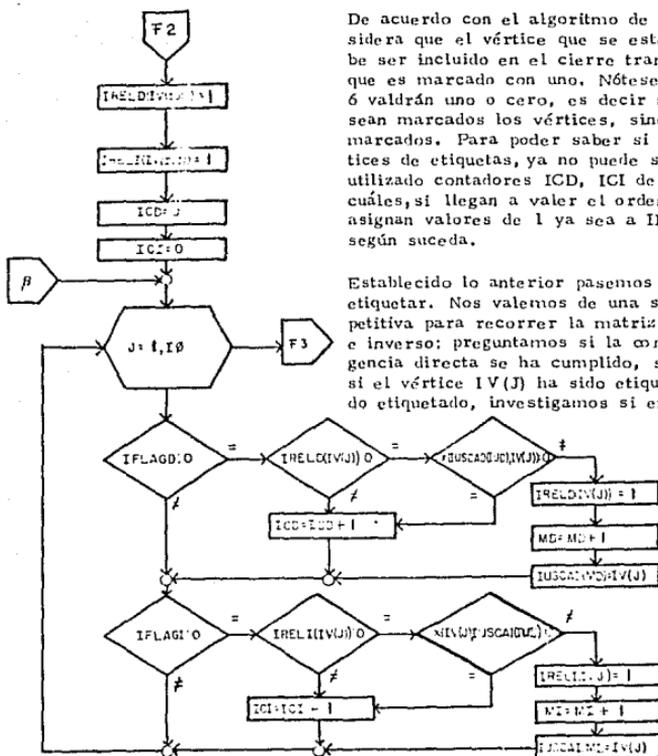
IFLAGI es igual que IFLAGD pero su función es establecida en forma inversa.

IUSCAD(IUD) es el vértice que actualmente se está investigando. En este caso se inicializa con el primer vértice (arbitrariamente)

IUSCAI(IUI) resulta similar a IUSCAD(IUD) pero en forma inversa.

En esta parte se inicializan los vectores de etiquetas en forma directa e inversa, IRELD e IRELI respectivamente. Se considera un vértice no etiquetado, si su etiqueta vale cero.

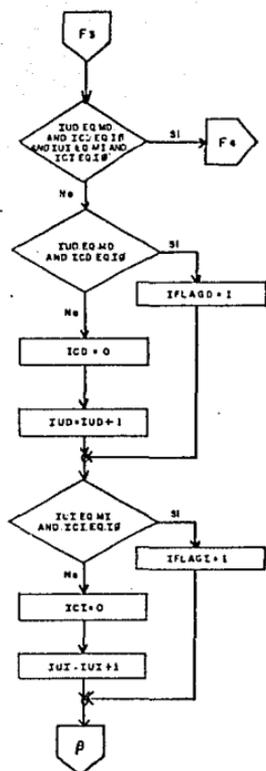
De acuerdo con el algoritmo de Tomescu, se considera que el vértice que se está investigando debe ser incluido en el cierre transitivo, es por eso que es marcado con uno. Nótese que las etiquetas ó valdrán uno o cero, es decir no interesa con que sean marcados los vértices, sino sólo cuáles sean marcados. Para poder saber si algunos de los vértices de etiquetas, ya no puede ser marcado, se han utilizado contadores ICD, ICI de convergencia los cuáles, si llegan a valer el orden IO de la matriz - asignan valores de 1 ya sea a IFLAGD o a IFLAGI, según suceda.



Establecido lo anterior pasemos a ver la lógica de etiquetar. Nos valemos de una sola instrucción repetitiva para recorrer la matriz en sentido directo e inverso; preguntamos si la condición de convergencia directa se ha cumplido, si no, preguntamos si el vértice IV(J) ha sido etiquetado. Si no ha sido etiquetado, investigamos si existe relación, si

existe, entonces marcamos dicho vértice con uno, incrementamos el número de vértices que tendrán que ser investigados y los identificamos.

En caso de que las dos últimas preguntas no se cumplan, éstas van a contribuir a incrementar en uno, la condición de convergencia ICD. Terminado este análisis en forma directa, pasamos a procesar las etiquetas en forma inversa, lo cuál resulta redundante en cuanto a explicación se refiere.



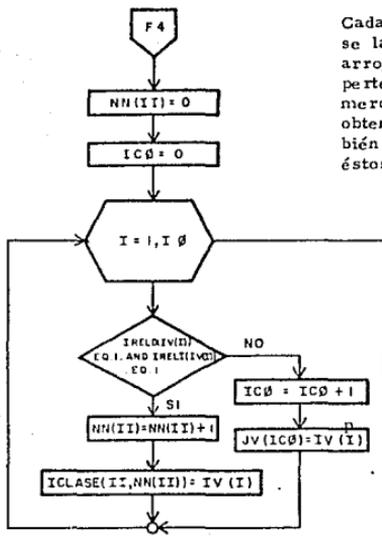
Para que una iteración finalice, tiene que cumplirse simultáneamente que todos los vértices contabilizados, tanto en forma directa como inversa, hayan sido etiquetados (IUD, EQ, MD, AND, IUI, EQ, MI) y adicionalmente que las condiciones de convergencia su cumplan (ICD, ICI).

Si falla cualquiera de los elementos enunciados, se pasa a investigar en forma parcial, si en algunos de los sentidos directo o inverso, se cumple lo anterior.

En caso de que se cumpla en alguno de los sentidos, la variable correspondiente, ya sea IFLAGD o IFLAGI, valdrá uno, en caso contrario se inicializa la condición de convergencia, ya sea ICD o ICI y se pasa a la investigación del siguiente vértice aumentando el índice correspondiente IUD o IUI y se regresa a la lógica de etiquetación.

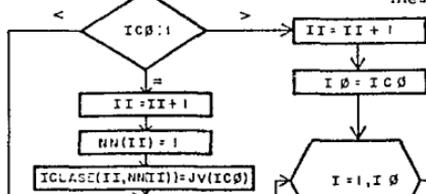
Si la condición de terminación se cumple pasamos a F4.

Cada vez que una iteración finaliza debe investigarse la intersección de los cierres transitivos. Esto arrojará el número de estados y cuáles son los que pertenecen a la clase. Pues bien, $NN(II)$ es el número de estados de la clase II . Así como hay que obtener los vértices que pertenecen a la clase, también hay que obtener los que no pertenecen, pues éstos se usarán en la siguiente iteración.



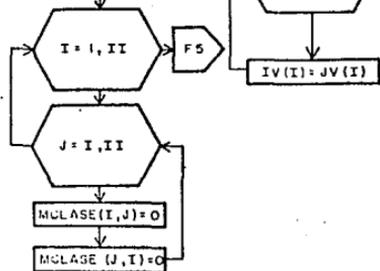
ICO tiene la finalidad de contarlos y $JV(ICO)$ de memorizar cuáles son los que no pertenecen. Obsérvese que la intersección de los cierres transitivos es establecida en el condicional.

El arreglo bidimensional $ICLASE(II, NN(II))$ es el encargado de memorizar el vértice número $NN(II)$ de la clase II . Al salir de esta parte se pregunta: si la variable ICO es menor que uno, significa que ya no existen vértices sobre los cuáles actuar, en cuyo caso el algoritmo finaliza. Si existiera uno, éste quedaría determinado por eliminación y se colocaría en su clase correspondiente, con lo que también finalizaría el algoritmo de Tomescu.

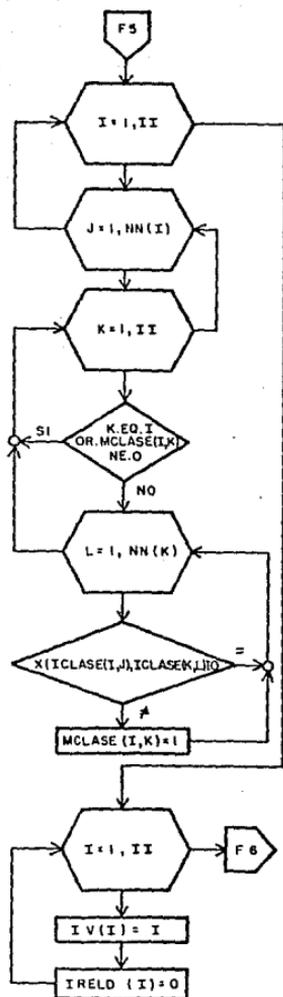


Por último si ICO fuera mayor a uno, pasaríamos a preparar otra iteración, incrementando en uno la variable II , cambiando el orden IO por ICO y colocando los vértices que no pertenecieron a la última clase obtenida en el arreglo $IV(I)$.

(d)



Cuando el algoritmo de Tomescu finaliza pasamos a inicializar la matriz de clases.



Recuérdese que las clases se consideran como nuevos vértices. Esta etapa del programa se dedica a formar la matriz de esos nuevos vértices, la que se llamará matriz de clases.

Esto se hace para poder llevar a cabo la ordenación de dichas clases mediante el algoritmo de Demoucron.

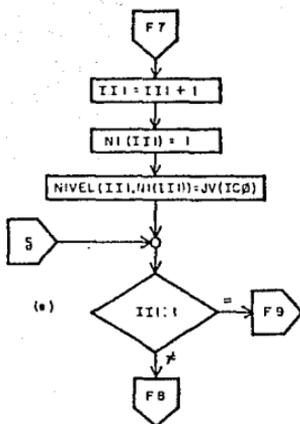
Para no gastar memoria, se puede utilizar el vector Λ para usarlo como vector de Λ .

Si se recuerda el algoritmo de Demoucron utiliza un vector Λ 's donde va obteniendo los diversos niveles o generaciones de la gráfica ordenada.

Así mismo, con la finalidad de no gastar memoria, se ha utilizado el arreglo $IV(I)$ en el algoritmo.

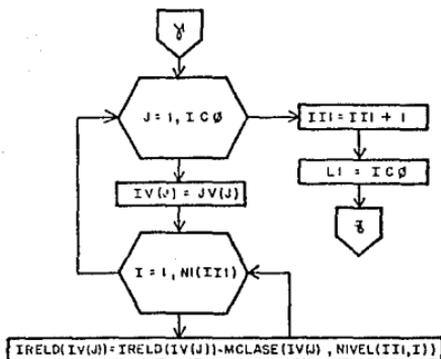
Obsérvese que se suscita la situación de ir eliminando vértices por lo que es necesario, manejarlos como arreglo.

De lo anterior, entonces, inicializamos los arreglos $IV(I)$ e $IRELD(I)$ y procedemos a ordenar las clases, apoyados en la matriz de clases así formada.

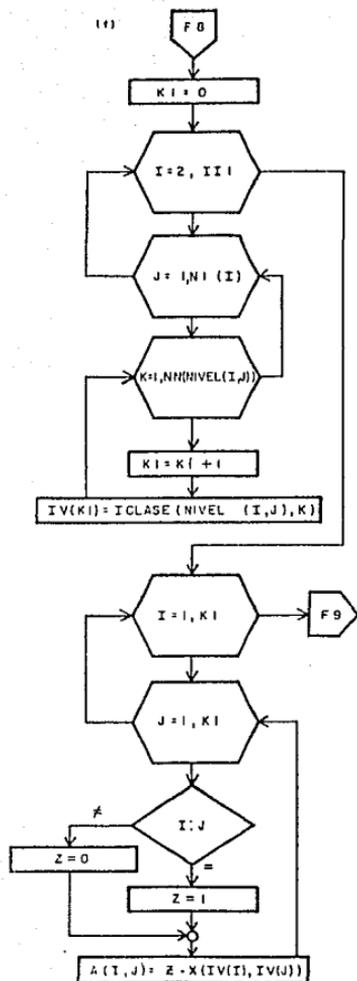


La clase restante es contabilizada e identificada.

Si el número de niveles III es igual a uno, sólo existirán estados recurrentes y se tendría que pasar a F9, pero si III es mayor a uno, existen estados transitorios. Nótese que III no puede ser menor a uno.



Si el número de clases restantes es mayor a uno, entonces se procede a restar del vector IRELD las columnas de las -- clases últimamente obtenidas, se aumenta el número de niveles y se cambia el orden del vector IRELD en la variable LI.



El hecho de que el proceso pase por aquí, indica la existencia de estados transitorios. La variable $K1$ es un contador para determinar el número de estados transitorios; es necesario también identificar cuáles son estos estados transitorios. Utilizaremos el arreglo $IV(I)$ para lograr esta identificación.

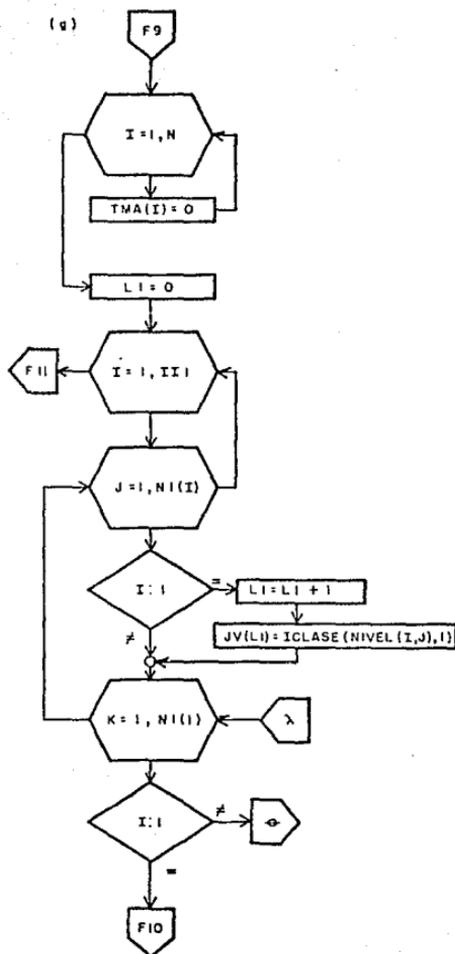
Obsérvese que la primera instrucción repetitiva se inicia del nivel dos en adelante, por lo que sólo se están considerando estados transitorios. En realidad lo que se está obteniendo es la submatriz Q .

Habiendo identificado la matriz Q calcularemos la matriz $(I-Q)$, ya que esta matriz es utilizada tanto en la obtención de los tiempos medios de ocupación, como en las probabilidades de primera visita de estados transitorios a recurrentes.

La matriz $(I-Q)$ se ha asignado a la matriz $A(I, J)$.

Habiendo terminado esto, pasamos a $F9$.

(d)

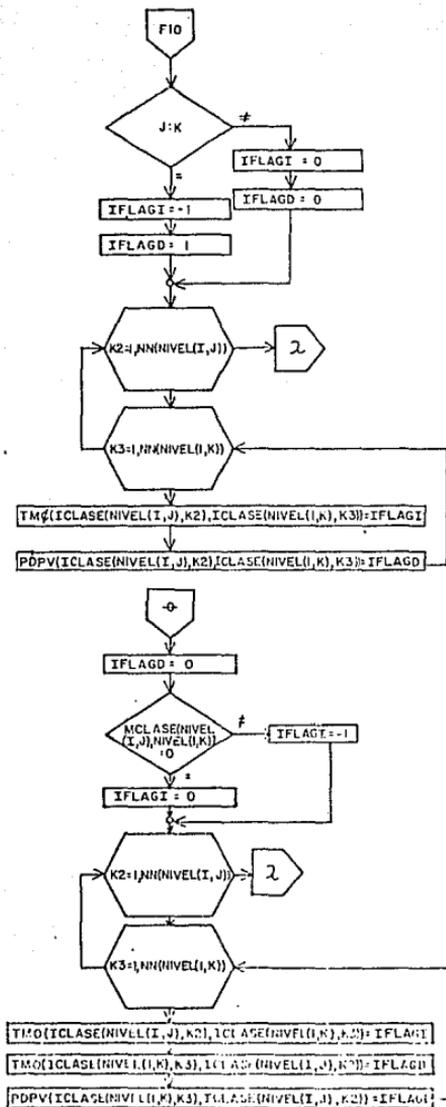


TMA(I) es el arreglo que sirve para calcular los tiempos medios de absorción. En esta parte los inicializamos.

Utilizaremos la variable L1 para contar un estado por clase recurrente y para identificar dichos estados. Esto es así, porque si se recuerda en la parte de probabilidades de primera visita de estados transitorios a recurrentes, bastaba calcular dichas probabilidades a sólo un estado de la clase, para tener las probabilidades de primera visita a todos los estados de dicha clase, ya que resultaban equivalentes. Pues bien, de esto, JV(L1) nos servirá para copiar un estado por cada clase recurrente.

Antes de pasar a calcular las probabilidades de primera visita de estados transitorios a recurrentes, tenemos que calcular aquéllas que resultan triviales y es esta etapa la que se dedica a ello.

El condicional sirve para identificar el nivel. Si I es diferente de uno entonces se trata de estados transitorios, en caso contrario, se trata de estados recurrentes.



En el caso de que estuviéramos en el primer nivel (clases cerradas), tendríamos que identificar si nos encontramos dentro de una misma clase cerrada o en diferentes. Esto lo establece el condicional, comparando J con K; si son iguales las $f_{jk}=1$ y su $r_{jk}=\infty$ ($f_{kj}=1$ y $r_{kj}=\infty$). Para poder saber si es infinito o no, en la impresión de resultados y dado que no existen tiempos medios de ocupación negativos, utilizamos como señal un $r_{jk}=-1$ para fines de programación.

En caso de que nos encontremos en clases diferentes cerradas, sabemos que las $f_{jk}=0$ y $r_{jk}=0$.

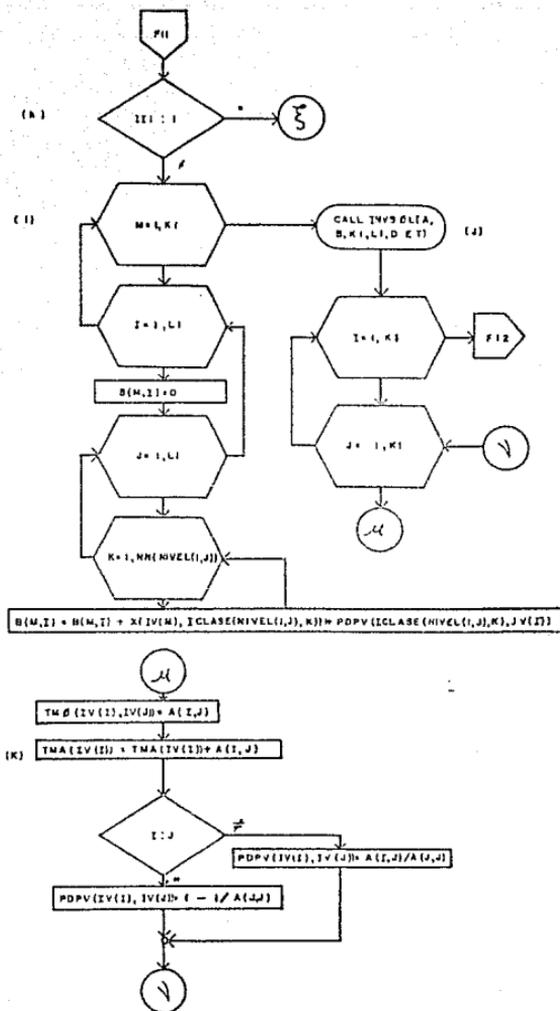
Pero si tenemos estados transitorios, entonces sabemos que las $f_{jk}=0$ si j recurrente y k transitorio, luego --- IFLAGD=0

De una clase abierta se puede tener acceso o no a una clase cerrada, esto se establece en el condicional mediante la matriz de clases. Dependiendo de ello; si se tiene acceso el $r_{jk}=\infty$ -- (IFLAGI = -1), si no, entonces $r_{jk}=0$.

En todos los casos $r_{jk}=0$ si j recurrente y k transitorio.

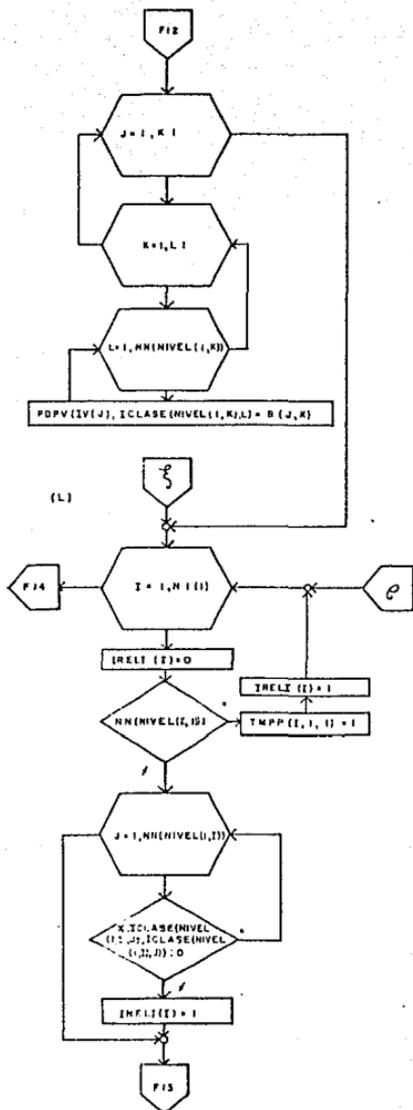
Si no existen estados transitorios el cálculo de tiempos medios de ocupación de tales estados no procede y por tanto no existe la matriz Q. Supongamos que $I \gg 1$. Si esto sucede pasamos a calcular el arreglo de términos independientes $B(M, I)$ el cual tendrá $K1$ renglones y $L1$ columnas de acuerdo al número de clases cerradas.

Hecho esto, obtenemos la matriz potencial $(I-Q)^{-1}$, la cual se regresa de la subrutina -- INVSOL en A y la solución para las f_{jk} , siendo j transitorio y k recurrente, en el arreglo B.



Como las $A(I, J)$ son los tiempos medios de ocupación, se asignan al arreglo TMO y como los tiempos medios de absorción son la suma de los tiempos medios de ocupación, éstos son sumados en el arreglo TMA. Por otro lado, si se recuerda que las f_{jk} para j, k transitorios se pueden calcular a partir de los tiempos medios de ocupación mediante:

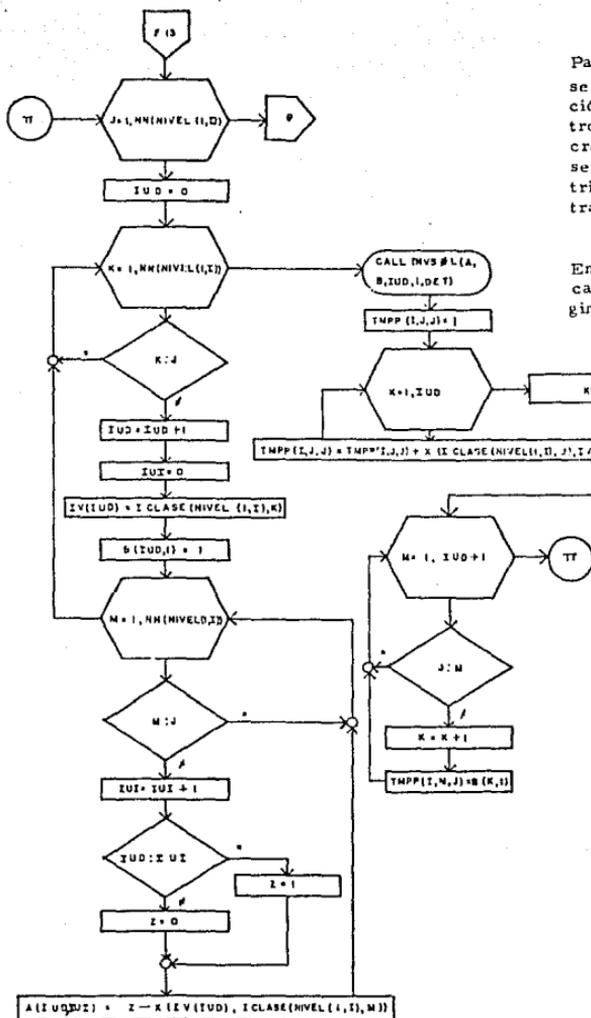
$$f_{jk} = \begin{cases} r_{jk} & \text{si } j \neq k \\ r_{kk} & \text{si } j = k \end{cases} \quad j, k \in T'$$



Como se mencionó antes, cuando se utilizó la subrutina INVSOL, las probabilidades de primera visita de estados transitorios a recurrentes se encuentran en el arreglo $B(J, K)$. El arreglo PDPV es el arreglo de las probabilidades de primera visita y por tanto las $B(J, K)$ son asignadas a PDPV en lo que corresponda.

Estamos en posición de calcular los tiempos medios de primer paso y de recurrencia. Aprovechamos en esta etapa del programa, la estructura del mismo, para ver la posible detección de cadenas aperiódicas. El arreglo IRELI(I) es utilizado para memorizar la periodicidad de la clase I. Si el número de estados de la clase I es uno, el $TMPP(I, 1) = 1$.

La detección de la periodicidad igual a uno, se hace comparando los elementos diagonales de la clase con cero. Si existe al menos uno diferente de cero, la clase es aperiódica, en caso contrario no se puede afirmar nada aún acerca de la periodicidad.



Para calcular los $TMPP(I, J, K)$ se utiliza el artificio de creación de estados absorbentes dentro de la clase. Así para cada creación de estado absorbente, se tiene que calcular una matriz $A(I, J)$ a invertir y encontrar en $B(I, 1)$ la solución.

En realidad esa es toda la lógica que se presenta en esta página.

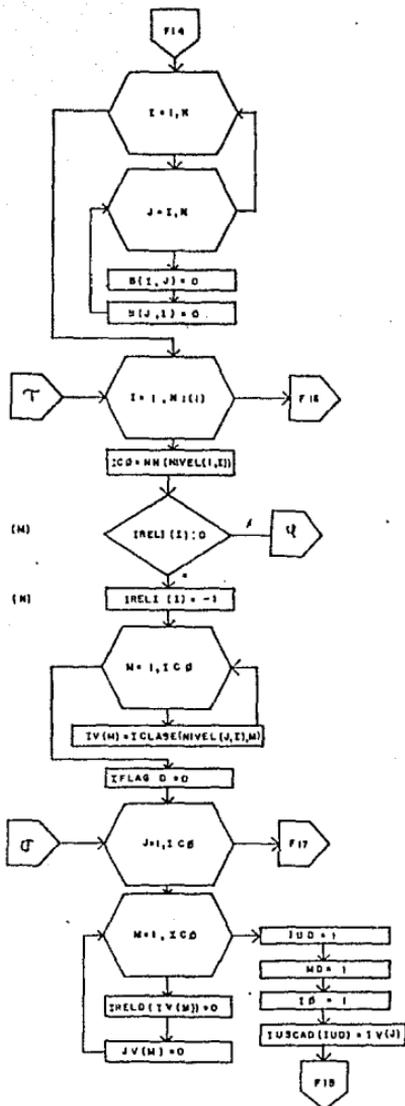
$TMPP(I, J, K)$ significa tiempo medio de primer paso del estado J al estado K en la clase I .

Después de que se calculan los tiempos medios de primer paso, se calcula el de recurrencia en función de los anteriores.

Aquí se hace la asignación de los tiempos medios de primer paso contenidos en $B(K, 1)$ a los $TMPP(I, M, J)$

Pensando en un ahorro de memoria se ha considerado que el arreglo $B(I, J)$, alojará las -- probabilidades estacionarias. Es por eso que $B(I, J)$ es inicializado en este punto.

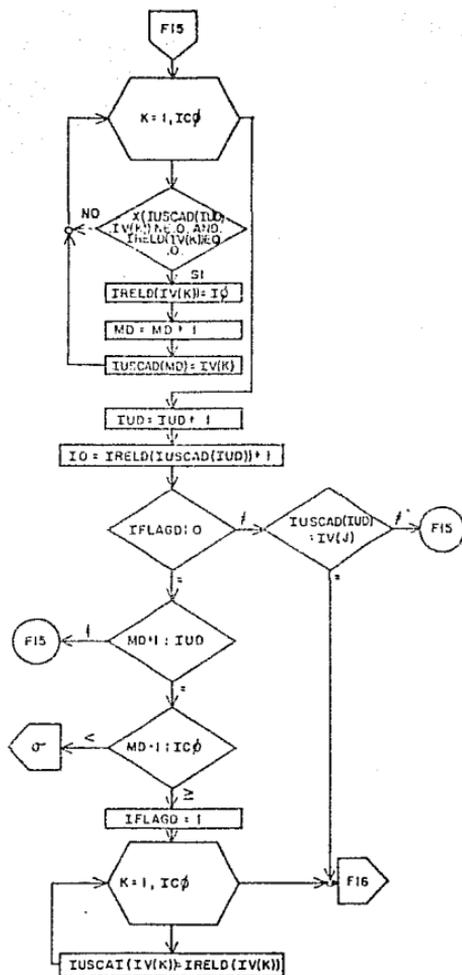
$B(I, J)$ ya no tendrá ninguna otra función de aquí en adelante.



El condicional establece la aperiódicidad de la clase I . Si es aperiódica se va a ψ en caso contrario, se sospecha que la clase I es periódica ($IRELI(I) > 1$). En el último caso se procede a aplicar el algoritmo de --- Dijkstra para la determinación de la periodicidad de la clase i -ésima. Se hace la periodicidad igual a menos uno y se copian los -- vértices de la clase cerrada que se esté analizando en el arreglo $IV(M)$ para una manipulación más rápida y flexible.

$IRELD$ será el vector de marcas y $JV(I)$ el -- arreglo destinado a contar el número de estados de la subclase I para una clase cerrada especificada. Para cada clase cerrada que se analiza, estos arreglos son inicializados.

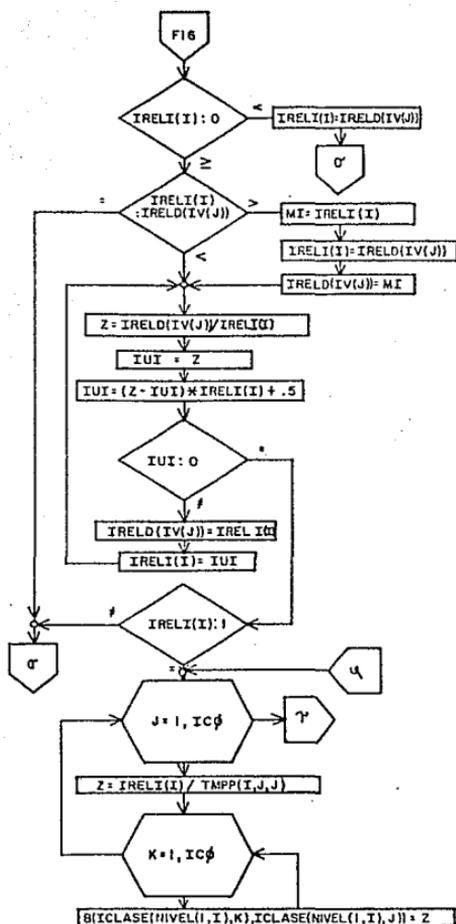
IUD es el índice del vértice que se está analizando. MD es el contador de vértices que se analizarán e $IUSCAD(I)$ el vértice que se está investigando. Como aquí si interesa el valor de la marca, IO será la variable que indica -- tal marca.



Esta parte establece la correspondencia entre el vértice IUSCAD (IUD) y los demás vértices de la clase mediante el condicional. En caso de existir correspondencia entre los vértices IUSCAD e IV y éste último no haya sido etiquetado, se procede a etiquetarlo con la marca - IO, se contabiliza en MD y se identifica en IUSCAD (MD). Al terminar este análisis se pasa al siguiente vértice candidato a investigarse, incrementando IUD en uno y se obtiene la marca IO correspondiente a dicho vértice la cuál se plasmará en sus correspondientes.

La variable IFLAGD se establece sólo para restringir la trayectoria del algoritmo, encaminada a obtener un vector IRELD que se haya etiquetado completamente para poder copiarlo en el arreglo IUSCAD. Como se vio en el algoritmo de Dijkstra aplicado a cadenas periódicas, éste busca circuitos de longitud mínima. Para revisar si una cadena es periódica o no, se requiere por lo menos un vector completo de distancias de cualquier vértice a cualquier otro y las distancias mínimas de circuitos de cada vértice (distancias diferentes de cero). Cuando se logra un vector completo, la variable IFLAGD es igual a uno. Cuando esto sucede, el condicional de tal variable manda a preguntar si el vértice que se está investigando es el mismo del que se partió, en cuyo caso converge la iteración.

El condicional de MD+1 establece que todos los vértices que deben investigarse, sean investigados y por último el condicional de MD=I establece que el vector IRELD sea totalmente etiquetado.



Como la periodicidad de una cadena se determina como el máximo común divisor de la longitud de todos los circuitos, éste se va calculando progresivamente mediante el algoritmo de Euclides. Recuérdese que IRELI(I) se hace negativa inicialmente. Esto indica que es la primera distancia que se calcula y por tanto no hay con que comparar.

La periodicidad IRELI(I) siempre será menor o igual de la menor de las longitudes de los circuitos.

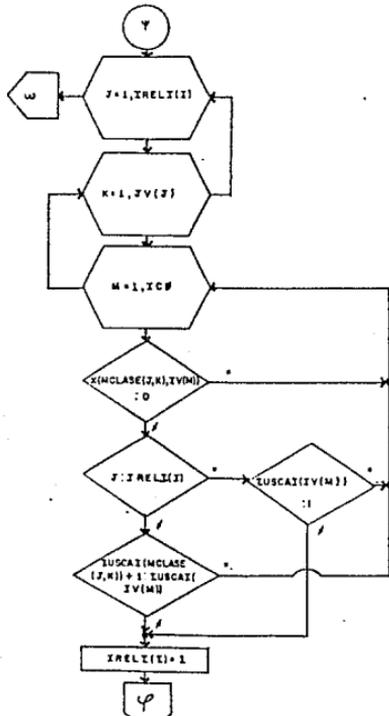
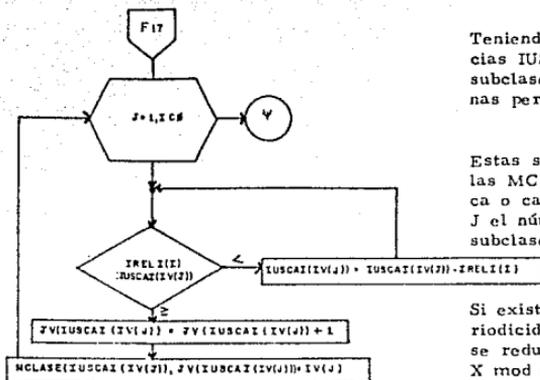
En IUI se calcula el residuo de la división de IRELD(IV(J)) e IRELI(I); si este residuo resulta igual a cero el máximo común divisor se encontrará en IRELI(I), en caso contrario se sigue con el algoritmo de Euclides.

Esta parte se dedica a calcular las probabilidades estacionarias, dividiendo la periodicidad obtenida entre el tiempo medio de recurrencia y asignándola a los correspondientes estados en el arreglo B.

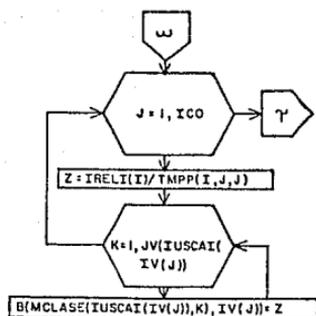
Teniendo el vector completo de distancias IUSCAI(I), se pasa a formar las subclases vistas en el análisis de cadenas periódicas.

Estas subclases de equivalencia son - las MCLASE (I, J), donde I es la marca o característica de esa subclase y J el número de vértice de la misma - subclase.

Si existe una distancia mayor a la periodicidad considerada, esta distancia se reduce, pues se supone que es $--- X \text{ mod } (IRELI(I))$ donde X es la característica de esa subclase.

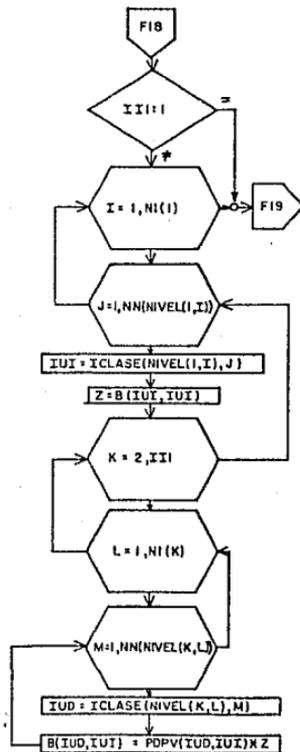


En esta parte se revisa la correspondencia entre subclases (Teorema 2.7) si es que la existe. En caso de que no se cumpla, la cadena resulta aperiódica. En caso de que si se cumpla dicha correspondencia los estados con igual marca forman las respectivas subclases.



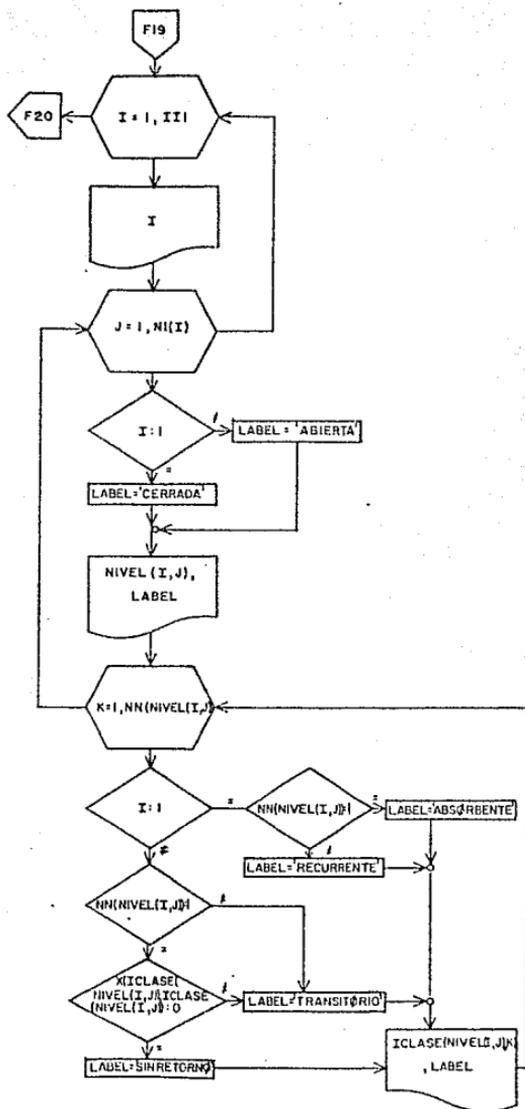
Cuando la periodicidad es mayor o igual que dos, esta parte calcula las probabilidades estacionarias correspondientes utilizando la relación de la periodicidad y los tiempos m_{ij} medios de recurrencia.

De nuevo estas probabilidades son asignadas al arreglo B.



Habiendo calculado las probabilidades estacionarias para las clases cerradas, si existen estados transitorios ($II \neq 1$) se procede a calcular las probabilidades estacionarias de estados transitorios a recurrentes.

Estas probabilidades son calculadas como el producto de las probabilidades de primera visita de estados transitorios a recurrentes por las probabilidades estacionarias de tales estados recurrentes.

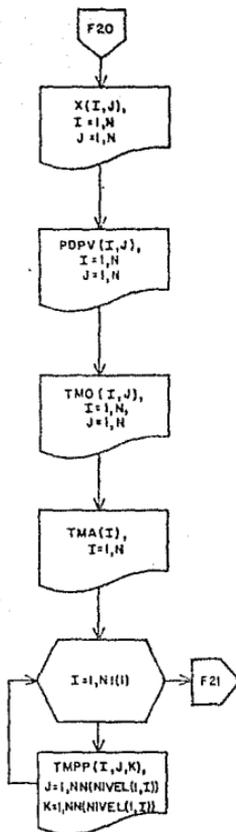


En esta hoja se presenta el seguimiento para la impresión de la clasificación de estados.

Se imprime el nivel.

Se imprime la clase J perteniente al nivel I y su tipo (cerrada o abierta)

Se imprime el estado ICLASE perteniente a la clase ----- NIVEL (I, J) y su tipo (absorbente, recurrente, transitorio o sin retorno)



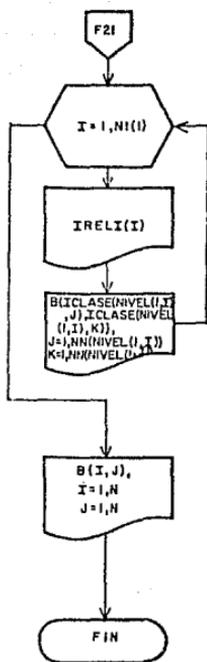
Se imprime la matriz de transición en un paso de la cadena que se está analizando.

Se imprimen las probabilidades de primera visita $f_{jk} \forall j, k \in E$

Se imprimen los tiempos medios de ocupación $r_{ij} \forall j, i \in E$

Se imprimen los tiempos medios de absorción $m_j \forall j \in E$

Se imprimen los tiempos medios de primer paso y de recurrencia para la clase I del nivel l del estado J al estado K

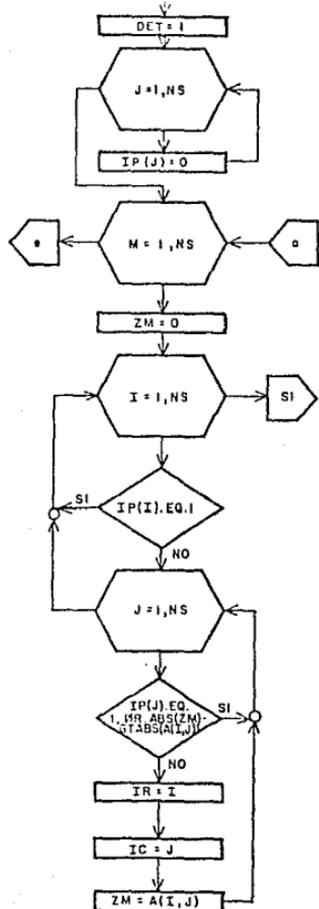


Se imprime la periodicidad de la clase I cerrada.

Se imprimen las probabilidades estacionarias de la clase I para los estados de dicha clase.

Se imprime la matriz estocástica estacionaria completa.

SUBROUTINE INVSPL (A, B, NS, NB, DET)



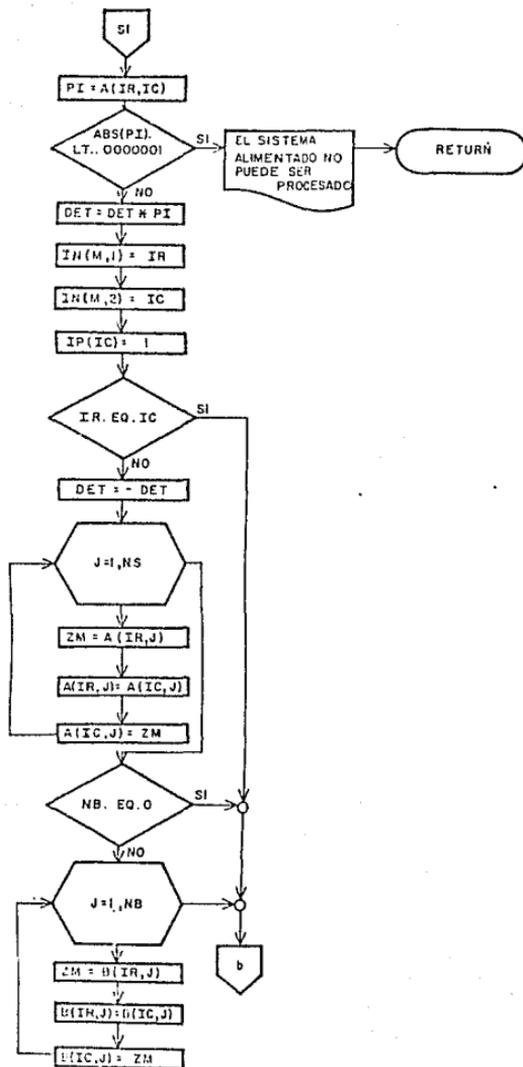
Esta subrutina sirve, tanto para invertir matrices como para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas.

La matriz de coeficientes entra en el arreglo A y el vector ó vectores de términos independientes en el arreglo B. NS es el orden de la matriz A y NB el número de vectores de términos independientes.

Se utiliza el método de Gauss-Jordan con pivoteo completo y la inversa se coloca en el mismo arreglo A y la solución al sistema en el arreglo B.

El arreglo IP(J) puede valer cero o -uno; valdrá cero si la columna I se ha convertido en unitaria, virtualmente, ya que en realidad la matriz identidad no aparece en algún arreglo específico.

Se hace una búsqueda del pivote mayor. Este queda memorizado por medio de los índices IR e IC, donde IR es el renglón e IC la columna del pivote.

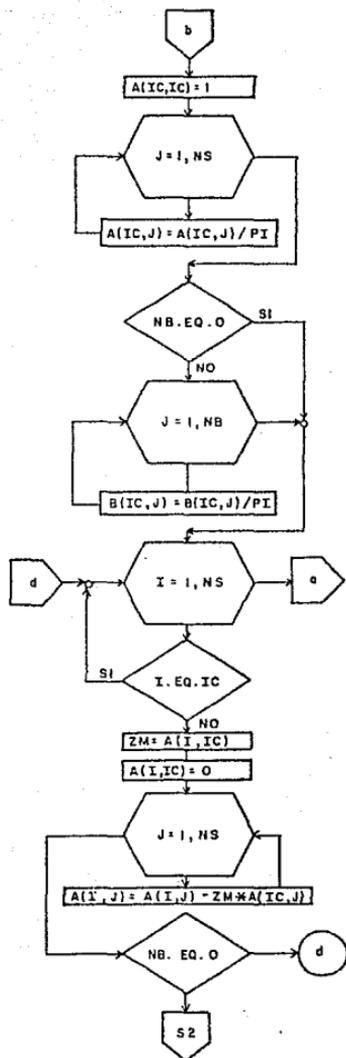


Se asigna a la variable PI el pivote seleccionado en la búsqueda anterior. Si este pivote es menor que 0.000001 (tolerancia establecida) la matriz A es singular y ya no se puede seguir. En caso contrario, como el determinante es el producto de los pivotes se almacena tal producto progresivo en DET .

Como los renglones y columnas se intercambian es necesario memorizar tal intercambio y esto se logra mediante el arreglo $IN(N, J)$; cuando $J=1$ se trata de renglones y cuando $J=2$ se trata de columnas.

Aquí se lleva a cabo el intercambio de renglón o columna dependiendo si el pivote que se haya encontrado está en la diagonal o no.

Si existen términos independientes es necesario (o no) llevar a cabo el intercambio correspondiente.

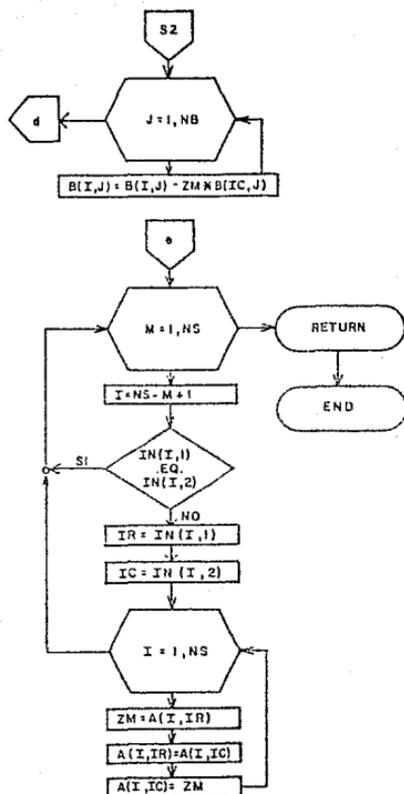


Para evitar problemas de tolerancia se hace directamente $A(IC, IC) = 1$.

Luego se lleva a cabo la división sobre los coeficientes del renglón pivotal entre el pivote.

Si existen vectores independientes se aplica la división sobre tales vectores.

En realidad se lleva a cabo el método de Gauss-Jordan en esta parte.



Terminado el proceso del método de Gauss-Jordan se lleva a cabo un reordenamiento progresivo para colocar de nuevo en su lugar original a los coeficientes que fueron intercambiados.

3.5 EXPLICACION DEL USO DEL PROGRAMA PARA MICROCOMPUTADORA TRS-80

El programa antes enunciado, fue implementado en una microcomputadora TRS-80 RADIO SHACK en lenguaje de programación BASIC.

Pasemos a ilustrar su funcionamiento:

1).- Habiendo cargado el programa en la máquina (listado que se presenta al final del capítulo) se inicia la sesión, tecleando el comando RUN, a lo que la máquina contestará "CADENAS DE MARKOV" y después de algunos segundos pondrá el letrero: "SOY UN PROGRAMA QUE SIRVE PARA ANALIZAR CADENAS DE MARKOV FINITAS Y HOMOGENEAS; PRESIONA ENTER", a lo que se debe contestar presionando la tecla ENTER. Hecho ésto, aparecerá un letrero preguntando el orden de la matriz de transición, es decir: "ORDEN DE LA CADENA?". Para responder, tecleése el orden de la matriz y presione la tecla ENTER. Luego la máquina preguntará por las probabilidades de transición una a una por renglones. Para introducir las tecleése las probabilidades de transición y presiónese la tecla ENTER. Habiendo terminado de introducir las probabilidades, según si hayan sido correctas o no, la máquina contestará:

a) Si la matriz introducida es incorrecta la máquina contestará: "LA MATRIZ NO ES ESTOCASTICA TRATA OTRA VEZ" y estará lista para introducir de nuevo la matriz.

Esto sucederá también en caso de que alguno de los renglones de la matriz no sume uno, en el momento de terminar de introducir el renglón defectuoso.

- b) Si la matriz es estocástica, la máquina revisará si es - además doblemente estocástica en cuyo caso imprimirá - el letrero correspondiente y habrá que esperar a que analice la cadena.

Al pasar la etapa anterior la máquina mostrará lo que hizo y lo que puede hacer de la siguiente forma:

ESTRUCTURA DE RESULTADOS

- (01) CADENA QUE SE ESTA ANALIZANDO
- (02) CLASIFICACION DE ESTADOS
- (03) PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA
- (04) TIEMPOS MEDIOS DE OCUPACION
- (05) TIEMPOS MEDIOS DE ABSORCION
- (06) TIEMPOS MEDIOS DE PRIMER PASO Y RECURRENCIA
- (07) PROBABILIDADES ESTACIONARIAS
- (08) MATRIZ ESTOCASTICA COMPLETA
- (09) PROBABILIDADES DE ESTADO DE PASO ENESIMO
- (10) PROBABILIDAD DE PRIMERA VISITA A UN ESTADO EN N PASOS
- (11) DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD INCONDICIONAL INICIAL

(12) INTRODUCCION DE UNA NUEVA CADENA

(13) ALTO

Del número (01) al número (08) son cálculos que la máquina realizó, el punto (09) y el (10) son cálculos que puede realizar, de acuerdo a las necesidades del usuario. Para solicitar cualquiera de los puntos anteriores sólo hay que teclear los dígitos encerrados entre paréntesis: la máquina responderá y para retornar, a que muestre la estructura de resultados sólo hay que presionar la tecla ENTER.

La máquina detecta errores de usuario en los puntos (09) y (10).

Pues bien la única forma de conocer lo que hace este programa es - probándolo.


```
10200 A(I,C)=M. FOR J=OTONS A(I,J)=A(I,J)+F1 NEXT J:IF A(I,OTHELE)=0 ELSE FOR J=OTHE B(I,J)=B(I,J)+F1 NEXT
10300 FOR J=OTONS: IF I=C THEN NEXT I:M ELSE M=A(I,C)+A(I,C)+0 FOR J=OTONS A(I,J)=A(I,J)+2*M*A(I,J): NEXT J:IF A(I,OTHELE)=M ELSE FOR J=OTON
B(I,J)=B(I,J)+2*M*A(I,J): NEXT J:I,M
10400 FOR J=OTONS: J=M+M. IF INCL(0)=INCL(1) THEN NEXT I: RETURN ELSE I=INCL(0). IC=INCL(1): FOR J=OTONS 2*M*A(I,J)=A(I,J)+A(I,C)+A(I,C)+2*M
NEXT I:M: RETURN
```

ESTE PROGRAMA CUELA SIN INFORMACION DOS BYTES

APLICACIONES

4.1 INTRODUCCION

Se han buscado aplicaciones que ilustren en su desarrollo gran parte de los conceptos que se han venido cubriendo a lo largo de este trabajo.

Es claro, que no necesariamente se puede encontrar una interpretación práctica a todos los conceptos y por tanto sólo algunos de ellos serán señalados, en donde corresponda para una determinada aplicación.

4.2 ENDOGAMIA

Lo que se pretende, al considerar este tema, es presentar la explicación de un resultado que ha venido sucediendo por cuestiones restrictivas, sobre el apareamiento consanguíneo, de dos elementos de sexo opuesto de determinadas especies y sobre algunas otras de reproducción asexual.

Un caso particular de endogamia se ha suscitado en un grupo religioso, geográfica y culturalmente aislado denominado OLD ORDER - AMISH en Pensilvania, Ohio, Indiana y Ontario, el cuál ha presentado el síndrome de Ellis-van Creveld y algunas otras enfermedades -

recesivas raras.

Aunque la endogamia es menos frecuente en poblaciones de gran tamaño y con tendencia a disminuir, cobra interés en el estudio de la patología en pequeñas poblaciones y en el comercialismo de ciertas especies animales como la chinchilla, el visón, etc., en donde se busca procrear descendencias cada vez más puras de un determinado rasgo deseado.

Un caso, un tanto desagradable, fue el que ocurrió en los llamadas "Campos del Amor" establecidos por Hitler, el cuál buscaba el filtro de la raza humana, tanto intelectual como físicamente, seleccionando los mejores elementos y procreándolos entre ellos.

Llevemos la ilustración a un caso en especial. La sangre de un ser humano está constituida por glóbulos blancos y glóbulos rojos. Los glóbulos rojos tienen la función de transportar oxígeno. En ellos existe un pigmento proteínico llamado hemoglobina. En individuos normales existe la hemoglobina del tipo A representada por un par de genes AA.

Cuando en la hemoglobina se suceden alteraciones genéticas se consiguen genes del tipo SS que cambian la forma de los glóbulos rojos propiciando su destrucción lo que se traduce en una anemia.

De lo anterior podemos conseguir seis posibles uniones diferentes pro

duciendo hijos que pueden tener genes del tipo AA, SS ó AS. Los dos primeros se caracterizan por ser homocigotos o de un solo tipo y el último, heterocigoto.

Así podemos construir una tabla para los diferentes tipos de unión y calcular las probabilidades de tener un hijo con alguno de los tres tipos de genotipos. (AA, SS, AS)

TIPO DE UNION	PROBABILIDADES DEL GENOTIPO DEL HIJO		
	AA	AS	SS
1 AA con SS	0	1	0
2 AA con AS	1/2	1/2	0
3 AS con AS	1/4	1/2	1/4
4 AS con SS	0	1/2	1/2
5 AA con AA	1	0	0
6 SS con SS	0	0	1

Expliquemos como fueron obtenidas, por ejemplo las probabilidades para los genotipos a partir de la unión 3 (AS con AS). Siempre existen 4 posibles formas de unión, es decir, el primer gen A con uno de los dos genes A ó S y el gen S con uno de los dos genes A o S, así existen AA, AS, SA ó SS entonces:

$$P[AA] = \frac{1}{4}, \quad P[(AS) \cup (SA)] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad P[SS] = \frac{1}{4}$$

Supongamos que tenemos una población pequeña o que restringimos (como en algunos grupos aislados) la reproducción de la especie a llevarse a cabo únicamente entre descendientes. A partir de un determinado tipo de unión, podemos obtener la probabilidad de todos los tipos de uniones, lo cual representa una cadena Markoviana: Construimos ésta, considerando cada tipo de unión como un estado posible y hagamos referencia a este tipo de unión por su número: ---
(La unión 1 es AA con SS)

$$P_{11}(1)=0$$

$$P_{12}(1)=0$$

$$P_{13}(1)=1$$

$$P_{14}(1)=0$$

$$P_{15}(1)=0$$

$$P_{16}(1)=0$$

$$P_{21}(1)=2 \times \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$$P_{22}(1)=2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{23}(1)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P_{24}(1)=0$$

$$P_{25}(1)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P_{26}(1)=0$$

$$P_{31}(1)=2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P_{32}(1)=2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P_{33}(1)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P_{34}(1)=2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P_{35}(1)=\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P_{36}(1)=\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Así podríamos seguir de lo que resulta la Cadena Markoviana homogénea y finita:

$$P(1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Al analizar esta cadena se ha obtenido que existen dos estados absorbentes: éstos son AA con AA y SS con SS. Esto significa que las descendencias ulteriores alcanzarán los tipos de genes AA o SS tarde o temprano. Si se cae en SS se tendrán anémicos puros, en caso contrario si se tienen AA serán del tipo normal.

Todos los demás tipos de unión son transitorios.

Se obtuvo la siguiente matriz de probabilidades de primera visita:

$$\{f_{jk}\} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} .250 & .500 & 1.000 & .500 & .500 & .500 \\ .125 & .625 & .500 & .250 & .750 & .250 \\ .250 & .500 & .625 & .500 & .500 & .500 \\ .125 & .250 & .500 & .625 & .250 & .750 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

Lo que es interesante observar en esta matriz son; la probabilidad de primera visita del tipo de unión 5 a partir del tipo de unión 2 y la probabilidad de primera visita del tipo de unión 6 a partir del tipo de unión 4. Estas probabilidades son altas y significan que si la descendencia se inició en tal tipo de unión será pura con altas probabilidades.

Estas probabilidades son un indicador valioso para un médico ya que

al tomar la historia familiar es absolutamente obligado preguntar si hay consanguinidad de los padres. Ante un paciente, sobre todo un niño, cuyo trastorno no corresponde a ningún diagnóstico neto y claro, la historia de consanguinidad de los padres, muchas veces es el primer dato que da la pista de que el paciente está sufriendo un trastorno raro heredado en forma recesiva.

Por otro lado la matriz de tiempos medios de ocupación nos muestra el número de descendencias promedio que tendrán que pasar a partir de un determinado tipo de unión, en cada tipo de unión, antes de convertirse en un tipo de unión pura. Tal matriz es:

$$\{r_{jk}\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 1.333 & 1.333 & 2.666 & 1.333 & \infty & \infty \\ .167 & 2.667 & 1.333 & .666 & \infty & \infty \\ .333 & 1.333 & 2.666 & 1.333 & \infty & \infty \\ .167 & .667 & 1.333 & 2.666 & \infty & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{array} \right] \end{matrix}$$

Los tiempos medios de absorción indican también un dato interesante. Estos significan el tiempo promedio en el cuál se alcanza un genotipo homocigoto a partir de un determinado tipo de unión inicial. Por ejemplo, en el caso de la anemia, si se propicia la unión de los descendientes, éstos, o se volverán anémicos o serán normales en un deter-

minado tiempo. Así bien si la descendencia se inicia en el tipo de unión uno, se tardará en promedio 7 (6.666) descendencias para ser absorbida por algún par de genes del tipo puro.

Tales tiempos se muestran a continuación:

$$m_j = \begin{bmatrix} 6.6667 \\ 4.8333 \\ 5.6667 \\ 4.8333 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las probabilidades estacionarias se han explicado de hecho, para este caso en particular, en la parte de probabilidades de primera visita, por lo que no explicamos tal matriz. Esta es:

$$\{\pi_{jk}\} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & .50 & .50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .75 & .25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .50 & .50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .25 & .75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3 LA PELUQUERIA

Esta aplicación se refiere a un modelo simplificado de teoría de colas, restringido al tamaño de la cola y con un servidor. Describamos el ejemplo para mayor comprensión:

Una peluquería tiene cuatro sillas de espera para los clientes que llegan a solicitar el servicio y sólo un peluquero que atiende.

Los clientes que llegan, cuando las cuatro sillas han sido ocupadas, se van. El peluquero corta el pelo en exactamente quince minutos y si hay alguien esperando, lo atiende inmediatamente sin tomar descanso.

Se ha levantado información acerca de la peluquería, contabilizando el número de clientes que llegan en intervalos de quince minutos y se ha obtenido la siguiente distribución de probabilidad:

Número de arribos	0	1	2	3	4	5	6 más
Probabilidad	.20	.70	.07	.02	0.01	0	

Llamemos al número de arribos en el n -ésimo intervalo x_n

Nos interesa saber el comportamiento de la variable aleatoria Q_n la cual representa el número de clientes que esperan inmediatamente después de que un corte de pelo es terminado. (Digamos que esto se quiere conocer porque el dueño de la peluquería quiere calcular su ingreso diario medio y tener una mejor atención para sus clientes).

Es claro que los posibles valores de la variable aleatoria Q_n son ---
 $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Por motivos de simplicidad suponemos que nunca
 ocurrirá, que al mismo tiempo entre un cliente y salga uno que haya
 sido atendido. Por consiguiente la única manera de que haya cinco ---
 clientes en la peluquería, es que uno se esté atendiendo y los otros -
 cuatro sentados. Evidentemente esta situación puede ser traducida en
 una cadena de Markov finita y homogénea con unidad de transición --
 igual a quince minutos.

Calculemos las probabilidades de transición mediante la definición de

los eventos:

$$Q_{n+1} = \begin{cases} \min(4, x_{n+1}) & \text{si } Q_n = 0 \\ \min(4, Q_n - 1 + x_{n+1}) & \text{si } Q_n > 0 \end{cases}$$

Supongamos que Q_n es igual a cero (Cuando se abre la peluquería o
 bien en el transcurso del día se vacía la peluquería).

$$P [Q_{n+1}=0/Q_n=0] = P [\text{En el intervalo de 15 minutos no llegan clientes}] \\ = 0.20$$

$$P [Q_{n+1}=1/Q_n=0] = P [\text{Llegue un cliente en el intervalo de 15 minutos}] \\ = 0.70$$

$$P [Q_{n+1}=2/Q_n=0] = 0.07$$

$$P [Q_{n+1}=3/Q_n=0] = 0.02$$

$$P [Q_{n+1}=4/Q_n=0] = 0.01$$

Pasemos al caso en que se termina un corte de pelo y está una persona en espera. ($Q_n=1$)

$$P [Q_{n+1}=0/Q_n=1] = P \left[\text{Que en el intervalo de tiempo en el que le cortan el pelo a la persona que estaba esperando no llegue nadie.} \right]$$

$$= 0.20$$

$$P [Q_{n+1}=1/Q_n=1] = P \left[\text{Que en el intervalo de tiempo en el que le cortan el pelo a la persona que estaba esperando llegue sólo una persona.} \right]$$

$$= 0.70$$

y así:

$$P [Q_{n+1}=2/Q_n=1] = 0.07, P [Q_{n+1}=3/Q_n=1] = 0.02, P [Q_{n+1}=4/Q_n=1] = 0.01$$

Ahora supongamos que cuando se va una persona que acaba de ser atendida, existen dos personas esperando ($Q_n=2$)

$$P [Q_{n+1}=0/Q_n=2] = 0 \quad \text{No puede ser, puesto que se queda una persona esperando y la otra pasa a ser atendida de las dos que existían en espera.}$$

$$P [Q_{n+1}=1/Q_n=2] = 0.2, P [Q_{n+1}=2/Q_n=2] = 0.70, P [Q_{n+1}=3/Q_n=2] = 0.07$$

$$P [Q_{n+1}=4/Q_n=2] = P \left[\text{Que lleguen 3 ó cuatro personas mientras se lleva a cabo un corte de pelo.} \right]$$

$$= .02 + 0.01 = 0.03 \quad (\text{Aunque una se vaya})$$

Se considera que el haber ilustrado hasta aquí la construcción de dos renglones de la matriz de transición es posible comprender los demás, así; la matriz completa es:

$$\{p_{jk}(15)\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccc} .20 & .70 & .07 & .02 & .01 \\ .20 & .70 & .07 & .02 & .01 \\ 0 & .20 & .7 & .07 & .03 \\ 0 & 0 & .20 & .7 & .10 \\ 0 & 0 & 0 & .20 & .80 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Llevado el análisis mediante el programa de computadora presentado en este trabajo, se obtuvo que la cadena es irreducible y que su matriz de tiempos medios de primer paso y de recurrencia es:

$$\{m_{jk}\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccc} 11.125 & 2.781 & 12.750 & 24.719 & 43.038 \\ 11.125 & 2.781 & 12.750 & 24.719 & 43.038 \\ 20.625 & 9.500 & 4.450 & 20.312 & 38.846 \\ 28.125 & 17.000 & 7.500 & 5.562 & 29.231 \\ 33.125 & 22.000 & 12.500 & 5.000 & 6.846 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Si agregamos a nuestro problema que el peluquero trabaja corrido de 9:00 a 16:00 hrs. y cobra \$50.00 por corte de pelo, entonces la matriz anterior es bastante difícil de analizar, es decir, es complejo poder -

extraer información de ella, pero si consideramos la distribución estacionaria podremos sacar algunas conclusiones interesantes.

La distribución estacionaria es la siguiente:

$$\pi_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ .0899 & .3596 & .2247 & .1798 & .1461 \end{bmatrix}$$

Esta distribución no varía con el tiempo y no depende del estado inicial, es decir, es la distribución que teóricamente la peluquería alcanzará en su madurez.

Calculemos la esperanza de la variable aleatoria Q_n , $\forall n$, la que indica el número promedio de personas que esperan cada vez que un corte de pelo es terminado, así:

$$E[Q] = .3596 + 2(.2247) + 3(.1798) + 4(.1461) = 1.9328 \text{ personas esperando.}$$

Determinemos un intervalo de confianza para este valor calculando primero:

$$\begin{aligned} \sigma_Q^2 &= E[(Q - E(Q))^2] = \sum_{i=0}^4 (Q_i - E(Q))^2 \pi_i \\ &= (0 - 1.9328)^2 (.0899) + (1 - 1.9328)^2 (.3596) + (2 - 1.9328)^2 (.2247) \\ &\quad + (3 - 1.9328)^2 (.1798) + (4 - 1.9328)^2 (.1461) = 1.4789 \end{aligned}$$

$$\text{y } \sigma_Q = \sqrt{1.4789} = 1.2161 \text{ personas esperando.}$$

Luego el peluquero tendrá entre $0.7167 \approx 1$ personas esperando y $3.1489 \approx 3$ personas esperando con una probabilidad de 0.7640 es decir:

$$P [0.7167 \leq E(Q) \leq 3.1489] = 0.7640$$

o sea el nivel de confianza es de 0.7640.

De aquí que podemos afirmar con un nivel de error de 11.80% que tendrá al menos una persona esperando y por tanto la peluquería estará casi siempre ocupada (recuérdese el nivel de error).

Calculemos un ingreso promedio:

Existen 28 intervalos de 15 minutos cada uno, en el turno del peluquero:

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= P [28 \text{ intervalos ocupados}] [28 \times 50.00] + 0 \\ &= [1 - 0.0899] [28 \times 50.00] = \$ 1,274.14 \end{aligned}$$

4.4 PRESA DE ALMACENAMIENTO

El comportamiento estocástico del volumen de almacenamiento de una presa ha sido estudiado como un proceso Markoviano (Moran(1959)). En esta oportunidad, presentamos un modelo simplificado mediante una cadena Markoviana; suponiendo que el volumen se puede discretizar y como tal, estudiar. También se supone que la cantidad de agua con la que se alimenta a la presa, no se conoce con exactitud, por lo que se ha considerado una variable aleatoria.

Sea pues una presa de almacenamiento para riego. Cada año n , la cantidad total de agua que fluye hacia la presa es una cantidad aleatoria Y_n con la siguiente distribución de probabilidad: (se supone que Y_n es discreta, lo cuál le da una limitación fuerte a este ejemplo y establece en realidad una hipótesis que se aleja de la realidad)

Y_n	$P_{Y_n}(y)$
0	.10
1	.30
2	.30
3	.20
4	.10

Donde los valores de Y_n representan tercios de la capacidad de la presa. En general, a lo largo del problema se manejarán tercios de la capacidad de la presa como unidad de trabajo.

La agencia reguladora intenta suministrar dos unidades de agua cada año, si es factible, a las tierras vecinales para el fomento de la agricultura.

Es claro que sin la presa y de acuerdo con la distribución de la variable Y_n , el 40% de los años no se tendrán las dos unidades de agua necesarias para la agricultura y un 30% de los años habrá exceso de agua.

Con la presa funcionando, el agua se regulará de acuerdo a las unidades disponibles y con la política representada en la siguiente tabla:

Total de Unidades Disponibles	Unidades de Agua Soltadas	Estado final de la Presa al soltar el Agua	Demanda
0	0	Vacía	No Satisfecha
1	1	Vacía	No Satisfecha
2	2	Vacía	Satisfecha
3	2	1	Satisfecha
4	2	2	Satisfecha
5	2	Llena	Satisfecha
6	3	Llena	Satisfecha
7	4	Llena	Satisfecha

Para estudiar el comportamiento de la presa, a través del tiempo, bajo la política establecida, observaremos el contenido de agua al final de cada año después de haber suministrado la cantidad demandada de acuerdo a lo disponible. Si suponemos que las afluencias anuales son estocásticamente independientes, entonces el modelo es una cadena de Markov. Construyámosla, denotando a la cadena por X_n :

Es claro que la cadena sólo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 por -

tanto:

$$P \left[X_{n+1}=j/X_n=i \right] = P \left[\text{Almacenamiento}(n)+\text{Afluencia}(n+1)-\text{Agua soltada}(n+1)=j \right. \\ \left. / \text{Almacenamiento}(n) \right]$$

$$P \left[X_{n+1}=0/X_n=0 \right] = P \left[Y_{n+1} \leq 2 \right] = 0.10+0.30+0.30=0.70$$

$$P \left[X_{n+1}=1/X_n=0 \right] = P \left[Y_{n+1} = 3 \right] = 0.20$$

$$P \left[X_{n+1}=2/X_n=0 \right] = P \left[Y_{n+1} = 4 \right] = 0.10$$

$$P \left[X_{n+1}=3/X_n=0 \right] = P \left[Y_{n+1} \geq 5 \right] = 0$$

$$P \left[X_{n+1}=0/X_n=1 \right] = P \left[Y_{n+1} \leq 1 \right] = 0.10+0.30=0.40$$

$$P \left[X_{n+1}=1/X_n=1 \right] = P \left[Y_{n+1}=2 \right] = 0.30$$

$$P \left[X_{n+1}=2/X_n=1 \right] = P \left[Y_{n+1}=3 \right] = 0.2$$

$$P \left[X_{n+1}=3/X_n=1 \right] = P \left[Y_{n+1}=4 \right] = 0.10$$

$$P \left[X_{n+1}=0/X_n=2 \right] = P \left[Y_{n+1}=0 \right] = 0.10$$

$$P \left[X_{n+1}=1/X_n=2 \right] = P \left[Y_{n+1}=1 \right] = 0.30$$

$$P \left[X_{n+1}=2/X_n=2 \right] = P \left[Y_{n+1}=2 \right] = 0.30$$

$$P \left[X_{n+1}=3/X_n=2 \right] = P \left[Y_{n+1} \geq 3 \right] = 0.30$$

De esta ilustración, ya es fácil visualizar la cadena completa en un paso (año).

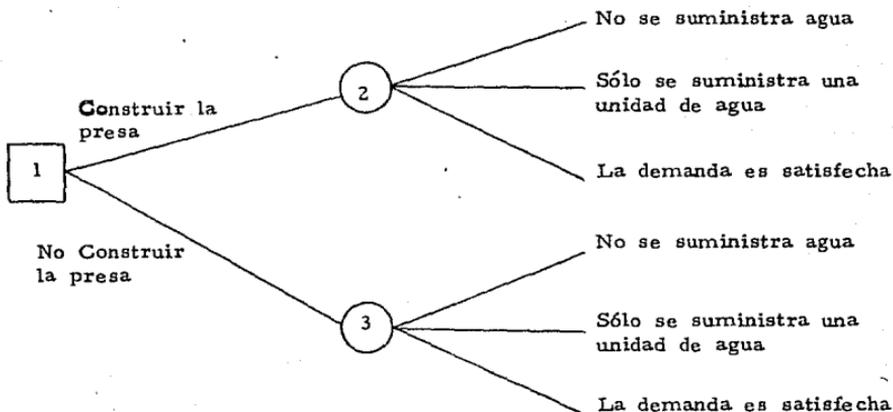
$$P(1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .70 & .20 & .10 & 0 \\ .40 & .30 & .20 & .10 \\ .10 & .30 & .30 & .30 \\ 0 & .10 & .30 & .60 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Avanzaremos en este ejemplo, haciendo hincapié, en que esta aplicación maneja demasiadas hipótesis, al no considerar filtración y evaporación en la presa, además de las hipótesis antes impuestas.

Imaginemos que la presa no ha sido aún construída y se quiere tomar una decisión sobre tal evento, basando esta decisión sobre los costos anuales esperados de la construcción de la presa.

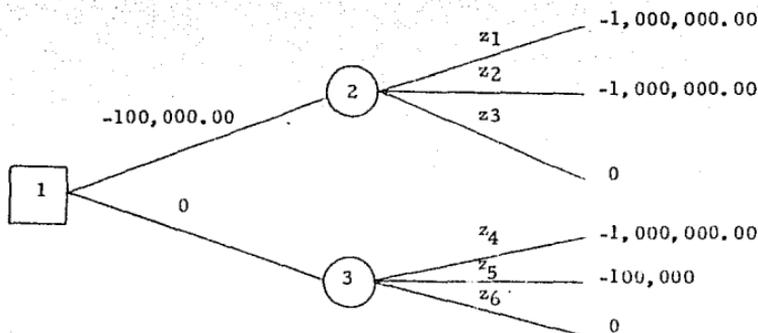
Si la inversión inicial de la presa, más costos de operación menos beneficios por recreación, se traducen a un costo anual equivalente de - \$ 100,000.00 y si la pérdida para la agricultura es de \$1,000,000.00 en el caso de que no haya agua disponible en cualquier año y de ---- \$100,000.00, si sólo hay disponible una unidad de agua: ¿Debe la presa ser construída?

Es claro que en un árbol de decisión podemos plasmar la situación:



Donde \square es un nudo de decisión y \circ es un nudo de incertidumbre.

De acuerdo con los costos, el árbol quedaría:



Para el árbol, necesitamos estimar las probabilidades z_i . Estas como se aclarará más tarde demandan el cálculo de las probabilidades estacionarias.

Por otro lado, se ha obtenido la función de utilidad del Jefe de la --- Agencia Reguladora que pretende implantar la presa y resultó la siguiente:

$$f(u) = 1 + 8.57576 \times 10^{-5} X - 7.48485 \times 10^{-7} X^2 \quad -1100 \leq X \leq 0 \quad (X \text{ en miles})$$

También se analizó la cadena Markoviana obtenida, mediante el programa, resultando las siguientes probabilidades estacionarias:

$$\Pi_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ .3640 & .2218 & .2050 & .2092 \end{bmatrix}$$

Como sabemos por este resultado y de acuerdo con la información anterior, la presa tenderá tarde o temprano a ocupar los distintos estados con las probabilidades estacionarias. En otras palabras, si la cadena se encuentra inicialmente con la distribución estacionaria antes obtenida, en cualquiera de los distintos estados, esta distribución no cambiará.

Así para el análisis, será indiferente tomar cualquier año, dado que las variables aleatorias X_n y Y_n tienen distribuciones estacionarias.

Calculemos las probabilidades z_i del árbol de decisiones:

$$\begin{aligned} z_1 &= P [X_{n-1}=0, Y_n=0] = P [Y_n=0/X_{n-1}=0] P [X_{n-1}=0] \\ &= P [Y_n=0] P [X_{n-1}=0] = P [Y_n=0] \uparrow \uparrow 0 \\ &= .10(.3640) = .03640 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= P [X_{n-1}=0, Y_n=1] + P [X_{n-1}=1, Y_n=0] \\ &= \uparrow \uparrow 0 P [Y_n=1] + \uparrow \uparrow 1 P [Y_n=0] = .3640 (.30) + .2218(.10) = .13138 \end{aligned}$$

$$z_3 = 1 - .13138 - .03640 = .83222$$

$$z_4 = P [Y_n=0] = .1$$

$$z_5 = P [Y_n=1] = .3$$

$$z_6 = 1 - .1 - .3 = .6$$

Estamos en posición de calcular los valores esperados:

$$\begin{aligned} E_2 &= .03640f(-1100) + .13138f(-200) + .83222f(-100) \\ &= .03640(0) + .13138(.9529) + .83222(.9839) = .9440 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= .1f(-1000) + .3f(-100) + .6f(0) \\ &= .1(.1658) + .3(.9839) + .6(1) = .9118 \end{aligned}$$

Luego $E_2 > E_3$ y por tanto se aconseja, construir la presa. Esta con
clusión sólo es válida para la función de utilidad considerada.

BIBLIOGRAFIA

- APOSTOL M. TOM. Mathematical Analysis. Segunda Edición.
Adison-Wesley Publishing Company (1977)
- BHAT U. NARAYAN Elements of applied Stochastic Processes.
John Wiley & Sons, Inc. (1972)
- BHARUCHA-REID T.A. Elements of the Theory of Markov Processes
and their Applications. McGraw-Hill Book --
Company, Inc. (1960)
- CINLAR ERHAN Introduction to Stochastic Processes. Prentice-Hall,
Inc. (1975)
- COX R.D. and MILLER H.D. The Theory of Stochastic Processes.
Methuen & Co. Ltd. (1965)
- CORNELL ALLIN. C. & BENJAMIN R. JACK Probability, Statistics
and Decision for Civil Engineers.
Mc Graw-Hill Book Company (1970)
- CHRISTOFIDES NICOS Graph Theory. Academic Press (1975)
- FELLER WILLIAM An Introduction to Probability Theory and its -
Applications. John Wiley & Sons, Inc. Tercera
Edición (1968)
- GORDON PATRICK Cadenas Finitas de Markov y sus Aplicaciones.
Editorial Hispano Europea (1967)
- HOWARD A. RONALD Dynamic Probabilistic Systems, Markov Models.
Vol. 1 John Wiley (1963)
- HERSTEIN N.I. Algebra Moderna. F. Trillas (1979)
- LUTHE RODOLFO, OLIVERA ANTONIO, SCHUTZ FERNANDO. Métodos
Numéricos. Limusa (1978)
- KAUFMANN ARNOLD Introducción a la Combinatoria y sus Aplicaciones
C.E.C.S.A.
- NIVEN IVAN y ZUCKERMAN S. HERBERT Introducción a la Teoría de -
los números. Editorial Limusa-Wiley (1969)

- PARZEN EMANUEL Procesos Estocásticos Holden Day (1962)
- ROZANOV YURI Procesos Aleatorios Editorial Mir Moscú
- HILLIER S. FREDERICK AND LIEBERMAN J. GERALD Introduction
to Operations Research. Third Edition (1980)
- RADIO SHACK Level II Reference Manual BASIC TRS-80 Microcomputer
(1980)

INDICE ALFABETICO

- Arco 6
Arco Incidente a un conjunto de vértices 7
Arcos adyacentes 6
- Bolzano-Weierstrass 89
Bucles 6
- Cadenas Periódicas 85
Cadenas de Markov Finitas y Homogéneas de Parámetro Discreto 46
Camino 8
Camino de Valor Mínimo 35
Chapman-Kolmogorov 48
Circuito 8
Clase Abierta 34
Clase Cerrada 33
Clase de Equivalencia 13
Clasificación de Estados 52
Clasificación de Procesos Estocásticos 42
Clasificación de Procesos Markovianos 45
Clausura o Cierre Transitivo 8
Comportamiento Asintótico de Cadenas de Markov 84
Conjunto Cociente 17
Conjunto Indicador 47
- Definición de Proceso Estocástico 41, 42
Definición de Gráfica 4
Demoucron 26
Descomposición de una Gráfica en Subgráficas 18
Descripción de un Proceso Estocástico 43
Determinación de los Niveles de una Gráfica 23
Diagrama de Bloque 111
Diagrama de Flujo 123
Dijkstra 35
- Estados Nulos 83
Estados Positivos 83
Endogamia 155
Equivalencia de Clasificaciones 57
Estados Absorbentes 63
Estado de Paso 57
Estado Final 57
Estados Recurrentes 57
Estados sin Retorno 63
Estados Transitorios 57
Estados Lógicamente Equivalentes 58
Estructura de Resultados 150
Euclides 104
Explicación del uso del programa para la microcomputadora TRS-80 149
Extremos de un arco 6
- Función numérica sobre arcos 34
- Gráfica de Orden N 6
Gráfica fuertemente Conexa 10
Gráfica Ordenada 18
Gráfica Parcial 7
Gráfica Ponderada 34
Grafo 1
Grama 1
- Ínfimo 89
Interpretación de Variables 114
- Lazos 6
Listado del Programa en BASIC 152
Longitud de un Camino 8
- Malgrange 18
Matriz Estocástica 47
- Partición 17
Peluquería 162
Periodicidad 85, 103
Precedente 6

- Presa 167
Probabilidades de Absorción 79
Probabilidades de Estado 48, 51
Probabilidades de Primera Visita
a un estado en N pasos 64
Probabilidades de Primera Visita 72
Probabilidades Estacionarias 86
Probabilidades de Transición 47
Procesos Markovianos 44
Propiedad Distributiva 5
- Relación 11
Relación de Equivalencia 13
Relación Reflexiva 12
Relación Simétrica 12
Relación Transitiva 12
Representaciones de una Gráfica 4
- Siguiente 6
Símbolos Utilizados 122
Subclases de una Cadena Periódica 100
Subgráfica 7
Subgráfica fuertemente conexa Máxima 11
Supremo 89
- Tiempo antes de Absorción 79
Tiempo de Ocupación 67
Tiempo Medio de Absorción 79
Tiempo Medio de primer paso y recurrencia 81
Tiempo Medio de Ocupación 67
Tiempo Total de Ocupación 67
Teorema de Probabilidad Total 49, 51
Teorema de Teoría de Números 93
Tomescu 18
- Valor de un Camino 34
Vértice 5
Vértices Adyacentes 6