

29
1



**Universidad Nacional Autónoma
de México**

FACULTAD DE CIENCIAS

**LA ESTRUCTURA DE ALGEBRA DE HEYTING
EN EL CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS DE UN
TOPO.**

T E S I S

**Que para obtener el Título de
MATEMATICO**

p r e s e n t a

ANNE MARIE PIERRE ALBERRO SEMERENA

México, D. F.

1987



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Indice

	Página
Introducción	1
Capítulo I	1
Capítulo II	8
Capítulo III	19
Capítulo IV	59
Apéndice	93
Bibliografía	103

Introducción

El propósito de este trabajo es demostrar, en el marco de la Teoría de Topos, que el clasificador de subobjetos de un Topo tiene estructura de álgebra de Heyting, sin utilizar —como se hace usualmente— la propiedad de que $\text{Sub}(d)$ es un álgebra de Heyting.

En el Capítulo I damos las definiciones de álgebra de Boole y álgebra de Heyting junto con algunas de sus propiedades. Un resultado importante que retomamos en el Capítulo IV es la definición ecuacional de álgebra de Heyting dada en los Teoremas I.1 y I.4.

En el Capítulo II estudiamos la categoría de los conjuntos **Set**, verificando que satisface todas las propiedades que caracterizan a un Topo (cuya definición se dará en el Capítulo III) y definimos los morfismos de verdad $\cup, \cap, \Rightarrow, \neg$.

Por su parte, en el Capítulo III se estudian algunos Teoremas importantes sobre Topos que necesitaremos en el transcurso de este trabajo; definimos los morfismos de verdad partiendo de la construcción realizada en **Set** y demostramos que $(\text{Sub}(d), \perp)$ es una latiz acotada. Además, por medio de un contraejemplo mostramos que, no para todo Topo, $(\text{Sub}(d), \perp)$ es un álgebra de Boole; mas al definir el pseudo-complemento obtenemos que, $(\text{Sub}(d), \perp)$ es un álgebra de Heyting.

A partir de este resultado y utilizando el isomorfismo entre $\text{Hom}(_, \Omega)$ y $\text{Sub}(d)$, junto con la inmersión de Yoneda, se acostumbra probar que Ω —el clasificador de subobjetos de un Topo— es un álgebra de Heyting. Sin embargo en el Capítulo IV, siendo la parte importante de este trabajo, demostraremos directamente, sin tomar en cuenta a $\text{Sub}(d)$, que Ω tiene estructura de Álgebra de Heyting, considerando la definición basada en diagramas sugeridos por los Teoremas I.1 y I.4. No obstante, al utilizar el isomorfismo mencionado anteriormente y además probando que $\text{Hom}(d, \Omega)$ es un álgebra de Heyting, podemos concluir que Sub también lo es.

Capítulo I

En este capítulo estudiaremos conceptos y propiedades que permitirán dar la definición de álgebra de Boole y, a partir de ésta, la de álgebra de Heyting. Así mismo demostraremos algunos Teoremas importantes.

Definición. Un *conjunto parcialmente ordenado* es un conjunto P con una relación binaria R tal que para cualesquiera $a, b, c \in P$

- i) aRa (Reflexiva).
- ii) Si aRb y bRa entonces $a=b$ (Antisimétrica).
- iii) Si aRb y bRc entonces aRc (Transitiva).

Definición. Una *Latiz* (L, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada par de elementos a y b existe

- i) La máxima cota inferior $a \wedge b$ de a y b .
- ii) La mínima cota superior $a \vee b$ de a y b .

Definición. Sea (L, \leq) una latiz; w es un *elemento máximo* en L si $w \in L$ y $a \leq w$ para todo $a \in L$; u es un *elemento mínimo* en L si $w \in L$ y $w \leq a$ para todo $a \in L$.

Los elementos máximo y mínimo se denotan por 1 y 0 respectivamente. Una latiz es *acotada* si tiene elemento máximo y mínimo.

Definición. Una latiz (L, \leq) es *distributiva* si para todo $a, b, c \in L$ se cumple:

- i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
- ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Teorema I.1. Si (L, \leq) es una latiz acotada, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- i) $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$.
- ii) $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$.
- iii) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$; $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.
- iv) $a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a$.
- v) Si $a \leq b$ entonces $a \wedge b = a$ y $a \vee b = b$.

$$\begin{aligned} \text{vi) } a \wedge 1 &= a & ; & & a \vee 1 &= 1. \\ \text{vii) } 0 \wedge a &= 0 & ; & & 0 \vee a &= a. \end{aligned}$$

Además si se cumplen i) \rightarrow vii) definiremos un orden " \subseteq " en L de tal forma que (L, \subseteq) sea una latiz acotada.

Demostración. Las propiedades i) y ii) son evidentes.

$$\text{iii) } (a \wedge b) \wedge c \leq a \wedge b \leq a.$$

Como $(a \wedge b) \wedge c \leq a \wedge b \leq b$ y $(a \wedge b) \wedge c \leq c$, se sigue que $(a \wedge b) \wedge c \leq b \wedge c$.

Supongamos que $x \leq a$ y $x \leq b \wedge c$, entonces $x \leq a$, $x \leq b$ y $x \leq c$, de donde $x \leq a \wedge b$ y $x \leq c$, luego $x \leq (a \wedge b) \wedge c$. Por lo tanto $(a \wedge b) \wedge c \leq a \wedge (b \wedge c)$. Análogamente se prueba $a \vee (b \vee c) \leq (a \vee b) \vee c$.

iv) $a \leq a$ y $a \leq a \vee b$. Pero a es la máxima cota inferior, por lo tanto $a = a \wedge (a \vee b)$. Como $a \leq a$ y $a \wedge b \leq a$ entonces $a = a \vee (a \wedge b)$.

v) Como $a \leq a$ y $a \leq b$, entonces $a \leq a \wedge b$. Además $a \wedge b \leq a$, de donde $a = a \wedge b$. Análogamente $b = a \vee b$.

$$\text{vi) Como } a \leq 1, \text{ por v) } a \wedge 1 = a \text{ y } a \vee 1 = 1.$$

$$\text{vii) Como } 0 \leq a, \text{ por v) } a \wedge 0 = 0 \text{ y } a \vee 0 = a.$$

Definimos el orden " \subseteq " como sigue: $a \subseteq b$ si y sólo si $a = a \wedge b$.

$$1) a \subseteq a \text{ pues } a \wedge a = a.$$

$$2) \text{ Si } a \subseteq b \text{ y } b \subseteq a \text{ entonces } a = a \wedge b = b \text{ (por definición).}$$

$$3) \text{ Si } a \subseteq b \text{ y } b \subseteq c \text{ entonces } a = a \wedge b \text{ y } b = b \wedge c, \text{ luego}$$

$$a = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c, \text{ de donde } a \subseteq c.$$

Por lo tanto (L, \subseteq) es un conjunto parcialmente ordenado. Además $a \wedge b$ es la máxima cota inferior de a y b, pues

$$a \wedge b = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge (a \wedge b) \text{ y } a \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = (a \wedge b) \wedge b,$$

luego $a \wedge b \subseteq a$ y $a \wedge b \subseteq b$.

Supongamos que $x \in L$ es tal que $x \subseteq a$ y $x \subseteq b$, entonces $x = a \wedge x = b \wedge x$, luego $x \wedge a \wedge b = x$, de donde $x \subseteq a \wedge b$. Por lo tanto $a \wedge b$ es la máxima cota inferior de a y b

$$\text{Si } a \subseteq b \text{ entonces } a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b \text{ (por iv)).}$$

$a \subseteq avb$ y $b \subseteq avb$ pues

$$av(avb) = (ava)v b = avb,$$

$$bv(avb) = (bva)v b = (avb)v b = av(bvb) = b.$$

Supongamos que $x \in L$ es tal que $a \subseteq x$ y $b \subseteq x$, entonces

$$avx = (ax)v x = x \quad y$$

$$bv x = (bx)v x = x$$

de donde $x = avx = av(bvx) = (avb)v x$, luego $x \subseteq avb$. Por lo tanto avb es la mínima cota superior de a y b .

Por vi) y vii):

$a \subseteq 1$ y $0 \subseteq a$ para toda $a \in L$, luego (L, \subseteq) es una latiz acotada. \square

Corolario 1.1.1. En una latiz acotada (L, \subseteq) si $b \subseteq c$ entonces $a \wedge b \subseteq a \wedge c$ y $a \vee b \subseteq a \vee c$.

Demostración. En (L, \subseteq) se cumplen i) \rightarrow vii) luego

$$a \wedge b = (a \wedge a) \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge (a \wedge c) \subseteq a \wedge c.$$

$$a \vee b = (a \vee a) \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee (a \vee c), \text{ así } a \vee b \subseteq a \vee c. \quad \square$$

Definición. Sea (L, \subseteq) una latiz acotada. El *complemento* de cualquier elemento $a \in L$ es un elemento $a' \in L$ tal que $a \wedge a' = 0$ y $a \vee a' = 1$.

Una latiz acotada es *complementada* si todo elemento tiene complemento.

Definición. Un *álgebra de Boole* es una latiz acotada distributiva complementada.

Teorema 1.2. En un álgebra de Boole B cada elemento a tiene un y sólo un complemento a' tal que:

i) $(a')' = a$,

ii) $a \wedge b = 0$ si y sólo si $b \subseteq a'$,

iii) $a \subseteq b$ si y sólo si $b' \subseteq a'$,

iv) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$,

v) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

Demostración. Sea $a \in B$. Supongamos que existen a' y a'' en B tales que $a \wedge a' = 0$, $a \vee a' = 1$ y $a \wedge a'' = 0$, $a \vee a'' = 1$.

Tenemos

$$a' = a' \vee 0 = a' \vee (a \wedge a'') = (a' \vee a) \wedge (a' \vee a'') = 1 \wedge (a' \vee a'') = a' \vee a'' \quad y$$

$$a'' = a'' \vee 0 = a'' \vee (a \wedge a') = (a'' \vee a) \wedge (a'' \vee a') = 1 \wedge (a'' \vee a') = a'' \vee a',$$

por lo tanto $a' = a''$; es decir, el complemento es único.

i) Como $aa'a' = a'a'a = 0$ y $ava' = a'va = 1$, $a = a'$, luego $a' = (a)'$.

ii) Supongamos que $a \wedge b = 0$;

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (ava') = (b \wedge a)v(baa') = 0v(baa') = baa' \leq a'.$$

Ahora, si $b \leq a'$ entonces $a \wedge b = a \wedge (a' \wedge b) = (aa'a') \wedge b = 0$.

iii) Si $a \leq b$ entonces $a \wedge c \leq b \wedge c$ para todo $c \in B$, luego $a \wedge b' \leq b \wedge b'$, de donde $a \wedge b' \leq 0$; luego $0 = a \wedge b'$ y por inciso ii) $b' \leq a'$.

Si $b' \leq a'$ entonces $(b')' \geq (a')'$, luego $a \leq b$.

iv) Como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, por el inciso iii), $a' \leq (a \wedge b)'$ y $b' \leq (a \wedge b)'$. Supongamos que existe $c \in B$ tal que $a' \leq c$ y $b' \leq c$. Por iii) $c' \leq a$ y $c' \leq b$, de donde $c' \leq a \wedge b$, luego $(a \wedge b)' \leq c$ y por lo tanto $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

v) Es inmediato de i) y iv). □

Para llegar a enunciar y demostrar el Teorema 1.3 necesitaremos algunas definiciones.

Sea (L, \leq) una latiz y $A \subseteq L$. Una *cota superior* para A es un elemento $x \in L$ tal que $a \leq x$ para todo $a \in A$; x es el *supremo* de A si x es la menor cota superior. A tiene *elemento máximo* cuando existe un elemento $x \in A$ tal que x es el supremo de A .

Definición. Sea (L, \leq) una latiz con elemento mínimo 0 y $a \in L$. El elemento $b \in L$ es un *seudo-complemento de a en L* si b es el elemento máximo del conjunto:

$$C_a = \{x \in L \mid a \wedge x = 0\}.$$

Se denota al *seudo-complemento de a* por $\neg a$.

Afirmación. Si $\neg a$ es el *seudo-complemento de a* ,

$$a \wedge c = 0 \text{ si y sólo si } c \leq \neg a.$$

Si $a \wedge c = 0$, $c \in C_a$, pero como $\neg a$ es el elemento máximo, $c \leq \neg a$.

Ahora, si $c \leq \neg a$, $a \wedge c \leq a \wedge \neg a = 0$ (Corolario I.1.1), pero 0 es el elemento mínimo, luego $a \wedge c = 0$.

El concepto de *seudo-complemento* se puede generalizar y se obtiene la

siguiente

Definición. Sea (L, \leq) una latiz y $a, b \in L$. El *seudo-complemento de a relativo a b* es el elemento máximo del conjunto

$$c_a^b = \{x \in L \mid a \wedge x \leq b\}.$$

Se denota al *seudo-complemento de a relativo a b* por $a \Rightarrow b$.

El *seudo-complemento de a relativo a b*, por definición, es tal que $a \wedge c \leq b$ si y sólo si $c \leq a \Rightarrow b$ para toda $c \in L$.

Definición. Una latiz L *relativamente seudo-complementada* es una latiz en la que cada par de elementos $a, b \in L$ tiene un *seudo-complemento relativo* $a \Rightarrow b$.

Definición. Un *álgebra de Heyting* es una latiz acotada relativamente seudo-complementada.

Teorema I.3. Toda álgebra de Boole es un álgebra de Heyting.

Demostración. Sea \mathbf{B} un álgebra de Boole y sean a y b elementos de \mathbf{B} . Definimos $a \Rightarrow b = a' \vee b$.

Si $a \wedge c \leq b$ entonces

$$c = (a' \vee b) \wedge c = (a' \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq (a' \wedge c) \vee b \leq a' \vee b.$$

Si $c \leq a' \vee b$ entonces

$$a \wedge c \leq a \wedge (a' \vee b) = (a \wedge a') \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) \leq b.$$

Por lo tanto $a' \vee b$ es tal que $a \wedge c \leq b$ si y sólo si $c \leq a' \vee b$, de donde \mathbf{B} es una latiz relativamente seudo-complementada. \square

Se prueba fácilmente que toda álgebra de Heyting es una Latiz distributiva.

Teorema I.4. Una latiz acotada \mathbf{A} es un álgebra de Heyting si y sólo si para cualesquiera $x, y, z \in \mathbf{A}$ se cumple:

- i) $x \Rightarrow x = 1$
- ii) $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$
- iii) $y \wedge (x \Rightarrow y) = y$
- iv) $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$.

Demostración. Supongamos que \mathbf{A} es un álgebra de Heyting.

i) $x \wedge 1 \leq x$, luego $1 \leq x \Rightarrow x$, entonces $1 = x \Rightarrow x$.

ii) $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq x \vee x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$ pues $x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow y$. Por lo tanto, $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq x \wedge y$. Como $x \wedge y \leq y$, tenemos $y, x \Rightarrow y$, de donde $x \wedge y \leq x \wedge (x \Rightarrow y)$.

iii) $(x \Rightarrow y) \wedge y \leq y$; además $y = y \wedge y \leq y \wedge (x \Rightarrow y)$, por lo tanto $y = (x \Rightarrow y) \wedge y$.

iv) Si $y \leq z$ entonces $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y \leq z$, luego $x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow z$.

Como $y \wedge z \leq y$ y $y \wedge z \leq z$ entonces

$$x \Rightarrow (y \wedge z) \leq x \Rightarrow y \quad y \quad x \Rightarrow (y \wedge z) \leq x \Rightarrow z.$$

Sea $w \in A$ tal que $w \leq x \Rightarrow y$ y $w \leq x \Rightarrow z$. Como

$$x \wedge w \leq x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y \quad y$$

$$x \wedge w \leq x \wedge (x \Rightarrow z) \leq z,$$

entonces $x \wedge w \leq y \wedge z$ de donde $w \leq x \Rightarrow (y \wedge z)$.

Por lo tanto $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$, con lo que queda probada la condición de necesidad. Para ver que es suficiente, supongamos que A es una latiz acotada y que se cumplen 1) \rightarrow 4). Demostraremos que $x \wedge z \leq y$ si y sólo si $z \leq x \Rightarrow y$.

a) Si $x \wedge z \leq y$, entonces $x \Rightarrow (x \wedge z) \leq x \Rightarrow y$. Pero $x \Rightarrow (x \wedge z) = 1 \wedge (x \Rightarrow z) = x \Rightarrow z$, por lo tanto $z \leq x \Rightarrow z \leq x \Rightarrow y$.

b) Si $z \leq x \Rightarrow y$ entonces $z = z \wedge (x \Rightarrow y)$, de donde

$$z \wedge x = z \wedge (x \Rightarrow y) \wedge x = z \wedge x \wedge y \leq y.$$

Por lo tanto A es un álgebra de Heyting. □

El complemento de x en un álgebra de Heyting A se define como $\neg x = x \Rightarrow 0$.

Teorema 1.5. En un álgebra de Heyting se cumplen las siguientes propiedades

i) $x \wedge \neg x = 0$,

ii) $x \leq \neg \neg x$,

iii) Si $x \leq y$ entonces $\neg y \leq \neg x$,

iv) $\neg x = \neg \neg \neg x$,

v) $(x \Rightarrow y) \leq \neg x \Rightarrow \neg y$,

vi) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$,

vii) $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge y)$.

Demostración.

i) Como 0 es el elemento mínimo $0 \leq x \wedge x$, pero $x \wedge \neg x = x \wedge (x \Rightarrow 0) = x \wedge 0 \leq 0$.
Por lo tanto $x \wedge \neg x = 0$.

ii) Por i), $\neg x \wedge x = 0$, luego $(x \Rightarrow 0) \wedge x = 0$, de donde $(x \Rightarrow 0) \wedge x \leq 0$, si y sólo si $x \leq (x \Rightarrow 0) \Rightarrow 0$. Por lo tanto $x \leq \neg \neg x$.

iii) Si $x \leq y$, $\neg y \wedge x \leq \neg y \wedge y = 0$, de donde $\neg y \wedge x \leq 0$, si y sólo si $\neg y \leq x \Rightarrow 0$. Por lo tanto $\neg y \leq \neg x$.

iv) Como $x \leq \neg \neg x$ entonces $\neg x \leq \neg \neg \neg x$. Por iii), si $x \leq \neg \neg x$ entonces $\neg \neg \neg x \leq \neg x$.
Por lo tanto $\neg x = \neg \neg \neg x$.

v) $0 = \neg y \wedge y \leq \neg \neg y$, pero $y = (x \Rightarrow y) \wedge y$ entonces $\neg y \wedge (x \Rightarrow y) \wedge y \leq \neg \neg y$, luego $\neg y \wedge (x \Rightarrow y) \leq \neg y$ si y sólo si $x \Rightarrow y \leq \neg y \Rightarrow \neg y$.

vi) $[0 \wedge (y \Rightarrow 0)] \vee [0 \wedge (x \Rightarrow 0)] \leq 0$ si y sólo si
 $[(x \wedge (x \Rightarrow 0)) \wedge (y \Rightarrow 0)] \vee [(y \wedge (y \Rightarrow 0)) \wedge (x \Rightarrow 0)] \leq 0$ de donde
 $(x \vee y) \wedge [(x \Rightarrow 0) \wedge (y \Rightarrow 0)] \leq 0$ si y sólo si
 $(x \Rightarrow 0) \wedge (y \Rightarrow 0) \leq (x \vee y) \Rightarrow 0$, por lo tanto $\neg x \wedge \neg y \leq \neg(x \vee y)$.

Como $x \leq x \vee y$ y $y \leq x \vee y$ entonces

$\neg(x \vee y) \leq \neg x$ y $\neg(x \vee y) \leq \neg y$, de donde
 $\neg(x \vee y) \leq \neg x \wedge \neg y$; así $\neg x \wedge \neg y = \neg(x \vee y)$.

vii) Como $(0 \wedge y) \vee (0 \wedge x) \leq 0$ entonces

$[(\neg x \wedge \neg y) \wedge y] \vee [(\neg x \wedge \neg y) \wedge x] \leq 0$, es decir
 $(\neg x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \leq 0$, si y sólo si
 $\neg x \vee \neg y \leq (\neg x \wedge y) \Rightarrow 0$.

Por lo tanto $\neg x \vee \neg y \leq \neg(\neg x \wedge y)$. □

Capítulo II

Se considera la categoría **Set**, cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son las funciones entre éstos, así como algunas de sus propiedades.

1) Objeto terminal.

Sea B un conjunto con un sólo elemento. Para todo objeto A de **Set** existe una única función $f : A \rightarrow B$. Por lo tanto **Set** tiene objeto terminal.

2) Productos Binarios.

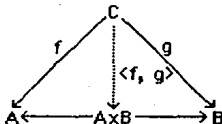
Dados A y B objetos de **Set**, consideramos el producto cartesiano

$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B \}$, junto con las proyecciones

$P_A : A \times B \rightarrow A$ y $P_B : A \times B \rightarrow B$.

Sea C un objeto de **Set**, $f : C \rightarrow A$ y $g : C \rightarrow B$ funciones.

Construimos $\langle f, g \rangle : C \rightarrow A \times B$ tal que $\langle f, g \rangle(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. Claramente el siguiente diagrama es conmutativo



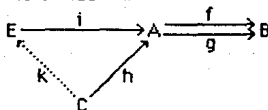
Supongamos que existe $\langle f', g' \rangle : C \rightarrow A \times B$ tal que $P_A \circ \langle f', g' \rangle = f$ y $P_B \circ \langle f', g' \rangle = g$. Luego $f' = f$ y $g' = g$ de donde $\langle f, g \rangle$ es única. Por lo tanto **Set** tiene productos binarios.

3) Igualadores.

Sean $f, g : A \rightarrow B$ morfismos de **Set** ;

$E = \{ x \in A \mid f(x) = g(x) \}$ objeto de **Set** ;

$i : E \rightarrow A$ la inclusión.



Si $x \in E$, entonces

$$(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x) = g(x) = g(i(x)) = g \circ i(x).$$

Sean C un objeto de Set y $h: C \rightarrow A$ un morfismo de Set tal que $f \circ h = g \circ h$; como $(f \circ h)(c) = (g \circ h)(c)$ para toda $c \in C$, la función $k: C \rightarrow E$ dada por $k(c) = h(c)$ es tal que el diagrama anterior conmuta.

Supongamos que existe $k': C \rightarrow E$ tal que $i \circ k' = h$, luego, para toda $c \in C$, $h(c) = (i \circ k')(c) = k'(c)$, por lo tanto k es única.

Por 1), 2) y 3) Set es una categoría completa.

4) Objeto inicial

Sea \emptyset el conjunto vacío. Como para todo objeto A de Set existe una única función $f: \emptyset \rightarrow A$ Set tiene objeto inicial.

5) Coproductos Binarios.

Sean A y B conjuntos. Definamos el coproducto de A y B , denotado por $(A+B, i_A, i_B)$, como

$$A+B = A' \cup B' \text{ donde}$$

$$A' = \{\langle a, 0 \rangle \mid a \in A\} = A \times \{0\},$$

$$B' = \{\langle b, 1 \rangle \mid b \in B\} = B \times \{1\}$$

es claro que $A' \cap B' = \emptyset$.

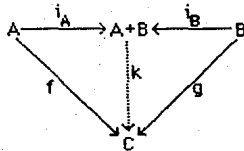
Sean $i_A: A \rightarrow A+B$ y $i_B: B \rightarrow A+B$ dadas por

$$i_A(a) = \langle a, 0 \rangle, \quad i_B(b) = \langle b, 1 \rangle.$$

Sean C un objeto de Set , $f: A \rightarrow C$ y $g: B \rightarrow C$ funciones. La función $k: A+B \rightarrow C$ definida por

$$k(\langle a, 0 \rangle) = f(a) \quad \text{y} \quad k(\langle b, 1 \rangle) = g(b)$$

es tal que el siguiente diagrama conmuta



Veamos que la función k es la única con esta propiedad.

Supongamos que existe $h: A+B \rightarrow C$ tal que $h \circ i_A = f$ y $h \circ i_B = g$.

Para toda $a \in A$ y $b \in B$ tenemos

$$(h \circ i_A)(a) = h(\langle a, 0 \rangle) = f(a)$$

$$(h \circ i_B)(b) = h(\langle b, 1 \rangle) = g(b)$$

luego, $k = h$.

Por lo tanto **Set** tiene coproductos binarios.

6) Coigualadores.

Sean $f, g : A \rightarrow B$ morfismos de **Set**, y $S = \{\langle f(a), g(a) \rangle \mid a \in A\} \subseteq B \times B$.
Consideramos R una relación de equivalencia en B tal que

i) $S \subseteq R$;

ii) Si T es una relación de equivalencia en B tal que $S \subseteq T$,
entonces $R \subseteq T$.

Sea $B/R = \{[b] \mid b \in B\}$ el conjunto de clases de equivalencia bajo S y $f_R : B \rightarrow B/R$
dada por $f_R(b) = [b]$.

$(B/R, f_R)$ es el coigualador de f y g

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{f_R} B/R$$

Sea $a \in A$, entonces

$$(f_R \circ f)(a) = f_R(f(a)) = [f(a)] = [g(a)] = f_R(g(a)) = (f_R \circ g)(a)$$

por lo tanto $f_R \circ f = f_R \circ g$.

Sea C un conjunto y $h : B \rightarrow C$ una función tal que $h \circ f = h \circ g$.

Definamos $k : B/R \rightarrow C$ como $k([b]) = h(b)$; k está bien definida, pues si $[b] = [b']$, entonces $b R b'$. Como h define una relación de equivalencia R' en B dada por $x R' y$ si y sólo si $h(x) = h(y)$ y $R \subseteq R'$, entonces $k([b]) = h(b) = h(b') = k([b'])$.

Por definición $k \circ f_R = h$, entonces

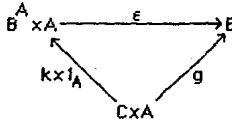
$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{f_R} \\ \xrightarrow{h} \end{array} B/R \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \xrightarrow{h} \end{array} C$$

es un diagrama conmutativo.

Por 4), 5) y 6) **Set** es una categoría cocompleta.

7) Exponenciación.

Dados A y B conjuntos, existe un objeto B^A de **Set** y un morfismo $\epsilon : B^A \times A \rightarrow B$ tal que para todo conjunto C y un morfismo $g : C \times A \rightarrow B$ existe una única $k : C \rightarrow B^A$ tal que el diagrama conmuta



Sea $B^A = \{f \mid f : A \rightarrow B \text{ es una función de Set}\}$ y $\epsilon : B^A \times A \rightarrow B$ dada por $\epsilon\langle f, x \rangle = f(x)$.

Definamos $k : C \rightarrow B^A$ tal que $(k(c))(a) = g(c, a) \in B$, para todo $c \in C$.

Si $(c, a) \in C \times A$, entonces

$$\begin{aligned} (\epsilon \circ (k \times 1_A))(c, a) &= \epsilon(k(c), a) \\ &= (k(c))(a) \\ &= g(c, a), \end{aligned}$$

por lo tanto $\epsilon \circ (k \times 1_A) = g$.

Supongamos que existe $k' : C \rightarrow B^A$ tal que $\epsilon \circ (k' \times 1_A) = g$, entonces para todo $(c, a) \in C \times A$

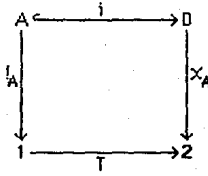
$$\begin{aligned} g(c, a) &= (\epsilon \circ (k' \times 1_A))(c, a) \\ &= \epsilon(k'(c), a) \\ &= (k'(c))(a), \end{aligned}$$

luego $(k'(c))(a) = (k(c))(a)$. Por lo tanto $k(c) = k'(c)$ para toda $c \in C$; es decir, k es única.

8) Clasificador de subobjetos.

Consideremos el conjunto $2 = \{0, 1\}$ y el morfismo $T : 1 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $T(0) = 1$ (*Verdad*).

Demostraremos que dado A subconjunto de D , $1 : A \rightarrow D$, existe una única función $x_A : D \rightarrow 2$ tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado



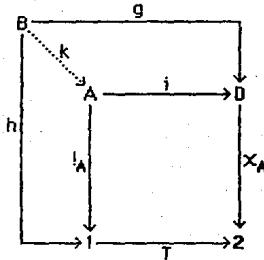
Al morfismo x_A lo llamaremos el morfismo *característico* de A .
 Definamos x_A como

$$x_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

El cuadrado anterior conmuta, pues si $x \in A$ tenemos

$$(x_A \circ i)(x) = x_A(i(x)) = x_A(x) = T(0) = (T \circ l_A)(x).$$

Sean $g : B \rightarrow D$ y $h : B \rightarrow 1$ tales que $x_A \circ g = T \circ h$;



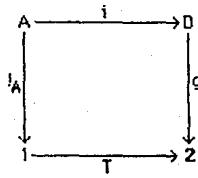
Si $b \in B$, entonces $(x_A \circ g)(b) = (T \circ h)(b) = 1$, de donde $g(b) \in A$.

Definimos $k : B \rightarrow A$ como $k(b) = g(b)$

$$(i \circ k)(b) = i(k(b)) = k(b) = g(b)$$

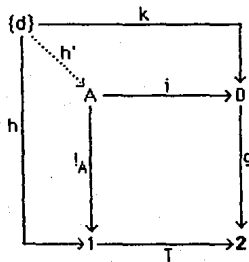
$$(l_A \circ k)(b) = l_A(k(b)) = 0 = h(b).$$

Veamos que x_A es la única con esta propiedad. Supongamos que existe $g : D \rightarrow 2$ tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado



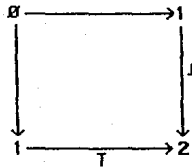
Si $d \in A$, entonces $g(d) = (g \circ i)(d) = (T \circ l_A)(d) = 1$.

Si $d \in D-A$, afirmamos que $g(d) = 0$. Supongamos que existe $d \in D-A$ tal que $g(d) = 1$ y consideremos $k: \{d\} \rightarrow D$ dada por $k(d) = d$ y $h: \{d\} \rightarrow 1$



Como $(g \circ k)(d) = g(k(d)) = 1 = (T \circ h)(d)$, entonces existe una única $h': \{d\} \rightarrow A$ tal que $i \circ h' = k$ y $l_A \circ h' = h$, de donde $(i \circ h')(d) = i(h'(d)) = k(d) = d$, entonces $d \in A$, contradiciendo la hipótesis. Así, x_A es única.

9) El morfismo $\perp: \{0\} \rightarrow 2$ con $\perp(0) = 0$ (*false*) es tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado



Analicemos los morfismos de verdad en **Set**.

Dadas α y β proposiciones lógicas, les asignamos valores de verdad: "1" si la proposición es verdadera; "0" si es falsa. Así obtenemos el conjunto de valores de verdad $\mathbb{Z} = \{0, 1\}$.

Esas proposiciones combinadas con los conectivos lógicos: conjunción " \wedge "; disyunción " \vee "; negación " \sim " e implicación " \supset " dan lugar a nuevas proposiciones lógicas cuyas tablas de verdad exhibimos a continuación:

α	$\sim\alpha$
1	0
0	1

α	β	$\alpha \wedge \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

α	β	$\alpha \vee \beta$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

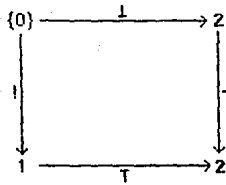
α	β	$\alpha \supset \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Estas tablas determinan los siguientes morfismos de verdad:

- El morfismo negación $\sim : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.
- El morfismo conjunción $\cap : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.
- El morfismo disyunción $\cup : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.
- El morfismo implicación $\Rightarrow : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

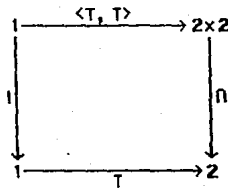
Todos estos morfismos de verdad tienen codominio \mathbb{Z} , por lo tanto son el morfismo característico de algún subconjunto de su dominio (Propiedad **8**).

- Sea $\perp : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{Z}$. Consideremos $\{x \in \mathbb{Z} \mid \neg(x) = 1\} = \{0\} \subset \mathbb{Z}$, con lo que el siguiente diagrama es un producto fibrado



$A \sim : 2 \rightarrow 2$ lo llamaremos el morfismo característico de J .

b) Consideremos $A = \{\langle 1, 1 \rangle\} \subset 2 \times 2$ y $\langle T, T \rangle : 1 \rightarrow 2 \times 2$, entonces $\text{im}\langle T, T \rangle = A$ por lo cual el diagrama es un producto fibrado



De donde $\pi : 2 \times 2 \rightarrow 2$ es el morfismo característico de $\langle T, T \rangle$.

c) Sean

$$A = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\} \text{ y } B = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle\}.$$

$$\langle T_2, I_2 \rangle : 2 \rightarrow 2 \times 2 \text{ tal que}$$

$$\langle T_2, I_2 \rangle(0) = \langle T_2(0), I_2(0) \rangle = \langle 1, 0 \rangle \text{ (con } T_2 = T \cdot I_2)$$

$$\langle T_2, I_2 \rangle(1) = \langle T_2(1), I_2(1) \rangle = \langle 1, 1 \rangle,$$

con lo que $\text{im}\langle T_2, I_2 \rangle = A$.

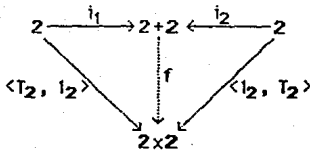
Análogamente sea $\langle I_2, T_2 \rangle : 2 \rightarrow 2 \times 2$ tal que

$$\langle I_2, T_2 \rangle(0) = \langle 0, 1 \rangle$$

$$\langle I_2, T_2 \rangle(1) = \langle 1, 0 \rangle,$$

de donde $\text{im}\langle I_2, T_2 \rangle = B$.

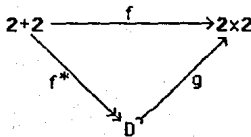
Sea $D = A \cup B$. Consideremos el coproducto



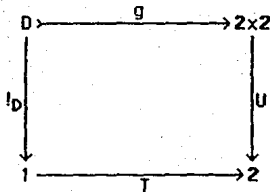
entonces existe una única función $f : 2+2 \rightarrow 2 \times 2$ con $f = [\langle T_2, i_2 \rangle, \langle i_1, T_2 \rangle]$. La imagen de f es tal que:

$$\begin{aligned}
 \text{im} f &= f[2+2] = f(\text{im}(i_1) \cup \text{im}(i_2)) \\
 &= f(\text{im}(i_1)) \cup f(\text{im}(i_2)) \\
 &= \text{im}(f \circ i_1) \cup \text{im}(f \circ i_2) \\
 &= \text{im}\langle T_2, i_2 \rangle \cup \text{im}\langle i_1, T_2 \rangle = A \cup B.
 \end{aligned}$$

Al morfismo $f : 2+2 \rightarrow 2 \times 2$ lo podemos escribir como la composición de un epimorfismo seguido de un monomorfismo obteniendo:



lo cual implica que el siguiente diagrama



es un producto fibrado. Por lo tanto $U : 2 \times 2 \rightarrow 2$ es el morfismo característico de la imagen de $[\langle T_2, i_2 \rangle, \langle i_1, T_2 \rangle]$.

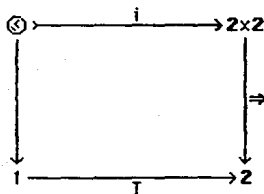
d) Consideremos $\textcircled{3} = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$
 $= \{\langle x, y \rangle \in 2 \times 2 \mid x \neq y\}$

Sabemos que en una Latiz $x \leq y$ si y sólo si $x \wedge y = x$, entonces

$$\textcircled{3} = \{ \langle x, y \rangle \mid x \wedge y = x \},$$

de donde $\textcircled{3}$ es el igualador de $\Pi : 2 \times 2 \rightarrow 2$ y $\Pi : 2 \times 2 \rightarrow 2$ (Propiedad 3)

Por lo anterior, el siguiente diagrama es un producto fibrado



Entonces $\Rightarrow : 2 \times 2 \rightarrow 2$ es el morfismo característico de la inclusión $i : \textcircled{3} \rightarrow D$.

Veamos cómo se relacionan los morfismos característicos anteriormente definidos, con las operaciones "u", "n", "-".

Teorema II.1. Si A y B son subconjuntos de D con morfismos característicos $x_A : D \rightarrow 2$ y $x_B : D \rightarrow 2$, entonces

i) $x_{-A} = \neg \circ x_A$

ii) $x_{A \cap B} = x_A \wedge x_B = \Pi \circ \langle x_A, x_B \rangle$;

iii) $x_{A \cup B} = x_A \vee x_B = U \circ \langle x_A, x_B \rangle$.

Demostración. Sea $x \in D$;

i) si $x_{-A}(x) = 1$, entonces $x \in -A$. Por lo tanto $x_A(x) = 0$, de donde

$$(\neg \circ x_A)(x) = \neg(0) = 1$$

Así, para toda $x \in D$, $x_{-A}(x) = (\neg \circ x_A)(x)$.

ii) Si $x_{A \cap B}(x) = 1$, entonces $x \in A \cap B$,

$$\langle x_A, x_B \rangle(x) = \langle x_A(x), x_B(x) \rangle = \langle 1, 1 \rangle,$$

por lo tanto $(\Pi \circ \langle x_A, x_B \rangle)(x) = \Pi(\langle 1, 1 \rangle) = 1$.

Si $x_{A \cap B}(x) = 0$, entonces x no pertenece a $A \cap B$, luego existen tres posibilidades:

a) $x \in A - B$; b) $x \in -A \cap B$; c) $x \in -A$ y $x \in -B$.

a) $(\Pi \circ \langle x_A, x_B \rangle)(x) = (\Pi \circ \langle x_A(x), x_B(x) \rangle) = \Pi(\langle 1, 0 \rangle) = 0$.

b) $(\Pi \circ \langle x_A, x_B \rangle)(x) = (\Pi \circ \langle x_A(x), x_B(x) \rangle) = \Pi(\langle 0, 1 \rangle) = 0$.

c) $(\Pi \circ \langle x_A, x_B \rangle)(x) = (\Pi \circ \langle x_A(x), x_B(x) \rangle) = \Pi(\langle 0, 0 \rangle) = 0$.

Por lo tanto para toda $x \in D$, $x_{A \cap B}(x) = (\cap \langle x_A, x_B \rangle)(x)$.

iii) Si $x_{A \cup B}(x) = 1$, entonces $x \in A \cup B$.

Si $x \in A$, entonces

$$(\cup \langle x_A, x_B \rangle)(x) = U(\langle x_A(x), x_B(x) \rangle) = U(\langle 1, x_B(x) \rangle) = 1.$$

Si $x \in B$, entonces

$$(\cup \langle x_A, x_B \rangle)(x) = U(\langle x_A(x), x_B(x) \rangle) = U(\langle x_A(x), 1 \rangle) = 1.$$

Supongamos que $x_{A \cup B}(x) = 0$, entonces x no es elemento de $A \cup B$, luego

$$(\cup \langle x_A, x_B \rangle)(x) = U(\langle x_A(x), x_B(x) \rangle) = U(\langle 0, 0 \rangle) = 0.$$

Por lo tanto para toda $x \in D$, $x_{A \cup B}(x) = (\cup \langle x_A, x_B \rangle)(x)$. □

Sea D un conjunto. Consideremos el conjunto $\mathcal{P}(D)$, formado por todos los subconjuntos de D .

Teorema II.2. $(\mathcal{P}(D), \subseteq)$ es un álgebra de Boole.

Demostración.

a) Claramente $(\mathcal{P}(D), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

b) Sean A y $B \in \mathcal{P}(D)$. Consideremos:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\};$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\};$$

$$\neg A = \{x \mid x \in D \text{ y } x \text{ no es elemento de } A\}.$$

Es inmediato que $A \cap B$ es la máxima cota inferior y que $A \cup B$ es la mínima cota superior de $(\mathcal{P}(D), \subseteq)$. Por lo tanto es una latiz.

c) Además esta latiz está acotada ya que:

\emptyset es el elemento mínimo y

D es el elemento máximo.

d) Dado $A \in \mathcal{P}(D)$ tenemos que

$$A \cup \neg A = \{x \in D \mid x \in A \text{ ó } x \in \neg A\} = D,$$

$$A \cap \neg A = \{x \in D \mid x \in A \text{ y } x \in \neg A\} = \emptyset.$$

Por a), b), c) y d) $(\mathcal{P}(D), \subseteq)$ es un álgebra de Boole. □

Capítulo III

En este capítulo definimos el concepto de Topo y vemos algunas de sus propiedades, para después generalizar las definiciones de los morfismos de verdad, estudiados en el Capítulo II, a un Topo arbitrario. Definimos, así mismo, $\text{Sub}(d)$ junto con un orden parcial " \leq " mostrando que no en todo Topo aquél es un álgebra de Boole -al carecer de una de las propiedades del complemento- mas, introduciendo el operador de Heyting, observamos que $(\text{Sub}(d), \leq)$ es un álgebra de Heyting.

Si. Definición. Sea C una categoría con objeto terminal y productos binarios. C tiene exponenciación si dados A, B objetos de C existe un objeto B^A de C y un morfismo $\epsilon_{A,B} : B^A \times A \rightarrow B$ tales que:

Si $f : C \times A \rightarrow B$ es un morfismo de C entonces existe un único $f^* : C \rightarrow B^A$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 B^A \times A & \xrightarrow{\epsilon_{A,B}} & B \\
 \downarrow f^* & \searrow & \uparrow f \\
 C \times A & &
 \end{array}$$

A f^* la llamaremos *el adjunto exponencial de f* .

Afirmación. Si C tiene exponenciación existe una biyección

$$\Phi : C(C \times A, B) \rightarrow C(C, B^A).$$

Sea $f : C \times A \rightarrow B$, entonces $\Phi(f) = f^*$ con $f^* : C \rightarrow B^A$ el adjunto exponencial.

Sean $f^* : C \rightarrow B^A$, $g^* : C \rightarrow B^A$ tales que $f^* = g^*$, entonces

$$\epsilon_{A,B} \circ (g^* \times 1_A) = \epsilon_{A,B} \circ (f^* \times 1_A) \text{ de donde } f = g.$$

Por lo tanto Φ es inyectivo.

Sea $h^* : C \rightarrow B^A$. Definimos $g : C \times A \rightarrow B$ como $g = \epsilon_{A,B} \circ (h^* \times 1_A)$. Por la unicidad de h^* , $\Phi(g) = h^*$. Luego Φ es suprayectiva.

Definición. Una categoría finitamente completa con exponenciación, se llama *cartesiana cerrada*.

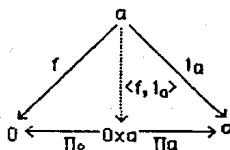
Teorema III.1. Sea \mathbf{C} una categoría cartesiana cerrada con objeto inicial 0 ; entonces

- i) Si a es un objeto de \mathbf{C} , entonces $0 \cong 0x_a$;
- ii) si existe $f : a \rightarrow 0$, entonces $a \cong 0$;
- iii) si $0 \cong 1$, entonces \mathbf{C} es una categoría degenerada;
- iv) todo morfismo $f : 0 \rightarrow a$ es monomorfismo;
- v) $a^1 \cong a$, $a^0 \cong 1$, $1^a \cong 1$.

Demostración.

i) $\mathbf{C}(0, b^a)$ tiene un sólo elemento pero $\mathbf{C}(0, b^a) \cong \mathbf{C}(0x_a, b)$, entonces para b un objeto de \mathbf{C} , $\mathbf{C}(0x_a, b)$ tiene un sólo elemento, de donde $0x_a$ es objeto inicial en \mathbf{C} . Por lo tanto $0 \cong 0x_a$.

ii) Dado $f : a \rightarrow 0$, probaremos que $a \cong 0x_a$; luego por i) $a \cong 0$.
Por la propiedad universal del producto, $\pi_a \circ \langle f, 1_a \rangle = 1_a$ pero



$\langle f, 1_a \rangle \circ \pi_a : 0x_a \rightarrow 0x_a$ y $0x_a$ es objeto inicial, entonces $\langle f, 1_a \rangle \circ \pi_a = 1_{0x_a}$ luego $0x_a \cong a$.

iii) Para todo objeto a de \mathbf{C} existe $f : a \rightarrow 0$. Por hipótesis, $0 \cong 1$, luego existe $g : a \rightarrow 0$. Entonces por ii) $a \cong 0$, de donde la categoría \mathbf{C} es degenerada.

iv) Sea $f : 0 \rightarrow a$. Supongamos que $f \circ g = f \circ h$, con $g, h : x \rightarrow 0$. Por ii) $x \cong 0$ luego $h = g$ y por lo tanto f es monomorfismo.

v) $a^0 \cong 1$:

$\mathbf{C}(b, a^0) \cong \mathbf{C}(bx_0, a)$, pero $bx_0 \cong 0$, entonces $\mathbf{C}(bx_0, a)$ tiene un sólo elemento,

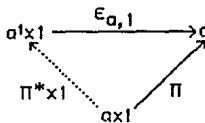
luego para todo objeto $b \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}(b, a^0)$ tiene un sólo elemento; es decir, a^0 es terminal.

$1^0 \cong 1$:

$\mathcal{C}(bxa, 1)$ tiene un sólo elemento, pero $\mathcal{C}(b, 1^a) \cong \mathcal{C}(bxa, 1)$, entonces para todo objeto $b \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}(b, 1^a)$ tiene un sólo elemento; es decir, 1^a es objeto terminal en \mathcal{C} .

$1^a \cong 1$:

Sea $\pi : ax1 \rightarrow a$ la primera proyección. Su adjunto exponencial $\pi^* : a \rightarrow a^1$ es tal que el siguiente diagrama conmuta.



Por la propiedad universal del producto, existe $\langle 1_a, 1_a \rangle : a^1 \rightarrow a^1 \times 1$, que al componerla con $\epsilon_{a,1}$ obtenemos $\epsilon_{a,1} \langle 1_a, 1_a \rangle : a^1 \rightarrow a$,

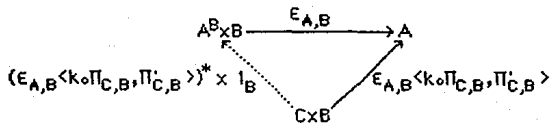
$$\begin{aligned}
 (\epsilon_{a,1} \langle 1_a, 1_a \rangle) \cdot \pi^* &= \epsilon_{a,1} \langle \pi^*, 1_a \cdot \pi^* \rangle \\
 &= \epsilon_{a,1} \langle \pi^*, 1_a \rangle \\
 &= \epsilon_{a,1} \langle \pi^* 1_a, 1_a \rangle \\
 &= \epsilon_{a,1} \langle \pi^* (\pi \langle 1_a, 1_a \rangle), \pi' \langle 1_a, 1_a \rangle \rangle \\
 &= \epsilon_{a,1} \langle \pi^* \cdot \pi, \pi' \rangle \langle 1_a, 1_a \rangle \\
 &= \epsilon_{a,1} ((\pi^* \times 1) \cdot \langle \pi, \pi' \rangle \langle 1_a, 1_a \rangle) \\
 &= \epsilon_{a,1} (\pi^* \times 1) \cdot (\langle \pi, \pi' \rangle \langle 1_a, 1_a \rangle) \\
 &= \pi \cdot \langle 1_a, 1_a \rangle \\
 &= 1_a.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\epsilon_{a,1} \langle 1_a, 1_a \rangle \cdot \pi^* = 1_a$.

Para demostrar que $\pi^* \cdot (\epsilon_{a,1} \langle 1_a, 1_a \rangle) = 1_a$ necesitaremos los siguientes resultados:

1) Si $k : C \rightarrow A^B$, entonces $k = (\epsilon_{A,B} \langle k \cdot \pi_{C,B}, \pi'_{C,B} \rangle)^*$.

Por la universalidad de la exponenciación el siguiente diagrama conmuta



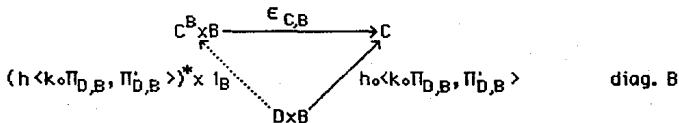
Pero k es tal que:

$$\begin{aligned} \epsilon_{A,B} \cdot (k \times 1_B) &= \epsilon_{A,B} \langle k \pi_{C,B}, 1_B \pi'_{C,B} \rangle \\ &= \epsilon_{A,A} \langle k \pi_{C,B}, \pi'_{C,B} \rangle, \end{aligned}$$

luego, por unicidad, $k = (\epsilon_{A,B} \langle k \cdot \pi_{C,B}, \pi'_{C,B} \rangle)^*$.

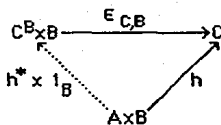
2) Si $k : D \rightarrow A$ y $h : A \times B \rightarrow C$, entonces $h^* \cdot k = (h \langle k \cdot \pi_{D,B}, \pi'_{D,B} \rangle)^*$.

Dada $h \langle k \cdot \pi_{D,B}, \pi'_{D,B} \rangle : D \times B \rightarrow C$ existe su adjunto exponencial, tal que el diagrama



conmuta.

El morfismo $h^* : A \rightarrow C^B$, es tal que el siguiente diagrama conmuta



pero $h^* \cdot k : D \rightarrow C^B$ es tal que

$$\begin{aligned} \epsilon_{B,C} \cdot ((h^* \cdot k) \times 1_B) &= \epsilon_{B,C} \langle (h^* \cdot k) \pi_{D,B}, 1_B \pi'_{D,B} \rangle \\ &= \epsilon_{B,C} \cdot (h^* \times 1_B) \cdot \langle k \pi_{D,B}, \pi'_{D,B} \rangle \\ &= h \langle k \pi_{D,B}, \pi'_{D,B} \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(h^* \cdot k) \times 1_B$ también hace que el diagrama (B) sea conmutativo, luego por unicidad $h^* \cdot k = (h \langle k \cdot \pi_{D,B}, \pi'_{D,B} \rangle)^*$.

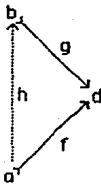
Regresando a la demostración, tenemos

$$\begin{aligned}
\pi^* \cdot \epsilon_{a,1} \langle 1_a, 1_a \rangle &= (\pi \langle \epsilon_{a,1} \langle 1_a, 1_a \rangle \pi_{a,1}, \pi_{a,1} \rangle)^* \\
&= (\epsilon_{a,1} \langle 1_a, 1_a \rangle \pi_{a,1})^* \\
&= (\epsilon_{a,1} \langle 1_a | \pi_{a,1}, 1_a | \rangle)^* \\
&= \epsilon_{a,1} \langle 1_a | \pi_{a,1}, \pi_{a,1} | \rangle^* \\
&= 1_a \quad (\text{por inciso a}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\pi^* : a \rightarrow a^1$ es un isomorfismo luego $a \cong a^1$. □

Sea d un objeto de \mathbf{C} . Consideramos la clase de monomorfismos de \mathbf{C} con codominio d .

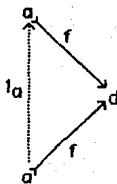
Dados $f : a \rightarrow d$ y $g : b \rightarrow d$, decimos que $f \leq g$ si y sólo si existe $h : a \rightarrow b$ un \mathbf{C} -morfismo tal que



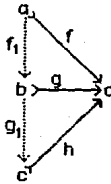
conmuta; h es única y es un monomorfismo.

Esta relación nos define un preorden

Reflexiva; $f \leq f$ pues el siguiente diagrama conmuta

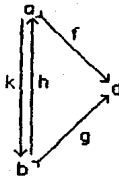


Transitiva; Si $f \leq g$ y $g \leq h$, entonces



$$f = g \circ f_1 = h \circ g_1 \circ f_1 \text{ de donde } f \leq h.$$

Esta relación no es antisimétrica pues si $f \leq g$ y $g \leq f$, entonces existe $h: a \rightarrow b$, $k: b \rightarrow a$ tales que el diagrama



conmuta, pero $f \circ k \circ h = g \circ h = f$, $g \circ h \circ k = f \circ k = g$, entonces $k \circ h = I_a$ y $h \circ k = I_b$. Por lo tanto h es un isomorfismo; luego f y g tienen dominios isomorfos, pero esto no implica que $f = g$.

Definamos la siguiente relación: $f \approx g$ si y sólo si $f \leq g$ y $g \leq f$. Esta es una relación de equivalencia:

- i) Reflexiva; $f \approx f$ pues $f \leq f$ y $f \leq f$.
- ii) Simétrica; Si $f \approx g$, entonces $f \leq g$ y $g \leq f$ de donde $g \approx f$.
- iii) Transitiva; Si $f \approx g$ y $g \approx h$, entonces

$$f \leq g \text{ y } g \leq h \\ g \leq h \text{ y } h \leq g.$$

Luego $f \leq h$ y $h \leq f$. Por lo tanto $f \approx g$.

Formemos las clases de equivalencia

$$[f] = \{ g \mid f \approx g \}.$$

Sea $\text{Sub}(d) = \{ [f] \mid f \text{ es un monomorfismo con codominio } d \}$. A los elementos de esta clase los llamaremos "subobjetos de d ".

Teorema III.2. El preorden " \leq " induce un orden parcial " \subset " en $\text{Sub}(d)$.

Demostración. Sean $[f]$ y $[g] \in \text{Sub}(d)$. Definimos $[f] \subset [g]$ si y sólo si $f \leq g$.
 Veamos que la relación no depende de los representantes.

Supongamos que $[f] = [f']$ y $[g] = [g']$, entonces

$$f \leq f', f' \leq f \quad \text{y} \quad g \leq g', g' \leq g.$$

Si $[f] \subset [g]$ entonces $f \leq g$ de donde $f' \leq g \leq g'$. Por lo tanto $[f'] \subset [g']$.

La reflexividad y la transitividad se heredan.

Antisimetría: Supongamos que $[f] \subset [g]$ y $[g] \subset [f]$, entonces $f \leq g$ y $g \leq f$, así $f \approx g$ y $[f] = [g]$.

Por lo tanto $\text{Sub}(d)$ es un conjunto parcialmente ordenado. □

Por abuso de lenguaje y por facilidad de notación, cuando escribamos "f subobjeto de d" y " $f \leq g$ " estaremos pensando en $[f]$ y $[f] \subset [g]$ respectivamente.

Teorema III.3. En $\text{Set } \mathcal{O}(D) \cong \text{Sub}(D)$.

Demostración. Sea $\delta : \text{Sub}(D) \rightarrow \mathcal{O}(D)$ dada por $\delta([f]) = \text{im}f$ donde $[f] \in \text{Sub}(D)$ y $\text{im}f \in \mathcal{O}(D)$.

i) δ está bien definida:

Supongamos que $f \leq g$, entonces existe h tal que $f = g \circ h$ y $g = f \circ h^{-1}$.

Sea $y \in \delta[f]$. Para alguna $x \in \text{dom } f$, $y = f(x)$, entonces

$$y = (g \circ h)(x) = g(h(x)).$$

Por lo tanto $y \in \text{img} = \delta[g]$.

Sea $z \in \delta[g]$, entonces para alguna $w \in \text{dom } g$, $z = g(w)$, luego

$$z = (f \circ h^{-1})(w) = f(h^{-1}(w)),$$

de donde $z \in \text{im}f = \delta[f]$. Por lo tanto $\delta[f] = \delta[g]$.

ii) δ es inyectiva:

Sean $f : A \rightarrow D$, $g : B \rightarrow D$ tales que $\text{im}f = \text{img}$.

Si $a \in A$, entonces $f(a) \in \text{im}f = \text{img}$, luego existe una única $b \in B$ tal que $g(b) = f(a)$. Definimos $h : A \rightarrow B$ como $h(a) = b$ con b única tal que $g(b) = f(a)$.

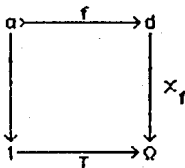
Tenemos que $f(a) = (g \circ h)(a) = g(h(a)) = g(b)$, de donde $f = g \circ h$. Por lo tanto $f \leq g$.

Ahora, si $b \in B$, entonces $g(b) \in \text{img} = \text{im}f$, luego existe una única $a \in A$ tal que $g(b) = f(a)$. Definimos $k : B \rightarrow A$ como $k(b) = a$ con a única tal que $g(b) = f(a)$. Por lo tanto $g \leq f$, de donde $f \approx g$.

III) Sea $D' \in \mathcal{O}(D)$, la inclusión $i : D' \rightarrow D$ es tal que $\delta(i) = D'$. Por lo tanto δ es suprayectiva. \square

Definición. Sea \mathcal{C} una categoría finitamente completa. Se dice que \mathcal{C} tiene un *clasificador de subobjetos* cuando existe Ω un objeto de \mathcal{C} y un morfismo $T : I \rightarrow \Omega$ tales que

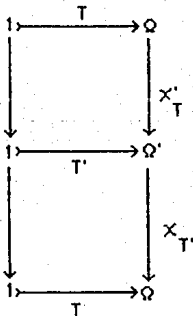
Dado un monomorfismo $f : a \rightarrow d$ existe un único morfismo $x_f : d \rightarrow \Omega$ -ambos de \mathcal{C} - tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado (Ω -axioma)



A x_f lo llamaremos el *morfismo característico* de f .

Teorema III.4. El clasificador de subobjetos es único excepto por isomorfismo.

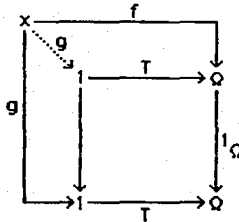
Demostración. Sean (Ω, T) y (Ω', T') clasificadores de subobjetos. Consideramos el siguiente diagrama



donde x'_T es el morfismo característico de T respecto al clasificador T' .

Los dos cuadrados son productos fibrados, entonces el rectángulo también lo es (Teorema A.1, Apéndice).

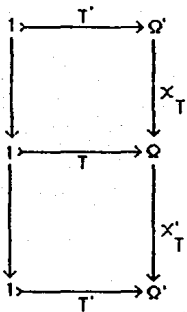
El morfismo $1_{\Omega} : \Omega \rightarrow \Omega$ también hace que el rectángulo sea un producto fibrado, pues el cuadrado interior



claramente conmuta.

Si consideramos $f : x \rightarrow \Omega$, $g : x \rightarrow i$ tales que $1_{\Omega} \circ f = T \circ g$, entonces $g : x \rightarrow i$ es tal que $T \circ h = T \circ g = f$. Por la unicidad de la función característica, $x_{T \circ h} \circ x_T = 1_{\Omega}$.

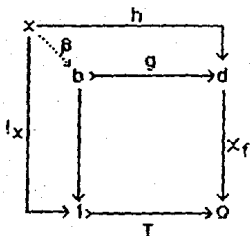
Análogamente el rectángulo del siguiente diagrama es un producto fibrado.



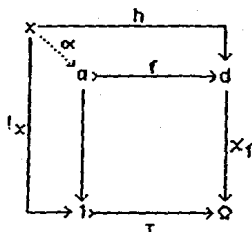
Pero $1_{\Omega'} : \Omega' \rightarrow \Omega'$ hace de este rectángulo un producto fibrado, luego por el Ω -axioma, $x_{T'} \circ x'_T = 1_{\Omega'}$. Por lo tanto $\Omega \cong \Omega'$. \square

Teorema III.5. Sean $f: a \rightarrow d$ y $g: b \rightarrow d$, entonces $f \simeq g$ si y sólo si $x_f = x_g$.

Demostración. Supongamos que $f \simeq g$, entonces existe un isomorfismo $k: b \rightarrow a$ (con inversa $k': a \rightarrow b$), tal que $g = f \cdot k$.



diag. 3.5.a



diag. 3.5.b

Como $x_f \cdot g = x_f \cdot f \cdot k = T \cdot I_a \cdot k = T \cdot I_b$, entonces el cuadrado interior del diagrama 3.5.a conmuta.

Sean $h: x \rightarrow d$ y $I_x: x \rightarrow i$ tales que $x_f \cdot h = T \cdot I_x$. Como el cuadrado del diagrama 3.5.b conmuta existe $\alpha: x \rightarrow a$ única tal que $f \cdot \alpha = h$ y $I_a \cdot \alpha = I_x$.

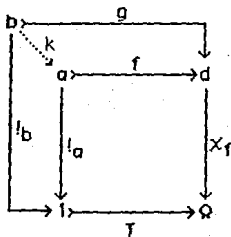
Sea $\beta: x \rightarrow b$ dada por $\beta = k' \cdot \alpha$, entonces

$$g \cdot \beta = g \cdot k' \cdot \alpha = f \cdot \alpha = h \quad \text{y}$$

$$I_b \cdot \beta = I_b \cdot k' \cdot \alpha = I_a \cdot \alpha = I_x.$$

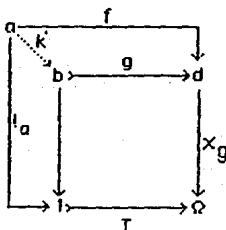
Por lo tanto el diagrama 3.5.a es un producto fibrado y, por la unicidad en el Ω -axioma, $x_f = x_g$.

Supongamos que $x_f = x_g$,



Entonces $x_f \circ g = x_g \circ g = T \circ I_b$, pero el cuadrado es un producto fibrado, luego existe una única $k: b \rightarrow a$ tal que $f \circ k = g$. Por lo tanto $g \leq f$.

En el siguiente diagrama



$x_g \circ f = x_f \circ f = T \circ I_a$, luego existe una única $k': a \rightarrow b$ tal que $g \circ k' = f$, de donde $f \leq g$ y por lo tanto $f = g$. □

A continuación definiremos qué es un Topo y daremos algunos Teoremas que necesitaremos en el transcurso de este Capítulo.

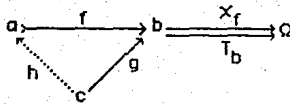
Definición. Un *Topo* es una categoría E tal que:

- 1) E es finitamente completa,
- 2) E tiene exponenciación,
- 3) E tiene clasificador de subobjetos.

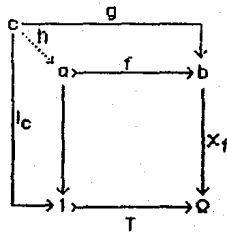
En el capítulo anterior se vió que *Set* cumple con todas estas propiedades, por lo tanto *Set* es un Topo.

Teorema III.6. Sea E un Topo; si $f: a \rightarrow b$ es un monomorfismo de E , entonces f es el igualador de x_f y $T_b = T \circ I_b$.

Demostración. Consideremos los siguientes diagramas



diag. 3.6.a



diag. 3.6.b

Como el cuadrado interior de 3.6.b conmuta, entonces

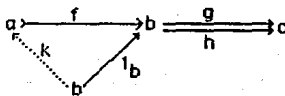
$$T_b \circ f = T \circ l_b \circ f = T \circ l_a = x_f \circ f.$$

Sea $g : c \rightarrow b$ tal que $x_f \circ g = T_b \circ g$, entonces $x_f \circ g = T_b \circ g = T \circ l_b \circ g = T_c$, pero como 3.6.b es un producto fibrado existe $h : c \rightarrow a$ única tal que $f \circ h = g$. \square

Corolario III.6.1 . En un topo E todo bimorfismo es un isomorfismo.

Demostración. Sea $f : a \rightarrow b$ un bimorfismo de E.

Como f es monomorfismo, existen $g, h : b \rightarrow c$ tales que f es su igualador, entonces $g \circ f = h \circ f$,



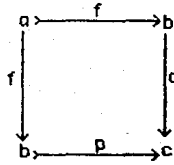
pero f es epimorfismo luego $g = h$.

Sea $l_b : b \rightarrow b$. Claramente $g \circ l_b = h \circ l_b$, así que existe $k : b \rightarrow a$ única tal que $f \circ k = l_b$. Además $k \circ f = l_a$ pues $f \circ k \circ f = f \circ l_a$ y f es monomorfismo.

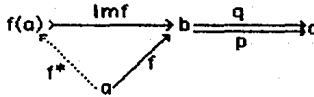
Por lo tanto f es un isomorfismo. \square

Teorema III.7. En un Topo E todo morfismo se puede factorizar como un epimorfismo seguido de un monomorfismo.

Demostración. Sea $f : a \rightarrow b$ un morfismo de E. Consideramos el coproducto fibrado de f consigo mismo



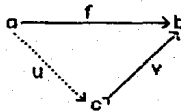
Sea $\text{Im}f : f(a) \rightarrow b$ el igualador de p y q .



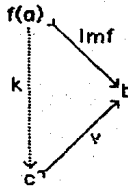
Como $q \circ f = p \circ f$, existe $f^* : a \rightarrow f(a)$ tal que $\text{Im}f \circ f^* = f$. Si demostramos que f^* es un epimorfismo, entonces $f = \text{Im}f \circ f^*$ sería la epi-mono factorización de f .

Para demostrar que f^* es epimorfismo necesitamos el siguiente resultado.

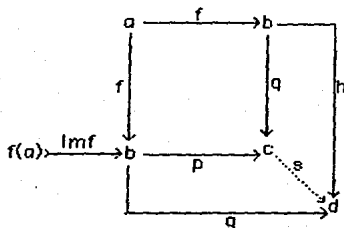
Teorema III.5. $\text{Im}f : f(a) \rightarrow b$ es el menor subobjeto de b que factoriza a f ; es decir, si



conmuta, donde v es un monomorfismo, entonces existe $k : f(a) \rightarrow c$ única tal que el siguiente diagrama conmuta



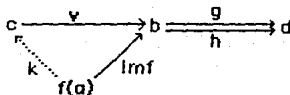
Demostración. Sea $v : c \rightarrow b$ el igualador de $g, h : b \rightarrow d$, entonces $g \circ v = h \circ v$. Consideramos el siguiente diagrama:



donde el cuadrado es un coproducto fibrado. Como $h \circ f = h \circ v \circ u = g \circ v \circ u = g \circ f$, existe $s : c \rightarrow d$ única tal que $s \circ p = g$ y $s \circ q = h$, luego

$$\begin{aligned} g \circ lmf &= s \circ p \circ lmf \\ &= s \circ q \circ lmf \quad (\text{pues } lmf \text{ es el igualador de } p \text{ y } q) \\ &= h \circ lmf, \end{aligned}$$

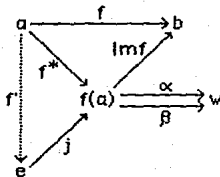
pero v es el igualador de $g, h : b \rightarrow d$,



luego existe $k : f(a) \rightarrow c$ única tal que $v \circ k = lmf$. Por lo tanto $lmf \perp v$. □

Regresando al Teorema III.7 tenemos que demostrar que f^* es un epimorfismo.

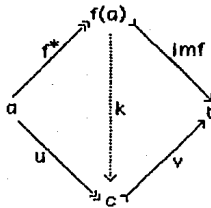
Sean $\alpha : f(a) \rightarrow w$, $\beta : f(a) \rightarrow w$ tales que $\alpha \circ f^* = \beta \circ f^*$. Sea (e, j) el igualador de α y de β . Existe una única $r' : a \rightarrow e$ tal que $j \circ r' = f^*$



$\text{Imf} \cdot j$ es un monomorfismo que factoriza a f , luego por el Teorema III.8 $\text{Imf} \triangleq \text{Imf} \cdot j$; además $\text{Imf} \cdot j \triangleq \text{Imf}$. Por lo tanto j es un isomorfismo, pero j es tal que $j \cdot \alpha = j \cdot \beta$, de donde $\alpha = \beta$ y f^* es un epimorfismo. \square

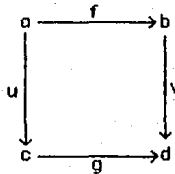
Teorema III.9. En un Topo E la epi-mono factorización es única salvo isomorfismo.

Demostración. Sean $f = \text{Imf} \cdot f^*$ y $f = v \cdot u$ dos epi-mono factorizaciones de f .

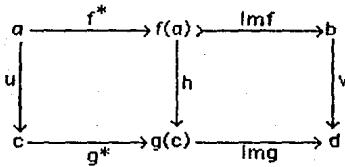


Por el Teorema III.8 existe $k : f(a) \rightarrow c$ única tal que $v \cdot k = \text{Imf}$, de donde $k \cdot f^* = u$. Como u es epimorfismo, k es lo es. Como Imf es monomorfismo, k lo es. Por lo tanto por el Corolario III.6.1, k es un isomorfismo.

Teorema III.10. En un Topo E si



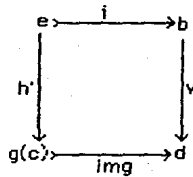
es un producto fibrado, entonces existe un morfismo $h : f(a) \rightarrow g(c)$ tal que los cuadrados



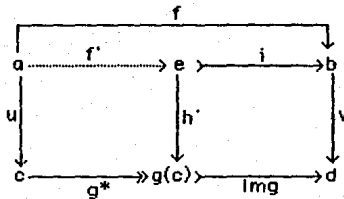
diag. 3.10.a

son productos fibrados.

Demostración. Sea $lmg \cdot g^*$ la epi-mono factorización de g . Consideremos el producto fibrado de v y lmg

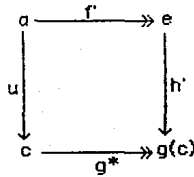


Por hipótesis $v \cdot f = g \cdot u = lmg \cdot g^* \cdot u$, entonces existe $f' : a \rightarrow e$ única tal que $i \cdot f' = f$ y $h' \cdot f' = g^* \cdot u$.



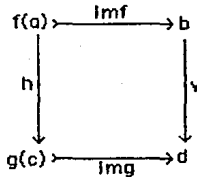
diag. 3.10.b

Como el cuadrado externo y el cuadrado interno derecho son productos fibrados, entonces el siguiente diagrama también lo es



Luego por Teorema A.1 (Apéndice) f' es un epimorfismo, de donde $i \cdot f$ es una epi-mono factorización de f .

Por el Teorema III.9 existe $k : f(a) \rightarrow e$ única tal que $i \cdot k = \text{Im}f$ (k isomorfismo). Sea $h = h' \cdot k : f(a) \rightarrow g(c)$. Demostraremos que el siguiente diagrama es un producto fibrado.



diag. 3.10.c

Conmuta pues $v \cdot \text{Im}f = v \cdot i \cdot k = \text{Im}g \cdot h' \cdot k = \text{Im}g \cdot h$.

Sean $\alpha : x \rightarrow b$ y $\beta : x \rightarrow g(c)$ tales que $v \cdot \alpha = \text{Im}g \cdot \beta$. Pero el cuadrado derecho de 3.10.b es un producto fibrado, luego existe $\delta : x \rightarrow e$ única tal que $i \cdot \delta = \alpha$ y $h' \cdot \delta = \beta$.

Sea $j = k^{-1} \cdot \delta : x \rightarrow f(a)$ (k isomorfismo).

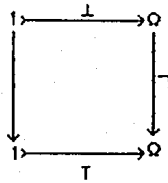
$$\text{Im}f \cdot j = \text{Im}f \cdot (k^{-1} \cdot \delta) = i \cdot \delta = \alpha$$

$$h \cdot j = h' \cdot k \cdot j = h' \cdot k \cdot k^{-1} \cdot \delta = h' \cdot \delta = \beta.$$

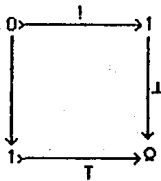
Por lo tanto el diagrama 3.10.c es un producto fibrado, de donde los cuadrados de 3.10.a también lo son. \square

S 2. En el capítulo II se definieron morfismos de verdad utilizando el clasificador de subobjetos de Set , el conjunto $Z = \{0,1\}$. Sobre esta base y considerando un Topo arbitrario E con su clasificador de subobjetos (Ω, T) , definimos los morfismos de verdad:

a) $\neg : \Omega \rightarrow \Omega$ es el único morfismo de E tal que

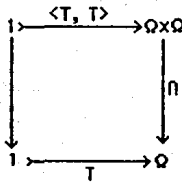


es un producto fibrado, donde \perp es tal que el siguiente diagrama



es un producto fibrado; es decir, $\chi_{\perp} = \sim$.

b) $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ es el único morfismo de E tal que

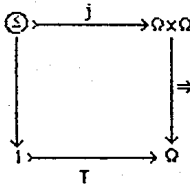


es un producto fibrado; es decir, $\chi_{\langle T, T \rangle} = \eta$.

c) $U : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ es el morfismo característico de la imagen de

$[\langle T_{\Omega}, 1_{\Omega} \rangle ; \langle 1_{\Omega}, T_{\Omega} \rangle] : \Omega + \Omega \rightarrow \Omega \times \Omega$.

d) $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ es el único morfismo de E tal que



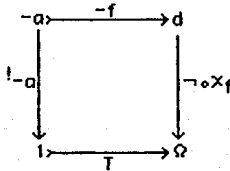
es un producto fibrado, es decir $x_j = \Rightarrow$ donde $j : \epsilon \rightarrow \Omega \times \Omega$ es el igualador de $\pi_1 : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ y $\pi : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$.

Generalicemos el Teorema II.1 (Capítulo II) a un Topo arbitrario.

Sea E un Topo y d un objeto de E . Definimos las operaciones $\neg f$, $f \wedge g$, $f \vee g$ en el conjunto $\text{Sub}(d)$.

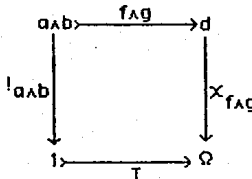
1) Complemento

Sea $f : a \rightarrow d$ un subobjeto de d . El complemento de f respecto a d es el subobjeto $\neg f : \neg a \rightarrow d$ cuyo morfismo característico es $\neg \circ x_f$; es decir, tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado



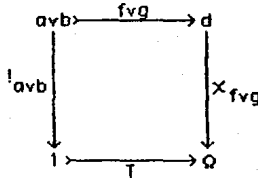
2) Intersección

Sean $f : a \rightarrow d$, $g : b \rightarrow d$. La intersección de f y g es el subobjeto $f \wedge g : a \wedge b \rightarrow d$ cuyo morfismo característico es $x_f \cap x_g = \Pi \langle x_f, x_g \rangle$; es decir, tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado.



3) Unión

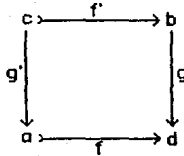
La unión de $f : a \rightarrow d$ y $g : b \rightarrow d$ es el subobjeto $fv_g : av_b \rightarrow d$ tal que el siguiente cuadrado es un producto fibrado;



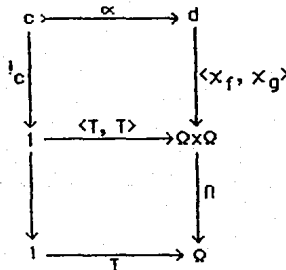
es decir, χ_{fv_g} es el morfismo característico de fv_g .

Los dos siguientes Teoremas permiten otra definición de fv_g y $f \wedge g$ que utilizaremos para demostrar que $(\text{Sub}(d), \perp)$ es una latiz acotada.

Teorema III.11. Sean $f : a \rightarrow d$ y $g : b \rightarrow d$ morfismos. Consideramos el producto fibrado de f y g



entonces $\alpha : c \rightarrow d$, con $\alpha = g \cdot f' = f \cdot g'$ es tal que $\chi_\alpha = \chi_f \wedge \chi_g$; es decir $\alpha = f \wedge g$.
Demostración. Consideremos el siguiente diagrama



3.11.a

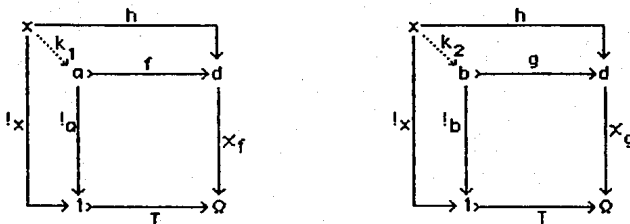
Probaremos que el cuadrado superior de 3.11.a es un producto fibrado.

Por hipótesis $\alpha = g \circ f' = f \circ g'$, entonces

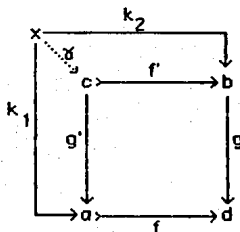
$$\begin{aligned} \langle x_f, x_g \rangle \circ \alpha &= \langle x_f \circ \alpha, x_g \circ \alpha \rangle \\ &= \langle x_f \circ f \circ g', x_g \circ g \circ f' \rangle \\ &= \langle T_a \circ g', T_b \circ f' \rangle \quad (\text{pues } x_f \circ f = T \circ l_a \text{ y } x_g \circ g = T \circ l_b) \\ &= \langle T \circ l_c, T \circ l_c \rangle \\ &= \langle T, T \rangle \circ l_c, \end{aligned}$$

lo que nos indica que el cuadrado superior de 3.11.a conmuta.

Sean $h: x \rightarrow d$ y $l_x: x \rightarrow l$ tales que $\langle x_f, x_g \rangle \circ h = \langle T, T \rangle \circ l_x$



Entonces $x_f \circ h = T_x$ y $x_g \circ h = T_x$, luego existen $k_1: x \rightarrow a$ y $k_2: x \rightarrow b$ únicas tales que $f \circ k_1 = h$ y $g \circ k_2 = h$. Pero como el cuadrado del siguiente diagrama es un producto fibrado

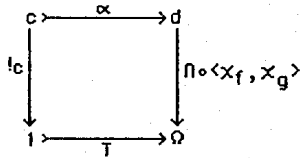


existe $\delta: x \rightarrow c$ única tal que $f' \circ \delta = k_2$ y $g' \circ \delta = k_1$.

El cuadrado superior de 3.11.a es un producto fibrado pues

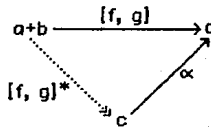
$$\begin{aligned} \alpha \circ \delta &= g \circ f' \circ \delta = g \circ k_2 = h \\ l_c \circ \delta &= l_x. \end{aligned}$$

Por Teorema A.1 (Apéndice) el diagrama



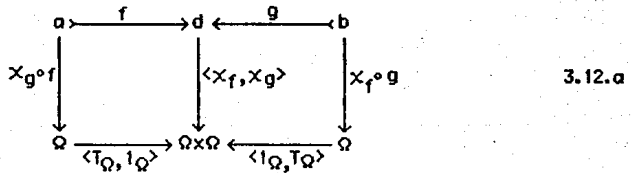
es un producto fibrado, luego $x_\alpha = \Pi \circ \langle X_f, X_g \rangle$. Por Teorema III.5 $\alpha \simeq f \wedge g$. \square

Teorema III.12. Sean $f : a \rightarrow d$ y $g : b \rightarrow d$ morfismos de E, entonces el morfismo $\alpha : c \rightarrow d$ que hace al diagrama



conmutar, es tal que $x_\alpha = x_f \cup x_g$; es decir, $\alpha \simeq f \vee g$.

Demostración. Probaremos que los cuadrados del siguiente diagrama son productos fibrados.

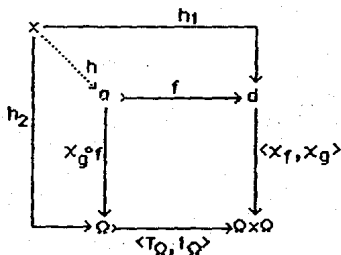


Como

$$\begin{aligned}
 \langle X_f, X_g \rangle \circ f &= \langle X_f \circ f, X_g \circ f \rangle \\
 &= \langle T_a, X_g \circ f \rangle \\
 &= \langle T_\Omega \circ (X_g \circ f), X_g \circ f \rangle \\
 &= \langle T_\Omega, T_\Omega \rangle \circ (X_g \circ f),
 \end{aligned}$$

el cuadrado izquierdo de 3.12.a conmuta.

Sean $h_1 : x \rightarrow d$ y $h_2 : x \rightarrow \Omega$ tales que $\langle x_f, x_g \rangle \cdot h_1 = \langle T_\Omega, I_\Omega \rangle \cdot h_2$.



3.12.b

así

$$x_f \circ h_1 = T_\Omega \circ h_2 = T_x \quad \text{y}$$

$$x_g \circ h_1 = I_\Omega \circ h_2 = h_2,$$

luego existe $h : x \rightarrow a$ única tal que $f \circ h = h_1$, de donde $x_g \circ f \circ h = x_g \circ h_1 = h_2$. Por lo tanto 3.12.b es un producto fibrado.

El cuadrado derecho de 3.12.a conmuta pues

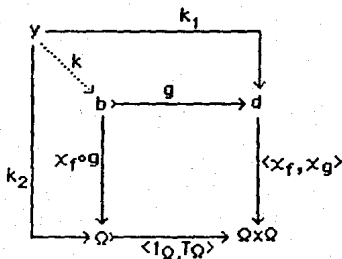
$$\langle x_f, x_g \rangle \circ g = \langle x_f \circ g, x_g \circ g \rangle$$

$$= \langle x_f \circ g, T_b \rangle$$

$$= \langle x_f \circ g, T_\Omega \circ (x_f \circ g) \rangle$$

$$= \langle I_\Omega, T_\Omega \rangle \circ (x_f \circ g).$$

Sean $k_1 : y \rightarrow d$, $k_2 : y \rightarrow \Omega$ tales que $\langle x_f, x_g \rangle \circ k_1 = \langle I_\Omega, T_\Omega \rangle \circ k_2$.



3.12.c

luego $\langle x_f \circ k_1, x_g \circ k_1 \rangle = \langle I_\Omega \circ k_2, T_\Omega \circ k_2 \rangle$ si y sólo si $x_f \circ k_1 = k_2$ y $x_g \circ k_1 = T_\Omega \circ k_2$.

Existe $k : y \rightarrow b$ única tal que $g \circ k = k_1$, de donde $(x_f \circ g) \circ k = x_f \circ (g \circ k) = x_f \circ k_1 = k_2$ y por lo tanto 3.12.c es un producto fibrado.

Por el Teorema A.2 (Apéndice)

$$\begin{array}{ccc}
 a+b & \xrightarrow{[f, g]} & d \\
 \downarrow & & \downarrow \langle x_f, x_g \rangle \\
 \Omega \times \Omega & \xrightarrow{[\langle T_\Omega, I_\Omega \rangle, \langle I_\Omega, T_\Omega \rangle]} & \Omega \times \Omega
 \end{array}$$

es un producto fibrado.

Para facilitar el desarrollo de la demostración, simplificaremos la notación de la siguiente manera

$$c = [f, g](a+b);$$

$$e = [\langle T_\Omega, I_\Omega \rangle, \langle I_\Omega, T_\Omega \rangle](\Omega \times \Omega);$$

$$\alpha = \text{im}[f, g] : c \rightarrow d;$$

$$i = \text{im}[\langle T_\Omega, I_\Omega \rangle, \langle I_\Omega, T_\Omega \rangle] : e \rightarrow \Omega \times \Omega.$$

Utilizando el Teorema III.10, el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\alpha} & d \\
 \downarrow h & & \downarrow \langle x_f, x_g \rangle \\
 e & \xrightarrow{i} & \Omega \times \Omega
 \end{array}$$

donde $i : e \rightarrow \Omega \times \Omega$ es tal que $x_f = U : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$. Así

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\alpha} & d \\
 \downarrow i_c & & \downarrow U \circ \langle x_f, x_g \rangle \\
 e & \xrightarrow{i} & \Omega
 \end{array}$$

es un producto fibrado, de donde $\alpha_\alpha = U \circ \langle x_f, x_g \rangle = x_{f \wedge g}$ y por lo tanto $\alpha_\alpha = f \wedge g$. \square
 Ahora podemos demostrar el siguiente resultado.

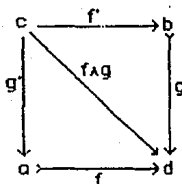
Teorema III.13. (Sub(d), \leq) es una latiz acotada.

Demostración. Sub(d) es un conjunto parcialmente ordenado.

Sean $f : a \rightarrow d$ y $g : b \rightarrow d$. Demostraremos que

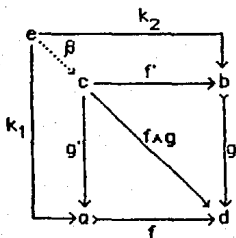
- i) $f \wedge g$ es la máxima cota inferior de f y g
- ii) $f \vee g$ es la mínima cota superior de f y g .

i) Por el Teorema III.11. el cuadrado



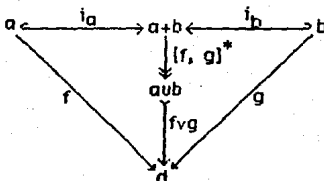
es un producto fibrado, entonces $f \wedge g \leq f$ y $f \wedge g \leq g$.

Supongamos que existe $h : e \rightarrow d$ tal que $h \leq f$ y $h \leq g$, entonces existen $k_1 : e \rightarrow a$ y $k_2 : e \rightarrow b$ tales que $h = f \circ k_1$ y $h = g \circ k_2$. Como el cuadrado interior de



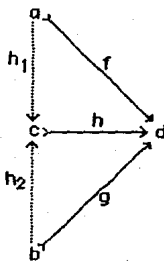
es un producto fibrado, existe $\beta : e \rightarrow c$ única tal que $f \circ \beta = k_2$ y $g \circ \beta = k_1$, luego $h = (f \wedge g) \circ \beta$ lo que nos indica que $h \leq f \wedge g$. Por lo tanto $f \wedge g$ es la máxima cota inferior.

ii) Por el Teorema III.12 el siguiente diagrama es conmutativo



entonces $f \leq fvg$ y $g \leq fvg$.

Por otro lado, dada $h: c \rightarrow d$ tal que $f \leq h$ y $g \leq h$; existen $h_1: a \rightarrow c$ y $h_2: b \rightarrow c$ tales que el siguiente diagrama conmuta.



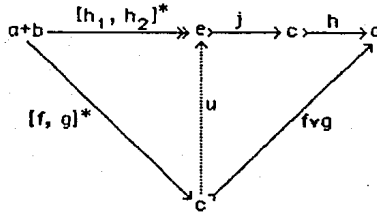
Consideremos la epi-mono factorización de $[h_1, h_2]$

$$[h_1, h_2]: a+b \xrightarrow{[h_1, h_2]^*} e \xrightarrow{j} c$$

pero $[f, g] = [h \cdot h_1, h \cdot h_2] = h \cdot [h_1, h_2]$, entonces

$$[f, g]: a+b \xrightarrow{[h_1, h_2]^*} e \xrightarrow{j} c \xrightarrow{h} d$$

es una epi-mono factorización de $[f, g]$ luego por unicidad existe $u: c \rightarrow e$ isomorfismo tal que



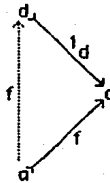
conmuta, entonces $fvg = h \cdot j \cdot u$. Por lo tanto $fvg \leq h$; es decir, fvg es la mínima cota superior de f y g .

Se ha demostrado que $(\text{Sub}(d), \leq)$ es una latiz. A continuación demostraremos que es acotada donde

- a) 1_d es el elemento máximo en $\text{Sub}(d)$,
- b) 0_d es el elemento mínimo en $\text{Sub}(d)$.

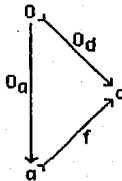
Sea $f : a \rightarrow d$.

- a) El siguiente diagrama es conmutativo



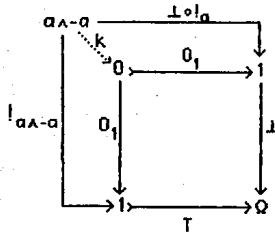
lo que nos indica que $f \leq 1_d$.

- b) El siguiente diagrama conmuta

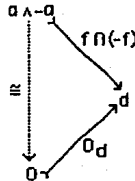


luego $0_d \leq f$.

El diagrama



es un producto fibrado, luego existe $k : a_{\Lambda-a} \rightarrow 0$ única.
 Por el Teorema III.1 $a_{\Lambda-a} \cong 0$, así el diagrama



conmuta, por lo tanto $f_{\Lambda-f} \leq 0_d$.

Por otra parte 0_d es el elemento mínimo en $\text{Sub}(d)$, luego $f_{\Lambda-f} = 0_d$. □

Para que $(\text{Sub}(d), \perp)$ sea un álgebra de Boole necesitamos que $f_{\neg f} \cong 1_{\Omega}$. Esto no siempre sucede. Para dar un contraejemplo se requieren los siguientes resultados.

Teorema III.15. Sea E un Topo. En $\text{Sub}(d)$ $\perp \cong \neg T$.

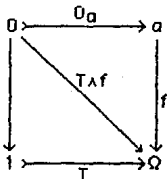
Demostración.

$$\begin{aligned}
 x_{\perp} &= \neg \quad (\text{por definición}) \\
 &= \neg \cdot 1_{\Omega} \\
 &= \neg \cdot x_T \quad (\text{pues } x_T = 1_{\Omega}) \\
 &= x_{\neg T}.
 \end{aligned}$$

□

Teorema III.16. Sea E un Topo. Si $T : 1 \rightarrow \Omega$ tiene complemento en $\text{Sub}(d)$, entonces éste es el subobjeto $\perp : 1 \rightarrow \Omega$.

Demostración. Supongamos que f es el complemento de T en $\text{Sub}(d)$, entonces $T \wedge f = 0_\Omega$ y el diagrama



es un producto fibrado; es decir, $x_{0_a} = f \circ \perp \circ !_a$. Por lo tanto $f \perp \perp$.

Como $\text{Sub}(d)$ es una latiz, $T \vee \perp = T \vee \perp$, pero f es complemento de T entonces $T \vee f = 1_\Omega$, luego $T \vee \perp = 1_\Omega$.

Por los Teoremas III.14 y III.15 $T \vee \perp \cong 0_\Omega$ y por lo tanto \perp es el complemento de T ; es decir, $\perp \simeq f$. □

Contraejemplo:

Consideramos el monoide $M_2 = (2, \cdot, 1)$ con $2 = \{0, 1\}$ y \cdot definida por la siguiente tabla

·	1	0
1	1	0
0	0	0

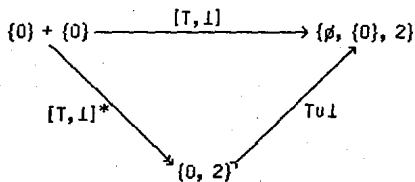
Llamaremos a la categoría de los M_2 -conjuntos simplemente M_2 .

Veamos que este Topo no es un álgebra de Boole.

El clasificador de subobjetos en esta categoría es el conjunto de ideales izquierdos de M_2 , $L_2 = \{2, \emptyset, \{0\}\}$, junto con el morfismo $\omega : 2 \times L_2 \rightarrow L_2$ dado por $\omega(m, B) = \{n \mid n \in 2 \text{ y } n \cdot m \in B\}$.

Los morfismos $T : 1 \rightarrow L_2$ y $\perp : 1 \rightarrow L_2$ son tales que $T(0) = 2$ y $\perp(0) = \emptyset$.

En el siguiente diagrama



$$\begin{aligned}
 \text{Im}(Tu\perp) &= \{0, 2\} \\
 &= \{\emptyset, \{0\}, 2\} \\
 &= \text{Im}(1_{\Omega}).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $Tu\perp$ no es isomorfo a 1_{Ω} , de donde $(\text{Sub}(\Omega), \perp)$ no es un álgebra de Boole.

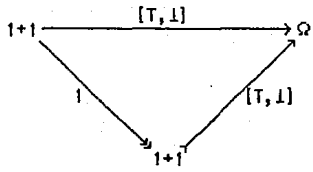
Definición. Sea E un Topo. Decimos que E es de Boole si para todo d objeto de E , $(\text{Sub}(d), \perp)$ es un álgebra de Boole.

Teorema III.17. Para todo Topo E , los siguientes enunciados son equivalentes

- i) E es de Boole
- ii) $\text{Sub}(\Omega)$ es un álgebra de Boole
- iii) $T : 1 \rightarrow \Omega$ tiene complemento en $\text{Sub}(\Omega)$
- iv) $\perp : 1 \rightarrow \Omega$ es el complemento de T en $\text{Sub}(\Omega)$
- v) En $\text{Sub}(\Omega)$, $Tu\perp = 1_{\Omega}$
- vi) E es clásico; es decir, $[T, \perp] : 1+1 \rightarrow \Omega$ es un isomorfismo
- vii) $i_1 : 1 \rightarrow 1+1$ es un clasificador de subobjetos.

Demostración.

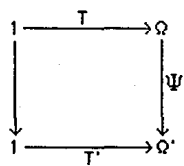
- i) \Rightarrow ii) Por la definición de Topo de Boole.
- ii) \Rightarrow iii) Por la definición de álgebra de Boole.
- iii) \Rightarrow iv) Por el Teorema III.16
- iv) \Rightarrow v) Por la definición de complemento.
- v) \Rightarrow vi) $[T, \perp] : 1+1 \rightarrow \Omega$ es un monomorfismo y el diagrama



muestra una epi-mono factorización de $[T, \perp]$. De este modo, en $\text{Sub}(\Omega)$ $TU\perp \cong [T, \perp]$, luego $[T, \perp] \cong 1_\Omega$ es un isomorfismo.

vi)⇒vii) Demostraremos que, si $\Psi : \Omega \rightarrow \Omega'$ es un isomorfismo, entonces $T' : 1 \rightarrow \Omega'$ es un clasificador de subobjetos.

El siguiente diagrama claramente conmuta.

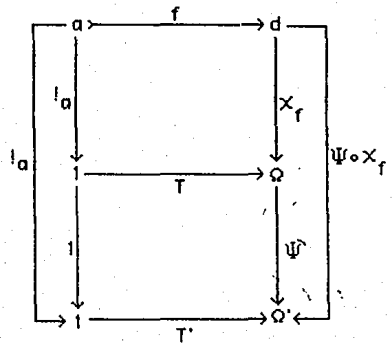


Sean $f : x \rightarrow \Omega$ y $l_x : x \rightarrow 1$ tales que $\Psi \circ f = T' \circ l_x$, entonces

$$\Psi \circ T \circ l_x = T' \circ l_x \circ l_x = T' \circ l_x$$

$$\Psi \circ T \circ l_x = T' \circ l_x = \Psi \circ f.$$

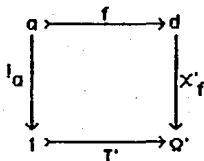
Por lo tanto el diagrama es un producto fibrado. Así construimos



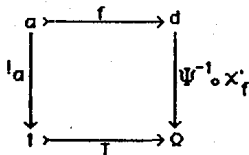
en donde el cuadrado externo es un producto fibrado.

Afirmación: $\Psi \circ x_f$ es la única que tiene esta propiedad.

Supongamos que existe $x'_f : d \rightarrow \Omega'$ tal que el siguiente cuadrado es un producto fibrado



Como $(\Psi^{-1}) \circ x'_f \circ f = (\Psi^{-1}) \circ T' \circ l_a = T \circ l_a$, el siguiente cuadrado conmuta.

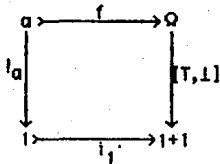


3.17.a

Sean $h : x \rightarrow d$ y $h' : x \rightarrow 1$ tales que $(\Psi^{-1}) \circ x'_f \circ h = T \circ h'$.

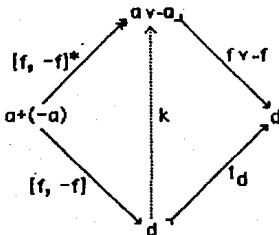
Como $\Psi \circ T \circ h' = T \circ l_1 \circ h' = T \circ h' = \Psi \circ x_f \circ f$, entonces $T \circ h' = x_f \circ f$, luego existe $k : x \rightarrow a$ única tal que $f \circ k = h'$ y $l_a \circ k = h'$. Obtenemos que el diagrama 3.17.a es un producto fibrado, de donde $\Psi^{-1} \circ x'_f = x_f$, es decir $x'_f = \Psi \circ x_f$. Por lo tanto $\Psi \circ x_f$ es única y $T' : 1 \rightarrow \Omega'$ es un clasificador de subobjetos.

Por hipótesis $[T, \perp] : 1+1 \rightarrow \Omega$ es un isomorfismo, entonces



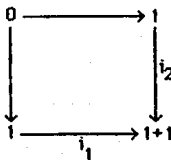
es un producto fibrado, de donde $(1+1, l_1)$ es un clasificador de subobjetos.

vii) \Rightarrow i) Basta demostrar que dada $f : a \rightarrow d$, $f \circ -f \simeq 1_d$.
Claramente $f \circ -f \leq 1_d$. Consideremos el siguiente diagrama



Si demostramos que $(f, -f) : a + (-a) \rightarrow d$ es un epimorfismo, entonces $(f, -f)$ tiene dos epi-mono factorizaciones luego existe $k : d \rightarrow a \vee -a$ única tal que $(f \vee -f) \circ k = 1_d$, de donde $1_d \leq f \vee -f$.
Para probarlo necesitamos el siguiente resultado

Lema III.18. En cualquier Topo E el diagrama



3.18.a

es un producto fibrado, donde i_1, i_2 son las inclusiones.

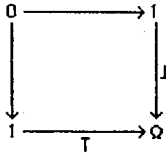
Demostración. El cuadrado conmuta pues 0 es objeto inicial.

Sean $f : a \rightarrow 1$ y $g' : 1 \rightarrow 1+1$ tales que $i_2 \circ f' = i_1 \circ g'$. Por las propiedades universales de i_1, i_2 el diagrama 3.18.a es un coproducto fibrado. Como $\perp \circ i_0 = T \circ i_0$, existe $k : 1+1 \rightarrow \Omega$ tal que $k \circ i_2 = \perp$ y $k \circ i_1 = T$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} i_2 \circ f' &= i_1 \circ g' && \text{componiendo con } k \\ k \circ i_2 \circ f' &= k \circ i_1 \circ g' \\ \perp \circ f' &= T \circ g'. \end{aligned}$$

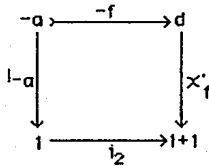
Pero \perp es tal que



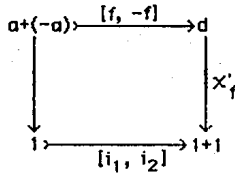
es un producto fibrado. Existe $h : a \rightarrow 0$ única tal que $!_0 \circ h = f'$ y $!_0 \circ h = g'$. Por lo tanto el diagrama 3.18.a es un producto fibrado. \square

Regresemos a la demostración del Teorema.

Denotamos con $x'_f, x'_T, \text{ etc.}$ a los morfismos característicos de $f, T, \text{ etc.}$ respecto al clasificador de subobjetos $i_1 : 1 \rightarrow 1+1$. Por el Lema anterior, $i_2 = \perp'$ y por la demostración del Teorema III.14 el siguiente diagrama es un producto fibrado



luego por Teorema A.2 el cuadrado

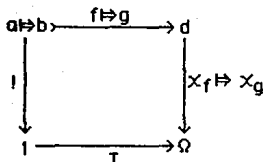


es un producto fibrado. Pero $[i_1, i_2] = !_{1+1}$ es un epimorfismo, luego $[f, -f]$ también lo es. Por lo tanto si $i_1 : 1 \rightarrow 1+1$ es un clasificador de subobjetos, E es un Topo de Boole. \square

S 3. Para demostrar que $(\text{Sub}(d), \perp)$ es un álgebra de Heyting definiremos el operador de Heyting.

Utilizando el morfismo $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ definiremos la siguiente operación

Si $f: a \rightarrow d$ y $g: b \rightarrow d$ son subobjetos de d , entonces $f \Vdash g: (a \Vdash b) \rightarrow d$ es el subobjeto de d cuyo morfismo característico es $x_f \Rightarrow x_g = \Rightarrow \langle x_f, x_g \rangle$, es decir $f \Vdash g$ es tal que el siguiente diagrama



es un producto fibrado.

Para demostrar que $f \Vdash g$ es el seudo-complemento de f relativo a g necesitamos algunos resultados.

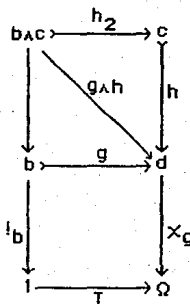
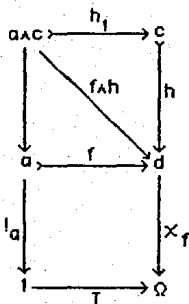
Lema III.19. Sea E un Topo. Si f, g y h son subobjetos de d entonces

- i) $f \wedge h \approx g \wedge h$ si y sólo si $x_f \cdot h = x_g \cdot h$
- ii) $x_f \sqcap x_h = x_g \sqcap x_h$ si y sólo si $x_f \cdot h = x_g \cdot h$.

Demostración.

i) Sean $f: a \rightarrow d$, $g: b \rightarrow d$ y $h: c \rightarrow d$.

Los cuadrados inferiores y superiores de los siguientes diagramas son productos fibrados



de donde $x_{h_1} = x_f \cdot h$ y $x_{h_2} = x_g \cdot h$. Así $f \wedge h \approx g \wedge h$ es decir,

$$\begin{aligned}
 h \circ h_1 &\cong h \circ h_2 && \text{si y sólo si} \\
 h_1 &\cong h_2 && \text{si y sólo si} \\
 x h_1 &\cong x h_2 && \text{si y sólo si} \\
 x_f \circ h &= x g \circ h.
 \end{aligned}$$

ii) Por el Teorema III.5 $x_f \cap x_h = x g \cap x_h$ si y sólo si $f \wedge g \cong g \wedge h$, entonces por i) $x_f \circ h = x g \circ h$. □

Corolario III.20. $f \wedge h \leq g$ si y sólo si $x_{f \wedge g} \circ h = x_f \circ h$.

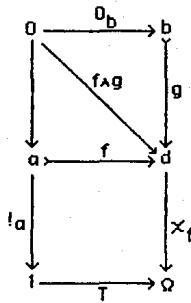
Demostración.

$$\begin{aligned}
 f \wedge h \leq g & \text{ si y sólo si } (f \wedge h) \wedge g \cong f \wedge h \\
 & \text{ si y sólo si } (f \wedge g) \wedge h \cong f \wedge h \\
 & \text{ si y sólo si } x_{f \wedge g} \circ h = x_f \circ h \quad (\text{Por lema anterior}). \quad \square
 \end{aligned}$$

Teorema III.21. Si $f : a \rightarrow b$ es un subobjeto de d , entonces $-f : -a \rightarrow d$ es el seudo-complemento de f ; es decir, $g \leq -f$ si y sólo si $f \wedge g \cong 0_d$.

Demostración. Supongamos que $g \leq -f$. Entonces por las propiedades de la \wedge $f \wedge g \leq f \wedge -f$, pero por Teorema III.14 $f \wedge -f \cong 0_d$, luego $f \wedge g \cong 0_d$.

Si $f \wedge g \cong 0_d$, entonces el cuadrado superior del diagrama



es un producto fibrado, luego el rectángulo también lo es (Teorema A.1).

Por la unicidad del Ω -axioma

$$x_f \circ g = x_{0_b} = \perp \circ I_b, \text{ luego}$$

$$\neg x_f \circ g = \neg \circ \perp \circ I_b = T_b,$$

pero $T \circ I_b = x g \circ g$ y $\neg \circ x_f = x_{-f}$, entonces $x_{-f} \circ g = x g \circ g$.

Por el Lema III.19 $-f \circ g \simeq g \circ f$. Por lo tanto $g \leq -f$. □

Teorema III.22. En $\text{Sub}(d)$ tenemos

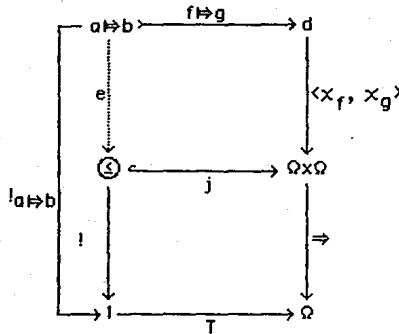
- i) $h \leq f \Leftrightarrow g$ si y sólo si $f \circ h \leq g$
- ii) $f \leq g$ si y sólo si $f \Leftrightarrow g \simeq 1_d$
- iii) $f \leq g$ si y sólo si $x_f \Rightarrow x_g = T_d$.

Demostración.

i) Sean $f : a \rightarrow d$, $g : b \rightarrow d$ y $h : c \rightarrow d$.

Supongamos que $h \leq f \Leftrightarrow g$, entonces existe $k : c \rightarrow (a \Rightarrow b)$ tal que $(f \Leftrightarrow g) \circ k = h$.

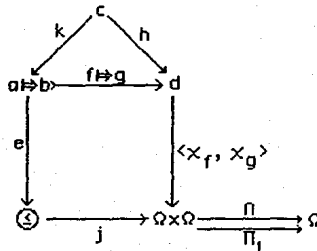
En el siguiente diagrama



los cuadrados inferior y externo son productos fibrados, luego

$\Rightarrow \langle x_f, x_g \rangle \circ (f \Leftrightarrow g) = T \circ !(a \Rightarrow b)$. Existe $e : (a \Rightarrow b) \rightarrow \textcircled{\Omega}$ única tal que

$\langle x_f, x_g \rangle \circ (f \Leftrightarrow g) = j \circ e$, lo que implica que el cuadrado superior es un producto fibrado. En el diagrama

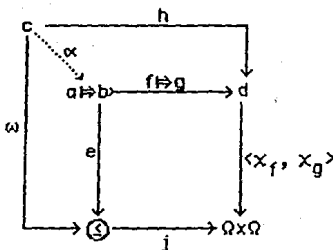


el triángulo superior conmuta, luego

$$\begin{aligned} \Pi_0 \langle x_f, x_g \rangle \cdot h &= \Pi_0 \langle x_f, x_g \rangle \cdot (f \mapsto g) \cdot k \\ &= \Pi_0 \cdot j \cdot e \cdot k \\ &= \Pi_1 \cdot j \cdot e \cdot k \quad (\text{por ser } j \text{ igualador}) \\ &= \Pi_1 \cdot \langle x_f, x_g \rangle \cdot (f \mapsto g) \cdot k \\ &= \Pi_1 \cdot \langle x_f, x_g \rangle \cdot h. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_{f \wedge g} \cdot h = x_f \cdot h$, luego por el Corolario III.20 $f \wedge h \leq g$.

Supongamos que $f \wedge h \leq g$, entonces $x_{f \wedge g} \cdot h \leq x_f \cdot h$, de donde $\Pi_0 \langle x_f, x_g \rangle \cdot h = \Pi_1 \cdot \langle x_f, x_g \rangle \cdot h$, pero $j : \textcircled{3} \rightarrow \Omega \times \Omega$ es el igualador de Π_0 y Π_1 , entonces existe $\omega : c \rightarrow \textcircled{3}$ única tal que $j \cdot \omega = \langle x_f, x_g \rangle \cdot h$. El diagrama



es un producto fibrado, luego existe $\alpha : c \rightarrow a \mapsto b$ única tal que $(f \mapsto g) \cdot \alpha = h$ y por lo tanto $h \leq f \mapsto g$.

ii) Supongamos que $f \leq g$, entonces para todo h subobjeto de d , $f \wedge h \leq f \leq g$, luego por i) $h \leq f \mapsto g$. En particular $1_d \leq f \mapsto g$, pero 1_d es el elemento máximo en $\text{Sub}(d)$ luego $f \mapsto g \leq 1_d$. Por lo tanto $f \mapsto g = 1_d$. Si $f \mapsto g = 1_d$, entonces $f \leq f \mapsto g$ (pues $f \leq 1_d$), luego por i) $f \wedge f \leq g$, es decir $f \leq g$.

- iii) $f \leq g$ si y sólo si $f \mapsto g = 1_d$
 si y sólo si $x_f \mapsto g = x \cdot 1_d$
 si y sólo si $x_f \mapsto g = \top_d$.

□

Corolario III.23. $(\text{Sub}(d), \leq)$ es una latiz distributiva.

Demostración.

- a) Como $g \leq g \vee h$ y $h \leq g \vee h$ tenemos
 $f \wedge g \leq f \wedge (g \vee h)$ y $f \wedge h \leq f \wedge (g \vee h)$

luego $f_{\wedge}(g \vee h)$ es cota superior de $f_{\wedge}g$ y $f_{\wedge}h$.

Supongamos que $f_{\wedge}g \leq \alpha$ y $f_{\wedge}h \leq \alpha$, entonces por Teorema III.22 $g \leq f \Rightarrow \alpha$ y $h \leq f \Rightarrow \alpha$, luego $g \vee h \leq f \Rightarrow \alpha$ si y sólo si $f_{\wedge}(g \vee h) \leq \alpha$, por lo tanto $f_{\wedge}(g \vee h)$ es la mínima cota superior, así $f_{\wedge}(g \vee h) = (f_{\wedge}g) \vee (f_{\wedge}h)$.

b) Por inciso a)

$$\begin{aligned} (f \vee g)_{\wedge}(f \vee h) &= ((f \vee g)_{\wedge}f) \vee ((f \vee g)_{\wedge}h) \\ &= ((f_{\wedge}f) \vee (g_{\wedge}f)) \vee ((f_{\wedge}h) \vee (g_{\wedge}h)) \\ &= f_{\wedge}(f \vee g \vee h) \vee (g_{\wedge}h) \\ &= f \vee (g_{\wedge}h). \end{aligned}$$

□

Con esto queda demostrado que $(\text{Sub}(d), \leq)$ es un álgebra de Heyting para todo objeto d de un Topo E .

Usualmente, a partir de este resultado, se demuestra que existe un isomorfismo natural entre $\text{Sub} : E \rightarrow \text{Set}^{E^{\text{op}}}$ y $\text{Hom}(_, \Omega) : E \rightarrow \text{Set}^{E^{\text{op}}}$ lo que implica que $\text{Hom}(_, \Omega)$ es un álgebra de Heyting. Utilizando la inversión de Yoneda $Y : E \rightarrow \text{Set}^{E^{\text{op}}}$, se concluye que Ω tiene estructura de álgebra de Heyting.

Capítulo IV

S.1 Se demostrará directamente que el clasificador de subobjetos de un Topo tiene estructura de álgebra de Heyting y, a partir de esto, que $\text{Sub}(d)$ también.

Considerando la definición ecuacional de álgebra de Heyting dada en los Teoremas 1.1 y 1.4 damos la siguiente

Definición . Sea E un Topo. Un *álgebra de Heyting* en un Topo es, en general, una sexteta $\langle D, T, \perp, \wedge, \vee, \rightarrow \rangle$ con D un objeto de E ; $T, \perp : 1 \rightarrow D$ y $\wedge, \vee, \rightarrow : D \times D \rightarrow D$ definidas convenientemente y tales que los siguientes diagramas son conmutativos.

a)

$$\begin{array}{ccccc}
 1 \times D & \xrightarrow{T \times 1_D} & D \times D & \xleftarrow{1_D \times T} & D \times 1 \\
 & \searrow \Pi' & \downarrow \wedge & \swarrow \Pi & \\
 & & D & &
 \end{array}$$

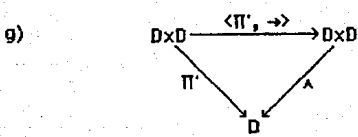
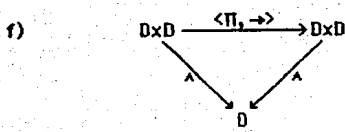
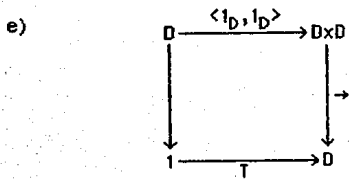
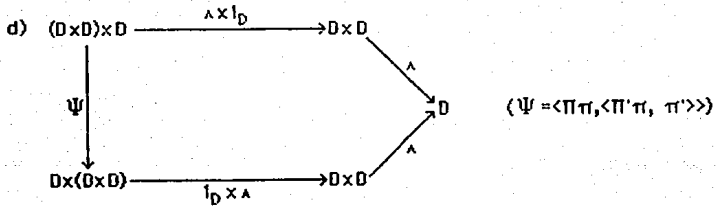
b)

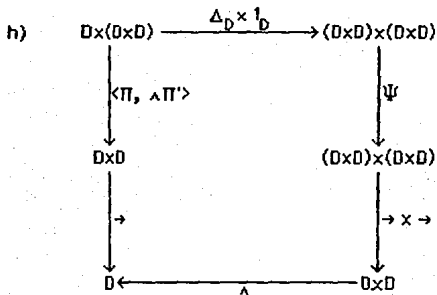
$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\Delta} & D \times D \\
 & \searrow 1_D & \swarrow \wedge \\
 & & D
 \end{array}$$

c)

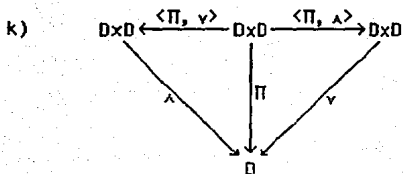
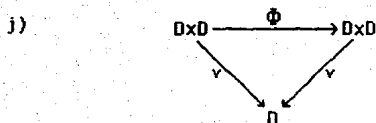
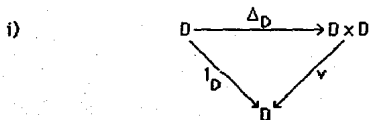
$$\begin{array}{ccc}
 D \times D & \xrightarrow{\wedge} & D \\
 & \searrow \Phi & \swarrow \wedge \\
 & & D \times D
 \end{array}$$

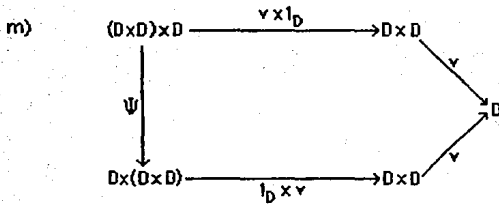
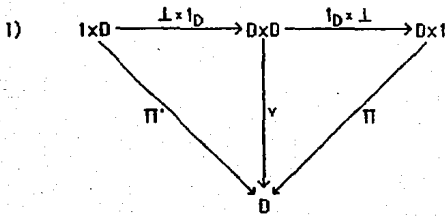
$$(\Phi = \langle \Pi', \Pi \rangle)$$





$$\langle \Psi = \langle \langle \pi \pi, \pi, \pi' \rangle, \langle \pi \pi, \pi', \pi' \rangle \rangle \rangle$$

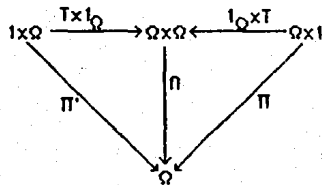




Teorema IV.1. $\langle \Omega, T, \perp, \Pi, U, \Rightarrow \rangle$ es un álgebra de Heyting.

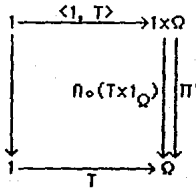
Demostración. Consideramos la sexteta $\langle \Omega, T, \perp, \Pi, U, \Rightarrow \rangle$ donde Ω es el clasificador de subobjetos de E ; $T : 1 \rightarrow \Omega$ es el morfismo verdad; $\perp : 1 \rightarrow \Omega$ el morfismo falso; $\Pi : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$; $U : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ y $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ están definidas en el Capítulo III.

a) **Afirmación.** El siguiente diagrama conmuta.



diag. A

Probaremos que tanto Π' como $\Pi \cdot (T \times 1_\Omega)$ hacen del siguiente diagrama un producto fibrado.



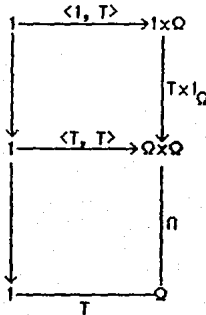
diag. A.1

i) Claramente, con Π' el diagrama conmuta.

Sean $\langle l_D, g \rangle : D \rightarrow 1 \times \Omega$, $l_D : D \rightarrow 1$ tales que $\Pi' \circ \langle l_D, g \rangle = T_D$.

El morfismo l_D es tal que $\langle 1, T \rangle \circ l_D = \langle l_D, T_D \rangle = \langle l_D, g \rangle$. Por lo tanto Π' hace al diagrama A.1 un producto fibrado.

ii) Consideramos el siguiente diagrama.



diag. A.2

El cuadrado inferior es, por definición, un producto fibrado. Si demostramos que el cuadrado superior también lo es, tendremos que el rectángulo lo será (Teorema A.1 apéndice), de donde $\pi \circ (T \times 1_\Omega)$ hace del diagrama A.1 un producto fibrado.

Claramente el cuadrado superior conmuta.

Sean $\langle l_D, g \rangle : D \rightarrow 1 \times \Omega$, $l_D : D \rightarrow 1$ tales que

$$(T \times 1_\Omega) \circ \langle l_D, g \rangle = \langle T, T \rangle \circ l_D, \text{ de donde}$$

$$\langle T_D, g \rangle = \langle T_D, T_D \rangle, \text{ si y sólo si}$$

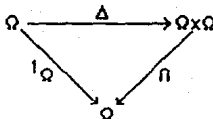
$$g = T_D.$$

El morfismo l_D es tal que $\langle 1, T \rangle \circ l_D = \langle l_D, T_D \rangle = \langle l_D, g \rangle$. Por lo tanto el cuadrado superior de A.2 es un producto fibrado.

Por la unicidad en el Ω -axioma $\pi \cdot (T \times i_\Omega) = \Pi'$ de donde el triángulo izquierdo del diagrama A conmuta.

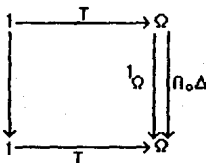
Análogamente se demuestra la conmutatividad del triángulo derecho de A. \square

b) Afirmación. El siguiente diagrama conmuta.



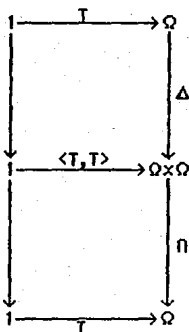
diag. B

Probaremos que tanto $\pi \cdot \Delta$ como i_Ω hacen del siguiente cuadrado un producto fibrado.



diag. B.1

1) Consideramos el diagrama



diag. B.2

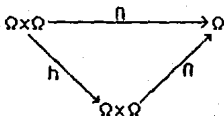
El cuadrado inferior es, por definición, un producto fibrado. Si demostramos que el cuadrado superior también lo es, tendremos que $\pi \cdot \Delta$ hace del diagrama B.1 un producto fibrado.

Como $\Delta \circ T = \langle T, T \rangle = \langle T, T \rangle \circ 1$, el cuadrado conmuta.

Sean $h : D \rightarrow \Omega$, $l_D : D \rightarrow 1$ tales que $\Delta \circ h = \langle T, T \rangle \circ l_D$, si y sólo si $h = T_D$. El morfismo $l_D : D \rightarrow 1$ es tal que $T \circ l_D = h$, de donde el cuadrado superior de B.2 es un producto fibrado.

ii) Claramente l_D hace del diagrama B.2 un producto fibrado. Por la unicidad en el Ω -axioma $\Omega \circ \Delta = l_D$, de donde el diagrama B conmuta. \square

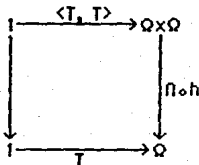
c) *Afirmación.* El siguiente triángulo conmuta,



diag. C

donde $h := \langle \Pi', \Pi \rangle$ es un isomorfismo.

Consideremos el siguiente diagrama



diag. C.1

$$\begin{aligned} \Omega \circ h \circ \langle T, T \rangle &= \Omega \circ \langle \Pi', \Pi \rangle \circ \langle T, T \rangle \\ &= \Omega \circ \langle T, T \rangle \\ &= T \Pi T \\ &= T. \end{aligned}$$

Por lo tanto el cuadrado conmuta.

Sean $\langle f, g \rangle : D \rightarrow \Omega \times \Omega$, $l_D : D \rightarrow 1$ tales que

$(\Omega \circ h) \circ \langle f, g \rangle = T \circ l_D$, de donde

$\Omega \circ \langle \Pi', \Pi \rangle \circ \langle f, g \rangle = T_D$ si y sólo si

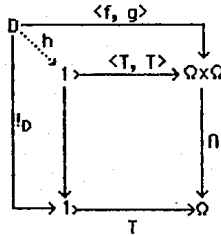
$g \Pi f = T_D$ que implica

$g = T_D$ y $f = T_D$. (Véase observación 4.c)

El morfismo l_D es tal que $\langle T, T \rangle \circ l_D = \langle T_D, T_D \rangle = \langle f, g \rangle$. Por lo tanto el cuadrado C.1 es un producto fibrado. Por unicidad $\Omega = \Omega \circ h$ y el diagrama C conmuta. \square

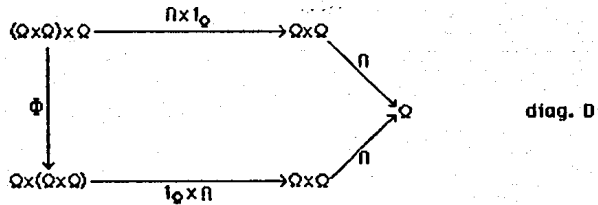
Observación 4.c. Si $f \circ g = T_D$, entonces $f = T_D$ y $g = T_D$.

El cuadrado interior del siguiente diagrama es, por definición, un producto fibrado



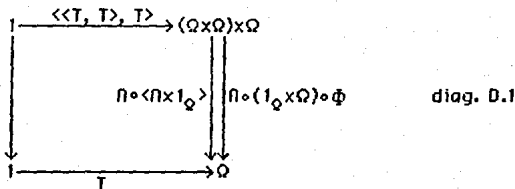
Como $f \circ g = T_D$, existe una única $h : D \rightarrow 1$ tal que $\langle T, T \rangle \circ h = \langle f, g \rangle$ y $h = l_D$, de donde $f = T_D$ y $g = T_D$.

d) Afirmación. El siguiente diagrama conmuta.

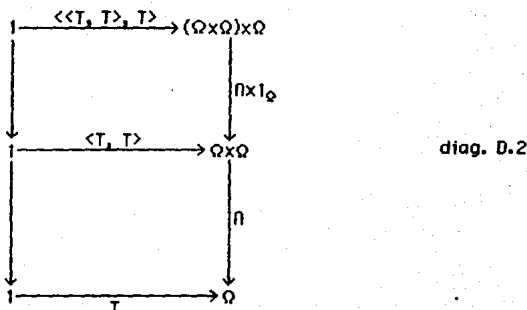


donde $\Phi = \langle \pi \Pi, \langle \pi' \Pi, \Pi' \rangle \rangle$ es un isomorfismo con $\pi = \pi_{\Omega \times \Omega}$, $\pi' = \pi'_{\Omega \times \Omega}$, $\Pi = \Pi_{(\Omega \times \Omega) \times \Omega}$, $\Pi' = \Pi'_{(\Omega \times \Omega) \times \Omega}$ proyecciones.

Demostraremos que tanto $\Pi \circ (\Pi \times l_Q)$ como $\Pi \circ (l_Q \times \Pi) \circ \Phi$ hacen del siguiente diagrama un producto fibrado y así, por la unicidad en el Ω -axioma, el diagrama D conmuta.



i) Probaremos que el cuadrado superior de D.2 es un producto fibrado.



Ya que

$$\begin{aligned}
 (\pi \times 1_\Omega) \circ \langle \langle T, T \rangle, T \rangle &= \langle \pi \circ \langle T, T \rangle, T \rangle \\
 &= \langle T \Delta T, T \rangle \\
 &= \langle T, T \rangle,
 \end{aligned}$$

el diagrama conmuta.

Sean $\langle \langle f, g \rangle, k \rangle : \alpha \rightarrow (\Omega \times \Omega) \times \Omega$ y $!_\alpha : \alpha \rightarrow I$ tales que

$$(\pi \times 1_\Omega) \circ \langle \langle f, g \rangle, k \rangle = \langle T, T \rangle \circ !_\alpha \text{ de donde}$$

$$\langle \pi \circ \langle f, g \rangle, k \rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle$$

$$\langle f \Delta g, k \rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle, \text{ si y sólo si}$$

$$f \Delta g = T_\alpha \quad \text{y} \quad k = T_\alpha.$$

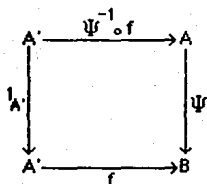
El morfismo $!_\alpha : \alpha \rightarrow I$ es tal que $\langle \langle T, T \rangle, T \rangle \circ !_\alpha = \langle \langle f, g \rangle, k \rangle$.

Por lo tanto el cuadrado superior de D.2 es un producto fibrado, luego el rectángulo también lo es, obteniendo que $\pi \circ (\pi \times 1_\Omega)$ hace del diagrama D.1 un producto fibrado.

ii) Para demostrar que $\pi \circ (1_\Omega \times \Omega) \circ \Phi$ hace que el diagrama D.1 sea un

producto fibrado necesitamos la siguiente

Observación 4.d. Si $\Psi : A \rightarrow B$ es un isomorfismo, entonces



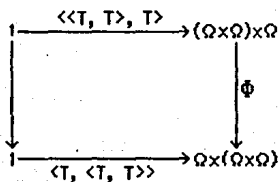
diag. 4.d.a

es un producto fibrado.

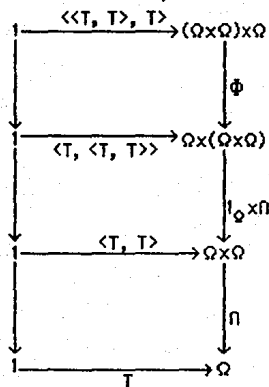
Claramente el diagrama conmuta.

Sean $h : C \rightarrow A$, $k : C \rightarrow A'$ tales que $\Psi \circ h = f \circ k$. El morfismo k es tal que $\Psi^{-1} \circ f \circ k = \Psi^{-1} \circ \Psi \circ h = h$. Así, 4.d.a es un producto fibrado.

Obtenemos que $\Phi : (\Omega \times \Omega) \times \Omega \rightarrow \Omega \times (\Omega \times \Omega)$ hace del siguiente

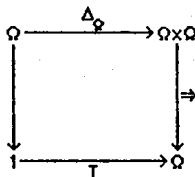


un producto fibrado, luego



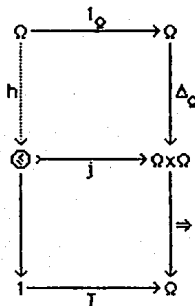
los tres cuadrados son productos fibrados, de donde el rectángulo lo es. Por lo tanto $\pi \circ (1_Q \times \Omega) \circ \Phi$ hace que el diagrama D.1 sea un producto fibrado. \square

e) *Afirmación.* El cuadrado conmuta.



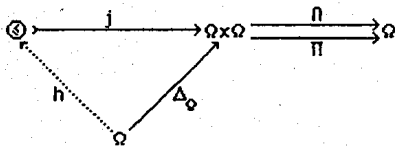
diag. E

Consideremos el diagrama



diag. E.1

donde $j: \oplus \rightarrow \Omega \times \Omega$ es el igualador de $\pi: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ y de $\Pi: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$,



Como

$$\begin{aligned} \pi \circ \Delta_Q &= \pi \circ \langle 1_Q, 1_Q \rangle \\ &= 1_Q \wedge 1_Q \\ &= 1_Q = \Pi \circ \Delta_Q, \end{aligned}$$

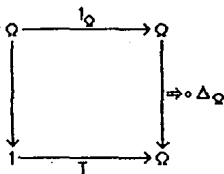
existe una única $h : \Omega \rightarrow \textcircled{2}$ tal que $j \circ h = \Delta_{\Omega}$. Por lo tanto el cuadrado superior de E.1 conmuta.

Sean $f : D \rightarrow \Omega$ y $g : D \rightarrow \textcircled{2}$ tales que $\Delta_{\Omega} \circ f = j \circ g$, pero $j \circ g : D \rightarrow \Omega \times \Omega$ es tal que $j \circ g = \langle h, k \rangle$, así que $f = h = k$.

El morfismo f es tal que

$$\begin{aligned} j \circ h \circ f &= \Delta_{\Omega} \circ f \\ &= \langle f, f \rangle \\ &= \langle h, k \rangle \\ &= j \circ g. \end{aligned}$$

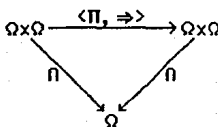
Como j es un monomorfismo tenemos que $h \circ f = g$. Por lo tanto el cuadrado superior de E.1 es un producto fibrado, de donde



diag. E.2

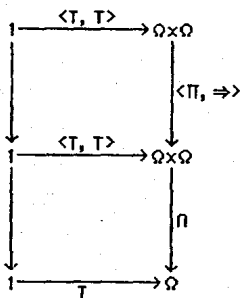
también lo es, pero T_{Ω} hace de éste un producto fibrado, entonces $\Rightarrow \Delta_{\Omega} = T_{\Omega}$.
Por lo tanto el diagrama E conmuta. \square

f) *Afirmación.* El siguiente diagrama conmuta



diag. F

El cuadrado inferior de F.1 es un producto fibrado.



diag. F.1

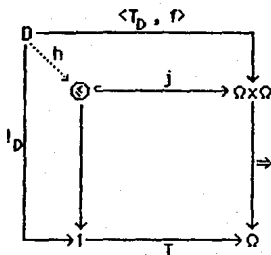
Como $\langle \Pi, \Rightarrow \rangle \circ \langle T, T \rangle = \langle T, T \Rightarrow T \rangle = \langle T, T \rangle$ el cuadrado superior conmuta.

Sean $\langle f, g \rangle : D \rightarrow \Omega \times \Omega$ y $!_D : D \rightarrow I$ tales que $\langle \Pi, \Rightarrow \rangle \circ \langle f, g \rangle = T_D$, $\langle f, f \Rightarrow g \rangle = T_D$, si y sólo si $f = T_D$ y $f \Rightarrow g = T_D$, si y sólo si $f = g = T_D$. (Ver observación 4.f).

El morfismo $!_D$ es tal que $\langle T, T \rangle \circ !_D = \langle f, g \rangle$. El cuadrado superior de F.1 es un producto fibrado. Así Π y $\Pi \circ \langle \Pi, \Rightarrow \rangle$ hacen del mismo diagrama un producto fibrado, por lo tanto $\Pi = \Pi \circ \langle \Pi, \Rightarrow \rangle$. \square

Observación 4.f. Sea $f : D \rightarrow \Omega$. Si $T_D \Rightarrow f = T_D$, entonces $f = T_D$.

Ya que el cuadrado interior siguiente diagrama es un producto fibrado y, por hipótesis, $\Rightarrow \circ \langle T_D, f \rangle = T_D$, existe una única $h : D \rightarrow \textcircled{\Omega}$ tal que $j \circ h = \langle T_D, f \rangle$.



Por definición $j : \textcircled{\Omega} \rightarrow \Omega \times \Omega$ es el igualador de Π y de Π , luego

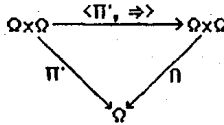
$$\Pi \circ j \circ h = \Pi \circ \langle T_D, f \rangle, \quad \text{si y sólo si}$$

$$\Pi \circ j \circ h = \Pi \circ \langle T_D, f \rangle, \quad \text{si y sólo si}$$

$$T_D = T_D \circ f \quad \text{si y sólo si} \\ f = T_D \quad (\text{Por Observación 4.c.})$$

□

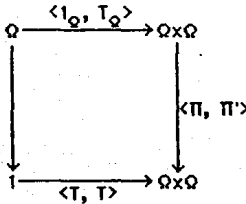
g) *Afirmación.* El diagrama G conmuta.



diag. G

El siguiente diagrama conmuta ya que

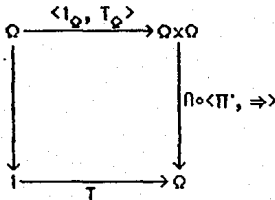
$$\begin{aligned} \langle \Pi', \Rightarrow \rangle \circ \langle 1_\Omega, T_\Omega \rangle &= \langle T_\Omega, 1_\Omega \mid \Rightarrow T_\Omega \rangle \\ &= \langle T_\Omega, T_\Omega \rangle \quad (\text{Ver Observación 4.g}) \\ &= \langle T, T \rangle \circ 1_\Omega. \end{aligned}$$



diag. 6.1

Sean $\langle f, g \rangle : D \rightarrow \Omega \times \Omega$, $1_D : D \rightarrow 1$ tales que $\langle \Pi', \Rightarrow \rangle \circ \langle f, g \rangle = \langle T_D, T_D \rangle$, de donde $\langle g, f \mid \Rightarrow g \rangle = \langle T_D, T_D \rangle$, si y sólo si $g = T_D$ y $f \mid \Rightarrow g = T_D$.

Sea $f : D \rightarrow \Omega$, $\langle 1_D, T_D \rangle \circ f = \langle f, T_D \rangle = \langle f, g \rangle$, por lo tanto el cuadrado 6.1 es un producto fibrado. Por el Teorema A.1,



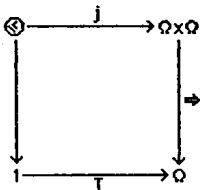
diag. 6.2

es un producto fibrado.

Claramente $\Pi' : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ hace que este diagrama sea un producto fibrado; por lo tanto $\Pi' = \Pi \cdot \langle \Pi', \Rightarrow \rangle$ y el diagrama G conmuta. \square

Observación 4.g. $1_\Omega \models T_\Omega = T_\Omega$.

Por definición el diagrama



es un producto fibrado, donde $j : 1_\Omega \rightarrow \Omega \times \Omega$ es el igualador de Π y de Π' .

Como

$$\begin{aligned} \Pi \cdot \langle 1_\Omega, T_\Omega \rangle &= 1_\Omega \\ &= 1_\Omega \wedge T_\Omega \\ &= \Pi \cdot \langle 1_\Omega, T_\Omega \rangle, \end{aligned}$$

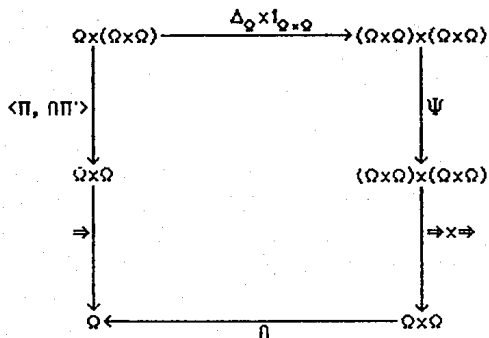
existe una única $h : \Omega \rightarrow 1_\Omega$ tal que $j \cdot h = \langle 1_\Omega, T_\Omega \rangle$; así obtenemos

$$\Rightarrow j \cdot h = \Rightarrow \cdot \langle 1_\Omega, T_\Omega \rangle$$

$$T_\Omega = 1_\Omega \models T_\Omega, \quad \text{pues } \Rightarrow \cdot j \cdot h = T_\Omega \cdot h = T_\Omega.$$

\square

h) Afirmación. El siguiente diagrama conmuta.



diag. H

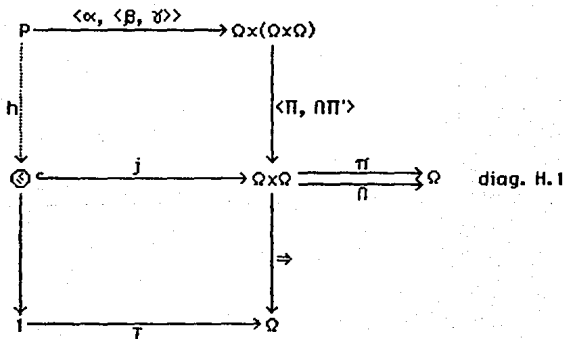
Simplificando tenemos

$$\begin{aligned}
 \Pi_*(\Rightarrow x \Rightarrow) \Psi_*(\Delta_\Omega \times 1_{\Omega \times \Omega}) &= \Pi_*(\Rightarrow x \Rightarrow) \langle \langle \Pi_1 \Pi, \Pi \Pi' \rangle, \langle \Pi' \Pi, \Pi' \Pi_2 \rangle \rangle \cdot (\Delta_\Omega \times 1_{\Omega \times \Omega}) \\
 &= \Pi_*(\Rightarrow x \Rightarrow) \langle \langle \Pi_1 \Pi, \Pi \Pi' \rangle, \langle \Pi' \Pi, \Pi' \Pi_2 \rangle \rangle \cdot \langle \langle \Pi, \Pi \rangle, \Pi' \rangle \\
 &= \Pi_*(\Rightarrow x \Rightarrow) \langle \langle \Pi, \Pi \Pi' \rangle, \langle \Pi, \Pi' \Pi' \rangle \rangle \\
 &= \Pi_* \langle \Leftrightarrow \langle \Pi, \Pi \Pi' \rangle, \Rightarrow \langle \Pi, \Pi' \Pi' \rangle \rangle \\
 &= \Pi_* \langle \Pi \mid \Rightarrow \Pi \Pi', \Pi \mid \Rightarrow \Pi' \Pi' \rangle \\
 &= (\Pi \mid \Rightarrow \Pi \Pi') \wedge (\Pi \mid \Rightarrow \Pi' \Pi').
 \end{aligned}$$

Sea (P, k) el igualador de $\pi : \Omega \times (\Omega \times \Omega) \rightarrow \Omega$ y de $\Pi_*(1_{\Omega \times \Omega}) : \Omega \times (\Omega \times \Omega) \rightarrow \Omega$

$$P \xrightarrow{k = \langle \alpha, \langle \beta, \delta \rangle \rangle} \Omega \times (\Omega \times \Omega) \xrightarrow[\Pi_*(1_{\Omega \times \Omega})]{\pi} \Omega$$

$\alpha \Pi \beta \Pi \delta = \alpha$ si y sólo si $\alpha \perp \beta \Pi \delta$. Consideramos el siguiente diagrama



Como

$$\begin{aligned}
 \Pi_* \langle \Pi, \Pi \Pi' \rangle \cdot \langle \alpha, \langle \beta, \delta \rangle \rangle &= \Pi_* \langle \alpha, \beta \wedge \delta \rangle \\
 &= \alpha \\
 &= \alpha \wedge \beta \wedge \delta \\
 &= \Pi_* \langle \alpha, (\beta \wedge \delta) \rangle \\
 &= \Pi_* \langle \Pi, \Pi \Pi' \rangle \cdot \langle \alpha, \langle \beta, \delta \rangle \rangle,
 \end{aligned}$$

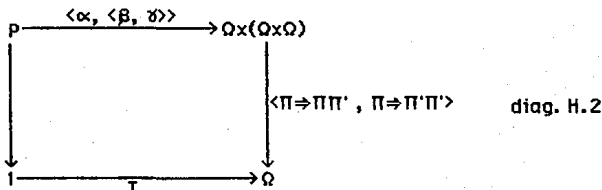
existe una única $h : P \rightarrow \textcircled{3}$ tal que $\langle \Pi, \Pi \Pi' \rangle \cdot \langle \alpha, \langle \beta, \delta \rangle \rangle = j \cdot h$. Por lo tanto el cuadrado superior de H.1 conmuta.

Sean $\langle f, \langle g, g' \rangle \rangle : D \rightarrow P$ y $e : D \rightarrow P$ tales que $\langle \pi, \pi \pi' \rangle \circ \langle f, \langle g, g' \rangle \rangle = j \circ e$, de donde $\langle f, g \wedge g' \rangle = j \circ e$, si y sólo si $f = \pi \circ j \circ e$.
 Por otra parte

$$\begin{aligned} \pi \circ \langle \pi, \pi \pi' \rangle \circ \langle f, \langle g, g' \rangle \rangle &= \pi \circ \langle f, g \wedge g' \rangle \\ &= \pi \circ j \circ e \\ &= f \wedge g \wedge g'. \end{aligned}$$

Pero j es el igualador de π y de $\pi \pi'$, por lo tanto $f = f \wedge g \wedge g'$, si y sólo si $f \wedge g \wedge g'$.

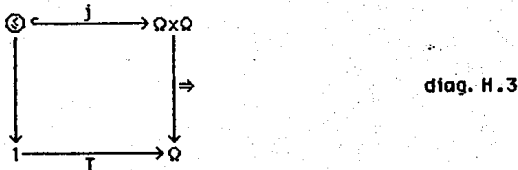
La inclusión $i : D \rightarrow P$ es tal que $\langle \alpha, \langle \beta, \delta \rangle \rangle \circ i = \langle f, \langle g, g' \rangle \rangle$ y $h \circ i = e$.
 Por lo tanto el cuadrado superior de $H.1$ es un producto fibrado.
 Consideremos el siguiente diagrama



$$\begin{aligned} \langle \pi \mid \Rightarrow \pi \pi', \pi \mid \Rightarrow \pi' \pi' \rangle \circ \langle \alpha, \langle \beta, \delta \rangle \rangle &= (\Rightarrow \chi \Rightarrow) \circ \langle \pi, \pi \pi' \rangle, \langle \pi, \pi' \pi' \rangle \circ \langle \alpha, \langle \beta, \delta \rangle \rangle \\ &= (\Rightarrow \chi \Rightarrow) \circ \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha, \delta \rangle \\ &= \langle \alpha \mid \Rightarrow \beta, \alpha \mid \Rightarrow \delta \rangle. \end{aligned}$$

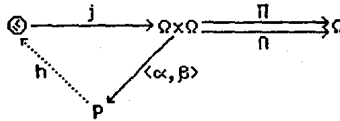
Demostremos que $\alpha \mid \Rightarrow \beta = T_P$ y $\alpha \mid \Rightarrow \delta = T_P$.

Por definición



es un producto fibrado.

Sean $\langle \alpha, \beta \rangle : P \rightarrow Q \times Q$ y $i_P : P \rightarrow I$, con P definida anteriormente. Como $\alpha \perp \alpha \wedge \beta \wedge \delta \perp \beta$, entonces $\alpha \wedge \beta = \alpha$, luego $\pi \circ \langle \alpha, \beta \rangle = \pi \circ \alpha$. Por lo tanto existe una única $h : P \rightarrow \textcircled{3}$ tal que



conmuta. De donde

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle &= \Rightarrow j \circ h \\ &= T \circ I_{\Omega} \circ h \\ &= T_P \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha \models \beta = T_P$. Análogamente se demuestra que $\alpha \models \delta = T_P$.

Así obtenemos que $\langle \pi \models \pi \pi', \pi \models \pi' \pi' \rangle \cdot \langle \alpha, \langle \beta, \delta \rangle \rangle = \langle T_P, T_P \rangle$, luego H.2 conmuta.

Sean $\langle \Theta, \langle \Psi, \Phi \rangle \rangle : C \rightarrow \Omega \times (\Omega \times \Omega)$ y $I_C : C \rightarrow I$ tales que $\langle \pi \models \pi \pi', \pi \models \pi' \pi' \rangle \cdot \langle \Theta, \langle \Psi, \Phi \rangle \rangle = \langle T_C, T_C \rangle$, si y sólo si $\langle \Theta \models \Psi, \Theta \models \Phi \rangle = \langle T_C, T_C \rangle$, si y sólo si $\Theta \models \Psi = T_C$ y $\Theta \models \Phi = T_C$.

Como H.3 es un producto fibrado, existen $k : C \rightarrow \mathbb{S}$ y $k' : C \rightarrow \mathbb{S}$ únicas tales que $j \cdot k = \langle \Theta, \Psi \rangle$ y $j \cdot k' = \langle \Theta, \Phi \rangle$.

Pero $\pi \cdot j = \pi \cdot j$, luego

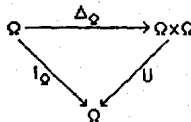
$$\begin{aligned} \pi \cdot j \cdot k &= \pi \cdot j \cdot k \\ \pi \cdot \langle \Theta, \Psi \rangle &= \pi \cdot \langle \Theta, \Phi \rangle \quad \text{si y sólo si} \\ \Theta &= \Theta \wedge \Phi. \end{aligned}$$

Análogamente $\Theta = \Theta \wedge \Psi$. Por lo tanto $\Theta = \Theta \wedge \Phi \wedge \Psi$.

La inclusión $i' : C \rightarrow P$ es tal que $\langle \alpha, \langle \beta, \delta \rangle \rangle \cdot j = \langle \Theta, \langle \Psi, \Phi \rangle \rangle$. Por lo tanto el diagrama H.2 es un producto fibrado.

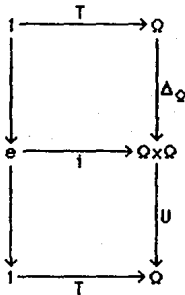
Por la unicidad en el Ω -axioma $\Rightarrow \langle \pi, \pi \pi' \rangle = \langle \pi \models \pi \pi', \pi \models \pi' \pi' \rangle$, de donde el diagrama H conmuta. \square

i) Afirmación. El siguiente triángulo conmuta.



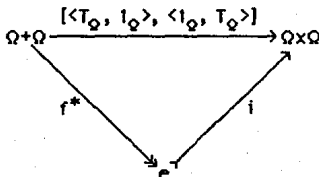
diag. 1

Consideramos el siguiente diagrama



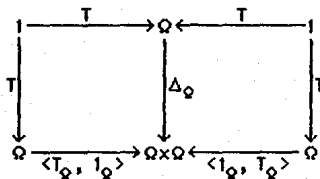
diag. 1.1

El cuadrado inferior es un producto fibrado por definición, donde $i: e \rightarrow \Omega \times \Omega$ es tal que el siguiente diagrama conmuta.



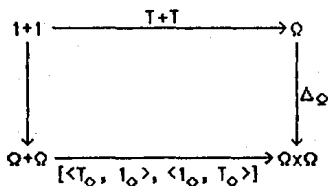
diag. 1.2

Probaremos que el cuadrado superior de 1.1 es un producto fibrado. Si demostramos que en el siguiente diagrama



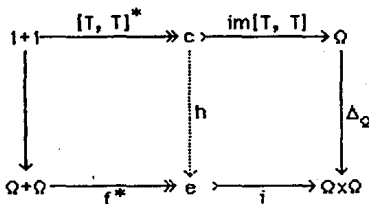
diag. 1.3

ambos cuadrados son productos fibrados entonces -por el Teorema A.2- el siguiente diagrama también lo es,



diag. 1.4

de donde, por el Teorema III.10, los cuadrados de



diag. 1.5

son productos fibrados.

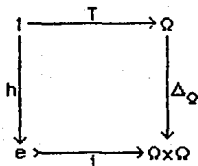
Luego

$$1+1 \xrightarrow{[T, T]^*} c \xrightarrow{\text{im}[T, T]} \Omega$$

es una epimono-factorización de $[T, T] : 1+1 \rightarrow \Omega$ sin embargo

$$1+1 \xrightarrow{[1, 1]} 1 \xrightarrow{T} \Omega$$

también es una epimono-factorización de $[T, T]$, de donde -por el Teorema III.9- existe un único isomorfismo $k : c \rightarrow 1$. Por lo tanto el siguiente diagrama es un producto fibrado.



diag. 1.6

Regresando al diagrama 1.3 tenemos

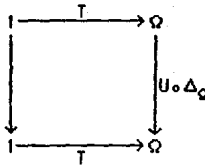
$$\begin{aligned} \Delta_{\Omega} \circ T &= \langle T, T \rangle \\ &= \langle T_{\Omega} \circ T, T_{\Omega} \circ T \rangle \\ &= \langle T_{\Omega}, T_{\Omega} \circ T \rangle, \end{aligned}$$

luego el cuadrado izquierdo del diagrama 1.3 conmuta.

Sean $f: D \rightarrow \Omega$ y $g: D \rightarrow \Omega$ tales que $\Delta_{\Omega} \circ f = \langle T_{\Omega}, T_{\Omega} \circ g \rangle$, si y sólo si $f = g = T_{\Omega} \circ g = T_D$. El morfismo $!_D: D \rightarrow 1$ es tal que $T \circ !_D = f$ y $T \circ !_D = g$. Luego este diagrama es un producto fibrado.

Análogamente el cuadrado derecho de 1.3 es un producto fibrado.

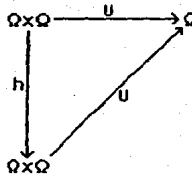
Por el Teorema A.1, el cuadrado



es un producto fibrado, luego por unicidad $U \circ \Delta_{\Omega} = !_D$.

Por lo tanto el diagrama 1 conmuta. □

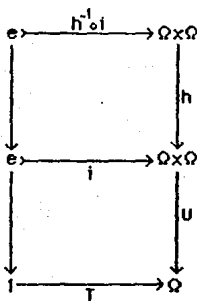
j) *Afirmación.* El siguiente diagrama conmuta.



diag. J

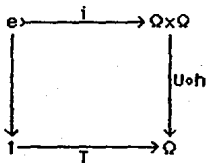
con $h = \langle \Pi', \Pi \rangle$ isomorfismo.

Por la observación 4.d, el cuadrado superior del diagrama



diag. J.1

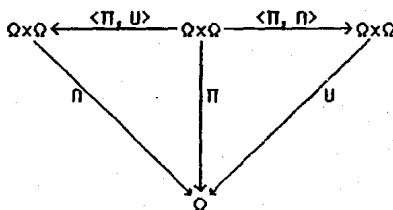
es un producto fibrado, de donde



también lo es. Así, $U = U \circ h$ y el triángulo J conmuta.

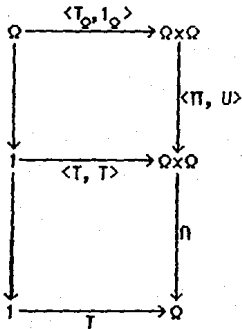
□

k) *Afirmación.* El siguiente diagrama conmuta.



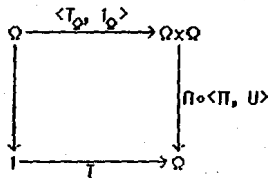
diag. K

Consideramos el siguiente diagrama



diag. K.1

El cuadrado inferior es un producto fibrado; si demostramos que el cuadrado superior también lo es, tendremos que



diag. K.2

es un producto fibrado.

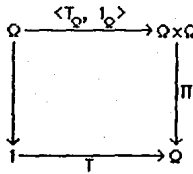
El cuadrado superior conmuta pues

$$\begin{aligned}
 \langle \pi, U \rangle \circ \langle T_\Omega, l_\Omega \rangle &= \langle T_\Omega, T_\Omega \circ l_\Omega \rangle \\
 &= \langle T_\Omega, T_\Omega \rangle \quad (\text{Ver observación 4.k}) \\
 &= \langle T, T \rangle \circ l_\Omega.
 \end{aligned}$$

Sean $\langle f, g \rangle : D \rightarrow \Omega \times \Omega$ y $l_\Omega : \Omega \rightarrow I$ tales que $\langle \pi, U \rangle \circ \langle f, g \rangle = \langle T, T \rangle \circ l_\Omega$, si y sólo si $f = T_D$ y $f \circ g = T_D$.

El morfismo $g : D \rightarrow \Omega \times \Omega$ es tal que $\langle T_\Omega, l_\Omega \rangle \circ g = \langle T_\Omega \circ g, g \rangle = \langle f, g \rangle$. Por lo tanto el cuadrado superior de K.1 es un producto fibrado.

Claramente el siguiente cuadrado es un producto fibrado,

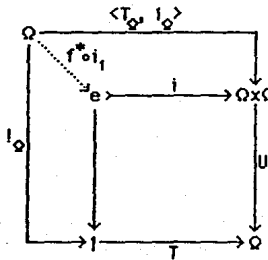


diag. K.3

luego por unicidad, $\Pi = U \circ \langle \Pi, u \rangle$. Por lo tanto el triángulo izquierdo del diagrama K conmuta.

Observación 1.1. $T_{\Omega} \circ I_{\Omega} = T_{\Omega}$.

Consideramos el siguiente producto fibrado



Existe una única $k : \Omega \rightarrow e$ tal que $i \circ k = \langle T_{\Omega}, I_{\Omega} \rangle$ y $I_{\Omega} \circ k = I_{\Omega}$.

Consideremos la inclusión $i_1 : \Omega \rightarrow \Omega + \Omega$ y $f^* : \Omega + \Omega \rightarrow e$ el epimorfismo de la epimono-factorización $[\langle T_{\Omega}, I_{\Omega} \rangle, \langle I_{\Omega}, T_{\Omega} \rangle] : \Omega + \Omega \rightarrow \Omega \times \Omega$.

Como

$$\begin{aligned} i \circ f^* \circ i_1 &= [\langle T_{\Omega}, I_{\Omega} \rangle, \langle I_{\Omega}, T_{\Omega} \rangle] \circ i_1 \\ &= \langle T_{\Omega}, I_{\Omega} \rangle \\ &= i \circ k \quad \text{y, por otra parte,} \end{aligned}$$

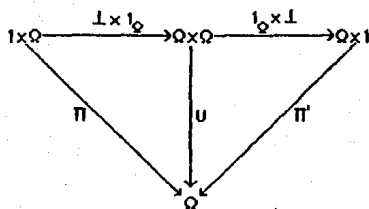
$$I_{\Omega} \circ f^* \circ i_1 = I_{\Omega} = I_{\Omega} \circ k,$$

entonces $k = f^* \circ i_1$. Así

$$\begin{aligned} U \circ \langle T_{\Omega}, I_{\Omega} \rangle &= U \circ i \circ f^* \circ i_1 \\ &= T \circ I_{\Omega} \circ f^* \circ i_1 \\ &= T_{\Omega}. \end{aligned}$$

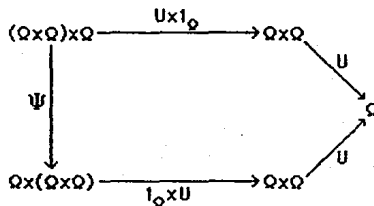
□

l) *Afirmación.* El siguiente diagrama conmuta



diag. L

m) *Afirmación.* El siguiente diagrama conmuta



diag. M

con $\Psi = \langle \pi\pi, \langle \pi'\pi, \pi' \rangle \rangle$.

La conmutatividad del triángulo derecho del diagrama K y la de los diagramas L y M no la presentaremos en este trabajo, pues no llegamos a concretar su demostración. Sin embargo sabemos que existe otra forma de demostrar este Teorema partiendo del hecho de que $\text{Sub}(d)$ es un álgebra de Heyting, como lo vimos en el Capítulo III.

Si consideramos válido este resultado podemos demostrar a continuación que $\text{Sub}(D)$ es un álgebra de Heyting.

S.2 Sea E un Topo. Los objetos de la categoría $\text{Set}^{E^{op}}$ son los funtores $F: E^{op} \rightarrow \text{Set}$, y sus morfismos son transformaciones naturales.

Suponemos que ya se sabe que esta categoría es bicompleta.

Teorema IV.2. $\text{Set}^{E^{op}}$ es un Topo.

Para facilitar la continuidad de la exposición, la demostración de este teorema se

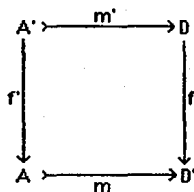
encuentra en el Apéndice.

A continuación demostraremos que $\text{Hom}(_, \Omega)$ es isomorfo a Sub .

Sea E un Topo. Definimos $\text{Sub} : E \rightarrow \text{Set}$ como sigue

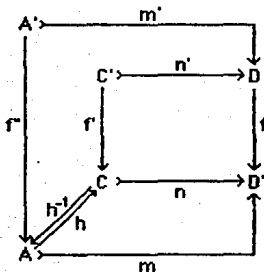
Para todo objeto $D \in E$, $\text{Sub}(D) \in \text{Set}$.

Para todo morfismo $f : D \rightarrow D'$ de E y $m : A \rightarrow D'$, consideramos el producto fibrado de f y m



y definimos $\text{Sub}(f)(m) = m'$.

Sean $n : C \rightarrow D'$, $m : A \rightarrow D'$ y $f : D \rightarrow D'$ tales que $n = m$; luego, existe $h : A \rightarrow C$ isomorfismo tal que $m = n \circ h$ y $n = m \circ h^{-1}$. Consideramos el producto fibrado de (f, n) y el de (f, m)



donde $(\text{Sub}(f))(n) = n'$; $(\text{Sub}(f))(m) = m'$.

Como $f \circ m' = m \circ f' = n \circ h \circ f'$, existe una única $k : A' \rightarrow C'$ tal que $n' \circ k = m'$. Por lo tanto $m' \leq n'$.

Como $f \circ n' = n \circ f' = m \circ h^{-1} \circ f'$, existe una única $k' : C' \rightarrow A'$ tal que $m' \circ k' = n'$, de donde $n' \leq m'$. Por lo tanto $\text{Sub}(f)$ no depende del representante.

Supongamos que $m : A \rightarrow D'$ y $n : C \rightarrow D'$ son tales que $m \leq n$. Existe $\alpha : A \rightarrow C$ tal que $m = n \circ \alpha$.

Como $f \cdot m' = m \cdot f' = n \cdot \alpha \cdot f'$, existe una única $\beta : A' \rightarrow C'$ tal que $n \cdot \beta = m'$; es decir, $(\text{Sub}(f))(m) \leq (\text{Sub}(f))(n)$. Por lo tanto el funtor Sub preserva el orden.

Teorema IV.3. $\text{Sub} : E \rightarrow \text{Set}$ es un funtor contravariante.

Demostración.

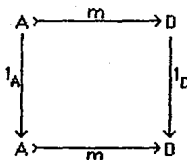
Sean $f : D \rightarrow D'$, $g : D \rightarrow D''$ morfismos de E ; $m : A \rightarrow D$, $m' : A' \rightarrow D'$ y $m'' : A'' \rightarrow D''$ tales que

$$(\text{Sub}(f))(m') = m \quad \text{y} \quad (\text{Sub}(g))(m'') = m'.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} [(\text{Sub}(f) \circ \text{Sub}(g))](m'') &= (\text{Sub}(f))(m') \\ &= m \\ &= (\text{Sub}(g \circ f))(m''). \end{aligned}$$

Consideremos el siguiente diagrama



diag. 4.3.a

Claramente el cuadrado conmuta.

Sean $h : B \rightarrow D$ y $h' : B \rightarrow A$ tales que $1_D \cdot h = m \cdot h'$, luego 4.3.a es un producto fibrado, de donde $\text{Sub}(1_D) = 1_{\text{Sub}(D)}$. Por lo tanto Sub es un funtor contravariante. \square

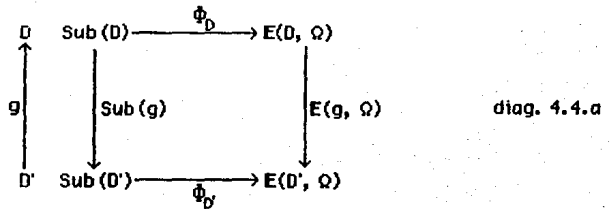
Definición. Sea C una categoría con conjuntos Hom pequeños. Una *representación de un funtor* $K : C \rightarrow \text{Set}$ (contravariante) es una pareja (r, Φ) , con r un objeto de C y $\Phi : C(_, r) \cong K$ un isomorfismo natural. El objeto r se llama el *objeto representante*.

Teorema IV.4. Sea E un Topo. Si Ω es el clasificador de subobjetos de E , entonces Ω es el objeto representante del funtor $\text{Sub} : E \rightarrow \text{Set}$.

Demostración. Definimos $\Phi : \text{Sub} \rightarrow E(_, \Omega)$ como sigue

Si D es un objeto de E , entonces $\Phi(D) = \Phi_D : \text{Sub}(D) \rightarrow E(D, \Omega)$ es tal que para toda $f : A \rightarrow D$, $\Phi_D(f) = x_f$, donde x_f es el morfismo característico de f .

Consideremos el siguiente diagrama

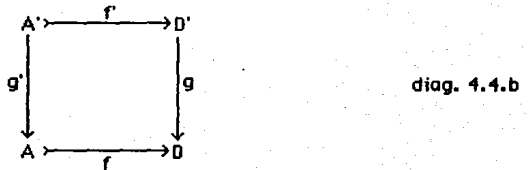


Sea $f : A \rightarrow D$,

$$(E(g, \Omega) \circ \Phi_D)(f) = E(g, \Omega)(x_f) = x_{f \circ g}$$

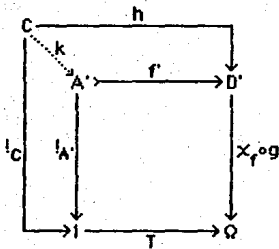
$$(\Phi_{D'} \circ \text{Sub}(g))(f) = \Phi_{D'}(f') = x_{f'}$$

donde $f' : A' \rightarrow D'$ es tal que

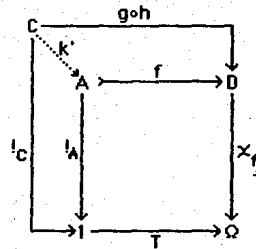


es un producto fibrado.

En los siguientes diagramas



diag. 4.4.c



diag. 4.4.d

$$\begin{aligned} (x_{f \circ g}) \circ f &= x_{f \circ g \circ f} \\ &= x_{f \circ f \circ g} \\ &= T \circ l_{A'} \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x_{f \circ g})$ hace conmutar el cuadrado interno de 4.4.c.

Sean $h : C \rightarrow D'$ y $l_C : C \rightarrow I$ tales que $(x_{f \circ g}) \circ h = T \circ l_C$.

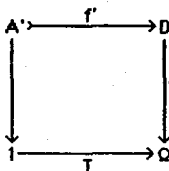
Como el cuadrado interior de 4.4.d es un producto fibrado, existe una única $k' : C \rightarrow A$ tal que $f \cdot k' = g \cdot h$ y $1_{A'} \cdot k' = 1_C$. El diagrama 4.4.b es un producto fibrado, luego existe una única $k : C \rightarrow A'$ tal que $f' \cdot k = h$ y $g' \cdot k = k'$; de donde $f \cdot k = h$, $1_{A'} \cdot k = 1_C$ y el cuadrado 4.4.c es un producto fibrado, pero por la unicidad en el Ω -axioma $x_f \cdot g = x_{f'}$.

Por lo tanto el diagrama 4.4.a conmuta y Φ es una transformación natural.

Definimos $\theta : E(-, \Omega) \rightarrow \text{Sub}$. Sea D un objeto de E ,

$\theta(D) = \theta_D : E(D, \Omega) \rightarrow \text{Sub}(D)$ es tal que para toda

$f : D \rightarrow \Omega$, $\theta_D(f) = f'$ donde $f' : A' \rightarrow D$ es tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado.



Sean D un objeto de E , $f : D \rightarrow \Omega$ y $g : A \rightarrow D$

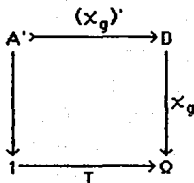
$$\begin{aligned}
 [\Phi \cdot \theta](D)(f) &= [\Phi(\theta(D))](f) \\
 &= \Phi(\theta_D(f)) \\
 &= \Phi(f') \\
 &= x_{f'}
 \end{aligned}$$

con f' definida anteriormente.

Por unicidad, $f = x_{f'}$ y por lo tanto $\Phi \cdot \theta = 1_{E(-, \Omega)}$.

$$\begin{aligned}
 [\theta \cdot \Phi](D)(g) &= [\theta(\Phi(D))](g) \\
 &= \theta(\Phi_D(g)) \\
 &= \theta(x_g) \\
 &= (x_g)'
 \end{aligned}$$

donde $(x_g)'$ es tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado



Por unicidad $(xg)' = g$, de donde $\theta \cdot \Phi = 1_{\text{Sub}}$.

Por lo tanto Φ es un isomorfismo natural y $\text{Hom}(-, \Omega) \cong \text{Sub}$. \square

Para demostrar que $\text{Hom}(-, \Omega)$ es álgebra de Heyting es necesario definir los morfismos Π^* , U^* , \Rightarrow^* , T^* , \perp^* y demostrar que son transformaciones naturales.

Consideremos el isomorfismo $\Phi : \text{Hom}(-, \Omega) \times \text{Hom}(-, \Omega) \rightarrow \text{Hom}(-, \Omega \times \Omega)$ dado por $\Phi_D(f, g) = \langle f, g \rangle$.

i) $\Pi^* : \text{Hom}(-, \Omega) \times \text{Hom}(-, \Omega) \rightarrow \text{Hom}(-, \Omega)$ es tal que $\Pi^* = \Pi^* \cdot \Phi$, donde $\Pi^* = \text{Hom}(\Pi, \Omega) : \text{Hom}(-, \Omega \times \Omega) \rightarrow \text{Hom}(-, \Omega)$.

Sean A un objeto de E y $f, g : A \rightarrow \Omega$. Así

$$\begin{aligned} \Pi^*_A(f, g) &= (\Pi^* \cdot \Phi)(f, g) \\ &= \Pi^* \langle f, g \rangle \\ &= f \wedge g. \end{aligned}$$

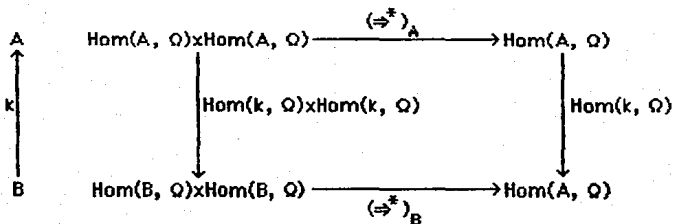
El diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \Pi^*_A \\ & & \longrightarrow \\ \text{Hom}(A, \Omega) \times \text{Hom}(A, \Omega) & \xrightarrow{\quad \Pi^*_A \quad} & \text{Hom}(A, \Omega) \\ \downarrow \text{Hom}(k, \Omega) \times \text{Hom}(k, \Omega) & & \downarrow \text{Hom}(k, \Omega) \\ \text{Hom}(B, \Omega) \times \text{Hom}(B, \Omega) & \xrightarrow{\quad \Pi^*_B \quad} & \text{Hom}(B, \Omega) \end{array}$$

conmuta ya que

$$\begin{aligned} [\text{Hom}(k, \Omega) \cdot \Pi^*_A](f, g) &= \text{Hom}(k, \Omega)(\Pi^* \langle f, g \rangle) \\ &= (\Pi^* \langle f, g \rangle) \cdot k \\ &= (f \wedge g) \cdot k \\ &= \Pi^* \langle fk, gk \rangle \\ &= \Pi^*_B \langle fk, gk \rangle \\ &= [\Pi^*_B \cdot (\text{Hom}(k, \Omega) \times \text{Hom}(k, \Omega))](f, g). \end{aligned}$$

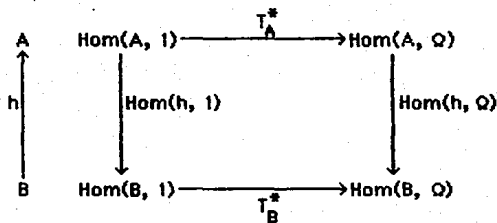
Por lo tanto Π^* es una transformación natural.



$$\begin{aligned}
 [\text{Hom}(k, \Omega) \cdot (\Rightarrow^*)_A](f, g) &= \text{Hom}(k, \Omega)(f \mapsto g) \\
 &= ((f \mapsto g)) \cdot k \\
 &= \Rightarrow \langle f, g \rangle \cdot k \\
 &= (\Rightarrow^*)_B \langle fk, gk \rangle \\
 &= [(\Rightarrow^*)_B \cdot \text{Hom}(k, \Omega) \times \text{Hom}(k, \Omega)](f, g),
 \end{aligned}$$

por lo tanto el diagrama conmuta.

iv) Sea $T^* : \text{Hom}(_, 1) \rightarrow \text{Hom}(_, \Omega)$ tal que si A es un objeto de E y $f : A \rightarrow 1$, $T^*_A(f) = T \cdot f$. Claramente el diagrama conmuta

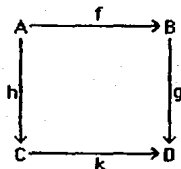


luego $T^* : \text{Hom}(_, 1) \rightarrow \text{Hom}(_, \Omega)$ es una transformación natural.

v) Por último, $\perp^* : \text{Hom}(_, 1) \rightarrow \text{Hom}(_, \Omega)$ está dada por $\perp^*_A(f) = \perp \cdot f$, con A un objeto de E y $f : A \rightarrow 1$ un morfismo de E .

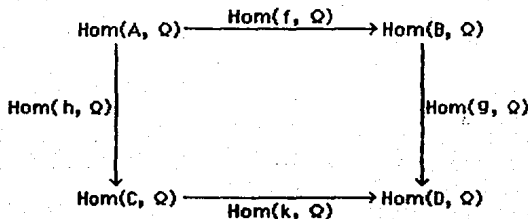
$$\begin{aligned}
 (\text{Hom}(h, \Omega) \cdot \perp^*_A)(f) &= \text{Hom}(h, \Omega)(\perp \cdot f) \\
 &= \perp \cdot f \cdot h \\
 &= \perp^*_B(f \cdot h) \\
 &= [\perp^*_B \cdot \text{Hom}(h, 1)](f),
 \end{aligned}$$

por lo tanto $\perp^* : \text{Hom}(_, \perp) \longrightarrow \text{Hom}(_, \Omega)$ es una transformación natural.
 El funtor $\text{Hom}(_, \Omega) : E^{\text{OP}} \longrightarrow \text{Set}$ preserva diagramas conmutativos.
 Supongamos que el siguiente diagrama es conmutativo en E^{OP} .



$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(g, \Omega) \circ \text{Hom}(f, \Omega) &= \text{Hom}(g \circ f, \Omega) \\
 &= \text{Hom}(k \circ h, \Omega) \\
 &= \text{Hom}(k, \Omega) \circ \text{Hom}(h, \Omega).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta en $\text{Set}^{E^{\text{OP}}}$

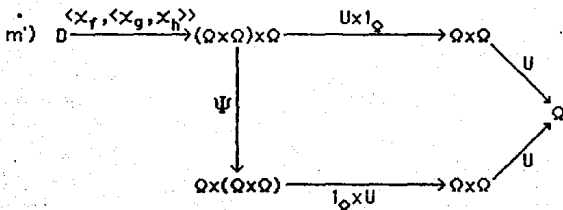
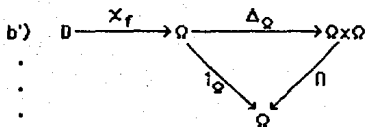
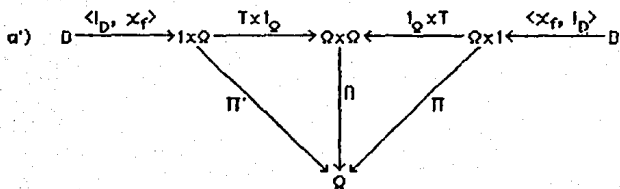


lo que demuestra el siguiente

Teorema IV.5. Si Ω es el clasificador de subobjetos de un Topo E y Ω tiene estructura de álgebra de Heyting en E , $\text{Hom}(_, \Omega)$ tiene estructura de álgebra de Heyting en $\text{Set}^{E^{\text{OP}}}$.

Corolario IV.5.1. Sea D un objeto de E . $\text{Hom}(D, \Omega)$ es un álgebra de Heyting.

Demostración. Si consideramos los diagrama a), b), ..., m) de Teorema IV.2 y los morfismos $x_f : D \rightarrow \Omega$, $x_g : D \rightarrow \Omega$ y $x_h : D \rightarrow \Omega$ obtenemos los siguientes diagramas conmutativos.

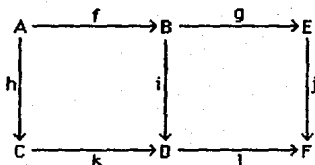


Por lo tanto $\text{Hom}(D, \Omega)$ es un álgebra de Heyting. □

Por el Teorema IV.4 $\text{Hom}(D, \Omega) \cong \text{Sub}$, luego $\text{Sub}(D)$ es un álgebra de Heyting.

Apéndice

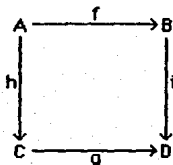
Teorema A.1. Si un diagrama de la forma



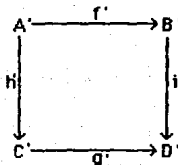
conmuta, entonces

- i) Si los dos cuadrados son productos fibrados, el rectángulo lo es.
- ii) Si el rectángulo y el cuadrado derecho son productos fibrados, entonces el cuadrado izquierdo lo es.

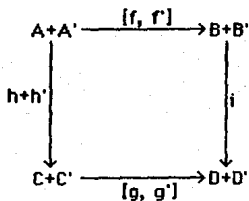
Teorema A.2. Si



y



son productos fibrados en cualquier Topo E, entonces



también lo es.

Teorema IV.4. $\text{Set}^{E^{\text{op}}}$ es un Topo.

Demostración. Sean $S, R : E^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ funtores. Definimos $S^R : E^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$

a) En los objetos

Si $A \in E^{\text{op}}$, entonces $S^R(A) = \text{Nat}(E(-, A) \times R, S)$.

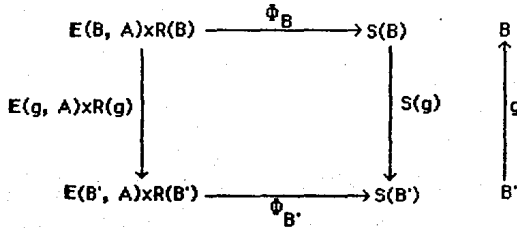
b) En los morfismos

Sea $f : A' \rightarrow A$ un morfismo de E .

Definimos $S^R(f) : S^R(A) \rightarrow S^R(A')$ de modo tal que si $\Phi : E(-, A) \times R \rightarrow S$ es una transformación natural, $S^R(f)(\Phi) = \Phi'$ con $\Phi' : E(-, A') \times R \rightarrow S$ definida por $\Phi'_B(h, x) = \Phi_B(f \cdot h, x)$ donde B es un objeto de E , $h : B \rightarrow A'$ y $x \in R(B)$.

Afirmación 1.1. $S^R(f)$ está bien definida.

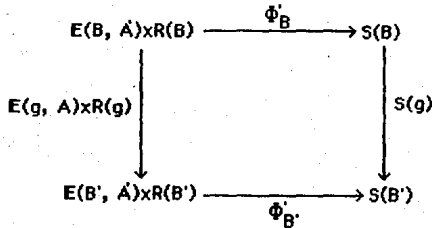
Como $\Phi : E(-, A) \times R \rightarrow S$ es transformación natural, el diagrama conmuta.



Sea $(h, x) \in E(B, A) \times R(B)$.

$$\begin{aligned}
 (S(g) \circ \Phi'_{B'})(h, x) &= S(g)(\Phi'_{B'}(h, x)) \\
 &= S(g)(\Phi_B(f \cdot h, x)) \\
 &= (\Phi_B \circ (E(g, A) \times R(g)))(f \cdot h, x) \\
 &= \Phi_B(f \cdot h \circ g, R(g)(x)) \\
 &= \Phi'_{B'} \circ (E(g, A) \times R(g))(h, x).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta y Φ'_B es una transformación natural.



□

Afirmación 1.2. S^R es un funtor contravariante.

Sean $f : A' \rightarrow A$, $f' : A'' \rightarrow A'$ morfismos de E y $\Phi : E(_, A) \times R \rightarrow S$ una transformación natural.

$S^R(f \cdot f') : S^R(A) \rightarrow S^R(A')$ es tal que $S^R(f \cdot f')(\Phi) = \Phi'$ donde $\Phi' : E(_, A') \times R \rightarrow S$ está dada por $\Phi'_B(h, x) = \Phi_B(f \cdot f' \cdot h, x)$ con $x \in R(B)$ y $h : B \rightarrow A''$.

Por otra parte

$S^R(f) : S^R(A) \rightarrow S^R(A')$ es tal que $S^R(f)(\Phi) = \Psi$ donde $\Psi : E(_, A') \times R \rightarrow S$ está dada por $\Psi_C(h', y) = \Phi_C(f \cdot h', y)$ con $h' : C \rightarrow A'$ y $y \in R(C)$.

$S^R(f') : S^R(A') \rightarrow S^R(A'')$ es tal que $S^R(f')(\Psi) = \Psi'$ donde $\Psi' : E(_, A'') \times R \rightarrow S$ es una transformación natural dada por $\Psi'_B(h, x) = \Psi_B(f' \cdot h, x)$ con $h : B \rightarrow A'$ y $x \in R(B)$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 (S^R(f') \cdot S^R(f))(\Phi) &= S^R(f')(S^R(f)(\Phi)) \\
 &= S^R(f')(\Psi) \\
 &= \Psi' \\
 &= \Phi' \\
 &= S^R(f \cdot f')(\Phi).
 \end{aligned}$$

Además $S^R(1_A)(\Phi) = \delta$ donde $\delta : E(_, A) \times R \rightarrow S$ es tal que

$$\delta_B(\alpha, x) = \Phi_B(1_A \cdot \alpha, x) = \Phi_B(\alpha, x) \text{ con } \alpha : B \rightarrow A \text{ y } x \in R(B).$$

Por lo tanto $S^R(1_A) = 1_{S^R(A)}$ y S^R es un funtor contravariante. □

Definamos $\epsilon_{S,R} : S^R \times R \rightarrow S$ dada por $\epsilon_{S,R}(A)(\eta, x) = \eta_A(1_A, x)$

donde $A \in E^{op}$, $x \in R(A)$ y $\eta : E(_, A) \times R \rightarrow S$ es una transformación natural.

Afirmación 1.3. $\epsilon_{S,R}$ es una transformación natural; es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Nat}(E(-, A) \times R, S) \times R(A) & \xrightarrow{\epsilon_{S,R}(A)} & S(A) \\
 \downarrow S^R(f) \times R(f) & & \downarrow S(f) \\
 \text{Nat}(E(-, A) \times R, S) \times R(A) & \xrightarrow{\epsilon_{S,R}(B)} & S(B)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 A \\
 \uparrow f \\
 B
 \end{array}$$

Sea $(\eta, x) \in \text{Nat}(E(-, A) \times R, S) \times R(A)$.

$$\begin{aligned}
 (S(f) \circ \epsilon_{S,R}(A))(\eta, x) &= S(f)(\epsilon_{S,R}(A)(\eta, x)) \\
 &= S(f)(\eta_A(1_A, x)).
 \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
 [\epsilon_{S,R}(B) \circ S^R(f) \times R(f)](\eta, x) &= \epsilon_{S,R}(B)(S^R(f) \times R(f)(\eta, x)) \\
 &= \epsilon_{S,R}(B)(\eta', z) \\
 &= \eta'_B(1_B, z),
 \end{aligned}$$

donde $z = R(f)(x)$ y $\eta' : E(-, B) \times R \rightarrow S$.

Como η es transformación natural

$$\begin{array}{ccc}
 E(A, A) \times R(A) & \xrightarrow{\eta_A} & S(A) \\
 \downarrow E(f, A) \times R(f) & & \downarrow S(f) \\
 E(B, A) \times R(B) & \xrightarrow{\eta_B} & S(B)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 A \\
 \uparrow f \\
 B
 \end{array}$$

conmuta, de donde

$$\begin{aligned}
 (S(f) \circ \eta_A)(1_A, x) &= (\eta_B \circ [E(f, A) \times R(f)])(1_A, x) \\
 &= \eta_B(f, z) \\
 &= \eta'_B(1_B, z).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $S(f) \circ \epsilon_{S,R}(A) = \epsilon_{S,R}(B) \circ S^R(f) \times R(f)$ y $\epsilon_{S,R}$ es, por su parte, una transformación natural. \square

Examinemos la universalidad de $\epsilon_{S,R}$.

Sea $G : E^{op} \rightarrow \text{Set}$ functor contravariante y $\alpha : G \times R \rightarrow S$ una transformación natural.

Definimos $\alpha^* : Q \rightarrow S^R$ tal que si A' es un objeto de E y $x \in Q(A')$, entonces $\alpha^*_{A'}(x) : E(-, A') \times R \rightarrow S$ está dada por $(\alpha^*_{A'}(x))_B(g, z) = \alpha_B(Q(g)(x), z)$, donde B es un objeto de E^{OP} , $g : B \rightarrow A'$ es un morfismo de E y $z \in R(B)$. α^* está bien definida pues $Q(g)(x) \in Q(B)$ y $z \in R(B)$, luego $\alpha_B(Q(g)(x), z) \in S(B)$.

Afirmación 1.4. α^* es una transformación natural; es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccc}
 A' & Q(A') & \xrightarrow{\alpha^*_{A'}} & S^R(A') & \\
 \uparrow f & \downarrow Q(f) & & \downarrow S^R(f) & \\
 B' & Q(B') & \xrightarrow{\alpha^*_{B'}} & S^R(B') &
 \end{array}$$

Sea $x \in Q(A')$. $\alpha^*_{A'}(x) : E(-, A') \times R \rightarrow S$, luego $(S^R(f) \circ \alpha^*_{A'})(x) = S^R(f)(\alpha^*_{A'}(x)) = \Phi'$ donde $\Phi' : E(-, B') \times R \rightarrow S$ está dada por

$$\begin{aligned}
 \Phi'_B(h, z) &= (\alpha^*_{A'}(x))_B(f \circ h, z) \\
 &= \alpha_B(Q(fh)(x), z),
 \end{aligned}$$

donde B es un objeto de E , $h : B \rightarrow B'$ es un morfismo de E y $z \in R(B)$.

Por otra parte, $(\alpha^*_{B'} \circ Q(f))(x) : E(-, B') \times R \rightarrow S$ es tal que

$$\begin{aligned}
 (\alpha^*_{B'} \circ Q(f))(x)_B(h, z) &= \alpha_B(Q(h)(Q(f)(x)), z) \\
 &= \alpha_B(Q(fh)(x), z).
 \end{aligned}$$

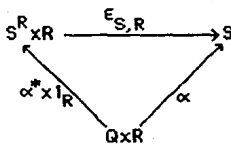
Por lo tanto $S^R(f) \circ \alpha^*_{A'} = \alpha^*_{B'} \circ Q(f)$ y $\alpha^* : Q \rightarrow S^R$ es una transformación natural. \square

Para todo objeto A de E^{OP} el siguiente diagrama conmuta, pues si $x \in Q(A)$ y $y \in R(A)$, entonces

$$\begin{array}{ccc}
 S(A) \times R(A) & \xrightarrow{E_{S,R}(A)} & S(A) \\
 \swarrow \alpha^*_A \times 1_{R(A)} & & \searrow \alpha_A \\
 & Q(A) \times R(A) &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 [\epsilon_{S,R}(A) \circ (\alpha_A^* \times 1_{R(A)})](x, y) &= \epsilon_{S,R}(A)[\alpha_A^*(x), 1_{R(A)}(y)] \\
 &= [\alpha_A^*(x)]_A(1_A, y) \\
 &= \alpha_A[Q(1_A)(x), y] \\
 &= \alpha_A(x, y).
 \end{aligned}$$

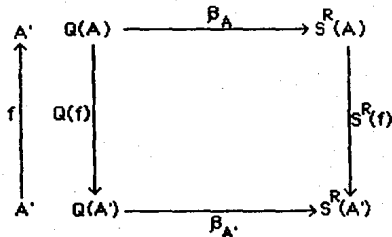
luego, el siguiente diagrama también conmuta.



Solo nos falta probar que $\alpha^* : Q \rightarrow S^R$ es única. Supongamos que existe $\beta : Q \rightarrow S^R$ transformación natural tal que el diagrama anterior conmuta; es decir, $\epsilon_{S,R} \circ (\beta \times 1_R) = \alpha$. Para todo objeto A de E y $(x, y) \in Q(A) \times R(A)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 (\epsilon_{S,R}(A) \circ (\beta_A \times 1_{R(A)}))(x, y) &= \alpha_A(x, y) && \text{si y sólo si} \\
 \epsilon_{S,R}(A)(\beta_A(x), y) &= \alpha_A(x, y) && \text{si y sólo si} \\
 (\beta_A(x))_A(1_A, y) &= \alpha_A(x, y).
 \end{aligned}$$

Como β es una transformación natural el siguiente diagrama conmuta



es decir $S^R(f) \circ \beta_A = \beta_{A'} \circ Q(f)$, luego si $x \in Q(A)$, $z \in R(B)$ y $h : B \rightarrow A$ tenemos

$$[(S^R(f) \circ \beta_A)(x)]_B(h, z) = [(\beta_{A'} \circ Q(f))(x)]_B(h, z)$$

pero por otro lado

$$\begin{aligned}
 [(S^R(f) \circ \beta_A)(x)]_B(h, z) &= [S^R(f)(\beta_A(x))_B(h, z)] \\
 &= (\beta_A(x))_B(f \circ h, z),
 \end{aligned}$$

por lo tanto $(\beta_A(x))_B(f \circ h, z) = [(\beta_{A'} \circ Q(f))(x)]_B(h, z)$.

Así

$$\begin{aligned}
 (\beta_A(x))_B(h, z) &= (\beta_A(x))_B(h \cdot 1_B, z) \\
 &= [\beta_A \cdot (Q(h)(x))]_B(1_B, z) \\
 &= \alpha_B(Q(h)(x), z), \text{ pues } \alpha_A(x, y) = (\beta_A(x))_A(1_A, y) \\
 &= (\alpha^*_A(x))\beta(h, z), \text{ por definici3n.}
 \end{aligned}$$

de donde $\beta = \alpha^*$ y α^* es 3nica. Por lo tanto $\text{Set}^{E^{OP}}$ tiene exponenciaci3n.

Para encontrar el clasificador de subobjetos de esta categor3a necesitamos la siguiente

Definici3n. Sea A un objeto de E^{OP} . Una A -criba es un conjunto C de morfismos con codominio A , cerrado bajo la composici3n derecha; es decir, si $f: A' \rightarrow A \in C$ y $g: B \rightarrow A'$, entonces $f \cdot g \in C$.

Definimos $\Omega: E^{OP} \rightarrow \text{Set}$:

a) En los objetos

Si A es un objeto de E , entonces $\Omega(A) = S_A = \{C \mid C \text{ es una } A\text{-criba}\}$.

b) En los morfismos

Si $f: A' \rightarrow A$ es un morfismo de E , entonces $\Omega(f)(C) = C' = \{g: B \rightarrow A' \mid f \cdot g \in C\}$ donde $C \in S_A$. C' es una A' -criba pues si $g \in C'$ y $h: C \rightarrow B$, entonces $f \cdot g \in C$, pero C es una A -criba, luego $f \cdot g \cdot h \in C$, de donde $g \cdot h \in C'$.

Afirmaci3n 1.5 $\Omega: E^{OP} \rightarrow \text{Set}$ es un funtor covariante.

Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 E^{op} & \xrightarrow{\Omega} & \text{Set} \\
 A & \xrightarrow{\quad} & S_A \\
 \downarrow f & & \downarrow \Omega(f) \\
 A' & \xrightarrow{\quad} & S_{A'} \\
 \downarrow f' & & \downarrow \Omega(f') \\
 A'' & \xrightarrow{\quad} & S_{A''}
 \end{array}$$

Sea C una A -criba. $f: A' \rightarrow A$ y $f': A'' \rightarrow A'$ son morfismos de E .

$\Omega(f \cdot f')(C) = D = \{h: B \rightarrow A \mid f' \cdot f \cdot h \in C\}$ y $(\Omega(f') \circ \Omega(f))(C) = \Omega(f')(C') = C'$, donde $C' = \{k: C \rightarrow A' \mid f \cdot k \in C\}$ y $C'' = \{h: B \rightarrow A'' \mid f' \cdot h \in C'\}$.

Luego $C^* = \{h' : B \rightarrow A^* \mid f \circ f' \circ h' \in C\} = D$, por lo tanto $\Omega(f' \circ f) = \Omega(f') \circ \Omega(f)$.

Además $\Omega(1_A)(C) = \{g : B \rightarrow A \mid g \in C\} = C$, de donde $\Omega(1_A) = 1_{\Omega(A)}$. Por lo tanto Ω es un funtor covariante. \square

Sea $T : I \rightarrow \Omega$ la transformación natural dada por $T(A)(0) = M_A$, donde M_A es la mayor A -criba.

Afirmación 1.6. (Ω, T) es el clasificador de subobjetos de $\mathbf{Set}^{E^{OP}}$.

Sean $F : E^{OP} \rightarrow \mathbf{Set}$, $G : E^{OP} \rightarrow \mathbf{Set}$ funtores contravariantes y $\tau : F \rightarrow G$ un monomorfismo de $\mathbf{Set}^{E^{OP}}$.

Definimos $x_\tau : G \rightarrow \Omega$ tal que si A es un objeto de E y $x \in G(A)$, entonces

$$(x_\tau)_A(x) = \{k : B \rightarrow A \mid G(k)(x) \in \tau_B(F(B))\}.$$

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 G(A) & \xrightarrow{(x_\tau)_A} & \Omega(A) & & A \\
 \downarrow G(f) & & \downarrow \Omega(f) & & \downarrow f \\
 G(B) & \xrightarrow{(x_\tau)_B} & \Omega(B) & & B
 \end{array}$$

$$[\Omega(f) \circ (x_\tau)_A](x) = \Omega(f)(S) = S' \text{ con } S = \{k : B \rightarrow A \mid G(k)(x) \in \tau_B(F(B))\} \text{ y}$$

$$S' = \{k' : C \rightarrow B \mid f \circ k' \in S\} = \{k' : C \rightarrow B \mid G(f \circ k') \in \tau_B(F(B))\}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
 [(x_\tau)_B \circ G(f)](x) &= (x_\tau)_B(G(f)(x)) \\
 &= \{k' : C \rightarrow B \mid G(k')(G(f)(x)) \in \tau_B(F(B))\} \\
 &= \{k' : C \rightarrow B \mid G(f \circ k')(x) \in \tau_B(F(B))\} \\
 &= S'.
 \end{aligned}$$

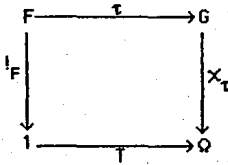
Por lo tanto x_τ es una transformación natural.

Sean $x \in G(A)$, $g : C \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow A$ tales que $f \in (x_\tau)_A(x)$; es decir, $G(f)(x) \in \tau_B(F(B))$.

Si $y \in G(C)$, entonces $f \circ g$ es tal que $G(f \circ g)(y) = G(f)[G(g)(y)] \in \tau_B(F(B))$ por lo tanto $(x_\tau)_A(x)$ es una A -criba.

Examinemos si (Ω, T) satisface el Ω -axioma.

Consideremos el siguiente diagrama.



Sean A un objeto de E y $x \in F(A)$.

$$\begin{aligned}
 ((x_\tau)_A \circ \tau_A)(x) &= (x_\tau)_A(\tau_A(x)) \\
 &= \{f: B \rightarrow A \mid G(f)(\tau_A(x)) \in \tau_B(F(B))\} \\
 &= \{f: B \rightarrow A \mid \tau_B(F(f)(x)) \in \tau_B(F(B))\} \\
 &= \{f: B \rightarrow A\} \\
 &= M_A \text{ la mayor } A\text{-criba} \\
 &= T_A \circ \tau_A(x).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el cuadrado conmuta.

Sean $K: E_{op} \rightarrow Set$ objeto de $Set^{E_{op}}$, $\alpha: K \rightarrow G$ y $\delta: K \rightarrow I$ transformaciones naturales tales que $(x_\tau)_A \circ \alpha_A = T_A \circ \delta_A$; es decir,

$$(x_\tau)_A \circ \alpha_A = \{h: C \rightarrow A \mid G(h)(\alpha_A(x)) \in \tau_C(F(C))\} = M_A.$$

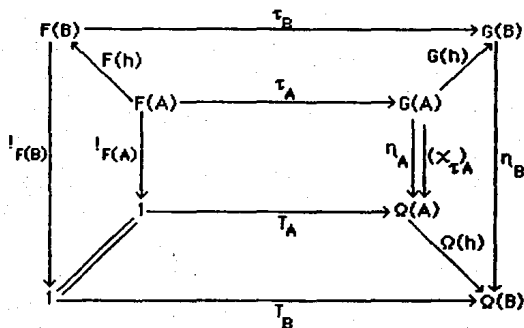
$1_A \in M_A$, luego $G(1_A)(\alpha_A(x)) \in \tau_A(F(A))$, de donde existe $y \in F(A)$ tal que $\tau_A(y) = \alpha_A(x)$.

Definimos $\sigma: K \rightarrow F$ como $\sigma_A(x) = y$ donde $x \in K(A)$ y $\tau_A(y) = \alpha_A(x)$.

Por definición σ es una transformación natural tal que $\tau \circ \sigma = \alpha$ y $1_F \circ \sigma = \delta$ y, además, σ es única pues $\tau: F \rightarrow G$ es un monomorfismo de $Set^{E_{op}}$. Por lo tanto el diagrama anterior es un producto fibrado.

Veamos que x_τ es única.

Supongamos que existe $\eta: G \rightarrow \Omega$ transformación natural tal que el cuadrado interior de siguiente diagrama es un producto fibrado.



Sea $z \in G(A)$; $\eta_A(z)$ es una A -criba pues $\eta_A(z) \in \Omega(A)$.
 Supongamos que $h \in \eta_A(z)$

$$\begin{aligned}
 (\eta_B \circ G(h))(z) &= (\Omega(h) \circ \eta_A)(z) \\
 &= \Omega(h)(\eta_A(z)) \\
 &= \{k : C \rightarrow B \mid h \circ k \in \eta_A(z)\} \\
 &= M_B.
 \end{aligned}$$

Obtenemos que $G(h)(y) \in \tau_B(F(B))$ y por definición $h \in (x_{\tau})_A(z)$. Por lo tanto $\eta_A(z) \subset (x_{\tau})_A(z)$.

Si $f \in (x_{\tau})_A(z)$, entonces $G(f)(z) \in \tau_B(F(B))$, luego $(\eta_B \circ G(f))(z) = T_B \circ I_{F(B)} = M_B$
 Pero $\eta_B \circ G(f) = \Omega(f) \circ \eta_A$ entonces $(\Omega(f) \circ \eta_A)(z)$ es la mayor B -criba.

Como $I_B \in M$ donde $M = \{k : C \rightarrow B \mid f \circ k \in \eta_A(z)\}$, tenemos que $f \in \eta_A(z)$. Por lo tanto $(x_{\tau})_A(z) = \eta_A(z)$ para toda $z \in G(A)$, luego $x_{\tau} = \eta$ y x_{τ} es única \square

Por fin concluimos que Set^{EOP} es un Topo. \square

Bibliografia

BARR, M. and WELLS, C.; Toposes Triples and Theories, Springer-Verlag, New York, 1985.

FREYD, Peter; Aspects of Topoi, Bulletin Austral. Math. Soc, Vol 7, Pp. 1-76, 1972.

GOLDBLATT, Robert; Topoi: The Categorical Analysis of Logic, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.

LAMBEK, J. and SCOTT, P. J.; Higher Order Categorical Logic, Cambridge University Press, 1986.

MAC LANE, Saunders; Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, New York, 1971.