

04182

10/1/86

ESTRUCTURA DE LOS MEDIOS GRANULARES

GABRIEL ADVINET GUICHARD

TESIS DOCTORAL

presentada a la División de Estudios de

Posgrado de la

Facultad de Ingeniería

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener

el grado de

DOCTOR EN INGENIERIA

Ciudad Universitaria, D.F., julio de 1986

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

1. INTRODUCCION	1
2. DEFINICION GEOMETRICA DE LOS MEDIOS GRANULARES	4
2.1 CONCEPTOS GENERALES	5
2.2 PARAMETROS Y FUNCIONES USUALES PARA LA DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA	6
2.2.1 Tamaño de partícula y distribución granulométrica	6
2.2.2 Forma de partícula	10
2.2.3 Porosidad, relación de vacíos y compacidad relativa	15
2.3 PARAMETROS Y FUNCIONES ADICIONALES	19
2.3.1 Distribuciones granulométricas generalizadas	19
2.3.2 Porosidad y relación de vacíos generalizadas	31
2.3.3 Distribución espacial de partículas	36
2.3.4 Número de coordinación y repartición de contactos	43
2.3.5 Orientación de partículas	48
2.3.6 Distribución de tamaños de poros	49
2.3.7 Funciones características	57
2.3.8 Superficie específica generalizada	66
2.3.9 Anisotropía geométrica	74
3. ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DE LOS MEDIOS GRANULARES	76
3.1 CONCEPTOS GENERALES	77
3.2 TECNICAS EXPERIMENTALES PARA EL ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DE LOS SUELOS	78
3.2.1 Estudios de laboratorio	78
3.2.2 Estudios de campo	103

3.3 MODELOS ESTRUCTURALES	107
3.3.1 Diferentes tipos de modelos	107
3.3.2 Arreglos regulares de partículas	107
3.3.3 Arreglos estocásticos poissonianos	114
3.3.4 Simulación numérica de la estructura de los medios granulares	120
4. ESTRUCTURA Y PROPIEDADES DE LOS MEDIOS GRANULARES	175
4.1 CONCEPTOS GENERALES	176
4.2 REPRESENTATIVIDAD DE MUESTRAS	177
4.2.1 El problema del muestreo	177
4.2.2 Efecto de escala geométrico	178
4.2.3 Implicaciones para el dimensionamiento de muestras y especímenes	188
4.2.4 Conclusiones	195
4.3 MEZCLAS OPTIMAS	196
4.3.1 Antecedentes	196
4.3.2 Mezclas binarias	196
4.3.3 Mezclas con N componentes	200
4.3.4 Granulometrías continuas óptimas	206
4.3.5 Mezclas de materiales naturales	207
4.3.6 Conclusiones	210
4.4 ESTRUCTURA Y PERMEABILIDAD	211
4.4.1 Introducción	211
4.4.2 Relaciones entre estructura y permeabilidad	211
4.4.3 Aplicación a dos arenas	218
4.4.4 Nota complementaria respecto a la fórmula de Kozeny	229
4.4.5 Conclusiones	223

4.5 ESTRUCTURA Y DISEÑO DE FILTROS	233
4.5.1 Antecedentes	233
4.5.2 Modelo estocástico del comportamiento de filtros	234
4.5.3 Conclusiones	238
4.6 ESTRUCTURA Y COMPORTAMIENTO MECANICO	239
4.6.1 Introducción	239
4.6.2 Transmisión de esfuerzos en medios granulares	239
4.6.3 Relaciones esfuerzo-deformación y resistencia	249
4.6.4 Conclusiones	269
5. CONCLUSIONES GENERALES	272
6. REFERENCIAS	275
ANEXOS	
I Desarrollos matemáticos	285
II Lista de programas para computadora disponibles	314

1. INTRODUCCION

1. INTRODUCCION

Para explicar y predecir el comportamiento de los materiales granulares (arenas, gravas, enrocamientos), la mecánica de suelos ha recurrido tradicionalmente a los conceptos de la mecánica de los medios continuos. Esta simplificación encuentra rápidamente sus limitaciones cuando se pretende abordar fenómenos como la rotura de partículas bajo carga. La necesidad de una teoría específica de los medios granulares considerados como agregados de elementos discretos es por tanto obvia.

Los esfuerzos para desarrollar una teoría de este tipo han sido numerosos pero solamente parcialmente exitosos. En efecto, un planteamiento que pretenda tomar en cuenta el carácter discontinuo de los medios granulares debe basarse por una parte en un modelo descriptivo aceptable de la estructura, es decir de la configuración geométrica de estos medios, y, por otra, en hipótesis realistas respecto a las interacciones mecánicas que se presentan entre sus elementos constitutivos. Ambos aspectos presentan dificultades considerables.

En este trabajo, se aborda casi exclusivamente el primer aspecto, es decir la definición geométrica de la estructura de los medios granulares. Este enfoque, algo limitado, resulta sin embargo fructífero y permite establecer un cierto número de resultados de utilidad práctica.

Se busca presentar en forma sistemática y definir con precisión una serie de conceptos dispersos en la literatura y se proponen varios más susceptibles de facilitar la

descripción geométrica de la estructura de estos medios.

Se recurre ampliamente a los métodos de la teoría de la probabilidad y de la estadística y a las nuevas posibilidades que ofrecen las computadoras digitales para procesar rápidamente grandes cantidades de datos. En particular, se muestra que la simulación con una computadora de la geometría y, en el futuro, del comportamiento mecánico de los suelos ofrece perspectivas prometedoras para el estudio de estos materiales.

Se muestra, asimismo, que la teoría de los procesos estocásticos constituye un marco conceptual útil para la descripción de la estructura de los suelos granulares. Esta teoría permite abordar en forma racional el problema de la heterogeneidad y separar este fenómeno de las variaciones locales no significativas atribuibles a lo que en este trabajo se propone llamar "efecto de escala geométrico".

Se analizan también con cierto detalle algunas de las relaciones que unen en forma cualitativa o cuantitativa la estructura y las propiedades índice, mecánicas e hidráulicas de los materiales granulares y se sugieren diferentes líneas de investigación en esta dirección.

Tratando de definir un panorama tan completo como sea posible de los conocimientos y técnicas actualmente existentes para el análisis y la descripción de la estructura de los medios granulares, se revisa un número importante de resultados obtenidos previamente por otros investigadores. En particular, este trabajo no puede desligarse de los estudios pioneros desarrollados por los Profs. R.J. Marsal y J. Alberro y sus colaboradores sobre este mismo tema. Por otra parte, los trabajos del matemático G. Matheron, aunque enfocados hacia otros tipos de aplicaciones, fueron de una gran ayuda para definir en forma racional varios de los conceptos que se analizan en este estudio.

Los resultados de este trabajo deberían ser útiles al ingeniero, principalmente en aspectos como las técnicas de muestreo, el dimensionamiento de especímenes, el diseño de mezclas, etc. Sin embargo, la mayor ambición de este trabajo es constituir una contribución al desarrollo de una teoría específica de los medios granulares.

Los desarrollos matemáticos largos que podrían interrumpir la continuidad de la lectura se presentan en el Anexo I. Por otra parte, en el texto se hace referencia a programas de computadora que fueron desarrollados como parte de este trabajo. La lista completa de estos programas, que se encuentran disponibles con el autor, se incluye en el Anexo II.

2. DEFINICION GEOMETRICA DE LOS
MEDIOS GRANULARES

2. DEFINICION GEOMETRICA DE LOS MEDIOS GRANULARES .

2.1 CONCEPTOS GENERALES

Describir la estructura de un medio granular, constituido por partículas de muy diversos tamaños y formas y por complejos intersticios, parece ser una tarea imposible. Sin embargo, esta diversidad se acompaña de una gran monotonía : son los mismos granos y poros los que se presentan en diferentes puntos del medio con variaciones que, frecuentemente, no son realmente significativas. Es por tanto posible intentar expresar lo esencial de estas formas geométricas complejas a través de parámetros y funciones relativamente simples. Este aspecto es el tema del presente capítulo.

Tradicionalmente, las características estructurales de los suelos granulares se han descrito a través de las distribuciones granulométricas, de diversos parámetros descriptivos de la forma de los granos y de los conceptos de porosidad, de relación de vacíos y de compacidad relativa. En el inciso 2.2 se revisan brevemente estos conceptos.

Para una descripción más completa de la estructura, se muestra en el inciso 2.3 que es posible recurrir a varios conceptos adicionales. Se hace un amplio uso del lenguaje probabilista que resulta muy cómodo para esta descripción. Cabe aclarar que, en el presente contexto, salvo mención explícita de lo contrario, la probabilidad debe entenderse en su aceptación frecuencial.

Se establecen por otra parte diversos resultados útiles aplicables a materiales constituidos por partículas aproximadamente esféricas.

2.2 PARAMETROS Y FUNCIONES USUALES PARA LA DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA

2.2.1 Tamaño de partícula y distribución granulométrica

Para describir las partículas de un medio granular en forma concisa, se busca recurrir a parámetros sencillos que reflejen sus dimensiones, de preferencia a través de un "tamaño" único.

Las partículas que se encuentran en la naturaleza son generalmente de forma irregular y es difícil asignarles una dimensión. De hecho, no existe un método de aceptación general para definir el tamaño de una partícula irregular en términos geométricos. Sin embargo, se han desarrollado varios procedimientos para asignar a cada partícula un diámetro que resulta útil para muchos fines prácticos :

a) Análisis mecánico

El análisis mecánico es el método más empleado para la definición de los tamaños de las partículas constitutivas de un suelo granular. Consiste en hacer pasar el material por una serie de mallas de diferentes dimensiones y de forma generalmente cuadrada o circular. Se asigna a cada partícula un tamaño comprendido entre la dimensión de la malla más grande en la que haya quedado retenida y la de la malla más pequeña en la que haya logrado pasar.

b) Método de la esfera equivalente

A cualquier partícula irregular, puede asociarse una partícula regular equivalente : un cubo, una esfera u otra figura geométrica simple. La equivalencia se establece en términos del volumen o del área superficial.

Así, para establecer el tamaño de una partícula en términos del volumen de una esfera equivalente, es posible determinar el volumen v de dicha partícula, por ejemplo sumergiéndola en agua, e igualar el resultado con el volumen de una esfera hipotética. El volumen de una esfera de diámetro D es $\pi D^3/6$, por lo que el diámetro nominal equivalente es aquél dado por la ecuación :

$$D_e = (6v/\pi)^{1/3} \quad (2.1)$$

Dado que la superficie de una esfera es πD^2 , el diámetro equivalente en términos del área superficial es, en la misma forma :

$$D'_e = (a/\pi)^{1/2} \quad (2.2)$$

donde

a Área superficial de la partícula.

c) Promedio de mediciones directas

A partir de mediciones directas de las dimensiones de una partícula es posible obtener algún tipo de promedio representativo (aritmético, geométrico, armónico, etc.). Así, Marsal [1972], recurre a la medición de las dimensiones de la partícula según tres direcciones ortogonales y calcula el promedio aritmético.

El concepto anterior puede generalizarse definiendo el diámetro de la partícula como el valor esperado $E\{D_R\}$ del diámetro D_R medido según una dirección aleatoria que pase por el centro de gravedad de la partícula (Fig 2.1.a). Se tiene entonces :

$$E\{D_R\} = [1/(4\pi)] \int_{\Omega} D_R \Delta\omega \quad (2.3)$$

donde

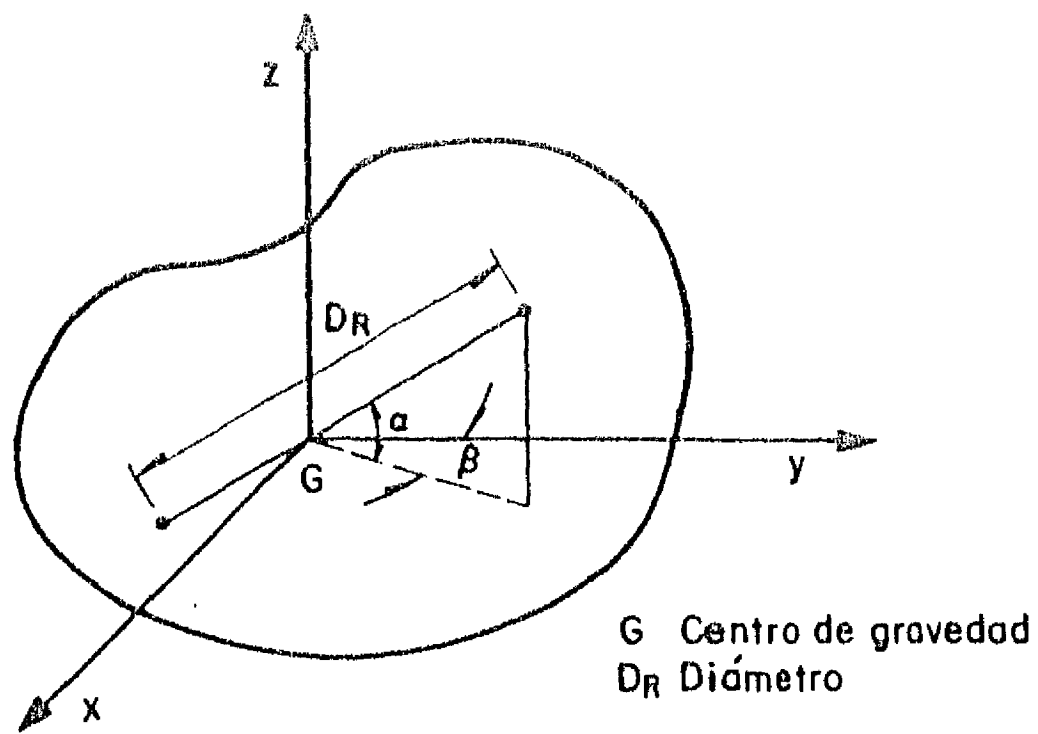
$\Delta\omega$ Angulo sólido elemental igual a $\cos\alpha \, d\alpha \, d\beta$

Ω Esfera de radio unitario

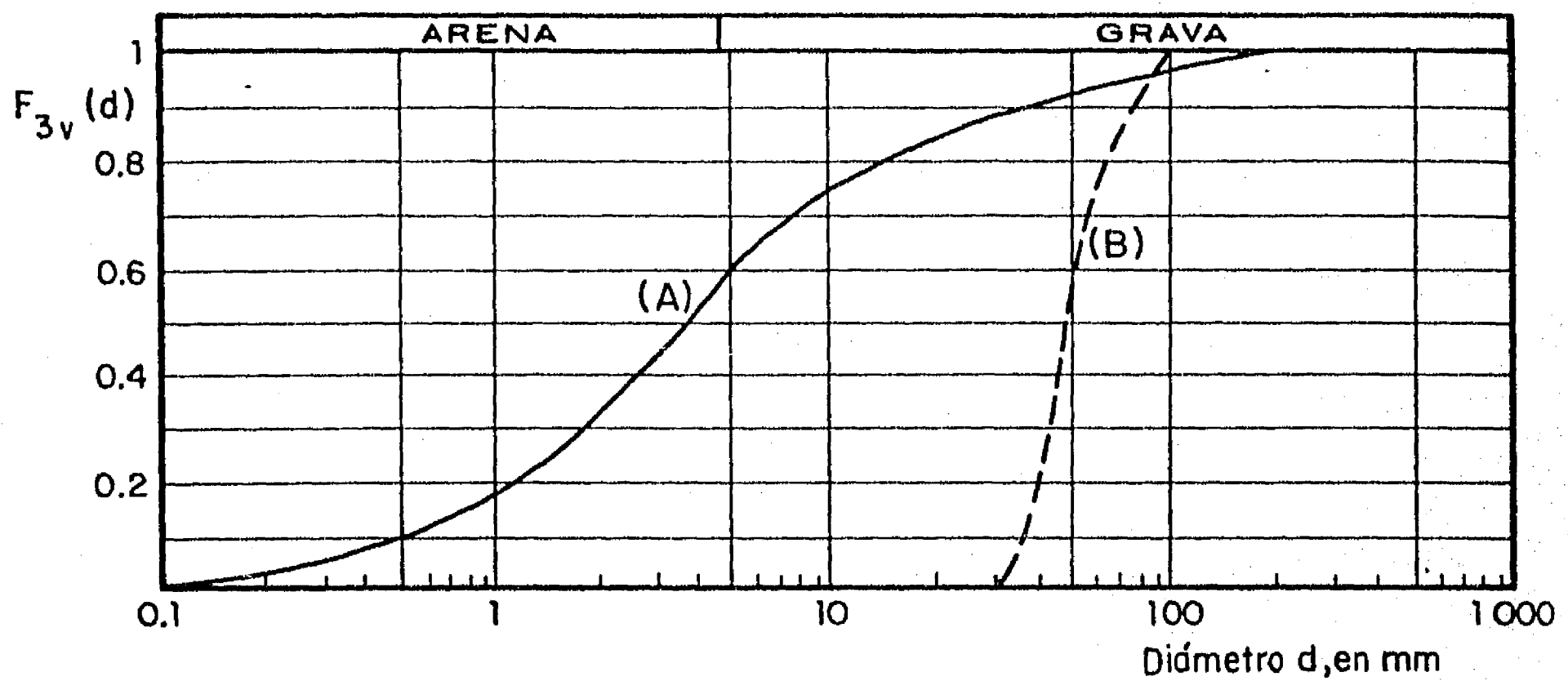
d) Diámetro efectivo (ley de Stokes)

El método del diámetro efectivo se usa para partículas pequeñas y se basa en la ley de Stokes que rige la caída de un cuerpo en un medio líquido. Se deja caer la partícula en el líquido y se mide su velocidad de caída. Se asigna a la partícula el diámetro de una esfera que caería con la misma velocidad [SARH, 1970].

Si se determinan, con base en alguna de las definiciones anteriores, los tamaños de un número suficiente de partículas que constituyan una muestra-representativa del



a) Diámetro de una partícula



- (A) Material bien graduado ($C_u=10$; $C_c=1.3$)
- (B) Material uniforme ($C_u=1.47$; $C_c=0.92$)

b) Ejemplos de distribuciones granulométricas (escala semilogarítmica)

Fig 2.1 Tamaños de partículas

medio, es posible definir una distribución granulométrica, es decir una función $F_{3V}(d)$ definida como sigue :

$F_{3V}(d)$ = Proporción, en peso, de partículas con diámetro menor o igual que d

Si el valor de la densidad de sólidos puede considerarse constante, resulta equivalente definir la función anterior en términos de volumen o de peso. Esta equivalencia se supone aceptable en todo este trabajo.

La función $F_{3V}(d)$ es monotónicamente no decreciente y alcanza el valor máximo de 100% para diámetros iguales o superiores al de la partícula más grande de la muestra. Es posible dar una interpretación probabilista simple a esta función. En efecto, $F_{3V}(d)$ representa la probabilidad de que un punto tomado al azar dentro de los granos pertenezca a una partícula de diámetro menor o igual que d . La derivada $f_{3V}(d)$ de $F_{3V}(d)$ respecto al diámetro se conoce como densidad en volumen de los diámetros de partícula y es una función tal que:

$f_{3V}(d) \Delta d$ = Proporción, en volumen, de partículas con diámetro comprendido entre d y $d + \Delta d$

La forma de la curva granulométrica representativa de $F_{3V}(d)$ suele describirse mediante los coeficientes siguientes :

- Coeficiente de uniformidad :

$$C_u = D_{60} / D_{10} \quad (2.4)$$

donde

D_{60} Tamaño tal que, en peso (o volumen), 60 % de las partículas tengan un tamaño igual o menor

D_{10} Tamaño tal que, en peso (o volumen), 10 % de las partículas tengan un tamaño igual o menor (también llamado diámetro efectivo)

En realidad, C_u es un coeficiente de no uniformidad puesto que es menor cuanto más uniforme sea el material. Los suelos con C_u menor de tres se consideran muy uniformes; las arenas naturales rara vez presentan valores de C_u menores de dos.

- Coeficiente de curvatura

Este coeficiente se define como :

$$C_c = (D_{30})^2 / (D_{10} \cdot D_{60}) \quad (2.5)$$

donde

D_{30} Tamaño tal que, en peso (o volumen), 30 % de las partículas tengan un tamaño igual o menor

Los valores de este coeficiente varían entre uno y tres en suelos bien graduados.

En el caso de suelos gruesos, surge la duda de cuál es el tamaño mínimo de la muestra que debe someterse al análisis para obtener resultados representativos. Este problema se analiza más adelante en los incisos 2.3.7 y 4.2.

En la Fig 2.1.b, se ilustran los conceptos anteriores con dos distribuciones granulométricas correspondientes respectivamente a un material bien graduado y a un material uniforme.

2.2.2 Forma de las partículas

La forma de las partículas de los suelos granulares suele simplemente describirse con términos cualitativos como redondeada, subredondeada, subangulosa o angulosa (Fig 2.2).

Una partícula se llama convexa si al unir cualquier par de puntos internos de la partícula mediante un segmento de recta, todos los puntos del segmento pertenecen a dicha partícula.

La manera más satisfactoria de describir la forma de una partícula convexa consistiría probablemente en recurrir a los parámetros estadísticos (valores extremos, variancia y momentos de orden superior) del diámetro D_R (Fig 2.1.a). Sin embargo, por sencillez, se suelen usar parámetros más simples y más fáciles de medir.

Idealizando la forma de los granos (Fig 2.3), es posible asignarles tres dimensiones ortogonales : longitud L, ancho B y espesor T ; se dice en forma general [Harr,1977] que :

. La partícula es equidimensional si $L \simeq B \simeq T$

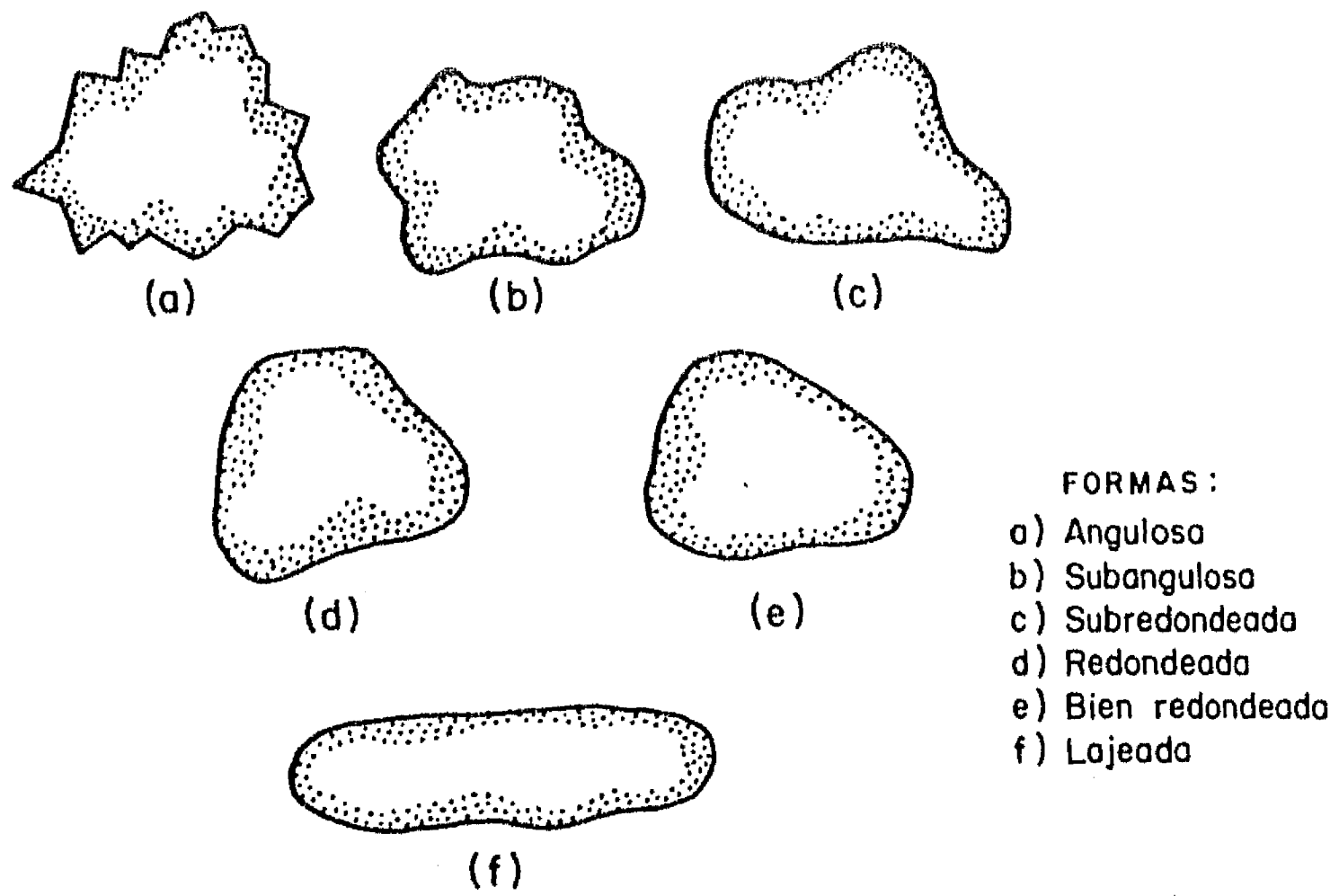


Fig 2.2 Forma de partículas. Términos descriptivos usuales

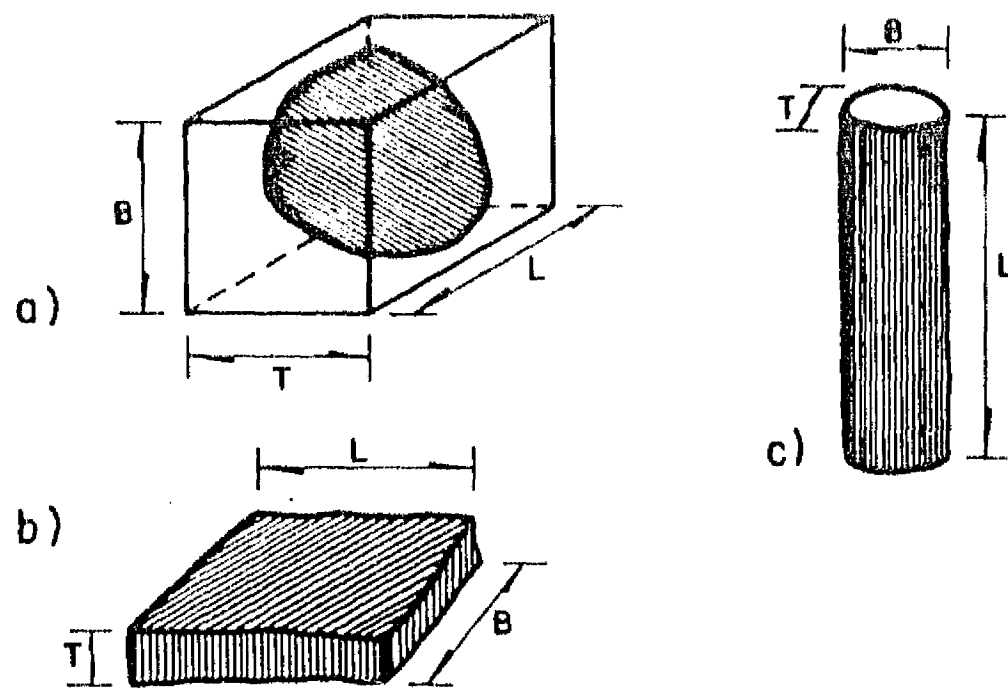


Fig 2.3 Forma de partículas. Conceptos de longitud L , ancho B y espesor T

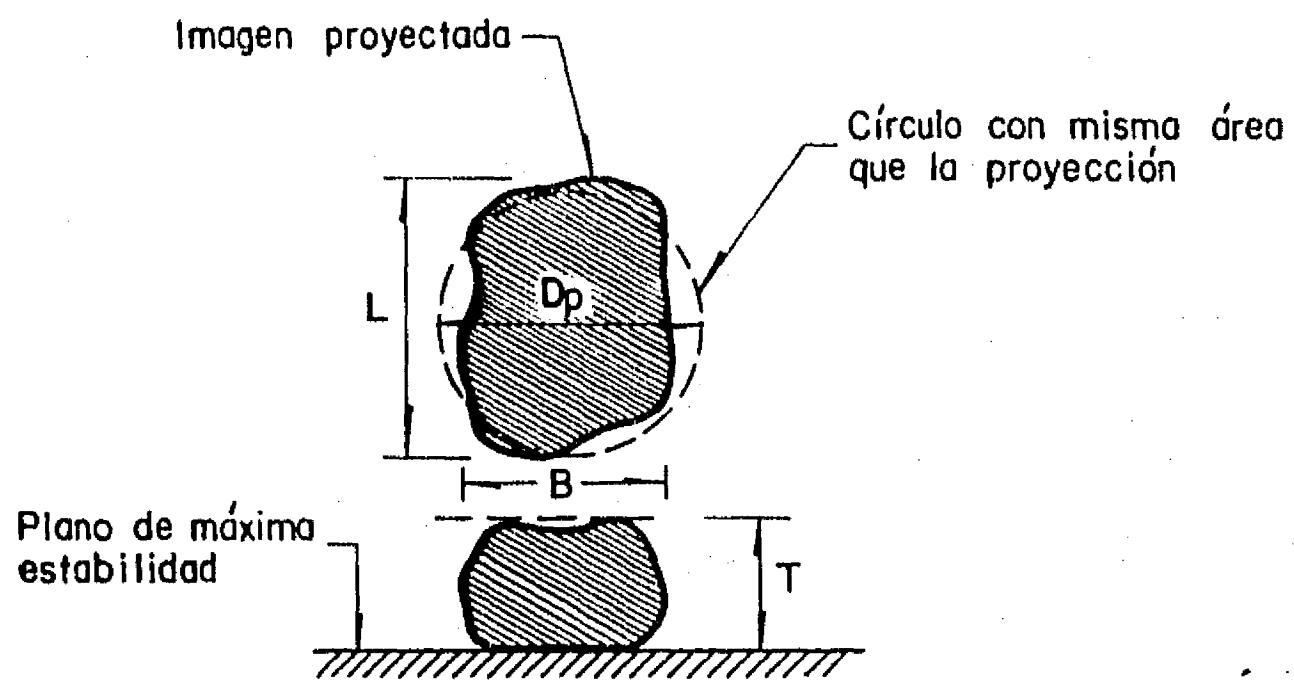


Fig 2.4 Forma de partículas. Concepto de diámetro proyectado D_p

- . La partícula tiene forma de placa si $L \approx B > T$
- . La partícula tiene forma de aguja si $L > B \approx T$

Heywood [1947] definió las siguientes relaciones:

- . Grado de aplanado $f = B/T$
- . Alargamiento $e = L/B$
- . Diámetro proyectado $D = \sqrt{(4/\pi)a_p} \approx \sqrt{(4/\pi)BL}$

El diámetro proyectado es el diámetro de un círculo que tiene la misma área a_p que la proyección de la partícula paralelamente a su espesor, es decir en su plano de máxima estabilidad (Fig 2.4).

Wadell [1932] definió como grado de esfericidad de una partícula la relación $\Psi = a'/a$, donde a es el área superficial de la partícula y a' el de una esfera de volumen igual al de la partícula. El valor límite $\Psi = 1$ se presenta cuando la partícula es precisamente una esfera.

Puesto que las mediciones de esfericidad resultan excesivamente laboriosas, Wadell sugirió usar :

$$\Psi_1 = D_p / D_c \quad (2.6)$$

donde

D_p Diámetro proyectado definido arriba

D_c Diámetro del círculo más pequeño circunscrito al área proyectada.

Como alternativa, Wadell propuso usar también:

$$\Psi_2 = D_e / L \quad (2.7)$$

donde

D_e Diámetro equivalente en términos de volumen (Ec 2.1).

Los parámetros Ψ_1 y Ψ_2 varían también entre 0 y 1, correspondiendo este último valor a esferas.

La definición de la Ec 2.6 es objetable puesto que una partícula con forma de pastilla (cilindro de poca altura) podría tener una esfericidad de uno. Patiño y Alberro [1983]

sugieren por tanto usar :

$$\Psi_3 = a_s / a_p \quad (2.8)$$

donde

a_s Area de la proyección de una esfera con volumen igual al de la partícula

a_p Area de la proyección de la partícula paralelamente a su espesor.

Marsal [1972] propone otro método para definir la forma de las partículas que componen un material determinado. El procedimiento consiste en determinar las dimensiones D_1 , D_2 y D_3 de las partículas según ejes aproximadamente ortogonales y en calcular el promedio aritmético D_{arit} de estos tres valores. Se define entonces un factor de forma r_v que queda expresado por la siguiente relación :

$$r_v = 6v / (\pi D_{arit}^3) \quad (2.9)$$

donde

v Volumen de la partícula medido directamente

Se trata por tanto de la relación entre el volumen de la partícula y el de la esfera de diámetro igual al promedio aritmético de los tres diámetros medidos. Además, Marsal caracteriza la forma a través del parámetro D_3 / D_{arit} donde D_3 es el mas pequeño de los tres diámetros determinados.

Para describir la forma de los agregados para concreto, es usual [Venuat, 1961] recurrir al concepto de coeficiente volumétrico, análogo al factor de la Ec 2.8, pero expresado en términos de la dimensión máxima de la partícula, $D_{máx}$:

$$c = 6v / (\pi D_{máx}^3) \quad (2.10)$$

Otro parámetro ampliamente usado para caracterizar la forma es la superficie específica. Es usual llamar superficie específica de una partícula a la relación :

$$s = a/v \quad (2.11)$$

donde

a Area superficial de la partícula

v Volumen de la partícula

Las partículas esféricas son las de menor superficie específica ($6/D$)

Para una muestra de material granular se define en forma análoga la superficie específica como :

$$S^* = \sum a / \sum v \quad (2.12)$$

donde

$\sum a$ Suma de las superficies de las partículas de la muestra

$\sum v$ Suma de los volúmenes de las mismas partículas

Sin embargo, algunos autores prefieren definir la superficie específica de una muestra como:

$$S = \sum a / V_T = S^* (1-n) \quad (2.13)$$

donde

V_T Volumen total de la muestra

n Porosidad (2.2.3)

Esta segunda definición no es usual en mecánica de suelos pero se emplea comunmente en otras especialidades como la ingeniería petrolera o la biología [Weibel, 1966].

2.2.3 Porosidad, compacidad, relación de vacíos y compacidad relativa

Varios parámetros, sensiblemente equivalentes, se usan para representar las proporciones de sólidos y vacíos en un medio granular :

a) Porosidad

Si V_T es el volumen total de una muestra de suelo y V_s el volumen de la fase sólida contenida en ella, es decir el

volumen de las partículas del suelo, el volumen de vacíos es $V_v = V_T - V_s$. Se entiende por porosidad la relación del volumen de vacíos al volumen total de la muestra de suelo :

$$n = V_v / V_T = (V_T - V_s) / V_T \quad (2.14)$$

Se observa que si el volumen de la muestra es muy pequeño (o las partículas muy grandes respecto a dicho volumen), la porosidad puede acercarse a los valores extremos 0 (vacíos solamente) y 1 (sólidos solamente). Es necesario que el volumen sea suficientemente grande para que este parámetro tienda a estabilizarse y converja hacia un valor que pueda considerarse constante. Se ahondará en las consideraciones anteriores en los incisos 2.3.7 y 4.2.

Algunos autores prefieren usar, en vez de la porosidad, el complemento a uno del valor de esta propiedad, llamado compacidad [Orozco, 1976].

b) Relación de vacíos

Además, o en lugar, de la porosidad, es usual recurrir en mecánica de suelos a otro número índice llamado relación de vacíos o índice de poros. Este parámetro se define como la relación entre el volumen de vacíos y el de las partículas sólidas contenidas en la muestra :

$$e = V_v / V_s = (V_T - V_s) / V_s \quad (2.15)$$

Se tiene por tanto :

$$e = n / (1-n) \quad \text{y} \quad n = e / (1+e) \quad (2.16)$$

La relación de vacíos presenta la ventaja y, como se verá más adelante (2.3.7), el inconveniente, de tener un intervalo de valores posibles mas amplio que la porosidad. En efecto, sus valores pueden variar entre 0 (solamente sólidos) y el infinito (solamente vacíos).

c) Compacidad relativa

La compacidad relativa se define como :

$$C_r (\%) = [(e_{m\acute{a}x} - e) / (e_{m\acute{a}x} - e_{m\acute{i}n})] \times 100 \quad (2.17)$$

donde

$e_{\text{máx}}$ Relación de vacíos correspondiente al estado más
suelto del suelo

$e_{\text{mín}}$ Relación de vacíos correspondiente al estado más
compacto del suelo

e Relación de vacíos de la muestra en estado natural

La denominación convencional del estado estructural de los
suelos granulares según su compacidad relativa se da en la
Tabla 2.1.

TABLA 2.1 Denominación convencional del estado de compacidad de suelos granulares

Compacidad relativa (%)	Denominación
0-15	Muy suelto
15-35	Suelto
35-65	Medio
65-85	Compacto
85-100	Muy compacto

2.3 PARAMETROS Y FUNCIONES ADICIONALES

2.3.1 Distribuciones granulométricas generalizadas

Las dimensiones de las partículas que constituyen un medio granular suelen describirse mediante las distribuciones granulométricas en peso o en volumen definidas en 2.2.1. Sin embargo, para el estudio de la estructura resulta generalmente mas cómodo recurrir a una distribución en número.

Por otra parte, son comunes las situaciones en las que, al estudiar la estructura de un material en el laboratorio o en el campo, no se tenga acceso a la distribución granulométrica tridimensional sino a las que se definen en cortes o sondeos (Fig 2.5).

Para la descripción de la estructura, resultan por tanto de interés las distribuciones que se indican en la Tabla 2.2 y que se discuten a continuación.

a) Distribución granulométrica en número

Esta distribución se define como sigue :

$F_{3D}(d)$ = Proporción, en número, de partículas con diámetro menor o igual que d

En forma equivalente, puede definirse la derivada de la función anterior respecto al diámetro (densidad en número) $f_{3D}(d)$ que es una función tal que:

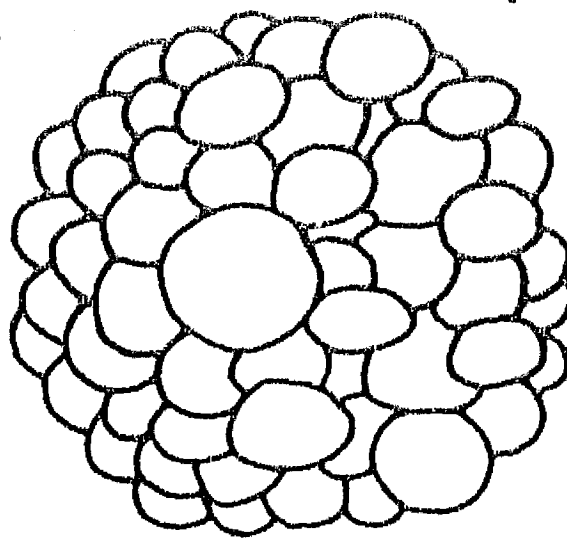
$f_{3D}(d) \Delta d$ = Proporción, en número, de partículas con diámetro comprendido entre d y $d + \Delta d$

Adoptando la definición frecuencial de probabilidad, se tiene:

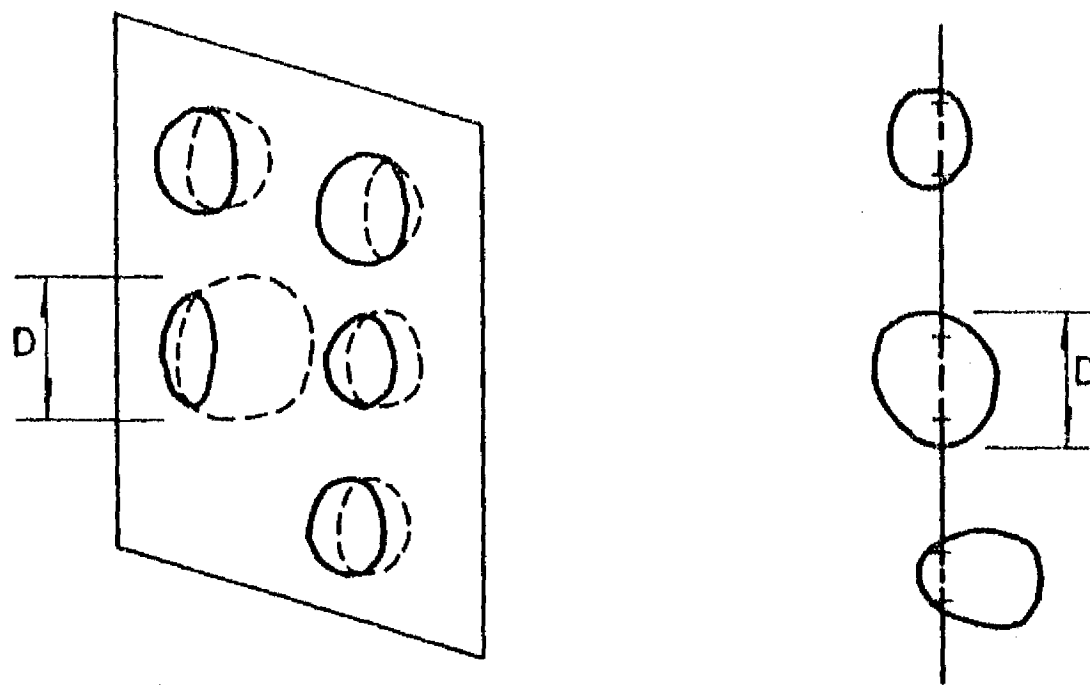
$$F_{3D}(d) = P[D \leq d] \quad (2.18)$$

$$f_{3D}(d) \Delta d = P[d < D < d + \Delta d] \quad (2.19)$$

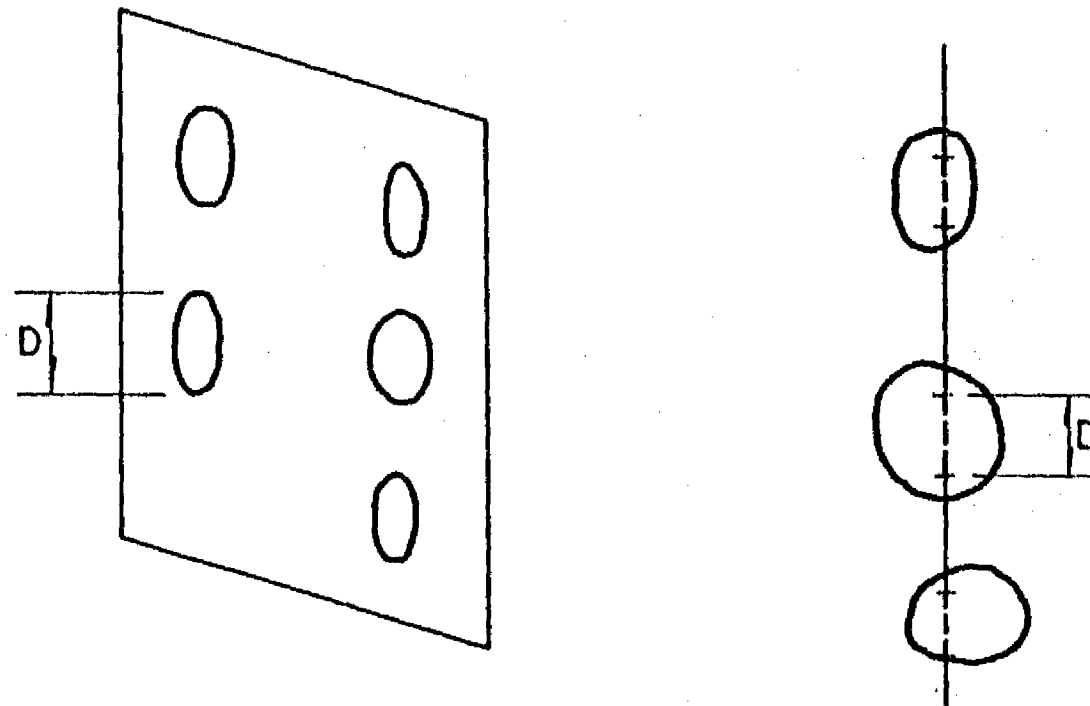
Si las partículas pueden considerarse aproximadamente esféricas, la densidad en número se obtiene fácilmente a partir de la densidad en volumen, ponderando las frecuencias de estas últimas por un término inversamente proporcional al volumen de las partículas y por tanto al cubo de su diámetro. Se tiene:



a) Medio granular



b) Granos intersecados por un plano y un sondeo



c) Diámetros aparentes de los granos intersecados

Fig 2.5 Intersección de un medio granular por un plano y un sondeo

TABLA 2.2 DISTRIBUCIONES GRANULOMETRICAS GENERALIZADAS

Notación empleada

NOMBRE	NOTACION
<ul style="list-style-type: none"> - GRANULOMETRIAS TRIDIMENSIONALES Distribución granulométrica en volumen Densidad en volumen. Distribución granulométrica en número Densidad de probabilidad en número 	$F_{3V}(d)$ $f_{3V}(d)$ $F_{3D}(d)$ $f_{3D}(d)$
<ul style="list-style-type: none"> - GRANULOMETRIAS BIDIMENSIONALES <ul style="list-style-type: none"> • <u>Partículas intersecadas por un plano</u> Distribución granulométrica en volumen Densidad en volumen Distribución granulométrica en número Densidad de probabilidad en número <ul style="list-style-type: none"> • <u>Diámetros aparentes de partículas intersecadas por un plano</u> Distribución granulométrica en área Densidad en área Distribución granulométrica en número Densidad de probabilidad en número 	$F_{2V}(d)$ $f_{2V}(d)$ $F_{2D}(d)$ $f_{2D}(d)$ $F_{2AS}(d)$ $f_{2AS}(d)$ $F_{2A}(d)$ $f_{2A}(d)$
<ul style="list-style-type: none"> - GRANULOMETRIAS UNIDIMENSIONALES <ul style="list-style-type: none"> • <u>Partículas intersecadas por un sondeo</u> Distribución granulométrica en volumen Densidad en volumen Distribución granulométrica en número Densidad de probabilidad en número <ul style="list-style-type: none"> • <u>Diámetros aparentes de partículas intersecadas por un sondeo</u> Distribución granulométrica en longitud Densidad en longitud Distribución granulométrica en número Densidad de probabilidad en número 	$F_{1V}(d)$ $f_{1V}(d)$ $F_{1D}(d)$ $f_{1D}(d)$ $F_{1AL}(d)$ $f_{1AL}(d)$ $F_{1A}(d)$ $f_{1A}(d)$

$$f_{3D}(d) = f_{3V}(d) / [d^3 \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} (f_{3V}(d)/d^3) \Delta d] \quad (2.20)$$

$$f_{3D}(d) = f_{3V}(d) / (d^3 E_{3V} \{1/D^3\}) \quad (2.21)$$

donde

$E_{3V} \{ \}$ Operador esperanza aplicado con la densidad $f_{3V}(d)$

D_{\min} Diámetro mínimo de las partículas

D_{\max} Diámetro máximo de las partículas

A la inversa, la densidad en volumen puede obtenerse a partir de la densidad en número como:

$$f_{3V}(d) = f_{3D}(d) d^3 / E_{3D} \{D^3\} \quad (2.22)$$

Las transformaciones de las Ecs 2.21 y 2.22, se pueden realizar fácilmente en forma numérica (programas para computadora TG1 y TG2). En la Fig 2.6 se presentan, para fines ilustrativos, las distribuciones en número de partículas de los materiales de la Fig 2.1. Se observa que, en número, las partículas mas pequeñas son las que dominan numéricamente, lo que modifica drásticamente la forma de la curva granulométrica.

b) Distribuciones granulométricas de partículas intersecadas por cortes o sondeos

Al realizar un corte plano o un sondeo recto a través de una masa granular (Fig 2.5.b), los diámetros de las partículas intersecadas presentan una distribución frecuencial diferente de la considerada en el inciso anterior. En efecto, las partículas de mayor diámetro tienen una mayor probabilidad de quedar intersecadas por el plano o la recta que las pequeñas.

En un corte plano, se define la distribución granulométrica en número siguiente:

$F_{2D}(d)$ = Proporción, en número, de partículas intersecadas por el corte con diámetro menor o igual que d

$F_{2D}(d)$ = $P[D \leq d | \text{intersección con el plano de corte}]$

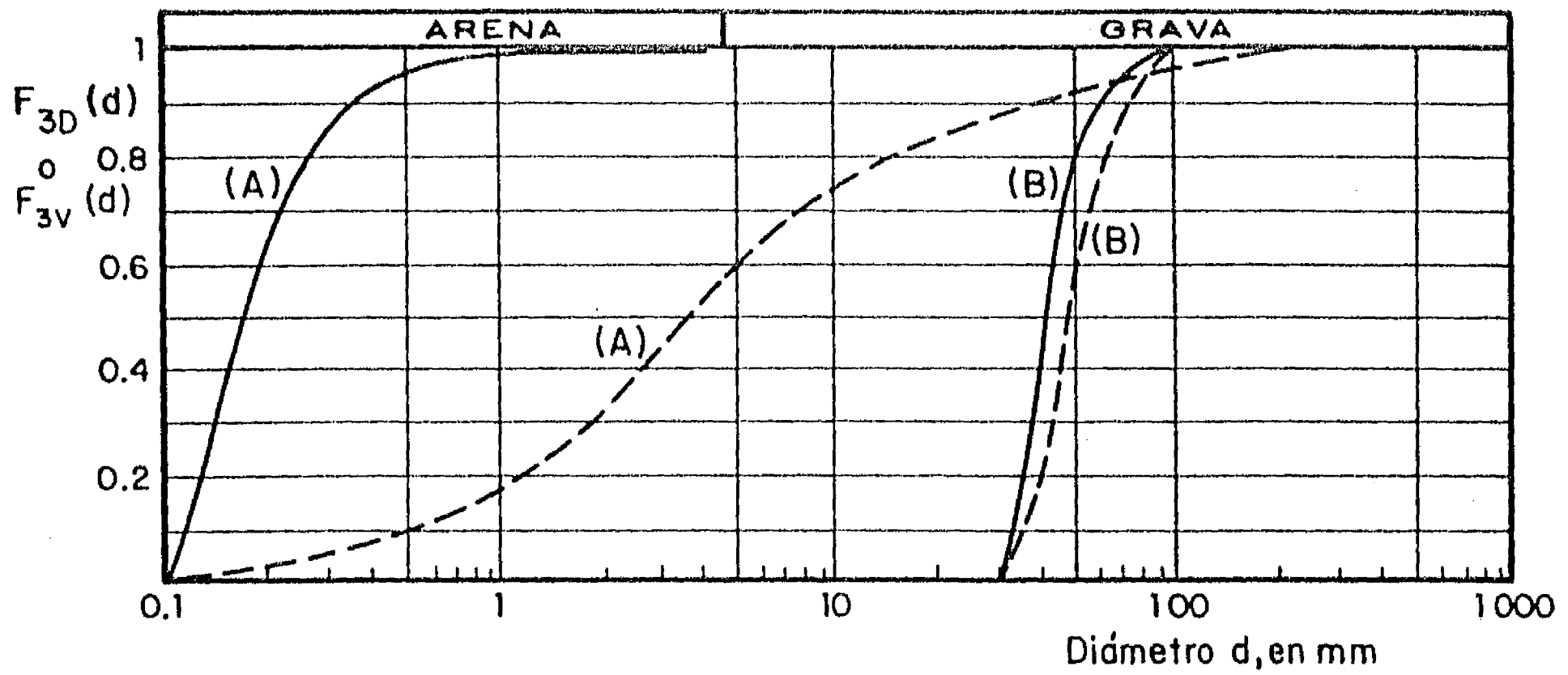


Fig 2.6 Distribuciones granulométricas en número de partículas para los materiales de la fig 2.1 (con línea punteada: granulometrías en volumen)

Su derivada es una función (densidad) $f_{2D}(d)$ tal que :

$$f_{2D}(d)\Delta d = P[D < d < d + \Delta d \mid \exists \text{ intersección con el plano de corte}]$$

En el caso de partículas aproximadamente esféricas, esta última función puede obtenerse a partir de la densidad en número $f_{3D}(d)$ ponderando las frecuencias de esta última con un término proporcional al diámetro de la partícula. Se tiene :

$$f_{2D}(d) = f_{3D}(d) d / \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} d f_{3D}(d) \Delta d \quad (2.23)$$

$$f_{2D}(d) = f_{3D}(d) d / E\{D\} \quad (2.24)$$

En la misma forma, a lo largo de un sondeo, idealizado como una línea recta sin espesor (o a lo largo de una generatriz de una perforación cilíndrica), se define la siguiente distribución para las partículas intersecadas :

$F_{1D}(d)$ = Proporción, en número, de partículas intersecadas por el sondeo con diámetro menor o igual que d

$$F_{1D}(d) = P[D \leq d \mid \exists \text{ intersección con el sondeo}]$$

Su derivada será una función (densidad) tal que:

$$f_{1D}(d)\Delta d = P[d < D < d + \Delta d \mid \exists \text{ intersección con el sondeo}]$$

En el caso de partículas aproximadamente esféricas, la función $f_{1D}(d)$ puede obtenerse a partir de la densidad en número $f_{3D}(d)$ ponderando las frecuencias de esta última con un término proporcional al área transversal de la partícula:

$$f_{1D}(d) = f_{3D}(d) d^2 / \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} d^2 f_{3D}(d) \Delta d \quad (2.25)$$

$$f_{1D}(d) = f_{3D}(d) d^2 / E\{D^2\} \quad (2.26)$$

Tambien es válida la relación:

$$f_{1D}(d) = f_{2D}(d) d / E \{D\} \quad (2.27)$$

puesto que siempre es posible considerar el sondeo como contenido dentro de un plano de corte, donde "selecciona" las partículas de acuerdo a su diámetro.

Las transformaciones de las ecuaciones 2.24 y 2.26, pueden también hacerse en forma numérica (programas TG3 y TG4). En la Fig 2.7 se presentan las funciones de distribución $F_{1D}(d)$ y $F_{2D}(d)$ para los materiales de la Fig 2.1. La selección de diámetros que se presenta en el corte o en el sondeo distorsiona las distribuciones en número hacia los diámetros mayores.

Las distribuciones anteriores pueden, asimismo, definirse en volumen.

En el caso del corte, se introduce:

$F_{2V}(d)$ = Proporción, en volumen, de partículas intersecadas por el plano de corte y con diámetro menor o igual que d

La derivada $f_{2V}(d)$ de la función anterior es la densidad en volumen de las partículas intersecadas.

En el caso de partículas aproximadamente esféricas, se puede obtener esta función ponderando las frecuencias en número con un término proporcional al volumen de la partícula y por tanto al cubo de su diámetro:

$$f_{2V}(d) = f_{2D}(d) d^3 / E \{D^3\} \quad (2.28)$$

En la misma forma, en el caso del sondeo, se tiene:

$F_{1V}(d)$ = Proporción, en volumen, de partículas intersecadas por el sondeo y con diámetro menor o igual que d

La derivada $f_{1V}(d)$ de esta función es la densidad en volumen de los diámetros de las partículas intersecadas por el sondeo.

En el caso de partículas aproximadamente esféricas, esta función puede obtenerse ponderando las frecuencias en número por un término proporcional al volumen de la partícula y por tanto al cubo de su diámetro:

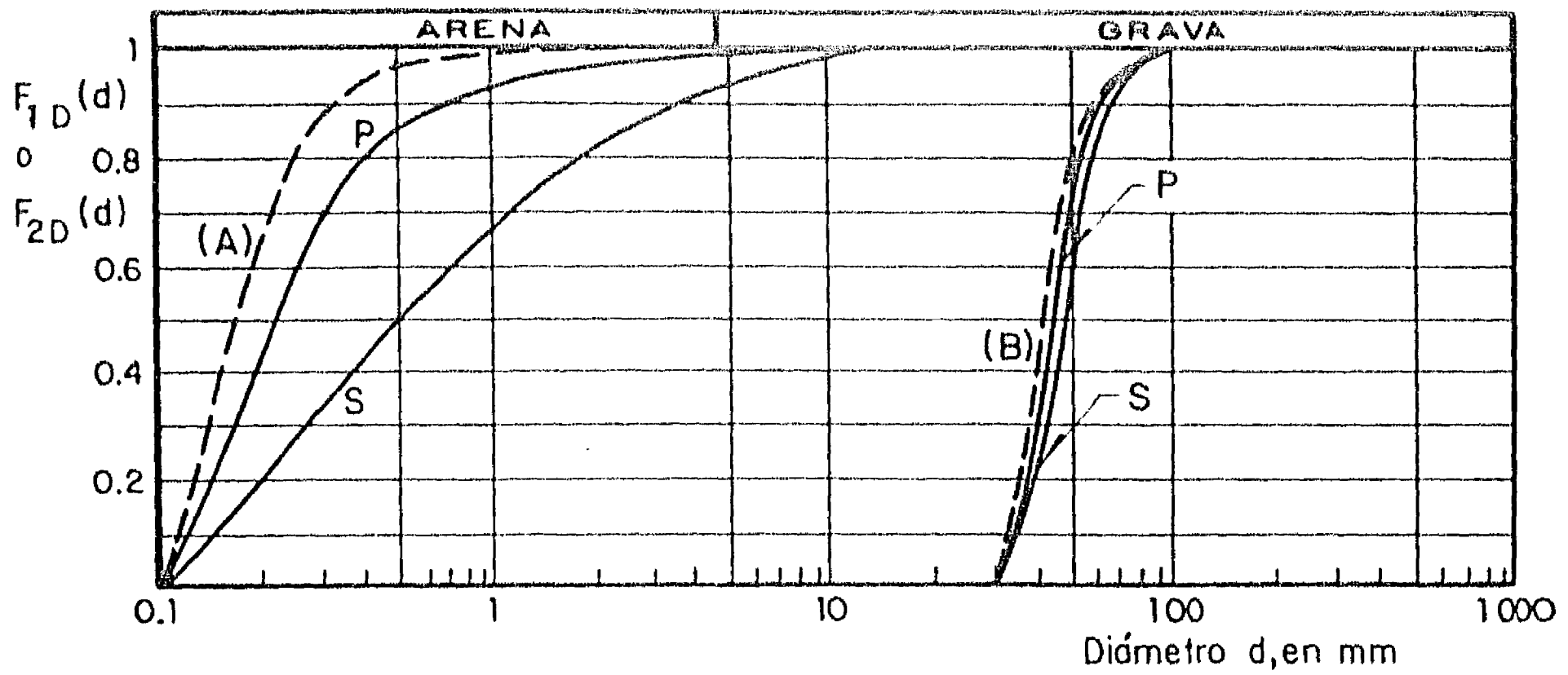


Fig 2.7 Distribuciones granulométricas en número de las partículas intersecadas por un plano (P) y por un sondeo (S) para los materiales de la Fig 2.1 (con línea punteada: distribuciones granulométricas en volumen, tridimensionales)

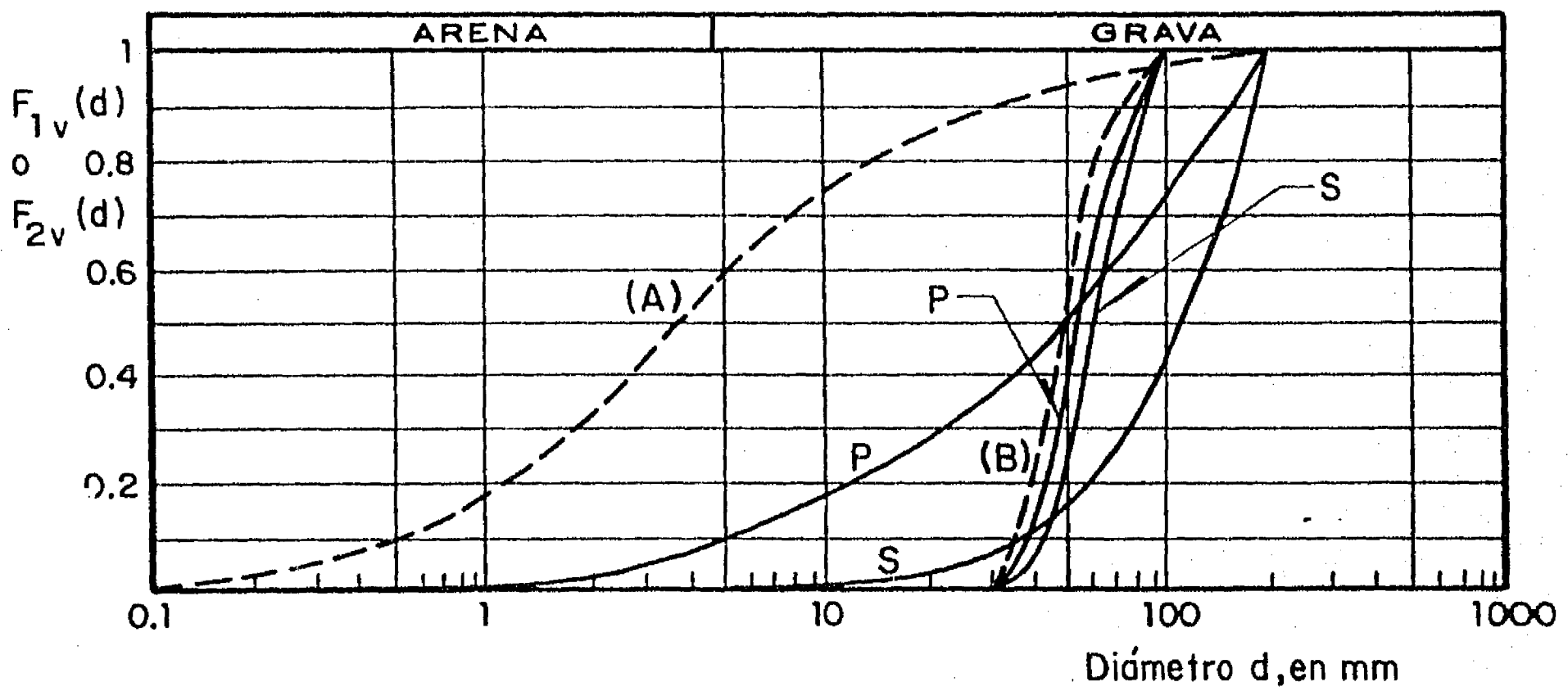


Fig 2.8 Distribuciones granulométricas en volumen de las partículas intersecadas por un plano (P) y por un sondeo (S) para los materiales de la Fig 2.1 (con línea punteada: distribuciones granulométricas en volumen, tridimensionales)

$$f_{1V}(d) = f_{1D}(d) d^3 / E_{1D} \{D\}^3 \quad (2.29)$$

Las funciones de distribución $F_{2V}(d)$ y $F_{1V}(d)$ (determinadas con el mismo programa TG2) están representadas, para los materiales de la Fig 2.1, en la Fig 2.8. La distorsión inducida en la distribución en volumen por cortes o sondeos es todavía más pronunciada que en el caso de la distribución en número.

c) Distribuciones granulométricas de los diámetros aparentes de las partículas intersecadas por cortes o sondeos

Al observar un corte plano o los resultados de un sondeo que atraviesa una masa granular, las partículas presentan un diámetro aparente generalmente inferior a su diámetro real (Fig 2.5.c). Lo anterior lleva a definir distribuciones granulométricas de diámetros aparentes.

En un corte puede definirse:

$F_{2A}(d)$ = Proporción, en número, de partículas intersecadas por un corte con diámetro aparente menor o igual que d

La derivada $f(d)$ de la función anterior es la densidad en número de los diámetros aparentes.

Para partículas aproximadamente esféricas, esta función puede determinarse a partir de $f_{3D}(d)$, con base en consideraciones probabilistas, en la forma indicada en el Anexo I, y resulta:

$$f_{2A}(d) = (d/E_{3D} \{D\}) \int_d^{D_{\text{máx}}} [f_{3D}(d_3) / \sqrt{d_3^2 - d^2}] \Delta d_3; \quad \text{para } 0 < d < D_{\text{máx}} \quad (2.30)$$

donde

$D_{\text{máx}}$ Diámetro máximo de las partículas

A partir de la ecuación anterior, es posible mostrar (Anexo I) que:

$$E_{2A} \{D\} = (\pi/4) (E_{3D} \{D\}^2 / E_{3D} \{D\}) \quad (2.31)$$

La esperanza del diámetro aparente de las partículas es igual al cociente de la esperanza de su área transversal máxima media y la esperanza de su diámetro.

En la misma forma, en el caso de un sondeo, se puede definir la distribución :

$F_{1A}(d)$ = Proporción, en número, de partículas intersecadas por un sondeo, con diámetro aparente menor o igual que d .

La derivada $f_{1A}(d)$ de la función anterior es la densidad en número de los diámetros aparentes a lo largo del sondeo. Para partículas aproximadamente esféricas, esta función puede obtenerse a partir de $f_{3D}(d)$ con base en consideraciones probabilistas (Anexo I), y resulta :

$$f_{1A}(d) = (2d/E_{3D}\{D^2\}) [1 - F_{3D}(d)] ; \text{ para } 0 < d < D_{\text{máx}} \quad (2.32)$$

En el mismo Anexo I, se muestra que también es posible pasar de $f_{2A}(d)$ a $f_{1A}(d)$ por medio de la relación:

$$f_{1A}(d) = (d/E_{2A}\{D\}) \int_d^{D_{\text{máx}}} [f_{2A}(d_2) / \sqrt{d_2^2 - d^2}] \Delta d_2 ; \text{ para } 0 < d < D_{\text{máx}} \quad (2.33)$$

En la Fig 2.9 se presentan las funciones de distribución $F_{1A}(d)$ y $F_{2A}(d)$ obtenidas para los materiales de la Fig 2.1 aplicando las transformaciones de las Ecs 2.30 y 2.32 (programas TG5 y TG6). Nuevamente, se observan distorsiones de la curva granulométrica en número que, en esta ocasión, son la resultante de dos efectos opuestos : selección de los tamaños mayores y reducción aparente de los tamaños respecto a los reales.

Es de gran interés práctico el problema de la transformación inversa, es decir de la determinación de la granulometría tridimensional a partir de las granulometrías aparentes en cortes o sondeos.

En el caso del sondeo, la transformación inversa es sencilla, puesto que la Ec 2.32 puede escribirse:

$$1 - F_{3D}(d) = [f_{1A}(d)/2d] E_{3D}\{D^2\} ; \text{ para } 0 < d < D_{\text{máx}} \quad (2.34)$$

El momento $E_{3D}\{D^2\}$ puede obtenerse haciendo tender d hacia cero, con lo que $F_{3D}(d)$ tiende también hacia cero y se tiene:

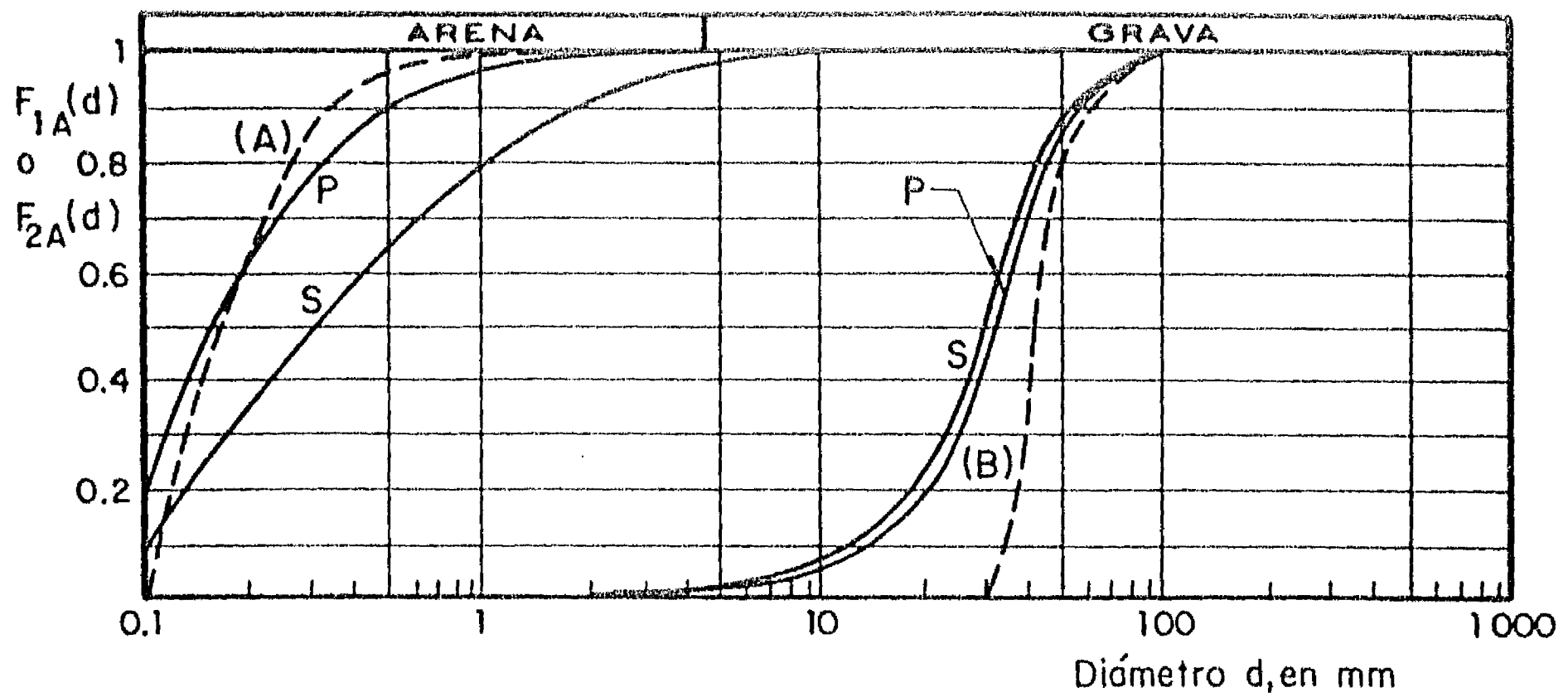


Fig 2.9 Distribuciones granulométricas en número de los diámetros aparentes de partículas intersecadas por un plano (P) o un sondeo (S) para los materiales de la Fig 2.1 (con línea punteada: distribuciones granulométricas en volumen, tridimensionales)

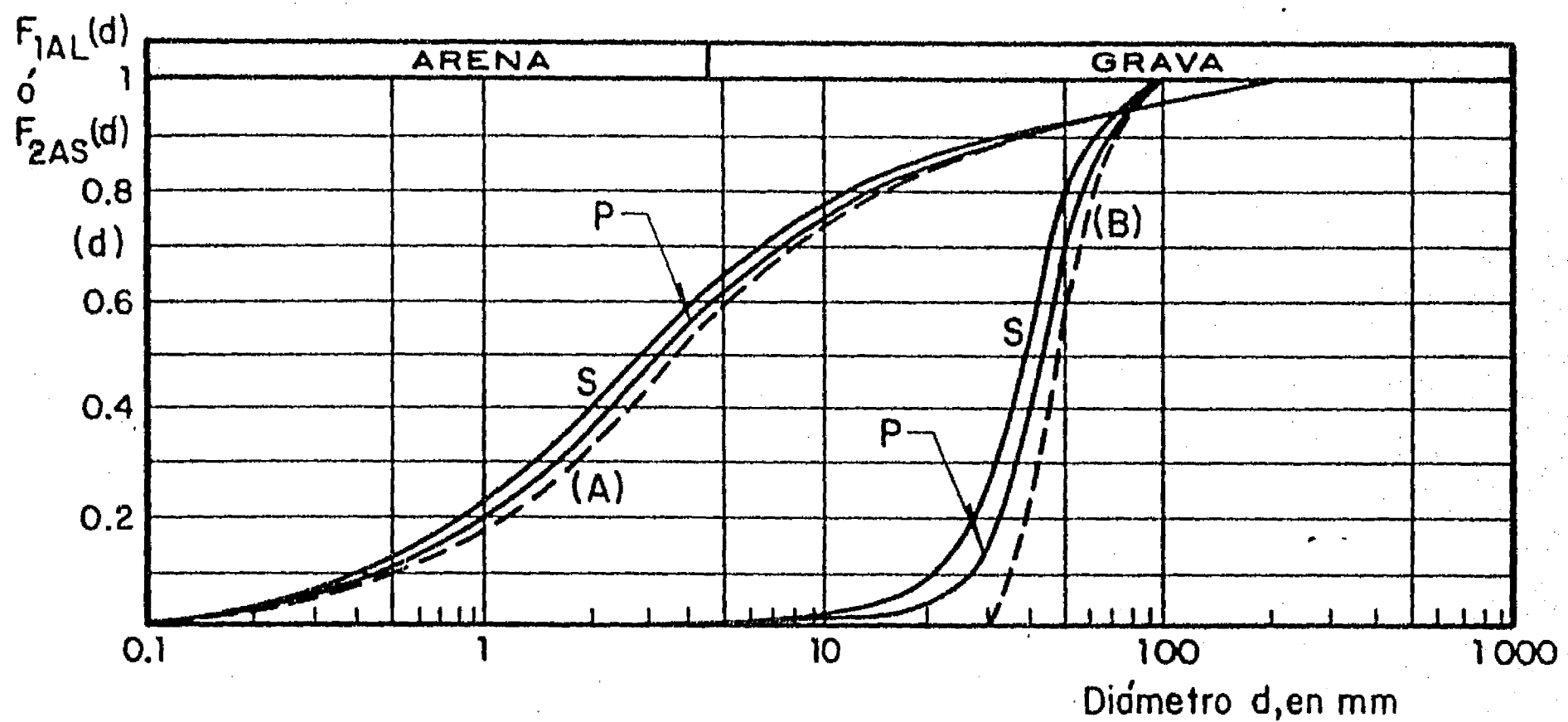


Fig 2.10 Distribuciones granulométricas en área o longitud de los diámetros aparentes de partículas intersecadas por un plano (P) o un sondeo (S) para los materiales de la Fig 2.1 (con línea punteada: distribuciones granulométricas en volumen, tridimensionales)

$$1/E_{3D}\{D\}^2 = \lim_{d \rightarrow 0} f_{1A}(d)/2d = (1/2)\Delta f_{1A}(0)/\Delta d \quad (2.35)$$

Es decir que el momento de interés se define a partir de la derivada en el origen de $f_{1A}(d)$.

En el caso del corte, la transformación es indirecta. A partir de $f_{2A}(d)$, se obtiene $f_{1A}(d)$ por medio de la Ec 2.33 y se puede escribir, tomando en cuenta la Ec 2.34 :

$$1 - F_{3D}(d) = [E_{3D}\{D\}^2 / (2 E_{2A}\{D\})] \int_d^{D_{\text{máx}}} [f_{2A}(d_2) / \sqrt{d_2^2 - d^2}] \Delta d_2 \quad (2.36)$$

es decir, tomando en cuenta la Ec 2.31 :

$$1 - F_{3D}(d) = (2 E_{3D}\{D\} / \pi) \int_d^{D_{\text{máx}}} [f_{2A}(d_2) / \sqrt{d_2^2 - d^2}] \Delta d_2 \quad (2.37)$$

$E_{3D}\{D\}$ puede calcularse haciendo $d = 0$ en la expresión anterior, con lo que se tiene:

$$E_{3D}\{D\} = (\pi/2) / \int_d^{D_{\text{máx}}} [f_{2A}(d_2) / d_2] \Delta d_2 \quad (2.38)$$

Teóricamente, el problema de la estimación de la granulometría tridimensional a partir de las granulometrías aparentes está por tanto resuelto. Sin embargo, se verá mas adelante (3.2.1) que la aplicación de las Ecs 2.35 y 2.38 plantea dificultades prácticas que obligan a recurrir a otros métodos para la estimación de la granulometría tridimensional.

Las distribuciones granulométricas de diámetros aparentes pueden también definirse "en medida", es decir en área (caso de los cortes) o en longitud (caso del sondeo).

En el caso del corte, se define:

$F_{2AS}(d) =$ Proporción, en área, de partículas intersecadas por un corte y con diámetro aparente menor o igual que d .

La derivada de la función anterior $f_{2AS}(d)$ es la densidad,

en área, de los diámetros de las partículas intersecadas. En el caso de partículas aproximadamente esféricas, esta función puede obtenerse ponderando las frecuencias en número con un término proporcional al área de la intersección y por tanto al cuadrado del diámetro aparente:

$$f_{2AS}(d) = f_{2A}(d) \frac{d^2}{E_{2A}\{D^2\}} \quad ; \text{ para } 0 < d < D_{\text{máx}} \quad (2.39)$$

siendo válida la relación inversa:

$$f_{2A}(d) = f_{2AS}(d) / (d^2 E_{2AS}\{1/D^2\}) \quad ; \text{ para } 0 < d < D_{\text{máx}} \quad (2.40)$$

En el caso del sondeo, se define:

$F_{1AL}(d)$ = proporción, en longitud, de partículas intersecadas por un sondeo y con diámetro aparente menor o igual que d

La derivada de la función anterior, $f_{1AL}(d)$ es la densidad, en longitud, de los diámetros aparentes de las partículas intersecadas por el sondeo. En el caso de partículas aproximadamente esféricas, esta función puede obtenerse ponderando las frecuencias en número con un término proporcional a la longitud de la intersección:

$$f_{1AL}(d) = f_{1A}(d) \cdot d / E_{1A}\{D\} \quad ; \text{ para } 0 < d < D_{\text{máx}} \quad (2.41)$$

siendo válida la relación inversa:

$$f_{1A}(d) = f_{1AL}(d) / (d E_{1AL}\{1/D\}) \quad ; \text{ para } 0 < d < D_{\text{máx}} \quad (2.42)$$

En la Fig 2.10 se presentan las funciones de distribución $F_{1AL}(d)$ y $F_{2AS}(d)$ calculadas para los materiales ya mencionados (con los mismos programas TG5 y TG6). Se observa que las distribuciones granulométricas en medida se alteran menos que las distribuciones en número. La distorsión parece más pronunciada para el material B (uniforme) que para el material A, debido a que los diámetros aparentes presentan valores que se inician desde cero, lo que abre considerablemente el intervalo de definición de la granulometría.

2.3.2 Porosidad y relación de vacíos generalizadas

Por los motivos ya comentados para la granulometría, resulta de interés generalizar los conceptos de porosidad y relación de vacíos al caso de la intersección de un medio granular por un plano o un sondeo. Por otra parte, para ciertas aplicaciones, es conveniente prestar atención a la porosidad de las partículas de mayor tamaño del material considerando las partículas de menor tamaño como parte de los vacíos. Se llega en esta forma a los conceptos siguientes :

a) Porosidad y relación de vacíos bidimensionales y unidimensionales

Se entiende por porosidad en un plano (porosidad bidimensional, n_A) a la relación entre el área de vacíos A_V y el área total del corte A_T :

$$n_A = A_V / A_T \quad (2.43)$$

La relación de vacíos e_A en el plano se define como :

$$e_A = A_V / (A_T - A_V) \quad (2.44)$$

En la misma forma, se entiende por porosidad a lo largo de un sondeo recto (porosidad unidimensional, n_L) a la relación entre la longitud total de intersección con los vacíos L_V y la longitud total del sondeo L_T :

$$n_L = L_V / L_T \quad (2.45)$$

La relación de vacíos unidimensional e_L se define, asimismo, como :

$$e_L = L_V / (L_T - L_V) \quad (2.46)$$

En un medio homogéneo e isótropo, se tiene obviamente :

$$n_A = n_L = n \quad (2.47)$$

y

$$e_A = e_L = e \quad (2.48)$$

Lo anterior puede establecerse fácilmente considerando una muestra con forma de paralelepípedo rectangular de longitud L_T

, área transversal A_T y volumen V_T . Para esta muestra se tiene :

$$n = V_V / V_T = (A_V L_T) / (A_T L_T) = (L_V A_T) / (L_T A_T) = n_A = n_L \quad (2.49)$$

La Ec 2.47 se conoce como "principio de Delesse" [Delesse, 1847]. Este principio no parece estar aceptado por todos los autores. Algunos de ellos [Harr, 1982] han inclusive llegado a proponer fórmulas complejas para calcular la porosidad bidimensional a partir de la porosidad tridimensional.

En un medio homogéneo, las diferencias que llegan a observarse experimentalmente entre los diferentes tipos de porosidades solamente pueden atribuirse al efecto de escala geométrico (2.3.7) o a la anisotropía. En este último caso, es decir en medios homogéneos anisótropos (por ejemplo arreglos regulares de esferas), la porosidad en un plano o a lo largo de un sondeo puede presentar fuertes variaciones de carácter periódico o semiperiódico de un plano o sondeo a otro; sin embargo, la esperanza matemática de la porosidad en un plano o sondeo seleccionado al azar coincide necesariamente con la porosidad tridimensional.

b) Porosidad de las partículas mayores y distribuciones granulométricas referidas al volumen, área o longitud de la muestra

Es posible representar mediante una función única la porosidad y la distribución granulométrica de un medio granular. Para ello, se define la función siguiente [Auvinet, 1982] :

$G_3(d)$ = Proporción del volumen total de una muestra ocupada por partículas de diámetro menor o igual que d o por vacíos.

Para $d = 0$, $G_3(d)$ corresponde a la porosidad n de la muestra o su equivalente en términos de la relación de vacíos: $e/(1+e)$. Para otros valores de d , $G_3(d)$ puede interpretarse como la porosidad de las partículas de diámetro mayor que d , a condición de considerar las partículas de diámetro inferior a d como parte de los vacíos.

Si la masa granular se corta según un plano, la distribución de diámetros aparentes de las partículas intersecadas puede definirse mediante una segunda función :

$G_2(d)$ = Proporción del área total del corte ocupada por partículas con diámetro aparente menor o igual que d o por vacíos.

En la misma forma, a lo largo de un sondeo, es posible definir la distribución de diámetros aparentes siguiente:

$G_1(d)$ = Proporción de la longitud total del sondeo ocupada por partículas con un diámetro aparente menor o igual que d o por vacíos.

En la Fig 2.11 se muestran las curvas representativas de estas funciones para el material B de la Fig 2.1, con una porosidad arbitraria de 40 %.

Simples relaciones geométricas permiten establecer que, para un medio homogéneo :

$$F_{3V}(d) = [G_3(d) - n]/(1 - n) \quad (2.50)$$

$$F_{2AS}(d) = [G_2(d) - n]/(1 - n) \quad (2.51)$$

$$F_{1AL}(d) = [G_1(d) - n]/(1 - n) \quad (2.52)$$

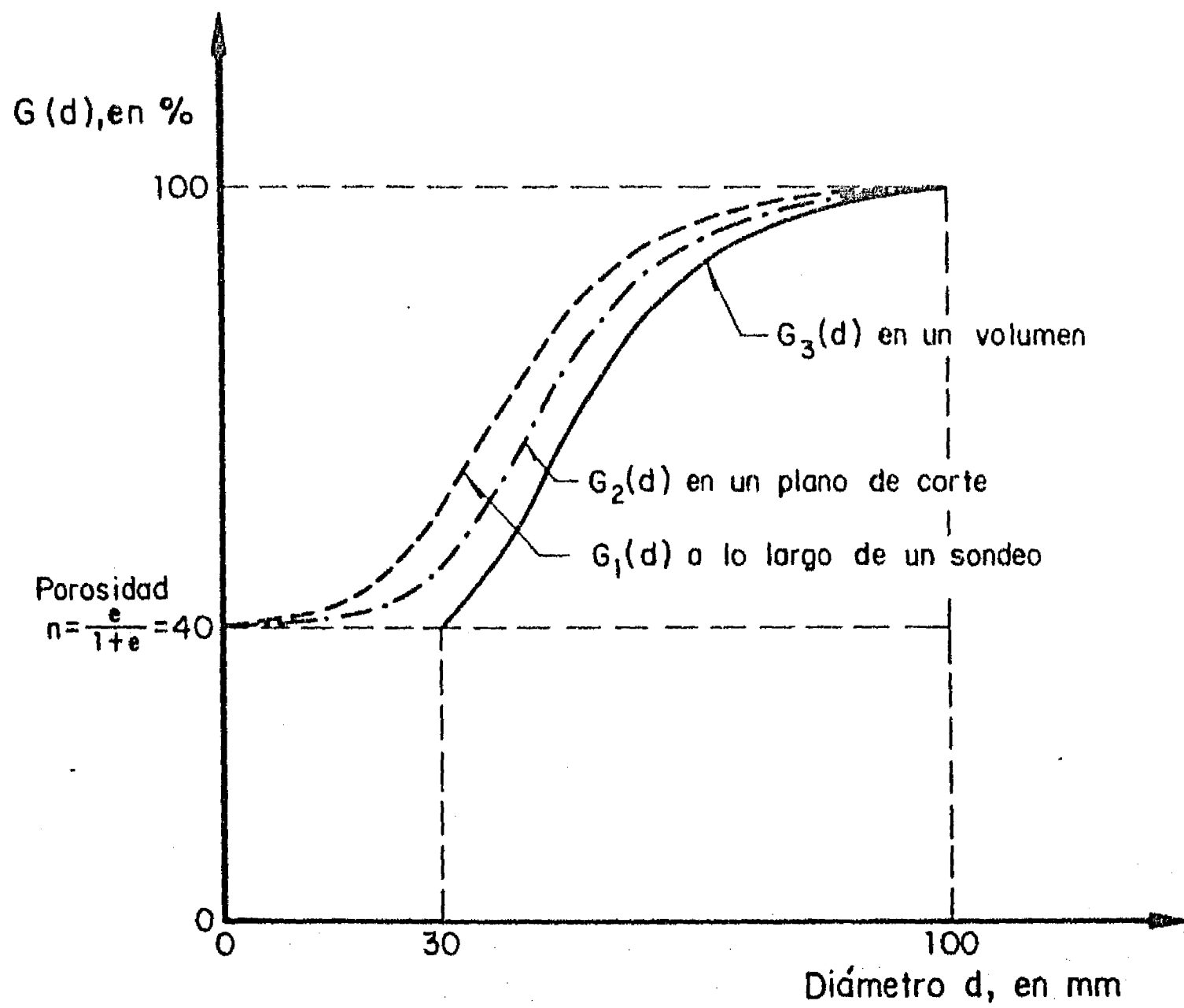


Fig 2.11 Porosidad generalizada. Distribuciones granulométricas referidas al volumen, área o longitud de la muestra (Material B, Fig 2.1)

2.3.3 Distribución espacial de partículas

Para describir el arreglo de las partículas dentro de una masa de material granular homogénea, resulta útil introducir los conceptos adicionales siguientes :

a) Número de partículas por unidad de volumen

Se llamará $N(V)$ el número de partículas contenidas dentro de una muestra de volumen V de la masa granular.

Este número puede variar de una muestra a otra, aun en un medio homogéneo, y es una función aleatoria. Su distribución de probabilidad es:

$$P_{N_V(V)}(k) = P[N_V(V) = k] \quad (2.53)$$

Su valor esperado es la función :

$$E\{N_V(V)\} = \lambda_V V \quad (2.54)$$

donde λ_V es la esperanza del número de partículas por unidad de volumen (intensidad de la función $N_V(V)$, también llamada "concentración" por Marsal [1967]). En medios homogéneos, esta esperanza es constante dentro de toda la masa.

En este último caso, y si las partículas son aproximadamente esféricas, la intensidad puede calcularse a partir de la densidad granulométrica en número del material y de su porosidad como sigue :

$$\lambda_V = (1-n)/E_{3D} \{\pi D^3/6\} \quad (2.55)$$

En el caso de muestras pequeñas, la definición de $N_V(V)$ puede resultar ambigua debido a que una proporción importante de partículas se encuentran parcialmente contenidas dentro del volumen V . Se requiere entonces una convención adicional que puede consistir, por ejemplo, en contar estas partículas de frontera en forma fraccionaria de acuerdo a la proporción de su volumen que quede incluida dentro del volumen de referencia. $N_V(V)$ puede entonces redondearse al entero más cercano (véase también 2.3.7).

b) Número de partículas por unidad de área en planos de

intersección.

En un plano de intersección, se puede definir en la misma forma la función aleatoria $N_A(A)$ igual al número de partículas intersecadas por un plano en una área A .

Para esta nueva función aleatoria, se define la distribución de probabilidad :

$$P_{N_A(A)}(k) = P [N_A(A) = k] \quad (2.56)$$

Su valor esperado puede escribirse :

$$E\{N_A(A)\} = \lambda_A A \quad (2.57)$$

En el caso de un medio homogéneo e isótropo formado por partículas aproximadamente esféricas, se tiene :

$$\lambda_A = (1-n) / E_{2A} \{\pi D^2/4\} \quad (2.58)$$

Por otra parte, si se toma en cuenta que la probabilidad de que una partícula de la masa interseque el plano es proporcional a su diámetro, es posible mostrar que :

$$\lambda_A = \lambda_V E_{3D} \{D\} \quad (2.59)$$

En efecto, si se considera una muestra cúbica de volumen V unitario, se tiene :

$$E\{N_V(1)\} = \lambda_V \quad (2.60)$$

Si ahora se interseca esta muestra con un plano paralelo a una de sus caras, la intersección tiene una área A unitaria y el número de partículas intersecadas es :

$$N_A(1) = \sum_{i=1}^{N_V(1)} y_i \quad (2.61)$$

donde

y_i variable aleatoria igual a uno si la partícula i interseca el plano y a cero si no lo interseca.

Se tiene:

$$E\{N_A(1)\} = E\{E\{N_A(1) | N_V(1)\}\} \quad (2.62)$$

$$E\{N_A(1)\} = E\{N_V(1)E\{y_i\}\} \quad (2.63)$$

$$E\{N_A(1)\} = E\{N_V(1)\} E\{y_i\} = \lambda_V E\{y_i\} \quad (2.64)$$

pero:

$$E\{y_i\} = E\{E\{y_i | D\}\} \quad (2.65)$$

$$E\{y_i\} = E\{D\} \quad (2.66)$$

y por tanto:

$$E\{N_A(1)\} = \lambda_A = \lambda_V E_{3D}\{D\} \quad (2.67)$$

Marsal [1967] ha sugerido que debe cumplirse aproximadamente la relación:

$$\lambda_A = (\lambda_V)^{2/3} \quad (2.68)$$

Esta relación da un valor cercano al de la Ec 2.59 para materiales uniformes pero puede sobrestimar considerablemente el valor real para materiales bien graduados puesto que no toma en cuenta la selección de tamaños que se presenta en un plano de intersección.

Se tiene también, a partir de las Ecs 2.55 y 2.58, que :

$$\lambda_A = \lambda_V E_{3D}\{\pi D^3/6\} / E_{2A}\{\pi D^2/4\} \quad (2.69)$$

Se observa por tanto que :

$$E_{2A}\{\pi D^2/4\} = E_{3D}\{\pi D^3/6\} / E_{3D}\{D\} \quad (2.70)$$

El área media de la intersección de las partículas con un plano es igual al cociente de su volumen medio y su diámetro medio.

c) Número medio de partículas por unidad de longitud a lo largo de un sondeo.

Finalmente, también puede introducirse una función aleatoria $N(L)$ igual al número de partículas intersecadas por un sondeo recto de longitud L .

La distribución de probabilidad de este proceso es:

$$P_{N_L(L)}(k) = P[N_L(L) = k] \quad (2.71)$$

Su valor esperado se escribe:

$$E\{N_L(L)\} = \lambda_L L \quad (2.72)$$

En el caso de un medio homogéneo e isótropo formado por partículas aproximadamente esféricas, se tiene:

$$\lambda_L = (1-n) / E_{1A}\{D\} \quad (2.73)$$

Por otra parte, si se toma en cuenta que la probabilidad de que una partícula interseque el sondeo es proporcional a su área transversal máxima, es fácil mostrar, siguiendo un razonamiento semejante al expuesto para la Ec 2.59, que:

$$\lambda_L = \lambda_V E_{3D}\{\pi D^2/4\} \quad (2.74)$$

En este caso, el equivalente de la expresión 2.68 es:

$$\lambda_L = (\lambda_V)^{1/3} = (\lambda_A)^{1/2} \quad (2.75)$$

La aplicación de esta relación está sujeta a las mismas limitaciones que la Ec 2.68, con la observación de que la sobrestimación es todavía más pronunciada en este caso.

A partir de las Ecs 2.55 y 2.73, se tiene:

$$\lambda_L = \lambda_V E_{3D}\{\pi D^3/6\} / E_{1A}\{D\} \quad (2.76)$$

Además, de esta última ecuación y de la 2.74, se concluye que:

$$E_{1A} \{D\} = E_{3D} \{\pi D^3/6\} / E_{3D} \{\pi D^2/4\} \quad (2.77)$$

La longitud media de la intersección de las partículas con un sondeo es igual al cociente de su volumen medio y su área transversal máxima media.

También resultan válidas, siguiendo razonamientos análogos a los anteriores, las relaciones:

$$\lambda_L = \lambda_A E_{2A} \{D\} \quad (2.78)$$

y

$$\lambda_L = \lambda_A E_{2A} \{\pi D^2/4\} / E_{1A} \{D\} \quad (2.79)$$

de donde :

$$E_{1A} \{D\} = E_{2A} \{\pi D^2/4\} / E_{2A} \{D\} \quad (2.80)$$

La longitud media de la intersección de las partículas con un sondeo es igual al cociente del área media de intersección con un plano y el diámetro aparente medio en el plano.

En las Tablas 2.3 y 2.4 se presentan los resultados obtenidos al aplicar algunos de los conceptos anteriores a los materiales A y B de la Fig 2.1 y a fracciones de los mismos materiales.

Se observa que las Ecs 2.68 y 2.75 sobrestiman los números de partículas, particularmente en el caso del material bien graduado A. Cuando solamente se considera una fracción del material, estas ecuaciones dejan de ser aplicables.

Conviene subrayar que en medios anisótropos, los parámetros λ_A y λ_L son funciones de la orientación del plano o de la recta de intersección. Se volverá sobre este punto más adelante (2.3.8) y se mostrará que estos parámetros presentan además una estrecha relación con la superficie específica.

d) Densidad de probabilidad de la distancia entre centros de partículas

TABLA 2.3 Número de partículas por unidad de volumen, área y longitud Material A (Fig 2.1) y fracciones. Porosidad $n = 0.4$

Material	Número de partículas			Ec 2.68 $(\lambda_v)^{2/3}$ N°/cm ²	Ec 2.75 $(\lambda_v)^{1/3}$ N°/cm
	λ_v N°/cm ³	λ_A N°/cm ²	λ_L N°/cm		
Material A, Fig 2.1	9,802	213	6.15	458	21.4
Material A, D>1 mm	80	12.6	1.98	18.6	4.31
Material A, D>10 mm	0.046	0.067	0.091	0.128	0.358
Material A, D>40 mm	0.19×10^{-3}	1.16×10^{-3}	9.54×10^{-3}	3.38×10^{-3}	58×10^{-3}

TABLA 2.4 Número de partículas por unidad de volumen, área y longitud Material B (Fig 2.1) y fracciones. Porosidad $n = 0.4$

Material	Número de partículas			Ec 2.68 $(\lambda_v)^{2/3}$ N°/m ²	Ec 2.75 $(\lambda_v)^{1/3}$ N°/m
	λ_v N°/m ³	λ_A N°/m ²	λ_L N°/m		
Material B, Fig 2.1	12,091	518	18.5	526	23.4
Material B, D>50 mm	2,606	153	11.8	189	13.8
Material B, D>80 mm	101	8.8	0.61	21.7	4.65

Para describir la repartición en el espacio de las partículas, algunos autores [Scott, 1962] han considerado conveniente introducir la variable aleatoria T igual a la distancia entre el centro (de gravedad) de una partícula y el de la partícula de centro más cercano, y la densidad de probabilidad de esta variable, $f_{3T}(t)$. Esta densidad puede definirse para todas las partículas o solamente para las de determinado tamaño.

En un plano de intersección, se puede, asimismo, introducir la variable T igual a la distancia entre el centro de la intersección de una partícula con el plano y el de la intersección de centro más cercano, y su densidad de probabilidad $f_{2T}(t)$.

Finalmente, se puede también introducir la variable T igual a la distancia entre el centro de un segmento de intersección de una partícula con un sondeo y el del segmento de centro más cercano, y su densidad de probabilidad $f_{1T}(t)$.

2.3.4 Número de coordinación y repartición de contactos

Varios autores han sugerido incluir entre los parámetros estructurales el número medio de contactos por partícula [Marsal, 1982], también llamado número de coordinación [Athanasidou-Grivas y Harr, 1980; Oda, 1982]

Este número presenta una alta correlación con los parámetros definidos en los incisos anteriores; en particular, crece con la compacidad relativa y decrece con la porosidad y la relación de vacíos.

En forma más general, se puede introducir la variable aleatoria N_c igual al número de contactos por partícula y su distribución de probabilidad :

$$P_{N_c}(n) = P[N_c = n] \quad (2.81)$$

El número de coordinación se entiende entonces como la esperanza matemática $E\{N_c\}$.

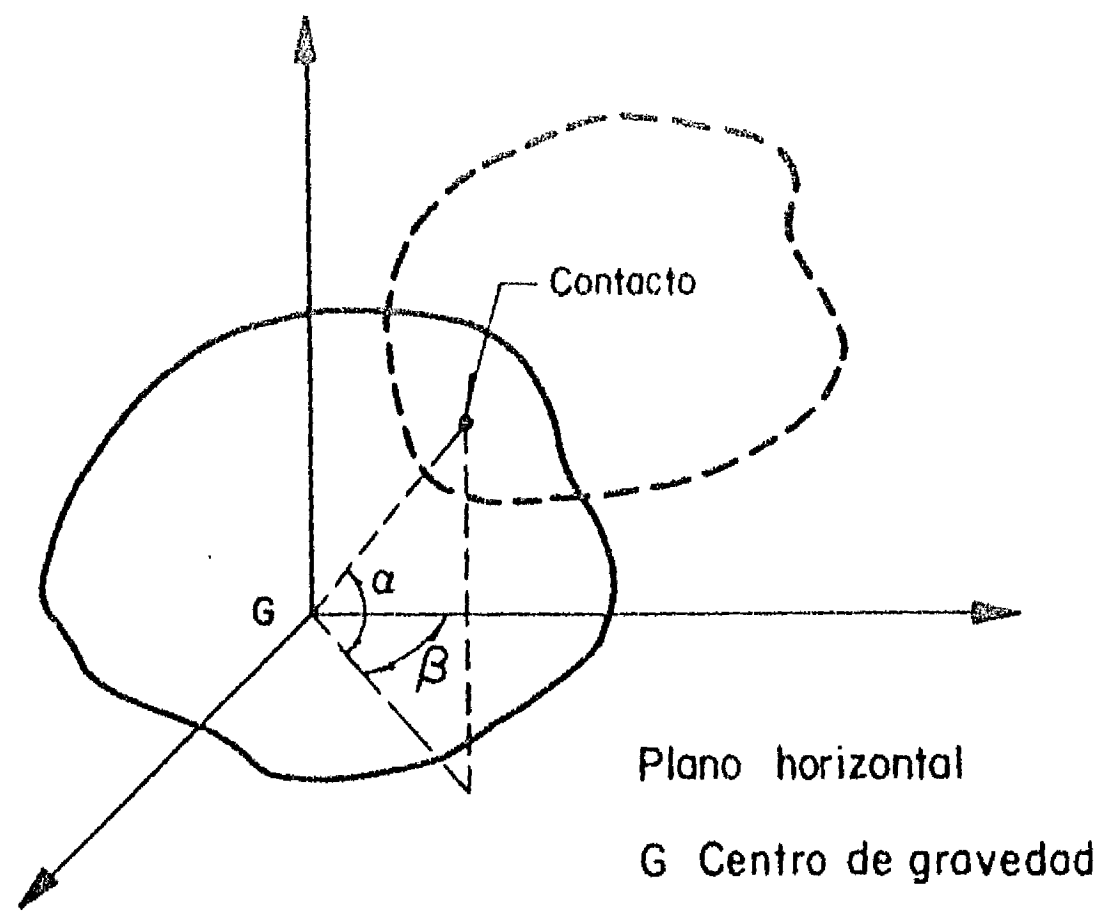
Se verá más adelante que también puede ser útil introducir el proceso estocástico $N_c(a)$ donde a es el área superficial de la partícula. Marsal [1973] ha sugerido que, para las partículas más grandes, el valor esperado de este proceso $E\{N_c(a)\}$ se calcule como $\lambda_a a$ donde λ_a es la esperanza del número de partículas por unidad de área (2.3.3). Una evaluación del grado de aproximación de esta estimación se presenta en 3.3.4.

La distribución de los contactos interparticulares sobre la superficie de cada grano puede ser representada mediante varias funciones.

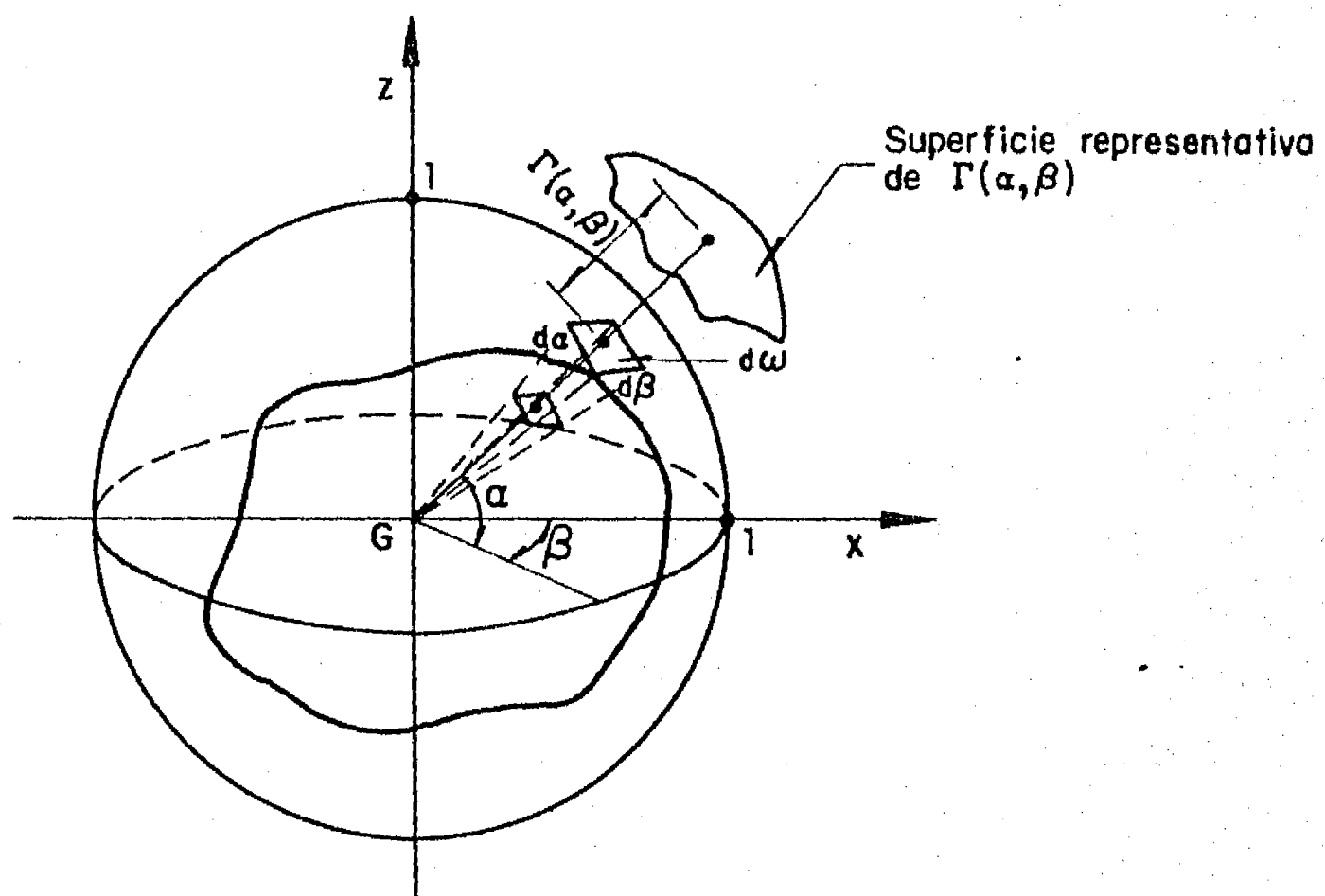
En general, se recurre a la densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta)$ de los ángulos α y β de la Fig 2.12. En algunas estructuras, la función $f_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta)$ resulta prácticamente independiente del ángulo β (anisotropía con simetría axial, véase 3.3.4.b). En este caso se puede recurrir simplemente a la densidad de probabilidad marginal del ángulo α , $f_\alpha(\alpha)$.

Si los contactos están uniformemente repartidos sobre la superficie de un grano esférico de radio r , la densidad de probabilidad $f_\alpha(\alpha)$ varía con el área de la partícula asociada al ángulo α . Se tiene [Auvinet, 1972] :

$$f_\alpha(\alpha) = (2\pi r^2 \cos \alpha) / (4\pi r^2) = (\cos \alpha) / 2 ; \quad \text{para } -\pi/2 < \alpha < +\pi/2 \quad (2.82)$$



a) Definición de la posición de un contacto



b) Función $\Gamma(\alpha, \beta)$

Fig 2.12 Repartición de contactos

Las eventuales desviaciones respecto a esta función (Fig 2.13) reflejan la anisotropía geométrica del medio.

Por su parte, Oda [1982] ha propuesto definir la distribución de los contactos mediante una función $\Gamma(\alpha, \beta)$, donde α y β son los ángulos mostrados en la Fig 2.12, y tal que:

$$\int_{\Omega} \Gamma(\alpha, \beta) d\omega = 1 \quad (2.83)$$

donde

$d\omega$ Angulo sólido elemental igual a $\cos\alpha d\alpha d\beta$ ($-\pi/2 < \alpha < +\pi/2$; $0 < \beta < 2\pi$)

Ω Esfera de radio unitario

$\Gamma(\alpha, \beta)d\omega$ representa entonces la probabilidad de que un contacto particular se encuentre en el ángulo sólido $d\omega$.

Cuando existe simetría axial, resulta únicamente de interés la distribución marginal $\Gamma(\alpha)$, representada en la Fig 2.14 y tal que :

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Gamma(\alpha) \cos\alpha d\alpha = 1 \quad (2.84)$$

Cuando la repartición de los contactos sobre la superficie de las partículas es uniforme, es fácil verificar que $\Gamma(\alpha, \beta) = 1/(4\pi)$ y que $\Gamma(\alpha) = 1/2$.

Varios autores han prestado también atención a la inclinación δ de la normal a los planos tangentes a las partículas en los puntos de contacto respecto a la vertical (Fig 2.15). Es posible definir con este ángulo unas funciones $\Gamma(\delta, \beta)$ y $\Gamma(\delta)$ análogas a las de las Ecs 2.83 y 2.84.

En el caso de partículas esféricas, se tiene simplemente $\delta = \pi/2 - \alpha$ y la densidad de probabilidad del ángulo δ se obtiene directamente a partir de $f_{\alpha}(\alpha)$ como:

$$f_{\delta}(\delta) = f_{\alpha}(\alpha) \quad ; \quad \text{para } 0 < \delta < \pi \quad (2.85)$$

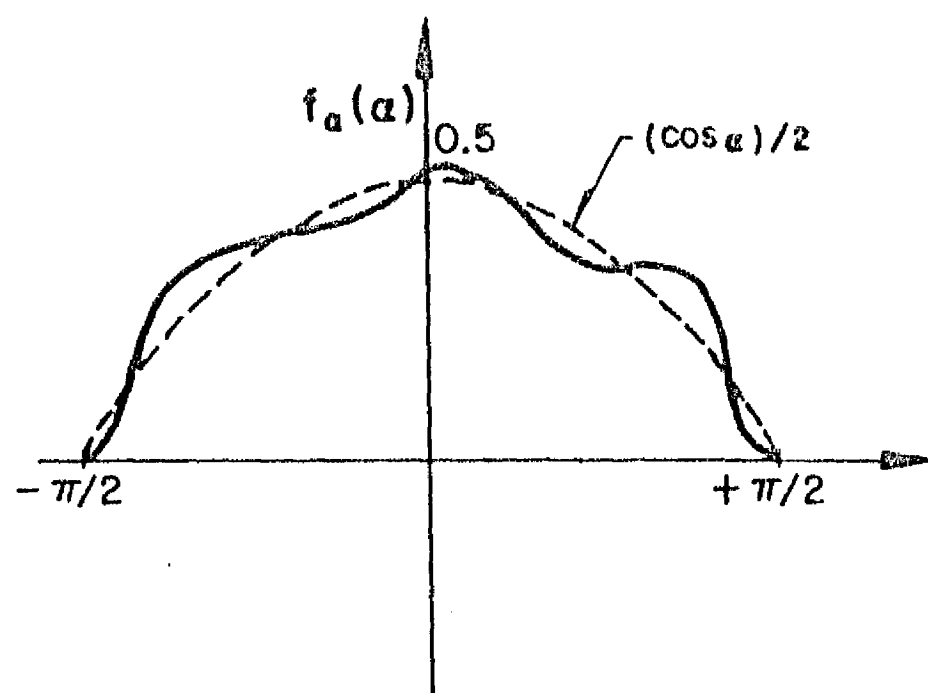


Fig 2.13 Densidad de probabilidad marginal del ángulo α , $f_\alpha(\alpha)$

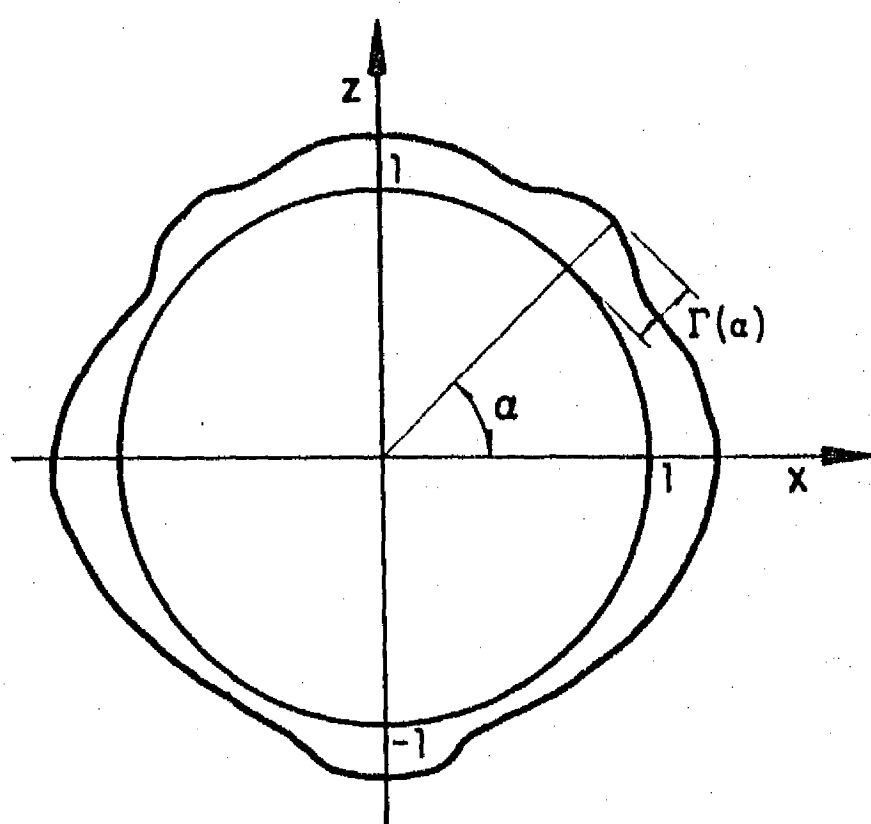


Fig 2.14 Distribución marginal, $\Gamma(\alpha)$

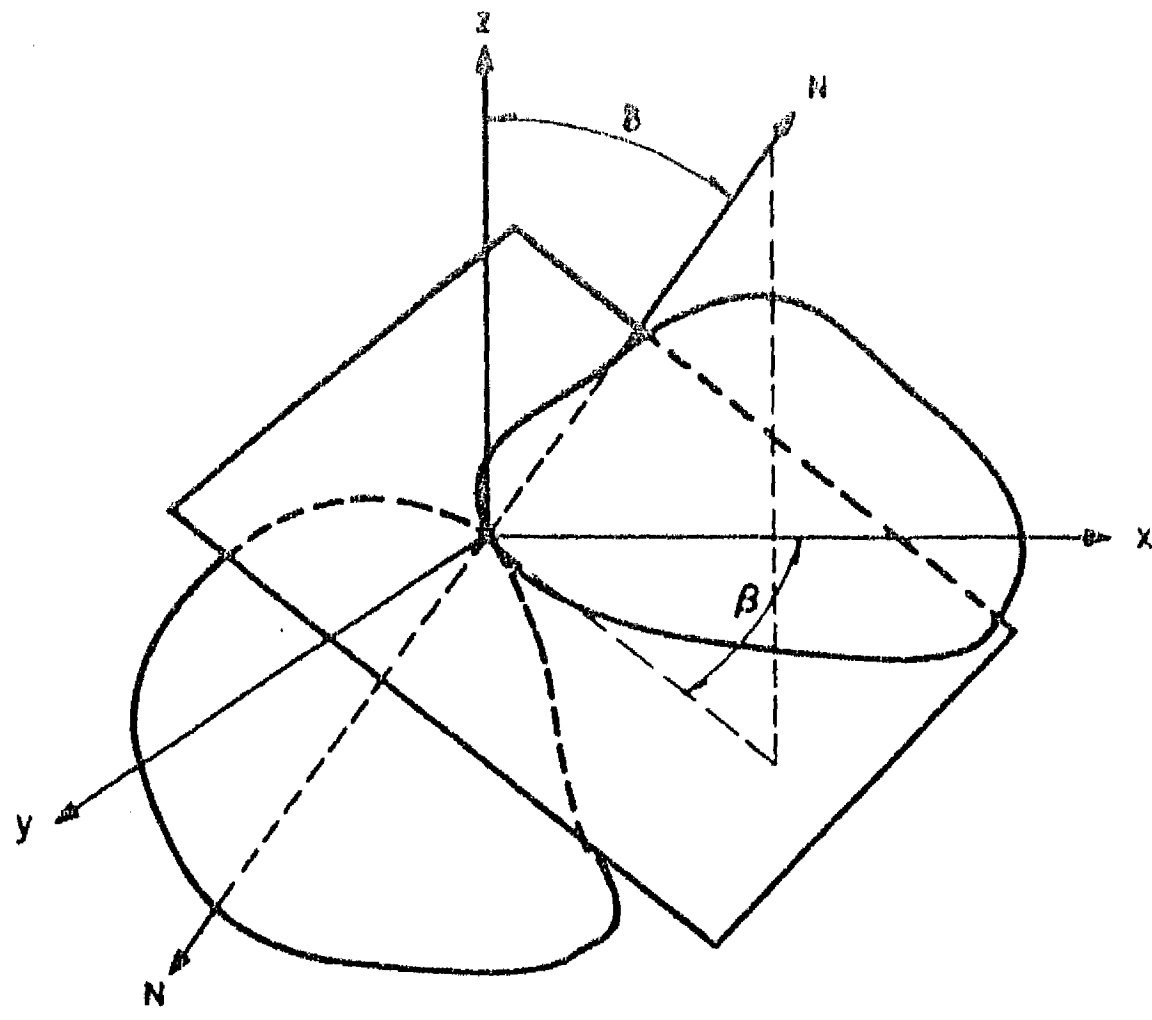


Fig 2.15 Inclinación de la normal al plano tangente en un contacto respecto a la vertical (ángulo δ)

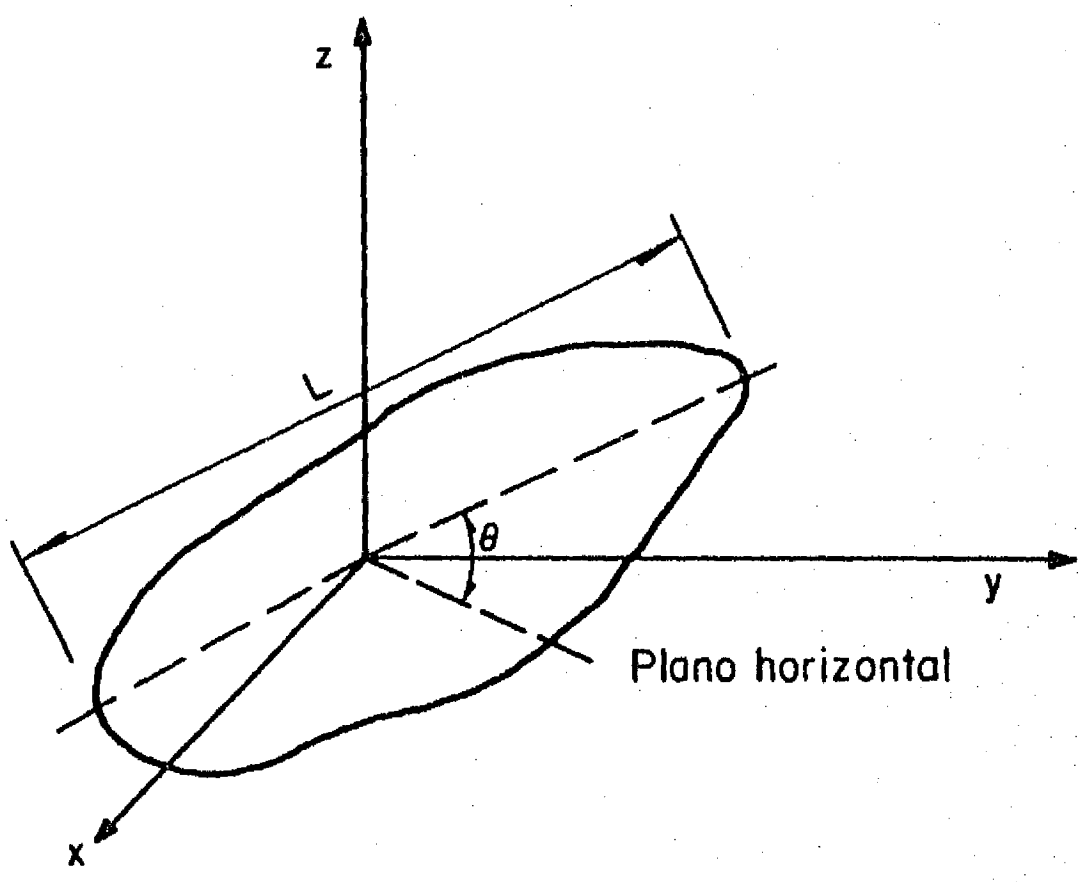


Fig 2.16 Orientación de una partícula

Es decir, para contactos repartidos uniformemente :

$$f_{\delta}(\delta) = (\text{sen } \delta)/2 \quad ; \quad \text{para } 0 < \delta < \pi \quad (2.86)$$

2.3.5 Orientación de partículas

Cuando los granos del medio no son esféricos o por lo menos aproximadamente equidimensionales, una descripción completa de la estructura debe incluir una evaluación del grado de orientación de las partículas.

Si es posible admitir que cada partícula presenta tres direcciones ortogonales preferenciales a lo largo de las cuales se definen una longitud L , un ancho B y un espesor T (2.2.2), su orientación se puede definir mediante cuatro parámetros (por ejemplo, los tres cosenos directores de un vector cuya dirección coincida con la longitud, más un coseno adicional que defina la dirección del ancho o del espesor en el plano perpendicular a la longitud).

En la práctica, lo más común es prestar atención solamente al ángulo θ de la dirección de la longitud de la partícula con algún plano de referencia (generalmente el plano horizontal, Fig 2.16).

Se puede definir entonces una densidad de probabilidad $f_{\theta}(u)$ tal que :

$$f_{\theta}(u) du = P [u < \theta < u + du] \quad ; \quad \text{para } -\pi/2 < u < +\pi/2 \quad (2.87)$$

En las observaciones experimentales realizadas en cortes planos, no se tiene acceso al ángulo θ sino al ángulo θ' de inclinación de la longitud aparente de la partícula. El grado de orientación se define entonces en términos de la densidad de probabilidad de este ángulo.

Cabe hacer notar que la función $\Gamma(\delta, \beta)$ definida en el inciso anterior refleja también en cierta medida la orientación de las partículas.

2.3.6 Distribución de tamaños de poros

Es difícil describir las dimensiones y la forma de los poros de un medio granular mediante una función simple. El concepto mismo de tamaño de poro resulta ambiguo puesto que los vacíos son continuos y que cualquier división de los mismos resulta en cierta medida arbitraria.

Sin embargo, es posible definir una función que refleja las dimensiones de los poros en la forma siguiente [Matheron, 1967] :

$F_{3V}(p)$ = Proporción del volumen total de los vacíos inaccesible a una esfera de referencia de diámetro p

El origen de esta definición se encuentra en los llamados diagramas de Purcell obtenidos en los porosímetros de mercurio al medir el volumen de este metal que penetra dentro de una muestra bajo diferentes presiones (3.2.1). Los meniscos convexos del mercurio juegan el papel de las esferas de referencia mencionadas en la definición.

Cabe hacer notar que la función $F_{3V}(p)$ no corresponde rigurosamente a la obtenida con el diagrama de Purcell, puesto que pueden existir poros en los que quepa la esfera de referencia pero que no sean accesibles desde el exterior por falta de "caminos" de acceso.

Por analogía con las distribuciones de tamaños de granos, se define también la derivada de la función anterior como densidad (en volumen) de los tamaños de poros :

$$f_{3V}(p) = dF_{3V}(p) / dp \quad (2.88)$$

Una vez aceptada esta definición, y sus limitaciones, es posible introducir conceptos análogos a los discutidos en el inciso 2.2.1 para granos (Tabla 2.5) :

a) Distribución de tamaños de poros en número

Por analogía con los granos y considerando un conjunto de esferas "equivalentes" a los poros (con función de distribución granulométrica igual a $F_{3V}(p)$), se pueden definir la función de distribución y la densidad en número siguientes :

$$F_{3P}(p) = P [P \leq p] \quad (2.89)$$

y

TABLA 2.5 Distribuciones de tamaños de poros
Notación empleada

NOMBRE	NOTACION
<ul style="list-style-type: none"> - DISTRIBUCIONES TRIDIMENSIONALES Distribución de tamaños en volumen Densidad en volumen Distribución de tamaños en número Densidad de probabilidad en número 	$F_{3v}(p)$ $f_{3v}(p)$ $F_{3p}(p)$ $f_{3p}(p)$
<ul style="list-style-type: none"> - DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES <ul style="list-style-type: none"> • <u>Poros intersecados por un plano</u> Distribución de tamaños en volumen Densidad en volumen Distribución de tamaños en número Densidad de probabilidad en número <ul style="list-style-type: none"> • <u>Tamaños aparentes de poros intersecados por un plano</u> Distribución de tamaños en área. Densidad en área Distribución de tamaños en número Densidad de probabilidad en número 	$F_{2v}(p)$ $f_{2v}(p)$ $F_{2p}(p)$ $f_{2p}(p)$ $F_{2AS}(p)$ $f_{2AS}(p)$ $F_{2A}(p)$ $f_{2A}(p)$
<ul style="list-style-type: none"> - DISTRIBUCIONES UNIDIMENSIONALES <ul style="list-style-type: none"> • <u>Poros intersecados por un sondeo</u> Distribución de tamaños en volumen Densidad en volumen Distribución de tamaños en número Densidad de probabilidad en número <ul style="list-style-type: none"> • <u>Tamaños aparentes de poros intersecados por un sondeo</u> Distribución de tamaños en longitud Densidad en longitud Distribución de tamaños en número Densidad de probabilidad en número 	$F_{1v}(p)$ $f_{1v}(p)$ $F_{1p}(p)$ $f_{1p}(p)$ $F_{1AL}(p)$ $f_{1AL}(p)$ $F_{1A}(p)$ $f_{1A}(p)$

$$f_{3P}(p) = dF_{3P}(p)/dp = f_{3V}(p)/(p^3 E \{1/P^3\}) \quad (2.90)$$

Conviene hacer notar que el concepto de conjunto de esferas equivalentes presenta serias limitaciones puesto que la equivalencia es solamente matemática y no refleja la forma precisa de los poros ni su grado de conexidad.

b) Distribución de tamaños de poros intersecados por un plano de corte o un sondeo

Recurriendo nuevamente al concepto de esferas equivalentes, se introduce :

- En un corte (en número):

$$F_{2P}(p) = P [P \leq p] \text{ intersección con el plano} \quad (2.91)$$

$$\text{con} \quad f_{2P}(p) = dF_{2P}(p)/dp = f_{3P}(p)p/E_{3P}\{P\} \quad (2.92)$$

- En un sondeo (en número):

$$F_{1P}(p) = P [P \leq p] \text{ intersección con el sondeo} \quad (2.93)$$

$$\text{con} \quad f_{1P}(p) = dF_{1P}(p)/dp = f_{3P}(p)p^2 / E_{3P}\{P^2\} \quad (2.94)$$

Las distribuciones anteriores pueden también definirse en volumen. Sin embargo, por brevedad, se omitirán las expresiones correspondientes.

c) Distribución de tamaños aparentes de poros en cortes y sondeos

La definición de distribución de tamaños de poros puede generalizarse al caso de la intersección del medio granular con un plano o un sondeo:

- En un corte

En un plano de intersección, se define la función de distribución de tamaños aparentes de poros (en área) :

$$F_{2As}(p) = \text{Proporción del área total de los vacíos inaccesible}$$

a un círculo de referencia de diámetro p ,

y la densidad:

$$f_{2AS}(p) = dF_{2AS}(p)/dp \quad (2.95)$$

Puede pensarse que la función de distribución $F_{2AS}(p)$ presenta más analogía que la función $F_{3V}(p)$ con el diagrama de Purcell si se admite que, en el porosímetro de mercurio, el frente de avance de este metal es aproximadamente plano.

Considerando un conjunto de discos equivalentes a los poros (con función de distribución granulométrica en área igual a $F_{2AS}(p)$), es posible introducir las funciones siguientes (en número) :

$$F_{2A}(p) = P [P \leq p] \quad (2.96)$$

y

$$f_{2A}(p) = dF_{2A}(p)/dp = f_{2AS}(p)/(p^2 E_{2AS} \{1/P^2\}) \quad (2.97)$$

- En un sondeo

A lo largo de un sondeo, la definición de la distribución de los tamaños aparentes de los poros no presenta ambigüedad puesto que la longitud del cruce de un poro por un sondeo está definida en forma única. La definición de la distribución (en longitud) puede ser entonces:

$F_{1AL}(p)$ = Proporción de la longitud total de los vacíos inaccesible a un segmento de referencia de longitud p (lo que es equivalente a la proporción de la longitud total de los vacíos con dimensión aparente menor o igual que p)

La densidad (también en longitud) es :

$$f_{1AL}(p) = dF_{1AL}(p)/dp \quad (2.98)$$

En número, se definen asimismo :

$$F_{1A}(p) = P [P \leq p] \quad (2.99)$$

y

$$f_{1A}(p) = dF_{1A}(p)/dp = f_{1AL}(p)/(pE_{1AL} \{1/P\}) \quad (2.100)$$

El valor esperado de la longitud del cruce de un poro $E_{1A}\{P\}$ se expresa en la forma siguiente en términos del tamaño medio aparente de los granos :

$$E_{1A}\{P\} = E_{1A}\{D\} \cdot e = E_{1A}\{D\} \cdot n / (1+n) \quad (2.101)$$

donde

e Relación de vacíos

n Porosidad

d) Planteamientos complementarios para la distribución de poros

En las aplicaciones, puede ser de interés plantear en forma ligeramente diferente el concepto de distribución de poros y generalizarlo.

La distribución de poros puede referirse al volumen, área o longitud total de la muestra, en forma análoga a lo planteado en 2.3.2 para la distribución de los granos. En este caso, cuando p tiende hacia cero, la distribución de tamaños de poros así definida, $G(p)$, tiende hacia la porosidad del medio. Es posible representar la distribución de granos y de poros en la forma indicada en la Fig 2.17, con lo que se reúnen en una misma gráfica varias de las principales características estructurales del medio.

Otro concepto de interés es el de la distribución de tamaños de poros de las partículas de tamaño mayor que determinado valor d . $F_{3V}(p | D > d)$. Esta es la distribución de tamaños de los poros de las partículas grandes obtenida incorporando las partículas de diámetro menor que d a los vacíos. Se verá más adelante (4.5) que este concepto puede ser útil para el estudio del comportamiento de los filtros.

e) Ley de primer contacto

Si X es un punto que se encuentra en los poros y C es la distancia de este punto a la partícula más cercana, se llama ley de primer contacto [Matheron, 1967] a la función de distribución de C :

$$F_{3c}(c) = P [C \leq c] \quad (2.102)$$

En forma equivalente, puede recurrirse a la derivada de la

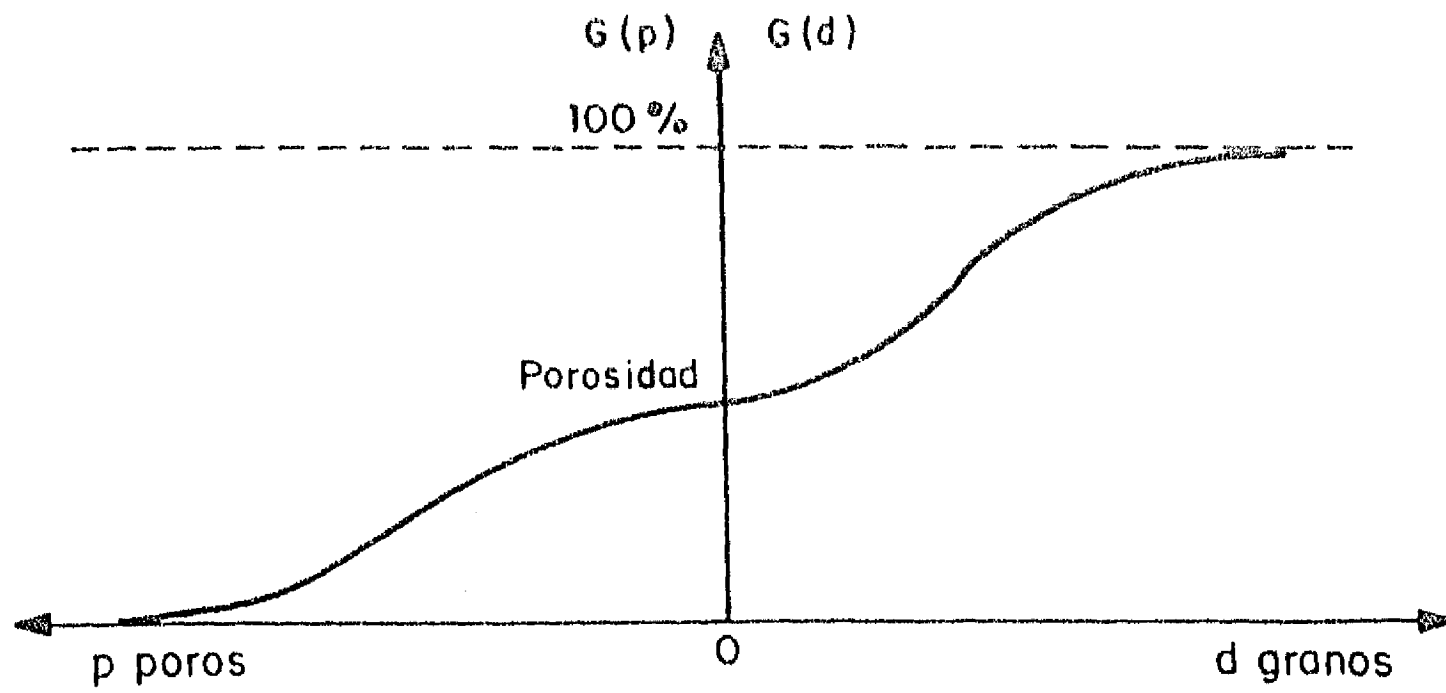


Fig 2.17 Representación en una misma gráfica de las distribuciones de tamaños de poros y de granos (referidas al volumen total de la muestra)

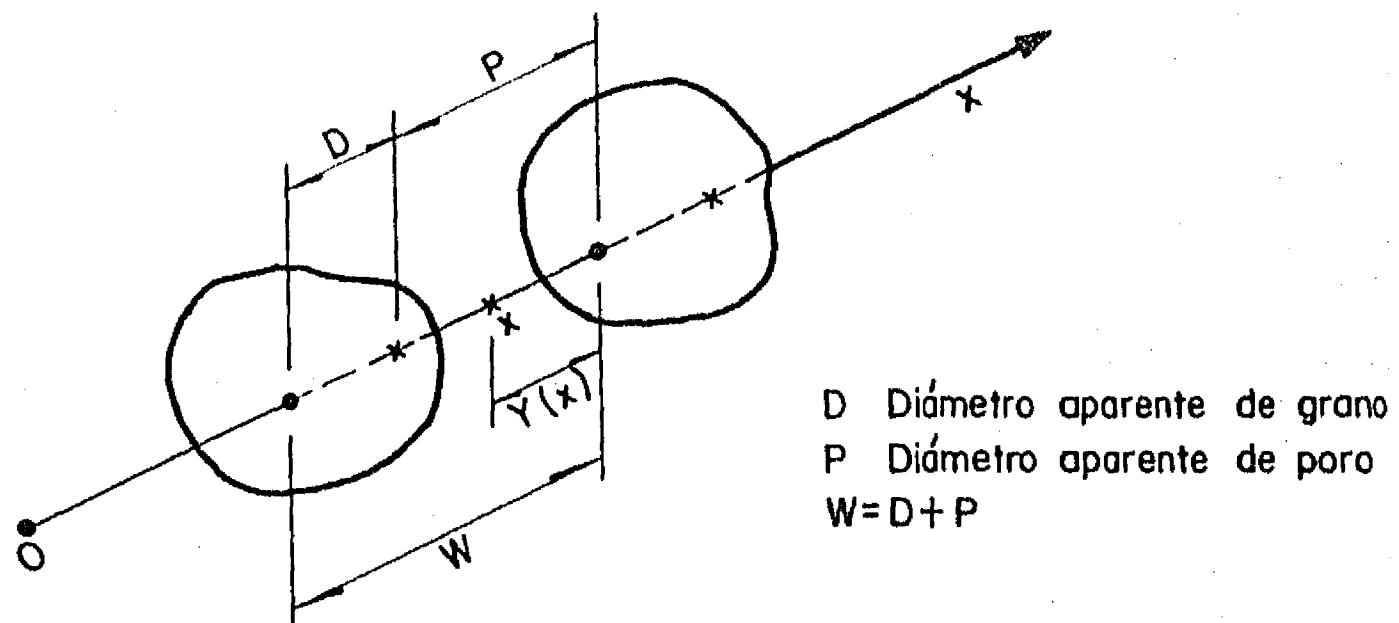


Fig 2.18 Intersección de partículas por un sondeo

función anterior $f_{3c}(c)$, densidad de probabilidad de la distancia de primer contacto.

También es posible definir unas funciones de distribución y densidades análogas a las anteriores en un plano de intersección, $F_{2c}(c)$ y $f_{2c}(c)$, o en un sondeo, $F_{1c}(c)$ y $f_{1c}(c)$.

f) El cruce de un medio granular considerado como proceso de renovación alternante

El cruce de medios granulares por un sondeo puede describirse recurriendo a un modelo clásico de la teoría de los procesos estocásticos conocido como "proceso de renovación alternante" [Ross, 1969]. En efecto, a lo largo del sondeo, se presentan tramos de sólidos y vacíos en forma alternante. La longitud de los tramos sólidos tiene la densidad de probabilidad $f_{1A}(d)$ definida en el inciso 2.3.1.c y los tramos de poros tienen la densidad $f_{1A}(p)$ definida en 2.3.6.c.

A lo largo del sondeo, las entradas a las partículas sólidas (o a los vacíos) se presentan en forma aleatoria y están separadas por intervalos de longitud aleatoria W (Fig 2.18). Si se admite que existe independencia entre la longitud de sólidos y de vacíos, la densidad de probabilidad de W es [Papoulis, 1984]:

$$f_W(w) = \int_0^w f_{1A}(w-p)f_{1A}(p) dp \quad (2.103)$$

que suele escribirse como:

$$f_W(w) = f_{1A}(d) * f_{1A}(p) \quad (2.104)$$

donde el símbolo $*$ significa convolución.

La teoría de la renovación proporciona resultados de aplicabilidad directa a diversos problemas que pueden ser de interés práctico.

Así, si se considera un punto arbitrario de abscisa x sobre el eje del sondeo (Fig 2.18), la función de distribución de la distancia $Y(x)$ a la última (o próxima) entrada dentro de los granos (o de los vacíos) corresponde al concepto de "edad" (o de "vida residual") y es la siguiente [Auvinet, 1984]:

$$F_{Y(x)}(y) = P[Y(x) \leq y] = (1/E\{W\}) \int_0^y [1 - F_W(u)] du \quad (2.105)$$

donde

$E\{W\}$ Valor esperado de W

$F_W(u)$ Función de distribución de $W = \int_0^u f_W(w)dw$

$f_W(w)$ Densidad obtenida con la Ec 2.103

Se volverá sobre este modelo en 3.3.4

2.3.7 Funciones características

a) Función característica binaria

La distribución aleatoria de los sólidos y de los vacíos dentro de una masa granular puede describirse en forma concisa mediante una función binaria llamada función característica [Matheron, 1967]

En cada punto del medio \underline{X} , esta función se define como:

$$K(\underline{X}) = 1 \quad \text{si } \underline{X} \text{ pertenece a los poros}$$

$$K(\underline{X}) = 0 \quad \text{si } \underline{X} \text{ pertenece a los granos}$$

Tomando en cuenta el carácter aleatorio de sus valores, esta función puede considerarse como un proceso estocástico espacial. Una estructura particular formada con el material granular de interés es entonces una realización de este proceso.

Si se admite que el medio es homogéneo se tiene, al considerar un punto \underline{X} al azar dentro del medio:

$$P\{K(\underline{X}) = 1\} = n \quad (2.106)$$

$$P\{K(\underline{X}) = 0\} = 1 - n \quad (2.107)$$

donde

n Porosidad del medio

Por tanto, se tiene también:

$$E\{K(\underline{X})\} = n \quad (2.108)$$

$$\text{var}[K(\underline{X})] = n(1-n) \quad (2.109)$$

Aun si el medio es anisótropo, se puede considerar que a lo largo de una misma dirección el proceso es estacionario en el sentido amplio. Su función de autocorrelación depende entonces solamente de la distancia vectorial entre los puntos de interés [Auvinel, 1984]:

$$R(\underline{X}_1, \underline{X}_2) = E\{K(\underline{X}_1)K(\underline{X}_2)\} = R(\underline{X}_1 - \underline{X}_2) = R(\underline{h}) \quad (2.110)$$

donde

$$\underline{h} = \underline{X}_1 - \underline{X}_2$$

En la misma forma, su función de autocovariancia es :

$$C(\underline{X}_1, \underline{X}_2) = C(\underline{X}_1 - \underline{X}_2) = R(\underline{h}) - n^2 = C(\underline{h}) \quad (2.111)$$

y su coeficiente de autocorrelación :

$$\rho(\underline{X}_1, \underline{X}_2) = (\underline{X}_1 - \underline{X}_2) = C(\underline{h}) / [n(1-n)] = \rho(\underline{h}) \quad (2.112)$$

Las funciones anteriores permiten describir las variaciones aleatorias que presentan las propiedades estructurales como la porosidad, la relación de vacíos y la distribución granulométrica, de una muestra a otra, dentro de un medio granular homogéneo.

- Porosidad

La porosidad de una muestra de volumen V es igual a la integral estocástica :

$$n_v = (1/V) \int_V K(X) dX \quad (2.113)$$

Se tiene entonces :

$$E\{n_v\} = (1/V) \int E\{K(X)\} dX = n \quad (2.114)$$

$$\text{var}[n_v] = (1/V^2) \iint_V C(X - X') dX dX' = \sigma_{n_v}^2 \quad (2.115)$$

Además, para dos muestras de volúmenes respectivos V_1 y V_2 , con o sin traslape, la covariancia entre las porosidades respectivas puede expresarse como sigue :

$$\text{cov}[n_{v_1}, n_{v_2}] = [1/(V_1 V_2)] \int_{V_1} dX_1 \int_{V_2} C(X_1 - X_2) dX_2 \quad (2.116)$$

- Relación de vacíos

Si, en lugar de la porosidad, se usa, como es costumbre en mecánica de suelos, el concepto de relación de vacíos, se tiene para una muestra de volumen V :

$$e_v = n_v / (1 - n_v) \quad (2.117)$$

En el caso extremo en el que el volumen V es inferior al de los poros más grandes, la relación de vacíos puede llegar a ser infinita si la muestra queda totalmente dentro de los vacíos. Su media y variancia son por tanto también infinitas. Para muestras de mayor tamaño, la media y la variancia de e_v pueden obtenerse a partir de las de n_v recurriendo a una aproximación de primer orden [Benjamin, 1970] :

$$E\{e_v\} = n/(1-n) + (1/2)[d^2 e_v / dn_v^2]_m \sigma_{n_v}^2 \quad (2.118)$$

donde

$[d^2 e_v / dn_v^2]_m$ segunda derivada de e_v respecto a n_v calculada para el valor medio de n_v

Es decir :

$$E\{e_v\} = n/(1-n) + \sigma_{n_v}^2 / (1-n)^3 = e + \sigma_{n_v}^2 / (1-n)^3 \quad (2.119)$$

Se observa que el valor esperado de la relación de vacíos medida en una muestra finita presenta un sesgo respecto a la relación de vacíos de la masa granular. Se tiende a sobrestimar este parámetro si el volumen estudiado es demasiado pequeño respecto al tamaño de las partículas.

Por otra parte :

$$\text{var}[e_v] = [de/dn_v]_m^2 \sigma_{n_v}^2 \quad (2.120)$$

$$\text{var}[e_v] = \sigma_{e_v}^2 = \sigma_{n_v}^2 / (1-n)^4 \quad (2.121)$$

Se tiene además :

$$\sigma_{e_v} / e = \sigma_{n_v} / [(1-n)^2 e] = \sigma_{n_v} / [(1-n)n] \quad (2.122)$$

El coeficiente de variación de la relación de vacíos es por tanto superior (del orden del doble) al de la porosidad.

- Distribución granulométrica

Las consideraciones anteriores se aplican también a las variaciones aleatorias que presentan las distribuciones granulométricas medidas en muestras de determinado volumen V extraídas de una masa granular homogénea.

De hecho, ya se hizo notar que las distribuciones granulométricas referidas al volumen total de la muestra, $G(d)$, definidas en el inciso 2.3.1, pueden interpretarse como porosidades a condición de incluir dentro de los vacíos las partículas de diámetro menor que d .

Es por tanto posible generalizar los conceptos anteriores introduciendo las funciones características siguientes:

$K_d(\underline{X}) = 1$ si \underline{X} pertenece a los vacíos o a partículas de diámetro menor que d

$K_d(\underline{X}) = 0$ si \underline{X} pertenece a las partículas de diámetro mayor que d

Aceptando las mismas hipótesis que en el caso de la porosidad, se puede escribir :

$$E\{K_d(\underline{X})\} = G_3(d) \quad (2.123)$$

$$\text{var}[K_d(\underline{X})] = G_3(d)[1 - G_3(d)] \quad (2.124)$$

y, en forma similar, las funciones de autocorrelación, de autocovariancia y el coeficiente de autocorrelación de estas funciones características son respectivamente :

$$R_d(\underline{X}_1, \underline{X}_2) = E\{K_d(\underline{X}_1)K_d(\underline{X}_2)\} = R(\underline{X}_1 - \underline{X}_2) = R_d(\underline{h}) \quad (2.125)$$

$$C_d(\underline{X}_1, \underline{X}_2) = R_d(\underline{h}) - G_3(d)^2 = C_d(\underline{h}) \quad (2.126)$$

$$\rho_d(\underline{X}_1, \underline{X}_2) = C_d(\underline{h}) / \{G_3(d)[1 - G_3(d)]\} = \rho_d(\underline{h}) \quad (2.127)$$

En una muestra de volumen V la distribución granulométrica medida es una función $G_V(d)$ igual a :

$$G_V(d) = \int_V K_d(\underline{X}) d\underline{X} \quad (2.128)$$

Se tiene entonces :

$$E\{G_V(d)\} = (1/V) \int_V E\{K_d(\underline{X})\} d\underline{X} = E\{K_d(\underline{X})\} = G_3(d) \quad (2.129)$$

$$\text{var}[G_V(d)] = (1/V^2) \int_V \int_V C_d(\underline{X} - \underline{X}') d\underline{X} d\underline{X}' \quad (2.130)$$

Si, como es usual en mecánica de suelos, la distribución granulométrica se refiere al peso o al volumen de los sólidos, la distribución determinada en un volumen V se puede escribir :

$$F_V(d) = [G_V(d) - n_V] / (1 - n_V) \quad (2.131)$$

Recurriendo nuevamente a una aproximación de primer orden y llamando :

$$x_1 = G_V(d) - n_V \quad (2.132)$$

$$x_2 = 1 - n_V \quad (2.133)$$

se tiene :

$$E\{F_V(d)\} = E\{x_1\} / E\{x_2\} + (1/2) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial^2 F_V(d)}{\partial x_i \partial x_j} \right] \text{cov}[x_i, x_j] \quad (2.134)$$

es decir :

$$E\{F_V(d)\} = [G_3(d) - n] / (1-n) + \{[G_3(d) - n] / (1-n)\}^3 \text{var}[1-n_V] - [1 / (1-n)^2] \text{cov}[G_V(d) - n_V, 1-n_V] \quad (2.135)$$

$$E\{F_V(d)\} = F_{3V}(d) - \{[1 - G_3(d)] / (1-n)\}^3 \text{var}[n_V] + [1 / (1-n)^2] \text{cov}[G_V(d), n_V] \quad (2.136)$$

En forma similar a lo comentado para la relación de vacíos, las esperanzas de los porcentajes granulométricos medidos en muestras finitas presentan un sesgo respecto a los porcentajes reales.

Por otra parte :

$$\text{var}[F_V(d)] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial F_V(d)}{\partial x_i} \right]_m \left[\frac{\partial F_V(d)}{\partial x_j} \right]_m \text{cov}[x_i, x_j] \quad (2.137)$$

es decir :

$$\begin{aligned} \text{var}[F_V(d)] &= [1/(1-n)^2] \text{var}[G_V(d)-n_V] \\ &+ \{[G_3(d)-n]/(1-n)^2\} \text{var}[1-n_V] \\ &- 2\{[G_3(d)-n]/(1-n)^3\} \text{cov}[G_V(d)-n_V, 1-n_V] \quad (2.138.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}[F_V(d)] &= [1/(1-n)^2] \text{var}[G_V(d)] + \{[1-G_3(d)]/(1-n)^2\}^2 \text{var}[n_V] \\ &- 2\{[1-G_3(d)]/(1-n)^3\} \text{cov}[G_V(d), n_V] \quad (2.138.b) \end{aligned}$$

- Cortes planos

En el caso de un plano que interseca un medio granular, las variaciones aleatorias de la porosidad y de la distribución granulométrica aparentes pueden también expresarse en términos de funciones características $K(\underline{X})$ y $K_d(\underline{X})$, definidas en la forma indicada arriba pero ahora en términos de los diámetros aparentes.

Llamando n_A la porosidad en un área plana de superficie A (relación entre área de vacíos y área total), se tiene:

$$E\{n_A\} = (1/A) \int_A E\{K(\underline{X})\} d\underline{X} = n \quad (2.139)$$

$$\text{var}[n_A] = (1/A^2) \int_A \int_A C(\underline{X}-\underline{X}') d\underline{X} d\underline{X}' = \sigma_{n_A}^2 \quad (2.140)$$

y para dos áreas con o sin traslape A_1 y A_2 :

$$\text{cov}[n_{A_1}, n_{A_2}] = [1/(A_1 A_2)] \int_{A_1} d\underline{X}_1 \int_{A_2} C(\underline{X}_1 - \underline{X}_2) d\underline{X}_2 \quad (2.141)$$

Para la distribución granulométrica de diámetros aparentes $G(d)$ medida en una área A , se tiene:

$$E\{G_A(d)\} = (1/A) \int_A E\{K_d(\underline{X})\} d\underline{X} = E\{K_d(\underline{X})\} = G_2(d) \quad (2.142)$$

$$\text{var}[G_A(d)] = (1/A^2) \iint_A C_d(\underline{X}-\underline{X}') d\underline{X} d\underline{X}' \quad (2.143)$$

- Sondeos

En el caso de un sondeo, la situación es totalmente análoga.

Si se llama n_L la porosidad en una longitud de sondeo L (relación entre la longitud de la intersección con los poros y la longitud total), se tiene:

$$E\{n_L\} = (1/L) \int_L E\{K(\underline{X})\} d\underline{X} = n \quad (2.144)$$

$$\text{var}[n_L] = (1/L^2) \iint_L C(\underline{X}-\underline{X}') d\underline{X} d\underline{X}' = J_{n_L}^2 \quad (2.145)$$

y para dos segmentos con o sin traslape de longitud L_1 y L_2 :

$$\text{cov}[n_{L_1}, n_{L_2}] = [1/(L_1 L_2)] \int_{L_1} d\underline{X}_1 \int_{L_2} C(\underline{X}_1 - \underline{X}_2) d\underline{X}_2 \quad (2.146)$$

Para la distribución granulométrica de diámetros aparentes $G_L(d)$ medida en una longitud L , se tiene:

$$E\{G_L(d)\} = (1/L) \int_L E\{K_d(\underline{X})\} d\underline{X} = E\{K_d(\underline{X})\} = G_1(d) \quad (2.147)$$

$$\text{var}[G_L(d)] = (1/L^2) \iint_L C_d(\underline{X}-\underline{X}') d\underline{X} d\underline{X}' \quad (2.148)$$

b) Otras funciones características

Extendiendo los conceptos definidos en el inciso anterior, es posible introducir otras funciones características útiles para la evaluación de las variaciones aleatorias de otros parámetros estructurales.

- Número de partículas por unidad de volumen, área o longitud

El número de partículas por unidad de volumen introducido en 2.3.3 medido en muestras de volumen V , presenta variaciones aleatorias cuya magnitud depende de la forma y del volumen de la muestra y puede estudiarse introduciendo la función característica siguiente:

$KV(\underline{X}) = 1$ si \underline{X} pertenece a los poros

$KV(\underline{X}) =$ volumen de la partícula en la que se encuentra el punto \underline{X} si \underline{X} pertenece a los sólidos

El número de partículas por unidad de volumen se expresa entonces mediante la integral estocástica :

$$N_V(1) = \int_V [1 - KV(\underline{X})] / KV(\underline{X}) \, d\underline{X} \quad (2.149)$$

En un medio homogéneo, la esperanza de la integral del segundo miembro coincide con el parámetro λ_V definido en 2.3.3.

Un planteamiento similar se aplica al número de partículas por unidad de área o de longitud.

- Superficie específica

La superficie específica, definida en la Ec 2.13 y medida en muestras de volumen V es otro parámetro que presenta variaciones de tipo aleatorio cuya magnitud depende asimismo de la forma y volumen de la muestra y puede ser evaluada a través de la función característica siguiente:

$KS(\underline{X}) = 0$ si \underline{X} pertenece a los poros

$KS(\underline{X}) =$ área superficial de la partícula en la que se encuentra el punto \underline{X} si \underline{X} pertenece a los sólidos

La superficie específica asociada a una muestra determinada se expresa entonces mediante la integral estocástica:

$$S_v = (1/V) \int_V [KS(\underline{X})/KV(\underline{X})] d\underline{X} \quad (2.150)$$

La esperanza de esta cantidad es la superficie específica del medio.

Un planteamiento similar se aplica a las superficies específicas generalizadas definidas en un plano de corte y a lo largo de un sondeo, que se introducen más adelante (2.3.8).

La determinación de la variancia de las integrales de las Ecs 2.149 y 2.150 como función de la forma y volumen de las muestras, es más difícil que en los casos anteriores pero puede llevarse a cabo siguiendo lineamientos totalmente análogos. En el presente trabajo, no se entrará en mayor detalle al respecto.

2.3.8 Superficie específica generalizada

Se definió en el inciso 2.2.2 el concepto de superficie específica aplicado a una muestra de material granular. Este concepto puede generalizarse y relacionarse con las funciones y parámetros definidos en los incisos anteriores.

a) Generalización del concepto de superficie específica a planos y rectas de intersección

En forma análoga al concepto de superficie específica introducido en la Ec. 2.13, se puede definir en un plano de intersección un perímetro específico entendido como :

$$S_2 = \sum p / A \quad (2.151)$$

donde

$\sum p$ Suma de los perímetros aparentes de las partículas

A Area de la intersección

A lo largo de un sondeo, el concepto análogo al anterior es el número específico :

$$S_1 = N/L \quad (2.152)$$

donde

N Número de intersecciones del sondeo con la superficie de los granos

L Longitud del sondeo

Para mayor claridad, se usara de aquí en adelante el símbolo S_3 para la superficie específica tridimensional definida en la Ec 2.13.

b) Relaciones entre superficie, perímetro y número específico y aplicación a medios anisotrópicos

El concepto de superficie específica de una muestra de material granular introducido en la Ec 2.13 puede ser definido en forma mas precisa como se indica a continuación [Matheron, 1967] :

En una muestra de volumen V se llamará $d_A(\omega)$ el área ocupada por las porciones de superficie de los granos (orientadas por ejemplo desde los granos hacia los poros) con vectores unitarios contenidos dentro del ángulo sólido $d\omega$ de dirección media ω . Se puede introducir la densidad:

$$\mathcal{J}(\omega) = d_A(\omega)/d\omega \quad (2.153)$$

La superficie específica (medida en una muestra de volumen V) es entonces la variable aleatoria:

$$S_V = (1/V) \int_{\Omega} \mathcal{J}(\omega) d\omega \quad (2.154)$$

donde la integral se aplica a una esfera Ω de radio unitario.

La definición generalizada de la superficie específica del medio es entonces:

$$S_3 = E \{S_V\} \quad (2.155)$$

La superficie específica así definida puede relacionarse con la función característica $K(\underline{X})$ definida en 2.3.7, a partir de las consideraciones siguientes:

- Significado geométrico de la función de autocorrelación de la función característica $K(\underline{X})$

Si $\underline{\delta}$ es un vector de traslación de dirección α , el producto $K(\underline{X})K(\underline{X} + \underline{\delta})$ puede interpretarse como una nueva función característica que asocia el valor cero a la unión de las partículas sólidas con ellas mismas desplazadas de $\underline{\delta}$ y el valor uno al resto del volumen de la muestra. Su valor esperado $R(\underline{\delta})$ es la probabilidad de que \underline{X} y $\underline{X} + \underline{\delta}$ se encuentren ambos fuera de los granos. Si \mathcal{G} es el conjunto de los granos:

$$R(\underline{\delta}) = (1/V) E\{\text{vol}(\mathcal{G} \cup \mathcal{G}_{\underline{\delta}})\} \quad (2.156)$$

donde

$\mathcal{G}_{\underline{\delta}}$ Conjunto de los granos desplazados de $\underline{\delta}$.

Se observa que $R(\underline{\delta})$ puede interpretarse como la porosidad de

un medio poroso con sólidos formados por el conjunto $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_{\underline{\delta}}$. De acuerdo con el principio de Delesse (2.3.2), es por tanto invariante si se define dentro de un medio homogéneo en el espacio, en un plano o a lo largo de una recta.

Si $\underline{\delta}$ es suficientemente pequeño, $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_{\underline{\delta}}} - \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_0}$ tiene como volumen la mitad del volumen barrido por el vector $\underline{\delta}$ cuando su origen recorre la superficie entre granos y poros (Fig 2.19).

$$\text{vol}(\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_{\underline{\delta}}} - \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_0}) = |\underline{\delta}|/2 \int_{\Omega} \mathcal{J}(\omega) |\cos \theta| d\omega \quad (2.157)$$

donde

θ Angulo entre la normal a la superficie de separación y el vector $\underline{\delta}$.

- Relación entre función característica y superficie específica

Se tiene, tomando las esperanzas en la ecuación anterior:

$$[R(0) - R(\underline{\delta})]/|\underline{\delta}| = [1/(2V)] \int_{\Omega} E \{ \mathcal{J}(\omega) \} |\cos \theta| d\omega \quad (2.158)$$

y, en el límite, cuando $|\underline{\delta}| \rightarrow 0$:

$$-R'_{\alpha}(0) = [1/(2V)] \int_{\Omega} E \{ \mathcal{J}(\omega) \} |\cos \theta| d\omega \quad (2.159)$$

Integrando sobre la esfera de radio unitario:

$$-\int_{\Omega} R'_{\alpha}(0) d\alpha = [1/(2V)] \int_{\Omega} E \{ \mathcal{J}(\omega) \} d\omega \int_{\Omega} |\cos \theta| d\alpha \quad (2.160)$$

$$-\int_{\Omega} R'_{\alpha}(0) d\alpha = (\pi/V) \int_{\Omega} E \{ \mathcal{J}(\omega) \} d\omega \quad (2.161)$$

y por tanto:

$$S_3 = E \{ S_V \} = -(1/\pi) \int_{\Omega} R'_{\alpha}(0) d\alpha \quad (2.162)$$

Se concluye que la superficie específica se deduce

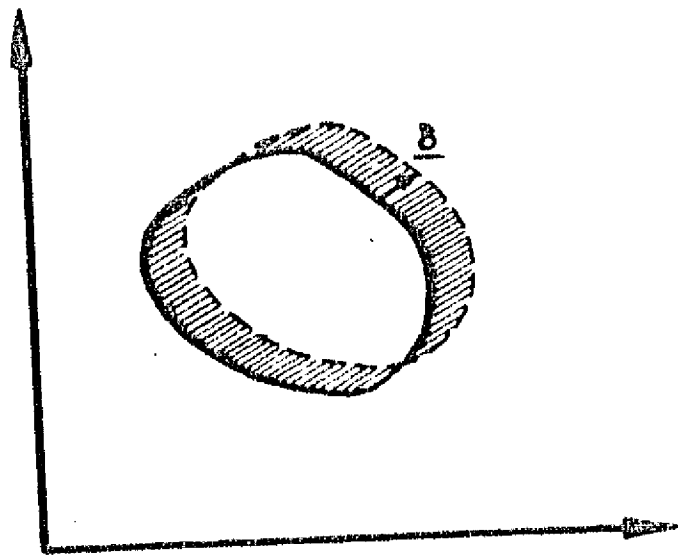


Fig 2.19 Grano sometido a una traslación δ

directamente de las derivadas en $|\underline{\delta}| = 0$ de la función de autocorrelación $R(\underline{\delta})$.

Cuando el medio es isótropo en cuanto a la orientación de los elementos de superficie entre granos y poros, $R(\underline{\delta})$ depende solamente del módulo de $\underline{\delta}$ y no de su dirección. $R'_\alpha(0)$ es entonces una constante independiente de α . Se tiene por tanto simplemente en este caso :

$$S_3 = -4 R'(0) \quad (2.163)$$

La superficie específica, cantidad escalar, no refleja la anisotropía del medio. Para caracterizar la anisotropía puede usarse la cantidad $-R'_\alpha(0)$ que representa la suma de las proyecciones sobre un plano perpendicular a la dirección α de todos los elementos de área de la superficie de separación entre sólidos y vacíos por unidad de volumen. $-R'_\alpha(0)$ puede por tanto interpretarse como una superficie específica "direccional". Se dará más adelante otra interpretación geométrica simple de esta cantidad.

En un plano de intersección, se puede introducir en forma análoga para una muestra de área A una densidad:

$$\mathcal{P}(\omega) = dp(\omega)/d\omega \quad (2.164)$$

donde

$dp(\omega)$ Porción del contorno aparente de las partículas con vectores unitarios contenidos dentro del ángulo $d\omega$ de dirección media ω .

El perímetro específico medido en la muestra de área A es entonces la variable aleatoria:

$$S_A = (1/A) \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(\omega) d\omega \quad (2.165)$$

El perímetro específico del medio en un plano se define entonces como :

$$S_2 = E\{S_A\} \quad (2.166)$$

Consideraciones totalmente análogas a las de las Ecs 2.156 a 2.160 permiten escribir :

$$- R'_\alpha(0) = 1/(2A) \int_0^{2\pi} E\{\mathcal{P}(\omega)\} |\cos\alpha| d\omega \quad (2.167)$$

e integrando :

$$- \int_0^{2\pi} R'_\alpha(0) d\alpha = 1/(2A) \int_0^{2\pi} E\{\mathcal{P}(\omega)\} d\omega \int_0^{2\pi} |\cos\alpha| d\alpha \quad (2.168)$$

$$- \int_0^{2\pi} R'_\alpha(0) d\alpha = (2/A) \int_0^{2\pi} E\{\mathcal{P}(\omega)\} d\omega \quad (2.169)$$

y por tanto:

$$S_2 = E\{S_A\} = -(1/2) \int_0^{2\pi} R'_\alpha(0) d\alpha \quad (2.170)$$

Cuando el medio es isótropo en cuanto a la orientación de los elementos del contorno aparente de los granos, $R'_\alpha(0)$ es una constante independiente de α y se tiene:

$$S_2 = -\pi R'_\alpha(0) \quad (2.171)$$

Combinando 2.163 y 2.171, se obtiene:

$$S_3 = (4/\pi)S_2 \quad (2.172)$$

Finalmente, el número específico medido a lo largo de un tramo de sondeo de longitud L es la variable aleatoria :

$$S_L = N/L \quad (2.173)$$

y el número específico del medio se define entonces como :

$$S_1 = E\{S_L\} = E\{N/L\} \quad (2.174)$$

Si se considera un sondeo recto que interseca el medio y un pequeño cilindro de área transversal ds cuyo eje coincida con este sondeo, la superficie específica medida dentro del

volumen delimitado por el cilindro sera la definida por la Ec 2.154, la cual puede escribirse en este caso:

$$S_V = [1/(L \, ds)] \int_{\Omega} \mathcal{P}(\omega) \, d\omega = [1/(L \, ds)] \sum_{i=1}^N ds / \cos \theta_i \quad (2.175)$$

$$S = (1/L) \sum_{i=1}^N (1/\cos \theta_i) \quad (2.176)$$

donde

N Número de intersecciones del eje con la superficie de los granos

L Longitud del tubo

θ Angulo de inclinación de la normal al elemento de superficie intersecado respecto al eje del tubo

La superficie específica del medio es por tanto de acuerdo con la Ec 2.155 :

$$S_3 = E\{S_V\} = E\{E\{(1/L) \sum_{i=1}^N (1/\cos \theta_i) | N\}\} = E\{(N/L) E\{1/\cos \theta\}\} \quad (2.177)$$

$$S_3 = E\{N/L\} E\{1/\cos \theta\} \quad (2.178)$$

Si el medio es isótropo, es fácil mostrar (Anexo I) que :

$$E\{1/\cos \theta\} = 2 \quad (2.179)$$

y

$$S_3 = 2 E\{N/L\} = 2 S_1 \quad (2.180)$$

En un medio isótropo, la superficie específica es por tanto igual a dos veces el número específico, es decir dos veces el número esperado de intersecciones del sondeo con la frontera entre sólidos y vacíos por unidad de longitud.

En el caso de partículas convexas, el número de intersecciones con dicha frontera es igual a dos veces el número de intersecciones del sondeo con las partículas por unidad de longitud λ_L (Ec 2.72) y se tiene :

$$S_3 = 4 \lambda_L \quad (2.181)$$

Es fácil mostrar, razonando en forma similar en un plano de intersección (Anexo I) que se tiene :

$$S_2 = \pi \lambda_L \quad (2.182)$$

De la Ec 2.171 se desprende también que, para un medio isótropo :

$$\lambda_L = -R'(0) \quad (2.183)$$

La pendiente en el origen de la función de autocorrelación de la función característica es por tanto simplemente igual al número de partículas por unidad de longitud.

En medios anisótropos, λ_L depende de la dirección del sondeo. La Ec 2.159 se escribe:

$$-R'_\alpha(0) = E\{1/(2Lds) \sum_{i=1}^N ds \cos \theta_i / \cos \theta_i\} \quad (2.184)$$

$$-R'_\alpha(0) = E\{N/(2L)\} = \lambda_{L\alpha} \quad (2.185)$$

donde

$\lambda_{L\alpha}$ número de partículas intersecadas por unidad de longitud a lo largo de un sondeo de dirección α .

El número de partículas intersecadas por unidad de longitud aparece por tanto como un parámetro útil para describir la anisotropía del medio puesto que se puede interpretar como una superficie específica "direccional".

Cabe aquí el comentario de que la isotropía a la que se refiere este capítulo es exclusivamente la de la orientación de los elementos de superficie de los granos. Un medio formado por partículas esféricas es por tanto isótropo desde este punto de vista. Sin embargo, se sabe que pueden existir otros tipos de anisotropía en el medio (en particular en la repartición de los puntos de contacto entre partículas sobre la superficie de estas últimas, 2.3.4) que no se reflejan en el parámetro $\lambda_{L\alpha}$ (véase 2.3.9).

c) Caso de medios granulares constituidos por partículas aproximadamente esféricas

Los resultados anteriores toman una forma particularmente sencilla en el caso de los materiales constituidos por partículas aproximadamente esféricas.

La superficie específica tridimensional se puede escribir por definición como :

$$S_3 = \lambda_v E_{3D} \{ \pi D^2 \} = 6(1-n) E_{3D} \{ D^2 \} / E_{3D} \{ D^3 \} \quad (2.186)$$

El perímetro específico en un plano de intersección se escribe, asimismo :

$$S_2 = \lambda_A E_{2A} \{ \pi D \} = 4(1-n) E_{2A} \{ D \} / E_{2A} \{ D^2 \} \quad (2.187)$$

Finalmente, a lo largo de un sondeo, el número específico es :

$$S_1 = 2 \lambda_L = 2(1-n) / E_{1A} \{ D \} \quad (2.188)$$

y se tienen las relaciones :

$$S_3 = (4/\pi) S_2 = 2 S_1 \quad (2.189)$$

2.3.9 Anisotropía geométrica

En los incisos anteriores, se señaló que diferentes características estructurales de un medio granular pueden variar dependiendo de la dirección según la cual se definan.

La anisotropía geométrica puede manifestarse en particular a través de las funciones siguientes:

- Repartición no uniforme de los contactos sobre la superficie de las partículas (no uniformidad de la función $\Gamma(\alpha, \beta)$)
- Inclinación preferencial de los planos tangentes en los contactos interparticulares (no uniformidad de la función $\Gamma(\delta, \beta)$)
- Orientación preferencial de las partículas (no uniformidad de la densidad $f_\theta(u)$ o $f_{\theta'}(u)$)

- Orientación preferencial de las normales a los elementos de la superficie de separación entre granos y vacíos (variación de la superficie específica direccional $\lambda_{L\alpha}$ con la dirección α)

Estos diferentes tipos de anisotropía no son independientes entre sí. En particular, la existencia de los dos últimos implica también en general la de los dos primeros. Sin embargo, los dos primeros pueden existir sin que se presenten los dos últimos (partículas esféricas). Lo anterior muestra que el concepto de anisotropía geométrica puede tener múltiples facetas y debe siempre definirse con precisión. De hecho, es posible concebir otros tipos de anisotropía (orientación preferencial de los poros por ejemplo).

Algunos autores han tratado de describir en forma concisa la anisotropía del medio ajustando a las funciones $\Gamma(\alpha, \beta)$ y $\Gamma(\delta, \beta)$ unos elipsoides cuyos semiejes se adoptan como índices descriptivos del grado de anisotropía [Oda, 1982; Biarez y Windieck, 1969]. Se verá, sin embargo, en 3.3.4 que no existe razón para admitir que las funciones anteriores se ajusten a elipsoides, en particular si la anisotropía se debe a la orientación preferencial de partículas no esféricas.

Para describir la anisotropía ligada a la orientación aparente de las partículas en planos de intersección, Curray [1956] propuso usar el índice:

$$I_v = (100/N) \sqrt{(\sum_i \text{sen } 2\theta'_i)^2 + (\sum_i \text{cos } 2\theta'_i)^2}, \quad (\%) \quad (2.190)$$

donde

N Número de partículas observadas

θ'_i Inclinación aparente de la longitud de la partícula respecto a un plano horizontal ($-\pi/2 < \theta'_i < +\pi/2$)

La magnitud de este índice varía desde cero, para un arreglo sin dirección preferencial, hasta 100% para una orientación sistemática según una dirección determinada.

3. ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DE
LOS MEDIOS GRANULARES

3. ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DE LOS MEDIOS GRANULARES

3.1 CONCEPTOS GENERALES

En el capítulo anterior, se definieron diversos conceptos potencialmente útiles para describir la estructura de los medios granulares. En el presente capítulo, se mostrará cómo estos conceptos pueden efectivamente emplearse para este fin.

La estructura de los medios granulares naturales (arenas, gravas, enrocamientos) o idealizados (esferas o discos planos de acero, aluminio, materiales plásticos, etc.) puede estudiarse recurriendo a una gran variedad de técnicas experimentales de laboratorio o de campo. Estas técnicas y algunos de los principales resultados obtenidos con ellas se revisan brevemente en el inciso 3.2.

Sin embargo, en general, los métodos experimentales resultan laboriosos y por tanto de alcance limitado, lo que ha llevado a desarrollar modelos teóricos que representen la estructura de estos medios y faciliten su estudio. Los principales modelos de este tipo se analizan en el inciso 3.3. En este mismo inciso, se proponen nuevas técnicas de modelación que recurren a la simulación de la estructura con computadoras digitales y se presentan algunos de los resultados que estas técnicas han permitido obtener.

3.2 TECNICAS EXPERIMENTALES PARA EL ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DE LOS SUELOS

3.2.1 Estudios de laboratorio

a) Determinación del tamaño de las partículas y de la distribución granulométrica

La determinación de la distribución granulométrica de materiales granulares es un ensaye común en los laboratorios de mecánica de suelos. Las técnicas empleadas dependen de la definición de tamaño aceptada (2.2.1) y se describen en diversos manuales [SARH, 1970]. El procedimiento más común es el análisis mecánico mediante mallas. Las limitaciones de esta prueba han sido discutidas en diversos trabajos [Fahremud y Stockdale, 1929; Herdan, 1960]. Es significativa la influencia en los resultados del tipo y número de mallas empleadas y del método usado para la realización del ensaye (técnica y tiempo de vibrado, etc.). Diferencias importantes entre el tamaño nominal definido con mallas y las dimensiones reales de las partículas han sido puestas en evidencia por Marsal [1973].

Se ha observado que, en suelos aluviales [Cambefort, 1964] u obtenidos por trituración [Epstein, 1948], la distribución granulométrica en volumen resulta frecuentemente parecida a la distribución logarítmico-normal (o lognormal) [Benjamin y Cornell, 1970]. Este resultado puede explicarse si se acepta que el tamaño final de una partícula se alcanza después de un gran número de colisiones o roturas en las que el tamaño inicial se reduce cada vez en una proporción aleatoria. El tamaño D_N de una partícula es, después de N colisiones:

$$D_N = D_0 W_1 W_2 \dots W_N \quad (3.1)$$

donde

D_0 Diámetro inicial

W Factor de reducción aleatorio en la colisión número i

Tomando el logaritmo de ambos miembros de la Ec 3.1, se tiene:

$$\ln D_N = \ln D_0 + \ln W_1 + \dots + \ln W_N \quad (3.2)$$

Las funciones $\ln W_i$ son variables aleatorias y, con base en el teorema del límite central, puede esperarse que su suma

tenga una distribución normal. Por tanto, $\text{Ln}D_N$ tiene una distribución normal y D_N una distribución lognormal. El razonamiento anterior puede aplicarse a la distribución en número o en volumen. De hecho, si un material tiene una densidad lognormal en volumen, también la tiene en número y viceversa [Herdan, 1960]. Conviene subrayar que lo anterior solamente es aproximado puesto que las variables W_i no son necesariamente independientes entre si, ni tienen la misma distribución de probabilidad, condiciones que, teóricamente, son necesarias para la aplicación del teorema del límite central.

La distribución lognormal [Benjamin, 1970], puede expresarse como :

$$F_{3V}(d) = F_U [(\text{Ln } d - \text{Ln } \tilde{m}_0) / \sigma_{\text{Ln}D}] \quad (3.3)$$

donde

F_U Distribución normal estandarizada (media 0, variancia 1)

$$\tilde{m}_0 \text{ Mediana} = E_{3V}\{D\} \exp[-\sigma_{\text{Ln}D}^2/2]$$

$\sigma_{\text{Ln}D}$ Desviación estándar del logaritmo del diámetro = $\text{Ln}(\sqrt{V_{3D}^2 + 1})$

V_{3D} Coeficiente de variación del diámetro

La Ec 3.3 permite ajustar una distribución lognormal a la distribución empírica de un material dado asegurando la coincidencia de los dos primeros momentos ($E_{3V}\{D\}$ y $E_{3V}\{D^2\}$), (programa LOGNORMAL).

Para materiales aluviales, Cambefort [1964] ha hecho notar que es posible dividir una mezcla de varios materiales granulares en sus elementos constitutivos, simplemente representando la granulometría en papel gaussio-logarítmico (Fig 3.1) y buscando las rectas que mejor se ajustan a sus fracciones granulométricas.

Para materiales arenosos del Mississippi, Shockley y Garber [1953] mostraron que, dibujando la función $f_{3V}(d)$ en escala doblemente logarítmica, se obtiene un diagrama triangular (Fig 3.2) que puede ser caracterizado en forma única por el modo D_m de la densidad (diámetro correspondiente al máximo valor de $f_{3V}(d)$). En efecto, las pendientes de los lados del triángulo son también funciones de D_m . La calidad de las correlaciones entre D_m y las propiedades mecánicas e hidráulicas del material obtenidas por dichos autores sugiere que, por lo menos para arenas de este tipo, D_m es el diámetro más

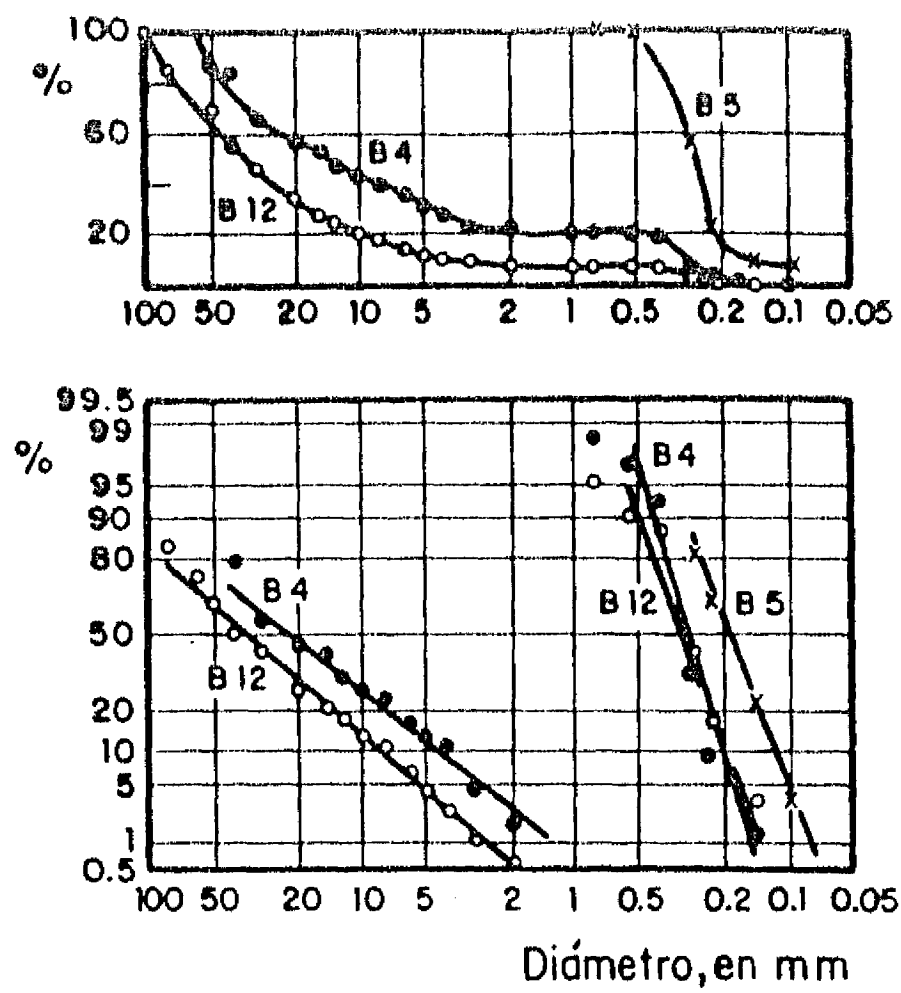


Fig 3.1 Determinación de los elementos constitutivos de una mezcla (aluviones del Rin) por ajuste de distribuciones de tipo lognormal a diferentes fracciones granulométricas (Cambefort, 1964)

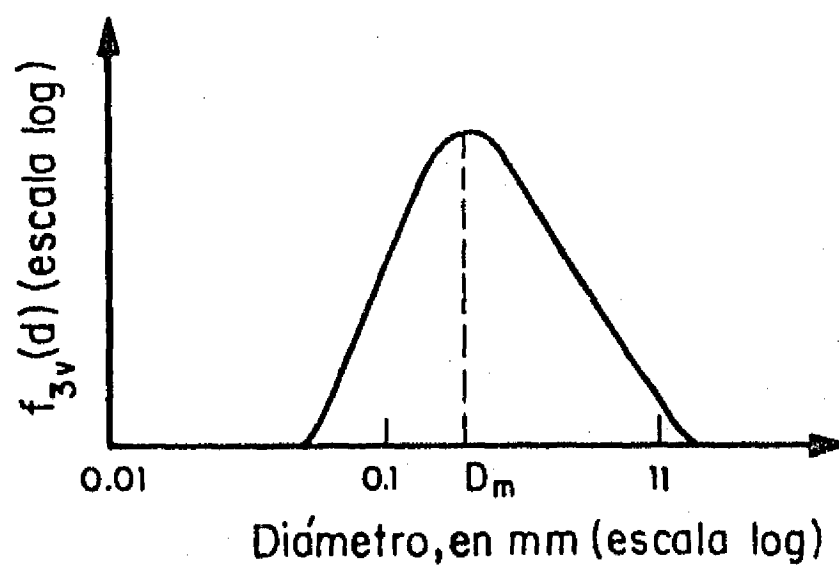


Fig 3.2 Representación de la distribución granulométrica en escala doblemente logarítmica (Shockley y Garber, 1953)

representativo del material de interés.

b) Estudio de la forma de las partículas

La forma de las partículas de suelos granulares es el resultado de la acción de los agentes mecánicos y, en menor grado, de los agentes químicos. Las formas angulosas son típicas de las arenas residuales. Las arenas marinas son también a menudo angulosas. Las formas redondeadas son frecuentes en arenas de río y en algunas formaciones de playa. Las arenas eólicas suelen tener granos finos y redondeados.

Existen pocos estudios cuantitativos relativos a la forma de las partículas.

En la Fig 3.3 se muestran resultados de mediciones del alargamiento (L/B) de las partículas de una arena bien graduada [Mahmood, 1973]. Aproximadamente 50% de las partículas tienen un alargamiento menor de 1.4. Este resultado es típico de los que se obtienen para muchas arenas y arenas limosas.

En una investigación reciente de la influencia de la forma de las partículas sobre el comportamiento de los medios granulares, Patiño y Alberro [1983] propusieron un método para determinar la esfericidad de arenas basado en fotografías y mediciones volumétricas.

Para determinar el coeficiente volumétrico de los agregados para concreto, se ha desarrollado una prueba normalizada [Venuat, 1961]. En la Fig 3.4 se muestra un calibrador que permite obtener rápidamente la cantidad $D_{máx}^3/6$ de la Ec 2.10. Para concretos, se considera que el coeficiente volumétrico de las partículas debe ser por lo menos de 0.15. En mecánica de suelos, no existe el equivalente de esta prueba.

Investigaciones sobre la geometría de las partículas de diferentes suelos han sido realizadas por Marsal [1972]. En la Fig 3.5 se muestran los factores de forma definidos en la Ec 2.9 obtenidos por medición directa. Como referencia, se muestran en esta misma figura las curvas 1, 2 y 3 que corresponden a placas cuadradas, cilindros y elipsoides de revolución, respectivamente. Los materiales con partículas planas quedan entre las curvas 1 y 2. La muestra de partículas con forma de aguja se localiza sobre la curva 2. Con excepción de las muestras de partículas redondeadas, los factores de forma restantes son menores que los de la curva 3.

Resulta atractivo idealizar la forma de las partículas mediante elipsoides. Esta idealización fue usada por ejemplo por Alberro y Patiño en el estudio ya mencionado. Más adelante, se analizarán algunas de las estructuras a las que

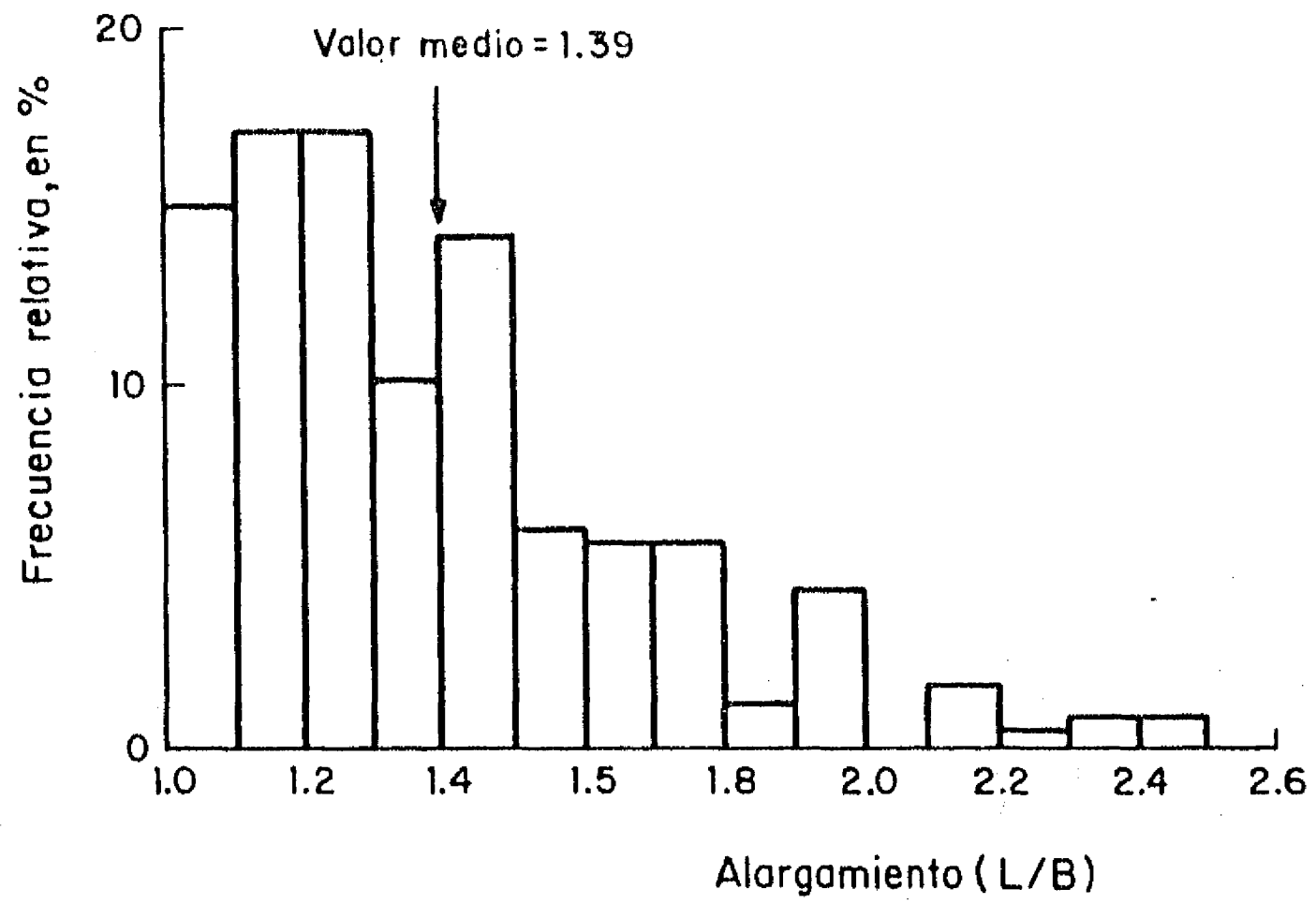


Fig 3.3 Histograma del alargamiento de las partículas de una arena bien graduada (Arena de Monterey N° 0, Mahmood, 1973)

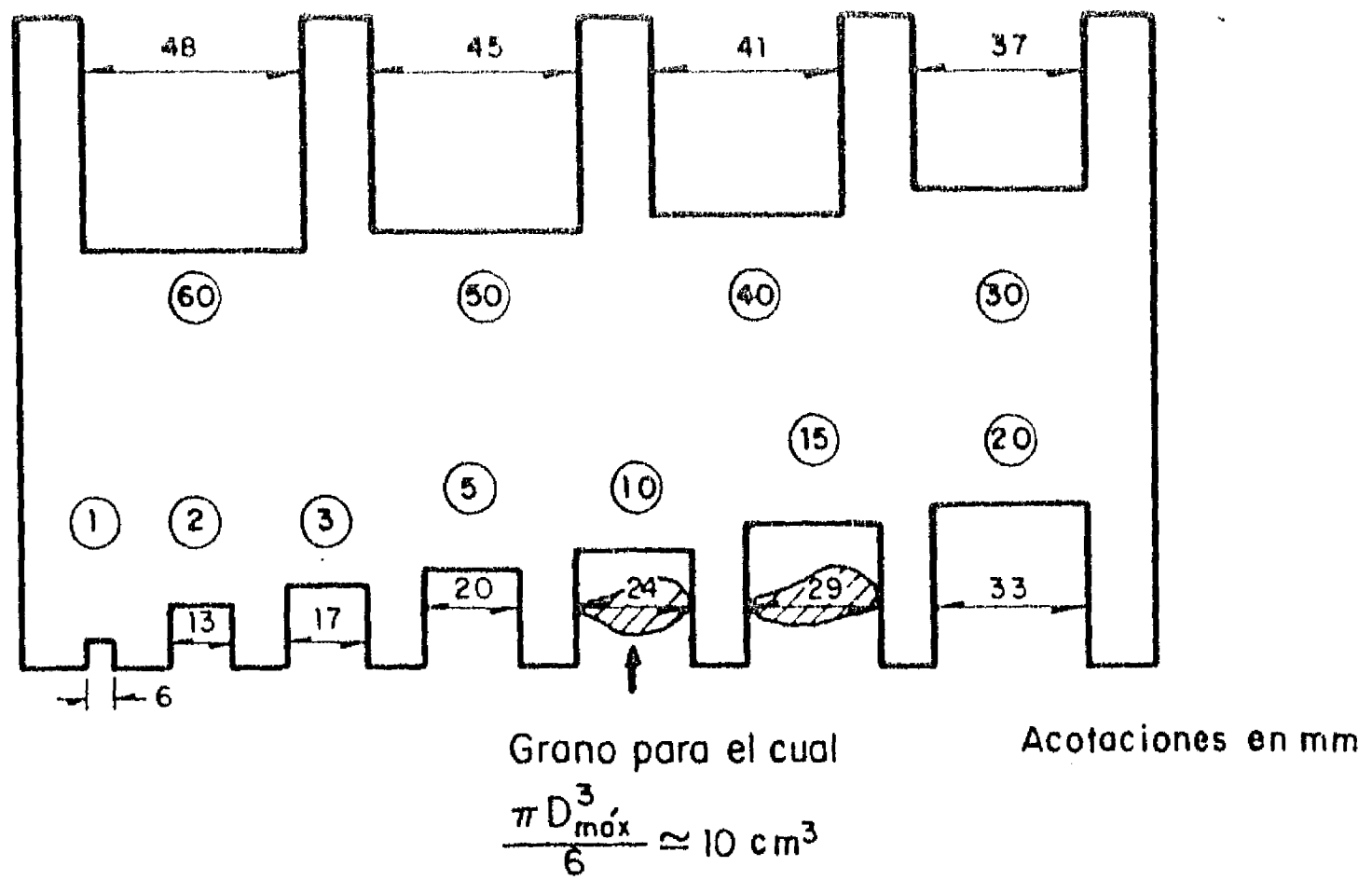


Fig 3.4 Calibrador para el cálculo del coeficiente volumétrico(NFP 18-301, Venuat, 1961)

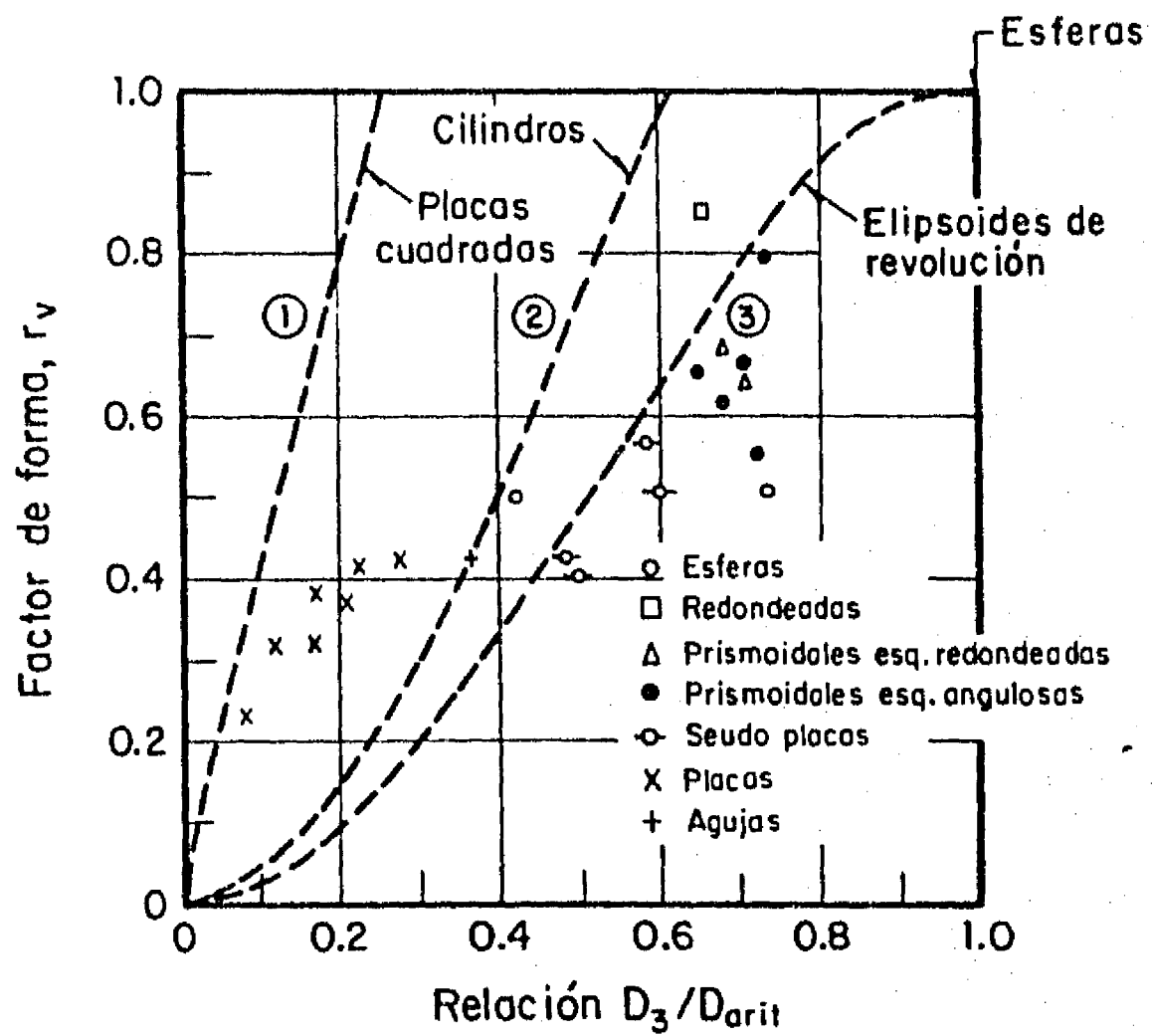


Fig 3.5 Correlación entre los factores de forma y las dimensiones lineales de partículas (Marsal, 1972)

pueden dar lugar partículas que tengan esta forma (3.3.4).

Para determinar la superficie específica de una partícula, la dificultad principal reside en medir el área de su superficie externa. Esta área puede determinarse cubriendo la partícula con una capa de parafina de espesor constante y determinando el peso de la parafina empleada [Marsal, 1963]. En el caso de partículas convexas, el área puede también determinarse a partir de sus proyecciones (sombras) sobre planos recurriendo a la ley de Cauchy [Bodziony, 1983]:

$$A = (1/\pi) \int_{\Omega} a(\alpha, \beta) d\omega \quad (3.4)$$

donde

$a(\alpha, \beta)$ Área de la proyección paralela (sombra) de la partícula sobre un plano ortogonal a la dirección de la proyección definida por los ángulos α y β de la Fig 2.12

Ω y $d\omega$ tienen el mismo significado que en la Ec 2.82

Se puede observar que la Ec 3.4 es la misma que la Ec 2.162 pero aplicada en este caso a una partícula convexa aislada.

En la práctica, la técnica de medición consiste en determinar varias veces el área proyectada para orientaciones aleatorias o sistematicas de la partícula.

Se tiene :

$$A \doteq (4/N) \sum_{i=1}^N a_i(\alpha, \beta) \quad (3.5)$$

donde

N Número de mediciones realizadas

$a_i(\alpha, \beta)$ Área de la proyección en la medición número i

En el caso de materiales con partículas aproximadamente esféricas, la superficie específica de una muestra puede determinarse a partir de la granulometría con la Ec 2.186.

c) Determinación de la porosidad, de la relación de vacíos y de la compacidad relativa

La porosidad o la relación de vacíos se determinan generalmente en el laboratorio mediante simples pesadas y determinaciones volumétricas [SARH, 1970]. En la Tabla 3.1 se presentan intervalos de valores típicos de estas propiedades

TABLA 3.1 Valores típicos de la porosidad y de la relación de vacíos de algunos materiales granulares

	Porosidad (%)		Relación de vacíos	
	$n_{\text{máx}}$	$n_{\text{mín}}$	$e_{\text{máx}}$	$e_{\text{mín}}$
Arena de Ottawa	44	33	0.80	0.50
Arena limpia uniforme	50	29	1.00	0.40
Limo inorgánico	52	29	1.10	0.40
Arena limosa	47	23	0.90	0.30
Arena fina o gruesa	49	17	0.95	0.20
Arena micácea	55	29	1.20	0.40
Arena limosa y grava	46	12	0.85	0.14

para diferentes materiales.

Para evaluar la heterogeneidad de estas propiedades dentro de especímenes de suelos arenosos, se ha recurrido a la congelación de muestras saturadas y a su división en pequeños cubos [Casagrande, 1975].

También es posible estudiar las variaciones de la porosidad dentro de una muestra y su evolución durante un ensayo mecánico midiendo la absorción de un haz de rayos gamma a través del espécimen [Bouvard, 1982]. En forma análoga, Arthur [1969] mostró que, mediante mediciones de absorción de rayos X a través de muestras de materiales granulares (Fig 3.6), es posible detectar heterogeneidades y variaciones periódicas de la porosidad asociadas con ciertos tipos muy marcados de anisotropía (2.3.2.a). Estas mediciones pueden resultar sensibles al efecto de escala geométrico es decir a las variaciones aleatorias locales, como se mostrará más adelante (4.2).

La determinación experimental de la compacidad relativa implica la medición de los valores natural, máximo y mínimo de la relación de vacíos. Desafortunadamente, no se ha podido llegar a una estandarización satisfactoria de los procedimientos de determinación de dichos valores. En particular, se ha observado que el método más adecuado para obtener la relación de vacíos máxima depende del tipo de material. El concepto de compacidad relativa tiene por tanto una utilidad práctica limitada.

d) Estudio del número de coordinación y de la repartición de contactos

La medición del número y de la posición de los contactos interparticulares es delicada y solamente puede realizarse fácilmente en modelos bidimensionales (discos o barras cilíndricas). Sin embargo, el número de puntos de contacto entre las partículas de un medio granular tridimensional se ha podido determinar llenando los poros con ácido [Smith, 1929], cera fundida [Field, 1963], pintura [Marsal, 1973; Athanasiou-Grivas y Harr, 1980] o mortero de cal [Yanagisawa, 1983]. Después de drenar el fluido empleado, los contactos se vuelven visibles.

Los aspectos principales que han retenido la atención de los investigadores han sido los siguientes:

- Relación entre el número medio de contactos por partícula $E\{N_c\}$ y la porosidad o relación de vacíos.

Un gran número de relaciones empíricas de este tipo han sido propuestas por diversos autores. Las principales se presentan

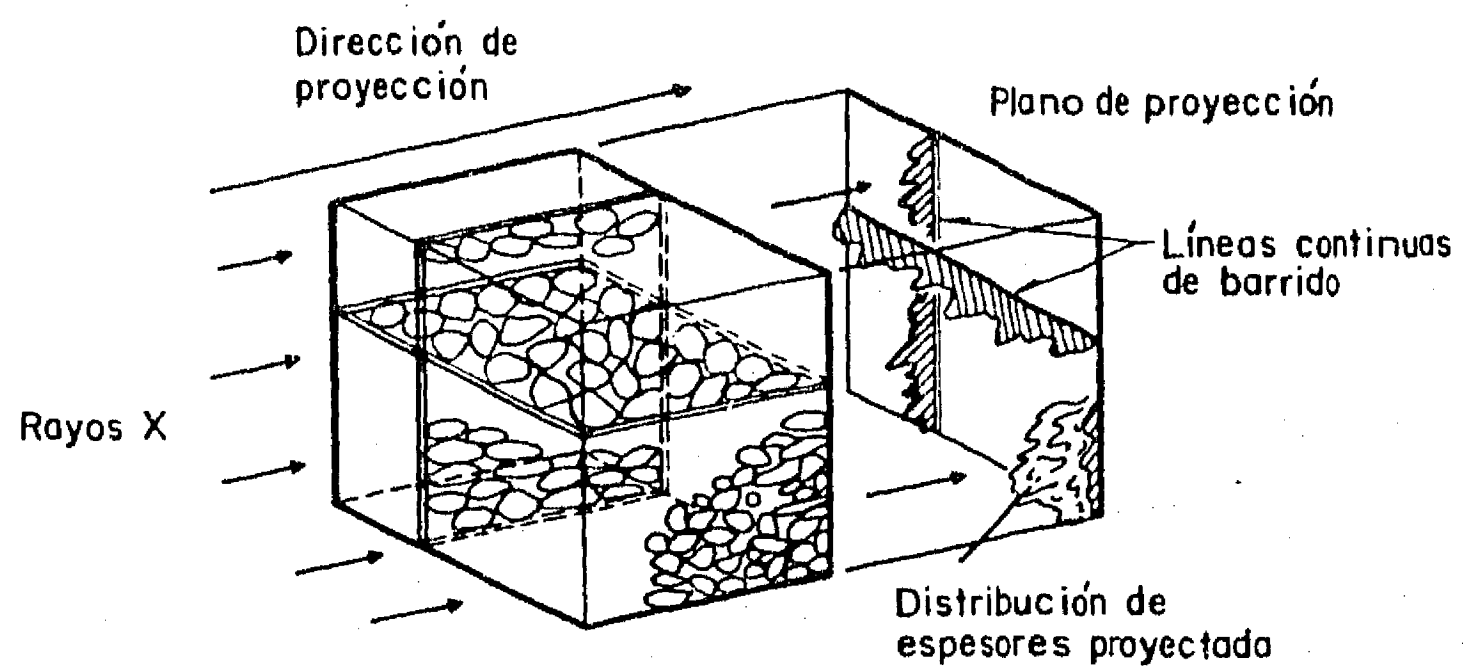


Fig 3.6 Estudio de la estructura de materiales granulares con rayos X (Arthur, 1969)

en la Fig 3.7 . La más aceptada parece ser la de Filep [1936]. Sin embargo, los datos experimentales obtenidos por Marsal [1973] y Oda [1977] no coinciden con ninguna de las relaciones propuestas. La dispersión y las discrepancias puestas en evidencia en la Fig 3.7 pueden quizá parcialmente atribuirse a errores experimentales (la viscosidad del fluido puede por ejemplo hacer aparecer como contactos puntos en los que las partículas están en realidad separadas por una pequeña distancia), pero es probable que no exista una relación única entre $E\{N_c\}$ y la porosidad n y que ésta dependa, entre otros parámetros, del coeficiente de uniformidad del material y de la forma de sus partículas.

- Distribución de probabilidad del número de contactos

En la Fig 3.8 se muestran las distribuciones estadísticas del número de contactos por partícula obtenidas para un material uniforme en estado suelto y denso respectivamente [Marsal, 1973]. Estas distribuciones presentan un número mínimo de contactos del orden de cuatro. Para materiales densos, la forma de la distribución tiende a ser gaussiana.

- Distribución de probabilidad del número de contactos para las diferentes fracciones granulométricas que integran un material granular no uniforme

Experimentos realizados con discos fotoelásticos colocados en un plano horizontal [Mendoza, 1975; Mazari et al, 1980; Alberro, 1982] mostraron que el número esperado de contactos es proporcional al diámetro de cada disco. Además, Alberro verificó que, en este caso, el proceso $N_c(D)$ (2.3.4) puede considerarse poissoniano. Sin embargo, esta conclusión no es directamente aplicable a medios granulares bi- o tridimensionales en presencia de la gravedad puesto que, como se vio en la Fig 3.8, la gravedad hace que exista un número mínimo de contactos. La distribución poissoniana sobrestima por tanto la probabilidad asociada a números bajos de contactos (véase también 3.3.4)

- Repartición de los contactos sobre la superficie de los granos

La repartición de los contactos sobre la superficie de los granos ha sido estudiada esencialmente en medios granulares bidimensionales (modelos de discos o barras cilíndricas) y en láminas delgadas de medios tridimensionales (inciso f).

Biarez [1961] mostró la existencia de una anisotropía marcada en esta repartición, ligada en materiales simplemente depositados al efecto de la gravedad y, en materiales

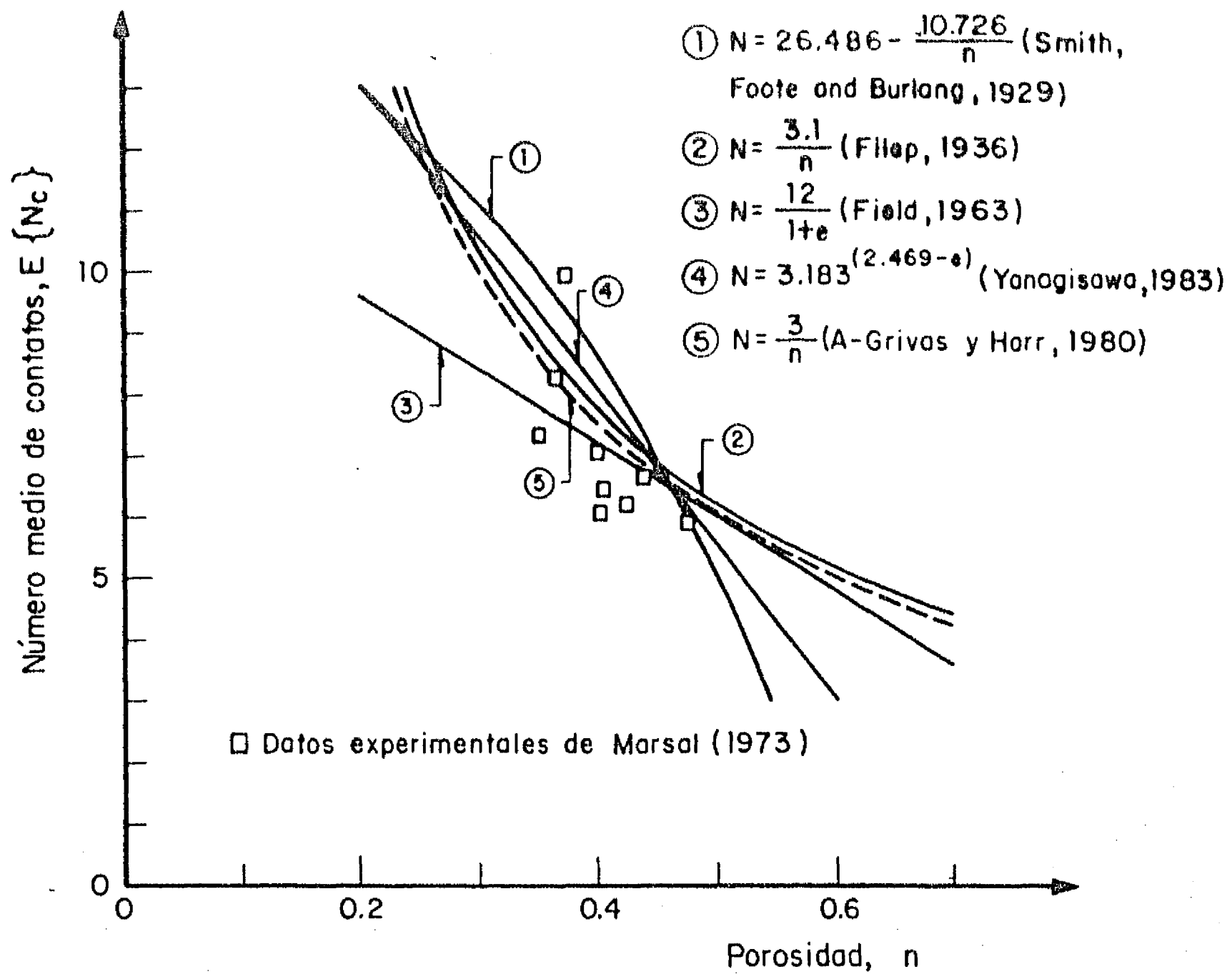


Fig 3.7 Relaciones empíricas entre número medio de contactos por partícula y porosidad

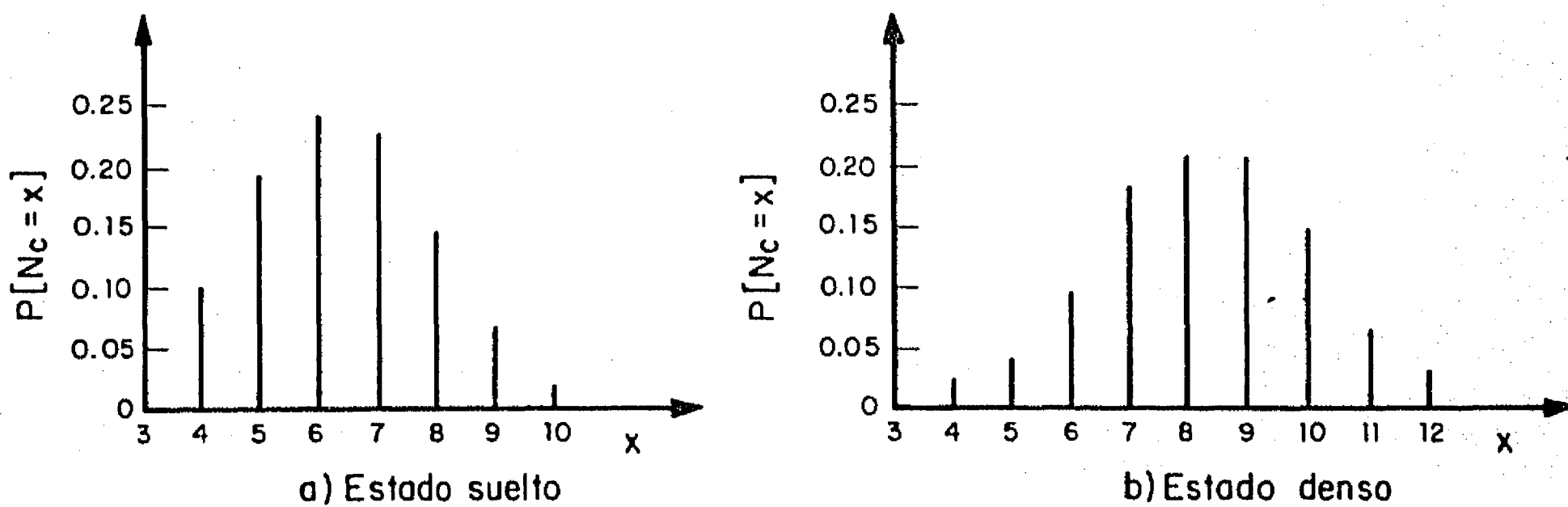
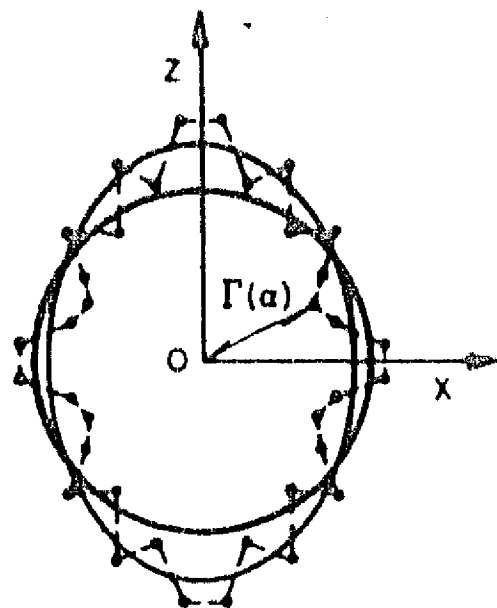


Fig 3.8 Distribución de probabilidad del número de contactos para un material granular uniforme (1.9 a 3.8 cm de diámetro) (Marsal, 1973)

sometidos a pruebas mecánicas, a la historia de deformaciones. En la Fig 3.9 se presenta la función $\Gamma(\alpha)$ obtenida por este autor para un espécimen bidimensional (barras cilíndricas) sometido a una importante deformación vertical (15%). Se observa que la función $\Gamma(\alpha)$ toma una forma elíptica. Los planos tangentes a las partículas en los puntos de contacto tienden a orientarse perpendicularmente a la dirección de la deformación; aumenta el número de planos tangentes horizontales y disminuye el de planos verticales. Resultados semejantes fueron obtenidos por Mazari et al [1980].

Los resultados obtenidos por Matsucka [1974] con un arreglo de discos se presentan en la Fig 3.10. En esta figura, se muestran histogramas de valores del ángulo δ (Fig 2.13) para el estado inicial y después de someter el espécimen a una prueba de corte simple. Se observa que, inicialmente, los contactos tienen una distribución trapezoidal, con pocos contactos en la zona ecuatorial de la partícula. Cuando se alcanza la máxima resistencia, los contactos se concentran cerca de $\delta = 30$ grados. En la resistencia residual, el diagrama tiende a ser triangular con concentración de los contactos en la parte superior e inferior de la partícula.

Se volverá sobre estos resultados en 4.6.



Espécimen sometido a una deformación vertical importante (15%)

Fig 3.9 Anisotropía inducida en la repartición de contactos para un arreglo de discos sometido a una deformación vertical (Biarez,1961)

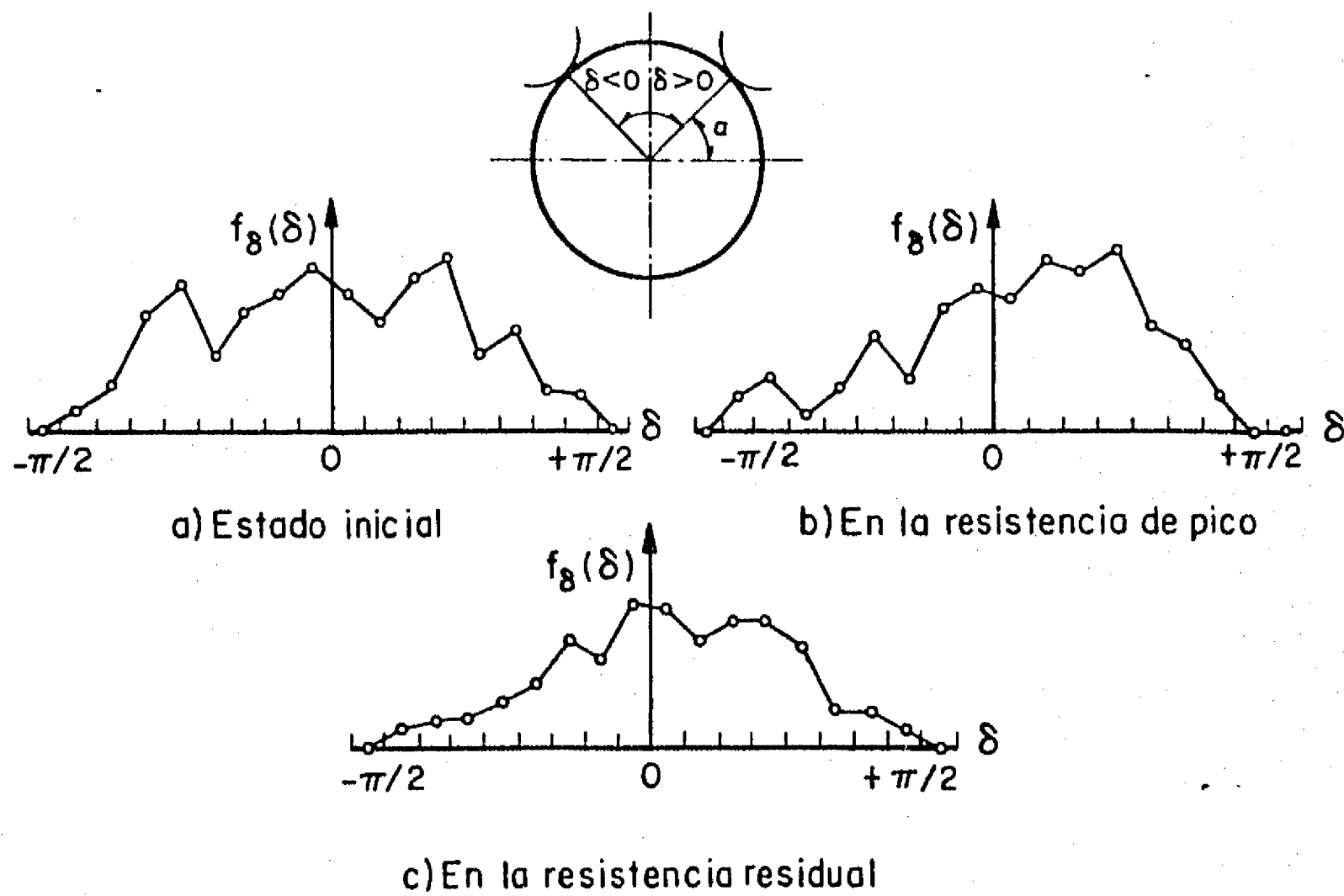


Fig 3.10 Variaciones de la densidad de probabilidad $f_{\delta}(\delta)$ durante un ensaye de corte sobre un arreglo de discos (Matsuoka,1974)

e) Medición de la distribución de tamaños de poros

Existen diversas técnicas para determinar experimentalmente la distribución de tamaños de poros de un espécimen de material granular natural.

- Método de la altura de ascensión capilar (Fig 3.11)

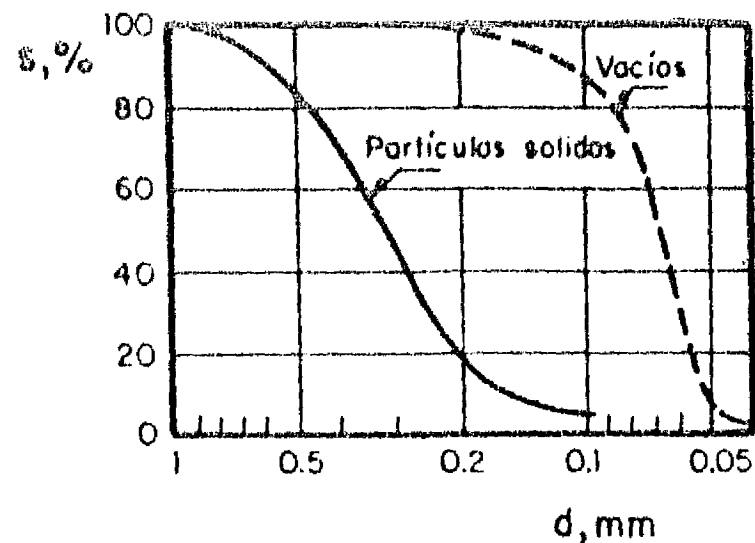
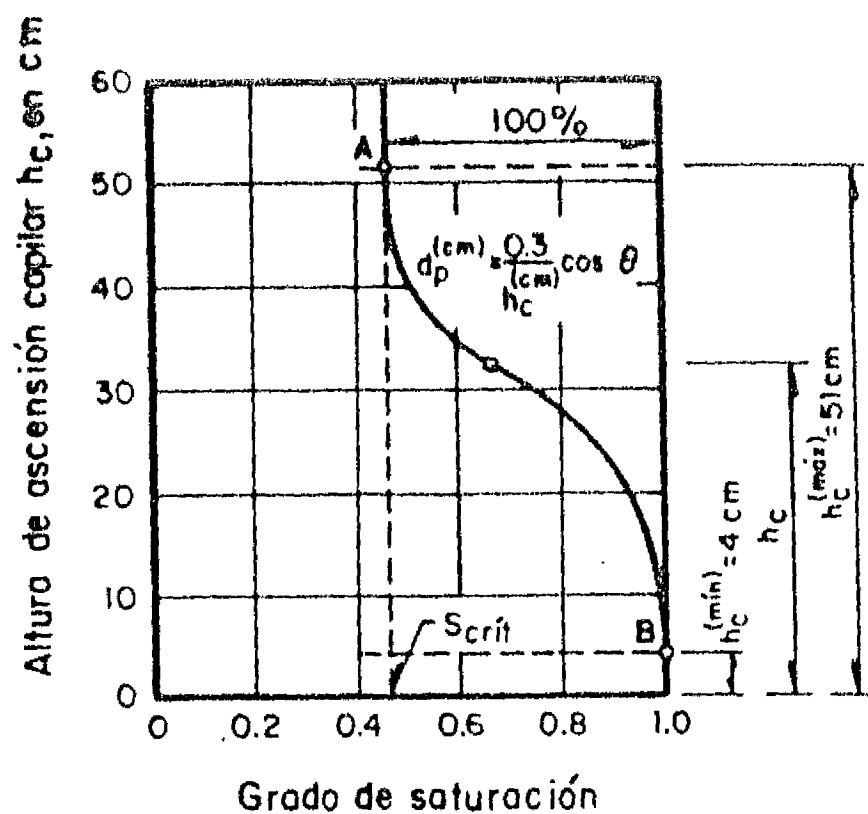
El método consiste en dejar drenar por gravedad una muestra inicialmente saturada. Si se admite que los poros del suelo están constituidos por una serie de tubos verticales de diámetro constante, las fuerzas capilares mantendrán el agua en los tubos a una altura que depende del diámetro de cada poro. Midiendo el contenido de agua a diferentes alturas, es posible obtener la distribución de tamaños de poros. La altura hasta la que el suelo se encuentra totalmente saturado corresponde al diámetro de poro máximo. La altura en la que el contenido de agua se estabiliza da el diámetro menor. Los grados de saturación a alturas intermedias permiten definir los porcentajes asociados a tamaños intermedios. La limitación principal de este método se encuentra en la suposición de que los poros están constituidos por tubos de diámetro constante.

- Materialización de los poros (Fig 3.12)

Kézdi [1976] realizó diversas mediciones de la distribución de poros de materiales granulares calentando el medio y llenando los poros con plástico fundido. Determinó el volumen y las dimensiones de los poros después de que se hubiera solidificado el plástico, eliminando las partículas sólidas. Este procedimiento fue aplicado a suelos gruesos (gravas aluviales y basalto triturado) en estado suelto y compacto respectivamente (Fig 3.12). Se pudo observar que, al compactar el material, los poros de tamaño intermedio son los que más contribuyen a la reducción de volumen.

- Método de la intrusión de mercurio [Nagpall, 1972; García Bengochea, 1981; Kloubek, 1983]

Este método es aplicable a materiales granulares finos. Se seca el espécimen y se sumerge en mercurio. Se aplica presión por incrementos pequeños y se registra la cantidad de mercurio que penetra dentro de la muestra después de cada incremento. A cada presión aplicada corresponde un diámetro de menisco diferente que puede ser estimado a partir de la tensión superficial del mercurio recurriendo a la ley de Washburn [1921]. La curva volumen de mercurio absorbido contra diámetro del menisco define la distribución de poros y se conoce como diagrama de Purcell (Fig 3.13). La limitación principal del método reside en que, al igual que en el método de la altura de ascensión capilar, se admite que los poros pueden considerarse como tubos cilíndricos. Kloubek ha hecho notar



θ ángulo de contacto del agua
 S porcentaje en peso
 S_{crit} grado de saturación crítica
 d diámetro de partícula
 d_p diámetro de poro

Fig 3.11 Determinación de la distribución de poros por el método de las alturas de ascensión capilar (Kézdi, 1976)

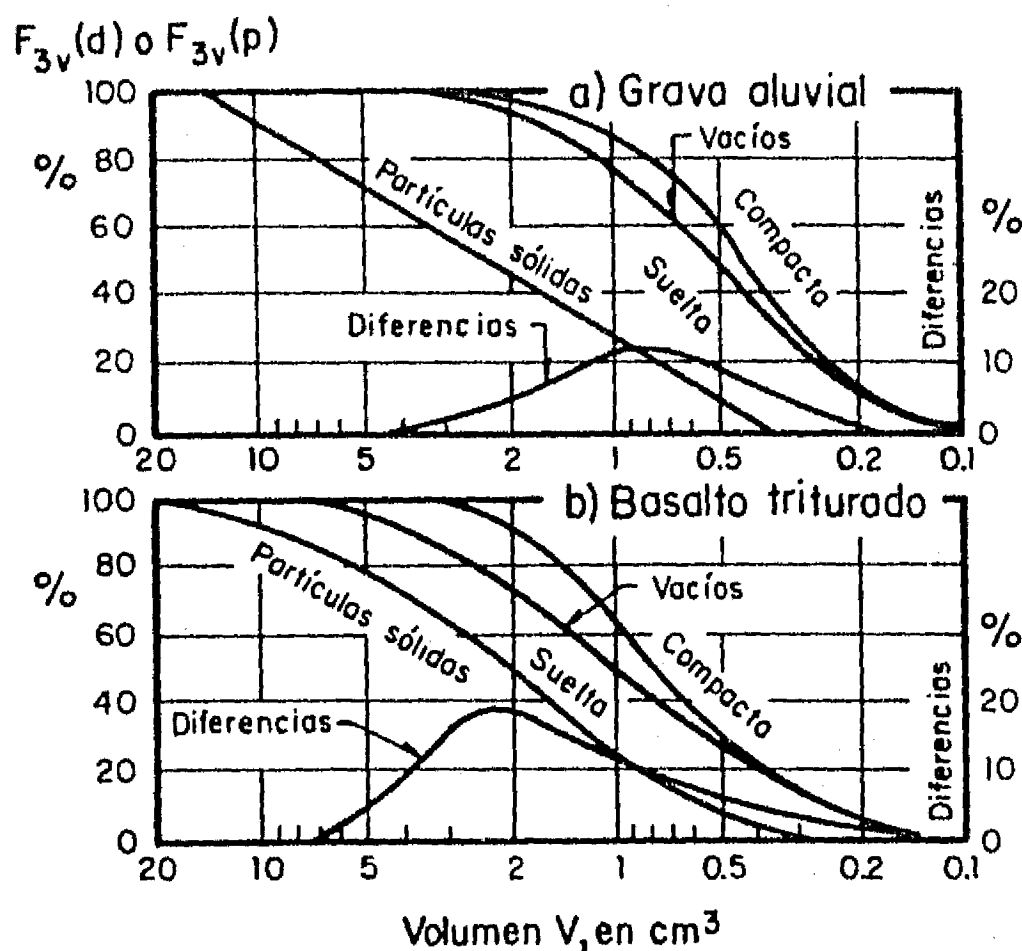
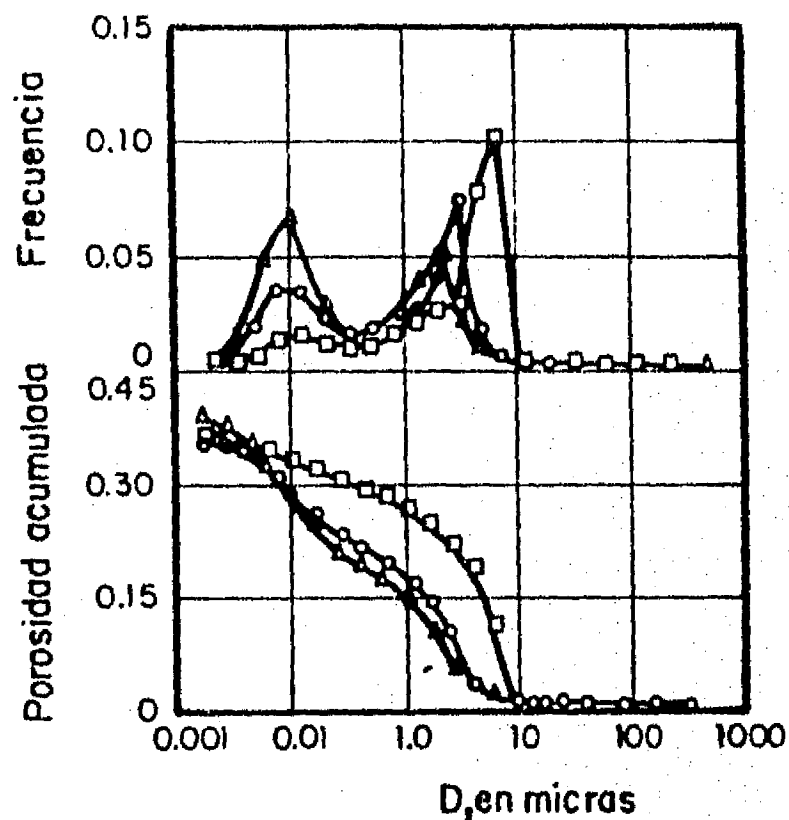


Fig 3.12 Distribuciones de tamaños de poros (Kézdi, 1976)



\square 90%-10%, w=11.7%, Permeabilidad = 3.9×10^{-5} cm/s
 \circ 70%-30%, w=13.5%, Permeabilidad = 7.3×10^{-6} cm/s
 Δ 50%-50%, w=16.6%, Permeabilidad = 3.3×10^{-6} cm/s

Fig 3.13 Distribución de poros de mezclas de limo y kaolín compactadas (García-Bengochea, 1979)

que un aumento del volumen de mercurio que penetra en los poros al incrementarse la presión no corresponde necesariamente al llenado de poros de determinado tamaño, sino que puede estar asociado a la intrusión de mercurio en vacíos solamente accesibles a través de poros angostos de interconexión. La obtención de la distribución de poro por este tipo de métodos es por tanto más una prueba índice que una verdadera medición del tamaño de los poros.

f) Estudio de las características estructurales de los medios granulares en planos de corte (estereología)

Para este tipo de estudio, es generalmente necesario estabilizar la estructura del material en estudio con objeto de poder preparar láminas delgadas o cortes de buena calidad.

Existen varias técnicas de estabilización de la estructura de las arenas [Windish, 1970; Borowicka, 1973; Oda, 1977]. El método de Windish consiste en estabilizar la estructura del material por impregnación con un producto químico conocido como AM-9 (polímeros acrílicos combinados con dos catalizadores antes o durante la estabilización). Se deja secar este producto durante varios días. La estructura así estabilizada puede entonces labrarse fácilmente y se sumerge en una resina epóxica hasta que se sature. Después de que la resina se haya endurecido, es posible obtener láminas delgadas por corte y pulimento.

El análisis de láminas delgadas o cortes planos permite medir algunas de las características estructurales del material.

Las principales técnicas experimentales disponibles para este fin son las siguientes :

. Análisis manual

Mediante mediciones directas en las láminas o fotos de los cortes, con escalímetros, planímetros, etc. , es posible evaluar parámetros estructurales como la relación de vacíos, granulometría y la distribución de tamaños de poros. Este trabajo resulta sin embargo muy laborioso.

. Análisis con la ayuda de una microcomputadora [Auvinet y Hernández, 1984]

Para medir y procesar estadísticamente en forma rápida las dimensiones de partículas y poros aparentes en una fotografía o lámina delgada, se puede hacer uso de una tableta de digitización que permite pasar directamente las dimensiones a una microcomputadora mediante un plumón electrónico que se usa como planímetro. Posteriormente, mediante programas de

computadora, se pueden procesar estadísticamente los datos geométricos almacenados en la memoria de la microcomputadora.

. Análisis automatizado de imágenes [Peralta, 1982]

Esta técnica permite analizar imágenes en forma automática. La imagen se somete a barrido, se digitaliza y se almacena en la memoria de una computadora. Es posible entonces realizar estudios estadísticos semejantes a los mencionados en el inciso anterior. Actualmente, esta técnica es todavía lenta y requiere de imágenes de gran nitidez y contraste.

. Analizador de textura de Serra [1967]

Este aparato permite también analizar láminas delgadas en forma automatizada. No se tiene experiencia en México con este dispositivo.

Con las técnicas anteriores, es posible medir las características estructurales bidimensionales de los medios granulares y, a partir de ellas, inferir en cierta medida las características tridimensionales.

- Porosidad y relación de vacíos

La medición de la porosidad o de la relación de vacíos puede hacerse por medición directa del área aparente de las partículas.

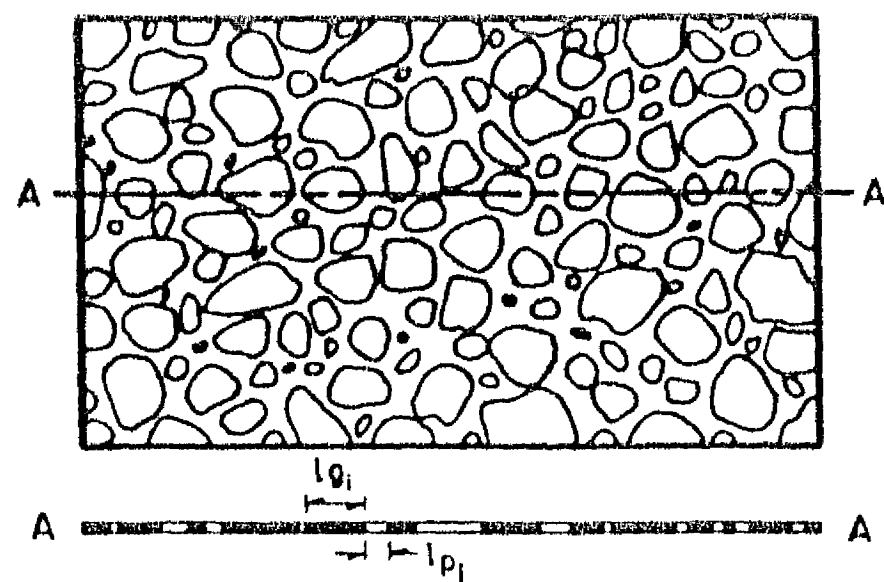
También es posible recurrir a integración lineal, es decir determinar la porosidad unidimensional a lo largo de varias líneas (Fig 3.14), [Windish, 1970].

En forma alterna, se puede proceder por conteo de puntos aleatorios localizados dentro y fuera de los granos (Fig 3.15) [Weibel, 1972]. La proporción de puntos contenidos dentro de los vacíos respecto al número total de puntos constituye una estimación de la porosidad. Este procedimiento se conoce como método de Monte Carlo. El número N de puntos requeridos para obtener la porosidad de una área de interés con determinada precisión, puede estimarse tomando en cuenta que la proporción de puntos $\bar{n}_A = N_V/N$ que se localizan dentro de los poros es una variable aleatoria con distribución binomial y por tanto:

$$E\{\bar{n}_A\} = E\{N_V/N\} = n_A \quad (3.6)$$

$$\text{var}\{\bar{n}_A\} = \text{var}\{N_V/N\} = n_A(1-n_A)/N \quad (3.7)$$

La variancia es máxima para $n_A = 0.5$. Para valores de N

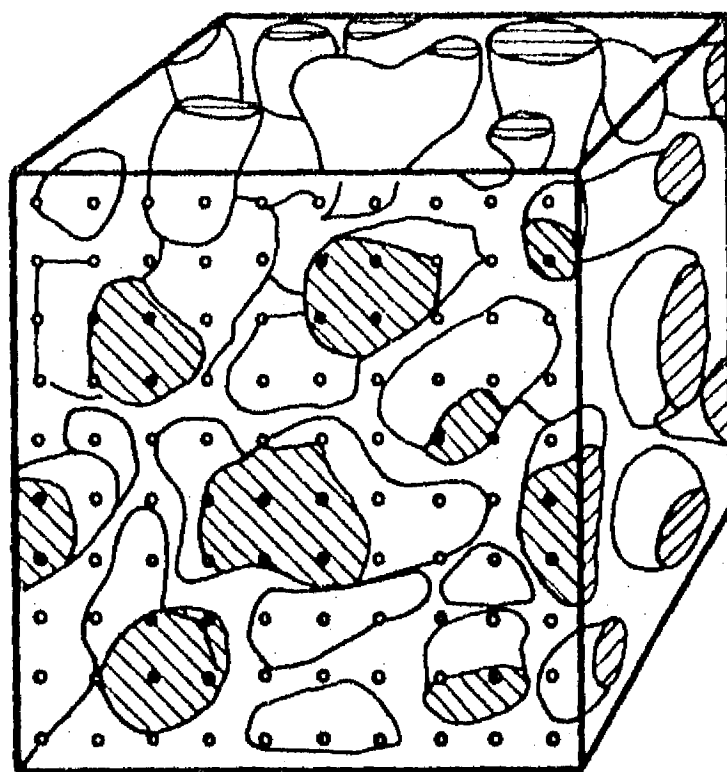


$$e_L = \frac{\sum l_{p_i}}{\sum l_{g_i}} ; n_L = \frac{e_L}{1+e_L}$$

l_{g_i} Longitud de intersección de la línea AA con el grano i

l_{p_i} Longitud de intersección de la línea AA con el poro i

Fig 3.14 Estimación de la porosidad unidimensional a lo largo de la línea en una lámina delgada (Windish, 1970)



$$n_A = \frac{N_v}{N}$$

N Número total de puntos

N_v Número de puntos dentro de los vacíos

Fig 3.15 Estimación de la porosidad bidimensional por conteo de puntos en corte plano (Weibel, 1972)

suficientemente grandes, la distribución binomial tiende hacia la densidad normal y se tiene aproximadamente:

$$P\left[n_A - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{n_A(1-n_A)}{N}} < N_V/N < n + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{n_A(1-n_A)}{N}}\right] = 1 - \alpha \quad (3.8)$$

donde

$z_{\alpha/2}$ Valor tal que $1 - F_U(z_{\alpha/2})$ sea igual a $\alpha/2$, siendo F_U la función de distribución normal estandarizada.

En la Fig 3.16 se ha representado la relación entre la desviación estándar del estimador y el número de puntos N . La convergencia es lenta.

Las mediciones anteriores pueden ser afectadas por el efecto de escala geométrico si las dimensiones de la muestra son insuficientes. Las Ecs 2.140 y 2.145 permiten evaluar la variancia introducida por este efecto en los casos de una estimación basada en áreas y en líneas respectivamente. Para poder usar estas ecuaciones es necesario estimar la función de autocorrelación $R(h)$ de la función característica $K(X)$. Lo anterior puede hacerse en forma aproximada a partir de observaciones realizadas en el mismo corte. En efecto, un estimador insesgado de la función de autocorrelación $R(h)$ es [Auvinet, 1984]:

$$\overline{R(h)} = (1/A) \int_A K(X)K(X+h) dX \quad (3.9)$$

Como ya se hizo notar anteriormente (2.3.8), el producto $K(X)K(X+h)$ puede interpretarse como una nueva función característica que asocia el valor cero a la unión de las partículas con las mismas partículas desplazadas de una cantidad h y el valor uno al resto del área (Fig 2.19). La integral de la Ec 3.9 puede por tanto estimarse por medición de áreas (o en forma alterna, de longitudes de segmentos a lo largo de líneas, o de números de puntos por el método de Monte Carlo) en dos láminas o cortes idénticos superpuestos con traslape de h [Auvinet y Hernández, 1984]. La pendiente en el origen de la función $R(h)$ es, por otra parte, como se mostró en 2.3.8, simplemente igual al número de partículas intersecadas por unidad de longitud, cantidad fácilmente medible en el corte. Resultados numéricos obtenidos sobre este punto con el modelo del inciso 3.3.4 se presentan en 4.2.

- Distribuciones granulométricas

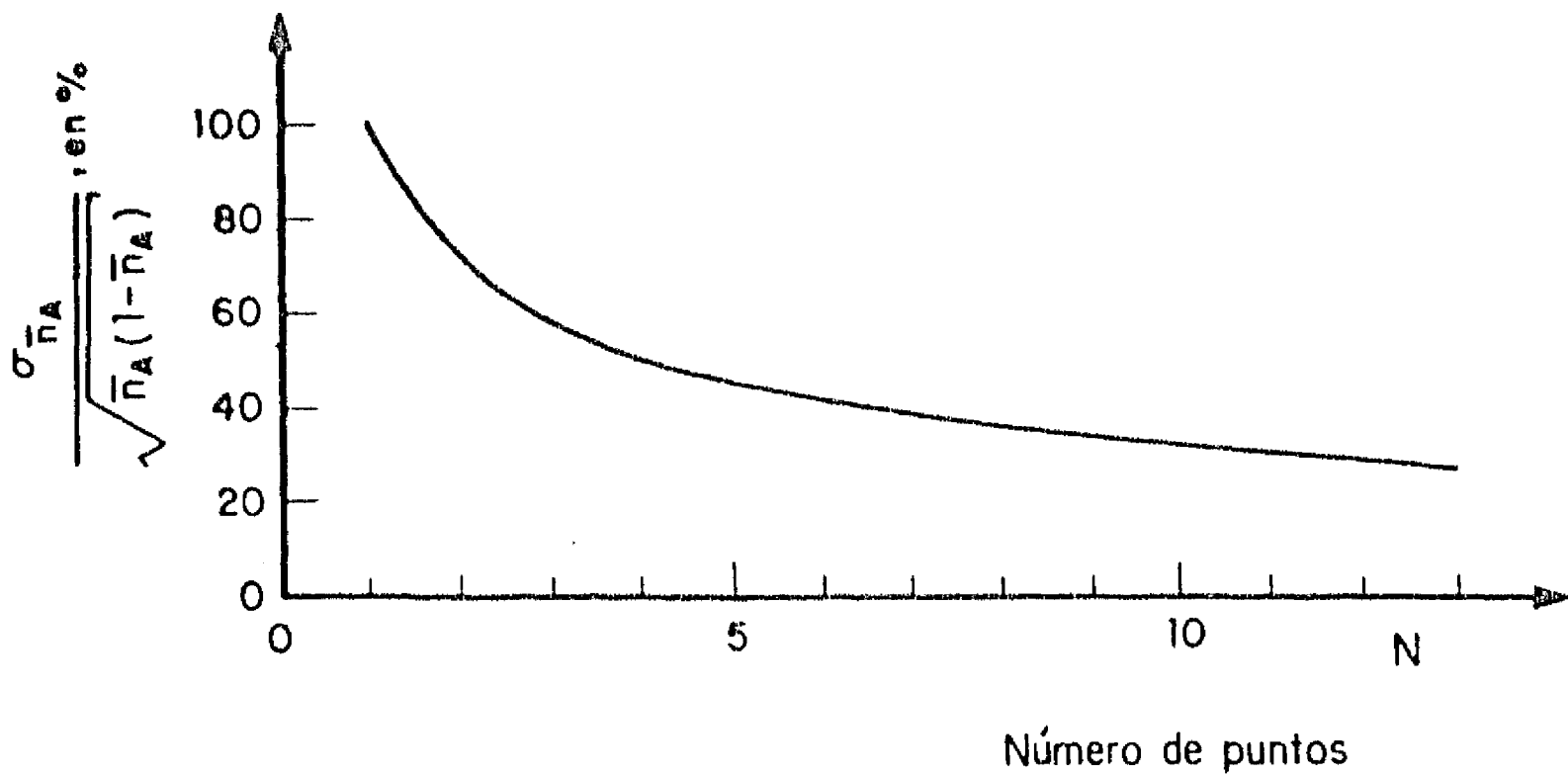


Fig 3.16 Incertidumbre en la determinación de la porosidad por el método del conteo de puntos aleatorios

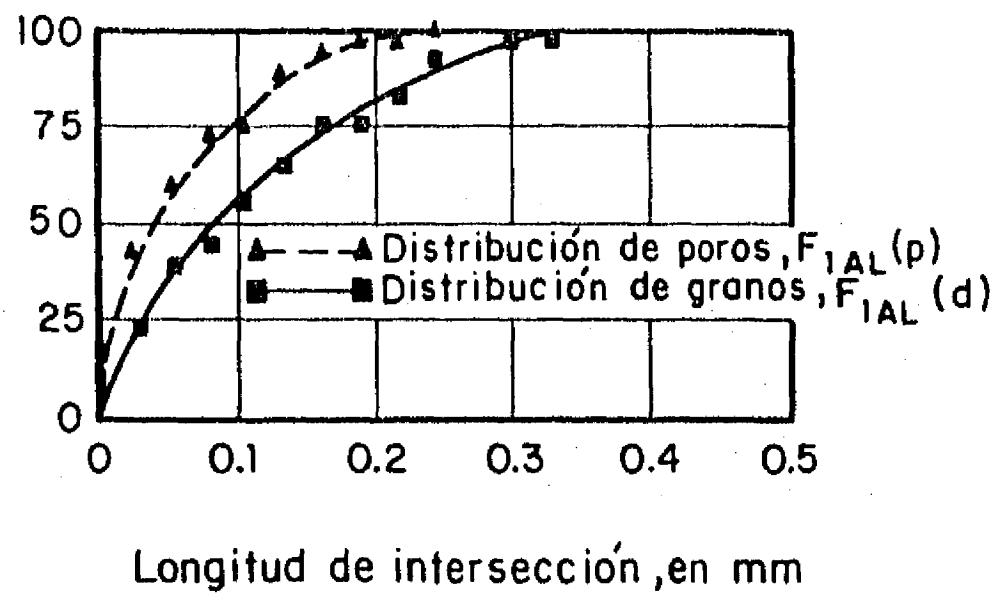


Fig 3.17 Distribuciones de tamaños de granos y de poros unidimensionales determinadas en una lámina delgada (Windish, 1970)

En cortes, las distribuciones granulométricas accesibles a la medición son las distribuciones aparentes bidimensionales $F_{2AS}(d)$ (en área) y $F_{2A}(d)$ (en número) o unidimensionales $F_{1AL}(d)$ (en longitud) (Fig 3.17) y $F_{1A}(d)$ (en número). Se vio en el inciso 2.3.1 cómo puede pasarse teóricamente de estas funciones a las distribuciones tridimensionales en el caso de partículas aproximadamente esféricas. La aplicación de este método teórico presenta en la práctica serias dificultades. De acuerdo con las Ecs 2.35 y 2.38, es en efecto necesario medir la distribución aparente $F_{2AS}(d)$ con exactitud para los diámetros mas pequeños, que son precisamente los de mas difícil medición. Esta situación ha llevado a desarrollar un nuevo método de estimación de la granulometría tridimensional a partir de observaciones en un plano de corte [Auvinet, 1982]. Este método recurre a la técnica de estimación bayesiana y permite estimar las funciones granulométricas $G(d)$ definidas en el inciso 2.3.2, a partir de los diámetros aparentes. Si se llaman D_{2i} los diámetros aparentes de las partículas medidos en el corte, es posible mostrar (Anexo I) que :

$$G_3(d) \approx 1 - (1/A) \sum_{i=1}^N (\pi D_{2i}^2 / 4) [1 - \cos^{-1}(D_{2i}/d) / \cos^{-1}(D_{2i}/D_{\text{máx}})] \quad (3.10)$$

donde

A Area del corte

N Número de diámetros aparentes medidos

$D_{\text{máx}}$ Diámetro aparente máximo

Este procedimiento (programa ESTIMACION) da estimaciones precisas para diámetros grandes pero su resolución disminuye para diámetros pequeños debido a la dificultad de medir los diámetros aparentes mas pequeños con precisión.

- Repartición de contactos sobre la superficie de los granos

Oda [1972] y Mulilis [1977] realizaron mediciones de la orientación de los planos tangentes en los contactos interparticulares a partir de laminas delgadas, con la ayuda de un microscopio provisto de un sistema universal que permite observar la placa desde diferentes ángulos. En la Fig 3.18 se presentan algunos resultados obtenidos por Oda para cuatro arenas. Se ha representado la función $\Gamma(\delta)$ y se puede comparar con el valor correspondiente a una repartición uniforme de los contactos $(1/(4\pi))$: 2.3.4). Los planos

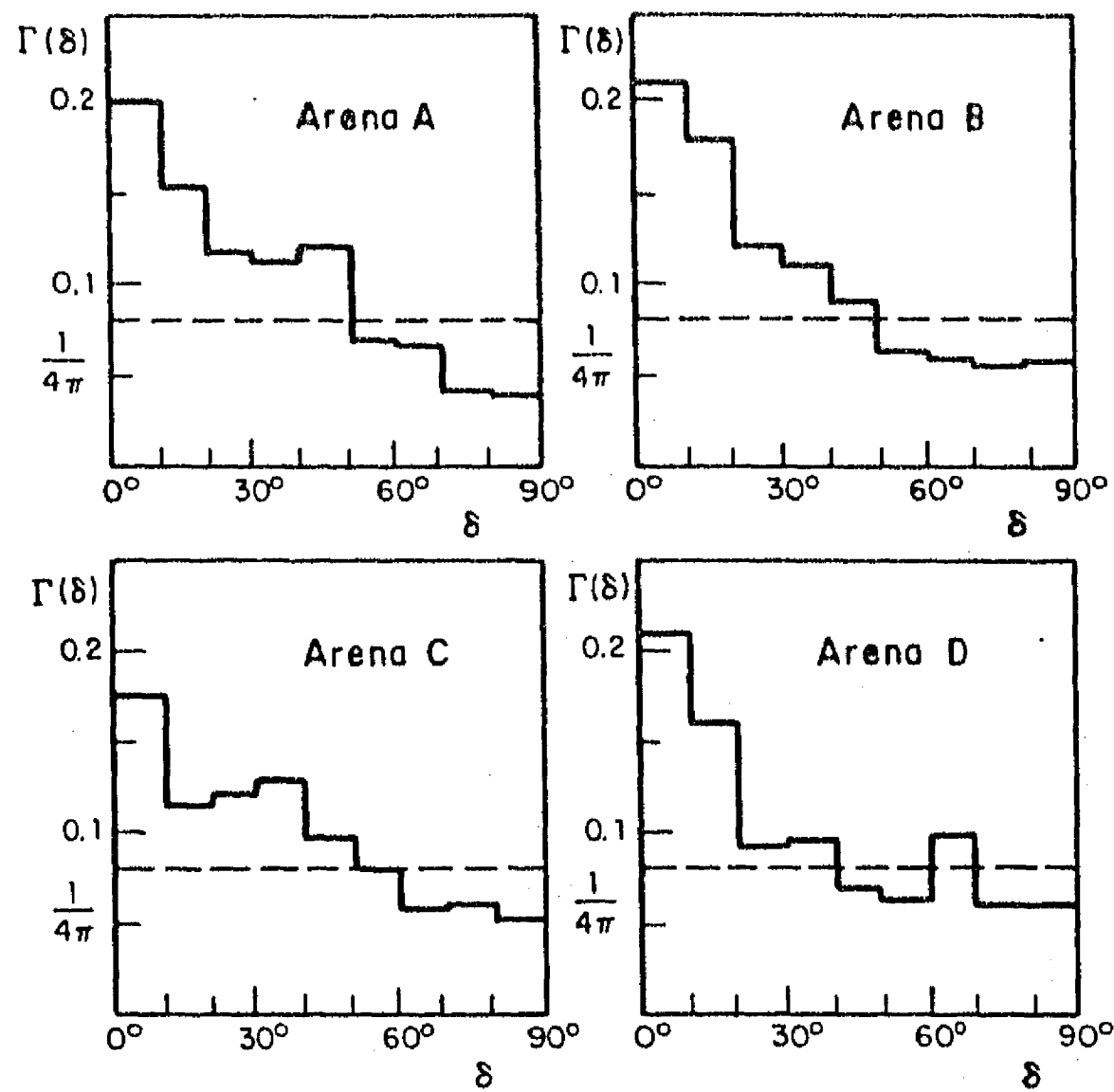


Fig 3.18 Distribuciones del ángulo de inclinación de los planos tangentes en contactos interparticulares para 4 arenas (Oda, 1972)

tangentes tienden a ser más horizontales que lo que preve una distribución uniforme del ángulo δ . Las arenas presentan por tanto una clara anisotropía geométrica inherente.

- Distribución espacial de partículas

En cortes, es posible obtener por simple conteo el número de partículas por unidad de área λ_A y de longitud λ_L .

En general, solamente se puede inferir en forma aproximada el valor de λ_V (número de partículas por unidad de volumen) a partir de los números anteriores. Para ello, puede procederse en diferentes formas.

Si el material es prácticamente uniforme, las relaciones 2.68 y 2.75 proporcionan una estimación aproximada de λ_V . Weibel y Gómez [1964] han propuesto factores correctivos para este tipo de estimación en el caso de materiales con partículas no esféricas y no estrictamente uniformes.

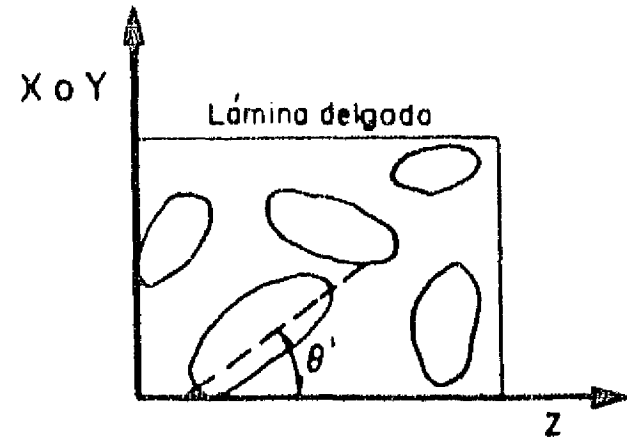
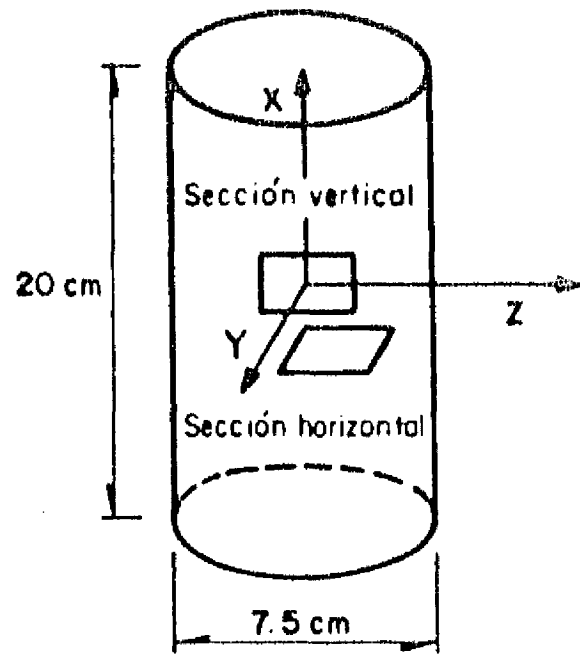
Si el material no es uniforme pero tiene partículas esféricas, puede recurrirse a la Ec 2.59, estimando E_{3D} con la Ec 2.38. Sin embargo, este procedimiento tiene las limitaciones prácticas ya señaladas para la estimación de la granulometría.

- Distribuciones de tamaños de poros

Las distribuciones de tamaños de poros (2.3.6) más fácilmente medibles son las de tamaños aparentes a lo largo de una línea $F_{1AL}(p)$ (en longitud, Fig 3.17) o $F_{1A}(p)$ (en número). Las distribuciones bidimensionales $F_{2As}(p)$ (en área) o $f_{2A}(p)$ (en número) pueden también determinarse, pero con cierta dificultad, recurriendo a un algoritmo como los descritos más adelante (3.3.4.a). No es posible inferir las distribuciones de poro tridimensionales $F_{3V}(p)$ (en volumen) o $F_{3P}(p)$ (en número) a partir de estas funciones.

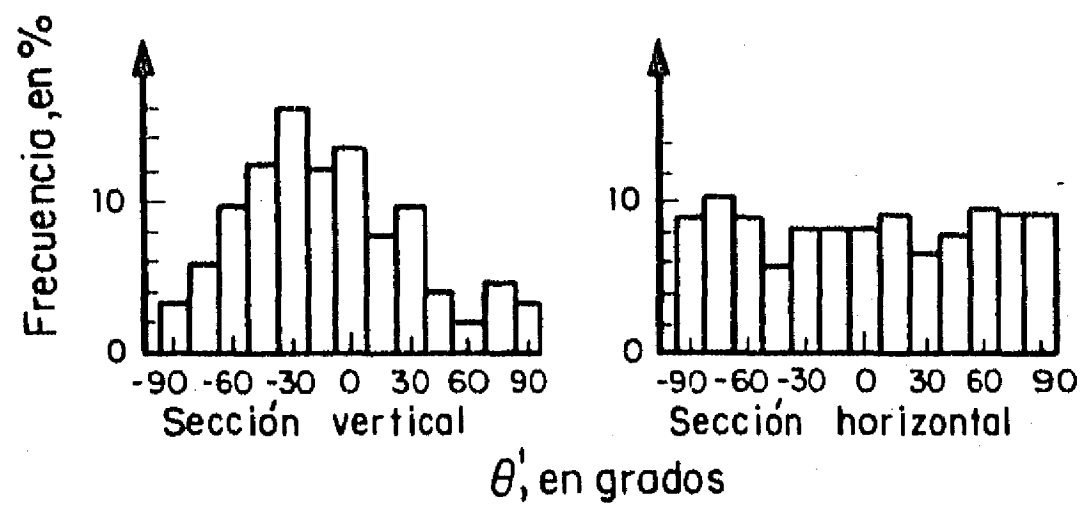
- Orientación de partículas

Oda y Koishikawa [1977] realizaron estudios sobre láminas delgadas de arenas naturales estabilizadas con partículas de forma irregular. Determinaron la distribución frecuencial del ángulo θ' definido en 2.3.5 y correspondiente a la inclinación de la dirección de la longitud aparente de la partícula. Mostraron que esta distribución es aproximadamente uniforme en láminas cortadas horizontalmente pero que presenta un máximo pronunciado para $\theta' = 0$ (horizontal) para las láminas cortadas verticalmente (Fig 3.19). Lo anterior muestra que las partículas tienden a depositarse de forma tal que su plano de



a) Preparación de dos láminas delgadas

b) Orientación de la longitud aparente de las partículas



c) Distribución frecuencial típica del ángulo θ' para arenas aluviales

Fig 3.19 Estudio de la orientación de las partículas de un medio granular (Oda, 1977)

máxima estabilidad (longitud-ancho) sea horizontal. Los autores pudieron verificar que el grado de orientación preferencial crece con la relación longitud/espesor y se presenta tanto para materiales depositados en el aire como en el agua.

Resultados análogos obtenidos por Mahmood [1973] se presentan en la Fig 3.20 y ponen en evidencia la importancia del método de preparación del espécimen sobre la orientación de las partículas. En este caso, los histogramas se dibujaron en forma polar. La muestra suelta presenta una fuerte orientación mientras que la muestra compacta presenta un arreglo más aleatorio.

- Superficie específica

Es posible estimar la superficie específica de las muestras a partir del perímetro específico que se define en un plano de corte recurriendo a la Ec 2.72 si el medio es isótropo.

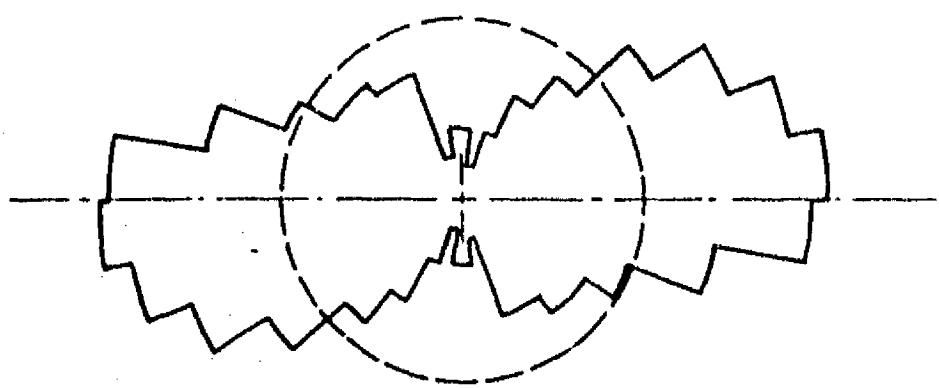
Para evaluar la anisotropía existente en la orientación de la superficie de los granos, basta con medir el parámetro λ_L (número de partículas por unidad de longitud) según diferentes direcciones en el plano de corte (Ec 2.142)

3.2.2 Estudios de campo

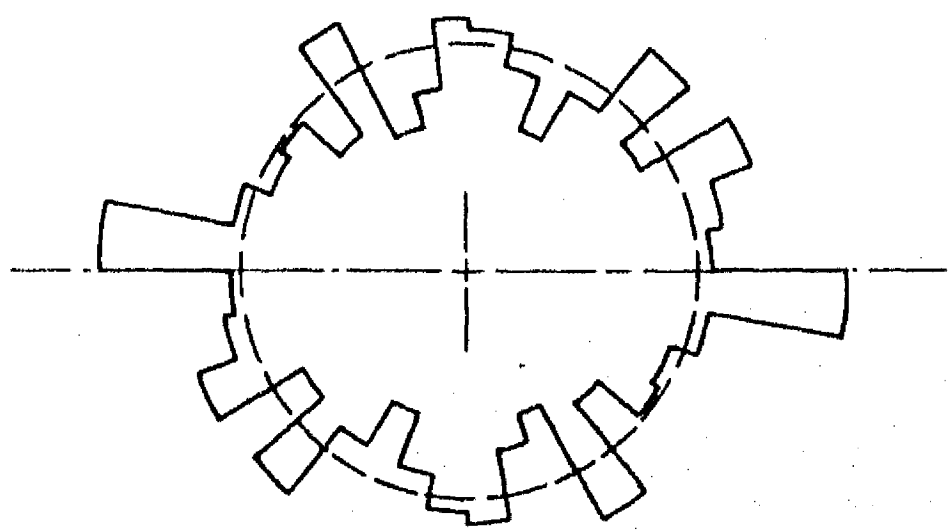
En el campo, el estudio de la estructura de los suelos presenta grandes dificultades y se realiza generalmente en forma indirecta a través de pruebas de penetración, de deformabilidad o midiendo otras propiedades como la permeabilidad, la resistividad [Cambefort, 1957] o la absorción de rayos Gamma. Estas pruebas solamente permiten estimar burdamente la porosidad y la compacidad relativa.

Sin embargo, en el caso de materiales granulares gruesos (gravas, boleos), un estudio de la geometría de la masa es posible mediante observaciones en cortes o sondeos. En particular, es posible estudiar las distribuciones granulométricas $G_3(d)$ en la forma ya señalada en el inciso anterior, a partir de la distribución granulométrica aparente $G_2(d)$ en un plano de corte (Ec 3.10). En forma análoga, la función $G_3(d)$ puede obtenerse a partir de las longitudes D_{1i} de las intersecciones de un sondeo con las partículas como sigue (Anexo I) :

$$G_3(d) = 1 - (1/L) \sum_{i=1}^N D_{1i} [(D_{\max}^2 - d^2) / (D_{\max}^2 - D_{1i}^2)] \quad (3.11)$$



a) Basalto triturado suelto



b) Basalto triturado compactado dinámicamente

Fig 3.20 Orientación de las partículas de un medio granular medida en secciones verticales (Mahmood, 1973)

donde

L Longitud del sondeo

N Número de diámetros aparentes medidos

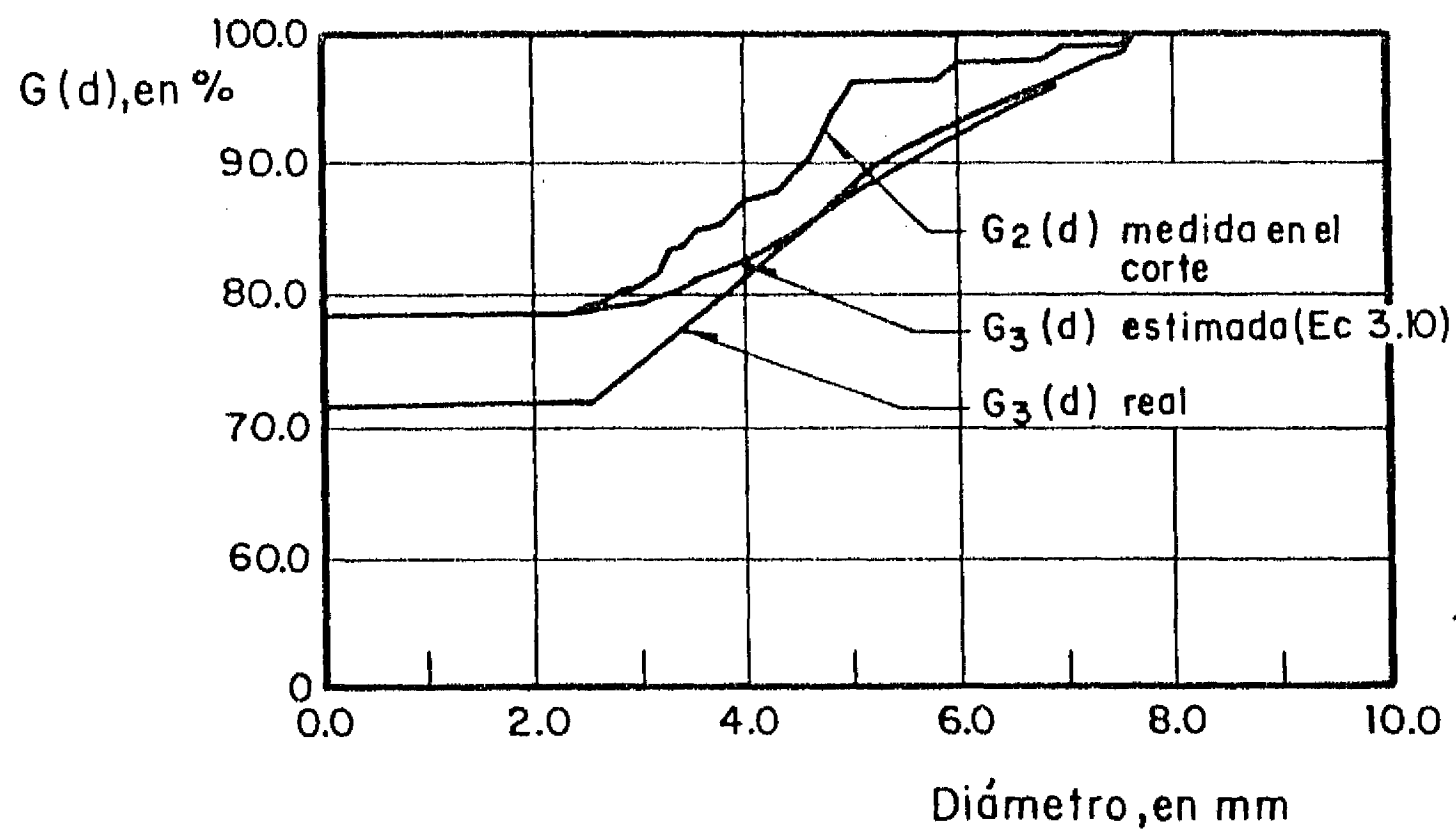
$D_{\text{máx}}$ Diámetro aparente máximo

Nuevamente, para que este tipo de inferencia sea válida, el área de corte A o la longitud del sondeo deben ser de dimensiones suficientes puesto que estas mediciones están afectadas por el efecto de escala geométrico (4.2).

Además, para que sea aplicable la Ec 3.10, los cortes deben ser rigurosamente planos. En la práctica de la ingeniería geotécnica, lo anterior sólo se cumple excepcionalmente (por ejemplo en obras subterráneas en las que se "peina" cuidadosamente la excavación, cortando bloques y boleos). En general, las excavaciones se realizan con herramientas que dejan una superficie muy irregular. En este caso, se ha mostrado en un estudio experimental [Auvinet y Hernández, 1984] que las estimaciones basadas en la Ec 3.10 pueden dar proporciones de partículas gruesas inferiores a las reales típicamente en 30 % para materiales con matriz arenosa y en 100 % cuando la matriz es arcillosa, debido a que la matriz tiende a disimular las partículas grandes. En la Fig 3.21 se presentan resultados típicos obtenidos en este estudio en el caso de una mezcla de arena y grava.



a) Corte (mezcla grava-arena)



b) Resultados

Fig 3.21 Resultados típicos de estimaciones de la granulometría tridimensional a partir de la granulometría bidimensional medida en un corte

3.3 MODELOS ESTRUCTURALES TEÓRICOS

3.3.1 Diferentes tipos de modelos

Para representar la estructura de los medios granulares se ha recurrido a modelos muy diversos.

Frecuentemente, se ha buscado idealizar los medios granulares mediante arreglos regulares de discos o esferas. Trabajos teóricos detallados han sido dedicados a estudiar las propiedades geométricas de estos arreglos [Scott, 1963]. A continuación, se presentan algunos de los resultados que pueden obtenerse con estos modelos y se subrayan sus limitaciones. Una alternativa atractiva consiste en considerar que las partículas del medio granular están repartidas en el espacio al azar de acuerdo con un proceso aleatorio de Poisson. Se muestra en lo que sigue que este tipo de modelo tiene un campo de aplicación limitado. Finalmente, se propone un nuevo tipo de modelo consistente en la simulación de la estructura de arreglos de discos o esferas en una computadora digital.

3.3.2 Arreglos regulares

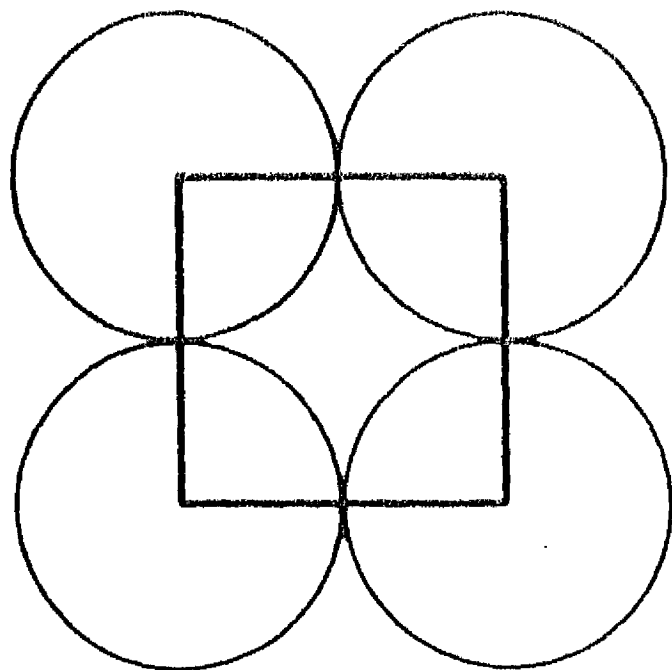
a) Arreglos regulares de discos de igual diámetro

El modelo más sencillo para estudiar en forma cualitativa la estructura de un medio discontinuo es el de discos planos o barras cilíndricas de diámetro constante. Este modelo difiere considerablemente del material que se pretende representar puesto que es bidimensional, sin embargo conserva varias de sus principales características: el carácter discontinuo, los diferentes estados de compactación, etc.

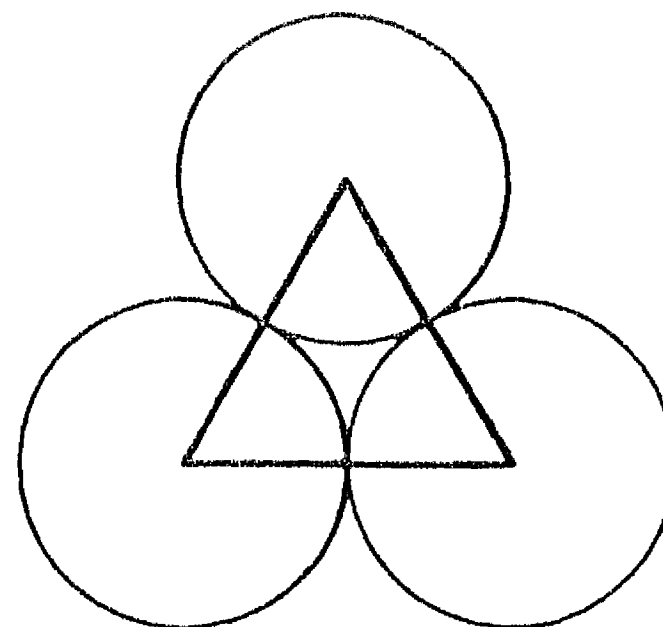
Los parámetros estructurales definidos en 2.2.1 y 2.2.2 no se aplican directamente a este modelo pero la mayor parte de ellos pueden ser adaptados fácilmente. Así, la porosidad de un arreglo de este tipo se entiende como la relación entre el área de vacíos y el área total de la muestra.

Los arreglos regulares de discos más sencillos son los indicados en la Fig 3.22 y corresponden a centros dispuestos según unas mallas cuadrada y triangular equilátera respectivamente. Las porosidades correspondientes son de 0.215 y 0.093. El número de coordinación es de cuatro en el primer caso y de seis en el segundo.

b) Arreglos regulares de esferas de igual diámetro

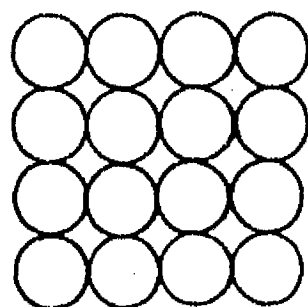


a) Malla cuadrada

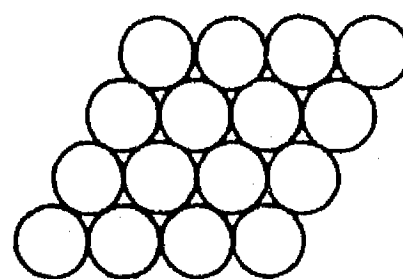


b) Malla triangular

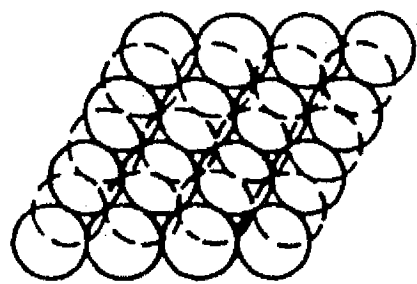
Fig 3.22 Arreglos regulares de discos de igual diámetro



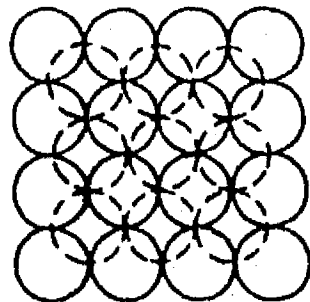
a) Cúbico simple



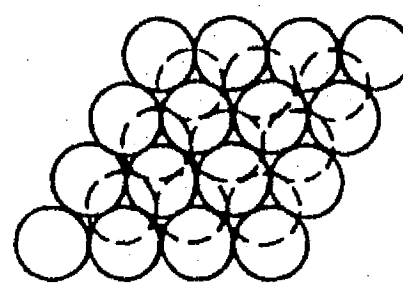
b) Cubico - tetraédrico



c) Tetragonal - esfenoidal



d) Piramidal



e) Tetraédrico

Fig 3.23 Arreglos regulares de esferas

Aunque los arreglos regulares de esferas constituyan también una simplificación radical de la estructura de los suelos, se ha buscado frecuentemente visualizar con ellos algunas de las características de las estructuras reales de los materiales granulares [Dereziwicz, 1958]. Pueden concebirse diferentes arreglos de esferas de igual diámetro colocadas de acuerdo con un patrón específico. Los más sencillos son los representados en la Fig 3.23 y cuyas propiedades principales se indican en la Tabla 3.2 :

- Arreglo cúbico simple

En el arreglo cúbico simple, los centros de las esferas forman una célula unitaria cúbica. Se entiende por célula unitaria la porción mas pequeña del arreglo que contenga un volumen de sólidos igual al de una esfera y que dé una completa idea de la manera en la que está constituido dicho arreglo. Cada esfera está en contacto con seis mas, cuatro de las cuales tienen su centro en el mismo plano y las dos restantes en planos paralelos adyacentes.

- Arreglo cúbico-tetraédrico o simplemente escalonado

En el arreglo cúbico-tetraédrico o simplemente escalonado, cada esfera está en contacto con otras seis en el mismo plano y como en el arreglo cúbico simple, el punto más alto de la esfera en un plano está en contacto con el más bajo de la esfera contenida en el plano superior; por tanto, cada esfera está en contacto con otras ocho.

- Arreglo tetragonal esfenoïdal o doblemente escalonado

Este arreglo es similar al anterior ya que cada esfera tiene seis contactos en el mismo plano, pero en este caso cada esfera descansa en una depresión formada por dos esferas adyacentes en el plano adjunto.

- Arreglo piramidal

En este arreglo, cada esfera esta en contacto con cuatro más en el mismo plano como en el arreglo cúbico simple, y descansa en un hueco formado por cuatro esferas contiguas en el plano inferior, de donde se deduce que cada esfera está en contacto con otras cuatro en cada uno de los planos adyacentes. El número de coordinación es de 12.

- Arreglo tetraédrico

Cada esfera está en contacto con otras seis en un plano, como en el caso del arreglo cúbico-tetraédrico, y se aloja en un hueco formado por tres esferas adyacentes en cada plano inmediato, superior o inferior, resultando nuevamente de 12 el

TABLA 3.2 Principales características de arreglos regulares de esferas de igual diámetro

Tipo de arreglo	Número de coordinación	Porosidad, en %	Relación de vacíos
Cúbico simple	6	47.64	0.909
Cúbico tetraedral	8	39.54	0.654
Tetragonal esfenooidal	10	30.19	0.432
Piramidal	12	25.95	0.350
Tetraédrico	12	25.95	0.350

número de coordinación. Es posible formar un romboedro con los centros de ocho esferas contiguas como se muestra en la Fig 3.24 . Llamando α el ángulo formado por las superficies laterales del romboedro, se observa que ,en la Fig 3.23 , este ángulo es de 60 grados. Si se hace crecer α , la porosidad también crece en la forma indicada en la Fig 3.24 [Dalavalle, 1943]. Para un ángulo de 90 grados, se vuelve a encontrar el arreglo cúbico simple con una porosidad de 0.476.

c) Arreglos regulares de discos o esferas de diferentes diámetros

A partir de los arreglos anteriores es posible construir arreglos regulares de menor porosidad introduciendo discos o esferas de menor tamaño en los vacíos dejados por las partículas grandes. Estos modelos han recibido atención principalmente en relación con el problema de la definición de una granulometría que lleve a la porosidad mínima, en particular para los agregados del concreto (véase también 4.3)

Así, si se considera un arreglo tetraédrico de esferas de diámetro D , es concebible un nuevo arreglo en el que los huecos se rellenen primero con esferas de diámetro igual a $0.414D$ y, sucesivamente, por esferas mas pequeñas de diámetro $0.225D$, $0.177D$ y $0.116D$. La porosidad del material se reduce en cada etapa en la forma indicada en la Fig 3.25 [Giroud, 1969]. En la Fig 3.26 se ha representado la función $G_3(d)$ (2.3.2), para este mismo arreglo.

En la Fig 3.27 se muestra la distribución de tamaños de poros de una estructura cúbica simple de partículas de diámetro D , determinada por el algoritmo discutido más adelante en 3.3.4 [Auvinet, 1978]. Se observa que es posible reducir en 60% la porosidad de esta estructura con un relleno de partículas de diámetro igual a $0.735 D$.

d) Arreglos regulares de partículas no esféricas

Los arreglos de partículas no circulares ni esféricas han recibido poca atención en la literatura. Sin embargo, algunos de estos arreglos pueden obtenerse en forma sencilla.

Es posible formar arreglos de elipsoides deformando según una o dos direcciones cualquiera de los arreglos anteriores. Estas deformaciones no alteran ni la porosidad ni el número de coordinación. Sin embargo, los arreglos así deformados se vuelven altamente anisótropos (véase 3.3.4.b).

e) Limitaciones de los arreglos regulares

De los incisos anteriores se deduce que es posible concebir

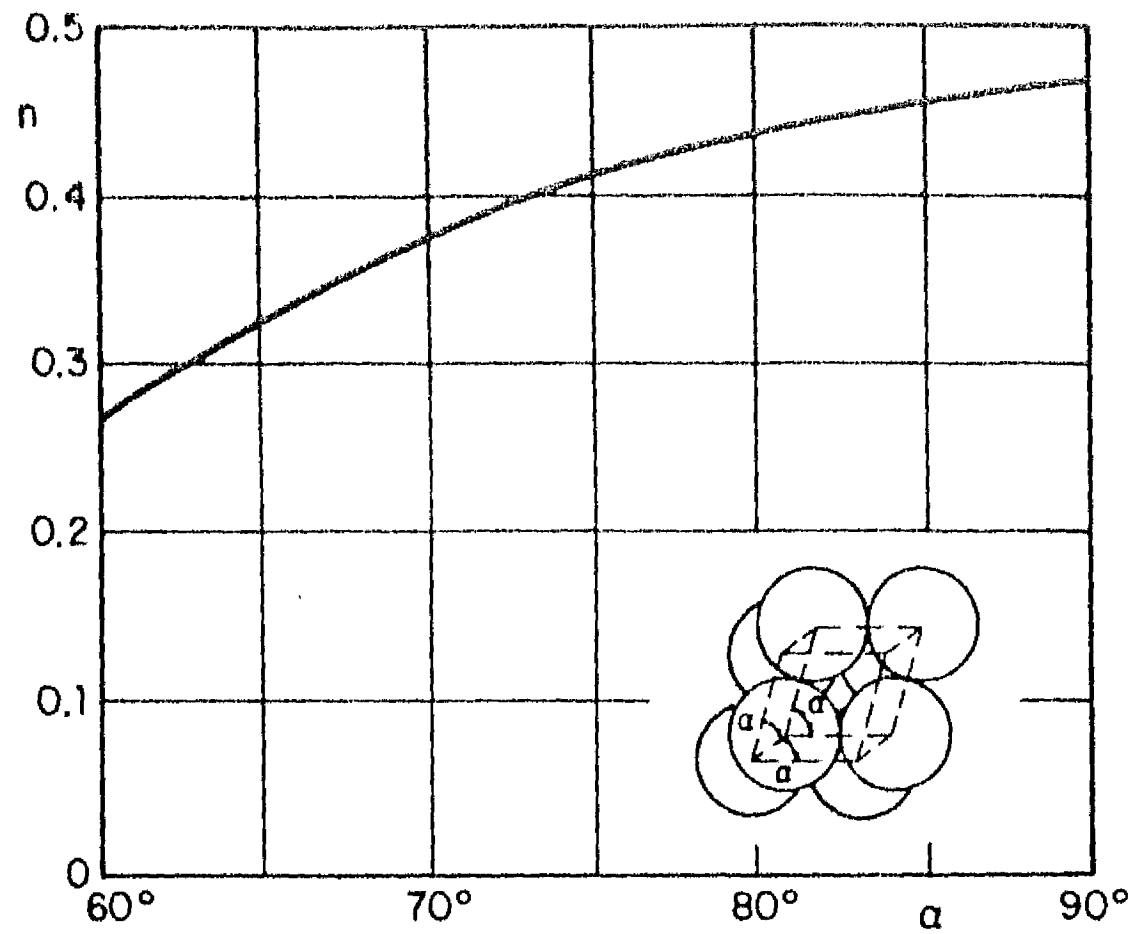


Fig 3.24 Arreglo romboedroal. Variación de la porosidad n respecto al ángulo α

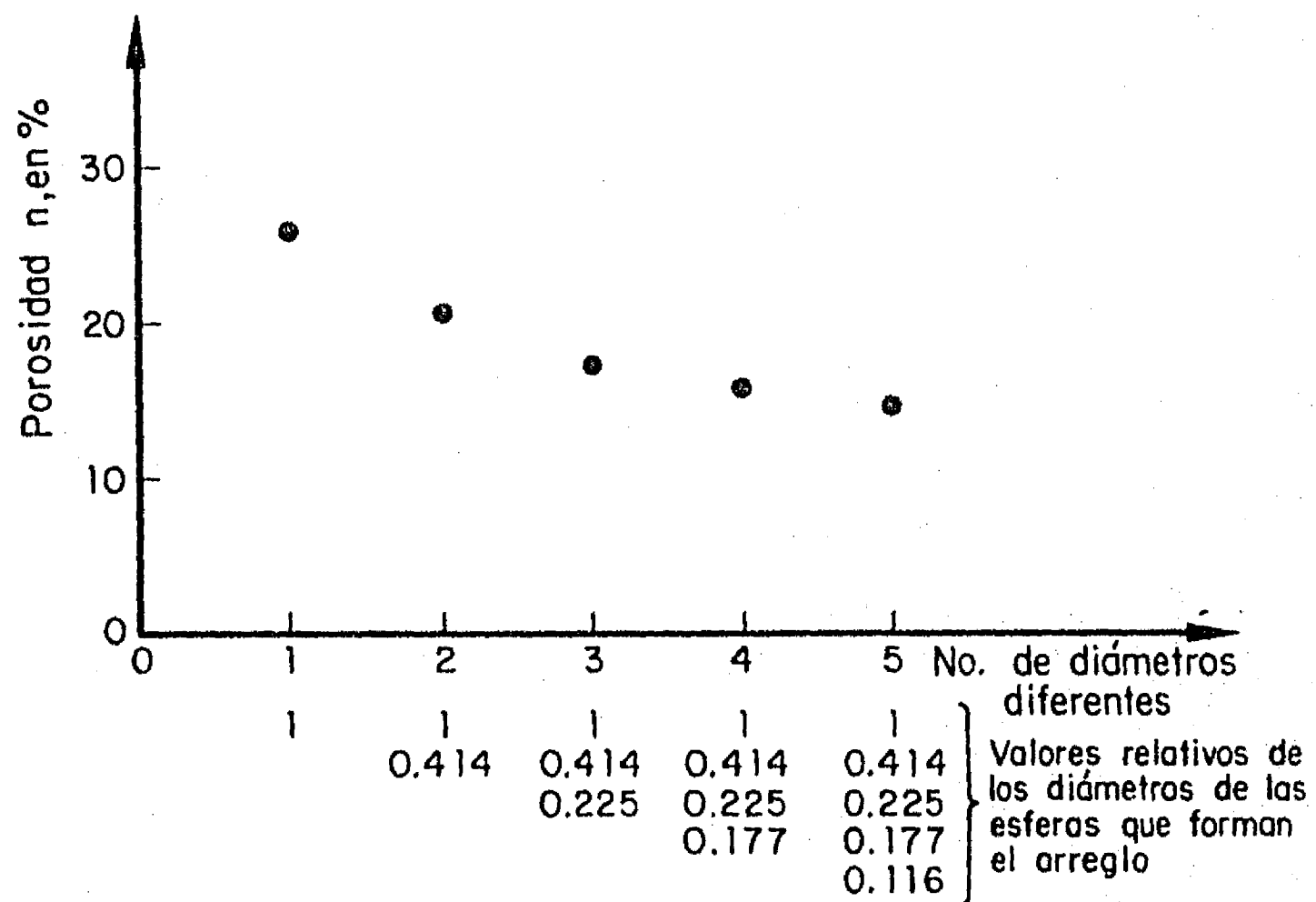


Fig 3.25 Arreglo tetraédrico con relleno de esferas de menor diámetro

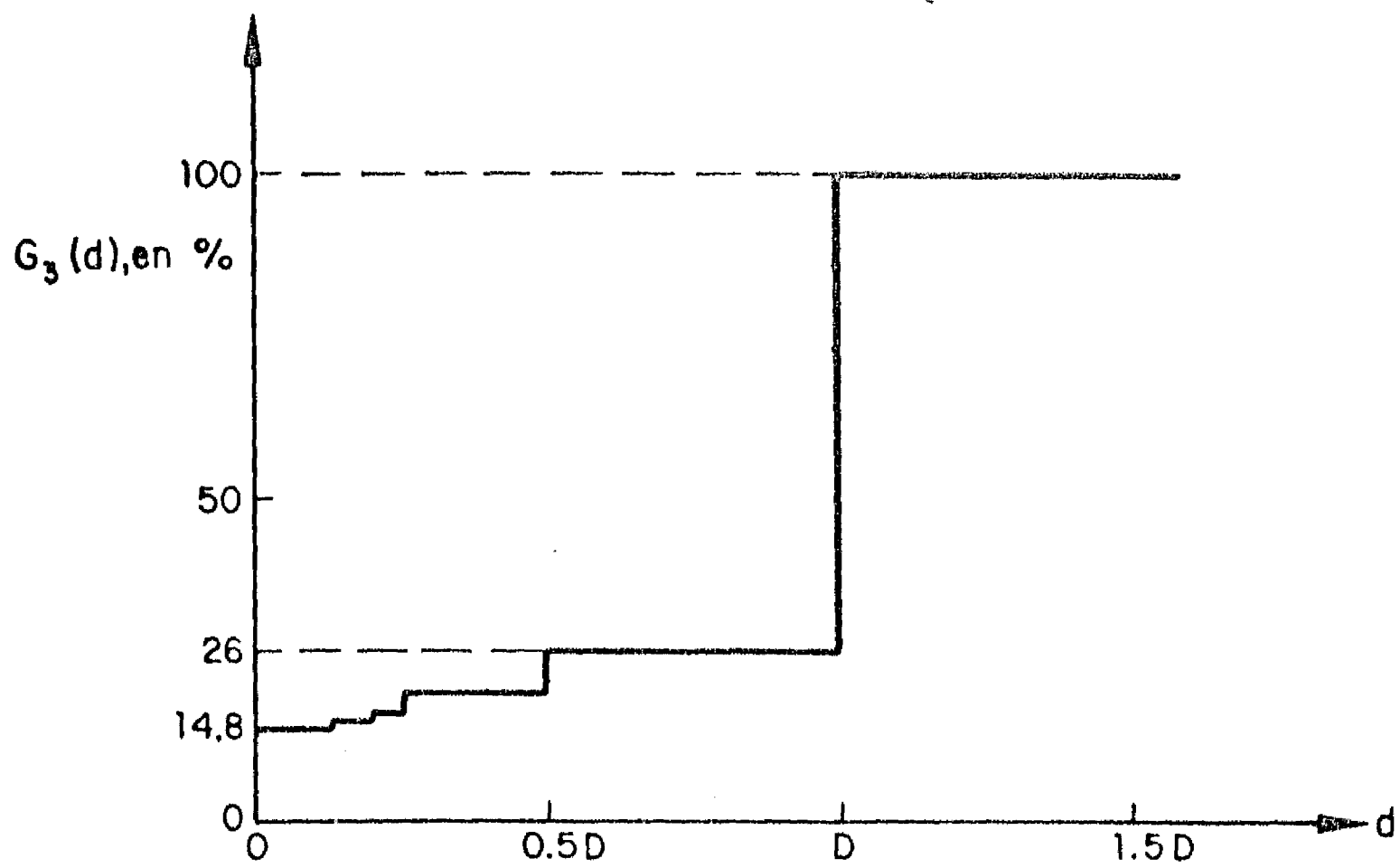


Fig 3.26 Distribución granulométrica del arreglo tetraédrico con relleno en 4 etapas, referida al volumen de la muestra

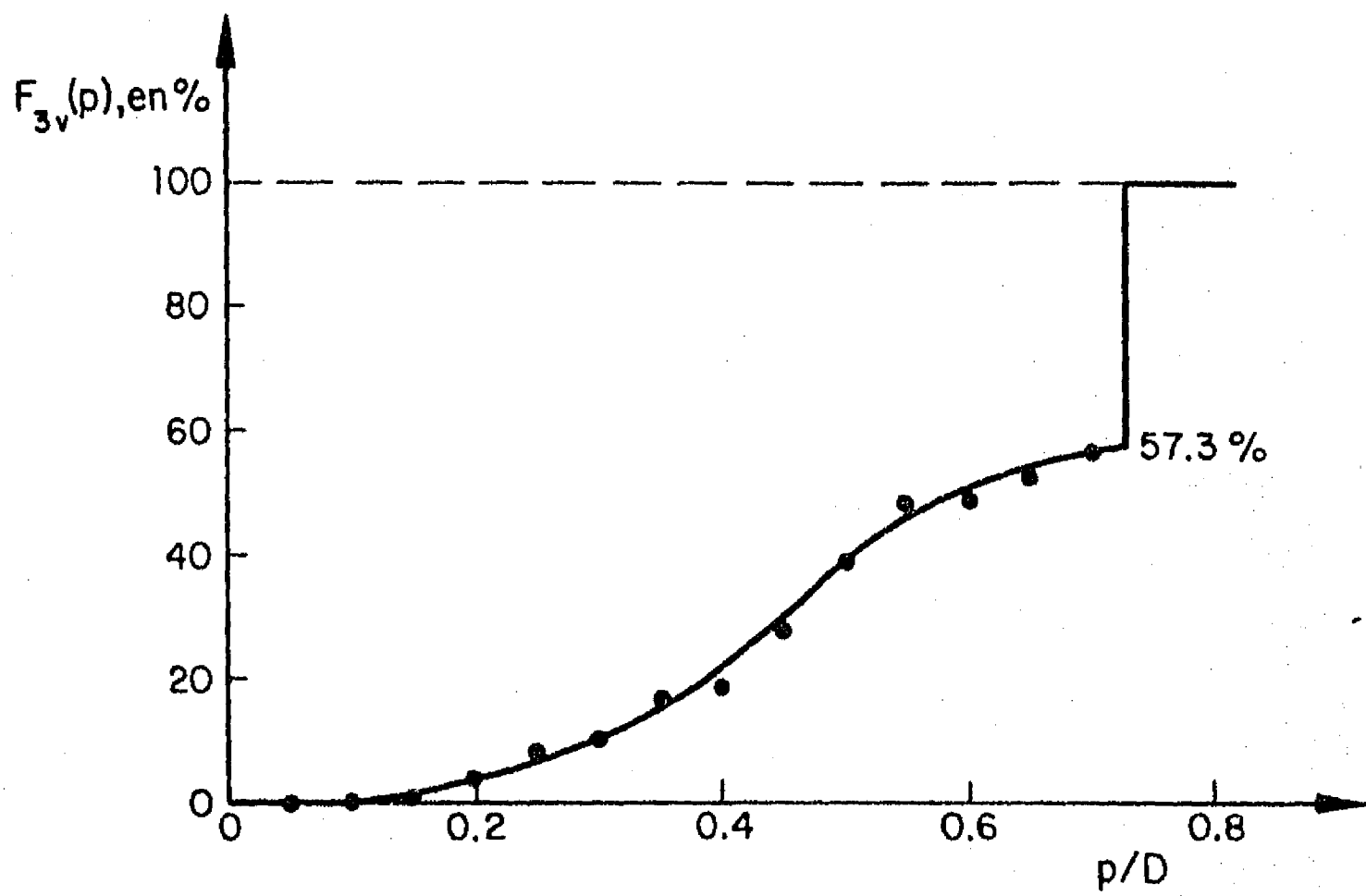


Fig 3.27 Distribución de tamaños de poros para una estructura cúbica simple

estructuras regulares de diferentes tipos, algunas de ellas con porosidades extremadamente bajas. Sin embargo, debe tomarse en cuenta que estas estructuras son idealizaciones que no se dan en la naturaleza, aun si las proporciones y tamaños de las partículas son los adecuados. En efecto, la probabilidad de que se formen espontáneamente estructuras de este tipo que presentan una baja entropía (alto orden) puede generalmente considerarse nula (Existen innumerables estructuras no regulares que tienen la misma probabilidad de presentarse).

3.3.3 Arreglos estocásticos poissonianos

Como alternativa a los arreglos regulares estudiados en el inciso anterior resulta atractivo considerar los medios granulares como conjuntos de partículas repartidas al azar en el espacio.

Sin embargo, aun en medios granulares homogéneos, no es posible aceptar con todo rigor que la distribución espacial de los centros de gravedad de las partículas sea de tipo poissoniano (es decir que sus centros de gravedad esten repartidos uniformemente al azar en el espacio). En efecto, la presencia del centro de una partícula en un punto dado hace que no pueda existir otro en una zona de radio igual por lo menos a su propio radio. Esta interferencia hace que las posiciones de los centros de dos partículas no sean rigurosamente independientes entre sí.

A pesar de las restricciones anteriores, es posible pensar a priori que, la distribución poissoniana puede constituir una aproximación aceptable en los casos siguientes:

- Cuando se considere una mezcla homogénea de un material granular con un suelo fino y que la proporción de material granular sea baja.

- Cuando, dentro de una masa granular homogénea, se considere exclusivamente una fracción granulométrica (por ejemplo partículas de tamaño mayor que cierta dimensión) que represente una proporción baja del total.

Si se considera que, en estas condiciones, la distribución poissoniana es aceptable, es posible escribir [Auvinet, 1984], para una muestra de volumen V , y usando la notación del inciso 2.3.3 :

$$P_{N_V(V)}(k) = P[N_V(V) = k] = (\lambda_V)^k \exp[-\lambda_V] / k! ;$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ (3.12)

En la misma forma, en una área A de un plano de intersección, se tiene:

$$P_{N_A(A)}(k) = P[N_A(A) = k] = (\lambda_A A)^k \exp[-\lambda_A A] / k! ;$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ (3.13)

Finalmente, en un tramo de sondeo de longitud L, la distribución del número de partículas intersecadas es:

$$P_{N_L(L)}(k) = P[N_L(L) = k] = (\lambda_L L)^k \exp[-\lambda_L L] / k! ;$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ (3.14)

Dentro de los límites de validez de las Ecs 3.12 a 3.14, y si las partículas pueden considerarse aproximadamente esféricas, se obtienen los siguientes resultados de interés:

- Densidad de probabilidad de la distancia entre centros de partículas vecinas

Si se llama T la distancia entre el centro de una partícula y el de la más cercana (2.3.3), es posible escribir que:

$$P\{T \leq t\} = 1 - P[N_V(4\pi t^3/3) = 0] = 1 - \exp[-\lambda_V(4\pi t^3/3)]$$

(3.15)

La densidad de probabilidad de T se obtiene derivando la expresión anterior:

$$f_{3T}(t) = 4\pi \lambda_V t^2 \exp[-\lambda_V(4\pi t^3/3)]$$

(3.16)

En la misma forma, la distancia entre el centro de un círculo de intersección de una partícula con un plano y el centro del círculo más cercano tiene la densidad:

$$f_{2T}(t) = 2\pi \lambda_A t \exp[-\lambda_A(\pi t^2)]$$

(3.17)

Finalmente, la distancia entre el centro de un segmento de intersección de una partícula con un sondeo y el centro del

segmento mas cercano tiene la densidad exponencial clásica:

$$f_{1T}(t) = \lambda_L \exp[-\lambda_L t] \quad (3.18)$$

A título de ilustración, se calcularon las densidades de probabilidad anteriores para la fracción $D > 80$ mm del material E de la Fig 2.1. Se observa que, a pesar de que la fracción de interés represente solamente 6 % en volumen del total, la densidad de la distancia T calculada con la hipótesis poissoniana (Fig 3.28.c) debería ser fuertemente corregida puesto que T es necesariamente mayor de 80 mm. Una densidad mas cercana a la real sería la densidad condicional $f_{3T}(t|t > 80 \text{ mm})$ representada en la misma figura.

Una corrección análoga debería aplicarse a la densidad de T en un plano (Fig 3.28.b), aunque en este caso son concebibles valores de T menores de 80 mm.

En el caso del sondeo (Fig 3.28.a), la corrección sería menos significativa y puede aceptarse como válida en primera aproximación la densidad calculada con la hipótesis poissoniana.

Se observa por tanto que, para un material dado, la hipótesis poissoniana es más aceptable a lo largo de un sondeo que en un plano o en el espacio.

Se verá en 3.3.4.b que la Ec 3.15 corregida constituye una buena aproximación de la densidad de probabilidad de la distancia entre centros de partículas para materiales bien graduados.

- Volumen de las partículas contenidas en una muestra de volumen V

Si se llama $V_s(V)$ el volumen de las partículas contenidas dentro de una muestra de volumen V, se tiene:

$$V_s(V) = \sum_{i=1}^{N_V(V)} \pi D_i^3 / 6 \quad (3.19)$$

donde D_i tiene la densidad de probabilidad $f_{3D}(d)$

$V_s(V)$ es un proceso de Poisson compuesto [Auvinet, 1984] cuyos parámetros principales son los siguientes:

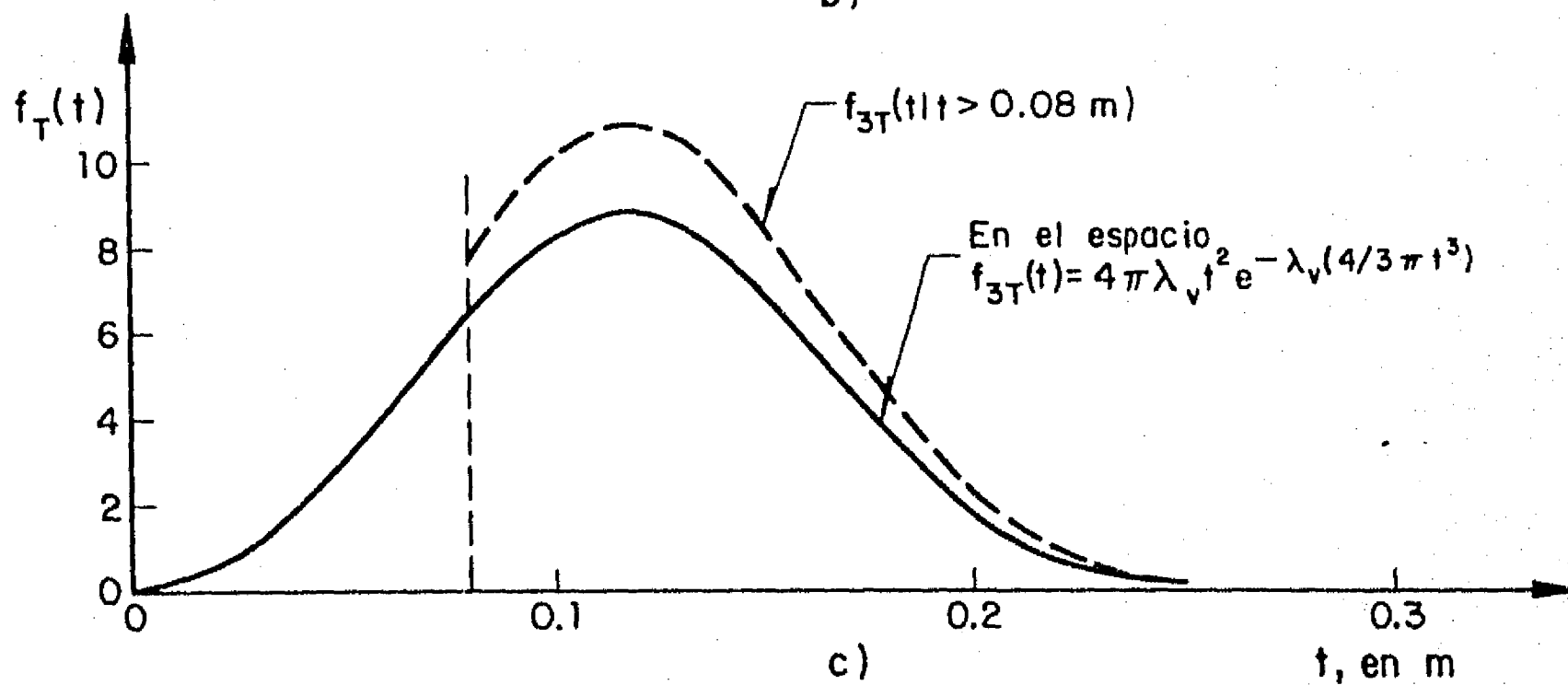
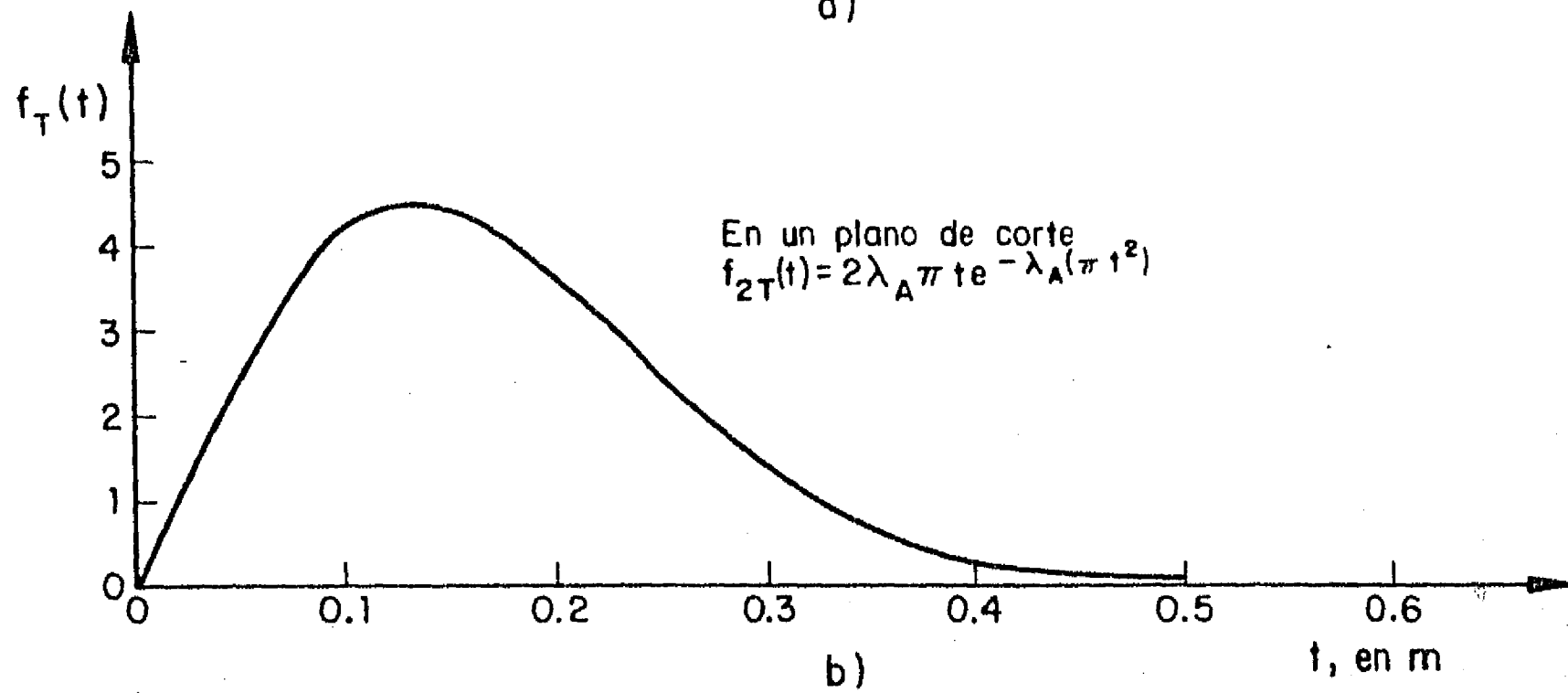
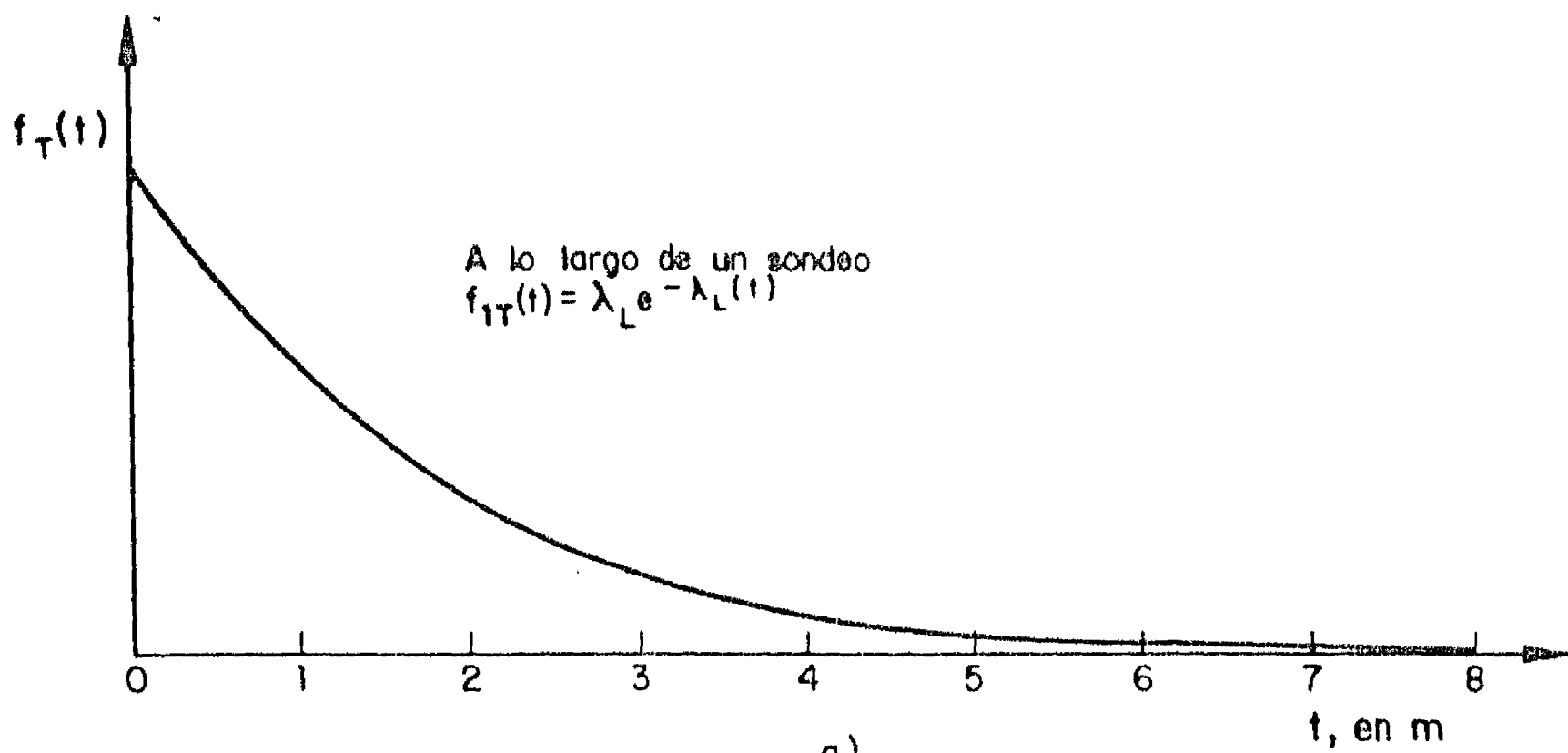


Fig 3.28 Densidades de probabilidad de la distancia entre el centro de una partícula y el de la partícula más cercana (hipótesis poissoniana)

$$E\{V_S(V)\} = \lambda_V V E_{3D} \{\pi D^3/6\} \quad (3.20)$$

$$\text{var}[V_S(V)] = \lambda_V V E_{3D} \{[\pi D^3/6]^2\} \quad (3.21)$$

En la misma forma, si se llama $A_S(A)$ el área de las intersecciones de las partículas con un plano en una área A , se tiene:

$$A_S(A) = \sum_{i=1}^{N_A(A)} \pi D_i^2 / 4 \quad (3.22)$$

y:

$$E\{A_S(A)\} = \lambda_A A E_{2A} \{\pi D^2/4\} \quad (3.23)$$

$$\text{var}[A_S(A)] = \lambda_A A E_{2A} \{[\pi D^2/4]^2\} \quad (3.24)$$

Finalmente, si $L_S(L)$ es la longitud total de los segmentos de intersección de partículas con un sondeo de longitud L , se tiene:

$$L_S(L) = \sum_{i=1}^{N_L(L)} D \quad (3.25)$$

y:

$$E\{L_S(L)\} = \lambda_L L E_{1A} \{D\} \quad (3.26)$$

$$\text{var}[L_S(L)] = \lambda_L L E_{1A} \{D^2\} \quad (3.27)$$

- Variación aleatoria de la porosidad y de la distribución granulométrica dentro del medio

Cuando puede considerarse aceptable la hipótesis de que los centros de las partículas estén distribuidos en forma poissoniana en el espacio, se obtienen algunos resultados particularmente simples en cuanto a la variación aleatoria de la porosidad y de la distribución granulométrica dentro del medio.

Para la porosidad n_V de una muestra de volumen V , se tiene, tomando en cuenta que $n_V = (V - V_S)/V$:

$$E\{n_V\} = [V - E\{V_S(V)\}] / V = 1 - \lambda_V E_{3D} \{\pi D^3/6\} \quad (3.28)$$

$$\text{var}[n_v] = (1/V^2) \lambda_v V E_{3D} \{ (\pi D^3/6)^2 \} \quad (3.29)$$

$$\text{var}[n_v] = (\lambda_v/V) E_{3D} \{ (\pi D^3/6)^2 \} \quad (3.30)$$

Para la distribución granulométrica referida al volumen total de la muestra, puede escribirse en forma análoga:

$$E\{G_v(d)\} = 1 - \lambda_{vd} E_{3D} \{ \pi D^3/6 \mid D > d \} \quad (3.31)$$

$$\text{var}[G_v(d)] = (\lambda_{vd}/V) E_{3D} \{ (\pi D^3/6)^2 \mid D > d \} \quad (3.32)$$

donde

λ_{vd} Número de partículas con diámetro mayor que d por unidad de volumen = $[1 - G_3(d)] / E_{3D} \{ \pi D^3/6 \mid D > d \}$

Los resultados anteriores solamente son útiles cuando la hipótesis poissoniana es aceptable (porosidades extremadamente altas). En caso contrario, las variaciones aleatorias de la porosidad y de la distribución granulométrica deben estudiarse recurriendo al concepto de función característica (2.3.7).

- Generalización del modelo poissoniano al caso de medios no homogéneos

En todo lo anterior, se ha supuesto homogeneidad del medio. En el caso de medios no homogéneos, los conceptos anteriores pueden generalizarse recurriendo a la noción de proceso de Poisson no homogéneo [Auvinet, 1984]. Los parámetros λ son entonces funciones de la posición de la muestra considerada dentro del medio.

3.3.4 Simulación numérica de la estructura de los medios granulares

Para modelar la estructura de los medios granulares, es posible construir arreglos aleatorios de partículas, con diferentes granulometrías y grados de compacidad, mediante simulación con una computadora digital. Se han desarrollado algoritmos que permiten realizar este tipo de simulación [Auvinet, 1973] y cuya eficiencia ha mejorado con el tiempo hasta llegar a ser manejables aun con microcomputadora. A continuación se presentan dos modelos : el primero permite simular arreglos bidimensionales de discos y el segundo permite formar arreglos tridimensionales de esferas. Se presentan asimismo los resultados de una serie de análisis realizados con estos modelos.

a) Modelo bidimensional

- Algoritmo de formación de la estructura

Para formar estructuras con partículas circulares se procede como se indica a continuación (programa CIRCULOS) :

. Se define inicialmente un "recipiente" constituido por tres círculos secantes de gran diámetro (Fig 3.29).

. Se elige al azar el diámetro del disco que se va a colocar en el recipiente por muestreo aleatorio dentro de la distribución granulométrica en número del material que se pretende simular. Se selecciona entonces, también al azar, un eje de caída.

. El primer disco (en su caso el fondo del recipiente) con el que el disco de interés entra en contacto se determina por inspección. Este primer círculo se acepta como primer círculo de apoyo y, nuevamente por inspección, se busca un segundo círculo (en su caso el fondo o las paredes laterales) que pueda proporcionar el segundo punto de apoyo requerido para el equilibrio del nuevo disco.

. Se verifica que el equilibrio así obtenido es estable y que el nuevo disco no interseca los anteriores ni las paredes. En este caso, la posición ocupada por el disco se acepta como definitiva; en caso contrario, se repite el proceso hasta encontrar una posición aceptable.

. Se repiten los pasos anteriores hasta alcanzar un número de partículas suficiente para llenar el recipiente hasta un

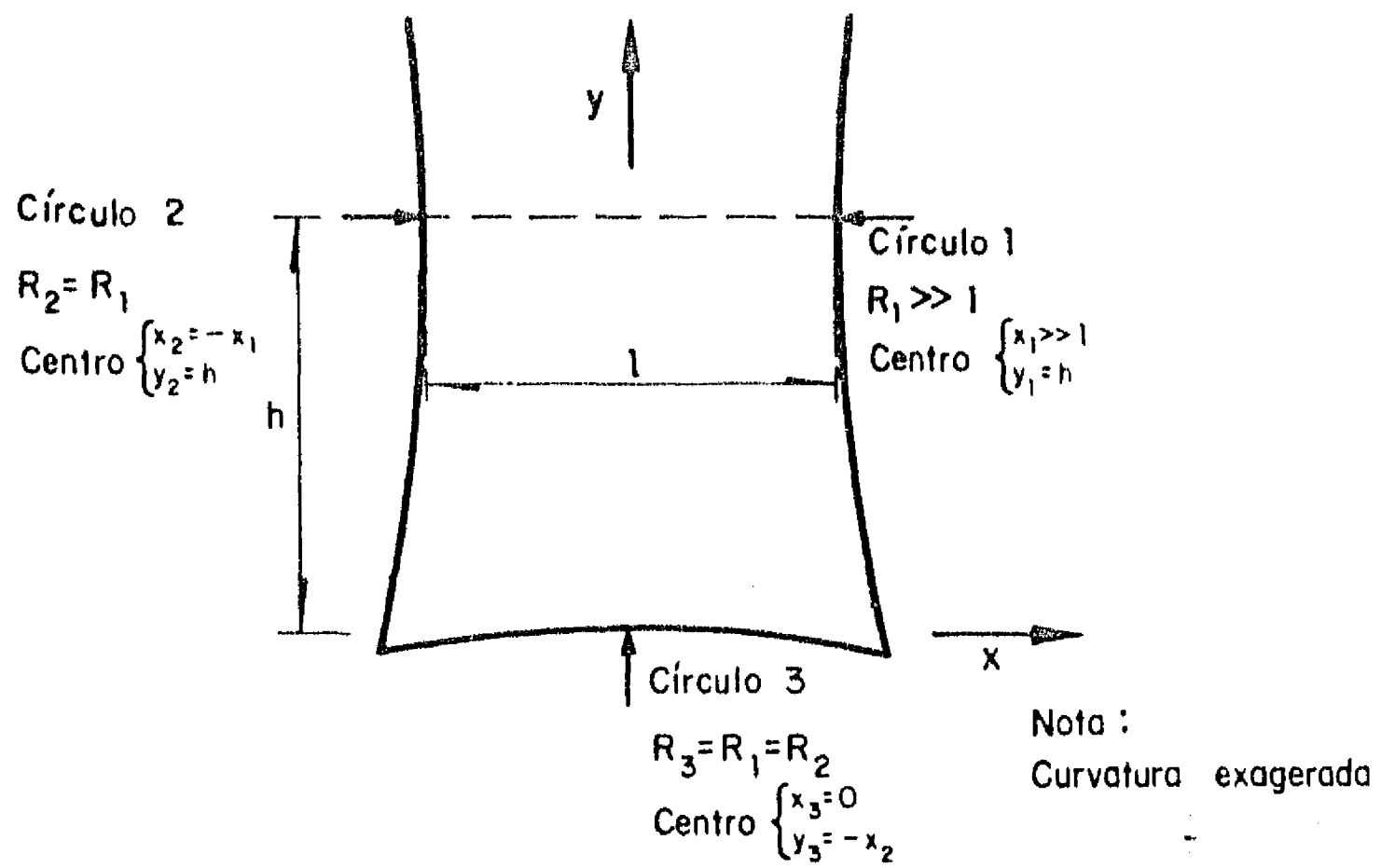


Fig 3.29 Recipiente. Modelo bidimensional

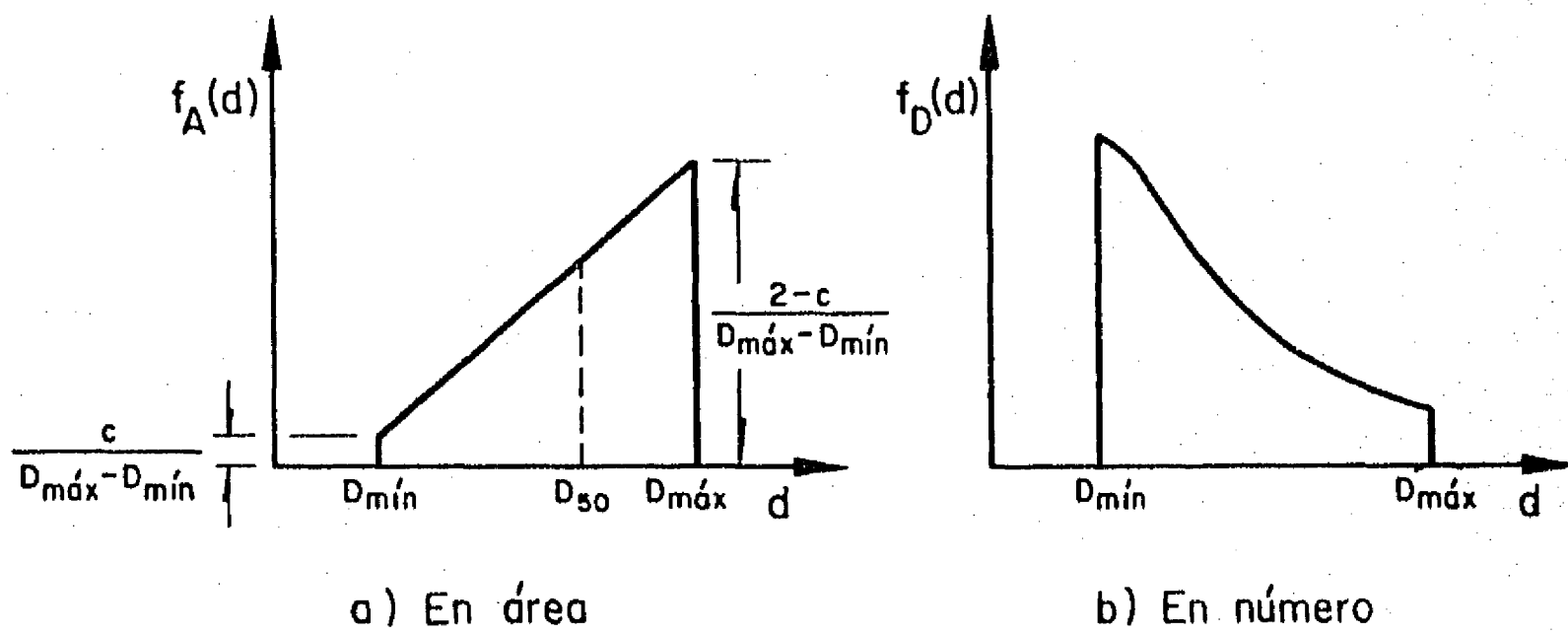


Fig 3.30 Densidades granulométricas de los materiales simulados

nivel prefijado.

- Granulometrías consideradas

Para los estudios que se presentan a continuación se pensó que era conveniente poder hacer variar en forma continua las características granulométricas de los materiales simulados. Por este motivo, se escogió una densidad de probabilidad granulométrica en área sencilla, de tipo lineal (Fig 3.30) :

$$f_A(d) = ad + b \quad ; \quad \text{para } D_{\min} < d < D_{\max} \quad (3.33)$$

Las principales características de esta distribución trapecial y el método de muestreo se presentan en el inciso 4.1 del Anexo I.

- Estructuras construidas

En la Tabla 3.3 se presentan las características de algunas de las estructuras construidas por el método indicado. Se dieron al recipiente las dimensiones arbitrarias $l = h = 2$ (Fig 3.29).

En la Tabla 3.4 se presenta, a título de ejemplo, un fragmento de la matriz de definición de una de las estructuras (parte inferior de la muestra). Se indican las coordenadas x e y del centro y el radio de cada uno de los discos, así como el número de contactos por partícula. En la Fig 3.31 se muestra una de las estructuras simuladas dibujada con graficador.

- Granulometría teórica y obtenida

El método de muestreo adoptado garantiza que, conforme crece el número de discos, la granulometría de la muestra tienda hacia la granulometría deseada por la ley de los grandes números. Para verificar la magnitud de las desviaciones que se pueden presentar, para diferentes números de partículas, se determinaron las características granulométricas principales (D_{10} , D_{30} y D_{60} , coeficiente de uniformidad y coeficiente de curvatura) correspondientes a la granulometría teórica definida por los parámetros a , b , D_{\min} y D_{\max} y se calcularon estas mismas características para las muestras obtenidas por el algoritmo descrito más arriba (programas GRANULOMETRIA/TEORICA y GRANULOMETRIA/OBTENIDA).

La comparación entre los parámetros teóricos y los de las

TABLA 3.3 Estructuras bidimensionales construidas

$D_{\text{mín}}$	$D_{\text{máx}}$	Coef. c (Anexo I)	Número de discos	Nombre de la estructura*	$E\{D\}$
0.12	0.12	1	350	E/350 / .060 / .060 / 1	0.12
0.10	0.14	1	360	E/360 / .050 / .070 / 1	0.118
0.08	0.16	1	370	E/370 / .040 / .080 / 1	0.11
0.06	0.18	1	400	E/400 / .030 / .090 / 1	0.099
0.05	0.20	1	500	E/500 / .025 / .100 / 1	0.092

* Correspondiente al archivo definido en la computadora

TABLA 3.4 Fragmento de la matriz de definición de la estructura E/500 / .025 / .100 / 1

Coordenadas del centro del disco		Radio	Número de contactos
X	Y	R	N_c
0.232	0.026	0.026	3
-0.055	0.027	0.027	3
0.498	0.027	0.027	4
-0.483	0.027	0.028	3
0.553	0.027	0.028	3
-0.668	0.031	0.031	4
-0.114	0.032	0.032	3
-0.961	0.041	0.042	4
-0.744	0.044	0.045	5
0.051	0.047	0.047	4
0.421	0.054	0.054	5
0.155	0.057	0.058	5
0.309	0.058	0.058	6
0.764	0.062	0.063	5
0.637	0.064	0.064	5

CORTE E/500/025/100/1

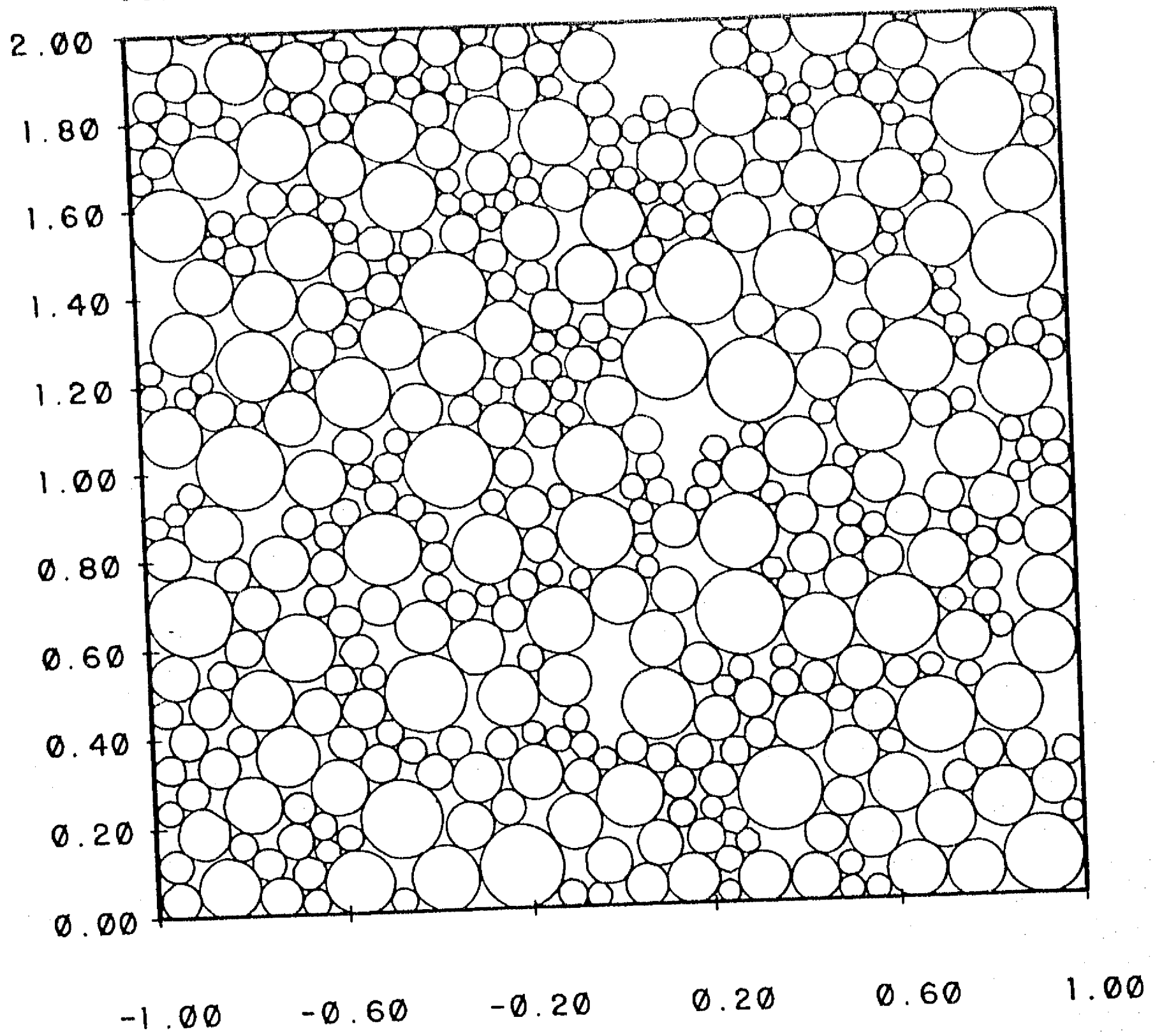


Fig 3.31 Ejemplo de estructura construida con el modelo bidimensional

muestras indica que para los números de partículas empleadas (>350), la granulometría obtenida coincide con buena precisión con la teórica (Tabla 3.5).

- Distribución de las partículas en el plano

Para evaluar el grado de homogeneidad de las muestras, se contó el número de discos intersecados por rectas horizontales por unidad de longitud a diferentes alturas (programa HOMOGENEIDAD). La presencia a un nivel dado de un número excepcionalmente pequeño o grande de discos es un índice de segregación. Los resultados obtenidos para el material uniforme y para el mejor graduado se presentan en la Fig 3.32. En la Tabla 3.6 se dan las medidas de valor central y dispersión del número de partículas intersecadas correspondientes a diferentes estructuras. Se cumple la relación:

$$\lambda_L = \lambda_A E_D \{D\} \quad (3.34)$$

donde

λ_L Número de partículas intersecadas por una recta por unidad de longitud

λ_A Número de partículas por unidad de área, igual a :

$$= (1-n)/E_D \{ \pi D^2/4 \} \quad (3.35)$$

donde

$E_D \{D\}$ Esperanza, en número, del diámetro de las partículas

La relación 3.34 se establece en forma similar a la relación 2.59.

- Porosidad y relación de vacíos

Para evaluar la compacidad de las estructuras, se desarrolló un algoritmo que permite cuantificar la relación entre área de poros y área de sólidos (relación de vacíos bidimensional) dentro de áreas de referencia de forma circular de radio R_c con centro en cualquier punto de la muestra (Fig 3.33, programa RELVAC). En los calculos presentados, se adopto como centro del círculo de referencia el punto de coordenadas $x = 0$, $y = 1$ y se hizo variar el radio R_c de 0.05 a 1 con incrementos de 0.05. En la Fig 3.34 se presentan los resultados obtenidos. No se observa una reducción clara de la

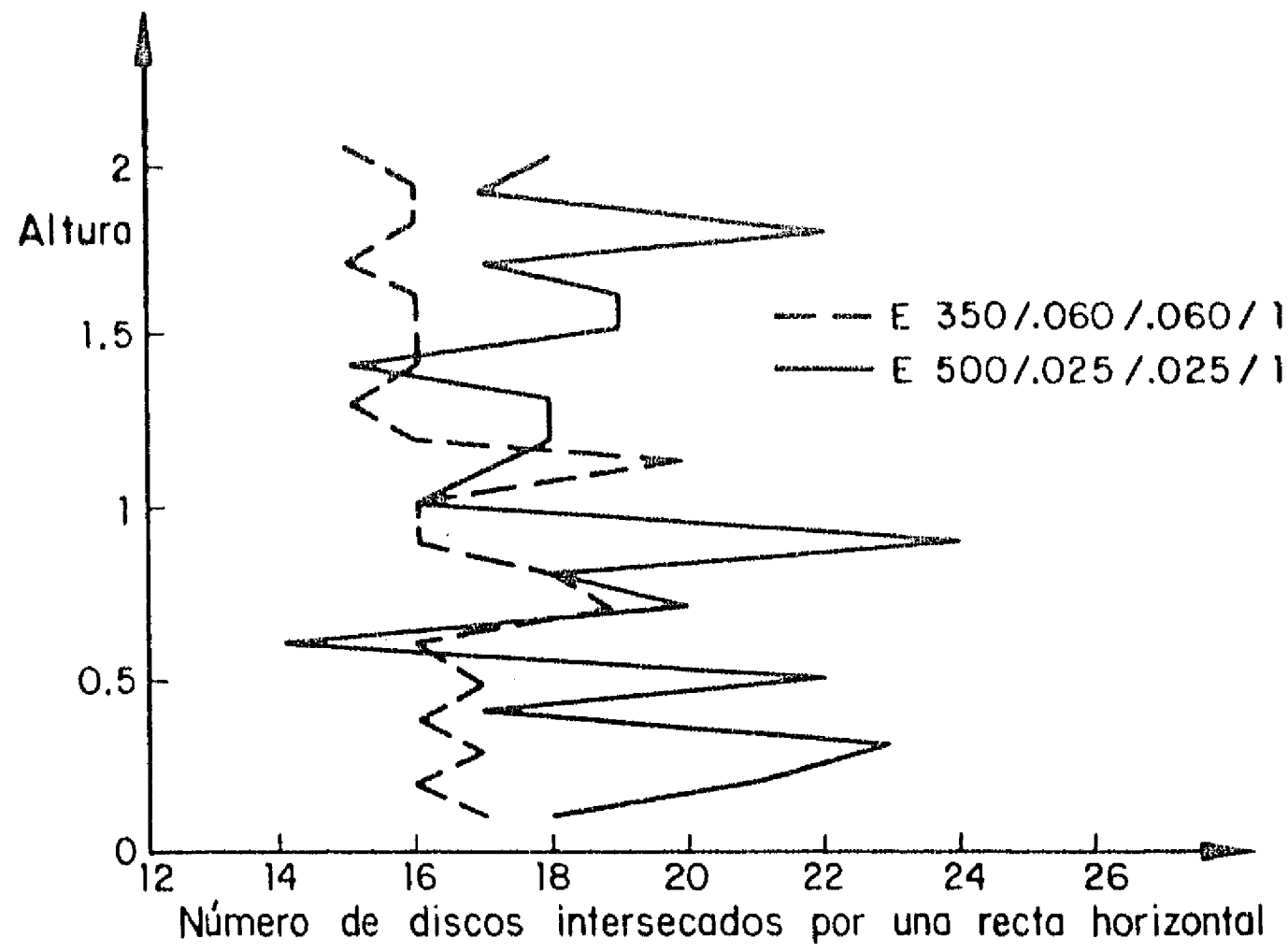


Fig 3.32 Estudio de la homogeneidad

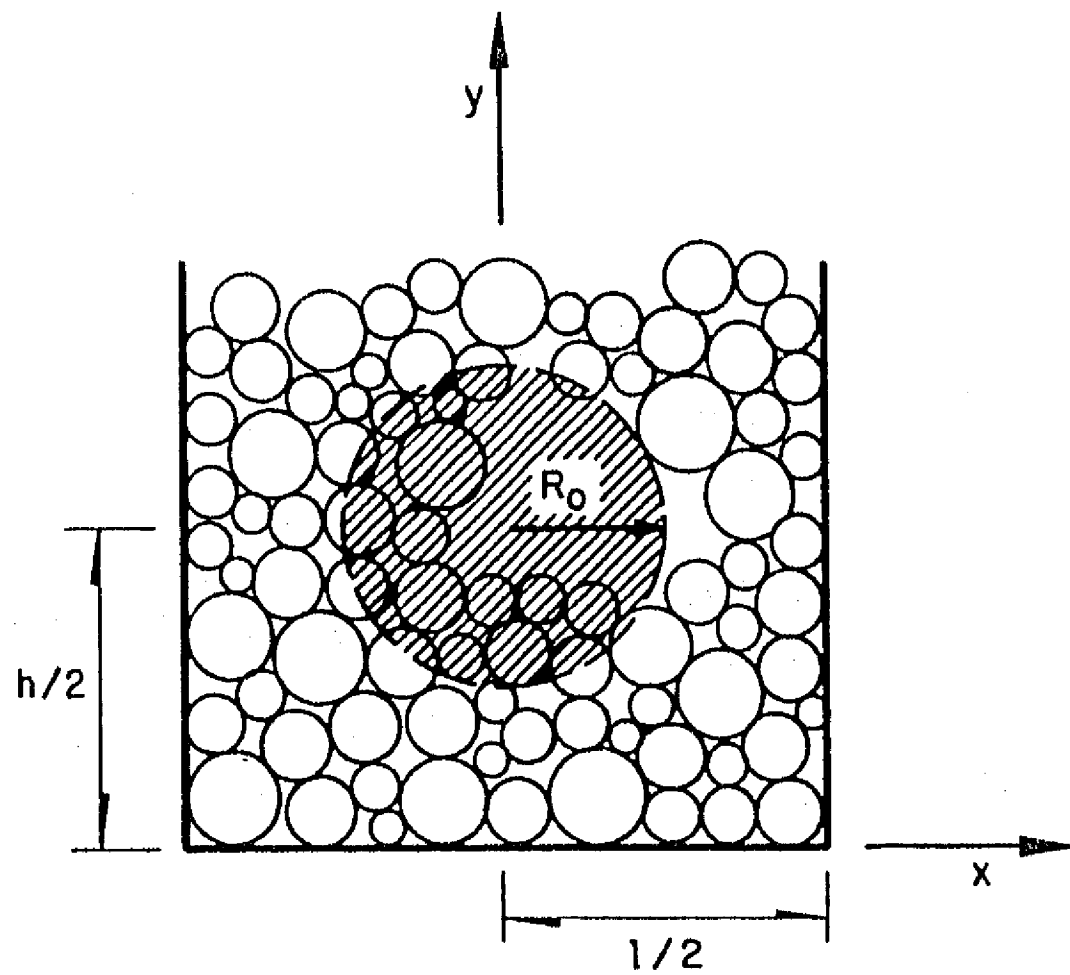


Fig 3.33 Area de referencia para cálculo de la relación de vacíos

TABLA 3.5 Comparación de granulometrías teórica y obtenida

ESTRUCTURA	D ₁₀		D ₃₀		D ₆₀		C _u		C _c	
	Teo*	Obt*	Teo.	Obt.	Teo.	Obt.	Teo.	Obt.	Teo.	Obt.
E/350 /.060 /.060/1	U N I F O R M E									
E/360 /.050 /.070/1	0.104	.104	0.112	0.112	0.124	0.124	1.192	1.194	.973	.977
E/360 /.040 /.080/1	0.088	0.088	0.104	0.102	0.128	0.128	1.454	1.443	.960	.940
E/400 /.030 /.090/1	0.072	0.070	0.096	0.092	0.132	0.124	1.833	1.784	.970	.966
E/500 /.025 /.100/1	0.064	0.064	0.095	0.092	0.140	0.136	2.154	2.134	.992	.970

* Teo. teórica
Obt. obtenida

TABLA 3.6 Número de partículas intersecadas por una recta horizontal por unidad de longitud

ESTRUCTURA	Valor medio λ_L	Desv. estándar $\sigma_{\lambda L}$	Coficiente de variación (%) $\sigma_{\lambda L} / \lambda_L$
E/350 / .060 /.060/1	8.22	0.621	7.55
E/360 / .050 /.070/1	8.57	0.825	9.63
E/370 / .040 /.080/1	8.95	0.948	10.59
E/400 / .030 /.090/1	9.26	0.970	10.48
E/500 / .025 /.100/1	9.32	1.320	14.25

relación de vacíos para los materiales mejor graduados. Las relaciones típicas calculadas ($e = 0.22$ a 0.25) corresponden a una estructura abierta, ligeramente más compacta que la obtenida para discos de tamaño uniforme con centros acomodados según una malla cuadrada ($e = 0.27$) y más suelta que el arreglo teórico más compacto en el que los centros están dispuestos según una malla triangular ($e = 0.102$).

- Número de coordinación

De acuerdo con el algoritmo empleado, cada vez que se coloca un disco en el recipiente se generan dos contactos. El número medio de contactos por partícula es por tanto de 4. Se ajustó un modelo de regresión lineal a la tendencia seguida por la relación entre número de contactos y diámetro de partícula (programa NUCONT). Se observa (Fig 3.35) que, al mejorar la gradación del material, la ordenada en el origen de la recta de regresión tiende hacia un valor de 2 que corresponde al número mínimo de contactos necesario para asegurar el equilibrio estático de una partícula.

Parece por tanto que, para los materiales mejor graduados, el número esperado de contactos adicionales a 2, es decir $N_c - 2$, tiende a ser proporcional al diámetro D de la partícula. Los contactos parecen presentarse en forma aleatoria sobre cada partícula de acuerdo con un proceso de Poisson, es decir que se tiene :

$$P[N_c - 2 = x | D] = (\mu_D D)^x \exp[-\mu_D D] / x! \quad ; \text{ para } x = 0, 1, \dots, \quad (3.36)$$

donde

D Diámetro de la partícula

$\mu_D = 2/E_D \{D\}$ Intensidad del proceso (número de contactos adicionales a 2 por unidad de longitud de diámetro)

Sin embargo, el proceso anterior no coincide rigurosamente con el proceso real. Por una parte, el número de contactos por partícula queda acotado por el número máximo de partículas de menor tamaño que pueden físicamente estar en contacto con la partícula. Si D es el tamaño de una cierta partícula y D_{\min} el diámetro de las partículas más pequeñas, se tiene necesariamente :

$$N_c < [\pi / \text{sen}^{-1}(D_{\min} / (D + D_{\min}))] \quad (3.37)$$

En particular, para los discos más pequeños, el número de

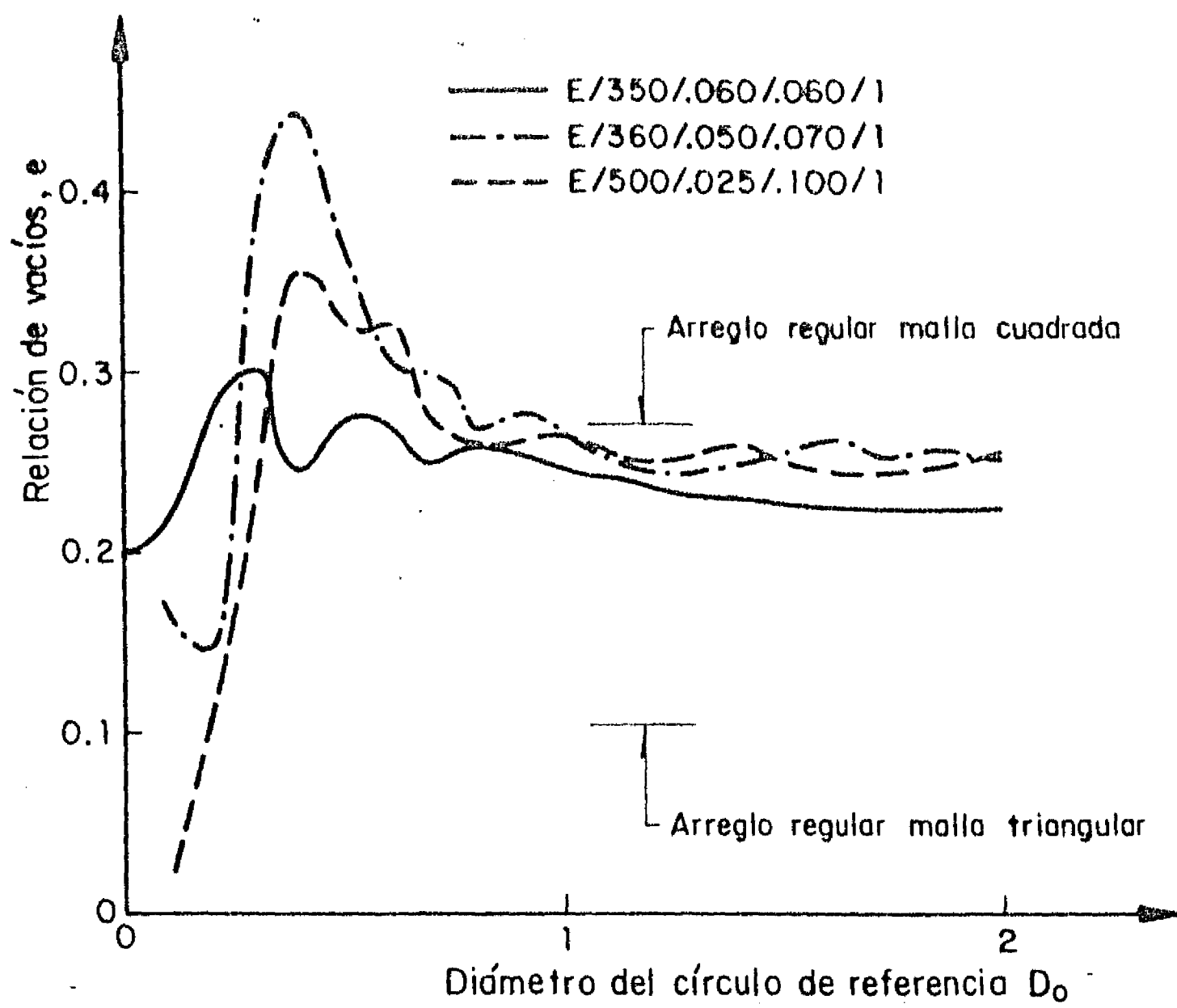


Fig 3.34 Convergencia de la relación de vacíos

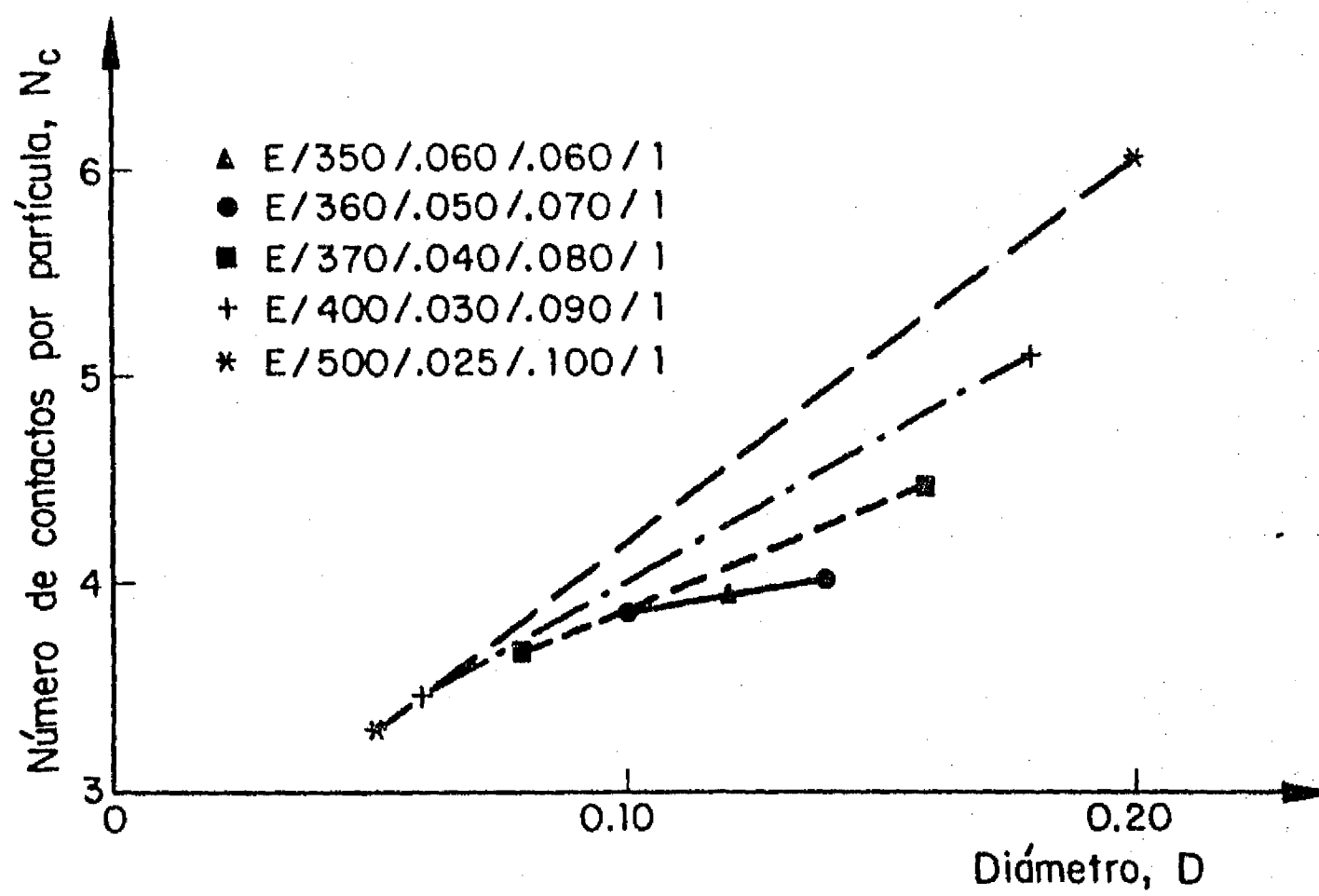


Fig 3.35 Número de contactos vs diámetro. Rectas de regresión

contactos no puede ser mayor de 6, con lo que la distribución de Poisson queda truncada.

Por otra parte, tomando en cuenta que un número de contactos de dos o aun de tres corresponde a un equilibrio local precario, la probabilidad de que se presenten estos números de contacto es menor que la indicada por la ley de Poisson.

Para cuantificar las desviaciones existentes respecto a la distribución de Poisson, se determinaron los diagramas de frecuencia correspondientes al número de contactos por partícula para diferentes fracciones granulométricas (programa DISCONT). La distribución observada se comparó con una ley poissoniana de misma media. Los resultados obtenidos para el material mejor graduado se presentan en la Fig 3.36.

La comparación pone en evidencia que la ley de Poisson tiende a sobrestimar las probabilidades asociadas a números de contacto bajos o muy altos y a subestimar las probabilidades asociadas a valores cercanos a la media.

- Repartición de contactos

Al depositarse los discos en el campo de la gravedad (condición introducida al verificarse el equilibrio estático de cada disco), la estructura resulta anisótropa. Lo anterior se manifiesta en la repartición de los contactos en la periferia de los discos. Se desarrolló un algoritmo (programa ISOTROPIA) que permite obtener el histograma de los valores del ángulo α (Fig 3.37). Los resultados obtenidos para la parte central de las estructuras simuladas se presentan en las Figs 3.38 a 3.44 en forma de histogramas polares (con intervalos de 10 grados).

Para materiales uniformes, la distribución del ángulo α presenta cuatro máximos muy marcados (Fig 3.38). Los máximos corresponden sensiblemente a $\alpha = 60, 120, 240$ y 300 grados, lo que muestra la tendencia espontánea de los discos, aun colocados al azar, de adoptar una estructura primaria semejante a la de una malla triangular equilátera (Fig 3.22). A esta tendencia general se superpone otra hacia una estructura secundaria de malla cuadrada y configuraciones aleatorias de diferentes tipos.

La introducción de partículas de diferentes diámetros altera totalmente la estructura, aun cuando exista poca diferencia entre los tamaños máximo y mínimo. Se presentan nuevamente cuatro máximos principales, pero para valores de α del orden de $45, 135, 225$ y 315 grados. Por otra parte, se observa una reducción sensible del número de contactos correspondiente a 0 y a 180 grados (ecuador).

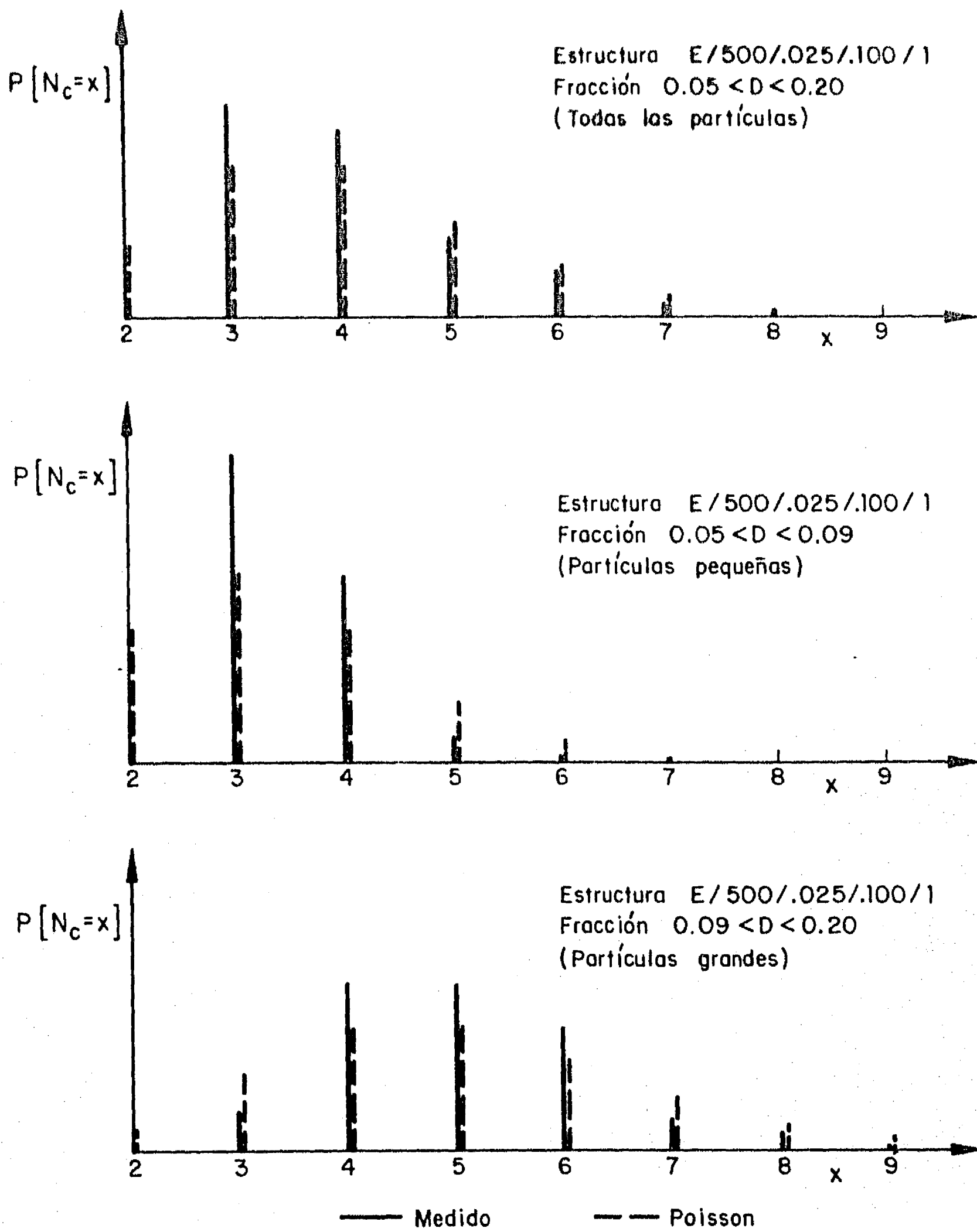


Fig 3.36 Comparación entre la distribución de probabilidad medida y una distribución de Poisson de misma media

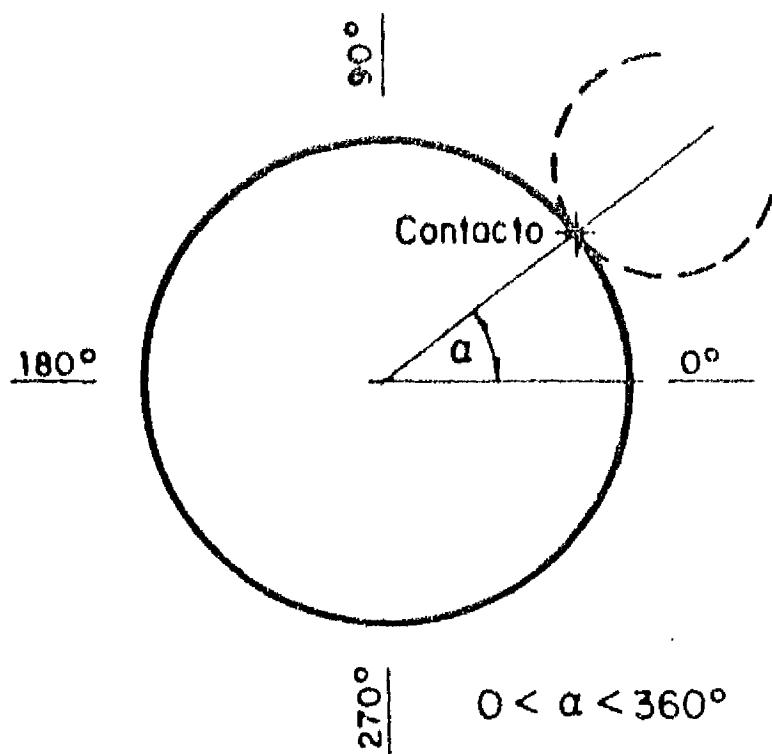
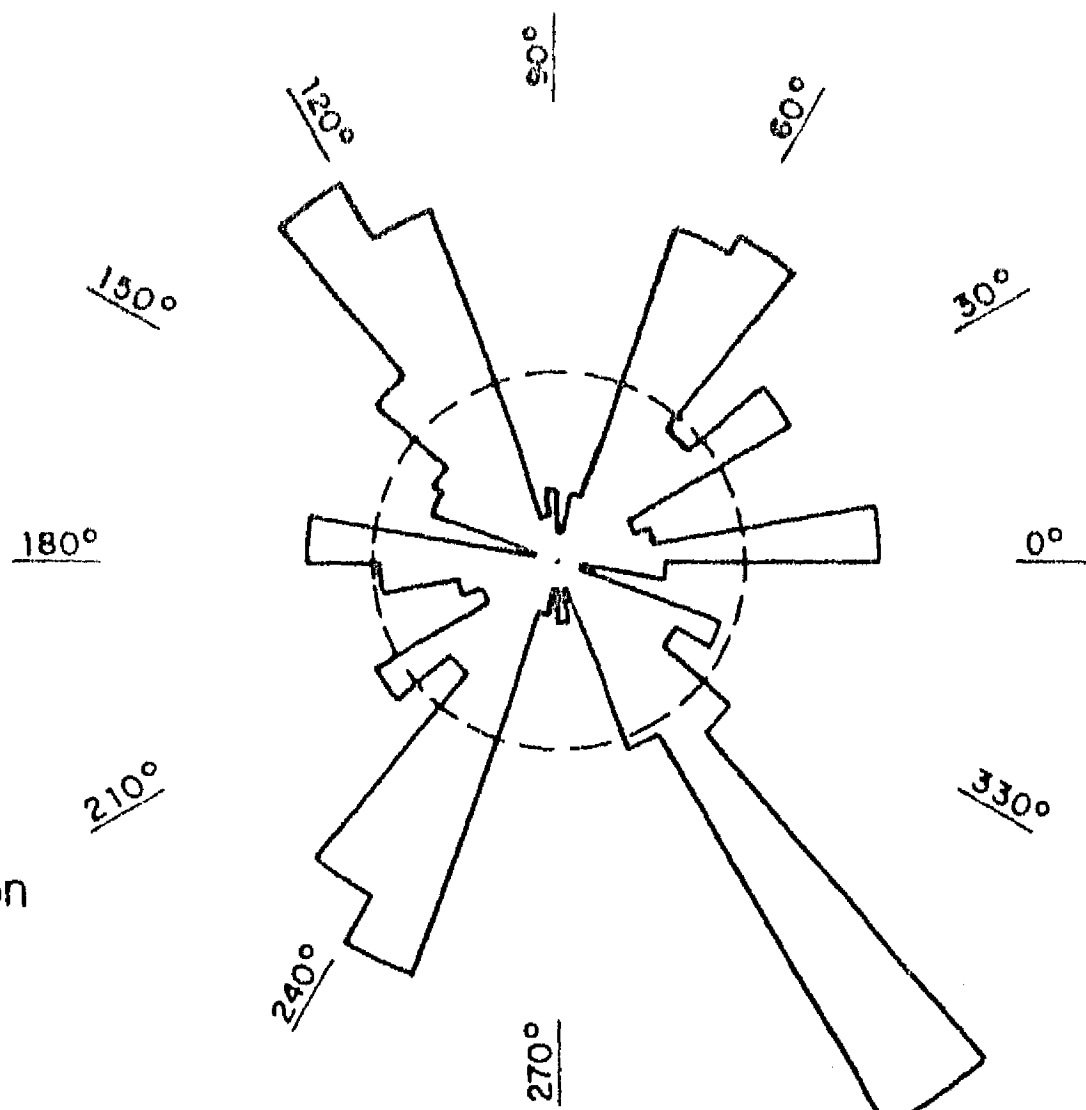
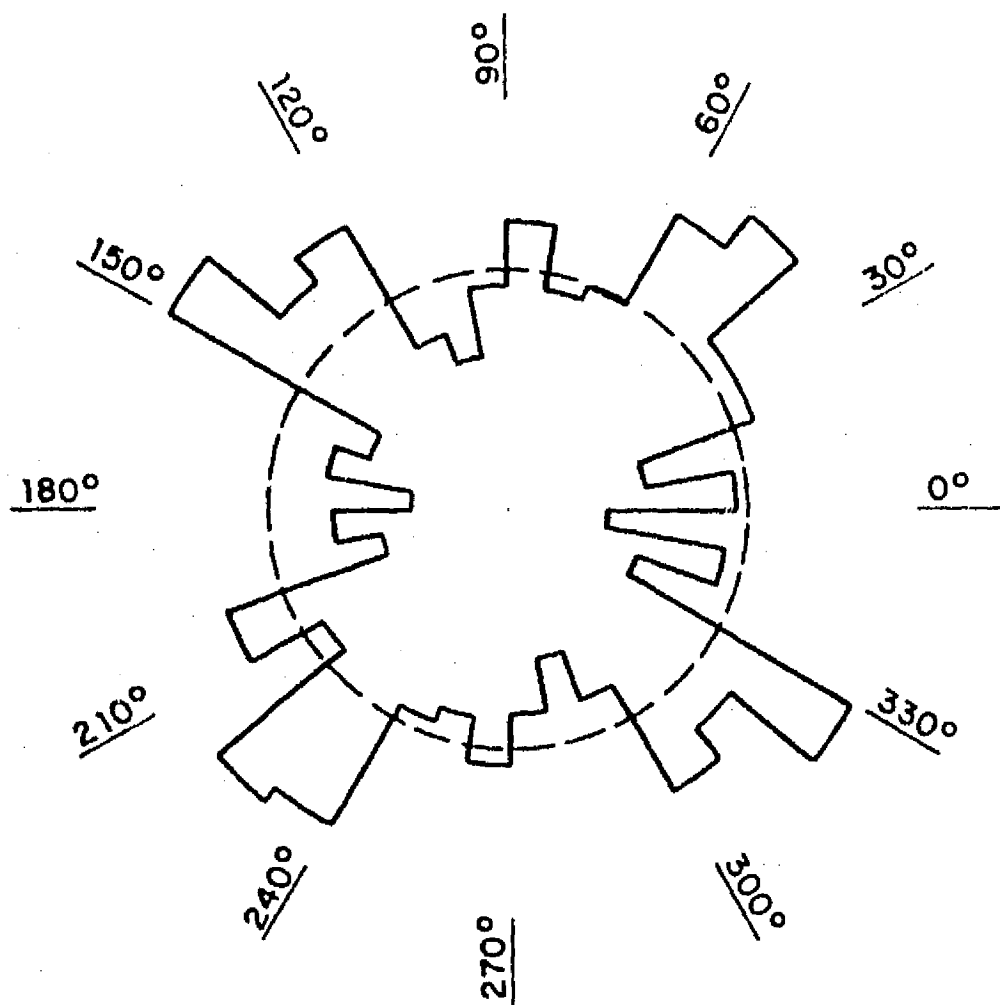


Fig 3.37 Definición de la posición de un contacto



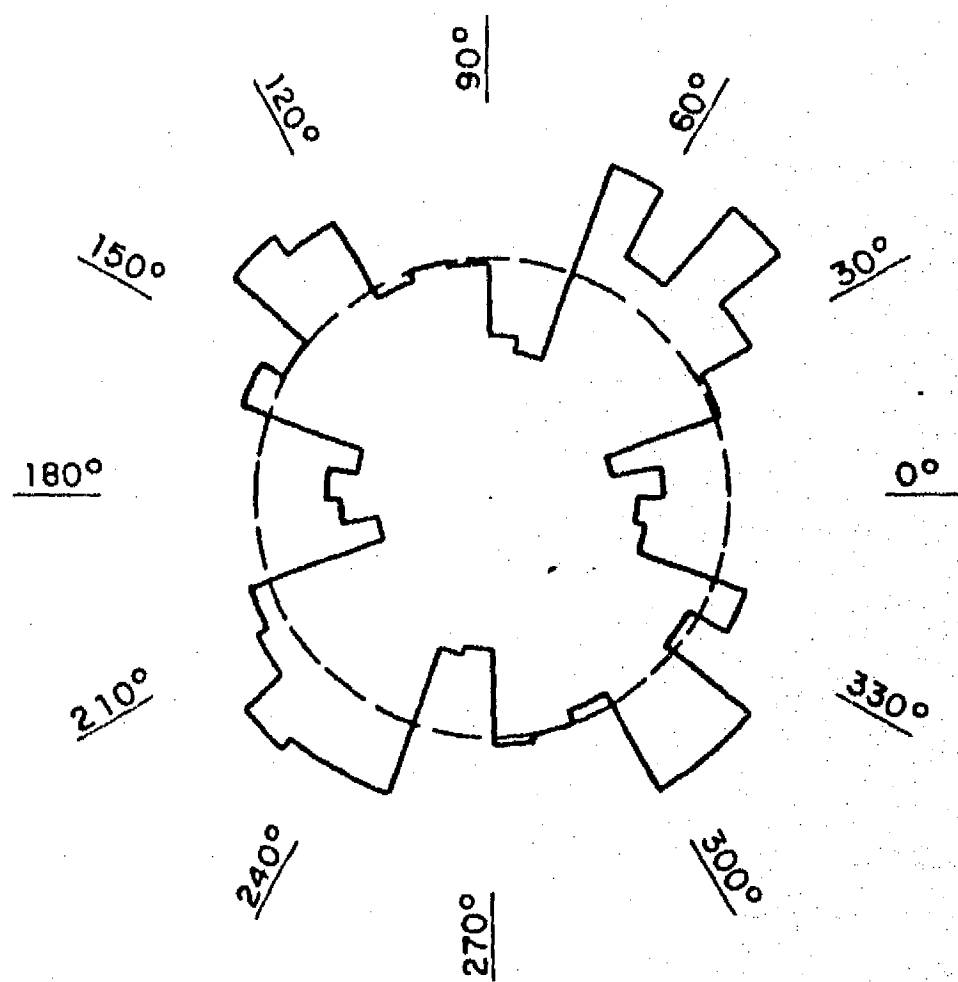
Estructura E/350/.060/.060/1

Fig 3.38 Anisotropía (histograma polar)



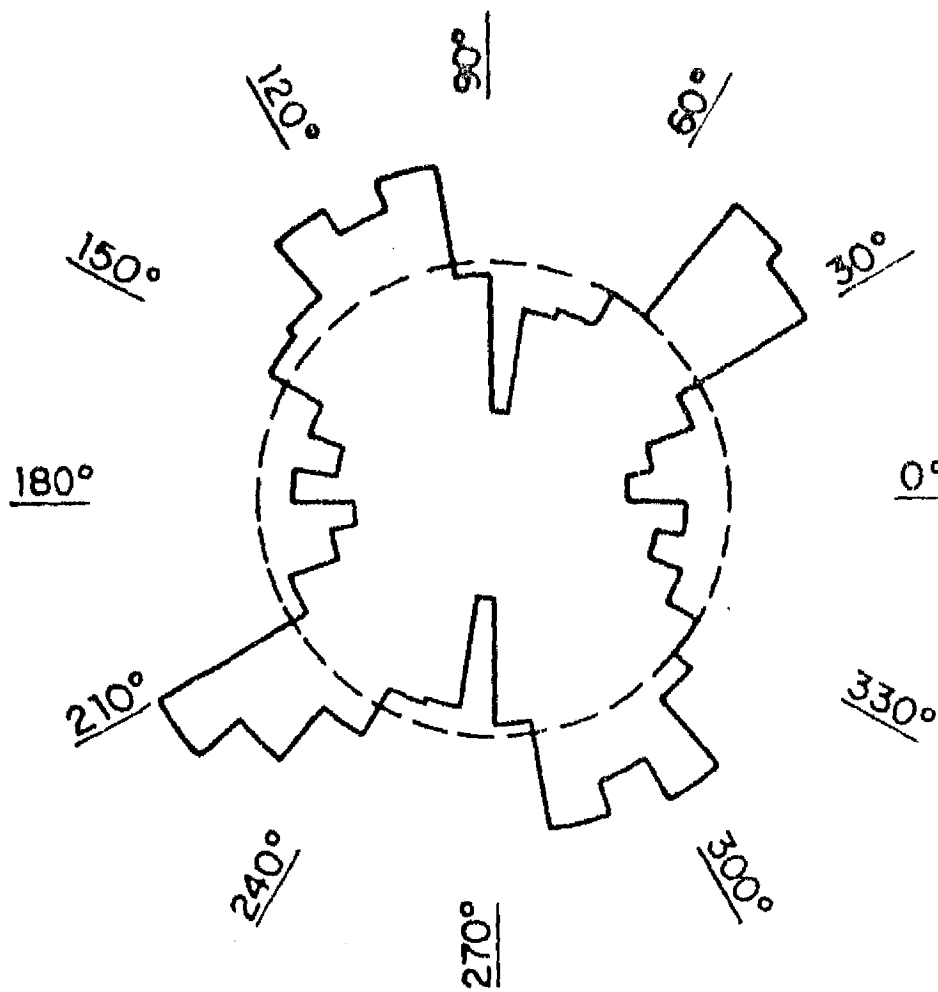
Estructura E/360/.050/.070/1

Fig 3.39 Anisotropía



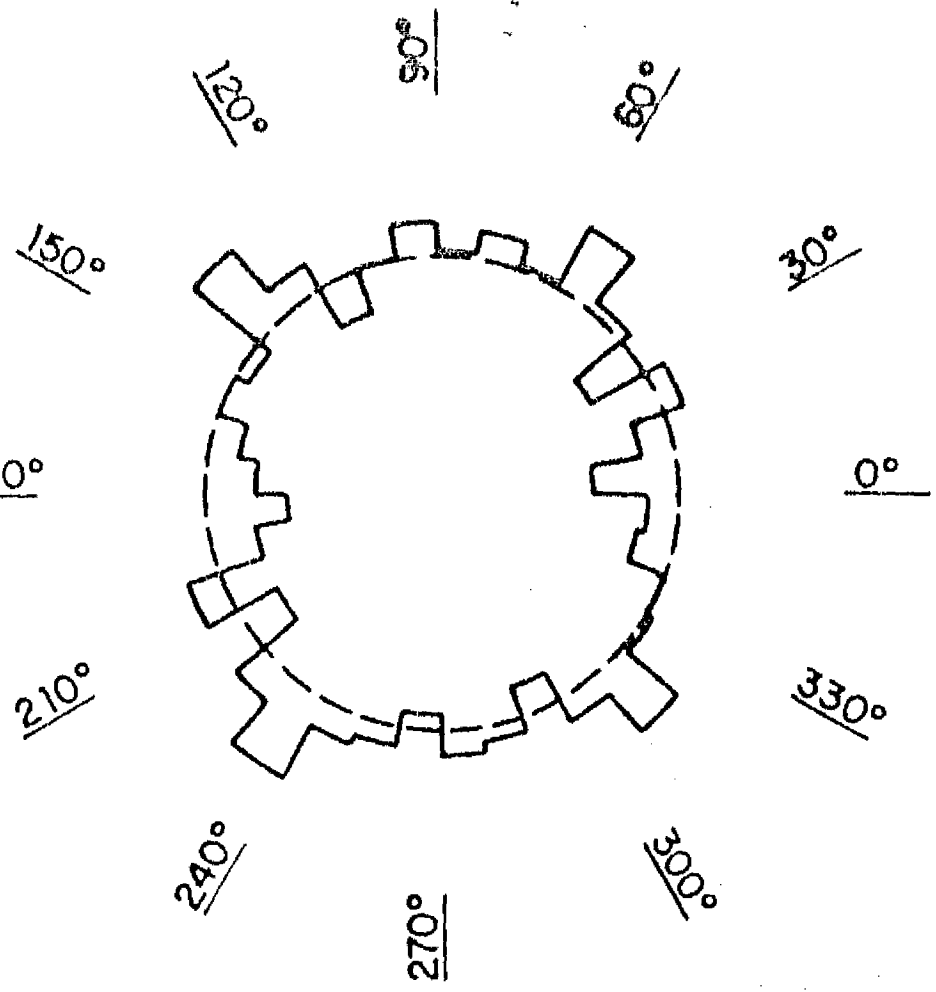
Estructura E/370/.040/.080/1

Fig 3.40 Anisotropía



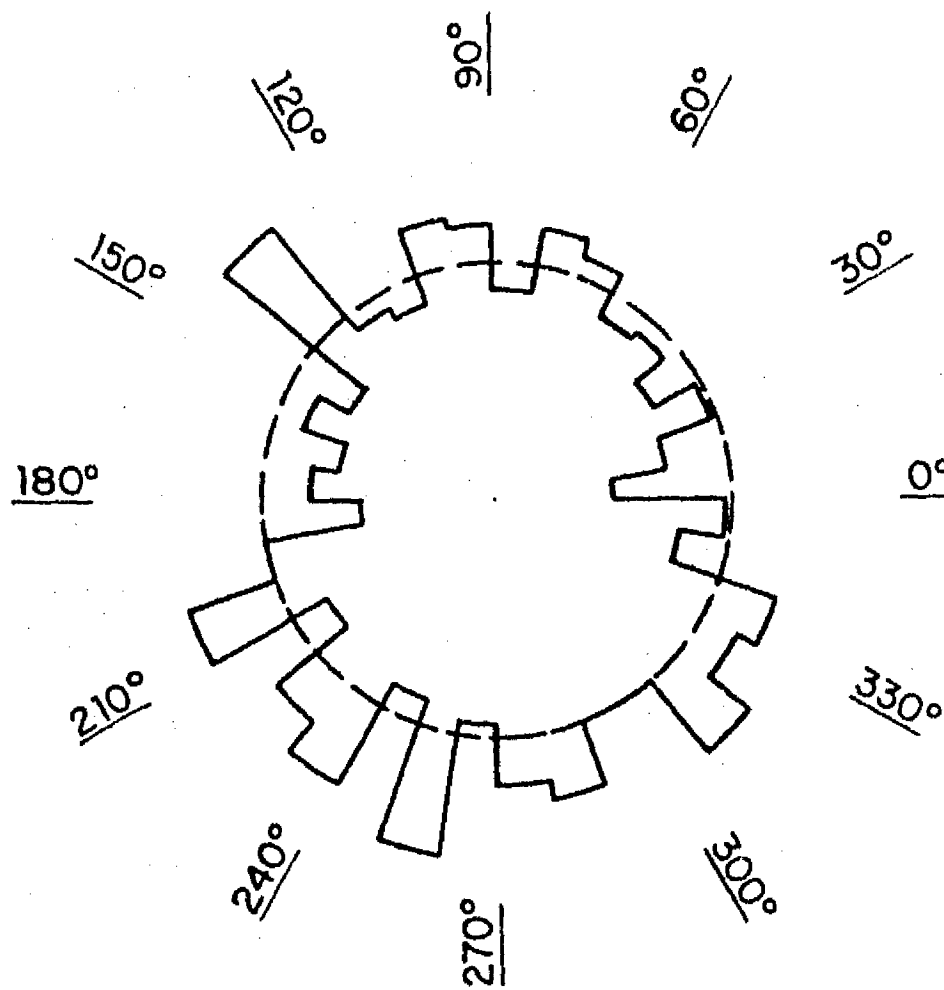
Estructura E/400/.030/.090/1

Fig 3.41 Anisotropía



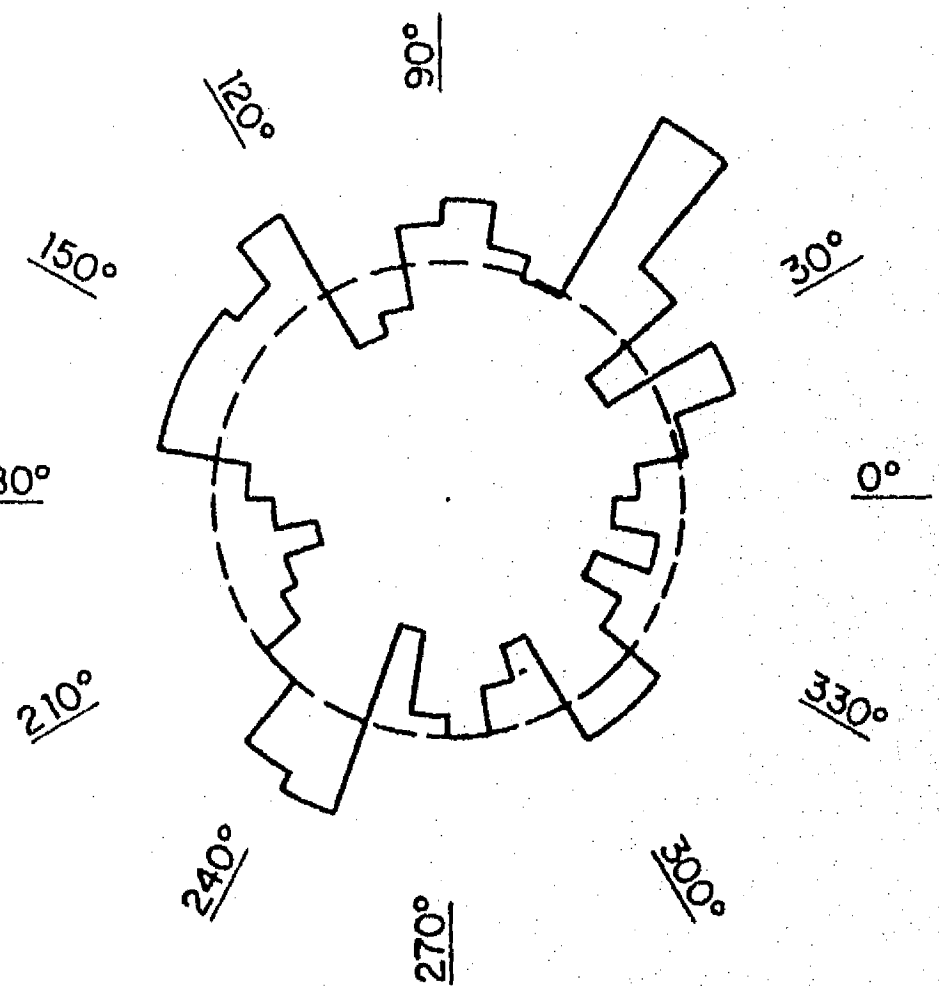
Estructura E/500/.025/.100/1

Fig 3.42 Anisotropía



Estructura E/500/.025/.100/1
(Fracción mas pequeña .025/.046)

Fig 3.43 Anisotropía



Estructura E/500/.025/.100/1
(Fracción mas gruesa .046/.100)

Fig 3.44 Anisotropía

Para los materiales mejor graduados, la anisotropía tiende a disminuir (Fig 3.42). Sin embargo, un análisis por fracciones muestra que las partículas más pequeñas tienden a presentar un mayor número de contactos en la parte inferior que en la parte superior. Las partículas grandes presentan la tendencia inversa y quedan en cierta forma cubiertas por una "lluvia" de partículas pequeñas (Fig 3.44).

- Distribución de tamaños de poros

Congruentemente con los conceptos introducidos en el inciso 2.3.7, en el caso de un arreglo de discos, la distribución de tamaños de poros $F_A(p)$ se puede definir como el porcentaje del área de los poros de la estructura que resulta inaccesible a discos de diámetro mayor o igual que p .

Se desarrolló un algoritmo (programa GRAVDS) para determinar esta distribución. Se recurre al método de Monte Carlo :

- . Se generan N puntos aleatorios dentro de la estructura analizada, rechazando los que caigan dentro de los discos. La relación entre el número de puntos aceptados y el número total de puntos generados permite estimar de paso la porosidad

- . Para cada punto se determina por tanteos el menor diámetro p de disco para el cual el punto queda dentro de una área inaccesible como la esquematizada en la Fig 3.45, o bien existe intersección de dicho disco con las partículas sólidas.

- . La relación entre el número de puntos que quedan dentro de una área inaccesible asociada con un diámetro igual o menor que un diámetro dado p y el número total de puntos aceptados permite estimar $F_A(p)$.

En las Figs 3.46 y 3.47 se presentan los resultados obtenidos al aplicar el procedimiento anterior a las estructuras del material uniforme y del material mejor graduado respectivamente. Se observa que, lógicamente, la dispersión de los tamaños de los poros es mayor para los materiales bien graduados que para los materiales uniformes.

- Otras características estructurales

Por brevedad, y tomando en cuenta las limitaciones del modelo bidimensional, se omiten aquí los resultados de otros análisis que fueron realizados sobre aspectos como la densidad de probabilidad de distancias entre centros de partículas, la granulometría aparente a lo largo de una recta, la función característica, el modelo de elipses, etc.

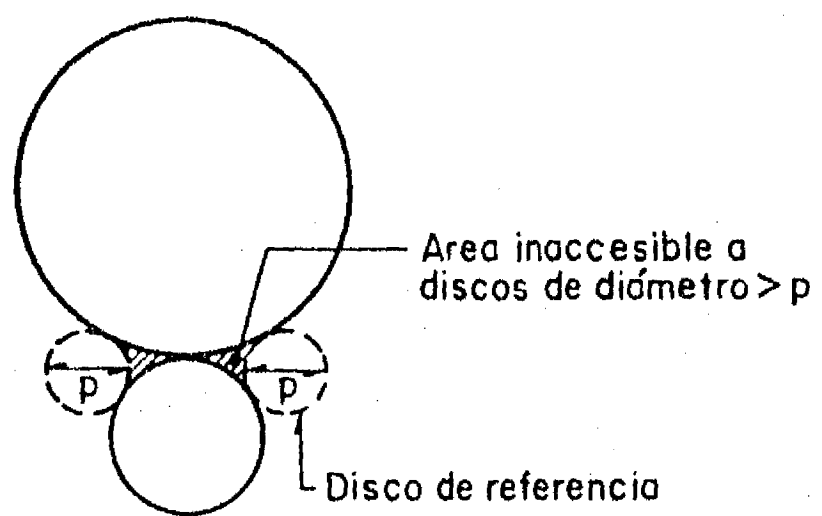


Fig 3.45 Area inaccesible a un disco de referencia de diámetro $> p$

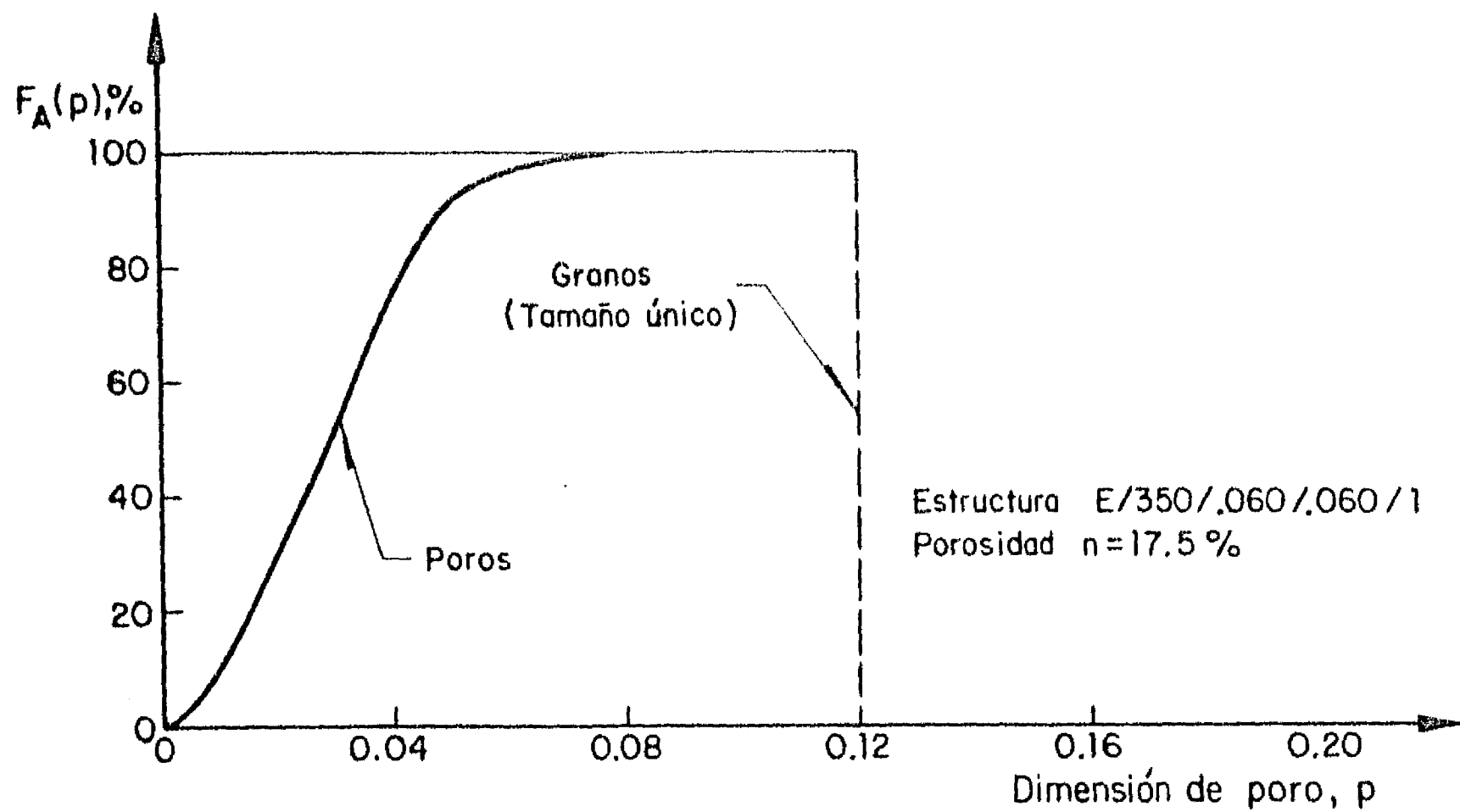


Fig 3.46 Distribución de tamaños de poros

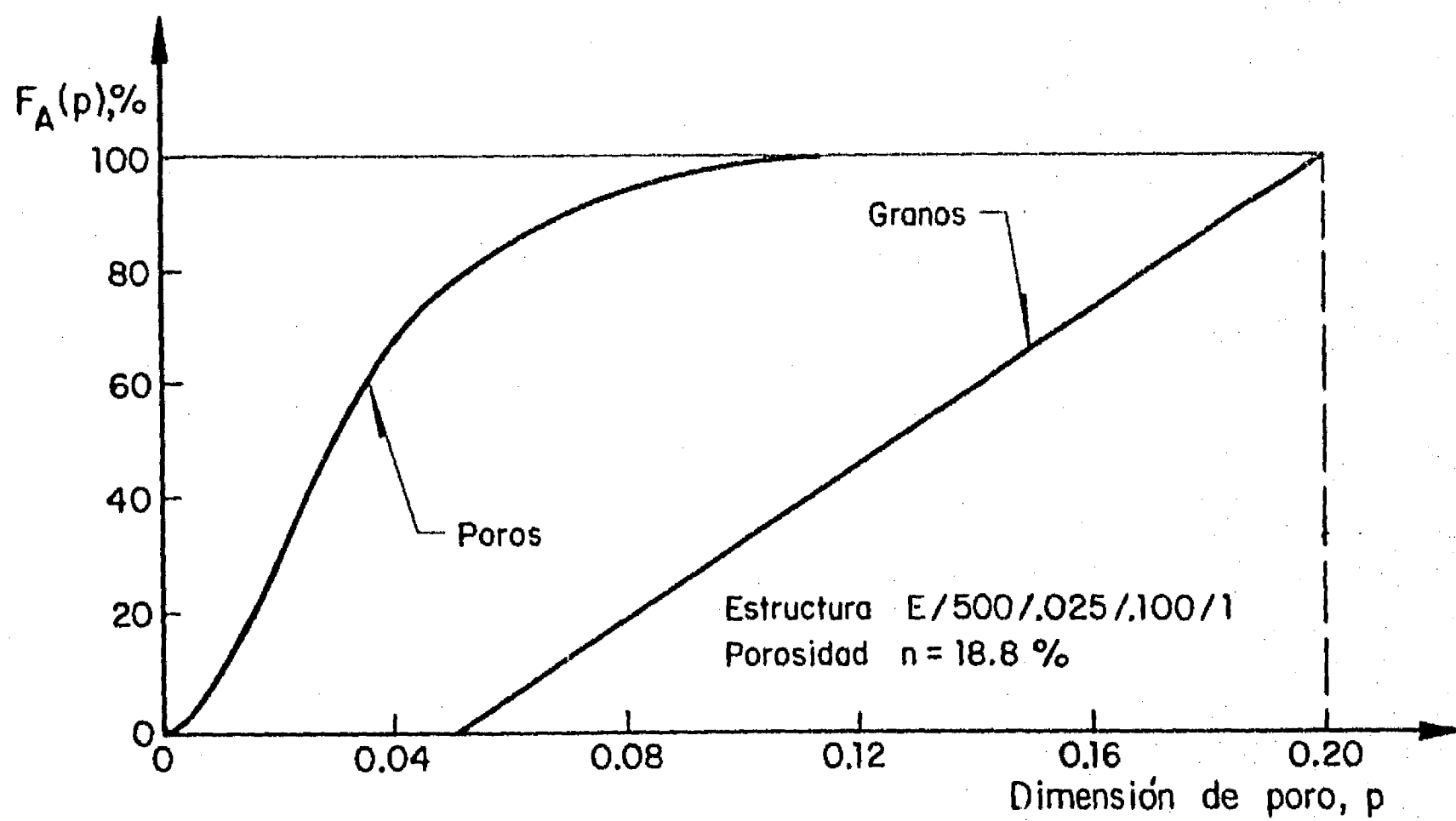


Fig 3.47 Distribución de tamaños de poros

b) Modelo tridimensional

- Algoritmo de formación de la estructura

El algoritmo (programa ESFERAS) es análogo al desarrollado para discos :

. Se define inicialmente un recipiente constituido por cinco esferas de gran diámetro (cuatro paredes y fondo, Fig 3.48).

. Se escogen al azar un diámetro dentro de la distribución granulométrica en número del material que se pretende simular y un eje de caída.

. Por inspección, se determina la primera esfera (en su caso el fondo del recipiente) que entra en contacto con la nueva partícula. Posteriormente, se buscan, nuevamente por inspección, dos esferas más (en su caso el fondo o las paredes del recipiente) que puedan proporcionar un segundo y tercer punto de contacto asegurando el equilibrio de la partícula.

. Se verifica que el equilibrio así obtenido es estable y que la nueva esfera no interseca ninguna de las anteriores, ni el recipiente. En este caso, la posición ocupada por la partícula se acepta como definitiva; en caso contrario, se repite el proceso hasta encontrar una posición aceptable.

Se repiten los pasos anteriores hasta alcanzar un número de partículas suficiente para llenar el recipiente hasta un nivel prefijado.

Una alternativa consiste en probar para cada partícula diferentes posiciones y conservar la más baja, con lo que se logra reducir la porosidad de la muestra [Auvinet, 1973].

- Granulometrías consideradas

Para los estudios paramétricos que se presentan a continuación, se consideró una densidad de probabilidad granulométrica de tipo trapecial, pero ahora en volumen (Fig 3.49) :

$$f_{3v}(d) = ad + b \quad ; \quad \text{para } D_{\text{mín}} < d < D_{\text{máx}} \quad (3.38)$$

Las características de este tipo de distribución y el método de muestreo se presentan en el inciso 4.2 del Anexo I.

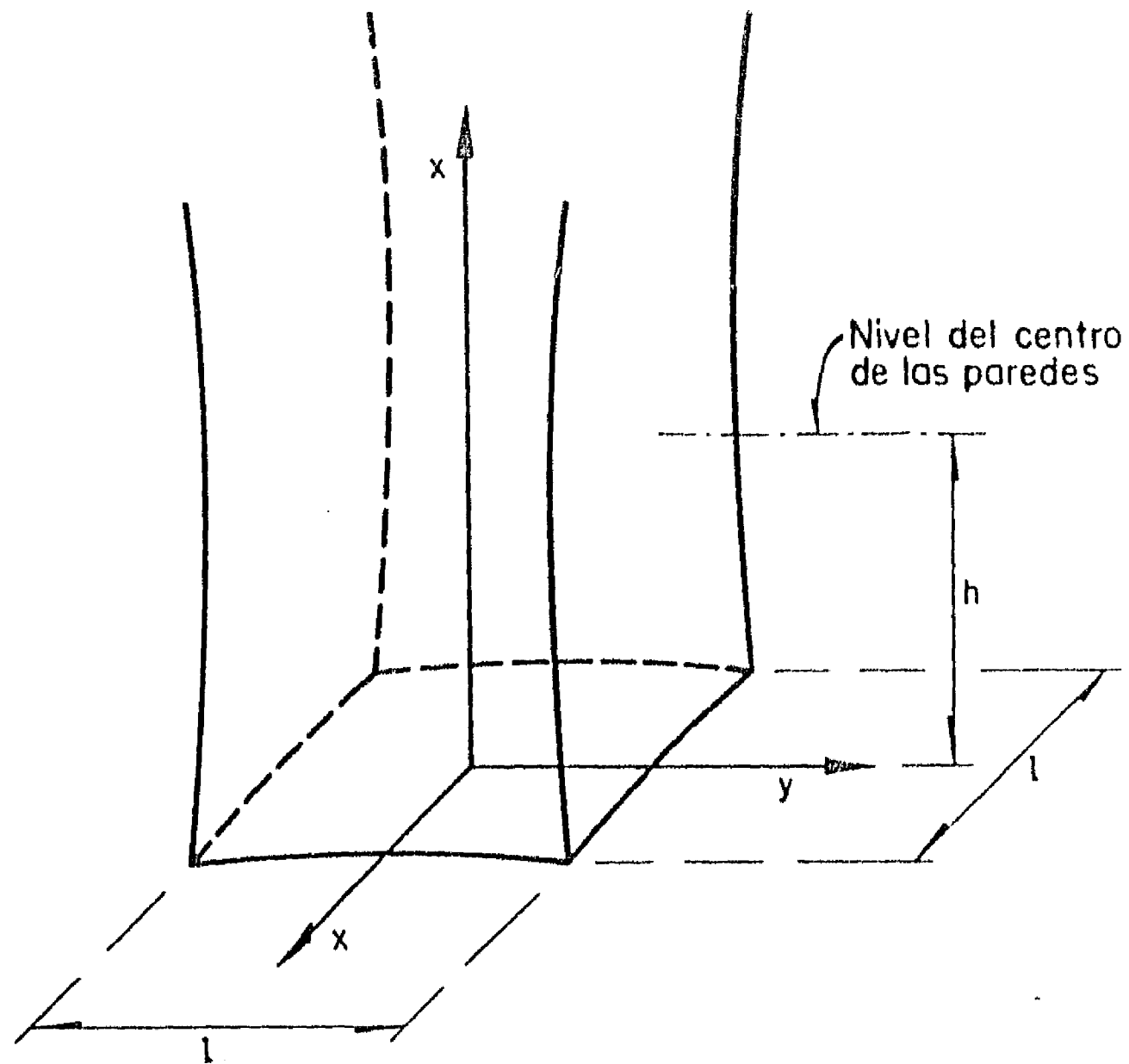
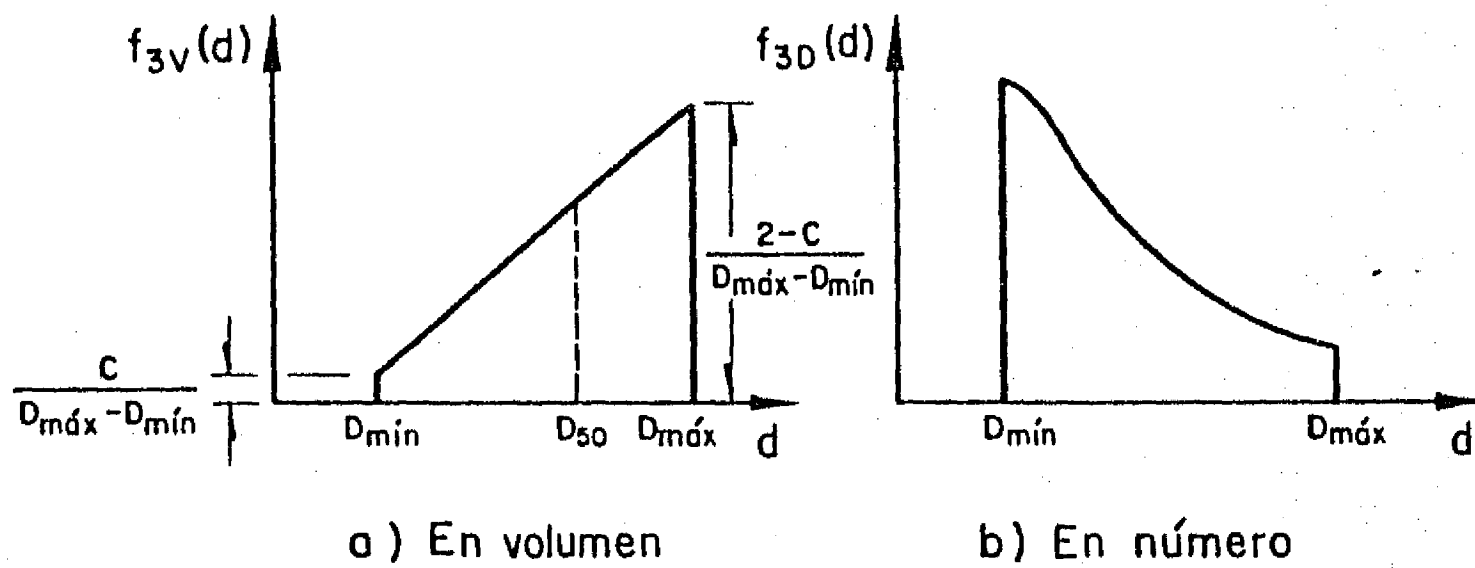


Fig 3.48 Recipiente. Modelo tridimensional



a) En volumen

b) En número

Fig 3.49 Densidades granulométricas de los materiales simulados

- Estructuras construidas

En la Tabla 3.7 se indican las características de algunas estructuras obtenidas. Las dimensiones del recipiente se fijaron en forma arbitraria de tal forma que $l = h = 2$ (Fig 3.48). La estructura E fue obtenida rellenando los poros de la estructura D con partículas más pequeñas.

Se incluye en la Tabla 3.8, a título de ejemplo, una parte de la matriz de definición de una de las estructuras construidas. Se incluyen las coordenadas x , y , y z del centro y el radio de cada una de las esferas, así como el número de contactos por partícula, N_c .

- Granulometría teórica y obtenida

En forma análoga a lo ya planteado para el modelo bidimensional, se compararon las principales características granulométricas (D_{10} , D_{30} , D_{60} , C_u y C_c) teóricas y realmente obtenidas (programas GRANUL/TEORICA y GRANUL/OBTENIDA).

Para el número de partículas indicado en la Tabla 3.7, la coincidencia es satisfactoria, sobre todo para los materiales más uniformes.

- Distribución de las partículas en el espacio

Para evaluar la homogeneidad de las muestras, se contó el número λ_A de partículas intersecadas por planos horizontales a diversas alturas (programa HOMOGENEIDAD).

Se muestran en las Figs 3.50 y 3.51 los resultados obtenidos para las estructuras A, C₁, D y E. La estructura del material con granulometría uniforme es la más homogénea. Las muestras de materiales mejor graduados presentan por el contrario cierta segregación. Se observan capas de partículas pequeñas en el fondo y a ciertas alturas. Este efecto es particularmente notable en la estructura D, para la cual el número de partículas intersecadas presenta grandes desviaciones respecto al valor teórico para un medio homogéneo (Ec 2.59).

- Porosidad y relación de vacíos

Se calculó la porosidad asociada a volúmenes esféricos localizados dentro de la muestra, como relación entre el volumen de partículas contenidas dentro de la esfera de referencia y el volumen de esta esfera (programa POROSIDAD).

TABLA 3.7 Estructuras tridimensionales construidas

Estructura	Número de partículas	Coef. c (Anexo I)	D _{mín}	D _{máx}	C _u *	C _c **
A	460	---	0.28	0.28	1	1
B	480	0.2	0.16	0.40	1.55	1.05
C ₁	500	0.3	0.08	0.80	2.56	1.22
C ₂	520	0.3	0.08	0.80	2.56	1.22
D	1580	1.0	0.06	1.80	4.72	1.31
E***	700	---	0.08	0.80	2.51	1.22

* $C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}}$ (coeficiente de uniformidad)

** $C_c = \frac{D_{30}^2}{D_{10}D_{60}}$ (coeficiente de curvatura)

*** E es la estructura C₁ densificada; los parámetros granulométricos son en este caso los determinados en la muestra a posteriori

TABLA 3.8 Fragmento de la matriz de definición de la estructura C

Coordenadas del centro de la esfera			Radio	Número de contacto
X	Y	Z	R	N _c
-0.720	0.965	0.027	0.041	4
0.839	-0.962	0.028	0.044	5
-0.965	-0.530	0.029	0.041	3
-0.966	0.350	0.030	0.040	3
0.961	-0.767	0.030	0.045	4
-0.962	0.707	0.030	0.044	4
-0.312	-0.965	0.030	0.040	3
-0.958	0.958	0.030	0.049	3
-0.958	0.958	0.031	0.041	3
0.965	0.317	0.031	0.047	3
0.959	0.859	0.032	0.049	3
0.957	0.957	0.032	0.043	4
-0.697	0.960	0.033	0.047	5
0.385	0.963	0.033	0.045	3
0.747	-0.595	0.033	0.040	4
-0.960	-0.617	0.033	0.040	4

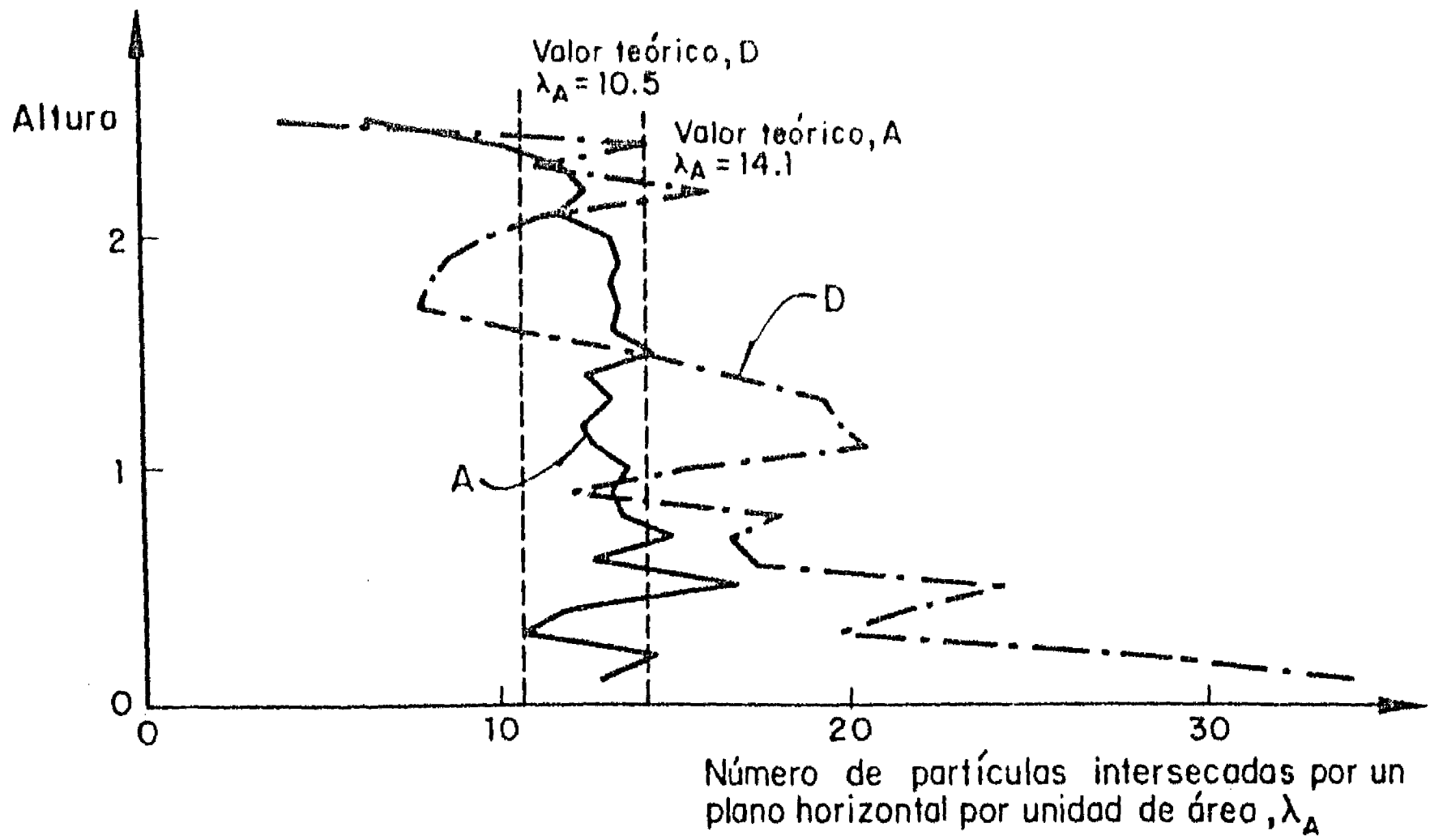


Fig 3.50 Homogeneidad. Estructuras A y D

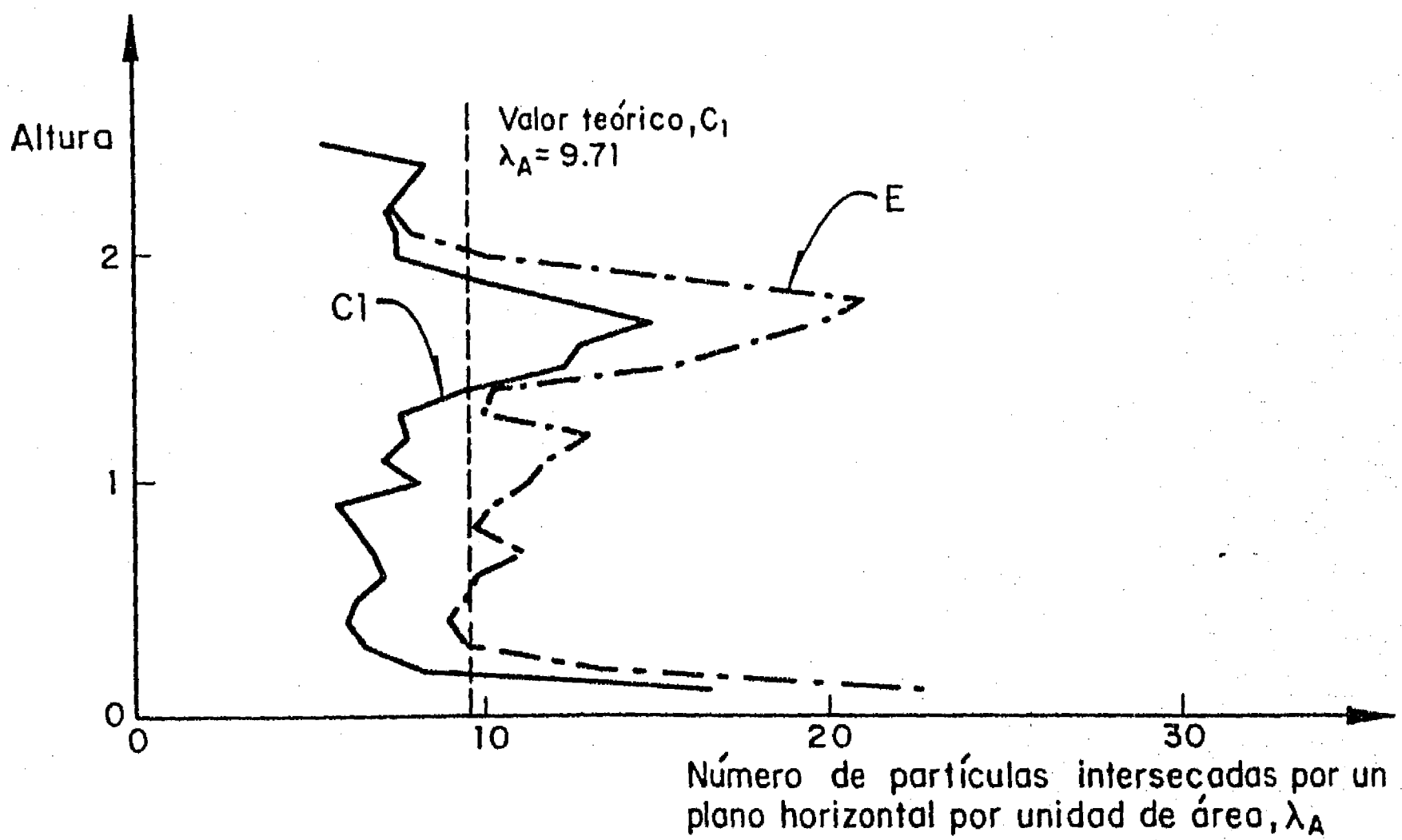


Fig 3.51 Homogeneidad. Estructuras C₁ y E

En la Fig 3.52, se muestran los valores de la porosidad determinados dentro de esferas con centro en el punto de coordenadas $(0,0,1)$ y de diámetro D_c variable de 0.1 y 2.0 con incrementos de 0.1, para cada una de las estructuras construidas. Se observa que, conforme crece D_c , la porosidad converge en probabilidad hacia un valor constante. Las estructuras estudiadas se encuentran en estado suelto (porosidad próxima a 0.4), la mas densa siendo por supuesto la estructura E con una porosidad de aproximadamente 0.34. Los materiales mejor graduados tienden a presentar una porosidad más baja, pero de mayor variancia debido al efecto de escala (estructura D principalmente).

Se sabe que cerca de las paredes de un recipiente la porosidad tiende a aumentar. Para estudiar este efecto, se calculó por el método de Monte Carlo la porosidad dentro de volúmenes prismáticos ubicados a diferentes distancias l_c de la pared o del fondo del recipiente y de $0.05l_c$ de ancho (programa POR/PARED). Se promediaron las porosidades correspondientes a los mismos valores de l_c respecto a cada una de las cuatro paredes. Los resultados obtenidos se presentan en las Fig 3.53 y 3.54 .

Para materiales uniformes o aproximadamente uniformes (Fig 3.53), la porosidad presenta oscilaciones con un valor máximo cerca de las paredes seguido de un mínimo a una distancia del orden del radio de las partículas y de un máximo cuando la distancia alcanza el diámetro. A partir de esta distancia, se observa poca variación de la porosidad. No se detectan diferencias entre paredes y fondo. Para materiales mejor graduados (Fig 3.54), la oscilación tiende a desaparecer y se observa un valor máximo cerca de las paredes seguido de una reducción paulatina. La distancia en que se estabiliza la porosidad no puede definirse con precisión, pero varía según la granulometría de 3 a 6 veces $D_{mín}$. En el caso del fondo, el efecto de pared parece menos acentuado pero se alcanza a distinguir un mínimo de porosidad localizado entre 1 y 3 veces $D_{mín}$. La menor porosidad de la estructura E no parece modificar el efecto de pared.

Tomando en cuenta los resultados anteriores, se pudo definir en el centro del recipiente un núcleo cúbico de lado igual a 0.6 veces el ancho del recipiente, dentro del cual puede considerarse que el efecto de pared es despreciable para las estructuras de la Tabla 3.7.

- Número de coordinación

El método de formación de las estructuras conduce a que el número medio de contactos por partícula sea exactamente de seis (salvo en la estructura E), y el número mínimo igual a tres (puesto que para el equilibrio de una partícula se

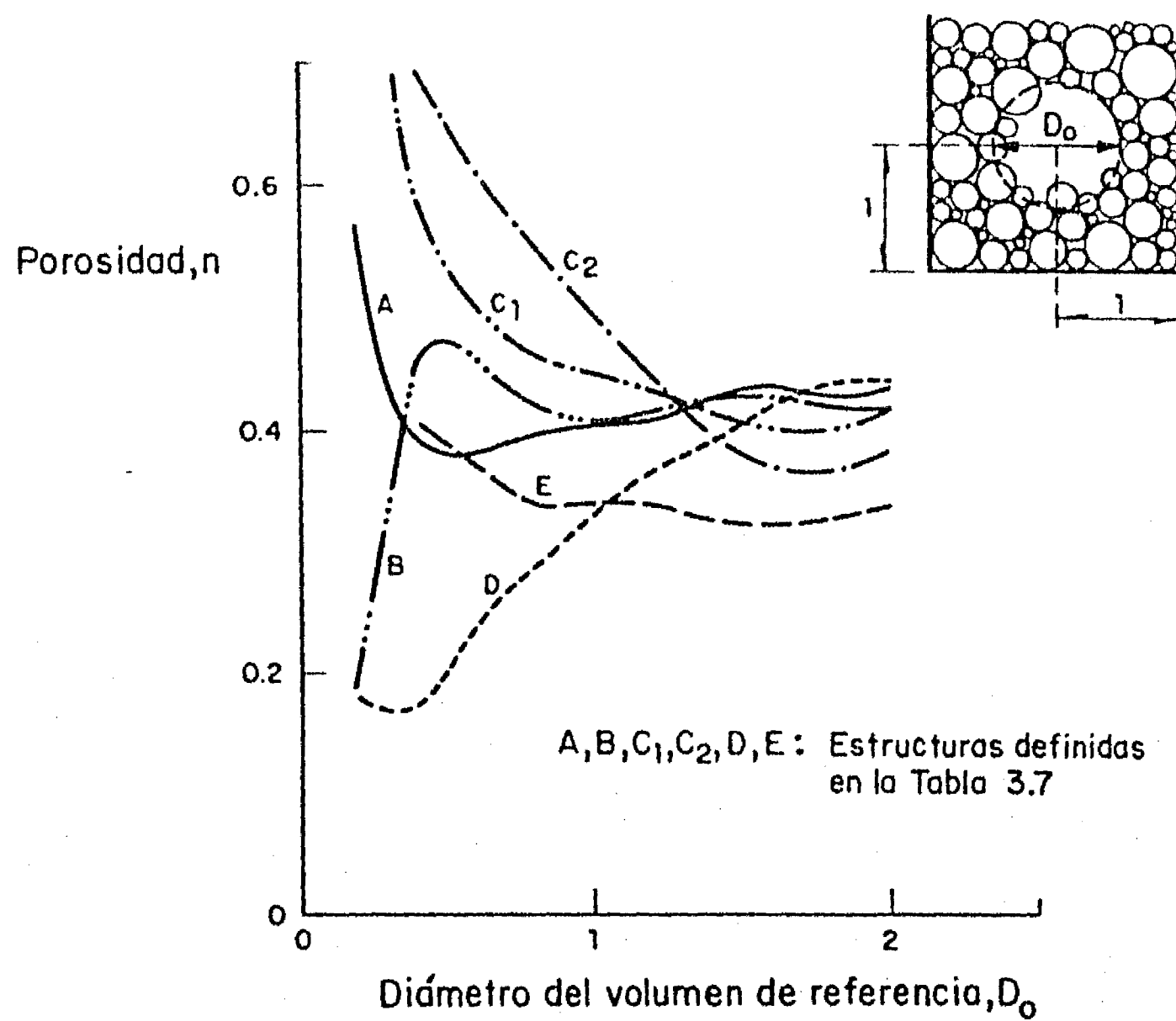
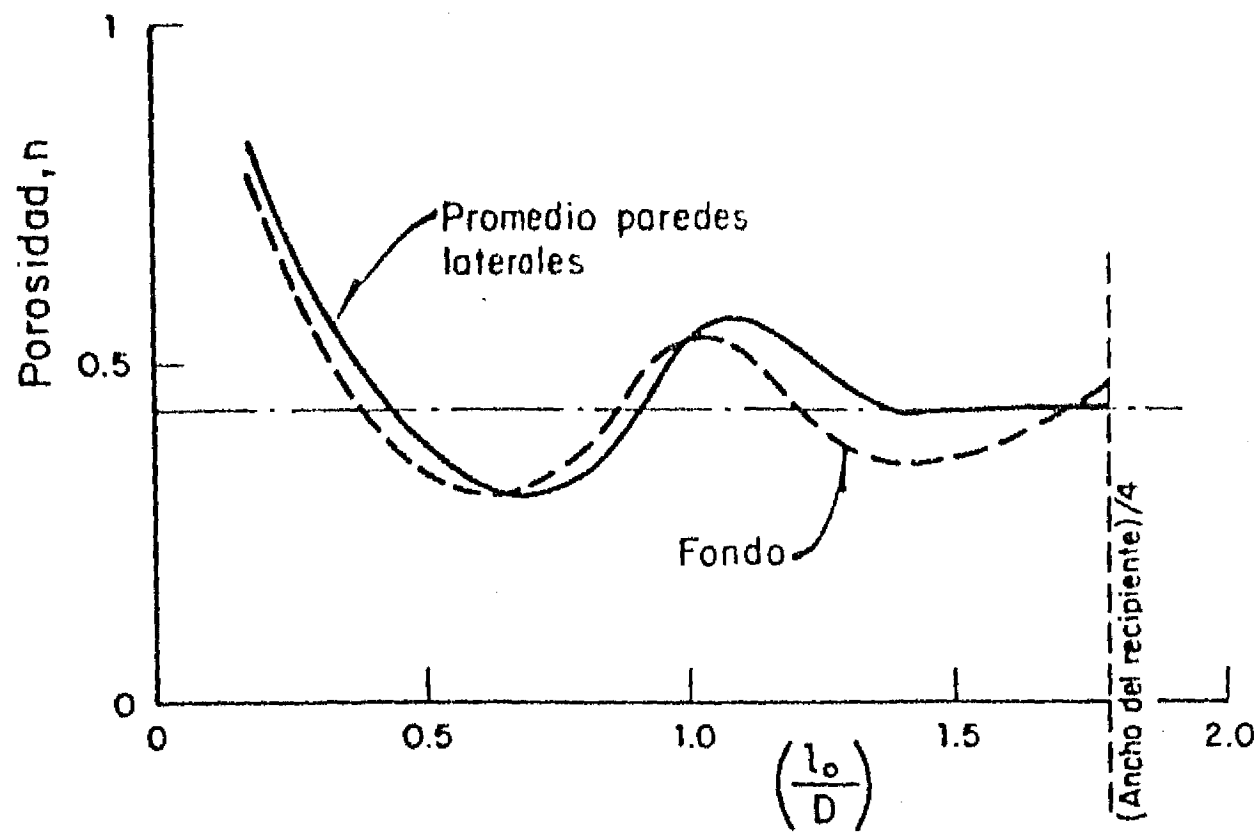
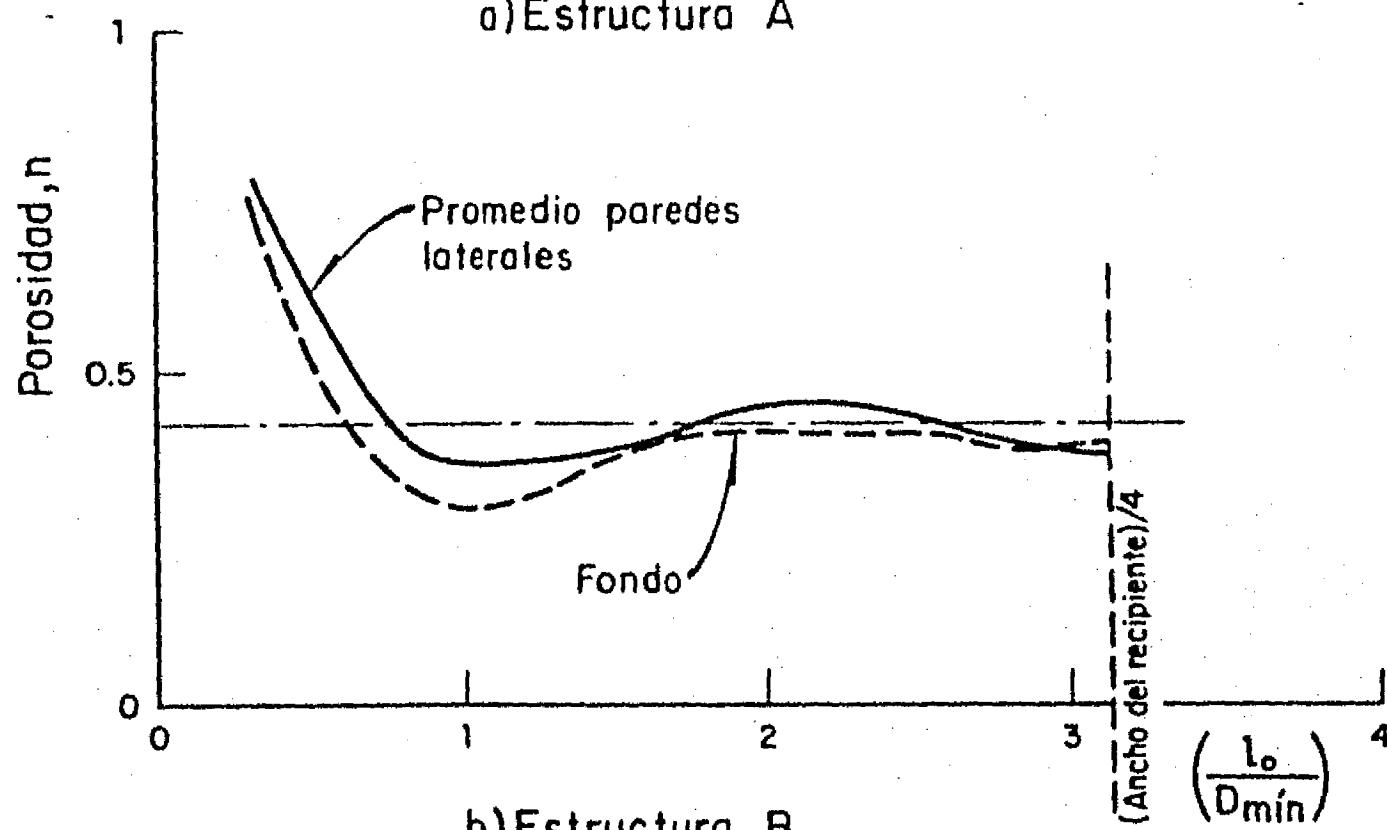


Fig 3.52 Porosidades medidos en volúmenes de diferentes dimensiones



a) Estructura A



b) Estructura B

Fig 3.53 Efecto de pared

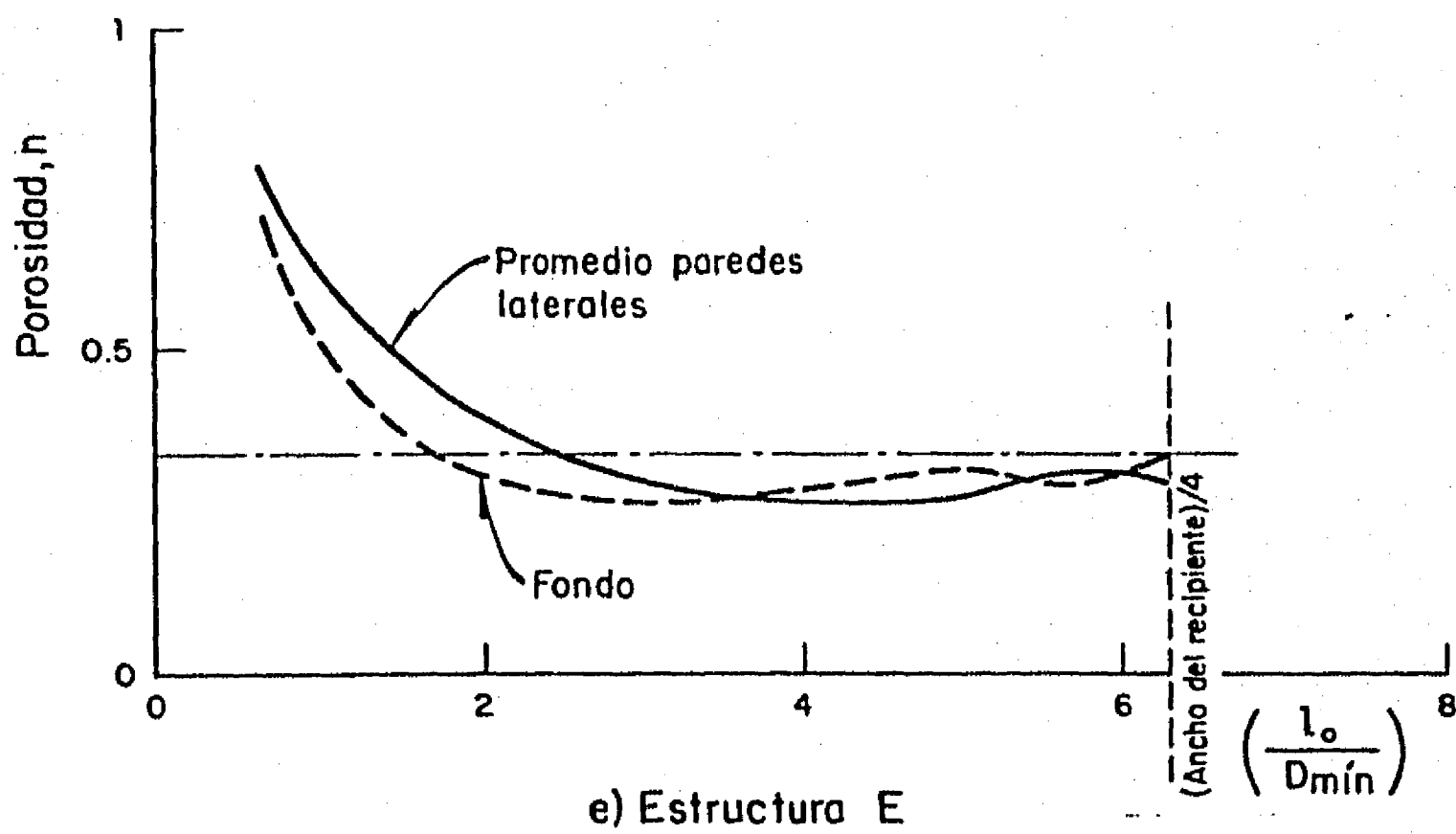
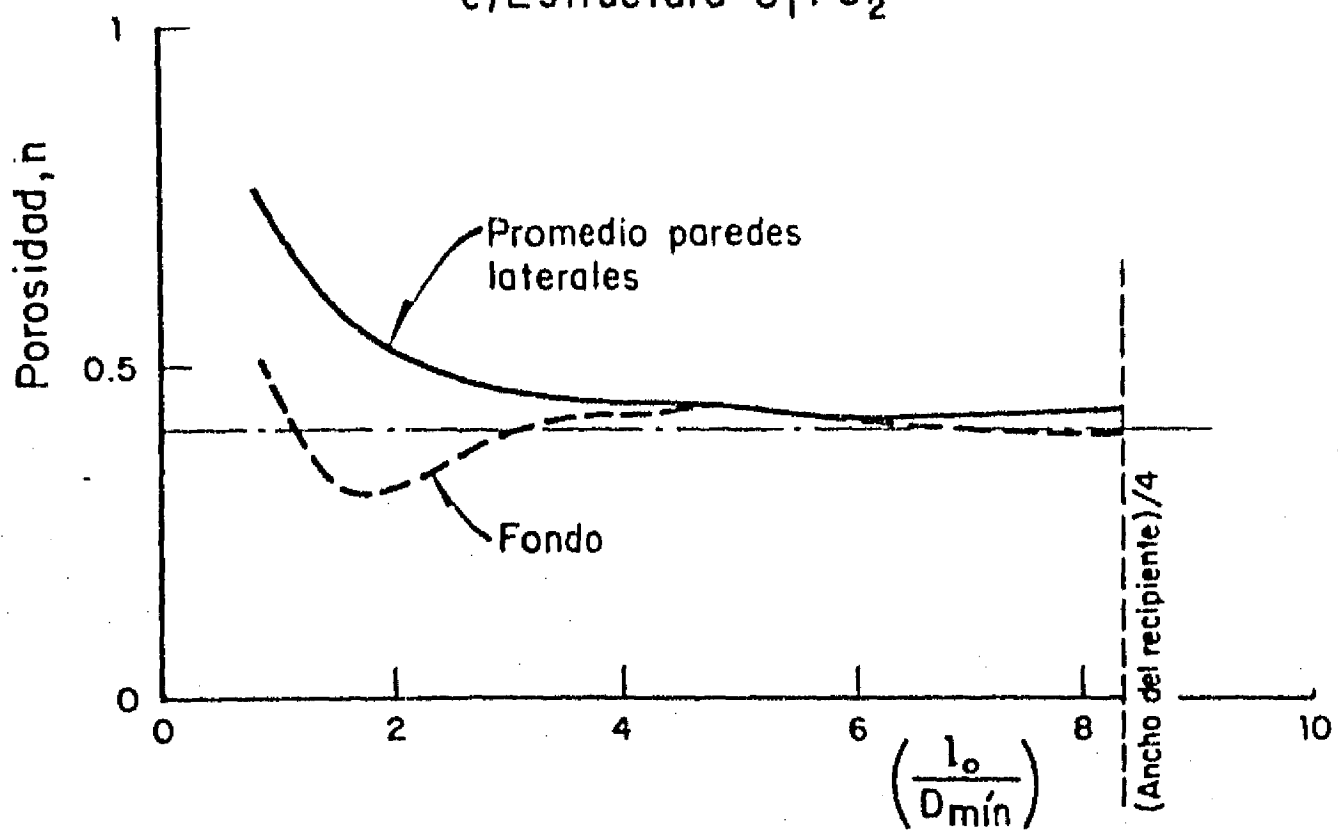
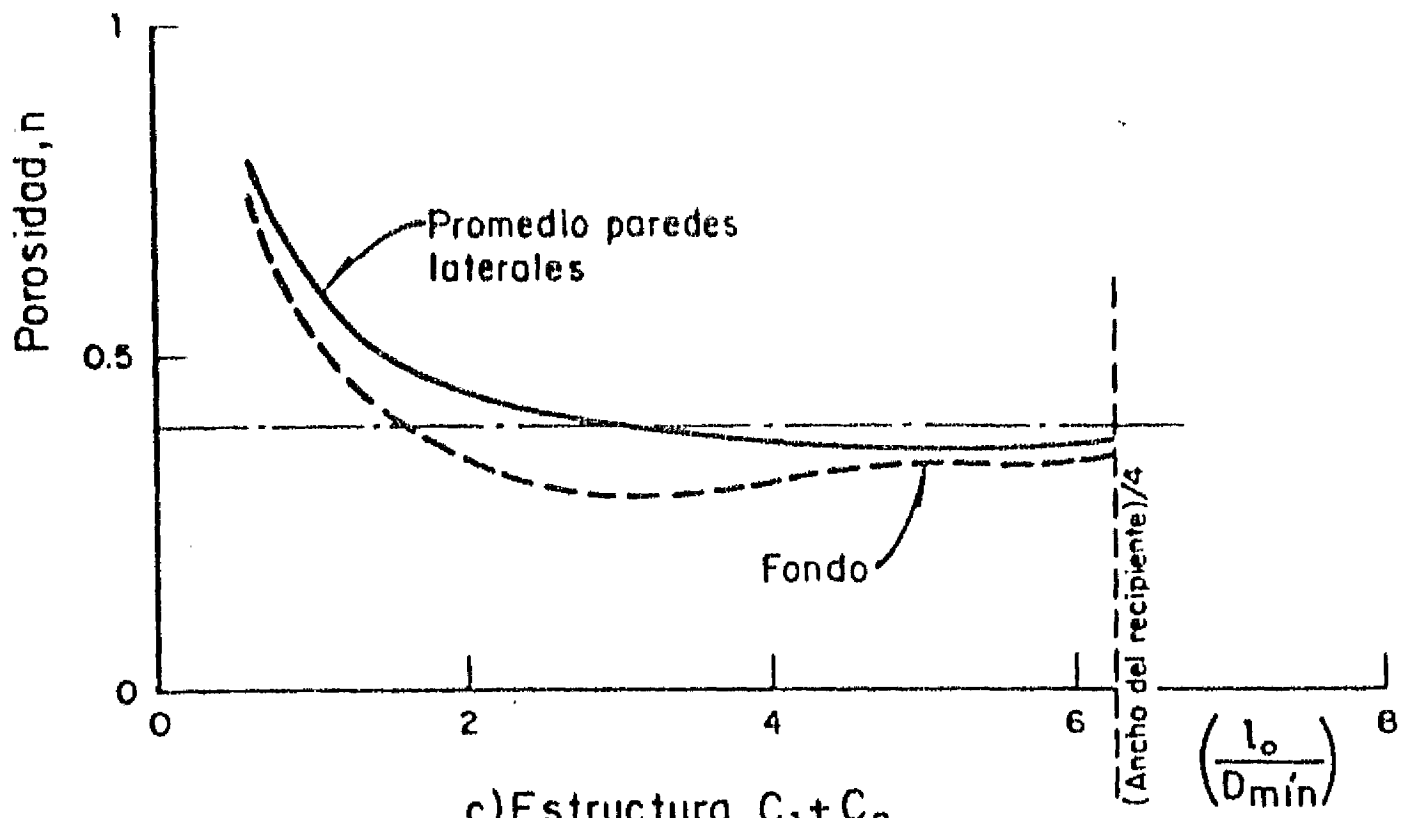


Fig 3.54 Efecto de pared

necesitan por lo menos tres contactos).

Se ajustó un modelo de regresión lineal a la relación entre el número de contactos y la superficie externa de la partícula (programa NUMERO/CONTACTOS). Los resultados se presentan en la Fig 3.55 para las cinco estructuras no uniformes. Se observa que la pendiente de las rectas de correlación es mayor para los materiales bien graduados. Además, el origen de la recta de correlación tiene un valor poco diferente de tres en todas las estructuras. Por tanto, es posible considerar que el número medio de contactos adicionales a tres, $(N_c - 3)$, es proporcional al área lateral de la partícula. Para representar las variaciones alrededor de este promedio, parece por tanto adecuado un proceso aleatorio de tipo poissoniano :

$$P(N_c - 3 = x | D) = (\mu_D \pi D^2)^x \exp[-\mu_D \pi D^2] / x!$$

para $x = 0, 1, \dots$ (3.39)

donde

$$\mu_D = 3 / (\pi E_{3D} \{D^2\})$$

Intensidad del proceso (número de contactos adicionales a 3 por unidad de área superficial de la partícula)

Para establecer si la distribución de Poisson representa correctamente la distribución real, se obtuvieron los diagramas de frecuencia correspondientes al número de contactos por partícula para diversas fracciones granulométrica (programa DIST/CONTACTOS). La distribución observada se compara con una ley poissoniana de misma media.

En el caso de la estructura uniforme (Fig 3.56), el ajuste es pobre. En efecto, la ley de Poisson preve numerosas partículas con tres o cuatro contactos mientras la muestra no tiene esferas con tres contactos (lo que correspondería a un equilibrio local muy inestable) y tiene pocas con cuatro contactos : los arreglos obtenidos dieron en general lugar a cinco, seis o siete contactos por partícula.

En el caso de las estructuras de materiales mejor graduados (Figs 3.57 a 3.59), la ley de Poisson proporciona resultados mas aceptables, especialmente para las partículas más pequeñas. En el caso de las partículas mas grandes, el número de partículas resulta insuficiente para poder llegar a una conclusión definitiva.

Las desviaciones respecto a la ley de Poisson pueden explicarse por lo menos parcialmente por el hecho de que el número de contactos queda acotado por el número máximo de partículas de menor tamaño que pueden físicamente estar en contacto con una partícula. Sin embargo, salvo en el caso de

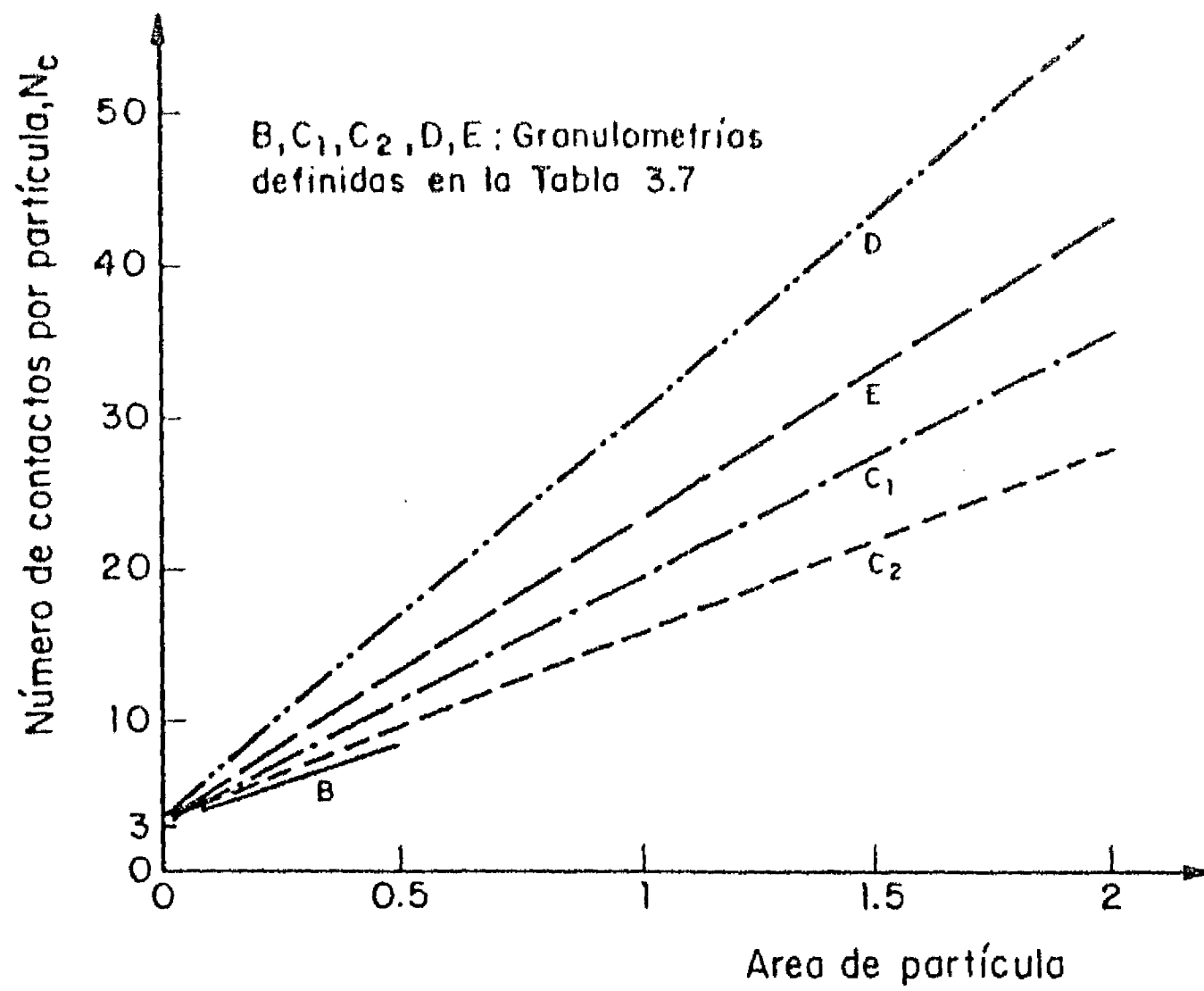


Fig 3.55 Correlación entre número de contactos y área de partícula

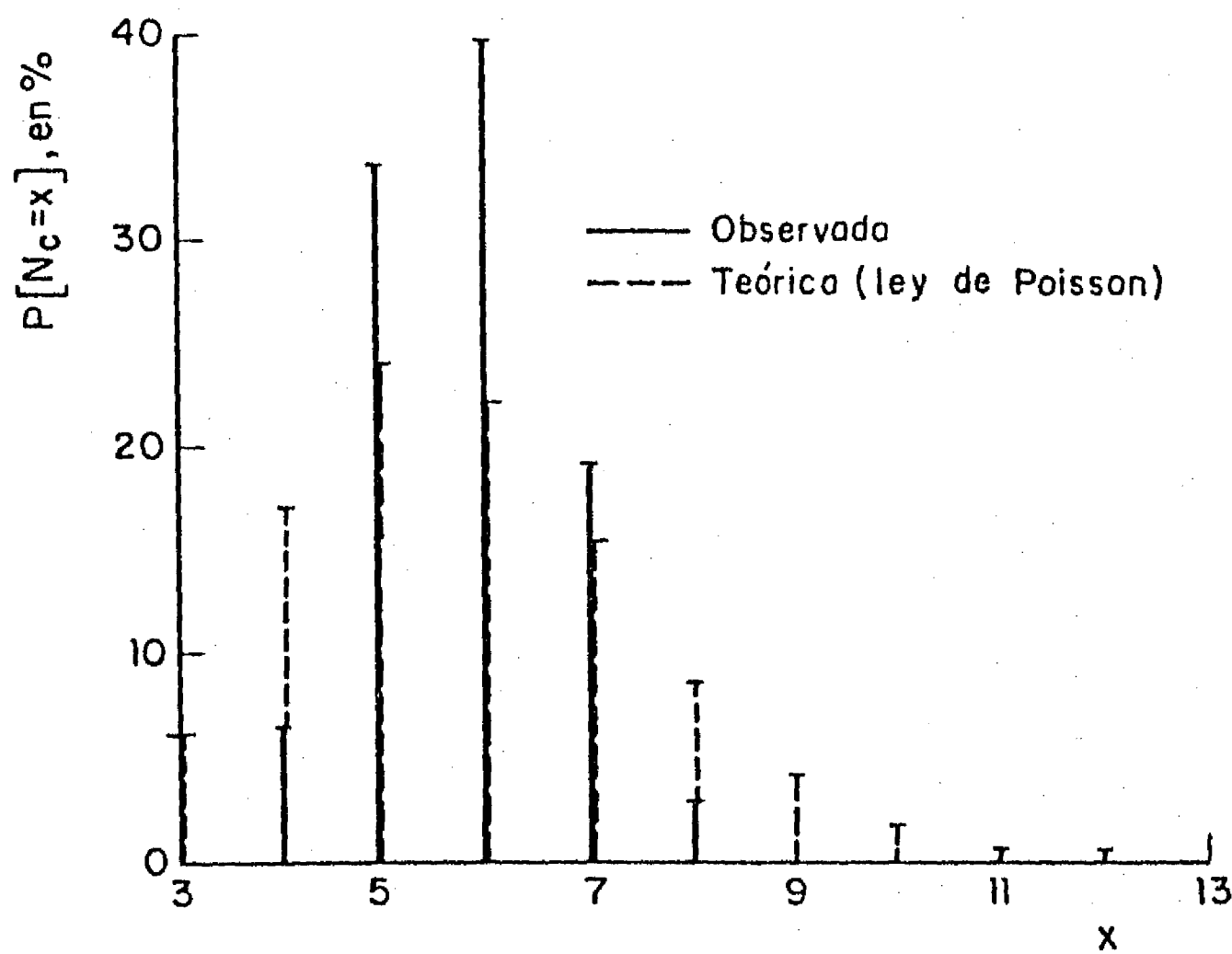
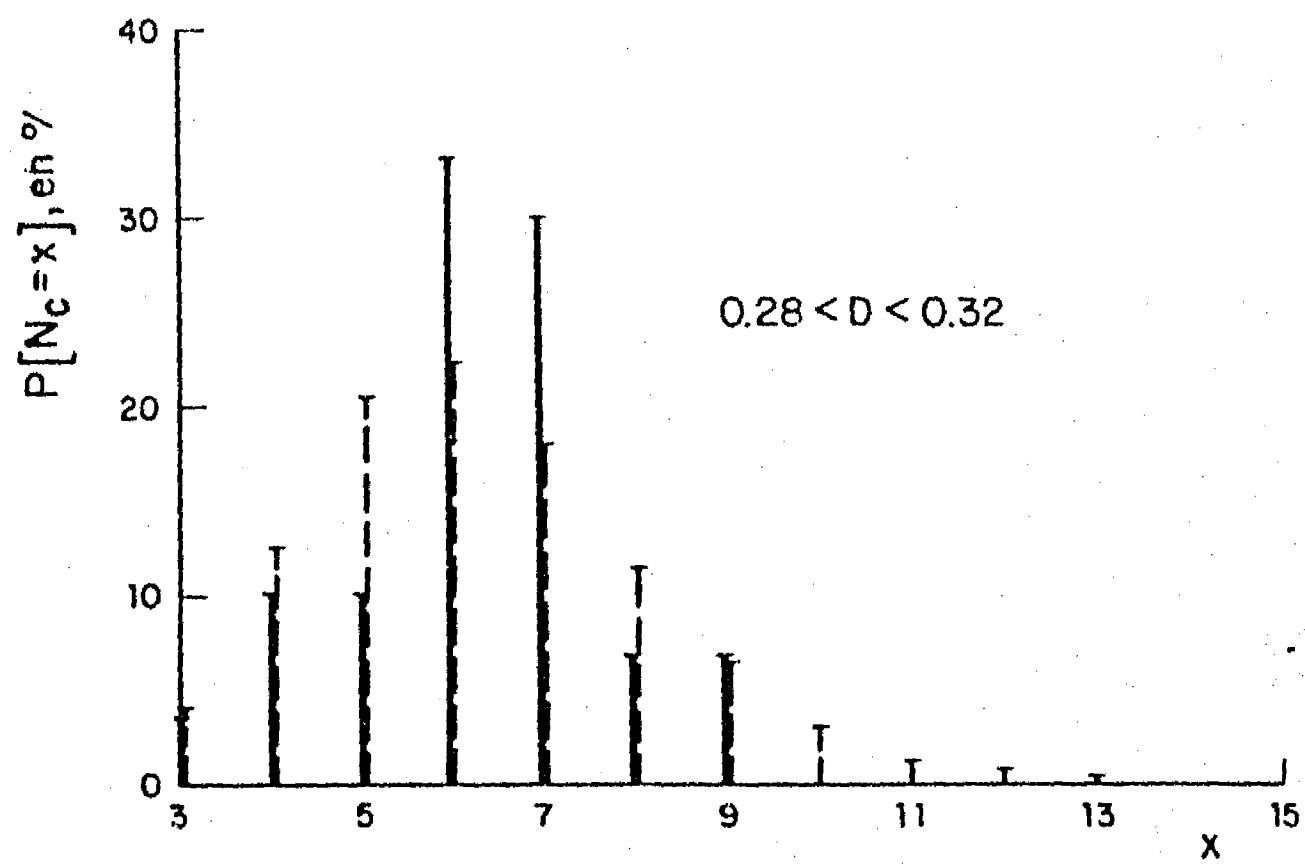
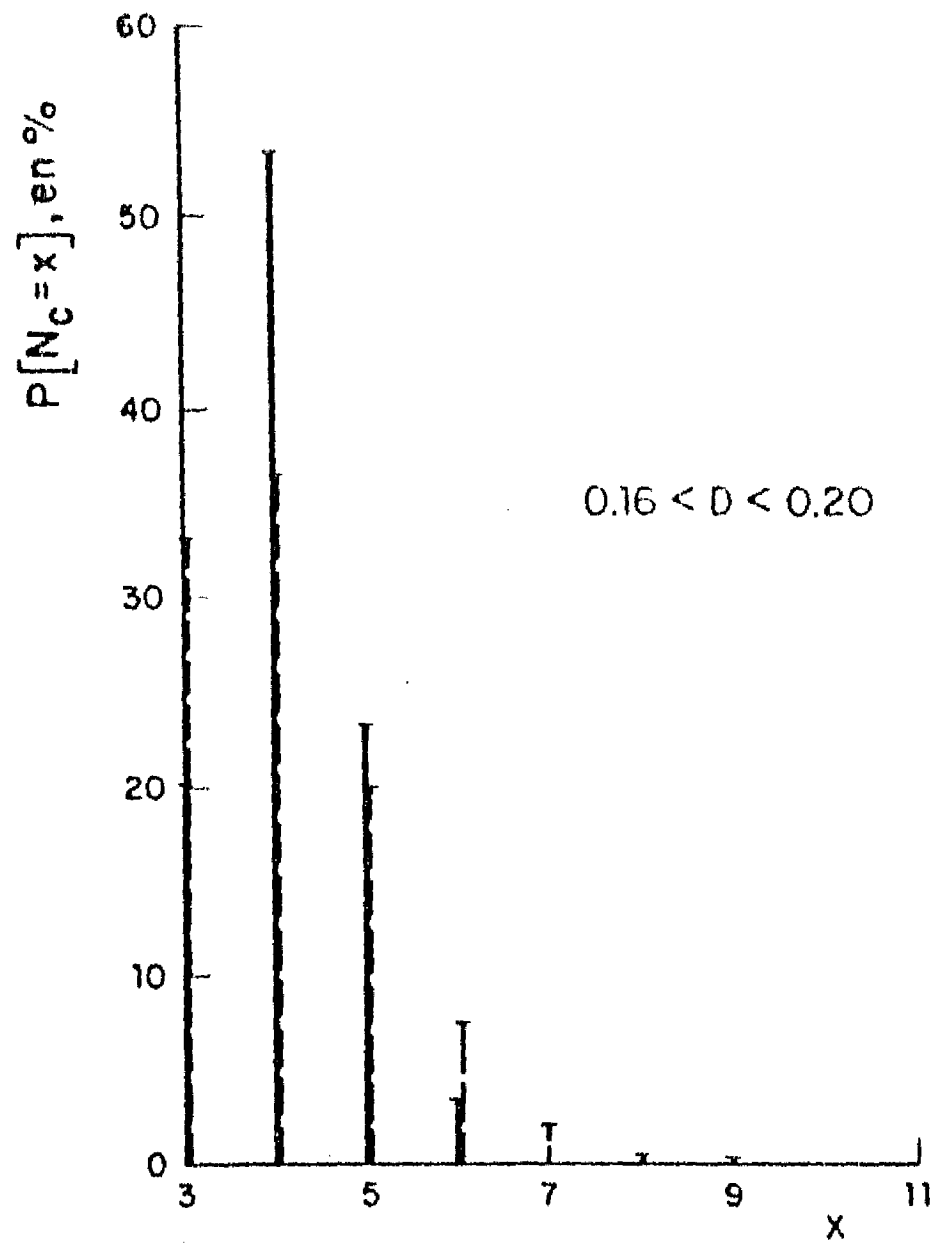
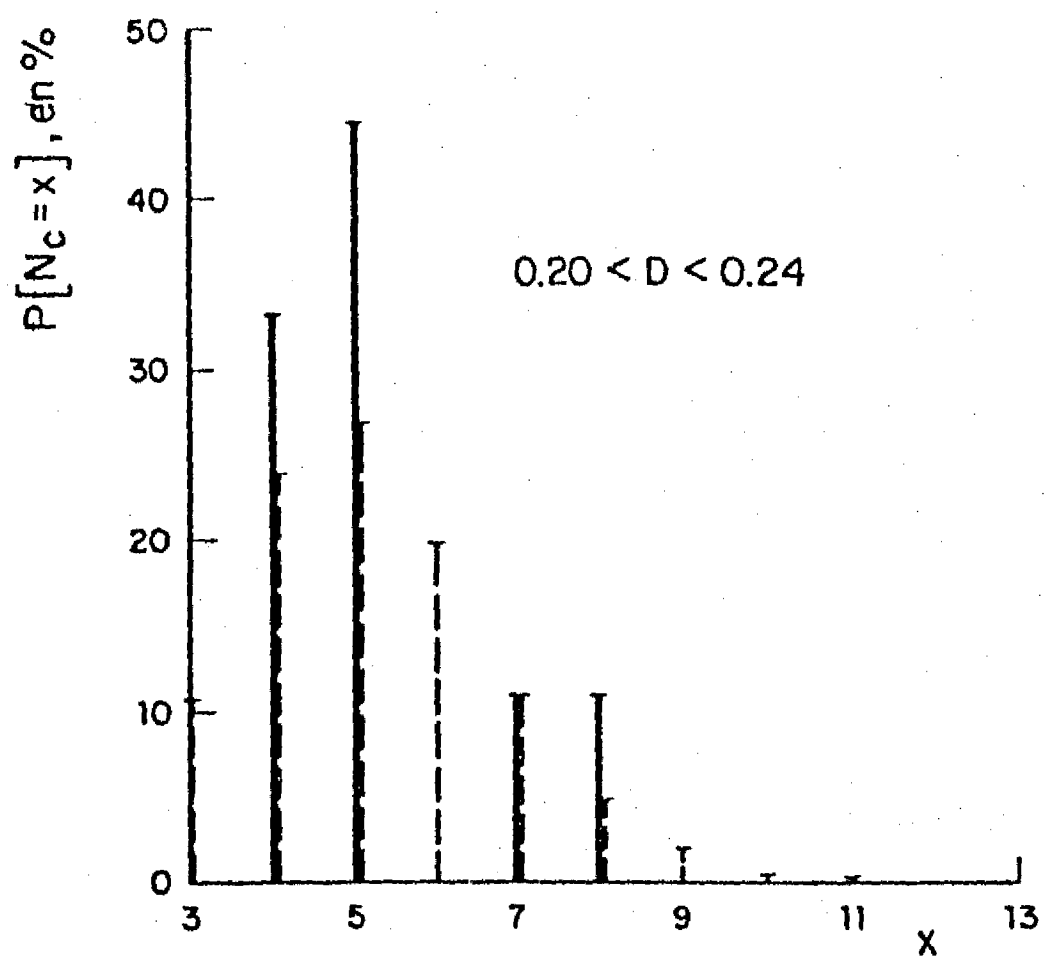
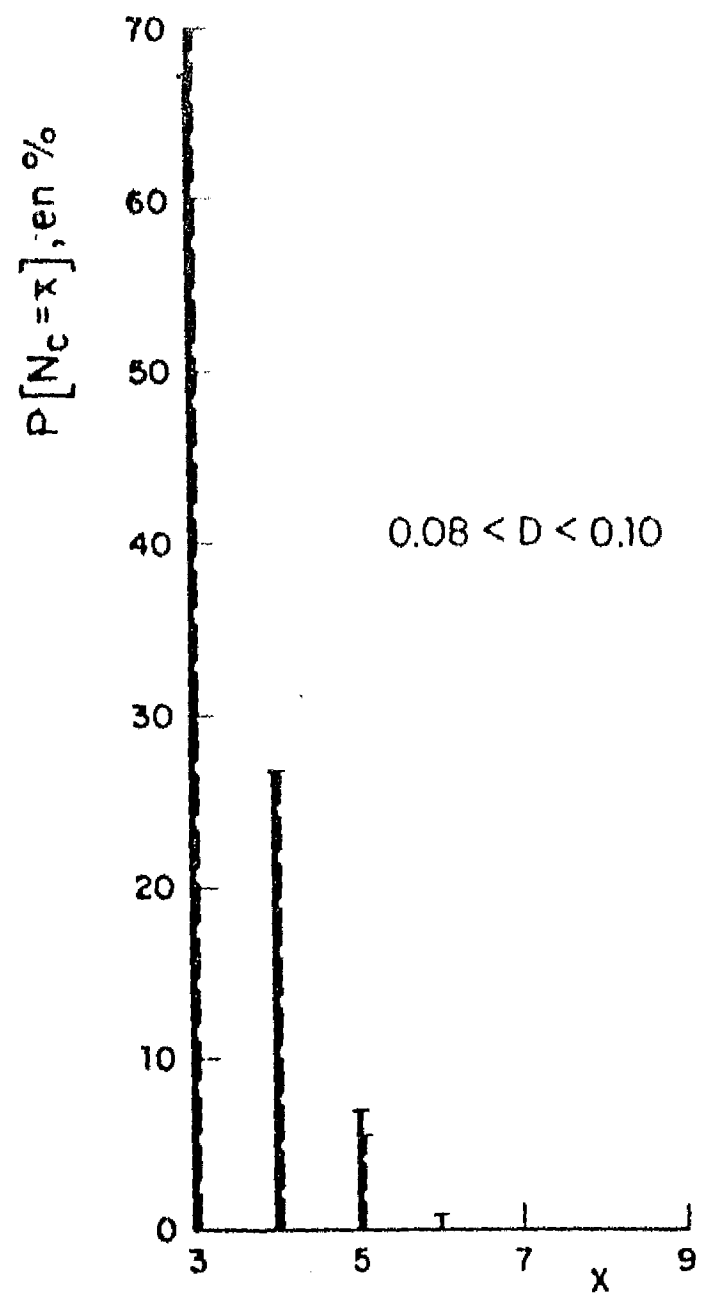


Fig 3.56 Distribución del número de contactos. Estructura A



— Observada - - - - Teórica (ley de Poisson)

Fig 3.57 Distribución del número de contactos. Estructura B



— Observada - - - Teórica (ley de Poisson)

Fig 3.58 Distribución del número de contactos. Estructura C₁

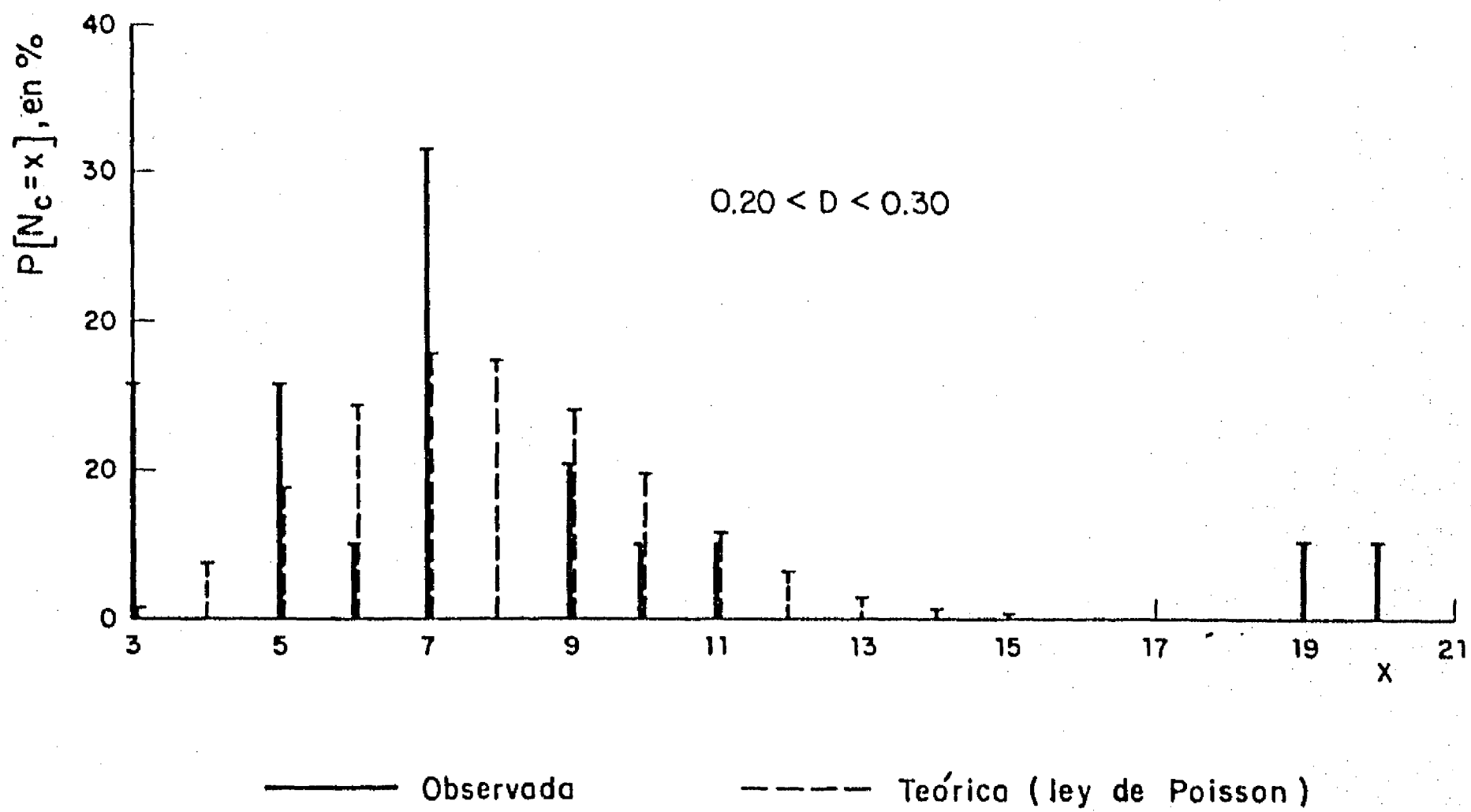
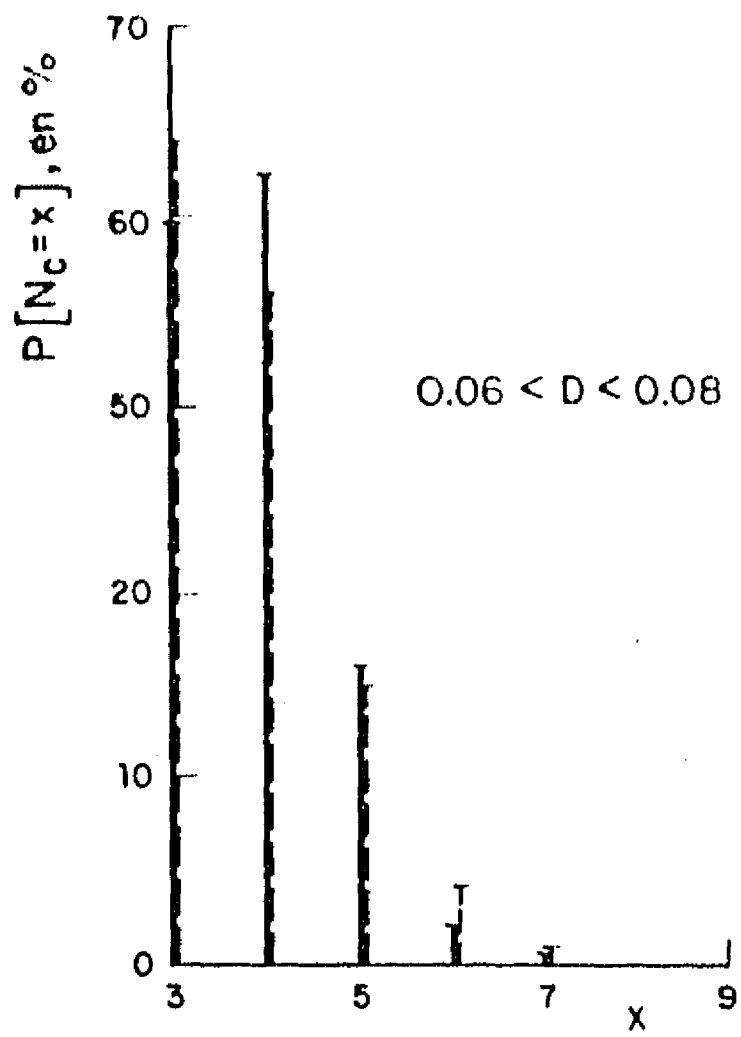


Fig 3.59 Distribución del número de contactos. Estructura D

materiales uniformes, este efecto parece mucho menos importante que en el caso del modelo bidimensional.

Se puede comprobar a partir de la Fig 3.55 que la sugerencia de Marsal (2.3.4) en el sentido de que el número medio de contactos por unidad de área superficial debe ser igual al número medio de partículas intersecadas por un plano, λ_A , da resultados del orden de magnitud correcto para materiales uniformes. Sin embargo, el número medio de contactos es muy superior a λ_A en el caso de materiales bien graduados (aproximadamente en la proporción $E \{D^3\} / (E \{D\} E \{D^2\})$).

- Repartición de contactos

Nuevamente, al depositarse las partículas dentro del campo de la gravedad (condición introducida al verificarse la condición de equilibrio estático de cada partícula), la estructura resulta anisótropa. Este efecto se refleja en la distribución angular de los contactos en la superficie de las partículas.

Por inspección (programa ANISOTROPIA) es posible determinar la función de repartición $\Gamma(\alpha, \beta)$ definida en el inciso 2.3.4.

Los histogramas obtenidos muestran que el procedimiento de formación de las estructuras no induce anisotropía en un plano horizontal (la distribución del ángulo β resulta uniforme) y que por tanto la función de repartición puede escribirse $\Gamma(\alpha)$. Este tipo de anisotropía se conoce como anisotropía cruzada ("cross anisotropy"), es decir anisotropía con simetría axial.

Las funciones $\Gamma(\alpha)$ se muestran en las Figs 3.60 a 3.63 para las estructuras A, B, C₁, E, y D. Se observa que:

. La estructura de granulometría uniforme (Fig 3.60) presenta concentraciones de contactos alrededor de los valores $\alpha = 50^\circ$ y $\alpha = -50^\circ$.

. Esta tendencia, menos acentuada, se aprecia también en la estructura B (Fig 3.61) pero, en los materiales mejor graduados (Figs 3.62 y 3.63), la distribución $\Gamma(\alpha)$ parece globalmente más uniforme.

. Sin embargo, si se considera la distribución por fracciones granulométricas, se observa que tanto las partículas menores como las mayores presentan una anisotropía marcada. Las pequeñas tienen mas contactos en su parte inferior, mientras que las partículas mayores presentan la tendencia inversa.

. En la Fig 3.62 los histogramas correspondientes a la

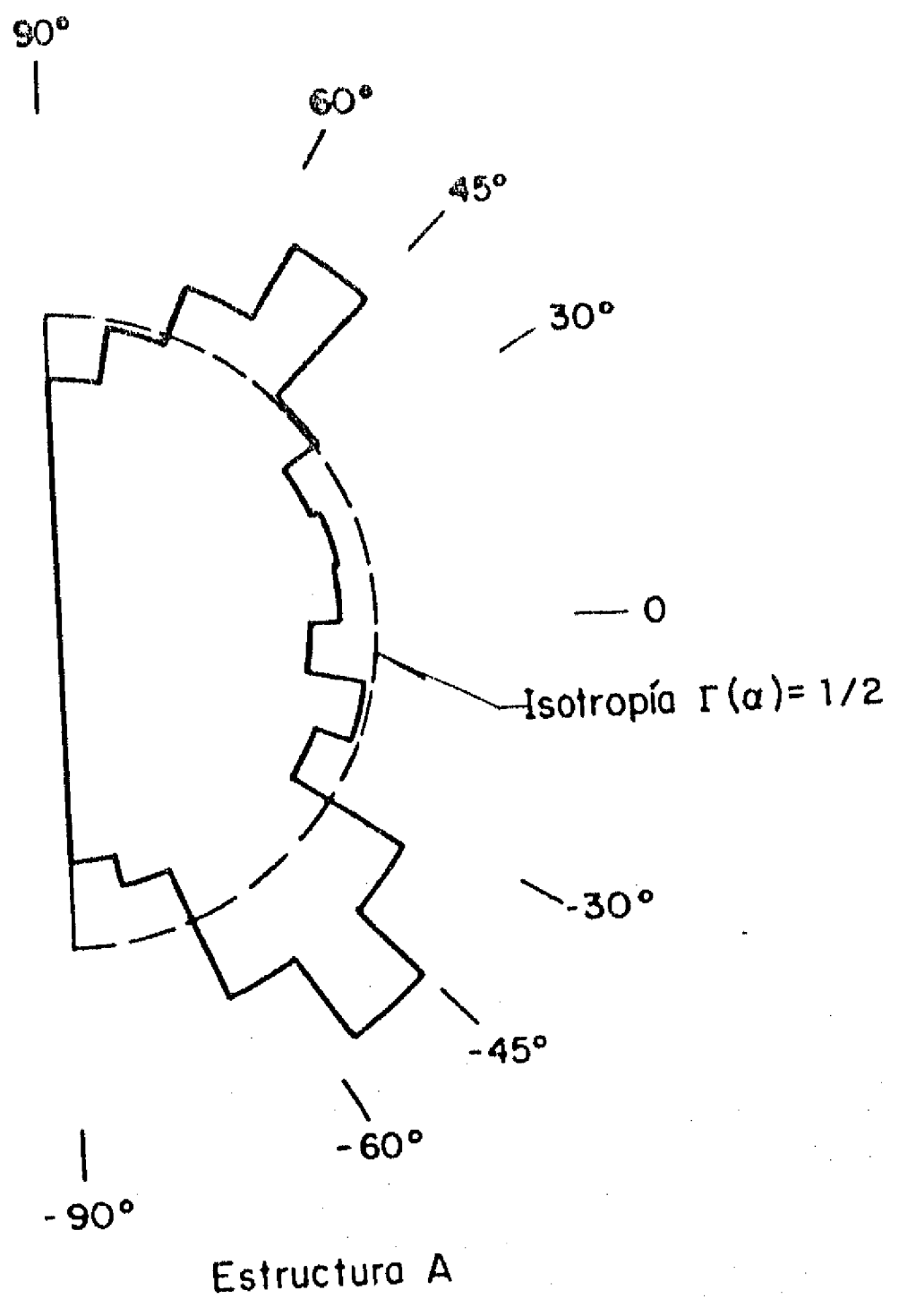


Fig 3.60 Anisotropía en la repartición de contactos. Histograma polar

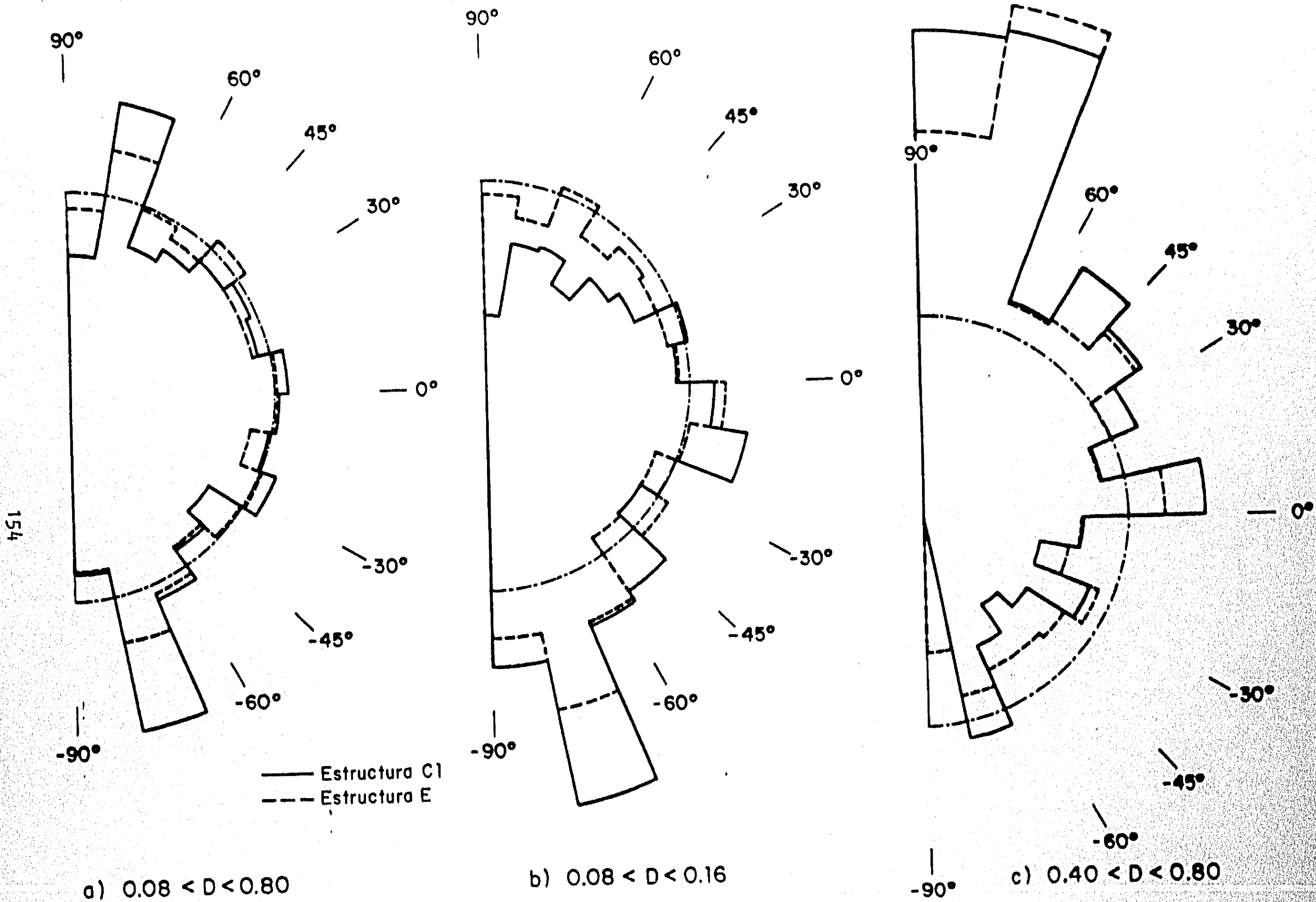
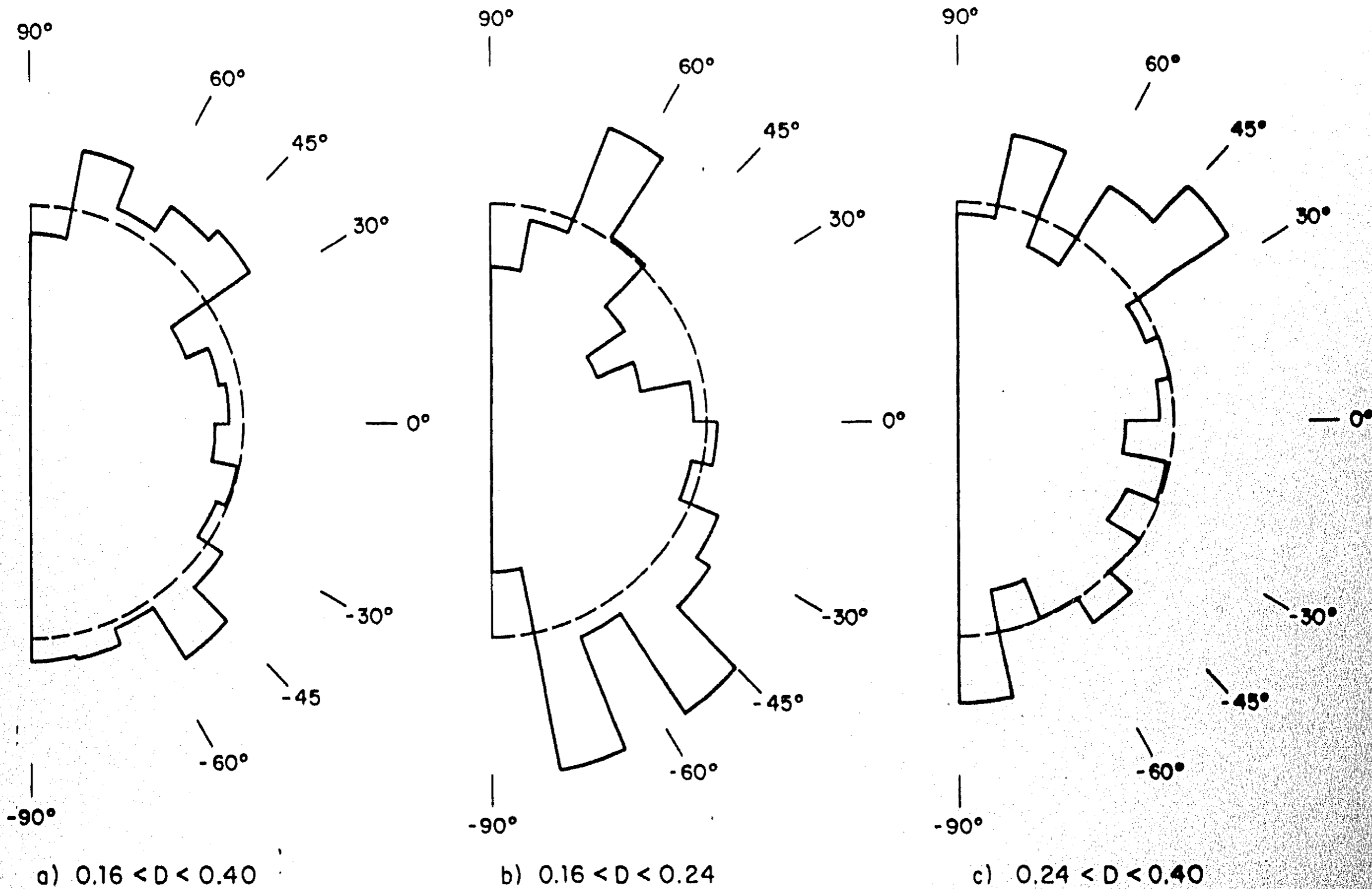


Fig 3.61 Anisotropía en la repartición de contactos



Estructura B

Fig 3.62 Anisotropía en la repartición de contactos

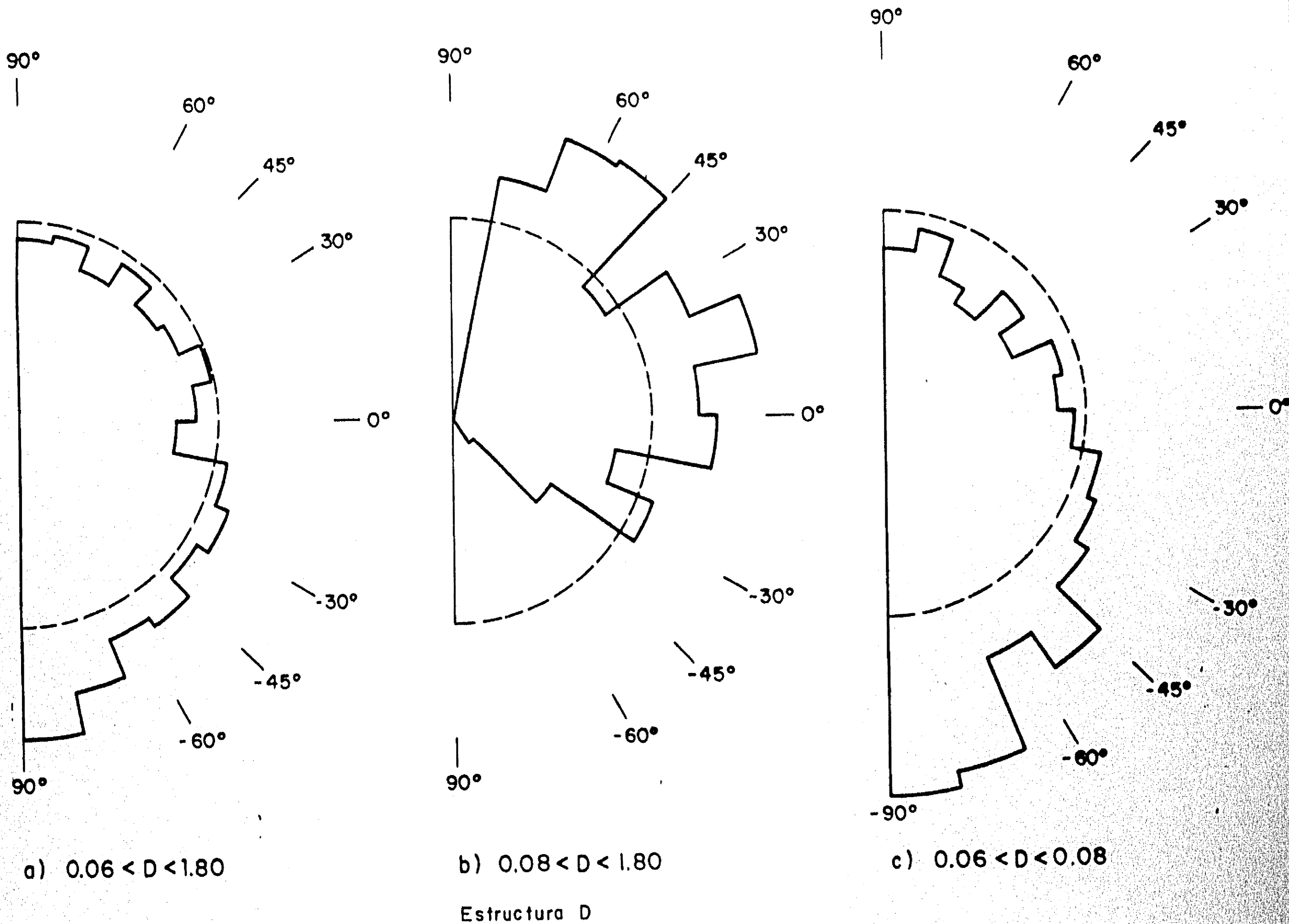


Fig 3.63 Anisotropía en la repartición de contactos

estructura E fueron indicados con líneas punteadas. Se observa que, a pesar de la densificación por relleno, las tendencias son semejantes, aunque menos pronunciadas.

- Distribución de tamaños de poros

Para determinar la distribución de los tamaños de los poros, se puede recurrir al método descrito a continuación (programa DIST/POROS) :

. Se generan N puntos aleatorios dentro del núcleo de la estructura analizada, rechazando los que caigan dentro de las esferas. La relación entre el número de puntos aceptados y el número total de puntos generados permite estimar de paso la porosidad.

. Para cada punto se determina por tanteos el menor diámetro D de la esfera de referencia para el cual el punto queda dentro del volumen inaccesible o existe intersección de dicha esfera con las partículas del medio.

. La relación entre el número de puntos que quedan dentro de un volumen inaccesible asociado a un diámetro igual o menor que un valor dado p y el número total de puntos aceptados permite estimar la función $F_{3V}(p)$.

La condición de inaccesibilidad considerada es en realidad una condición suficiente pero no necesaria. Por tanto, el método anterior tiende a sobrestimar el valor de $F_{3V}(p)$. Para mejorar la estimación, se desarrolló un procedimiento complementario que consiste en determinar primero las esferas de mayor tamaño que caben dentro de los poros, es decir esferas contenidas dentro de los vacíos y tangentes a cuatro partículas. En una segunda etapa se aplica el método anterior con la información adicional de que un punto que queda dentro de una de aquellas esferas grandes es inaccesible a esferas de diámetro superior al de dicha esfera. En la práctica, la determinación de las esferas mayores consume mucho tiempo de cómputo, sobre todo para las estructuras bien graduadas, y se observa que la corrección que introducen no es muy importante. Por tanto, el método sencillo descrito arriba parece dar una estimación suficientemente precisa de la distribución de tamaños de los poros.

Para los poros de menor diámetro es posible obtener la función $F_{3V}(p)$ en forma exacta [Auvinet, 1978]. En efecto, el volumen accesible a una esfera de pequeño diámetro puede escribirse como:

$$V_a = V_v - \sum_{i=1}^N V_i \quad (3.40)$$

donde

V_v Volumen de los vacíos

V_i Volumen de revolución inaccesible alrededor del contacto i (Fig 3.64)

N Número de contactos

Esta fórmula es válida mientras la esfera de referencia sea suficientemente pequeña para que los volúmenes de revolución no presenten intersecciones entre sí.

Las distribuciones de tamaños de poros determinadas por los métodos anteriores se presentan en las Figs 3.65 a 3.69. Destaca lo siguiente :

. Las estructuras mejor graduadas presentan las distribuciones de poro con mayor dispersión

. La dispersión disminuye conforme crece la compacidad del material

. El tamaño de los poros mayores es del orden del D_{30} de la distribución granulométrica de los granos (en el caso de la estructura de granulometría uniforme, es del orden del diámetro de las partículas).

En varias estructuras, se determinó la densidad de probabilidad de la distancia de primer contacto en el espacio y en el plano (2.3.6). Los resultados se presentan en la Fig 3.70. En un plano de intersección, la distancia media de primer contacto es mayor que en el espacio. Este efecto es más notable en materiales bien graduados que en materiales uniformes. Lo anterior debe atribuirse a un efecto análogo al de la selección de los granos más grandes en un plano de intersección discutido en 2.3.1.

Asimismo, se determinaron las densidades de probabilidad de las distancias entre centros de partículas. En la Fig 3.71 se muestran resultados típicos obtenidos para los materiales mejor graduados (estructura D). La densidad determinada se compara con la obtenida con el modelo de Poisson (3.3.3). La densidad observada presenta poca diferencia respecto a la densidad del modelo poissoniano truncada para tomar en cuenta que la distancia entre centros no puede ser menor que dos veces el radio mínimo de las partículas más pequeñas.

Por otra parte, se determinaron las densidades de probabilidad de los cruces de poros y granos. Las densidades obtenidas para los granos coinciden con las densidades granulométricas unidimensionales definidas en 2.3.1. En cuanto

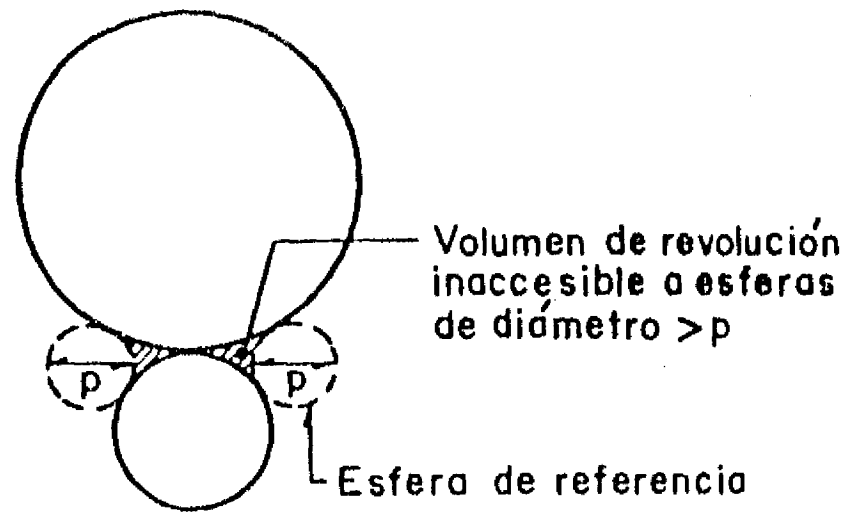


Fig 3.64 Volumen de revolución inaccesible a una esfera de diámetro $> p$

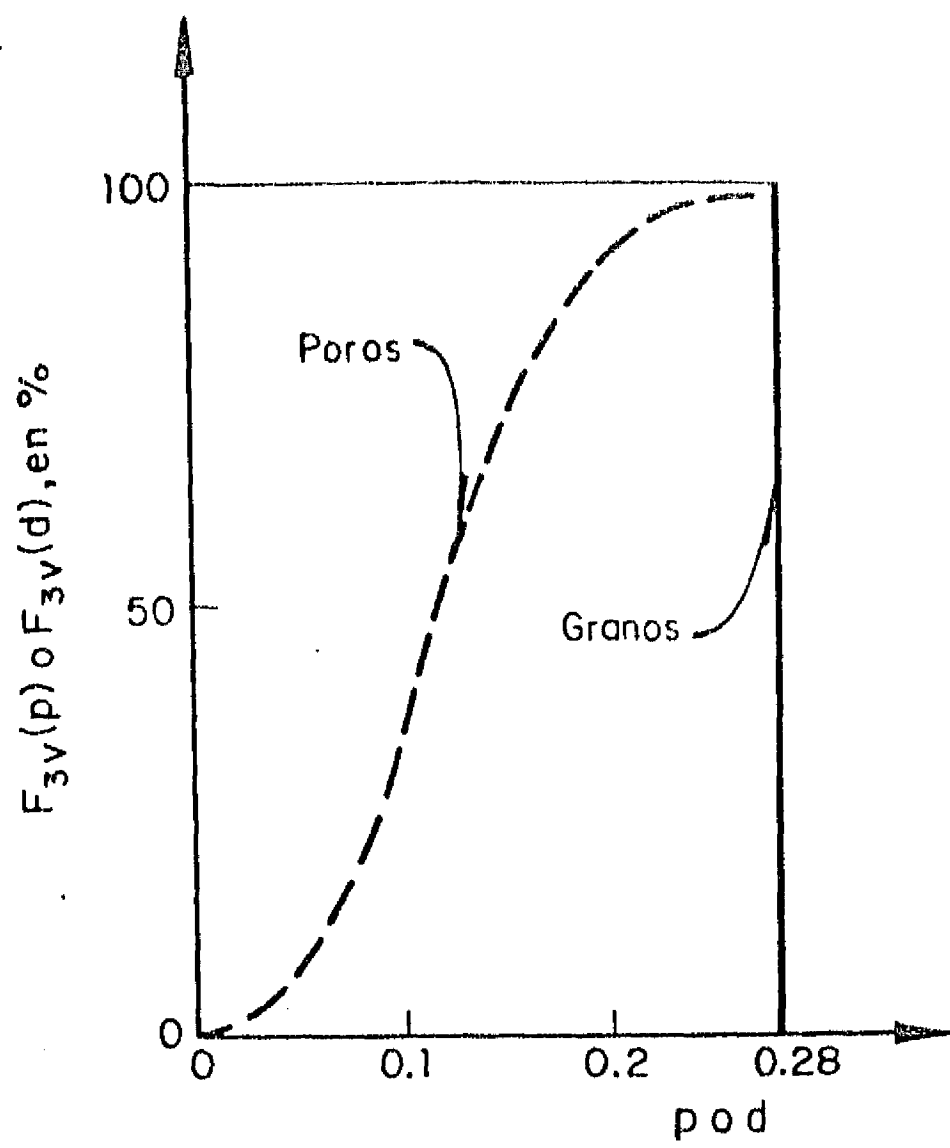


Fig 3.65 Distribución de poros. Estructura A

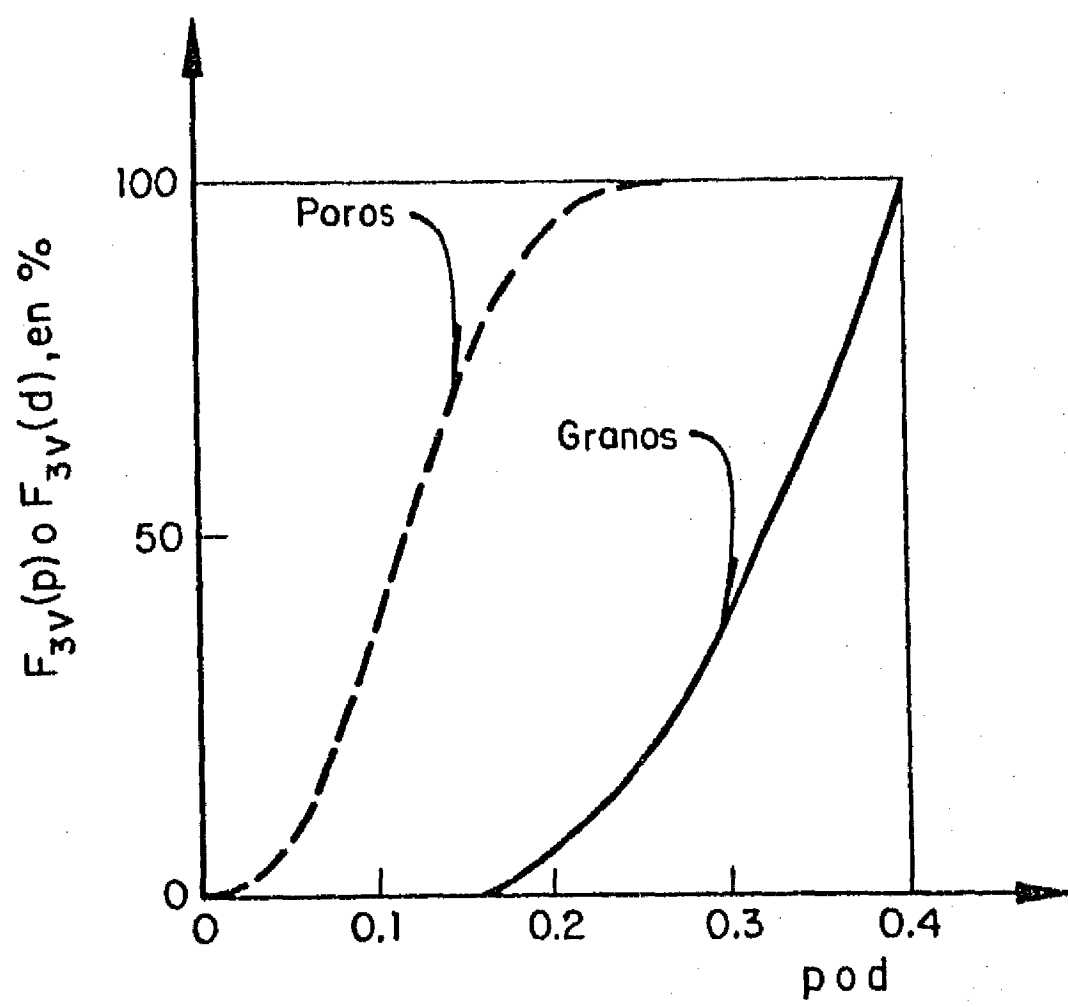


Fig 3.66 Distribución de poros. Estructura B

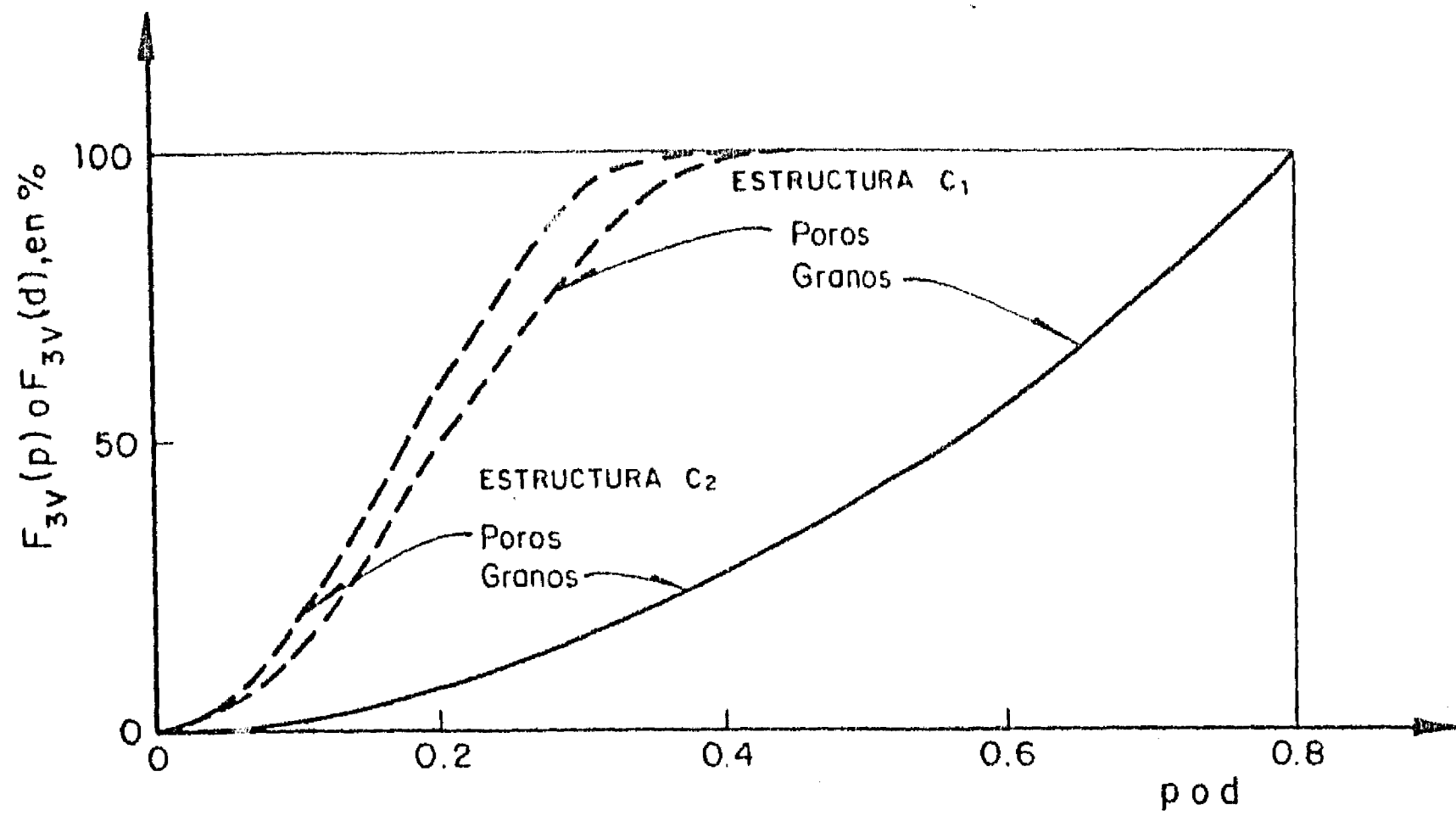


Fig 3.67 Distribución de poros. Estructuras C₁ y C₂

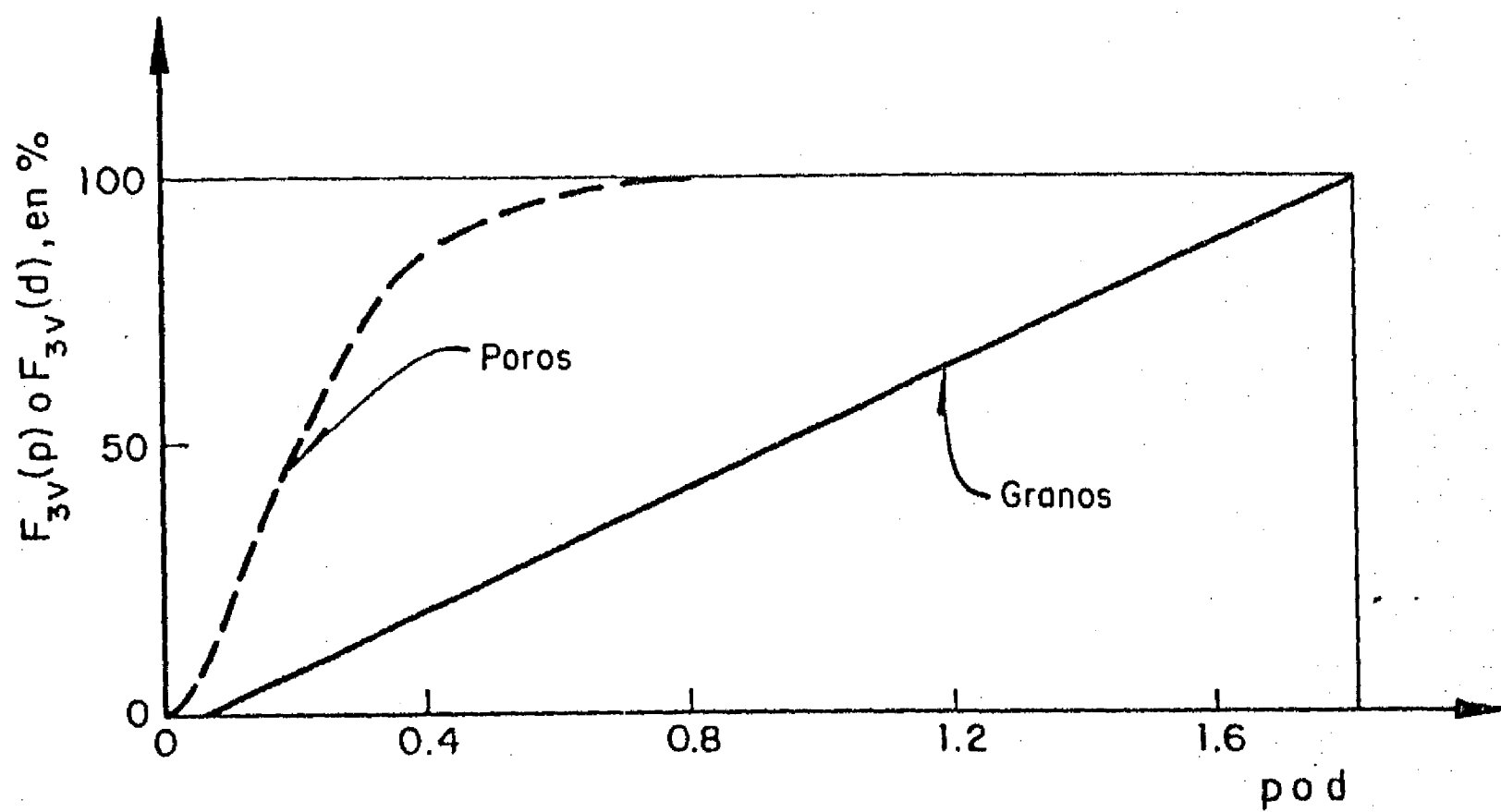


Fig 3.68 Distribución de poros. Estructura D

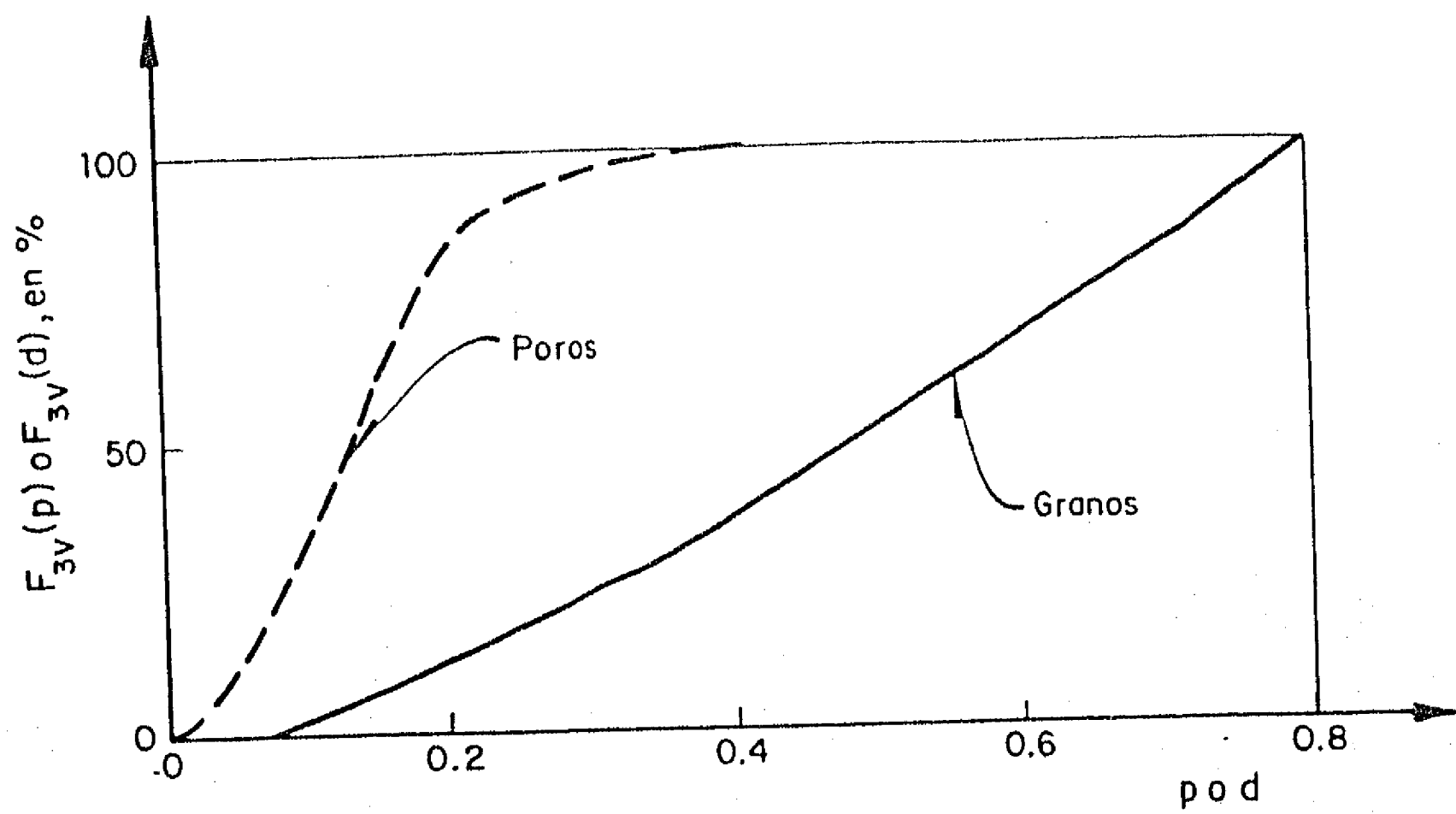


Fig 3.69 Distribución de poros. Estructura E

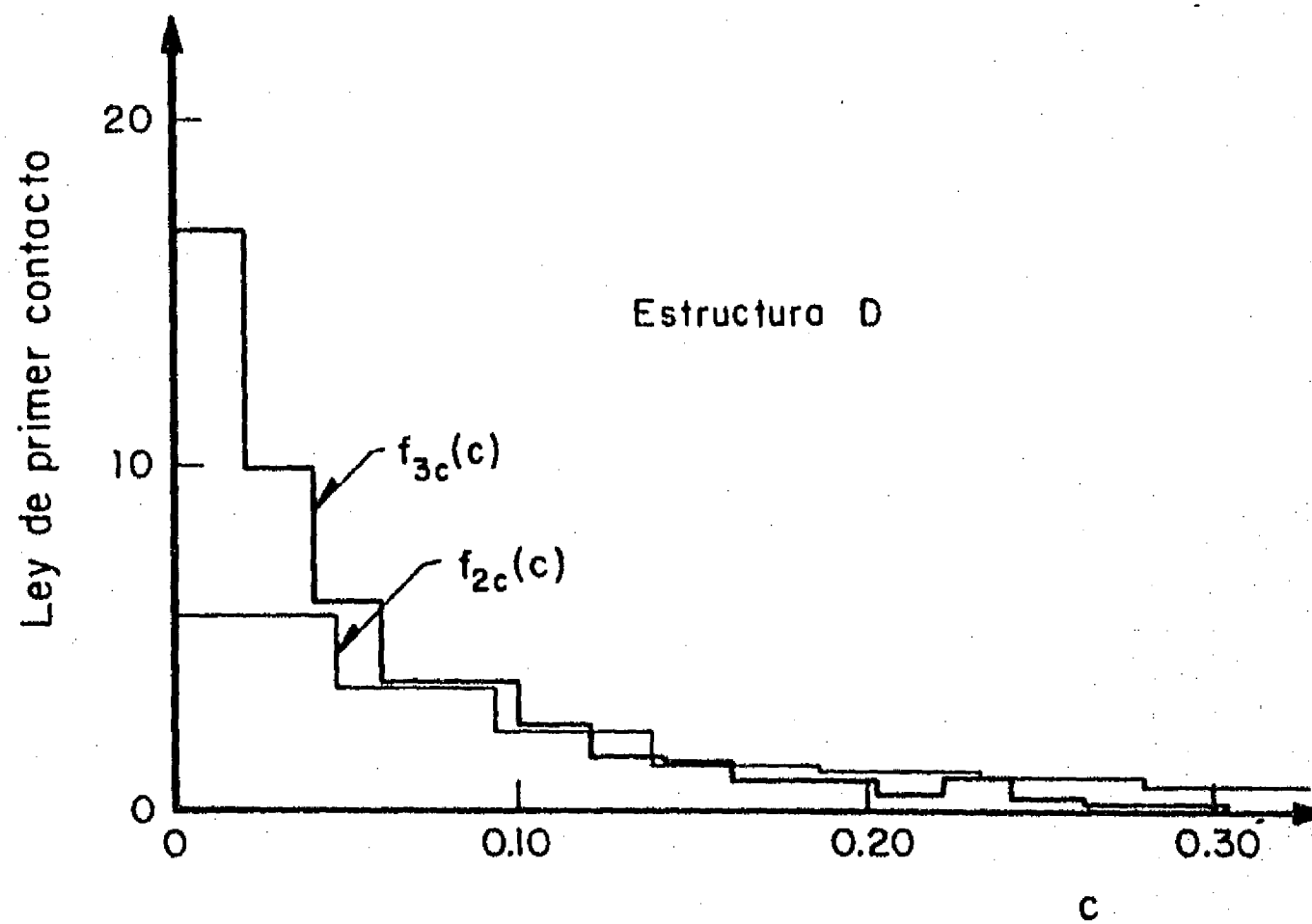
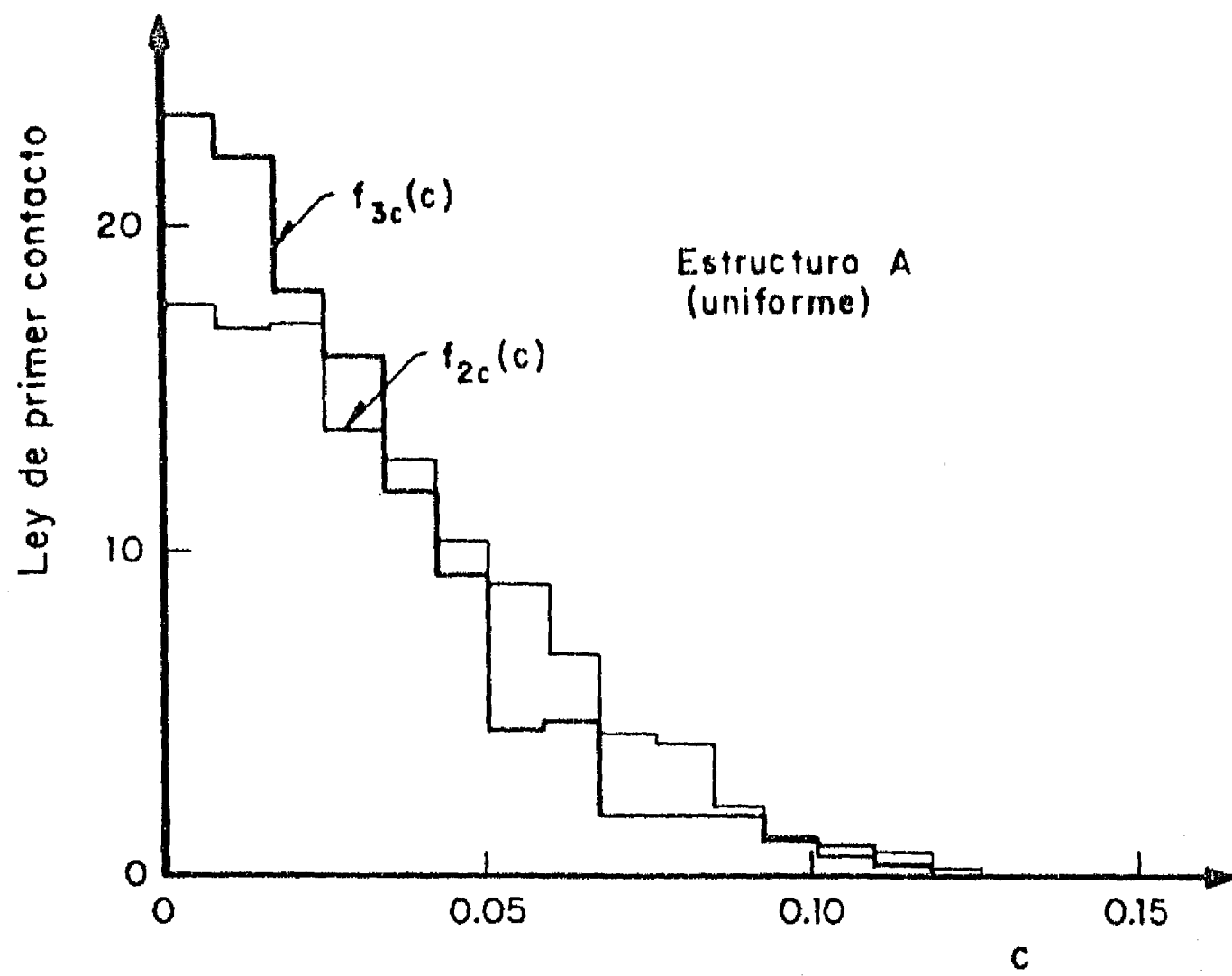


Fig 3.70 Leyes de primer contacto bidimensional y tridimensional

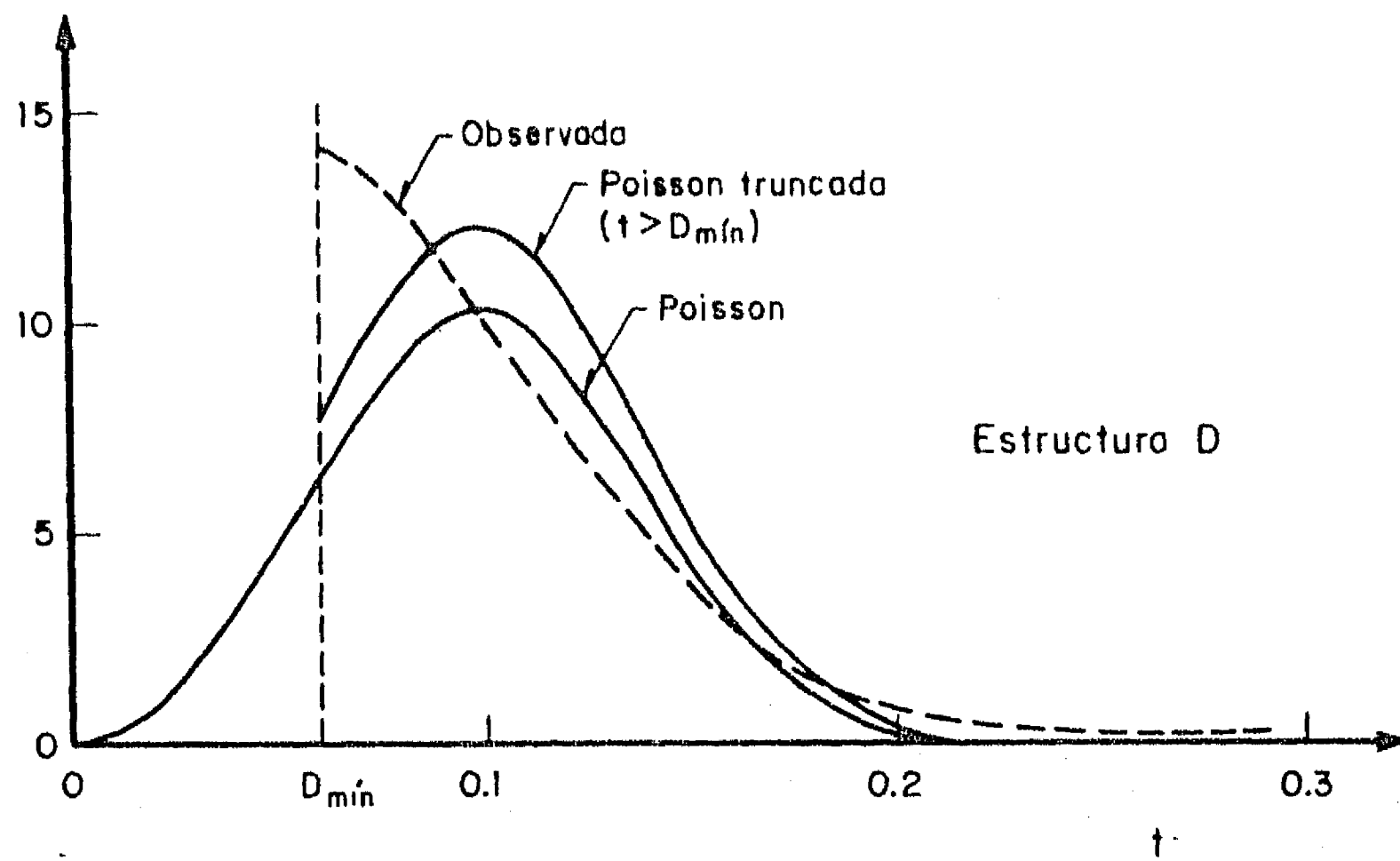


Fig 3.71 Densidades de distancia mínima entre centros de partículas

a los poros, la densidad obtenida tiene una forma parecida a la exponencial (Fig 3.72). El modelo de la teoría de la renovación planteado en 2.3.6 parece por tanto poder aplicarse a los medios granulares con este tipo de densidad para los poros.

- Función característica

Se determinaron en varias estructuras los parámetros de la función característica binaria $K(X)$ definida en 2.3.7. Las estimaciones de la función de autocorrelación se realizaron a lo largo de segmentos de recta con diferentes direcciones, calculando el promedio espacial siguiente:

$$R_{L,i}(h) = (1/L) \int_0^L K(\underline{X}+h\underline{i})K(\underline{X}) d\underline{X} \quad (3.41)$$

donde

L Longitud del segmento estudiado

i Vector unitario paralelo a la dirección de muestreo

h Escalar (distancia entre dos puntos del medio)

Como ya se hizo notar anteriormente (3.2.1), es fácil verificar que el promedio anterior es un estimador insesgado de la función de autocorrelación definida en la Ec 2.110 [Auvinet, 1984].

Las mediciones así realizadas combinadas con las de porosidad permitieron estimar los coeficientes de autocorrelación $\rho(h)$ de acuerdo con la Ec 2.111. Las estimaciones numéricas resultaron poco sensibles a la dirección de muestreo, lo que es lógico tratándose de partículas esféricas (2.3.8). En la Fig 3.73 se presenta la variación del coeficiente de autocorrelación con la distancia h referida al diámetro mínimo de partícula D_{\min} , para las estructuras A a E. Se observa que las curvas presentan una forma parecida a la de una exponencial. Tomando en cuenta que la pendiente en el origen de la función $R(h)$ es igual en valor absoluto a la superficie específica dividida por 4 (Ec 2.167), estos resultados sugieren que el coeficiente de autocorrelación puede escribirse en forma aproximada como:

$$\rho(h) = \exp \left[- S_3 h / \{4n(1-n)\} \right] \quad (3.42)$$

donde

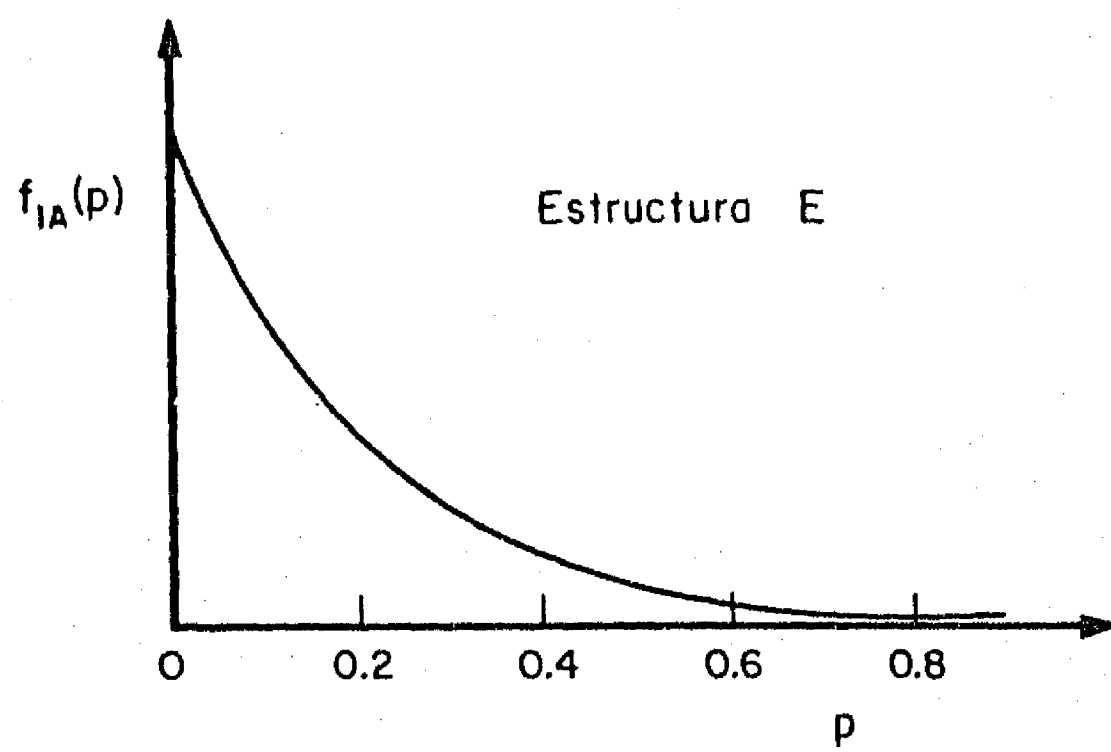
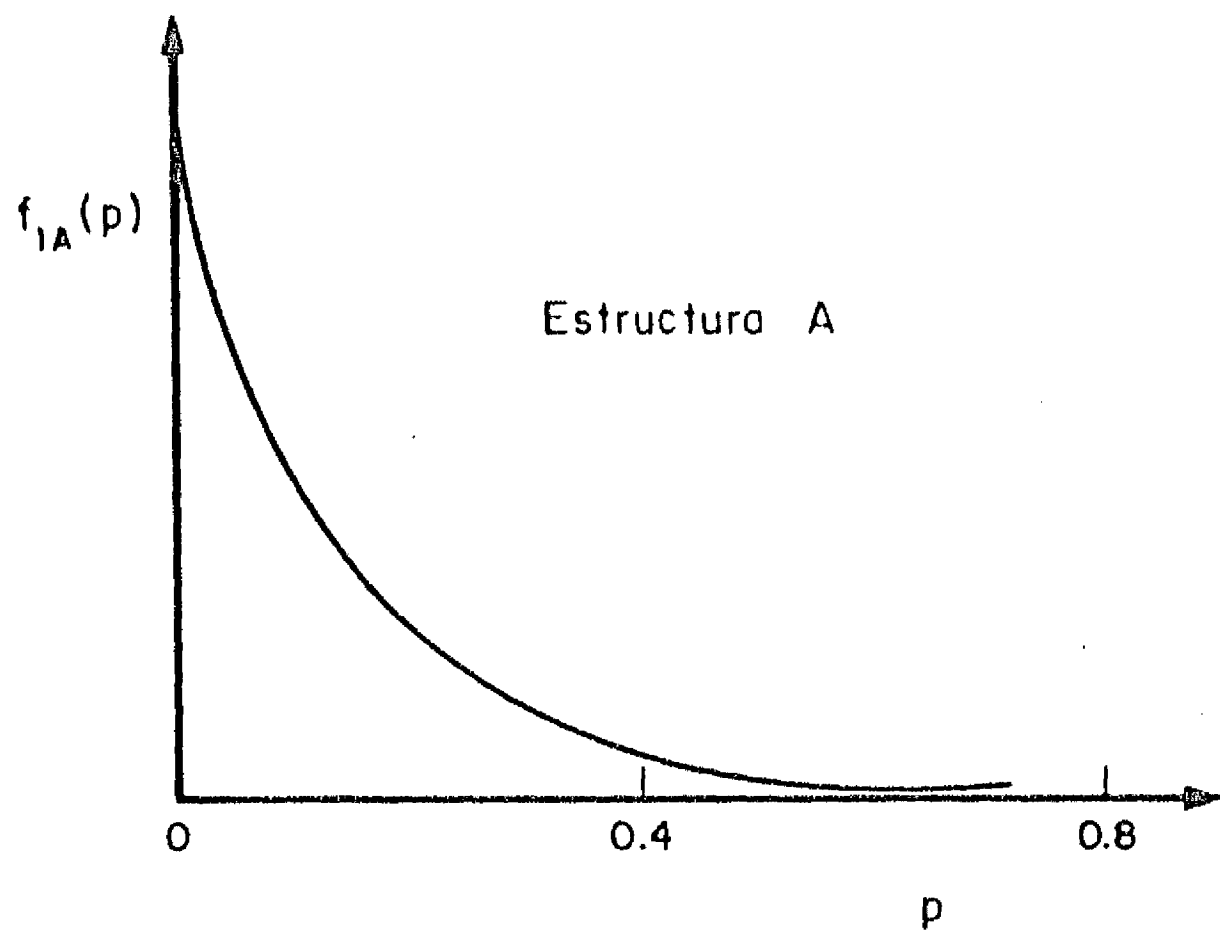


Fig 3.72 Densidades de los tamaños aparentes de los poros a lo largo de sondeos (en número)

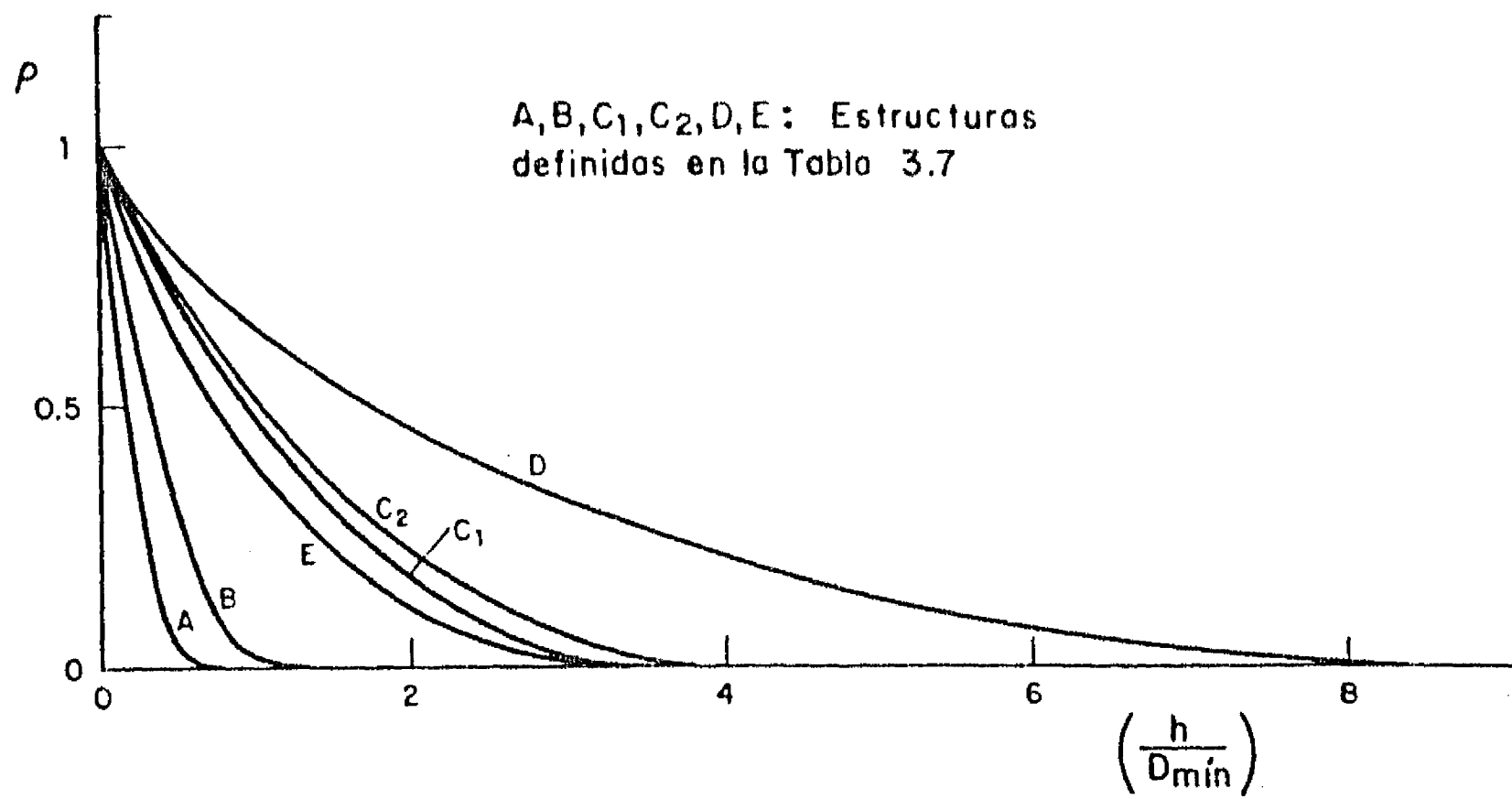


Fig 3.73 Coeficiente de autocorrelación de la función característica determinados en las estructuras construidas

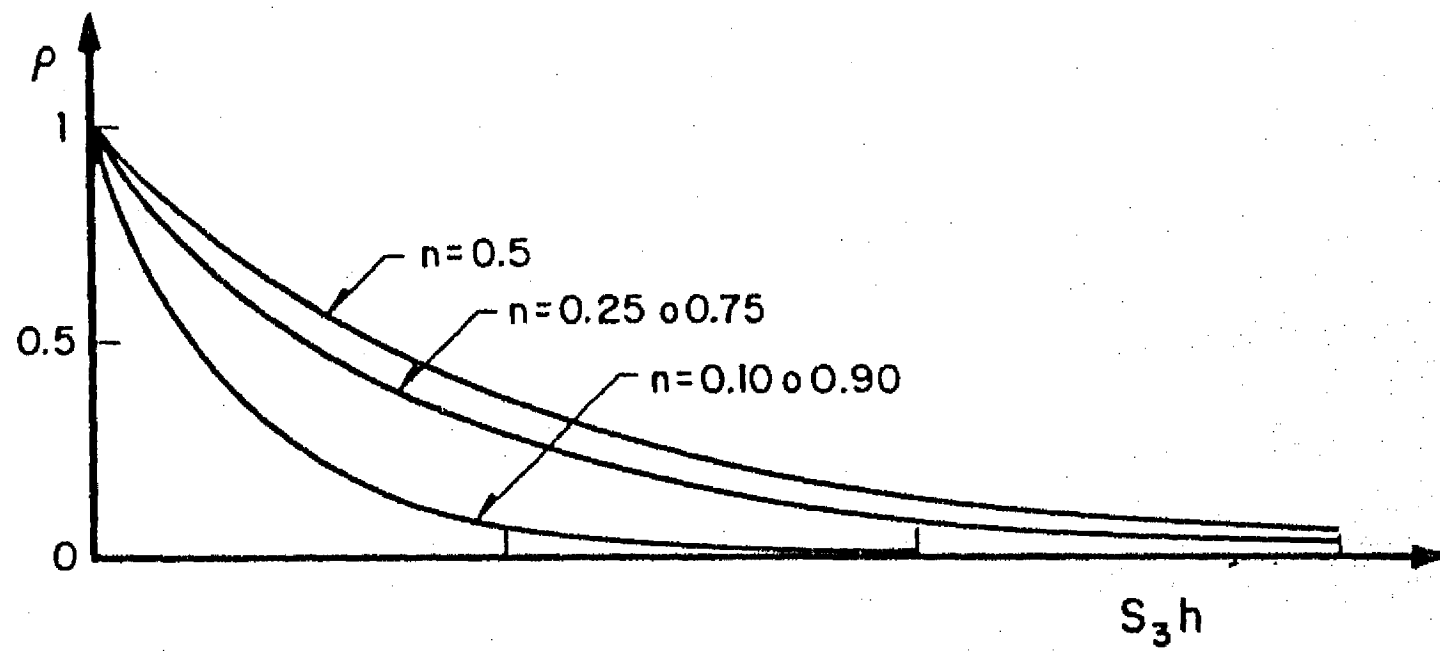


Fig 3.74 Coeficiente de autocorrelación de la función característica (modelo exponencial)

S_3 Superficie específica del medio (Ec 2.10)

Si se toma en cuenta la Ec 2.138, la expresión anterior puede también escribirse :

$$\rho(h) = \exp [-\lambda_L h / \{\ln(1-n)\}] \quad (3.43)$$

donde

λ_L Número de partículas intersecadas por unidad de longitud

Es fácil verificar que el ajuste de las curvas de la Fig 3.73 con las expresiones anteriores es muy satisfactorio, por lo que, para fines prácticos, estas expresiones pueden considerarse exactas. El coeficiente de autocorrelación se expresa entonces en términos del producto $S_3 h$ mediante una función que solamente depende de la porosidad (Fig 3.74).

- Estimaciones estereológicas

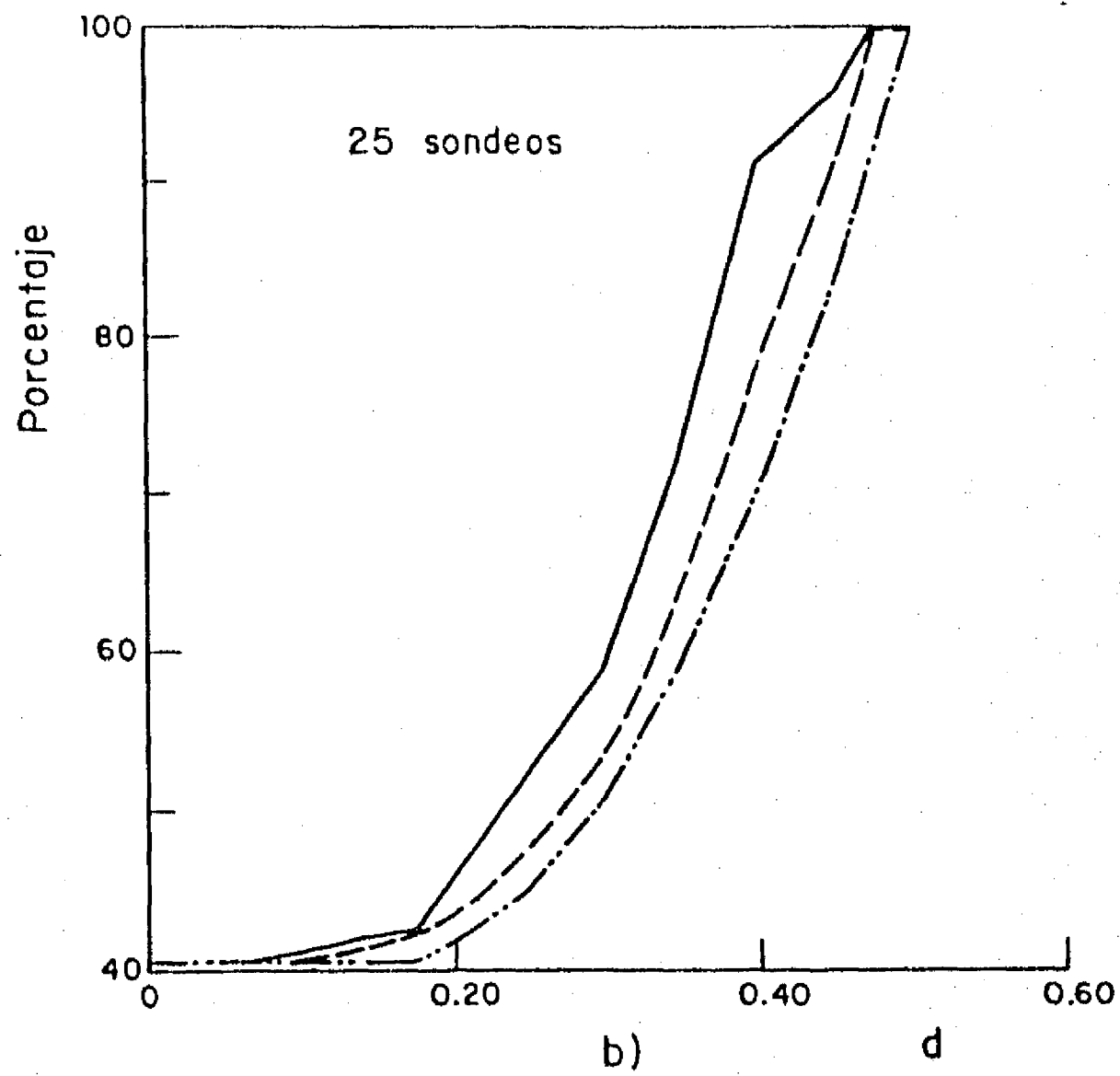
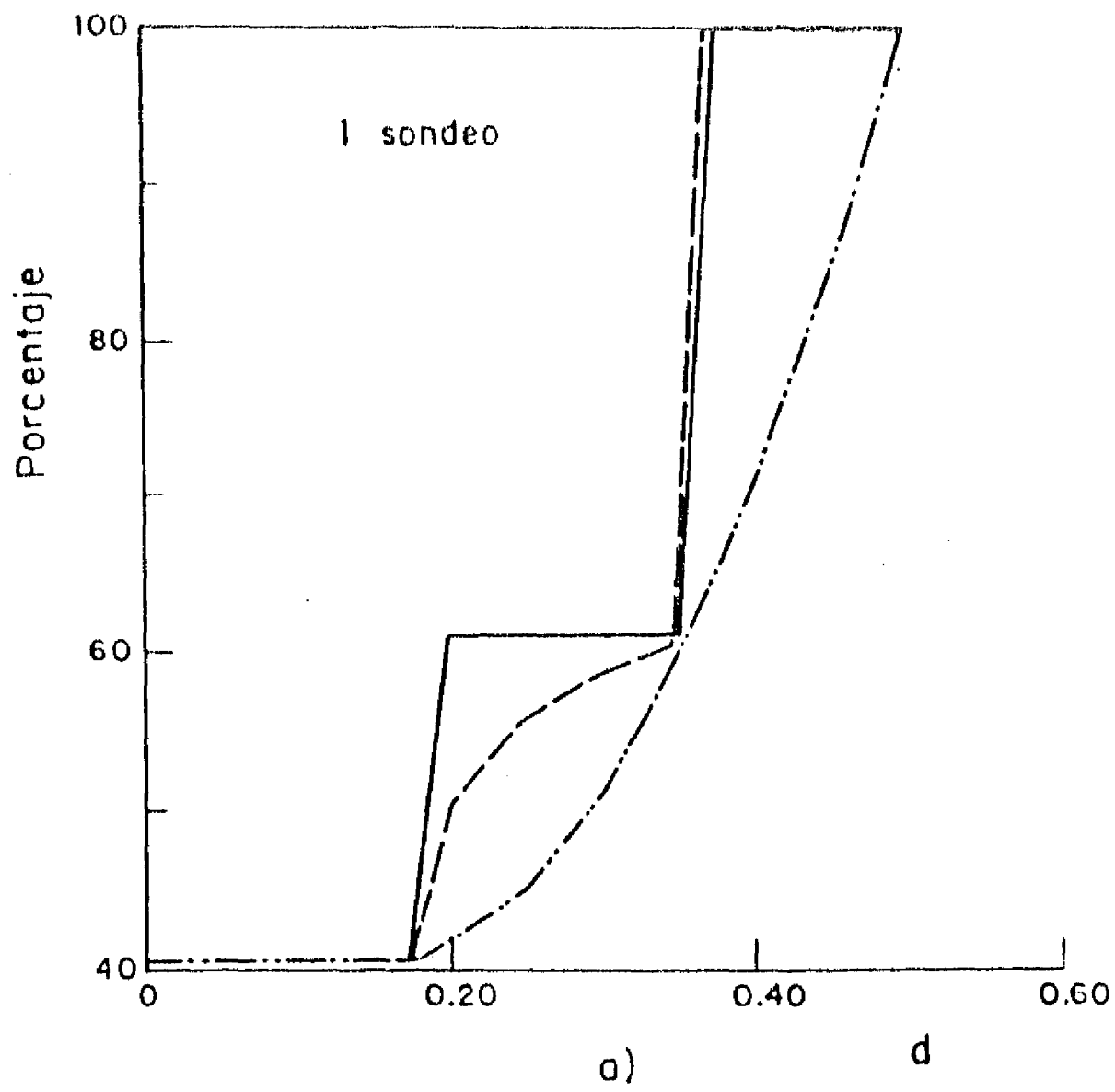
Con el modelo numérico de esferas, es posible verificar la validez de los métodos de estimación de las características estructurales tridimensionales a partir de las características uni- y bidimensionales, comentados en 3.2.

Es posible en particular comprobar el grado de aproximación del método bayesiano propuesto para la estimación de las granulometrías en tres dimensiones a partir de las granulometrías aparentes en sondeos o planos de intersección.

Como ejemplo, se presentan en las Figs 3.75 y 3.76 los resultados obtenidos en el caso de la estructura B. Se determinó la granulometría unidimensional $G_1(d)$ a lo largo de una serie de sondeos y se aplicó el método de estimación bayesiana para calcular $G_3(d)$. En la misma forma, se determinó $G_2(d)$ en planos de corte y se estimó nuevamente $G_3(d)$. Las estimaciones dan buenos resultados, particularmente en el caso de los planos de corte, para los cuales los efectos de escala son menores que para los sondeos.

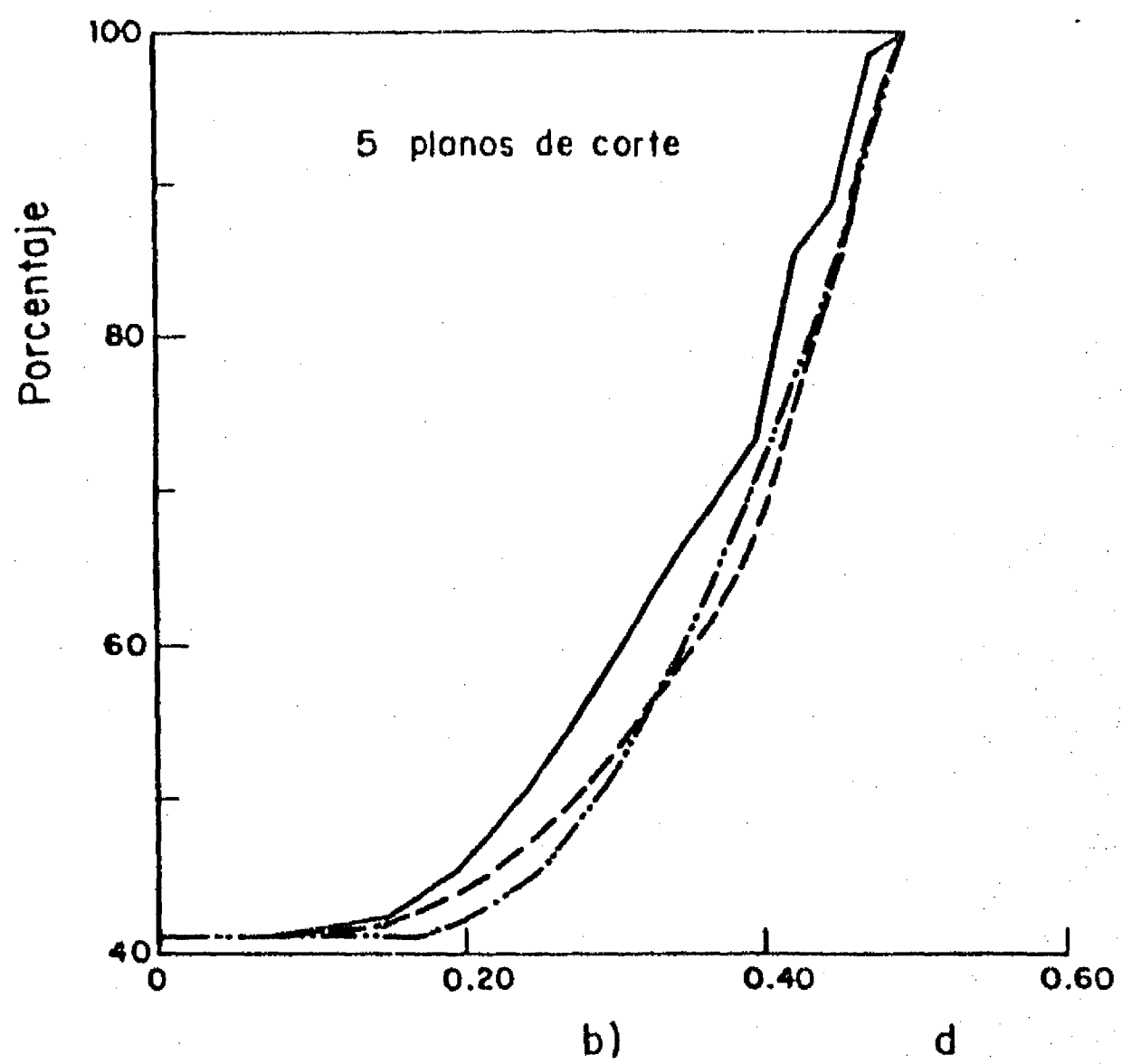
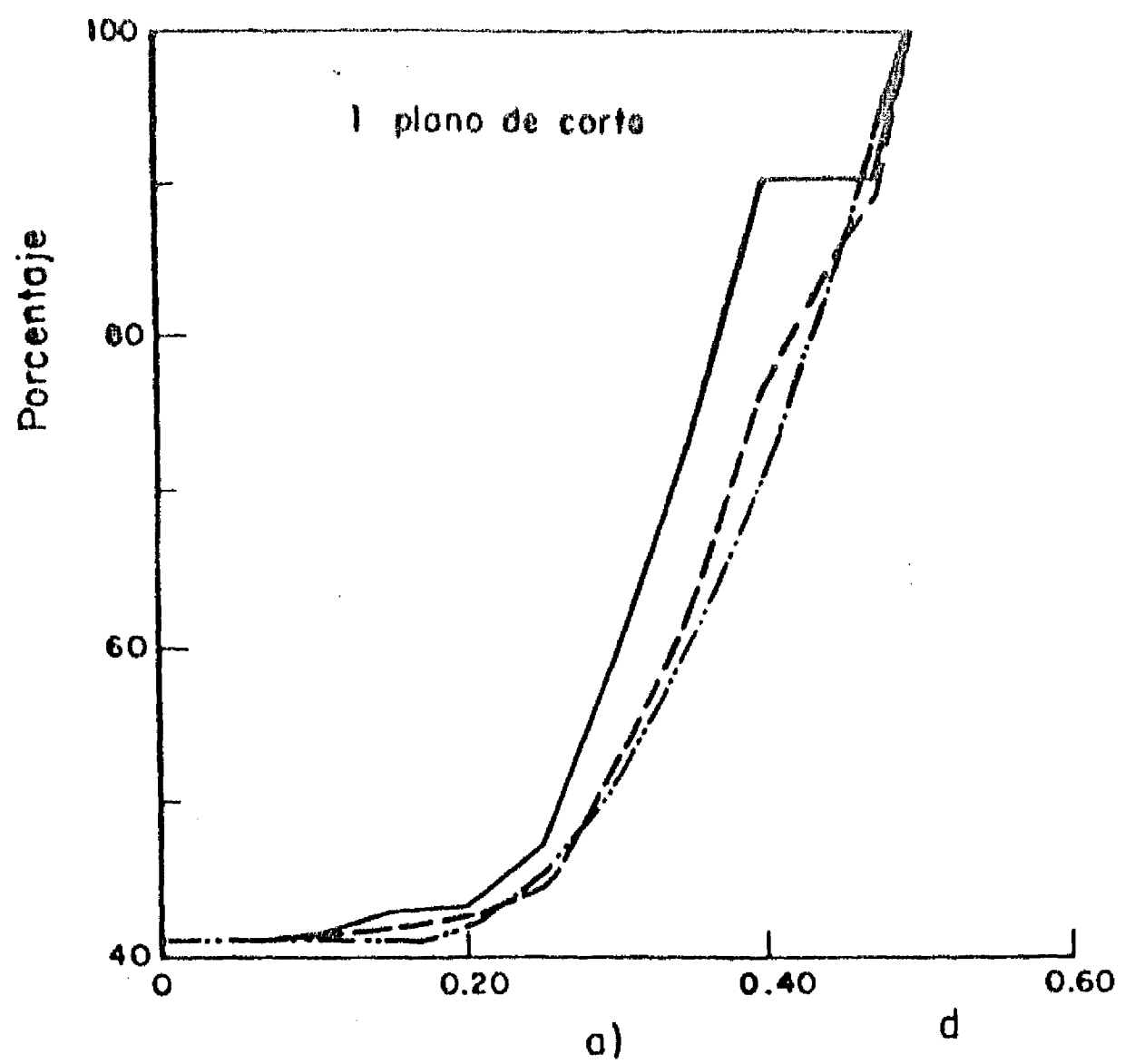
- Estructuras anisótropas obtenidas por transformación de arreglos de esferas

El modelo numérico solamente permite obtener arreglos aleatorios de partículas de forma esférica. Su generalización a partículas de otra forma (por ejemplo elipsoides) plantea



— $G_1(d)$ medida
 - - - $G_3(d)$ estimada
 - · - $G_3(d)$ exacta

Fig 3.75 Estimación de la granulometría a partir de sondeos



— $G_2(d)$ medida
 - - - $G_3(d)$ estimada
 - · - · $G_3(d)$ exacta

Fig 3.76 Estimación de la granulometría a partir de planos de corte

serias dificultades y los intentos que se hicieron para desarrollar un modelo de este tipo no se comentarán en el presente trabajo. Sin embargo, es posible obtener fácilmente algunas estructuras particulares constituidas por partículas elipsoidales por simple transformación de los arreglos de esferas. Es posible por ejemplo "comprimir" o "dilatar" estos arreglos según una o varias direcciones ortogonales entre sí. Por comodidad, una de estas direcciones puede hacerse coincidir con la vertical.

En una transformación de este tipo, las coordenadas de los centros de las esferas se vuelven :

$$\begin{aligned} x' &= \beta_1 x \\ y' &= \beta_2 y \\ z' &= \beta_3 z \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde

β_1, β_2 y β_3 Coeficientes de transformación

y las esferas de diámetro D se vuelven elipsoides de diámetros principales :

$$\begin{aligned} D'_1 &= \beta_1 D \\ D'_2 &= \beta_2 D \\ D'_3 &= \beta_3 D \end{aligned} \quad (3.45)$$

Todas las partículas de las estructuras así obtenidas se encuentran orientadas según las mismas direcciones. Se trata de un caso extremo de anisotropía que difícilmente puede encontrarse en la naturaleza pero que presenta ciertas analogías con la estructura de materiales aluviales formados por partículas lajeadas.

Algunos parámetros permanecen inalterados en la transformación. Tal es el caso de la porosidad, de la relación de vacíos y del número de contactos por partícula. Otros sufren alteraciones que se pueden cuantificar fácilmente. Así, el número de partículas intersecadas por unidad de longitud por un sondeo se modifica a lo largo de los ejes de la transformación como sigue:

$$\lambda'_{Lx} = \lambda_L / \beta_1$$

$$\begin{aligned}\lambda'_{Ly} &= \lambda_L / \beta_2 \\ \lambda'_{Lz} &= \lambda_L / \beta_3\end{aligned}\quad (3.46)$$

donde

λ_L Número de partículas por unidad de longitud en la estructura original

λ'_{Lx} , λ'_{Ly} y λ'_{Lz} Número de partículas intersecadas en la estructura transformada a lo largo de los ejes de transformación x, y y z.

En forma general, a lo largo de una dirección de cosenos directores a, b, c se tiene :

$$\lambda'_{Ly} = \sqrt{a^2 / \beta_1^2 + b^2 / \beta_2^2 + c^2 / \beta_3^2} \lambda_L \quad (3.47)$$

Las variaciones de λ'_{Ly} con la dirección y reflejan la anisotropía en la orientación de las normales a los elementos de superficie de frontera entre granos y poros, de acuerdo con lo comentado en el inciso 2.3.8.

Los coeficientes de autocorrelación de la función característica se vuelven también anisótropos pero se obtienen fácilmente a lo largo de cualquier dirección a partir de 3.47, sustituyendo λ_L por su nuevo valor según la dirección correspondiente. Lo anterior muestra que los resultados relativos al efecto de escala geométrico presentados mas adelante en 4.2 para medios isotrópicos pueden fácilmente extenderse a estos medios anisótropos por simple transformación geométrica.

La distribución de la orientación de los planos tangentes en los contactos, se modifica también en la transformación. Si u, v, w son los cosenos directores de la normal a un plano tangente en un contacto, los cosenos directores de la nueva normal después de la transformación son (Anexo I) :

$$\begin{aligned}u' &= u / \left[\beta_1 \sqrt{(u/\beta_1)^2 + (v/\beta_2)^2 + (w/\beta_3)^2} \right] \\ v' &= v / \left[\beta_2 \sqrt{(u/\beta_1)^2 + (v/\beta_2)^2 + (w/\beta_3)^2} \right]\end{aligned}\quad (3.48)$$

$$w' = w / [\beta_3 \sqrt{ (u/\beta_1)^2 + (v/\beta_2)^2 + (w/\beta_3)^2 }]$$

En el caso particular de una transformación exclusivamente en la dirección vertical ($\beta_1 = \beta_2 = 1, \beta_3 \neq 1$), se tiene :

$$w' = w / [\beta_3 \sqrt{ u^2 + v^2 + (w/\beta_3)^2 }] \quad (3.49)$$

Es decir :

$$\cos \delta' = \cos \delta / [\sqrt{ \beta_3 \sin^2 \delta + \cos^2 \delta }] \quad (3.50)$$

$$\cos \delta' = 1 / [\sqrt{ \beta_3 \tan^2 \delta + 1 }] \quad (3.51)$$

donde

δ Angulo de la normal al plano con la vertical antes de la deformación (Fig 2.15)

δ' Mismo ángulo después de la transformación

En las Figs 3.77 y 3.78 se muestra el tipo de anisotropía que se obtiene en la distribución del ángulo δ para diferentes valores de β_3 , por transformación a partir de una estructura isotrópica. La distribución se presenta en forma usual ($f_\delta(\delta)$) y radial ($\Gamma(\delta)$). Estas distribuciones dan una idea de la marcada anisotropía que puede existir en medios granulares formados por partículas no esféricas con alto grado de orientación. La anisotropía así determinada es análoga a la medida en materiales naturales sueltos con partículas no esféricas por Mahmood [1973] (Fig 3.20). Conviene subrayar que, contrariamente a lo supuesto por varios autores, la superficie obtenida difícilmente puede asemejarse a un elipsoide.

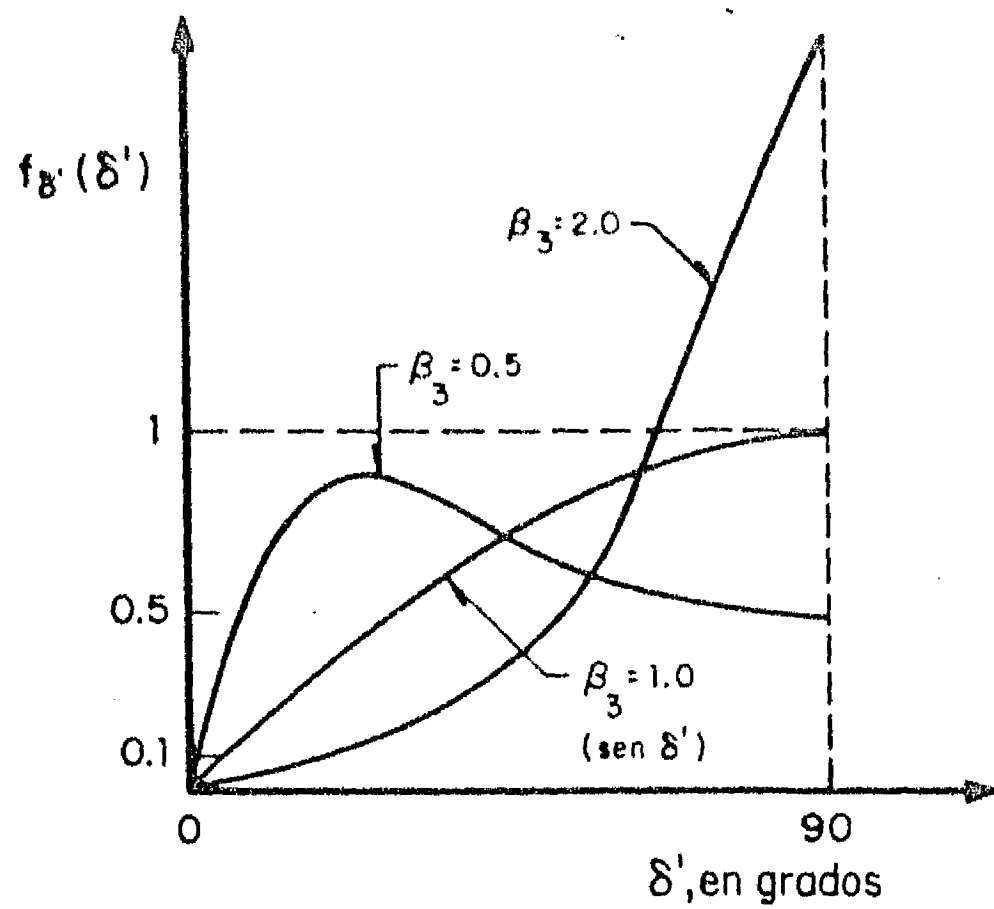


Fig 3.77 Densidades de probabilidad del ángulo δ' (Fig 2.15) para estructuras transformadas anisótropas con simetría axial

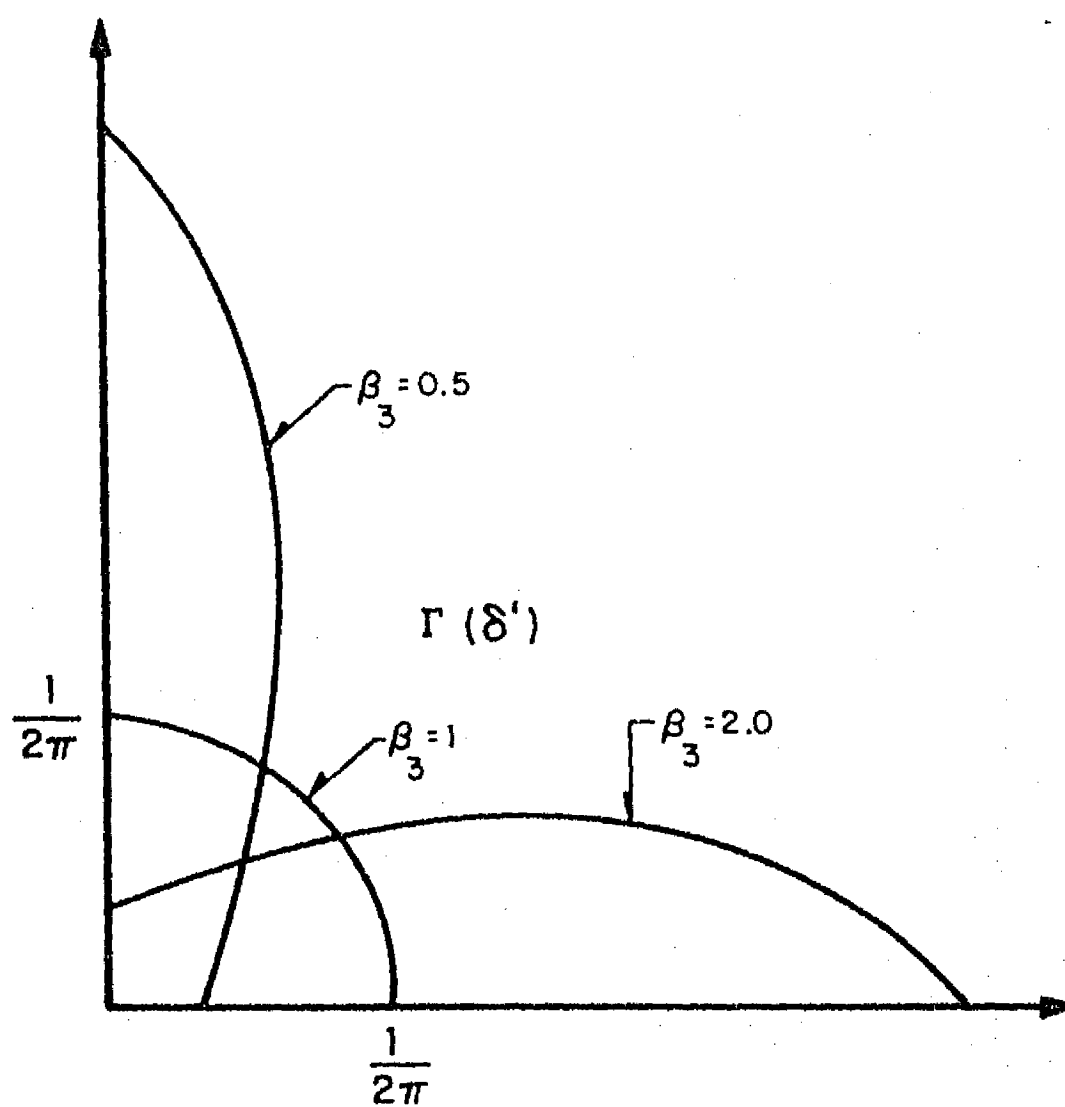


Fig 3.78 Funciones $\Gamma(\delta')$ para estructuras transformadas anisótropas con simetría axial

ESTRUCTURA DE LOS MEDIOS GRANULARES

GABRIEL AUVINET GUICHARD

TESIS DOCTORAL

presentada a la División de Estudios de

Posgrado de la

Facultad de Ingeniería

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener

el grado de

DOCTOR EN INGENIERIA

Ciudad Universitaria, D.F., julio de 1986

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

INDICE

1. INTRODUCCION	1
2. DEFINICION GEOMETRICA DE LOS MEDIOS GRANULARES	4
2.1 CONCEPTOS GENERALES	5
2.2 PARAMETROS Y FUNCIONES USUALES PARA LA DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA	6
2.2.1 Tamaño de partícula y distribución granulométrica	6
2.2.2 Forma de partícula	10
2.2.3 Porosidad, relación de vacíos y compacidad relativa	15
2.3 PARAMETROS Y FUNCIONES ADICIONALES	19
2.3.1 Distribuciones granulométricas generalizadas	19
2.3.2 Porosidad y relación de vacíos generalizadas	31
2.3.3 Distribución espacial de partículas	36
2.3.4 Número de coordinación y repartición de contactos	43
2.3.5 Orientación de partículas	48
2.3.6 Distribución de tamaños de poros	49
2.3.7 Funciones características	57
2.3.8 Superficie específica generalizada	66
2.3.9 Anisotropía geométrica	74
3. ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DE LOS MEDIOS GRANULARES	76
3.1 CONCEPTOS GENERALES	77
3.2 TECNICAS EXPERIMENTALES PARA EL ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DE LOS SUELOS	78
3.2.1 Estudios de laboratorio	78
3.2.2 Estudios de campo	103

3.3	MODELOS ESTRUCTURALES	107
3.3.1	Diferentes tipos de modelos	107
3.3.2	Arreglos regulares de partículas	107
3.3.3	Arreglos estocásticos poissonianos	114
3.3.4	Simulación numérica de la estructura de los medios granulares	120
4.	ESTRUCTURA Y PROPIEDADES DE LOS MEDIOS GRANULARES	175
4.1	CONCEPTOS GENERALES	176
4.2	REPRESENTATIVIDAD DE MUESTRAS	177
4.2.1	El problema del muestreo	177
4.2.2	Efecto de escala geométrico	178
4.2.3	Implicaciones para el dimensionamiento de muestras y especímenes	188
4.2.4	Conclusiones	195
4.3	MEZCLAS OPTIMAS	196
4.3.1	Antecedentes	196
4.3.2	Mezclas binarias	196
4.3.3	Mezclas con N componentes	200
4.3.4	Granulometrías continuas óptimas	206
4.3.5	Mezclas de materiales naturales	207
4.3.6	Conclusiones	210
4.4	ESTRUCTURA Y PERMEABILIDAD	211
4.4.1	Introducción	211
4.4.2	Relaciones entre estructura y permeabilidad	211
4.4.3	Aplicación a dos arenas	218
4.4.4	Nota complementaria respecto a la fórmula de Kozeny	229
4.4.5	Conclusiones	223

4.5 ESTRUCTURA Y DISEÑO DE FILTROS	233
4.5.1 Antecedentes	233
4.5.2 Modelo estocástico del comportamiento de filtros	234
4.5.3 Conclusiones	238
4.6 ESTRUCTURA Y COMPORTAMIENTO MECÁNICO	239
4.6.1 Introducción	239
4.6.2 Transmisión de esfuerzos en medios granulares	239
4.6.3 Relaciones esfuerzo-deformación y resistencia	249
4.6.4 Conclusiones	269
5. CONCLUSIONES GENERALES	272
6. REFERENCIAS	275
ANEXOS	
I Desarrollos matemáticos	285
II Lista de programas para computadora disponibles	314

4. ESTRUCTURA Y PROPIEDADES DE
LOS MEDIOS GRANULARES

4. ESTRUCTURA Y PROPIEDADES DE LOS MEDIOS GRANULARES

4.1 CONCEPTOS GENERALES

Es posible afirmar que la estructura de los medios granulares tiene una influencia importante y frecuentemente determinante sobre todas sus propiedades relevantes desde el punto de vista de la geotecnia.

En esta última parte, se intentará mostrar lo anterior a través de un análisis relativamente detallado pero de ninguna forma exhaustivo, del papel de la estructura en el comportamiento de estos materiales y de la forma en la que puede tomarse en cuenta en los diseños geotécnicos.

Para el estudio experimental de las propiedades de los medios granulares, el geotécnico recurre al muestreo. Desde este primer paso, es necesario tomar en cuenta la estructura. No solamente la muestra debe, en todo lo posible, conservar el arreglo interparticular del material in situ, sino que su tamaño debe ser suficiente para que pueda considerarse representativa. En el inciso 4.2 se presta atención a este último punto, frecuentemente ignorado y sin embargo importante, especialmente en el caso de materiales gruesos.

La tendencia actual en geotecnia consiste en dejar de tener una actitud pasiva respecto a los materiales naturales y en estabilizarlos, reforzarlos o sustituirlos por materiales artificiales. Una forma simple de obtener materiales granulares de buena calidad consiste en mezclar en

determinadas proporciones unos componentes que, individualmente, no cumplen con los requisitos de proyecto. La determinación de las proporciones óptimas de la mezcla es un difícil problema que se aborda en el inciso 4.3.

El coeficiente de permeabilidad es uno de los parámetros más sensibles a la estructura del medio. Las fórmulas usuales que establecen una relación entre esta propiedad y las características físicas del material dan resultados útiles pero poco precisos. En el inciso 4.4 se muestra, a través de un estudio de carácter exploratorio, que existen otras alternativas para definir esta relación.

En una forma análoga, en el inciso 4.5 se sugiere un enfoque para el análisis del comportamiento de filtros granulares que, complementado con investigaciones experimentales, podría constituir la base de nuevos métodos de diseño.

Finalmente, en el inciso 4.6 se dan algunos elementos que ponen en evidencia el papel de la estructura de los medios granulares en su comportamiento mecánico en condiciones estáticas y dinámicas. Este inciso no pretende cubrir totalmente este amplísimo tema y se limita a una discusión breve y generalmente cualitativa de algunos aspectos del comportamiento en los que el papel de la configuración geométrica del medio es particularmente notorio.

4.2 REPRESENTATIVIDAD DE MUESTRAS

4.2.1 El problema del muestreo

Al pretender determinar una de las propiedades geotécnicas (porosidad, permeabilidad, resistencia, etc.) de una masa granular, se suele primero dividir dicha masa en zonas de características aproximadamente homogéneas o cuya heterogeneidad siga una ley sencilla.

Si U es la propiedad de interés, se acepta entonces que, en cada zona, es posible asociar a cada punto del medio un valor único de la propiedad de interés y que ésta varía en el espacio de acuerdo con alguno de los modelos siguientes:

- La propiedad U es homogénea y determinista. Basta entonces con una sola muestra para determinarla.

- La propiedad es determinista y sigue una ley espacial simple (por ejemplo $U = a + bz$, donde z es la profundidad). Un número reducido de muestras (dos en el ejemplo anterior) es suficiente para definir totalmente la propiedad de interés.

- La propiedad es estadísticamente homogénea. En este caso, U es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad se supone frecuentemente gaussiana y puede definirse mediante dos parámetros : media \bar{U} y variancia σ_U^2 . Por muestreo aleatorio o sistemático, se obtienen estimadores de los parámetros de interés. El número de muestras requerido depende de la precisión y del nivel de confianza con el que se quieran conocer los parámetros [Cochran, 1977]

- La propiedad es una función aleatoria espacial $U(x,y,z)$. Si esta función se considera estacionaria, esta hipótesis equivale a la del inciso anterior. Otra posibilidad consiste en admitir que la función aleatoria tiene incrementos estacionarios [Auvinet, 1984] o que sigue otra ley de variación simple. El número de muestras requerido depende entonces de la ley aplicable y se determina con consideraciones análogas a las del inciso anterior.

En el caso de un medio granular, independientemente del modelo adoptado, es común que, por el gran diámetro de las partículas o el tamaño pequeño del dispositivo de ensaye disponible, se plantee el problema adicional de la definición de las dimensiones mínimas que debe tener la muestra para ser representativa del medio en estudio. La variación de las propiedades con el tamaño de la muestra es un problema que no debe confundirse con su variación espacial. Se trata de un efecto de escala que existe aun cuando la propiedad puede considerarse homogénea y determinista.

La definición de las dimensiones mínimas de la muestra se basa usualmente en consideraciones puramente empíricas. Se mostrará a continuación que, por lo menos en lo que se refiere a las características estructurales del medio, para las cuales el efecto de escala es puramente geométrico, es posible abordar este problema en forma racional con base en los conceptos introducidos en 2.3.7 y en los resultados obtenidos por simulación numérica en 3.3.4.

En la práctica, el efecto de escala geométrico se superpondrá generalmente a variaciones espaciales aleatorias o deterministas de las propiedades. En cada caso, se tendrá que evaluar si el efecto de escala es el dominante o si, al contrario, puede considerarse despreciable. Los resultados presentados en este capítulo permitirán precisamente hacer este tipo de evaluación.

4.2.2 Efecto de escala geométrico

El grado de representatividad de una muestra depende de su tamaño. Para apreciar claramente este concepto, puede observarse, por ejemplo en la Fig 3.52, como, al crecer el

tamaño de la muestra, disminuye la dispersión de la porosidad medida. Lo anterior puede cuantificarse en términos probabilistas tomando en cuenta los conceptos y resultados presentados en los capítulos anteriores.

a) Porosidad

La variancia de los valores de la porosidad medidos en una muestra de volumen V es la que se expresa en la Ec 2.115. Utilizando esta ecuación y los resultados obtenidos con el modelo numérico tridimensional en cuanto al coeficiente de autocorrelación de la función característica (3.3.4), es posible cuantificar en términos probabilistas la dispersión de la porosidad asociada a muestras de diferentes volúmenes y formas.

El cálculo de la integral de la Ec 2.115 resulta en la práctica laborioso puesto que su expresión explícita es, en el caso de un paralelepípedo rectangular de aristas a , b y c :

$$\text{var}[n_V] = [1/(abc)^2] \int_0^a \int_0^b \int_0^c dx dy dz \int_0^a \int_0^b \int_0^c C(x-x', y-y', z-z') dx' dy' dz' \quad (4.1)$$

El cálculo puede hacerse numéricamente dividiendo el volumen de interés en un número suficiente de volúmenes elementales y sustituyendo las integrales por sumas. Los cálculos se reducen considerablemente si se aprovechan las simetrías. Además, es posible recurrir al algoritmo de Cauchy que permite reducir el orden de una integral múltiple de $2N$ a N [Journel, 1977].

Utilizando la función de autocovariancia isotrópica obtenida en 3.3.4 :

$$C(h) = n(1-n) \rho(h) = n(1-n) \exp\{-S_3 h/[4n(1-n)]\} \quad (4.2)$$

se calculó la desviación estándar de la porosidad para muestras cúbicas de diferentes aristas. Los resultados se presentan en la Fig 4.1. La relación entre dispersión y dimensión de la muestra se expresa en forma adimensional y es aplicable a cualquier material granular de porosidad y superficie específica conocidas o estimables en forma aproximada a priori. Cuando las dimensiones de la muestra crecen, es posible verificar que la relación tiende asintóticamente hacia la expresión:

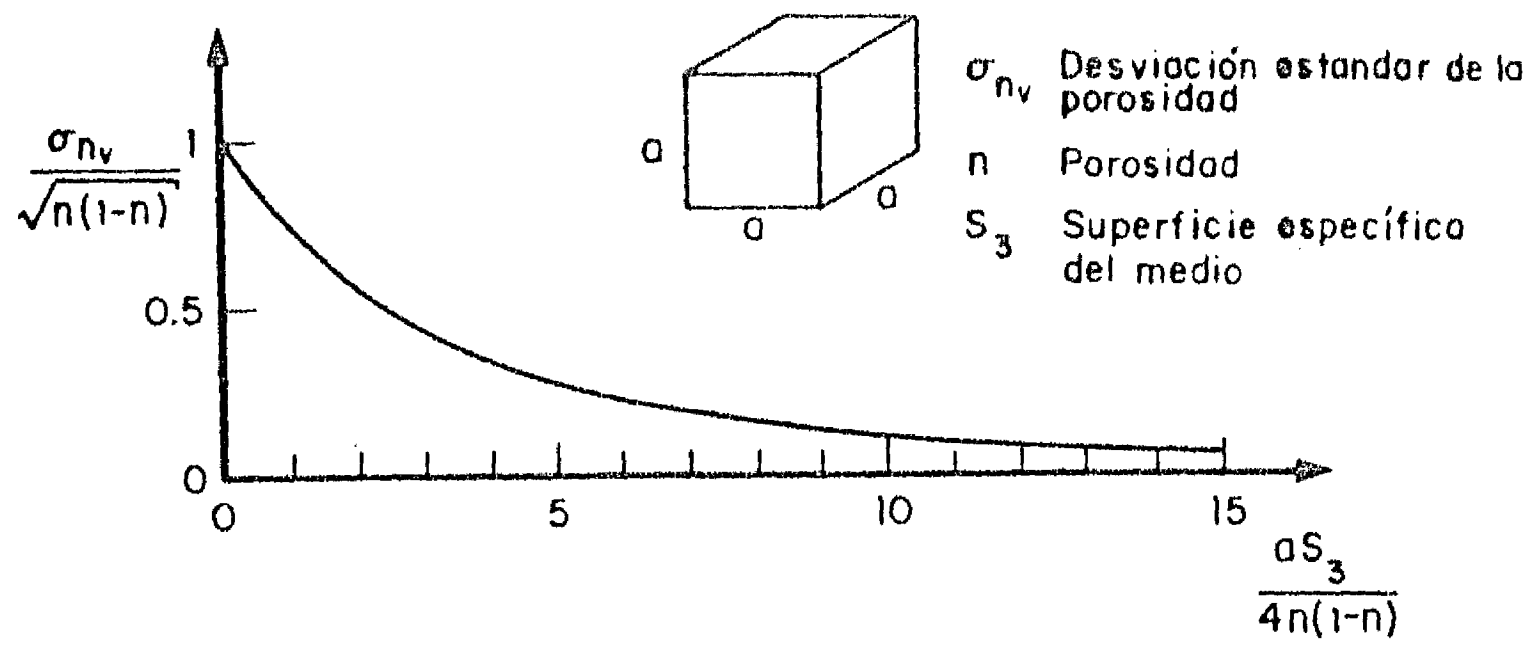


Fig 4.1 Dispersión de la porosidad de un medio granular medida en una muestra cúbica

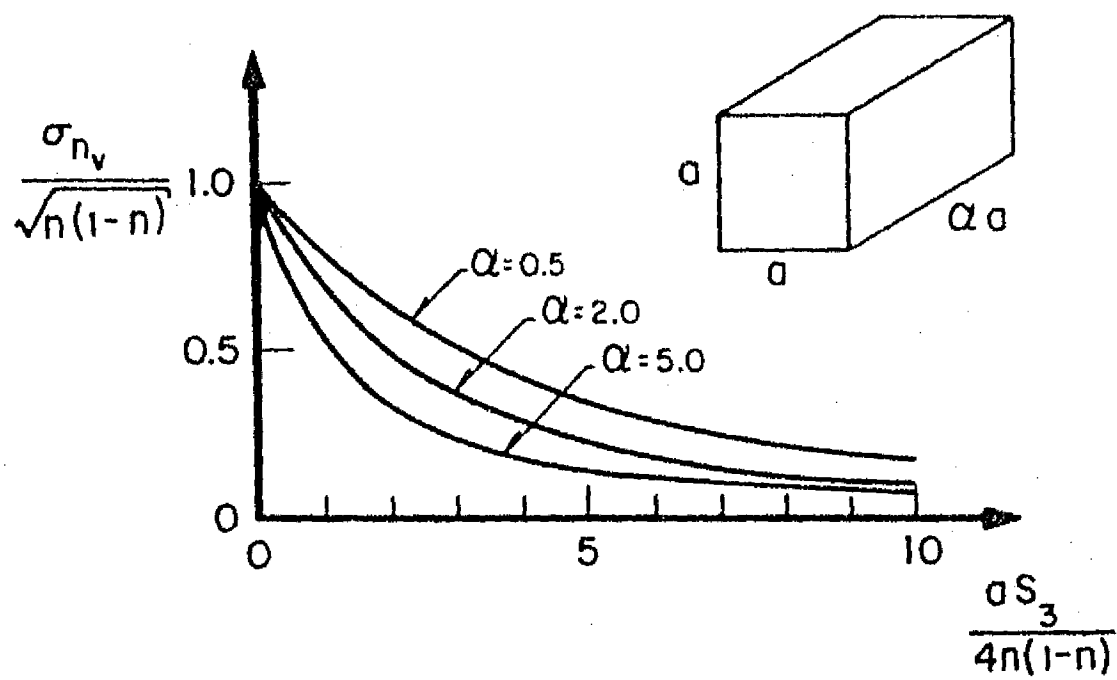


Fig 4.2 Dispersión de la porosidad de un medio granular medida en una muestra paralelepédica

$$\sigma_{n_v} / \sqrt{n(1-n)} = K \{a S_3 / [4n(1-n)]\}^{-3/2} \quad (4.3)$$

donde

σ_{n_v} Desviación estándar de la porosidad

K Coeficiente del orden de 1.4

La desviación estándar tiende por tanto a ser inversamente proporcional a la raíz cuadrada del volumen de la muestra. Este resultado era previsible. En efecto, se puede considerar que una muestra grande es la reunión de N muestras contiguas, más pequeñas, y sensiblemente independientes entre sí. Se sabe que la desviación estándar de la muestra más grande es entonces igual a la de las muestras elementales dividida por la raíz cuadrada de N [Cochran, 1977]. Este resultado es el que se vuelve a encontrar en la Ec 4.3. Esta ecuación no es aplicable a muestras pequeñas debido a que, en este caso, la hipótesis de independencia entre muestras elementales no es aceptable.

Para utilizar en forma más cómoda los resultados de la Fig 4.1 o de la Ec 4.3, puede ser conveniente observar que, tomando en cuenta las Ecs 2.22 y 2.186, se tiene, para materiales de partículas aproximadamente esféricas :

$$S_3 / [4n(1-n)] = \delta E_{3D} \{D^2\} / [4n E_{3D} \{D^3\}] = [3/(2n)] E_{3V} \{1/D\} \quad (4.4)$$

y por tanto, para materiales sensiblemente uniformes :

$$S_3 / [4n(1-n)] \cong [3/(2n)] (1/E_{3V} \{D\}) \cong [1.5/(nD_{50})] \quad (4.5)$$

Cuando se cumplen las condiciones anteriores, la Ec 4.3 se escribe simplemente :

$$\sigma_{n_v} / \sqrt{n(1-n)} = K [1.5a/(nD_{50})]^{-3/2} \quad (4.6)$$

Resultados análogos a los de la Fig 4.1 se presentan en la Fig 4.2 para muestras paralelepípedicas.

En la Fig 4.3 se proporciona el coeficiente de correlación

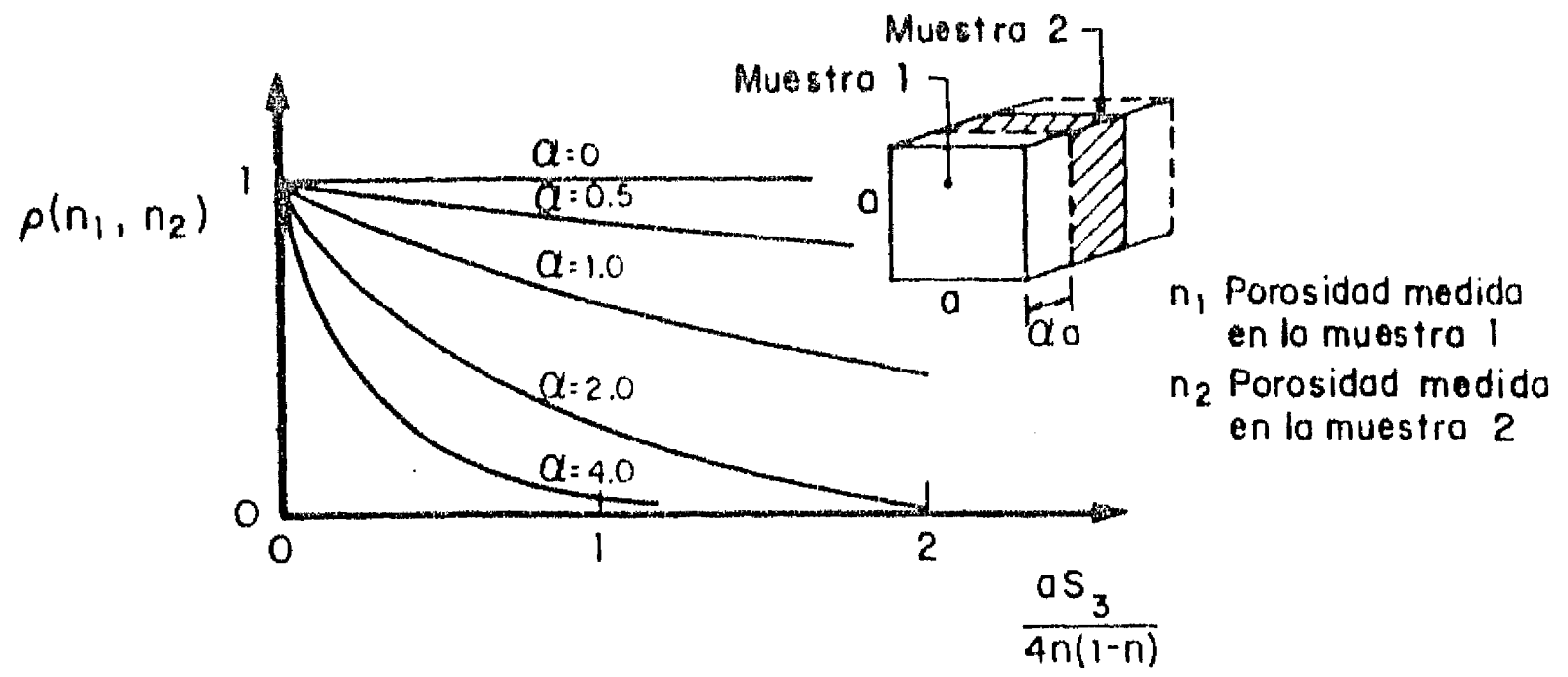


Fig 4.3 Coeficiente de correlación entre porosidades medidas en muestras vecinas

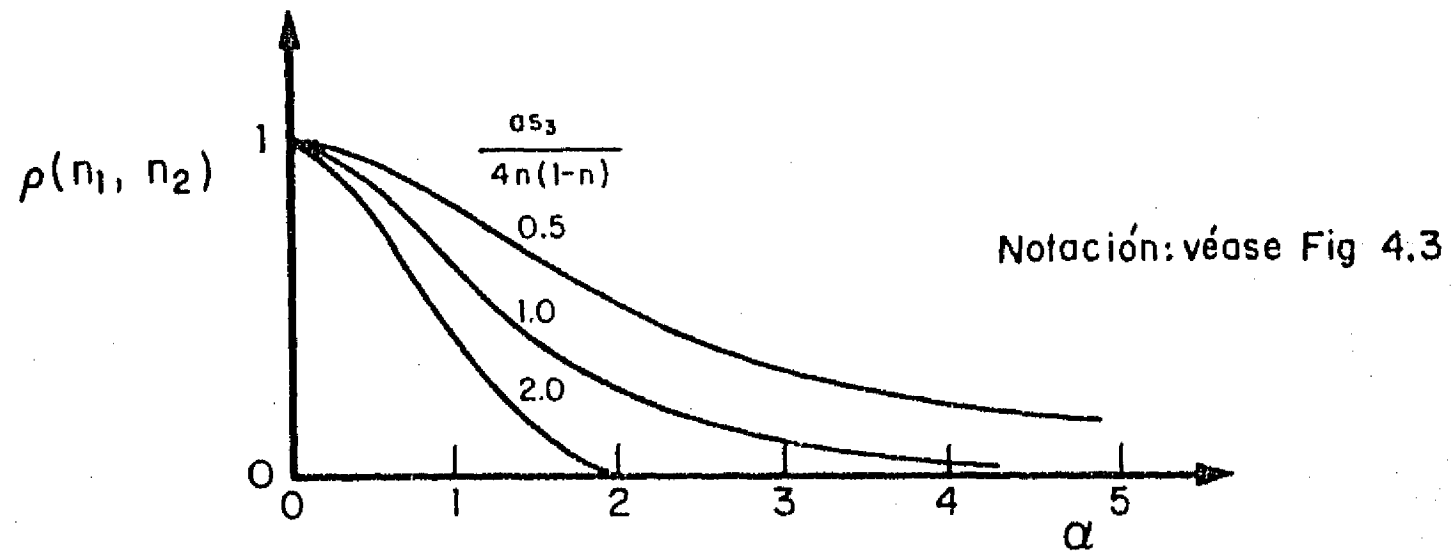


Fig 4.4 Reducción de la correlación entre muestras vecinas con la distancia

entre las porosidades medidas en muestras cúbicas vecinas con o sin traslape, calculado con las Ecs 2.115 y 2.116, como función de las dimensiones de las muestras. En la Fig 4.4 se presenta la variación del mismo coeficiente de correlación como función de la distancia entre muestras para un tamaño dado de muestra.

Resultados semejantes a los anteriores pueden derivarse para muestras obtenidas en planos de intersección o sondeos. En la Fig 4.5 se presentan las desviaciones estándar de la porosidad medida en una área cuadrada y a lo largo de un tramo de sondeo, calculadas a partir de las Ecs 2.143 y 2.148. Las relaciones presentadas en la Fig 4.5 tienden respectivamente hacia las expresiones siguientes:

- Área cuadrada :

$$\sigma_{n_v} / \sqrt{n(1-n)} = K \{aS_3 / [4n(1-n)]\}^{-1} \quad (4.7)$$

- Tramo de sondeo :

$$\sigma_{n_v} / \sqrt{n(1-n)} = K \{aS_3 / [4n(1-n)]\}^{-1/2} \quad (4.8)$$

La interpretación es la misma que en el caso de la muestra cubica y K resulta nuevamente del orden de 1.4.

Otro aspecto de interés es la representatividad de la porosidad medida en un sondeo o en un plano de intersección respecto a la porosidad de una cierta masa granular. Este problema puede ser tratado con las mismas ecuaciones. En la Fig 4.6 se presenta, a título de ejemplo, el coeficiente de correlación entre la porosidad medida en el tramo de sondeo AB y el de una masa granular cúbica que éste atraviesa. En la Fig 4.7 se muestra en forma análoga el coeficiente de correlación entre la porosidad medida en un cuadrado ABCD y el de una masa granular cúbica, una de cuyas caras coincide con el cuadrado.

El error cometido al estimar la porosidad de la masa a partir de la medida en un sondeo, un plano o en una muestra cúbica de tamaño menor que la masa, puede cuantificarse en términos probabilistas a través de la variancia de estimación definida como :

$$\sigma_E^2 = E\{(n_v - n_E)^2\} = E\{n_v^2\} + E\{n_E^2\} - 2 E\{n_v \cdot n_E\} \quad (4.9)$$

donde

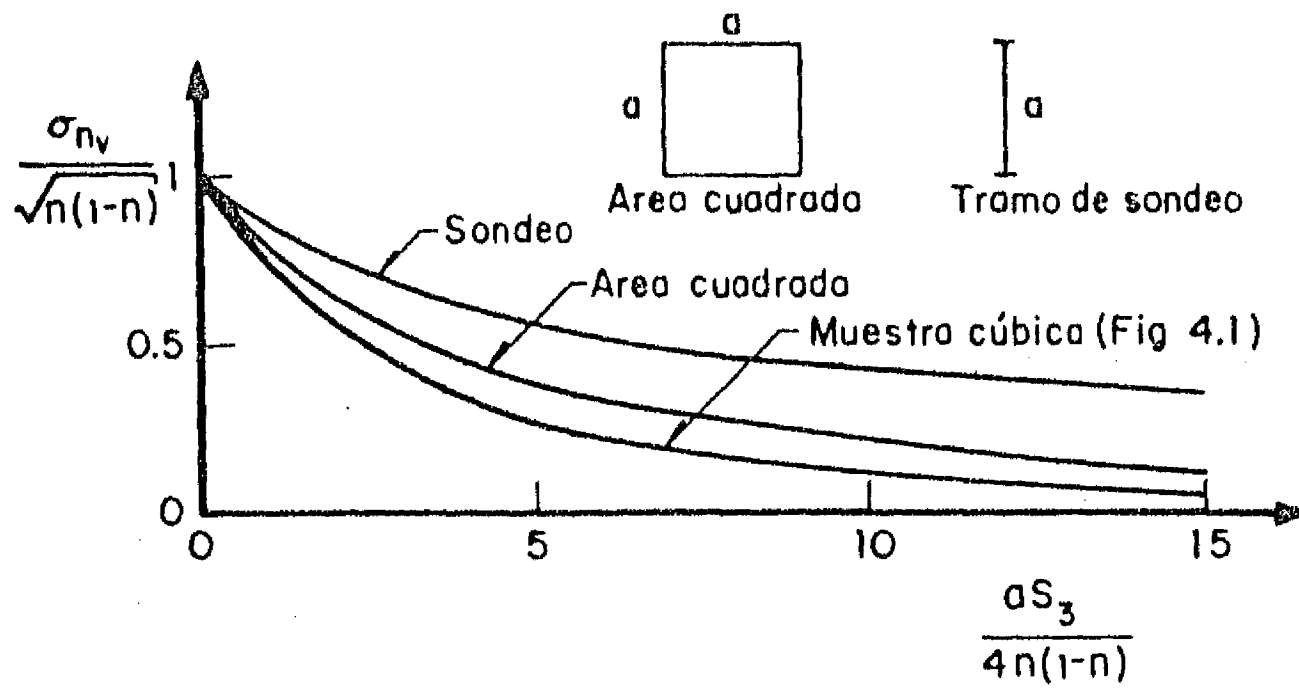


Fig 4.5 Dispersión de la porosidad de un medio granular medida en un área cuadrada y en un tramo de sondeo

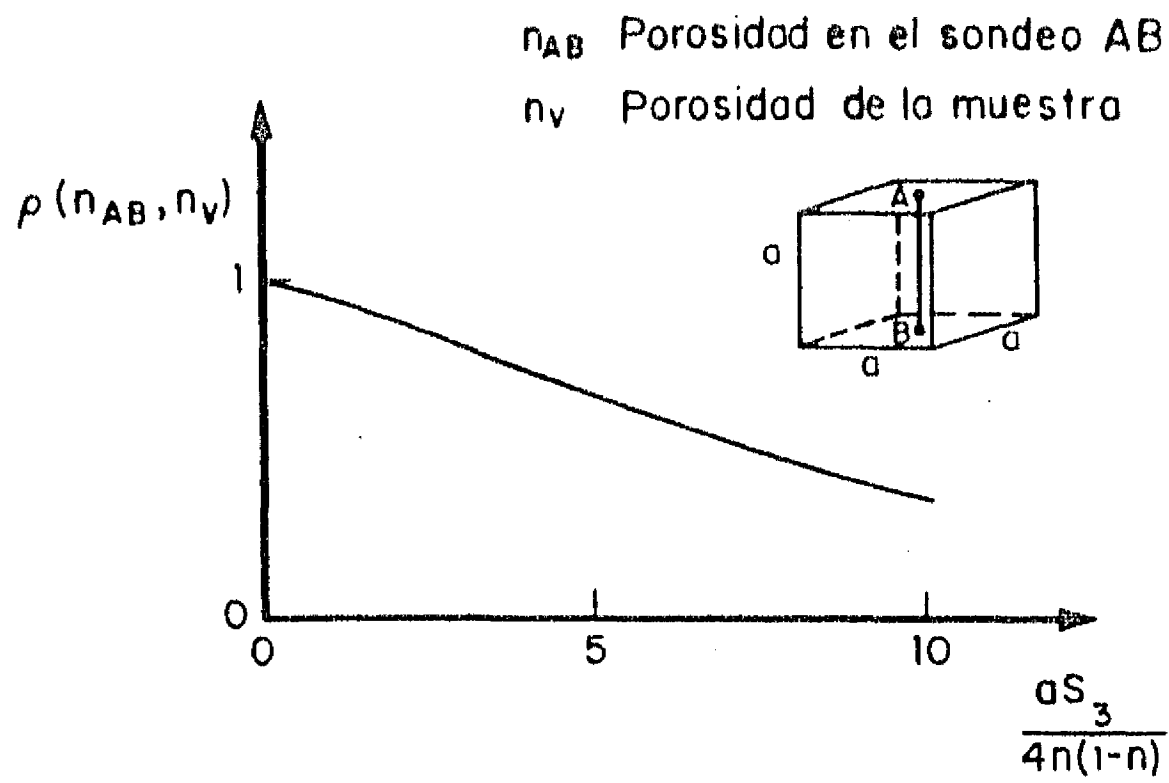


Fig 4.6 Coeficiente de correlación entre la porosidad medida en un sondeo y en una masa granular

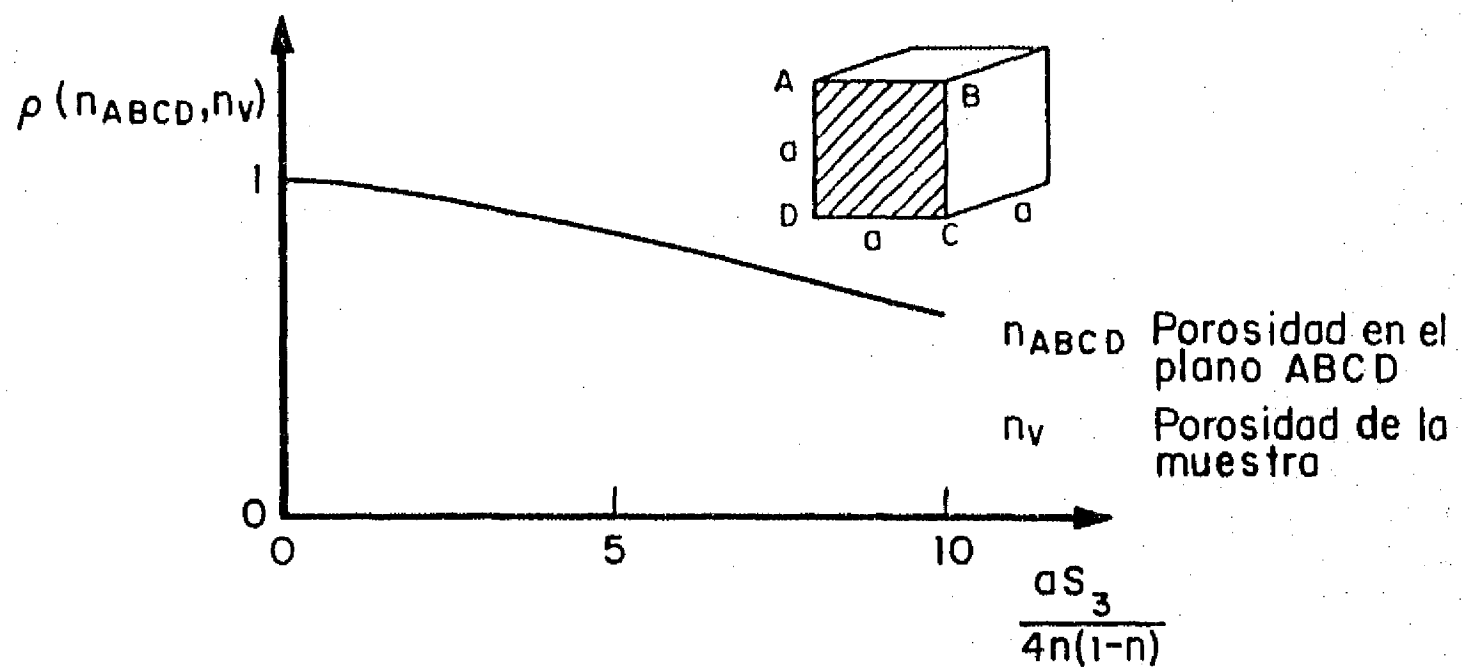


Fig 4.7 Coeficiente de correlación entre la porosidad medida en un plano y en una masa granular

n Porosidad de la muestra (uni, bi o tridimensional)

n Porosidad de la masa

es decir:

$$\sigma_E^2 = \text{var}[n_v] + \text{var}[n_E] - 2 \text{cov}[n_v, n_E] \quad (4.10)$$

Los términos de esta ecuación se pueden calcular a partir de las mismas ecuaciones 2.115 y 2.116.

b) Relación de vacíos

Para muestras pequeñas (pero de tamaño superior a los máximos poros) la dispersión de la relación de vacíos puede evaluarse en forma aproximada a partir de los resultados presentados en el inciso anterior y de la Ec 2.121 :

$$\text{var}[e_v] = \sigma_{n_v}^2 / (1-n)^4$$

Además, se señaló en 2.3.7 que la relación de vacíos medida en una muestra finita presenta un sesgo respecto al valor real de esta propiedad. La sobrestimación esperada es (Ec 2.119) :

$$\Delta e = \text{var}[n_v] / (1-n)^3$$

La magnitud de este sesgo puede por tanto calcularse a partir de los resultados del inciso anterior.

A título de ejemplo, se presenta en la Fig 4.8 la sobrestimación esperada de la relación de vacíos asociada a una muestra cúbica.

c) Peso volumétrico

El peso volumétrico seco de un suelo se expresa en términos de la porosidad como sigue:

$$\gamma_d = \gamma_s (1-n) \quad (4.11)$$

donde

γ_s Peso volumétrico de los sólidos

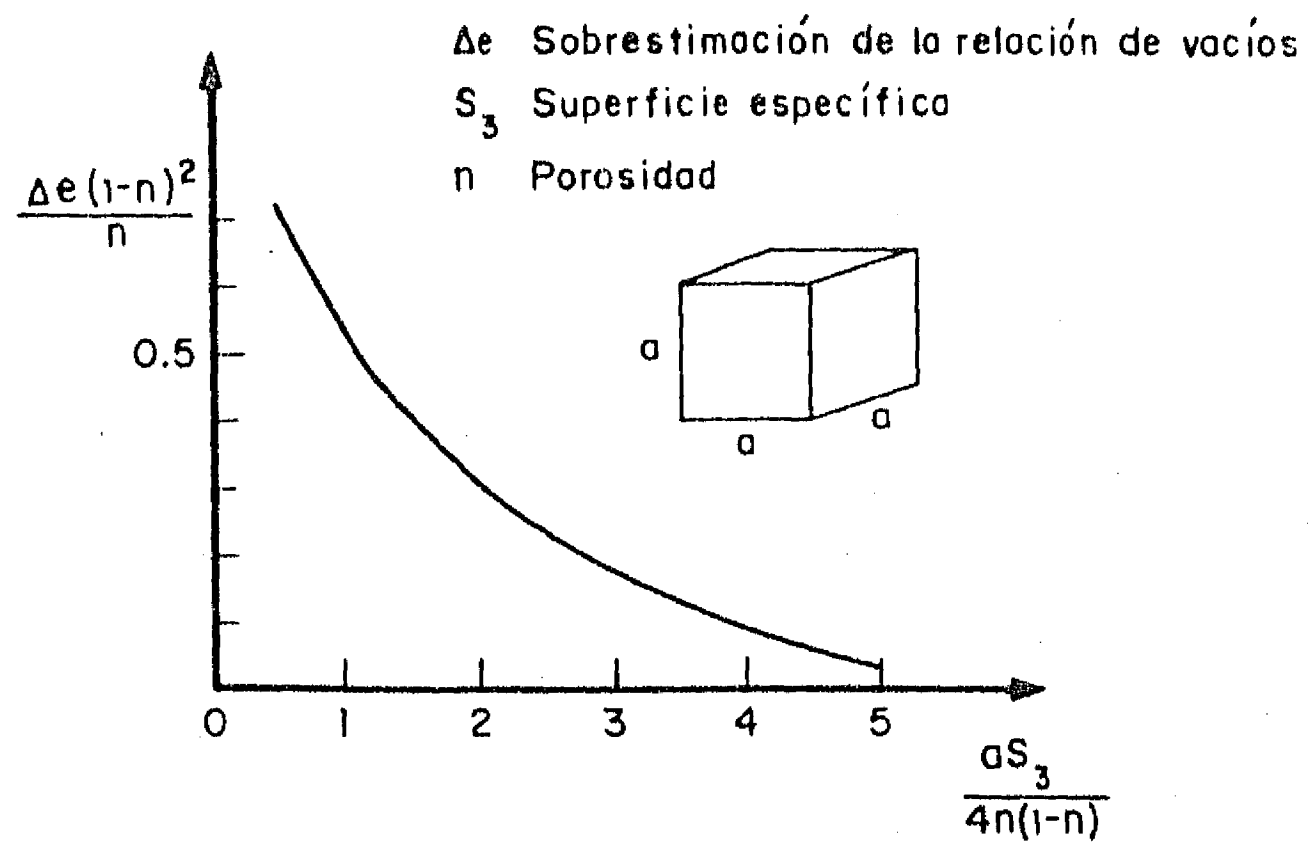


Fig 4.8 Esperanza de la sobrestimación de la relación de vacíos medida en una muestra cúbica

Si se acepta que la densidad de los sólidos es una constante, el peso volumétrico del suelo es realmente una propiedad estructural tal que, en una muestra de volumen V :

$$\begin{aligned} E\{\gamma_{dv}\} &= \gamma_s (1-n) \\ \text{var}[\gamma_{dv}] &= \gamma_s^2 \sigma_{n_v}^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

La dispersión del peso volumétrico debida al efecto de escala geométrico puede por tanto también calcularse a partir de la dispersión de la porosidad.

d) Distribución granulométrica

Los resultados obtenidos para la porosidad se aplican directamente a la distribución granulométrica, $G_3(d)$, referida al volumen total de la muestra, puesto que $G_3(d)$ puede interpretarse como una porosidad a condición de incluir entre los vacíos las partículas de diámetro menor que d (2.3.7). Obviamente, en la Fig 4.1 y en la Ec 4.3, la porosidad n debe sustituirse por $G_3(d)$ y la superficie específica del medio por la que se obtiene considerando exclusivamente las partículas de diámetro mayor que d .

Cuando el diámetro d se acerca al diámetro máximo de las partículas, es fácil verificar que la dispersión de $G_3(d)$ estimada con la expresión 4.3 tiende a coincidir con la calculada con la Ec 3.32 derivada en el caso del modelo poissoniano. En efecto, en este caso, esta última expresión puede escribirse, tomando en cuenta que $G_v(d)$ es cercano a la unidad :

$$\sigma_{G_v(d)} \approx 1.32 \sqrt{1 - G_3(d)} (a/d)^{-3/2} \quad (4.13)$$

La evaluación de la representatividad de las muestras puede hacerse también en términos de la función de distribución granulométrica $F_{3v}(d)$, más común que $G_3(d)$ en la práctica de la geotecnia (Ecs 2.134 a 2.138). Sin embargo, esta alternativa requiere pasos adicionales, en particular la estimación de la covariancia entre $G_v(d)$ y n_v , que la hacen menos atractiva.

4.2.3 Implicaciones para el dimensionamiento de muestras y

especímenes

Los resultados presentados en el inciso anterior permiten, utilizando las técnicas usuales de la estadística :

- Definir intervalos de confianza para las características estructurales de una masa granular a partir de mediciones realizadas en muestras pequeñas

- Definir las dimensiones mínimas de la muestra requerida para obtener estas propiedades con determinado grado de confiabilidad

- Probar la hipótesis de la homogeneidad de un medio granular a partir de las características de varias muestras

El aspecto de las dimensiones mínimas de las muestras y especímenes es probablemente el que presenta el mayor interés práctico, en particular para el control de las obras de tierra y enrocamientos y para las pruebas de laboratorio y de campo.

a) Control de obras de tierra y enrocamientos

El control de la porosidad, peso volumétrico y granulometría es necesario para la construcción de obras de tierra y enrocamientos (presas, terraplenes, etc.). Cuando el suelo contiene elementos gruesos, el efecto de escala geométrico puede dar lugar a errores importantes si la muestra analizada es demasiado pequeña. La selección del tamaño de la cala volumétrica a realizar para fines de verificación debe por tanto tomar en cuenta este efecto. La gráfica de la Fig 4.1 y las Ecs 4.3 y 4.6 constituyen una guía para esta selección. En efecto, si se admite que la densidad de probabilidad de la porosidad es aproximadamente normal, el error debido al efecto de escala es inferior a $2\sigma_n$ con una probabilidad de 95%. Así, de acuerdo con la Ec 4.6, para que el error sea inferior por ejemplo a 0.01 con una probabilidad de 95%, se deberá tener, en el caso de un material uniforme en estado suelto ($n = 0.5$) :

$$a/D_{50} > 8.8 \quad (4.14)$$

donde

a Arista de la muestra cúbica

Un error de ± 0.01 sobre la porosidad corresponde a un error del orden de ± 0.03 a 0.04 sobre la relación de vacíos y de $\pm 26 \text{ kg/m}^3$ sobre el peso volumétrico (con una densidad de sólidos de 2.65).

Para ilustrar lo anterior, se aplicó la Ec 4.14 a los materiales especificados para la construcción de la presa de Chicoasén [Marsal, 1979]. Los resultados se presentan en la Tabla 4.1. Para materiales de filtros y de transición, la realización de calas con efecto de escala despreciable es posible. Para el enrocamiento compactado, por el contrario, el tamaño de cala requerido resultaría excesivo en la práctica. En la Tabla 4.2 se presentan resultados análogos para los materiales de construcción de la escollera del puerto industrial de El Osthón, Ver. [Fig 4.9 ; Hanell, 1982]. Los resultados de esta tabla muestran que para verificar la compactación del núcleo, se requeriría una cala de muy grandes dimensiones. Para los materiales de transición y de la coraza, el efecto de escala es tan fuerte que el concepto de porosidad deja de ser útil. Así, para una muestra de 5 m de arista, correspondiente al espesor de la capa de coraza, el intervalo de incertidumbre $\pm 2\sigma_v$ es aproximadamente de ± 0.20 . Por otra parte, en el contacto con los materiales de transición existe un efecto de pared. Además, la frontera superior de la capa no puede definirse con precisión.

Resulta también interesante delimitar el campo de aplicación de las calas de dimensiones usuales [SARH, 1970].

- Para suelos finos compactados, es usual recurrir a una cala cilíndrica de 20 cm de altura y de 15 cm de diámetro. Puede considerarse por tanto que esta dimensión de cala solamente sería aceptable para materiales con $D_{50} < 1.7$ cm. Para arenas y suelos finos, la dimensión de la cala es por tanto generalmente adecuada desde el punto de vista del efecto de escala.

- Para gravas, es usual recomendar una cala cúbica de 50 cm de lado. En este caso, D_{50} debe ser inferior a 5.7 cm.

- Finalmente, para enrocamiento, suele recomendarse como mínimo una cala de 1 m de lado. Esta última dimensión impone $D_{50} < 11.4$ cm, un diámetro generalmente rebasado por los enrocamientos.

En la misma referencia se recomienda usar un molde cúbico de 30 cm de lado para determinar la relación de vacíos mínima y máxima de materiales granulares con partículas de hasta 7.6 cm de diámetro. La regla de la Ec 4.14 muestra que esta dimensión sería inaceptable si D_{50} fuera mayor de 3.5 cm.

Por otra parte, conviene observar que algunos métodos recientes de determinación del peso volumétrico, en particular el método nuclear, operan sobre una muestra de tamaño menor que las calas tradicionales. Así, el método conocido como "Backscatter", extrae información principalmente de la capa más superficial (2.5 cm de espesor) del suelo, con lo que los

TABLA 4.1 Tamaños mínimos de calas. Materiales de Chicoasén

Zona	Granulometría*				Dimensiones mínimas de la muestra	
	D _{mín} , en cm	D _{máx} , en cm	D ₅₀ , en cm	C _u	a req. en cm	Vol. en m ³
Filtros	0.2	8	2	10	18	0.0058
Transición	4	12	7	1.8	62	0.238
Enrocamiento compactado	40	40	40	1	352	43.6

* Límite superior

TABLA 4.2 Tamaños mínimos de calas. Escollera El Ostión

Material	Dimensiones, en m	a requerida*, en m	Vol. en m ³
1 (núcleo)	0.15 - 0.50	2.86	
2 (transición)	0.90 - 1.60	11.0	1331
3 (coraza roca)	2.40 - 2.50	21.6	10,022
4 (coraza concreto)	2.60	22.9	11,978

*Arista de una muestra cúbica

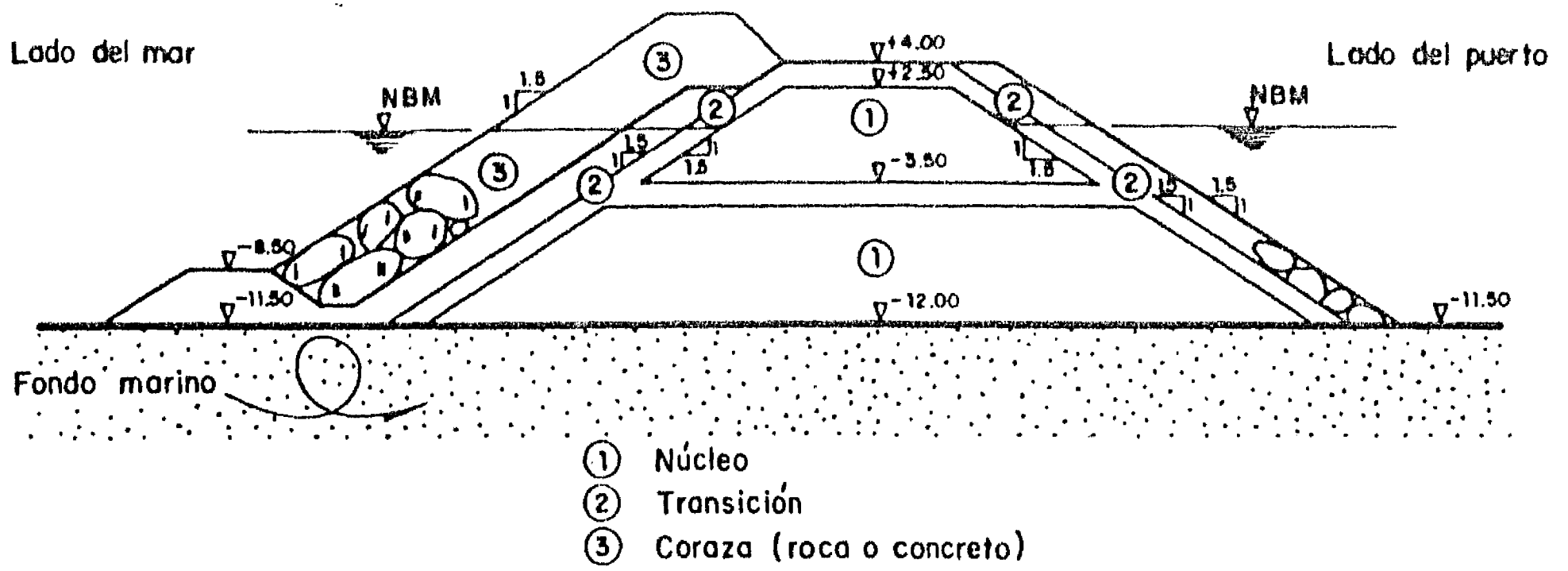


Fig 4.9 Escollera El Ostión

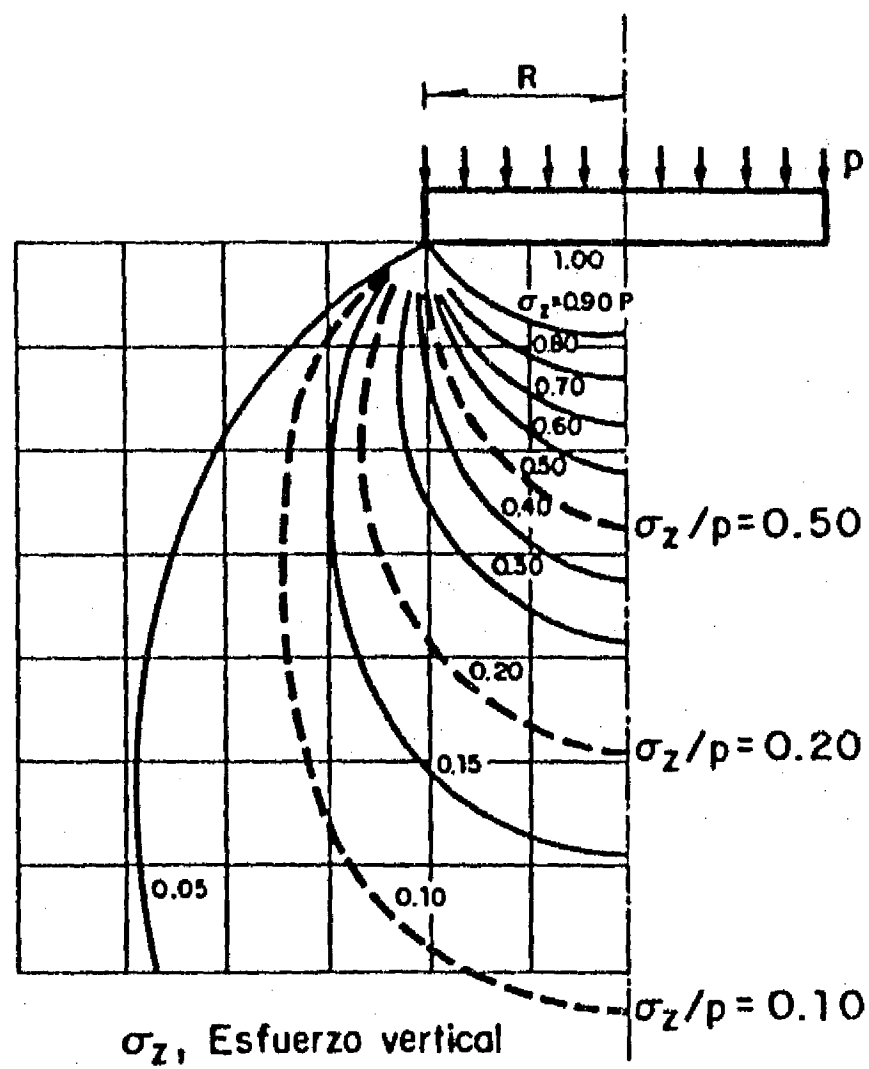


Fig 4.10 Bulbos de presión en pruebas de placa

resultados son sensibles al efecto de escala geométrico. Puede estimarse que con este método, debe tenerse $D_{50} < 0.8$ cm.

b) Pruebas de campo

Los resultados de los ensayos mecánicos de campo pueden verse afectados por el efecto de escala geométrico. Independientemente de los efectos de escala mecánicos que puedan presentarse, es necesario que la zona sometida a los ensayos tenga dimensiones suficientes para que sus características estructurales sean representativas de las del medio. Esto resulta claro por ejemplo en el caso de una prueba de placa (Fig 4.10). En estas pruebas, los bulbos de presión que afectan la masa deben tener dimensiones grandes respecto al diámetro de las partículas. Si, por ejemplo, se aplica la Ec 4.14 al bulbo de presiones correspondiente a $\sigma_z/p = 0.50$, se encuentra que el diámetro de la placa debe ser superior a veinte veces el D_{50} del material en estudio.

Consideraciones análogas podrían hacerse para otros ensayos de campo como la prueba presiométrica, los ensayos de penetración, etc. En la misma forma, el efecto de escala debe tomarse en cuenta al usar extensómetros lineales para medir las deformaciones de masas granulares; en este caso, la dispersión de la porosidad asociada a una determinada longitud del extensómetro debe calcularse con las Ecs 2.148 ó 4.8.

c) Pruebas de laboratorio

En la selección de las dimensiones de los especímenes representativos inalterados o reconstituidos que se someterán a pruebas mecánicas de laboratorio, es necesario tomar en cuenta el efecto de escala. Para los especímenes inalterados, la representatividad de la porosidad y de la granulometría puede ser evaluada con las Ecs 4.3 y 4.6. En el caso de los especímenes reconstituidos, el problema se plantea en la misma forma para la granulometría pero ya no existe relación estadística entre la porosidad de la muestra y la del medio que se pretende representar.

Existen diversas técnicas para verificar la homogeneidad de los especímenes (3.2). Estas técnicas, destructivas o no, consisten en determinar la porosidad en diversas partes de la muestra. Este tipo de control puede resultar muy sensible al efecto de escala si las zonas estudiadas presentan dimensiones demasiado pequeñas en relación con las de los granos.

Como ilustración de lo anterior, se han representado en la Fig 4.11 los resultados obtenidos en un estudio gammamétrico de un espécimen de arena ($D_{50} = 1.3$ mm, $C_u = 1.4$). El método consiste en medir a diferentes alturas la absorción de un haz de rayos gamma de 4 mm de diámetro que cruza el espécimen en una longitud de 70 mm [Bouvard, 1982]. De acuerdo con la Ec

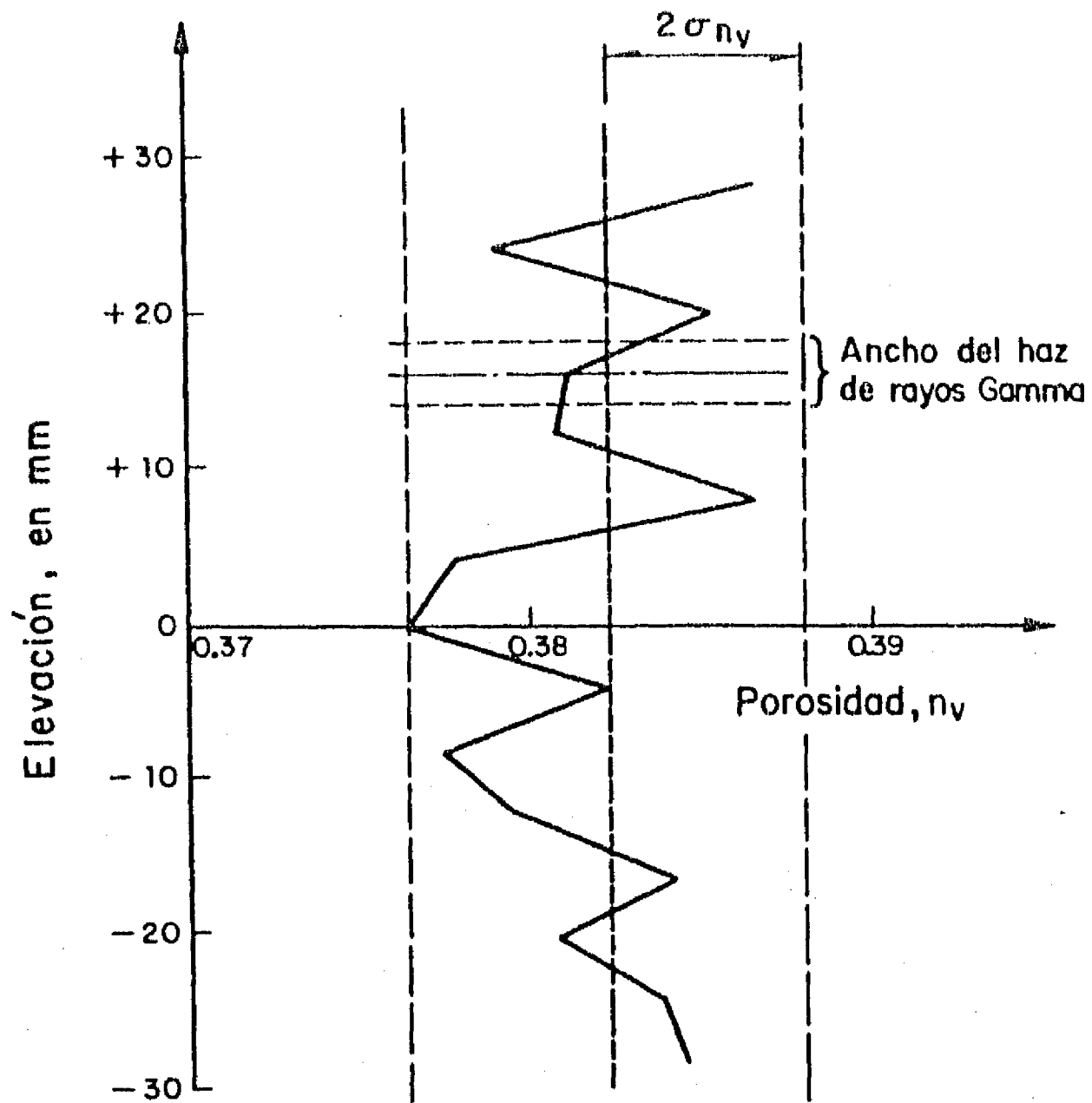


Fig 4.11 Perfil de porosidad en un espécimen de material granular (Bouvard, 1982)

4.1 , el semiancho del intervalo de variación por efecto de escala ($2 \sigma_{nv}$) es, para este volumen, de 0.005 a 0.008 dependiendo del estado de compactación del material. Las variaciones representadas en la Fig 4.11 no son por tanto significativas y la hipótesis de homogeneidad no puede ser descartada. Estas variaciones pueden explicarse únicamente en términos del efecto de escala geométrico.

4.2.4 Conclusiones

Se mostró en este capítulo que las variaciones aleatorias de varias propiedades estructurales dentro de un medio granular pueden cuantificarse en términos probabilistas. Las relaciones establecidas deberían ser de gran utilidad para racionalizar el muestreo en este tipo de materiales y la selección del tamaño de los especímenes para ensayos de laboratorio.

4.3 MEZCLAS OPTIMAS

4.3.1 Antecedentes

El problema del diseño de mezclas de materiales granulares de baja porosidad y por tanto de alta resistencia y baja compresibilidad, ha recibido atención desde hace muchos años. Los trabajos más profundos sobre este tema fueron realizados en relación con la definición de las curvas granulométricas óptimas para los agregados de los materiales de pavimentación y del concreto. En la actualidad, este tema sigue siendo un tema que requiere investigación. En este capítulo, a partir de una revisión de trabajos antiguos, aparentemente un poco olvidados, y con la ayuda del modelo de simulación del inciso 3.3.4, se intenta presentar un estado del arte conciso sobre el tema y establecer varios resultados de aplicabilidad directa.

4.3.2 Mezclas binarias

Se entiende por mezcla binaria un material granular obtenido a partir de dos materiales con partículas de diámetro uniforme D_1 (grandes) y D_2 (pequeñas), respectivamente. Se llama α la relación D_2/D_1 . Para determinar el proporcionamiento de los ingredientes que permite obtener la porosidad mínima, se han seguido diferentes enfoques.

Furnas [1931] sugirió calcular la proporción óptima de partículas pequeñas a partir del volumen de los vacíos de las grandes. En una muestra de mezcla de volumen unitario, el volumen de las partículas grandes es :

$$V_{S_1} = 1 - n_1 \quad (4.15)$$

donde

n_1 Porosidad de las grandes [$G_3(D_1)$, 2.3.2]

Las partículas pequeñas disponen entonces de un volumen igual a n_1 para acomodarse y su volumen óptimo puede calcularse como :

$$V_{S_2} = (1 - n_2) n_1 \quad (4.16)$$

donde

n_2 Porosidad de las pequeñas

Si n_0 es la porosidad de los dos componentes de la

mezcla considerados en forma aislada y si se acepta con Furnas que $n_1 = n_2 = n_0$, la porosidad de la mezcla es:

$$n = n_0 - (1-n_0)n_0 \quad (4.17)$$

Las proporciones óptimas son entonces :

$$\text{Proporción de grandes } Z_1 = (1-n_0)/[(1-n_0)(1+n_0)] = 1/(1+n_0) \quad (4.18)$$

$$\text{Proporción de pequeñas } Z_2 = 1 - Z_1 = n_0/(1+n_0) \quad (4.19)$$

Las fórmulas anteriores solamente dan valores cercanos a los experimentales para valores de α muy pequeños. En efecto, la presencia de las partículas pequeñas hace que las grandes se separen. Por otra parte, las grandes dan lugar a un efecto de pared que aumenta la porosidad de las pequeñas. Estos fenómenos hacen crecer n_1 y n_2 y por tanto la porosidad n de la mezcla. Ambos efectos solamente pueden despreciarse si $D_2 \ll D_1$.

Lo anterior fue puesto claramente en evidencia por Caquot [1937] en un estudio teórico basado en resultados experimentales de Leclerc du Sablon [1927]. Haciendo variar los volúmenes aparentes V_1 y V_2 de los componentes que intervienen en una mezcla de volumen unitario, para un valor de α dado, se puede determinar la porosidad mínima alcanzable (punto M de la curva AMC, Fig 4.12). Se obtienen en esta forma los resultados que se indican en la Tabla 4.3 para diferentes valores de α . Estos mismos resultados se presentan en forma gráfica (curva BED) en dicha Fig 4.12. Caquot mostró que la curva BED es una hipérbola equilátera. Si n_0 es la porosidad de cada uno de los ingredientes de la mezcla por separado (considerada del orden de 0.44 por Caquot), se puede ajustar a la función que proporciona la porosidad mínima en función de la relación de diámetros, la expresión siguiente:

$$n = n_0 - n_0(1-n_0)[(1-\alpha)/(1+\alpha)]^2 \quad (4.20)$$

La mezcla más densa se obtiene cuando α tiende a cero, es decir cuando los vacíos de los granos grandes se rellenan con granos muy pequeños. La porosidad y las proporciones óptimas tienden entonces asintóticamente a los valores de Furnas (Ecs 4.16 a 4.19). La Tabla 4.3 muestra que el efecto de separación de los granos grandes es más importante que el

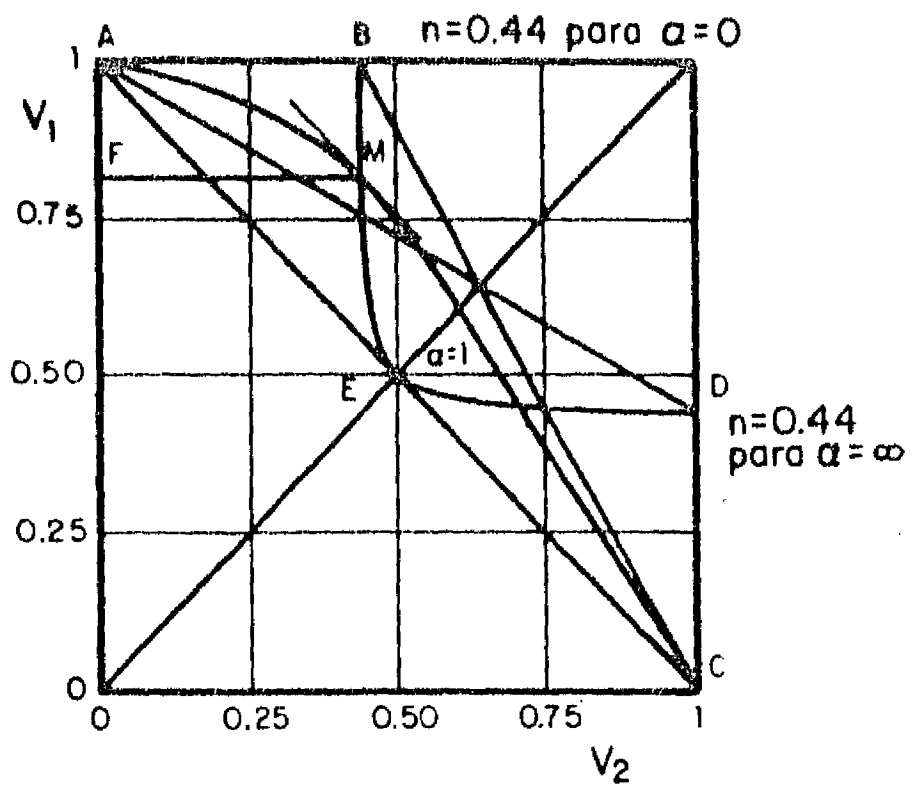


Fig 4.12 Porosidad de mezclas binarias (Caquot, 1937)

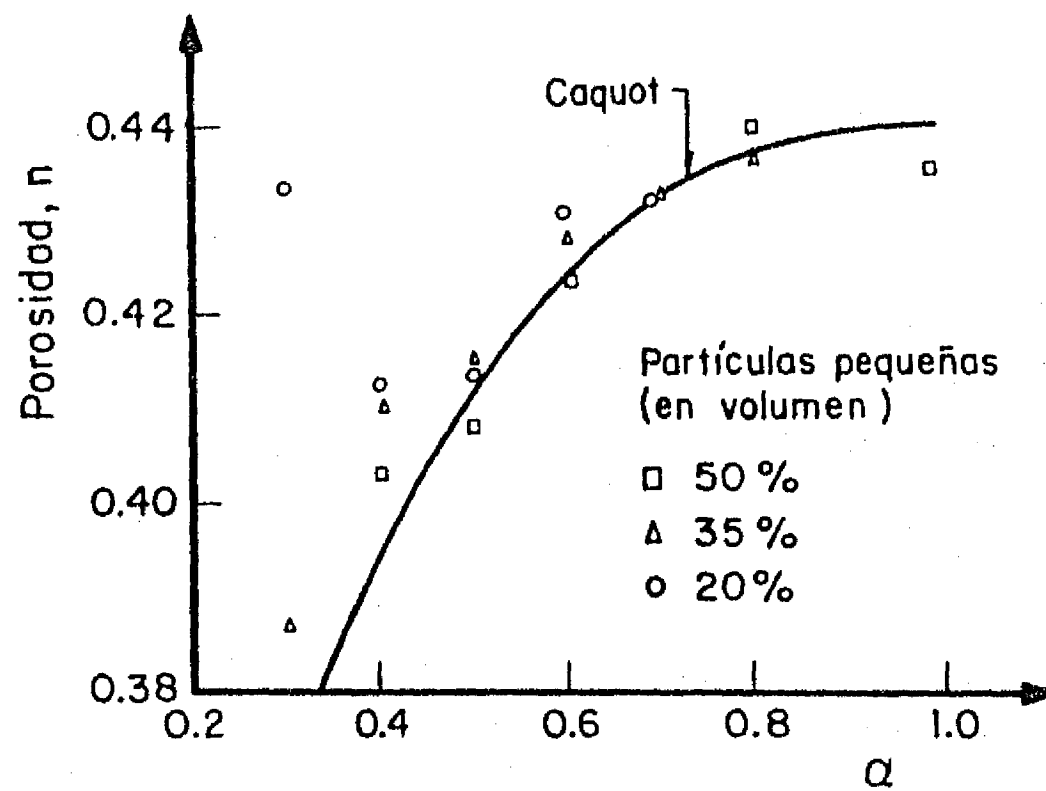


Fig 4.13 Porosidad de mezclas binarias obtenidas por simulación

TABLA 4.3 Proporcionamiento de mezclas binarias para minimizar
la porosidad

α	1/2	1/4	1/8	1/16	1/64	1/256	1/512	1/1024	1/4096
V_1 (gruesos)	0.566	0.667	0.776	0.862	0.965	0.990	0.996	0.998	0.999
V_2 (finos)	0.467	0.452	0.445	0.443	0.441	0.440			
n_{mezcla}	0.421	0.373	0.316	0.269	0.212	0.199	0.196	0.195	0.194
% gruesos	54.8	59.6	63.5	66.1	68.6	69.2	69.4	69.4	69.4
% finos	45.2	40.4	36.5	33.9	31.4	30.8	30.6	30.6	30.6

efecto de pared de las grandes sobre la porosidad de las pequeñas.

El modelo descrito en 3.3.4 para la simulación numérica de la estructura de los medios granulares permite llevar a cabo estudios semejantes a los realizados en el laboratorio por Leclerc du Sablon. Para verificar la expresión 4.20, se simularon varias estructuras constituidas por partículas esféricas de diámetros D y αD en varias proporciones. El coeficiente α solamente se hizo variar de 0.3 a 1. Para valores menores de 0.3 se hubiera necesitado un número demasiado grande de partículas. En cada caso, es decir para cada valor de α y cada proporción, se formaron cuatro estructuras. Las porosidades medias obtenidas se muestran en la Fig 4.13, donde se pueden comparar con los valores correspondientes a la fórmula de Caquot. Según la Tabla 4.3, los porcentajes óptimos de partículas pequeñas (en volumen) son del orden de 40 a 50. La simulación permite corroborar estos resultados en forma satisfactoria a pesar de la dispersión introducida por el efecto de escala geométrico.

4.3.3 Mezclas con N componentes

Las consideraciones de Furnas se extienden fácilmente a mezclas de N componentes. Las proporciones de los diferentes componentes forman una serie geométrica con los términos siguientes (a dividir por la suma de los N primeros términos para una mezcla de N componentes):

$$1/(1+n_0) ; n_0/(1+n_0) ; n_0^2/(1+n_0) ; \dots \quad (4.21)$$

y las porosidades mínimas decrecen como sigue:

$$n_0 ; n_0 - n_0(1-n_0) ; n_0 - n_0(1-n_0) - n_0^2(1-n_0) ; \dots \quad (4.22)$$

Nuevamente, estos resultados solamente son válidos si los diámetros sucesivos de las partículas de los componentes presentan dimensiones muy diferentes entre sí. En la práctica, las porosidades obtenidas son siempre mayores que las indicadas por la Ec 4.22, debido a los efectos de separación de partículas y de pared ya comentados en el inciso anterior.

Extendiendo los resultados de la Fig 4.12 a mezclas de varios componentes, Caquot pudo definir en forma aproximada la porosidad mínima alcanzable al agregar a una mezcla de N componentes un componente N+1 de menor diámetro. A partir de

las mezclas óptimas de dos componentes, fue en esta forma posible definir mezclas compactas de tres, cuatro, cinco... componentes. Las porosidades obtenidas en esta forma (programa MEZCLAS) se presentan en la Fig 4.14 para una secuencia de N componentes de diámetros $D, \alpha D, \alpha^2 D, \dots, \alpha^{N-1} D$ y para valores de N de 1 a 5.

Cabe observar que las mezclas obtenidas en esta forma no son necesariamente las más densas. Para mostrar lo anterior, se reproducen en la Fig 4.15 los resultados obtenidos por Feret [1892] para una mezcla de tres arenas de porosidad natural próxima a 0.5. Se emplea en la figura una representación triangular en la que f, g y m son los porcentajes de cada una de las arenas. Se observa que la porosidad mínima se obtiene para la mezcla binaria arena gruesa-arena fina, sin arena intermedia. Resultados semejantes se obtuvieron en la computadora con el modelo numérico del inciso 3.3.4 para tres componentes de diámetro $D, \alpha D$ y $\alpha^2 D$. Simulando estructuras con diferentes proporciones de partículas de estos diferentes diámetros, se obtuvieron por ejemplo, para α igual a 0.8, las porosidades que se indican en la Fig 4.16. La tendencia es la misma que en la Fig 4.15, es decir que las porosidades mínimas se alcanzan cuando no se incluyen partículas intermedias en la mezcla.

Resulta por tanto claro que, dependiendo del valor de la relación α , las mezclas binarias pueden ser más densas que las de tres componentes y, en la misma forma, las de N componentes más densas que las de N+1, etc... Lo anterior se puede verificar en la Fig 4.14, donde se observa, por ejemplo, que, si se pretende formar una mezcla de tres componentes de diámetro $D, \alpha D$ y $\alpha^2 D$, la mezcla binaria $D, \alpha^2 D$ resulta más densa que la de tres elementos para $\alpha > 0.15$. Resultados análogos se obtienen comparando entre sí las porosidades alcanzadas para tres, cuatro o cinco componentes.

Para definir una granulometría discontinua de mínima porosidad con tamaños comprendidos entre dos valores dados D_{\min} y D_{\max} , es posible tomar en cuenta lo anterior y usar como guía los resultados presentados en la Fig 4.17, que fueron obtenidos a partir de la Fig 4.14. Para diferentes valores de D_{\min} y D_{\max} se indican las mínimas porosidades alcanzables con determinado número de componentes. El valor óptimo de α es del orden de 0.1 y por tanto el número óptimo de componentes puede considerarse igual al entero más cercano a:

$$N = 1 + \text{Log}_{10} \left(\frac{D_{\max}}{D_{\min}} \right) \quad (4.23)$$

Las proporciones de los componentes para el valor óptimo de α y de N se indican en la Tabla 4.4, para diferentes valores de D_{\min}/D_{\max} . Se observa que las proporciones de

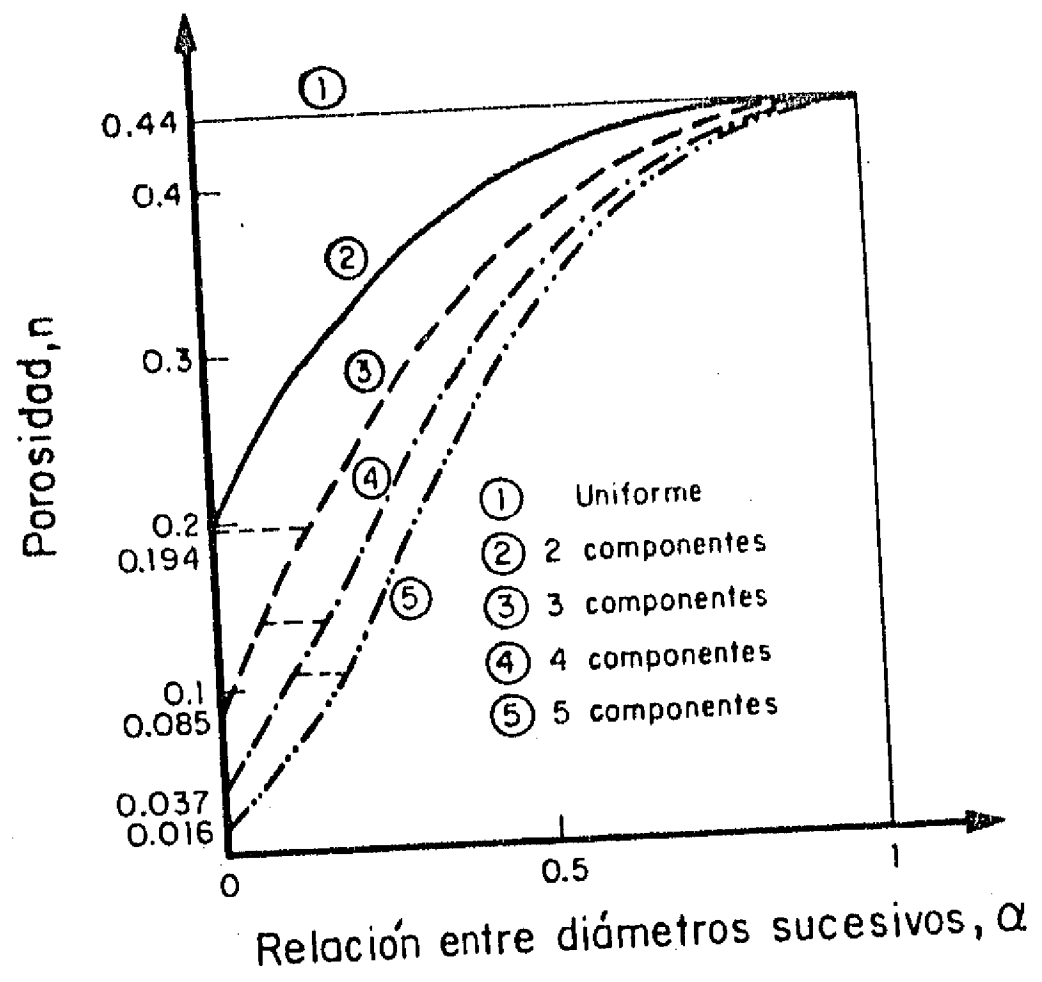


Fig 4.14 Porosidades obtenidas por mezcla secuencial

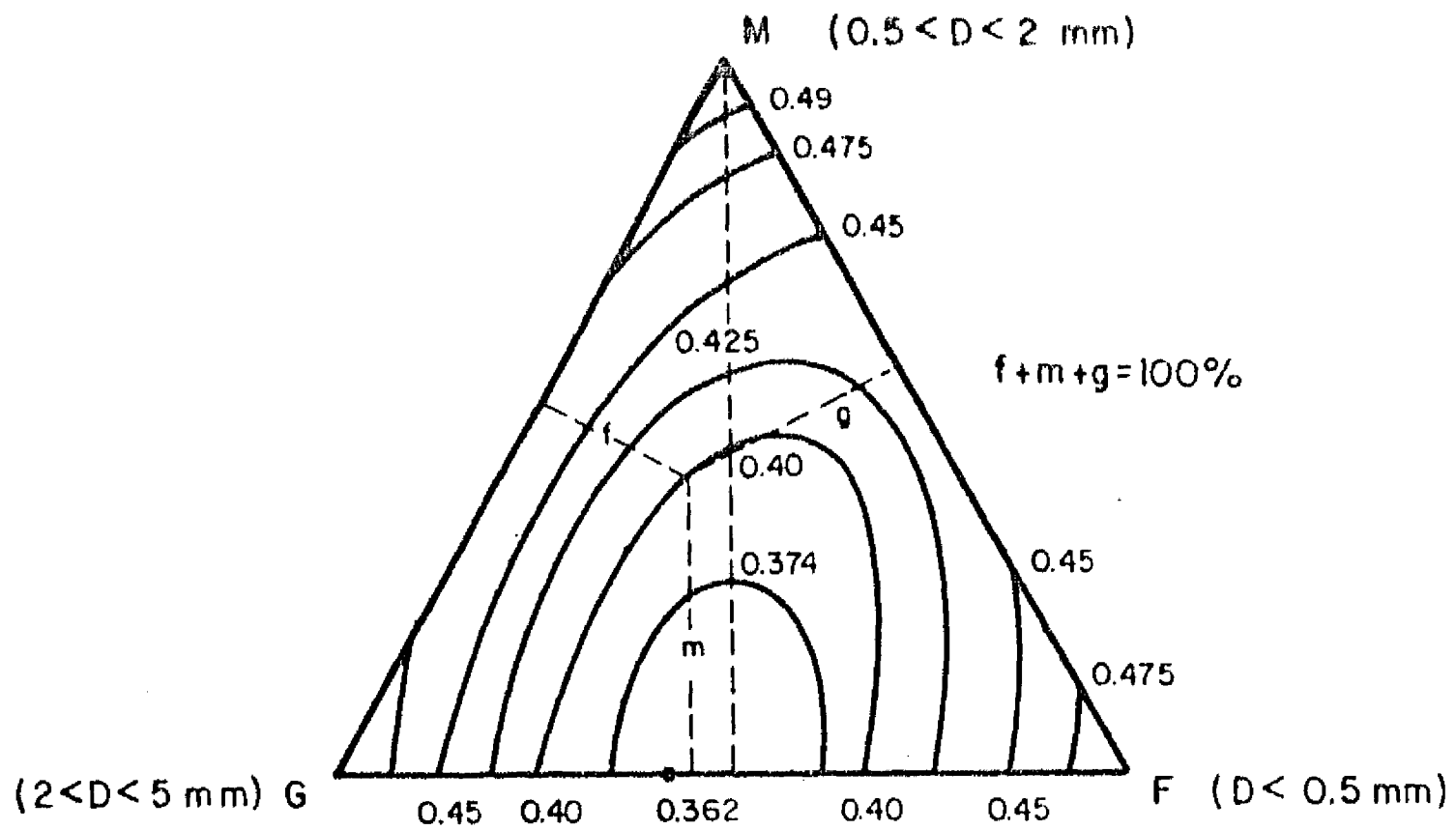


Fig 4.15 Porosidad de mezclas de tres arenas (Feret, 1892)

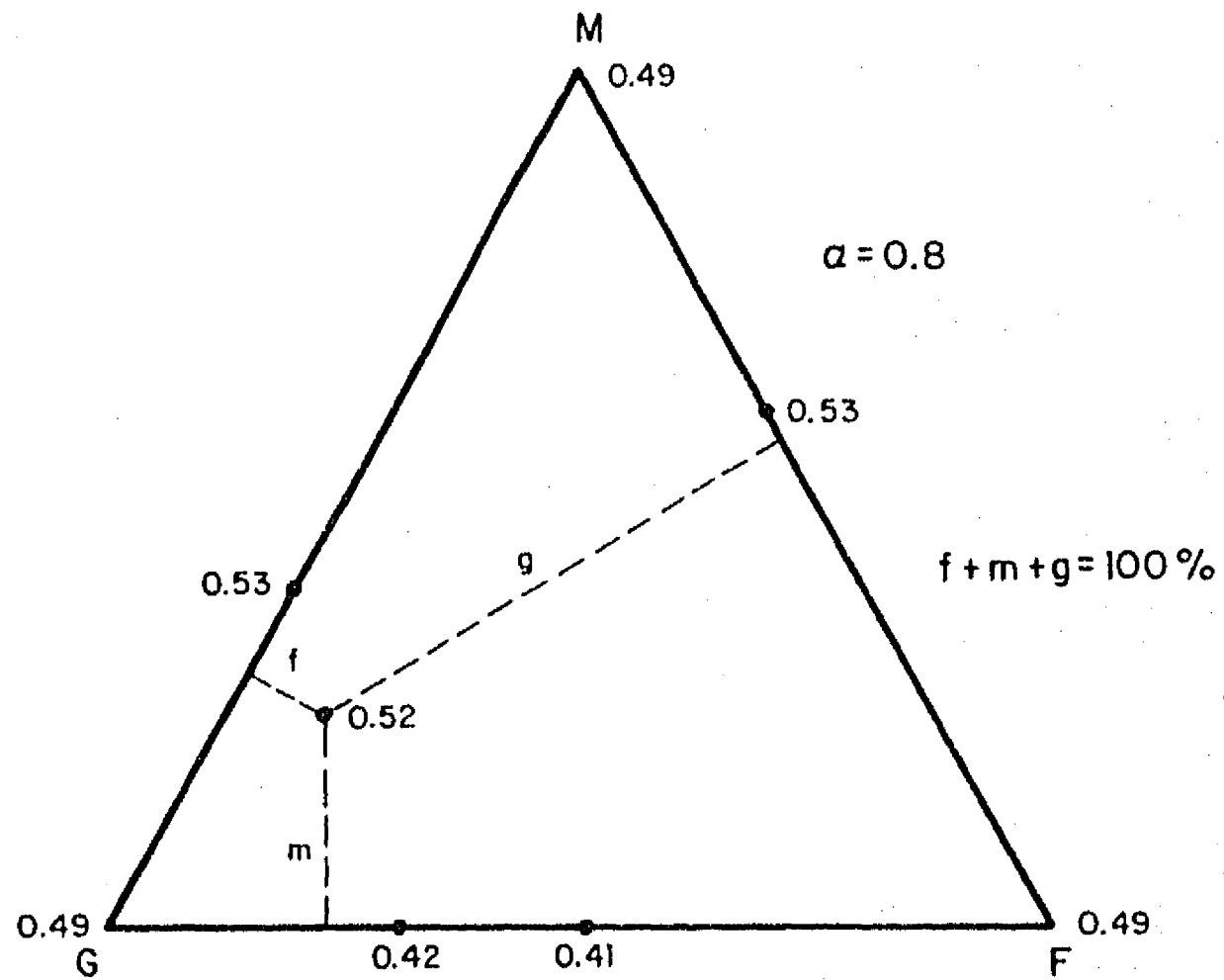


Fig 4.16 Repetición de los experimentos de Feret por simulación con computadora

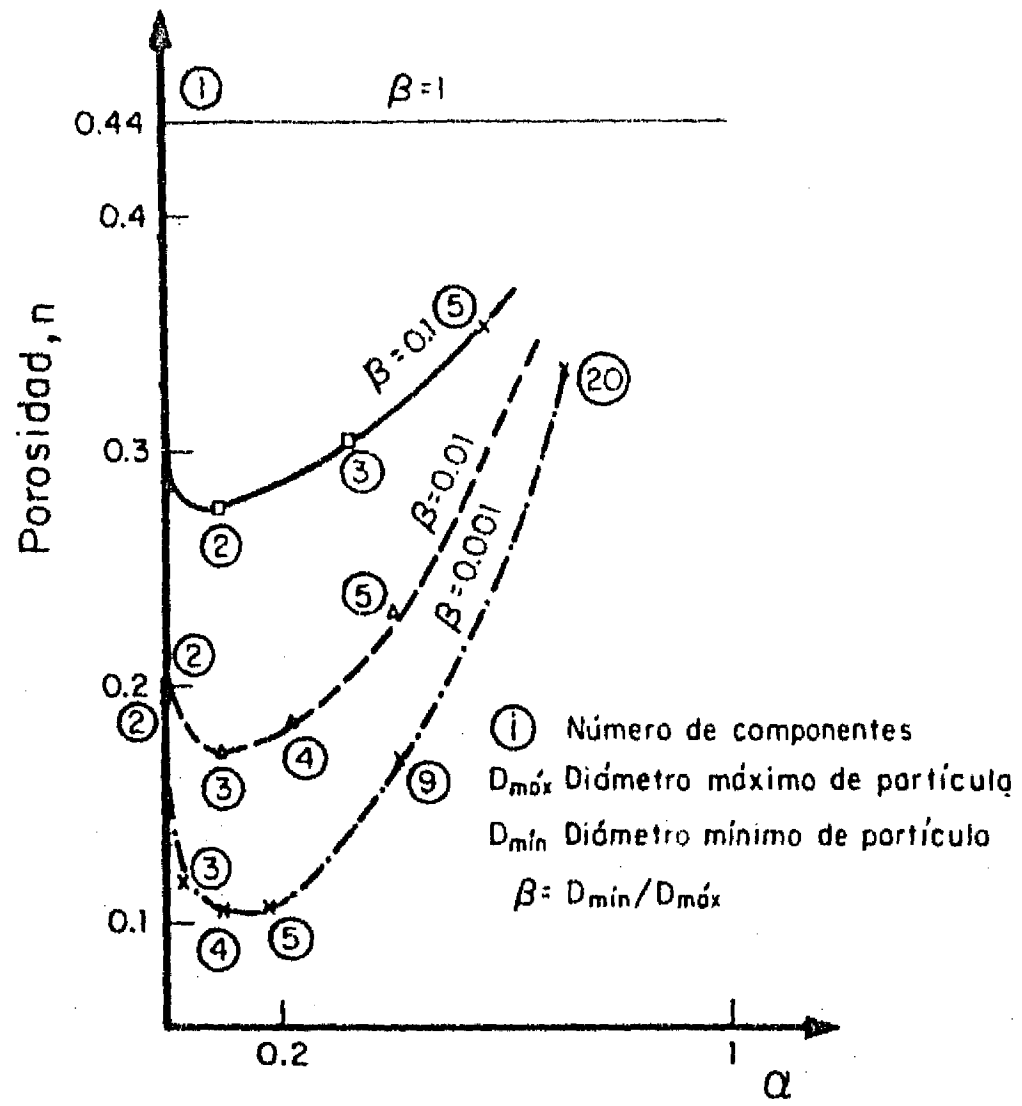


Fig 4.17 Relación entre porosidad y número de componentes

TABLA 4.4 Proporcionamiento óptimo de mezclas

d/D	$\alpha_{\text{ópt}}$	$N_{\text{ópt}}$	Fracción	% óptimo	% Furnas
0.1	0.1	2	D αD	0.645 0.355	0.694 0.306
0.01	0.1	3	D αD $\alpha^2 D$	0.545 0.257 0.192	0.612 0.265 0.118
0.001	0.1	4	D αD $\alpha^2 D$ $\alpha^3 D$	0.509 0.234 0.148 0.107	0.582 0.255 0.112 0.049

partículas grandes deben ser menores, y las de partículas pequeñas, mayores, que las obtenidas con las fórmulas de Furnas.

4.3.4 Granulometrías continuas óptimas

Los resultados anteriores muestran que las granulometrías de tipo discontinuo son las que pueden dar lugar a las porosidades más bajas. Las curvas granulométricas continuas "óptimas" que pretenden llevar a materiales de porosidad mínima propuestas por diferentes autores [Duriez, 1961 ; Fig 4.18] son por tanto ilusorias. Sin embargo, estas curvas pueden conducir a mezclas mas convenientes desde otros puntos de vista. En particular, se sabe que las granulometrías discontinuas son mas susceptibles a la segregación que las continuas, especialmente bajo el efecto de las fuerzas de filtración (4.5).

4.3.5 Mezclas de materiales naturales

En la práctica de la ingeniería, es frecuente que se recurra a mezclas de materiales granulares con diferentes características, con objeto de obtener un material con mejores propiedades que cada uno de los componentes individuales y, en particular, con una menor porosidad.

La distribución granulométrica $F_{3V}(d)$ obtenida al mezclar dos materiales de distribución granulométrica $F_{3V1}(d)$ y $F_{3V2}(d)$ es :

$$F_{3V}(d) = p F_{3V1}(d) + (1-p)F_{3V2}(d) \quad (4.24)$$

donde

p Proporción (en volumen de sólidos) del primer material

En la misma forma, para mezclas con N componentes, se tiene:

$$F_{3V}(d) = \sum_{i=1}^N p_i F_{3Vi}(d) \quad (4.25)$$

donde

p Proporción del componente i

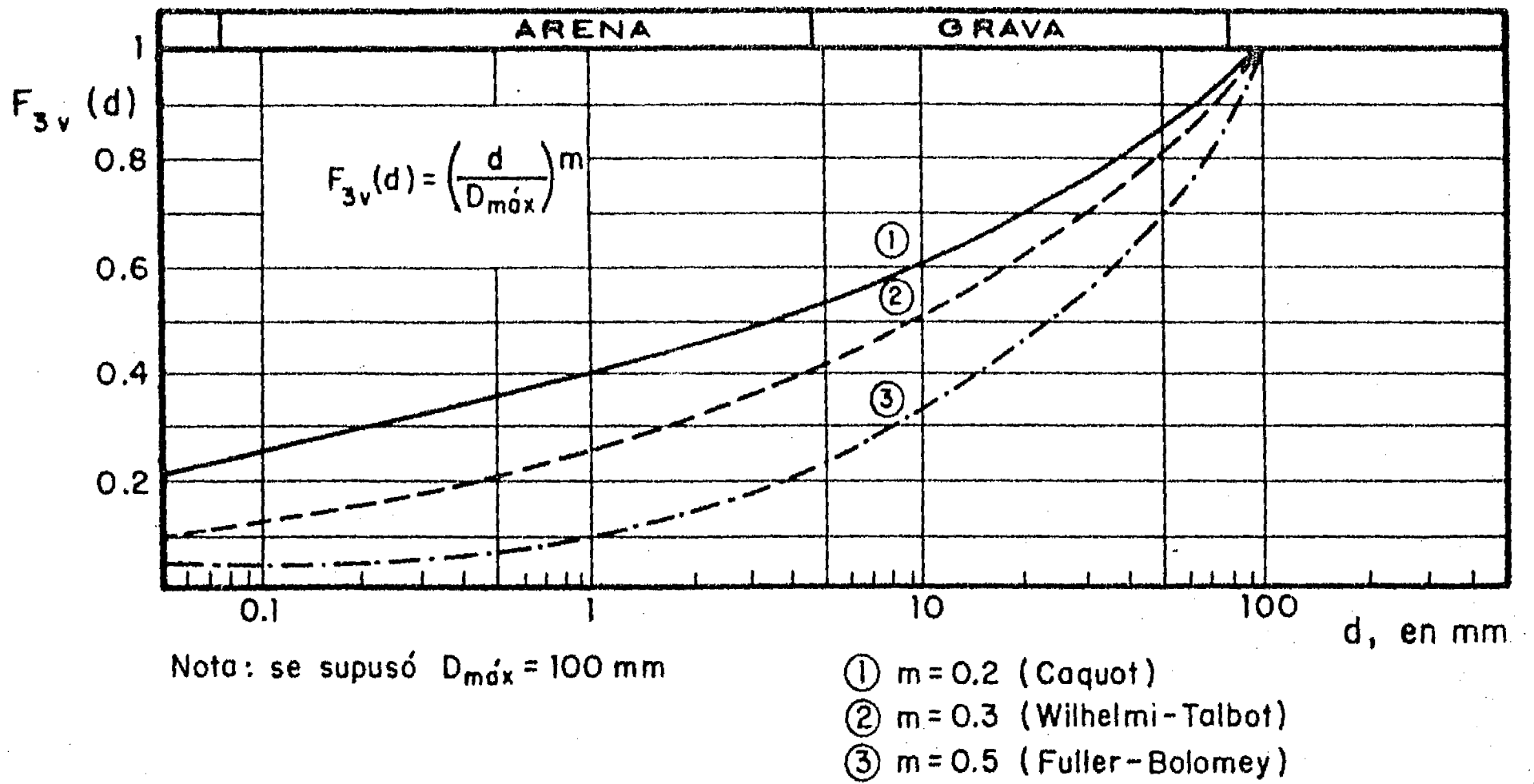


Fig 4.18 Granulometrías continuas óptimas propuestas por diversos autores

La porosidad obtenida con la granulometría resultante depende de las características de los componentes y de los valores asignados a las proporciones p_i . La obtención de las proporciones óptimas para minimizar la porosidad es un problema que no tiene solución teórica general pero que puede resolverse en forma aproximada a partir de los resultados presentados en los incisos anteriores si los componentes son aproximadamente uniformes.

Si se dispone de los medios requeridos, la mejor forma de obtener una baja porosidad consiste en dividir los materiales disponibles en varias fracciones granulométricas con las que se pueden formar conjuntos de granulometrías discontinuas de baja porosidad.

Para ilustrar los conceptos anteriores, se muestran en la Fig 4.19 los materiales empleados por Marsal [1977] en una serie de experimentos sobre mezclas. Se trata de un enrocamiento basáltico ($6 < D < 175$ mm) y de una arena bien graduada ($0.05 < D < 6$ mm). En la misma figura se presenta la granulometría de la mezcla de acuerdo con la Ec 4.24 para $p = 0.5$. La mezcla de los dos materiales da lugar a una granulometría continua por lo que los efectos de interacción geométrica entre los dos componentes dentro de la mezcla son significativos. En la Fig 4.20 se muestran las porosidades obtenidas para diferentes valores de p y métodos de compactación. El mínimo se alcanza para valores de p cercanos a 0.45 y resulta de 0.21, muy superior al límite teórico que se obtendría con el enfoque de Furnas y que en este caso puede calcularse como:

$$n = n_1 - (1-n_2)n_1 = 0.135 \quad (4.26)$$

donde

n_1 Porosidad del enrocamiento por separado = 0.35

n_2 Porosidad de la arena por separado = 0.33

Porosidades más bajas podrían alcanzarse con estos materiales dividiendo por ejemplo la mezcla en 12 fracciones según tamises cuyas aberturas formen una serie geométrica de razón 2 y reuniendo estas fracciones en tres conjuntos de granulometría discontinua de cuatro componentes:

Primer conjunto : fracciones 1, 4, 7, 10

Segundo conjunto : fracciones 2, 5, 8, 11

Tercer conjunto : fracciones 3, 6, 9, 12

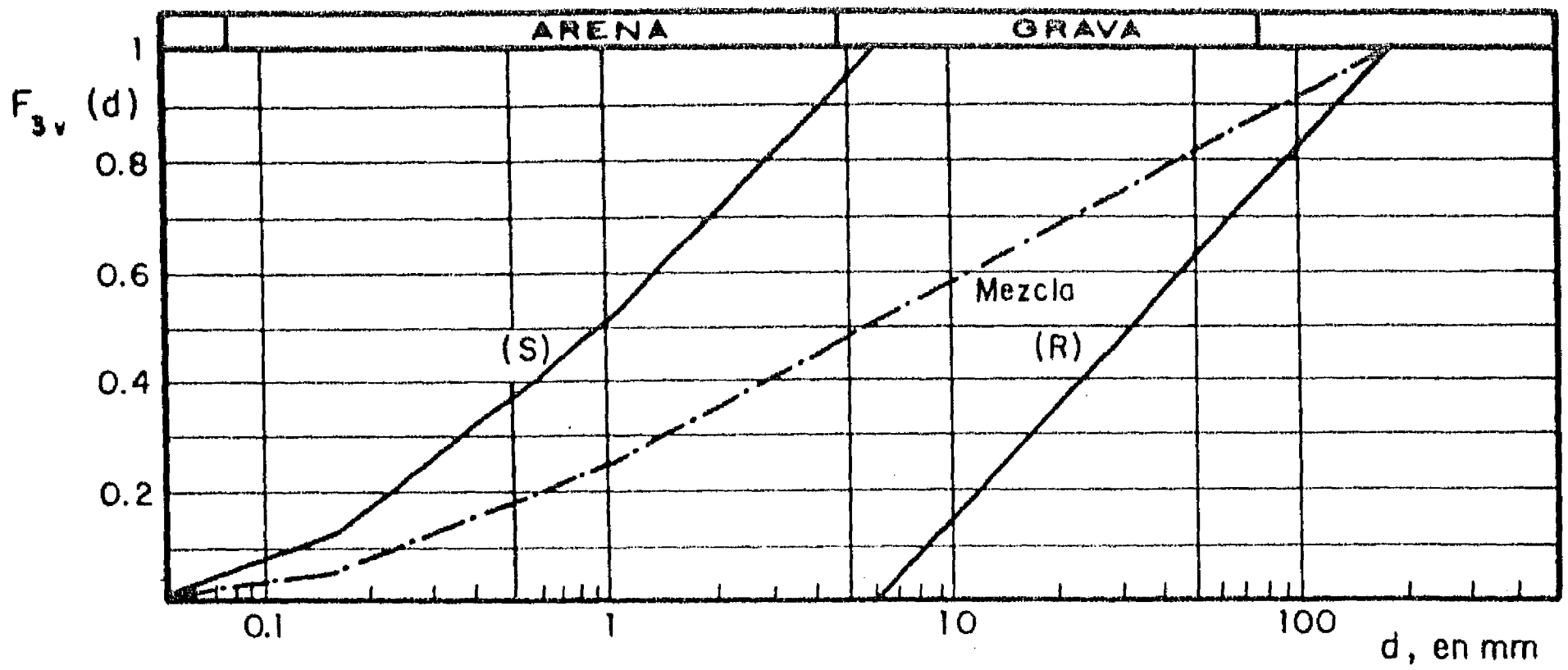


Fig 4.19 Mezcla de un enrocamiento (R) y de una arena (S) (Marsal, 1977). Granulometrías

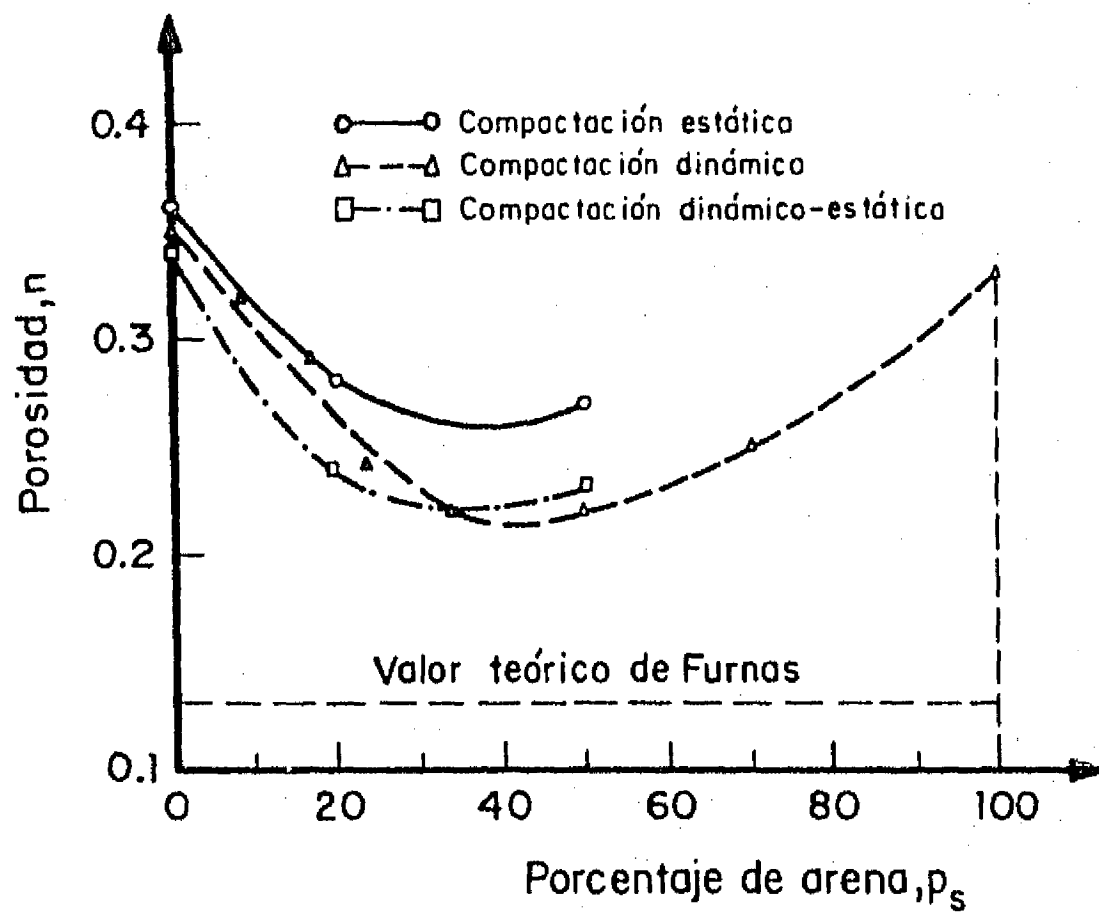


Fig 4.20 Mezcla enrocamiento-arena (Marsal, 1977). Porosidad

Para estos conjuntos de cuatro componentes, la relación resultaría de 1/8 con un valor de D_{\min}/D_{\max} de 0.002. De acuerdo con la Fig 4.14, se podría esperar para cada conjunto alcanzar una porosidad cercana a 0.10.

4.3.6 Conclusiones

El problema del diseño de mezclas de mínima porosidad puede resolverse, por lo menos en forma aproximada, con base en los resultados presentados en este capítulo. El hecho de que las mezclas discontinuas son las que pueden dar lugar a las menores porosidades debe recibir mayor atención en la investigación y práctica de la mecánica de suelos. Es en particular necesario que se emprendan mas estudios sobre las propiedades mecánicas de este tipo de mezclas.

4.4 ESTRUCTURA Y PERMEABILIDAD

4.4.1 Introducción

Los intentos para predecir la permeabilidad de un suelo granular a partir de su granulometría y porosidad dan generalmente resultados pobres. Lo anterior debe atribuirse al hecho de que la distribución granulométrica y la porosidad de un suelo son insuficientes para describir adecuadamente su estructura.

Las técnicas experimentales y teóricas ya comentadas en este trabajo que permiten obtener la distribución de tamaños de poros de un medio granular deberían conducir a nuevas y mejores formas de estimar la permeabilidad. En efecto, es razonable esperar que la permeabilidad presente una correlación más satisfactoria con la distribución de poros que con la de los granos. En lo que sigue se presenta un estudio, de carácter exploratorio, sobre las diferentes relaciones que pueden establecerse entre estructura y permeabilidad.

4.4.2 Relaciones entre estructura y permeabilidad

a) Relaciones tradicionales

Diversas relaciones entre la estructura de un medio granular y su permeabilidad han sido propuestas. A continuación se presentan algunas de las más conocidas.

- Fórmula de Hazen [1895]

$$k = C D_{10}^2 (0.7 + 0.03t) \quad (4.27)$$

donde

k Coeficiente de permeabilidad, en cm/s

D_{10} Diámetro efectivo tal que, en peso o en volumen, 10% de las partículas tengan un diámetro menor, en cm

C Coeficiente variable entre 41 y 146 para $0.1 < D_{10} < 3$ mm con un valor medio de 116

t Temperatura, en grados Celcius

- Fórmula de Slichter

$$k = 771 (D_{10}^2 / C) (0.7 + 0.03t) \quad (4.28)$$

donde

C Función de la porosidad n (Tabla 4.5)

t Temperatura, en °C

- Fórmula de Terzaghi [1948]

$$k = C_1 D_{10}^2 (0.7 + 0.03t) \quad (4.29)$$

donde

$$C_1 = C_0 [(n - 0.13) / \sqrt{1-n}]^2$$

C Función de la forma de las partículas (Tabla 4.6)

t Temperatura, en °C

- Fórmula de Kozeny-Carman [1953]

$$k = C_s D_s^2 [e^3 / (1+e)] (\gamma / \mu) \quad (4.30)$$

donde

C_s Factor de forma (del orden de 0.2 para materiales uniformes)

D_s Diámetro representativo de la dimensión de los granos, igual al inverso de la superficie específica, en cm

e Relación de vacíos

γ Peso volumétrico del permeante, en g/cm³

μ Viscosidad del permeante a la temperatura considerada, en g.s/cm²

b) Otras relaciones

Es posible recurrir a diferentes planteamientos para establecer una relación entre la permeabilidad y la distribución de tamaños de poros.

TABLA 4.5 Valores del coeficiente C de la fórmula de Slichter

Porosidad, n	0.26	0.38	0.46
C	83.4	24.1	12.8

TABLA 4.6 Valores del coeficiente C_0 de la fórmula de Terzaghi

Arenas de granos redondeados	$C_0 = 800$
Arenas de granos angulosos	$C_0 = 460$
Arenas con limos	$C_0 = 400$

- Distribución de tamaños y permeabilidad

Si se admite que los poros están constituidos por una serie de tubos de sección transversal constante de diámetro P , paralelos a la dirección del flujo, en cada tubo el gasto será, de acuerdo con la ley de Poiseuille :

$$q = [\gamma i / (128 \mu)] \pi P^4 \quad (4.31)$$

donde

μ Viscosidad dinámica del permeante a la temperatura considerada

P Diámetro del tubo

i Gradiente hidráulico

γ Peso volumétrico del permeante

Si se conoce la densidad de probabilidad en número $f_T(t)$ de los diámetros T de los tubos, el gasto total Q a través de una muestra de sección transversal unitaria podrá calcularse como:

$$Q = E_T \{q\} m \quad (4.32)$$

donde

$E_T \{q\}$ Esperanza del gasto para un tubo seleccionado al azar

m Número de poros por unidad de área = $n/E_T \{\pi T^2/4\}$

$$Q = [\gamma i / (32 \mu)] n [E_T \{T^4\} / E_T \{T^2\}] \quad (4.33)$$

donde

n Porosidad

Para aplicar la ecuación anterior a suelos granulares, es necesario definir la densidad de probabilidad equivalente de diámetros de tubos $f_T(t)$

Si se admite que la densidad de probabilidad en número $f_T(t)$ de los tubos equivalentes coincide con la densidad de probabilidad en número de los tamaños de los poros $f_{3P}(P)$, el coeficiente de permeabilidad resulta :

$$k = [\gamma / (32\mu)] n \left[\frac{E \{P^4\}}{3P} / \frac{E \{P^2\}}{3P} \right] \quad (4.34)$$

Sin embargo, tomando en cuenta que el flujo es unidireccional, puede arguirse que es más conveniente que la densidad de probabilidad de tamaños de tubos se considere igual a la densidad de probabilidad en número $f_{2A}(p)$ correspondiente a los tamaños aparentes de poros intersecados por un plano de corte. Con esta hipótesis se tiene:

$$k = [\gamma / (32\mu)] n \left[\frac{E \{P^4\}}{2A} / \frac{E \{P^2\}}{2A} \right] \quad (4.35)$$

Una tercera alternativa consiste en considerar poros tubulares con misma densidad de probabilidad en volumen que los poros del medio granular

Bajo esta hipótesis, la densidad en número de los tubos se obtiene ponderando la densidad en volumen por un término inversamente proporcional al cuadrado del diámetro del tubo:

$$f_T(p) = f_{3V}(p) / [p^2 E \{1/P^2\}] \quad (4.36)$$

Se tiene, a partir de la Ec 4.33:

$$k = [\gamma / (32\mu)] n \int [p^4 f_{3V}(p) / (p^2 E \{1/P^2\})] dp$$

$$/ \int [p^2 f_{3V}(p) / (p^2 E \{1/P^2\})] dp \quad (4.37)$$

$$k = [\gamma / (32\mu)] n \left[\int p^2 f_{3V}(p) dp \right] \quad (4.38)$$

$$k = [\gamma / (32\mu)] n E_{3V} \{P^2\} \quad (4.39)$$

Finalmente, puede considerarse que los poros tubulares deben tener la misma densidad de probabilidad en área transversal que los poros. En este caso, la densidad en número de los tubos se obtiene nuevamente ponderando la densidad en área por un término proporcional al cuadrado del diámetro aparente del poro:

$$f_T(p) = f_{2AS}(p) / [p^2 E_{2AS} \{1/P^2\}] \quad (4.40)$$

Se tiene, a partir de la Ec 4.33 :

$$k = [\delta / (32\mu)] n \int [p^4 f_{2AS}(p) / (p^2 E_{2AS} \{1/P^2\})] dp$$

$$/ \int [p^2 f_{2AS}(p) / (p^2 E_{2AS} \{1/P^2\})] dp \quad (4.41)$$

$$k = [\delta / (32\mu)] n \left[\int p^2 f_{2AS}(p) dp \right] \quad (4.42)$$

$$k = [\delta / (32\mu)] n E_{2AS} \{P^2\} \quad (4.43)$$

- Ley de primer contacto y permeabilidad

Tomando en cuenta que las restricciones al flujo se deben principalmente a las pérdidas de energía por viscosidad en la cercanía de las paredes de los granos, resulta atractivo tratar de definir un tubo con un "diámetro equivalente", es decir cuya ley de primer contacto sea la misma que la del suelo. Puede esperarse que las condiciones de flujo a través del suelo y a través de una familia de poros tubulares con el diámetro equivalente y con igual porosidad sean hasta cierto punto semejantes.

En un tubo cilíndrico de diámetro D , la ley de primer contacto tridimensional es la misma que la bidimensional en un plano de corte ortogonal al eje del tubo y se escribe (Fig 4.21) :

$$f_{3C}(c) = f_{2C}(c) = 2\pi(D/2-c) / (\pi D^2/4) = 8(D/2-c) / D^2; \text{ para } 0 < c < D/2 \quad (4.44)$$

con

$$E_{2C}\{0\} = D/6 \quad \text{y} \quad E_{2C}\{0^2\} = D^2/24 \quad (4.45)$$

Esta función lineal presenta un máximo igual a $4/D$ para $c = 0$ y se anula para $c = D/2$

Ajustando una recta a la ley de primer contacto bidimensional del suelo, es por tanto posible definir un diámetro equivalente, D_e .

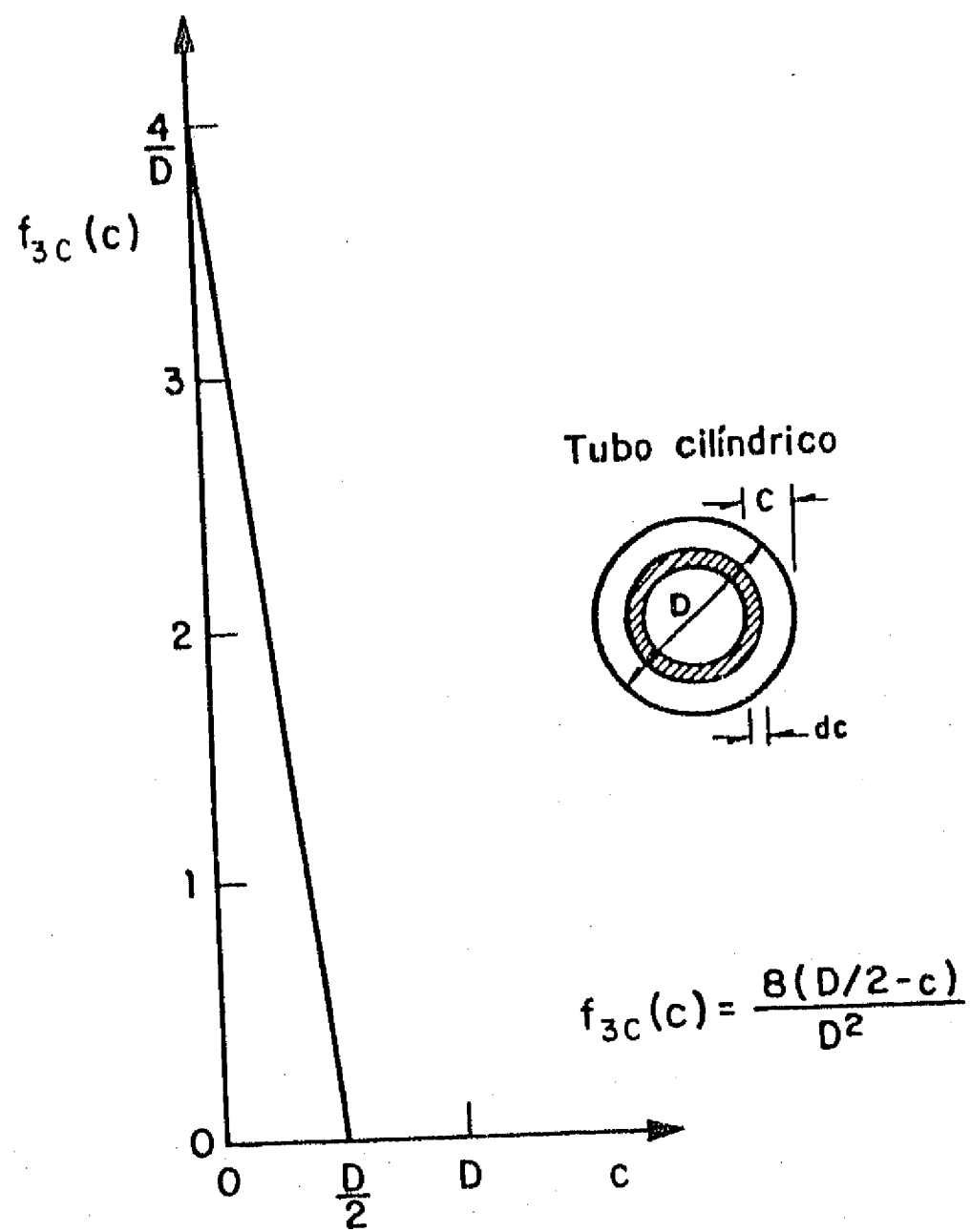


Fig 4.21 Ley de primer contacto de un tubo cilíndrico

El gasto a través de un tubo de diámetro D_e bajo gradiente unitario es, de acuerdo con la ley de Poiseuille :

$$Q = [\gamma / (32\mu)] (\pi D_e^2 / 4) \quad (4.46)$$

Para una familia de poros tubulares con igual porosidad que el suelo, el flujo por unidad de área y bajo gradiente unitario será igual al coeficiente de permeabilidad:

$$k = Qn / (\pi D_e^2 / 4) = [\gamma / (32\mu)] n D_e^2 \quad (4.47)$$

4.4.3 Aplicación a dos arenas

Para evaluar en forma preliminar el grado de aplicabilidad de las distintas fórmulas planteadas en los incisos anteriores, se midió la permeabilidad de dos arenas en el laboratorio, se simuló su estructura en la computadora, se determinaron su distribución de tamaños de poros y ley de primer contacto y se compararon los valores teóricos del coeficiente de permeabilidad con los valores medidos.

a) Características de las arenas

Material I

Se trata de una arena fina de color gris claro de tamaño uniforme clasificada como arena mal graduada (SP) en el Sistema Unificado de Clasificación de Suelos (SUCS)

- . Densidad de sólidos $s_s = 2.54$
- . Relación de vacíos mínima $e_{\text{mín}} = 0.67$
- . Relación de vacíos máxima $e_{\text{máx}} = 1.0$

El resultado del análisis granulométrico se presenta en la Fig 4.22 . Se obtuvo :

- . Diámetro efectivo $D_{10} = 0.26 \text{ mm}$
- . Coeficiente de uniformidad $C_u = 2.08$
- . Coeficiente de curvatura $C_c = 1.08$

Material II

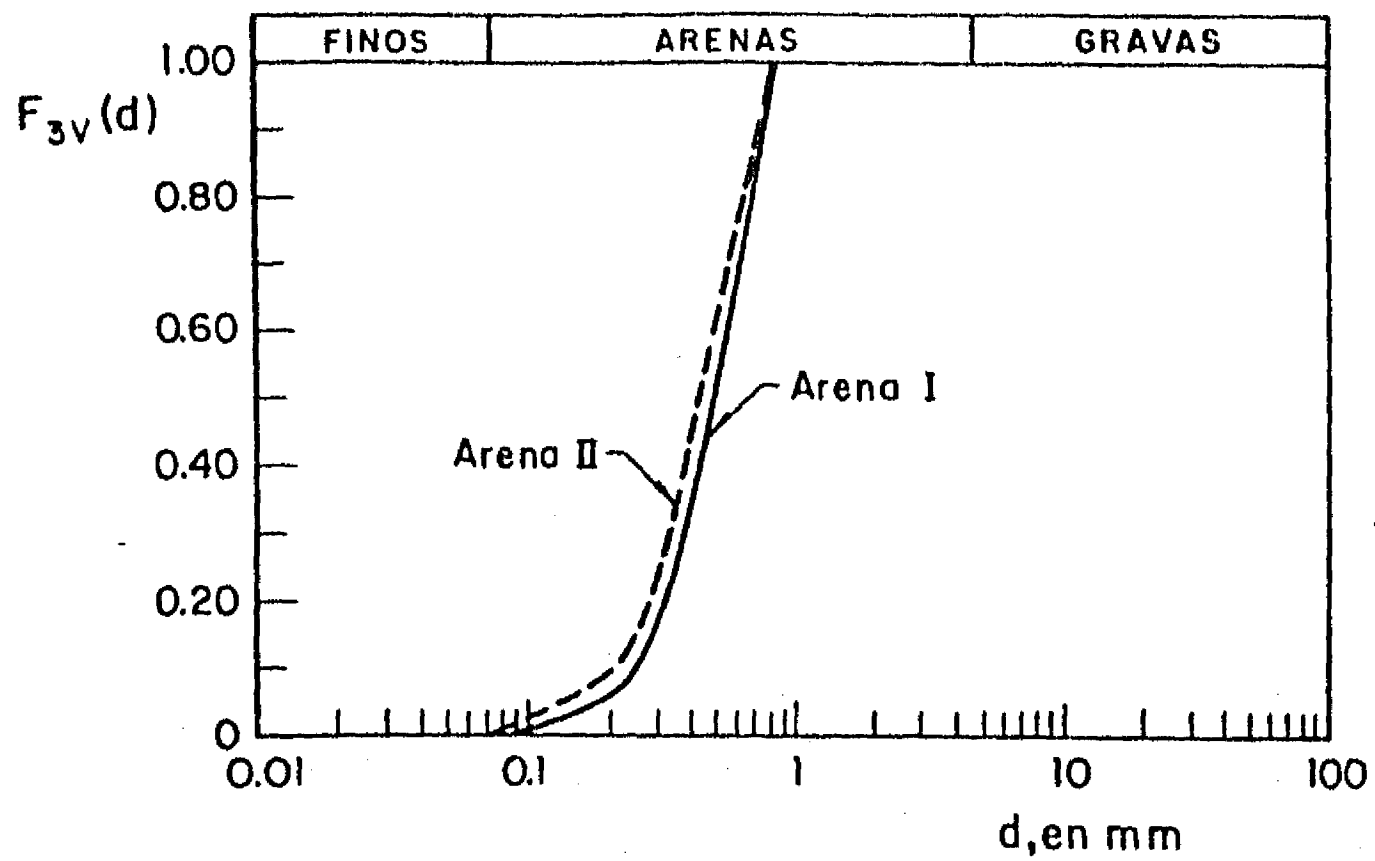


Fig 4.22 Distribuciones granulométricas en volumen de los materiales simulados

Esta arena cuarzosa de color blanco es también fina y se clasifica como SP en el SUCS.

- . Densidad de sólidos $s_s = 2.65$
- . Relación de vacíos mínima $e_{\min} = 0.55$
- . Relación de vacíos máxima $e_{\max} = 0.85$

La distribución granulométrica se presenta en la Fig 4.22 . Se obtuvo :

- . Diámetro efectivo $D_{10} = 0.21$ mm
- . Coeficiente de uniformidad $C_u = 2.38$
- . Coeficiente de curvatura $C_c = 0.98$

b) Pruebas de permeabilidad

Se determinó la permeabilidad de los materiales anteriores en un permeámetro de diseño reciente [Fig 4.23 ; Auvinet, 1981 ; Gutiérrez, 1981] en el cual la muestra se sella lateralmente con una membrana de latex y aire a presión.

La muestra de material I se ensayó con una porosidad de 44%, correspondiente a una compacidad relativa de 70%. Se observó una tendencia del coeficiente de permeabilidad a crecer durante la prueba, conforme disminuye el gradiente. El intervalo de valores obtenidos se extiende desde 2.9×10^{-3} cm/s hasta 8.1×10^{-3} cm/s. El promedio es de 5.2×10^{-3} cm/s.

La muestra de material II se ensayó con una porosidad de 37% correspondiente a una compacidad relativa de 87%. Se observaron las mismas inestabilidades que en el caso anterior. El intervalo de valores medidos se extiende desde 2.7×10^{-3} cm/s hasta 8.5×10^{-3} cm/s. El promedio es de 4.8×10^{-3} cm/s.

c) Simulación de la estructura de las arenas en la computadora

Se utilizó el algoritmo presentado en 3.3.4 para simular en la computadora la estructura de las arenas. Con la arena I se conformó la estructura I con 350 esferas. Con la arena II se conformó la estructura II con 434 esferas. La porosidad de la estructura I resultó de 40 % y la de la estructura II de 38%. Tomando en cuenta la escala, el volumen de las muestras cúbicas simuladas resultó de 8 mm^3 . Para poder determinar las distribuciones de poro bidimensionales se realizaron cortes verticales (Fig 4.24) y horizontales (Fig 4.25) de las

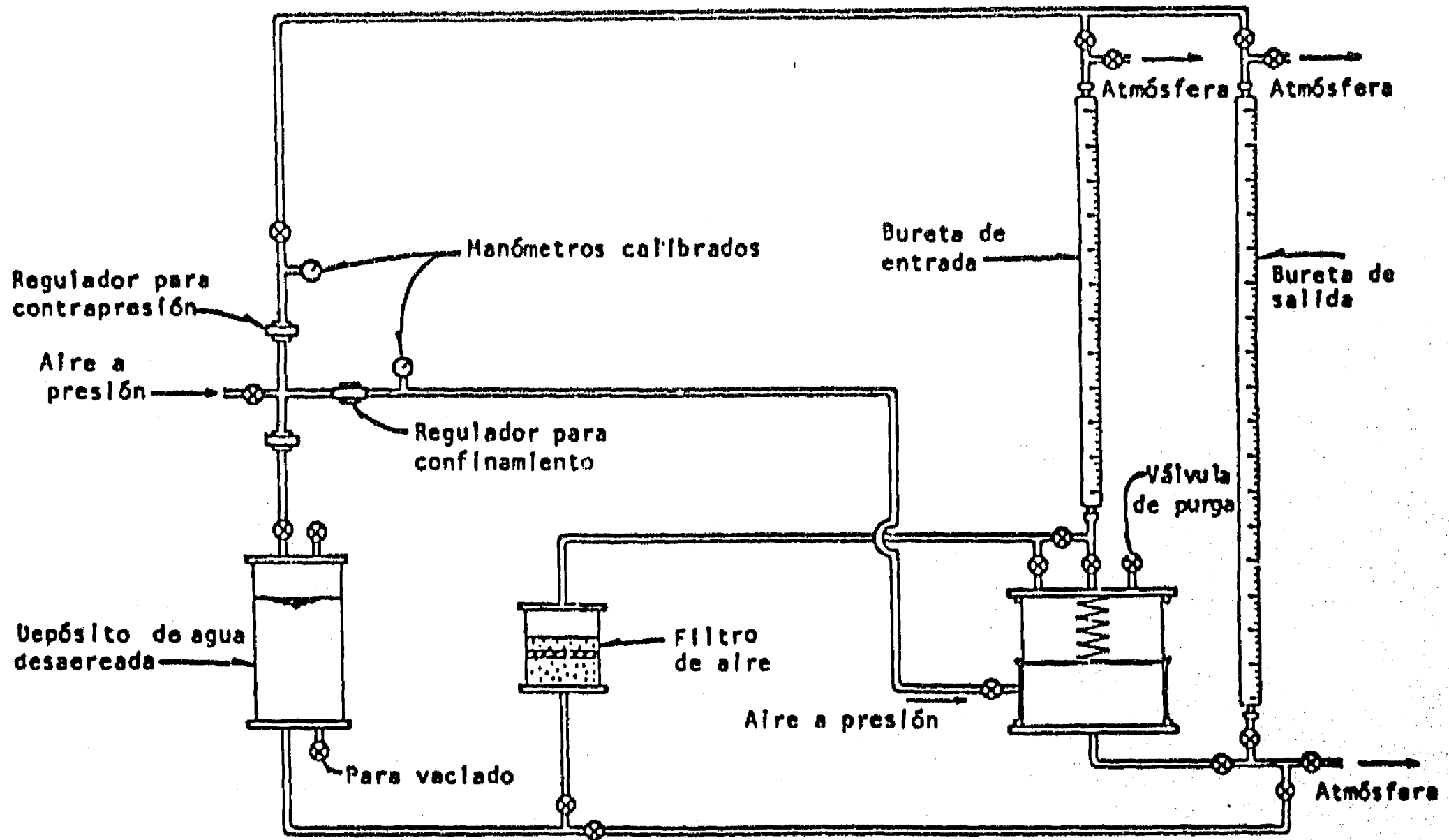
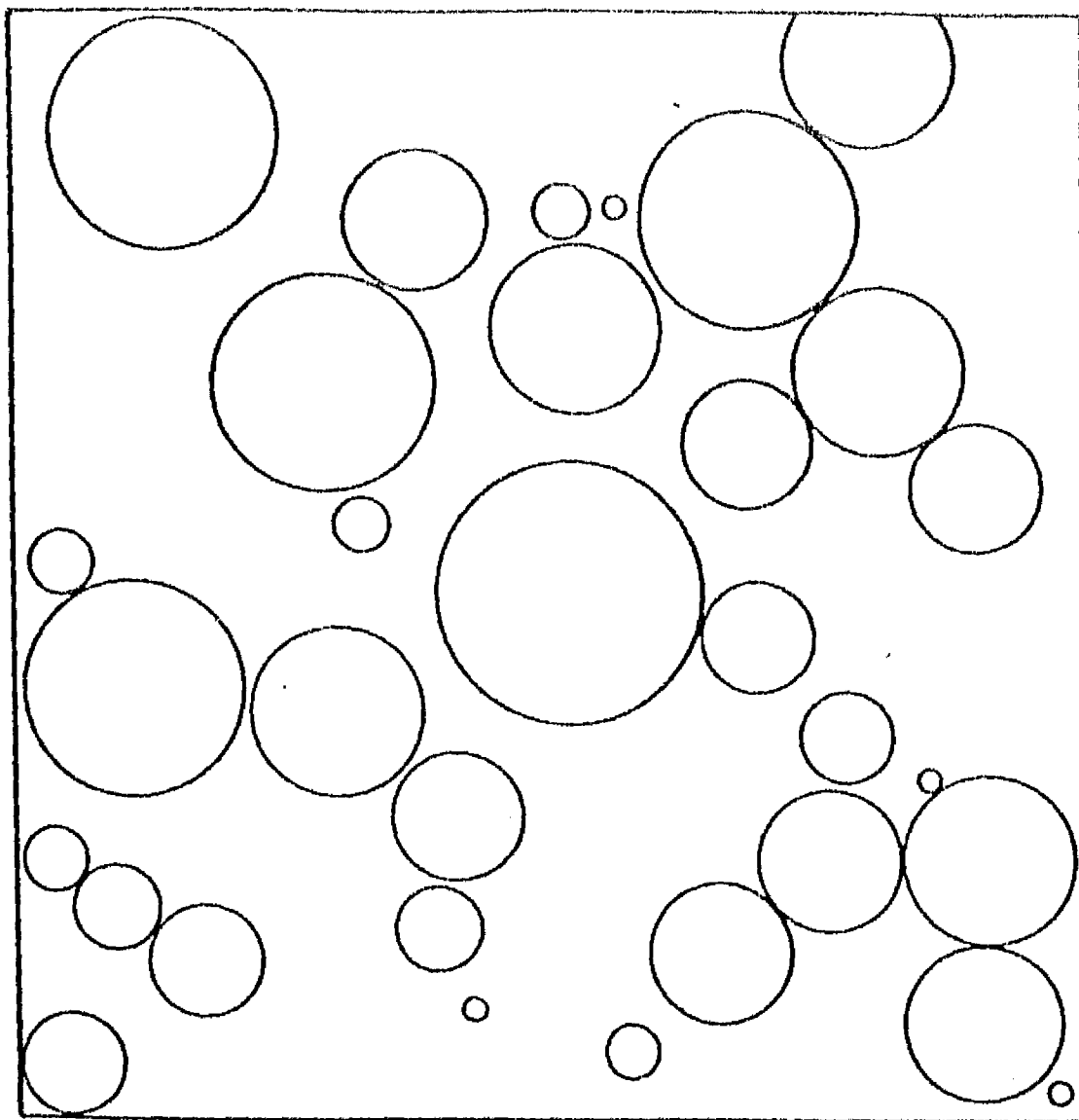
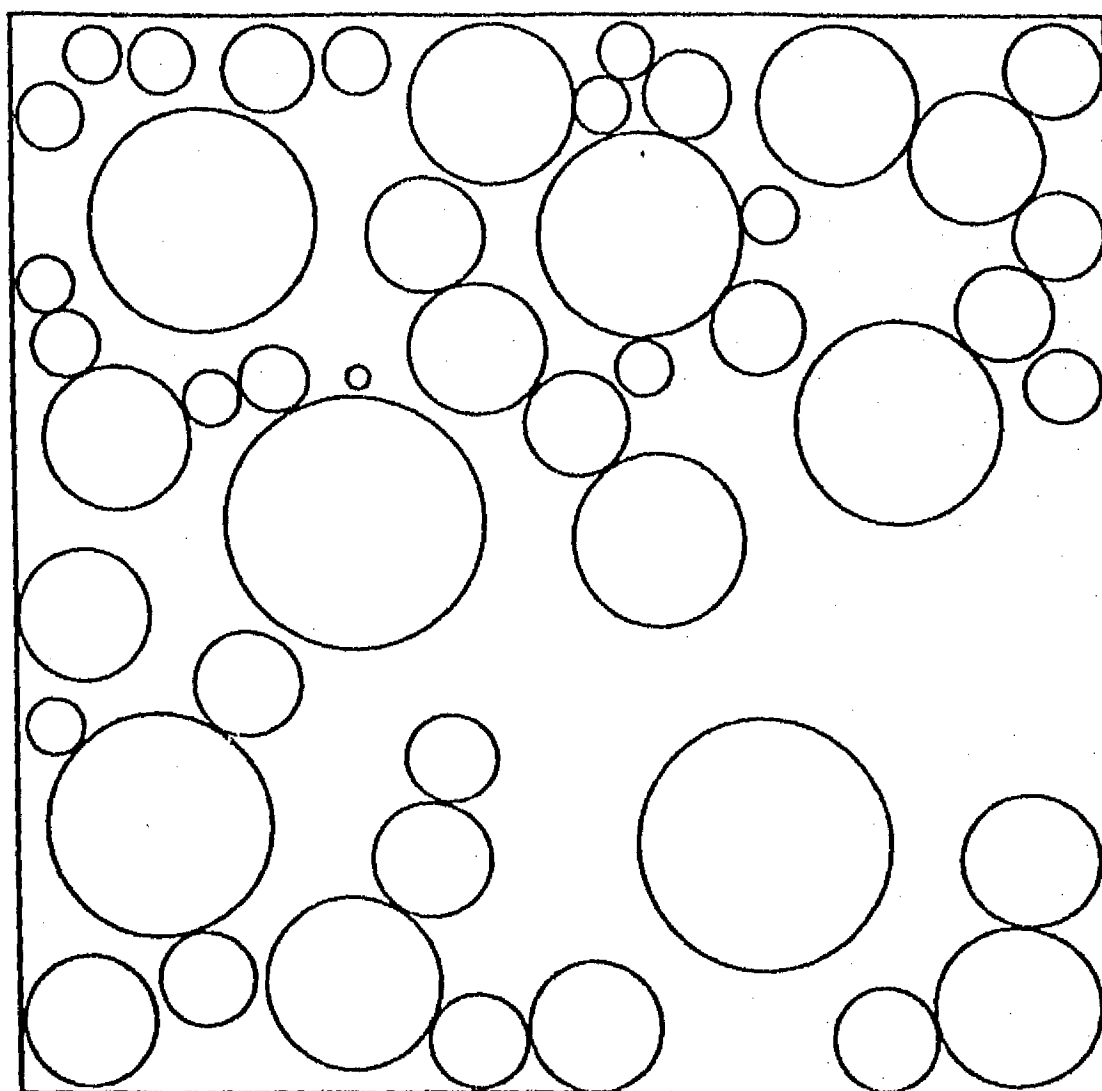


Fig 4.23 Permeómetro de carga variable



0 0.5
milímetros

Fig 4.24 Corte vertical, estructura I



0 0.5
milímetros

Fig 4.25 Corte horizontal, estructura I

muestras.

Para determinar la distribución de tamaños de poros en volumen $F_{3V}(p)$ se utilizó el algoritmo descrito en 3.3.4.b. En las Figs 4.26 y 4.27 se presentan las distribuciones tridimensionales de tamaños de poros en volumen correspondientes a las estructuras I y II respectivamente. Se transformó la distribución de tamaños en volumen en distribución en número con el programa TG1. Las distribuciones en número obtenidas se presentan en las Figs 4.28 y 4.29 para las estructuras I y II, respectivamente.

En la misma forma, se determinó la distribución de tamaños de poros bidimensional en área $F_{2AS}(p)$ mediante el algoritmo descrito en 3.3.4.a. En las Figs 4.30 y 4.31 se presentan las distribuciones bidimensionales medias aparentes de granos y poros en área, correspondientes a las estructuras I y II para cortes horizontales realizados a diferentes alturas.

La ley de primer contacto tridimensional se determinó para las dos estructuras mediante un algoritmo que permite formar histogramas de distancias a los granos de puntos colocados al azar dentro de los poros. En la Fig 4.32 se presentan las densidades $f_{3C}(c)$ para las estructuras I y II. La ley de primer contacto bidimensional $f_{2C}(c)$ fue determinada en forma análoga. Los resultados obtenidos para las estructuras I y II y para diferentes planos horizontales de corte se presentan en las Figs 4.33 y 4.34.

d) Comparación de coeficientes de permeabilidad medidos y de valores teóricos calculados.

Se aplicaron las formulas discutidas en 4.4.2 a las arenas estudiadas. Los resultados obtenidos se presentan, junto con los valores medidos en la Tabla 4.7.

En todas las fórmulas, la temperatura se consideró de 20 grados Celcius. La comparación muestra lo siguiente:

- Las fórmulas de Hazen, Slichter y Terzaghi sobrestiman en un orden de magnitud la permeabilidad real.

- La fórmula de Kozeny subestima la permeabilidad real en un orden de magnitud. Este resultado puede explicarse, por lo menos parcialmente, con base en las consideraciones que se presentan en el inciso 4.4.4.

- Las fórmulas basadas en la distribución de tamaños de poros tridimensionales subestiman la permeabilidad en un orden de magnitud.

- Las fórmulas basadas en la distribución de tamaños de

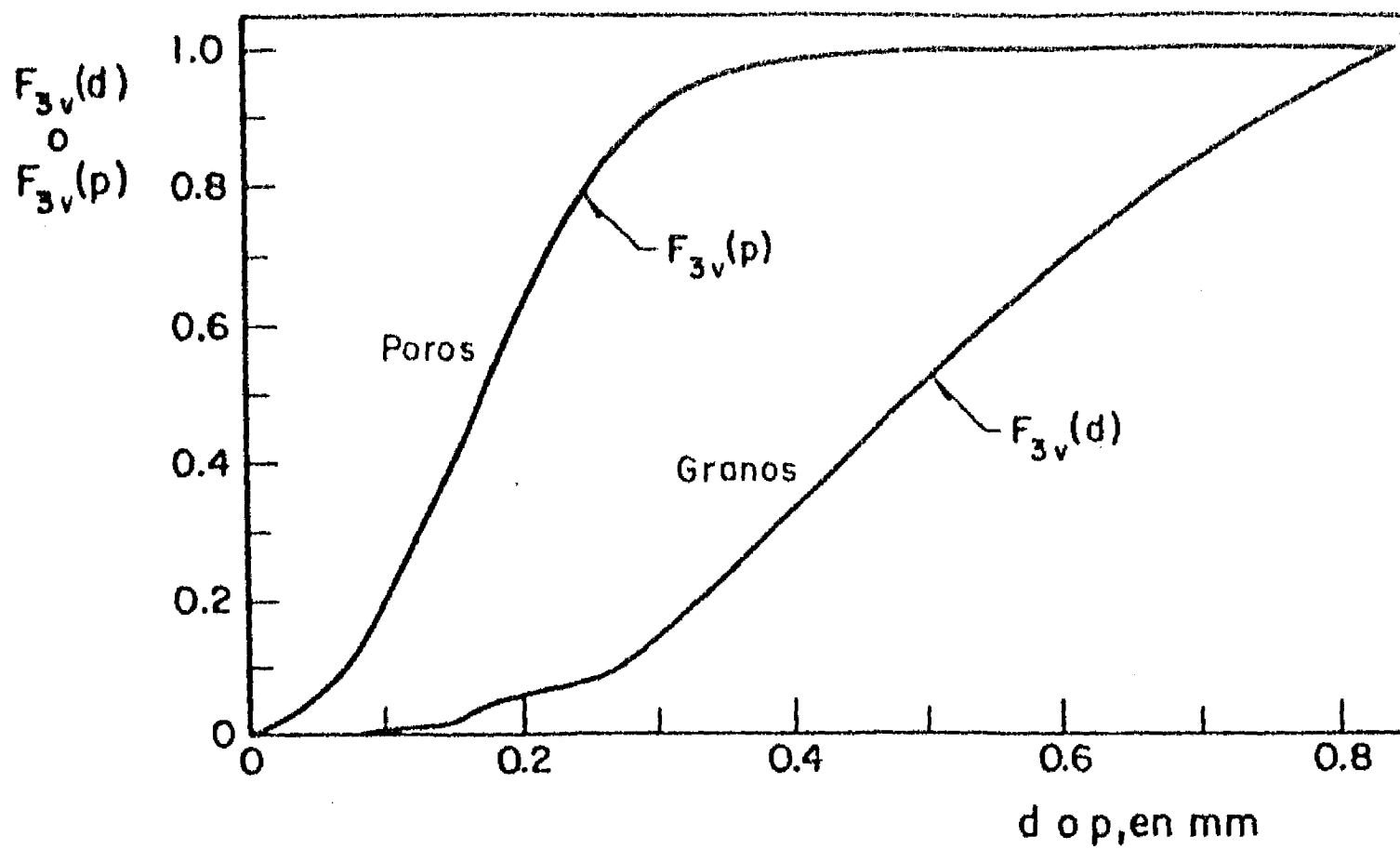


Fig 4.26 Distribuciones tridimensionales de tamaños de granos y de poros, en volumen, estructura I

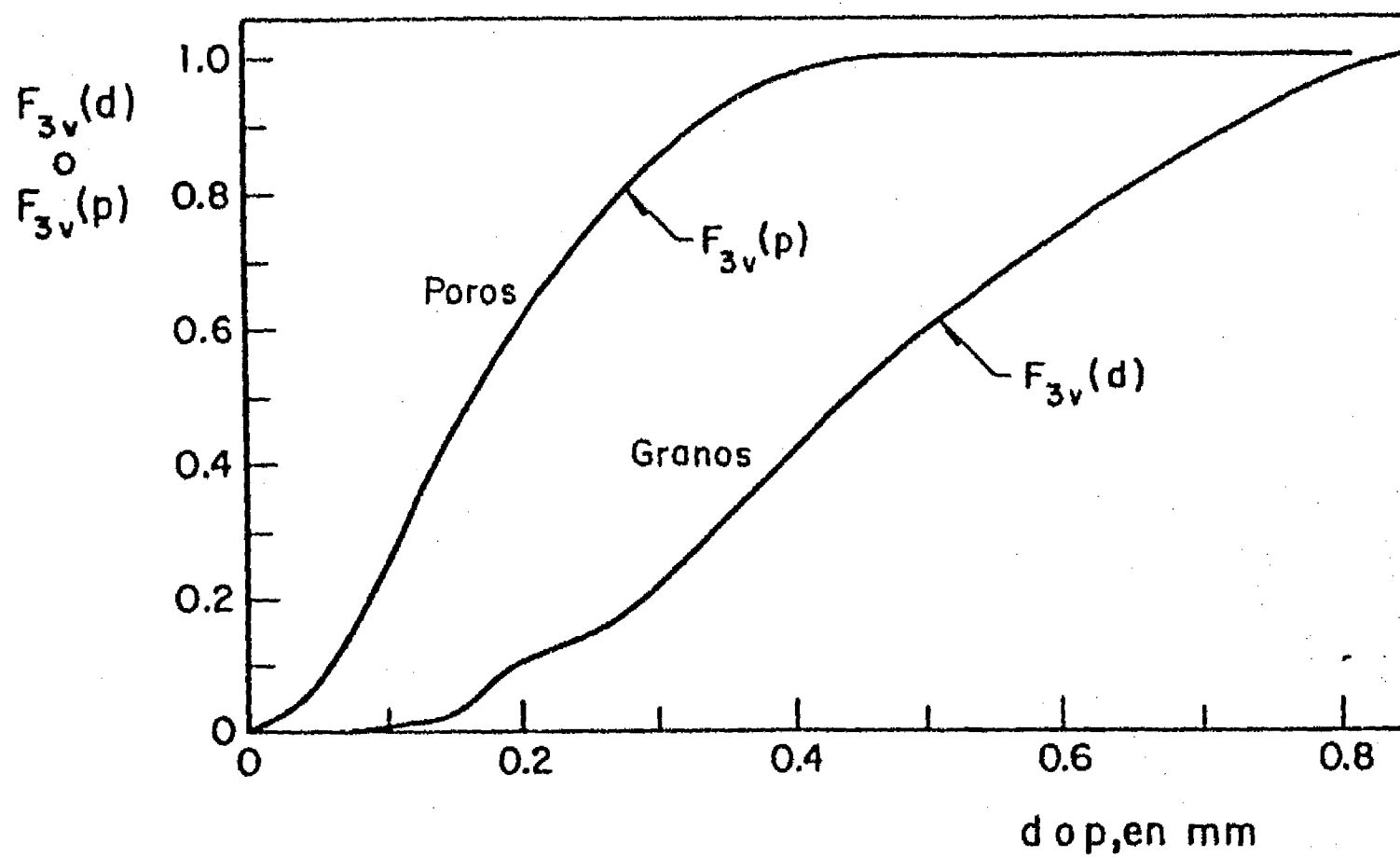


Fig 4.27 Distribuciones tridimensionales de tamaños de granos y de poros, en volumen, estructura II

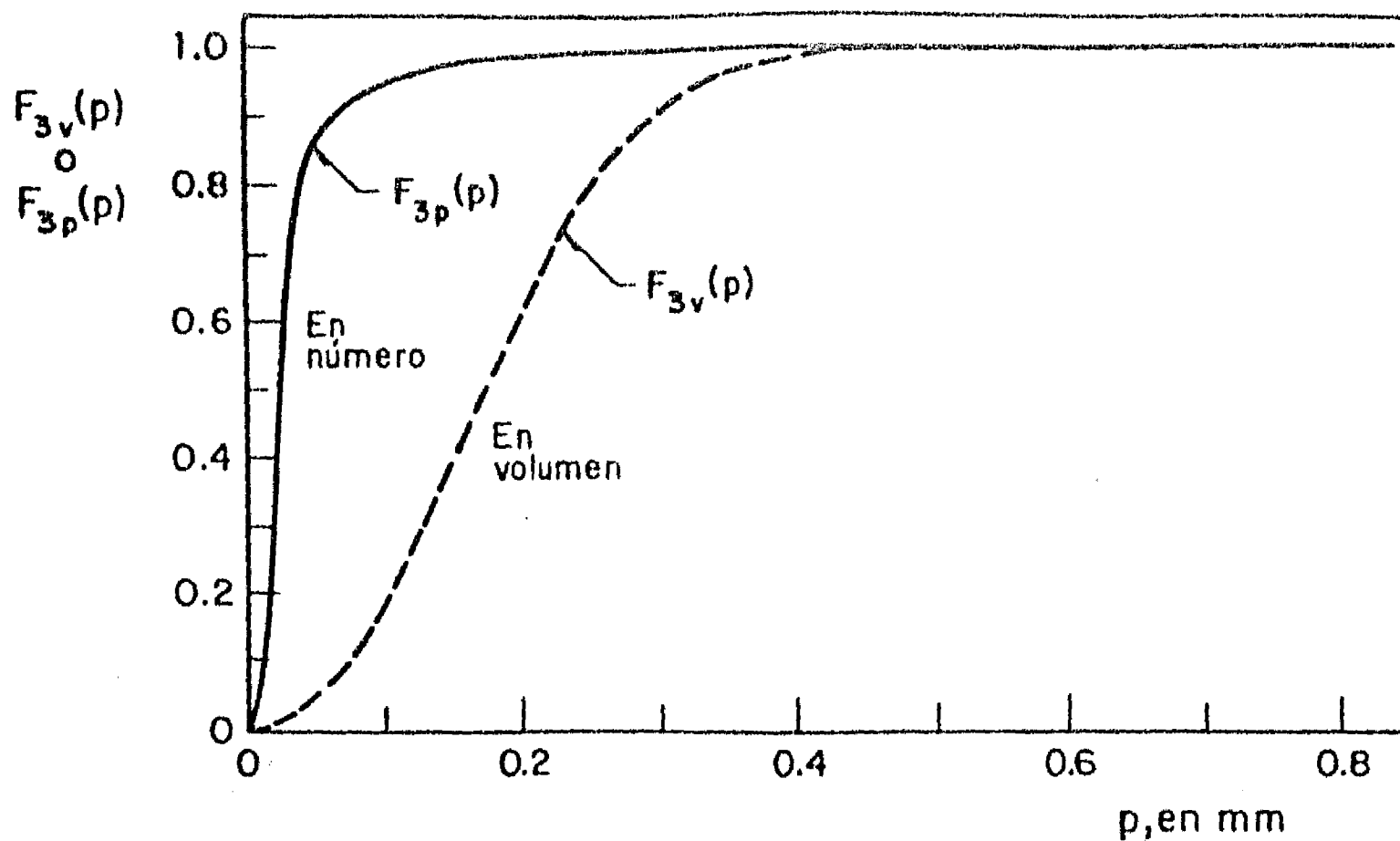


Fig 4.28 Distribución tridimensional de tamaños de poros en número , estructura I

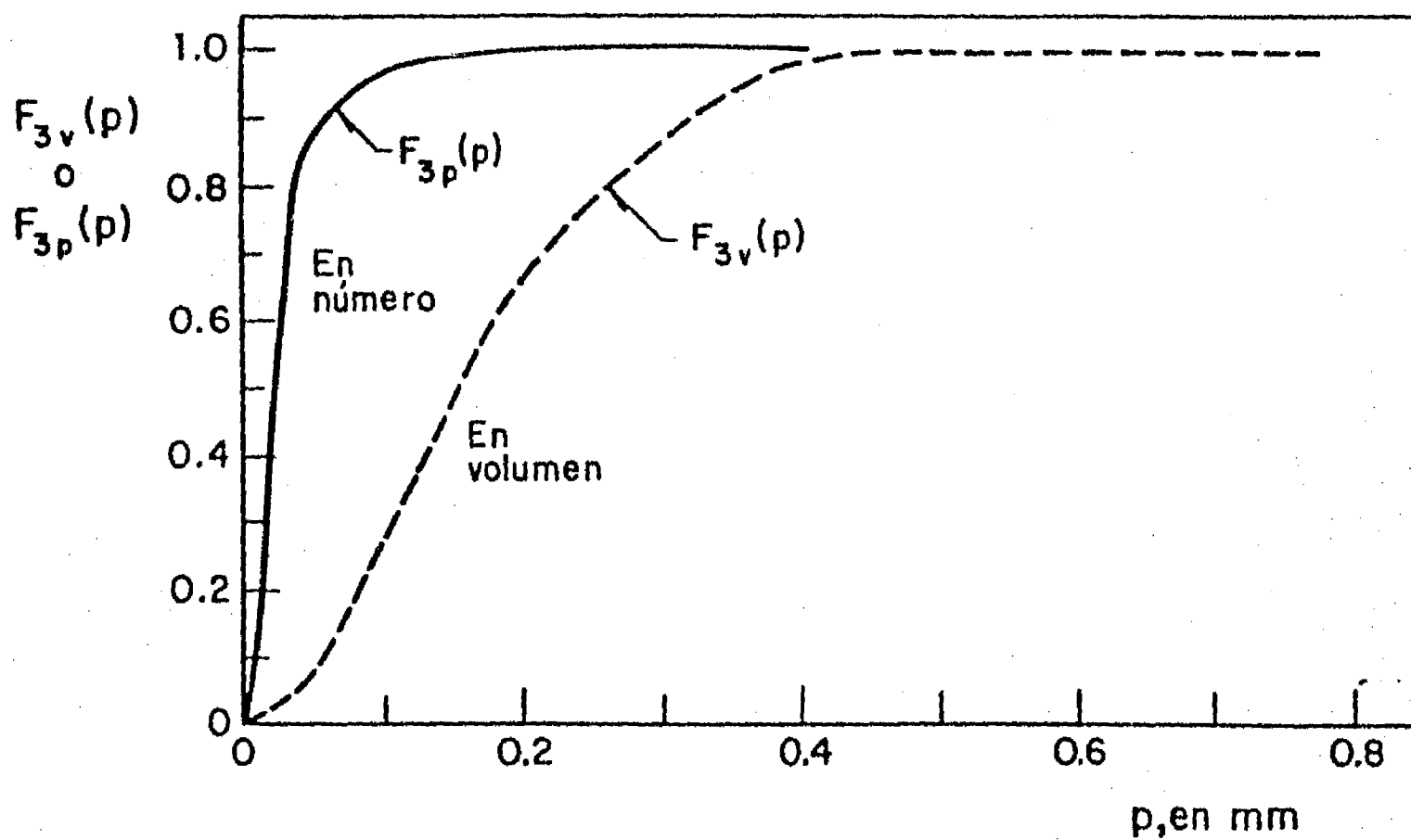


Fig 4.29 Distribución tridimensional de tamaños de poros en número , estructura II

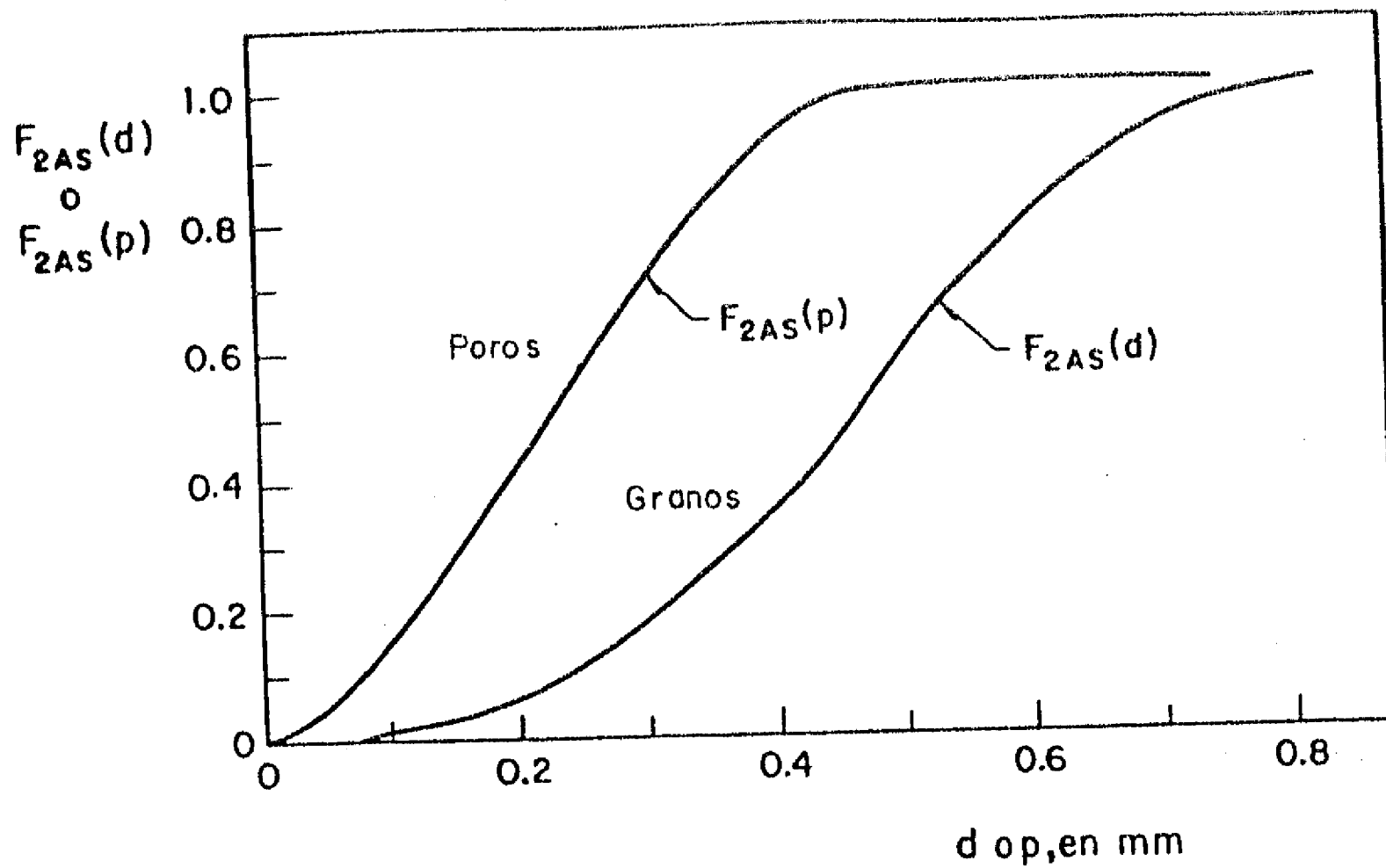


Fig 4.30 Distribuciones bidimensionales medias de tamaños aparentes de granos y de poros, en área, estructura I

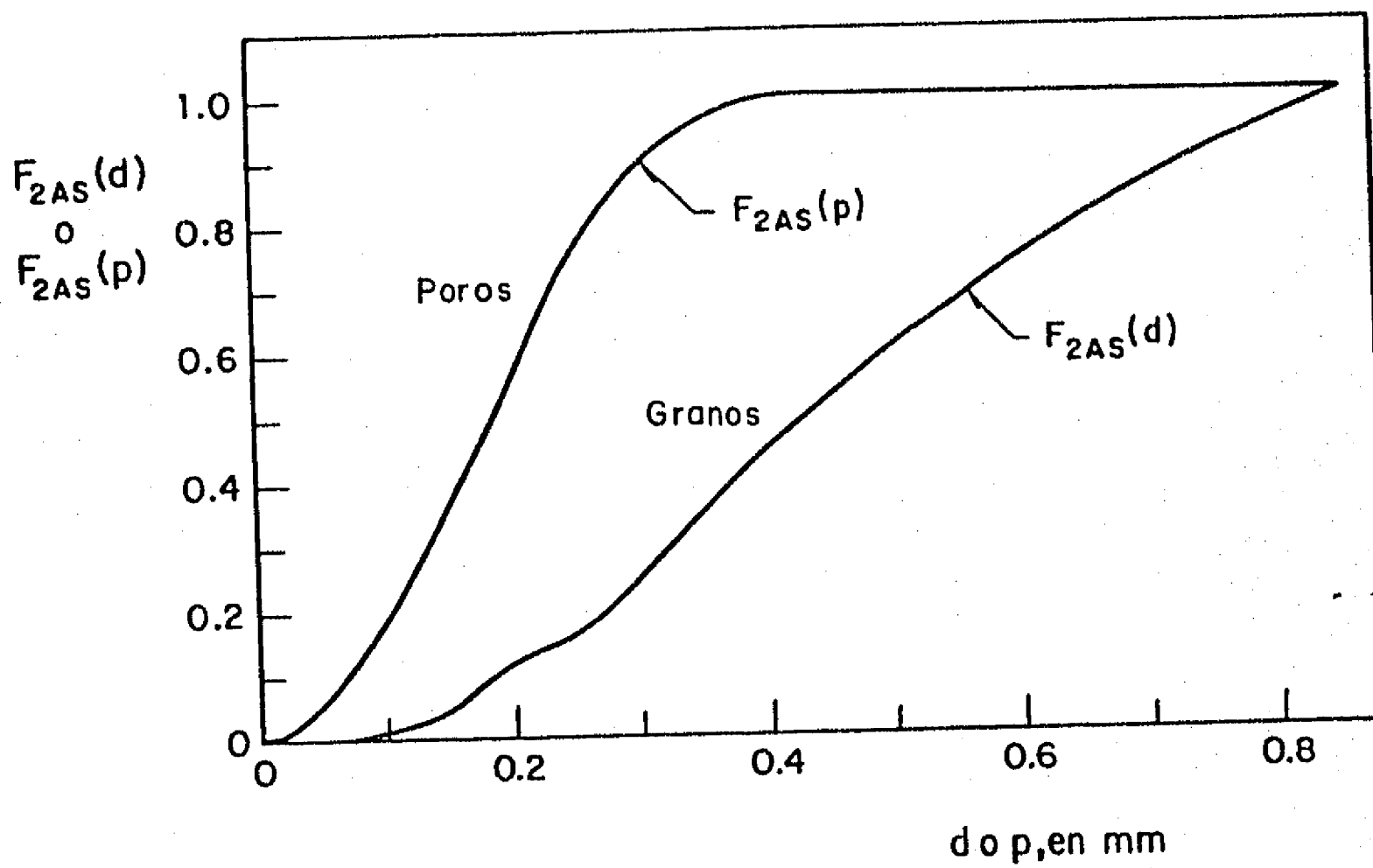


Fig 4.31 Distribuciones bidimensionales medias de tamaños aparentes de granos y poros, en área, estructura II

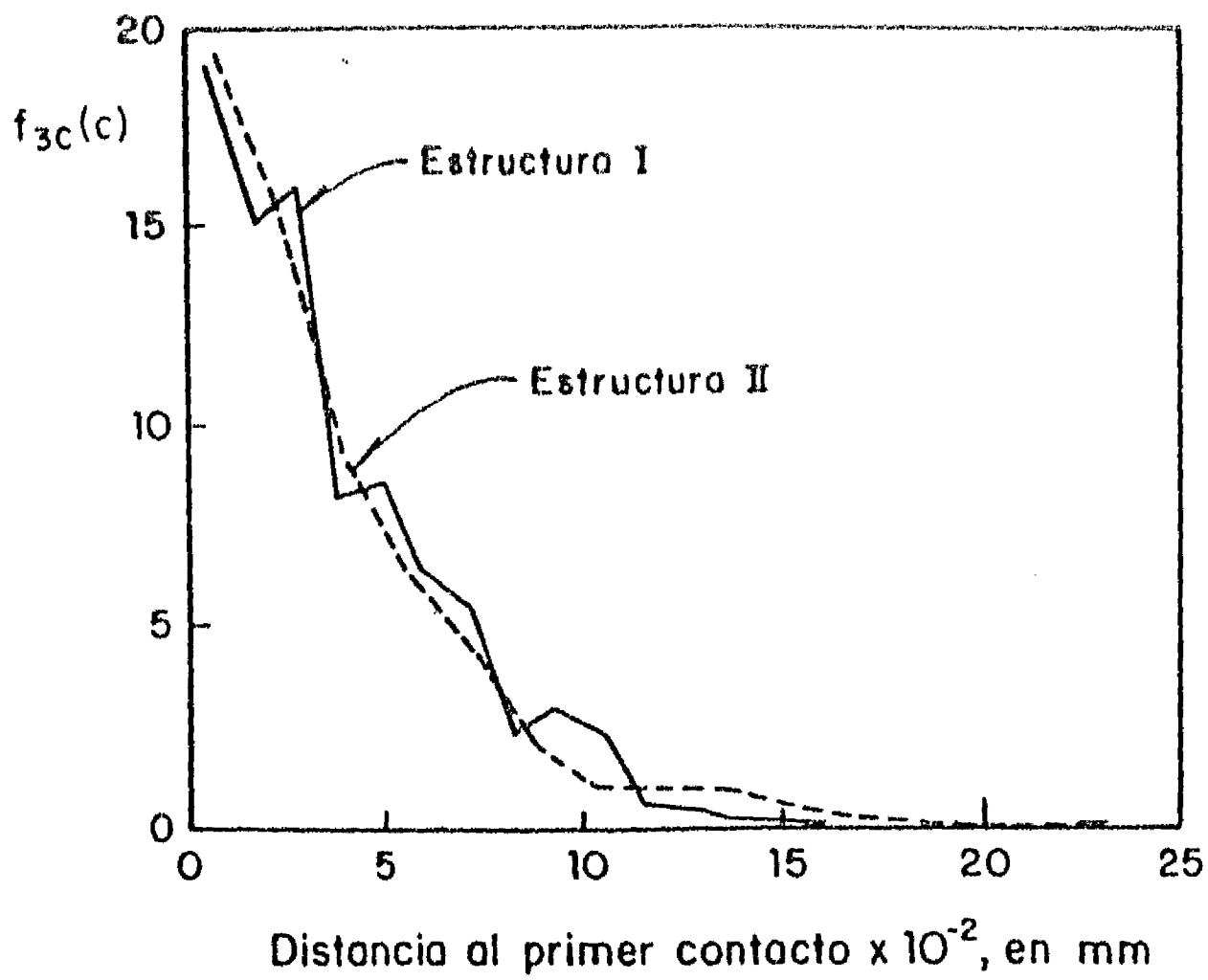


Fig 4.32 Densidad de probabilidad de distancia al primer contacto (caso tridimensional)

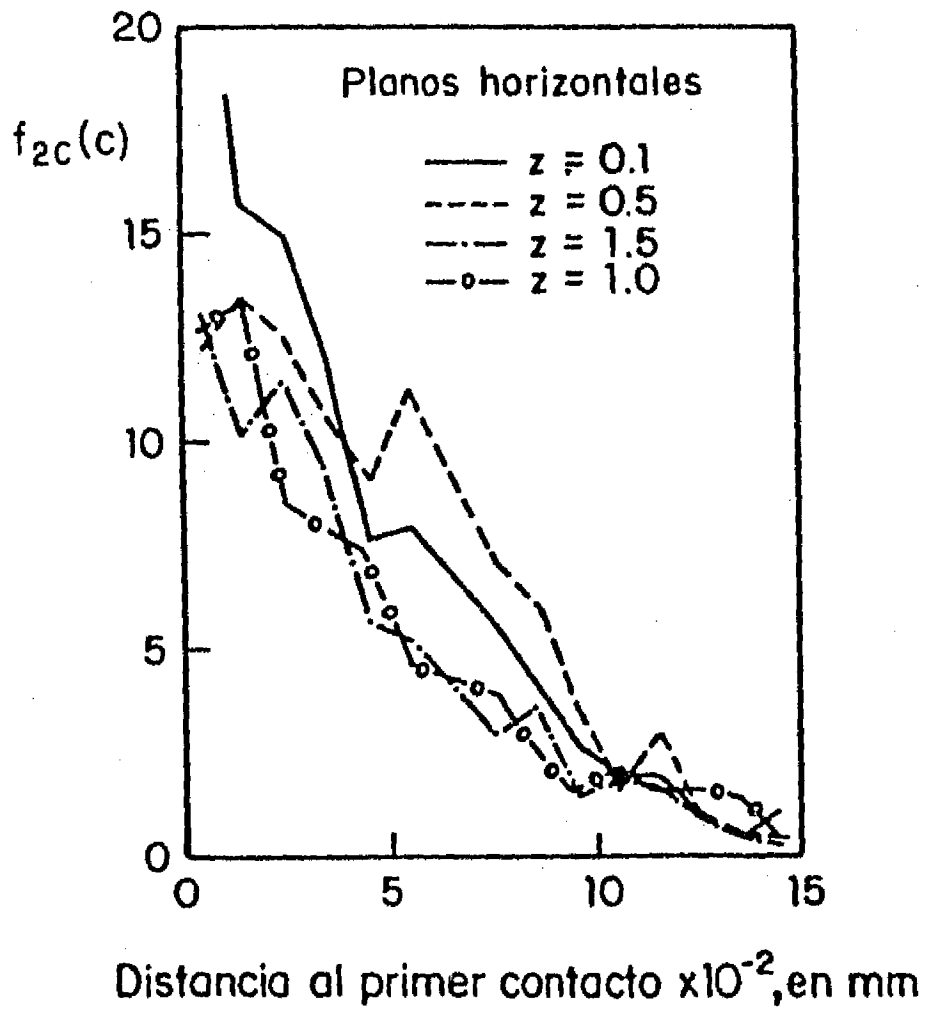


Fig 4.33 Estructura I.- Densidad de probabilidad de distancia al primer contacto (caso bidimensional)

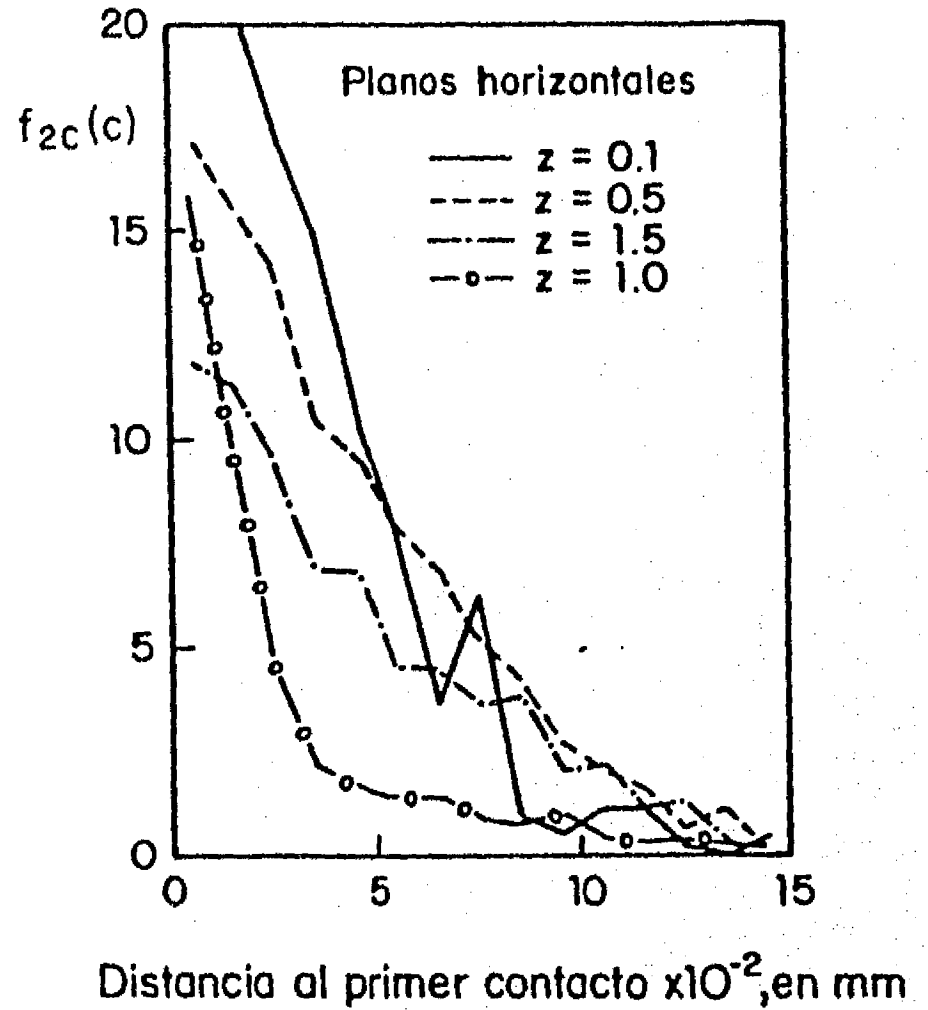


Fig 4.34 Estructura II.- Densidad de probabilidad de distancia al primer contacto (caso bidimensional)

TABLA 4.7 Comparación de valores medidos y calculados del coeficiente de permeabilidad

	ARENA I		ARENA II	
	k (cm/s)	k/k _{lab}	k (cm/s)	k/k _{lab}
Laboratorio	5.2 x 10 ⁻³	1	4.8 x 10 ⁻³	1
Hazen	1.1 x 10 ⁻¹	21	4.7 x 10 ⁻²	9.8
Slichter	4.3 x 10 ⁻²	8.2	1.1 x 10 ⁻²	2.3
Terzaghi	5.7 x 10 ⁻²	11.0	7.5 x 10 ⁻²	5.2
Kozeny-Carman	3.3 x 10 ⁻⁴	0.06	1.2 x 10 ⁻⁴	0.03
$k = \left[\frac{\gamma}{32\mu} \right] n \left[\frac{E_{3P}\{P^4\}}{E_{3P}\{P^2\}} \right]$	2.5 x 10 ⁻⁴	0.05	4.4 x 10 ⁻⁴	0.05
$k = \left[\frac{\gamma}{32\mu} \right] n E_{3V}\{P^2\}$	5.0 x 10 ⁻⁴	0.1	5.1 x 10 ⁻⁴	0.1
$k = \left[\frac{\gamma}{32\mu} \right] n \left[\frac{E_{2A}\{P^4\}}{E_{2A}\{P^2\}} \right]$	1.3 x 10 ⁻³	0.25	9.0 x 10 ⁻⁴	0.2
$k = \left[\frac{\gamma}{32\mu} \right] n E_{2AS}\{P^2\}$	1.4 x 10 ⁻³	0.27	8.7 x 10 ⁻³	0.18
$k = \left[\frac{\gamma}{32\mu} \right] n D_e^2$	9.8 x 10 ⁻⁴	0.2	9.8 x 10 ⁻⁴	0.2

poros bidimensional subestiman la permeabilidad pero son del mismo orden de magnitud que el valor real.

- La fórmula basada en la ley de primer contacto da resultados semejantes a las anteriores.

4.4.4 Nota complementaria respecto a la fórmula de Kozeny.

La fórmula de Kozeny establece que la permeabilidad de un medio granular está relacionada con la superficie específica:

$$k = C_s (\gamma/\mu) (1/S_o^2) [e^3/(1+e)] \quad (4.48)$$

donde

γ Peso volumétrico del permeante, en g/cm³

μ Viscosidad dinámica del permeante en g.s/cm²

C_s Factor de forma

S_o Superficie específica del medio, en cm⁻¹

e Relación de vacíos

Esta relación está basada en aproximaciones que limitan su validez y su campo de aplicación.

Para mostrar lo anterior, es posible seguir paso a paso la derivación de la fórmula 4.48 detallada por ejemplo en Mitchell [1976].

- Flujo a través de un tubo cilíndrico

El flujo está regido por la ley de Poiseuille:

$$V_m = (\gamma R^2 i) / (8\mu) \quad (4.49)$$

donde

V_m Velocidad media del flujo

R Radio del tubo

i Gradiente hidráulico

Llamando "radio hidráulico" la relación :

$$R_H = [\text{Area transversal del tubo}] / [\text{Perímetro del tubo}]$$

$$R_H = (\pi R^2) / (2\pi R) = R/2$$

La Ec 4.49 puede escribirse :

$$q = (1/2) (\gamma / \mu) R_H^2 i a \quad (4.50)$$

donde

q Gasto que pasa por el tubo

a Area transversal del tubo

Para un tubo con forma no circular, la ecuación anterior podrá aplicarse introduciendo un coeficiente de forma C_s :

$$q = C_s (\gamma / \mu) R_H^2 i a \quad (4.51)$$

- Idealización del suelo como un grupo de tubos paralelos de sección transversal irregular pero constante.

Considerando una muestra de sección transversal A (sólidos mas vacíos), el área disponible para el flujo es :

$$A_f = n A \quad (4.52)$$

Se idealiza el suelo como formado por un grupo de tubos de sección transversal irregular pero con área constante a_i y tales que $\sum a_i = A_f$.

En este paso, Kozeny considera que la fórmula 4.50 puede aplicarse para calcular el flujo a través del grupo de tubos considerando un radio hidráulico medio igual a :

$$R_H = A_f / \mathcal{P} = A_f L / (\mathcal{P} L) = V_w / A_p$$

donde

\mathcal{P} Suma de los perímetros de los tubos

V_w Volumen de agua en la muestra

A_p Area perimetral de los tubos

Por tanto:

$$R_H = eV_s / A_p = e/S_o \quad (4.53)$$

donde

V_s Volumen de sólidos

e Relación de vacíos

S_o Superficie específica

La Ec 4.51 se vuelve entonces:

$$q = C_s (\delta/\mu) (e/S_o)^2 i n A = C (\delta/\mu) (1/S_o^2) [e^3/(1+e)] i A \quad (4.54)$$

y el coeficiente de permeabilidad resulta :

$$k = C_s (\delta/\mu) (1/S_o^2) [e^3/(1+e)] \quad (4.55)$$

El planteamiento anterior es objetable en varios aspectos.

Se acepta implícitamente en la fórmula de Kozeny que la superficie específica del medio a considerar es la tridimensional. Tomando en cuenta el carácter unidimensional del flujo, puede arguirse que es mas representativa la superficie específica bidimensional (o perímetro específico). Se vio en 2.3.8 que, para medios isótropos, este perímetro específico se obtiene multiplicando la superficie específica tridimensional por la cantidad $\pi/4$. Como la superficie específica interviene al cuadrado, el uso del perímetro específico en vez de la superficie específica aumenta el coeficiente de permeabilidad en 62%. En medios anisótropos, la diferencia puede ser mucho mayor aun.

Por otra parte, es objetable el uso de un radio hidráulico medio para calcular el flujo a través del grupo de tubos en vez de sumar los gastos correspondientes a cada tubo. En efecto, esta aproximación de Kozeny lleva a la siguiente fórmula:

$$k = [(\delta/(32\mu))] [E_T \{T^2\}/E_T \{T\}]^2 n \quad (4.56)$$

En realidad, la aplicación de la ley de Poiseuille a un grupo de tubos debe hacerse en la forma indicada arriba (4.4.2) obteniéndose:

$$k = [(\gamma/(32\mu))] [E_T \{T^4\} / E_T \{T^2\}] n \quad (4.57)$$

Las dos fórmulas anteriores solamente coinciden si todos los tubos tienen el mismo diámetro. Lo anterior muestra que, aun para un grupo de tubos, no existe realmente una relación entre permeabilidad y superficie específica. En efecto, la permeabilidad depende de los momentos de orden dos y cuatro de la distribución de los diámetros de los tubos, mientras que la superficie específica depende de los momentos de primer y segundo orden. La aproximación de Kozeny lleva por tanto a subestimar el flujo en una proporción que depende del grado de variabilidad de los diámetros de los tubos.

4.4.5 Conclusiones

Debido al número muy pequeño de materiales ensayados, el estudio presentado en este capítulo no permite establecer conclusiones definitivas. Sin embargo, los resultados sugieren lo siguiente:

- El coeficiente de permeabilidad presenta una mejor correlación con la distribución de tamaños de poros que con la distribución de tamaños de granos.

- La distribución de tamaños de poros a considerar es la distribución bidimensional que se define en un plano de corte perpendicular a la dirección del flujo

Por otra parte, de este estudio se desprende que las conocidas relaciones entre permeabilidad y superficie específica tienen su base en aproximaciones discutibles que pueden explicar, por lo menos parcialmente, sus deficiencias.

4.5 ESTRUCTURA DE MEDIOS GRANULARES Y DISEÑO DE FILTROS

4.5.1 Antecedentes

En la práctica de la geotecnia, es común emplear los materiales granulares como filtros para canalizar el agua y proteger los suelos más finos contra la erosión.

Los criterios aceptados en la actualidad para el diseño de filtros se basan en las dimensiones de los granos del material filtrante. Los granos deben ser suficientemente grandes para que su permeabilidad permita una evacuación rápida del flujo y suficientemente pequeños para retener el suelo base que se pretende proteger. Las reglas de diseño más aceptadas son las de Terzaghi [1920], que las investigaciones experimentales de Bertram [1940] permitieron confirmar y afinar. Estas reglas consisten esencialmente en dos condiciones:

a) Condición de retención

$$D_{15F} < 5 D_{85B} \quad (4.58)$$

b) Condición de permeabilidad

$$D_{15F} > 5 D_{15B} \quad (4.59)$$

donde

D_{15F} Diámetro tal que 15 % en peso (o volumen) de las partículas del filtro tengan un diámetro menor o igual

D_{15B} Misma definición para el material base

D_{85B} Diámetro tal que 85 % en peso (o volumen) de las partículas del material base tengan un diámetro menor o igual

En sus investigaciones experimentales, Bertram encontró que, en realidad, la interpenetración del material base y del filtro se presenta cuando $D_{15F} \approx 10 D_{85B}$. La Ec 4.58 incluye por tanto un factor de seguridad del orden de 2.

Variantes menos usadas de las fórmulas anteriores y recomendaciones adicionales han sido propuestas por diferentes autores [Poucell, 1982].

Las Ecs 4.58 y 4.59 pueden también emplearse para

verificar las propiedades autofiltrantes de materiales con granulometría amplia (capacidad de drenaje y de retención de la fracción mas fina por parte de la fracción mas gruesa). Para ello, Kézdi [1976] sugirió dividir simplemente el material en dos fracciones granulométricas arbitrarias ($> D$ y $< D$) y verificar el cumplimiento de las Ecs 4.58 y 4.59 para varios valores de D .

Los criterios anteriores han sido y siguen siendo muy útiles para el diseño de filtros; sin embargo, no son totalmente satisfactorios puesto que la verificación se basa en el tamaño de los granos del material base y del filtro cuando, en realidad, resulta claro que el tamaño de los poros del filtro y no el de sus granos es el que determina si este puede o no retener los granos del suelo base. Las limitaciones del criterio de la Ec 4.58 aparecieron con claridad con la introducción en la práctica de la geotecnia de los filtros de materiales sintéticos para los cuales el concepto de grano deja de existir [Auvinet, 1982].

En el presente capítulo, se plantean algunos conceptos que podrían constituir la base de investigaciones experimentales para relacionar la estructura de los medios granulares con sus propiedades filtrantes.

4.5.2 Modelo estocástico del comportamiento de los filtros

Una simple comparación de la distribución de poros del filtro con la distribución granulométrica del material base (Fig 4.35) puede dar una idea de la capacidad de retención del segundo por el primero [Silveira, 1965]. Las partículas del suelo base de diámetro mayor que $P_{m\acute{a}x}$ quedarán necesariamente retenidas mientras que las de diámetro menor que $P_{m\acute{i}n}$ pasarán libremente. Las partículas de diámetro comprendido entre $P_{m\acute{i}n}$ y $P_{m\acute{a}x}$ tendrán un comportamiento aleatorio y pasarán por cierto número de poros antes de quedar retenidas o de recorrer todo el espesor del filtro. Es posible representar este último tipo de comportamiento mediante un modelo estocástico simple.

Bajo el efecto de las fuerzas de filtración, las partículas del suelo base pasan por una sucesión de poros de diferentes diámetros. En cada poro, la probabilidad de paso es :

$$P [P > D] = 1 - F_p(D) \quad (4.60)$$

donde

$F_p(D)$ Función de distribución de tamaños de poros

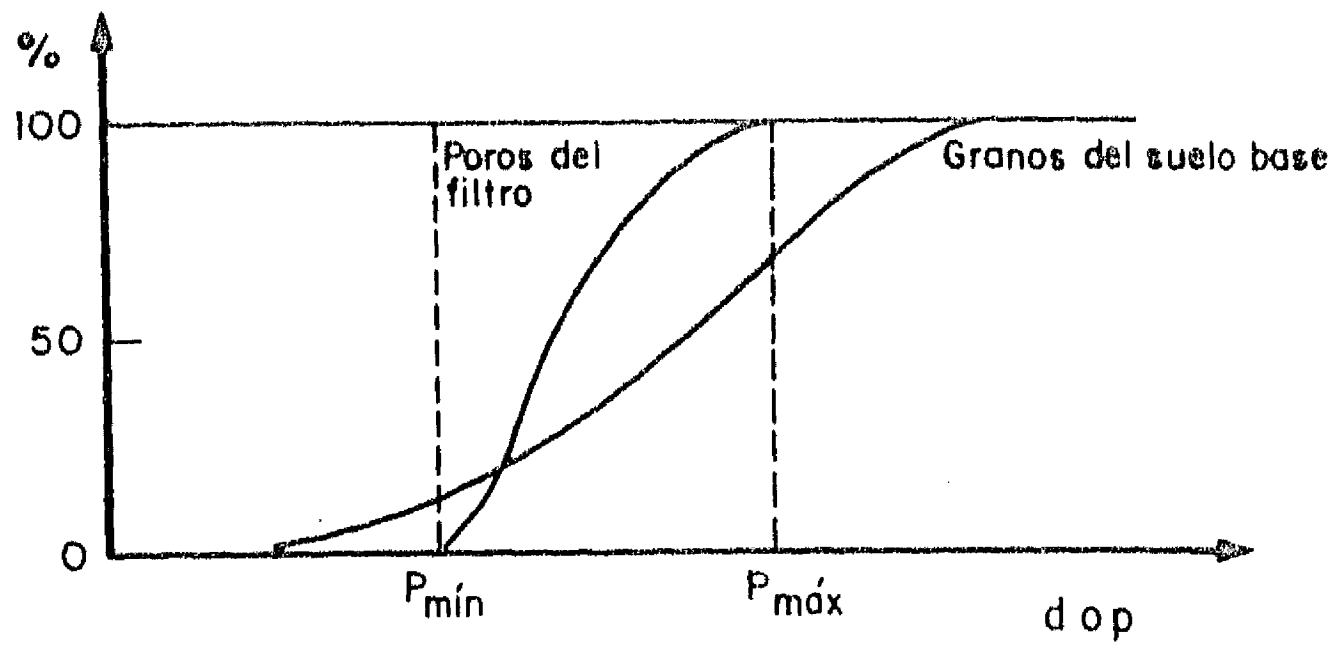


Fig 4.35 Comparación de dimensiones de poros del filtro y de granos del suelo base

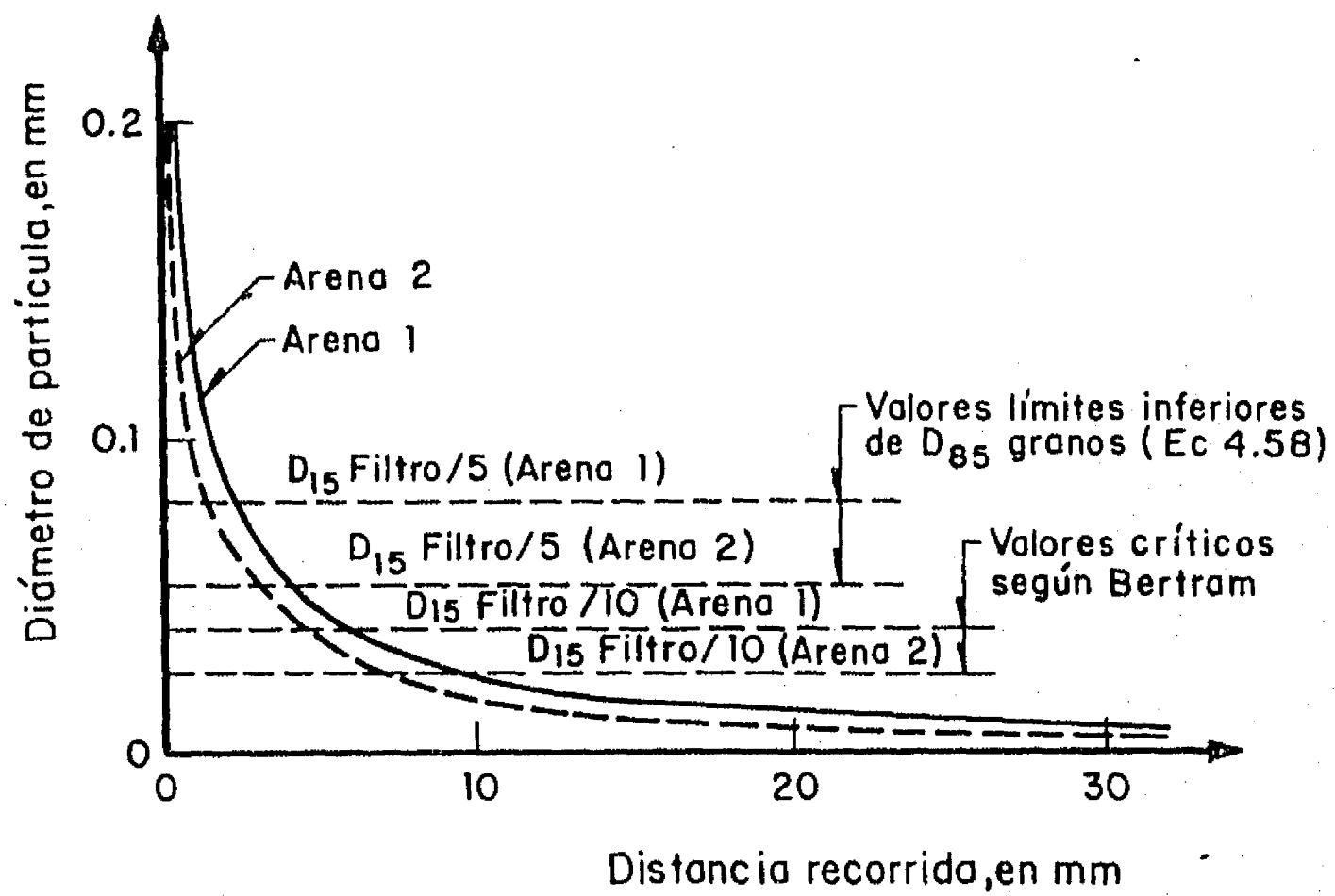


Fig 4.36 Esperanza de la distancia recorrida por una partícula dentro de un filtro

Tomando en cuenta el carácter unidimensional del flujo, la distribución de tamaños de poros a considerar en la Ec 4.60 es la función $F_p^{2AS}(p)$, distribución de tamaños aparentes en un plano ortogonal a la dirección del flujo, en área.

Por otra parte, cada vez que atraviesa un poro, la partícula avanza en la dirección del flujo una distancia aleatoria que puede considerarse igual al diámetro del poro P . La situación de la partícula puede entonces definirse a lo largo de su trayectoria mediante dos variables aleatorias X_N y Y_N . La variable aleatoria X_N representará el avance total en la dirección del flujo después de atravesar N poros y Y_N será igual a cero si la partícula pasa libremente por el poro número N y a uno si se queda retenida en este poro.

Se define en esta forma un proceso estocástico bidimensional. Si se acepta que existe independencia entre los tamaños de poros sucesivos, este proceso es de tipo markoviano de renovación [Auvinet, 1984]. En efecto, la variable Y_N define una cadena markoviana de dos estados (0 y 1), siendo 1 un estado absorbente. Las probabilidades de transición de esta cadena son las siguientes:

$$\begin{aligned} P_{1,0} &= P [Y_N = 1 \mid Y_{N-1} = 0] = F_p(D) \\ P_{0,0} &= P [Y_N = 0 \mid Y_{N-1} = 0] = 1 - F_p(D) \\ P_{0,1} &= P [Y_N = 0 \mid Y_{N-1} = 1] = 0 \\ P_{1,1} &= P [Y_N = 1 \mid Y_{N-1} = 1] = 1 \end{aligned} \quad (4.61)$$

Si se llama M el número (aleatorio) del último poro en el que la partícula logra pasar (tiempo de absorción), la distribución de probabilidad de M es de tipo geométrico [Tipo II, Auvinet, 1984] y se tiene:

$$P [M = m] = [1 - F_p(D)]^m F_p(D) \quad (4.62)$$

La esperanza de M es:

$$E\{M\} = [1 - F_p(D)] / F_p(D) \quad (4.63)$$

y su variancia:

$$\text{var}\{M\} = [1 - F_p(D)] / F_p(D)^2 \quad (4.64)$$

La variable X_N define por su parte un proceso de renovación, las distancias entre renovaciones (pasos) siendo iguales a los diámetros de los poros sucesivos P_i :

$$X_N = \sum_{i=1}^N P_i \quad (4.65)$$

La esperanza de los diámetros de los poros atravesados antes de que la partícula quede retenida es :

$$E\{P | P > D\} = \left[\int_D^{\infty} p \, dF_p(p) \right] / [1 - F_p(D)] \quad (4.66)$$

El valor medio de la distancia X_M recorrida por la partícula de diámetro D dentro del filtro antes de quedar retenida es por tanto :

$$E\{X_M\} = E\left\{E\left\{\sum_{i=1}^M P_i \mid M\right\}\right\} = E\{M \cdot E\{P | P > D\}\} = E\{P | P > D\} E\{M\} \quad (4.67)$$

$$E\{X_M\} = E\{P | P > D\} [1 - F_p(D)] / F_p(D) \quad (4.68)$$

y de acuerdo con 4.66 :

$$E\{X_M\} = [1 / F_p(D)] \int_D^{\infty} p \, dF_p(p) \quad (4.69)$$

A partir de la distribución de tamaños de poros, es por tanto posible obtener la esperanza de la distancia recorrida dentro del filtro por una partícula del suelo base de determinado diámetro. Por otra parte, es fácil demostrar, procediendo en la misma forma que en las Ecs 4.67 a 4.69, que la variancia de esta distancia es :

$$\text{var}\{X_M\} = E\{M\} \cdot \text{var}\{P | P > D\} + \text{var}\{M\} \cdot E\{P | P > D\} \quad (4.70)$$

Estas fórmulas se aplicaron a las dos arenas descritas en el capítulo anterior, utilizando como distribuciones de tamaños de poros las presentadas en las Figs 4.30 y 4.31, respectivamente. Las esperanzas de la distancia recorrida por partículas de diferentes diámetros del suelo base se muestran en la Fig 4.36. La dispersión alrededor de los valores

indicados es importante; en efecto, el coeficiente de variación de la distancia recorrida calculado a partir de la Ec 4.70 es del orden de uno.

En la misma figura, se han representado los requisitos de retención de la Ec 4.58 y los valores críticos obtenidos por Bertram. Se observa que estos últimos valores corresponden en forma satisfactoria a los diámetros abajo de los cuales la penetración se vuelve significativa.

La Fig 4.36 permite apreciar además el papel del espesor en el funcionamiento del filtro. Se observa que previendo un mayor espesor de filtro es posible aceptar un menor valor del tamaño de las partículas del suelo base. Sin embargo, se observa también que esta forma de proceder es poco eficiente puesto que, para partículas pequeñas, el espesor del filtro crece muy rápidamente.

A pesar de su sencillez, y en particular del hecho de que se desprecien los efectos de arqueo que pueden presentarse en grupos de partículas, el modelo parece describir adecuadamente el comportamiento de los filtros.

Para revisar las propiedades autofiltrantes de un material se tendría que recurrir a la determinación de la distribución de tamaños de poros de la fracción mas gruesa y considerar la fracción fina como material base.

4.5.3 Conclusión

El modelo presentado en este capítulo constituye un marco conceptual útil para entender las propiedades filtrantes de los materiales granulares. Es necesario que se realice un estudio experimental análogo al de Bertram, pero poniendo ahora énfasis en la distribución de tamaños de poros, para verificar este modelo y afinar los criterios disponibles para el diseño de filtros.

4.6 ESTRUCTURA Y COMPORTAMIENTO MECANICO

4.6.1 Introducción

La geometría de un medio granular tiene una gran influencia sobre su comportamiento mecánico. Sin embargo, hasta ahora, solamente algunos aspectos de esta influencia han podido ser entendidos y modelados en forma satisfactoria.

Marsal [1973] ha mostrado cómo los esfuerzos se transmiten dentro de un medio granular a través de las fuerzas de contacto interparticulares y de los propios granos. El fenómeno es complejo puesto que, como lo estableció Dantu [1968], solamente una parte de las partículas contribuyen a la transmisión de esfuerzos dentro del medio, mientras que las restantes son inactivas. Sin embargo, se mostrará a continuación que, por lo menos en algunos casos particulares, es posible describir en forma aproximada la distribución de fuerzas dentro de un medio granular.

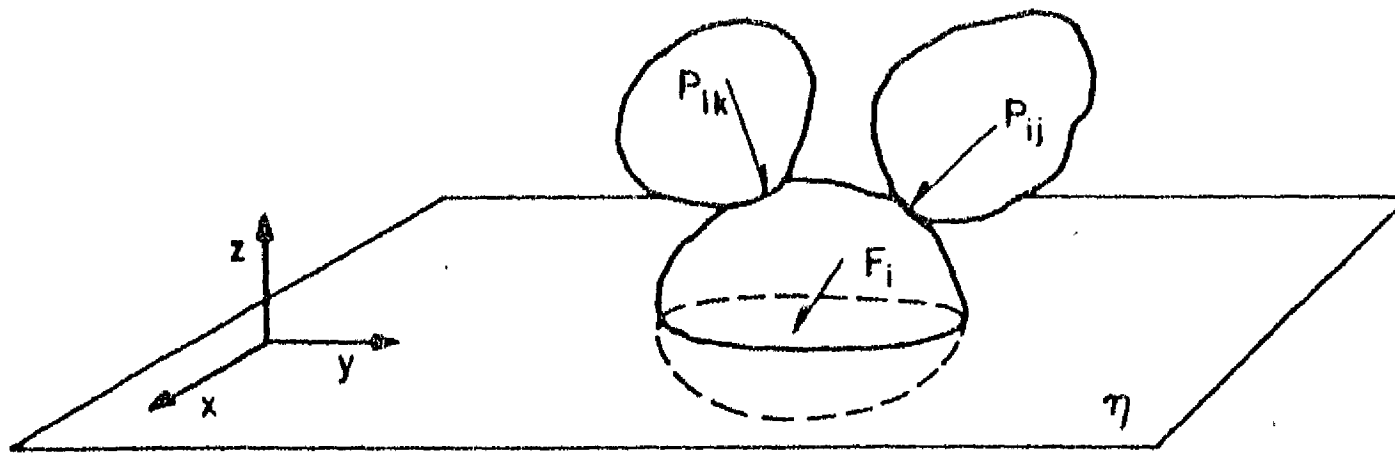
La relación entre la geometría y el comportamiento mecánico de los medios granulares ha sido puesta claramente en evidencia en forma experimental tanto para condiciones estáticas como dinámicas. Después de revisar brevemente algunas de estas evidencias, se intenta también en este capítulo describir, en forma esencialmente cualitativa, los mecanismos de deformación del medio en términos de los parámetros estructurales definidos en la primera parte de este trabajo.

4.6.2 Transmisión de esfuerzos en medios granulares

Marsal [1973] divide las fuerzas existentes dentro de un material granular sometido a sollicitaciones mecánicas en fuerzas de contacto interparticulares F_{ij} (fuerza de contacto entre la partícula i y la partícula j) y en fuerzas intragranulares F_i que se definen en la intersección de cada partícula con un plano (Fig 4.37).

La estimación teórica de la magnitud de las fuerzas anteriores plantea serias dificultades puesto que el equilibrio del medio es altamente hiperestático y está regido por una combinación compleja de ecuaciones y desigualdades:

- Equilibrio estático de cada partícula bajo el efecto de las fuerzas de contacto y de la gravedad
- Compatibilidad de deformaciones entre partículas vecinas en los puntos de contacto (ley elástica de Hertz u otra ley aplicable)



P_{ij} Fuerza de contacto entre las partículas i y j

F_i Fuerza intragranular para la partícula i en la intersección con el plano η

Fig 4.37 Fuerzas de contacto e intragranulares

- Condiciones de no deslizamiento en los contactos (cono de fricción)

- Compatibilidad de las fuerzas internas con las condiciones de frontera

Además, en rigor, la solución solamente puede obtenerse en forma iterativa puesto que la aplicación de solicitaciones al medio modifica la geometría inicial considerada y por tanto provoca una redistribución de las fuerzas internas.

La resolución simultánea de las ecuaciones anteriores solamente ha sido intentada, aparentemente con cierto éxito, para medios granulares bidimensionales recurriendo a métodos numéricos [Cundall, 1979].

Otro enfoque ha consistido en considerar las fuerzas internas como aleatorias y limitarse a estimar su valor medio y variancia. Aun esta tarea resulta compleja puesto que la variabilidad no solamente depende de factores geométricos sino de las propiedades mecánicas de los materiales que constituyen los granos.

En ciertos casos, la componente geométrica de la variabilidad de las fuerzas internas puede aislarse de la componente mecánica. Si se considera por ejemplo el plano de intersección con el medio de la Fig 4.37, es posible estimar la variancia de las fuerzas intragranulares asociada con la repartición aleatoria de los sólidos y vacíos dentro del medio. Para ello, se puede suponer que los esfuerzos que actuarían en el plano en un medio continuo se reparten entre los granos de acuerdo a su área transversal. Se tiene entonces para las componentes de las fuerzas intragranulares del grano i [Marsal, 1973] :

$$F_{xi} = \tau_{zx} a_i / (1-n) \quad F_{yi} = \tau_{zy} a_i / (1-n) \quad F_{zi} = \sigma_z a_i / (1-n) \quad (4.71)$$

donde

a_i Area transversal del grano i en el plano de intersección

n Porosidad

σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} esfuerzo normal y esfuerzos tangenciales en el plano de intersección, respectivamente.

y se tiene, por ejemplo, en el caso de la componente normal :

$$\text{var}[F_{zi}] = [\bar{\sigma}_z / (1-n)]^2 \text{var}[a_i] \quad (4.72)$$

lo que se puede escribir en términos de los conceptos introducidos en 2.3.1 para partículas esféricas :

$$\text{var}[F_{zi}] = [\bar{\sigma}_z / (1-n)]^2 (\pi/4)^2 [E\{D^4\}_{2A} - E\{D^2\}_{2A}^2] \quad (4.73)$$

y (Anexo I) :

$$\begin{aligned} \text{var}[F_{zi}] = [\bar{\sigma}_z / (1-n)]^2 (\pi/4)^2 & [(8/15)E\{D^5\}_{3D} / E\{D\}_{3D} \\ & - (4/9)(E\{D^3\}_{3D} / E\{D\}_{3D})^2] \end{aligned} \quad (4.74)$$

Un enfoque similar se puede aplicar a la evaluación del efecto de escala geométrico que afecta la distribución de esfuerzos dentro del medio.

Si se considera una área de intersección A grande respecto a los granos, es posible definir unos esfuerzos medios en esta área como sigue :

$$\bar{\tau}_{zx} = \sum_{i=1}^{N_A} F_{xi} / A \quad \bar{\tau}_{zy} = \sum_{i=1}^{N_A} F_{yi} / A \quad \bar{\sigma}_z = \sum_{i=1}^{N_A} F_{zi} / A \quad (4.75)$$

donde

F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} Componentes de las fuerzas intragranulares
 $\bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{zx}, \bar{\tau}_{zy}$ Esfuerzos normal y tangenciales medios en el área considerada respectivamente

N_A Número de partículas intersecadas en el área A

En un medio homogéneo sometido a un campo homogéneo de esfuerzos, los promedios anteriores son variables aleatorias que tienden respectivamente hacia los esfuerzos τ_{zx}, τ_{zy} y σ_z del medio continuo cuando crece el área de intersección.

La componente geométrica de la dispersión de estas variables aleatorias ligada a la repartición aleatoria de los sólidos y vacíos dentro del medio puede ser evaluada suponiendo nuevamente que las fuerzas se reparten

uniformemente dentro de los sólidos del medio. Se tiene, por ejemplo en el caso del esfuerzo normal :

$$\bar{\sigma}_z = \sigma_z (1-n_A) / (1-n) \quad (4.76)$$

donde

n_A Porosidad en el área considerada

n Porosidad del medio

Se tiene por tanto :

$$\text{var}[\bar{\sigma}_z] = [\sigma_z / (1-n)]^2 \text{var}[n_A] \quad (4.77)$$

donde $\text{var}[n_A]$ puede estimarse a partir de las consideraciones del capítulo 4.2 y en particular de la Fig 4.5 . Se observa que el coeficiente de variación del esfuerzo es del mismo orden que el de la porosidad.

Debe insistirse en que las variancias así calculadas constituyen solamente un límite inferior de la variancia real de las fuerzas y esfuerzos considerados, debido a las concentraciones de esfuerzos que se presentan en ciertas partículas. Sin embargo, la Ec 4.77 puede ser útil, por ejemplo, para estimar un límite inferior de la dispersión del esfuerzo que puede actuar en una masa granular sobre una celda de carga.

La estimación de la magnitud de las fuerzas de contacto presenta también un gran interés. Buscando definir su valor medio, se ha propuesto asignar a cada contacto una fuerza proporcional al vector esfuerzo $\vec{e}_{\delta, \beta}$ que actuaría en un medio continuo sobre el plano tangente a la partícula en el contacto [Oda, 1974 ; Alberro, 1980] :

$$\vec{e}_{\delta, \beta} = \begin{cases} \sigma_2 \text{sen} \delta \text{cos} \beta \\ \sigma_3 \text{sen} \delta \text{sen} \beta \\ \sigma_1 \text{cos} \delta \end{cases} \quad (4.78)$$

donde

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Esfuerzos principales

δ y β Angulos definidos en la Fig 2.15 , haciendo

coincidir los ejes de esta figura con los esfuerzos principales.

Las fuerzas de contacto tienen entonces una magnitud que depende de su orientación en la forma siguiente:

$$\vec{P}_{\delta, \beta} = \xi \vec{e}_{\delta, \beta} \quad (4.79)$$

donde

ξ Coeficiente que depende de δ y β para medios anisótropos

En los casos mas sencillos, es posible estimar en forma aproximada el coeficiente ξ que garantiza la compatibilidad de estas fuerzas con los esfuerzos del medio continuo. Así, suponiendo las partículas esféricas y la orientación de los planos tangentes isotrópica y considerando en un plano de intersección horizontal como el de la Fig 4.37 perpendicular al esfuerzo principal σ_1 , una área unitaria de grandes dimensiones respecto a las partículas, es posible escribir:

$$\sigma_1 = E \left\{ \sum_{i=1}^{N_p} P_{z_i} \right\} = \xi \sigma_1 E \left\{ \sum_{i=1}^{N_p} \cos \delta_i \right\} = \xi \sigma_1 E \{N_p\} E \{ \cos \delta \} \quad (4.80)$$

donde

N_p Número total de contactos en los casquetes definidos en las partículas intersecadas por el plano de intersección (Siempre se escogerá el casquete de menor dimensión, arriba o abajo del plano y las fuerzas se considerarán en valor absoluto)

F_{z_i} Componente vertical de las fuerzas de contacto actuando en los casquetes

δ_i Angulo definido en la Fig 2.15 para el contacto i , y supuesto independiente de N_p

La Ec 4.80 implica obviamente que:

$$\xi = 1 / [E \{N_p\} E \{ \cos \delta \}] \quad (4.81)$$

Tomando en cuenta que la distribución de los contactos es, por hipótesis, isotrópica, es fácil mostrar (Anexo I) que $E \{ \cos \delta \} = 3/4$ y que la esperanza del número de contactos es:

$$E\{N_p\} = (\lambda_A/4) \int_0^{\infty} E\{N_c | d\} f_{2D}(d) \Delta d = (\lambda_A/4) E_{2D}\{N_c\} \quad (4.82)$$

donde

$f_{2D}(d)$ Densidad de probabilidad de los diámetros de las partículas intersecadas por el plano (2.3.1)

$E\{N_c | d\}$ Esperanza del número de contactos para una partícula de diámetro d (2.3.4 y 3.3.4)

$E_{2D}\{N_c\}$ Esperanza del número de contactos por partícula para los granos intersecados por el plano

λ_A Número de partículas por unidad de área (2.3.3)

Se tiene por tanto :

$$\xi = 16/[3\lambda_A E_{2D}\{N_c\}] \quad (4.83)$$

El valor medio de las fuerzas de contacto puede entonces calcularse como la esperanza de la cantidad :

$$|\vec{F}| = \xi |e_{\alpha, \beta}| = \sqrt{\sigma_2^2 \sin^2 \delta \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \sin^2 \delta \sin^2 \beta + \sigma_1^2 \cos^2 \delta} \quad (4.84)$$

Tomando en cuenta la isotropía se tiene :

$$E\{|\vec{F}|\} = [\xi/(2\pi)] \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\sigma_2^2 \sin^2 \delta \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \sin^2 \delta \sin^2 \beta + \sigma_1^2 \cos^2 \delta} \cdot \sin \delta \, d\beta \, d\delta \quad (4.85)$$

cantidad que puede calcularse fácilmente en forma numérica para el estado de esfuerzo de interés. En el caso de un estado de esfuerzos hidrostático, la expresión anterior se reduce obviamente a :

$$E\{|\vec{F}|\} = \xi \sigma \quad (4.86)$$

donde

σ Presión hidrostática

lo que puede también escribirse, tomando en cuenta las Ecs 2.58 y 4.83 :

$$E\{\overrightarrow{P}\} = (16/3) (\sigma E_{2A} \{\pi D^2/4\}) / [(1-n)E_{2D} \{N_c\}] \quad (4.87)$$

y, por la Ec 2.69 :

$$E\{\overrightarrow{P}\} = (16/3) (\sigma E_{3D} \{RD^3/6\}) / [(1-n)E_{3D} \{D\}E_{2D} \{N_c\}] \quad (4.88)$$

En el caso de materiales uniformes (D constante) esta última ecuación se reduce simplemente a :

$$E\{\overrightarrow{P}\} = (8/9) (\pi D^2) \sigma / [(1-n)E_{2D} \{N_c\}] \quad (4.89)$$

Los resultados obtenidos con esta fórmula son del mismo orden de magnitud (aunque sensiblemente mayores) que los obtenidos por Marsal [1973] a partir de consideraciones ligeramente diferentes. Para una presión hidrostática igual a 1 kg/cm² y valores típicos de la porosidad (n = 0.4) y del número de contactos por partícula (N_c = 6), las fuerzas de contacto medias obtenidas son las siguientes :

Arena media (D = 0.04 cm)	1.2 gramos
Grava (D = 4 cm)	1.2 kilogramos
Enrocamiento (D = 40 cm)	1.2 toneladas

Las fuerzas de contacto reales pueden diferir considerablemente de los valores medios así estimados debido a las concentraciones de esfuerzos que se presentan en ciertas partículas. En experimentos realizados en modelos de material fotoelástico, Dantu [1968] mostró en efecto que, dentro de un medio granular, pueden existir grandes números de contactos inactivos. De hecho, también pueden existir partículas totalmente pasivas, es decir sin contactos activos.

En el caso de partículas de forma sencilla es posible desarrollar criterios de inspección basados en la posición relativa de los contactos para definir si los granos pueden o no ser activos. Para medios granulares formados por partículas esféricas, un criterio de este tipo ha sido desarrollado por Alberro [1981]. Este criterio establece las condiciones necesarias para que una partícula con 2, 3, ..., N contactos pueda ser activa tomando en cuenta el ángulo ψ de fricción intergranular. Este criterio fue aplicado a las estructuras simuladas en 3.3.4. Se determinó para cada partícula el ángulo tal que, para ángulos iguales o inferiores, esta partícula sea necesariamente inactiva (programa PART/ACTIVAS). El porcentaje de partículas potencialmente activas en cada estructura para diversos ángulos ψ se presenta en la Fig 4.38. Se observa que para valores cercanos a cero del ángulo ψ , esta proporción es muy baja por lo que las estructuras pueden considerarse como globalmente metaestables (véase 4.6.3). La proporción crece rápidamente con el ángulo ψ para los materiales uniformes pero más lentamente para los materiales mejor graduados, lo que debe atribuirse a que, en este último caso, algunas partículas pequeñas se encuentran prácticamente desligadas de la estructura formada por las grandes y no pueden trabajar, aun si la rugosidad de la superficie de los granos es alta.

Marsal [1973] propuso expresar el grado de actividad de las partículas a través del concepto de relación de vacíos estructural e_s :

$$e_s = (V_v + V_{si}) / (V_s - V_{si}) \quad (4.90)$$

donde

- V_v Volumen de vacíos
- V_{si} Volumen de partículas inactivas
- V_s Volumen de sólidos

Debido al efecto de escala geométrico, solo fue posible calcular esta relación (Programa RELVAC/ESTR) para las estructuras más uniformes (A y B). Los resultados se presentan en la Fig 4.39 para diferentes ángulos de fricción ψ . Destaca en ambos casos el cambio brusco de la relación de vacíos estructural cuando el ángulo ψ se acerca a 20 grados y su estabilización para ángulos mayores. En materiales bien graduados se obtendría una transición más progresiva.

Definida la relación de vacíos estructural, la Ec 4.89 es aplicable a la estructura obtenida eliminando las partículas

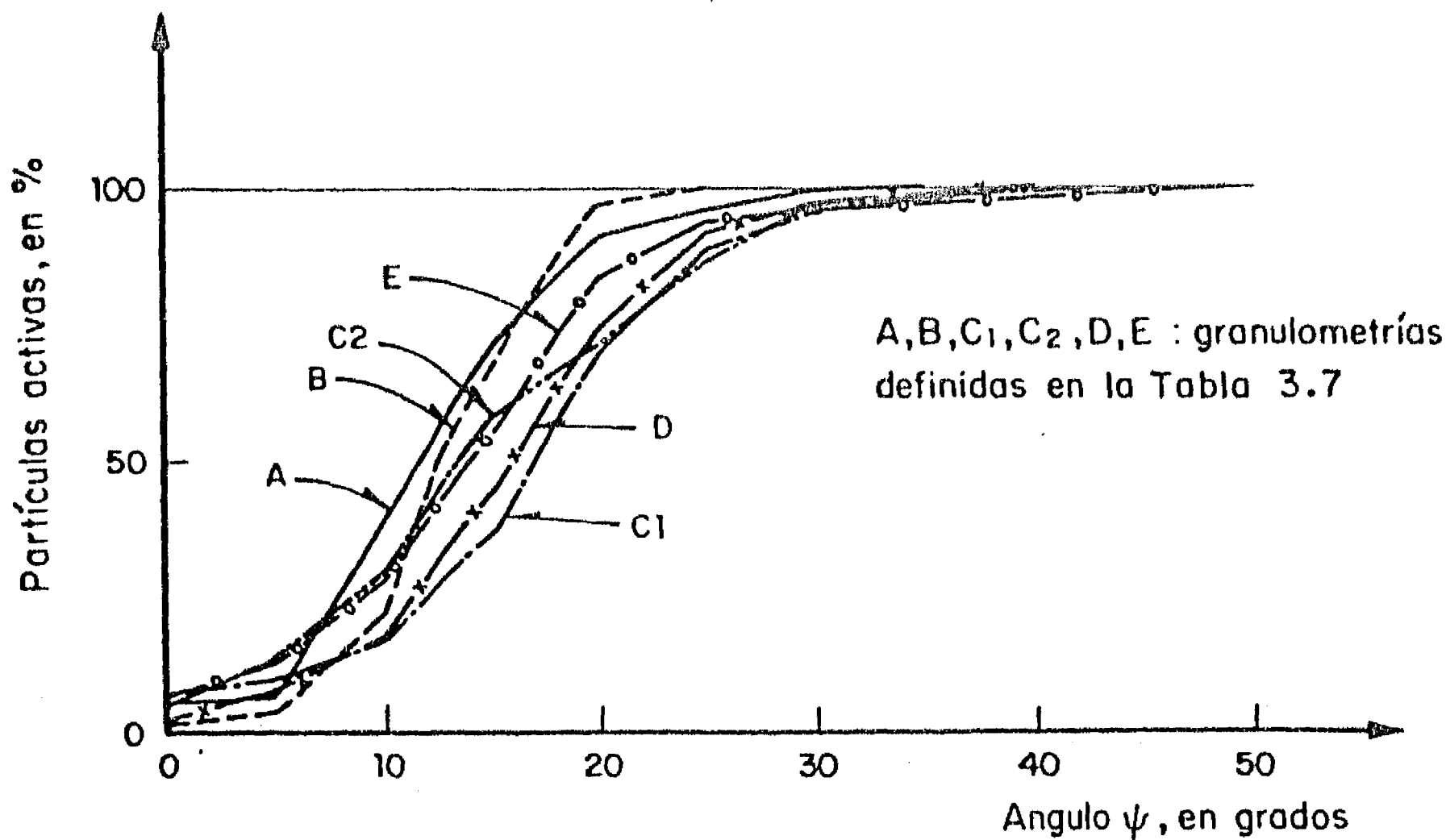


Fig 4.38 Partículas activas

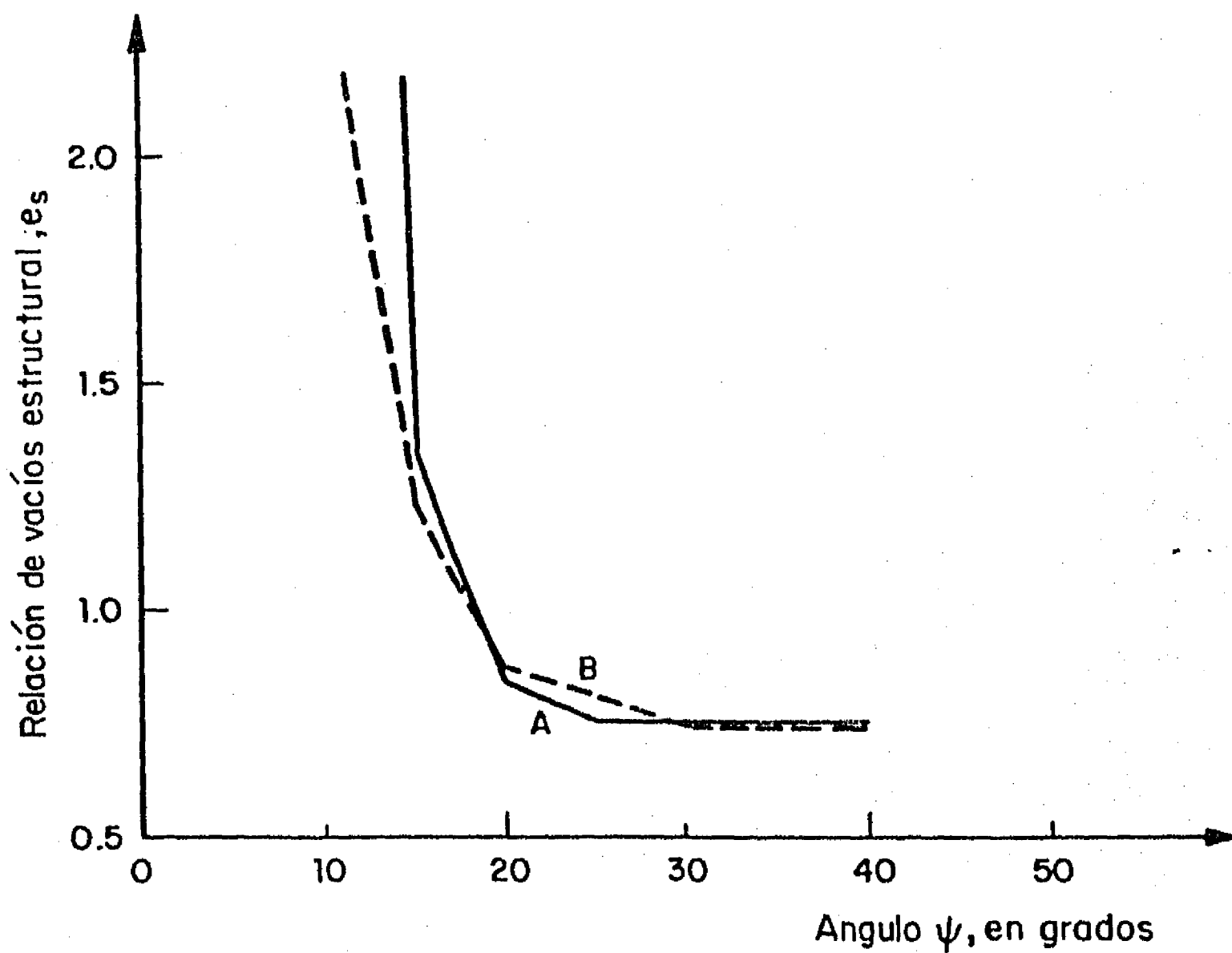


Fig 4.39 Relación de vacíos estructural. Estructuras A y B

inactivas, a condición de modificar la porosidad y ajustar los valores esperados de los diámetros y del número de contactos.

En el caso de estructuras bidimensionales de discos, el equivalente de la Ec 4.88 es (Anexo I) :

$$E_{\{P\}} = (\pi/3) E_{\{D\}}^2 \sigma / [(1-n) E_{\{D\}} E_{\{N_c\}}] \quad (4.91)$$

donde

$E_{\{N_c\}}$ Número de contactos por partícula en los granos intersecados por una recta

Los resultados dados por esta fórmula con la relación de vacíos estructural coinciden en forma satisfactoria con los obtenidos experimentalmente con discos de material fotoelástico por Lesser [1984].

4.6.3 Relaciones esfuerzo-deformación y resistencia

La influencia de los parámetros estructurales del medio granular sobre su comportamiento esfuerzo-deformación se manifiesta en múltiples formas a través de los resultados experimentales disponibles. Después de revisar brevemente estas evidencias, se intenta interpretar algunos de sus aspectos en términos de los fenómenos que se presentan al nivel de las partículas.

a) Principales resultados experimentales

- Comportamiento de medios granulares bajo compresión uniaxial o hidrostática

En la Fig 4.40 se presentan resultados típicos de pruebas odométricas sobre arena de Ottawa [Lambe y Whitman, 1972]. Las curvas presión-deformación obtenidas se caracterizan por presentar una concavidad hacia arriba para presiones bajas a moderadas, es decir una rigidez cada vez más marcada. Sin embargo, para presiones altas, la curva presenta un quiebre brusco al alcanzarse una presión crítica σ_c , después de lo cual se presenta un nuevo aumento progresivo de la rigidez. Solamente una parte de la deformación producida al aplicar la carga se recupera en descarga [Fig 4.41 ; Lambe y Whitman, 1972]. Además, al volver a cargar la arena hasta presiones superiores a la máxima, la curva presión-deformación es esencialmente la misma, como si no hubiera habido una descarga previa.

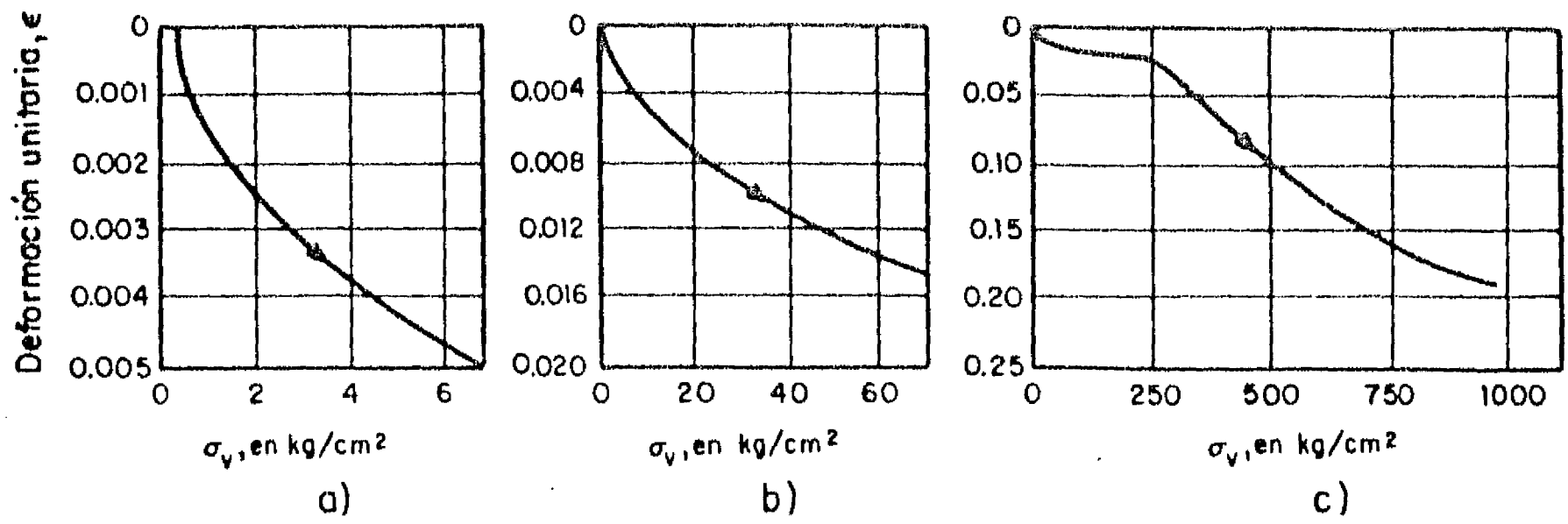


Fig 4.40 Curvas esfuerzo-deformación, en compresión confinada. Arena de Ottawa (Lambe y Whitman, 1972)

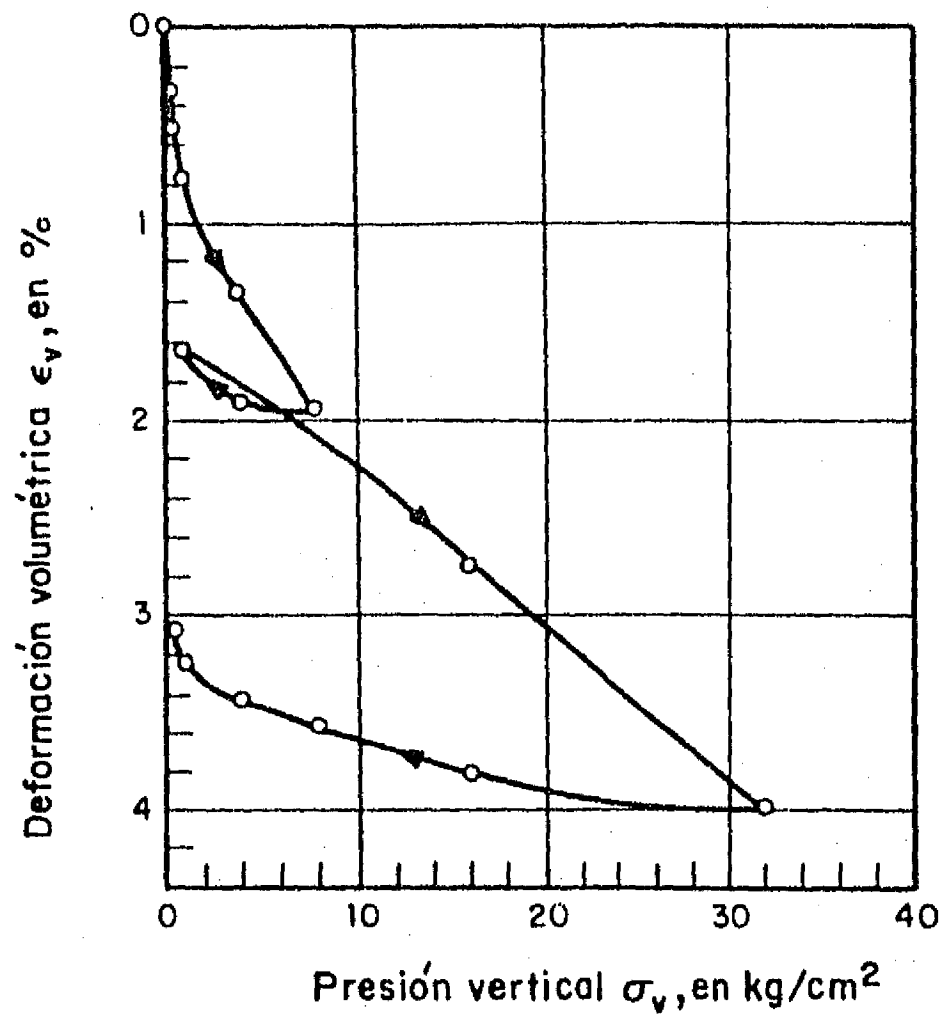


Fig 4.41 Resultados de un ensayo odométrico en una arena calcárea bien graduada (Lambe y Whitman, 1972)

Bajo compresión hidrostática, se observa un comportamiento análogo, que Juárez Badillo [1981] ha podido describir con las relaciones siguientes :

. Antes de la presión crítica

$$V_0 / V = 1 + (\sigma / \sigma^*)^\delta \quad (4.92)$$

. Después de la presión crítica

$$V_0 / V = (\sigma / \sigma_c)^\delta \quad (4.93)$$

donde

V_0 Volumen inicial

V Volumen final

σ_c Presión inicial

σ Presión de confinamiento aplicada

σ^* Presión característica (igual a la presión requerida para reducir V_0 a $V_0/2$)

δ Coeficiente de compresibilidad

Biarez [1961] mostró por otra parte que, en compresión hidrostática, un material depositado en el campo de la gravedad da lugar a deformaciones menores en sentido vertical que en sentido horizontal : el material presenta una anisotropía inherente. Sin embargo, esta anisotropía tiende a desaparecer después de varios ciclos de carga y descarga.

- Comportamiento de medios granulares en compresión triaxial

El comportamiento de los medios granulares en compresión triaxial se ilustra en forma esquemática en la Fig 4.42.

En el caso de materiales sueltos, la rigidez de la muestra disminuye progresivamente hasta la falla. Durante la prueba, la relación de vacíos decrece hasta alcanzar un valor estable. Se dice que el material presenta un comportamiento contractante.

En el caso de materiales compactos, el esfuerzo desviador que soporta el espécimen pasa por un máximo y tiende

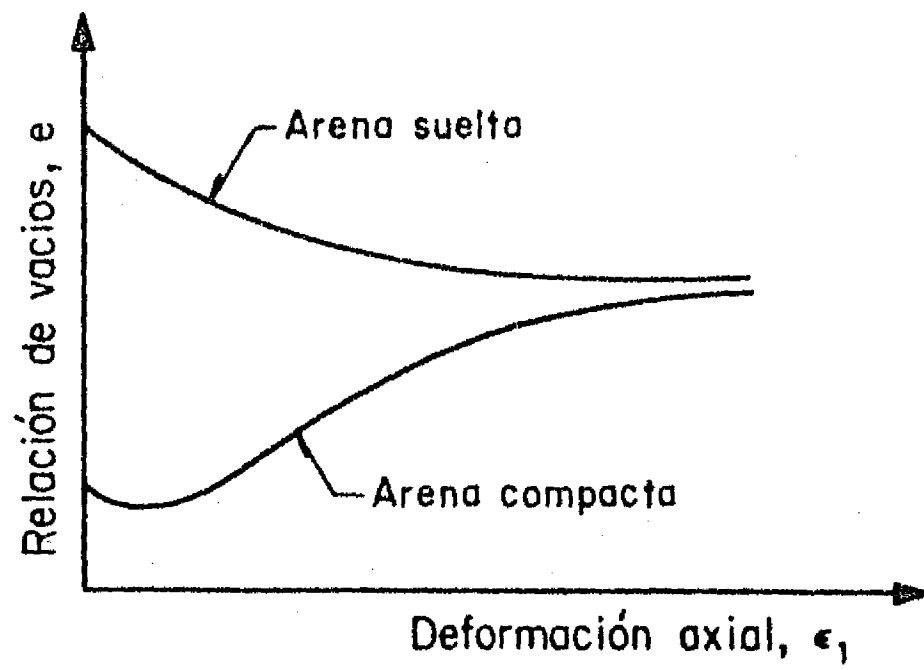
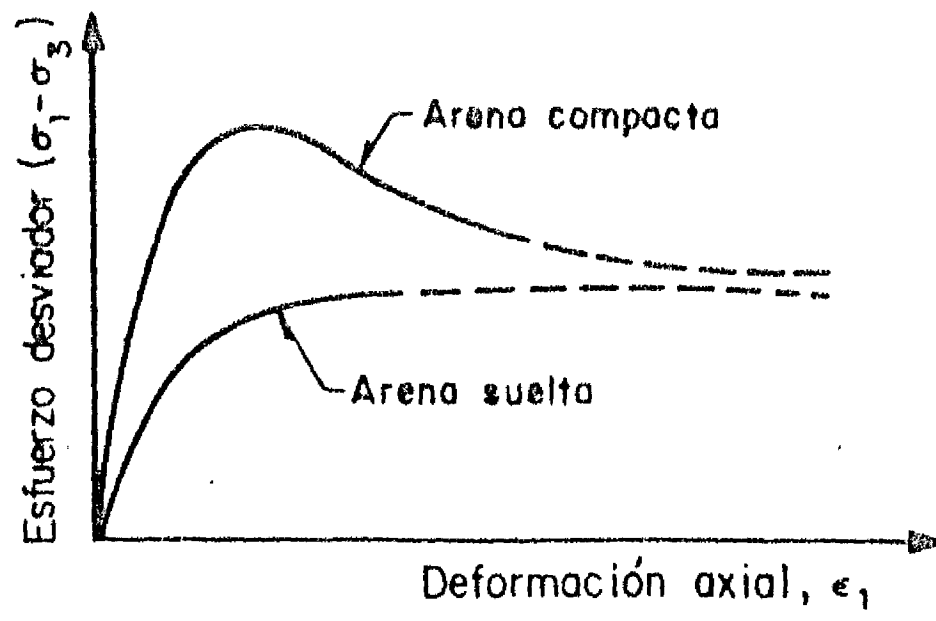


Fig 4.42 Comportamientos contractante y dilatante típicos

posteriormente hacia un valor residual del mismo orden de magnitud que el máximo alcanzado a partir de un estado suelto. Durante la prueba, después de una pequeña reducción, la relación de vacíos crece hasta alcanzar un máximo comparable al mínimo valor obtenido en el caso del material suelto. Se dice que el material presenta un comportamiento dilatante.

Casagrande [1936] llamó relación de vacíos crítica al valor de dicha relación abajo del cual un material tiene comportamiento dilatante. Se ha mostrado experimentalmente que la relación de vacíos crítica es una función decreciente de la presión confinante.

Se suelen representar los esfuerzos actuantes en la falla mediante círculos en el diagrama de Mohr (Fig 4.43). La envolvente de los círculos obtenidos para diferentes presiones confinantes permite definir la envolvente de falla o envolvente de Mohr. Para suelos granulares en estado suelto, se suele obtener una envolvente recta, por lo que su ecuación puede escribirse :

$$s = \sigma \tan \phi \quad (4.94)$$

donde

s Resistencia al corte

ϕ Ángulo de fricción interna del material

En el caso de materiales compactos, la curva de resistencia es concava hacia abajo, pero para fines prácticos suele asimilarse a una recta, por lo que la ley de resistencia resulta semejante a la anterior.

El ángulo de fricción depende de la compacidad y en menor grado de la forma de las partículas. Para presiones de confinamiento altas, las envolventes de los materiales sueltos y compactos tienden a coincidir.

Además de la resistencia última, en muchas situaciones resulta de interés el comportamiento esfuerzo-deformación bajo cargas menores que la requerida para provocar la falla. En la Fig 4.44 se representa una curva típica esfuerzo-deformación obtenida al aplicar varios ciclos de carga y descarga a un espécimen de arena [Biarez, 1961]. En esta figura se observa lo siguiente :

- El tramo de carga AB presenta una curvatura relativamente marcada y sólo en su parte inicial puede asemejarse a una recta.

- Al descargar el espécimen (tramo BC) una parte

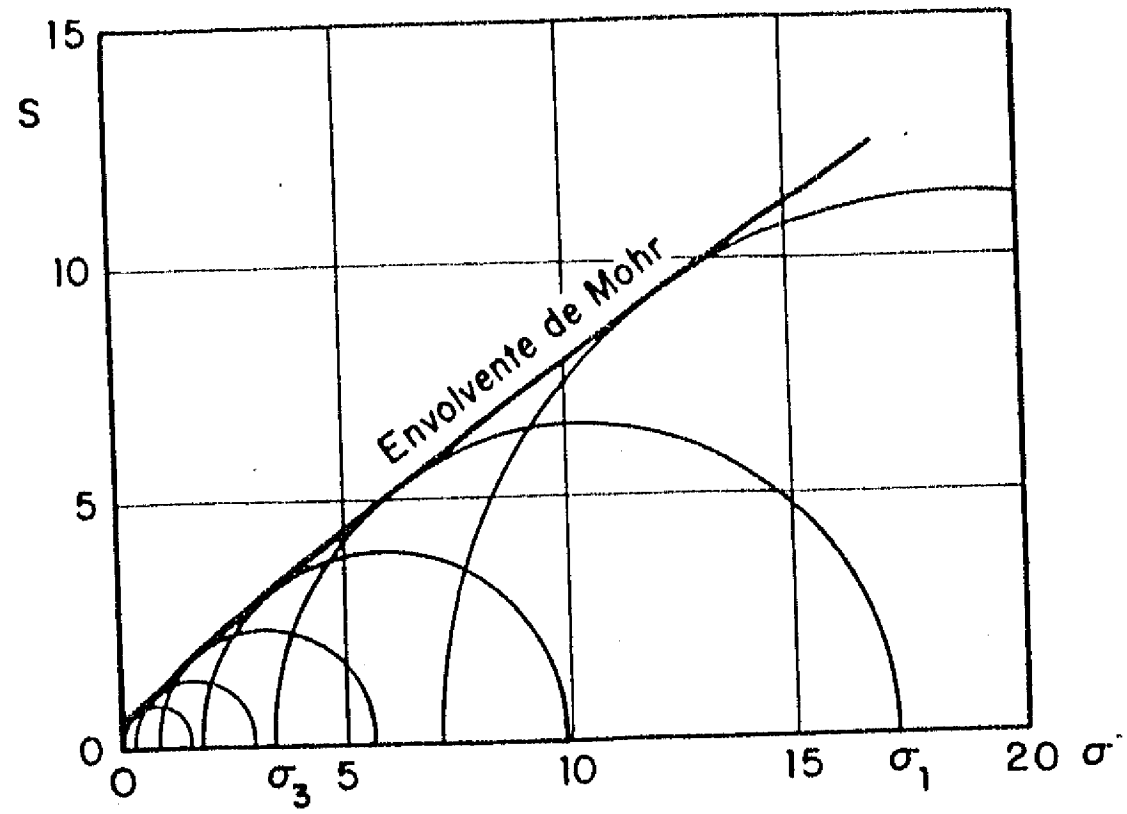


Fig 4.43 Envolvente de Mohr

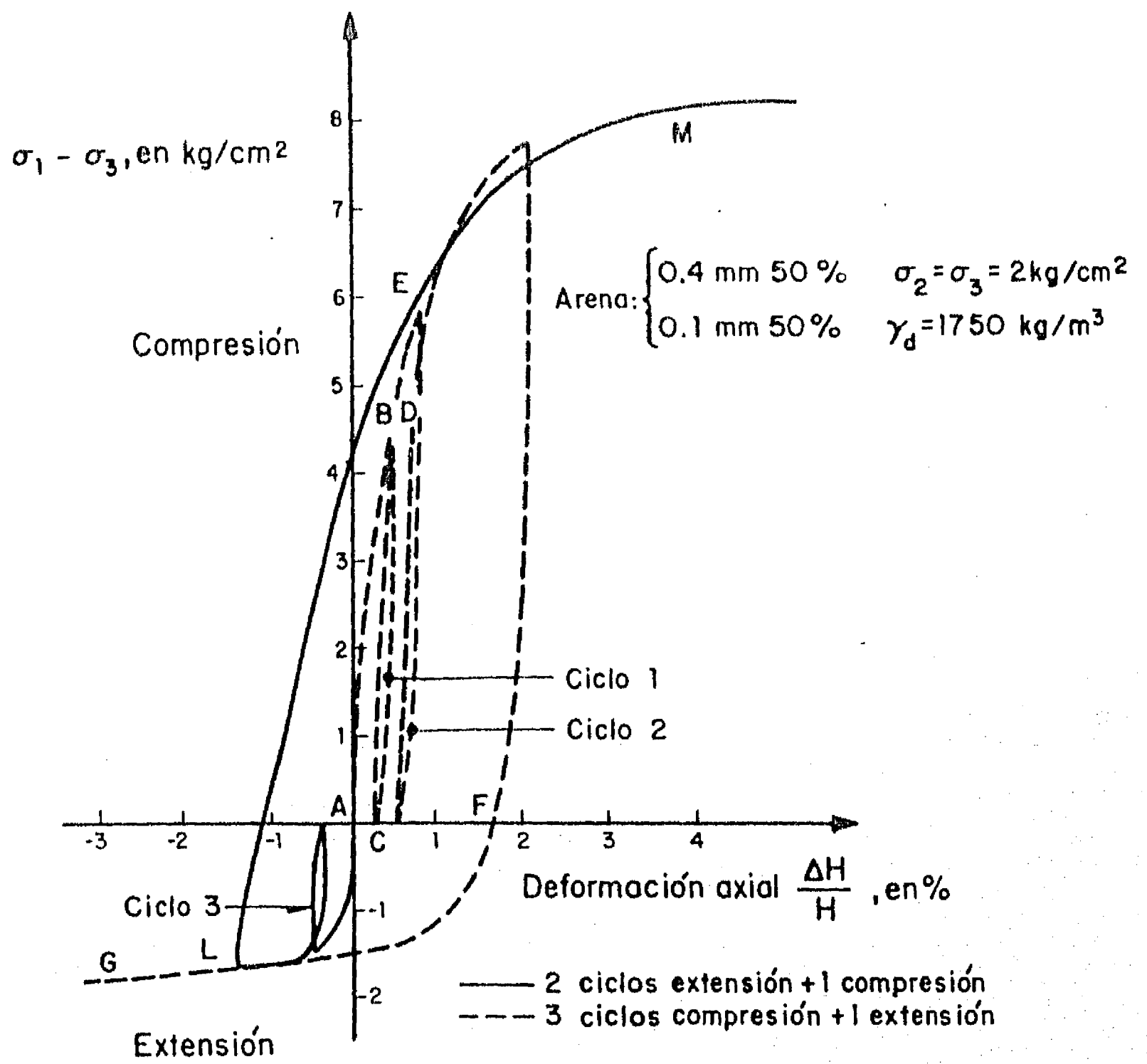


Fig 4.44 Relación esfuerzo-deformación de una arena, obtenida en una prueba triaxial (Biarez, 1961)

importante de las deformaciones es irreversible. La curvatura del tramo BC es poco pronunciada pero se acentúa para valores pequeños del esfuerzo desviador.

- La recarga del espécimen (tramo CD) induce deformaciones menores que las de la primera carga, la trayectoria esfuerzo-deformación casi coincide con el tramo de descarga. Aunque esta coincidencia no sea perfecta, es posible decir que la carga axial aplicada ha creado un dominio prácticamente elástico: para cargas axiales menores que la máxima aplicada las deformaciones pueden tomarse como reversibles.

- Una carga mayor que la aplicada (tramo DE) induce nuevamente deformaciones importantes, en gran parte irreversibles como lo muestran los ciclos de carga y descarga (ciclo 2).

- Si se reduce la carga axial hasta llegar a condiciones de extensión (presión confinante mayor que el esfuerzo vertical) se observa que el material presenta una gran deformabilidad (tramo FG) debida a la anisotropía que ha sido inducida por la historia previa de cargas (efecto Bauschinger).

- Lo mismo que en compresión, es posible crear un dominio elástico en extensión (ciclo 3). Al volver a pasar a compresión (tramo LM) el material muestra una deformabilidad mayor que la inicial (tramo AB). Es decir que una deformación en una dirección induce una mayor deformabilidad en las direcciones perpendiculares a la misma; además, los dominios elásticos que pueden haberse inducido previamente en estas últimas direcciones desaparecen.

- Comportamiento bajo sollicitaciones dinámicas

Bajo vibraciones que inducen solamente pequeñas deformaciones angulares, todos los suelos granulares presentan un decremento de volumen independientemente de su compacidad inicial [Faccioli y Reséndiz, 1975]. Bajo sollicitaciones que inducen grandes deformaciones de corte, el comportamiento dinámico es análogo al estático, es decir que puede ser contractante o dilatante.

Lo anterior tiene sus más significativas consecuencias cuando un material granular fino se encuentra saturado y las deformaciones se presentan en forma suficientemente rápida para que no pueda haber drenaje. Un comportamiento contractante implica en este caso el desarrollo de presiones de poro positivas y a la inversa la dilatancia conduce a la aparición de presiones de poro negativas. En el primer caso, puede presentarse una pérdida de resistencia que conduzca a la licuación.

Mulilis et al [1977] mostraron que la susceptibilidad a la licuación de una arena no solamente depende de la compactación del material y que se ve afectada en forma significativa por el método de preparación del espécimen. A misma compactación, los suelos simplemente depositados en el campo de la gravedad son más fácilmente licuables que los especímenes vibrados o compactados con pisón.

b) Mecanismos de deformación y resistencia al nivel de las partículas

Bajo sollicitaciones mecánicas, los medios granulares presentan deformaciones que pueden asociarse con algunos o varios de los cambios estructurales siguientes al nivel de las partículas:

- Deformación elástica de los granos
- Colapso de agrupaciones de granos metaestables
- Deslizamiento relativo de partículas por vencimiento de la fricción en sus puntos de contacto
- Giro con o sin deslizamiento de una partícula sobre otra
- Desaparición y creación de contactos por separación y acercamiento de partículas, respectivamente
- Cambios de orientación de partículas
- Rotura de partículas o alteración de su geometría y estado de superficie por desgaste

La importancia relativa de los diferentes mecanismos anteriores puede variar considerablemente con el estado inicial del material, el orden de magnitud de los esfuerzos alcanzados, etc. Una modelación de los fenómenos elementales al nivel de la partícula que permita deducir el comportamiento macroscópico del medio presenta por tanto dificultades considerables. Sin embargo, un análisis simplificado de los mecanismos anteriores permite entender ciertos aspectos del comportamiento de estos medios.

- Deformaciones elásticas de los granos

Biarez [1962] mostró que, en ausencia de deslizamientos, los grupos de partículas presentan un comportamiento elástico no lineal.

- Colapso de grupos de partículas metaestables

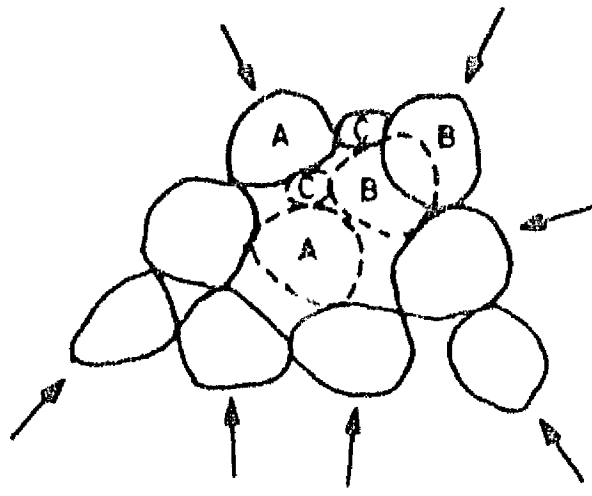


Fig 4.45 Colapso de una agrupación inestable de partículas

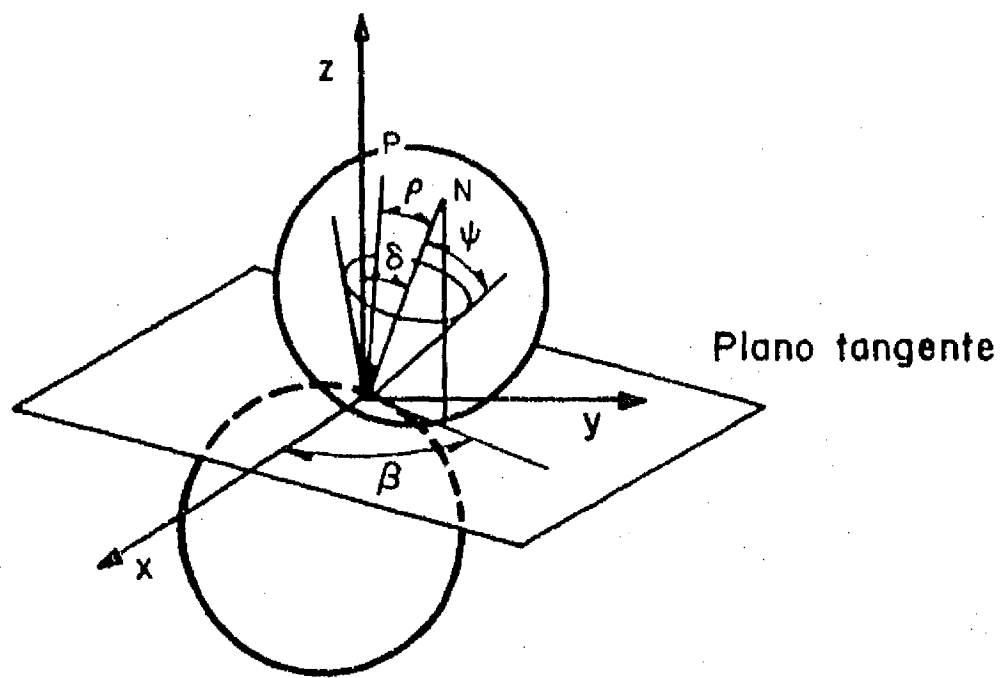


Fig 4.46 Cono de fricción en un contacto entre dos partículas

Las agrupaciones de partículas se llaman metaestables si unas cargas pequeñas son suficientes para provocar grandes desplazamientos de los granos. Estos colapsos generales o locales (Fig 4.45) contribuyen a las deformaciones de los medios granulares bajo compresión uniaxial, hidrostática o triaxial y en presencia de vibraciones. Obviamente, la contribución de este mecanismo es mas importante en materiales sueltos que en materiales densos. No parecen existir modelos cuantitativos de este fenómeno.

- Deslizamiento relativo de partículas por vencimiento de la fricción en los contactos

Varios autores han considerado que este mecanismo es el más importante, por lo menos en intervalos amplios de sollicitaciones, y han tratado de desarrollar modelos basados únicamente en el mismo.

La fuerza tangencial en un contacto no puede ser superior a la fricción dada por la expresión :

$$f = N \tan \psi \quad (4.95)$$

donde

N Componente normal de la fuerza de contacto P

ψ Angulo de fricción del material constitutivo de los granos

Suponiendo que el ángulo ψ es independiente de la fuerza normal, todas las fuerzas de contacto deben quedar dentro de un cono de fricción como el de la Fig 4.46. Si una fuerza llega a salir fuera del cono de fricción, el contacto es inestable y se produce un deslizamiento y una redistribución de las fuerzas de contacto en el medio.

La condición de deslizamiento en un contacto puede escribirse, llamando ρ el ángulo entre la normal al plano tangente y la fuerza de contacto :

$$\rho > \psi \quad \text{o} \quad \cos \psi > \cos \rho \quad (4.96)$$

pero, escribiendo el producto escalar de la fuerza de contacto P y de la normal al plano tangente, se tiene:

$$\cos \rho = [\text{sen } \delta \cos \beta F_x + \text{sen } \delta \text{sen } \beta F_y + \cos \delta F_z] / \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (4.97)$$

y habrá deslizamiento si $\cos \psi$ es mayor que la cantidad anterior.

Suponiendo que las componentes de las fuerzas de contacto coinciden con sus valores medios indicados en la Ec 4.79, la condición 4.96 se escribe:

$$\cos \psi > \frac{(\sigma_2 \text{sen}^2 \delta \cos^2 \beta + \sigma_3 \text{sen}^2 \delta \text{sen}^2 \beta + \sigma_1 \cos^2 \delta)}{\sqrt{(\sigma_2 \text{sen } \delta \cos \beta)^2 + (\sigma_3 \text{sen } \delta \text{sen } \beta)^2 + (\sigma_1 \cos \delta)^2}} \quad (4.98)$$

La ecuación anterior tiene las siguientes implicaciones:

- Si la sollicitación es hidrostática ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), no se presentan deslizamientos; las fuerzas de contacto coinciden con las normales a los planos tangentes. Se trata obviamente de una idealización extrema del comportamiento del medio puesto que, debido al carácter aleatorio de las orientaciones y magnitudes de las fuerzas de contacto, pueden presentarse deslizamientos aun bajo estas condiciones.

- Si la sollicitación es de tipo triaxial ($\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$) la Ec 4.98 se escribe:

$$\cos \psi > [1 + (\sigma_1/\sigma_3 - 1) \cos^2 \delta] / \sqrt{1 + (\sigma_1^2/\sigma_3^2 - 1) \cos^2 \delta} \quad (4.99)$$

y es fácil verificar (programa DESLIZ) que, como lo hizo notar Alberro [1984], los primeros contactos inestables se presentan al aumentar σ_1/σ_3 en una franja horizontal próxima a $\delta = \pi/4 + \psi/2$, cuyo ancho crece con el esfuerzo desviador. En extensión, los deslizamientos se inician cerca de $\delta = \pi/4 - \psi/2$ (Fig 4.47).

Si se acepta que el mecanismo de deslizamiento en los contactos es el que rige el comportamiento de los medios granulares y que ψ puede considerarse prácticamente constante en un intervalo de esfuerzos amplio, la estabilidad de los contactos no depende directamente de las componentes normal y tangencial de las fuerzas de contacto, sino de la relación entre ambas. Es por tanto previsible que los medios granulares tengan aproximadamente la propiedad siguiente [Weber, 1966]:

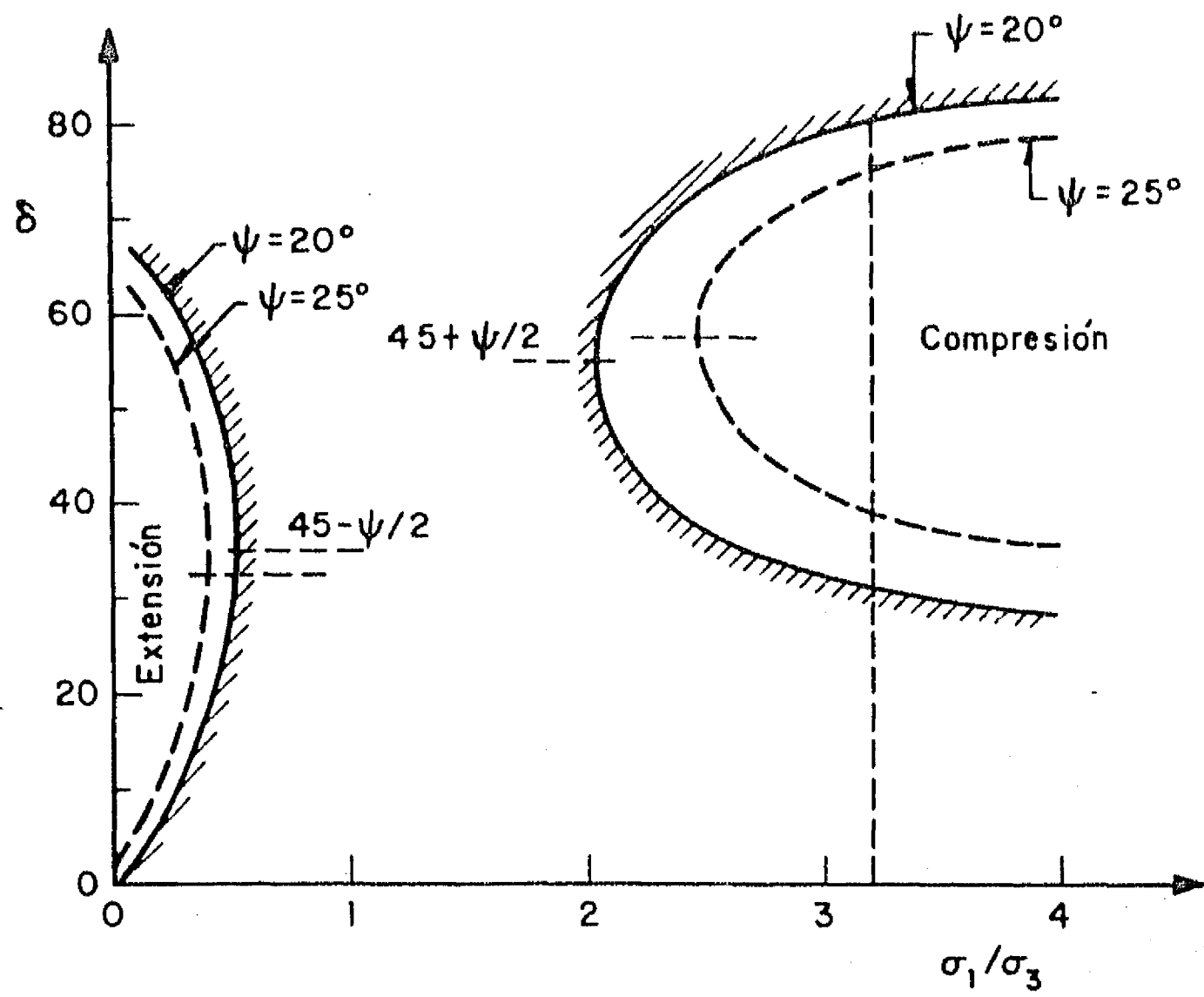


Fig 4.47 Zonas de deslizamiento de contactos en prueba triaxial

si un espécimen sometido a una trayectoria de esfuerzos $\sigma_{ij}(t)$ presenta una deformación $\epsilon_{ij}(t)$, el mismo espécimen sometido a una trayectoria de esfuerzos $\eta \sigma_{ij}(t)$, donde η es una constante, presentará la misma deformación $\epsilon_{ij}(t)$. Esta propiedad puede ser verificada para caminos de esfuerzos usuales con materiales sueltos. En la Fig 4.48 se muestra que si se presentan en una misma gráfica los resultados de ensayos triaxiales realizados con diferentes presiones de confinamiento σ_3 , poniendo en el eje de las ordenadas la cantidad $(\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_3$ y en las abscisas la deformación axial registrada, se obtiene efectivamente un haz de curvas relativamente angosto, lo que además explica que la envolvente de falla en el plano de Mohr sea aproximadamente una recta.

En la falla, las condiciones cinemáticas implican que los deslizamientos se presenten según la dirección correspondiente al movimiento general y no necesariamente según la dirección impuesta por la orientación de los esfuerzos principales implícita en la Ec 4.99. La experiencia muestra que en materiales compactos la superficie de falla es aproximadamente plana. Si se admite que los contactos involucrados en el deslizamiento tienen planos tangentes con una orientación al azar, $\Gamma(\delta, \beta) = 1/(4\pi)$, es posible establecer por integración [Caquot, 1949] que el ángulo aparente de fricción puede expresarse como sigue:

$$\tan \phi = (\pi/2) \tan \psi \quad (4.100)$$

La experiencia confirma aproximadamente esta relación para materiales con partículas equidimensionales.

- Giro, con o sin deslizamiento, de una partícula sobre otra

La contribución de este mecanismo a la deformación del medio y a la generación de la anisotropía bajo carga, aunque mal conocida, puede ser importante. Cundall [1980] mostró que, en ciertas condiciones geométricas, los discos pueden rodar bajo el efecto de fuerzas muy pequeñas. Sin embargo, en medios tridimensionales, las partículas están sujetas a un mayor número de restricciones y es más difícil que se den las condiciones para que los granos puedan girar.

- Desaparición y creación de nuevos contactos

Una consecuencia indirecta de los desplazamientos y giros de los granos es la desaparición y creación de nuevos contactos entre partículas por separación o acercamiento entre ellas. Este proceso conduce a una evolución continua de la posición y número de contactos durante el proceso de deformación. Obviamente, los contactos que presentan la orientación más favorable respecto al tensor de esfuerzos

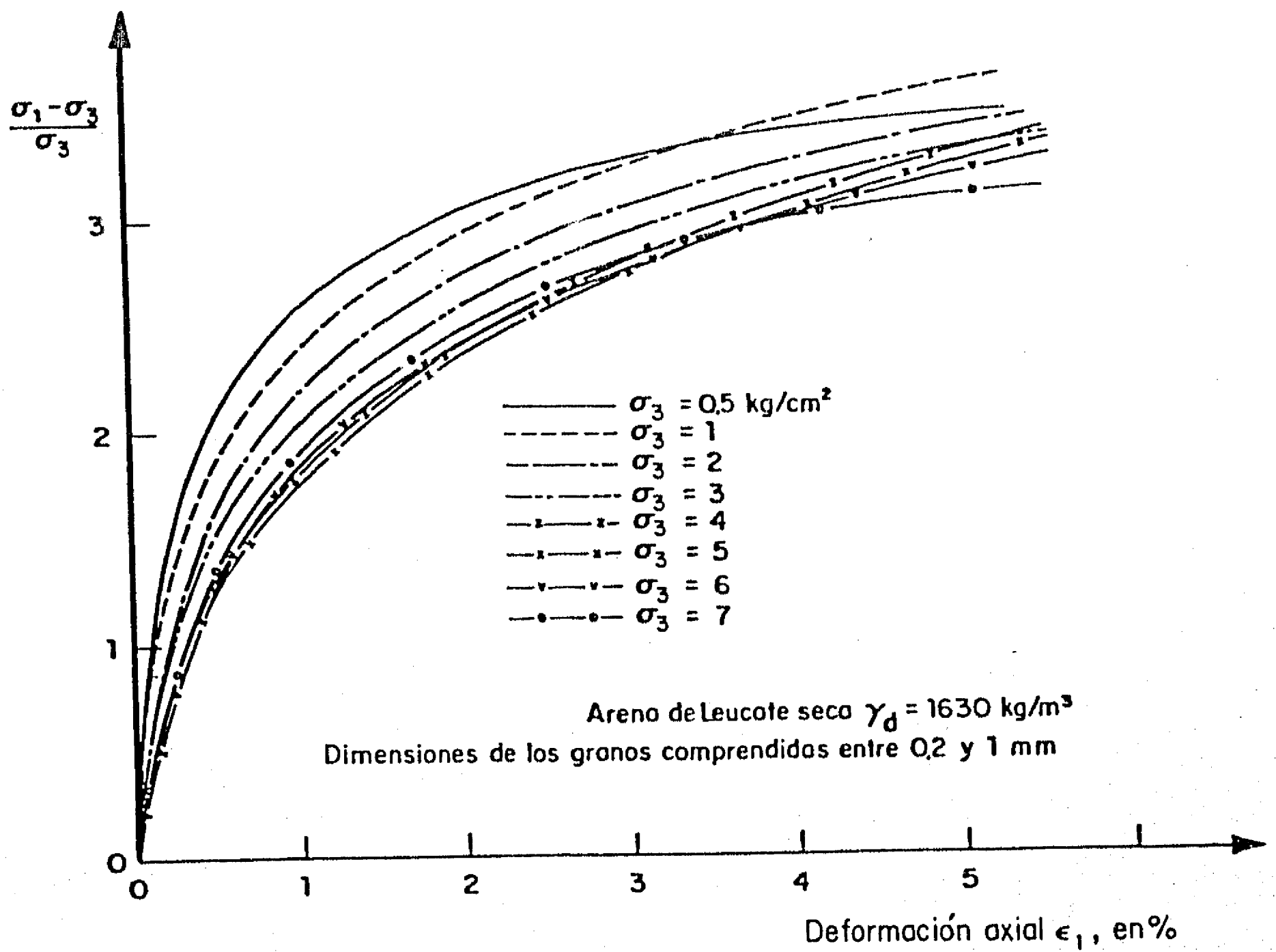


Fig 4.48 Curvas esfuerzo-deformación para diferentes presiones de confinamiento (Weber, 1966)

aplicado son los que tienden a perdurar. El resultado de este proceso selectivo, que se podría calificar de Darwiniano, es la anisotropía inducida que se manifiesta en la relación esfuerzo deformación y que geoméricamente se refleja en una distribución $\Gamma(\delta, \beta)$ no uniforme, con concentración de planos tangentes según las direcciones perpendiculares a los esfuerzos principales y en particular al esfuerzo principal mayor (Fig 3.9). Este proceso conduce a una profunda alteración de la estructura del material puesto que se introduce en ella una orientación preferencial de los planos tangentes, la cual, de acuerdo con lo visto para estructuras de discos y esferas conduce a una variación de la porosidad y del número de contactos por partícula (véase por ejemplo la Fig 3.24). Se puede por tanto decir que este proceso es el que origina la dilatación que presentan los materiales inicialmente compactos.

- Cambios de orientación de las partículas

En el caso de partículas no equidimensionales, los deslizamientos y giros de los granos tienen el efecto adicional de favorecer una orientación del plano de mayor estabilidad de cada partícula perpendicularmente al esfuerzo principal mayor. La anisotropía resultante se refleja en la función $f_{\theta}(u)$ pero también en $\Gamma(\delta, \beta)$.

- Rotura de partículas

Marsal ha mostrado la importancia que puede tener la rotura de partículas en el mecanismo de deformación de un medio granular sometido a presiones altas. La rotura de los granos permite explicar en particular los quiebres observados en las curvas esfuerzo-deformación en compresión confinada (Fig 4.40).

Para evaluar la posibilidad de rotura de partículas dentro del medio bajo determinados esfuerzos, las fuerzas de contacto pueden compararse con la resistencia de los granos. Esta resistencia puede expresarse, de acuerdo con los experimentos de Marsal, como:

$$F_a = \eta D^{\lambda} \quad (4.101)$$

donde

η y λ son características de la roca.

En rigor, debe compararse la máxima fuerza de contacto $F_{máx}$ que actúa en una partícula dada con la resistencia anterior. Tanto la resistencia como la fuerza de contacto máxima son variables aleatorias por lo que la probabilidad de rotura de

una partícula es [Auvinet y Marsal, 1975] :

$$P\{F_{m\acute{a}x} > \bar{F}_a\} = \int_0^{\infty} f_{F_{m\acute{a}x}}(a) F_{\bar{F}_a}(a) da \quad (4.102)$$

donde

$f_{F_{m\acute{a}x}}(a)$ Densidad de probabilidad de la fuerza de contacto máxima

$F_{\bar{F}_a}(a)$ Función de distribución de la resistencia

La experiencia muestra que las partículas más grandes son las que se rompen primero. Lo anterior puede explicarse por la existencia de partículas pequeñas inactivas y la concentración de fuerzas en las más grandes a consecuencia de la formación de cadenas de transmisión de esfuerzos dentro del medio [Dantu, 1968]. Tomando en cuenta que las cadenas se desarrollan en forma lineal, es lógico pensar que la distribución de fuerzas se haga entre los diferentes diámetros de acuerdo con la distribución granulométrica unidimensional $F_{1D}(d)$ en la que la proporción de partículas grandes es mucho mayor que en la granulometría tridimensional.

A pesar de algunos avances [Alberro, 1984], este tema queda ampliamente abierto a la investigación.

c) Simulación numérica del comportamiento de los medios granulares

Es posible reproducir en forma cualitativa el comportamiento mecánico de un medio granular simulando las transformaciones sucesivas que sufren los parámetros estadísticos estructurales del medio bajo las sollicitaciones externas.

Un modelo de este tipo, aplicable a medios bidimensionales, se presenta en el Anexo I. El modelo toma en cuenta el deslizamiento de los contactos por vencimiento de la fricción y la generación progresiva de la anisotropía por redistribución de la orientación de los planos tangentes en los contactos hacia inclinaciones menos sensibles a los deslizamientos. No incluye el efecto de las deformaciones elásticas ni la rotura de los granos.

Las fuerzas de contacto se consideran con dirección aleatoria. Se acepta que el ángulo que forman estas fuerzas con la normal al plano tangente en el contacto tiene una densidad de probabilidad gaussiana con valor medio definido por la Ec 4.97. Las deformaciones se calculan acumulando los

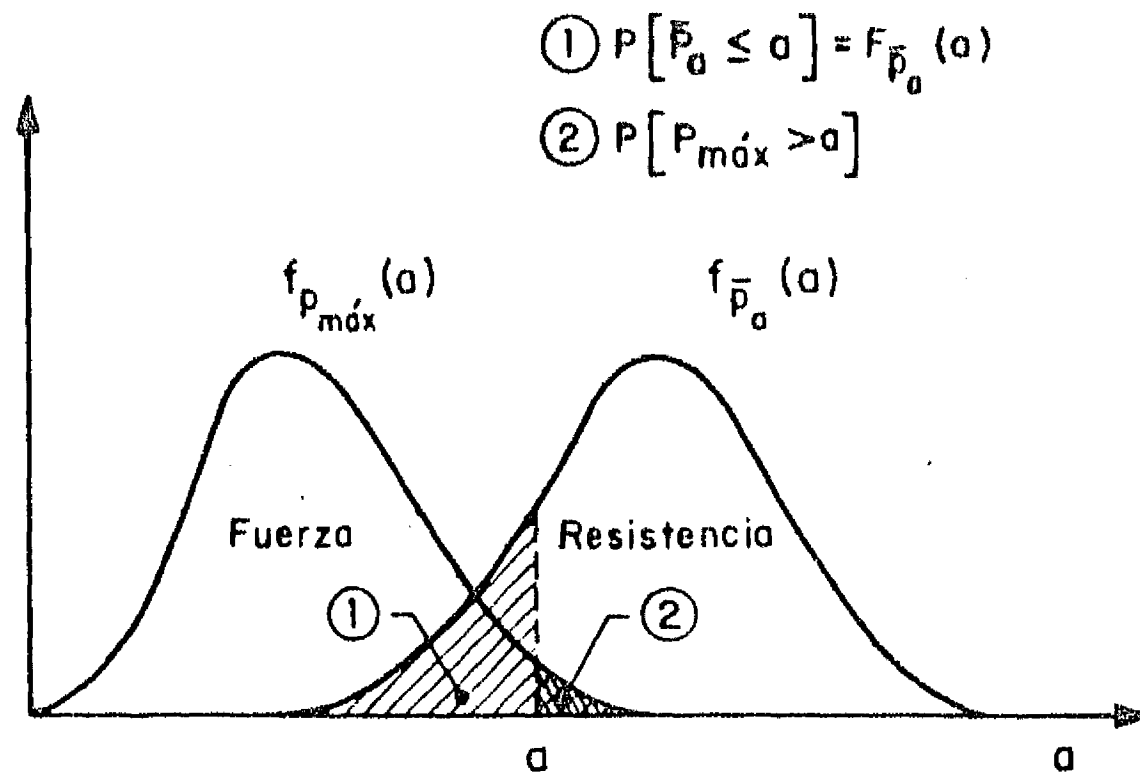


Fig 4.49 Probabilidad de rotura de una partícula (Ec 4.102)

deslizamientos en los contactos con base en consideraciones análogas a las de Horne [1965] (Anexo I).

En la Fig 4.50 se muestra la curva esfuerzo-deformación obtenida por simulación de una trayectoria de esfuerzos que incluye varios ciclos de carga y descarga. Los efectos de endurecimiento a la deformación y de memoria comentados en relación con la Fig 4.44 se reproducen en forma satisfactoria. La dilatancia puede reproducirse con el modelo introduciendo en él una ley de variación de la porosidad con el grado de orientación de los planos tangentes en los contactos. Sin embargo, se cuenta actualmente con pocos elementos para definir una ley de este tipo y este es un tema que requiere mayor investigación.

El modelo sugiere en forma convincente que la memoria histerética de un medio granular se localiza esencialmente en los cambios estructurales locales que conducen a la modificación de la densidad de probabilidad de la orientación de las fuerzas de contacto. En efecto, resulta difícil explicar los efectos de memoria exclusivamente en términos de la alteración de la densidad de probabilidad $\Gamma(\delta, \beta)$ de la orientación de los planos tangentes en los contactos. La eliminación arbitraria en el modelo de la redistribución de esta orientación afecta poco el comportamiento del material. A la inversa, la consideración exclusiva de una redistribución de planos tangentes, con fuerzas de contacto deterministas, no permite reproducir el comportamiento histerético.

d) Influencia de la anisotropía inherente

- Partículas equidimensionales

El proceso de formación de un suelo granular conduce generalmente a una estructura anisótropa. Esta anisotropía puede presentarse aun en materiales con partículas circulares o esféricas como lo muestran los resultados obtenidos con el modelo de simulación numérica del inciso 3.3.4. Una distribución $\Gamma(\delta, \beta)$ no uniforme de la orientación de los planos tangentes en los contactos conduce a una deformabilidad inicial que depende de la orientación de los máximos y mínimos de esta función respecto a los esfuerzos principales aplicados. Para condiciones de compresión un máximo de la función $\Gamma(\delta, \beta)$ cercano a $\delta = \pi/4 + \psi/2$ conduce por ejemplo a un alto porcentaje de contactos deslizantes y a una baja rigidez. Lo anterior puede simularse fácilmente en forma cualitativa con el modelo descrito en el inciso anterior. Además, la formación del medio puede dar lugar a distribuciones iniciales asimétricas de la orientación de las fuerzas de contacto, que también contribuyen a alterar la rigidez inicial del material.

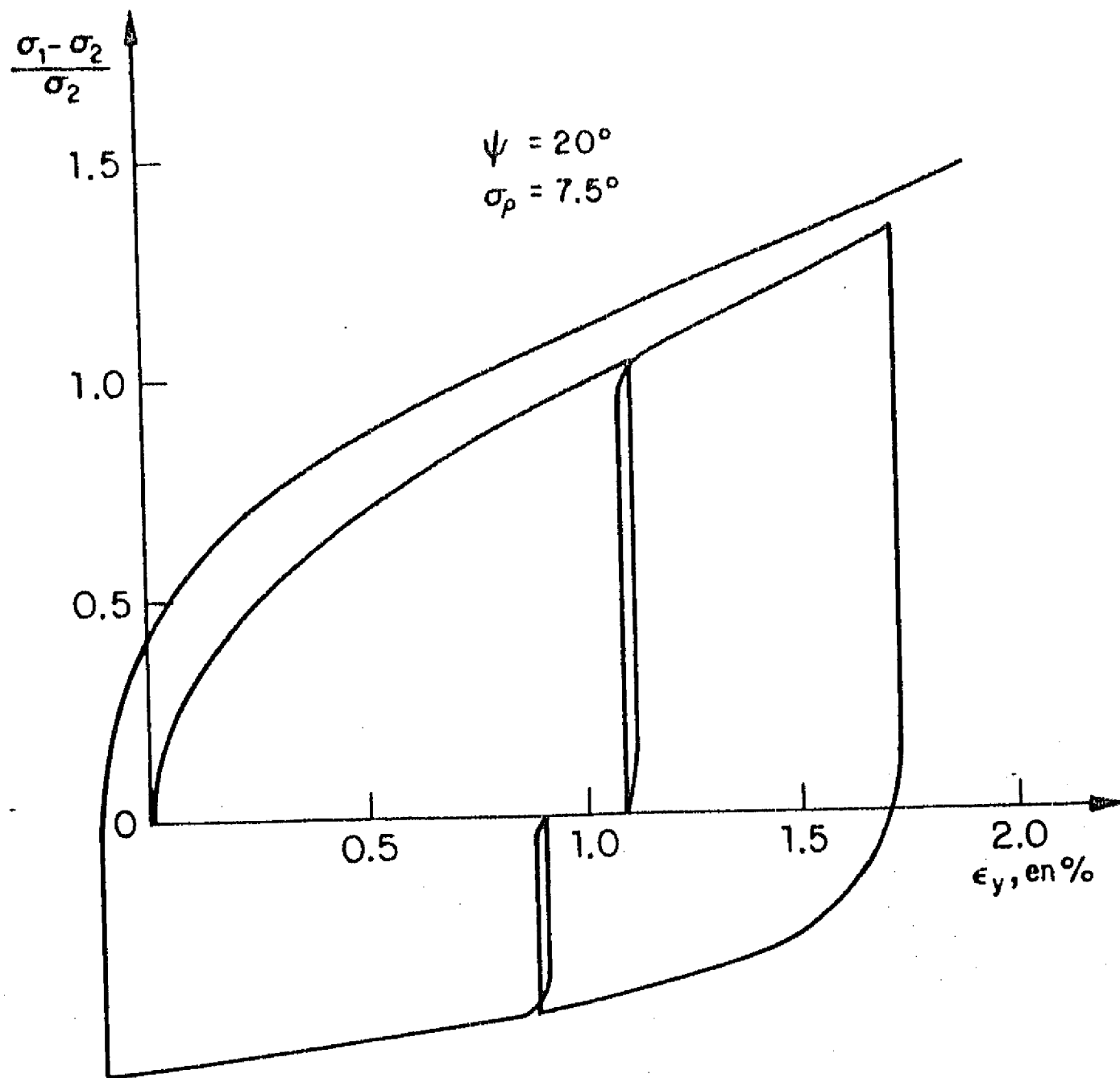


Fig 4.50 Simulación numérica del comportamiento mecánico de un medio granular bidimensional

Por inspección de la estructura, es posible detectar la anisotropía en la función $\Gamma(\delta, \beta)$ pero no existe un método para deducir de la estructura la anisotropía asociada a la orientación de las fuerzas de contacto.

Cabe mencionar también que, principalmente en el caso de los suelos bien graduados, la anisotropía existente en las funciones $\Gamma(\delta, \beta)$ (Figs 3.61 y 3.63) puede reflejar simplemente la existencia de partículas ociosas sin que a ello corresponda necesariamente un comportamiento mecánico anisótropo. En efecto, la existencia de un comportamiento de este tipo depende de la orientación de los planos tangentes y fuerzas de contacto únicamente en las partículas activas.

La predicción del grado de comportamiento anisotrópico de un material a partir de la observación de su geometría plantea por tanto todavía serias dificultades.

b) Partículas no equidimensionales

La influencia de la anisotropía inherente asociada a una orientación preferencial de partículas no equidimensionales según determinado plano puede también interpretarse en términos de la orientación de los planos tangentes en los contactos. El comportamiento mecánico en prueba triaxial dependerá fuertemente del ángulo $\pi/2 - \theta$ entre este plano y el esfuerzo principal mayor. Se puede por ejemplo considerar el caso extremo en el que todas las partículas están orientadas según el mismo plano (Fig 3.77). En este caso, la función $\Gamma(\delta, \beta)$ define un volumen de revolución con dos lóbulos alrededor del eje de intersección del plano de orientación de las partículas y del plano vertical normal al anterior. El ángulo de inclinación más desfavorable desde el punto de vista de la deformabilidad y resistencia es obviamente el que conduce a la mayor proporción de contactos deslizantes. La inclinación más desfavorable se obtiene por tanto haciendo coincidir el eje longitudinal del volumen de revolución con el ángulo $\pi/4 + \psi/2$. En la Fig 4.51 se muestra un corte del volumen de revolución según su eje longitudinal, con la inclinación más crítica así definida. Los resultados experimentales obtenidos por Konishi [1982] en el caso de partículas bidimensionales elipsoidales confirman lo anterior puesto que muestran que la resistencia máxima y la tasa de dilatación pasan por un mínimo cuando el ángulo de inclinación es del orden de 60 grados para un ángulo de fricción interparticular de 26 grados.

c) Anisotropía inherente y comportamiento bajo cargas cíclicas.

La variación de la susceptibilidad de las arenas a la licuación con el método de preparación de los especímenes puesta en evidencia por Mulilis [1977] puede también asociarse

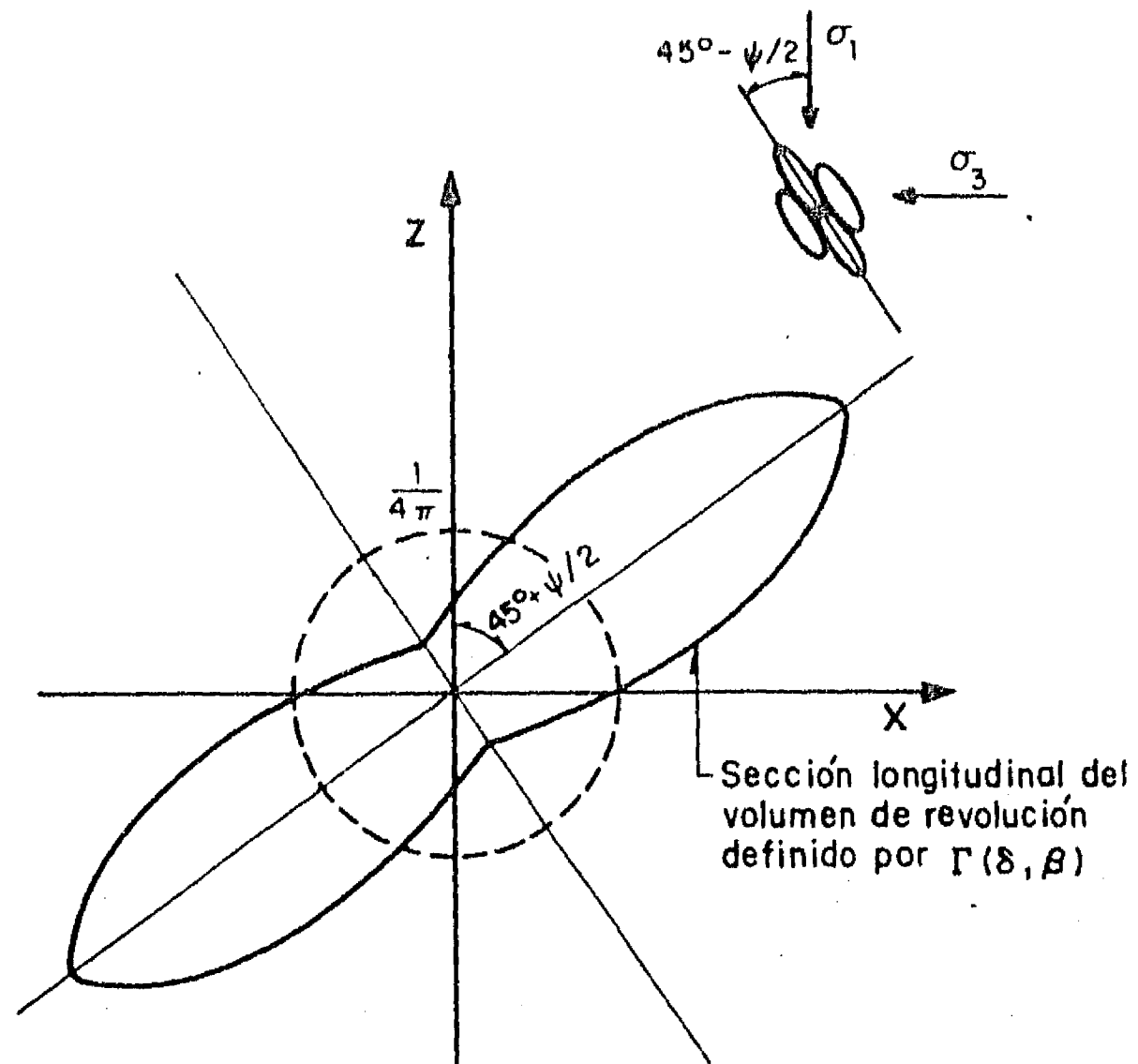


Fig 4.51 Orientación preferencial de partículas más desfavorable en prueba de compresión triaxial

con la anisotropía geométrica. El propio Mulilis observó que, a porosidad constante, la susceptibilidad a la licuación es menor cuando los planos tangentes en los contactos entre partículas están orientados perpendicularmente al esfuerzo principal mayor, lo que de acuerdo con lo visto anteriormente disminuye la deformabilidad del medio. Por su parte, Seed [1975] mostró que las estructuras menos estables corresponden a una inclinación preferencial de los planos tangentes de aproximadamente 45 grados respecto a la sollicitación, lo que resulta también lógico tomando en cuenta lo expuesto en los incisos anteriores.

4.6.4 Conclusiones

El estudio de la estructura de los medios granulares permite explicar varios aspectos del comportamiento mecánico de estos materiales. Este enfoque constituye una alternativa atractiva al ajuste de modelos matemáticos de comportamiento al nivel macroscópico con parámetros cuyo significado físico no es siempre claro.

Sin embargo, existen muchos puntos oscuros en las propiedades geométricas de los medios granulares que dificultan el paso de la etapa explicativa cualitativa a modelos cuantitativos. Entre estos destacan las relaciones entre porosidad, número de contactos y grado de anisotropía en la orientación de los planos tangentes en los contactos, que rigen los cambios volumétricos.

Por otra parte, es evidente que no puede esperarse desarrollar una teoría de los medios granulares basada exclusivamente en consideraciones geométricas y que deben ampliarse los conocimientos sobre otros aspectos igualmente importantes como la fricción intergranular y la resistencia de las partículas a la rotura, entre otros.

5. CONCLUSIONES

5. CONCLUSIONES GENERALES

La estructura de los medios granulares puede describirse en forma precisa a través de una serie de parámetros estadísticos complementarios de los tradicionales conceptos de porosidad y distribución granulométrica. Se mostró en la primera parte de este trabajo que estos parámetros pueden definirse en forma simple recurriendo a la teoría de la probabilidad.

Para la determinación práctica de estos parámetros, existen técnicas cada vez más eficientes. Así, con el desarrollo de los métodos de análisis automatizado de imágenes, es previsible que el estudio de la estructura de los materiales granulares, hasta ahora extremadamente laborioso, podrá realizarse en el futuro en forma rutinaria y con gran rapidez. La simulación en la computadora de la estructura constituye otro enfoque útil para este tipo de estudios y se desarrollará también en el futuro.

Es por tanto oportuno prestar cada vez más atención a las relaciones que existen entre propiedades y estructura.

Se mostró en este trabajo que existen bases teóricas adecuadas para definir el tamaño mínimo de las muestras que deben someterse al análisis estructural con objeto de establecer este tipo de relaciones. Los resultados presentados permiten además separar en forma objetiva las variaciones

locales de la estructura de los cambios debidos a la heterogeneidad.

Asimismo, se dieron algunos elementos para la formación de estructuras artificiales compactas, por mezclado de varios materiales granulares, que deberían ayudar a usar en forma más eficiente los materiales disponibles para las aplicaciones geotécnicas.

Aun cuando el tema merezca investigaciones mucho más detalladas, se mostró que es posible asociar la permeabilidad de un material granular con su estructura a través de relaciones diferentes de las tradicionales y tomando en cuenta la distribución de tamaños de los poros. El modelo simple de las propiedades filtrantes de estos materiales desarrollado en este estudio constituye, asimismo, un marco de referencia útil para investigaciones futuras.

Algunos de los aspectos de las relaciones entre estructura y comportamiento mecánico pueden ser explicados y modelados en forma satisfactoria. Es posible afirmar en particular que los efectos de memoria que se aprecian en suelos granulares tienen su origen principalmente en las variaciones de la densidad de probabilidad de la orientación de las fuerzas de contacto mientras que los cambios volumétricos están asociados con la orientación de los planos tangentes en los contactos entre partículas. Sin embargo, pasar del nivel cualitativo al cuantitativo presenta todavía grandes dificultades.

El camino hacia el desarrollo de una teoría completa de los medios discretos que permita describir y explicar todos los aspectos de su comportamiento es todavía largo.

6. REFERENCIAS

6. REFERENCIAS

Alberro, J., 1980, "Estructura discontinua y propiedades mecánicas de los suelos granulares", Informe interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, México

Alberro, J. y Magaña del Toro, R., 1981, "Relación de vacíos estructural de un suelo granular", Informe interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, México

Alberro, J., 1982, "Distribución estadística de las fuerzas de contacto en un medio granular", Informe interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, México

Alberro, J., 1984, Comunicación personal

Arthur, J.R.F. and Menzies, B.K., 1972, "Inherent anisotropy in a sand", Géotechnique 22, No 1, London, pp.115 a 126, Great Britain

Athanasίου-Grivas, D. and Harr, M.E., 1982, "Particle contacts in discrete materials", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol 106, GT5, pp. 559 a 564, USA

Auvinet, G., 1972, "Generation of granular media by computer", Fifth Panamerican Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Buenos Aires, Argentina

Auvinet, G. y Marsal, R.J., 1972, "Statistical model of grain breakage", Fifth Panamerican Conference on Soils Mechanics and

Foundation Engineering, Buenos Aires, Argentina

Auvinet, G. , 1978, "Estructura intersticial de los medios granulares", Revista Latinoamericana de Geotecnia, Vol IV, No 4, Caracas, Venezuela

Auvinet, G. , 1981, "Impermeabilization of a 300-hectare cooling pond", ASTM, STP 746, Philadelphia, USA

Auvinet, G. , 1982, "Conceptos y técnicas recientes en materia de filtros para usos geotécnicos", Simposio sobre Uso de Medios Filtrantes en Ingeniería Sanitaria y Mecánica de Suelos, SMMS, Mexico, D.F

Auvinet, G. , 1982, "In place estimation of coarse soils gradation", Seventh International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton, Canada

Auvinet, G. y Hernandez, R., 1984, "Evaluación de bancos de préstamo de materiales granulares a partir de cortes o sondeos", Informe interno del Instituto de Ingeniería, UNAM, Mexico

Auvinet, G. , 1984, "Procesos estocásticos - Notas para estudiantes del curso", División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, Mexico

Benjamin, J.R. and Cornell, A.C., 1970, "Probability, statistics and decision for civil engineers", Mc Graw Hill, New York, USA

Bernal, J.D. and Mason, J., 1960, "Coordination of randomly packed spheres", Nature, No 188, pp. 910-911, USA

Bertram, G.E., 1940, "An experimental investigation of protective filters", Harvard Soil Mechanics Series No. 7, Harvard University, Cambridge, USA

Biarez, J., 1961, "Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents", Thèse doctorale, Université de Grenoble, France

Biarez, J., et al, 1969, "Rhéologie des sols", Proceedings, Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, México

Bodziony, J., 1983, "On certain geometric characteristics of a single convex grain", Advances in the Mechanics and the Flow of Granular Materials, edited by M. Shahinpoor, Vol 1, Gulf Publishing Co., Houston, USA

Borowicka, H., 1973, "Rearrangement of grains by shear test with sand", Eighth International Conference on Soil Mechanics

and Foundation Engineering, Moscou, Vol. 1 , pp. 71 a 77, URSS

Bouvard, D., 1982, "Rhéologie des milieux pulvérulents : Etude expérimentale et identification d'une loi de comportement", These doctorale, Université de Grenoble, France

Cambefort, H., 1964, "Injection des sols, Tome 1, Principes et méthodes", Eyrolles, Paris, France

Casagrande, A., 1936, "Characteristics of cohesionless soils affecting the stability of slopes and earthfills", Journal of the Boston Society of Civil Engineers, January, pp. 257-276, USA

Casagrande, A., 1975, "Liquefaction and cyclic deformation of sands, a critical review", Fifth Panamerican Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Buenos Aires, Argentina

Caquot, A., 1937, "Rôle des matériaux inertes dans le béton", Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France, Fascicule No 4, Juillet-Août, France

Caquot, A., 1949, "Traité de mécanique des sols", Gauthier-Villars, Paris, France

Cochran, W.G., 1977, "Sampling Techniques", John Wiley, New York, USA

Cundall, P.A. and Strack, O.D.L., 1979, "A discrete numerical model for granular assemblies", Géotechnique 29, No 1, pp. 47-65, Great Britain

Cundall, P.A., 1980, "A speculation on the link between induced anisotropy and volume change during shear in granular assemblies", Peter Cundall, Ass. technical Note, PCAN 4

Curry, 1956, citado por Oda, 1977

Dalavalle, J.M., 1948, "The technology of fine particles", Pritman Pub. Co., 2a ed. , New York, USA

Dantu, P., 1957, "Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents", Sixth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, Great Britain

Dantu, P., 1964, "Etude mécanique d'un milieu pulvérulent formé de sphères égales de compacité maxima", Fifth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Paris, France

Dantu, P., 1968, "Etude statistique des forces

intergranulaires dans un milieu pulvérulent", Géotechnique 18, pp. 50 a 55, Great Britain

Delesse, M.A., 1847, "Procédé mécanique pour déterminer la composition des roches", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 23,544, Paris, France

Deresiewicz, H., 1958, "Mechanics of granular matter - Advances in applied mechanics", Vol V, Academic Press, New York, USA

Duriez, M. y Arrambide, J., 1961, "Nouveau traité de matériaux de construction", Vol. I, Dunod Editeur, France

Epstein, B., 1948, "Logarithmico-normal distribution in breakage of solids", Industrial and Engineering Chemistry, USA

Feret, 1892, Annales des Ponts et Chaussées, juillet, Paris, France

Field, W. G., 1963, "Towards the statistical definition of a granular mass", Proceedings, 4th Australia-New Zealand Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, pp. 143-148

Furnas, C.C., 1931, "Grading aggregates.I. Mathematical relations for beds of broken solids of maximum density", Ind. Eng. Chem., vol. 23, USA

Giroud, J.P., 1969, "Propriétés physiques des sols", Curso D.E.A., Université de Grenoble, France

García-Bengochea, I., 1979, "Pore size distribution and permeability of silty clay", Geotechnical Engineering Journal, ASCE, Vol. 105, No GT 7, New York, USA

García-Bengochea, I. and Lovell, C.W., 1981, "Correlative measurements of pore size distribution and permeability in soils", ASTM, STP 746, Symposium on Permeability and Groundwater Contaminant Transport, pp. 137 a 150, Philadelphia, USA

Graton and Fraser, 1935, "Systematic packing of spheres with particular relation to porosity and permeability", Journal of Geology, vol. 43, pp.785 a 909, USA

Gutiérrez, E., 1981, "Pruebas de permeabilidad en suelos finos compactados", Tesis para obtener el grado de Ingeniero Civil, Facultad de Ingeniería, UNAM, México

Haas, A., Matheron, G. et Serra, J., 1976, "Morphologie mathématique et granulométries en place", Annales des Mines, Vol XI y XII, Paris, France

Hanell, J.J., et al, 1974, "Estudios geotécnicos recientes. Puerto Industrial El Ostión, Ver", XI Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, SMMS, Veracruz, Ver, México

Harr, M.E., 1977, "Mechanics of particulate media - A probabilistic approach", McGraw Hill, New York, USA

Hazen, A., 1895, "The filtration of public water supplies"

Herdan, 1960, "Small particles statistics", Butterworths, Great Britain

Horne, M.R., 1965, "The behaviour of an assembly of rotund rigid cohesionless particles", Proc. Roy. Soc. A., Vol 286, pp. 62 a 97, Great Britain

Journel, A.G., 1977, "Géostatistique minière", Centre de Géostatistique, Fontainebleau, France

Jowitt, P.W. and Munro, J., 1975, "The influence of void distribution and entropy on the engineering properties of granular media", Second International Conference on Applied Statistics and Probability in Soils and Structural Engineering, pp. 365 a 386, Aachen, Germany

Juárez Badillo, E., 1981, "General compressibility equation for soils", Tenth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Stockholm, Sweden

Kallstenius and Bergau, 1961, "Research on the texture of granular masses", Fifth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 1, pp. 158 a 165, Paris, France

Kézdi, Á, 1974, "Handbook of Soil Mechanics - Soil Physics", Elsevier, Vol I, Akademiai Kiado, Budapest, Hungary

Kézdi, Á, 1976, "Problems in soil physics", Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, México, D.F.

Kloubek, J., 1983, "Characterization of porous materials using mercury porosimetry", Advances in the Mechanics and the Flow of Granular Materials, edited by M. Shahinpoor, Vol.1, Gulf Publishing Co., Houston, USA

Ko, H.Y., and Scott, R.F., 1967, "Deformation of sand in hydrostatic compression", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, No 93, pp. 137 a 156, New York, USA

Konishi, J., et al, 1982, "Inherent anisotropy and shear strength of assembly of oval cross-sectional rods", IUTAM

Conference on Deformation and Failure of Granular Materials", Delft, Holland

Kozeny, J. , 1953, "Hydraulik", Springer Verlag, Berlin, Alemania

Lambe, T.W. and Whitman, R. , 1972, "Mecánica de suelos", Limusa, México

Lesser Hiriart, C. , 1984, "Distribución estadística de fuerzas de contacto medidas en un modelo de discos fotoelásticos", Tesis profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM, México

Mahmood, A and Mitchell, J.K. , 1974, "Fabric property relationships in fine granular materials", Clay and Clay Minerals, 22, pp. 397-408, USA

Marsal, R.J., 1963, "Contact forces in soil and rockfill materials", Sixth Panamerican Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol II, Brasil

Marsal, R.J., 1972, "Mechanical properties of rockfill", Embankment-Dam Engineering, Casagrande Volume, John Wiley and Sons, New York, USA

Marsal, R.J., 1977, "Research on granular materials", Publicación No. E-25 , Instituto de Ingeniería, UNAM, México

Marsal, R.J., 1979, "Investigaciones sobre el diseño y comportamiento durante la construcción de la presa Chicoasén", Comisión Federal de Electricidad, México

Matheron, G., 1967, "Eléments pour une théorie des milieux poreux", Masson et Cie. Editeurs, Paris, France

Matsuoka, M., 1974, "A microscopic study on shear mechanism of granular materials", Soils and Foundations, Vol. 7, Japón

Mazari, M., Marquez, R., Alberro, J. y Mendoza, M., 1980, "Fuerzas de contacto en conjuntos de discos fotoelásticos", Instituto de Ingeniería, UNAM, México

Mendoza, M., 1975, "Measurements of contact forces in photoelastic models", Fifth Panamerican Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering , Buenos Aires, Argentina

Mitchell, J.K., 1976, "Fundamentals of soil behavior", John Wiley, pp. 345 a 352, New York, USA

Mogami, T., 1965, " A statistical approach to the mechanics of granular materials", Soil and Foundations, Vol. 5, No 2, Japón

Mogami, T., 1965, "A statistical theory of mechanics of granular media", Journal of the Faculty of Engineering, University of Tokyo, (B), Vol. 28, No 2, Japón

Morgenstern, N.R., 1963, "Maximum entropy of granular materials", Nature, No 200, pp. 559 a 560, USA

Mulilis, J.P. et al, 1977, "Effects of sample preparation on sand liquefaction", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 103, No GT2, New York, USA

Munro, J. and Jovitt, P.W., 1974, "Information theory and granular media", Research Report SAM 74/1, Civil Engineering Department, Imperial College, London, Great Britain

Murayama, S. y Matsuoka, H., 1973, "A microscopic study on shearing mechanism of soils", Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol 1, pp. 293 a 298, Moscow, URSS

Nagpal, N.K., et al, 1972, "Pore size distribution of soils from mercury intrusion porosimeter data", Proceedings of the Soil Science Society of America, Vol. 36, No 2, March-April 1972, pp. 264 a 267, USA

Oda, M., 1972, "Initial fabrics and their relation to mechanical properties of granular material", Soils and Foundations, Vol. 12, No. 1, pp. 17 a 37, Tokio, Japón

Oda, M. and Koishikawa, I., 1977, "Anisotropic fabric of sands", Ninth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol 1, pp. 235 a 238, Tokio, Japón

Oda M., et al, 1982, "A statistical study of fabric in a random assembly of spherical granules", Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol 6, pp. 77-94, USA

Orozco, R.V., 1976, "Comentarios sobre cambios volumétricos y relaciones", VIII Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, SMMS, Tomo III, Guanajuato, México

Papoulis, A., 1984, "Probability, random variables, and stochastic processes", McGraw-Hill, 2nd Edition, Singapore

Fatiño, H. y Alberro, J., 1983, "Influencia de la forma de las partículas en el comportamiento de los medios granulares", Informe interno del Instituto de Ingeniería, UNAM, México

Peralta, R. y Hernandez, G., 1982, "Procesamiento digital de imágenes de microscopio de barrido", II Simposio de Instrumentación, Oaxtepec, México

- Purcell, W.R., 1969, "Capillary pressures - Their measurement using mercury and the calculation of permeability therefrom", Petroleum Transactions, American Institute of Mining Metallurgical and Petroleum Engineers, Vol 186, USA
- Poucell, R., 1982, "Uso de filtros en geotecnia", Simposio sobre el Uso de Medios Filtrantes en Ingeniería Sanitaria y Mecánica de Suelos, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, México
- Ross, S.M., 1969, "Applied probability models with optimization applications", Holden Day, San Francisco, USA
- SARH, 1970, "Manual de mecánica de suelos", Quinta Edición, México
- Scott, 1962, Nature, 194, 956, USA
- Scott, R.F., 1963, "Principles of soil mechanics", Addison Wesley Pub. Co., New York, USA
- Seed, H.B., et al, 1975, "Evaluation of soil liquefaction potential during earthquakes", Earthquake Engineering Research Center, Report EERC 75-28, University of California, Berkeley, USA
- Serra, J., 1967, "Buts et réalisation de l'analyseur de texture", Revue de l'Industrie Minérale, Paris, France
- Shockley, W.G., and Garber, P.K., 1953, "Correlation of some physical properties of sand", Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol 1, pp. 203-206, Zurich, Switzerland
- Silveira, A., 1965, "An analysis of the problem of washing through in protective filters", Sixth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol II, 1965, pp 551 a 555, Montreal, Canada
- Slichter, C. , "Paper in the Nineteenth Annual Report", U.S. Geological Survey, USA
- Smith, Foote and Busang, 1929, "Packing of homogeneous spheres", Physical Review, Vol. 34, pp. 1271 a 1274, USA
- Terzaghi, K., 1948, "Soil mechanics in engineering practice", John Wiley, USA
- Venuat, M. et Papadakis, M., 1961, "Contrôle et essais des ciments, mortiers et bétons", Editions Eyrolles, France
- Wadell, H., 1932, "Sphericity and roundness of rock particles", Journal of Geology, Vol. 41, USA

Washburn, 1921, Physics Review, 17, 273, USA

Weber, J., 1966, "Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents", Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées No 20, Paris, France

Weibel, E.R., et al, 1972, "Practical stereological methods for morphometric cytology", The Journal of Cell Biology, Vol. 30, pp. 23 a 38, USA

Weibel, E.R. and Gomez, D.M., "A principle for counting tissue structures on random sections", Journal of Applied Physiology, Vol 17, 343, USA

Windish, S.J., and Soulié, M., 1970, "Technique for study of granular materials", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, New York, USA

Youd, T.L., 1977, "Packing changes and liquefaction susceptibility", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 103, No GT8, pp. 918 a 922, New York, USA

ANEXO I

ANEXO I

DESARROLLOS MATEMATICOS

1. DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE DIAMETROS APARENTES DE PARTICULAS ESFERICAS EN CORTES PLANOS Y SONDEOS RECTOS

1.1 Cortes planos

La densidad de probabilidad de los diámetros aparentes de partículas esféricas en un plano de corte puede obtenerse a partir de las consideraciones siguientes:

- Densidad de probabilidad $f_{D_2|D_3}(d_2)$ del diámetro aparente D_2 de una partícula de diámetro D_3 intersecada por un plano:

Sea L la distancia entre el plano de corte y el centro de la esfera intersecada. Se puede considerar que L es una variable aleatoria con densidad de probabilidad uniforme:

$$f_{L|D_3}(l) = 1/D_3 \quad ; \quad \text{para } -D_3/2 < l < D_3/2 \quad (I.1)$$

Se observa por otra parte (Fig I.1) que el diámetro aparente D_2 es igual a :

$$D_2 = 2 \sqrt{D_3^2/4 - L^2} \quad (I.2)$$

De acuerdo con las reglas usuales de transformación de densidades de probabilidad, se tiene:

$$f_{D_3|D_2}(d_2) = 2 f_{L|D_3}(l) |dl/dd_2| \quad (I.3)$$

con lo que se obtiene la densidad de probabilidad:

$$f_{D_2|D_3}(d_2) = d_2 / (D_3 \sqrt{D_3^2 - d_2^2}) \quad ; \quad \text{para } 0 < d_2 < D_3 \quad (I.4)$$

con valor esperado:

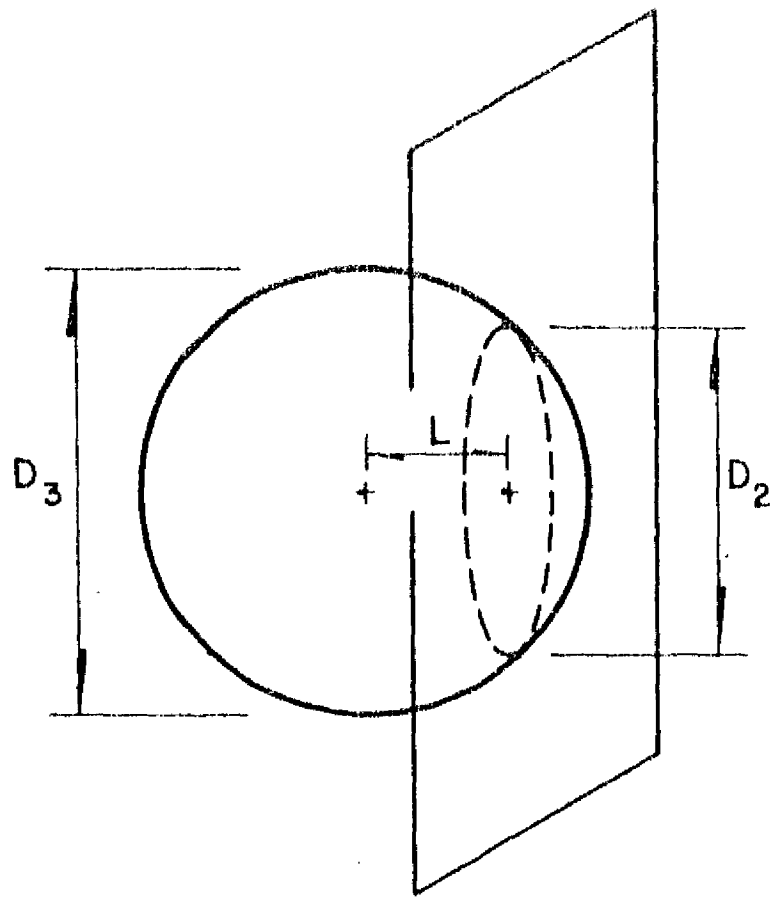


Fig 1.1 Diámetro aparente de una partícula esférica intersecada por un plano

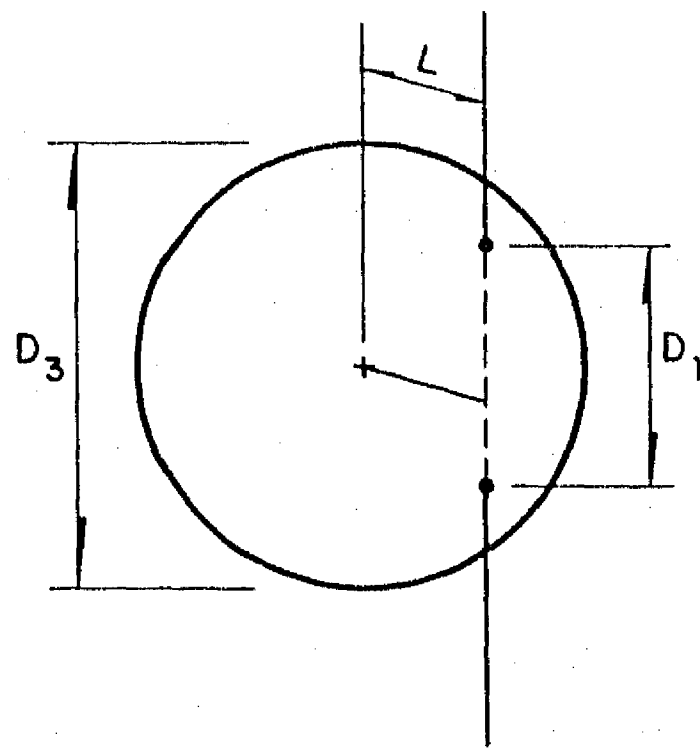


Fig 1.2 Diámetro aparente de una partícula esférica intersecada por una recta

$$E\{D_2 | D_3\} = \pi D_3 / 4 \quad (I.5)$$

- Densidad de probabilidad conjunta del diámetro aparente y del diámetro real para las partículas intersecadas por el plano :

Esta densidad es igual al producto de la densidad condicional anterior por la densidad marginal del diámetro real de la partícula.

$$f_{D_2, D_3}(d_2, d_3) = f_{D_2 | D_3}(d_2) \cdot f_{2D}(d_3) \quad (I.6)$$

donde $f_{2D}(d_3)$ es la densidad de probabilidad granulométrica en número de las partículas intersecadas por el plano.

$$f_{D_2, D_3}(d_2, d_3) = d_2 f_{2D}(d_3) / (d_3 \sqrt{d_3^2 - d_2^2}) \quad (I.7)$$

$$f_{D_2, D_3}(d_2, d_3) = d_2 / (d_3 \sqrt{d_3^2 - d_2^2}) [f_{3D}(d_3) d_3 / E_{3D}\{D_3\}] \quad (I.8)$$

$$f_{D_2, D_3}(d_2, d_3) = d_2 f_{3D}(d_3) / (\sqrt{d_3^2 - d_2^2} E_{3D}\{D_3\}) \quad (I.9)$$

- Densidad marginal de los diámetros aparentes de las partículas intersecadas por el corte

$$f_{D_2}(d_2) = \int_{d_2}^{D_{\text{máx}}} f_{D_2, D_3}(d_2, d_3) \Delta d_3 \quad (I.10)$$

$$f_{D_2}(d_2) = (d_2 / E_{3D}\{D_3\}) \int_{d_2}^{D_{\text{máx}}} [f_{3D}(d_3) / \sqrt{d_3^2 - d_2^2}] \Delta d_3 ;$$

para $0 < d_2 < D_{\text{máx}}$ (I.11)

Esta función es la densidad buscada de los diámetros aparentes en un plano de corte. Utilizando una notación congruente con la de la función de distribución, se obtiene la Ec 2.30 del texto principal de este trabajo.

Se observa que :

$$E_{2A}\{D\} = \int_0^{D_{\text{máx}}} d_2 f_{2A}(d_2) \Delta d_2$$

$$= (1/E_{3D}\{D\}) \int_0^{D_{\text{máx}}} d_2^2 \int_{d_2}^{D_{\text{máx}}} [f_{3D}(d_3) / \sqrt{d_3^2 - d_2^2}] \Delta d_3 \Delta d_2 \quad (I.12)$$

$$E_{2A} \{D\} = (1/E_{3D} \{D\}) \int_0^{D_{\max}} f_{3D}(d_3) \int_0^{d_3} [d_2^2 / \sqrt{d_3^2 - d_2^2}] \Delta d_2 \Delta d_3 \quad (I.13)$$

$$E_{2A} \{D\} = (1/E_{3D} \{D\}) \int_0^{D_{\max}} f_{3D}(d_3) [-d_2 \sqrt{d_3^2 - d_2^2} / 2 + (d_3^2 / 2) \operatorname{sen}^{-1}(d_2 / d_3)] \Delta d_3 \quad (I.14)$$

$$E_{2A} \{D\} = (1/E_{3D} \{D\}) \int_0^{D_{\max}} f_{3D}(d_3) (d_3^2 \pi / 4) \Delta d_3 \quad (I.15)$$

es decir :

$$E_{2A} \{D\} = (\pi / 4) (E_{3D}^2 \{D\} / E_{3D} \{D\}) \quad (I.16)$$

con lo que queda establecida la Ec 2.31 del texto principal.

1.2 Sondeos rectos

La densidad de probabilidad de los diámetros aparentes de partículas esféricas a lo largo de un sondeo, se obtiene en forma análoga a partir de las consideraciones siguientes:

- Densidad de probabilidad del diámetro aparente D_1 de una partícula de diámetro D_3 intersecada por un sondeo recto :

Sea L la distancia entre el centro de la esfera intersecada y el eje del sondeo (Fig I.2). Se puede considerar que la intersección se presenta al azar en el círculo ecuatorial de la partícula y que por tanto L es una variable aleatoria con densidad de probabilidad uniforme:

$$f_{L/D_3}(l) = 2\pi l / (\pi D_3^2 / 4) ; \text{ para } -D_3/2 < l < D_3/2 \quad (I.17)$$

Por otra parte :

$$D_1 = 2 \sqrt{D_3^2 / 4 - L^2} \quad (I.18)$$

De acuerdo con las reglas usuales de transformación, se tiene:

$$f_{D_1|D_3}(d_1) = 2 f_{L|D_3}(1) dL/dD_1 \quad (1.19)$$

con lo que se llega a la densidad de probabilidad:

$$f_{D_1|D_3}(d_1) = 2 d_1 / D_3^2 \quad ; \quad \text{para } 0 < d_1 < D_3 \quad (1.20)$$

con valor esperado:

$$E\{D_1|D_3\} = 2D_3/3 \quad (1.21)$$

- Densidad de probabilidad conjunta del diámetro aparente y del diámetro real para las partículas intersecadas por el eje del sondeo :

$$f_{D_1, D_3}(d_1, d_3) = f_{D_1|D_3}(d_1) \cdot f_{1D}(d_3) \quad (1.22)$$

donde $f_{1D}(d_3)$ es la densidad granulométrica en número de las partículas intersecadas por el eje del sondeo.

$$f_{D_1, D_3}(d_1, d_3) = (2d_1 / d_3^2) f_{1D}(d_3) \quad (1.23)$$

$$f_{D_1, D_3}(d_1, d_3) = (2d_1 / d_3^2) [f_{3D}(d_3) d_3^2 / E_{3D}\{D_3^2\}] \quad (1.24)$$

$$f_{D_1, D_3}(d_1, d_3) = 2d_1 f_{3D}(d_3) / E_{3D}\{D_3^2\} \quad (1.25)$$

- Densidad marginal de los diámetros aparentes de las partículas intersecadas por el sondeo :

$$f_{D_1}(d_1) = \int_{d_1}^{D_{\text{máx}}} f_{D_1, D_3}(d_1, d_3) \Delta d_3 \quad (1.26)$$

$$f_{D_1}(d_1) = (2d_1 / E_{3D}\{D_3^2\}) [1 - F_{3D}(d_1)] \quad ; \quad \text{para } 0 < d_1 < D_{\text{máx}} \quad (1.27)$$

Esta es la densidad de los diámetros aparentes buscada. Usando una notación congruente con la de la distribución, se obtiene la Ec 2.32 del texto principal de este trabajo.

También es posible obtener la densidad de probabilidad de los diámetros aparentes de partículas esféricas a lo largo de un sondeo a partir de los que se definen en un plano con base en lo siguiente:

- Densidad de probabilidad $f_{D_1|D_2}(d_1)$ del diámetro aparente D_1 de un círculo de diámetro D_2 intersecado por una recta.

Los resultados de las Ecs I.1 a I.4 son aplicables sustituyendo D_3 por D_2 y D_2 por D_1 . Se tiene por tanto:

$$f_{D_1|D_2}(d_1) = d_1 / (D_2 \sqrt{D_2^2 - d_1^2}) \quad ; \quad \text{para } 0 < d_1 < D_2 \quad (I.28)$$

- Densidad de probabilidad conjunta del diámetro aparente y del diámetro real para los círculos intersecados por la recta.

Nuevamente, por analogía con las Ecs I.6 a I.9, se obtiene:

$$f_{D_1, D_2}(d_1, d_2) = d_1 f_{2D}(d_2) / (\sqrt{d_2^2 - d_1^2} E_{2D}\{D_2\}) \quad (I.29)$$

- Densidad marginal de los diámetros aparentes de los círculos intersecados por la recta

$$f_{D_1}(d_1) = \int_{d_1}^{D_{\text{máx}}} f_{D_1, D_2}(d_1, d_2) \Delta d_2 \quad (I.30)$$

es decir:

$$f_{D_1}(d_1) = (d_1 / E_{2D}\{D_2\}) \int_{d_2}^{D_{\text{máx}}} [f_{2D}(d) / \sqrt{d_2^2 - d_1^2}] \Delta d_2 ; \quad \text{para } 0 < d_1 < D_{\text{máx}} \quad (I.31)$$

Utilizando una notación congruente con la de la función de distribución, se obtiene la Ec 2.33 del texto principal de este trabajo.

Por integraciones similares a las de las ecuaciones I.12 a I.16, se obtienen las fórmulas de transformación de los momentos en número de la Tabla I.1. Por otra parte, de las Ecs 2.22, 2.28 y 2.29, se deducen fácilmente las igualdades de la Tabla I.2. Combinando las relaciones de la Tabla I.1 y de la Tabla I.2, se establecen las fórmulas de transformación de los momentos en medida de la Tabla I.3.

TABLA I.1 Transformaciones de momentos en número

SONDEO				
$E_{1A}\{D\}$	$= \frac{\pi}{4}$	$\frac{E_{2A}\{D^2\}}{E_{2A}\{D\}}$	$= \frac{2}{3}$	$\frac{E_{3D}\{D^3\}}{E_{3D}\{D^2\}}$
$E_{1A}\{D^2\}$	$= \frac{2}{3}$	$\frac{E_{2A}\{D^3\}}{E_{2A}\{D\}}$	$= \frac{1}{2}$	$\frac{E_{3D}\{D^4\}}{E_{3D}\{D^2\}}$
$E_{1A}\{D^3\}$	$= \frac{3\pi}{16}$	$\frac{E_{2A}\{D^4\}}{E_{2A}\{D\}}$	$= \frac{2}{5}$	$\frac{E_{3D}\{D^5\}}{E_{3D}\{D^2\}}$
$E_{1A}\{D^4\}$	$= \frac{8}{15}$	$\frac{E_{2A}\{D^5\}}{E_{2A}\{D\}}$	$= \frac{1}{3}$	$\frac{E_{3D}\{D^6\}}{E_{3D}\{D^2\}}$
PLANO				
$E_{2A}\{D\}$	$= \frac{\pi}{4}$	$\frac{E_{3D}\{D^2\}}{E_{3D}\{D\}}$		
$E_{2A}\{D^2\}$	$= \frac{2}{3}$	$\frac{E_{3D}\{D^3\}}{E_{3D}\{D\}}$		
$E_{2A}\{D^3\}$	$= \frac{3\pi}{16}$	$\frac{E_{3D}\{D^4\}}{E_{3D}\{D\}}$		
$E_{2A}\{D^4\}$	$= \frac{8}{15}$	$\frac{E_{3D}\{D^5\}}{E_{3D}\{D\}}$		

TABLA 1.2 Momentos en medida a partir de momentos en número

$$E_{3V}\{D^\alpha\} = \frac{E_{3D}\{D^{\alpha+3}\}}{E_{3D}\{D^3\}}$$

$$E_{2AS}\{D^\alpha\} = \frac{E_{2A}\{D^{\alpha+2}\}}{E_{2A}\{D^2\}}$$

$$E_{1AL}\{D^\alpha\} = \frac{E_{1A}\{D^{\alpha+1}\}}{E_{1A}\{D\}}$$

TABLA 1.3 Transformaciones de momentos en medida

$$E_{3V}\{D\} = \frac{32}{9\pi} \quad E_{2AS}\{D\} = \frac{4}{3} \quad E_{1AL}\{D\}$$

$$E_{3V}\{D^2\} = \frac{5}{4} \quad E_{2AS}\{D^2\} = \frac{5}{3} \quad E_{1AL}\{D^2\}$$

$$E_{3V}\{D^3\} = \frac{64}{15\pi} \quad E_{2AS}\{D^3\} = 2 \quad E_{1AL}\{D^3\}$$

$$E_{3V}\{D^4\} = \frac{35}{24} \quad E_{2AS}\{D^4\} = \frac{7}{3} \quad E_{1AL}\{D^4\}$$

2. ESTIMACION BAYESIANA DE LA DISTRIBUCION GRANULOMETRICA TRIDIMENSIONAL A PARTIR DE LAS DISTRIBUCIONES APARENTES EN CORTES O SONDEOS

2.1 Cortes planos

Se vio en la primera parte de este Anexo que la densidad de probabilidad del diámetro aparente D_2 de una partícula esférica de diámetro D_3 intersecada por un plano es:

$$f_{D_2|D_3}(d_2) = d_2 / (D_3 \sqrt{D_3^2 - d_2^2}) \quad ; \text{ para } 0 < d_2 < D_3 \quad (I.32)$$

Para estimar el diámetro real D_3 de una partícula con diámetro aparente D_2 , es posible recurrir al teorema de Bayes [Benjamin, 1970].

Para ello, se define una densidad razonable a priori $f_{D_3}(d_3)$, por ejemplo una densidad de probabilidad uniforme en el intervalo $[0, D_{\text{máx}}]$ donde $D_{\text{máx}}$ es el mayor diámetro aparente.

Es decir :

$$f_{D_3}(d_3) = 1/D_{\text{máx}} \quad ; \text{ para } 0 < d_3 < D_{\text{máx}} \quad (I.33)$$

El conocimiento de que el diámetro aparente de la partícula es D_2 permite modificar esta distribución a priori y obtener una densidad de probabilidad a posteriori $f_{D_3|D_2}(d_3)$ de acuerdo con el teorema de Bayes y tomando en cuenta que, necesariamente, $D_3 \geq D_2$:

$$f_{D_3|D_2}(d_3) = [f_{D_2|D_3}(d_2) f_{D_3}(d_3)] / \int_{D_2}^{D_{\text{máx}}} f_{D_2|D_3}(d_2) f_{D_3}(d_3) \Delta d_2 ;$$

para $D_2 < d_3 < D_{\text{máx}} \quad (I.34)$

es decir:

$$f_{D_3|D_2}(d_3) = [D_2 / (d_3 \sqrt{d_3^2 - D_2^2} D_{\text{máx}})] / [(1/D_{\text{máx}}) \int_{D_2}^{D_{\text{máx}}} [D_2 / (d_2 \sqrt{d_2^2 - D_2^2})] \Delta d_2 ;$$

para $D_2 < d_3 < D_{\text{máx}} \quad (I.35)$

con valor esperado:

$$E\{D_3 | D_2\} = [1/\cos^{-1}(D_2/D_{\text{máx}})] \text{Ln}[(D_{\text{máx}} + D_{\text{máx}}^2 - D_2^2)/D_2] \quad (1.36)$$

Las partículas con diámetro aparente D_2 tendrán un diámetro real D_3 mayor que d con probabilidad:

$$P[D_3 \geq d | D_2] = \int_d^{D_{\text{máx}}} f_{D_3 | D_2}(d_3) \Delta d_3 \quad (1.37)$$

Para todas las partículas de diámetro aparente $D_2 > d$, esta probabilidad será igual a uno, pero para las partículas más pequeñas tomará un valor comprendido entre cero y uno.

La proporción A_d del área total del corte A ocupada por partículas con un diámetro D mayor que d puede ser estimada midiendo los diámetros aparentes D_{2i} de las partículas en el plano de corte y escribiendo que :

$$A_d \cong (1/A) \sum_{i=1}^N [(\pi D_{2i}^2 / 4) \int_d^{D_{\text{máx}}} f_{D_3 | D_{2i}}(d_3) \Delta d_3] \quad (1.38)$$

donde

N número de diámetros medidos

es decir:

$$A_d \cong (1/A) \sum_{i=1}^N (\pi D_{2i}^2 / 4) [1 - \cos^{-1}(D_{2i}/d) / \cos^{-1}(D_{2i}/D_{\text{máx}})] \quad (1.39)$$

con la convención de que el término entre corchetes se considere igual a uno si $D_{2i} \geq d$.

Se tiene, de acuerdo con el concepto de porosidad generalizada:

$$1 - G_3(d) \cong A_d \quad (1.40)$$

con lo que resulta posible estimar la granulometría tridimensional expresada a través de la función $G_3(d)$, es decir referida al volumen total de la muestra.

2.2 Sondeos

En este caso, de acuerdo con la primera parte de este

anexo, la densidad de probabilidad del diámetro aparente D_1 de una partícula esférica de diámetro D_3 intersecada por un sondeo es:

$$f_{D_1|D_3}(d_1) = 2d_1/D_3^2 \quad ; \text{ para } 0 < d_1 < D_3 \quad (I.41)$$

Para estimar el diámetro real D_3 de una partícula con diámetro aparente D_1 , se recurre nuevamente al teorema de Bayes.

Se puede adoptar como densidad de probabilidad a priori $f_{D_3}(d_3)$, la densidad de la Ec I.1. La densidad a posteriori se obtiene como:

$$f_{D_3|D_1}(d_3) = [f_{D_1|D_3}(d_1) f_{D_3}(d_3)] / \int_{D_1}^{D_{\text{máx}}} f_{D_1|D_3}(d_1) f_{D_3}(d_3) \Delta d_1 \quad ; \text{ para } D_1 < d_3 < D_{\text{máx}} \quad (I.42)$$

es decir:

$$f_{D_3|D_1}(d_3) = [2d_1 / (D_3^2 - D_{\text{máx}}^2)] / [(1/D_{\text{máx}}) \int_{D_1}^{D_{\text{máx}}} (2d_1 / D_3^2) \Delta d_1] \quad ; \text{ para } D_1 < d_3 < D_{\text{máx}} \quad (I.43)$$

y se obtiene la densidad de probabilidad:

$$f_{D_3|D_1}(d_3) = 2d_3 / (D_{\text{máx}}^2 - D_1^2) \quad ; \text{ para } D_1 < d_3 < D_{\text{máx}} \quad (I.44)$$

con valor esperado:

$$E\{D_3|D_1\} = (2/3)(D_{\text{máx}}^3 - D_1^3) / (D_{\text{máx}}^2 - D_1^2) \quad (I.45)$$

Las partículas con diámetro aparente D_1 tendrán un diámetro real D_3 mayor que d con probabilidad:

$$P\{D_3 > d|D_1\} = \int_d^{D_{\text{máx}}} f_{D_3|D_1}(d_3) \Delta d_3 \quad (I.46)$$

Para todas las partículas de diámetro aparente $D_1 \gg d$, esta probabilidad será igual a uno, pero para las partículas mas pequeñas, tomará un valor comprendido entre cero y uno.

La proporción L_d de la longitud total del sondeo L ocupada

por partículas de diámetro D_3 mayor que d puede ser estimada midiendo los diámetros aparentes D_{4i} de las partículas a lo largo del sondeo y escribiendo que:

$$L_d \cong (1/L) \sum_{i=1}^N [D_{4i} \int_d^{D_{\max}} f_{D_3 | D_{4i}}(d_3) \Delta d_3] \quad (I.47)$$

donde

N número de diámetros aparentes medidos

es decir :

$$L_d \cong (1/L) \sum_{i=1}^N D_{4i} [(D_{\max}^2 - d^2) / (D_{\max}^2 - D_{4i}^2)] \quad (I.48)$$

Se tiene, de acuerdo con el concepto de porosidad generalizada :

$$1 - G_3(d) \cong L_d \quad (I.49)$$

con lo que resulta posible estimar la granulometría tridimensional a través de la función $G_3(d)$, es decir referida al volumen total de la muestra.

3. DENSIDAD DE PROBABILIDAD DEL ANGULO ENTRE LA DIRECCION DE UN SONDEO Y LAS NORMALES A ELEMENTOS DE SUPERFICIE DE LOS GRANOS

3.1 En el espacio

Se considera un elemento de superficie de los granos con normal orientada hacia los vacíos y centro en la intersección del grano con el eje de un sondeo recto.

El sondeo y la normal al elemento forman un ángulo θ (Fig 1.3). El sondeo interseca el grano en un punto localizado al azar en planta. En un medio isótropo en cuanto a la orientación de los elementos de superficie, la cantidad $A = \sin\theta$ tiene por tanto una densidad de probabilidad tal que :

$$f_A(a) da = (2\pi a da)/\pi = 2 a da \quad ; \text{ para } 0 < a < 1 \quad (1.50)$$

El ángulo $\theta = \sin^{-1}A$ tiene por tanto la densidad de probabilidad:

$$f_\theta(\theta) = f_A(a) |dA/d\theta| = 2 \sin\theta \cos\theta \quad ; \text{ para } 0 < \theta < \pi/2 \quad (1.51)$$

La esperanza $E\{1/\cos\theta\}$ puede calcularse como :

$$E\{1/\cos\theta\} = \int_0^{\pi/2} [2\sin\theta \cos\theta / \cos\theta] d\theta = 2 \quad (1.52)$$

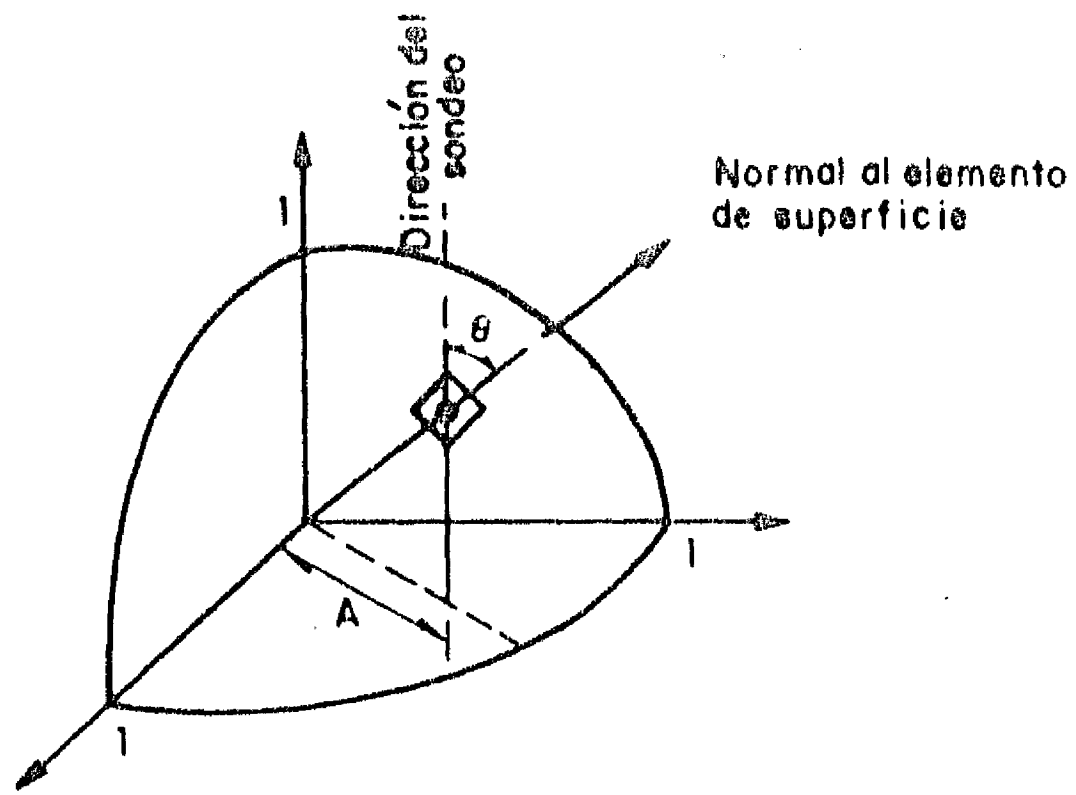
3.2 En el plano

En este caso (Fig 1.3) y para un medio isótropo, la cantidad $A = \sin\theta$ tiene densidad de probabilidad uniforme entre 0 y 1 y $\theta = \sin^{-1}A$ tiene la densidad de probabilidad:

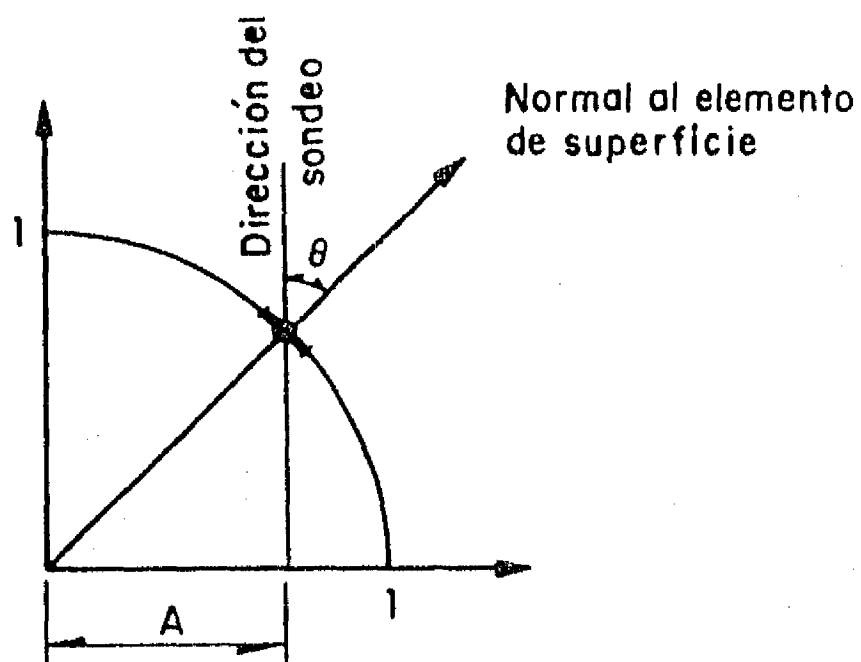
$$f_\theta(\theta) = f_A(a) |dA/d\theta| = \cos\theta \quad ; \text{ para } 0 < \theta < \pi/2 \quad (1.53)$$

y se tiene:

$$E\{1/\cos\theta\} = \int_0^{\pi/2} [\cos\theta / \cos\theta] d\theta = \pi/2 \quad (1.54)$$



a) En el espacio



b) En un plano

Fig I. 3 Angulo entre la dirección de un sondeo y las normales a elementos de superficie de los granos

4. DISTRIBUCIONES GRANULOMETRICAS TRAPECIALES

4.1 Granulometría de discos

Un grupo de discos tiene densidad de probabilidad trapezoidal (en área) si :

$$f_A(d) = ad + b \quad ; \text{ para } D_{\text{mín}} < d < D_{\text{máx}} \quad (1.55)$$

donde

a y b parámetros que pueden hacerse variar para modificar la distribución, junto con el diámetro máximo $D_{\text{máx}}$ y el mínimo $D_{\text{mín}}$.

Los parámetros a y b se reducen a uno solo si se toma en cuenta la condición de que el área bajo la curva representativa de $f_A(d)$ debe ser igual a 1. Llamando u y v los valores de $f_A(d)$ para $d = D_{\text{mín}}$ y $d = D_{\text{máx}}$, respectivamente, se puede escoger como parámetro único el valor c definido como sigue :

$$c = u(D_{\text{máx}} - D_{\text{mín}}) = 2 - (D_{\text{máx}} - D_{\text{mín}})v \quad (1.56)$$

Para $c = 0$ la densidad es triangular con $u = 0$

Para $c = 1$ la densidad es uniforme con $u = v$

Para $c = 2$ la densidad es triangular con $v = 0$

En términos del parámetro c, la Ec 1.55 se escribe :

$$f_A(d) = 2(1-c)d / (D_{\text{máx}} - D_{\text{mín}})^2 + [c(D_{\text{mín}} + D_{\text{máx}}) - 2D_{\text{mín}}] / (D_{\text{máx}} - D_{\text{mín}})^2 \quad (1.57)$$

La función de distribución (acumulada) usual correspondiente resulta :

$$F_A(d) = [(d - D_{\text{mín}}) / (D_{\text{máx}} - D_{\text{mín}})]^2 [d(1-c) - D_{\text{mín}} + cD_{\text{máx}}] \quad (1.58)$$

La densidad en número de discos se obtiene siguiendo un planteamiento análogo al del inciso 2.3.1, es decir

ponderando las frecuencias en área por un término inversamente proporcional al área del disco :

$$f_D(d) = f_A(d) / (d^2 E_A \{1/D^2\}) \quad ; \quad \text{para } D_{\text{mín}} < d < D_{\text{máx}} \quad (\text{I.59})$$

Llamando γ la cantidad:

$$E\{1/D^2\} = a \text{Ln}(D_{\text{máx}}/D_{\text{mín}}) - b [1/D_{\text{máx}} - 1/D_{\text{mín}}] \quad (\text{I.60})$$

se tiene :

$$f_D(d) = (ad + b) / (d^2 \gamma) \quad ; \quad \text{para } D_{\text{mín}} < d < D_{\text{máx}} \quad (\text{I.61})$$

La esperanza del diámetro de un disco seleccionado al azar es :

$$\begin{aligned} E_D\{D\} &= \int_{D_{\text{mín}}}^{D_{\text{máx}}} d f_D(d) \Delta d \\ &= (a/\gamma)(D_{\text{máx}} - D_{\text{mín}}) + (b/\gamma) \text{Ln}(D_{\text{máx}}/D_{\text{mín}}) \end{aligned} \quad (\text{I.62})$$

y la esperanza de su área A :

$$\begin{aligned} E_D\{A\} &= \int_{D_{\text{mín}}}^{D_{\text{máx}}} (\pi d^2/4) f_D(d) \Delta d \quad (\text{I.63}) \\ E_D\{A\} &= (\pi/4) [(a/\gamma)(D_{\text{máx}}^2 - D_{\text{mín}}^2)/2 \\ &\quad + (b/\gamma)(D_{\text{máx}} - D_{\text{mín}})] \quad (\text{I.64}) \end{aligned}$$

Para formar muestras con una granulometría particular, los discos se seleccionan uno por uno al azar. Para ello se escoge un número aleatorio N comprendido entre 0 y 1 y se adopta como diámetro del disco :

$$D = F_D^{-1}(N) \quad (\text{I.65})$$

siendo $F_D(d)$ la función de distribución de los diámetros y $F_D^{-1}(N)$ la función inversa de la anterior calculada para el valor N.

En términos de $f_D(d)$, $F_D(d)$ se expresa como :

$$F_D(d) = \int_{D_{\min}}^d f_D(d) \Delta d$$

$$= (a/\delta) \ln(d/D_{\min}) + (b/\delta) (1/D_{\min} - 1/d) \quad (I.66)$$

El valor de D correspondiente a $F_D(d) = N$ se determina numéricamente por el método de Newton-Raphson.

4.2 Granulometría de esferas

La densidad granulométrica trapezoidal (en volumen) de esferas se escribe en forma semejante como:

$$f_{3V}(d) = ad + b \quad ; \quad \text{para } D_{\min} < d < D_{\max} \quad (I.67)$$

La densidad en número se obtiene ponderando las frecuencias en volumen por un término inversamente proporcional al volumen de la partícula. De acuerdo con el inciso 2.3.1, se tiene:

$$f_{3D}(d) = (ad + b) / (\delta d^3) \quad ; \quad \text{para } D_{\min} < d < D_{\max} \quad (I.68)$$

donde

$$\delta = E_{3V} \{1/D^3\}$$

$$= a(1/D_{\min} - 1/D_{\max}) + b[1/(2D_{\min}^2) - 1/(2D_{\max}^2)] \quad (I.69)$$

La esperanza del diámetro de una partícula seleccionada al azar es:

$$E_{3D} \{D\} = (a/\delta) \ln(D_{\max}/D_{\min}) + (b/\delta) [1/D_{\min} - 1/D_{\max}] \quad (I.70)$$

La esperanza del cuadrado del diámetro es:

$$E_{3D} \{D^2\} = (a/\delta) [D_{\max} - D_{\min}] + (b/\delta) \ln[D_{\max} - D_{\min}] \quad (I.71)$$

y la esperanza del volumen V es:

$$E \left\{ \frac{\pi D^3}{6} \right\}_{3D} = \left(\frac{\pi}{6} \right) \left[\left(\frac{a}{2\gamma} \right) (D_{\max}^2 - D_{\min}^2) + (b/\gamma) (D_{\max} - D_{\min}) \right] \quad (1.72)$$

Para formar muestras con una granulometría dada, las esferas se seleccionan una por una al azar. Para ello, se escoge un número aleatorio N comprendido entre 0 y 1 y se adopta como diámetro de la esfera :

$$D = F_{3D}^{-1}(N) \quad (1.73)$$

siendo $F_{3D}(d)$ la función de distribución en número de los diámetros y $F_{3D}^{-1}(N)$ la función inversa de la anterior calculada para el valor N . En términos de $f_{3D}(d)$, $F_{3D}(d)$ se expresa como :

$$F_{3D}(d) = -a/(\gamma d) - b/(2\gamma d^2) + \delta \quad (1.74)$$

donde:

$$\delta = a/(\gamma D_{\min}) + b/(2\gamma D_{\min}^2)$$

El valor de D correspondiente a $F_{3D}^{-1}(d) = N$ se obtiene en este caso directamente como:

$$D = a/\gamma - \sqrt{[(a/\gamma)^2 - 2(N-\delta)b/\gamma] / [2(N-\delta)]} \quad (1.75)$$

5. TRANSFORMACION DE ESTRUCTURAS

Las transformaciones de estructuras de esferas planteadas en 3.3.4.b conducen a modificaciones de la orientación de los planos tangentes en los contactos que pueden evaluarse en la forma indicada a continuación.

Antes de la transformación, la ecuación de los planos tangentes puede escribirse :

$$x/a + y/b + z/c = h \quad (I.76)$$

donde

a, b, c, coordenadas de las intersecciones del plano con los ejes del sistema ortogonal de referencia

h constante

La distancia del plano al origen siendo irrelevante en cuanto a su orientación, es posible suponer que, para todos los planos esta distancia es unitaria. En este caso, h es igual a 1 y los cosenos directores de la normal al plano son:

$$\begin{aligned} u &= 1/a \\ v &= 1/b \\ w &= \cos \delta = 1/c \end{aligned} \quad (I.77)$$

donde

δ ángulo definido en la Fig 2.15

Al aplicar la transformación, las coordenadas de las intersecciones del plano con los ejes de referencia se modifican como sigue:

$$\begin{aligned} a' &= a \beta_1 \\ b' &= b \beta_2 \\ c' &= c \beta_3 \end{aligned} \quad (I.78)$$

Los nuevos cosenos directores de la normal al plano son por tanto los indicados en las Ecs 3.48 del texto.

6. FUERZAS DE CONTACTO

6.1 Algunas consideraciones respecto al número de contactos

sobre las partículas intersecadas por un plano

Se consideran los casquetes de menor dimensión definidos por el plano en las partículas. La esperanza del número total de contactos N_p en dichos casquetes por área unitaria de intersección es :

$$E\{N_p\} = \lambda_A \cdot E_{2D}\{E\{N_s(D)\}\} \quad (1.79)$$

donde

$E\{N_s(D)\}$ esperanza del número de contactos sobre un casquete para una partícula de diámetro D

$E_{2D}\{ \}$ operador esperanza aplicado con la densidad de probabilidad granulométrica de partículas intersecadas $f_{2D}(d)$ (2.3.1)

λ_A número esperado de partículas intersecadas por unidad de área (2.3.3)

Se admitirá que los contactos están uniformemente repartidos sobre la superficie de la partícula y que en primera aproximación pueden considerarse independientes entre sí.

Se tiene entonces :

$$E\{N_s(D)\} = p E\{N_c(D)\} \quad (1.80)$$

donde

$E\{N_c(D)\}$ esperanza del número total de contactos para una partícula de diámetro D

p proporción del área superficial total de la partícula representada por el casquete (Fig 1.4)

$$p = [\pi D (D/2 - h)] / (\pi D^2) = 1/2 - h/D \quad (1.81)$$

donde

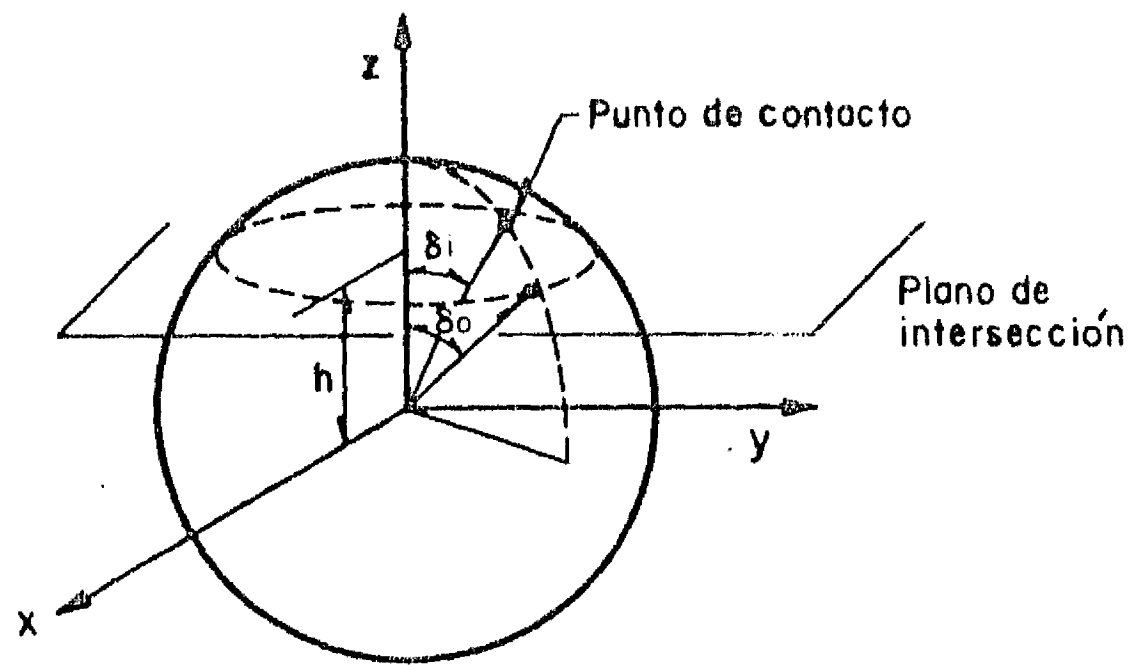


Fig I.4 Contactos en casquetes de partículas esféricas

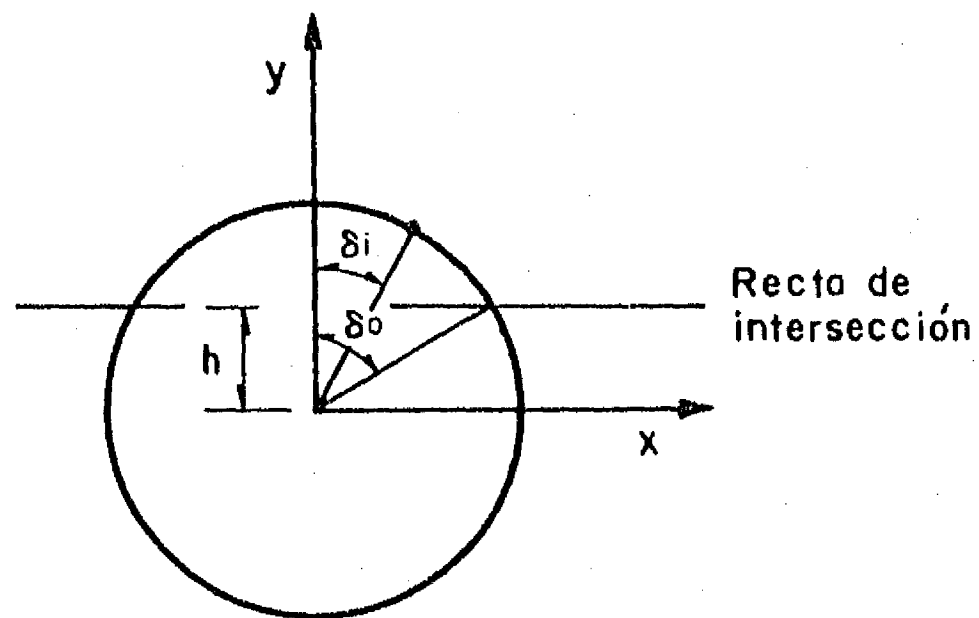


Fig I.5 Contactos en sectores de discos

h distancia del centro de la partícula al plano de intersección (variable aleatoria con densidad uniforme entre 0 y D/2)

Por tanto :

$$E\{p\} = 1/4 \quad (1.82)$$

y

$$E\{N_s | D\} = (1/4) E\{N_c | D\} \quad (1.83)$$

$$E\{N_p\} = (\lambda_A / 4) E_{2D} \{E\{N_c | D\}\} = (\lambda_A / 4) E_{2D} \{N_c\} \quad (1.84)$$

de donde se deduce la Ec 4.82 del texto principal.

Por otra parte, el ángulo δ_i que define la posición de cada contacto es tal que :

$$E\{\cos \delta_i\} = E\{E\{\cos \delta_i | \delta_i < \delta_0\}\} \quad (1.85)$$

donde

$$\delta_0 = \cos^{-1} (2h/D)$$

El ángulo δ_i tiene una densidad de probabilidad senoidal (Ec 2.86) por tanto su coseno $z = \cos \delta_i$ tiene una densidad :

$$f_z(z) = f_\delta(\delta) |d\delta/dz| = 1 \quad \text{entre } 0 \text{ y } 1 \quad (1.86)$$

es decir uniforme entre 0 y 1

Por tanto :

$$E\{z | z > z_0\} = (1 + z_0) / 2 \quad (1.87)$$

y

$$E\{E\{z | z > z_0\}\} = 1/2 + E\{z_0\} / 2 = 3/4 \quad (1.88)$$

es decir:

$$E\{\cos \delta_i\} = 3/4 \quad (1.89)$$

6.2 Caso de discos

El razonamiento anterior se aplica al caso de un medio bidimensional. Se tiene también (Fig I.5) :

$$E\{\cos \delta_i\} = 3/4 \quad (I.90)$$

Por otra parte, en forma análoga, el número total esperado de contactos N_p sobre los sectores definidos en los discos por una recta de intersección por unidad de longitud es :

$$E\{N_p\} = \lambda_L \cdot E_{1D}\{E\{N_s | D\}\} \quad (I.91)$$

donde

$E\{N_s | D\}$ esperanza del número de contactos sobre un sector para un disco de diámetro D

$E_{1D}\{ \}$ operador esperanza aplicado con la densidad de probabilidad granulométrica unidimensional de los discos

λ_L número esperado de discos intersecados por unidad de longitud

Nuevamente, se escribe ;

$$E\{N_s | D\} = p E\{N_c | D\} \quad (I.92)$$

donde

$E\{N_c | D\}$ esperanza del número total de contactos para un disco de diámetro D

p proporción del perímetro del disco representada por el sector

En este caso:

$$p = \delta / \pi \quad (I.93)$$

$$E\{p\} = (1/\pi) E\{\delta\} = (1/\pi) \int_0^{\pi/2} \delta \sin \delta \Delta \delta = 1/\pi \quad (I.94)$$

y :

$$E\{N_s | D\} = (1/\pi) E\{N_c | D\} \quad (1.95)$$

Por tanto :

$$E\{N_p\} = (\lambda_L / \pi) E_{1D} \{E\{N_c | D\}\} = (\lambda_L / \pi) E_{1D} \{N_c\} \quad (1.96)$$

De esta expresión se puede deducir la Ec 4.91 del texto principal tomando en cuenta la Ec 3.35 .

7. MODELO BIDIMENSIONAL

El modelo de simulación numérica del comportamiento mecánico de los medios granulares bidimensionales que se discute en 4.6.3.d (programa MODELO BIDIMENSIONAL) se basa en las consideraciones siguientes :

a) Se supone conocida la distribución inicial $P(\delta)$ de la orientación de los planos tangentes en los contactos entre partículas. Se admite que esta distribución presenta una doble simetría respecto a las direcciones vertical y horizontal.

b) Se admite que las fuerzas de contacto forman con las normales a los planos tangentes un ángulo aleatorio ρ con valor medio cuyo coseno está definido en el segundo miembro de la Ec 4.98 (también aplicable a medios bidimensionales) y con desviación estándar σ_ρ desconocida que se deja como un parámetro del modelo. Se supone que la densidad de probabilidad de este ángulo es Gaussiana.

c) Se aplica la presión confinante y se calcula en intervalos de valores de ρ de un grado, la probabilidad de deslizamiento de los contactos.

d) Se calculan las deformaciones correspondientes con base en consideraciones similares a las de Horne [1968], es decir suponiendo que la deformación es el resultado de la acumulación de deslizamientos a lo largo de cadenas de partículas según direcciones que coinciden con los ejes de los esfuerzos principales. (Fig 1.6). Se admite que los deslizamientos se presentan según las tangentes en los contactos. Se tiene entonces:

$$\varepsilon_x = k E\{\Delta U \cos \delta\} \quad (1.97)$$

$$\varepsilon_y = k E\{\Delta U \sen \delta\} \quad (1.98)$$

donde

k constante (del orden de 0.1)

ΔU cantidad igual a cero si no hay deslizamiento y a uno si lo hay

Las esperanzas $E\{\Delta U \cos \delta\}$ y $E\{\Delta U \sen \delta\}$ dependen de la distribución $P(\delta)$ y de las probabilidades de deslizamiento asociadas a cada valor de δ .

e) Se aplican incrementos del esfuerzo desviador y se

repiten los pasos c y d. Sin embargo, los cálculos de probabilidad de deslizamiento se realizan sobre las densidades de probabilidad truncadas (Fig 1.7), lo que es equivalente a considerar que se presenta una reorientación de las fuerzas de contacto. En los tramos de carga, la truncación se realiza solamente del lado $\rho < -\psi$ y se borra progresivamente la truncación en la otra dirección. En la descarga se procede a la inversa.

f) Simultáneamente, se modifica la densidad $\Gamma(\delta)$ para tomar en cuenta los efectos de desaparición y creación de nuevos contactos. Diversas hipótesis pueden considerarse para esta redistribución, la cual puede además asociarse con una variación de la porosidad.

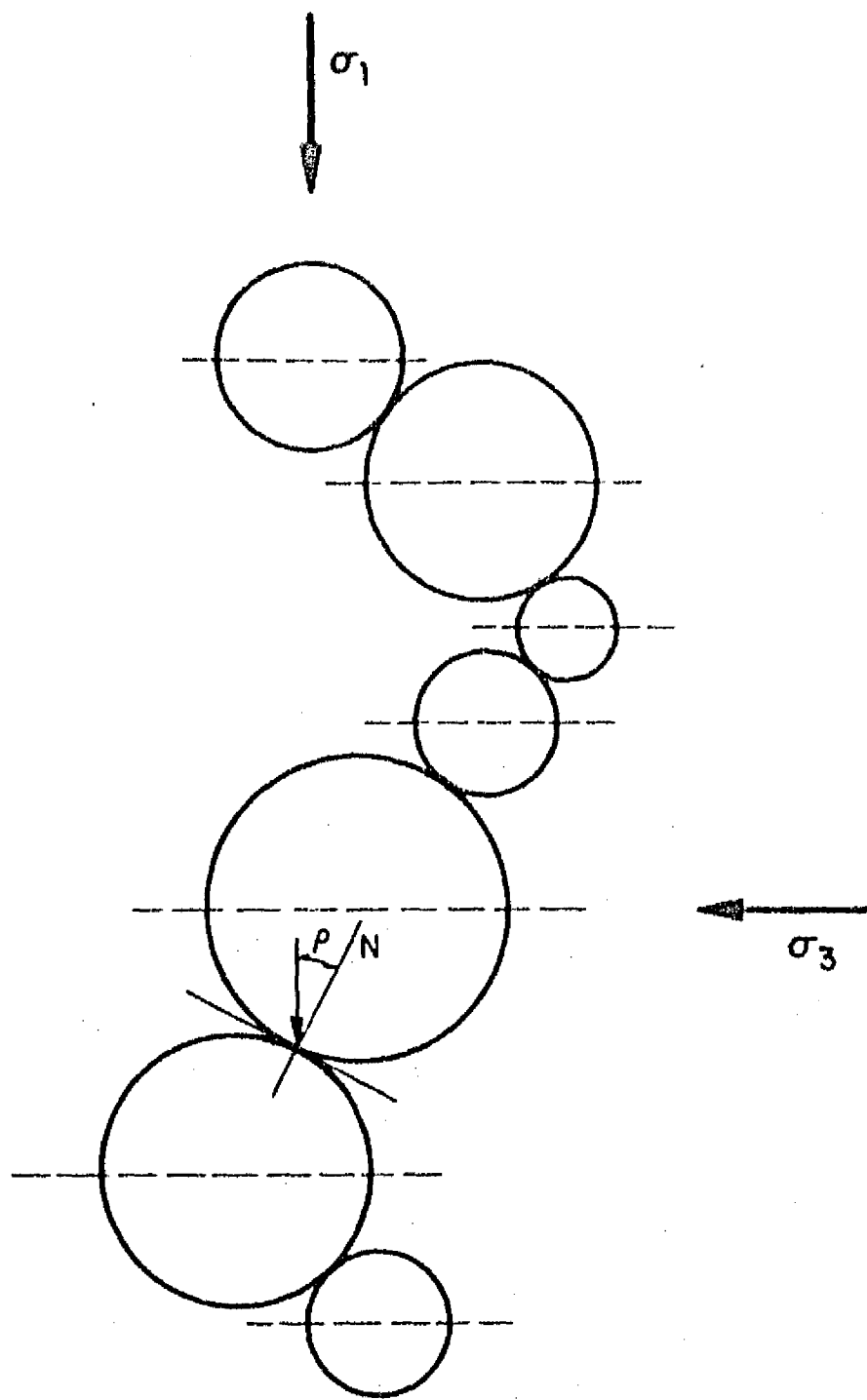


Fig I.6 Camino sólido de dirección general vertical a través de un medio granular

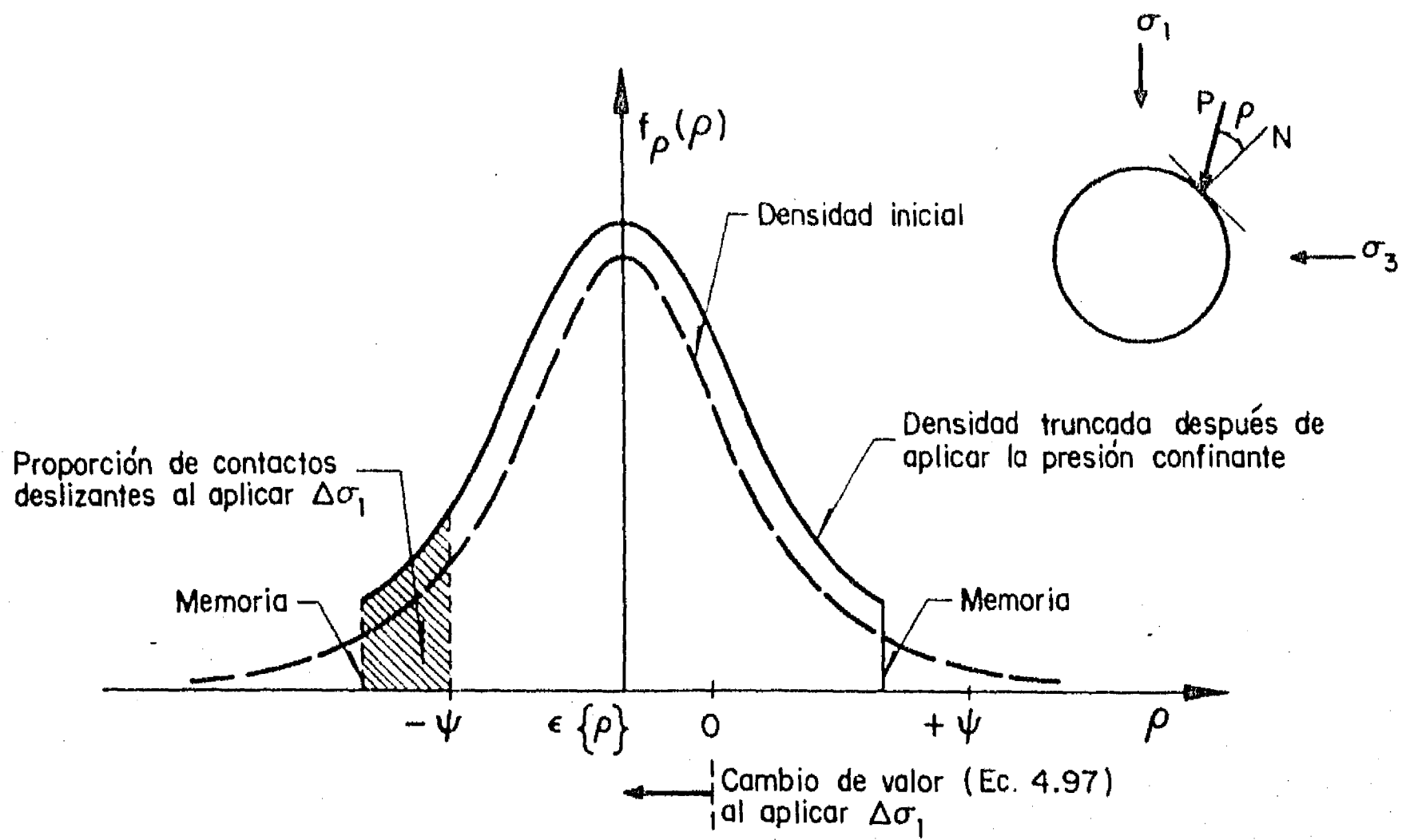


Fig I.7 Efecto de memoria por truncación de la densidad de probabilidad de la orientación de las fuerzas de contactos

ANEXO II

ANEXO II

PROGRAMAS PARA COMPUTADORA

TG1 (BASIC)

Transformación de una densidad granulométrica en volumen a una densidad en número.

TG2 (BASIC)

Transformación de una densidad granulométrica en número a una densidad en volumen.

TG3 (BASIC)

Transformación de una densidad granulométrica en número a las densidades en número y en volumen de las partículas intersecadas por un plano.

TG4 (BASIC)

Transformación de una densidad granulométrica en número a las densidades en número y en volumen de las partículas intersecadas por un sondeo recto.

TG5 (BASIC)

Transformación de una densidad granulométrica en número a las densidades en número y en área de los diámetros aparentes de las partículas intersecadas por un plano.

TG6 (BASIC)

Transformación de una densidad granulométrica en número a las densidades en número y en longitud de los diámetros aparentes de las partículas intersecadas por un sondeo recto.

LOGNORMAL (BASIC)

Ajuste de una distribución de probabilidad lognormal a una distribución granulométrica empírica.

ESTIMACION (BASIC y FORTRAN)

Estimación bayesiana de la granulometría tridimensional a partir de las granulometrías aparentes en cortes planos o sondeos rectos.

CIRCULOS (BASIC)

Formación de arreglos aleatorios de discos.

GRANULOMETRIA TEORICA (BASIC)

Cálculo de los parámetros granulométricos asociados a una densidad granulométrica trapezoidal particular.

GRANULOMETRIA OBTENIDA (BASIC)

Cálculo de los parámetros granulométricos obtenidos con el programa CIRCULOS.

HOMOGENEIDAD (BASIC)

Cálculo del número de partículas intersecadas por una recta por unidad de longitud en las estructuras simuladas.

RELVAC (BASIC)

Cálculo de la relación de vacíos dentro de las estructuras simuladas.

NUCONT (BASIC)

Cálculo del número de contactos por partícula y ajuste de un modelo de regresión lineal.

DISCONT (BASIC)

Comparación de la densidad de probabilidad del número de contactos con una distribución poissoniana.

ISTROPIA (BASIC)

Obtención del histograma de la repartición de los contactos sobre las partículas.

GRAVDS (BASIC)

Determinación de la distribución del tamaño de los poros en las estructuras de discos simuladas.

ESFERAS (BASIC Y FORTRAN)

Formación de arreglos aleatorios de partículas esféricas.

GRANUL/TEORICA (FORTRAN)

Cálculo de los parámetros granulométricos correspondientes a una distribución trapezoidal particular.

GRANUL/OBTENIDA (FORTRAN)

Cálculo de los parámetros granulométricos obtenidos con el programa ESFERAS.

HOMOGENEIDAD (FORTRAN)

Cálculo del número de partículas intersecadas por un plano por unidad de área en las estructuras simuladas.

POROSIDAD (FORTRAN)

Cálculo de la porosidad en volúmenes esféricos dentro de las estructuras simuladas.

POR/PARED (FORTRAN)

Cálculo de la porosidad en volúmenes paralelepípedicos cerca de las paredes.

NUMERO/CONTACTOS (FORTRAN)

Cálculo del número de contactos por partícula y ajuste de un modelo de regresión lineal.

DIST/CONTACTOS (FORTRAN)

Comparación de la densidad de probabilidad del número de contactos por partícula con una distribución poissoniana.

ANISOTROPIA (FORTRAN)

Determinación del histograma de la repartición de los contactos sobre la superficie de las partículas.

DIST/POROS (FORTRAN)

Determinación de la distribución de los tamaños de los poros en las estructuras simuladas.

FILTRO/PERM (FORTRAN)

Determinación de la esperanza de la distancia de recorrido de una partícula dentro de un filtro definido por su distribución de tamaños de poros.

ERGODICO (FORTRAN)

Estimación de la función de autocorrelación dentro de las estructuras simuladas.

INTEGRACION (BASIC Y FORTRAN)

Cálculo de la variancia de la porosidad dentro de un

volumen paralelepípedo o esférico por integración de la función de autocorrelación.

PART/ACTIVAS

Cálculo del porcentaje de partículas necesariamente inactivas dentro de las estructuras de partículas esféricas simuladas.

RELVAC/ESTR (FORTRAN)

Cálculo de la relación de vacíos estructural de las estructuras simuladas.

ESFERAS/MEZ (FORTRAN)

Cálculo de la porosidad obtenida con mezclas binarias.

PRIMER/CONTACTO (FORTRAN)

Determinación de la densidad de la distancia de primer contacto dentro de las estructuras simuladas.

CRUCE/POROS (FORTRAN)

Determinación de la densidad de probabilidad de los tamaños aparentes de los poros a lo largo de una recta dentro de las estructuras simuladas.

DESLIZ (BASIC)

Determinación de las inclinaciones de los planos tangentes en los contactos para las cuales se presenta deslizamiento.

MODELO BIDIMENSIONAL (BASIC)

Simulación cualitativa del comportamiento esfuerzo-deformación de un material granular bidimensional.