



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

FLUJO UNIFORME ALREDEDOR DE UN CILINDRO CIRCULAR INFINITO: UNA REVISION.

T E S I S

Que para obtener el título de

F I S I C O

presenta

ABRAHAM MEDINA OVANDO

Director: Dr. Ramón Peralta - Fabi

México, D. F.

1987



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

INTRODUCCION	2
CAPITULO I. ECUACIONES DINAMICAS Y SOLUCIONES LOCALMENTE VALIDAS A BAJO NUMERO DE REYNOLDS	
1. Introducci3n	4
2. Ecuaciones dinámicas y condiciones a la frontera	5
3. Formulaci3n del problema	8
4. La aproximaci3n y la paradoja de Stokes	14
5. La aproximaci3n de Oseen	20
6. Discusi3n	24
CAPITULO II. SOLUCION UNIFORME POR ACOPLAMIENTO DE EXPANSIONES ASINTOTICAS	
1. Introducci3n	27
2. Revisi3n de la teoría singular de perturbaciones	27
3. La soluci3n de Kaplun y de Proudman y Pearson	31
4. Expansi3n generalizada	39
5. Discusi3n	41
CAPITULO III. SOLUCION UNIFORME EN SERIE DE POTENCIAS	
1. Introducci3n	43
2. Cambio de variable y ecuaciones dinámicas	44
3. Esquema general de soluci3n y cálculo del arrastre	45
4. Resultados y comparaci3n con otros cálculos y resultados experimentales	54
DISCUSION GENERAL Y PERSPECTIVAS	58
APENDICE A	62
REFERENCIAS	64

INTRODUCCIÓN

El movimiento, alrededor de un cilindro, de un fluido viscoso no acotado, que viaja en una dirección perpendicular a su eje, es un problema clásico. Este combina la aparente simplicidad de flujo plano con la inherente no-linearidad de las ecuaciones dinámicas.

Las ecuaciones de movimiento adimensionalizadas contienen en la parte inercial (no-lineal), como un factor, al parámetro del flujo, R , que se conoce como el número de Reynolds.

Los flujos considerados aquí son aquellos con R pequeño. El número de Reynolds $R=Ul/\nu$ puede ser pequeño porque la velocidad característica U o la longitud típica l son pequeñas o porque la viscosidad ν es grande. Cuando U es pequeña se tiene un movimiento lento; si l es pequeña se tiene el movimiento de objetos diminutos, por ejemplo, movimiento Browniano.

Por una solución al problema, se entiende, ya sea las dependencias explícitas de los campos de velocidad y presión con respecto a las coordenadas y el número de Reynolds, o una expresión para la función de corriente con las mismas dependencias.

En el presente trabajo se revisan y discuten, en primer lugar, dos métodos aproximados de solución para las ecuaciones linealizadas. Cuando el número de Reynolds es pequeño, es posible, proponer linearizaciones y por tanto encontrar (si existen) soluciones aproximadas. Como se verá en el capítulo I, las aproximaciones solo son parcialmente correctas en ciertas regiones del flujo. En el capítulo II se hace una revisión de una técnica que permite resolver el problema y obtener una solución que se satisface en todo el espacio. Esta es conocida como acoplamiento

de expansiones asintóticas; la solución que se obtiene por dicho método resulta ser una serie complicada del número de Reynolds, que depende en sus primeros términos, de funciones $(\text{Ln } R)^{-n}$, donde n es el índice de la serie. Análisis más cuidadosos muestran que la serie también depende de cantidades de $O(R)$ (esto es, funciones lineales en R), que llegan a ser mayores que $(\text{Ln } R)^{-4}$ para $R > 0.00008$. No obstante, calcular explícitamente estas dependencias resulta difícil. Otro aspecto en contra de la solución mediante esta técnica es que solo funciona para números de Reynolds muy pequeños ($R < 0.4$). Así, la utilidad práctica del método resulta muy restringida.

Las limitaciones del formalismo anterior motivan el estudio de un método alternativo desarrollado muy recientemente y que toma en cuenta la no-linearidad de las ecuaciones en la región completa de flujo. La virtud de este nuevo enfoque es su simpleza física y matemática; los primeros resultados sugieren que la técnica es cualitativamente correcta. En el capítulo III se hace una revisión de este método a partir de sus consideraciones más fundamentales, se discuten sus alcances y limitaciones.

Finalmente, se hace un resumen general, principalmente del nuevo enfoque. Se plantean críticas y perspectivas de trabajo para mejorar los resultados hasta ahora encontrados mediante el último formalismo.

CAPITULO I.

ECUACIONES DINÁMICAS Y SOLUCIONES LOCALMENTE VÁLIDAS A BAJO NÚMERO DE REYNOLDS.

1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se establecen las ecuaciones dinámicas que describen el flujo estacionario de un fluido viscoso alrededor de un cilindro circular infinito; se discuten las soluciones que se obtienen, bajo ciertas aproximaciones, cerca del cilindro (Stokes) o lejos de este (Oseen) y que serán fundamentales en el capítulo II para obtener una solución uniformemente válida por acoplamiento de expansiones asintóticas.

En la sección 2 se encuentran las ecuaciones que gobiernan un fluido viscoso; se formulan los principios básicos bajo los cuales es posible determinar la dinámica del fluido en forma cerrada y se dan las condiciones a la frontera. En la sección 3, explotando al máximo la simetría del flujo dada por la geometría particular que se trata, se encuentran las ecuaciones del problema y sus condiciones a la frontera. La sección 4 trata de la solución a las ecuaciones cerca del cilindro, bajo la llamada aproximación de Stokes y, de aquí, se discute la validez de la solución en términos de la paradoja de Stokes. La sección 5 comprende el uso de la aproximación de Oseen para obtener una solución uniforme lejos del cilindro. En la sección 6 se presenta una discusión de la naturaleza singular del problema y se plantea la necesidad de una técnica sistemática (teoría singular de perturbaciones) adecuada para este problema que es discutida en el capítulo siguiente.

2. ECUACIONES DINÁMICAS Y CONDICIONES A LA FRONTERA. 1.2.3)

Las ecuaciones que describen la dinámica macroscópica de un fluido, pueden ser formuladas recurriendo a los principios de conservación de masa, momento y energía, junto con dos ecuaciones que dan las condiciones específicas sobre el estado termodinámico del fluido. La forma funcional de las ecuaciones es la siguiente ²⁾,

$$\partial \rho / \partial t + \partial (\rho u_k) / \partial x_k = 0, \quad (1.1.a)$$

$$\begin{aligned} \rho \partial u_j / \partial t + \rho u_k \partial u_j / \partial x_k &= -\partial p / \partial x_j + \partial / \partial x_k (\lambda \partial u_k / \partial x_k) \\ &+ \partial / \partial x_i [\mu (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i - 2/3 \delta_{ij} \partial u_k / \partial x_k)] + \rho f_j, \end{aligned} \quad (1.1.b)$$

$$\begin{aligned} \rho e \partial t + \rho u_k \partial e / \partial x_k &= -p \partial u_k / \partial x_k + \partial / \partial x_j (\kappa \partial T / \partial x_j) + \\ &\lambda (\partial u_k / \partial x_k)^2 + \mu (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \partial u_j / \partial x_i, \end{aligned} \quad (1.1.c)$$

$$p = p(\rho, T), \quad (1.1.d)$$

$$e = e(\rho, T), \quad (1.1.e)$$

Donde se ha utilizado la convención de suma sobre los índices i, j .

Estas ecuaciones son en primer lugar la ecuación de continuidad que expresa la conservación de la masa y la continuidad del campo de velocidades, las ecuaciones (1.1.b), llamadas ecuaciones de Navier-Stokes, son la formulación matemática de la ley de la conservación del momento lineal, y forman un sistema de tres ecuaciones escalares para cada componente u_j del campo de velocidades que están relacionadas con la presión termodinámica p , la densidad de masa ρ y las fuerzas externas f_j , y tienen como parámetros del fluido la viscosidad cortante ó dinámica μ y el

segundo coeficiente de viscosidad ó viscosidad volumétrica λ . La tercera ecuación establece el principio de conservación de la energía, ésta es una ecuación escalar para la densidad de energía interna e , por unidad de masa, como función de la temperatura T , los campos de velocidad, de presión y de la densidad; los parámetros que intervienen en la ecuación son los coeficientes de viscosidad μ y λ , y el coeficiente de conductividad térmica κ . Las dos últimas son ecuaciones de estado para la presión y la energía.

Debe notarse que el conjunto de ecuaciones (1.1) es un sistema de siete ecuaciones acopladas, en el cual también hay siete variables desconocidas que son las tres componentes del campo de velocidades y las cantidades p , ρ , T , y e . Esto es un sistema cerrado de ecuaciones. Algunos comentarios adicionales son que para establecer las ecuaciones (1.1) se ha recurrido a las hipótesis de que la ley de conducción de calor de Fourier se cumple, y además, el tensor de esfuerzos está relacionado linealmente al tensor de gradientes de la velocidad y depende solo de este, lo cual define a un fluido Newtoniano²). Así mismo se supone que la hipótesis de equilibrio local se mantiene, ésta puede ser expresada de la siguiente manera: se sabe que, en los sistemas en equilibrio, cualquier variable termodinámica distinta de las dos elegidas para determinar los estados del fluido, puede ser expresada en términos de éstas a través de una relación funcional, llamada ecuación de estado, cuya existencia es consecuencia de las leyes de la termodinámica pero cuya forma explícita, puede obtenerse, o bien de una teoría microscópica, o bien del experimento. Para fluidos en movimiento se supone que dichas relaciones funcionales siguen siendo válidas localmente, esto es, alrededor de cada punto de fluido y para cada

instante de tiempo. Además los parámetros λ , μ , y α se suponen conocidos del experimento y pueden ser constantes o funciones específicas de la temperatura y la presión.

Si se supone que se trata con un fluido incompresible ($\rho = \text{cte.}$), como es el caso en el presente trabajo, las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes se desacoplan de la ecuación de energía quedando las ecuaciones dinámicas más simples:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (1.2.a)$$

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} + \rho f_j. \quad (1.2.b)$$

Las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes son cuatro ecuaciones escalares involucrando solo p y u_j . Esto es, los campos de velocidad y presión pueden ser determinados sin hacer referencia a la ecuación de energía.

Las condiciones a la frontera que se encuentran para el flujo de un fluido viscoso tienen dos partes. Cuando el fluido se halla en contacto con un sólido, la velocidad tangencial es la misma para ambos ⁸). Esta afirmación es de carácter físico, fundamentada en experimentos y es conocida como la condición de adherencia o condición de no-deslizamiento. De igual modo se mantiene la condición cinemática de que la velocidad normal del fluido en contacto con una frontera móvil es igual a la velocidad normal de la frontera, tanto si el fluido es viscoso como si no lo es ⁸). Así no hay movimiento relativo entre la pared del sólido y el fluido, esto es

$$\underline{u} = 0 \quad \text{en la pared,} \quad (1.3)$$

si la pared se mueve con velocidad v entonces

$$\underline{u} = \underline{v} \quad \text{en la pared.} \quad (1.4)$$

Estas son las condiciones a la frontera para un fluido viscoso.

En resumen, para un fluido incompresible viscoso se cumplen las ecuaciones (1.3) y (1.4). En la proxima sección se hará uso de ellas para formular las ecuaciones dinámicas particulares del problema.

3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

Considerese ahora el movimiento de un fluido viscoso no acotado con vector velocidad u en dirección paralela al eje x y perpendicular al eje de un cilindro de radio a , que por construcción coincide con el eje z y tiene largo infinito. Ver figura 1, donde también se fijan los sistemas coordenados.

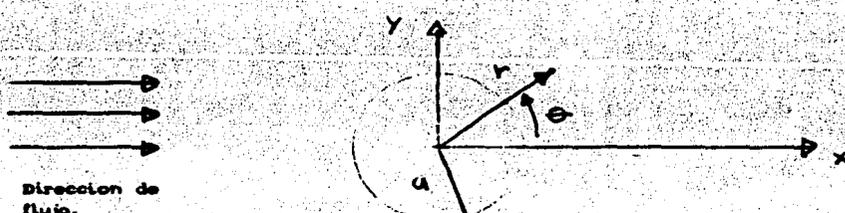


Figura 1. Dirección de flujo y sistemas coordenados (x, y) y (r, θ) .

En este trabajo se considera que la velocidad en infinito es

$$\underline{u} = U \hat{i} \quad \text{con } U = \text{constante,}$$

donde \hat{i} es un vector unitario en la dirección del eje x .

Además, se requiere encontrar soluciones estacionarias. En el caso de un cilindro infinitamente largo hay invariancia traslacional a lo largo del eje del cilindro, esto es, la solución al problema será independiente de la coordenada z . Si la distribución de velocidad en un fluido en movimiento depende de solo dos coordenadas (digamos, x , y) y la velocidad es en cada

lugar paralela al plano xy , el flujo se dice que es bidimensional o plano. Finalmente, no se considerarán fuerzas externas i.e. $f_j = 0$. En estas condiciones las ecuaciones (1.2) toman la forma

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (1.5.a)$$

$$u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -1/\rho \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i}, \quad (1.5.b)$$

o en representación vectorial

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, \quad (1.5.a)'$$

$$(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -1/\rho \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{u}, \quad (1.5.b)'$$

donde se ha introducido la viscosidad cinemática $\nu = \mu/\rho$, que tiene unidades de longitud cuadrada entre tiempo.

Las condiciones a la frontera requieren que:

$$\underline{u} = 0 \quad \text{en} \quad r = a, \quad (1.6.a)$$

$$\underline{u} = U \hat{i} \quad \text{en} \quad r = \infty, \quad (1.6.b)$$

Con las ecuaciones (1.5) y las condiciones a la frontera (1.6) se define el problema matemático. Por tanto, el flujo estará completamente determinado si se conocen las formas explícitas de los campos u y p .

Una forma completamente adimensional de las relaciones (1.5) y (1.6), que será de utilidad, puede ser encontrada del modo siguiente: la velocidad \underline{u} es escalada por la magnitud U , las coordenadas geométricas (x, y) y r son escaladas por el radio del cilindro, a . En estas condiciones el nuevo campo de velocidades será

$$\underline{u}' = \underline{u}/U, \quad (1.7)$$

para las coordenadas geométricas se tiene que

$$x' = x/a; \quad y' = y/a; \quad r' = r/a, \quad (1.8)$$

y en particular

(1.9)

$$r^* = 1, \quad \text{si } r = a;$$

el radio es 1 en las nuevas coordenadas. Finalmente si p es la presión termodinámica y p^* es la nueva presión adimensional ambas estarán relacionadas por

$$p^* = (a/\mu U) p,$$

entonces las expresiones (1.5) y (1.6) se transforman en

$$\nabla^* \cdot \underline{u}^* = 0, \quad (1.10.a)$$

$$R (\underline{u}^* \cdot \nabla^*) \underline{u}^* = -\nabla^* p + \nabla^{*2} \underline{u}^*,$$

con condiciones a la frontera

$$\underline{u}^*(r=1, \theta) = \underline{0} \quad \text{y} \quad \underline{u}^*(\infty, \theta) = \underline{\hat{1}}. \quad (1.11)$$

R es una cantidad adimensional definida por

$$R = aU/\nu, \quad (1.12)$$

y se conoce número de Reynolds.

Las ecuaciones (1.10.b) y (1.10.a) respectivamente, toman en coordenadas polares la forma:

$$R [u_r (\partial u_r / \partial r) + u_\theta / r (\partial u_r / \partial \theta) - (u_\theta^2 / r)] = -(\partial p / \partial r) + (\partial^2 u_r / \partial r^2) + 1/r^2 (\partial^2 u_r / \partial \theta^2) + 1/r (\partial u_r / \partial r) - 2/r^2 (\partial u_\theta / \partial \theta) - u_r / r^2,$$

$$R [u_r (\partial u_\theta / \partial r) + u_\theta / r (\partial u_\theta / \partial \theta) + u_r u_\theta / r] = -1/r (\partial p / \partial \theta) + (\partial^2 u_\theta / \partial r^2) + 1/r^2 (\partial^2 u_\theta / \partial \theta^2) + 1/r (\partial u_\theta / \partial r) + 2/r^2 (\partial u_r / \partial \theta) - u_\theta / r^2,$$

$$(\partial u_r / \partial r) + 1/r (\partial u_\theta / \partial \theta) + u_r / r = 0.$$

Luego, las condiciones a la frontera (1.11) se hacen

$$u_r = \cos \theta$$

$$u_\theta = -\sin \theta$$

si $r \rightarrow \infty$

* Nombre sugerido por Sommerfeld (referencia 4).

$$u_r(r=1, \theta) = 0.$$

$$u_\theta(r=1, \theta) = 0.$$

El parámetro R es una cantidad formada por las dimensiones características del flujo y es el único parámetro en las ecuaciones. En general, para fluidos viscosos el número de Reynolds es el único parámetro adimensional necesario. Existen métodos generales relacionados con la búsqueda de parámetros físicos adimensionales de cada fenómeno específico, éstos métodos son conocidos con el nombre genérico de leyes de semejanza ^{1,4}).

Se considera conveniente ilustrar, sin recurrir a las técnicas formales ⁴), como se puede obtener el parámetro adimensional característico de un fluido viscoso en movimiento uniforme.

De los parámetros que caracterizan al fluido mismo, solo la viscosidad $\nu = \mu/\rho$ aparece en las ecuaciones (1.5). Las funciones a ser determinadas al resolver las ecuaciones son u y el cociente p/ρ de la presión y la densidad. Más aún, si el flujo depende, a través de las condiciones a la frontera, de la forma y dimensiones del cuerpo, sus propiedades geométricas estarán determinadas por una dimensión lineal, que se denota por l . Sea ahora U la magnitud de la velocidad de la corriente principal. Entonces cualquier flujo estará especificado por tres parámetros, ν, U y l . Se verifica fácilmente que la única cantidad adimensional formada por dichas magnitudes es

$$R = l U / \nu,$$

el número de Reynolds. Cualquier otro parámetro adimensional puede ser expresado en función de R .

Ahora, se miden longitudes en términos de l y velocidades en términos de U , i.e., se introducen las cantidades adimensionales $u/U, r/l$. Es evidente que la distribución de velocidades obtenida

al resolver las ecuaciones de flujo incompresible está dada por una función de la forma

$$u = Uf(r/l;R) .$$

La anterior relación permite asegurar que, en dos flujos diferentes del mismo tipo (p.e. flujo pasando cilindros circulares de diferente radio por fluidos de distintas viscosidades), las velocidades u/U son las mismas funciones de la variable r/l , si el número de Reynolds es el mismo en cada caso. Los flujos que pueden ser obtenidos uno del otro simplemente cambiando la unidad de medida se dice que son semejantes. Esta es la llamada ley de semejanza⁴).

Otras formas de presentar las ecuaciones dinámicas del problema son mostradas a continuación.

La vorticidad $\underline{\omega}$ de un flujo se define⁴) como:

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} , \quad (1.13)$$

donde \underline{u} es el campo de velocidades.

Para un flujo plano este vector siempre es perpendicular al plano, en este caso y siguiendo la regla del sacacorchos la dirección de $\underline{\omega}$ siempre es \hat{k} (\hat{k} es un vector unitario en la dirección de z).

En vista de la definición anterior y la ecuación (1.10.a) se tiene que $\nabla \times \underline{\omega} = -\nabla^2 \underline{u}$, por tanto, las ecuaciones (1.10) serán

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 , \quad (1.14.a)$$

$$R(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\nabla p - \nabla \times \underline{\omega} , \quad (1.14.b)$$

con las mismas condiciones a la frontera (relaciones (1.11)).

Esta forma será especialmente útil en la siguiente sección.

Un concepto de gran importancia en la descripción de un flujo estacionario es el de líneas de corriente, que se definen como

líneas cuyas tangentes son, en cada lugar, paralelas al vector velocidad y se determinan por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$dx/u_x = dy/u_y = dz/u_z.$$

En flujos estacionarios las líneas no varían con el tiempo y coinciden con las trayectorias de las partículas de fluido. En flujo no-estacionario esta coincidencia no ocurre: las tangentes de las líneas de corriente dan las direcciones de las velocidades de las partículas de fluido en varios puntos en el espacio en un instante dado, mientras las tangentes a las trayectorias dan las direcciones de las velocidades de partículas de fluido en varios tiempos.

Para resolver problemas en flujo bidimensional, algunas veces es conveniente expresar la velocidad en términos de la función de corriente. De la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 = \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y$$

se ve que las componentes de la velocidad pueden ser escritas como las derivadas

$$u_x = \partial \psi / \partial y, \quad u_y = -\partial \psi / \partial x \quad (1.15)$$

de alguna función $\psi(x, y)$, llamada la función de corriente.

La ecuación de continuidad es automáticamente satisfecha.

Si se conoce la función de corriente se puede inmediatamente determinar la forma de las líneas de corriente para flujo estacionario. La ecuación diferencial de las líneas de corriente (en flujo bidimensional) es $dx/u_x = dy/u_y$ o $u_x dy - u_y dx = 0$; expresa el hecho de que la dirección de la tangente es la dirección de la velocidad. Sustituyendo (1.15), se tiene

$$(\partial \psi / \partial x) dx + (\partial \psi / \partial y) dy = d\psi = 0$$

de aquí $\psi = \text{cte}$. Así las líneas de corriente son la familia de

curvas obtenidas de hacer la función de corriente $\psi(x,y)$ igual a una constante arbitraria. De igual modo la función de corriente en coordenadas polares se relaciona a las componentes de la velocidad por:

$$u_r = 1/r (\partial \psi / \partial \theta), \quad u_\theta = -(\partial \psi / \partial r). \quad (1.15)'$$

Al utilizar las ecuaciones adimensionales (1.10) y las definiciones (1.15) para la función de corriente se encuentra una sola ecuación dinámica para la función ψ^* que toma la forma:

$$\nabla_r^2 \psi = -R/r J(\psi, \nabla_r^2 \psi), \quad (1.16)$$

donde:

$$J(f,g) = [f_r g_\theta - f_\theta g_r]$$

es el jacobiano y los subíndices indican derivada parcial, además

$$\nabla_r^2 = (\partial^2 / \partial r^2) + 1/r (\partial / \partial r) + 1/r^2 (\partial^2 / \partial \theta^2).$$

Las condiciones de no-deslizamiento sobre el cilindro son:

$$\psi(1,\theta) = \partial \psi / \partial r(1,\theta) = 0. \quad (1.17)$$

Aquí se ha fijado la línea de corriente $\psi = 0$ de tal forma que coincida con el perímetro del cilindro.

La ecuación (1.16) con las condiciones (1.17) constituye otra forma de proponer el problema del flujo alrededor del cilindro y será útil al trabajar con la técnica de acoplamiento asintótico.

4. LA APROXIMACIÓN Y LA PARADOJA DE STOKES ^{2,5}.

El problema formulado en la sección anterior ha motivado trabajo de investigación por más de 130 años, no obstante, fue hasta mediados del presente siglo ^{7,10} cuando se encontró una solución uniformemente válida en todo el espacio a bajo número de

Reynolds*. La principal dificultad que se enfrenta al intentar resolver las ecuaciones es su no-linearidad. Stokes (1851) planteó un método de solución basado en una teoría regular de perturbaciones, esto es, se propone como solución para las ecuaciones de Navier-Stokes adimensionales, series de potencias del número de Reynolds, que en este problema, es el parámetro perturbativo.

En el resto de esta sección se intentará resolver las ecuaciones utilizando el método de Stokes, ello ilustrará como una teoría regular de perturbaciones es incapáz de conducir a una solución correcta en todo el espacio. Por simplicidad de notación se eliminarán las " " de las ecuaciones adimensionales.

Inicialmente se proponen soluciones en series de potencias del número de Reynolds (que se supone son convergentes) del tipo:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} R^n u_n,$$

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} R^n p_n.$$

Substituyendo estas expresiones en las ecuaciones (1.10) e igualando coeficientes de iguales potencias en R se encuentra un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales acopladas i.e., para cada orden en R se tendrá un par de ecuaciones que dependen de todas las soluciones anteriores.

En particular, las ecuaciones a orden 0 y orden 1 en R son:

* Es importante mencionar que la estabilidad del flujo cuya solución se desea obtener depende fundamentalmente del número de Reynolds, en general, entre mas pequeño es este, mas estable es el flujo.

$$R^0 : \quad \nabla \cdot \underline{u}_0 = 0, \quad (1.18.a)$$

$$\nabla p_0 + \nabla \times \underline{\omega}_0 = Q; \quad \underline{\omega}_0 = \nabla \times \underline{u}_0, \quad (1.18.b)$$

$$R^1 : \quad \nabla \cdot \underline{u}_1 = 0, \quad (1.19.a)$$

$$\nabla p_1 + \nabla \times \underline{\omega}_1 = -(\underline{u}_0 \cdot \nabla) \underline{u}_0; \quad \underline{\omega}_1 = \nabla \times \underline{u}_1. \quad (1.19.b)$$

Por otro lado las definiciones (1.15) para la función de corriente permiten introducir un vector $\underline{\psi}$ tal que

$$\underline{\psi} = \psi \hat{k}.$$

entonces el campo \underline{u} puede ser expresado como

$$\underline{u} = \nabla \times \underline{\psi}$$

que cumple con la ecuación de continuidad de la siguiente forma

$$\nabla \cdot \underline{\psi} = 0$$

y por tanto la magnitud de la vorticidad $\underline{\omega}$ se relaciona con la función de corriente ψ a orden n por

$$\omega_n(x,y) = -\nabla^2 \psi_n(x,y); \quad \underline{\omega}_n = \nabla \times \underline{u}_n,$$

en particular si $n=0$

$$\omega_0(x,y) = -\nabla^2 \psi_0(x,y); \quad \underline{\omega}_0 = \nabla \times \underline{u}_0. \quad (1.20)$$

Por otro lado, el rotacional aplicado a la primera ecuación (1.18.b) implica que

$$\nabla^2 \underline{\omega}_0 = 0. \quad (1.21)$$

La ecuación (1.21) es una ecuación de Laplace con soluciones armónicas, que se pueden representar fuera del cilindro $r=1$ por una suma con coeficientes desconocidos. La geometría del problema condiciona al campo de velocidades a ser simétrico con respecto al eje x y a la vorticidad a ser un campo antisimétrico. Así, la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es

$$\omega_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \text{ sen } n\theta, \quad (1.22)$$

igualando (1.20) y (1.22) se tiene una ecuación para ψ_0

$$\partial^2 \psi_0 / \partial r^2 + 1/r \partial \psi_0 / \partial r + 1/r^2 \partial^2 \psi_0 / \partial \theta^2 = -\sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \sin n\theta, \quad (1.23)$$

con condiciones de no deslizamiento dadas por (1.17).

Para resolver la ecuación (1.23), se propone

$$\psi_0(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{(n)}(r) \sin n\theta, \quad (1.23)'$$

se sigue entonces que

$$L^{(n)} \phi^{(n)} = d^2 \phi^{(n)} / dr^2 + 1/r d\phi^{(n)} / dr - n^2 / r^2 \phi^{(n)} = -a_n r^n - b_n r^{-n}, \quad (1.24)$$

con $L^{(n)} = d^2 / dr^2 + 1/r d/dr - n^2 / r^2$, de aquí es fácil ver que

$$L^{(n)} r^m = (m^2 - n^2) r^{m-2}, \quad (1.25.a)$$

y escogiendo $m = n+2$, se tendrá

$$L^{(n)} r^{n+2} = (4n+4) r^n \quad n \neq -1, \quad (1.25.b)$$

si $n = -1$ entonces

$$L^{(-1)} r \ln r = 2r^{-1}, \quad (1.25.c)$$

las identidades (1.25) y la ecuación (1.24) dan

$$\phi^{(0)} = A_1 r^3 + B_1 r \ln r + C_1 r + D_1 / r, \quad (1.26.a)$$

$$\phi^{(n)} = A_n r^{n+2} + B_n r^{2-n} + C_n r^n + D_n / r^n, \quad n=2, 3, \dots \quad (1.26.b)$$

por tanto

$$d\phi^{(0)} / dr = 3A_1 r^2 + B_1 (\ln r + 1) + C_1 - D_1 / r^2, \quad (1.27.a)$$

$$d\phi^{(n)} / dr = (2+n)A_n r^{n+1} + (2-n)B_n r^{1-n} + nC_n r^{n-1} - nD_n / r^{n+1}, \quad n \geq 2 \quad (1.27.b)$$

A las ecuaciones (1.26) y (1.27) se les aplican las condiciones a la frontera (1.17) del siguiente modo

$$u_x = \partial \psi / \partial y = \partial \psi / \partial r \partial r / \partial y + \partial \psi / \partial \theta \partial \theta / \partial y = \sin \theta \partial \psi / \partial r + \cos \theta / r \partial \psi / \partial \theta = 1$$

si $r \rightarrow 0$

$$u_y = -\partial\psi/\partial x = -\cos\theta \partial\psi/\partial r + \sin\theta/r \partial\psi/\partial\theta = 0 \quad \text{si } r \rightarrow \infty$$

entonces, por la regularidad de las soluciones debe ocurrir que

$$\partial\psi/\partial r \rightarrow \sin\theta, \quad 1/r \partial\psi/\partial\theta \rightarrow \cos\theta \quad (r \rightarrow \infty), \quad (1.28)$$

i.e., se cumplen las condiciones en ∞ para las componentes de la velocidad en coordenadas polares (ec. (1.11)).

Las condiciones (1.28) y las ecuaciones (1.23)*, (1.26) y (1.27) se cumplen si y sólo si,

$$A_1 = B_1 = A_n = C_n = 0 \quad \text{y} \quad C_1 = 1.$$

En cuyo caso la función de corriente a primer orden es

$$\psi_0 = (r + D_1/r) \sin\theta.$$

Por otro lado si $r \rightarrow 1$, se tiene que

$$\psi_0(1, \theta) = 0, \quad \partial\psi_0(1, \theta)/\partial r = 0,$$

lo cual significa que ambas condiciones a la frontera no se cumplen simultáneamente. Si la solución no existe para ψ_0 , se debe de ir a orden más alto en la serie, esto significa tomar las ecs. (17) del siguiente modo

$$\nabla \cdot \underline{u}_1 = 0, \quad (17.a)^*$$

$$\nabla \cdot \underline{p}_1 + \nabla \times \underline{\omega}_1 = \underline{0}, \quad (17.b)^*$$

que es equivalente a las ecuaciones (1.18) i.e., a orden 1 en R tampoco habrá solución, lo anterior se mantiene a cualquier orden en R . La solución en series de potencias del número de Reynolds así formulada no existe.

Este comportamiento es conocido como la paradoja de Stokes y es debido a que en cada orden se ha despreciado el término inercial $R(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}$ en las ecuaciones de movimientos.

El hecho de que no exista una solución uniforme para todo el espacio no limita el que pueda hablarse de una solución local,

* Para el problema del flujo alrededor de una esfera, la solución a segundo orden diverge, ésta es conocida como la paradoja de Whitehead.

esto es, una solución que satisfaga una sola condición a la frontera. Se encontrará ahora la expresión menos divergente para la función de corriente, que es una solución que describa al flujo sobre cilindro y muy cerca de este aunque no lo haga en infinito. Del tratamiento anterior puede verse que la condición que nos da la divergencia más débil posible es que

$$B_1 = 0,$$

entonces las ecuaciones (1.26) y (1.27) llevan a las condiciones

$$\phi^{(1)}(1) = 0 = C_1 + D_1,$$

$$\phi^{(n)}(1) = 0 = B_n + D_n \quad n=2,3,\dots,$$

$$\partial\phi^{(1)}/\partial r(1) = 0 = B_1 + C_1 - D_1,$$

$$\partial\phi^{(n)}/\partial r(1) = 0 = (2-n)B_n - nD_n \quad n=2,3,\dots,$$

lo cual implica que $B_n = D_n = 0$ para $n=1,2,3,\dots$. Entonces

$$C_1 = -D_1 \quad ; \quad B_1 = 2D_1,$$

por tanto, la expresión menos divergente posible para la función de corriente es

$$\psi_0(r, \theta) = D_1 (1/r - r + 2r \ln r) \quad (1.29)$$

Esta forma de la función de corriente es conocida como la aproximación de Stokes y será de utilidad en el siguiente capítulo. Un comentario adicional es que al obtener las ecuaciones de flujo de Stokes, el término inercial $R(\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u}$ en las ecuaciones (1.10) de orden Ra/r (ya que U es adimensional) a la distancia r/a fue despreciado al introducir la aproximación de Stokes, mientras el término viscoso $\nabla^2 \underline{u}$ de orden a^2/r^2 fue retenido. Las magnitudes de ambos serán comparables si

$$R a/r = a^2/r^2 \text{ o } r = O(a/R),$$

lo que significa que la aproximación de Stokes sólo es válida hasta distancias del orden de a/R , más allá de esta región las bases de la aproximación dejan de ser válidas.

5. LA APROXIMACIÓN DE OSEEN ^{3,6)}

La aproximación de Stokes sólo funciona cuando los efectos viscosos son dominantes respecto a los inerciales. No obstante, cuando se está muy alejado del cilindro la velocidad de la corriente en cualquier punto difiere muy poco de la velocidad de corriente uniforme.

Oseen (1910) sugirió que a enormes distancias las componentes de la velocidad \underline{u} del fluido pueden ser escritas como:

$$(U + u_x, u_y),$$

donde u_x, u_y son las respectivas componentes de la velocidad debidas a la perturbación producida por el cilindro; que se espera lleguen a ser despreciablemente pequeñas a distancias muy alejadas del cuerpo. Al sustituir este campo de velocidades en las ecuaciones (1.5) y despreciar términos de orden mayor al cuadrático en u_x y u_y las ecuaciones linearizadas resultan ser

$$(\underline{U} \cdot \nabla) \underline{u} = -1/\rho \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{u}, \quad (1.30.a)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, \quad (1.30.b)$$

con condiciones a la frontera

$$\underline{u} = -U \underline{i} \text{ en } r=a, \quad (1.31.a)$$

$$\underline{u} = 0 \text{ en } r=\infty, \quad (1.31.b)$$

o en coordenadas polares

$$u_r = U \cos \theta, \quad u_\theta = -U \sin \theta, \text{ en } r = a. \quad (1.32.a)$$

$$u_r = u_\theta = 0 \text{ en } r = \infty. \quad (1.32.b)$$

Para encontrar soluciones a las ecuaciones primeramente se toma

la divergencia de la ec. (1.30.a) teniendo en cuenta la ec. (1.30.b), de aquí resulta que

$$\nabla^2 p = 0 \quad , \quad (1.33)$$

las soluciones a esta ecuación son funciones armónicas.

Bajo estas condiciones es posible enunciar el siguiente teorema (véase apéndice A):

Teorema I. Cualquier solución de la ecuación de Oseen para flujo estacionario, en el cual la vorticidad $\underline{\omega}$ es en cada lugar perpendicular a la velocidad en infinito $U \hat{i}$ (con \hat{i} un vector unitario en la dirección x), puede ser puesta en la forma

$$\underline{u} = -\nabla \phi + 1/(2k) \nabla \chi - \hat{i} \chi, \quad k=U/(2\nu) \quad (1.34.a)$$

donde ϕ es una función armónica, χ satisface

$$(\nabla^2 - 2k \partial/\partial x) \chi = 0, \quad (1.34.b)$$

y la presión está dada por

$$p=U \partial\phi/\partial x \quad \text{con} \quad \nabla^2 \phi = 0. \quad (1.35)$$

El teorema anterior permite obtener soluciones exactas a cualquier número de Reynolds (vease referencia 17). No obstante, estas soluciones son inconsistentes con las observaciones experimentales, en particular, las soluciones predicen remolinos atrás del cilindro a cualquier número de Reynolds, los experimentos sugieren que estos aparecen a $R=1.51^{-7}$. (véase figura 2)

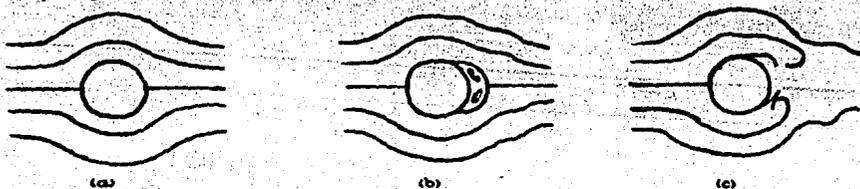


Fig. 2. Líneas de corriente para el cilindro.
 (a) Sin remolinos. (b) Aparición de remolinos.
 (c) Flujo inestable.

A bajo número de Reynolds la solución exacta se puede llevar a una solución aproximada que se acerca razonablemente a los resultados experimentales. El cálculo de la solución exacta y de la aproximación pueden verse en la referencia 17. Tanto el método de solución, como la posterior aproximación no son determinantes para la continuidad de este trabajo.

La solución aproximada en términos de la función de corriente de cantidades adimensionales es:

$$\psi = [r + 1/(2B_0 r)] \text{sen } \theta - \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2B_0^n) \phi_n^{(1/2 R r)} \text{sen } n\theta/n + O(B_0^{-2}) \quad (1.36)$$

donde $B_0 = \frac{1}{2} - \gamma - \text{Ln}(R/4)$,

y $\phi_n = 4 K_1 I_1 + 2K_0 (I_{n+1} + I_{n-1})$,

las K_i e I_p son funciones modificadas de Bessel de orden entero¹⁸.

Se ha mostrado la forma explícita del resultado de la aproximación porque esta será de utilidad en el siguiente capítulo.

Es común que cualquier cálculo relacionado con el presente problema (ya sea teórico o experimental) sea presentado en su forma final en términos del coeficiente de arrastre.

La definición del coeficiente de arrastre puede ser precisada a través de la magnitud de la fuerza de arrastre, F . Esta es la fuerza, por unidad de longitud, que actúa sobre la superficie de un sólido inmerso en un fluido¹⁹.

En términos matemáticos esto puede ser expresado como*

$$F = \| F_i \| = \| \int \pi_{ik} df_k \| = \| \int -\sigma_{ik} n_k df \|,$$

donde π_{ik} es el tensor de densidad de flujo de momento, df_k es el

* Al considerar la fuerza actuando sobre la superficie, cada elemento de superficie deberá ser considerado en un marco de referencia en el cual este está en reposo. La fuerza es igual al flujo de momento solo cuando la superficie está fija.

elemento de área con dirección a lo largo de la normal exterior al fluido, σ_{ik} es el tensor de esfuerzos y n_k es un vector unitario a lo largo de la normal exterior al fluido. El coeficiente de arrastre C_D se define entonces como

$$C_D = F / (\rho U^2 a). \quad (1.37)$$

Para el caso del flujo alrededor del cilindro la expresión para la fuerza por unidad de longitud será

$$F = \int_s (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta r}) r ds, \quad (1.38)$$

donde

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \partial u_r / \partial r, \quad \sigma_{\theta r} = \mu (1/r \partial u_r / \partial \theta + \partial u_\theta / \partial r - u_\theta / r). \quad (1.39)$$

Nótese que el coeficiente de arrastre puede ser calculado a partir de la función de corriente ψ por medio de las definiciones (1.39) y las ecuaciones (1.15) para el campo de velocidades. Lamb (1911) calculó a partir de la expresión anterior para la función de corriente, el coeficiente de arrastre C_D , él encontró que

$$C_D = 4\pi/R (\frac{1}{2} - \gamma - \ln R/4)^{-1}, \quad (1.40)$$

donde γ es la constante de Euler ($\gamma = .57721$).

El coeficiente de arrastre C_D se grafica como función de R . Véase figura 3. Es notable la proximidad de este a los resultados experimentales para $R < 0.5$, no obstante, para $R > 0.5$ esta cantidad carece de sentido.

La conclusión con respecto a esta sección, es que que la solución de las ecuaciones lineales bajo la aproximación de Oseen y para números de Reynolds pequeños, describe el flujo tanto lejos como cerca del cilindro aunque no de modo exacto. Una mejor aproximación a los datos experimentales no es posible. La solución exacta dada en la referencia 17, para las ecuaciones lineales, tampoco es satisfactoria por la existencia de remolinos

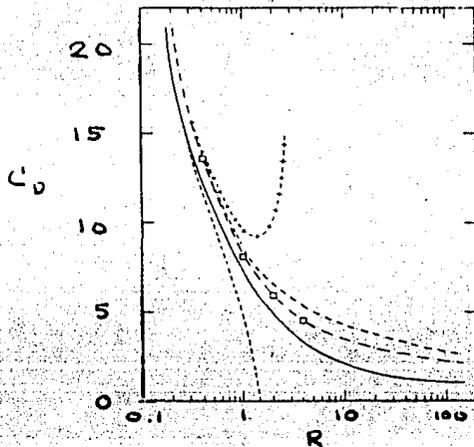


Fig. 3. C_D como función de R . Experimental (—•—). Solución de Lamb (--->---). Solución exacta (□ □ □ □). Solución de Kaplan y Proudman y Pearson (—·—·—).

(tomada de referencia 8)

predicha para todo número de Reynolds.

A últimas fechas, aún se investiga tomando como base la aproximación de Oseen ⁸), para tratar de encontrar soluciones consistentes con los resultados experimentales y extender la aproximación a números de Reynolds grandes ($R \geq 100$). No obstante, la linealización en las ecuaciones impide y seguirá impidiendo una concordancia exacta con los datos experimentales.

6. DISCUSIÓN

Se ha visto que en el problema del flujo alrededor de un cilindro infinito, contrasta la aparente simplicidad del flujo bidimensional con la inherente no-linealidad de las ecuaciones de movimiento. Hasta aquí ha sido imposible encontrar una solución

uniforme en todo el espacio para las ecuaciones no-lineales. Un punto importante a destacar es que para regiones bidimensionales que están parcialmente acotadas en infinito las ecuaciones a bajo número de Reynolds pueden llevar a soluciones que son buenas aproximaciones a los flujos ϕ). Por ejemplo, el problema de un flujo perpendicular al eje de un cilindro circular entre dos placas paralelas, tiene solución ϕ).

El hecho esencial de que una teoría regular de perturbaciones, como la usada en la aproximación de Stokes, no conduzca a una solución que cumpla ambas condiciones a la frontera, se entiende como una señal de que el problema es singular, en el sentido de la teoría singular de perturbaciones.

En problemas físicos puede buscarse el comportamiento singular por razonamientos dimensionales. Existe un criterio llamado criterio positivo de uniformidad que es útil para determinar la regularidad de un problema ϕ).

Criterio positivo de uniformidad: Una solución perturbada es uniformemente válida en las coordenadas espaciales y temporales a menos que el parámetro de perturbación ϵ sea el cociente de dos longitudes o dos tiempos.

El criterio puede ser entendido analizando el parámetro de perturbación ϵ . La geometría del problema estará caracterizada por una dimensión típica mayor, que puede llamarse la "longitud de referencia primaria" (en nuestro caso esta longitud corresponde al radio a del cilindro). Dicha cantidad es la base para formar longitudes adimensionales y éstas forman un primer grupo de variables que se denominarán variables externas (estas definiciones serán justificadas en el próximo capítulo). El comportamiento no-uniforme es posible sólo si los parámetros en el

problema proveen otra "longitud de referencia secundaria" cuyo cociente con la primera tiende a cero o se hace infinita cuando ϵ se anula. Esta longitud, si es propiamente escogida, forma la base de un segundo grupo de variables que por el momento se llamarán variables internas.

El flujo estacionario de un fluido viscoso alrededor de un cuerpo se caracteriza no sólo por una dimensión geométrica, sino también por una "longitud" viscosa ν/U ; el cociente con la longitud de referencia primaria, a , es el número de Reynolds, i.e. $\epsilon=R$, que se anula en flujo de Stokes. Este ejemplo ilustra que la longitud de referencia secundaria no es siempre una dimensión geométrica.

En vista de lo anterior el criterio positivo de uniformidad no se satisface y el problema, por ello, será de naturaleza singular.

Esta discusión ha sido útil para hacer ver la singularidad del problema. A mediados del presente siglo Kaplun y Lagerstrom ⁷⁾ y Proudman y Pearson ¹⁰⁾, desarrollaron una técnica sistemática para tratar problemas singulares, conocida como la técnica de acoplamiento de expansiones asintóticas.

En el siguiente capítulo se aplicará esta técnica para buscar una solución uniforme en todo el espacio del flujo alrededor del cilindro.

CAPITULO II.

SOLUCIÓN UNIFORME POR ACOPLAMIENTO DE EXPANSIONES ASINTÓTICAS.

1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se se revisa y discute la técnica de teoría singular de perturbaciones, conocida como acoplamiento de expansiones asintóticas, para obtener aproximaciones de orden superior en las soluciones de Stokes y Oseen; esto permitirá bajo un adecuado criterio, alcanzar una solución uniforme en todo el espacio. La solución que se obtiene sólo es cierta a muy pequeños números de Reynolds. No obstante, la corrección al arrastre llega a ser exacta a números de Reynolds menores que 0.4°). En la sección 2 se presentan los conceptos fundamentales en la aplicación del método; se dan algunas definiciones y se formula el principio de acoplamiento de expansiones asintóticas, que es básico en el resto del capítulo. La sección 3 consiste propiamente de la aplicación del método al contexto del problema; se ilustra la técnica de manera no rigurosa, aunque matemática y físicamente razonable. Para la sección 4 es dejada la generalización del método; se utiliza el concepto de expansión asintótica generalizada. La sección 5 se dedica a hacer una discusión de los resultados; se analiza la potencialidad de la técnica y sus limitaciones. Esto permite justificar un nuevo método de solución que será presentado en el capítulo 3.

2. REVISIÓN DE LA TEORÍA SINGULAR DE PERTURBACIONES. ⁷⁾

El capítulo I sirvió de preambulo para visualizar la naturaleza singular del problema. Se comentó la existencia de un método

sistemático de solución que será detallado en el resto del capítulo. Este método es conocido con el nombre genérico de acoplamiento de expansiones asintóticas. La idea principal detrás de éste, es que una solución aproximada a un problema dado se obtiene no como una expansión en términos de una sola escala sino por dos o más expansiones separadas en términos de dos o más escalas, cada una de las cuales es válida en una parte del dominio. Las escalas son escogidas de modo que (a) las expansiones como un todo cubran el dominio completo de interés y (b) los dominios de validez de expansiones vecinas se traslapan. Si los dominios se traslapan, las expansiones vecinas pueden ser acopladas (mezcladas). Una de las principales dificultades en la aplicación práctica del método es hallar las escalas adecuadas en cada intervalo. En el resto del capítulo sólo se requerirá de dos escalas y por tanto de dos intervalos. Físicamente es posible darse cuenta de cuales serán estas escalas; ambas son dadas por las soluciones anteriores de Stokes y Oseen en términos de la función de corriente; ya que cada una de éstas es válida en regiones distintas del flujo. La solución de Stokes contiene como escala única la cantidad adimensional r . Por otra parte, la solución de Oseen depende esencialmente de la escala Rr . Estas son las dos principales escalas para formar expansiones asintóticas.

Cuando una solución es expresada como una expansión asintótica (que no necesariamente es convergente), se espera que con unos cuantos términos de la expansión se puedan ilustrar los hechos esenciales del problema y se obtenga una aproximación numérica adecuada al resultado exacto.

En términos matemáticos una expansión

$$f_1(\epsilon)y_1(x) + f_2(\epsilon)y_2(x) + \dots + f_k(\epsilon)y_k(x)$$

es asintótica a la solución exacta, $y(x)$, si ¹¹⁾

$$[y - (f_1(\epsilon) y_1 + f_2(\epsilon) y_2 + \dots + f_k(\epsilon) y_k)] / f_{k+1}(\epsilon) = O(1),$$

donde la cantidad ϵ es el parámetro de la expansión. En toda la discusión que sigue el parámetro será el número de Reynolds R .

Una variable externa se define como una variable dependiente o independiente basada en la longitud de referencia primaria del problema. En el caso del flujo tratado la variable externa es r , formada a partir de la longitud de referencia primaria, a .

Una variable interna* es aquella variable dependiente o independiente dilatada por funciones apropiadas de ϵ , tal que sean del orden de la unidad en la región de no-uniformidad de la expansión externa. En el problema presente el parámetro $\epsilon = R$, y la variable interna será la cantidad $\rho = Rr$, i.e. esta es una función lineal del parámetro R que deberá satisfacer

$$\rho = O(1) \text{ si } r \rightarrow \infty \text{ y } R \rightarrow 0.$$

En general, una expansión asintótica externa tiene la forma

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\epsilon) f_n(r) \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0, r \text{ fija.} \quad (2.1)$$

Aquí δ_n es una sucesión asintótica apropiada y r es una cantidad hecha adimensional usando la longitud de referencia primaria. La expresión anterior es cierta si las funciones f_n son regulares y llegan a ser singulares en cualquier punto dentro del campo de flujo donde los fenómenos son dominados por la longitud de referencia secundaria. Estos puntos estarán en infinito si la longitud de referencia secundaria es grande.

Una expansión modificada, capaz de ser uniformemente válida, deberá depender también de las coordenadas adimensionadas por la

*van Dyke ref 7), sugiere que las definiciones de variable externa e internadas arriba deberían de usarse de un modo único, no obstante algunos autores manejan las definiciones totalmente a la inversa. Es deseable una convención única para comodidad de lectura

longitud de referencia secundaria. Como el cociente de las longitudes primaria y secundaria es una función de ϵ , esta cantidad dependerá también de ϵ . Así una expansión uniformemente válida deberá tener la forma más complicada

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\epsilon) g_n(r, \epsilon) \quad \epsilon \longrightarrow 0, \quad (2.2)$$

esta expansión se conoce con el nombre de expansión asintótica generalizada. Como el parámetro ϵ aparece explícitamente en las funciones g_n y δ_n , ésta no es una expansión asintótica en el sentido usual.

Es fácil aislar las dificultades asociadas a la no-uniformidad construyendo una expansión interna adicional válida en esta vecindad. Esto se consigue introduciendo nuevas coordenadas internas, X , que son del orden de la unidad en la región de no-uniformidad. De aquí que la expansión interna es

$$F = \sum_n \Delta_n(\epsilon) F_n(X) \quad \text{si } \epsilon \longrightarrow 0, X \text{ fija.} \quad (2.3)$$

Tal como la expansión externa, la expansión interna es una serie asintótica convencional, así que las operaciones usuales funcionan.

El método de acoplar expansiones asintóticas implica relajar las condiciones a la frontera. Una expansión externa no puede esperarse que satisfaga las condiciones que son impuestas en la región interna; inversamente, la expansión interna no podrá en general satisfacer las condiciones a distancia.

La posibilidad de acoplar, descansa en la existencia de un dominio de traslape donde ambas expansiones interna y externa sean válidas ⁷). En virtud del traslape, es posible obtener relaciones exactas entre sumas parciales finitas.

La existencia de un dominio de traslape implica que en éste la

expansión interna de la expansión externa deberá, a ordenes apropiados, coincidir con la expansión externa de la expansión interna ⁷⁾.

En términos más simples lo anterior significa que una solución válida en una cierta región es expresada en términos de las variables de la otra y luego por un adecuado proceso de límite se requiere que las formas funcionales de ambas soluciones sea la misma.

Este principio general puede ser extendido simplemente reteniendo más términos en la expansión asintótica. En general el principio de acoplamiento se expresa como;

Principio de acoplamiento asintótico de expansiones ⁷⁾:

El m-ésimo término de la expansión interna (del n-ésimo término de la expansión externa) = el n-ésimo término de la expansión externa (del m-ésimo término de la expansión interna).

Aquí m y n son cualesquiera dos enteros; en la práctica comunmente m es escogido como n o como n+1.

Para aclarar ideas se hará uso de las definiciones y del principio en la siguiente sección.

3. LA SOLUCIÓN DE KAPLUN Y DE PROUDMAN Y PEARSON. ^{7.10)}

El método tiene como objetivo fundamental dar en este problema aproximaciones de orden superior a los flujos descritos por las aproximaciones de Stokes y de Oseen.

Por conveniencia, se resume la forma en la que será realizado el acoplamiento; se supone que la expansión externa, que será llamada por razones físicas aproximación de Stokes, puede ser expresada en términos de la función de corriente como

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(R) \psi_n(r, \theta), \quad (2.4)$$

posteriormente se supone que la expansión interna o expansión de Oseen toma la forma

$$\Psi = \Psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(R) \Psi_n(Rr, \theta), \quad (2.5)$$

donde (r, θ) son coordenadas polares cilíndricas. Esta forma es sugerida por la condición de uniformidad en infinito (ec. (1.28)), i.e. el primer término de la expansión no depende de R .

Si las series son convergentes, debe ocurrir que

$$f_{n+1} / f_n \rightarrow 0, \quad F_{n+1} / F_n \rightarrow 0, \quad \text{si } R \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

y f_0 se mantiene acotada en $R=0$. La sustitución de estas expansiones en las ecuaciones de Navier-Stokes llevará a un conjunto de ecuaciones diferenciales para los coeficientes ψ_n y Ψ_n , pero sólo un conjunto de condiciones físicas a la frontera es aplicable a cada expansión (la condición de no-adherencia para la expansión de Stokes o la de corriente uniforme para la expansión de Oseen). Así que soluciones únicas no pueden ser derivadas inmediatamente. No obstante, el hecho de que las dos expansiones son, en principio, derivadas de la misma solución exacta (que no necesariamente es conocida) lleva a un procedimiento de acoplamiento que produce más condiciones a la frontera para cada expansión. Así, es posible determinar alternativamente términos sucesivos en cada expansión. Dos expansiones se acoplan cuando ellas coinciden a cualquier orden prescrito de exactitud.

Continuando, la forma más cómoda de expresar la relación entre la expansión externa e interna es dilatar (más propiamente encoger) la expansión interna Ψ por el factor R esto es

$$\Psi = R \psi, \quad (2.7)$$

la expansión interna se obtiene de expresar la expansión externa en variables internas. Esta elección será justificada a lo largo del tratamiento. La expresión (2.7) debe ser entendida como una

relación entre expansiones asintóticas en el cual la igualdad solo se mantiene bajo el adecuado proceso al límite (i.e. ésta es válida para los términos que aseguran la igualdad funcional).

Por comodidad, se recordaran las expresiones de Stokes y de Oseen para la función de corriente.

Stokes:
$$\psi = D_1 (1/r - r + 2r \ln r) . \quad (1.29)$$

Oseen:
$$\psi = [r + 1/(2B_0 r)] \sin \theta - \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2B_0^n) \phi_n^{(1/2Rr)} r (\sin n\theta)/n + O(B_0^{-2}) , \quad (1.36)$$

con
$$B_0 = 1/2 - \gamma - \ln R/4 ,$$

$$\phi_n = 4K_1 I_n + 2K_0 (I_{n+1} + I_{n-1}) .$$

Estas expresiones serán usadas como referencia al ir realizando los acoplamientos.

Al introducir la aproximación de Stokes ($R = 0$) en la ecuación (1.16) para la función de corriente (ec (1.16) = $\nabla^4 \psi = -R/r \partial(\psi, \nabla^2 \psi)/\partial(r, \theta)$), esta se reduce a

$$\nabla^4 \psi = 0. \quad (2.8)$$

La ecuación diferencial lineal, bajo la aproximación de Oseen que resulta de las ecuaciones (1.16), toma la forma

$$(\nabla_r^2 - R\partial/\partial x) \nabla_r^2 \psi = 0. \quad (2.9)$$

donde $x = r \cos \theta$.

Si (1.16) es expresada en términos de Ψ ($\Psi = R\psi$) y la variable interna ρ , la nueva ecuación se escribe como

$$\nabla_\rho^4 \Psi = -1/\rho \partial(\Psi, \nabla_\rho^2 \Psi)/\partial(\rho, \theta). \quad (2.10)$$

Ahora se determinará el primer término para la función de corriente. Físicamente, es plausible esperar que para que la condición de regularidad en infinito se cumpla, el término dominante en la expansión interna (ec (2.5)) debe ser

$$\psi_0 = \rho \sin \theta \quad (2.11)$$

Por otra parte, al sustituir la expansión externa (2.4) en la ec. (2.8) se encuentra que el coeficiente de f_0 debe cumplir que

$$\nabla_r^2 \psi_0 = 0 \quad (2.12)$$

la solución a esta ecuación se obtiene tomando en cuenta que la función de corriente es asimétrica, $\psi(r, \theta) = -\psi(r, -\theta)$, entonces

$$\psi_0 = [a(2r \ln r - r + r^{-1}) + b(r^2 - 2r + r^{-1})] \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} [c_n (r^{n+2} - (n+1)r^{2-n} + r^{-n}) + d_n (r^n - nr^{2-n} + (n-1)r^{-n})] \sin n\theta \quad (2.13)$$

con a, b, c_n, d_n , constantes. Cuando esta función se expresa en términos de la variable de Oseen (i.e., la expansión externa es expresada en términos de la variable interna), la contribución $Rf_0 \psi_0$ (que es el primer término en (2.4)) a la función ψ es

$$Rf_0 \psi_0 = \{ [a(2\rho \ln \rho - 2\rho \ln R - \rho + R\rho^{-2}) + b(\rho^2 R^{-2} + R^2 \rho^{-2} - 2\rho)] \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} [c_n (\rho^{n+2} R^{-n-1} - (n+1)\rho^{2-n} R^{n-1} + n\rho^{-n} R^{n+1}) + d_n (\rho^n R^{-n+2} - n\rho^{2-n} R^{n-2} + (n-1)\rho^{-n} R^{n+2})] \sin n\theta \} \quad (2.14)$$

esta expresión no deberá contener términos mayores que la unidad porque lejos del cilindro ($r \rightarrow \infty$) la función de corriente (en variables internas) no sería de $O(1)$. Por tanto

$$b=0, c_n = d_n = 0 \quad n=2,3,\dots \text{ y } f_0 = (\ln R)^{-1} \quad (2.15)$$

entonces la ecuación (2.14) será igual a

$$-2a \rho \sin \theta + O((\ln R)^{-2}) \quad (2.16)$$

el principio de acoplamiento requiere que la ecuación (2.16) se iguale a ψ_0 (ec. (2.11)), de aquí

$$a = -1/2 \quad (2.17)$$

Los resultados anteriores permiten escribir ψ_0 como

$$\psi_0 = -1/2 (2r \ln r - r + r^{-1}) \sin \theta \quad (2.18)$$

y además

$$\psi = -1/[2(\ln R)](2r \ln r - r + r^{-1}) \sin \theta + \dots \quad (2.19)$$

La solución (2.18) se conoce como la solución de Stokes.

Nótese que bajo esta técnica se logra conocer el valor de la cantidad D_1 que antes quedaba indeterminado (ec 1.29).

El siguiente paso consiste en calcular el término a segundo orden en la expansión de Oseen.

La función Ψ_0 representa el término de corriente uniforme, por ello, al sustituir la expansión (2.5) en (2.10) y tomar en cuenta las contribuciones a primer orden, la ecuación resultante es

$$(\nabla_\rho^2 - \partial/\partial \xi) \nabla_\rho^2 \Psi_1 = 0, \quad (2.20)$$

donde $\xi = \rho \cos \theta$.

Una primera integral acotada en infinito es

$$\nabla_\rho^2 \Psi_1 = \exp(1/2 \xi) \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_n(1/2 \rho) \sin n\theta, \quad (2.21)$$

donde las A_n son constantes y $K_n(1/2 \rho)$ son funciones modificadas de Bessel de orden entero. La condición de acoplamiento puede ser aplicada directamente de la siguiente forma:

De la solución de Stokes (ec. (2.19)) se encuentra que

$$\int_0 \nabla_r^2 \Psi_0 = 2/(r \ln R) \sin \theta. \quad (2.22)$$

Reescribiendo la ecuación (2.21) en términos de variables internas r , se tendrá

$$\nabla_\rho^2 \Psi_1 = \exp(1/2 Rr \cos \theta) \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_n(1/2 Rr) \sin n\theta, \quad (2.23)$$

la función $K_n(u) \rightarrow u^{-n}$ y $\exp(u) \rightarrow 1$ si $u \rightarrow 0$, y como $R \nabla_\rho^2 \Psi$ debe acoplar a $\nabla_r^2 \Psi$, debe cumplirse que

$$A_1 = 1, A_n = 0 \quad (n > 1) \text{ y } F_1(R) = (\ln R)^{-1}. \quad (2.24)$$

Finalmente, la ecuación (2.23) se hace

$$\nabla_\rho^2 \Psi_1 = \exp(1/2 \rho) K_1(1/2 \rho) \sin \theta, \quad (2.25)$$

que al integrar da

$$\Psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n (1/2 \rho)^n \rho \sin n\theta/n + \text{funciones armónicas}, \quad (2.26)$$

donde
$$\phi_n = 2 K_1 I_n + K_0 (I_{n+1} + I_{n-1}), \quad (2.27)$$

K_m y I_m son funciones modificadas de Bessel de orden entero.

La función Ψ_1 deberá tender a cero para valores grandes de ρ porque en esas regiones Ψ_0 es dominante, y las funciones armónicas deberán a lo más ir como

$$B_n \rho^{-n} \sin n\theta$$

La condición de acoplamiento entre $R \Psi$ y Ψ , que es

$$\begin{aligned} R \Psi &= -R/(2 \text{Ln } R) \left((r \text{Ln } r - r + r^{-1}) \right) \sin \theta + R f_1(R) \Psi_1 + \dots \\ &= Rr \sin \theta + 1/(\text{Ln } R) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n (1/2 Rr) Rr (\sin n\theta)/n + \right. \\ &\quad \left. B_n (Rr)^{-n} \sin n\theta \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

requiere que $B_n = 0$ para toda n . Así la parte derecha de la ecuación (2.28), sin el último término se reduce a la parte relevante del resultado de Lamb (ec. (1.36)), esto es

$$\Psi = \rho \sin \theta + 1/(\text{Ln } R) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n (1/2 \rho)^n \rho \sin n\theta/n \right] + \dots$$

La utilidad del método es exhibida de un modo más general al calcular términos de orden superior.

Los resultados anteriores permiten afirmar que

$$F_n(R) = (\text{Ln } R)^{-n}, \text{ para toda } n \quad (2.29)$$

además, de las relaciones (2.14) y (2.15) se observa que la solución de Stokes no contiene términos de la forma $(\text{Ln } R)^{-2}$, $(\text{Ln } R)^{-3}$, ... etc. Por tanto, la función $f_n(R)$ debe ser

$$f_n(R) = (\text{Ln } R)^{-n-1}. \quad (2.30)$$

Así, cuando términos sucesivos en la expansión externa son construidos cada uno satisface la misma ecuación de Stokes, los términos de inercia nunca son importantes en las ecuaciones

dinámicas y los efectos sólo son sentidos a través de la frontera externa o la condición de acoplamiento. Esto significa que los mismos argumentos aplicados para la solución general de ψ_0 serán aplicados a las soluciones generales ψ_n , puede entonces ser inferido que las ψ_n difieren una de otra solamente por un factor numérico. La expansión de Stokes es entonces reducida a la forma

$$\psi = f(R) \psi_0 + O(R), \quad (2.31)$$

donde $\psi_0 = (2r \ln r - r + r^{-1}) \sin \theta,$ (2.32)

y $f(R) = a_1 (\ln R)^{-1} + a_2 (\ln R)^{-2} + \dots,$ (2.33)

con a_i constantes. El primer término de (2.33) ya ha sido calculado (ec. (2.17)) y su valor resultó ser $a_1 = -1/2$.

Se calculará ahora ψ_2 , para ello, es necesario encontrar la solución de la ecuación

$$(\nabla_\rho^2 - \partial/\partial \xi) \nabla_\rho^2 \psi_2 = -1/\rho \partial(\psi_1, \nabla_\rho^2 \psi_1) / \partial(\rho, \theta), \quad (2.34)$$

que proviene de sustituir la expansión (2.5) en las ecuaciones (2.10) y tomar en cuenta la relación (2.29); esto es, $F_2 = (f)_1^2 = (\ln R)^{-2}$. La solución involucra una integral particular del lado derecho y una función complementaria dada por (2.21), que puede ser expresada en la forma (2.25) y la función ψ_1 en la forma (2.26); de ello se obtiene

$$-1/\rho \partial(\psi_1, \nabla_\rho^2 \psi_1) / \partial(\rho, \theta) = \exp(1/2 \xi) \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\rho) \sin n\theta, \quad (2.35)$$

donde $g_1(R) = O(R^{-1}),$
 $g_2(R) = O(R^{-2}),$
 $g_k(R) = O(R^{k-2}), \quad k > 2,$ (2.36)

y las g_n son funciones armónicas.

Si se hace $\nabla_\rho^2 \psi_2 = \exp(1/2 \xi) Y,$ con Y una función auxiliar, y se sustituye en las ecuaciones (2.34) y se toma en cuenta (2.35)

se encuentra que

$$(\nabla_{\rho}^2 + 1/4) Y = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\rho) \sin n\theta. \quad (2.37)$$

La solución de (2.37) por el método de variación de parámetros da

$$\nabla_{\rho}^2 \Psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\rho) \sin n\theta + \text{función complementaria.} \quad (2.38)$$

Aquí $h_n(R) = O(R^{n-2})$ excepto para $n=1$ donde ésta es del orden de R .

Los mismos argumentos usados para encontrar el segundo término de la expansión interna (ec. (2.25)) son aplicables aquí, esto significa que la función complementaria debe ser $B_1 \exp(1/2 \rho \cos \theta) K_1(1/2 \rho) \sin \theta$, entonces la ecuación (2.38) será

$$\nabla_{\rho}^2 \Psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\rho) \sin n\theta + B_1 \exp(1/2 \rho \cos \theta) K_1(1/2 \rho) \sin \theta. \quad (2.39)$$

Una última integración da

$$\Psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_1 \phi_n(1/2 \rho) \rho (\sin n\theta)/n + \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\rho) \sin n\theta, \quad (2.40)$$

donde $M_1(R) = L_1(R) + O(R^2)$ y L_1 es una constante. Para realizar el acoplamiento debe escribirse $F_2(R) \Psi_2$ en términos de la variable externa r , ésta da una contribución $-B_1 (\ln R)^{-1} r$ a $f_0(R) \psi_0$.

El acoplamiento requiere entonces que

$$B_1 = (1/2 - \gamma + \ln 4). \quad (2.41)$$

El término de vorticidad $\nabla_{\rho}^2 \Psi_2$ dado por la ecuación (2.39) puede ahora ser acoplado al correspondiente término $R^{-1} \nabla_r^2 \psi_2$ del mismo modo que (2.22) fue acoplado con (2.23), de ello resulta que

$$a_2 = -1/2 (1/2 - \gamma + \ln 4), \quad (2.42)$$

donde a_2 es el coeficiente de $(\ln R)^{-2}$ en la ecuación (2.33).

Las expansiones externa e interna hasta segundo orden son

respectivamente:

$$\psi = [-1/2 (\text{Ln } R)^{-1} - 1/2 (\text{Ln } R)^{-2} (1/2 - \gamma + \text{Ln } 4) + \dots] \\ (2r \text{ Ln } r - r + r^{-1}) \text{ sen } \theta + O(R), \quad (2.43)$$

$$\Psi = Rr \text{ sen } \theta + (\text{Ln } R)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n (1/2 Rr) Rr (\text{sen } n\theta)/n + \\ (\text{Ln } R)^{-2} (1/2 - \gamma + \text{Ln } 4) \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n (1/2 Rr) Rr (\text{sen } n\theta)/n \\ + O(R^2). \quad (2.44)$$

La función de corriente ψ permite calcular de una manera inmediata el coeficiente de arrastre, éste resulta ser

$$C_D = 4\pi/R [\delta - 0.87 (\delta)^2 + O(\delta^4)], \quad (2.45)$$

donde $\delta = (1/2 - \gamma + \text{Ln } 4/R)^{-1}$.

Nótese que esta fórmula contiene como primer término la expresión dada por Lamb para el coeficiente de arrastre (ec.(1.39)).

El procedimiento usado aquí para calcular ψ_2 y luego a_2 puede ser usado sucesivamente para calcular ψ_m y a_m . Cada ψ_m deberá consistir de una función complementaria

$$C_m \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n (1/2 \rho) \rho \text{ sen } n\theta/n,$$

con C_m una constante y además una solución particular

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{pq} (\rho) \text{ sen } n\theta$$

donde a_{pq} tiene un comportamiento similar al de M_n .

Las expresiones anteriores constituyen soluciones uniformemente válidas para la región de flujo.

4. EXPANSIÓN GENERALIZADA ¹⁸⁾

El procedimiento seguido en la sección anterior se ha limitado a calcular términos que contienen como coeficientes, cantidades de la forma, $(\text{Ln } R)^{-n-1}$ para la expansión externa, o $(\text{Ln } R)^{-n}$ para la

expansión interna. No obstante, la expansión externa siempre contiene dependencias en términos de $O(R)$ (ec.(2.43)), y la interna en términos de $O(R^2)$ (ec.(2.44)). Estas cantidades han sido despreciadas porque son trascendientemente pequeñas cuando se comparan con $(\ln R)^{-1}$, si $R \rightarrow 0$.

Un punto importante en la discusión es poder conseguir términos de orden superior en las expansiones para ver el comportamiento analítico de éstos. Skinner ¹²⁾ calculó estas correcciones mediante el uso de la expansión generalizada mencionada en la sección 2 de este capítulo. Su tratamiento consiste básicamente en realizar un acoplamiento generalizado de las expansiones externa e interna, esto es, se propone una expansión externa de la forma

$$\psi = \psi_0(r, \theta, \delta) + R \psi_1(r, \theta, \delta) + R^2 \psi_2(r, \theta, \delta) + \dots \quad (2.46)$$

con $\delta = [\ln(4/R) - \gamma + 1/2]^{-1}$. Esta expresión es sugerida de la expansión externa (2.43), y de la forma explícita de la expansión interna (2.44), que depende esencialmente de R .

Cuando se introduce la expresión (2.46) en la ecuación (1.16), que es la ecuación dinámica para la función de corriente, resulta un sistema de ecuaciones para cada orden en R

$$\nabla^2 \psi_0 = 0, \quad (2.47.a)$$

$$\nabla^2 \psi_1 + 1/r J(\psi_0, \nabla^2 \psi_0) = 0, \quad (2.47.b)$$

$$\nabla^2 \psi_2 + 1/r J(\psi_1, \nabla^2 \psi_1) + 1/r J(\psi_0, \nabla^2 \psi_0) = 0. \quad (2.46.c)$$

Por otro lado, la expansión interna (2.44) contiene funciones ϕ_n , que desarrolladas explícitamente tienen la forma

$$-\rho \phi_1(\rho/2) \cong \rho [\ln \rho - (\ln 4 - \gamma + 1/2) - 1/2] + 1/32 \rho^3 [\ln \rho - (\ln 4 - \gamma + 1/2) - 1/2] + \dots, \quad (2.48.a)$$

$$-1/2 \rho \phi_2(\rho/2) \cong 1/8 \rho^2 [\ln \rho - (\ln 4 - \gamma + 1/2)] + 1/192 \rho^4 [\ln \rho - (\ln 4 - \gamma + 1/2) - 1/2] + \dots, \quad (2.48.b)$$

... etc.

Esto permite aplicar el principio de acoplamiento asintótico entre las expansiones (2.46) y la (2.44) desarrollada en forma explícita mediante las relaciones (2.48). Es decir, se debe mantener la igualdad funcional

$$\psi(r(R), \theta, R) = R \Psi(\rho(R), \theta, R), \quad (2.49)$$

esta, como ya se ha mencionado, se cumple sólo si $1/r(R)$ y $\rho(R)$ son de $O(1)$ cuando $R \rightarrow 0$.

La ejecución explícita de los cálculos puede ser hecha de modo similar a los realizados en la sección anterior, no obstante, estos son muy difíciles, debido principalmente a la complejidad de las ecuaciones (2.47) que necesariamente deben resolverse, por ello, aquí se dará únicamente el resultado final del acoplamiento generalizado en términos del coeficiente de arrastre, éste es

$$C_D = 4\pi/R [6 - 0.87 \delta^2 + O(\delta^4) - 1/32 R^2 (1 - R\delta/2 + O(R^2))] \quad (2.50)$$

Esta expresión contiene la solución dada en el capítulo anterior mediante el acoplamiento a bajo orden (primeros dos términos), alcanzar mayores correcciones al coeficiente de arrastre resulta muy complicado.

5. DISCUSIÓN

El propósito fundamental de encontrar una solución uniformemente válida en toda la región de flujo, se ha logrado. La solución final dada por la expresión (2.50) resulta ser excelente para números de Reynolds menores que 0.4. (vease figura 3), pero para R mayores, ésta carece de sentido. Más aún, los términos de $O(R)$ en la ecuación (2.50) (factor de $1/32$) llegan a ser mayores

que las cantidades de $O(\delta^4)$ si $R > 0.00008^7$) y en la practica no son del todo despreciables. Estas constituyen severas limitaciones de la solución obtenida por este método. Es evidente que el formalismo no tiene nada más que ofrecer en este problema.

Se plantea ahora la pregunta de si será posible resolver las ecuaciones no-lineales mediante algún otro método, y de ser éste el caso qué utilidad práctica tendría, comparada con la solución anterior. El siguiente capítulo tiene por objeto presentar un esquema de solución alternativo; este método ha sido desarrollado muy recientemente por Soto y Peralta-Fabi¹⁴), los primeros resultados sugieren que la solución alcanzada por dicho método podría ser, en la práctica más útil y de cierta manera, más accesible desde el punto de vista físico y matemático.

CAPITULO III.

SOLUCIÓN UNIFORME EN SERIES POTENCIAS

1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se desarrolla y discute un nuevo método de solución que utiliza la técnica de series de potencias.

La motivación de buscar esquemas de solución alternativos a los presentados en los capítulos anteriores es justificada por la dificultad de conseguir acoplamientos de orden superior. Los términos de corrección, que resultan de tales acoplamientos, son trascendientemente pequeños aunque, como se vio en la discusión al final del capítulo II, estos dan en la práctica contribuciones significativas al coeficiente de arrastre.

El nuevo tratamiento es presentado en su parte más fundamental. Análisis preliminares muestran que el formalismo seguido es cualitativamente correcto.

En la sección 2 de este capítulo se propone un cambio de variable en la coordenada radial y se encuentra la nueva forma de las ecuaciones dinámicas del problema. La sección 3 se dedica a presentar la metodología de solución; ésta supone un desarrollo en series potencias de los campos de velocidad y presión, donde el parámetro de las series es la nueva variable. Las condiciones a la frontera son usadas para desarrollar un método recursivo que resulta ser clave en vías a obtener la solución. Los cálculos realizados permiten encontrar una nueva expresión para el coeficiente de arrastre. La sección 4 es dedicada a analizar los resultados y se discute el aspecto cualitativo de la solución.

2. CAMBIO DE VARIABLE Y ECUACIONES DE GOBIERNO ¹⁴).

En los anteriores capítulos se mostró como la no-linearidad en las ecuaciones dinámicas dificulta enormemente la posibilidad de encontrar una solución consistente con las condiciones a la frontera. Recientemente Soto y Peralta-Fabi ¹⁴) han desarrollado un método que considera tanto la no-linealidad de las ecuaciones como las condiciones a la frontera, el formalismo seguido es tal que se encuentra una solución uniforme en todo el espacio.

Una ventaja de este método respecto a los anteriores es la simplicidad física y matemática. No obstante, una discusión más detallada respecto a los alcances y limitaciones de éste será dada al final del capítulo.

La base del método es un cambio de variable en la coordenada radial, el cambio de variable propuesto en Soto et al. tiene la siguiente forma

$$x = 1 - 1/r, \quad (3.1)$$

donde r es la coordenada radial adimensionalizada, de aquí resulta que

$$x = 0 \text{ en } r = 1, \text{ y } x = 1 \text{ en } r = \infty. \quad (3.2)$$

El cambio de variable contrae la región de flujo al intervalo $[0, 1]$, esto modifica radicalmente el enfoque del problema.

Las ecuaciones dinámicas adimensionales en coordenadas cilíndricas (ec. (1.14)) son modificadas por el cambio de variable de forma tal que las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad son ahora

$$\begin{aligned} R[(1-x)u_r(\partial u_r/\partial x) + u_\theta(\partial u_r/\partial \theta) - u_\theta^2] = & -(1-x)\partial p/\partial x + (1-x)^2(\partial^2 u_r/\partial x^2) \\ & + (1-x)(\partial^2 u_r/\partial \theta^2) - (1-x)^2(\partial u_r/\partial x) - 2(1-x)(\partial u_\theta/\partial \theta) - (1-x)u_r, \end{aligned} \quad (3.3.a)$$

$$R[(1-x)u_r (\partial u_\theta / \partial x) + u_\theta (\partial u_\theta / \partial \theta) + u_r u_\theta] = -\partial p / \partial \theta + (1-x)^2 \partial^2 u_\theta / \partial x^2 + (1-x) (\partial^2 u_\theta / \partial \theta^2) - (1-x)^2 (\partial u_\theta / \partial x) + 2(1-x) (\partial u_\theta / \partial \theta) - (1-x) u_\theta, \quad (3.3.b)$$

y

$$(1-x) \partial u_r / \partial x + (\partial u_\theta / \partial \theta) + u_r = 0, \quad (3.3.c)$$

respectivamente.

Las condiciones a la frontera se hacen

$$u_r(0, \theta) = u_\theta(0, \theta) = 0, \quad (3.4.a)$$

$$u_r(1, \theta) = \cos \theta, \quad (3.4.b)$$

$$u_\theta(1, \theta) = -\sin \theta. \quad (3.4.c)$$

En la proxima sección se presenta el proceso seguido para obtener una solución uniforme a partir de las ecuaciones (3.3).

3. ESQUEMA GENERAL DE SOLUCIÓN Y CÁLCULO DEL ARRASTRE ¹⁴.

El siguiente paso en el formalismo consiste en proponer una solución en términos de series de potencias de x , para los campos de velocidad y presión. Las series de potencias se escriben de la siguiente forma

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta) x^n, \quad (3.5.a)$$

$$u_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\theta) x^n, \quad (3.5.b)$$

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\theta) x^n, \quad (3.5.c)$$

las condiciones de no-deslizamiento sobre el cilindro (ec. (3.4.a)), requieren que los términos de orden cero del campo de velocidades satisfagan

$$a_0 = b_0 = 0. \quad (3.6)$$

Las funciones a_n , b_n , c_n , serán funciones periódicas de período 2π .

La propiedad de simetría con respecto al eje x, se traduce en la condición $u_\theta(\theta=0)=u_\theta(\theta=\pi)=0$, esto inmediatamente da

$$b_n(0)=b_n(\pi)=0, \quad \text{para toda } n. \quad (3.7)$$

Al sustituir las expresiones (3.5) en las ecuaciones (3.3) se llega a relaciones de recurrencia de la forma

$$a_{n+1} = 1/(n+1)[(n-1)a_n - b_n'], \quad (3.8.a)$$

$$b_{n+2} = 1/[(n+1)(n+2)]\{R \sum_{s=1}^{n-1} b_s (b_s'' - (s-1)a_{n-s} + s a_{n-s-1}') + c_n'' - b_n'' - b_{n-1}'' - 2a_n'' + 2a_{n-1}'' + (3n+1)(n+1)b_{n+1}' + (3n^2-n-1)b_n' + n(n-2)b_{n-1}'\}, \quad (3.8.b)$$

$$c_{n+1} = 1/(n+1)[R \sum_{s=1}^{n-1} (b_s b_{n-s} + s a_s a_{n-s} - b_s a_{n-s}' - s a_s a_{n-s-1}') + c_n + a_n'' - a_{n-1}'' - 2b_n'' + 2b_{n-1}'' + (n+1)(n+2)a_{n+1} - (3n-1)(n+1)a_{n+1}' + (3n^2-n-1)a_n - n(n-2)a_{n-1}'], \quad (3.8.c)$$

para $n=0,1,2,\dots$. Las ' indican derivación con respecto a θ .

Las fórmulas de recurrencia anteriores permiten determinar a_n , b_n , y c_n en términos de a_0, b_0, b_1, c_0 . La condición de no-deslizamiento (ec. (3.6)), deja sólo dos variables a determinar, que son b_1 y c_0 . Los coeficientes a_n, b_n , y c_n serán calculados en función de estas dos cantidades. Por comodidad de notación se introducen las siguientes funciones

$$c_0(\theta) = f(\theta), \quad (3.9.a)$$

$$b_1(\theta) = g(\theta). \quad (3.9.b)$$

A continuación se describe el procedimiento que será seguido para determinar una solución uniforme en todo el espacio.

Inicialmente, se sustituye en las fórmulas de recurrencia (3.8) las expresiones (3.9), por tanto, cualquier coeficiente a_n, b_n o c_n estará determinado en términos de f y g . Posteriormente, estos

coeficientes son introducidos en las ecuaciones (3.5) y se imponen las condiciones a la frontera (3.4.b;c), esto permitirá investigar que condiciones deben de satisfacer f y g para que se cumplan dichas condiciones. Las condiciones a la frontera a ambos lados serán simultáneamente satisfechas y permitirán calcular f y g unívocamente.

La sustitución de las ecuaciones (3.9) en las ecuaciones (3.8) da las siguientes relaciones para los coeficientes

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0, & b_0 &= 0, & c_0 &= f, \\
 a_1 &= 0, & b_1 &= g, & c_1 &= -g', & (3.10) \\
 a_2 &= -1/2 \cdot g'', & b_2 &= 1/2(f' + g), & c_2 &= -1/2(f'' + g'), \\
 a_3 &= -1/3! (f''' + 2g''), \\
 b_3 &= 1/3! (4f'' - 2g''' + 3g), \\
 c_3 &= 1/3! (2R \cdot g^2 - 3f'' + g''' - 2g'), \\
 a_4 &= -1/4! (6f'' - 2g''' + 7g''), \\
 b_4 &= 1/4! (R \cdot g \cdot g' - 2f''' + 19f'' - 12g' + 12g), \\
 c_4 &= 1/4! (R(6gf'' + 2gg' - 4(g')^2 + 12g^2) + f^{(4)} - 11f''' + 6g''' - 6g'').
 \end{aligned}$$

...

Los coeficientes de orden superior tienen más complejidad tanto en las derivadas como en las no-linearidades.

Por otro lado, las condiciones a la frontera (3.4.b;c) en las ecuaciones (3.5.a;b) permiten escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta) = \cos \theta, \quad (3.11.a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\theta) = -\sin \theta \quad (3.11.b)$$

El problema hasta aquí es formalmente exacto; las ecuaciones y las condiciones a la frontera se satisfacen sin aproximación

alguna. Todo depende de las funciones f y g que cumplen las ecuaciones (3.11).

Al sustituir las formas explícitas de los coeficientes dadas por la sucesión (3.10) en las ecuaciones (3.11.a;b) se encuentran dos ecuaciones diferenciales no-lineales acopladas de orden y grado infinito. En principio estas ecuaciones permiten conocer las funciones f y g , no obstante, es imposible resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de orden y grado infinito. En este punto se ve la necesidad de truncar a cierto orden N , para intentar resolver las ecuaciones a ese orden. Las ecuaciones diferenciales resultantes de tal truncamiento son escritas con fines de ilustración para $N=4$ y $N=5$.

$$N=4: \quad -5/12 f'' + 1/12 g'' - 27/24 g' = \cos \theta, \quad (3.12.a)$$

$$-1/12 f'' + 47/24 f' - 5/6 g'' - 15/6 g +$$

$$1/24 R g g' = -\sin \theta, \quad (3.12.b)$$

$$N=5: \quad -168 g' - 87 f'' + 28 g'' + 2 f^{(iv)} +$$

$$R [-g g' - (g'')^2] = 120 \cos \theta, \quad (3.13.a)$$

$$360 g + 342 f' - 178 g'' - 32 f''' + 3 g^{(iv)}$$

$$+ R [20 g g' + 2 f'' g] = -120 \sin \theta. \quad (3.13.b)$$

Para $N < 4$ los sistemas no contienen explícitamente R .

Las ecuaciones a orden mayor son demasiado complicadas y no serán esenciales en la descripción fundamental del método. Las soluciones a las ecuaciones (3.11) a cada orden N se denotan por f_N y g_N . Si se sustituyen las soluciones a orden N , en las relaciones de recurrencia (3.8) se podrán calcular los coeficientes $a_n^{(N)}$, $b_n^{(N)}$ y $c_n^{(N)}$.

Esto permite definir las funciones

$$u_r^{(N)} = \sum_{n=1}^N a_n^{(N)}(\theta) x^n, \quad (3.15.a)$$

$$u_{\theta}^{(N)} = \sum_{n=1}^N b_n^{(N)}(\theta) x^n, \quad (3.15.b)$$

$$p^{(N)} = \sum_{n=1}^N c_n^{(N)}(\theta) x^{(N)}. \quad (3.15.c)$$

Se ve directamente que estas funciones son, a orden apropiado, los campos de velocidad y presión que satisfacen las ecuaciones y las condiciones a la frontera.

Con este procedimiento es posible, en principio, alcanzar la solución exacta cuando $N \rightarrow \infty$. Una prueba de convergencia de estas series no ha sido realizada, no obstante, se comentarán algunos aspectos relacionados con ello en la siguiente sección.

Los sistemas resultantes a cada orden N son complicados, estos son conjuntos de ecuaciones diferenciales no-lineales acoplados; para $N=4$ se ilustrará como es posible determinar las formas explícitas de f y g .

Es fácil ver que las condiciones (3.7) $b_n(0) = b_n(\pi) = 0$ junto con las formas explícitas de los coeficientes $b_n(\theta)$ (ec. (3.10)), implican que

$$g^{(2n)}(0) = g^{(2n)}(\pi) = 0, \quad (3.16)$$

$$f^{(2n+1)}(0) = f^{(2n+1)}(\pi),$$

con $n=0, 1, 2, \dots$

Para tratar de encontrar una solución al sistema (3.12), se lleva este a una sola ecuación diferencial que dependa sólo de g ; la ecuación diferencial resultante es

$$4 g^{(4)} + 52 g'' + 669 g - 10 R g g' = -936 \sin \theta. \quad (3.17)$$

Nótese que esta ecuación diferencial contiene un término no-lineal con el número de Reynolds como coeficiente. Debido a ello puede suponerse, para números de Reynolds pequeños, una solución en

términos de series de potencias del número R. La solución que se propone es la siguiente

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\theta) R^n ; \quad (3.18)$$

la sustitución directa de esta serie en (3.17) da

$$4 g_0^{(IV)} + 52 g_0'' + 669 g_0 = -936 \operatorname{sen} \theta , \quad (3.19.a)$$

$$4 g_0^{(IV)} + 52 g_0'' + 669 g_0 = \sum_{q=0}^{s-1} \dots \quad (3.19.b)$$

La parte no-lineal de la ecuación (3.17) da origen al término del lado derecho, esto ahora no es ninguna dificultad porque, las cantidades que entran en las inhomogeneidades son soluciones de las ecuaciones de orden más bajo, es decir, se tiene un método recursivo para determinar la solución.

Para resolver la ecuación (3.19.a) se usan las condiciones de frontera (3.16), la solución bajo estas condiciones toma la forma

$$g_0 = -936/621 \operatorname{sen} \theta .$$

La ecuación a orden 1 es

$$4 g_1^{(IV)} + 52 g_1'' + 669 g_1 = 10 g_0 g_0' .$$

Tomando en cuenta la expresión para g_0 la solución de la ecuación anterior es

$$g_1 = 104^2 / (105 \times 69^2) \operatorname{sen} 2\theta .$$

A orden 2 la ecuación toma la forma

$$4 g_2^{(IV)} + 52 g_2'' + 669 g_2 = -0.1639 (3 \operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen} \theta) ;$$

la solución que satisface las condiciones a la frontera es

$$g_2 = (-0.9317 \times 10^{-8}) \operatorname{sen} 3\theta + (0.2625 \times 10^{-8}) \operatorname{sen} \theta .$$

La forma general de las soluciones se puede escribir como

$$g_0 = A_{01} \operatorname{sen} \theta ,$$

$$g_1 = A_{12} \operatorname{sen} 2\theta ,$$

$$g_2 = A_{21} \operatorname{sen} \theta + A_{23} \operatorname{sen} 3\theta ,$$

$$g_3 = A_{32} \text{ sen } 2\theta + A_{34} \text{ sen } 4\theta, \quad (3.20)$$

$$g_4 = A_{41} \text{ sen } \theta + A_{43} \text{ sen } 3\theta + A_{45} \text{ sen } 5\theta,$$

$$g_5 = A_{52} \text{ sen } 2\theta + A_{54} \text{ sen } 4\theta + A_{56} \text{ sen } 6\theta,$$

...

Los coeficientes A_{ij} son valores numéricos que se encuentran de la manera anteriormente mostrada.

Al sustituir las expresiones (3.20) en la serie (3.18) y reacomodar términos se encuentra la solución para la ecuación (3.17), esta toma la forma

$$\begin{aligned} g = & (A_{01} + A_{21} R^2 + A_{41} R^4 + \dots) \text{ sen } \theta \\ & + (A_{12} R + A_{32} R^3 + A_{52} R^5 + \dots) \text{ sen } 2\theta \\ & + (A_{23} R^2 + A_{43} R^4 + A_{63} R^6 + \dots) \text{ sen } 3\theta \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

La expresión para f , obtenida a partir de la solución para g toma la forma final

$$\begin{aligned} f = & (B_{01} + B_{21} R^2 + B_{41} R^4 + \dots) \text{ cos } \theta \\ & + (B_{12} R + B_{32} R^3 + B_{52} R^5 + \dots) \text{ cos } 2\theta \\ & + (B_{23} R^2 + B_{43} R^4 + B_{63} R^6 + \dots) \text{ cos } 3\theta \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Los coeficientes B_{ij} se determinan a partir de los A_{ij} .

Es importante observar que la solución obtenida mediante este procedimiento es sólo aproximada; los cálculos con N mayor no cambian la metodología, lo que se consigue con ir a ordenes mayores es sólo más precisión en los valores de los coeficientes A_{ij} y B_{ij} . Esto sugiere la posibilidad de evaluar dichos coeficientes para algunos valores de N y extrapolar para $N \rightarrow \infty$.

Lograr esto ha resultado imposible por limitaciones prácticas, una discusión más detallada con respecto a la convergencia se dará en la siguiente sección.

Ahora se calculará una expresión para el coeficiente de arrastre. En la sección 5 del capítulo I se dio la forma explícita para la magnitud de la fuerza de arrastre del flujo sobre el cilindro esta tiene la forma

$$F = \int \int (\sigma_{rr} + \sigma_{r\theta}) n_r ds \quad .$$

La fuerza de arrastre es paralela a la dirección de la velocidad, por tanto, al proyectar las componentes normal y tangencial de la fuerza en la dirección del vector velocidad la integral se transforma en

$$F = \int (-p \cos \theta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \theta - \mu(1/r \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta/r) \sin \theta ds. \quad (3.23)$$

La magnitud de la fuerza de arrastre adimensionalizada es

$$F = (\mu U/a) \int \int [(-p' \cos \theta + 2 \frac{\partial u_r'}{\partial r'} \cos \theta - (1/r' \frac{\partial u_r'}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta'}{\partial r'} - u_\theta'/r') \sin \theta], \quad (3.24)$$

donde $r' = r/a$, $u' = u/U$, $p' = \mu U/a p$, y las cantidades primadas son adimensionales. Por otro lado, al introducir el cambio de variable $x = 1 - 1/r$, en las ecuaciones (3.24), la expresión para la magnitud de la fuerza de arrastre resulta ser

$$F = (\mu U/a) \int_0^1 \int_0^{2\pi} [(-f/(1-x) + g'x/(1-x) + 1/(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} x^{n+2} + (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2) x^{n+1}) \cos \theta - (\sum_{n=0}^{\infty} a'_{n+2} x^{n+2} + (1-x) (g + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2} (n+2) x^{n+1}) - (g'x + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2} x^{n+2}) \sin \theta] d\theta dz. \quad (3.25)$$

En esta expresión se ha tomado en cuenta que al integrar sobre el cilindro, la variable $x = 0$, y que el elemento de área es la cantidad $r d\theta dz$. La integración requiere del uso de las funciones

$a_n, b_n, c_n, f,$ y g . No obstante, al evaluar sobre $x=0$ e integrar sobre z , la fuerza de arrastre se reduce a una expresión muy sencilla

$$F = (\mu U/a) \int_0^{2\pi} [-f \cos \theta - g \operatorname{sen} \theta] d\theta . \quad (3.26)$$

A partir de las expresiones (3.21) y (3.22) para las funciones f y g respectivamente, es posible realizar la integral, esta resulta ser

$$F = -\pi(\mu U/a) \{ (A_{01} + A_{21}R^2 + A_{41}R^4 + A_{61}R^6 + \dots) + (B_{01} + B_{21}R^2 + B_{41}R^4 + B_{61}R^6 + \dots) \} . \quad (3.27)$$

De la definición (1.36) para el coeficiente de arrastre

$$C_D = F/(\rho U^2 a),$$

se encuentra que

$$C_D = -\pi/R \{ (A_{01} + A_{21}R^2 + A_{41}R^4 + \dots) + (B_{01} + B_{21}R^2 + B_{41}R^4 + \dots) \} . \quad (3.28)$$

En la expresión anterior se ha utilizado la definición del número de Reynolds $R = aU\rho/\mu$ y ρ es la densidad de masa

La fórmula para el coeficiente de arrastre es muy simple y contrasta con las formas más complejas obtenidas por Lamb (ec. (1.1.40) y Skinner (ec. (2.50))). En particular la expresión (3.28) no contiene los términos logarítmicos que dan lugar a cantidades trascendientemente pequeñas.

Cálculos preliminares muestran que si se alcanzan altos ordenes (i.e. N grande) en el truncamiento de las ecuaciones (3.11), es posible aproximarse a los datos experimentales aún para valores de

$R = 3$. En la siguiente sección se discuten algunos resultados relacionados con la exactitud del método y las predicciones cualitativas a que es posible llegar.

4. RESULTADOS Y COMPARACIÓN CON OTROS CÁLCULOS Y RESULTADOS EXPERIMENTALES (7, 8, 14, 15).

La presente sección tiene por objeto presentar algunos resultados numéricos preliminares relacionados con el esquema de solución desarrollado en este capítulo.

En Soto et. al.¹⁴) se resolvió algebraicamente el sistema de ecuaciones (3.11) aún hasta $N = 14$, el manejo explícito de las expresiones fué realizado con computadora. Los resultados ahí obtenidos confirman la validéz de las soluciones.

La manipulación algebraica de las ecuaciones es complicada, en particular, en el cálculo de los coeficientes a_{14} y b_{14} aparecen 294 y 297 términos respectivamente.

Se mencionó en la sección anterior que sería deseable poder contar con algún criterio de convergencia de las series. Una posibilidad de conocer como se comportan las series (3.21) y (3.22) consiste en analizar los términos dominantes de éstas. Los cálculos por computadora muestran claramente que los coeficientes A_{01} y B_{01} convergen a un valor determinado (aproximadamente -0.5 para ambos) cuando $N \rightarrow \infty$, aquí se usaron valores de hasta $N = 14$ y a partir de éstos se extrapoló. Véase figura 3.1.

Para coeficientes de orden mayor esta convergencia no fue tan obvia, por ejemplo, los coeficientes A_{12} y B_{12} aparentemente convergen a un valor particular (ver figura 3.2), pero para los coeficientes A_{21} y B_{21} es imposible, a este orden, predecir algún valor de convergencia. (figura 3.3)

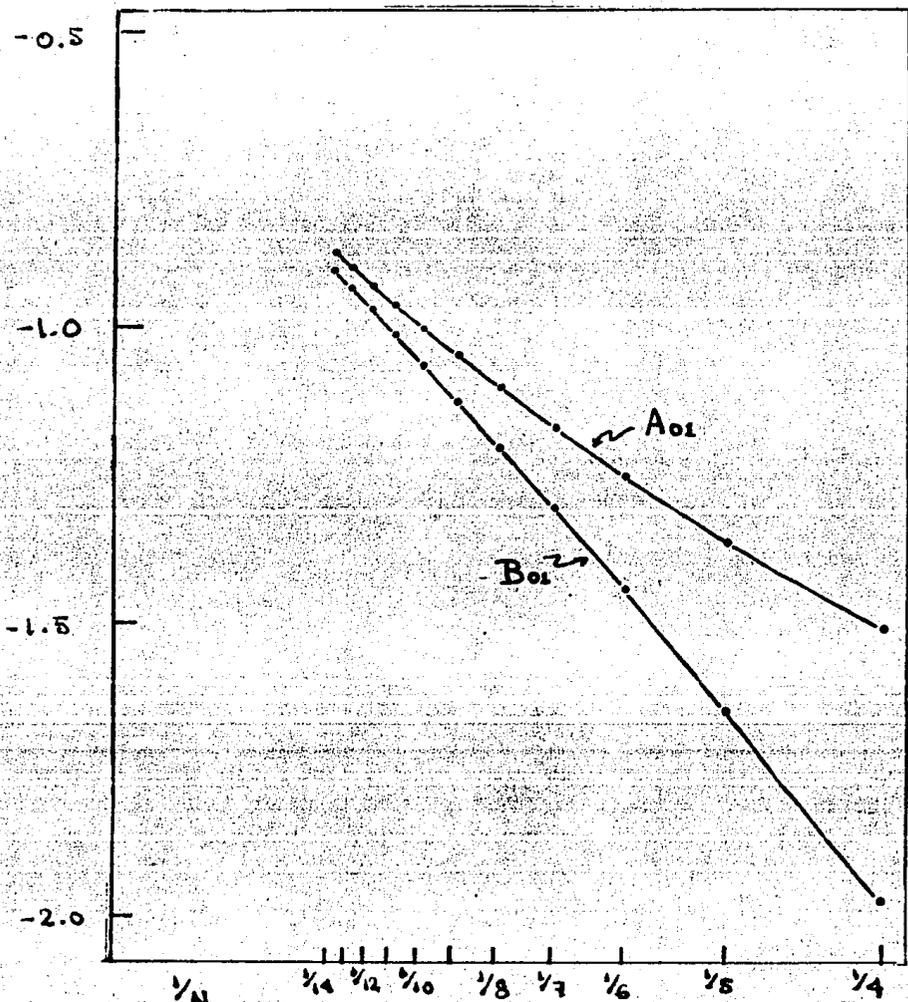


Fig 3.1. Comportamiento de los coeficientes A_{01} y B_{01} como función de la cantidad $1/N$, con N el número hasta el cual fue hecho el truncamiento en las ecuaciones (3.11). (Tomada de Referencia 14).

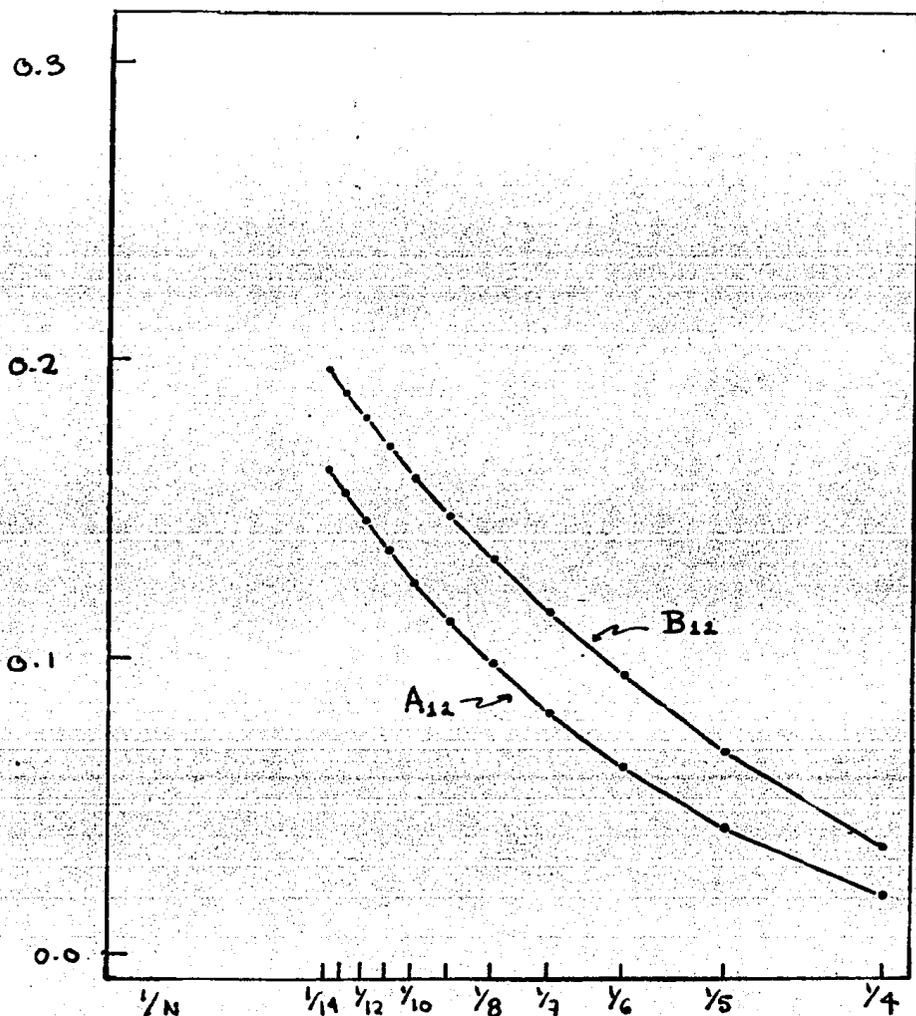


Fig 3.2. Comportamiento de los coeficientes A_{12} y B_{12} con el recíproco del número N , que es el valor hasta el cual fue hecho el truncamiento. (Tomada de Referencia 14).

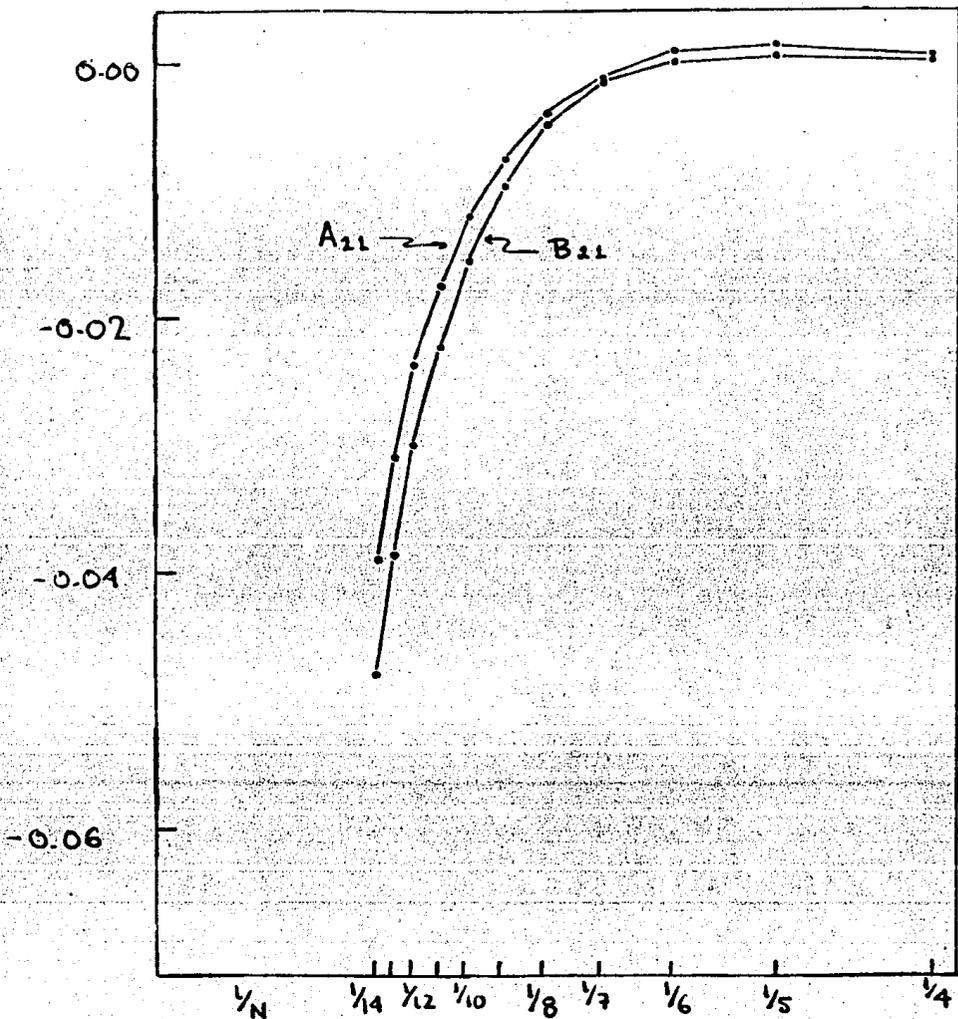


Fig 3.3. Los coeficientes A₂₁ y B₂₁ como función de 1/N, donde N es el valor hasta el cual hecho el truncamiento. (Tomada de Referencia 14).

Este método de solución permite encontrar la función de corriente explícitamente. A partir de la definición para la función de corriente dada en el capítulo I (ec (1.15))

$$u_r = 1/r \partial \psi / \partial \theta ,$$

se sustituye u_r (ecuación (3.15.a)) y se integra, esto da

$$\psi = \sum_{n=1}^N (1-1/r)^n r \int_0^{\theta} a_n^{(n)}(\zeta) d\zeta , \quad (3.29)$$

las líneas de corriente pueden ser dibujadas al hacer $\psi = \text{cte.}$

La integración algebraica de esta ecuación fue realizada para distintos valores de N y del número de Reynolds; para $N = 6, 40$ potencias de R y $R = 1$, se grafican las líneas de corriente para distintos valores de la constante en la figura 4. De igual modo si $N=6$, y 40 potencias de R pero $R=6$ las líneas de corriente son dibujadas para algunos valores de la constante. Véase figura 5.

Para $N = 9$ y 22 potencias de R se obtienen las siguientes figuras: (3.6) para $R = 1$, (3.7) para $R = 3$, (3.8) para $R = 4$, y (3.9) para $R = 4.4$. Las líneas de las últimas figuras son poco confiables debido a la pequeña cantidad de términos tomados en las potencias de R. Una observación importante es que cualitativamente se observa la aparición de una estela semejante atrás del cilindro para valores del número de Reynolds $R > 4.4$ que concuerda con los resultados experimentales ¹⁸ . Véase figura 3.9.

Las funciones $f(\theta)$ y $g(\theta)$ están relacionadas con la presión y la componente u_θ del campo de velocidad respectivamente (ecs. (3.5) y (3.9)), además, las relaciones de recurrencia permiten asociar directamente f y g, esto es, el cálculo de una determina automáticamente la otra.

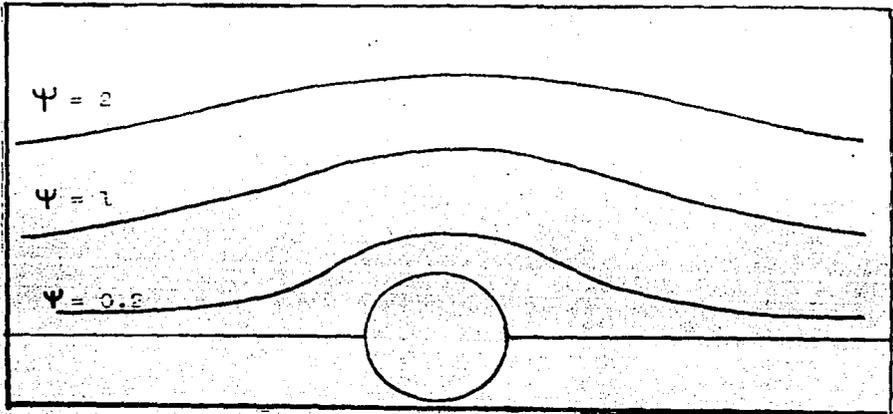


Fig 3.4. Líneas de corriente para $R=1$, los cálculos fueron hechos para $N=6$ y 40 potencias de R . (Tomada de la referencia 14).

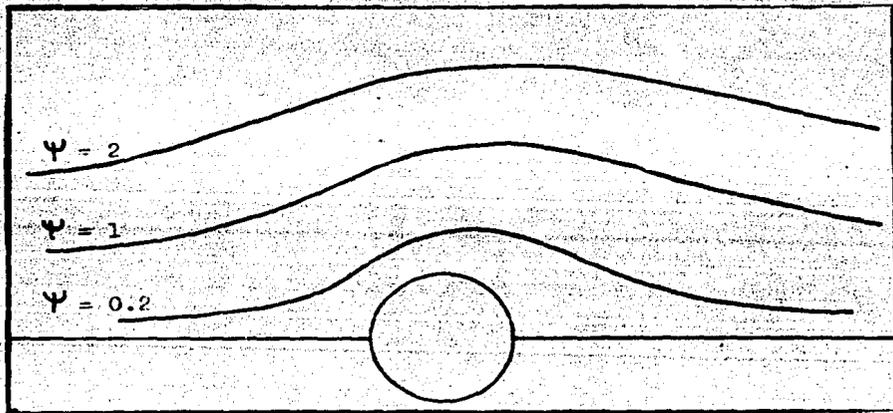


Fig 3.5. Líneas de corriente para $R=6$, los cálculos fueron hechos para $N=6$ y 40 potencias de R . (Tomada de la referencia 14).

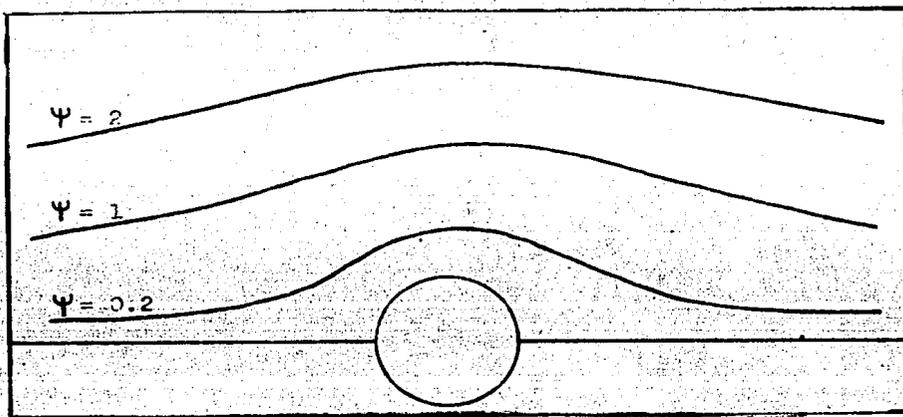


Fig. 3.6. Líneas de corriente para $R=1$, y $N=9$ en el truncamiento, los cálculos fueron hechos con 22 potencias en R . (Tomada de referencia (4)).

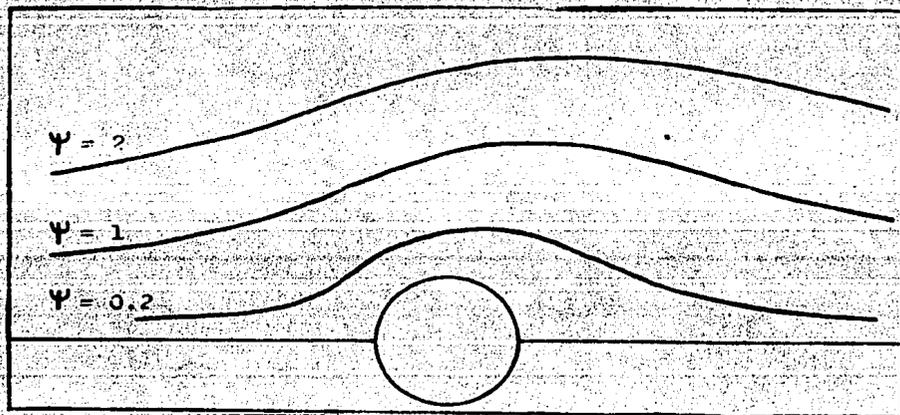


Fig. 3.7. Líneas de corriente para $R=3$, los cálculos fueron hechos para $N=9$ y 22 potencias de R . (Tomada de referencia (4)).

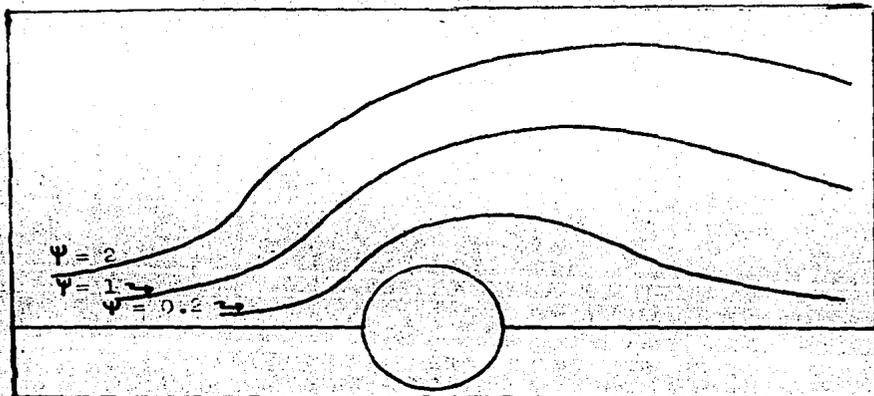


Fig 3.8. Líneas de corriente para $R=4$, los cálculos fueron hechos para $N=9$ y 22 potencias en R . (Tomada de referencia 14).

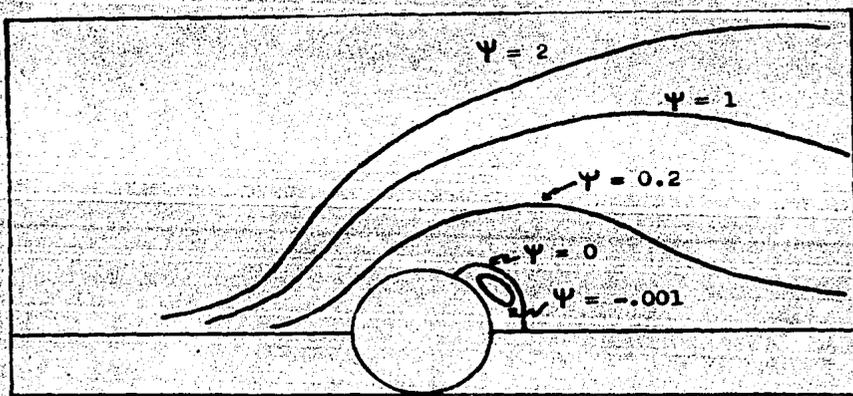


Fig 3.9 Líneas de corriente para $R=4.4$, los cálculos fueron hechos para $N=9$ y 22 potencias en R . (Tomada de referencia 14).

El método de solución ha permitido mostrar que la técnica de series de potencias claramente es aplicable al problema. Esto sugiere que si los truncamientos son llevados a ordenes más altos, en principio, se contará con un esquema de solución alternativo a los presentados en los capítulos anteriores, con la ventaja de ser uniformemente válido en todo el espacio y matemáticamente más simple. La dificultad práctica de cálculo algebraico limita la búsqueda de convergencia, pero ésta puede ser salvada con algunas técnicas matemáticas que han demostrado ser muy útiles en otros problemas. En particular, la evaluación de las series podría ser simplificada a través de los aproximantes de Padé¹⁶. Estos, son métodos que "aceleran la convergencia" de las series, es decir, con unos pocos términos se podrían determinar, con buena aproximación, los valores límite de la serie. En este punto algunas observaciones son necesarias. (a) Los aproximantes no necesariamente aceleran la convergencia en un sentido estricto (ver especialmente referencias 16 y 19.). (b) Además de los aproximantes de Padé existen otros métodos que realmente aceleran la convergencia en un sentido estricto pero su aplicación es muy limitada (ver referencia 19). Una ventaja adicional con respecto al uso de los aproximantes es que en algunos casos es posible determinar las singularidades de las expansiones.

El aproximante de Padé de la serie¹⁶

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots,$$

se define como

$$P[L/M] = (A_0 + A_1x + \dots + A_Lx^L) / (B_0 + B_1x + \dots + B_Mx^M),$$

donde A_i , B_i son funciones conocidas de a_0, a_1, a_2, \dots .

Aquí L y M son el grado del polinomio numerador y denominador respectivamente, los aproximantes más usados son aquellos para los cuales $M = L$ o $(L + 1)$. Estos serán útiles en la medida de que requieran pocos términos para dar una buena convergencia.

DISCUSIÓN GENERAL Y PERSPECTIVAS.

En este apartado se presentan las principales conclusiones relacionadas con los capítulos anteriores. Primeramente se discuten las perspectivas de trabajo que se proponen para una ampliación del esquema de solución propuesto en el capítulo anterior. Por último se hace un breve resumen de lo discutido a lo largo de esta revisión.

En el capítulo III se revisó una solución en términos de series de potencias, se sugirió la posibilidad de aplicar los aproximantes de Padé para buscar una posible convergencia de las series involucradas. Si el polinomio denominador llega a ser nulo, se tendrá una ecuación algebraica de grado M para la cual se podrían determinar sus raíces. En la expresión para el coeficiente de arrastre C_D (ec. (3.28)) el parámetro de las series es R , esto significa que tal vez sea posible calcular el valor crítico para el cual el flujo tiene una singularidad. A la fecha no es factible realizar estos cálculos porque se tienen pocos coeficientes calculados. Las formas explícitas de las funciones f y g (ecuaciones (3.22) y (3.21) respectivamente) sugieren también el uso de aproximantes de Padé para buscar un comportamiento singular en estas expresiones, la misma limitación de contar con pocos términos conocidos en las series se aplica aquí.

Se mencionó en la sección 4 del capítulo anterior que la función f puede ser determinada a partir de la función g , esto significa que en la práctica sólo es preciso conocer una de estas funciones para determinar completamente la otra. Más aún, como la función f está relacionada con la presión y la función g se relaciona con la componente angular de la velocidad, y de la

presión hay medidas experimentales se puede, en principio, conocer esta componente de la velocidad

Las formas funcionales de f y g son esencialmente desarrollos en series de Fourier de funciones de R , esto significa que se trabaja con la base de las series de Fourier.

Un grafica no discutida aquí, que muestra el comportamiento de f en términos de θ , pero para la cual se necesitan muchos términos de la serie para describir dicho comportamiento, sugiere la posible representación alternativa en otra base, de la función f . Algunas bases que parecen ser adecuadas son las de Bessel o Mathieu. Si este fuera el caso, se tendría una enorme ventaja porque la teoría de estas bases está completamente desarrollada y quizá con unos pocos términos de éstas se tenga una mejor representación de las funciones f y g .

Otra cuestión importante se relaciona con la ecuación diferencial no-lineal (3.17), la cual pudo ser resuelta mediante la suposición de que aceptaba una solución en términos de series de potencias. Existe la posibilidad de tratar ésta mediante otras técnicas aproximadas de solución (por ejemplo el método de escalas múltiples, una discusión particularmente adecuada puede verse en la referencia 19).

Lo anterior sugiere posibles extensiones al tratamiento del problema, el método está sujeto a críticas pero constituye un enfoque que pretende ser alternativo e ilustrativo para problemas similares.

El presente trabajo ha tenido como marco de referencia los tratamientos clásicos del problema. Mediante estos se han ilustrado varios hechos importantes. En primer lugar se vió en el

capítulo I que una linearización de las ecuaciones dinámicas no asegura que se encuentre una solución al problema, incluso, si ésta no es adecuadamente realizada puede dar origen a paradojas (paradoja de Stokes) que no son fácilmente solubles. Como un segundo punto de importancia en el tratamiento del problema se ilustró la utilidad de los criterios físicos, en particular, la aproximación de Oseen muestra un elegante criterio de linearización. Este lleva a una solución que da buenas aproximaciones a los datos experimentales lejos del cilindro.

Con el capítulo II se dió una visión general de cómo un problema de flujo bidimensional, que en apariencia es simple, da origen a un complejo aparato matemático creado ad hoc para su solución (Kaplun inventó la técnica del acoplamiento asintótico para tratar problemas de fluidos viscosos, y en particular el del flujo alrededor del cilindro). El método resulta adecuado en la medida que da una solución uniforme en todo el espacio y además ilustra como pueden ser atacados algunos problemas de perturbaciones singulares. Sus puntos en contra son esencialmente dos. (a) La solución obtenida por este método y hasta el orden de aproximación alcanzado en las expansiones, sólo es válida para números de Reynolds pequeños ($R < 0.4$). (b) Calcular los términos de $O(R)$ es en la práctica muy complicado. Estas limitaciones sugieren la búsqueda de la solución mediante otro enfoque, como el que se presenta en el capítulo III. En éste se hace una revisión de un tratamiento reciente que es capaz de llevar a una solución uniforme. El nuevo método tiene la ventaja de ser relativamente simple, pero suficientemente fuerte como para modelar el comportamiento del flujo de forma aproximada y cualitativamente correcta. El trabajo algebraico desarrollado por computadora es

esencial para la justificación de la solución. Se han planteado posibilidades de extensión con miras a obtener resultados cercanos a los datos experimentales. Si esto es posible, el esquema de solución será incluso más ventajoso que los tratamientos anteriores. Porque la relativa simplicidad y la uniformidad de la solución así lo sugieren.

APENDICE A

Demostración del teorema I.

Bajo la aproximación de Oseen las ecuaciones dinámicas son

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, \quad (1.5.a)$$

$$U \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} = -1/\rho \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{u}. \quad (1.5.b)$$

Si se toma el rotacional de la (1.5.b) y se tiene en cuenta la definición de vorticidad $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}$ (ec. (1.13)), se encuentra que

$$U \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x} = \nu \nabla^2 \underline{\omega}, \quad (a.1)$$

de igual modo el rotacional aplicado a la ecuación (1.5.a) da

$$\nabla \cdot \underline{\omega} = 0. \quad (a.2)$$

Ya que $\underline{\omega}$ es perpendicular al eje x , esto significa que $\underline{\omega}$ se puede escribir como

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = (\nabla \alpha \times \nabla \beta), \quad (a.3)$$

donde α y β son dos adecuadas funciones escalares (superficies)

$$\alpha(x, y, z) = \text{cte.} \quad \beta(x, y, z) = \text{cte.} \quad (a.4)$$

tales que el vector $\underline{\omega}$ es tangente a la curva generada por su intersección.

Si se escogen α y β del siguiente modo

$$\alpha = x, \quad \beta = z, \quad (a.5)$$

se tendrá entonces que

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = \hat{i} \times \nabla z, \quad (a.6)$$

con esta elección $\underline{\omega}$ siempre es perpendicular al eje x , además $z(x, y, z)$ es una función escalar indeterminada hasta una función aditiva de x . Una solución particular de la ecuación (a.6) es

$$\underline{u} = -\hat{i} z. \quad (a.7)$$

La solución general será

$$\underline{u} = -\nabla A - \hat{i} z, \quad (a.8)$$

donde A es otra función escalar arbitraria. Por otro lado, si se sustituye (a.6) en (a.1) se encuentra que

$$(\nabla^2 - 2k \partial/\partial x) \chi = f(x), \tag{a.9}$$

f(x) es una función arbitraria y k = U/2v, como χ también es arbitraria puede hacerse f(x) igual a cero. De la ecuación de continuidad (1.5.a) y las ecuaciones (a.8) y (a.9) previamente igualada a cero se tendrá

$$\nabla \cdot \underline{u} = \nabla \cdot (-\nabla A - \hat{i} \chi) = -\nabla^2 A - \partial \chi / \partial x = -\nabla^2 (A + \chi/2k) = \nabla^2 \phi = 0,$$

donde $\phi = A + \chi/2k$, y ϕ es una función armónica. Despejando A y sustituyendo en (a.8) se encuentra

$$\underline{u} = -\nabla \phi + 1/2k \nabla \chi - \hat{i} \chi. \tag{a.10}$$

Finalmente si se sustituye este valor de \underline{u} en las ecuaciones de Oseen se encuentra que

$$p = U \partial \phi / \partial x, \tag{a.11}$$

con esto el teorema queda demostrado.

REFERENCIAS

1. L.D.Landau. and E.M.Lifshitz, Fluid Mechanics. Pergamon Press, (1959).
2. I.G.Currie, Fundamental Mechanics of Fluids. McGraw-Hill, Inc, (1974).
3. L.M.Milne-Thomson, Theoretical Hydrodynamics. Macmillan Press, (1972).
4. J.Zierep, Similarity Laws and Modeling, Gas Dynamics Series Vol 2. Marcel Dekker, (1971).
5. J.D.Cole, Perturbation Methods in Applied Mathematics. Blaisdell Publishing Co, (1968).
6. H.Lamb. Hydrodynamics. Dover, (1975).
7. M.D.Van Dyke, Perturbation Methods in Fluid Mechanics. The Parabolic Press, (1978).
8. A.J.Weisenborn and P.Mazur, Physica 123 A (1984) 191-208.
9. J.Happel and H.Brenner, Low Reynolds Number Hydrodynamics. Prentice-Hall, (1965).
10. I.Proudman and J.R.A.Pearson, J. Fluid Mech., 2, Part 3 (1957).
11. A.H.Nayfeh, Introduction to Perturbation techniques. John-Wiley and Sons, (1981).
12. M.Abramowitz and I.A.Stegun, Handbook of Mathematical Functions. Dover, (1965).
13. L.A.Skinner, Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol XXVIII, Part 3, (1975).
14. R.Soto. y R.Peralta-Fabi, Reporte Interno, UAM-Iztapalapa. (Noviembre 1981).

15. M. Coutanceau and R. Bouard, *J. Fluid Mech.*, Vol 79, Part 2, (1977).
16. G.A. Baker, Jr. and P. Graves-Morris, Padé Approximants, Part I: Basic Theory. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co. (1981).
17. S. Tomotika, and T. Aoi, *Quart. J. and Appl. Math.*, Vol III, Pt. 2 (1950).
18. G.K. Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press. (1970).
19. C.M. Bender, and S.A. Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Co. (1978).