2g.
1

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

LA ESTRUCTURA DE ALGEBRA DE HEYTING EN EL CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS DE UN TOPO.

T E S I S

Que para obtener el Título de
MATEMATICO

p r e s e n t a

ANNE MARIE PIERRE ALBERRO SEMERENA

México, D. F. 1987

Indice

Introducción

El propósito de este trabajo es demostrar, en el marco de la Teoría de Topos, que el clasificador de subobjetos de un Topo tiene estructura de álgebra de Heyting, sin utilizar -como se hace usualmente- la propiedad de que Sub(d) es un álgebra de Heyting.

En el Capítulo I damos las definiciones de álgebra de Boole y álgebra de Heyting junto con algunas de sus propiedades. Un resultado importante que retomamos en el Capítulo IV es la definición ecuacional de álgebra de Heyting dada en los Teoremas I.1 y I.4.

En el Capítulo II estudiamos la categoría de los conjuntos **Set**, verificando que satisface todas las propiedades que caracterizan a un Topo (cuya definición se dará en el Capítulo III) y definimos los morfismos de verdad $\cup$, $\cap$, $\Rightarrow$, $\neg$.

Por su parte, en el Capítulo III se estudian algunos Teoremas importantes sobre Topos que necesitaremos en el transcurso de este trabajo; definimos los morfismos de verdad partiendo de la construcción realizada en **Set** y demostramos que (Sub(d), $\leq$) es una latiz acotada. Además, por medio de un contraejemplo mostramos que, no para todo Topo, (Sub(d), $\leq$) es un álgebra de Boole; mas al definir el seudo-complemento obtenemos que, (Sub(d), $\leq$) es un álgebra de Heyting.

A partir de este resultado y utilizando el isomorfismo entre Hom(_, Ω) y Sub(d), junto con la inmersión de Yoneda, se acostumbra probar que Ω -el clasificador de subobjetos de un Topo- es un álgebra de Heyting. Sin embargo en el Capítulo IV, siendo la parte importante de este trabajo, demostraremos directamente, sin tomar en cuenta a Sub(d), que Ω tiene estructura de Algebra de Heyting, considerando la definición basada en diagramas sugeridos por los Teoremas I.1 y I.4. No obstante, al utilizar el isomorfismo mencionado anteriormente y además probando que Hom(d,Ω) es un álgebra de Heyting, podemos concluir que Sub también lo es.

Capítulo I

En este capítulo estudiaremos conceptos y propiedades que permitirán dar la definición de álgebra de Boole y, a partir de ésta, la de álgebra de Heyting. Así mismo demostraremos algunos Teoremas importantes.

Definición. Un *conjunto parcialmente ordenado* es un conjunto P con una relación binaria R tal que para cualesquiera $a, b, c \in P$

i) aRa (Reflexiva).

ii) Si aRb y bRa entonces $a=b$ (Antisimétrica).

iii) Si aRb y bRc entonces aRc (Transitiva).

Definición. Una *Latiz* $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada par de elementos a y b existe

i) La máxima cota inferior $a \wedge b$ de a y b.

ii) La mínima cota superior $a \vee b$ de a y b.

Definición. Sea $(L, \leq)$ una latiz; w es un *elemento máximo* en L si $w \in L$ y $a \leq w$ para todo $a \in L$; w es un *elemento mínimo* en L si $w \in L$ y $w \leq a$ para todo $a \in L$.

Los elementos máximo y mínimo se denotan por 1 y 0 respectivamente. Una latiz es *acotada* si tiene elemento máximo y mínimo.

Definición. Una latiz $(L, \leq)$ es *distributiva* si para todo $a, b, c \in L$ se cumple:

i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Teorema I.1. Si $(L, \leq)$ es una latiz acotada, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

i) $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$.

ii) $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$.

iii) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$; $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

iv) $a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a$.

v) Si $a \leq b$ entonces $a \wedge b = a$ y $a \vee b = b$.

$$vi)\ a\wedge 1 = a \qquad ; \qquad a\vee 1 = 1.$$
$$vii)\ 0\wedge a = 0 \qquad ; \qquad 0\vee a = a.$$

Además si se cumplen i) $\longrightarrow$ vii) definiremos un orden "$\subseteq$" en L de tal forma que (L, $\subseteq$) sea una latiz acotada.

Demostración. Las propiedades i) y ii) son evidentes.

iii) $(a\wedge b)\wedge c \leq a\wedge b \leq a$.

Como $(a\wedge b)\wedge c \leq a\wedge b \leq b$ y $(a\wedge b)\wedge c \leq c$, se sigue que $(a\wedge b)\wedge c \leq b\wedge c$.

Supongamos que $x \leq a$ y $x \leq b\wedge c$, entonces $x \leq a$, $x \leq b$ y $x \leq c$, de donde $x \leq a\wedge b$ y $x \leq c$, luego $x \leq (a\wedge b)\wedge c$. Por lo tanto $(a\wedge b)\wedge c \leq a\wedge(b\wedge c)$. Análogamente se prueba $a\vee(b\vee c) \leq (a\vee b)\vee c$.

iv) $a \leq a$ y $a \leq a\vee b$. Pero a es la máxima cota inferior, por lo tanto $a=a\wedge(a\vee b)$. Como $a \leq a$ y $a\wedge b \leq a$ entonces $a = a\vee(a\wedge b)$.

v) Como $a \leq a$ y $a \leq b$, entonces $a \leq a\wedge b$. Además $a\wedge b \leq a$, de donde $a = a\wedge b$. Análogamente $b = a\vee b$.

vi) Como $a\leq 1$, por v) $a\wedge 1 = a$ y $a\vee 1 = 1$.

vii) Como $0\leq a$, por v) $a\wedge 0 = 0$ y $a\vee 0 = a$.

Definimos el orden "$\subseteq$" como sigue: $a \subseteq b$ si y sólo si $a = a\wedge b$.

1) $a \subseteq a$ pues $a\wedge a = a$.

2) Si $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$ entonces $a = a\wedge b = b$ (por definición).

3) Si $a \subseteq b$ y $b \subseteq c$ entonces $a = a\wedge b$ y $b = b\wedge c$, luego

$$a = a\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge c = a\wedge c, \text{ de donde } a \subseteq c.$$

Por lo tanto (L, $\subseteq$) es un conjunto parcialmente ordenado. Además $a\wedge b$ es la máxima cota inferior de a y b , pues

$$a\wedge b = (a\wedge a)\wedge b = a\wedge(a\wedge b) \quad y \quad a\wedge b = a\wedge(b\wedge b) = (a\wedge b)\wedge b,$$

luego $a\wedge b \subseteq a$ y $a\wedge b \subseteq b$.

Supongamos que $x \in L$ es tal que $x \subseteq a$ y $x \subseteq b$, entonces $x = a\wedge x = b\wedge x$, luego $x\wedge a\wedge b = x$, de donde $x \subseteq a\wedge b$. Por lo tanto $a\wedge b$ es la máxima cota inferior de a y b

Si $a \subseteq b$ entonces $a\vee b = (a\wedge b)\vee b = b$ (por iv)).

$a \sqsubseteq a \vee b$ y $b \sqsubseteq a \vee b$ pues
$a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b$,
$b \vee (a \vee b) = (b \vee a) \vee b = (a \vee b) \vee b = a \vee (b \vee b) = b$.

Supongamos que $x \in L$ es tal que $a \sqsubseteq x$ y $b \sqsubseteq x$, entonces
$a \vee x = (a \wedge x) \vee x = x$ y
$b \vee x = (b \wedge x) \vee x = x$

de donde $x = a \vee x = a \vee (b \vee x) = (a \vee b) \vee x$, luego $x \sqsubseteq a \vee b$. Por lo tanto $a \vee b$ es la mínima cota superior de a y b.

Por vi) y vii):
$a \sqsubseteq 1$ y $0 \sqsubseteq a$ para toda $a \in L$, luego $(L, \sqsubseteq)$ es una latiz acotada. □

Corolario I.1.1. En una latiz acotada $(L, \leq)$ si $b \leq c$ entonces $a \wedge b \leq a \wedge c$ y $a \vee b \leq a \vee c$.

Demostración. En $(L, \leq)$ se cumplen i) $\longrightarrow$ vii) luego
$a \wedge b = (a \wedge a) \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge (a \wedge c) \leq a \wedge c$.
$a \vee b = (a \vee a) \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee (a \vee c)$, así $a \vee b \leq a \vee c$. □

Definición. Sea $(L, \leq)$ una latiz acotada. El *complemento* de cualquier elemento $a \in L$ es un elemento $a' \in L$ tal que $a \wedge a' = 0$ y $a \vee a' = 1$.

Una latiz acotada es *complementada* si todo elemento tiene complemento.

Definición. Un *álgebra de Boole* es una latiz acotada distributiva complementada.

Teorema I.2. En un álgebra de Boole **B** cada elemento a tiene un y sólo un complemento a' tal que:

i) $(a')' = a$,
ii) $a \wedge b = 0$ si y sólo si $b \leq a'$,
iii) $a \leq b$ si y sólo si $b' \leq a'$,
iv) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$,
v) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

Demostración. Sea $a \in$ **B**. Supongamos que existen a' y a'' en **B** tales que
$a \wedge a' = 0$, $a \vee a' = 1$ y $a \wedge a'' = 0$, $a \vee a'' = 1$.

Tenemos
$a' = a' \vee 0 = a' \vee (a \wedge a'') = (a' \vee a) \wedge (a' \vee a'') = 1 \wedge (a' \vee a'') = a' \vee a''$ y
$a'' = a'' \vee 0 = a'' \vee (a \wedge a') = (a'' \vee a) \wedge (a'' \vee a') = 1 \wedge (a'' \vee a') = a'' \vee a'$,

por lo tanto $a' = a''$; es decir, el complemento es único.

i) Como $a \wedge a' = a' \wedge a = 0$ y $a \vee a' = a' \vee a = 1$, $a = a'$, luego $a' = (a')'$.

ii) Supongamos que $a \wedge b = 0$;

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee a') = (b \wedge a) \vee (b \wedge a') = 0 \vee (b \wedge a') = b \wedge a' \leq a'.$$

Ahora, si $b \leq a'$ entonces $a \wedge b = a \wedge (a' \wedge b) = (a \wedge a') \wedge b = 0$.

iii) Si $a \leq b$ entonces $a \wedge c \leq b \wedge c$ para todo $c \in \mathbf{B}$, luego $a \wedge b' \leq b \wedge b'$, de donde $a \wedge b' \leq 0$; luego $0 = a \wedge b'$ y por inciso ii) $b' \leq a'$.

Si $b' \leq a'$ entonces $(b')' \geq (a')'$, luego $a \leq b$.

iv) Como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, por el inciso iii), $a' \leq (a \wedge b)'$ y $b' \leq (a \wedge b)'$. Supongamos que existe $c \in \mathbf{B}$ tal que $a' \leq c$ y $b' \leq c$. Por iii) $c' \leq a$ y $c' \leq b$, de donde $c' \leq a \wedge b$, luego $(a \wedge b)' \leq c$ y por lo tanto $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

v) Es inmediato de i) y iv). □

Para llegar a enunciar y demostrar el Teorema I.3 necesitaremos algunas definiciones.

Sea $(L, \leq)$ una latiz y $A \subseteq L$. Una *cota superior* para A es un elemento $x \in L$ tal que $a \leq x$ para todo $a \in A$; x es el *supremo* de A si x es la menor cota superior. A tiene *elemento máximo* cuando existe un elemento $x \in A$ tal que x es el supremo de A.

Definición. Sea $(L, \leq)$ una latiz con elemento mínimo 0 y $a \in L$. El elemento $b \in L$ es un *seudo-complemento de* a *en* L si b es el elemento máximo del conjunto:

$$C_a = \{x \in L \mid a \wedge x = 0\}.$$

Se denota al seudo-complemento de a por $\neg a$.

Afirmación. Si $\neg a$ es el seudo-complemento de a,

$$a \wedge c = 0 \text{ si y sólo si } c \leq \neg a.$$

Si $a \wedge c = 0$, $c \in C_a$, pero como $\neg a$ es el elemento máximo, $c \leq \neg a$.

Ahora, si $c \leq \neg a$, $a \wedge c \leq a \wedge \neg a = 0$ (Corolario I.1.1), pero 0 es el elemento mínimo, luego $a \wedge c = 0$.

El concepto de seudo-complemento se puede generalizar y se obtiene la siguiente

Definición. Sea $(L,\leq)$ una latiz y $a, b \in L$. El *seudo-complemento de* a *relativo a* b es el elemento máximo del conjunto

$$C_a{}^b = \{x \in L \mid a \wedge x \leq b\}.$$

Se denota al seudo-complemento de a relativo *a* b por $a \Rightarrow b$.

El seudo-complemento de a relativo *a* b, por definición, es tal que $a \wedge c \leq b$ si y sólo si $c \leq a \Rightarrow b$ para toda $c \in L$.

Definición. Una latiz L *relativamente seudo-complementada* es una latiz en la que cada par de elementos $a,b \in L$ tiene un seudo-complemento relativo $a \Rightarrow b$.

Definición. Un *álgebra de Heyting* es una latiz acotada relativamente seudo-complementada.

Teorema I.3. Toda álgebra de Boole es un álgebra de Heyting.

Demostración. Sea **B** un álgebra de Boole y sean a y b elementos de **B**. Definimos $a \Rightarrow b = a' \vee b$.

Si $a \wedge c \leq b$ entonces

$$c \leq (a' \vee a) \wedge c = (a' \wedge c) \vee (a \wedge c) \leq (a' \wedge c) \vee b \leq a' \vee b.$$

Si $c \leq a' \vee b$ entonces

$$a \wedge c \leq a \wedge (a' \vee b) = (a \wedge a') \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) \leq b.$$

Por lo tanto $a' \vee b$ es tal que $a \wedge c \leq b$ si y sólo si $c \leq a' \vee b$, de donde **B** es una latiz relativamente seudo-complementada. □

Se prueba fácilmente que toda álgebra de Heyting es una Latiz distributiva.

Teorema I.4. Una latiz acotada **A** es un álgebra de Heyting si y sólo si para cualesquiera $x, y, z \in$ **A** se cumple:

i) $x \Rightarrow x = 1$

ii) $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$

iii) $y \wedge (x \Rightarrow y) = y$

iv) $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$.

Demostración. Supongamos que **A** es un álgebra de Heyting.

i) $x \wedge 1 \leq x$, luego $1 \leq x \Rightarrow x$, entonces $1 = x \Rightarrow x$.

ii) $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq x$ y $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$ pues $x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow y$. Por lo tanto, $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq x \wedge y$. Como $x \wedge y \leq y$, tenemos y , $x \Rightarrow y$, de donde $x \wedge y \leq x \wedge (x \Rightarrow y)$.

iii) $(x \Rightarrow y) \wedge y \leq y$; además $y = y \wedge y \leq y \wedge (x \Rightarrow y)$, por lo tanto $y = (x \Rightarrow y) \wedge y$.

iv) Si $y \leq z$ entonces $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y \leq z$, luego $x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow z$.
Como $y \wedge z \leq y$ y $y \wedge z \leq z$ entonces

$$x \Rightarrow (y \wedge z) \leq x \Rightarrow y \quad \text{y} \quad x \Rightarrow (y \wedge z) \leq x \Rightarrow z.$$

Sea $w \in \mathbf{A}$ tal que $w \leq x \Rightarrow y$ y $w \leq x \Rightarrow z$. Como

$$x \wedge w \leq x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y \quad \text{y}$$
$$x \wedge w \leq x \wedge (x \Rightarrow z) \leq z,$$

entonces $x \wedge w \leq y \wedge z$ de donde $w \leq x \Rightarrow (y \wedge z)$.

Por lo tanto $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$, con lo que queda probada la condición de necesidad. Para ver que es suficiente, supongamos que **A** es una latiz acotada y que se cumplen 1) $\longrightarrow$ 4). Demostraremos que $x \wedge z \leq y$ si y sólo si $z \leq x \Rightarrow y$.

a) Si $x \wedge z \leq y$, entonces $x \Rightarrow (x \wedge z) \leq x \Rightarrow y$. Pero $x \Rightarrow (x \wedge z) = 1 \wedge (x \Rightarrow z) = x \Rightarrow z$, por lo tanto $z \leq x \Rightarrow z \leq x \Rightarrow y$.

b) Si $z \leq x \Rightarrow y$ entonces $z = z \wedge (x \Rightarrow y)$, de donde

$$z \wedge x = z \wedge (x \Rightarrow y) \wedge x = z \wedge x \wedge y \leq y.$$

Por lo tanto **A** es un álgebra de Heyting. □

El complemento de x en un álgebra de Heyting **A** se define como $\neg x = x \Rightarrow 0$.

Teorema I.5. En un álgebra de Heyting se cumplen las siguientes propiedades

i) $x \wedge \neg x = 0$,
ii) $x \leq \neg\neg x$,
iii) Si $x \leq y$ entonces $\neg y \leq \neg x$,
iv) $\neg x = \neg\neg\neg x$,
v) $(x \Rightarrow y) \leq \neg x \Rightarrow \neg y$,
vi) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$,
vii) $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge y)$.

Demostración.

i) Como 0 es el elemento mínimo $0 \leq x \wedge \neg x$, pero $x \wedge \neg x = x \wedge (x \Rightarrow 0) = x \wedge 0 \leq 0$. Por lo tanto $x \wedge \neg x = 0$.

ii) Por i), $\neg x \wedge x = 0$, luego $(x \Rightarrow 0) \wedge x = 0$, de donde $(x \Rightarrow 0) \wedge x \leq 0$, si y sólo si $x \leq (x \Rightarrow 0) \Rightarrow 0$. Por lo tanto $x \leq \neg\neg x$.

iii) Si $x \leq y$, $\neg y \wedge x \leq \neg y \wedge y = 0$, de donde $x \wedge \neg y \leq 0$, si y sólo si $\neg y \leq x \Rightarrow 0$. Por lo tanto $\neg y \leq \neg x$.

iv) Como $x \leq \neg\neg x$ entonces $\neg x \leq \neg\neg\neg x$. Por iii), si $x \leq \neg\neg x$ entonces $\neg\neg\neg x \leq \neg x$. Por lo tanto $\neg x = \neg\neg\neg x$.

v) $0 = \neg y \wedge y \leq \neg x \wedge y$, pero $y = (x \Rightarrow y) \wedge y$ entonces $\neg y \wedge (x \Rightarrow y) \wedge y \leq \neg x \wedge y$, luego $\neg y \wedge (x \Rightarrow y) \leq \neg x$ si y sólo si $x \Rightarrow y \leq \neg x \Rightarrow \neg y$.

vi) $[0 \wedge (y \Rightarrow 0)] \vee [0 \wedge (x \Rightarrow 0)] \leq 0$ si y sólo si

$[(x \wedge (x \Rightarrow 0)) \wedge (y \Rightarrow 0)] \vee [(y \wedge (y \Rightarrow 0)) \wedge (x \Rightarrow 0)] \leq 0$ de donde

$(x \vee y) \wedge [(x \Rightarrow 0) \wedge (y \Rightarrow 0)] \leq 0$ si y sólo si

$(x \Rightarrow 0) \wedge (y \Rightarrow 0) \leq (x \vee y) \Rightarrow 0$, por lo tanto $\neg x \wedge \neg y \leq \neg(x \vee y)$.

Como $x \leq x \vee y$ y $y \leq x \vee y$ entonces

$\neg(x \vee y) \leq \neg x$ y $\neg(x \vee y) \leq y$, de donde

$\neg(x \vee y) \leq \neg x \wedge \neg y$; así $\neg x \wedge \neg y = \neg(x \vee y)$.

vii) Como $(0 \wedge y) \vee (0 \wedge x) \leq 0$ entonces

$[(x \wedge \neg x) \wedge y] \vee [(y \wedge \neg y) \wedge x] \leq o$, es decir

$(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \leq 0$, si y sólo si

$\neg x \vee \neg y \leq (x \wedge y) \Rightarrow 0$.

Por lo tanto $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge y)$. □

Capítulo II

Se considera la categoría **Set**, cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son las funciones entre éstos, así como algunas de sus propiedades.

1) Objeto terminal.

Sea B un conjunto con un sólo elemento. Para todo objeto A de **Set** existe una única función $f : A \longrightarrow B$. Por lo tanto **Set** tiene objeto terminal.

2) Productos Binarios.

Dados A y B objetos de **Set**, consideramos el producto cartesiano

$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A,\ y \in B\}$, junto con las proyecciones

$P_A : A\times B \longrightarrow A$ y $P_B : A\times B \longrightarrow B$.

Sea C un objeto de **Set**, $f : C \longrightarrow A$ y $g : C \longrightarrow B$ funciones.

Construímos $\langle f, g\rangle : C \longrightarrow A\times B$ tal que $\langle f, g\rangle(x) = \langle f(x), g(x)\rangle$. Claramente el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "\langle f, g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A\times B \arrow[l] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Supongamos que existe $\langle f', g'\rangle : C \longrightarrow A\times B$ tal que $P_A \circ \langle f', g'\rangle = f$ y $P_B \circ \langle f', g'\rangle = g$. Luego $f' = f$ y $g' = g$ de donde $\langle f, g\rangle$ es única. Por lo tanto **Set** tiene productos binarios.

3) Igualadores.

Sean $f, g : A \longrightarrow B$ morfismos de **Set** ;

$E = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ objeto de **Set** ;

$i : E \longrightarrow A$ la inclusión.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ & C \arrow[ul, dotted, "k"] \arrow[u, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Si $x \in E$, entonces

$$(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x) = g(x) = g(i(x)) = g \circ i(x).$$

Sean C un objeto de **Set** y $h : C \longrightarrow A$ un morfismo de **Set** tal que $f \circ h = g \circ h$; como $(f \circ h)(c) = (g \circ h)(c)$ para toda $c \in C$, la función $k : C \longrightarrow E$ dada por $k(c) = h(c)$ es tal que el diagrama anterior conmuta.

Supongamos que existe $k' : C \longrightarrow E$ tal que $i \circ k' = h$, luego, para toda $c \in C$, $h(c) = (i \circ k')(c) = k'(c)$, por lo tanto k es única.

Por **1), 2)** y **3) Set** es una categoría completa.

4) Objeto inicial

Sea $\emptyset$ el conjunto vacío. Como para todo objeto A de **Set** existe una única función $f : \emptyset \longrightarrow A$ **Set** tiene objeto inicial.

5) Coproductos Binarios.

Sean A y B conjuntos. Definamos el coproducto de A y B, denotado por $(A+B, i_A, i_B)$, como

$$A+B = A' \cup B' \text{ donde}$$
$$A' = \{\langle a, 0\rangle \mid a \in A\} = A \times \{0\},$$
$$B' = \{\langle b, 1\rangle \mid b \in B\} = B \times \{1\}$$

es claro que $A' \cap B' = \emptyset$.

Sean $i_A : A \longrightarrow A+B$ y $i_B : B \longrightarrow A+B$ dadas por

$$i_A(a) = \langle a, 0\rangle \ , \ i_B(b) = \langle b, 1\rangle.$$

Sean C un objeto de **Set**, $f : A \longrightarrow C$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones. La función $k : A+B \longrightarrow C$ definida por

$$k(\langle a, 0\rangle) = f(a) \quad y \quad k(\langle b, 1\rangle) = g(b)$$

es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & A+B \arrow[d, dotted, "k"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Veamos que la función k es la única con esta propiedad.

Supongamos que existe $h : A+B \longrightarrow C$ tal que $h \circ i_A = f$ y $h \circ i_B = g$.

Para toda $a \in A$ y $b \in B$ tenemos

$$(h \circ i_A)(a) = h(\langle a, 0 \rangle) = f(a)$$
$$(h \circ i_B)(b) = h(\langle b, 1 \rangle) = g(b)$$

luego, $k = h$.

Por lo tanto **Set** tiene coproductos binarios.

6) Coigualadores.

Sean $f, g : A \longrightarrow B$ morfismos de **Set**, y $S = \{\langle f(a), g(a) \rangle \mid a \in A\} \subseteq B \times B$. Consideramos R una relación de equivalencia en B tal que

i) $S \subseteq R$;

ii) Si T es una relación de equivalencia en B tal que $S \subseteq T$, entonces $R \subseteq T$.

Sea $B/R = \{[b] \mid b \in B\}$ el conjunto de clases de equivalencia bajo S y $f_R : B \longrightarrow B/R$ dada por $f_R(b) = [b]$.

$(B/R, f_R)$ es el coigualador de f y g

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "f_R"] & B/R \end{tikzcd}$$

Sea $a \in A$, entonces

$$(f_R \circ f)(a) = f_R(f(a)) = [f(a)] = [g(a)] = f_R(g(a)) = (f_R \circ g)(a)$$

por lo tanto $f_R \circ f = f_R \circ g$.

Sea C un conjunto y $h : B \longrightarrow C$ una función tal que $h \circ f = h \circ g$.

Definamos $k : B/R \longrightarrow C$ como $k([b]) = h(b)$; k está bien definida, pues si $[b] = [b']$, entonces bRb'. Como h define una relación de equivalencia R' en B dada por $xR'y$ si y sólo si $h(x) = h(y)$ y $R \subset R'$, entonces $k([b]) = h(b) = h(b') = k([b'])$.

Por definición $k \circ f_R = h$, entonces

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "f_R"] \arrow[dr, "h"'] & B/R \arrow[d, dotted, "k"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo.

Por **4)**, **5)** y **6)** **Set** es una categoría cocompleta.

7) Exponenciación.

Dados A y B conjuntos, existe un objeto B^A de **Set** y un morfismo $\epsilon : B^A xA \longrightarrow B$ tal que para todo conjunto C y un morfismo $g : CxA \longrightarrow B$ existe una única $k : C \longrightarrow B^A$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B^A xA \arrow[rr, "\epsilon"] & & B \\ & CxA \arrow[ul, "kx1_A"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $B^A = \{f \mid f : A \longrightarrow B$ es una función de **Set**$\}$ y $\epsilon : B^A xA \longrightarrow B$ dada por $\epsilon(\langle f,x\rangle) = f(x)$.

Definamos $k: C \longrightarrow B^A$ tal que $(k(c))(a) = g(c, a) \in B$, para todo $c \in C$.

Si $(c,a) \in CxA$, entonces

$$\begin{aligned}(\epsilon\circ(kx1_A))(c, a) &= \epsilon(k(c), a)\\ &= (k(c))(a)\\ &= g(c, a),\end{aligned}$$

por lo tanto $\epsilon\circ(kx1_A) = g$.

Supongamos que existe $k' : C \longrightarrow B^A$ tal que $\epsilon\circ(k'x1_A) = g$, entonces para todo $(c, a) \in CxA$

$$\begin{aligned}g(c, a) &= (\epsilon\circ(k'x1_A)(c, a)\\ &= \epsilon(k'(c), a)\\ &= (k'(c))(a),\end{aligned}$$

luego $(k'(c))(a) = (k(c))(a)$.Por lo tanto $k(c) = k'(c)$ para toda $c \in C$; es decir, k es única.

8) Clasificador de subobjetos.

Consideremos el conjunto $2 = \{0,1\}$ y el morfismo $T : 1 \longrightarrow \{0,1\}$ tal que $T(0) = 1$ (*Verdad*).

Demostraremos que dado A subconjunto de D, $i : A \longrightarrow D$, existe una única función $\chi_A: D \longrightarrow 2$ tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "!_A"'] & D \arrow[d, "\chi_A"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & 2
\end{tikzcd}$$

Al morfismo χ_A lo llamaremos el morfismo *característico* de A.
Definamos χ_A como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

El cuadrado anterior conmuta, pues si $x \in A$ tenemos

$$(\chi_A \circ i)(x) = \chi_A(i(x)) = \chi_A(x) = T(0) = (T \circ !_A)(x).$$

Sean $g : B \longrightarrow D$ y $h : B \longrightarrow 1$ tales que $\chi_A \circ g = T \circ h$;

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[rr, "g"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\
& A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "!_A"'] & D \arrow[d, "\chi_A"] \\
& 1 \arrow[r, "T"'] & 2
\end{tikzcd}$$

Si $b \in B$, entonces $(\chi_A \circ g)(b) = (T \circ h)(b) = 1$, de donde $g(b) \in A$.
Definimos $k : B \longrightarrow A$ como $k(b) = g(b)$

$$(i \circ k)(b) = i(k(b)) = k(b) = g(b)$$
$$(!_A \circ k)(b) = !_A(k(b)) = 0 = h(b).$$

Veamos que χ_A es la única con esta propiedad. Supongamos que existe $g : D \longrightarrow 2$ tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "!_A"'] & D \arrow[d, "g"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & 2 \end{tikzcd}$$

Si $d \in A$, entonces $g(d) = (g \circ i) = (T \circ !_A)(d) = 1$.

Si $d \in D-A$, afirmamos que $g(d) = 0$. Supongamos que existe $d \in D-A$ tal que $g(d) = 1$ y consideremos $k : \{d\} \longrightarrow D$ dada por $k(d) = d$ y $h : \{d\} \longrightarrow 1$.

$$\begin{tikzcd} \{d\} \arrow[dr, dotted, "h'"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "!_A"'] & D \arrow[d, "g"] \\ & 1 \arrow[r, "T"'] & 2 \end{tikzcd}$$

Como $(g \circ k)(d) = g(k(d)) = 1 = (T \circ h)(d)$, entonces existe una única $h' : \{d\} \longrightarrow A$ tal que $i \circ h' = k$ y $!_A \circ h' = h$, de donde $(i \circ h')(d) = i(h'(d)) = k(d) = d$, entonces $d \in A$, contradiciendo la hipótesis. Así, x_A es única.

9) El morfismo $\perp : \{0\} \longrightarrow 2$ con $\perp(0) = 0$ (*falso*) es tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & 2 \end{tikzcd}$$

Analicemos los morfismos de verdad en **Set**.

Dadas α y β proposiciones lógicas, les asignamos valores de verdad: "1" si la proposición es verdadera; "0" si es falsa. Así obtenemos el conjunto de valores de verdad $2 = \{0, 1\}$.

Esas proposiciones combinadas con los conectivos lógicos: conjunción "$\wedge$"; disyunción "$\vee$" ; negación "$\sim$" e implicación "$\supset$" dan lugar a nuevas proposiciones lógicas cuyas tablas de verdad exhibimos a continuación:

α	$\sim\alpha$
1	0
0	1

α	β	$\alpha\wedge\beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

α	β	$\alpha\vee\beta$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

α	β	$\alpha\supset\beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Estas tablas determinan los siguientes morfismos de verdad:

a) El morfismo negación $\neg : 2 \longrightarrow 2$.

b) El morfismo conjunción $\cap : 2\times 2 \longrightarrow 2$.

c) El morfismo disyunción $\cup : 2\times 2 \longrightarrow 2$.

d) El morfismo implicación $\Rightarrow : 2\times 2 \longrightarrow 2$.

Todas estos morfismos de verdad tienen codominio **2**, por lo tanto son el morfismo característico de algún subconjunto de su dominio (Propiedad **8)**).

a) Sea $\perp : 1 \longrightarrow 2$. Consideremos $\{x \in 2 \mid \neg(x) = 1\} = \{0\} \subseteq 2$, con lo que el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "\perp"] \arrow[d, "!"'] & 2 \arrow[d, "\neg"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & 2 \end{tikzcd}$$

A $\neg : 2 \longrightarrow 2$ lo llamaremos el morfismo característico de $\perp$.

b) Consideremos $A = \{\langle 1, 1\rangle\} \subseteq 2\times 2$ y $\langle T, T\rangle : 1 \longrightarrow 2\times 2$, entonces $\mathrm{im}\langle T, T\rangle = A$ por lo cual el diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "{\langle T, T\rangle}"] \arrow[d, "!"'] & 2\times 2 \arrow[d, "\cap"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & 2 \end{tikzcd}$$

De donde $\cap : 2\times 2 \longrightarrow 2$ es el morfismo característico de $\langle T, T\rangle$.

c) Sean

$A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$ y $B = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$.

$\langle T_2, 1_2\rangle : 2 \longrightarrow 2\times 2$ tal que

$\langle T_2, 1_2\rangle(0) = \langle T_2(0), 1_2(0)\rangle = \langle 1, 0\rangle$ (con $T_2 = T\circ !_2$)

$\langle T_2, 1_2\rangle(1) = \langle T_2(1), 1_2(1)\rangle = \langle 1, 1\rangle$,

con lo que $\mathrm{im}\langle T_2, 1_2\rangle = A$.

Análogamente sea $\langle 1_2, T_2\rangle : 2 \longrightarrow 2\times 2$ tal que

$\langle 1_2, T_2\rangle(0) = \langle 0, 1\rangle$

$\langle 1_2, T_2\rangle(1) = \langle 1, 0\rangle$,

de donde $\mathrm{im}\langle 1_2, T_2\rangle = B$.

Sea $D = A\cup B$. Consideremos el coproducto

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "{\langle T_2,\, 1_2\rangle}"'] & 2+2 \arrow[d, dotted, "f"] & 2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "{\langle 1_2,\, T_2\rangle}"] \\
& 2\times 2 &
\end{tikzcd}$$

entonces existe una única función $f : 2+2 \longrightarrow 2\times2$ con $f = [\langle T_2, 1_2\rangle, \langle 1_2, T_2\rangle]$. La imagen de f es tal que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{im} f = f[2+2] &= f(\,\mathrm{im}(i_1) \cup \mathrm{im}(i_2)\,) \\
&= f(\mathrm{im}(i_1)) \cup f(\mathrm{im}(i_2)) \\
&= \mathrm{im}(f\cdot i_1) \cup \mathrm{im}(f\cdot i_2) \\
&= \mathrm{im}\langle T_2, 1_2\rangle \cup \mathrm{im}\,\langle 1_2, T_2\rangle \;=\; A\cup B.
\end{aligned}$$

Al morfismo $f : 2+2 \longrightarrow 2\times2$ lo podemos escribir como la composición de un epimorfismo seguido de un monomorfismo obteniendo:

$$\begin{tikzcd}
2+2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "f^*"'] & & 2\times 2 \\
& D \arrow[ur, tail, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

lo cual implica que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!_D"'] & 2\times 2 \arrow[d, "U"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & 2
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Por lo tanto $U : 2\times2 \longrightarrow 2$ es el morfismo característico de la imagen de $[\langle T_2, 1_2\rangle, \langle 1_2, T_2\rangle]$.

d) Consideremos $(\leq) = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

$$= \{\langle x, y\rangle \in 2\times2 \mid x \leq y\}$$

Sabemos que en una Latiz $x \leq y$ si y sólo si $x \wedge y = x$, entonces

$$\leq \; = \{\langle x, y\rangle \mid x \wedge y = x\},$$

de donde $\leq$ es el igualador de $\sqcap : 2\times 2 \longrightarrow 2$ y $\Pi : 2\times 2 \longrightarrow 2$ (Propiedad 3)
Por lo anterior, el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
\leq \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d] & 2\times 2 \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & 2
\end{tikzcd}$$

Entonces $\Rightarrow : 2\times 2 \longrightarrow 2$ es el morfismo característico de la inclusión $i : \leq \;\longrightarrow D$.

Veamos cómo se relacionan los morfismos característicos anteriormente definidos, con las operaciones "$\cup$" ,"$\cap$", "$-$".

Teorema II.1. Si A y B son subconjuntos de D con morfismos característicos $\chi_A : D \longrightarrow 2$ y $\chi_B : D \longrightarrow 2$, entonces

i) $\chi_{-A} = \neg \circ \chi_A$

ii) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \wedge \chi_B = \sqcap \circ \langle \chi_A, \chi_B\rangle$;

iii) $\chi_{A\cup B} = \chi_A \vee \chi_B = \sqcup \circ \langle \chi_A, \chi_B\rangle$.

Demostración. Sea $x \in D$;

i) si $\chi_{-A}(x) = 1$, entonces $x \in -A$. Por lo tanto $\chi_A(x) = 0$, de donde

$$(\neg \circ \chi_A)(x) = \neg(1) = 0$$

Así, para toda $x \in D$, $\chi_{-A}(x) = (\neg \circ \chi_A)(x)$.

ii) Si $\chi_{A\cap B}(x) = 1$, entonces $x \in A\cap B$,

$$\langle \chi_A, \chi_B\rangle(x) = \langle \chi_A(x), \chi_B(x)\rangle = \langle 1, 1\rangle,$$

por lo tanto $(\sqcap \circ \langle \chi_A, \chi_B\rangle)(x) = \sqcap(\langle 1, 1\rangle) = 1$.

Si $\chi_{A\cap B}(x) = 0$, entonces x no pertenece a $A\cap B$, luego existen tres posibilidades:
a) $x \in A\cap -B$; b) $x \in -A\cap B$; c) $x \in -A$ y $x \in -B$.

a) $(\sqcap \circ \langle \chi_A, \chi_B\rangle)(x) = (\sqcap \langle \chi_A(x), \chi_B(x)\rangle) = \sqcap(\langle 1, 0\rangle) = 0$.

b) $(\sqcap \circ \langle \chi_A, \chi_B\rangle)(x) = (\sqcap \langle \chi_A(x), \chi_B(x)\rangle) = \sqcap(\langle 0, 1\rangle) = 0$.

c) $(\sqcap \circ \langle \chi_A, \chi_B\rangle)(x) = (\sqcap \langle \chi_A(x), \chi_B(x)\rangle) = \sqcap(\langle 0, 0\rangle) = 0$.

Por lo tanto para toda $x \in D$, $\chi_{A\cap B}(x) = (\cap \cdot \langle \chi_A, \chi_B \rangle)(x)$.

iii) Si $\chi_{A\cup B}(x) = 1$, entonces $x \in A\cup B$.

Si $x \in A$, entonces

$$(\cup \cdot \langle \chi_A, \chi_B \rangle)(x) = \cup(\langle \chi_A(x), \chi_B(x) \rangle) = \cup(\langle 1, \chi_B(x) \rangle) = 1.$$

Si $x \in B$, entonces

$$(\cup \cdot \langle \chi_A, \chi_B \rangle)(x) = \cup(\langle \chi_A(x), \chi_B(x) \rangle) = \cup(\langle \chi_A(x), 1 \rangle) = 1.$$

Supongamos que $\chi_{A\cup B}(x) = 0$, entonces x no es elemento de $A\cup B$, luego

$$(\cup \cdot \langle \chi_A, \chi_B \rangle)(x) = \cup(\langle \chi_A(x), \chi_B(x) \rangle) = \cup(\langle 0, 0 \rangle) = 0.$$

Por lo tanto para toda $x \in D$, $\chi_{A\cup B}(x) = (\cup \cdot \langle \chi_A, \chi_B \rangle)(x)$. □

Sea D un conjunto. Consideremos el conjunto $\wp(D)$, formado por todos los subconjuntos de D.

Teorema II.2. $(\wp(D), \subseteq)$ es un álgebra de Boole.

Demostración.

a) Claramente $(\wp(D), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

b) Sean A y $B \in \wp(D)$. Consideremos:

$A\cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$;

$A\cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$;

$-A = \{x \mid x \in D \text{ y } x \text{ no es elemento de } A\}$.

Es inmediato que $A\cap B$ es la máxima cota inferior y que $A\cup B$ es la mínima cota superior de $(\wp(D), \subseteq)$. Por lo tanto es una latiz.

c) Además esta latiz está acotada ya que:

$\emptyset$ es el elemento mínimo y

D es el elemento máximo.

d) Dado $A \in \wp(D)$ tenemos que

$A\cup -A = \{x \in D \mid x \in A \text{ ó } x \in -A\} = D$,

$A\cap -A = \{x \in D \mid x \in A \text{ y } x \in -A\} = \emptyset$.

Por a), b), c) y d) $(\wp(D), \subseteq)$ es un álgebra de Boole. □

Capítulo III

En este capítulo definimos el concepto de Topo y vemos algunas de sus propiedades, para después generalizar las definiciones de los morfismos de verdad, estudiados en el Capítulo II, a un Topo arbitrario. Definimos, así mismo, Sub(d) junto con un orden parcial "$\leq$" mostrando que no en todo Topo aquél es un álgebra de Boole –al carecer de una de las propiedades del complemento– mas, introduciendo el operador de Heyting, observamos que (Sub(d),$\leq$) es un álgebra de Heyting.

§1. Definición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría con objeto terminal y productos binarios. $\mathbf{C}$ tiene exponenciación si dados A, B objetos de $\mathbf{C}$ existe un objeto B^A de $\mathbf{C}$ y un morfismo $\epsilon_{A,B} : B^A \times A \longrightarrow B$ tales que:

Si $f : C\times A \longrightarrow B$ es un morfismo de $\mathbf{C}$ entonces existe un único $f^* : C \longrightarrow B^A$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
B^A\times A \arrow[rr, "\epsilon_{A,B}"] & & B \\
& C\times A \arrow[ul, dotted, "f^*\times 1_A"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

A f^* la llamaremos *el adjunto exponencial de f.*

Afirmación. Si $\mathbf{C}$ tiene exponenciación existe una biyección

$$\Phi : \mathbf{C}(C\times A,\ B) \longrightarrow \mathbf{C}(C,\ B^A).$$

Sea $f : C\times A \longrightarrow B$, entonces $\Phi(f) = f^*$ con $f^* : C \longrightarrow B^A$ el adjunto exponencial.

Sean $f^* : C \longrightarrow b^A$, $g^* : C \longrightarrow B^A$ tales que $f^* = g^*$, entonces

$$\epsilon_{A,B} \cdot (g^*\times 1_A) = \epsilon_{A,B} \cdot (f^*\times 1_A) \text{ de donde } f = g.$$

Por lo tanto Φ es inyectivo.

Sea $h^* : C \longrightarrow B^A$. Definimos $g : C\times A \longrightarrow B$ como $g = \epsilon_{A,B} \cdot (h^*\times 1_A)$. Por la unicidad de h^*, $\Phi(g) = h^*$. Luego Φ es suprayectiva.

Definición. Una categoría finitamente completa con exponenciación, se llama *cartesiana cerrada.*

Teorema III.1. Sea **C** una categoría cartesiana cerrada con objeto inicial 0; entonces

i) Si a es un objeto de **C**, entonces $0 \cong 0xa$;

ii) si existe $f : a \longrightarrow 0$, entonces $a \cong 0$;

iii) si $0 \cong 1$, entonces **C** es una categoría degenerada;

iv) todo morfismo $f : 0 \longrightarrow a$ es monomorfismo;

v) $a^1 \cong a$, $a^0 \cong 1$, $1^a \cong 1$.

Demostración.

i) $\mathbf{C}(0, b^a)$ tiene un sólo elemento pero $\mathbf{C}(0, b^a) \cong \mathbf{C}(0xa, b)$, entonces para b un objeto de **C**, $\mathbf{C}(0xa, b)$ tiene un sólo elemento, de donde 0xa es objeto inicial en **C**. Por lo tanto $0 \cong 0xa$.

ii) Dado $f : a \longrightarrow 0$, probaremos que $a \cong 0xa$; luego por i) $a \cong 0$.
Por la propiedad universal del producto, $\pi_a \cdot \langle f, 1_a \rangle = 1_a$ pero

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "{\langle f, 1_a \rangle}"] \arrow[dr, "1_a"] & \\
0 & 0xa \arrow[l, "\pi_0"] \arrow[r, "\pi_a"'] & a
\end{tikzcd}$$

$\langle f, 1_a \rangle \cdot \pi_a : 0xa \longrightarrow 0xa$ y 0xa es objeto inicial, entonces $\langle f, 1_a \rangle \cdot \pi_a = 1_{0xa}$ luego $0xa \cong a$.

iii) Para todo objeto a de **C** existe $f : a \longrightarrow 1$. Por hipótesis, $0 \cong 1$, luego existe $g : a \longrightarrow 0$. Entonces por ii) $a \cong 0$, de donde la categoría **C** es degenerada.

iv) Sea $f : 0 \longrightarrow a$. Supongamos que $f \cdot g = f \cdot h$, con $g, h : x \longrightarrow 0$. Por ii) $x \cong 0$ luego $h = g$ y por lo tanto f es monomorfismo.

v) $a^0 \cong 1$:

$\mathbf{C}(b, a^0) \cong \mathbf{C}(bx0, a)$, pero $bx0 \cong 0$, entonces $\mathbf{C}(bx0, a)$ tiene un sólo elemento, luego para todo objeto $b \in \mathbf{C}$, $\mathbf{C}(b, a^0)$ tiene un sólo elemento; es decir, a^0 es terminal.

$1^0 \cong 1$:

$\mathbf{C}(b \times a, 1)$ tiene un sólo elemento, pero $\mathbf{C}(b, 1^a) \cong \mathbf{C}(b \times a, 1)$, entonces para todo objeto $b \in \mathbf{C}$, $\mathbf{C}(b, 1^a)$ tiene un sólo elemento; es decir, 1^a es objeto terminal en $\mathbf{C}$.

$1^a \cong 1$:

Sea $\pi : a \times 1 \longrightarrow a$ la primera proyección. Su adjunto exponencial $\pi^* : a \longrightarrow a^1$ es tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
a^1 \times 1 \arrow[rr, "\epsilon_{a,1}"] & & a \\
& a \times 1 \arrow[ul, dotted, "\pi^* \times 1"] \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto, existe $\langle 1_{a^1}, !_{a^1} \rangle : a^1 \longrightarrow a^1 \times 1$, que al componerla con $\epsilon_{a,1}$ obtenemos $\epsilon_{a,1}\langle 1_{a^1}, !_{a^1} \rangle : a^1 \longrightarrow a$,

$$\begin{aligned}
(\epsilon_{a,1}\langle 1_{a^1}, !_{a^1} \rangle) \circ \pi^* &= \epsilon_{a,1} \langle \pi^*, !_{a^1} \pi^* \rangle \\
&= \epsilon_{a,1} \langle \pi^*, !_a \rangle \\
&= \epsilon_{a,1} \langle \pi^* 1_a, !_a \rangle \\
&= \epsilon_{a,1} (\langle \pi^*(\pi\langle 1_a, !_a \rangle), \pi'\langle 1_a, !_a \rangle) \\
&= \epsilon_{a,1} (\langle \pi^* \circ \pi, \pi' \rangle \langle 1_a, !_a \rangle) \\
&= \epsilon_{a,1} ((\pi^* \times 1_1) \circ \langle \pi, \pi' \rangle \langle 1_a, !_a \rangle) \\
&= \epsilon_{a,1} (\pi^* \times 1_1) \circ (\langle \pi, \pi' \rangle \langle 1_a, !_a \rangle) \\
&= \pi \circ \langle 1_a, !_a \rangle \\
&= 1_a .
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\epsilon_{a,1}\langle 1_a, !_a \rangle \circ \pi^* = 1_a$.

Para demostrar que $\pi^* \circ (\epsilon_{a,1}\langle 1_{a^1}, !_{a^1} \rangle) = 1_{a^1}$ necesitaremos los siguientes resultados:

1) Si $k : C \longrightarrow A^B$, entonces $k = (\epsilon_{A,B}\langle k \circ \pi_{C,B}, \pi'_{C,B} \rangle)^*$.

Por la universalidad de la exponenciación el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
A^B \times B \arrow[rr, "\epsilon_{A,B}"] & & A \\
& C \times B \arrow[ul, dotted, "(\epsilon_{A,B}\langle k\circ\pi_{C,B},\pi'_{C,B}\rangle)^{*} \times 1_B"] \arrow[ur, swap, "\epsilon_{A,B}\langle k\circ\pi_{C,B},\pi'_{C,B}\rangle"] &
\end{tikzcd}
$$

Pero k es tal que:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{A,B}\cdot(k\times 1_B) &= \epsilon_{A,B}\langle k\pi_{C,B},\ 1_B\pi'_{C,B}\rangle \\
&= \epsilon_{A,A}\langle k\pi_{C,B},\ \pi'_{C,B}\rangle,
\end{aligned}
$$

luego, por unicidad, $k = (\epsilon_{A,B}\langle k\cdot\pi_{C,B},\ \pi'_{C,B}\rangle)^{*}$.

2) Si $k : D \longrightarrow A$ y $h : A\times B \longrightarrow C$, entonces $h^{*}\cdot k = (h\langle k\cdot\pi_{D,B},\pi'_{D,B}\rangle)^{*}$.

Dada $h\langle k\cdot\pi_{D,B},\pi'_{D,B}\rangle : D\times B \longrightarrow C$ existe su adjunto exponencial, tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
C^B \times B \arrow[rr, "\epsilon_{C,B}"] & & C \\
& D \times B \arrow[ul, dotted, "(h\langle k\circ\pi_{D,B},\pi'_{D,B}\rangle)^{*} \times 1_B"] \arrow[ur, swap, "h\circ\langle k\circ\pi_{D,B},\pi'_{D,B}\rangle"] &
\end{tikzcd}
\qquad \text{diag. B}
$$

conmuta.

El morfismo $h^{*}:A \longrightarrow C^B$, es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
C^B \times B \arrow[rr, "\epsilon_{C,B}"] & & C \\
& A \times B \arrow[ul, dotted, "h^{*} \times 1_B"] \arrow[ur, swap, "h"] &
\end{tikzcd}
$$

pero $h^{*}\cdot k : D \longrightarrow C^B$ es tal que

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{B,C}\cdot((h^{*}\cdot k)\times 1_B) &= \epsilon_{B,C}\langle (h^{*}\cdot k)\pi_{D,B},\ 1_B\pi'_{D,B}\rangle \\
&= \epsilon_{B,C}\cdot(h^{*}\times 1_B)\cdot\langle k\pi_{D,B},\ \pi'_{D,B}\rangle \\
&= h\cdot\langle k\pi_{D,B},\ \pi'_{D,B}\rangle.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(h^{*}\cdot k)\times 1_B$ también hace que el diagrama (B) sea conmutativo, luego por unicidad $h^{*}\cdot k = (h\langle k\cdot\pi_{D,B},\pi'_{D,B}\rangle)^{*}$.

Regresando a la demostración, tenemos

$$
\begin{aligned}
\pi^{*}\cdot\epsilon_{a,1}\langle 1_{a^1}, !_{a^1}\rangle &= (\pi\langle\epsilon_{a,1}\langle 1_{a^1}, !_{a^1}\rangle\pi_{a^1,1}, \pi'_{a^1,1}\rangle)^{*}\\
&= (\epsilon_{a,1}\langle 1_{a^1}, !_{a^1}\rangle\, \pi_{a^1,1})^{*}\\
&= (\epsilon_{a,1}\langle 1_{a^1}\pi_{a^1,1}, !_{a^1,1}\rangle)^{*}\\
&= \epsilon_{a,1}\langle 1_{a^1}\pi_{a^1,1}, \pi'_{a^1,1}\rangle)^{*}\\
&= 1_{a^1} \text{ (por inciso a)).}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\pi^{*} : a \longrightarrow a^1$ es un isomorfismo luego $a \cong a^1$. □

Sea d un objeto de **C**. Consideramos la clase de monomorfismos de **C** con codominio d.

Dados $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$, decimos que $f \leq g$ si y sólo si existe $h : a \longrightarrow b$ un **C**-morfismo tal que

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, tail, "g"] & \\
 & d \\
a \arrow[uu, dotted, "h"] \arrow[ur, tail, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

conmuta; h es única y es un monomorfismo.

Esta relación nos define un preorden

Reflexiva; $f \leq f$ pues el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, tail, "f"] & \\
 & d \\
a \arrow[uu, dotted, "1_a"] \arrow[ur, tail, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

Transitiva; Si $f \leq g$ y $g \leq h$, entonces

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, dotted, "f_1"'] \arrow[dr, "f"] & \\
b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, dotted, "g_1"'] & d \\
c \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

$f = g \circ f_1 = h \circ g_1 \circ f_1$ de donde $f \leq h$.

Esta relación no es antisimétrica pues si $f \leq g$ y $g \leq f$, entonces existe $h : a \longrightarrow b$, $k : b \longrightarrow a$ tales que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dd, shift right, "k"'] \arrow[dr, "f"] & \\
& d \\
b \arrow[uu, shift right, "h"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

conmuta, pero $f \circ k \circ h = g \circ h = f$, $g \circ h \circ k = f \circ k = g$, entonces $k \circ h = 1_a$ y $h \circ k = 1_b$. Por lo tanto h es un isomorfismo; luego f y g tienen dominios isomorfos, pero esto no implica que $f = g$.

Definamos la siguiente relación : $f \simeq g$ si y sólo si $f \leq g$ y $g \leq f$. Esta es una relación de equivalencia:

i) Reflexiva; $f \simeq f$ pues $f \leq f$ y $f \leq f$.

ii) Simétrica; Si $f \simeq g$, entonces $f \leq g$ y $g \leq f$ de donde $g \simeq f$.

iii) Transitiva; Si $f \simeq g$ y $g \simeq h$, entonces

$$f \leq g \quad y \quad g \leq f$$
$$g \leq h \quad y \quad h \leq g.$$

Luego $f \leq h$ y $h \leq f$. Por lo tanto $f \simeq g$.

Formemos las clases de equivalencia

$$[f] = \{ g \mid f \simeq g \}.$$

Sea $\mathrm{Sub}(d) = \{ [f] \mid f$ es un monomorfismo con codominio $d \}$. A los elementos de esta clase los llamaremos *"subobjetos de d"*.

Teorema III.2. El preorden "$\leq$" induce un orden parcial "$\sqsubseteq$" en Sub(d).

Demostración. Sean $[f]$ y $[g] \in Sub(d)$. Definimos $[f] \subseteq [g]$ si y sólo si $f \leq g$. Veamos que la relación no depende de los representantes.

Supongamos que $[f] = [f']$ y $[g] = [g']$, entonces

$$f \leq f', f' \leq f \quad y \quad g \leq g', g' \leq g.$$

Si $[f] \subseteq [g]$ entonces $f \leq g$ de donde $f' \leq g \leq g'$. Por lo tanto $[f'] \subseteq [g']$.

La reflexividad y la transitividad se heredan.

Antisimetría: Supongamos que $[f] \subseteq [g]$ y $[g] \subseteq [f]$, entonces $f \leq g$ y $g \leq f$, así $f \simeq g$ y $[f] = [g]$.

Por lo tanto Sub(d) es un conjunto parcialmente ordenado. □

Por abuso de lenguaje y por facilidad de notación, cuando escribamos "f subobjeto de d" y "$f \leq g$" estaremos pensando en $[f]$ y $[f] \subseteq [g]$ respectivamente.

Teorema III.3. En **Set** $\mathcal{P}(D) \cong Sub(D)$.

Demostración. Sea $\delta : Sub(D) \longrightarrow \mathcal{P}(D)$ dada por $\delta([f]) = \operatorname{im} f$ donde $[f] \in Sub(D)$ y $\operatorname{im} f \in \mathcal{P}(D)$.

i) δ está bien definida:

Supongamos que $f \leq g$, entonces existe h tal que $f = g \circ h$ y $g = f \circ h^{-1}$.

Sea $y \in \delta[f]$. Para alguna $x \in \operatorname{dom} f$, $y = f(x)$, entonces

$$y = (g \circ h)(x) = g(h(x)).$$

Por lo tanto $y \in \operatorname{im} g = \delta[g]$.

Sea $z \in \delta[g]$, entonces para alguna $w \in \operatorname{dom} g$, $z = g(w)$, luego

$$z = (f \circ h^{-1})(w) = f(h^{-1}(w)),$$

de donde $z \in \operatorname{im} f = \delta[f]$. Por lo tanto $\delta[f] = \delta[g]$.

ii) δ es inyectiva:

Sean $f : A \longrightarrow D$, $g : B \longrightarrow D$ tales que $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$.

Si $a \in A$, entonces $f(a) \in \operatorname{im} f = \operatorname{im} g$, luego existe una única $b \in B$ tal que $g(b) = f(a)$. Definimos $h : A \longrightarrow B$ como $h(a) = b$ con b única tal que $g(b) = f(a)$. Tenemos que $f(a) = (g \circ h)(a) = g(h(a)) = g(b)$, de donde $f = g \circ h$. Por lo tanto $f \leq g$.

Ahora, si $b \in B$, entonces $g(b) \in \operatorname{im} g = \operatorname{im} f$, luego existe una única $a \in A$ tal que $g(b) = f(a)$. Definimos $k : B \longrightarrow A$ como $k(b) = a$ con a única tal que $g(b) = f(a)$. Por lo tanto $g \leq f$, de donde $f \simeq g$.

iii) Sea $D' \in \mathcal{P}(D)$, la inclusión $i : D' \longrightarrow D$ es tal que $\delta(i) = D'$. Por lo tanto δ es suprayectiva. □

Definición . Sea **C** una categoria finitamente completa. Se dice que **C** tiene un *clasificador de subobjetos* cuando existe Ω un objeto de **C** y un morfismo $T : 1 \longrightarrow \Omega$ tales que

Dado un monomorfismo $f : a \rightarrowtail d$ existe un único morfismo $\chi_f : d \longrightarrow \Omega$ –ambos de **C**– tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado (Ω–axioma)

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

A χ_f lo llamaremos el *morfismo característico* de f.

Teorema III.4. El clasificador de subobjetos es único excepto por isomorfismo.
Demostración. Sean (Ω, T) y (Ω', T') clasificadores de subobjetos . Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "T"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\chi'_T"] \\ 1 \arrow[r, tail, "T'"'] \arrow[d] & \Omega' \arrow[d, "\chi_{T'}"] \\ 1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

donde χ'_T es el morfismo característico de T respecto al clasificador T'.

Los dos cuadrados son productos fibrados, entonces el rectángulo también lo es (Teorema A.1, Apéndice).

El morfismo $1_\Omega : \Omega \longrightarrow \Omega$ también hace que el rectángulo sea un producto fibrado, pues el cuadrado interior

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dotted, "g"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& 1 \arrow[r, "T"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "1_\Omega"] \\
& 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

claramente conmuta.

Si consideramos $f : x \longrightarrow \Omega$, $g : x \longrightarrow 1$ tales que $1_\Omega \cdot f = T \cdot g$, entonces $g : x \longrightarrow 1$ es tal que $T \cdot h = T \cdot g = f$. Por la unicidad de la función característica, $\chi_{T'} \cdot \chi'_T = 1_\Omega$.

Análogamente el rectángulo del siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "T'"] \arrow[d] & \Omega' \arrow[d, "\chi_{T'}"] \\
1 \arrow[r, tail, "T"'] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\chi'_T"] \\
1 \arrow[r, tail, "T'"'] & \Omega'
\end{tikzcd}
$$

Pero $1_{\Omega'} : \Omega' \longrightarrow \Omega'$ hace de este rectángulo un producto fibrado, luego por el Ω-axioma, $\chi_{T'} \cdot \chi'_T = 1_{\Omega'}$. Por lo tanto $\Omega \cong \Omega'$. $\square$

Teorema III.5. Sean $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$, entonces $f \simeq g$ si y sólo si $\chi_f = \chi_g$.

Demostración. Supongamos que $f \simeq g$, entonces existe un isomorfismo $k : b \longrightarrow a$ (con inversa $k' : a \longrightarrow b$), tal que $g = f \circ k$.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[dr, dotted, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "!_x"'] & & \\
& b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[dr, dotted, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "!_x"'] & & \\
& a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

diag. 3.5.a　　　　　　　　　　　　diag. 3.5.b

Como $\chi_f \circ g = \chi_f \circ f \circ k = T \circ !_a \circ k = T \circ !_b$, entonces el cuadrado interior del diagrama 3.5.a conmuta.

Sean $h : x \longrightarrow d$ y $!_x : x \longrightarrow 1$ tales que $\chi_f \circ h = T \circ !_x$. Como el cuadrado del diagrama 3.5.b conmuta existe $\alpha : x \longrightarrow a$ única tal que $f \circ \alpha = h$ y $!_a \circ \alpha = !_x$.

Sea $\beta : x \longrightarrow b$ dada por $\beta = k' \circ \alpha$, entonces

$$g \circ \beta = g \circ k' \circ \alpha = f \circ \alpha = h \qquad \text{y}$$

$$!_b \circ \beta = \ !_b \circ k' \circ \alpha = \ !_a \circ \alpha = \ !_x.$$

Por lo tanto el diagrama 3.5.a es un producto fibrado y, por la unicidad en el Ω-axioma, $\chi_f = \chi_g$.

Supongamos que $\chi_f = \chi_g$,

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[drr, bend left, tail, "g"] \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[ddr, bend right, "!_b"'] & & \\
& a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces $\chi_f \cdot g = \chi_g \cdot g = T \cdot !_b$, pero el cuadrado es un producto fibrado, luego existe una única $k : b \longrightarrow a$ tal que $f \cdot k = g$. Por lo tanto $g \leq f$.

En el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rrd, "f"] \arrow[rd, dotted, "k'"] \arrow[rdd, "!_a"'] & & \\
& b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_g"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\chi_g \cdot f = \chi_f \cdot f = T \cdot !_a$, luego existe una única $k' : a \longrightarrow b$ tal que $g \cdot k' = f$, de donde $f \leq g$ y por lo tanto $f \simeq g$. □

A continuación definiremos qué es un Topo y daremos algunos Teoremas que necesitaremos en el transcurso de este Capítulo.

Definición . Un *Topo* es una categoría **E** tal que:

1) **E** es finitamente completa,
2) **E** tiene exponenciación,
3) **E** tiene clasificador de subobjetos.

En el capítulo anterior se vió que **Set** cumple con todas estas propiedades, por lo tanto **Set** es un Topo.

Teorema III.6. Sea **E** un Topo; si $f : a \longrightarrow b$ es un monomorfismo de **E**, entonces f es el igualador de χ_f y $T_b = T \cdot !_b$.

Demostración. Consideremos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] & b \arrow[r, shift left, "\chi_f"] \arrow[r, shift right, "T_b"'] & \Omega \\ & c \arrow[ul, dotted, "h"] \arrow[u, "g"'] & \end{tikzcd}$$

diag. 3.6.a

$$\begin{tikzcd} c \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "!_c"'] & & \\ & a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & b \arrow[d, "\chi_f"] \\ & 1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

diag. 3.6.b

Como el cuadrado interior de 3.6.b conmuta, entonces

$$T_b \cdot f = T \cdot !_b \cdot f = T \cdot !_a = \chi_f \cdot f.$$

Sea $g : c \longrightarrow b$ tal que $\chi_f \cdot g = T_b \cdot g$, entonces $\chi_f \cdot g = T_b \cdot g = T \cdot !_b \cdot g = T_c$, pero como 3.6.b es un producto fibrado existe $h : c \longrightarrow a$ única tal que $f \cdot h = g$. □

Corolario III.6.1 . En un topo E todo bimorfismo es un isomorfismo.

Demostración. Sea $f : a \rightarrowtail d$ un bimorfismo de E.

Como f es monomorfismo, existen $g, h : b \longrightarrow c$ tales que f es su igualador, entonces $g \cdot f = h \cdot f$,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \\ & b \arrow[ul, dotted, "k"] \arrow[u, "1_b"'] & \end{tikzcd}$$

pero f es epimorfismo luego $g = h$.

Sea $1_b : b \longrightarrow b$. Claramente $g \cdot 1_b = h \cdot 1_b$, así que existe $k : b \longrightarrow a$ única tal que $f \cdot k = 1_b$. Ademas $k \cdot f = 1_a$ pues $f \cdot k \cdot f = f \cdot 1_a$ y f es monomorfismo.

Por lo tanto f es un isomorfismo. □

Teorema III.7. En un Topo E todo morfismo se puede factorizar como un epimorfismo seguido de un monomorfismo.

Demostración. Sea $f : a \longrightarrow b$ un morfismo de E. Consideramos el coproducto fibrado de f consigo mismo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "q"] \\
b \arrow[r, tail, "p"'] & c
\end{tikzcd}$$

Sea $\mathrm{Im}f : f(a) \longrightarrow b$ el igualador de p y q.

$$\begin{tikzcd}
f(a) \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}f"] & b \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[r, shift right, "p"'] & c \\
& a \arrow[ul, dotted, "f^*"] \arrow[u, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $q \circ f = p \circ f$, existe $f^* : a \longrightarrow f(a)$ tal que $\mathrm{Im}f \circ f^* = f$. Si demostramos que f^* es un epimorfismo, entonces $f = \mathrm{Im}f \circ f^*$ sería la epi-mono factorización de f.

Para demostrar que f^* es epimorfismo necesitamos el siguiente resultado.

Teorema III.8. $\mathrm{Im}f : f(a) \rightarrowtail b$ es el menor subobjeto de b que factoriza a f; es decir , si

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "u"'] & & b \\
& c \arrow[ur, tail, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde v es un monomorfismo, entonces existe $k : f(a) \longrightarrow c$ única tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
f(a) \arrow[dr, tail, "\mathrm{Im}f"] \arrow[dd, dotted, "k"'] & \\
& b \\
c \arrow[ur, tail, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $v : c \longrightarrow b$ el igualador de $g, h : b \longrightarrow d$, entonces $g \cdot v = h \cdot v$. Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
f(a) \arrow[r, tail, "\mathrm{Im} f"] & b \arrow[r, "p"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & c \arrow[dr, dotted, "s"] & \\
 & & & d
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado es un coproducto fibrado. Como

$$h \cdot f = h \cdot v \cdot u = g \cdot v \cdot u = g \cdot f,$$

existe $s : c \longrightarrow d$ única tal que $s \cdot p = g$ y $s \cdot q = h$, luego

$$\begin{aligned} g \cdot \mathrm{Im} f &= s \cdot p \cdot \mathrm{Im} f \\ &= s \cdot q \cdot \mathrm{Im} f \quad \text{(pues Imf es el igualador de p y q)} \\ &= h \cdot \mathrm{Im} f, \end{aligned}$$

pero v es el igualador de $g, h : b \longrightarrow d$,

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "v"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & d \\
f(a) \arrow[u, dotted, "k"] \arrow[ur, "\mathrm{Im} f"'] & &
\end{tikzcd}$$

luego existe $k : f(a) \longrightarrow c$ única tal que $v \cdot k = \mathrm{Im} f$. Por lo tanto $\mathrm{Im} f \leq v$. □

Regresando al Teorema III.7 tenemos que demostrar que f^* es un epimorfismo.

Sean $\alpha : f(a) \longrightarrow w$, $\beta : f(a) \longrightarrow w$ tales que $\alpha \cdot f^* = \beta \cdot f^*$. Sea (e, j) el igualador de α y de β. Existe una única $f' : a \longrightarrow e$ tal que $j \cdot f' = f^*$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^*"'] \arrow[dd, dotted, "f'"'] & & b \\
 & f(a) \arrow[ur, "\mathrm{Im} f"] \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & w \\
e \arrow[ur, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

$Imf \cdot j$ es un monomorfismo que factoriza a f, luego por el Teorema III.8 $Imf \leq Imf \cdot j$; además $Imf \cdot j \leq Imf$. Por lo tanto j es un isomorfismo, pero j es tal que $j \cdot \alpha = j \cdot \beta$, de donde $\alpha = \beta$ y f^* es un epimorfismo. □

Teorema III.9. En un Topo **E** la epi-mono factorización es única salvo isomorfismo.

Demostración. Sean $f = Imf \cdot f^*$ y $f = v \cdot u$ dos epi-mono factorizaciones de f.

$$
\begin{tikzcd}
 & f(a) \arrow[dr, tail, "Imf"] \arrow[dd, dotted, "k"] & \\
a \arrow[ur, two heads, "f^*"] \arrow[dr, two heads, "u"'] & & b \\
 & c \arrow[ur, tail, "v"'] &
\end{tikzcd}
$$

Por el Teorema III.8 existe $k : f(a) \longrightarrow c$ única tal que $v \cdot k = Imf$, de donde $k \cdot f^* = u$. Como u es epimorfismo, k es lo es. Como Imf es monomorfismo, k lo es. Por lo tanto por el Corolario III.6.1, k es un isomorfismo.

Teorema III.10. En un Topo E si

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & b \arrow[d, "v"] \\
c \arrow[r, "g"'] & d
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado, entonces existe un morfismo $h : f(a) \longrightarrow g(c)$ tal que los cuadrados

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "u"'] & f(a) \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}f"] \arrow[d, "h"] & b \arrow[d, "v"] \\
c \arrow[r, "g^*"'] & g(c) \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}g"'] & d
\end{tikzcd}
$$

diag. 3.10.a

son productos fibrados.

Demostración. Sea $\mathrm{Im}g \circ g^*$ la epi-mono factorización de g. Consideremos el producto fibrado de v y Img

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "h'"'] & b \arrow[d, "v"] \\
g(c) \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}g"'] & d
\end{tikzcd}
$$

Por hipótesis $v \circ f = g \circ u = \mathrm{Im}g \circ g^* \circ u$, entonces existe $f' : a \longrightarrow e$ única tal que $i \circ f' = f$ y $h' \circ f' = g^* \circ u$.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dotted, "f'"] \arrow[d, "u"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & e \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "h'"] & b \arrow[d, "v"] \\
c \arrow[r, two heads, "g^*"'] & g(c) \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}g"'] & d
\end{tikzcd}
$$

diag. 3.10.b

Como el cuadrado externo y el cuadrado interno derecho son productos fibrados, entonces el siguiente diagrama también lo es

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, two heads, "f'"] \arrow[d, "u"'] & e \arrow[d, "h'"] \\
c \arrow[r, two heads, "g^*"'] & g(c)
\end{tikzcd}$$

Luego por Teorema A.1 (Apéndice) f' es un epimorfismo, de donde i∘f es una epi-mono factorización de f.

Por el Teorema III.9 existe $k : f(a) \longrightarrow e$ única tal que $i \circ k = \mathrm{Im}f$ (k isomorfismo).

Sea $h = h' \circ k : f(a) \longrightarrow g(c)$. Demostraremos que el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
f(a) \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}f"] \arrow[d, "h"'] & b \arrow[d, "v"] \\
g(c) \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}g"'] & d
\end{tikzcd}$$

diag. 3.10.c

Conmuta pues $v \circ \mathrm{Im}f = v \circ i \circ k = \mathrm{Im}g \circ h' \circ k = \mathrm{Im}g \circ h$.

Sean $\alpha : x \longrightarrow b$ y $\beta : x \longrightarrow g(c)$ tales que $v \circ \alpha = \mathrm{Im}g \circ \beta$. Pero el cuadrado derecho de 3.10.b es un producto fibrado, luego existe $\delta : x \longrightarrow e$ única tal que $i \circ \delta = \alpha$ y $h' \circ \delta = \beta$.

Sea $j = k^{-1} \circ \delta : x \longrightarrow f(a)$ (k isomorfismo).

$$\mathrm{Im}f \circ j = \mathrm{Im}f \circ (k^{-1} \circ \delta) = i \circ \delta = \alpha$$

$$h \circ j = h' \circ k \circ j = h' \circ k \circ k^{-1} \circ \delta = h' \circ \delta = \beta.$$

Por lo tanto el diagrama 3.10.c es un producto fibrado, de donde los cuadrados de 3.10.a también lo son. □

§ 2. En el capítulo II se definieron morfismos de verdad utilizando el clasificador de subobjetos de **Set**, el conjunto $2 = \{0,1\}$. Sobre esta base y considerando un Topo arbitrario E con su clasificador de subobjetos (Ω, T), definimos los morfismos de verdad:

a) $\neg : \Omega \longrightarrow \Omega$ es el único morfismo de E tal que

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "\perp"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado, donde $\perp$ es tal que el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, tail, "!"] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\
1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado; es decir, $\chi_{\perp} = \neg$.

b) $\cap : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ es el único morfismo de E tal que

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "\langle T,\, T\rangle"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] \\
1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado; esdecir, $\chi_{\langle T,\, T\rangle} = \cap$.

c) $\cup : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ es el morfismo característico de la imagen de $[\langle T_{\Omega}, 1_{\Omega}\rangle ; \langle 1_{\Omega}, T_{\Omega}\rangle] : \Omega+\Omega \longrightarrow \Omega\times\Omega$.

d) $\Rightarrow : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ es el único morfismo de E tal que

$$\begin{tikzcd}
\textcircled{\le} \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, es decir $\chi_j = \Rightarrow$ donde $j : \textcircled{\le} \rightarrowtail \Omega\times\Omega$ es el igualador de $\pi_1 : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ y $\cap : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$.

Generalicemos el Teorema II.1 (Capítulo II) a un Topo arbitrario.

Sea E un Topo y d un objeto de E. Definimos las operaciones $-f$, $f\wedge g$, $f\vee g$ en el conjunto Sub(d).

1) Complemento

Sea $f : a \longrightarrow d$ un subobjeto de d. El complemento de f respecto a d es el subobjeto $-f : -a \rightarrowtail d$ cuyo morfismo característico es $\neg\circ\chi_f$; es decir, tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
-a \arrow[r, tail, "-f"] \arrow[d, "!_{-a}"'] & d \arrow[d, "\neg\circ\chi_f"] \\
1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

2) Intersección

Sean $f : a \rightarrowtail d$, $g : b \rightarrowtail d$. La intersección de f y g es el subobjeto $f\wedge g : a\wedge b \rightarrowtail d$ cuyo morfismo característico es $\chi_f \cap \chi g = \cap\circ\langle\chi_f, \chi g\rangle$; es decir, tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
a\wedge b \arrow[r, tail, "f\wedge g"] \arrow[d, "!_{a\wedge b}"'] & d \arrow[d, "\chi_{f\wedge g}"] \\
1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

3) Unión

La unión de $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ es el subobjeto $f\vee g : a\vee b \rightarrowtail d$ tal que el siguiente cuadrado es un producto fibrado;

$$
\begin{tikzcd}
a\vee b \arrow[r, tail, "f\vee g"] \arrow[d, "!_{a\vee b}"'] & d \arrow[d, "\chi_{f\vee g}"] \\
1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

es decir, $\chi_{f\vee g}$ es el morfismo caracteristico de $f\vee g$.

Los dos siguientes Teoremas permiten otra definición de $f\vee g$ y $f\wedge g$ que utilizaremos para demostrar que $(Sub(d), \leq)$ es una latiz acotada.

Teorema III.11. Sean $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ morfismos. Consideramos el producto fibrado de f y g

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, tail, "f"'] & d
\end{tikzcd}
$$

entonces $\alpha : c \rightarrowtail d$, con $\alpha = g\circ f' = f\circ g'$ es tal que $\chi_\alpha = \chi_f \cap \chi_g$; es decir $\alpha \simeq f\wedge g$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "!_c"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
1 \arrow[r, "\langle T, T \rangle"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad 3.11.a
$$

Probaremos que el cuadrado superior de 3.11.a es un producto fibrado.

Por hipótesis $\alpha = g \cdot f' = f \cdot g'$, entonces

$$
\begin{aligned}
\langle \chi_f, \chi_g \rangle \cdot \alpha &= \langle \chi_f \cdot \alpha, \chi_g \cdot \alpha \rangle \\
&= \langle \chi_f \cdot f \cdot g', \chi_g \cdot g \cdot f' \rangle \\
&= \langle T_a \cdot g', T_b \cdot f' \rangle \qquad (\text{pues } \chi_f \cdot f = T \cdot !_a \text{ y } \chi_g \cdot g = T \cdot !_b) \\
&= \langle T \cdot !_c, T \cdot !_c \rangle \\
&= \langle T, T \rangle \cdot !_c \,,
\end{aligned}
$$

lo que nos indica que el cuadrado superior de 3.11.a conmuta.

Sean $h : x \longrightarrow d$ y $!_x : x \longrightarrow 1$ tales que $\langle \chi_f, \chi_g \rangle \cdot h = \langle T, T \rangle \cdot !_x$.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rrd, bend left, "h"] \arrow[rd, dotted, "k_1"] \arrow[rdd, bend right, "!_x"'] & & \\
& a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[rrd, bend left, "h"] \arrow[rd, dotted, "k_2"] \arrow[rdd, bend right, "!_x"'] & & \\
& b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!_b"'] & d \arrow[d, "\chi_g"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Entonces $\chi_f \cdot h = T_x$ y $\chi_g \cdot h = T_x$, luego existen $k_1 : x \longrightarrow a$ y $k_2 : x \longrightarrow b$ únicas tales que $f \cdot k_1 = h$ y $g \cdot k_2 = h$. Pero como el cuadrado del siguiente diagrama es un producto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rrd, bend left, "k_2"] \arrow[rd, dotted, "\delta"] \arrow[rdd, bend right, "k_1"'] & & \\
& c \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, tail, "f"'] & d
\end{tikzcd}
$$

existe $\delta : x \longrightarrow c$ única tal que $f' \cdot \delta = k_2$ y $g' \cdot \delta = k_1$.

El cuadrado superior de 3.11.a es un producto fibrado pues

$$
\begin{aligned}
&\alpha \cdot \delta = g \cdot f' \cdot \delta = g \cdot k_2 = h \\
&!_c \cdot \delta = !_x.
\end{aligned}
$$

Por Teorema A.1 (Apéndice) el diagrama

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "!_c"'] & d \arrow[d, "\cap\circ\langle \chi_f, \chi_g\rangle"] \\ 1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, luego $\chi_\alpha = \cap\circ\langle\chi_f, \chi_g\rangle$. Por Teorema **III.5** $\alpha \simeq f\wedge g$. □

Teorema III.12. Sean $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ morfismos de **E**, entonces el morfismo $\alpha : c \rightarrowtail d$ que hace al diagrama

$$\begin{tikzcd} a+b \arrow[rr, "{[f,\, g]}"] \arrow[dr, dotted, two heads, "{[f,\, g]^*}"'] & & d \\ & c \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

conmutar, es tal que $\chi_\alpha = \chi_f \cup \chi_g$; es decir, $\alpha \simeq f\vee g$.

Demostración. Probaremos que los cuadrados del siguiente diagrama son productos fibrados.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\chi_g\circ f"'] & d \arrow[d, "\langle\chi_f, \chi_g\rangle"] & b \arrow[l, tail, "g"'] \arrow[d, "\chi_f\circ g"] \\ \Omega \arrow[r, "\langle T_\Omega, 1_\Omega\rangle"'] & \Omega\times\Omega & \Omega \arrow[l, "\langle 1_\Omega, T_\Omega\rangle"] \end{tikzcd} \qquad 3.12.a$$

Como

$$\begin{aligned} \langle\chi_f, \chi_g\rangle\circ f &= \langle\chi_f\circ f,\ \chi_g\circ f\rangle \\ &= \langle T_a,\ \chi_g\circ f\rangle \\ &= \langle T_\Omega\circ(\chi_g\circ f),\ \chi_g\circ f\rangle \\ &= \langle T_\Omega, 1_\Omega\rangle\circ(\chi_g\circ f), \end{aligned}$$

el cuadrado izquierdo de 3.12.a conmuta.
Sean $h_1 : x \longrightarrow d$ y $h_2 : x \longrightarrow \Omega$ tales que $\langle x_f,\ x_g\rangle \bullet h_1 = \langle T_\Omega,\ 1_\Omega\rangle \bullet h_2$.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[drr, bend left, "h_1"] \arrow[ddr, bend right, "h_2"'] \arrow[dr, dotted, "h"] & & \\
& a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "x_g \circ f"'] & d \arrow[d, "\langle x_f, x_g\rangle"] \\
& \Omega \arrow[r, tail, "\langle T_\Omega, 1_\Omega\rangle"'] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd} \qquad 3.12.b$$

así

$$x_f \bullet h_1 = T_\Omega \bullet h_2 = T_x \quad y$$
$$xg \bullet h_1 = 1_\Omega \bullet h_2 = h_2,$$

luego existe $h : x \longrightarrow a$ única tal que $f \bullet h = h_1$, de donde $xg \bullet f \bullet h = xg \bullet h_1 = h_2$. Por lo tanto 3.12.b es un producto fibrado.

El cuadrado derecho de 3.12.a conmuta pues

$$\begin{aligned}
\langle x_f,\ xg\rangle \bullet g &= \langle x_f \bullet g,\ xg \bullet g\rangle \\
&= \langle x_f \bullet g,\ Tb\rangle \\
&= \langle x_f \bullet g,\ T_\Omega \bullet (x_f \bullet g)\rangle \\
&= \langle 1_\Omega,\ T_\Omega\rangle \bullet (x_f \bullet g).
\end{aligned}$$

Sean $k_1 : y \longrightarrow d$, $k_2 : y \longrightarrow \Omega$ tales que $\langle x_f,\ xg\rangle \bullet k_1 = \langle 1_\Omega,\ T_\Omega\rangle \bullet k_2$.

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[drr, bend left, "k_1"] \arrow[ddr, bend right, "k_2"'] \arrow[dr, dotted, "k"] & & \\
& b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "x_f \circ g"'] & d \arrow[d, "\langle x_f, x_g\rangle"] \\
& \Omega \arrow[r, tail, "\langle 1_\Omega, T_\Omega\rangle"'] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd} \qquad 3.12.c$$

luego $\langle x_f \bullet k_1,\ xg \bullet k_1\rangle = \langle 1_\Omega \bullet k_2,\ T_\Omega \bullet k_2\rangle$ si y sólo si $x_f \bullet k_1 = k_2$ y $xg \bullet k_1 = T_\Omega \bullet k_2$.

Existe $k : y \longrightarrow b$ única tal que $g \circ k = k_1$, de donde $(\chi_f \circ g) \circ k = \chi_f \circ (g \circ k) = \chi_f \circ k_1 = k_2$ y por lo tanto 3.12.c es un producto fibrado.

Por el Teorema A.2 (Apéndice)

$$
\begin{tikzcd}
a+b \arrow[r, "{[f,\ g]}"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\langle \chi_f\ \chi_g \rangle"] \\
\Omega+\Omega \arrow[r, "{[\langle T_\Omega, 1_\Omega \rangle\ ,\ \langle 1_\Omega, T_\Omega \rangle]}"'] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado.

Para facilitar el desarrollo de la demostración, simplificaremos la notación de la siguiente manera

$c = [f,\ g](a+b);$

$e = [\langle T_\Omega,\ 1_\Omega \rangle,\ \langle 1_\Omega,\ T_\Omega \rangle]((\Omega+\Omega));$

$\alpha = im[f,\ g] : c \rightarrowtail d\ ;$

$i = im[\langle t_\Omega,\ 1_\Omega \rangle,\ \langle 1_\Omega, T_\Omega \rangle] : e \longrightarrow \Omega \times \Omega.$

Utilizando el Teorema III.10, el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "h"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f , \chi_g \rangle"] \\
e \arrow[r, tail, "i"'] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}
$$

donde $i : e \rightarrowtail d$ es tal que $\chi_i = \cup : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$. Así

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "!_c"'] & d \arrow[d, "\cup \circ \langle \chi_f , \chi_g \rangle"] \\
1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado, de donde $x_\alpha = U\circ\langle x_f, x_g\rangle = x_{f\vee g}$ y por lo tanto $\alpha \simeq f\vee g$. □
Ahora podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema III.13. $(\mathrm{Sub}(d), \leq)$ es una latiz acotada.

Demostración. Sub(d) es un conjunto parcialmente ordenado.

Sean $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$. Demostraremos que

i) $f\wedge g$ es la máxima cota inferior de f y g

ii) $f\vee g$ es la mínima cota superior de f y g.

i) Por el Teorema III.11. el cuadrado

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, "f\wedge g"] & b \arrow[d, tail, "g"] \\
a \arrow[r, tail, "f"'] & d
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado, entonces $f\wedge g \leq f$ y $f\wedge g \leq g$.
Supongamos que existe $h : e \rightarrowtail d$ tal que $h \leq f$ y $h \leq g$, entonces existen $k_1 : e \longrightarrow a$ y $k_2 : e \longrightarrow b$ tales que $h = f\circ k_1$ y $h = g\circ k_2$. Como el cuadrado interior de

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, dotted, "\beta"] \arrow[rrd, bend left, "k_2"] \arrow[ddr, bend right, "k_1"'] & & \\
& c \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, "f\wedge g"] & b \arrow[d, tail, "g"] \\
& a \arrow[r, tail, "f"'] & d
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado, existe $\beta : e \longrightarrow c$ única tal que $f'\circ\beta = k_2$ y $g'\circ\beta = k_1$, luego $h = (f\wedge g)\circ\beta$ lo que nos indica que $h \leq f\wedge g$. Por lo tanto $f\wedge g$ es la máxima cota inferior.

ii) Por el Teorema III.12 el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[ddr, "f"'] & a+b \arrow[d, two heads, "{[f,\ g]^*}"] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[ddl, "g"] \\
 & a \cup b \arrow[d, tail, "f \vee g"] & \\
 & d &
\end{tikzcd}$$

entonces $f \leq f \vee g$ y $g \leq f \vee g$.

Por otro lado, dada $h : c \rightarrowtail d$ tal que $f \leq h$ y $g \leq h$; existen $h_1 : a \longrightarrow c$ y $h_2 : b \longrightarrow c$ tales que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, dotted, "h_1"'] \arrow[dr, "f"] & \\
c \arrow[r, tail, "h"] & d \\
b \arrow[u, dotted, "h_2"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Consideremos la epi-mono factorización de $[h_1, h_2]$

$$[h_1, h_2] : a+b \xrightarrow[{[h_1,\ h_2]^*}]{} \!\!\!\twoheadrightarrow e \rightarrowtail\!\!\xrightarrow[j]{} c$$

pero $[f,\ g] = [h \circ h_1,\ h \circ h_2] = h \circ [h_1, h_2]$, entonces

$$[f,\ g] : a+b \xrightarrow[{[h_1,\ h_2]^*}]{} \!\!\!\twoheadrightarrow e \rightarrowtail\!\!\xrightarrow[j]{} c \rightarrowtail\!\!\xrightarrow[h]{} d$$

es una epi-mono factorización de $[f,g]$ luego por unicidad existe $u : c \longrightarrow e$ isomorfismo tal que

$$
\begin{tikzcd}
a+b \arrow[r, two heads, "{[h_1, h_2]^*}"] \arrow[dr, "{[f, g]^*}"'] & e \arrow[r, tail, "j"] & c \arrow[r, tail, "h"] & d \\
& c \arrow[u, dotted, "u"] \arrow[urr, tail, "f \vee g"'] & &
\end{tikzcd}
$$

conmuta, entonces $f \vee g = h \circ j \circ u$. Por lo tanto $f \vee g \leq h$; es decir, $f \vee g$ es la mínima cota superior de f y g.

Se ha demostrado que $(\mathrm{Sub}(d), \leq\ )$ es una latiz. A continuación demostraremos que es acotada donde

a) 1_d es el elemento máximo en $\mathrm{Sub}(d)$,

b) 0_d es el elemento mínimo en $\mathrm{Sub}(d)$.

Sea $f : a \rightarrowtail d$.

a) El siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[dr, tail, "1_d"] & \\
& d \\
a \arrow[uu, dotted, "f"] \arrow[ur, tail, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

lo que nos indica que $f \leq 1_d$.

b) El siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr, tail, "0_d"] \arrow[dd, "0_a"'] & \\
& d \\
a \arrow[ur, tail, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

luego $0_d \leq f$.

Además (Sub(d), $\leq$) es una latiz distributiva, es decir

a) $f\wedge(g\vee h) = (f\wedge g)\vee(f\wedge h)$,

b) $f\vee(g\wedge h) = (f\vee g)\wedge(f\vee h)$.

Daremos la demostración de esta afirmación más adelante, en cuanto se hayan definido elementos suplementarios que la haran más sencilla.

Veamos qué propiedad cumple el complemento en Sub(d). Dada $f : a \rightarrowtail d$ definimos $-f : -a \rightarrowtail d$ tal que $\chi_{-f} = \neg\circ\chi_f$.

Teorema III.14. Si $f : a \rightarrowtail d$, entonces $f\wedge -f = 0_d$.

Demostración.

Por la definición de $-f$, el rectángulo externo del diagrama

$$\begin{tikzcd}
-a \arrow[r, tail, "-f"] \arrow[d, dotted] \arrow[dd, bend right=60, "!_{-a}"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \arrow[dd, bend left=60, "\neg\circ\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "\perp"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd} \qquad 3.14.a$$

conmuta. El morfismo $!_{-a} : -a \longrightarrow 1$ hace del cuadrado superior de 3.14.a un producto fibrado, de donde

$$\begin{tikzcd}
a\wedge -a \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "j"'] & -a \arrow[r, tail, "!_{-a}"] \arrow[d, "-f"] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\
a \arrow[r, tail, "f"'] & d \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\perp\circ !_{-a}\circ i &= \chi_f\circ f\circ j \\
&= T_a\circ j \\
&= T_{a\wedge -a}.
\end{aligned}$$

El diagrama

$$\begin{tikzcd}
a\wedge -a \arrow[drr, "\perp\circ !_a"] \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[ddr, "!_{a\wedge -a}"'] & & \\
& 0 \arrow[r, tail, "0_1"] \arrow[d, "0_1"'] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, luego existe $k : a\wedge -a \longrightarrow 0$ única .
Por el Teorema **III.1** $a\wedge -a \cong 0$, así el diagrama

$$\begin{tikzcd}
a\wedge -a \arrow[dr, tail, "f\cap(-f)"] \arrow[dd, dotted, "\cong"'] & \\
& d \\
0 \arrow[ur, tail, "0_d"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, por lo tanto $f\wedge -f \leq 0_d$.

Por otra parte 0_d es el elemento mínimo en Sub(d), luego $f\wedge -f = 0_d$. □

Para que (Sub(d), $\leq$) sea un álgebra de Boole necesitamos que $f\vee -f \simeq 1_\Omega$. Esto no siempre sucede. Para dar un contraejemplo se requieren los siguientes resultados.

Teorema III.15. Sea E un Topo. En Sub(d) $\perp \cong -T$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\chi_\perp &= \neg \quad \text{(por definición)}\\
&= \neg\circ 1_\Omega\\
&= \neg\circ \chi_T \quad (\text{pues } \chi_T = 1_\Omega)\\
&= \chi_{-T}.
\end{aligned}$$

□

Teorema III.16. Sea E un Topo. Si $T : 1 \longrightarrow \Omega$ tiene complemento en Sub(d), entonces éste es el subobjeto $\bot : 1 \longrightarrow \Omega$.

Demostración. Supongamos que f es el complemento de T en Sub(d), entonces $T \wedge f = 0_\Omega$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, tail, "0_a"] \arrow[d] \arrow[dr, "T\wedge f"] & a \arrow[d, "f"] \\
1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado; es decir, $\chi_{0_a} = f = \bot \circ !_a$. Por lo tanto $f \leq \bot$.

Como Sub(d) es una latiz, $T \vee f \leq T \vee \bot$, pero f es complemento de T entonces $T \vee f \simeq 1_\Omega$, luego $T \vee \bot \simeq 1_\Omega$.

Por los Teoremas III.14 y III.15 $T \cap \bot \cong 0_d$ y por lo tanto $\bot$ es el complemento de T; es decir, $\bot \simeq f$. □

Contraejemplo:

Consideramos el monoide $M_2 = (2, \cdot, 1)$ con $2 = \{0, 1\}$ y $\cdot$ definida por la siguiente tabla

$\cdot$	1	0
1	1	0
0	0	0

Llamaremos a la categoría de los M_2-conjuntos simplemente M_2.

Veamos que este Topo no es un álgebra de Boole.

El clasificador de subobjetos en esta categoría es el conjunto de ideales izquierdos de M_2, $L_2 = \{2, \emptyset, \{0\}\}$, junto con el morfismo $\omega : 2 \times L_2 \longrightarrow L_2$ dado por $\omega(m,B) = \{n \mid n \in 2 \text{ y } n \cdot m \in B\}$.

Los morfismos $T : 1 \longrightarrow L_2$ y $\bot : 1 \longrightarrow L_2$ son tales que $T(0) = 2$ y $\bot(0) = \emptyset$.

En el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\{0\} + \{0\} \arrow[rr, "{[T,\bot]}"] \arrow[dr, "{[T,\bot]^*}"'] & & \{\emptyset, \{0\}, 2\} \\
& \{0, 2\} \arrow[ur, "T\cup\bot"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(T\cup\bot) &= \{0, 2\} \\
&\neq \{\emptyset, \{0\}, 2\} \\
&= \operatorname{Im}(1_\Omega).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $T\cup\bot$ no es isomorfo a 1_Ω, de donde $(\mathrm{Sub}(\Omega), \leq)$ no es un álgebra de Boole.

Definición . Sea **E** un Topo. Decimos que **E** es de Boole si para todo d objeto de **E**, $(\mathrm{Sub}(d), \leq)$ es un álgebra de Boole.

Teorema III.17. Para todo Topo **E**, los siguientes enunciados son equivalentes

i) **E** es de Boole

ii) $\mathrm{Sub}(\Omega)$ es un álgebra de Boole

iii) $T : 1 \longrightarrow \Omega$ tiene complemento en $\mathrm{Sub}(\Omega)$

iv) $\bot : 1 \longrightarrow \Omega$ es el complemento de T en $\mathrm{Sub}(\Omega)$

v) En $\mathrm{Sub}(\Omega)$, $T\cup\bot = 1_\Omega$

vi) **E** es clásico; es decir, $[T, \bot] : 1+1 \longrightarrow \Omega$ es un isomorfismo

vii) $i_1 : 1 \longrightarrow 1+1$ es un clasificador de subobjetos.

Demostración.

i)⇒ii) Por la definición de Topo de Boole.

ii)⇒iii) Por la definición de álgebra de Boole.

iii)⇒iv) Por el Teorema III.16

iv)⇒v) Por la definición de complemento.

v)⇒vi) $[T, \bot] : 1+1 \longrightarrow \Omega$ es un monomorfismo y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
1+1 \arrow[rr, "{[T,\perp]}"] \arrow[dr, two heads, "1"'] & & \Omega \\
& 1+1 \arrow[ur, tail, "{[T,\perp]}"'] &
\end{tikzcd}$$

muestra una epi-mono factorización de $[T, \perp]$. De este modo, en Sub(Ω) $T\cup\perp \cong [T, \perp]$, luego $[T, \perp] \cong 1_{\Omega}$ es un isomorfismo.

vi)$\Rightarrow$vii) Demostraremos que, si $\Psi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ es un isomorfismo, entonces $T' : 1 \longrightarrow \Omega'$ es un clasificador de subobjetos.

El siguiente diagrama claramente conmuta.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "T"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\Psi"] \\
1 \arrow[r, "T'"'] & \Omega'
\end{tikzcd}$$

Sean $f : x \longrightarrow \Omega$ y $!_x : x \longrightarrow 1$ tales que $\Psi\circ f = T'\circ !_x$, entonces

$$\Psi\circ T\circ !_x = T'\circ 1_1\circ !_x = T'\circ !_x,$$
$$\Psi\circ T\circ !_x = T'\circ !_x = \Psi\circ f.$$

Por lo tanto el diagrama es un producto fibrado. Así construímos

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"] \arrow[dd, bend right=60, "!_a"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \arrow[dd, bend left=60, "\Psi\circ\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "1"] & \Omega \arrow[d, "\Psi"] \\
1 \arrow[r, "T'"'] & \Omega'
\end{tikzcd}$$

en donde el cuadrado externo es un producto fibrado.

Afirmación : $\Psi\circ x_f$ es la única que tiene esta propiedad.

Supongamos que existe $x'_f : d \longrightarrow \Omega'$ tal que el siguiente cuadrado es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "x'_f"] \\
1 \arrow[r, tail, "T'"'] & \Omega'
\end{tikzcd}$$

Como $(\Psi^{-1})\circ x'_f\circ f = (\Psi^{-1})\circ T'\circ !_a = T\circ !_a$, el siguiente cuadrado conmuta.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "\Psi^{-1}\circ x'_f"] \\
1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd} \qquad 3.17.a$$

Sean $h : x \longrightarrow d$ y $h' : x \longrightarrow 1$ tales que $(\Psi^{-1})\circ x'_f\circ h = T\circ h'$.

Como $\Psi\circ T\circ h' = T'\circ 1_1\circ h' = T'\circ h' = \Psi\circ x_f\circ f$, entonces $T\circ h' = x_f\circ f$, luego existe $k : x \longrightarrow a$ única tal que $f\circ k = h'$ y $!_a\circ k = h'$. Obtenemos que el diagrama 3.17.a es un producto fibrado, de donde $\Psi^{-1}\circ x'_f = x_f$, es decir $x'_f = \Psi\circ x_f$. Por lo tanto $\Psi\circ x_f$ es única y $T' : 1 \longrightarrow \Omega'$ es un clasificador de subobjetos.

Por hipótesis $[T, \perp] : 1+1 \longrightarrow \Omega$ es un isomorfismo, entonces

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & \Omega \arrow[d, "{[T,\perp]}"] \\
1 \arrow[r, tail, "i_1"'] & 1+1
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, de donde $(1+1\ ,\ i_1)$ es un clasificador de subobjetos.

vii)⇒i) Basta demostrar que dada $f : a \rightarrowtail d$, $f\vee -f \simeq 1_d$.
Claramente $f\vee -f \leq 1_d$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & a\vee -a \arrow[dr, "f\vee -f"] & \\
a+(-a) \arrow[ur, "{[f,\, -f]^*}"] \arrow[dr, "{[f,\, -f]}"'] & & d \\
 & d \arrow[uu, dotted, "k"] \arrow[ur, tail, "1_d"'] &
\end{tikzcd}$$

Si demostramos que $[f, -f] : a+(-a) \longrightarrow d$ es un epimorfismo, entonces $[f, -f]$ tiene dos epi-mono factorizaciones luego existe $k : d \longrightarrow a\vee -a$ única tal que $(f\vee -f)\circ k = 1_d$,de donde $1_d \leq f\vee -f$.
Para probarlo necesitamos el siguiente resultado

Lema III.18. En cualquier Topo E el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "i_2"] \\
1 \arrow[r, "i_1"'] & 1+1
\end{tikzcd} \qquad 3.18.a$$

es un producto fibrado, donde i_1, i_2 son las inclusiones.
Demostración. El cuadrado conmuta pues 0 es objeto inicial.
Sean $f' : a \longrightarrow 1$ y $g' : \longrightarrow 1$ tales que $i_2\circ f' = i_1\circ g'$. Por las propiedades universales de i_1 , i_2 el diagrama 3.18.a es un coproducto fibrado. Como $\perp\circ !_0 = T\circ !_0$, existe $k : 1+1 \longrightarrow \Omega$ tal que $k\circ i_2 = \perp$ y $k\circ i_1 = T$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} i_2\circ f' &= i_1\circ g' \qquad \text{componiendo con } k \\ k\circ i_2\circ f' &= k\circ i_1\circ g' \\ \perp\circ f' &= T\circ g'. \end{aligned}$$

Pero $\perp$ es tal que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Existe $h : a \longrightarrow 0$ única tal que $!_0 \circ h = f'$ y $!_0 \circ h = g'$. Por lo tanto el diagrama 3.18.a es un producto fibrado. □

Regresemos a la demostración del Teorema.

Denotamos con χ'_f , χ'_T , etc. a los morfismos característicos de f, T, etc. respecto al clasificador de subobjetos $i_1 : 1 \longrightarrow 1+1$. Por el Lema anterior, $i_2 = \perp'$ y por la demostración del Teorema III.14 el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} -a \arrow[r, tail, "-f"] \arrow[d, "!_{-a}"'] & d \arrow[d, "\chi'_f"] \\ 1 \arrow[r, "i_2"'] & 1+1 \end{tikzcd}$$

luego por Teorema A.2 el cuadrado

$$\begin{tikzcd} a+(-a) \arrow[r, tail, "{[f, -f]}"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi'_f"] \\ 1 \arrow[r, tail, "{[i_1, i_2]}"'] & 1+1 \end{tikzcd}$$

es un producto fibradc. Pero $[i_1, i_2] = 1_{1+1}$ es un epimorfismo, luego $[f, -f]$ también lo es. Por lo tanto si $i_1 : 1 \longrightarrow 1+1$ es un clasificador de subobjetos, E es un Topo de Boole. □

S 3. Para demostrar que (Sub(d), ≤) es un álgebra de Heyting definiremos el *operador de Heyting.*

Utilizando el morfismo $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ definimos la siguiente operación

Si $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ son subobjetos de d, entonces $f \mapsto g : (a \mapsto b) \rightarrowtail d$ es el subobjeto de d cuyo morfismo característico es $\chi_f \Rightarrow \chi_g = \Rightarrow \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$, es decir $f \mapsto g$ es tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \mapsto b \arrow[r, tail, "f \mapsto g"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f \mapsto \chi_g"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Para demostrar que $f \mapsto g$ es el seudo-complemento de f relativo a g necesitamos algunos resultados.

Lema III.19. Sea E un Topo. Si f, g y h son subobjetos de d entonces

i) $f \wedge h \simeq g \wedge h$ si y sólo si $\chi_f \circ h = \chi_g \circ h$

ii) $\chi_f \cap \chi_h = \chi_g \cap \chi_h$ si y sólo si $\chi_f \circ h = \chi_g \circ h$.

Demostración.

i) Sean $f : a \rightarrowtail d$, $g : b \rightarrowtail d$ y $h : c \rightarrowtail d$.

Los cuadrados inferiores y superiores de los siguientes diagramas son productos fibrados

$$\begin{tikzcd}
a \wedge c \arrow[r, tail, "h_1"] \arrow[d] \arrow[dr, "f \wedge h"] & c \arrow[d, tail, "h"] \\
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
b \wedge c \arrow[r, tail, "h_2"] \arrow[d] \arrow[dr, "g \wedge h"] & c \arrow[d, tail, "h"] \\
b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!_b"'] & d \arrow[d, "\chi_g"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

de donde $\chi_{h_1} = \chi_f \circ h$ y $\chi_{h_2} = \chi_g \circ h$. Así

$f \wedge h \simeq g \wedge h$ es decir,

$$
\begin{aligned}
h \cdot h_1 \simeq h \cdot h_2 \quad & \text{si y sólo si} \\
h_1 \simeq h_2 \quad & \text{si y sólo si} \\
\chi_{h_1} \simeq \chi_{h_2} \quad & \text{si y sólo si} \\
\chi_f \cdot h = \chi_g \cdot h. &
\end{aligned}
$$

ii) Por el Teorema III.5 $\chi_f \cap \chi_h = \chi_g \cap \chi_h$ si y sólo si $f \wedge g \simeq g \wedge h$, entonces por i) $\chi_f \cdot h = \chi_g \cdot h$. $\square$

Corolario III.20. $f \wedge h \leq g$ si y sólo si $\chi_{f \wedge g} \cdot h = \chi_f \cdot h$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f \wedge h \leq g \quad & \text{si y sólo si } (f \wedge h) \wedge g \simeq f \wedge h \\
& \text{si y sólo si } (f \wedge g) \wedge h \simeq f \wedge h \\
& \text{si y sólo si } \chi_{f \wedge g} \cdot h = \chi_f \cdot h \quad \text{(Por lema anterior).}
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema III.21. Si $f : a \rightarrowtail d$ es un subobjeto de d, entonces $-f : -a \rightarrowtail d$ es el seudo-complemento de f; es decir, $g \leq -f$ si y sólo si $f \wedge g \cong 0_d$.

Demostración. Supongamos que $g \leq -f$. Entonces por las propiedades de latiz $f \wedge g \leq f \wedge -f$, pero por Teorema III.14 $f \wedge -f \simeq 0_d$, luego $f \wedge g \simeq 0_d$.

Si $f \wedge g \simeq 0_d$, entonces el cuadrado superior del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_b"] \arrow[d] \arrow[dr, "f \wedge g"] & b \arrow[d, tail, "g"] \\
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado, luego el rectángulo también lo es (Teorema A.1).

Por la unicidad del Ω-axioma

$$
\begin{aligned}
& \chi_f \cdot g = \chi_{0b} = \bot \cdot !_b \text{, luego} \\
& \neg \cdot \chi_f \cdot g = \neg \cdot \bot \cdot !_b = T_b,
\end{aligned}
$$

pero $T \cdot !_b = \chi_g \cdot g$ y $\neg \cdot \chi_f = \chi_{-f}$, entonces $\chi_{-f} \cdot g = \chi_g \cdot g$.

Por el Lema III.19 $-f \wedge g \simeq g \wedge g \simeq g$. Por lo tanto $g \leq -f$. □

Teorema III.22. En Sub(d) tenemos

i) $h \leq f \mapsto g$ si y sólo si $f \wedge h \leq g$

ii) $f \leq g$ si y sólo si $f \mapsto g \simeq 1_d$

iii) $f \leq g$ si y sólo si $\chi_f \Rightarrow \chi_g = T_d$.

Demostración.

i) Sean $f : a \rightarrowtail d$, $g : b \rightarrowtail d$ y $h : c \rightarrowtail d$.

Supongamos que $h \leq f \mapsto g$, entonces existe $k : c \rightarrowtail (a \mapsto b)$ tal que $(f \mapsto g) \circ k = h$. En el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \mapsto b \arrow[r, tail, "f \mapsto g"] \arrow[d, dotted, "e"'] \arrow[dd, bend right=60, "!_{a \mapsto b}"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
\leq \arrow[r, hook, "j"'] \arrow[d, "!"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

los cuadrados inferior y externo son productos fibrados, luego $\Rightarrow \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ (f \mapsto g) = T \circ !_{(a \mapsto b)}$. Existe $e : (a \Rightarrow b) \longrightarrow \leq$ única tal que $\langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ (f \mapsto g) = j \circ e$, lo que implica que el cuadrado superior es un producto fibrado. En el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
a \mapsto b \arrow[rr, tail, "f \mapsto g"] \arrow[d, "e"'] & & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] & \\
\leq \arrow[rr, "j"'] & & \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "\cap"] \arrow[r, shift right, "\pi_1"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

el triángulo superior conmuta, luego

$$\begin{aligned}
\Pi\cdot\langle x_f,\ x_g\rangle\cdot h &= \Pi\cdot\langle x_f,\ x_g\rangle\cdot(f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g)\cdot k\\
&= \Pi\cdot j\cdot e\cdot k\\
&= \Pi_1\cdot j\cdot e\cdot k \quad \text{(por ser } j \text{ igualador)}\\
&= \Pi_1\cdot\langle x_f,\ x_g\rangle\cdot(f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g)\cdot k\\
&= \Pi_1\cdot\langle x_f,\ x_g\rangle\cdot h.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x_{f\wedge g}\cdot h = x_f\cdot h$, luego por el Corolario III.20 $f\wedge h \leq g$.

Supongamos que $f\wedge h \leq g$, entonces $x_{f\wedge g}\cdot h \leq x_f\cdot h$, de donde $\Pi\cdot\langle x_f,\ x_g\rangle\cdot h = \Pi_1\cdot\langle x_f,\ x_g\rangle\cdot h$, pero $j : \circledS \longrightarrow \Omega\times\Omega$ es el igualador de Π y Π_1, entonces existe $\omega : c \longrightarrow \circledS$ única tal que $j\cdot\omega = \langle x_f,\ x_g\rangle\cdot h$. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, dotted, "\alpha"] \arrow[drr, "h"] \arrow[ddr, "\omega"'] & & \\
& a \mathrel{|\!\!\Rightarrow} b \arrow[r, "f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g"] \arrow[d, "e"] & d \arrow[d, "{\langle x_f,\ x_g\rangle}"] \\
& \circledS \arrow[r, "j"'] & \Omega\times\Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, luego existe $\alpha : c \longrightarrow a \Rightarrow b$ única tal que $(f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g)\cdot\alpha = h$ y por lo tanto $h \leq f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g$.

ii) Supongamos que $f \leq g$, entonces para todo h subobjeto de d, $f\wedge h \leq f \leq g$, luego por i) $h \leq f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g$. En particular $1_d \leq f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g$, pero 1_d es el elemento máximo en Sub(d) luego $f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g \leq 1_d$. Por lo tanto $f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g \simeq 1_d$.
Si $f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g \simeq 1_d$, entonces $f \leq f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g$ (pues $f \leq 1_d$), luego por i) $f\wedge f \leq g$, es decir $f \leq g$.

iii) $f \leq g$ si y sólo si $f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g \simeq 1_d$
si y sólo si $x_{f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g} = x_{1_d}$
si y sólo si $x_{f \mathrel{|\!\!\Rightarrow} g} = T_d$. □

Corolario III.23. (Sub(d), $\leq$) es una latiz distributiva.
Demostración.

a) Como $g \leq g\vee h$ y $h \leq g\vee h$ tenemos

$$f\wedge g \leq f\wedge(g\vee h) \qquad y \qquad f\wedge h \leq f\wedge(g\vee h)$$

luego $f \wedge (g \vee h)$ es cota superior de $f \wedge g$ y $f \wedge h$.

Supongamos que $f \wedge g \leq \alpha$ y $f \wedge h \leq \alpha$, entonces por Teorema III.22 $g \leq f \models \alpha$ y $h \leq f \models \alpha$, luego $g \vee h \leq f \models \alpha$ si y sólo si $f \wedge (g \vee h) \leq \alpha$, por lo tanto $f \wedge (g \vee h)$ es la mínima cota superior, así $f \wedge (g \vee h) = (f \wedge g) \vee (f \wedge h)$.

b) Por inciso a)

$$
\begin{aligned}
(f \vee g) \wedge (f \vee h) &= ((f \vee g) \wedge f) \vee ((f \vee g) \wedge h) \\
&= ((f \wedge f) \vee (f \wedge g)) \vee ((f \wedge h) \vee (g \wedge h)) \\
&= f \wedge (f \vee g \vee h) \vee (g \wedge h) \\
&= f \vee (g \wedge h).
\end{aligned}
$$
□

Con esto queda demostrado que $(\mathrm{Sub}(d), \leq)$ es un álgebra de Heyting para todo objeto d de un Topo $\mathbf{E}$.

Usualmente, a partir de este resultado, se demuestra que existe un isomorfismo natural entre $\mathrm{Sub} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{E}^{op}}$ y $\mathrm{Hom}(\_, \Omega) : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{E}^{op}}$ lo que implica que $\mathrm{Hom}(\_, \Omega)$ es un álgebra de Heyting. Utilizando la inversión de Yoneda $Y : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{E}^{op}}$, se concluye que Ω tiene estructura de álgebra de Heyting.

Capítulo IV

S.1 Se demostrará directamente que el clasificador de subobjetos de un Topo tiene estructura de álgebra de Heyting y, a partir de ésto, que Sub(d) también.

Considerando la definición ecuacional de álgebra de Heyting dada en los Teoremas **I.1** y **I.4** damos la siguiente

Definición . Sea **E** un Topo. Un *álgebra de Heyting* en un Topo es, en general, una sexteta $\langle D, T, \perp, \wedge, \vee, \rightarrow \rangle$ con D un objeto de **E**; $T, \perp : 1 \longrightarrow D$ y $\wedge, \vee, \rightarrow : D\times D \longrightarrow D$ definidas convenientemente y tales que los siguientes diagramas son conmutativos.

a)

$$\begin{tikzcd} 1\times D \arrow[r, "T\times 1_D"] \arrow[dr, "\pi'"'] & D\times D \arrow[d, "\wedge"] & D\times 1 \arrow[l, "1_D\times T"'] \arrow[dl, "\pi"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

b)

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "1_D"'] & & D\times D \arrow[dl, "\wedge"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

c)

$$\begin{tikzcd} D\times D \arrow[rr, "\wedge"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & D \\ & D\times D \arrow[ur, "\wedge"'] & \end{tikzcd}$$

$(\Phi = \langle \pi', \pi \rangle)$

d)
$$\begin{tikzcd}
(D\times D)\times D \arrow[rr, "\wedge\times 1_D"] \arrow[d, "\Psi"'] & & D\times D \arrow[dr, "\wedge"] & \\
& & & D \\
D\times(D\times D) \arrow[rr, "1_D\times\wedge"'] & & D\times D \arrow[ur, "\wedge"'] &
\end{tikzcd}$$
$(\Psi = \langle \Pi\pi, \langle \Pi'\pi, \pi'\rangle\rangle)$

e)
$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\langle 1_D, 1_D\rangle"] \arrow[d] & D\times D \arrow[d, "\to"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & D
\end{tikzcd}$$

f)
$$\begin{tikzcd}
D\times D \arrow[rr, "\langle \Pi, \to\rangle"] \arrow[dr, "\wedge"'] & & D\times D \arrow[dl, "\wedge"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

g)
$$\begin{tikzcd}
D\times D \arrow[rr, "\langle \Pi', \to\rangle"] \arrow[dr, "\Pi'"'] & & D\times D \arrow[dl, "\wedge"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

h)

$$\begin{tikzcd}
D\times(D\times D) \arrow[r, "\Delta_D \times 1_D"] \arrow[d, "{\langle \Pi,\ \wedge\Pi' \rangle}"] & (D\times D)\times(D\times D) \arrow[d, "\Psi"] \\
D\times D \arrow[d, "\rightarrow"] & (D\times D)\times(D\times D) \arrow[d, "\rightarrow \times \rightarrow"] \\
D & D\times D \arrow[l, "\wedge"]
\end{tikzcd}$$

$(\Psi = \langle\langle \pi\Pi,\ \Pi_1\Pi' \rangle,\ \langle \pi\Pi,\ \Pi'_1\Pi' \rangle\rangle)$

i)

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\Delta_D"] \arrow[dr, "1_D"'] & & D\times D \arrow[dl, "\vee"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

j)

$$\begin{tikzcd}
D\times D \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\vee"'] & & D\times D \arrow[dl, "\vee"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

k)

$$\begin{tikzcd}
D\times D \arrow[dr, "\wedge"'] & D\times D \arrow[l, "{\langle \Pi,\ \vee \rangle}"'] \arrow[r, "{\langle \Pi,\ \wedge \rangle}"] \arrow[d, "\Pi"] & D\times D \arrow[dl, "\vee"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

l)

$$\begin{tikzcd} 1\times D \arrow[r, "\perp\times 1_D"] \arrow[dr, "\pi'"'] & D\times D \arrow[r, "1_D\times\perp"] \arrow[d, "\vee"] & D\times 1 \arrow[dl, "\pi"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

m)

$$\begin{tikzcd} (D\times D)\times D \arrow[rr, "\vee\times 1_D"] \arrow[dd, "\Psi"'] & & D\times D \arrow[dr, "\vee"] & \\ & & & D \\ D\times(D\times D) \arrow[rr, "1_D\times\vee"'] & & D\times D \arrow[ur, "\vee"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema IV.1. $\langle\Omega, T, \perp, \cap, \cup, \Rightarrow\rangle$ es un álgebra de Heyting.

Demostración. Consideramos la sexteta $\langle\Omega, T, \perp, \cap, \cup, \Rightarrow\rangle$ donde Ω es el clasificador de subobjetos de **E** ; $T : 1 \longrightarrow \Omega$ es el morfismo verdad ; $\perp : 1 \longrightarrow \Omega$ el morfismo falso ; $\cap : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$; $\cup : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ y $\Rightarrow : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ están definidas en el Capítulo III.

a) Afirmación. El siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} 1\times\Omega \arrow[r, "T\times 1_\Omega"] \arrow[dr, "\pi'"'] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] & \Omega\times 1 \arrow[l, "1_\Omega\times T"'] \arrow[dl, "\pi"] \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

diag. A

Probaremos que tanto π' como $\cap\circ(T\times 1_\Omega)$ hacen del siguiente diagrama un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\langle 1,\, T\rangle"] \arrow[d] & 1\times\Omega \arrow[d, shift right, "\cap\circ(T\times 1_\Omega)"'] \arrow[d, shift left, "\Pi'"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

diag. A.1

i) Claramente, con Π' el diagrama conmuta.

Sean $\langle !_D,\, g\rangle : D \longrightarrow 1\times\Omega$, $!_D : D \longrightarrow 1$ tales que $\Pi' \circ \langle !_D,\, g\rangle = T_D$.

El morfismo $!_D$ es tal que $\langle 1,\, T\rangle \circ !_D = \langle !_D,\, T_D\rangle = \langle !_D,\, g\rangle$. Por lo tanto Π' hace al diagrama A.1 un producto fibrado.

ii) Consideramos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\langle 1,\, T\rangle"] \arrow[d] & 1\times\Omega \arrow[d, "T\times 1_\Omega"] \\
1 \arrow[r, "\langle T,\, T\rangle"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

diag. A.2

El cuadrado inferior es, por definición, un producto fibrado. Si demostramos que el cuadrado superior también lo es, tendremos que el rectángulo lo será (Teorema A.1 apéndice), de donde $\cap \circ (T\times 1_\Omega)$ hace del diagrama A.1 un producto fibrado.

Claramente el cuadrado superior conmuta.

Sean $\langle !_D,\, g\rangle : D \longrightarrow 1\times\Omega$, $!_D : D \longrightarrow 1$ tales que

$$(T\times 1_\Omega)\circ\langle !_D,\, g\rangle = \langle T,\, T\rangle \circ !_D\,, \text{ de donde}$$

$$\langle T_D,\, g\rangle = \langle T_D,\, T_D\rangle\,, \text{ si y sólo si}$$

$$g = T_D.$$

El morfismo $!_D$ es tal que $\langle 1,\, T\rangle \circ !_D = \langle !_D,\, T_D\rangle = \langle !_D,\, g\rangle$. Por lo tanto el cuadrado superior de A.2 es un producto fibrado.

Por la unicidad en el Ω-axioma $\cap\circ(T\times 1_\Omega) = \pi'$ de donde el triángulo izquierdo del diagrama A conmuta.
Análogamente se demuestra la conmutatividad del triángulo derecho de A. $\square$

b) Afirmación. El siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "1_\Omega"'] & & \Omega\times\Omega \arrow[dl, "\cap"] \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

diag. B

Probaremos que tanto $\cap\circ\Delta$ como 1_Ω hacen del siguiente cuadrado un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "T"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, shift right, "1_\Omega"'] \arrow[d, shift left, "\cap\circ\Delta"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

diag. B.1

i) Consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "T"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\Delta"] \\ 1 \arrow[r, "\langle T,T\rangle"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

diag. B.2

El cuadrado inferior es, por definición, un producto fibrado. Si demostramos que el cuadrado superior también lo es, tendremos que $\cap\circ\Delta$ hace del diagrama B.1 un producto fibrado.

Como $\Delta \circ T = \langle T, T\rangle = \langle T, T\rangle \circ !_1$ el cuadrado conmuta.

Sean $h : D \longrightarrow \Omega$, $!_D : D \longrightarrow 1$ tales que $\Delta \circ h = \langle T, T\rangle \circ !_D$, si y sólo si $h = T_D$. El morfismo $!_D : D \longrightarrow 1$ es tal que $T \circ !_D = h$, de donde el cuadrado superior de B.2 es un producto fibrado.

ii) Claramente $!_\Omega$ hace del diagrama B.2 un producto fibrado. Por la unicidad en el Ω–axioma $\cap \circ \Delta = 1_\Omega$, de donde el diagrama B conmuta. □

c) Afirmación. El siguiente triángulo conmuta,

$$\begin{tikzcd}
\Omega\times\Omega \arrow[rr, "\cap"] \arrow[dr, "h"'] & & \Omega \\
& \Omega\times\Omega \arrow[ur, "\cap"'] &
\end{tikzcd}$$

diag. C

donde $h := \langle \pi', \pi\rangle$ es un isomorfismo.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{\langle T, T\rangle}"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap\circ h"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

diag. C.1

$$\begin{aligned}
\cap \circ h \circ \langle T, T\rangle &= \cap \circ \langle \pi', \pi\rangle \circ \langle T, T\rangle \\
&= \cap \circ \langle T, T\rangle \\
&= T \cap T \\
&= T.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el cuadrado conmuta.

Sean $\langle f\ g\rangle : D \longrightarrow \Omega\times\Omega$, $!_D : D \longrightarrow 1$ tales que

$(\cap \circ h) \circ \langle f, g\rangle = T \circ !_D$, de donde

$\cap \circ (\langle \pi', \pi\rangle \circ \langle f, g\rangle) = T_D$ si y sólo si

$g \cap f = T_D$ que implica

$g = T_D$ y $f = T_D$. (Véase observación 4.c)

El morfismo $!_D$ es tal que $\langle T, T\rangle \circ !_D = \langle T_D, T_D\rangle = \langle f, g\rangle$. Por lo tanto el cuadrado C.1 es un producto fibrado. Por unicidad $\cap = \cap \circ h$ y el diagrama C conmuta. □

Observación 4.c. Si $f \wedge g = T_D$, entonces $f = T_D$ y $g = T_D$.

El cuadrado interior del siguiente diagrama es, por definición, un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[rr, "{\langle f,\, g\rangle}"] \arrow[ddr, bend right, "!_D"'] & & \\
& 1 \arrow[r, tail, "{\langle T,\, T\rangle}"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Como $f \wedge g = T_D$, existe una única $h : D \longrightarrow 1$ tal que $\langle T, T\rangle \cdot h = \langle f, g\rangle$ y $h = !_D$, de donde $f = T_D$ y $g = T_D$.

d) Afirmación. El siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
(\Omega\times\Omega)\times\Omega \arrow[r, "\cap\times 1_\Omega"] \arrow[d, "\Phi"'] & \Omega\times\Omega \arrow[dr, "\cap"] & \\
& & \Omega \\
\Omega\times(\Omega\times\Omega) \arrow[r, "1_\Omega\times\cap"'] & \Omega\times\Omega \arrow[ur, "\cap"'] &
\end{tikzcd}$$

diag. D

donde $\Phi = \langle \pi\Pi, \langle \pi'\Pi, \Pi'\rangle\rangle$ es un isomorfismo con $\pi = \pi_{\Omega\times\Omega}$, $\pi' = \pi'_{\Omega\times\Omega}$, $\Pi = \Pi_{(\Omega\times\Omega)\times\Omega}$, $\Pi' = \Pi'_{(\Omega\times\Omega)\times\Omega}$ proyecciones.

Demostraremos que tanto $\cap\cdot(\cap\times 1_\Omega)$ como $\cap\cdot(1_\Omega\times\cap)\cdot\Phi$ hacen del siguiente diagrama un producto fibrado y así, por la unicidad en el Ω–axioma, el diagrama D conmuta.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\langle\langle T, T\rangle, T\rangle"] \arrow[d] & (\Omega\times\Omega)\times\Omega \arrow[d, shift right, "\cap\circ\langle\cap\times 1_\Omega\rangle"'] \arrow[d, shift left, "\cap\circ(1_\Omega\times\Omega)\circ\Phi"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

diag. D.1

i) Probaremos que el cuadrado superior de D.2 es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\langle\langle T, T\rangle, T\rangle"] \arrow[d] & (\Omega\times\Omega)\times\Omega \arrow[d, "\cap\times 1_\Omega"] \\
1 \arrow[r, "\langle T, T\rangle"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

diag. D.2

Ya que

$$\begin{aligned}(\cap\times 1_\Omega)\circ\langle\langle T, T\rangle, T\rangle &= \langle \cap\circ\langle T, T\rangle, T\rangle \\ &= \langle T\wedge T, T\rangle \\ &= \langle T, T\rangle,\end{aligned}$$

el diagrama conmuta.

Sean $\langle\langle f, g\rangle, k\rangle : \alpha \longrightarrow (\Omega\times\Omega)\times\Omega$ y $!_\alpha : \alpha \longrightarrow 1$ tales que

$$(\cap\times 1_\Omega)\circ\langle\langle f, g\rangle, k\rangle = \langle T, T\rangle\circ !_\alpha \text{ de donde}$$

$$\langle \cap\circ\langle f, g\rangle, k\rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha\rangle$$

$$\langle f\wedge g, k\rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha\rangle, \text{ si y sólo si}$$

$$f\wedge g = T_\alpha \quad \text{y} \quad k = T_\alpha.$$

El morfismo $!_\alpha : \alpha \longrightarrow 1$ es tal que $\langle\langle T, T\rangle, T\rangle\circ !_\alpha = \langle\langle f, g\rangle, k\rangle$.

Por lo tanto el cuadrado superior de D.2 es un producto fibrado, luego el rectángulo también lo es, obteniendo que $\cap\circ(\cap\times 1_\Omega)$ hace del diagrama D.1 un producto fibrado.

ii) Para demostrar que $\cap\circ(1_\Omega\times\Omega)\circ\Phi$ hace que el diagrama D.1 sea un producto fibrado necesitamos la siguiente

Observación 4.d. Si $\Psi : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo, entonces

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\Psi^{-1}\circ f"] \arrow[d, "1_{A'}"'] & A \arrow[d, "\Psi"] \\
A' \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

diag. 4.d.a

es un producto fibrado.

Claramente el diagrama conmuta.

Sean $h : C \longrightarrow A$, $k : C \longrightarrow A'$ tales que $\Psi \circ h = f \circ k$. El morfismo k es tal que $\Psi^{-1} \circ f \circ k = \Psi^{-1} \circ \Psi \circ h = h$. Así, 4.d.a es un producto fibrado.

Obtenemos que $\Phi : (\Omega \times \Omega) \times \Omega \longrightarrow \Omega \times (\Omega \times \Omega)$ hace del siguiente

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\langle\langle T, T\rangle, T\rangle"] \arrow[d] & (\Omega\times\Omega)\times\Omega \arrow[d, "\Phi"] \\
1 \arrow[r, "\langle T, \langle T, T\rangle\rangle"'] & \Omega\times(\Omega\times\Omega)
\end{tikzcd}$$

un producto fibrado, luego

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\langle\langle T, T\rangle, T\rangle"] \arrow[d] & (\Omega\times\Omega)\times\Omega \arrow[d, "\Phi"] \\
1 \arrow[r, "\langle T, \langle T, T\rangle\rangle"'] \arrow[d] & \Omega\times(\Omega\times\Omega) \arrow[d, "1_\Omega\times\cap"] \\
1 \arrow[r, "\langle T, T\rangle"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

los tres cuadrados son productos fibrados, de donde el rectángulo lo es. Por lo tanto $\cap \circ (1_\Omega \times \Omega) \circ \Phi$ hace que el diagrama D.1 sea un producto fibrado. $\square$

e) Afirmación. El cuadrado conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "\Delta_\Omega"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad \text{diag. E}
$$

Consideremos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "1_\Omega"] \arrow[d, dotted, "h"'] & \Omega \arrow[d, "\Delta_\Omega"] \\
\leq \arrow[r, tail, "j"'] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad \text{diag. E.1}
$$

donde $j : \leq \rightarrowtail \Omega\times\Omega$ es el igualador de $\cap : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ y de $\Pi : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$,

$$
\begin{tikzcd}
\leq \arrow[r, tail, "j"] & \Omega\times\Omega \arrow[r, shift left, "\cap"] \arrow[r, shift right, "\Pi"'] & \Omega \\
& \Omega \arrow[ul, dotted, "h"] \arrow[u, "\Delta_\Omega"'] &
\end{tikzcd}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\cap \circ \Delta_\Omega &= \cap \circ \langle 1_\Omega, 1_\Omega \rangle \\
&= 1_\Omega \wedge 1_\Omega \\
&= 1_\Omega = \Pi \circ \Delta_\Omega,
\end{aligned}
$$

existe una única $h : \Omega \longrightarrow \textcircled{\leq}$ tal que $j \circ h = \Delta_\Omega$. Por lo tanto el cuadrado superior de E.1 conmuta.

Sean $f : D \longrightarrow \Omega$ y $g : D \longrightarrow \textcircled{\leq}$ tales que $\Delta_\Omega \circ f = j \circ g$, pero $j \circ g : D \longrightarrow \Omega \times \Omega$ es tal que $j \circ g = \langle h, k \rangle$, así que $f = h = k$.

El morfismo f es tal que

$$\begin{aligned} j \circ h \circ f &= \Delta_\Omega \circ f \\ &= \langle f, f \rangle \\ &= \langle h, k \rangle \\ &= j \circ g. \end{aligned}$$

Como j es un monomorfismo tenemos que $h \circ f = g$. Por lo tanto el cuadrado superior de E.1 es un producto fibrado, de donde

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "1_\Omega"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\Rightarrow \circ \Delta_\Omega"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

diag. E.2

también lo es, pero T_Ω hace de éste un producto fibrado, entonces $\Rightarrow \circ \Delta_\Omega = T_\Omega$. Por lo tanto el diagrama E conmuta. □

f) Afirmación. El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \Omega\times\Omega \arrow[rr, "\langle \Pi, \Rightarrow \rangle"] \arrow[dr, "\cap"'] & & \Omega\times\Omega \arrow[dl, "\cap"] \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

diag. F

El cuadrado inferior de F.1 es un producto fibrado.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{\langle T,\, T\rangle}"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "{\langle \Pi,\, \Rightarrow\rangle}"] \\
1 \arrow[r, "{\langle T,\, T\rangle}"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

diag. F.1

Como $\langle \Pi, \Rightarrow\rangle \circ \langle T, T\rangle = \langle T, T \Rightarrow T\rangle = \langle T, T\rangle$ el cuadrado superior conmuta.

Sean $\langle f, g\rangle : D \longrightarrow \Omega\times\Omega$ y $!_D : D \longrightarrow 1$ tales que $\langle \Pi, \Rightarrow\rangle \circ \langle f, g\rangle = T_D$, $\langle f, f \vert\!\Rightarrow g\rangle = T_D$, si y sólo si $f = T_D$ y $f \vert\!\Rightarrow g = T_D$, si y sólo si $f = g = T_D$. (Ver observación 4.f).

El morfismo $!_D$ es tal que $\langle T, T\rangle \circ !_D = \langle f, g\rangle$. El cuadrado superior de F.1 es un producto fibrado. Así $\cap$ y $\cap \circ \langle \Pi, \Rightarrow\rangle$ hacen del mismo diagrama un producto fibrado, por lo tanto $\cap = \cap \circ \langle \Pi, \Rightarrow\rangle$. □

Observación 4.f. Sea $f : D \longrightarrow \Omega$. Si $T_D \vert\!\Rightarrow f = T_D$, entonces $f = T_D$.

Ya que el cuadrado interior siguiente diagrama es un producto fibrado y, por hipótesis, $\Rightarrow \circ \langle T_D, f\rangle = T_D$, existe una única $h : D \longrightarrow \le$ tal que $j \circ h = \langle T_D, f\rangle$.

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "{\langle T_D\,,\, f\rangle}"] \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[ddr, "!_D"'] & & \Omega\times\Omega \arrow[dd, "\Rightarrow"] \\
 & \le \arrow[ur, hook, "j"] \arrow[d] & \\
 & 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Por definición $j : \le \longrightarrow \Omega\times\Omega$ es el igualador de Π y de $\cap$, luego

$\Pi \circ j \circ h = \Pi \circ \langle T_D, f\rangle$, si y sólo si

$\Pi \circ j \circ h = \cap \circ \langle T_D, f\rangle$, si y sólo si

$T_D = T_D \wedge f$ si y sólo si
$f = T_D$ (Por Observación 4.c). $\square$

g) Afirmación. El diagrama G conmuta.

$$\begin{tikzcd} \Omega\times\Omega \arrow[rr, "\langle \pi', \Rightarrow \rangle"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & \Omega\times\Omega \arrow[dl, "\cap"] \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

diag. G

El siguiente diagrama conmuta ya que

$$\begin{aligned} \langle \pi', \Rightarrow \rangle \circ \langle 1_\Omega, T_\Omega \rangle &= \langle T_\Omega, 1_\Omega \,|\!\!\Rightarrow T_\Omega \rangle \\ &= \langle T_\Omega, T_\Omega \rangle \quad \text{(Ver Observación 4.g)} \\ &= \langle T, T \rangle \circ !_\Omega . \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\langle 1_\Omega, T_\Omega \rangle"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\langle \pi, \pi' \rangle"] \\ 1 \arrow[r, "\langle T, T \rangle"'] & \Omega\times\Omega \end{tikzcd}$$

diag. G.1

Sean $\langle f, g \rangle : D \longrightarrow \Omega\times\Omega$, $!_D : D \longrightarrow 1$ tales que $\langle \pi', \Rightarrow \rangle \circ \langle f, g \rangle = \langle T_D, T_D \rangle$, de donde $\langle g, f \,|\!\!\Rightarrow g \rangle = \langle T_D, T_D \rangle$, si y sólo si $g = T_D$ y $f \,|\!\!\Rightarrow g = T_D$.

Sea $f : D \longrightarrow \Omega$, $\langle 1_\Omega, T_\Omega \rangle \circ f = \langle f, T_D \rangle = \langle f, g \rangle$, por lo tanto el cuadrado G.1 es un producto fibrado. Por el Teorema A.1,

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\langle 1_\Omega, T_\Omega \rangle"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap \circ \langle \pi', \Rightarrow \rangle"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

diag. G.2

es un producto fibrado.

Claramente $\Pi' : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ hace que este diagrama sea un producto fibrado; por lo tanto $\Pi' = \cap\circ\langle\Pi', \Rightarrow\rangle$ y el diagrama G conmuta. $\square$

Observación 4.g. $1_\Omega \mid\!\Rightarrow T_\Omega = T_\Omega$.

Por definición el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\leq \arrow[r, "j"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, donde $j : \leq \longrightarrow \Omega\times\Omega$ es el igualador de $\cap$ y de Π.
Como

$$\begin{aligned}
\Pi\circ\langle 1_\Omega, T_\Omega\rangle &= 1_\Omega \\
&= 1_\Omega \wedge T_\Omega \\
&= \cap\circ\langle 1_\Omega, T_\Omega\rangle,
\end{aligned}$$

existe una única $h : \Omega \longrightarrow \leq$ tal que $j\circ h = \langle 1_\Omega, T_\Omega\rangle$; así obtenemos

$$\Rightarrow\circ j\circ h = \Rightarrow\circ\langle 1_\Omega, T_\Omega\rangle$$

$$T_\Omega = 1_\Omega \mid\!\Rightarrow T_\Omega, \qquad \text{pues } \Rightarrow\circ j\circ h = T_e\circ h = T_\Omega. \qquad \square$$

h) Afirmación. El siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\Omega\times(\Omega\times\Omega) \arrow[r, "\Delta_\Omega\times 1_{\Omega\times\Omega}"] \arrow[d, "{\langle\Pi, \cap\Pi'\rangle}"'] & (\Omega\times\Omega)\times(\Omega\times\Omega) \arrow[d, "\Psi"] \\
\Omega\times\Omega \arrow[d, "\Rightarrow"'] & (\Omega\times\Omega)\times(\Omega\times\Omega) \arrow[d, "\Rightarrow\times\Rightarrow"] \\
\Omega & \Omega\times\Omega \arrow[l, "\cap"]
\end{tikzcd}$$

diag. H

Simplificando tenemos

$$\begin{aligned}
\cap\circ(\Rightarrow\times\Rightarrow)\circ\Psi\circ(\Delta_\Omega\times 1_{\Omega\times\Omega}) &= \cap\circ(\Rightarrow\times\Rightarrow)\circ\langle\langle\pi_1\pi,\ \pi\pi'\rangle,\ \langle\pi'\pi,\ \pi'\pi_2\rangle\rangle\circ(\Delta_\Omega\times 1_{\Omega\times\Omega})\\
&= \cap\circ(\Rightarrow\times\Rightarrow)\circ\langle\langle\pi_1\pi,\ \pi\pi'\rangle,\ \langle\pi'\pi,\ \pi'\pi_2\rangle\rangle\circ\langle\langle\pi,\pi\rangle,\ \pi'\rangle\\
&= \cap\circ(\Rightarrow\times\Rightarrow)\circ\langle\langle\pi,\ \pi\pi'\rangle,\ \langle\pi,\ \pi'\pi'\rangle\rangle\\
&= \cap\circ\langle\Rightarrow\circ\langle\pi,\ \pi\pi'\rangle,\ \Rightarrow\circ\langle\pi,\ \pi'\pi'\rangle\rangle\\
&= \cap\circ\langle\pi \mid\!\Rightarrow\pi\pi',\ \pi \mid\!\Rightarrow\pi'\pi'\rangle\\
&= (\pi \mid\!\Rightarrow\pi\pi') \wedge (\pi \mid\!\Rightarrow\pi'\pi').
\end{aligned}$$

Sea $(P,\ k)$ el igualador de $\pi : \Omega\times(\Omega\times\Omega) \longrightarrow \Omega$ y de $\cap\circ(1_\Omega\times\cap) : \Omega\times(\Omega\times\Omega) \longrightarrow \Omega$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "k=\langle\alpha,\ \langle\beta,\ \delta\rangle\rangle"] & \Omega\times(\Omega\times\Omega) \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[r, shift right, "\cap\circ(1_\Omega\times\cap)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

$\alpha\cap\beta\cap\delta = \alpha$ si y sólo si $\alpha \leq \beta\cap\delta$. Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\langle\alpha,\ \langle\beta,\ \delta\rangle\rangle"] \arrow[d, dotted, "h"'] & \Omega\times(\Omega\times\Omega) \arrow[d, "\langle\pi,\ \cap\pi'\rangle"] & \\
\textcircled{$\le$} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[r, shift right, "\cap"'] \arrow[d, "\Rightarrow"] & \Omega \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega &
\end{tikzcd}$$

diag. H.1

Como

$$\begin{aligned}
\pi\circ\langle\pi,\cap\pi'\rangle\circ\langle\alpha,\ \langle\beta,\delta\rangle\rangle &= \pi\circ\langle\alpha,\ \beta\wedge\delta\rangle\\
&= \alpha\\
&= \alpha\wedge\beta\wedge\delta\\
&= \cap\circ\langle\alpha,\ (\beta\wedge\delta)\rangle\\
&= \cap\circ\langle\pi,\cap\pi'\rangle\circ\langle\alpha,\ \langle\beta,\ \delta\rangle\rangle,
\end{aligned}$$

existe una única $h : P \longrightarrow \textcircled{$\le$}$ tal que $\langle\pi,\ \cap\pi'\rangle\circ\langle\alpha,\ \langle\beta,\ \delta\rangle\rangle = j\circ h$. Por lo tanto el cuadrado superior de H.1 conmuta.

Sean $\langle f, \langle g, g'\rangle\rangle : D \longrightarrow P$ y $e : D \longrightarrow P$ tales que
$\langle \Pi, \cap\Pi'\rangle \circ \langle f, \langle g, g'\rangle\rangle = j \circ e$, de donde $\langle f, g \wedge g'\rangle = j \circ e$, si y sólo si $f = \Pi \circ j \circ e$.

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
\cap \circ \langle \Pi, \cap\Pi'\rangle \circ \langle f, \langle g, g'\rangle\rangle &= \cap \circ \langle f, g \wedge g'\rangle \\
&= \cap \circ j \circ e \\
&= f \wedge g \wedge g'.
\end{aligned}
$$

Pero j es el igualador de π y de $\cap$, por lo tanto $f = f \wedge g \wedge g'$, si y sólo si $f \leq g \wedge g'$.

La inclusión $i : D \longrightarrow P$ es tal que $\langle \alpha, \langle \beta, \delta\rangle\rangle \circ i = \langle f, \langle g, g'\rangle\rangle$ y $h \circ i = e$.
Por lo tanto el cuadrado superior de H.1 es un producto fibrado.
Consideremos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "{\langle \alpha, \langle \beta, \delta\rangle\rangle}"] \arrow[d] & \Omega \times (\Omega \times \Omega) \arrow[d, "{\langle \Pi \Rightarrow \Pi\Pi', \, \Pi \Rightarrow \Pi'\Pi'\rangle}"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

diag. H.2

$$
\begin{aligned}
\langle \Pi \mid\!\Rightarrow \Pi\Pi', \Pi \mid\!\Rightarrow \Pi'\Pi'\rangle \circ \langle \alpha, \langle \beta, \delta\rangle\rangle &= (\Rightarrow \times \Rightarrow) \circ \langle\langle \Pi, \Pi\Pi'\rangle, \langle \Pi, \Pi'\Pi'\rangle\rangle \circ \langle \alpha, \langle \beta, \delta\rangle\rangle \\
&= (\Rightarrow \times \Rightarrow) \circ \langle\langle \alpha, \beta\rangle, \langle \alpha, \delta\rangle\rangle \\
&= \langle \alpha \mid\!\Rightarrow \beta, \alpha \mid\!\Rightarrow \delta\rangle.
\end{aligned}
$$

Demostraremos que $\alpha \mid\!\Rightarrow \beta = T_P$ y $\alpha \mid\!\Rightarrow \delta = T_P$.

Por definición

$$
\begin{tikzcd}
\textcircled{\scriptsize S} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

diag. H.3

es un producto fibrado.

Sean $\langle \alpha, \beta\rangle : P \longrightarrow \Omega \times \Omega$ y $l_P : P \longrightarrow 1$, con P definida anteriormente. Como $\alpha \leq \alpha \wedge \beta \wedge \delta \leq \beta$, entonces $\alpha \wedge \beta = \alpha$, luego $\cap \circ \langle \alpha, \beta\rangle = \Pi \circ \langle \alpha, \beta\rangle$. Por lo tanto existe una única $h : P \longrightarrow \textcircled{\scriptsize S}$ tal que

$$
\begin{tikzcd}
\circledS \arrow[r, "j"] & \Omega\times\Omega \arrow[r, shift left, "\Pi"] \arrow[r, shift right, "\sqcap"'] & \Omega \\
& P \arrow[ul, dotted, "h"] &
\arrow[from=1-2, to=2-2, "{\langle\alpha,\beta\rangle}"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta. De donde

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\circ\langle\alpha,\beta\rangle &= \Rightarrow\circ j\circ h \\
&= T\circ !_{\circledS}\circ h \\
&= T_P.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\alpha \mid\!\Rightarrow \beta = T_P$. Análogamente se demuestra que $\alpha \mid\!\Rightarrow \delta = T_P$.

Así obtenemos que $\langle \Pi \mid\!\Rightarrow \Pi\Pi', \Pi \mid\!\Rightarrow \Pi'\Pi'\rangle\circ\langle\alpha, \langle\beta, \delta\rangle\rangle = \langle T_P, T_P\rangle$, luego H.2 conmuta.

Sean $\langle\theta, \langle\Psi, \Phi\rangle\rangle : C \longrightarrow \Omega\times(\Omega\times\Omega)$ y $!_C : C \longrightarrow 1$ tales que

$$
\begin{aligned}
&\langle \Pi \mid\!\Rightarrow \Pi\Pi', \Pi \mid\!\Rightarrow \Pi'\Pi'\rangle\circ\langle\theta, \langle\Psi, \Phi\rangle\rangle = \langle T_C, T_C\rangle, \quad \text{si y sólo si} \\
&\langle \theta \mid\!\Rightarrow \Psi, \theta \mid\!\Rightarrow \Phi\rangle = \langle T_C, T_C\rangle, \quad \text{si y sólo si} \\
&\qquad\qquad \theta \mid\!\Rightarrow \Psi = T_C \qquad \text{y} \qquad \theta \mid\!\Rightarrow \Phi = T_C.
\end{aligned}
$$

Como H.3 es un producto fibrado, existen $k : C \longrightarrow \circledS$ y $k' : C \longrightarrow \circledS$ únicas tales que $j\circ k = \langle\theta, \Psi\rangle$ y $j\circ k' = \langle\theta, \Phi\rangle$.

Pero $\Pi\circ j = \sqcap\circ j$, luego

$$
\begin{aligned}
\Pi\circ j\circ k &= \sqcap\circ j\circ k \\
\Pi\circ\langle\theta, \Psi\rangle &= \sqcap\circ\langle\theta, \Psi\rangle \quad \text{si y sólo si} \\
\theta &= \theta\wedge\Phi.
\end{aligned}
$$

Análogamente $\theta = \theta\wedge\Psi$. Por lo tanto $\theta = \theta\wedge\Phi\wedge\Psi$.

La inclusión $i' : C \longrightarrow P$ es tal que $\langle\alpha, \langle\beta, \delta\rangle\rangle\circ i = \langle\theta, \langle\Psi, \Phi\rangle\rangle$. Por lo tanto el diagrama H.2 es un producto fibrado.

Por la unicidad en el Ω-axioma $\Rightarrow\circ\langle\Pi, \sqcap\Pi'\rangle = \langle \Pi \mid\!\Rightarrow \Pi\Pi', \Pi \mid\!\Rightarrow \Pi'\Pi'\rangle$, de donde el diagrama H conmuta. □

i) Afirmación. El siguiente triángulo conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "\Delta_\Omega"] \arrow[dr, "1_\Omega"'] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cup"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}
\qquad \text{diag. I}
$$

Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "T"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\Delta_\Omega"] \\ e \arrow[r, "i"'] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cup"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

diag. I.1

El cuadrado inferior es un producto fibrado por definición, donde $i : e \longrightarrow \Omega\times\Omega$ es tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} \Omega+\Omega \arrow[rr, "{[\langle T_\Omega,\, 1_\Omega\rangle,\, \langle 1_\Omega,\, T_\Omega\rangle]}"] \arrow[dr, two heads, "f^*"'] & & \Omega\times\Omega \\ & e \arrow[ur, tail, "i"'] & \end{tikzcd}$$

diag. I.2

Probaremos que el cuadrado superior de I.1 es un producto fibrado.
Si demostramos que en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T"'] & \Omega \arrow[d, "\Delta_\Omega"] & 1 \arrow[l, "T"'] \arrow[d, "T"] \\ \Omega \arrow[r, "{\langle T_\Omega,\, 1_\Omega\rangle}"'] & \Omega\times\Omega & \Omega \arrow[l, "{\langle 1_\Omega,\, T_\Omega\rangle}"] \end{tikzcd}$$

diag. I.3

ambos cuadrados son productos fibrados entonces –por el Teorema A.2– el siguiente diagrama también lo es,

$$\begin{tikzcd}
1+1 \arrow[r, "T+T"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\Delta_\Omega"] \\
\Omega+\Omega \arrow[r, "{[\langle T_\Omega,\, 1_\Omega\rangle,\, \langle 1_\Omega,\, T_\Omega\rangle]}"'] & \Omega\times\Omega
\end{tikzcd}$$

diag. I.4

de donde, por el Teorema III.10, los cuadrados de

$$\begin{tikzcd}
1+1 \arrow[r, two heads, "{[T,\, T]^*}"] \arrow[d] & c \arrow[r, tail, "{im[T,\, T]}"] \arrow[d, dotted, "h"] & \Omega \arrow[d, "\Delta_\Omega"] \\
\Omega+\Omega \arrow[r, two heads, "f^*"'] & e \arrow[r, tail, "i"'] & \Omega\times\Omega
\end{tikzcd}$$

diag. I.5

son productos fibrados.

Luego

$$1+1 \xrightarrow{[T,\, T]^*} c \xrightarrow{im[T,\, T]} \Omega$$

es una epimono-factorización de $[T, T] : 1+1 \longrightarrow \Omega$ sin embargo

$$1+1 \xrightarrow{[1,\, 1]} 1 \xrightarrow{T} \Omega$$

también es una epimono-factorización de $[T, T]$, de donde -por el Teorema III.9- existe un único isomorfismo $k : C \longrightarrow 1$. Por lo tanto el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "h"'] & \Omega \arrow[d, "\Delta_\Omega"] \\
e \arrow[r, tail, "i"'] & \Omega\times\Omega
\end{tikzcd}$$

diag. I.6

Regresando al diagrama I.3 tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_\Omega \circ T &= \langle T, T \rangle \\ &= \langle T_\Omega \circ T,\ 1_\Omega \circ T \rangle \\ &= \langle T_\Omega,\ 1_\Omega \rangle \circ T \ , \end{aligned}$$

luego el cuadrado izquierdo del diagrama I.3 conmuta.
Sean $f : D \longrightarrow \Omega$ y $g : D \longrightarrow \Omega$ tales que $\Delta_\Omega \circ f = \langle T_\Omega, 1_\Omega \rangle \circ g$, si y sólo si $f = g = T_\Omega \circ g = T_D$. El morfismo $!_D : D \longrightarrow 1$ es tal que $T \circ !_D = f$ y $T \circ !_D = g$. Luego este diagrama es un producto fibrado.
Análogamente el cuadrado derecho de I.3 es un producto fibrado.

Por el Teorema A.1, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "T"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "U \circ \Delta_\Omega"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, luego por unicidad $U \circ \Delta_\Omega = 1_\Omega$.
Por lo tanto el diagrama I conmuta. □

j) Afirmación. El siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} \Omega \times \Omega \arrow[r, "U"] \arrow[d, "h"'] & \Omega \\ \Omega \times \Omega \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd}$$

diag. J

con $h = \langle \Pi', \Pi \rangle$ isomorfismo.
Por la observación 4.d, el cuadrado superior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, tail, "h^{-1}\circ i"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "h"] \\
e \arrow[r, tail, "i"'] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "U"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

diag. J.1

es un producto fibrado, de donde

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "U\circ h"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

también lo es. Así, $U = U\circ h$ y el triángulo J conmuta. □

k) Afirmación. El siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\Omega\times\Omega \arrow[dr, "\cap"'] & \Omega\times\Omega \arrow[l, "\langle \pi, U\rangle"'] \arrow[r, "\langle \pi, \cap\rangle"] \arrow[d, "\pi"] & \Omega\times\Omega \arrow[dl, "U"] \\
 & \Omega &
\end{tikzcd}$$

diag. K

Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "{\langle T_\Omega, 1_\Omega \rangle}"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "{\langle \Pi, U \rangle}"] \\
1 \arrow[r, "{\langle T, T \rangle}"'] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

diag. K.1

El cuadrado inferior es un producto fibrado; si demostramos que el cuadrado superior también lo es, tendremos que

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "{\langle T_\Omega, 1_\Omega \rangle}"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "{\cap\circ\langle \Pi, U \rangle}"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

diag. K.2

es un producto fibrado.

El cuadrado superior conmuta pues

$$\begin{aligned}
\langle \Pi, U \rangle\circ\langle T_\Omega, 1_\Omega \rangle &= \langle T_\Omega, T_\Omega \vee 1_\Omega \rangle \\
&= \langle T_\Omega, T_\Omega \rangle \quad \text{(Ver observación 4.k)} \\
&= \langle T, T \rangle\circ !_\Omega .
\end{aligned}$$

Sean $\langle f, g \rangle : D \longrightarrow \Omega\times\Omega$ y $!_\Omega : \Omega \longrightarrow 1$ tales que $\langle \Pi, U \rangle\circ\langle f, g \rangle = \langle T, T \rangle\circ !_D$, si y sólo si $f = T_D$ y $f \vee g = T_D$.

El morfismo $g : D \longrightarrow \Omega\times\Omega$ es tal que $\langle T_\Omega, 1_\Omega \rangle\circ g = \langle T_\Omega\circ g, g \rangle = \langle f, g \rangle$. Por lo tanto el cuadrado superior de K.1 es un producto fibrado.

Claramente el siguiente cuadrado es un producto fibrado,

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "{\langle T_\Omega,\, 1_\Omega\rangle}"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\Pi"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

diag. K.3

luego por unicidad, $\Pi = U\circ\langle \Pi, u\rangle$. Por lo tanto el triángulo izquierdo del. diagrama K conmuta.

Observación 4.k. $T_\Omega \vee 1_\Omega = T_\Omega$.

Consideramos el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[dr, dotted, "f^*\circ i_1"] \arrow[drr, "{\langle T_\Omega,\, 1_\Omega\rangle}"] \arrow[ddr, "!_\Omega"'] & & \\
& e \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "U"] \\
& 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Existe una única $k : \Omega \longrightarrow e$ tal que $i\circ k = \langle T_\Omega, 1_\Omega\rangle$ y $!_e\circ k = !_\Omega$.
Consideremos la inclusión $i_1 : \Omega \longrightarrow \Omega+\Omega$ y $f^* : \Omega+\Omega \longrightarrow e$ el epimorfismo de la epimono-factorizaci ón $[\langle T_\Omega, 1_\Omega\rangle, \langle 1_\Omega, T_\Omega\rangle] : \Omega+\Omega \longrightarrow \Omega\times\Omega$.
Como

$$\begin{aligned}
i\circ f^*\circ i_1 &= [\langle T_\Omega, 1_\Omega\rangle, \langle 1_\Omega, T_\Omega\rangle]\circ i_1 \\
&= \langle T_\Omega, 1_\Omega\rangle \\
&= i\circ k \quad \text{y, por otra parte,} \\
!_e\circ f^*\circ i_1 &= !_\Omega = !_e\circ k,
\end{aligned}$$

entonces $k = f^*\circ i_1$. Así

$$\begin{aligned}
U\circ\langle T_\Omega, 1_\Omega\rangle &= U\circ i\circ f^*\circ i_1 \\
&= T\circ !_e\circ f^*\circ i_1 \\
&= T_\Omega.
\end{aligned}$$

□

l) Afirmación. El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
1\times\Omega \arrow[r, "\perp\times 1_\Omega"] \arrow[dr, "\pi"'] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "U"] & \Omega\times 1 \arrow[l, leftarrow, "1_\Omega\times\perp"'] \arrow[dl, "\pi'"] \\
 & \Omega &
\end{tikzcd}$$

diag. L

m) Afirmación. El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(\Omega\times\Omega)\times\Omega \arrow[r, "U\times 1_\Omega"] \arrow[dd, "\Psi"'] & \Omega\times\Omega \arrow[dr, "U"] & \\
 & & \Omega \\
\Omega\times(\Omega\times\Omega) \arrow[r, "1_\Omega\times U"'] & \Omega\times\Omega \arrow[ur, "U"'] &
\end{tikzcd}$$

diag. M

con $\Psi = \langle \pi\Pi, \langle \pi'\Pi, \Pi' \rangle\rangle$.

La conmutatividad del triángulo derecho del diagrama K y la de los diagramas L y M no la presentaremos en este trabajo, pues no llegamos a concretar su demostración. Sin embargo sabemos que existe otra forma de demostrar este Teorema partiendo del hecho de que Sub(d) es un álgebra de Heyting , como lo vimos en el Capítulo **III**.
Si consideramos válido este resultado podemos demostrar a continuación que Sub(D) es un álgebra de Heyting.

S.2 Sea **E** un Topo. Los objetos de la categoría $\mathbf{Set}^{\mathbf{E}^{op}}$ son los funtores $F : \mathbf{E}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, y sus morfismos son transformaciones naturales.
Suponemos que ya se sabe que esta categoria es bicompleta.

Teorema IV.2. $\mathbf{Set}^{\mathbf{E}^{op}}$ es un Topo.
Para facilitar la continuidad de la exposición, la demostración de este teorema se

encuentra en el Apéndice.

A continuación demostraremos que $\mathrm{Hom}(\_,\Omega)$ es isomorfo a Sub.
Sea E un Topo. Definimos $\mathrm{Sub} : E \longrightarrow \mathbf{Set}$ como sigue
Para todo objeto $D \in E$, $\mathrm{Sub}(D) \in \mathbf{Set}$.
Para todo morfismo $f : D \longrightarrow D'$ de E y $m : A \longrightarrow D'$, consideramos el producto fibrado de f y m

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "m'"] \arrow[d, "f'"'] & D \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, tail, "m"'] & D'
\end{tikzcd}$$

y definimos $\mathrm{Sub}(f)(m) = m'$.
Sean $n : C \rightarrowtail D'$, $m : A \rightarrowtail D'$ y $f : D \longrightarrow D'$ tales que $n = m$; luego, existe $h : A \longrightarrow C$ isomorfismo tal que $m = n \circ h$ y $n = m \circ h^{-1}$. Consideramos el producto fibrado de (f, n) y el de (f, m)

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[rrd, tail, "m'"] \arrow[ddd, "f''"'] & & \\
& C' \arrow[r, tail, "n'"] \arrow[d, "f'"'] & D \arrow[d, "f"] \\
& C \arrow[r, tail, "n"'] \arrow[dl, shift right, "h^{-1}"'] & D' \\
A \arrow[ur, shift right, "h"'] \arrow[urr, tail, "m"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde $(\mathrm{Sub}(f))(n) = n'$; $(\mathrm{Sub}(f))(m) = m'$.
Como $f \circ m' = m \circ f'' = n \circ h \circ f''$, existe una única $k : A' \longrightarrow C'$ tal que $n' \circ k = m'$. Por lo tanto $m' \leq n'$.
Como $f \circ n' = n \circ f' = m \circ h^{-1} \circ f'$, existe una única $k' : C' \longrightarrow A'$ tal que $m' \circ k' = n'$, de donde $n' \leq m'$. Por lo tanto $\mathrm{Sub}(f)$ no depende del representante.

Supongamos que $m : A \longrightarrow D'$ y $n : C \longrightarrow D'$ son tales que $m \leq n$. Existe $\alpha : A \longrightarrow C$ tal que $m = n \circ \alpha$.

Como $f \circ m' = m \circ f'' = n \circ \alpha \circ f''$, existe una única $\beta : A' \longrightarrow C'$ tal que $n' \circ \beta = m'$; es decir, $(Sub(f))(m) \leq (Sub(f))(n)$. Por lo tanto el funtor Sub preserva el orden.

Teorema IV.3. $Sub : E \longrightarrow$ **Set** es un funtor contravariante.

Demostración.

Sean $f : D \longrightarrow D'$, $g : D \longrightarrow D''$ morfismos de E; $m : A \rightarrowtail D$, $m' : A' \rightarrowtail D'$ y $m'' : A'' \rightarrowtail D''$ tales que

$$(Sub(f))(m') = m \quad y \quad (Sub(g))(m'') = m'.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}[(Sub(f)) \circ (Sub(g))](m'') &= (Sub(f))(m') \\ &= m \\ &= (Sub(g \circ f))(m'').\end{aligned}$$

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "1_A"'] & D \arrow[d, "1_D"] \\ A \arrow[r, tail, "m"'] & D \end{tikzcd}$$

diag. 4.3.a

Claramente el cuadrado conmuta.

Sean $h : B \longrightarrow D$ y $h' : B \longrightarrow A$ tales que $1_D \circ h = m \circ h'$, luego 4.3.a es un producto fibrado, de donde $Sub(1_D) = 1_{Sub(D)}$. Por lo tanto Sub es un funtor contravariante. □

Definición. Sea **C** una categoría con conjuntos Hom pequeños.Una *representación de un funtor* $K : \mathbf{C} \longrightarrow$ **Set** (contravariante) es una pareja (r, Φ), con r un objeto de **C** y $\Phi : \mathbf{C}(\_, r) \cong K$ un isomorfismo natural. El objeto r se llama el *objeto representante*.

Teorema IV.4. Sea E un Topo. Si Ω es el clasificador de subobjetos de E, entonces Ω es el objeto representante del funtor $Sub : E \longrightarrow$ **Set**.

Demostración. Definimos $\Phi : Sub \longrightarrow E(\_, \Omega)$ como sigue

Si D es un objeto de E, entonces $\Phi(D) = \Phi_D : Sub(D) \longrightarrow E(D, \Omega)$ es tal que para toda $f : A \rightarrowtail D$, $\Phi_D(f) = \chi_f$, donde χ_f es el morfismo característico de f.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
D & \mathrm{Sub}(D) \arrow[r, "\Phi_D"] \arrow[d, "\mathrm{Sub}(g)"] & E(D, \Omega) \arrow[d, "E(g, \Omega)"] \\
D' \arrow[u, "g"] & \mathrm{Sub}(D') \arrow[r, "\Phi_{D'}"'] & E(D', \Omega)
\end{tikzcd}$$

diag. 4.4.a

Sea $f : A \longrightarrow D$,

$$(E(g, \Omega) \circ \Phi_D)(f) = E(g, \Omega)(\chi_f) = \chi_f \circ g.$$
$$(\Phi_{D'} \circ \mathrm{Sub}(g))(f) = \Phi_{D'}(f') = \chi_{f'}\,, \quad \text{donde } f' : A' \rightarrowtail D' \text{ es tal que}$$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & D' \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, tail, "f"'] & D
\end{tikzcd}$$

diag. 4.4.b

es un producto fibrado.

En los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "!_C"'] & & \\
& A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "!_{A'}"] & D' \arrow[d, "\chi_f \circ g"] \\
& 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

diag. 4.4.c

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dotted, "k'"] \arrow[drr, bend left, "g \circ h"] \arrow[ddr, bend right, "!_C"'] & & \\
& A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_A"] & D \arrow[d, "\chi_f"] \\
& 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

diag. 4.4.d

$$\begin{aligned}
(\chi_f \circ g) \circ f' &= \chi_f \circ g \circ f' \\
&= \chi_f \circ f \circ g' \\
&= T \circ !_{A'}\ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\chi_f \circ g)$ hace conmutar el cuadrado interno de 4.4.c.

Sean $h : C \longrightarrow D'$ y $!_C : C \longrightarrow 1$ tales que $(\chi_f \circ g)\, h = T \circ !_C$.

Como el cuadrado interior de 4.4.d es un producto fibrado, existe una única $k' : C \longrightarrow A$ tal que $f \cdot k' = g \cdot h$ y $1_A \cdot k' = !_C$. El diagrama 4.4.b es un producto fibrado, luego existe una única $k : C \longrightarrow A'$ tal que $f' \cdot k = h$ y $g' \cdot k = k'$; de donde $f' \cdot k = h$, $1_{A'} \cdot k = !_C$ y el cuadrado 4.4.c es un producto fibrado, pero por la unicidad en el Ω-axioma $\chi_f \cdot g = \chi_{f'}$.
Por lo tanto el diagrama 4.4.a conmuta y Φ es una transformación natural.
Definimos $\Theta : E(\_, \Omega) \longrightarrow \mathrm{Sub}$. Sea D un objeto de E,

$\Theta(D) = \Theta_D : E(D, \Omega) \longrightarrow \mathrm{Sub}(D)$ es tal que para toda

$f : D \longrightarrow \Omega$, $\Theta_D(f) = f'$ donde $f' : A' \rightarrowtail D$ es tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d] & D \arrow[d, "f"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Sean D un objeto de E, $f : D \longrightarrow \Omega$ y $g : A \longrightarrow D$

$$\begin{aligned}
[\Phi \cdot \Theta](D)(f) &= [\Phi(\Theta(D))](f) \\
&= \Phi(\Theta_D(f)) \\
&= \Phi(f') \\
&= \chi_{f'},
\end{aligned}$$

con f' definida anteriormente.
Por unicidad, $f = \chi_{f'}$ y por lo tanto $\Phi \cdot \Theta = 1_{E(-, \Omega)}$.

$$\begin{aligned}
[\Theta \cdot \Phi](D)(g) &= [\Theta(\Phi(D))](g) \\
&= \Theta(\Phi_D(g)) \\
&= \Theta(\chi g) \\
&= (\chi g)',
\end{aligned}$$

donde $(\chi g)'$ es tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "(\chi_g)'"] \arrow[d] & D \arrow[d, "\chi_g"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Por unicidad $(xg)' = g$, de donde $\Theta \circ \Phi = 1_{Sub}$.

Por lo tanto Φ es un isomorfismo natural y $Hom(\_, \Omega) \cong Sub$. $\square$

Para demostrar que $Hom(\_, \Omega)$ es álgebra de Heyting es necesario definir los morfismos $\cap^*$, $\cup^*$, $\Rightarrow^*$, $\top^*$, $\perp^*$ y demostrar que son transformaciones naturales.

Consideremos el isomorfismo $\Phi : Hom(\_, \Omega) \times Hom(\_, \Omega) \longrightarrow Hom(\_, \Omega \times \Omega)$ dado por $\Phi_D(f, g) = \langle f, g \rangle$.

i) $\cap^* : Hom(\_, \Omega) \times Hom(\_, \Omega) \longrightarrow Hom(\_, \Omega)$ es tal que $\cap^* = \cap^{\cdot} \circ \Phi$, donde $\cap^{\cdot} = Hom(\cap, \Omega) : Hom(\_, \Omega \times \Omega) \longrightarrow Hom(\_, \Omega)$.

Sean A un objeto de E y $f, g : A \longrightarrow \Omega$. Así

$$\begin{aligned} \cap^*{}_A(f, g) &= (\cap^{\cdot} \circ \Phi)(f, g) \\ &= \cap \circ \langle f, g \rangle \\ &= f \wedge g. \end{aligned}$$

El diagrama

$$\begin{tikzcd} A & Hom(A, \Omega) \times Hom(A, \Omega) \arrow[r, "\cap^*_A"] \arrow[d, "Hom(k, \Omega) \times Hom(k, \Omega)"] & Hom(A, \Omega) \arrow[d, "Hom(k, \Omega)"] \\ B \arrow[u, "k"] & Hom(B, \Omega) \times Hom(B, \Omega) \arrow[r, "\cap^*_B"'] & Hom(A, \Omega) \end{tikzcd}$$

conmuta ya que

$$\begin{aligned} [Hom(k, \Omega) \circ \cap^*{}_A](f, g) &= Hom(k, \Omega)(\cap \circ \langle f, g \rangle) \\ &= (\cap \circ \langle f, g \rangle) \circ k \\ &= (f \wedge g) \circ k \\ &= \cap \circ \langle fk, \ gk \rangle \\ &= \cap^*{}_B \langle fk, \ gk \rangle \\ &= [\ \cap^*{}_B \circ (Hom(k, \Omega) \times Hom(k, \Omega))](f, g). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\cap^*$ es una transformacion natural.

ii) $U^* : \mathrm{Hom}(\_, \Omega) \times \mathrm{Hom}(\_, \Omega) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_, \Omega)$ está dado por $U^* = U^{\cdot} \circ \Phi$ donde $U^{\cdot} = \mathrm{Hom}(U, \Omega) : \mathrm{Hom}(\_, \Omega \times \Omega) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_, \Omega)$.
Sean A un objeto de E y $f, g : A \longrightarrow \Omega$. Luego

$$\begin{aligned} U^*{}_A(f, g) &= (U^{\cdot} \circ \Phi)(f, g) \\ &= U^{\cdot}(\langle f, g \rangle) \\ &= U \circ \langle f, g \rangle \\ &= f \vee g. \end{aligned}$$

El diagrama

$$\begin{tikzcd} A & \mathrm{Hom}(A, \Omega) \times \mathrm{Hom}(A, \Omega) \arrow[r, "U^*_A"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(k, \Omega) \times \mathrm{Hom}(k, \Omega)"] & \mathrm{Hom}(A, \Omega) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(k, \Omega)"] \\ B \arrow[u, "k"] & \mathrm{Hom}(B, \Omega) \times \mathrm{Hom}(B, \Omega) \arrow[r, "U^*_B"'] & \mathrm{Hom}(A, \Omega) \end{tikzcd}$$

conmuta ya que

$$\begin{aligned} [\mathrm{Hom}(k, \Omega) \circ U^*{}_A](f,g) &= \mathrm{Hom}(k, \Omega)(f \vee g) \\ &= ((f \vee g)) \circ k \\ &= U \circ \langle f, g \rangle \circ k \\ &= U \circ \langle fk, gk \rangle \\ &= U^*{}_B(f \circ k, g \circ k) \\ &= [U^*{}_B(\mathrm{Hom}(k, \Omega) \times \mathrm{Hom}(k, \Omega))](f, g). \end{aligned}$$

Por lo tanto U^* es una transformación natural.

iii) La implicación $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ determina un morfismo en $\mathbf{Set}^{E^{op}}$ que denotamos por $\Rightarrow^* : \mathrm{Hom}(\_, \Omega) \times \mathrm{Hom}(\_, \Omega) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_, \Omega)$ y es tal que si A es un objeto de E y $f, g : A \longrightarrow \Omega$, entonces

$$(\Rightarrow^*)_A(f, g) = (\Rightarrow \circ \Phi)(f, g) = f \,|\!\Rightarrow g.$$

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A & \mathrm{Hom}(A,\Omega)\times\mathrm{Hom}(A,\Omega) \arrow[r, "(\Rightarrow^*)_A"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(k,\Omega)\times\mathrm{Hom}(k,\Omega)"] & \mathrm{Hom}(A,\Omega) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(k,\Omega)"] \\
B \arrow[u, "k"] & \mathrm{Hom}(B,\Omega)\times\mathrm{Hom}(B,\Omega) \arrow[r, "(\Rightarrow^*)_B"'] & \mathrm{Hom}(A,\Omega)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Hom}(k,\ \Omega)\circ(\Rightarrow^*)_A](f,\ g) &= \mathrm{Hom}(k,\ \Omega)(f \models g) \\
&= ((f \models g))\circ k \\
&= \Rightarrow\circ\langle f,\ g\rangle\circ k \\
&= (\Rightarrow^*)_B\langle fk,\ gk\rangle \\
&= [(\Rightarrow^*)_B\circ\mathrm{Hom}(k,\ \Omega)\times\mathrm{Hom}(k,\ \Omega)](f,\ g),
\end{aligned}$$

por lo tanto el diagrama conmuta.

iv) Sea $T^* : \mathrm{Hom}(\_,\ 1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,\ \Omega)$ tal que si A es un objeto de E y $f : A \longrightarrow 1$, $T^*{}_A(f) = T\circ f$. Claramente el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A & \mathrm{Hom}(A,1) \arrow[r, "T^*_A"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(h,1)"] & \mathrm{Hom}(A,\Omega) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(h,\Omega)"] \\
B \arrow[u, "h"] & \mathrm{Hom}(B,1) \arrow[r, "T^*_B"'] & \mathrm{Hom}(B,\Omega)
\end{tikzcd}$$

luego $T^* : \mathrm{Hom}(\_,\ 1) : \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,\ \Omega)$ es una transformación natural.

v) Por último, $\perp^* : \mathrm{Hom}(\_,\ 1) : \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,\ \Omega)$ está dada por $\perp^*{}_A(f) = \perp\circ f$, con A un objeto de E y $f : A \longrightarrow \Omega$ un morfismo de E.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Hom}(h,\ \Omega)\circ \perp^*{}_A)(f) &= \mathrm{Hom}(h,\ \Omega)(\perp\circ f) \\
&= \perp\circ f\circ h \\
&= \perp^*{}_B(f\circ h) \\
&= [\perp^*{}_B\circ\mathrm{Hom}(h,\ 1)](f),
\end{aligned}$$

por lo tanto $\perp^* : \mathrm{Hom}(\_, 1) : \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_, \Omega)$ es una transformación natural.
El funtor $\mathrm{Hom}(\_, \Omega) : E^{op} \longrightarrow$ **Set** preserva diagramas conmutativos. Supongamos que el siguiente diagrama es conmutativo en E^{op}.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(g, \Omega)\circ\mathrm{Hom}(f, \Omega) &= \mathrm{Hom}(g\circ f, \Omega) \\ &= \mathrm{Hom}(k\circ h, \Omega) \\ &= \mathrm{Hom}(k, \Omega)\circ\mathrm{Hom}(h, \Omega). \end{aligned}$$

Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta en $\mathbf{Set}^{E^{op}}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(A, \Omega) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(f, \Omega)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(h, \Omega)"'] & \mathrm{Hom}(B, \Omega) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(g, \Omega)"] \\ \mathrm{Hom}(C, \Omega) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(k, \Omega)"'] & \mathrm{Hom}(D, \Omega) \end{tikzcd}$$

lo que demuestra el siguiente

Teorema IV.5. Si Ω es el clasificador de subobjetos de un Topo E y Ω tiene estructura de álgebra de Heyting en E, $\mathrm{Hom}(\_, \Omega)$ tiene estructura de álgebra de Heyting en $\mathbf{Set}^{E^{op}}$.

Corolario IV.5.1. Sea D un objeto de E. $\mathrm{Hom}(D, \Omega)$ es un álgebra de Heyting.
Demostración. Si consideramos los diagrama a), b), ..., m) de Teorema IV.2 y los morfismos $\chi_f : D \longrightarrow \Omega$, $\chi g : D \longrightarrow \Omega$ y $\chi_h : D \longrightarrow \Omega$ obtenemos los siguientes diagramas conmutativos.

a')
$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\langle !_D,\, \chi_f \rangle"] & 1\times\Omega \arrow[r, "T\times 1_\Omega"] \arrow[dr, "\pi'"'] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] & \Omega\times 1 \arrow[l, "1_\Omega\times T"'] \arrow[dl, "\pi"] & D \arrow[l, "\langle \chi_f,\, !_D \rangle"'] \\
 & & \Omega & &
\end{tikzcd}
$$

b')
$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\chi_f"] & \Omega \arrow[r, "\Delta_\Omega"] \arrow[dr, "1_\Omega"'] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] \\
 & & \Omega
\end{tikzcd}
$$

⋮

m')
$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\langle \chi_f, \langle \chi_g, \chi_h \rangle \rangle"] & (\Omega\times\Omega)\times\Omega \arrow[r, "\cup\times 1_\Omega"] \arrow[d, "\Psi"'] & \Omega\times\Omega \arrow[dr, "\cup"] & \\
 & & & \Omega \\
 & \Omega\times(\Omega\times\Omega) \arrow[r, "1_\Omega\times\cup"'] & \Omega\times\Omega \arrow[ur, "\cup"'] &
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto $\mathrm{Hom}(D, \Omega)$ es un álgebra de Heyting. □

Por el Teorema IV.4 $\mathrm{Hom}(D, \Omega) \cong \mathrm{Sub}$, luego $\mathrm{Sub}(D)$ es un álgebra de Heyting.

Apéndice

Teorema A.1. Si un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "j"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \arrow[r, "l"'] & F \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces

i) Si los dos cuadrados son productos fibrados, el rectángulo lo es.

ii) Si el rectángulo y el cuadrado derecho son productos fibrados, entonces el cuadrado izquierdo lo es.

Teorema A.2. Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "i"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"'] & B' \arrow[d, "i"] \\ C' \arrow[r, "g'"'] & D' \end{tikzcd}$$

son productos fibrados en cualquier Topo E, entonces

$$\begin{tikzcd} A+A' \arrow[r, "{[f, f']}"] \arrow[d, "h+h'"'] & B+B' \arrow[d, "i"] \\ C+C' \arrow[r, "{[g, g']}"'] & D+D' \end{tikzcd}$$

también lo es.

Teorema IV.4. $\mathbf{Set}^{E^{op}}$ es un Topo.

Demostración. Sean $S, R : E^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ funtores. Definimos $S^R : E^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$

a) En los objetos

Si $A \in E^{op}$, entonces $S^R(A) = Nat(E(\_, A)xR, S)$.

b) En los morfismos

Sea $f : A' \longrightarrow A$ un morfismo de E.

Definimos $S^R(f) : S^R(A) \longrightarrow S^R(A')$ de modo tal que si $\Phi : E(\_, A)xR \longrightarrow S$ es una transformación natural, $S^R(f)(\Phi) = \Phi'$ con $\Phi' : E(\_, A')xR \longrightarrow S$ definida por $\Phi'_B (h, x) = \Phi_B (f \cdot h, x)$ donde B es un objeto de E, $h : B \longrightarrow A'$ y $x \in R(B)$.

Afirmación 1.1. $S^R(f)$ está bien definida.

Como $\Phi : E(\_, A)xR \longrightarrow S$ es transformación natural, el diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} E(B, A)xR(B) \arrow[r, "\Phi_B"] \arrow[d, "E(g, A)xR(g)"'] & S(B) \arrow[d, "S(g)"] & B \\ E(B', A)xR(B') \arrow[r, "\Phi_{B'}"'] & S(B') & B' \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Sea $(h, x) \in E(B, A)xR(B)$.

$$\begin{aligned} (S(g) \cdot \Phi'_B)(h, x) &= S(g)(\Phi'_B (h, x) \\ &= S(g)(\Phi_B (f \cdot h, x) \\ &= (\Phi_{B'} \cdot (E(g,A)xR(g))(f \cdot h, x) \\ &= \Phi_{B'} (f \cdot h \cdot g, R(g)(x)) \\ &= \Phi'_{B'} \cdot (E(g, A)xR(g))(h, x). \end{aligned}$$

Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta y Φ'_B es una transformación natural.

$$
\begin{tikzcd}
E(B, A'')\times R(B) \arrow[r, "\Phi'_B"] \arrow[d, "E(g,\, A)\times R(g)"'] & S(B) \arrow[d, "S(g)"] \\
E(B', A'')\times R(B') \arrow[r, "\Phi'_{B'}"'] & S(B')
\end{tikzcd}
$$

□

Afirmación 1.2. S^R es un funtor contravariante.

Sean $f : A' \longrightarrow A$, $f' : A'' \longrightarrow A'$ morfismos de E y $\Phi : E(\_, A)\times R \longrightarrow S$ una transformaci ón natural.

$S^R(f\cdot f') : S^R(A) \longrightarrow S^R(A'')$ es tal que $S^R(f\cdot f')(\Phi) = \Phi'$ donde $\Phi' : E(\_, A'')\times R \longrightarrow S$ está dada por $\Phi'_B\,(h, x) = \Phi_B\,(f\cdot f'\cdot h, x)$ con $x \in R(B)$ y $h : B \longrightarrow A''$.

Por otra parte

$S^R(f) : S^R(A) \longrightarrow S^R(A')$ es tal que $S^R(f)(\Phi) = \Psi$ donde $\Psi : E(\_, A')\times R \longrightarrow S$ está dada por $\Psi_C(h', y) = \Phi_C(f\cdot h', y)$ con $h' : C \longrightarrow A'$ y $y \in R(C)$.

$S^R(f') : S^R(A') \longrightarrow S^R(A'')$ es tal que $S^R(f')(\Psi) = \Psi'$ donde $\Psi' : E(\_, A'')\times R \longrightarrow S$ es una transformación natural dada por $\Psi'_B\,(h, x) = \Psi_B\,(f'\cdot h, x)$ con $h : b \longrightarrow A''$ y $x \in R(B)$.

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
(S^R(f')\cdot S^R(f))(\Phi) &= S^R(f')(S^R(f)(\Phi)) \\
&= S^R(f')(\Psi) \\
&= \Psi' \\
&= \Phi' \\
&= S^R(f\cdot f')(\Phi).
\end{aligned}
$$

Ademas $S^R(1_A)(\Phi) = \delta$ donde $\delta : E(\_, A)\times R \longrightarrow S$ es tal que

$$\delta_B\,(\alpha, x) = \Phi_B\,(1_A\cdot\alpha, x) = \Phi_B\,(\alpha, x) \quad \text{con} \quad \alpha : B \longrightarrow A \quad y \quad x \in R(B).$$

Por lo tanto $S^R(1_A) = 1_{S^R(A)}$ y S^R es un funtor contravariante. □

Definamos $\epsilon_{S,R} : S^R\times R \longrightarrow S$ dada por $\epsilon_{S,R}(A)(\eta, x) = \eta_A(1_A, x)$ donde $A \in E^{op}$, $x \in R(A)$ y $\eta : E(\_, A)\times R \longrightarrow S$ es una transformación natural.

Afirmación 1.3. $\epsilon_{S,R}$ es una transformación natural; es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
Nat(E(_, A)\times R, S)\times R(A) \arrow[r, "\epsilon_{S,R}(A)"] \arrow[d, "S^R(f)\times R(f)"'] & S(A) \arrow[d, "S(f)"] \\
Nat(E(_, A)\times R, S)\times R(A) \arrow[r, "\epsilon_{S,R}(B)"'] & S(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \\
B \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Sea $(\eta, x) \in Nat(E(\_, A)\times R, S) \times R(A)$.

$$\begin{aligned}(S(f)\circ\epsilon_{S,R}(A))(\eta, x) &= S(f)(\epsilon_{S,R}(A)(\eta, x)) \\ &= S(f)(\eta_A(1_A, x)).\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}[\epsilon_{S,R}(B)\circ S^R(f)\times R(f)](\eta, x) &= \epsilon_{S,R}(B)(S^R(f)\times R(f)(\eta,x)) \\ &= \epsilon_{S,R}(B)(\eta', z) \\ &= \eta'_B(1_B, z),\end{aligned}$$

donde $z = R(f)(x)$ y $\eta' : E(\_,B)\times R \longrightarrow S$.

Como η es transformación natural

$$\begin{tikzcd}
E(A, A)\times R(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "E(f, A)\times R(f)"'] & S(A) \arrow[d, "S(f)"] \\
E(B, A)\times R(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & S(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \\
B \arrow[u, "f"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, de donde

$$\begin{aligned}(S(f)\circ\eta_A)(1_A, x) &= (\eta_B\circ[E(f,A)\times R(f)])(1_A, x) \\ &= \eta_B(f, z) \\ &= \eta'_B(1_B, z).\end{aligned}$$

Por lo tanto $S(f)\circ\epsilon_{S,R}(A) = \epsilon_{S,R}(B)\circ S^R(f)\times R(f)$ y $\epsilon_{S,R}$ es, por su parte, una transformación natural. $\square$

Examinemos la universalidad de $\epsilon_{S,R}$.

Sea $Q : E^{op} \longrightarrow Set$ funtor contravariante y $\alpha : Q\times R \longrightarrow S$ una transformación natural.

Definimos $\alpha^* : Q \longrightarrow S^R$ tal que si A' es un objeto de E y $x \in Q(A')$, entonces $\alpha^*_{A'}(x) : E(\_, A)\times R \longrightarrow S$ está dada por $(\alpha^*_{A'}(x))_B(g, z) = \alpha_B(Q(g)(x), z)$, donde B es un objeto de E^{op}, $g : B \longrightarrow A'$ es un morfismo de E y $z \in R(B)$.
α^* está bien definida pues $Q(g)(x) \in Q(B)$ y $z \in R(B)$, luego $\alpha_B(Q(g)(x), z) \in S(B)$.

Afirmación 1.4. α^* es una transformación natural; es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
A' & Q(A') \arrow[r, "\alpha^*_{A'}"] \arrow[d, "Q(f)"'] & S^R(A') \arrow[d, "S^R(f)"] \\
B' \arrow[u, "f"] & Q(B') \arrow[r, "\alpha^*_{B'}"'] & S^R(B')
\end{tikzcd}$$

Sea $x \in Q(A')$. $\alpha^*_{A'}(x) : E(\_, A')\times R \longrightarrow S$, luego $(S^R(f)\circ\alpha^*_{A'})(x) = S^R(f)(\alpha^*_{A'}(x)) = \Phi'$ donde $\Phi' : E(\_, B')\times R \longrightarrow S$ esta dada por

$$\begin{aligned}\Phi'_B(h, z) &= (\alpha^*_{A'}(x))_B(f\circ h, z)\\ &= \alpha_B(Q(f\circ h)(x), z),\end{aligned}$$

donde B es un objeto de E, $h : B \longrightarrow B'$ es un morfismo de E y $z \in R(B)$.
Por otra parte, $(\alpha^*_{B'}\circ Q(f))(x) : E(\_, B')\times R \longrightarrow S$ es tal que

$$\begin{aligned}[\alpha^*_{B'}(Q(f)(x))]_B(h, z) &= \alpha_B(Q(h)[Q(f)(x)], z)\\ &= \alpha_B(Q(f\circ h)(x), z).\end{aligned}$$

Por lo tanto $S^R(f)\circ\alpha^*_{A'} = \alpha^*_{B'}\circ Q(f)$ y $\alpha^* : Q \longrightarrow S^R$ es una transformación natural. □

Para todo objeto A de E^{op} el siguiente diagrama conmuta, pues si $x \in Q(A)$ y $y \in R(A)$, entonces

$$\begin{tikzcd}
S(A)\times R(A) \arrow[rr, "\varepsilon_{S,R}(A)"] & & S(A) \\
& Q(A)\times R(A) \arrow[ul, dotted, "\alpha^*_A \times 1_{R(A)}"] \arrow[ur, "\alpha_A"'] &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{aligned}
[\epsilon_{S,R}(A)\circ(\alpha^*{}_A\times 1_{R(A)})](x,y) &= \epsilon_{S,R}(A)[\alpha^*{}_A(x), 1_{R(A)}(y)]\\
&= [\alpha^*{}_A(x)]_A(1_A, y)\\
&= \alpha_A[Q(1_A)(x), y]\\
&= \alpha_A(x,y).
\end{aligned}
$$

luego , el siguiente diagrama también conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
S^R\times R \arrow[rr, "\epsilon_{S,R}"] & & S \\
& Q\times R \arrow[ul, "\alpha^*\times 1_R"] \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}
$$

Solo nos falta probar que $\alpha^* : Q \longrightarrow S^R$ es única. Supongamos que existe $\beta : Q \longrightarrow S^R$ transformacion natural tal que el diagrama anterior conmuta; es decir, $\epsilon_{S,R}\circ(\beta\times 1_R) = \alpha$. Para todo objeto A de E y $(x, y) \in Q(A)\times R(A)$ tenemos

$(\epsilon_{S,R}(A)\circ(\beta_A\times 1_{R(A)}))(x,y) = \alpha_A(x,y)$ si y sólo si

$\epsilon_{S,R}(A)(\beta_A(x), y) = \alpha_A(x,y)$ si y sólo si

$(\beta_A(x))_A(1_A, y) = \alpha_A(x,y).$

Como β es una transformacion natural el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
A & Q(A) \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "Q(f)"'] & S^R(A) \arrow[d, "S^R(f)"] \\
A' \arrow[u, "f"] & Q(A') \arrow[r, "\beta_{A'}"'] & S^R(A')
\end{tikzcd}
$$

es decir $S_R(f)\circ\beta_A = \beta_{A'}\circ Q(f)$, luego si $x \in Q(A)$, $z \in R(B)$ y $h : B \longrightarrow A$ tenemos

$$[(S^R(f)\circ\beta_A)(x)]_B(h, z) = [(\beta_{A'}\circ Q(f))(x)]_B(h, z)$$

pero por otro lado

$$
\begin{aligned}
[(S^R(f)\circ\beta_A)(x)]_B(h,z) &= [S^R(f)(\beta_A(x)]_B(h,z)\\
&= (\beta_A(x))_B(f\circ h, z),
\end{aligned}
$$

por lo tanto $(\beta_A(x))_B(f\circ h,z) = [(\beta_{A'}\circ Q(f))(x)]_B(h,z)$.

Así

$$
\begin{aligned}
(\beta_A(x))_B(h, z) &= (\beta_A(x))_B(h\cdot 1_B, z)\\
&= [\beta_A\cdot(Q(h)(x))]_B(1_B, z)\\
&= \alpha_B(Q(h)(x), z), \text{ pues } \alpha_A(x, y) = (\beta_A(x))_A(1_A, y)\\
&= (\alpha^*{}_{A(x)})_B(h, z), \text{ por definición.}
\end{aligned}
$$

de donde $\beta = \alpha^*$ y α^* es única. Por lo tanto $\mathbf{Set}^{E^{op}}$ tiene exponenciación.

Para encontrar el clasificador de subobjetos de esta categoría necesitamos la siguiente

Definición. Sea A un objeto de E^{op}. Una *A-criba* es un conjunto C de morfismos con codominio A, cerrado bajo la composición derecha; es decir, si $f : A' \longrightarrow A \in C$ y $g : B \longrightarrow A'$, entonces $f\cdot g \in C$.

Definimos $\Omega : E^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$:

a) En los objetos

Si A es un objeto de E, entonces $\Omega(A) = S_A = \{C \mid C \text{ es una A-criba}\}$.

b) En los morfismos

Si $f : A' \longrightarrow A$ es un morfismo de E, entonces $\Omega(f)(C) = C' = \{g: B \longrightarrow A' \mid f\cdot g \in C\}$ donde $C \in S_A$. C' es una A'-criba pues si $g \in C'$ y $h : C \longrightarrow B$, entonces $f\cdot g \in C$, pero C es una A-criba, luego $f\cdot g\cdot h \in C$, de donde $g\cdot h \in C'$.

Afirmación 1.5. $\Omega : E^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es un funtor covariante.

Consideramos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
E^{op} \arrow[r, "\Omega"] & \mathrm{Set} \\
A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & S_A \arrow[d, "\Omega(f)"] \\
A' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & S_{A'} \arrow[d, "\Omega(f')"] \\
A'' \arrow[r] & S_{A''}
\end{tikzcd}
$$

Sea C una A-criba. $f : A' \longrightarrow A$ y $f' : A'' \longrightarrow A'$ son morfismos de E.

$\Omega(f'\cdot f)(C) = D = \{h : B \longrightarrow A \mid f'\cdot f\cdot h \in C\}$ y $(\Omega(f')[\Omega(f))(C)] = \Omega(f')(C') = C''$, donde $C' = \{k: C \longrightarrow A' \mid f\cdot k \in C\}$ y $C'' = \{h' : B \longrightarrow A'' \mid f'\cdot h' \in C'\}$.

Luego $C^* = \{h' : B \longrightarrow A^* \mid f \circ f' \circ h' \in C\} = D$, por lo tanto $\Omega(f' \circ f) = \Omega(f') \circ \Omega(f)$.

Además $\Omega(1_A)(C) = \{g : B \longrightarrow A \mid g \in C\} = C$, de donde $\Omega(1_A) = 1_{\Omega(A)}$. Por lo tanto Ω es un funtor covariante. $\square$

Sea $T : 1 \longrightarrow \Omega$ la transformación natural dada por $T(A)(0) = M_A$, donde M_A es la mayor A-criba.

Afirmación 1.6. (Ω, T) es el clasificador de subobjetos de $\mathbf{Set}^{E^{op}}$.

Sean $F : E^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, $G : E^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ funtores contravariantes y $\tau : F \longrightarrow G$ un monomorfismo de $\mathbf{Set}^{E^{op}}$.

Definimos $x_\tau : G \longrightarrow \Omega$ tal que si A es un objeto de E y $x \in G(A)$, entonces

$$(x_\tau)_A(x) = \{k : B \longrightarrow A \mid G(k)(x) \in \tau_B(F(B))\}.$$

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[r, "(x_\tau)_A"] \arrow[d, "G(f)"'] & \Omega(A) \arrow[d, "\Omega(f)"] & A \arrow[d, "f"] \\
G(B) \arrow[r, "(x_\tau)_B"'] & \Omega(B) & B
\end{tikzcd}$$

$[\Omega(f) \circ (x_\tau)_A](x) = \Omega(f)(S) = S'$ con $S = \{k : B \longrightarrow A \mid G(k)(x) \in \tau_B(F(B))\}$ y

$S' = \{k' : C \longrightarrow B \mid f \circ k' \in S\} = \{k' : C \longrightarrow B \mid G(f \circ k') \in \tau_B(F(B))\}$.

Por otra parte

$$\begin{aligned}
[(x_\tau)_B \circ G(f)](x) &= (x_\tau)_B(G(f(x))) \\
&= \{k' : C \longrightarrow B \mid G(k')(G(f)(x)) \in \tau_B(F(B))\} \\
&= \{k' : C \longrightarrow B \mid G(f \circ k')(x) \in \tau_B(F(B))\} \\
&= S'.
\end{aligned}$$

Por lo tanto x_τ es una transformación natural.

Sean $x \in G(A)$, $g : C \longrightarrow B$ y $f : B \longrightarrow A$ tales que $f \in (x_\tau)_A(x)$; es decir, $G(f)(x) \in \tau_B(F(B))$.

Si $y \in G(C)$, entonces $f \circ g$ es tal que $G(f \circ g)(y) = G(f)[G(g)(y)] \in \tau_B(F(B))$ por lo tanto $(x_\tau)_A(x)$ es una A-criba.

Examinemos si (Ω, T) satisface el Ω-axioma.

Consideremos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "!_F"'] & G \arrow[d, "\chi_\tau"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Sean A un objeto de **E** y $x \in F(A)$.

$$\begin{aligned}
((\chi_\tau)_A \circ \tau_A)(x) &= (\chi_\tau)_A(\tau_A(x)) \\
&= \{f : B \longrightarrow A \mid G(f)(\tau_A(x)) \in \tau_B(F(B))\} \\
&= \{f : B \longrightarrow A \mid \tau_B(F(f)(x)) \in \tau_B(F(B))\} \\
&= \{f : B \longrightarrow A\} \\
&= M_A \text{ la mayor A-criba} \\
&= T_A \circ !_{F(A)}(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto el cuadrado conmuta.

Sean $K : E^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ objeto de $\mathbf{Set}^{E^{op}}$, $\alpha : K \longrightarrow G$ y $\delta : K \longrightarrow 1$ transformaciones naturales tales que $(\chi_\tau)_A \circ \alpha_A = T_A \circ \delta_A$; es decir,

$$(\chi_\tau)_A \circ \alpha_A = \{ h : C \longrightarrow A \mid G(h)(\alpha_A(x)) \in \tau_C(F(C))\} = M_A.$$

$1_A \in M_A$, luego $G(1_A)(\alpha_A(x)) \in \tau_A(F(A))$, de donde existe $y \in F(A)$ tal que $\tau_A(y) = \alpha_A(x)$.

Definimos $\sigma : K \longrightarrow F$ como $\sigma_A(x) = y$ donde $x \in K(A)$ y $\tau_A(y) = \alpha_A(x)$. Por definición σ es una transformación natural tal que $\tau \circ \sigma = \alpha$ y $!_F \circ \sigma = \delta$ y, además, σ es única pues $\tau : F \longrightarrow G$ es un monomorfismo de $\mathbf{Set}^{E^{op}}$. Por lo tanto el diagrama anterior es un producto fibrado.

Veamos que χ_τ es única.

Supongamos que existe $\eta : G \longrightarrow \Omega$ transformación natural tal que el cuadrado interior de siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$
\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[rrr, "\tau_B"] \arrow[ddd, "!_{F(B)}"'] & & & G(B) \arrow[ddd, "\eta_B"] \\
& F(A) \arrow[ul, "F(h)"'] \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "!_{F(A)}"'] & G(A) \arrow[ur, "G(h)"] \arrow[d, shift right, "\eta_A"'] \arrow[d, shift left, "(\chi_\tau)_A"] & \\
& 1 \arrow[r, "T_A"'] \arrow[dl, equals] & \Omega(A) \arrow[dr, "\Omega(h)"] & \\
1 \arrow[rrr, "T_B"'] & & & \Omega(B)
\end{tikzcd}
$$

Sea $z \in G(A)$; $\eta_A(z)$ es una A-criba pues $\eta_A(z) \in \Omega(A)$.
Supongamos que $h \in \eta_A(z)$

$$
\begin{aligned}
(\eta_B \circ G(h))(z) &= (\Omega(h) \circ \eta_A)(z) \\
&= \Omega(h)(\eta_A(z)) \\
&= \{k : C \longrightarrow B \mid h \circ k \in \eta_A(z)\} \\
&= M_B.
\end{aligned}
$$

Obtenemos que $G(h)(y) \in \tau_B\,(F(B))$ y por definición $h \in (x_\tau)_A(z)$. Por lo tanto $\eta_A(z) \subset (x_\tau)_A(z)$.

Si $f \in (x_\tau)_A(z)$, entonces $G(F)(z) \in \tau_B\,(F(B))$, luego $(\eta_B \circ G(f))(z) = T_B \circ !_{F(B)} = M_B$
Pero $\eta_B \circ G(f) = \Omega(f) \circ \eta_A$ entonces $(\Omega(f) \circ \eta_A)(z)$ es la mayor B-criba.
Como $1_B \in M$ donde $M = \{k : C \longrightarrow B \mid f \circ k \in \eta_A(z)\}$, tenemos que $f \in \eta_A(z)$. Por lo tanto $(x_\tau)_A(z) = \eta_A(z)$ para toda $z \in G(A)$, luego $x_\tau = \eta$ y x_τ es única □

Por fin concluimos que $Set^{E^{op}}$ es un Topo. □

Bibliografía

BARR, M. and WELLS, C.; Toposes Triples and Theories, Springer-Verlag, New York, 1985.

FREYD, Peter; Aspects of Topoi, Bulletin Austral. Math. Soc, Vol 7,Pp. 1-76, 1972.

GOLDBLATT, Robert; Topoi: The Categorial Analysis of Logic, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.

LAMBEK, J. and SCOTT, P. J.; Higher Order Categorical Logic, Cambridge University Press, 1986.

MAC LANE, Saunders; Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, New York, 1971.