

01170
zej.
1

OPTIMIZACIÓN DEL DESEMPEÑO EN EL DOMINIO DE LA
FRECUENCIA PARA SISTEMAS MUESTREADOS

POMPILIO ARAGON ZAMORA

T E S I S

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA
(ELECTRICA)

CIUDAD UNIVERSITARIA

MEXICO D.F.

JULIO 1987.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En este trabajo se hace una extensión a sistemas discretos, del método de optimización del desempeño de sistemas lineales, monovariantes, retroalimentados, en el dominio de la frecuencia, para sistemas continuos, propuesto por H. Kwakernaak.

Este método trata el problema de diseñar controladores, en el dominio de la frecuencia, y lo resuelve mediante una ecuación polinomial de grado determinado, que garantiza la obtención de controladores físicamente realizables, y estabilizantes. El criterio de optimización utilizado es conocido con el nombre Minimax.

Tomando como ejemplo el modelo Nomoto para un barco, se demuestra la eficacia de la solución propuesta.

INDICE

INTRODUCCION	1
1 ANALISIS DE SISTEMAS RETROALIMENTADOS Y CRITERIO DE OPTIMIZACION	5
1.1 Introducci3n	5
1.2 Propiedades de los sistemas retroalimentados	5
1.2.1 Atenuaci3n de perturbaciones	9
1.2.2 Rechazo de perturbaciones	9
1.2.3 Limitaci3n de energa y ancho de banda	10
1.2.4 Robustez	11
1.2.5 Respuesta a seales de referencia	14
1.3 Criterio de optimizaci3n	15
2 APLICACION DEL PRINCIPIO ECUALIZADOR A SISTEMAS DISCRETOS	18
2.1 Introducci3n	18
2.2 Principio ecualizador	20
2.3 Controladores estabilizantes	25
2.4 Propiedades del valor L_0	30
3 APLICACION DE LA SOLUCION ECUALIZADORA	32
3.1 Introducci3n	32
3.2 Ejemplo	32
3.3 Objetivos de diseo	34
3.4 Selecci3n de las funciones de ponderaci3n	36

3.5 Análisis de resultados	40
4 CONCLUSIONES	46
APENDICE A. Propiedades de los polinomios recíprocos . .	49
APENDICE B. descripción del paquete de programas	52
BIBLIOGRAFIA	60

INTRODUCCION

Al diseñar un sistema de control, se busca obtener de éste un comportamiento adecuado a las necesidades del proceso. Sin embargo, existen varios factores que dificultan esta tarea, tales como las perturbaciones que afectan a la planta y la incertidumbre en cuanto al modelo que se tiene de ella.

El esquema más conveniente para reducir el efecto de éstas dificultades ha sido la retroalimentación, con la cual se logra no solo disminuir la influencia de las perturbaciones sobre la variable controlada sino también, disminuir la influencia que tienen sobre ella los cambios en los parámetros de la planta como lo muestra Isermann en [9], pp200.

En su trabajo de 1981, Safonov, Laub y Hartman [18], muestran cómo las propiedades de la retroalimentación, o sea, atenuación y rechazo de perturbaciones, limitación tanto del ancho de banda como de la energía de acción, y estabilidad del sistema se pueden relacionar con la función de transferencia del sistema en malla cerrada, $T(s)$ y la función de sensibilidad del sistema, $S(s)$, que representa la forma en que es afectada la variable controlada por una perturbación externa.

Recientemente han aparecido varios trabajos, Zames, [19]; Doyle, [5]; Kwakernaak, [12]-[14]; Francis y Zames, [7]; Francis, [8]; que haciendo uso de $S(s)$ y $T(s)$ trasladan el

problema de diseño de sistemas de control retroalimentados, a un problema de optimización en el dominio de la frecuencia, usando para ello un criterio Minimax.

El interés principal al buscar métodos de optimización en el dominio de la frecuencia radica en la búsqueda de nuevas alternativas pues aunque la teoría de control óptimo lineal con criterio cuadrático ofrece muchas posibilidades para trasladar, usando las propiedades de la retroalimentación, problemas prácticos de diseño en problemas de optimización, hay ciertos aspectos que no pueden ser manejados fácilmente; por ejemplo, la necesidad de conocer completamente los estados de la planta.

Es Zames en 1981, quien inicia los trabajos de optimización minimax en el dominio de la frecuencia para sistemas lineales y argumenta que bajo incertidumbre parcial acerca de la naturaleza de las perturbaciones es necesario minimizar un criterio de la forma

$$\text{Sup}_w |S(jw)V(jw)|$$

en el cual $V(s)$ es una función de ponderación para la función de sensibilidad $S(s)$, que depende del contenido de frecuencias de las perturbaciones.

Por otro lado, Kwakernaak, en [13], va mas allá y propone un criterio que permite además, tener en cuenta la energía de la señal de acción y el ancho de banda del sistema, por tanto el criterio a minimizar es,

$$\sup_w \left[|S(jw)V(jw)|^2 + |W(jw)T(jw)|^2 \right]$$

en el cual, $V(s)$ y $W(s)$ son funciones que ponderan $S(s)$ y $T(s)$ respectivamente y se proponen en función del contenido de frecuencias de las señales que afectan al sistema. La inclusión del segundo término es justificada por la relación que tiene $T(s)$ con la forma en que se manifiestan las perturbaciones sobre la señal de acción.

Dado que estos métodos han sido elaborados para diseñar controladores continuos, se consideró importante estudiar sus ventajas y desventajas cuando son aplicados a sistemas en tiempo discreto.

En el presente trabajo se inicia dicho estudio y para ello se escogió el método propuesto por Kwakernaak en [13] para sistemas continuos, con el fin de hacer una extensión de éste al caso discreto. Este método, garantiza la obtención de controladores físicamente realizables, además, puede ser utilizado, aún en el caso de tener polos y ceros de la planta sobre el eje imaginario. Por otro lado, tiene la ventaja de reducir el diseño a resolver una ecuación polinomial de grado conocido, usando algoritmos normales de métodos numéricos.

Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es hacer la extensión del método elegido para el caso discreto, así como la implementación del conjunto de programas que permiten calcular los controladores, los cuales podrán ser usados en estudios

posteriores relacionados con el mismo método.

En el primer capítulo, se describen los lineamientos para expresar los requerimientos de diseño en función de cotas adecuadas de S y T y del proceso mismo, para establecer el criterio de optimización.

En el segundo capítulo, se muestra que para sistemas discretos el problema puede reducirse también a resolver un conjunto de ecuaciones polinomiales, dándose una posible forma de lograrlo.

En el tercer capítulo, la solución propuesta, es empleada para diseñar un controlador que regula la dirección de un barco, el cual está sometido a perturbaciones externas y también a cambios en los parámetros ocasionados por las diferentes condiciones de operación. Al final del capítulo se hace un análisis de los resultados obtenidos.

En el capítulo cuarto se presentan las conclusiones del estudio realizado y se dan algunas recomendaciones para futuros trabajos basados en el método aquí estudiado.

1. ANALISIS DE SISTEMAS RETROALIMENTADOS Y CRITERIO DE OPTIMIZACION

1.1 Introducción.

Debido a que los modelos matemáticos de los procesos dan, por lo general, una descripción imperfecta de los sistemas físicos y además en muchos casos los parámetros involucrados en la descripción están sujetas a variaciones e incertidumbres, es indispensable diseñar sistemas de control que puedan compensar dichas perturbaciones.

Este problema tuvo como consecuencia el empleo de los esquemas retroalimentados en la teoría de control. Sin embargo el simple hecho de emplear un esquema retroalimentado no asegura la compensación de todas las perturbaciones.

Entonces, se deben diseñar los controladores, tanto en función de las especificaciones de diseño, tiempo de respuesta, ancho de banda, como del tipo de perturbaciones que afecten el proceso.

A continuación se describen las principales consideraciones que deben tomarse en cuenta al diseñar un controlador, con el esquema de la fig.1.

1.2 Propiedades de los sistemas retroalimentados.

Considérese el siguiente sistema lineal, monovariable,

discreto, retroalimentado :

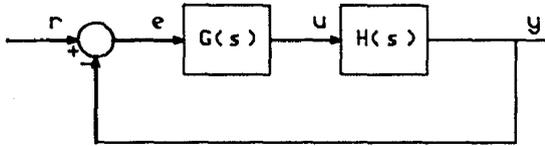


Fig.1 Sistema retroalimentado.

donde,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} , \quad (1.1)$$

es la función de transferencia de la planta a controlar con $Y(z)$ y $X(z)$ polinomios de coeficientes reales, que no poseen raíces comunes, para garantizar que sea controlable y observable, y que tienen grados m y n respectivamente; con $n = m + e$, siendo e el orden relativo de $H(z)$.

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} , \quad (1.2)$$

representa, la función de transferencia del controlador, con $N(z)$ y $D(z)$, polinomios de coeficientes reales, a diseñar.

Suponga,

r la señal de referencia.

u la señal de entrada a la planta.

v las perturbaciones de tipo aditivo a la salida de la planta.

y la salida controlada de la planta.

De la fig.1, se observa que la función de transferencia de la salida controlada $y(t)$ con respecto a la señal de referencia $r(t)$ está dada por:

$$\frac{Y_p(z)}{R(z)} = \frac{L(z)}{1 + L(z)}$$

con

$$L(z) = G(z)H(z), \quad (1.3)$$

la ganancia de lazo del sistema.

Por lo tanto el polinomio característico en malla cerrada $R_{cl}(z)$ está determinado por:

$$R_{cl}(z) = X(z)D(z) + Y(z)N(z). \quad (1.4)$$

Para determinar la forma en que las perturbaciones $v(t)$ afectan la salida del sistema se obtiene la relación

$$\frac{Y_p(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 + H(z)G(z)} \quad (1.5)$$

la cual representa la función de transferencia tomada desde v hasta y . Debido a que esta expresión determina la influencia de las perturbaciones sobre la salida, se le conoce como la función de sensibilidad del sistema y se puede escribir en función de $L(z)$ como:

$$S(z) = \frac{1}{1+L(z)} \quad (1.6)$$

Claramente, de la fig.1, la función de transferencia del sistema en lazo cerrado está dada por

$$T(z) = \frac{H(z)G(z)}{1 + H(z)G(z)} \quad (1.7)$$

Definidas de esta manera, las funciones $S(z)$ y $T(z)$ quedan relacionadas de la siguiente forma:

$$S(z) + T(z) = 1 \quad (1.8)$$

sustituyendo (1.1) y (1.2) en las expresiones de $S(z)$ y $T(z)$, (1.6) y (1.7), se obtiene:

$$S(z) = \frac{X(z) D(z)}{R_{c1}(z)} \quad (1.9)$$

$$T(z) = \frac{Y(z) N(z)}{R_{c1}(z)} \quad (1.10)$$

Se puede observar de (1.9) que la expresión de $S(z)$ corresponde al cociente entre el polinomio característico en lazo abierto y el polinomio característico en lazo cerrado y por lo tanto es siempre una función propia, independientemente del controlador $G(z)$ y del proceso $H(z)$.

Por otro lado, si se analizan los órdenes del numerador y del denominador de $T(z)$, en (1.10), se puede ver que éstos dependen del exceso de polos y ceros del controlador y de la planta. Así,

para un controlador con exceso de polos igual a e_c , la función de transferencia $T(z)$ tendrá un exceso de polos y ceros, p , dado por $p=e+e_c$.

Dado que una de las especificaciones indispensables que se le piden a un sistema de control es que sea estable, a continuación se define como controladores admisibles, el conjunto de controladores que lo logren.

1.2.1 Atenuación de perturbaciones

De la ecuación (1.6) se ve que el efecto de las perturbaciones $v(t)$, sobre la salida del sistema $y(t)$, se puede obtener por medio de la función de sensibilidad $S(z)$. Por lo tanto si se conoce el, o los rangos de frecuencias de la señal $v(t)$ sería conveniente que $|S(z)|$ fuera relativamente pequeña en dichos rangos para reducir el efecto de $v(t)$ sobre la salida $y(t)$. Este aspecto se analiza de manera mas detallada en la sección 1.3.

1.2.2 Rechazo de perturbaciones

Considérese que las perturbaciones inestables que afectan la salida del sistema pueden ser descritas por una función de transferencia $V(z)$, con todos sus polos fuera del círculo unitario, conocidos. Se dice que el sistema en malla cerrada rechaza tales perturbaciones si,

$$\lim_{kT \rightarrow \infty} e(kT) = 0 \quad (1.11)$$

para cualquier $v(t)$ considerada; siendo $e(kT)$ la señal de error

dada por:

$$e(kT) = r(kT) - y(kT) \quad (1.12)$$

De las ecuaciones (1.5) y (1.12) se ve que la relación entre estas dos señales se puede escribir como:

$$Y_{-}(z) = S(z) V(z) \quad (1.13)$$

por tanto, si se desea que el efecto de $V(z)$ sobre $Y_{-}(z)$, desaparezca, esto es, que se satisfaga la ecuación (1.11) es suficiente y necesario que $S(z)$ tenga como ceros los polos de $V(z)$. [4].

Por otro lado, cuando la planta tiene polos fuera del círculo unitario y las condiciones iniciales del sistema son distintas de cero, se generan perturbaciones producidas por estos modos inestables, que es necesario rechazar. El efecto de esas condiciones iniciales se puede considerar como el de una perturbación aditiva a la salida del sistema, ([9] pp 135). Por la forma en que se definió, $S(z) = X(z)D(z)/R_{c1}(z)$, se observa que ésta siempre tendrá los polos de la planta y del controlador en el numerador por tanto siempre rechazará las perturbaciones ocasionadas por estos polos. Nótese que $R_{c1}(z)$ nunca podrá cancelar esos ceros, por ser un polinomio Hurwitz.

1.2.3 Limitación de energía y ancho de banda

En la mayoría de los sistemas físicos, debido a los niveles de saturación de los actuadores es necesario limitar la energía

aplicada a cada uno de ellos; lo cual implica que la señal de entrada a la planta $u(t)$ debe estar debidamente acotada. De acuerdo con la fig.1, la relación de la señal de referencia, el ruido en los sensores, y las perturbaciones con la señal u está dada por

$$U(z) = \frac{T(z)}{H(z)} R(z) - \frac{T(z)}{H(z)} (W(z) + V(z)) \quad (1.14)$$

por lo que, $u(t)$ podría limitarse si se logra reducir adecuadamente la función $T(z)/H(z)$, en el rango de frecuencia de $R(z)$, $V(z)$, $W(z)$. Esto puede lograrse seleccionando una función $W_1(z)$ de acuerdo a los rangos de frecuencia de las señales de interés y limitando $W_1(z)T(z)$.

1.2.4 Robustez

Se habla de robustez con respecto a estabilidad, si el sistema permanece estable cuando es sometido a perturbaciones. Robustez del desempeño si la respuesta del sistema a una señal de referencia se mantiene dentro de un margen razonable, aún, cuando es sometido a perturbaciones. [14]

Condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del sistema ante perturbaciones paramétricas se pueden representar en función de $S(z)$ y $T(z)$ o de una combinación de las dos así:

Considere que

$$H^o(z) = \frac{Y^o(z)}{X^o(z)} \quad (1.15)$$

representa la planta nominal y,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} h(z) \quad (1.16)$$

corresponde a la planta perturbada, con:

$Y(z)$ y $Y^{\circ}(z)$ del mismo grado,

$X(z)$ y $X^{\circ}(z)$ del mismo grado,

$$y \quad h(z) = \frac{\tilde{Y}(z)}{\tilde{X}(z)} \quad (1.17)$$

con $\tilde{Y}(z)$ y $\tilde{X}(z)$ polinomios estables. Esta función $h(z)$ está asociada a las perturbaciones no estructuradas y que pueden ser debidas a un mal modelado de la planta.

Es de hacer notar que no se impone ninguna restricción a la posición de las raíces de $Y(z)$ y $X(z)$ con respecto a la posición nominal.

Asumiendo que el sistema nominal es estable y usando el principio del argumento, [17], se puede decir que el sistema perturbado es estable si la imagen de,

$$\frac{R_{c_1}(z)}{R^{\circ}_{c_1}(z)} \quad (1.18)$$

no encierra el punto cero cuando $z \in C$, (C = círculo unitario).

Sustituyendo $R_{c_1}(z)$, en (1.18) se tiene.

$$\frac{R_{c_1}(z)}{R^{\circ}_{c_1}(z)} = \frac{X(z)\tilde{X}(z)D(z) + Y(z)\tilde{Y}(z)N(z)}{R^{\circ}_{c_1}(z)} \quad (1.19)$$

$$\frac{R_{e1}(z)}{R^{oe1}(z)} = \frac{X(z)\tilde{X}(z)X^o(z)D(z)}{X^o(z)R^{oe1}(z)} + \frac{Y(z)\tilde{Y}(z)Y^o(z)N(z)}{Y^o(z)R^{oe1}(z)}$$

Por definición, $S^o(z) = X^o(z)D(z)/R^o(z)$ y $T^o(z) = Y^o(z)N(z)/R^o(z)$ por tanto (1.19) se puede escribir como

$$\frac{R_{e1}(z)}{R^{oe1}(z)\tilde{X}(z)} = \frac{X(z)}{X^o(z)} S^o(z) + \frac{Y(z)}{Y^o(z)} h(z)T^o(z) \quad (1.20)$$

Restando 1 en ambos lados de la ecuación (1.20) se tiene:

$$\frac{R_{e1}(z)}{R^{oe1}(z)\tilde{X}(z)} - 1 = \left[\frac{X(z)}{X^o(z)} - 1 \right] S^o(z) + \left[\frac{Y(z)}{Y^o(z)} h(z) - 1 \right] T^o(z) \quad (1.21)$$

por tanto, el sistema perturbado permanecerá estable si y solo si la imagen del lado derecho de (1.21) no encierra el punto -1, para $z \in \mathbb{C}$.

Una condición suficiente para que se cumpla lo anterior es que,

$$\left| \left[\frac{X}{X^o} - 1 \right] S^o + \left[\frac{Y}{Y^o} h - 1 \right] T^o \right| < 1 \quad z \in \mathbb{C} \quad (1.22)$$

Haciendo notar que

$\frac{Y}{Y^o} h - 1$, se puede escribir como

$$\left[\frac{Y}{Y^o} - 1 \right] \left[h - 1 \right] + \frac{Y}{Y^o} - 1 + h - 1$$

aplicando la desigualdad

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right|^2 \leq n \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad (1.23)$$

y acotando las variaciones relativas del sistema perturbado por medio de funciones $V_z(z)$, $W_z(z)$ y $W_\Delta(z)$ tales que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{X(z)}{X^0(z)} - 1 \right| &\leq |V_z(z)|; \\ \left| \frac{Y(z)}{Y^0(z)} - 1 \right| &\leq |W_z(z)|; \\ |h(z) - 1| &\leq |W_\Delta(z)|. \end{aligned} \quad (1.24)$$

se ve que la ecuación (1.21) tiene una cota superior dada por

$$2(|V_z S|^2 + 3(|W_z W_\Delta|^2 + |W_z|^2 + |W_\Delta|^2) |T|^2).$$

Finalmente, definiendo

$$|V_\Delta|^2 = 2|V_z|^2 \quad ; \quad |W_\Delta|^2 = 6(|W_z W_\Delta|^2 + |W_z|^2 + |W_\Delta|^2)$$

se tiene, que el sistema perturbado permanece estable si

$$\left| V_\Delta(z) S(z) \right|^2 + \left| W_\Delta(z) T(z) \right|^2 \leq 1 \quad (1.25)$$

1.2.5 Respuesta a señales de referencia.

Dado que la función de transferencia desde r hasta y es igual a $T(z)$ y las condiciones de diseño, por lo general especifican que $S(z)$ sea pequeño en los rangos de frecuencia de las perturbaciones $V(z)$, $T(z)$ será muy cercano a 1 en esos rangos, esto implica que se tendrá una buena respuesta a las señales de

referencia en esos rangos de frecuencia.

1.3 Criterio de Optimización.

El análisis anterior es válido para cualquier esquema de control retroalimentado como el de la fig.1, sin importar el método utilizado para diseñar el controlador. Sin embargo el análisis arriba presentado muestra claramente la necesidad de establecer un compromiso entre $T(z)$ y $S(z)$ para lograr diseños que satisfagan especificaciones prácticas.

Esta razón motiva a pensar en un criterio de diseño que combine un compromiso entre $T(z)$ y $S(z)$, en particular Kwakernaak propone la minimización de un criterio de la forma.

$$\sup_{z \in C} [V(z)S(z)^2 + W(z)T(z)^2] \quad (1.26)$$

sujeto a la restricción de que tanto $V(z)S(z)$ como $W(z)T(z)$ sean acotadas para todo el rango de frecuencias.

La elección de $V(z)$ y $W(z)$ se basa en el desempeño deseado para el sistema retroalimentado. Así por ejemplo, si la señal de perturbación $v(t)$ de la fig.1, se considera como la salida de un filtro con función de transferencia $V_1(z)$, cuya entrada es un ruido blanco x , ver fig.2 y el módulo $V_1(z)$ es relativamente grande sobre cierta banda de frecuencias y relativamente pequeño fuera de ella, entonces, $v(t)$ es una señal que tiene su energía concentrada en esa banda.

Lo anterior garantiza entonces, que si se minimiza $V(z)S(z)$ con $V(z)$ escogida de acuerdo al conocimiento que se tenga del

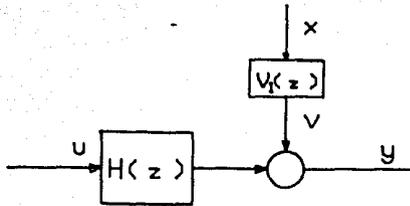


Fig.2 Perturbaciones aditivas a la salida.

contenido de frecuencias de la perturbación, $S(z)$ será relativamente pequeña en ese rango de frecuencias.

Por otra parte, la condición de que $V(z)S(z)$ sea acotada, para todo el rango de frecuencias, exige que esta función no tenga polos ni ceros sobre el círculo unitario. Por lo tanto si la planta tiene dichos polos, estos estarán en el numerador de $S(z)$, y deben ser cancelados, haciendo que $V(z)$ los tenga en el denominador.

Un análisis similar nos lleva a que $W(z)$ se debe escoger de acuerdo a la planta y a la información que se tenga de los rangos de frecuencia de la señal de referencia y del ruido en los sensores.

Con relación a lo anterior, cabe anotar que debido a que las señales de ruido en los sensores son generalmente señales de alta frecuencia, es necesario seleccionar la función $W(z)$ de tal forma que su magnitud a altas frecuencias sea relativamente grande; una función con tal característica puede ser entre

otras, aquella que tenga mayor número de ceros que de polos.

Si $W(z)$ se escoge de tal forma que tenga un exceso de ceros igual (o mayor) que el exceso de polos y ceros de la planta e , y ya que $W(z)T(z)$ debe ser acotado, (o sea no puede tener un exceso de ceros), se obtiene que $T(z)$ debe tener un exceso de polos igual (o mayor) que e . Este exceso de polos en $T(z)$ permite garantizar que $G(z)$ resulte propio (o estrictamente propio).

Finalmente, si $H(z)$ tiene ceros sobre el círculo unitario, la restricción de que $T(z)W(z)$ sea acotada obliga a tener en la función de ponderación $W(z)$ como polos los ceros de la planta sobre el círculo unitario.

2. APLICACION DEL PRINCIPIO ECUALIZADOR A SISTEMAS DISCRETOS

2.1 Introducción.

Al final del capítulo uno se estableció la utilidad de minimizar un criterio de la forma,

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} [|V(z)S(z)|^2 + |W(z)T(z)|^2] \quad (2.1)$$

Para lograr esto, es necesario, establecer primero ciertas condiciones sobre las funciones de ponderación.

Sea,

$$V(z) := \frac{A_1(z)}{B_1(z)} \quad W(z) := \frac{A_2(z)}{B_2(z)} \quad (2.2)$$

donde, A_1 , A_2 , B_1 , y B_2 son polinomios reales con grados a_1 , a_2 , b_1 y b_2 respectivamente que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2 + p$, con p un número mayor que el exceso de polos de la planta. Se hace notar que a diferencia del caso continuo, en el cual se requiere únicamente $a_1 \leq b_1$, en el caso discreto, $V(z)$ debe tener igual número de polos y ceros.

b) Los polinomios A_1 , A_2 , B_1 , B_2 tienen sus raíces dentro del círculo unitario; las parejas, B_1 y B_2 , A_1 y B_1 y A_2 y B_2 no tienen raíces comunes entre sí. Además, de acuerdo al análisis del capítulo anterior, B_1 y B_2 deben tener como raíces los polos

y ceros de la planta sobre el círculo unitario respectivamente.

c) El polinomio $g(z) = A_1 A_1^* B_2 B_2^* + A_2 A_2^* B_1 B_1^*$ no tiene raíces sobre el círculo unitario

En la condición c), se ha usado la siguiente definición para un polinomio $A^*(z)$.

Sea $A(z)$ un polinomio cualquiera de grado n , se define :

$$A^*(z) := z^n A(z^{-1});$$

así, las raíces de $A^*(z)$ son las inversas de las raíces de $A(z)$. En el apéndice A, se dan algunas propiedades de estos polinomios que en adelante se denominan polinomios recíprocos (*).

La condición a) garantiza que a altas frecuencias $V(z)$ sea constante, y $W(z)$ tienda a infinito tan rápido como z^n .

La condición c), como se verá más adelante, se requiere para garantizar que el problema tenga solución.

Por otro lado, considere que los polinomios $X(z)$ y $Y(z)$ se factorizan como:

$$X(z) = X_+(z) X_0(z) X_-(z) \quad ; \quad Y(z) = Y_+(z) Y_0(z) Y_-(z)$$

con $X_+(z)$, un polinomio de grado n_+ que contiene solamente las raíces de $X(z)$ que están fuera del círculo unitario, $X_0(z)$ un polinomio de grado n_0 que contiene las raíces de $X(z)$ sobre el círculo unitario y $X_-(z)$ un polinomio de grado n_- que contiene las raíces de $X(z)$ que están estrictamente dentro del círculo

unitario.

De igual manera se definen los polinomios $Y_+(z), Y_0(z), Y_-(z)$ con grados, m_+, m_0, m_- , respectivamente. Por tanto $n = n_+ + n_0 + n_-$ y $m = m_+ + m_0 + m_-$.

2.2 Principio Ecuador.

Sea $Z(z)$ la función racional definida por

$$Z(z) = V(z)V(z^{-1}) S(z)S(z^{-1}) + W(z)W(z^{-1}) T(z)T(z^{-1}) \quad (2.3)$$

entonces el problema de minimizar,

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} Z(z) \quad (2.4)$$

se puede transformar, si $Z(z)$ es igual a una constante, al problema de minimizar un criterio auxiliar,

$$J = \int_{\mathbb{C}} \Sigma(z) Z(z) dz \quad (2.5)$$

donde $\Sigma(z)$ es una función racional de z con coeficientes reales tales que $\Sigma(z)$ sea real y positiva para $z \in \mathbb{C}$.

Lema 1. Suponga que para un $\Sigma(z)$ dado, existe un controlador admisible que minimiza el criterio (2.5) y hace $Z(z)$ igual a una constante L^2 , ($z \in \mathbb{C}$). Entonces ese controlador también minimiza el criterio (2.4).

Prueba: Por contradicción, supongase que existe un controlador admisible, que genera una función $\tilde{Z}(z)$ tal que

$$\sup_{z \in C} \tilde{Z}(z) < L^2 \quad (2.6)$$

entonces $\tilde{Z}(z) < Z(z) = L^2$. Ya que $\Sigma(z)$ es real real positiva, la desigualdad anterior se puede escribir como,

$$\int_C \Sigma(z) \tilde{Z}(z) dz < \int_C \Sigma(z) Z(z) dz$$

lo cual contradice el hecho de que $Z(z)$ minimiza el criterio (2.5).

Este lema es conocido en teoría estadística como el Principio Ecuilizador. De aquí porque Kwakernaak denota la solución del problema minimax, una solución ecualizadora; por lo tanto, en adelante sólo nos interesan los controladores con los cuales se obtiene $Z(z)$ constante.

Lema 2. Una condición suficiente para que el criterio dado por (2.5) sea minimizado es que

$$\Sigma(z)X(z)Y(z)(V(z)V(z^{-1})S(z^{-1}) - W(z)W(z^{-1})T(z^{-1})) \quad (2.7)$$

tenga todos sus polos dentro del círculo unitario. La demostración de este lema es similar a la presentada en [13], para el caso continuo, por lo tanto es omitida en este trabajo.

2.2 Controladores ecualizadores.

Con base en el lema 1 del inciso 2.1 y los argumentos del capítulo 1, se desea entonces, encontrar los controladores propios $G(z)$, denominados ecualizadores y estabilizantes con los

cuales el sistema en lazo cerrado es estable y se satisface la ecuación

$$Z(z) = L^* = V(z)V^*(z)\bar{S}(z)S^*(z) + T(z)T^*(z)W(z)W^*(z) \quad (2.8)$$

para $V(z)$, $W(z)$ y $H(z)$ dadas.

Con objeto de facilitar la notación se omite de aquí en adelante la dependencia de la variable compleja z , cuando esto no cause confusión.

Aceptando que los polos y ceros estables de la planta son cancelados por el controlador, los polinomios N y D del controlador pueden escribirse como:

$$N = X_- P' \quad \text{y} \quad D = Y_- Q' \quad (2.9)$$

con P y Q polinomios a determinar.

Como se impuso en el capítulo 1, que los denominadores de V y W (B_1 y B_2) tuvieran como factores a los polinomios X_0 y Y_0 respectivamente ya que $|VS|$ y $|WT|$ para $|z| = 1$ deben ser acotadas, los polinomios B_1 y B_2 pueden definirse como:

$$B_1 = B'_1 X_0 \quad \text{y} \quad B_2 = B'_2 Y_0 \quad (2.10)$$

con B'_1 y B'_2 polinomios con raíces dentro del círculo unitario.

Tomando en cuenta (2.9), el controlador se puede expresar como:

$$G = \frac{X_- P'}{Y_- Q'} \quad (2.11)$$

y se obtiene el polinomio característico del sistema en lazo cerrado

$$R_{\text{ca}} = X \cdot Y - Q' + Y X - P' \quad (2.12)$$

$$R_{\text{ca}} = X - Y - (X + X_0 Q' + Y + Y_0 P') \quad (2.13)$$

$$R_{\text{ca}} = X - Y - R \quad (2.14)$$

donde

$$R = X + X_0 Q' + Y + Y_0 P'$$

corresponde a la ecuación de Bezout y se observa que como los polinomios $X + X_0$ y $Y + Y_0$ son coprimos existen polinomios Q' y P' tales que se cumpla la ecuación de Bezout para una R dada.

Calculando las funciones S y T con G definida por (2.11), se tiene,

$$S = \frac{X_0 X + Q'}{R} \quad ; \quad T = \frac{Y_0 Y + P'}{R} \quad (2.15)$$

y como consecuencia $Z(z)$ se puede expresar como:

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{(A_1 Q' X + X_0)(A_1 Q' X + X_0) * B_2 B_2^* + (A_2 P' Y + Y_0)(A_2 P' Y + Y_0) * B_1 B_1^*}{R R^* B_1 B_1^* B_2 B_2^*} \\ &= \frac{N_z(z)}{D_z(z)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Analizando esta ecuación se ve que para lograr una fracción $Z(z)$ pasa-todo (all-pass) y además que el sistema en lazo cerrado sea estable se requiere que $N_z(z)$ tenga como factores a

los polinomios $RR^*B_1B_1^*B_2B_2^*$ con R estable. Esto puede lograrse si Q' y P' tienen como factor a B_1' y B_2' respectivamente esto es, $Q' = QB_1'$ y $P' = PB_2'$; y además se satisface la ecuación:

$$L^*RR^* = (A_1X+Q)(A_1X+Q)^* + (A_2Y+P)(A_2Y+P)^* \quad (2.17)$$

con R estable.

Por tanto, sustituyendo Q' y P' en (2.11) se obtiene la familia de controladores ecualizadores propios (aún no estabilizantes),

$$G = \frac{X_0 X - B_2 P}{Y_0 Y - B_1 Q} \quad (2.18)$$

Cabe hacer notar que por el momento se desconoce el menor grado, tanto de P como de Q que permiten obtener un polinomio característico estable

$$R = B_1 X + Q + B_2 Y + P \quad (2.19)$$

Por otro lado se sabe que S siempre es una función propia y T tiene un exceso de polos dado por el exceso de los polos de la planta más el exceso del controlador. Así que definiendo la función grado [] como el grado del mayor exponente de un polinomio, si $x = [R]$, $s = [Q]$ y $r = [P]$ se obtiene de (2.15):

$$x = b_1 + n + s = b_2 + m + r + p.$$

Debido a que se desconocen s y r, aún no se puede determinar el grado del polinomio R. Esto quiere decir que es necesario

determinar condiciones adicionales para la solución ecualizadora, que permitan determinar los grados mínimos de los polinomios R, Q, P y que garanticen un polinomio R estable.

Antes de continuar, se recopila la propiedad del controlador (2.18)

Si los polinomios P y Q de este controlador (2.18) junto con R dada por (2.19) satisfacen la ecuación cuadrática (2.17), no lineal en los coeficientes de R, Q, P para una L^2 dada, entonces $Z = L^2$.

A continuación se derivan las condiciones para la existencia de un controlador de orden mínimo estabilizante.

2.3 Controladores estabilizantes.

Completando cuadrados en la ecuación (2.3) y haciendo uso de la relación $S+T=1$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$Z(z) = [V(z)V(z^{-1})S(z) - W(z)W(z^{-1})T(z)] [V(z)V(z^{-1})S(z^{-1}) - W(z)W(z^{-1})T(z^{-1}) + W(z)W(z^{-1})V(z)V(z^{-1}) / V(z)V(z^{-1}) + W(z)W(z^{-1})], \quad (2.20)$$

reemplazando V y W, de (2.2) y S y T de (2.21) en ésta ecuación, se obtiene después de manipulaciones algebraicas,

$$Z(z) = \frac{(A_1 A_1^* B_2^* X + Q Z^m - A_2 A_2^* B_1^* Y + P)(A_1 A_1^* B_2 X + Q^* - A_2 A_2^* B_1 Y + P^*)}{(A_1 A_1^* B_2 B_2^* Z^m + A_2 A_2^* B_1 B_1^*) R R^*} + \frac{A_1 A_1^* A_2 A_2^* R R^*}{(A_1 A_1^* B_2 B_2^* Z^m + A_2 A_2^* B_1 B_1^*) R R^*} \quad (2.21)$$

y ya que $Z = L^2$, la ecuación (2.21) es equivalente a la ecuación polinomial,

$$(A_1 A_1^* B_2^* X + Q Z^m - A_2 A_2^* B_1^* Y + P)(A_1 A_1^* B_2^* X + Q^* - A_2 A_2^* B_1^* Y + P^*) = L^2 (A_1 A_1^* B_2^* B_2^* Z^m + A_2 A_2^* B_1^* B_1^*) R R^* - A_1 A_1^* A_2 A_2^* R R^*. \quad (2.22)$$

cuando se define el polinomio

$$g = (A_1 A_1^* B_2^* B_2^* Z^m + A_2 A_2^* B_1^* B_1^*) \quad (2.23)$$

con $[g] = 2(b_1 + b_2 + p)$ y sin raíces sobre el círculo unitario y el polinomio

$$p = A_1 A_1^* A_2 A_2^* \quad (2.24)$$

con $[p] = 2(b_1 + b_2 + p)$, la ecuación (2.21) puede escribirse como:

$$(A_1 A_1^* B_2^* X + Q Z^m - A_2 A_2^* B_1^* Y + P)(A_1 A_1^* B_2^* X + Q^* - A_2 A_2^* B_1^* Y + P^*) = L^2 \left(g - \frac{1}{L^2} p \right) R R^*. \quad (2.25)$$

Si se define una factorización,

$$f = E E^* = g - \frac{1}{L^2} p \quad (2.26)$$

tal que E sea un polinomio Hurwitz de grado $(b_1 + b_2 + p)$, (ya que g y p son polinomios de grado $2(b_1 + b_2 + p)$ y g no tiene raíces sobre el círculo unitario), la existencia de E para g y p dadas depende del valor de L^2 . A continuación se muestra como determinar el rango de valores de L^2 , (L^2, ∞) tal que E esté bien

definida.

Partiendo de el hecho de que f debe ser mayor que cero sobre el círculo unitario para que pueda factorizarse como EE^* , (ver [3]), si se decrementa L^2 a partir de infinito, puede ocurrir primero, para un $L^2 < \infty$, cualquiera de las dos siguientes situaciones.

- Que exista L^2 con la cual $f(z_1) = 0$ para $|z_1| = 1$, lo cual es equivalente a decir que EE^* tiene raíces sobre el círculo unitario.

- Que exista un valor L^2 con el cual el mayor coeficiente de g sea igual al mayor coeficiente de p multiplicado por $1/L^2$, lo cual implica que tanto f como E pierden grado.

Esto quiere decir que L^2 , corresponde al valor más grande para el cual EE^* pierde grado o tiene raíces sobre el círculo unitario y el cual puede obtenerse con ayuda del lugar de las raíces.

Suponiendo un valor de L^2 tal que E esté bien definida y teniendo en cuenta las propiedades de los polinomios (*), la ecuación (2.25) se puede escribir como:

$$(A_1 A_1^* B_2 X_+^* Q^* - A_2 A_2^* B_1 Y_+^* P^*) (A_1 A_1^* B_2 X_+^* Q^* - A_2 A_2^* B_1 Y_+^* P^*)^* = L^2 E E^* R R^* \quad (2.27)$$

Analizando, esta ecuación, se ve existen diferentes formas de factorizarla, sin embargo debido a que se busca una R estable se puede demostrar con base en el Teorema 1, que se presenta a

continuación, que la factorización adecuada está dada por:

$$A_1 A_1^* B_2 X_*^* Q^* - A_2 A_2^* B_1 Y_*^* P^* = L E^* R \quad (2.28)$$

El siguiente teorema establece las condiciones para los grados x , s y r que garantizan la solución de la ecuación (2.28) con R estable.

Teorema 1. Si los grados de los polinomios R , Q , P están dados respectivamente por:

$$x = b_1 + b_2 + p + n_* + m_*$$

$$s = m_* + b_2 + p$$

$$r = n_* + b_1$$

entonces; a) para un $L^2 \geq L_0^2$, la ecuación polinomial (2.28) con $R(z)$ definido como en (2.19) tiene una familia única de soluciones $R(z)$, $Q(z)$, $P(z)$, con $[R] \leq x$, $[Q] \leq s$, $[P] \leq r$, cuyos coeficientes son funciones continuas de L , tal que para $|L|$ suficientemente grande, el polinomio $R(z)$ tiene grado x y todas sus raíces son estables. b) Además si $R(L_0, z)$ tiene una raíz sobre o fuera del círculo unitario entonces existe un $|L| > L_0$ tal que $R(L, z)$ tiene sus raíces estables y:

$$[R(L, z)] \leq x - 1$$

$$[Q(L, z)] \leq s - 1$$

$$[P(L, z)] \leq r - 1.$$

debido a que la demostración de este teorema es semejante a la del caso continuo presentada en [13] se omite en este trabajo.

Con base en los valores x , s y r dados por el teorema 1, para un $|L| > L_0$ dada, se observa que la ecuación polinomial (2.28) se puede plantear reemplazando R en función de Q y P de (2.19) como un sistema de ecuaciones lineales $Ay = 0$, con $s + r + 2$ incógnitas y con $b_1 + b_2 + p + s + r + 1$ ecuaciones, el cual resulta claramente un sistema sobredeterminado.

Resolviendo este sistema numéricamente, usando un método aproximativo de solución (ver [6]) se obtienen los coeficientes de R , Q y P . Sin embargo si R tiene raíces inestables es necesario aumentar iterativamente L y resolver el sistema sobredeterminado hasta encontrar un polinomio R , aproximado, con raíces estables. De esta forma se obtiene un estimado de la solución equalizadora, para la cual una raíz de R cruza el círculo unitario cuando L se decrementa desde infinito y además con los polinomios Q y P de grado reducido, esto es,

$$s = m + b_2 + p - 1$$

$$r = n + b_1 - 1.$$

Sustituyendo la ecuación (2.28) en (2.16) se ve claramente que satisface el principio equalizador $Z(z) = L^2$. Por tanto se puede decir que la solución del problema, $Z(z) = L^2$ se reduce a determinar una solución adecuada de (2.28) con R dada por la ecuación (2.19). Alternativamente se puede resolver la ecuación no lineal (2.17) con R dado por (2.19) pero solo califican las soluciones que satisfacen (2.28).

Para encontrar la solución exacta de orden reducido, se

recomienda resolver la ecuación no lineal (2.17), agregando una condición de normalización y partiendo de la solución aproximada de (2.28).

En particular el programa desarrollado en el I.I. resuelve la ecuación no lineal empleando el método de Newton-Raphson tomando como condiciones iniciales los valores obtenidos en la solución aproximada de (2.28).

2.4 Propiedades del valor L_0 .

A lo largo de toda la derivación de la solución ecualizadora, incisos 2.2 y 2.3, el valor de L_0 desempeña un papel importante ya que su función es la de acotar el rango de valores de L en el cual hay que buscar la solución. Por lo que a continuación se presenta algunas de las propiedades que tiene el valor L_0 .

Hecho 1: Para cualquier controlador $\sup_w Z(jw) \geq L^2$.

Hecho 2: Suponga que $R(L_0)$ tiene todas sus raíces en el círculo unitario, entonces, el controlador G dado en (2.18) con Q reemplazado por $Q(L_0, z)$ y P reemplazado por $P(L_0, z)$ minimiza $\sup_w Z(jw)$ y el valor mínimo está dado por L_0 .

Con base en el teorema 1 se puede decir que para un L^2 suficientemente grande la ecuación (2.28) tiene una única solución con R estable, entonces cuando se decrementa L^2 desde infinito hasta cero, se pueden presentar los siguiente dos casos:

- a) Que L alcance el valor de L_0 y R sea estable ó
 b) Que L alcance el valor de L_0 y R se inestable.

En el caso a), se tiene una solución de (2.28), Q_0, P_0, R_0 , y el controlador que resulta al reemplazar Q_0 y P_0 en (2.19), minimiza el criterio (2.4) y $Z(z) = L_0 z^2$.

Ahora, si para $L^2 = L_0 z^2$, R tiene una raíz fuera o sobre el círculo unitario; como los coeficientes de $R(z)$ varían continuamente con L , existe un valor de $L^2 > L_0 z^2$ para el cual una de las raíces de R cruza el círculo unitario o sea,

$$R(z_1) = 0 \quad \text{para } |z_1| = 1 \quad (2.29)$$

y por tanto,

$$|A_1(z_1)X_+(z_1)Q(z_1)|^2 + |A_2(z_1)Y_+(z_1)P(z_1)|^2 = 0 \quad (2.30)$$

$$|A_1(z_1)X_+(z_1)Q(z_1)|^2 = 0 ; |A_2(z_1)Y_+(z_1)P(z_1)|^2 = 0 \quad (2.31)$$

ya que A_1 y A_2 son polinomios estables, los únicos polinomios que pueden tener raíces en z_1 son Q y P por tanto $Q(z_1) = 0$; $P(z_1) = 0$ y la raíz z_1 , común a $Q(z)$, $P(z)$, $R(z)$, puede ser cancelada, resultando una solución de orden reducido pero con las raíces de $R(z)$ dentro del círculo unitario.

Concluyendo, en este capítulo se han derivado las ecuaciones (2.17), (2.19) y (2.28) que permiten resolver el problema minimax, criterio (2.4), para sistemas discretos, garantizando que el sistema en lazo cerrado sea estable.

3. APLICACION DE LA SOLUCION ECUALIZADORA.

3.1 Introducción.

Con objeto de mostrar la utilidad de la solución ecualizadora descrita en el capítulo 2, a continuación se aplica dicha solución para diseñar un controlador que regule la dirección de un barco sujeto a perturbaciones paramétricas y ruidos.

Cabe hacer notar que debido a que, aún en sistemas de orden reducido como el considerado aquí, el resolver el sistema sobredeterminado, ec.(2.28), para encontrar una solución ecualizadora, y/o la ecuación no lineal (2.17) resulta tedioso, fué necesario un paquete de programas que facilitara esta tarea. (Ver apéndice B para su descripción)

Los resultados muestran, como era de esperarse que el regulador logra atenuar y rechazar las perturbaciones consideradas en el diseño. Sin embargo, debido a que el método no garantiza a priori robustez ante perturbaciones paramétricas, la estabilidad del sistema en lazo cerrado para los diferentes puntos de funcionamiento tuvo que ser verificada después.

3.2 Ejemplo.

Como se mencionó anteriormente la solución ecualizadora, se emplea para diseñar el sistema de control para la dirección de un barco, cuyo modelo reducido descrito por Åström en [1] corresponde a la función de transferencia,

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{s(s+a)}, \quad (3.1)$$

en la cual la variable controlada $y(s)$ corresponde a la dirección del barco y la variable de control o señal de acción $u(s)$, corresponde a el ángulo de la aleta guía del barco.

En [1] se muestra que esta función de transferencia simplificada, conocida como " el modelo Nomoto " es bastante general y puede ser empleada para describir el comportamiento de diferentes tipos de barcos, (tanques, cargueros y de pasajeros) en donde los valores de k y a , dependen de la clase considerada. El parámetro k , depende de la longitud del barco, la velocidad y de la aleta guía. El parámetro a depende tanto de la carga como de la velocidad y puede cambiar de signo para diferentes puntos de operación.

Los valores de estos parámetros para las cuatro condiciones de operación consideradas, correspondientes a un barco tipo tanque son

Cond. Operación	a	k
1	0.75	0.37
2	0.26	0.38
3	0.04	0.18
4	-0.11	0.14

Existen dos tipos de perturbaciones que afectan el comportamiento del barco y que dependen de las condiciones atmosféricas, el viento y el movimiento de las olas.

La influencia del viento se considera como una perturbación

aditiva a la salida que puede ser descrita como una fuerza constante que produce un desplazamiento constante, v , en la dirección del barco cuya magnitud depende de las condiciones del mar.

El movimiento de las olas actúa sobre el barco como una fuerza que produce una desviación que se puede representar como

$$v = v_0 \text{ sen } \omega t. \quad (3.2)$$

La amplitud v_0 depende de las condiciones del mar. La frecuencia ω , depende del ángulo entre la proa y el frente de onda de las olas. Los valores típicos son: $v_0 = 0.2 \text{ m/s}$ y la frecuencia ω , en el rango $(1 - 2 \text{ r/s})$.

3.3 Objetivos de diseño.

Para el modelo dado en la ecuación (3.1), se desea diseñar un controlador en discreto, acoplado a la planta en la forma mostrada en la fig. 3, con ROC un retenedor de orden cero, de tal manera que el sistema en malla cerrada tenga las siguientes características:

- a) rechazo de perturbaciones del tipo constante,
- b) atenuación de perturbaciones del tipo dado por (3.2) en el rango de frecuencias $1 - 2 \text{ r/s}$.,
- c) estabilidad en las 4 condiciones de operación.

Definiendo la función de transferencia de la planta discretizada, como $H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\{H(s)\}$, entonces, el esquema de la fig. 3, se transforma en la fig.4

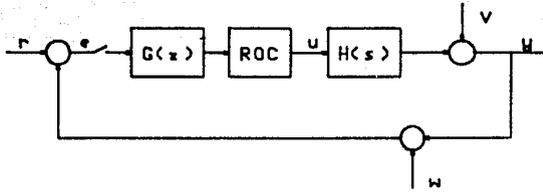


Fig.3 Diagrama de bloques del sistema muestreado, usando un ROC.

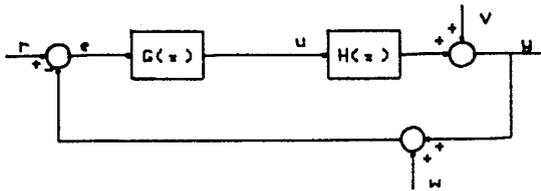


Fig. 4 Diagrama de bloques del sistema discretizado.

Con base en las recomendaciones hechas por Åström en [2], para la selección del periodo de muestreo, se eligió $T_m = 0.1$ s. Las funciones de transferencia, $H_i(z)$, para los cuatro puntos de operación de interés, con este periodo de muestreo se muestran en la tabla 1.

Debido a que la solución ecualizadora requiere de un modelo nominal base, se consideró adecuado tomar como modelo:

$$H^0(z) = \frac{k(z+1)}{(z-1)(z-1)} \quad (3.3)$$

con $k = 0.00179$, ya que los valores promedio tanto de los polos

como de los ceros, de las condiciones más críticas, están muy cercanos a este modelo.

Cond. Operación	H(s)	H(z)
1	$\frac{0.38}{s(s + 0.26)}$	$\frac{1.880E-3(z + 0.99137)}{(z - 1)(z - 0.9743)}$
2	$\frac{0.37}{s(s + 0.75)}$	$\frac{1.804E-3(z + 0.97530)}{(z - 1)(z - 0.9277)}$
3	$\frac{0.18}{s(s + 0.04)}$	$\frac{8.988E-4(z + 0.99862)}{(z - 1)(z - 0.996)}$
4	$\frac{0.14}{s(s - 0.11)}$	$\frac{7.026E-4(z + 1.00367)}{(z - 1)(z - 1.01106)}$

Tabla 1. Función de transferencia discretizada para los 4 modelos.

3.4 Selección de las funciones de ponderación.

Rechazo y atenuación de perturbaciones.

Como la planta nominal tiene dos polos en $z=1$, $V(z)$ debe tener también dos polos en $z=1$. Esto asegura un rechazo a perturbaciones del tipo,

$$v(kT) = v(kT)^2 \quad l = 0,1.$$

y una atenuación a perturbaciones de baja frecuencia.

Limitación de energía en la señal de acción.

Ya que la planta tiene un cero en $z = -1$, para acotar $|W(z)T(z)|$, $W(z)$ debe tener un polo en $z = -1$. Por otro lado la

planta tiene un exceso de polos $e = 1$, así que $W(z)$ debe tener un exceso de ceros mayor o igual a 1 para obtener un controlador estrictamente propio o propio, respectivamente.

Robustez.

No obstante, que la condición de suficiencia para la estabilidad del sistema con perturbaciones paramétricas dadas en el inciso 1.2.4, se puede verificar solamente a posteriori, se consideró conveniente elegir W y V de tal manera que la desigualdades dadas en (1.24) se satisfagan.

Resumiendo: si las variaciones relativas de polos y ceros satisfacen las desigualdades (1.24) y el valor del criterio 2.4, con la solución ecualizadora es menor que 1, el sistema es estable ante variaciones paramétricas.

Calculando la variación relativa máxima de los polos y ceros para los cuatro modelos con respecto al modelo nominal se obtiene:

$$\text{Variación máxima de los polos } \left| \frac{X - X_0}{X_0} \right| = \left| \frac{0.073}{(z - 1)} \right|$$

$$\text{Variación máxima de los ceros } \left| \frac{Y - Y_0}{Y_0} \right| = \left| \frac{-0.025}{(z + 1)} \right|$$

Con base en todas las consideraciones anteriores se escogieron las siguientes funciones de ponderación:

para la sensibilidad

$$V = \frac{(z - 0.3)^2}{(z - 1)^2}$$

para el complemento

$$W = \frac{(z - 0.7)(z - 0.8)}{(z + 1)} \quad (3.4)$$

Las figuras 5 y 6, muestran que la magnitud de V y W están siempre por debajo de las variaciones relativas de los polos y ceros respectivamente.

Disminuyendo L^2 desde infinito se encuentra, al resolver aproximadamente la ecuación (2.28) con un valor de $L^2 = 31.1$ la siguiente familia solución:

$$Q(z) = (z + 0.99822)(z + 0.44418)$$

$$P(z) = (z + 1.00439)(z - 0.71944)$$

$$R(z) = (z + 0.99824)(z - 0.45813)(z + 0.202 + 0.289j)(z + 0.202 - 0.289j)$$

Ya que los tres polinomios poseen una raíz muy próxima al círculo unitario, ésta puede ser cancelada obteniendo una solución de orden reducido dada por:

$$Q(z) = (z + 0.44418)$$

$$P(z) = (0.6924225z - 0.498156)$$

Tomando estos nuevos polinomios junto con el valor de $L^2 = 31.1$ como condiciones iniciales para resolver la ecuación no lineal (2.17) empleando el método de N-R se obtiene

$$L^2 = 2.9499$$

$$Q(z) = (z + 0.446155)$$

$$P(z) = (0.705786z - 0.499463)$$

$$R(z) = (z - 0.39466)(z - 0.2267 + j0.28927)(z + 0.2267 - j0.28927)$$

El controlador ecualizador queda determinado por:

$$G(z) = \frac{B_2(z) P(z)}{k B_1(z) Q(z)} = \frac{(0.7057867 z - 0.499463)}{(z + 0.4466155)}$$

$$G(z) = \frac{560(0.7057867 z - 0.499463)}{(z + 0.4466155)} \quad (3.5)$$

Notese que en la expresión del controlador se incluyó, en el denominador la ganancia del sistema nominal. Esto se debe a que el análisis del problema ecualizador fué hecho considerando ganancia unitaria.

En la tabla 2. se presenta la ubicación de los polos y ceros para cada uno de los sistemas en lazo cerrado utilizando el controlador ecualizador (3.5).

Planta	Ceros	Polos	Ganancia
nominal	0.70767	0.22266 + j 0.29382	0.70748
	-1.00000	0.22266 - j 0.29382 0.40103	
1	0.70767	0.13132 + j 0.38832	0.74449
	-0.99137	0.13132 - j 0.38832 0.52154	
2	0.7067	0.10582 + j 0.35991	0.71325
	-0.9753	0.10582 - j 0.35991 0.55675	
3	0.70767	0.74568 + j 0.30882	0.35524
	-0.99867	0.74568 - j 0.30882 0.29675	
4	0.70767	0.81329 + j 0.29424	0.27763
	-1.00367	0.81329 - j 0.29424 0.33937	

Tabla 2. Polos y ceros del sistema en lazo cerrado para los modelos considerados.

Calculando las funciones $S(z)$ y $T(z)$ para el modelo nominal, usando el controlador (3.5) se obtiene:

$$S^{\circ}(z) = \frac{(z - 1)^2 (z - 0.446155)}{(z - 0.227 + j0.289)(z - 0.227 - j0.289)(z - 0.39465)}$$

$$T^{\circ}(z) = \frac{0.706 (z + 1) (z - 0.707)}{(z - 0.227 + j0.289)(z - 0.227 - j0.289)(z - 0.39465)}$$

Las graficas de Bode de $S_{\pm}(z)$ y $T_{\pm}(z)$ para todos los puntos de operación se muestran en la fig.5.

3.5 Análisis de resultados.

De la fig. 5 se observa que, para perturbaciones constantes se logra un rechazo total. Para el rango de frecuencias de la perturbación considerada en el diseño, 1-2 r/s, ésta, se atenúa, en promedio, a un 10 % en los cinco casos. Además, la diferencia de las cinco curvas en ese rango no es mayor del 2%, siendo un poco menor la atenuación para los condiciones de operación más críticas, (3 y 4).

En la fig.6, se presenta la respuesta al escalón del sistema sometido a perturbaciones aditivas a la salida, para las cuatro condiciones de operación y se puede ver que efectivamente la perturbación del tipo constante es rechazada y la senoidal es atenuada en el porcentaje especificado en el diseño. Esto se puede comprobar también en la fig.7, donde se muestra la evolución del error para los cuatro casos.

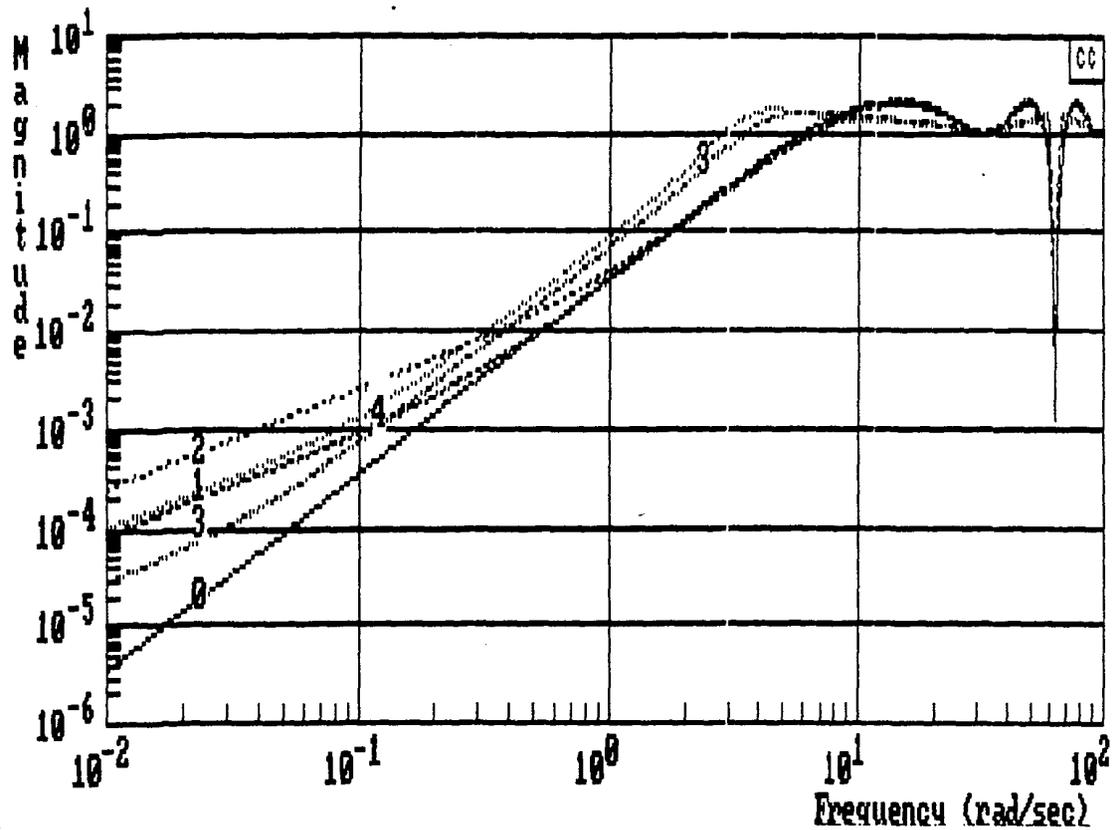


Fig. 5 Función de Sensibilidad para la planta nominal y las cuatro condiciones de operación.

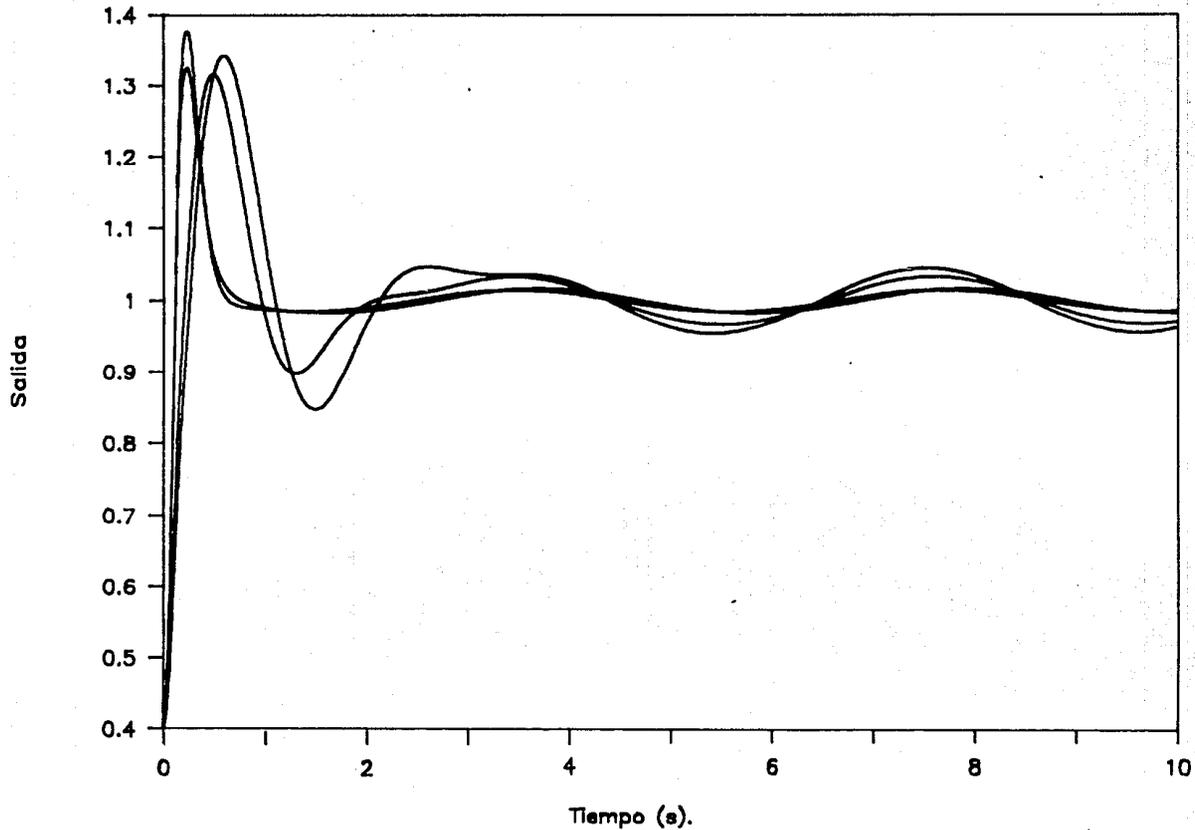


Fig. 6 Respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado para las cuatro condiciones de operación.

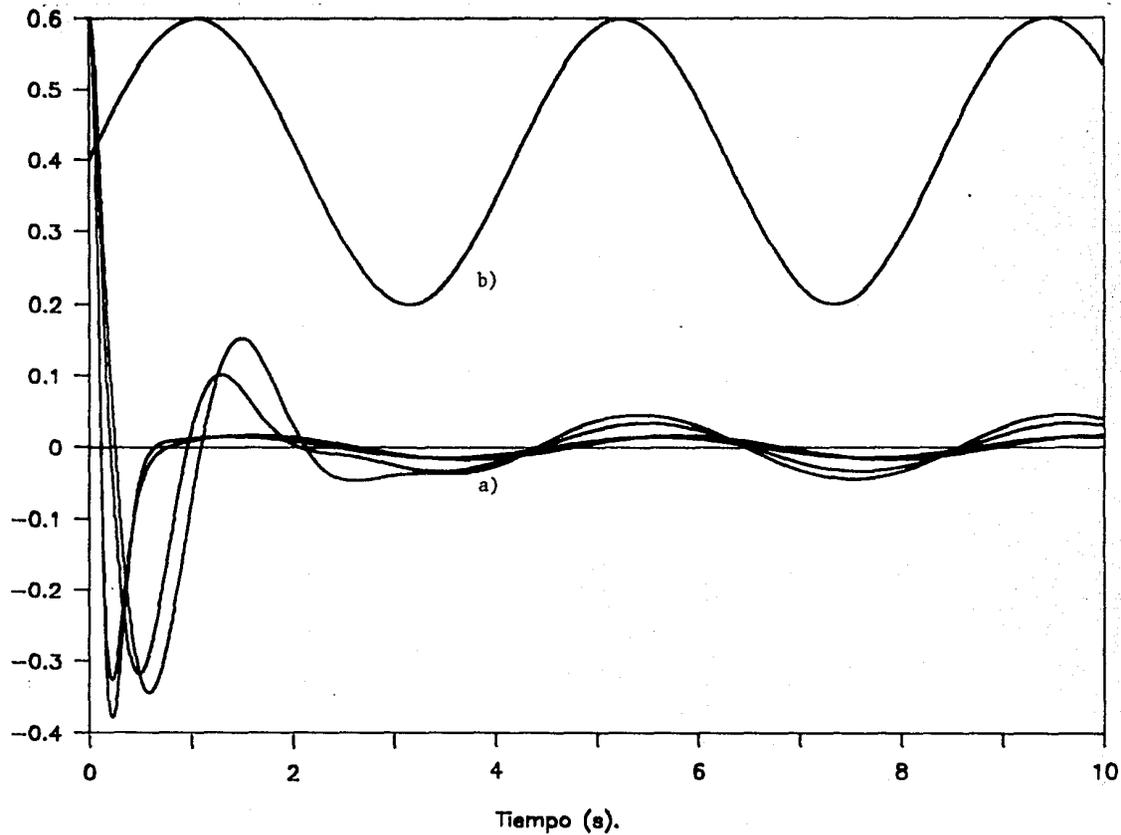


Fig. 7 a) Evolución del error para las cuatro condiciones de operación.
b) Señal de perturbación.

El sistema obtenido al utilizar el controlador (3.5), preserva estabilidad ante variación de los parámetros de la planta, como puede observarse en la fig.6 al igual que en la tabla 2, donde se ve que los polos en malla cerrada son estables para todos los casos.

La fig. 8 muestra la evolución en función del tiempo de la acción de control, esto es, la posición de la aleta guía del barco. Claramente, la acción es grande, cuando se presenta un cambio en la referencia o una perturbación. Este fenómeno se explica ya que como en las especificaciones de diseño no se impone ninguna restricción en la acción $u(t)$, se ponderó principalmente S en el diseño.

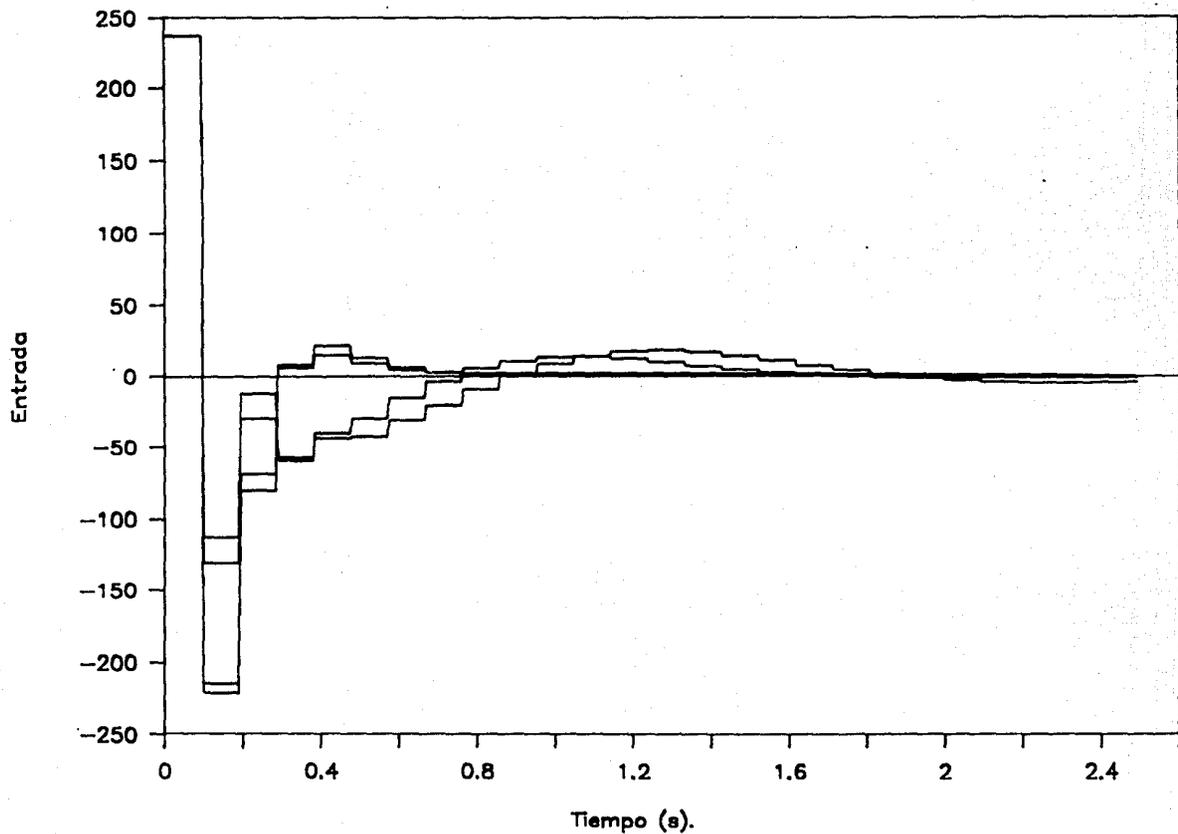


Fig. 8 Acción de control para las 4 condiciones de operación.

4. CONCLUSIONES.

En este trabajo se verifica que el problema de optimización en el dominio de la frecuencia para sistemas discretos, lineales, monovariantes, puede ser tratado, al igual que en continuo, trasladando los objetivos de diseño a la selección adecuada de funciones de ponderación para la función de sensibilidad $S(z)$ y su complemento $T(z)$.

Para plantas en tiempo discreto, una entrada una salida, se hizo una extensión del método de optimización en el dominio de la frecuencia propuesto en [13], lograndose una solución similar a la obtenida en dicho trabajo.

En lo referente al desarrollo del método, la única diferencia básica que se encontró con respecto a los sistemas continuos fué el tener que exigir que la función de ponderación $V(z)$ tenga igual número de polos que de ceros. Esto se requiere para poder transformar la ecuación (2.22) en la ecuación (2.25).

Para el caso estudiado se observó que, tomando como planta nominal el modelo 1, 2 o 3 (polos y ceros estables) y las funciones de ponderación dadas en (3.4), los controladores ecualizadores no estabilizaban el sistema para condiciones de operación con polos más cercanos al círculo unitario que los de la planta nominal.

Considerando como planta nominal el modelo 4, (polos y ceros

inestables muy cercanos al círculo unitario) no fué posible resolver satisfactoriamente el sistema de ecuaciones sobredeterminado dado por la ecuación (2.28). Esto puede explicarse debido a que para sistemas discretos se requiere mayor precisión de los algoritmos numéricos para resolver el problema, ya que se reduce todo el semiplano izquierdo del plano complejo a el interior del círculo unitario.

Otro hecho que se debe tener en cuenta al seleccionar $V(z)$ y $W(z)$ es que, las gráficas de Bode no son iguales para sistemas discretos que para continuos, puesto que el signo de la pendiente del modulo para un polo o un cero discreto, depende de la ubicación de éste en el plano Z .

Por la forma en que fué resuelto el ejemplo tratado en el capítulo tres, se considera adecuado tratar los sistemas que tengan polos y ceros muy próximos al límite de estabilidad suponiendo que están sobre el círculo unitario.

Cabe anotar que con las funciones de ponderación utilizadas en este ejemplo, y tomando como planta nominal alguna de las tres que tenían sus polos y ceros dentro del círculo unitario, los controladores ecualizadores, que se obtuvieron, aunque si minimizaban el criterio 2.4 no lograban estabilizar el sistema para las condiciones mas críticas, que la nominal.

De las observaciones y comentarios anteriores, se puede concluir que se requiere un estudio minucioso acerca de la selección y el efecto de las funciones de ponderación en el

desempeño del sistema.

El análisis realizado en este trabajo, junto con los programas implementados para resolver el problema, pueden ser utilizados como punto de partida para continuar estudiando las características de una optimización minimax en el caso discreto.

APENDICE A

Propiedades de los polinomios recíprocos (*)

Hecho 1:

Sea un polinomio $A(z)$ de grado n , con coeficientes reales, tal que

$$A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (\text{A.1})$$

entonces se define el polinomio recíproco $A^*(z)$ de grado n , como

$$A^*(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (\text{A.2})$$

con la siguiente propiedad:

Si $A(z)$ tiene raíces r_i , con $i = 1, \dots, n$; las raíces de $A^*(z)$ son $1/r_i$.

Hecho 2:

Sea el polinomio $B(z)$ de grado $2n$, con coeficientes reales, tal que se pueda factorizar como

$$B(z) = A(z)A^*(z) \quad (\text{A.3})$$

entonces, $B(z)$ tiene coeficientes simétricos con respecto al término n . Esto es,

$$b_i = b_{2n-i} \quad \text{con } i = 0, \dots, n$$

y se verifica que

$$B^*(z) = B(z) \quad (A.4)$$

Hecho 3:

Sean $A(z)$ y $B(z)$, polinomios con coeficientes reales con grados n y m respectivamente, donde $n = m + e$, con $e \geq 0$. Entonces la operación suma recíproca (*) satisface la ecuación

$$(A(z) + B(z))^* = A^*(z) + B^*(z) z^{-e}$$

Hecho 4: [10]

Sean los polinomios de coeficientes reales,

$$A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

$$B(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0$$

$$C(z) = c_{n+m} z^{n+m} + c_{n+m-1} z^{n+m-1} + \dots + c_0$$

$$D(z) = d_{n+m} z^{n+m} + d_{n+m-1} z^{n+m-1} + \dots + d_0,$$

entonces, la multiplicación polinomial

$$A(z) B(z) = C(z) \quad (A.5)$$

se puede representar como

$$T(A) B = C \quad (A.6)$$

donde $T(A)$ representa la matriz Toeplitz de dimensiones $(n + m + 1) \times (m + 1)$, generada a partir del polinomio $A(z)$. B es un vector $(m+1 \times 1)$, tal que $B^T = [b_0 \dots b_m]$ y C es un vector $(m+n+1 \times 1)$, tal que $C^T = [c_0 \dots c_{m+n}]$.

Con base en la representación (A.6) se demuestra que la multiplicación polinomial

$$A(z) B^*(z) = D(z) \quad (\text{A.7})$$

se puede representar como

$$T^{\sigma}(A) B = D \quad (\text{A.8})$$

donde $T^{\sigma}(A)$ es la matriz obtenida a partir de la permutación de las columnas de la matriz $T(A)$ definida en (A.6). Esto quiere decir que la columna (i) de $T^{\sigma}(A)$ es igual a la columna (m+2-i) de $T(A)$, con $i = 1, \dots, m+1$. B y D son vectores tales que $B^{\tau} = [b_0 \dots b_m]$ y $D^{\tau} = [d_0 \dots d_{m+n}]$.

APENDICE B

DESCRIPCION DEL PAQUETE DE PROGRAMAS

Introducción.

El paquete de programas desarrollado en el I.I. para encontrar la solución ecualizadora, lo cual es equivalente a determinar los controladores estabilizantes que minimizan el criterio dado en la ecuación (2.4),

$$\sup_{z \in C} Z(z) = L^2, \quad (B.1)$$

consta de dos partes. La primera parte calcula una solución aproximada de la ecuación polinomial (ec. (2.28)),

$$A_1 A_1^* B_2 X + Q^* - A_2 A_2^* B_1 Y + P^* = L E^* R. \quad (B.2)$$

La segunda parte resuelve la ecuación polinomial no lineal en los parámetros Q, P y L (ec. (2.17)),

$$A_1 A_1^* X X^* Q Q^* + A_2 A_2^* Y Y^* P P^* = L^2 R R^* \quad (B.3)$$

utilizando como punto de partida la solución aproximada obtenida en la primera parte.

Primera parte.

Como se dijo anteriormente, esta primera parte calcula una solución aproximada de la ecuación polinomial, lineal (B.2).

las incógnitas por determinar se reducen a $(b_1 + b_2 + n_+ + m_+ + p + 2)$ y corresponden a los coeficientes de Q y P únicamente.

Empleando la representación matricial de productos de polinomios dada en el apéndice A, la ecuación (B.6) puede escribirse :

$$\begin{aligned} & [T (A_1 A_1^* B_2^* X_+ Z^*) - T^0 (L E B_1^* X_+^*)] Q \\ & - [T (A_2 A_2^* B_1^* Y_+) + T^0 (L E B_2 Y_+^*)] P = 0. \end{aligned} \quad (B.7)$$

Definiendo,

$$T_1 = T (A_1 A_1^* B_2^* X_+ Z^*) - T^0 (L E B_1^* X_+^*)$$

$$T_2 = - [T (A_2 A_2^* B_1^* Y_+) + T^0 (L E B_2 Y_+^*)]$$

la ecuación (B.7) se puede escribir como un sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} T_1 \quad Q & = 0 \\ T_2 \quad P & \end{aligned} \quad (B.8)$$

con $b_1 + b_2 + p + m_+ + n_+ + 2$ incógnitas y $2b_1 + 2b_2 + 2p + m_+ + n_+ + 1$ ecuaciones.

Como en general, $b_1 + b_2 + p > 1$ el sistema es sobredeterminado y solo puede resolverse en forma aproximada.

Por otro lado, como el sistema (B.8) es homogéneo se introduce una condición de normalización para poder encontrar su solución. Esta puede ser, por ejemplo, que el coeficiente correspondiente a la primera potencia del polinomio Q sea igual

a 1.

Como se demuestra en el capítulo 2, el problema de encontrar la solución de (B.2) y (B.3), de mínimo orden, para el caso b) del teorema 1 del capítulo 2, se reduce a encontrar el valor de L^2 para el cual una de las raíces de R cruza el círculo unitario, cuando L^2 decrece desde infinito. (Recuerde que existe un L^2 suficientemente grande para el cual R es Hurwitz.)

Por lo tanto, tomando los valores máximos de los grados de Q, P y R se implementó el siguiente procedimiento iterativo, para determinar aproximadamente el L^2 buscado.

1.- Se escoge un valor para L^2 , suficientemente grande tal que las raíces del polinomio EE^* , definido por la ecuación

$$EE^* = A_1 A_1^* B_2 B_2^* z^m + A_2 A_2^* B_1 B_1^* + \frac{1}{L^2} A_1 A_1^* A_2 A_2^* \quad (B.4)$$

no tenga raíces sobre el círculo unitario. Con ello se garantiza la obtención del polinomio L E, con grado $b_1 + b_2 + p$, estable tal como lo requiere la solución ecualizadora.

2.- Se forma el sistema, $A x = 0$, con A, una matriz (m x n), dada por (B.8) y x, el vector solución con los coeficientes de Q Y P.

3.- Se agrega al sistema $A x = 0$, la condición de normalización, obteniéndose

$$A' x = y \quad (B.10)$$

con

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ N \end{bmatrix}$$

4.- Se resuelve el sistema $A' x = 0$, usando un método aproximativo de mínimos cuadrados, por medio de la subrutina F04JAF de la librería NAG FORTRAN, [16] que se implementó para una computadora PC. (ver [19]). El vector solución generado por esta subrutina permite así formar los polinomios Q y P.

5.- Los polinomios Q y P, se reemplazan en la ecuación (B.3) con lo cual se obtiene el polinomio R.

6.- Se calculan las raíces de R. Si son estables, se decrementa L^2 y se regresa al paso 2. En el caso que una o más raíces de R estén fuera del círculo unitario se inicia la nueva iteración con un valor de L^2 mayor que el anterior. En caso de obtener raíces muy cercanas o sobre el círculo unitario, se continúa con el paso 7.

7.- Se cancela la raíz de R sobre el círculo unitario tanto en Q como en P obteniendo polinomios Q, P y R de grado reducido con R un polinomio Hurwitz.

8.- Se genera un archivo con los datos del problema, los polinomios Q, P y R y el valor de L^2 . Este archivo es utilizado como entrada para la segunda parte del paquete.

Segunda parte.

Esta parte del programa, básicamente resuelve la ecuación polinomial, no lineal

$$A_1 A_1 * XX * QQ^2 + A_2 A_2 * YY * PP^2 - L^2 RR^2 = 0 \quad (B.11)$$

Debido a que ya se conoce una solución aproximada de (B.11), se propone emplear el método de Newton-Raphson, el cual está basado en una linealización de la función no lineal alrededor de un punto conocido y en incrementos sucesivos de las incógnitas en las direcciones adecuadas, para encontrar la solución exacta.

Aproximando la ecuación no lineal por medio del primer término de la serie de Taylor y haciendo uso de la representación de polinomios en forma matricial (matriz Γ) el lado izquierdo de (B.11) se puede escribir como

$$F(x) = F(x_0) + J(x_0) (x - x_0) \quad (B.12)$$

donde x , vector ($nx1$) corresponde a las incógnitas (coeficientes de P , Q y R y L^2), x_0 , vector ($nx1$) corresponde a la solución aproximada de (B.5) (P_0 , Q_0 , R_0 y L_0^2), $F(x_1)$ y $F(x_0)$ son los vectores correspondientes al lado izquierdo de (B.5) evaluado en x y x_0 respectivamente y $J(x_0)$ corresponde al Jacobiano de la función evaluada en x_0 .

Como se busca la solución x tal que $F(x) = 0$, la ecuación (B.12) se puede transformar en

$$F(x_0) - J(x_0)x_0 = -J(x_0)x \quad (B.13)$$

Formando la matriz (nxn),

$$J' = \frac{J(x_0)}{N}$$

con N la condición de normalización, la ecuación (B.13) se puede escribir

$$y = \frac{F(x_0) - J(x_0)}{1} = \frac{-J(x_0)}{N} x_1 = J' x_1 \quad (\text{B.14})$$

donde todo es conocido excepto el vector x_1 . Claramente este sistema puede resolverse empleando una solución numérica del tipo Gauss - Jordan (G-J). Sustituyendo en (B.14) el valor de x_1 se repite el procedimiento hasta encontrar un x_1 que satisfaga $F(x_1) = 0$.

Por tanto, los pasos seguidos por el programa se describen de la siguiente forma:

1.- Se toman los polinomios Q y P de orden reducido obtenidos en la primera parte del programa y se forma la ecuación polinomial (B.11) con R dado por (B.3).

2.- Se forma, haciendo uso de las propiedades de las matrices Toeplitz el sistema lineal de ecuaciones ($n \times n$) generado a partir de la ecuación linealizada (B.12).

3.- Se resuelve el sistema $Ax_1 = y$ usando el método de G-J, obteniéndose el vector solución x_1 , el cual contiene los coeficientes de Q y P y el valor de L^2 .

ESTA TESIS HA DEBE
SER DE LA BIBLIOTECA

4.- Se evalúa $F(x_1)$. Si se satisface la ecuación no lineal $F(x_1) = 0$, se continúa con el paso 5. En caso contrario se inicia otra iteración a partir del paso 2, tomando x_1 como punto alrededor del cual se linealiza la ecuación no lineal.

5.- Se determinan las raíces del polinomio R, las cuales deben ser estables.

6.- Se verifica que los polinomios Q, P y R, y el valor de L satisfagan la ecuación (B.2). Para ello se reemplazan Q y P en el lado izquierdo de (B.2) y se comprueba que sus raíces correspondan a las obtenidas en el paso (5), junto con las las raíces de E, obtenidas en la primera parte del programa.

7.- Se genera un archivo que contiene tanto los coeficientes de los polinomios Q, P y R como sus respectivas raíces y el valor de L^2 , que corresponde al mínimo del criterio (2.4)

BIBLIOGRAFIA

- [1] Astrom, K.J.; "Ship steering. A test example for robust regulator design"; Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology.
- [2] Astrom, K.J.; "Computer controlled systems, theory and design"; Prentice Hall; Englewood Cliffs, New Jersey; 1984.
- [3] Bongiorno, J.J.; "Minimum sensitivity design of linear multivariable feedback control systems by matrix spectral factorization"; IEEE Trans. Aut. Contr. AC 14; pp. 665-673.
- [4] Chen, Ch.T.; "Linear systems theory and design"; Holt Rinehart and Winston; New Jersey; 1970.
- [5] Doyle, J.; "Synthesis of robust controllers and filters with structural plant uncertainties"; Proc. IEEE conf. on decision and control; San Antonio, Texas; 1983.
- [6] Dahlquist, G.; Bjorck, A. "Numericals Methods"; Prentice Hall; Englewood Cliffs, New Jersey; 1974.
- [7] Francis, B.A.; Zames, G.; "On H^∞ -optimal sensitivity theory for SISO feedback systems"; IEEE Trans. Aut. Contr. AC 29; pp. 9-16; 1984.
- [8] Francis, B.A.; "A course in H^∞ control theory"; Springer Verlag; Berlin; 1987.
- [9] Isermann, R.; "Digital control systems"; Springer Verlag; Berlin; 1981.
- [10] Kailath, Th.; "Linear systems"; Prentice Hall; Englewood Cliffs N.J.; 1980.
- [11] Kuo, F.F.; "Network analysis and synthesis"; Wiley; N.Y.; 2th edit.
- [12] Kwakernaak, H.; "Robustness optimization of linear feedback systems"; Proc. IEEE conf. on decision and control; San Antonio, Texas; 1983.
- [13] Kwakernaak, H.; "Minimax frequency domain performance and robustness optimization of linear feedback systems"; IEEE Trans. Aut. Contr. AC 30; pp. 904-1004; 1985.

- [14] Kwakernaak, H.; "Uncertainty models and the design of robust" control systems; Uncertainty and control; Springer Verlag; Berlin; 1985.
- [15] Kwakernaak, H.; "Minimax frequency domain optimization of multivariable linear feedback systems"; 9th. IFAC world congress, Budapest; vol. III; p. 1.
- [16] "NAG FORTRAN library Mark 8"; Numerical algorithms group; 1981.
- [17] Rudin, W.; "Real & complex analysis"; Mc Graw Hill; New Delhi; 1974
- [18] Safonov, M.G.; Laub, A.J.; Hartman, G.L.; "Feedback properties of multivariable systems: The role of the return difference matrix"; IEEE Trans. Aut. Contr.; vol. AC 26; pp. 47-65; 1981.
- [19] Zames, G.; "Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses"; IEEE Trans. Aut. Contr. vol. AC 26; pp. 301-320; 1981.