

00365  
2ej.  
2



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
Division de Estudios de Posgrado

"Sobre enlaces primos y suma de ovillos"

T E S I S

para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS  
( M A T E M A T I C A S )

P r e s e n t a :

Fis. Mat. Mario Eudave Muñoz

México D.F.

1986

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Indice.**

**Agradecimientos**

**Introducción..... 1**

**Capítulo I ..... 2**

**1.1 Generalidades y los teoremas principales..... 2**

**1.2 Algunos problemas sobre ovillos..... 23**

**1.3 Cirugía en nudos..... 25**

**Capítulo II ..... 28**

**2.1 Preliminares..... 28**

**2.2 Argumentos topológicos..... 41**

**2.3 Argumentos combinatorios..... 48**

**Capítulo III ..... 74**

**3.1 Más argumentos topológicos y combinatorios..... 74**

**3.2 Más aplicaciones de argumentos combinatorios I.... 89**

**3.3 Más aplicaciones de argumentos combinatorios II... 93**

**Referencias..... 96**

## Introducción.

Estamos interesados en los nudos y enlaces obtenidos al sumar un ovillo primo y uno racional. Probamos que dado un ovillo primo existen a lo mucho tres ovillos racionales, tales que al sumárselos se obtengan nudos o enlaces no primos, y además dichos ovillos están cercanos en cierto sentido. Como consecuencia de esto también probamos que en nudos fuertemente invertibles solo la cirugía entera puede producir variedades reducibles, y que a lo mucho hay dos de esas cirugías.

En el capítulo I damos las definiciones necesarias acerca de ovillos y establecemos nuestros resultados, que son los teoremas 1-4; damos ejemplos para ilustrar estos teoremas. También en este capítulo establecemos los corolarios en cirugía de nudos que son consecuencia de los teoremas antes citados. En el capítulo II probamos el teorema 1, combinando argumentos topológicos y combinatorios. En el capítulo III probamos los teoremas 2, 3, 4, su prueba es más sencilla que la del teorema 1, y de hecho muchos de los lemas establecidos en el capítulo II se aplican en el capítulo III.

La prueba de los teoremas 1-4 consiste en traducir el problema topológico a un problema combinatorio de gráficas planas. Utilizamos la técnica introducida por M. Scharlemann en  $[S_1]$  y  $[S_2]$ . El lenguaje que utilizamos en los capítulos II y III aparece en esos dos artículos, también varios de los lemas que probamos en estos capítulos son más o menos iguales a ciertos lemas en  $[S_1]$  o  $[S_2]$ , estos son: 2.1.5, 2.1.6, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6, 2.3.9, 2.3.10, 2.3.11, 2.3.12, 2.3.13, 3.1.10. Nuestro punto de vista difiere un poco del de Scharlemann, debido a que nosotros trabajamos en  $S^3$ , y él en variedades más generales.

Todo nuestro trabajo debe de interpretarse en la categoría P.L.

## CAPITULO I

### 1.1 Generalidades y los teoremas principales.

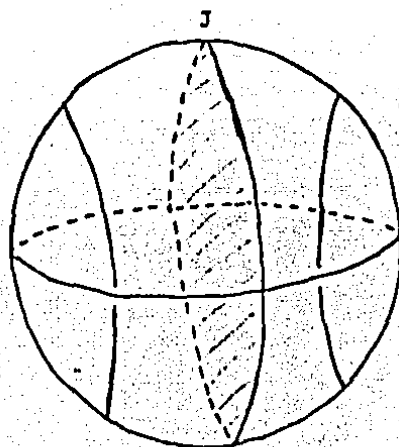
1.1.1 Un *ovillo*  $(B, t)$  es un par que consiste de una 3-bola  $B$  y de un par de arcos ajenos  $t$  propiamente encajados en  $B$ , llamados *cuerdas*. Dos ovillos son *equivalentes* si existe un homeomorfismo  $h$  entre las parejas. Dos ovillos son *iguales* si existe un homeomorfismo  $h: (B, t) \rightarrow (B, t')$  de parejas tal que  $h|_{\partial B} = \text{id}$ .

Un *ovillo trivial* es un ovillo equivalente a la pareja estandar  $(D^2 \times I, (u, v) \times I)$ ,  $u, v$  en el interior de  $D^2$ ,  $u \neq v$ . Un *ovillo racional* es un elemento de una clase de equivalencia de ovillos triviales bajo la relación de igualdad; existe una correspondencia uno a uno entre los ovillos racionales y  $\mathbb{Q} \setminus \{1/0\}$  (ver [C] o [M<sub>1</sub>]), como veremos en la sección 1.1.7. Denotamos por  $(B, p/q)$  al ovillo racional determinado por  $p/q$ , la pareja estandar es  $(B, 1/0)$ ; denotamos al homeomorfismo que hay entre  $(B, 1/0)$  y  $(B, p/q)$  como *ovillos triviales* por  $h_{p/q}: (B, 1/0) \rightarrow (B, p/q)$ . Estaremos suponiendo que  $p$  y  $q$  son primos relativos.

Sea  $J$  un meridiano de  $(B, 1/0)$  como en la figura 1. Sean  $(B, p/q)$  y  $(B, r/s)$  dos ovillos racionales, la distancia entre ellos denotada por  $d((B, p/q), (B, r/s))$  o más simplemente por  $d(p/q, r/s)$ , se define como el mínimo (tomado sobre todos los representantes) de  $1/2\#(h_{p/q}(J) \cap h_{r/s}(J))$ . Puede ser mostrado que  $d(p/q, r/s) = |ps - qr|$ . Como se ve en la figura 1, existe un disco  $D$  propiamente encajado en  $B$ , con  $\partial D = J$ , y tal que  $D$  separa a las cuerdas de  $(B, 1/0)$ , esto es las cuerdas de  $(B, 1/0)$  se encuentran en distintas componentes de  $B - D$ ; por lo tanto existe un disco propiamente encajado en  $(B, p/q)$ , que no toca a las cuerdas y tal que separa a estas cuerdas, la distancia entre  $(B, p/q)$  y  $(B, r/s)$  corresponde al mínimo número de puntos de intersección entre las fronteras de sus correspondientes discos.

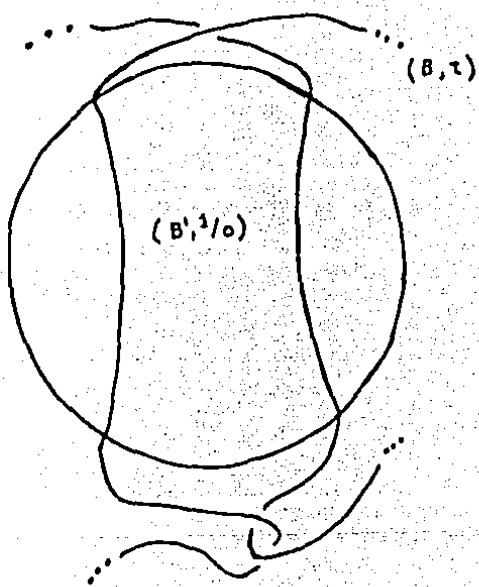
Un ovillo  $(B, t)$  es *primo* si tiene las siguientes propiedades:

a)  $(B, t)$  no tiene nudos locales, esto es, cualquier esfera que intersecta transversalmente a  $t$  en dos puntos es frontera de

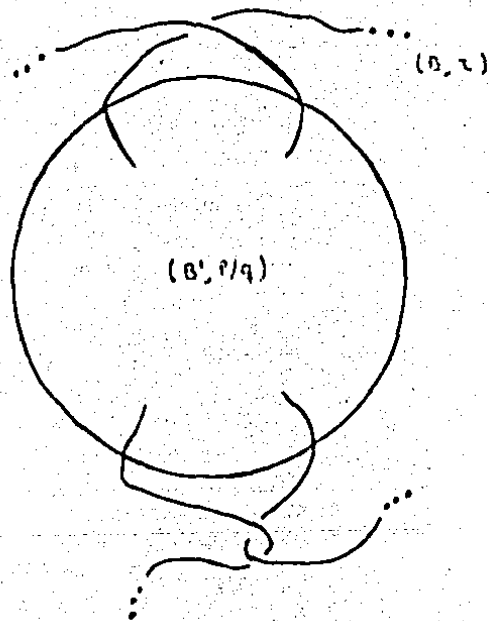


$(B, 1/0)$

Figura 1



(a)



(b)

Figura 2

una 3-bola en  $B$  que intersecta a  $t$  en un arco desanudado.

b) No existe disco propiamente encajado en  $B$  que separe a las cuerdas de  $(B, t)$ . Esta condición es equivalente a pedir que el ovillo no sea trivial.

Un ovillo es *localmente primo* si cumple con la propiedad (a) de la definición anterior. Un ovillo trivial es por lo tanto localmente primo, pero no es primo.

Sea  $k$  un nudo o enlace en  $S^3$ .  $k$  es un *enlace separable* si existe una  $S^2$  en  $S^3 - k$  que separa a las componentes de  $k$ .  $k$  es un nudo o enlace *compuesto* si existe una  $S^2$  que intersecta transversalmente a  $k$  en dos puntos, tal que ninguna de las cerraduras de las componentes de  $S^3 - S^2$  intersecta a  $k$  en un arco desanudado.  $k$  es el *nudo trivial* si  $k$  es frontera de un disco contenido en  $S^3$ .  $k$  es el *enlace trivial* si cada componente de  $k$  es frontera de un disco en  $S^3$  y estos discos son ajenos.  $k$  es *primo* si no es trivial, ni separable, ni compuesto. Nos referimos a [R] para definiciones y hechos acerca de nudos no encontrados aquí.

1.1.2 Sean  $(B, t)$  y  $(B', t')$  dos ovillos, y  $h$  un homeomorfismo entre  $\partial B$  y  $\partial B'$  tal que  $h(\partial B \cap t) = \partial B' \cap t'$ , entonces al identificar  $\partial B$  y  $\partial B'$  por medio de  $h$ , obtenemos un nudo o enlace de dos componentes en  $S^3$ ; llamamos a esta operación *suma de ovillos*, algunas veces usaremos el signo '+' para denotar a esta suma. Es claro que si  $h$  y  $h'$  son homeomorfismos que son isotópicos entonces los nudos o enlaces que obtenemos son los mismos. Sea  $k$  el nudo o enlace obtenido al sumar  $(B, t)$  y  $(B', t')$ ; estamos interesados en el siguiente problema: si dichos ovillos tienen ciertas propiedades, ¿tendrá  $k$  las propiedades análogas?, por ejemplo si  $(B, t)$  o  $(B', t')$  son ovillos primos, ¿será  $k$  un nudo o enlace primo? Lickorish [L] probó que si ambos ovillos son primos entonces  $k$  es primo, es un bonito ejercicio probar esto. Si  $(B, t)$ ,  $(B', t')$  son ovillos cualesquiera y alguno de ellos tiene un nudo local, ese nudo local seguirá estando en  $k$ , por lo que es muy probable que  $k$  sea compuesto. En este trabajo consideramos el siguiente problema: Si  $(B, t)$  es primo y  $(B', t')$  es trivial, ¿será  $k$  primo?

Hay muchas formas de sumar dos ovillos; para el caso que trabajamos aquí, en el cual alguno de los ovillos es trivial

procedemos como sigue. Sumar el ovillo racional  $(B', p/q)$  a un ovillo  $(B, t)$  significa lo siguiente: Tomese un encaje de  $(B, t)$  en  $S^3$  y también un encaje de  $(B', 1/0)$ , y peguense sus fronteras como en la figura 2(a). Ahora cambiese  $(B', 1/0)$  por  $(B', p/q)$  como en la figura 2(b).

Sea  $(B, t)$  un ovillo primo, tomese un encaje de él en  $S^3$ , sean  $(B', r_1)$ ,  $(B', r_2)$  dos ovillos racionales, y sean  $k_1$  y  $k_2$  los nudos o enlaces obtenidos al sumar  $(B, t)$  con  $(B', r_1)$  y  $(B', r_2)$  respectivamente. Supongase que  $k_1$  y  $k_2$  no son primos, entonces tenemos las siguientes posibilidades:

- 1)  $k_1$  y  $k_2$  son compuestos.
- 2)  $k_1$  es trivial y  $k_2$  es compuesto.
- 3)  $k_1$  es separable y  $k_2$  es compuesto.
- 4)  $k_1$  y  $k_2$  son separables.
- 5)  $k_1$  y  $k_2$  son triviales.
- 6)  $k_1$  es trivial y  $k_2$  es separable.

En este trabajo estudiamos los casos 1, 2, 3, 4. Sea  $(B, t)$  un ovillo cualquiera, tomemos un encaje de él en  $S^3$ ; sean  $(B', r_1)$  y  $(B', r_2)$  dos ovillos racionales, sean  $k_1$  y  $k_2$  los nudos o enlaces obtenidos al sumar  $(B, t)$  con  $(B', r_1)$  y  $(B', r_2)$  respectivamente; nuestros resultados son los siguientes.

**Teorema 1.** Sea  $(B, t)$  un ovillo primo. Si  $k_1$  y  $k_2$  son compuestos entonces  $d(r_1, r_2) \leq 1$ .

**Teorema 2.** Sea  $(B, t)$  un ovillo primo. Si  $k_1$  es el nudo trivial y  $k_2$  es compuesto, entonces  $d(r_1, r_2) \leq 1$ .

**Teorema 3.** Sea  $(B, t)$  un ovillo primo. Si  $k_1$  es compuesto y  $k_2$  es separable, entonces  $d(r_1, r_2) \leq 1$ .

**Teorema 4.** Sea  $(B, t)$  un ovillo cualquiera. Si  $k_1$  y  $k_2$  son separables entonces  $r_1 = r_2$ .

En esta misma dirección se tienen los siguientes resultados.



Teorema 5. Sea  $(B,t)$  un ovrillo primo. Si  $k_1$  y  $k_2$  son el nudo trivial entonces  $r_1 = r_2$ . [BS<sub>1</sub>], [BS<sub>2</sub>].

Teorema 6. Sea  $(B,t)$  un ovrillo cualquiera. Si  $k_1$  es el nudo trivial y  $k_2$  es separable, entonces  $d(r_1, r_2) \leq 1$  y  $(B,t)$  es un ovrillo trivial.

No es difícil probar que si tenemos una colección de ovrillos racionales  $((B', r_i))$  con  $d(r_i, r_j) = 1$ ,  $i \neq j$ , entonces dicha colección contiene a lo mucho tres ovrillos. Esta observación y los teoremas 1-6 implican el siguiente corolario.

Corolario 1. Dado un ovrillo primo  $(B,t)$  existen a lo mucho tres ovrillos racionales  $(B', r_i)$   $i = 1, 2, 3$ , tal que el nudo o enlace que resulta al sumar  $(B,t)$  y  $(B', r_i)$  es no primo. Además  $d(r_i, r_j) \leq 1$ .

Por lo tanto con un ovrillo primo podemos construir muchos nudos y enlaces primos, al pegarle a dicho ovrillo distintos ovrillos racionales. Es un hecho conocido que todo nudo tiene una descomposición única en sumandos primos; por lo que los nudos compuestos quedan determinados al conocer sus sumandos. Por esto mismo es interesante tener criterios que nos digan cuando un nudo es primo. Con los teoremas 1-6 se puede probar que muchas familias de nudos y enlaces constan de nudos y enlaces primos, por ejemplo se puede probar que muchos nudos y enlaces que aparecen en las tablas son primos. Hay muchas otras formas de detectar nudos primos, vease por ejemplo [L]; vease también [Go], [L] en donde también se usan ovrillos primos para detectar primicidad.

1.1.3 Las hipótesis de los teoremas 1, 2, 3 pueden ser debilitadas y pedir solo que  $(B,t)$  sea un ovrillo localmente primo, las conclusiones siguen siendo las mismas; como se vera en la prueba de estos teoremas, solo usamos el hecho que  $(B,t)$  no tenga nudos locales; pero no podemos hacer esto con el teorema 5.

Consideremos pues los nudos o enlaces obtenidos de la suma de dos ovrillos triviales, podemos suponer sin pérdida de generalidad que uno de esos ovrillos es el mostrado en la figura 3. Sea este  $(B,t)$ . Es claro que  $(B,t) + (B',0) =$  enlace trivial de dos componentes, como se ve en la figura 4. Por lo tanto por el

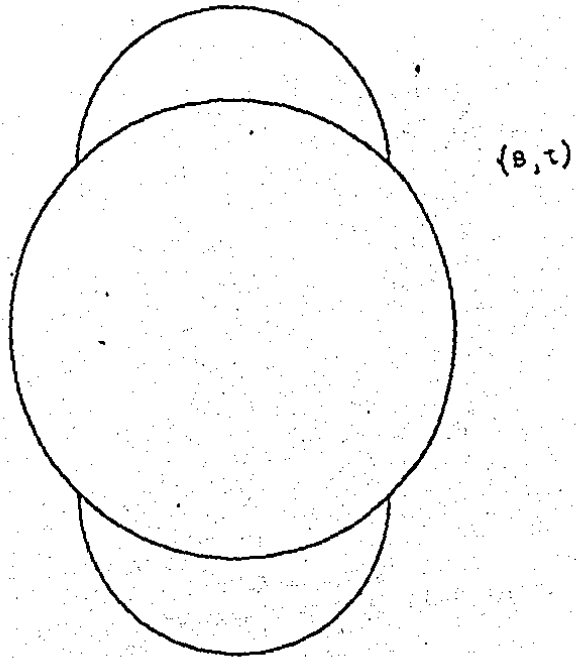


Figura 3

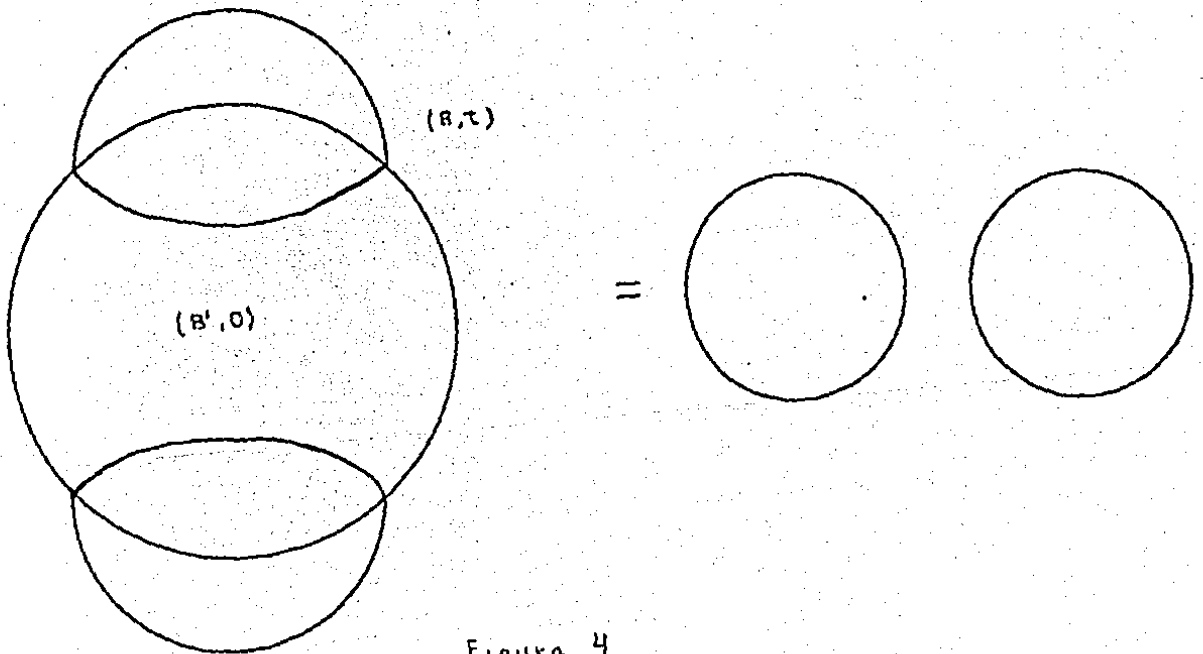


Figura 4

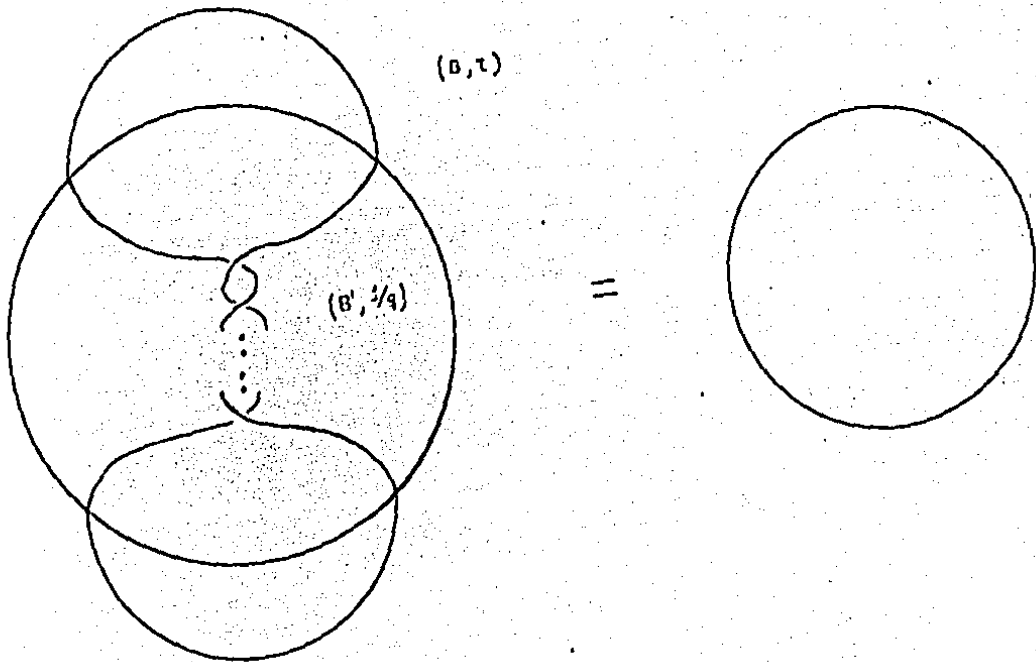


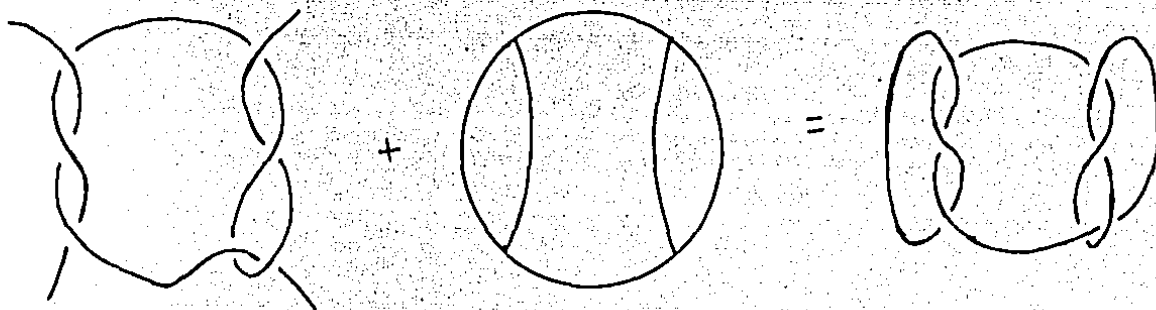
Figura 5

teorema 6  $(B, t) + (B', p/q)$  podrá ser el nudo trivial solo si  $d(p/q, 0) = 1$ , o sea si  $p = \pm 1$ ; ahora  $(B, t) + (B', 1/q) =$  nudo trivial, como se ve en la figura 5.  $(B, t) + (B', p/q)$  podrá ser compuesto solo si  $d(0, p/q) = 1$ , o sea si  $p = \pm 1$ , debido al teorema 3; pero sabemos que  $(B, t) + (B', 1/q) =$  nudo trivial, por lo tanto nunca podremos obtener un nudo o enlace compuesto de la suma de dos ovillos triviales. Resumiendo, la suma de dos ovillos triviales da por resultado el nudo trivial, o el enlace trivial, o bien nudos y enlaces primos, esto implica que los nudos y enlaces de dos puentes son primos, que es un hecho bien conocido. (ver por ejemplo [R]).

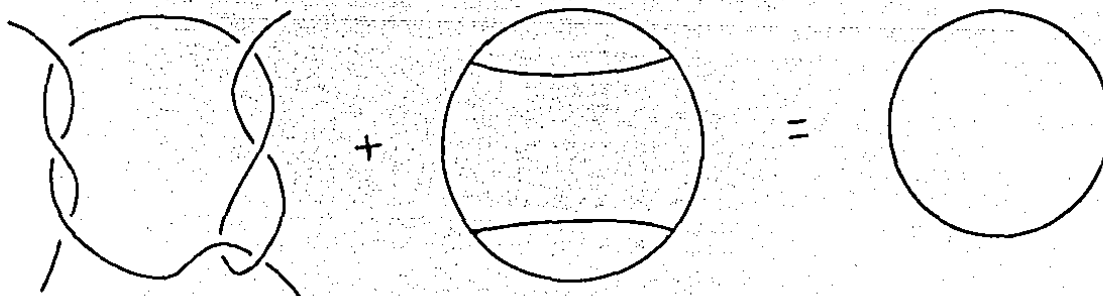
1.1.4 Los teoremas 1-6 son lo mejor posibles, pues hay ejemplos de ovillos primos para los que existen dos ovillos racionales tal que al sumarselos obtenemos nudos o enlaces no primos; en la figura 6 mostramos ovillos con esta propiedad.

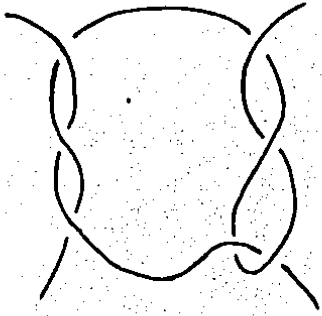
Sea  $(B_i, t)$  el oவில்lo de la figura 6(i), para  $i = 1, \dots, 6$ , tenemos que:

$$(B_1, t) + (B', 1/0) = 3_1 \neq 4_1$$

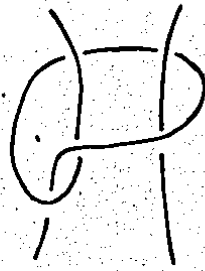


$$(B_1, t) + (B', 0) = \text{nudo trivial}$$

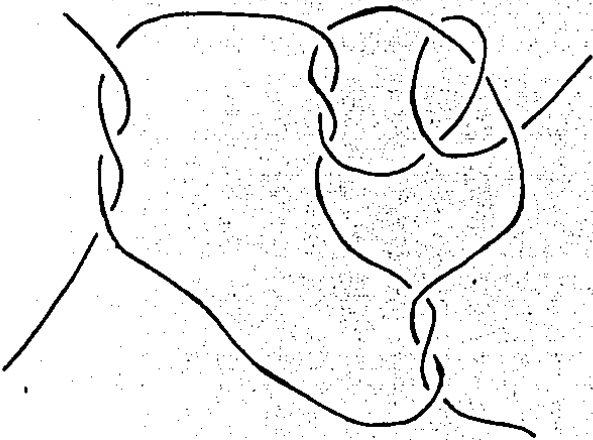




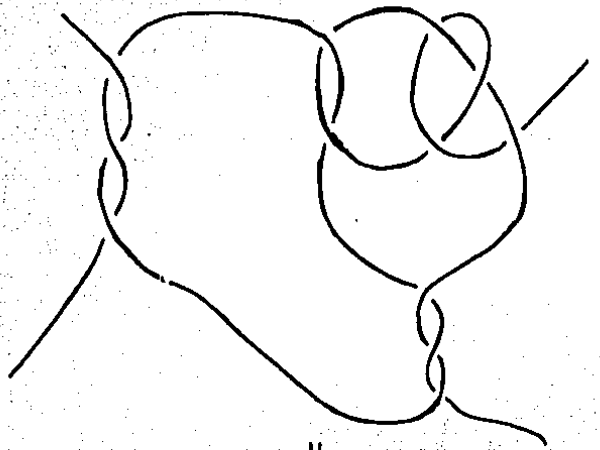
1



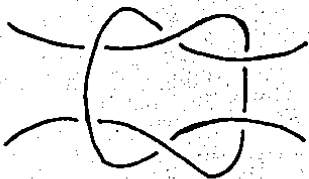
2



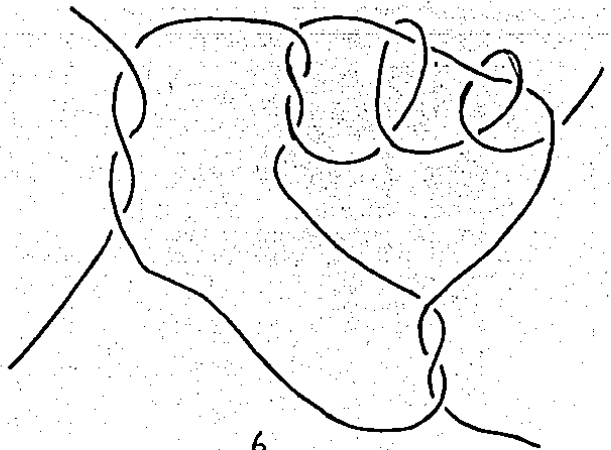
3



4



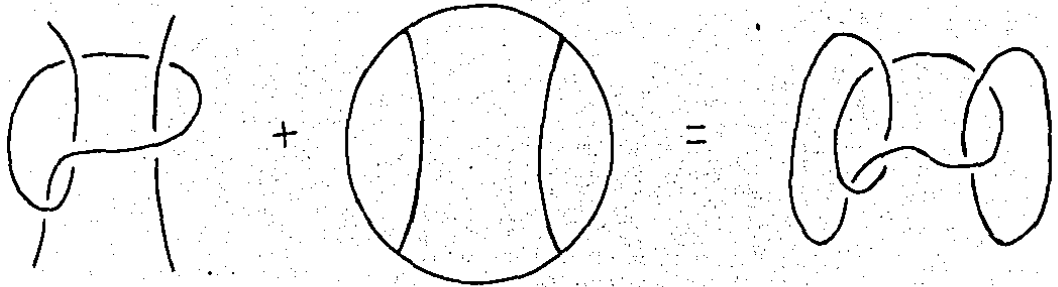
5



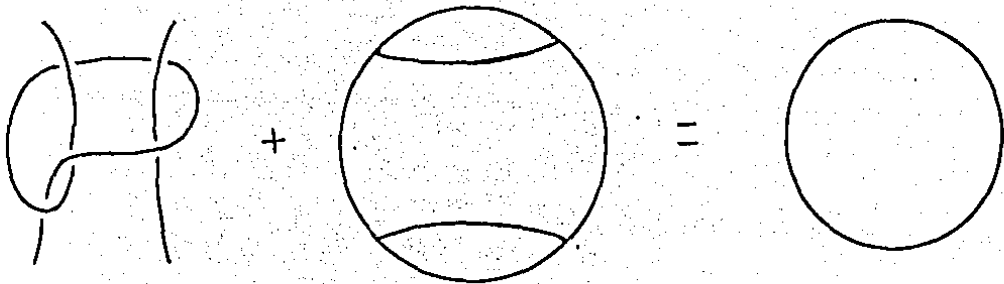
6

Figura 6

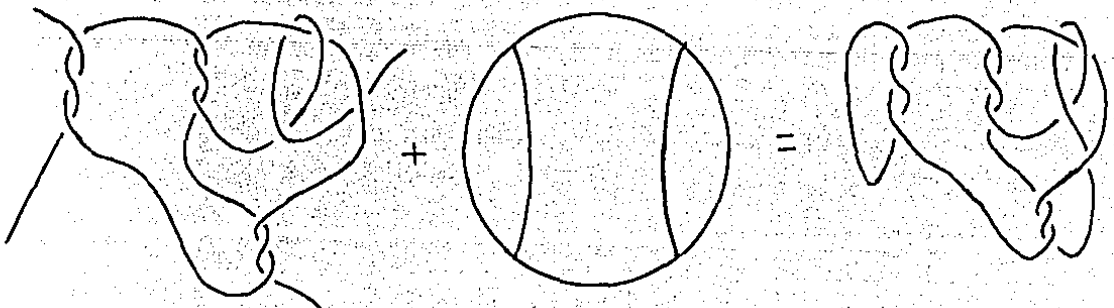
$$(B_2, t) + (B', 1/0) = 3_1 \# 2^2_1$$



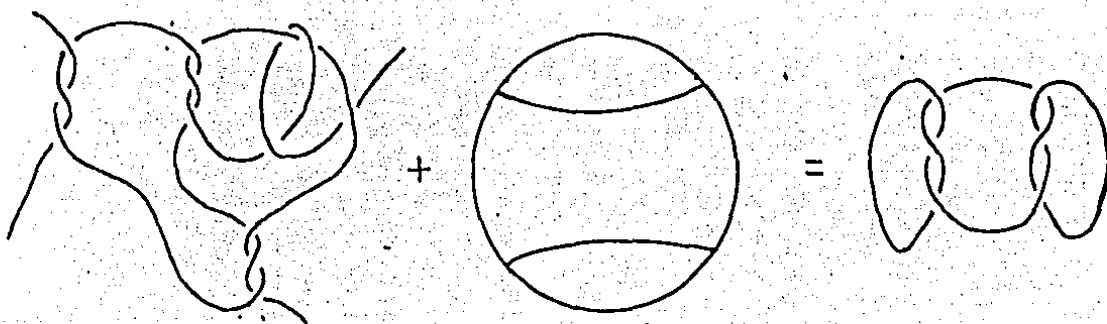
$$(B_2, t) + (B', 0) = \text{nudo trivial}$$



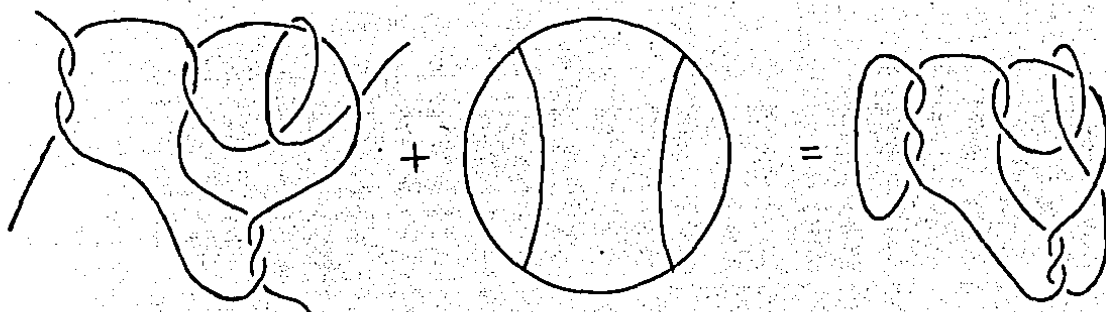
$$(B_3, t) + (B', 1/0) = 3_1 \# 9_{37}$$



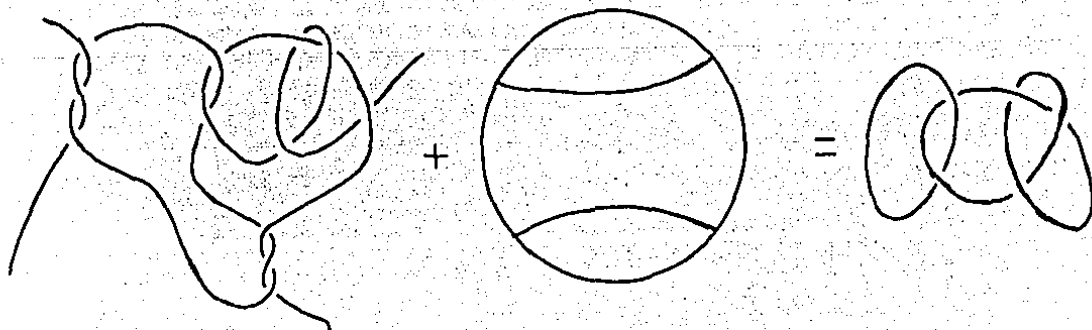
$$(B_3, t) + (B', 0) = \text{nudo cuadrado}$$



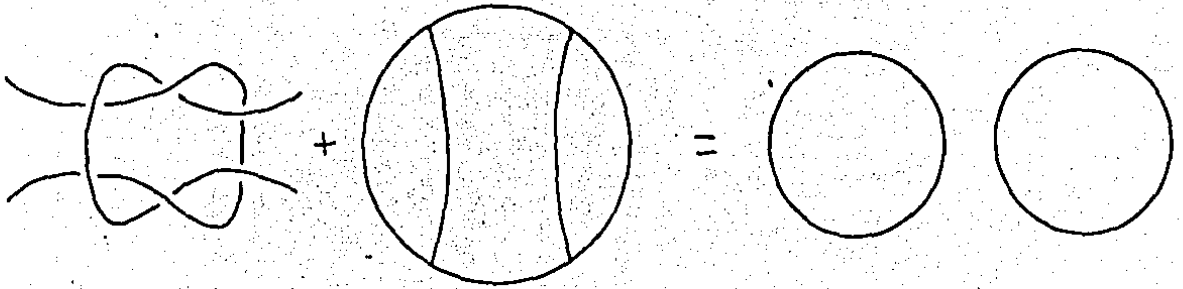
$$(B_4, t) + (B', 1/0) = 3_1 \neq 8_{11}$$



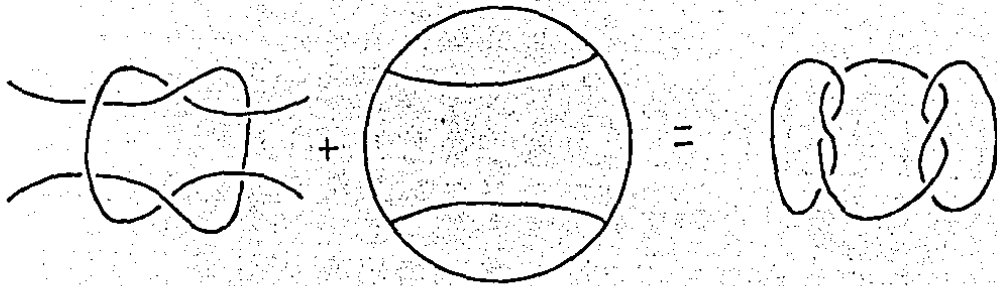
$$(B_4, t) + (B', 0) = 3_1 \neq 2^2_1$$



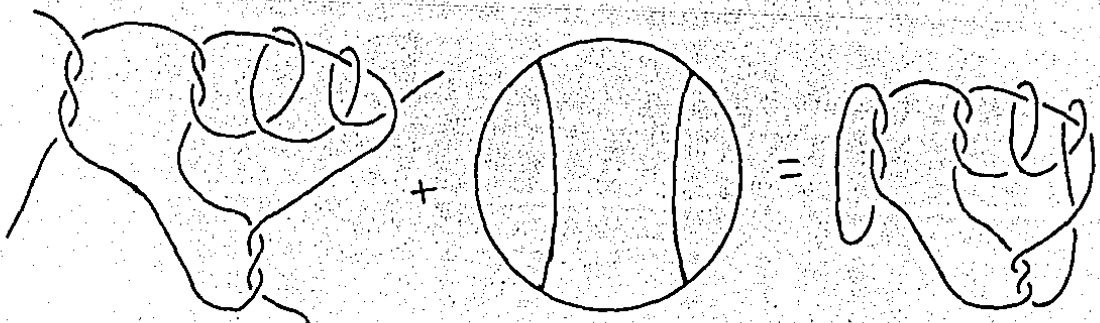
$(B_5, t) + (B', 1/0) = \text{enlace trivial de dos componentes}$



$(B_5, t) + (B', 0) = \text{nudo cuadrado}$

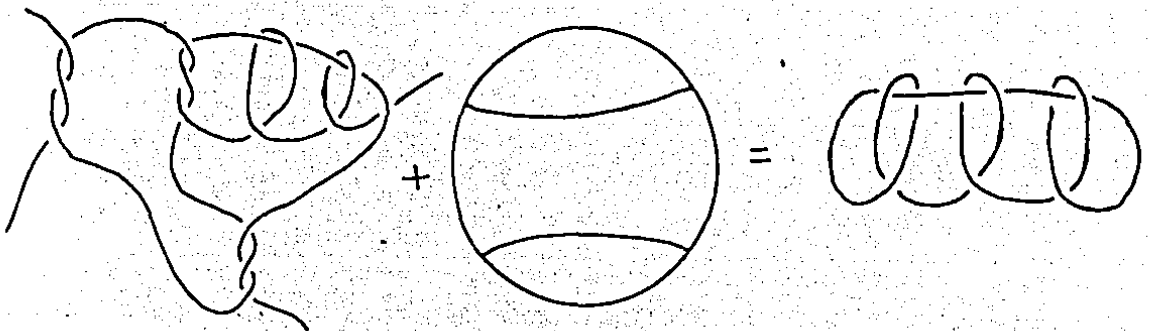


$(B_6, t) + (B', 1/0) = 3_1 \# K$  (nudo primo de por lo menos 12 cruces)





$$(B_6, 1) + (B', 0) = -3_1 \# 3_1 \# 3_1$$



Los ovillos de la figura 6 son primos. Los siguientes criterios sirven para probar que un oவில்lo es primo.

a) Si las cuerdas de un oவில்lo no están anudadas, entonces tal oவில்lo es localmente primo, pues claramente no puede tener nudos locales.

b) Si un oவில்lo tiene la propiedad de que al sumarle algún oவில்lo racional se obtenga un nudo o enlace compuesto, entonces dicho oவில்lo no es trivial, pues vimos en la sección 1.1.3 que la suma de dos ovillos triviales nunca da por resultado nudos o enlaces compuestos.

c) Si un oவில்lo tiene un nudo local, ese nudo local será un sumando de cualquier nudo o enlace que se obtenga de sumar dicho oவில்lo con algún otro. Por lo tanto si un oவில்lo tiene la propiedad de que al sumarle algún oவில்lo racional se obtenga un nudo o enlace trivial, dicho oவில்lo no podrá tener nudos locales, y por lo tanto será localmente primo.

Por lo tanto si un oவில்lo cumple con (a) y (b), o con (b) y (c), tal oவில்lo será primo. Los ovillos  $6(1)$ ,  $6(3)$ ,  $6(5)$  y  $6(6)$  cumplen con la propiedad (a), además al sumarle  $(B', 1/0)$  a estos ovillos obtenemos nudos compuestos, por lo que cumplen con la propiedad (b), luego estos cuatro ovillos son primos. Al sumarle  $(B', 1/0)$  y  $(B', 0)$  al oவில்lo  $6(2)$  obtenemos un enlace compuesto y el nudo trivial respectivamente, luego este oவில்lo cumple con las propiedades (b) y (c), y por lo tanto es primo. Ahora al sumarle  $(B', 1/0)$  al oவில்lo  $6(6)$  nos resulta el nudo  $3_1 \# K$ ,

usando el teorema 1 se puede probar que  $K$  es primo.

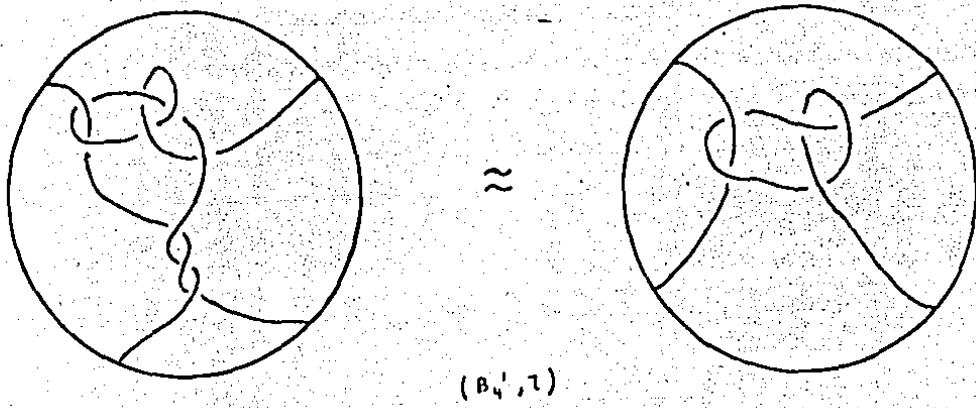
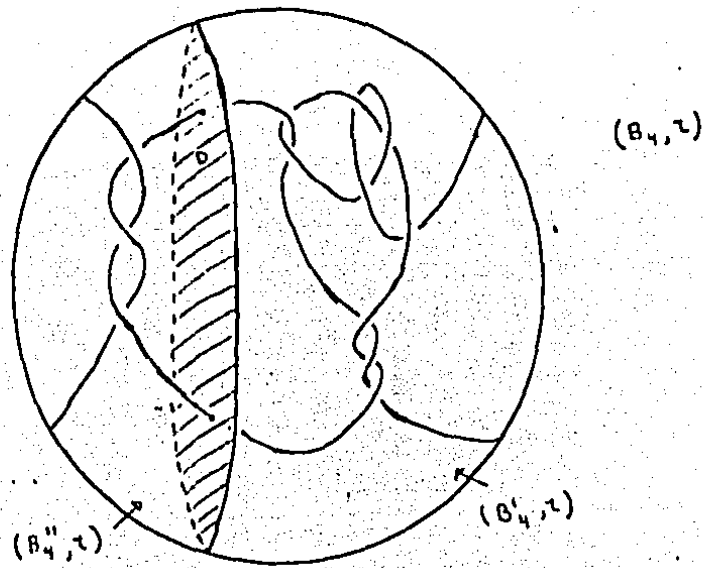
Otros criterios que sirven para determinar si un ovillo es primo son los siguientes,

d) Supóngase que una de las cuerdas de un ovillo está anudada, sea  $k$  un sumando primo de dicha cuerda, ahora si al sumarle a dicho ovillo un ovillo racional nos resulta un nudo que no tiene como sumando a  $k$ , entonces  $k$  no es un nudo local del ovillo. Si un ovillo tiene esta propiedad para cada sumando primo de cada una de sus cuerdas, dicho ovillo no tiene nudos locales.

e) Si un ovillo tiene la propiedad de que al sumarle un ovillo racional obtenemos un nudo o enlace de mas de dos puentes, entonces dicho ovillo no es trivial, pues la suma de dos ovillos triviales siempre da un nudo o enlace de dos puentes. [R].

f) Sea  $(B, t)$  un ovillo, y sea  $D$  un disco propiamente contenido en  $B$ , que separa a  $(B, t)$  en dos ovillos  $(A, t)$  y  $(C, t)$ . Si  $(A, t)$  es localmente primo,  $D$  intersecta a las dos cuerdas de  $(A, t)$ , y  $(C, t)$  es primo, entonces  $(B, t)$  es primo. [L, teorema 3].

En los incisos (c) y (d) estamos usando el hecho de que cada nudo tiene una descomposición única en sumandos primos y que el nudo trivial no se puede expresar como suma de dos nudos no triviales. Ahora probaremos que el ovillo  $6(4)$  es primo. Una de las cuerdas de ese ovillo está anudada, por lo que el ovillo no es trivial, lo complicado es probar que no tiene nudos locales. Existe un disco  $D$  propiamente encajado en  $B_4$  que intersecta una vez a cada una de las cuerdas separando a  $(B_4, t)$  en dos ovillos  $(B_4', t)$  y  $(B_4'', t)$  como en la figura  $6(4)'$ , claramente el ovillo  $(B_4'', t)$  es trivial, por lo que si probamos que  $(B_4', t)$  es primo por (f) terminamos. Una de las cuerdas de  $(B_4', t)$  no esta anudada y la otra está anudada formando el nudo trebol  $(3_1)$ , por lo que este ovillo no es trivial, al sumarle a este ovillo el ovillo racional  $(B', 0)$  obtememos el nudo  $5_2$  el cual es un nudo primo distinto de  $3_1$ , luego por (d) el ovillo  $(B_4', t)$  no tiene nudos locales y por lo tanto es primo. Entonces el ovillo  $6(4)$  también es primo.



$$(B_4', \tau) + (B, 0) = 5_2$$

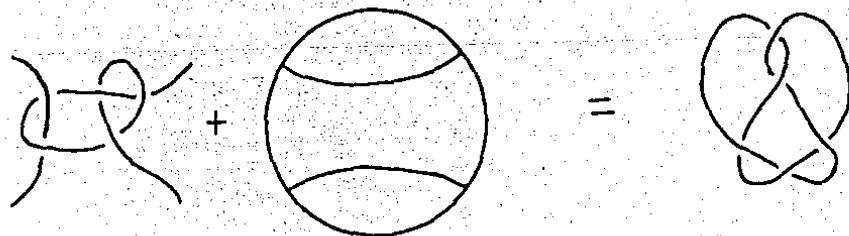


Figura 6(4)'

1.1.5 M.Scharlemann probó en [S<sub>2</sub>] que los nudos con número de desanudamiento 1 son primos, lo cual era una vieja conjetura. Este resultado es un caso del teorema 2, pero la prueba del teorema 2 es una generalización de aquel resultado. M.Scharlemann probó en [S<sub>1</sub>] una variante del teorema 6, pero las pruebas son casi las mismas. En estos dos artículos se introdujo una técnica combinatoria para tratar problemas topológicos, en este trabajo usamos dicha técnica para probar los teoremas 1-4.

W.B.R. Lickorish conjeturó en [L] que dado un ovillo primo existe a lo mucho un ovillo racional tal que al sumarlos se obtenga un nudo no primo; esto resultó falso como ya mostramos con los ovillos de la figura 6, los primeros contraejemplos fueron dados por S.A. Bleiler [B<sub>1</sub>]. J.C. Gómez Larrañaga [Go] probó que para una clase de ovillos primos existe a lo mucho un ovillo racional para cada uno de estos ovillos, tal que al sumarlos se obtenga un nudo no primo. Nuestro enfoque difiere un poco del de ellos en cuanto que estamos interesados no solo en nudos obtenidos como suma de un ovillo primo y uno racional, sino también en los enlaces de dos componentes así obtenidos.

A la fecha es desconocido si existe un ovillo primo tal que al sumarle tres ovillos racionales distintos se obtengan tres nudos o enlaces no primos, por lo que tenemos la siguiente

*Conjetura 1. Dado un ovillo primo existen a lo mucho dos ovillos racionales tal que al sumárselos se obtengan nudos o enlaces no primos.*

1.1.6 Sea  $B$  una 3-bola con cuatro puntos  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sobre su frontera, como en la figura 7. Los ovillos en  $B$  que consideraremos tienen los extremos de sus cuerdas en los  $a_i$ 's. Decimos que dos ovillos racionales  $(B, p/q)$  y  $(B, r/s)$  están en la misma clase de pegadura si sus cuerdas unen a los mismos  $a_i$ 's. Existen por lo tanto tres clases de pegadura:

- 1) una cuerda une  $a_1$  y  $a_2$  y la otra  $a_3$  y  $a_4$ .
- 2) una cuerda une  $a_1$  y  $a_3$  y la otra  $a_2$  y  $a_4$ .
- 3) una cuerda une  $a_1$  y  $a_4$  y la otra  $a_2$  y  $a_3$ .

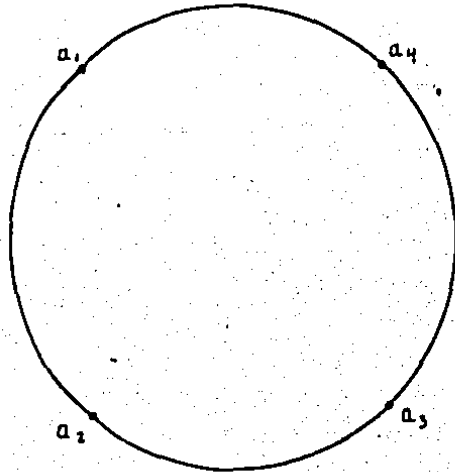


Figura 7

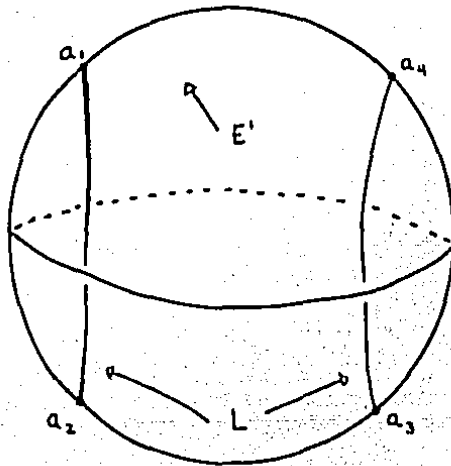


Figura 8

Un ovillo  $(B, p/q)$  está en la clase (1) si y solo si  $p$  es impar y  $q$  par, está en la clase (2) si y solo si  $p$  y  $q$  son impares, y está en la clase (3) si y solo si  $p$  es par y  $q$  impar. Además si dos ovillos  $(B, p/q)$  y  $(B, r/s)$  están en la misma clase de pegadura, entonces  $d(p/q, r/s) \geq 2$ . Por lo tanto si al sumarle dos ovillos racionales a un ovillo primo obtenemos dos nudos o enlaces no primos, dichos ovillos deben de estar en distinta clase de pegadura. Esto resuelve una conjetura de Bleiler [B<sub>1</sub>], pues el conjeturó que dado un ovillo primo existe a lo mucho un ovillo racional en cada clase de pegadura, tal que al sumárselo a dicho ovillo se obtenga un nudo no primo. Dado un ovillo  $(B, t)$ , al sumarlo con ovillos de una cierta clase de pegadura siempre se obtendrán enlaces de dos componentes, y al sumarlo con ovillos de las otras dos clases se obtendrán nudos; así por ejemplo si una de las cuerdas de  $(B, t)$  une  $a_1$  y  $a_4$  y la otra  $a_2$  y  $a_3$ , al sumar  $(B, t)$  con un ovillo de la clase (1) o (2) siempre se obtendrá un nudo, y al sumarlo con uno de la clase (3) siempre se obtendrá un enlace de dos componentes. Por lo tanto para un ovillo primo si existen tres ovillos racionales tal que al sumárselos se obtengan nudos o enlaces no primos, entonces dos de ellos deben de ser nudos y el otro un enlace.

1.1.7 Ahora damos una descripción de los ovillos racionales. Sea  $B$  la bola de la figura 8, y  $L$  los dos arcos ajenos  $a_1 a_2$  y  $a_3 a_4$ . Definimos un homeomorfismo  $t$  de  $B$  en si mismo, como la composición de una rotación, de ángulo  $\pi/2$ , en torno del eje  $E'$  que transforma  $a_1$  en  $a_4$ , y una simetría respecto al plano meridional que contiene a los  $a_i$ 's. Definimos otro homeomorfismo  $v$  de  $B$  en si mismo del siguiente modo; tómease un disco  $D$  en  $\partial B$  ajeno de  $a_1$  y  $a_2$  y que contiene en su interior a  $a_3$  y  $a_4$ , como en la figura 9,  $v|D$  es el resultado de girar, manteniendo  $\partial D$  fijo, en el sentido que se indica en la figura 9, con el fin de permutar  $a_3$  con  $a_4$ ;  $v$  en  $\partial B$  es la identidad fuera de  $D$ .

Sean  $p$  y  $q$  dos enteros (estamos suponiendo que son primos relativos), si  $p/q$  es la fracción continuada  $n + 1/m + \dots + 1/k + 1/j + 1/i$ , definimos el autohomeomorfismo  $f(p/q)$  de  $B$  como la composición  $f(p/q) = v^n t v^m t \dots v^k t v^j t v^i t$ . Definimos al ovillo racional  $(B, 1/0)$  como  $B$  más los arcos  $L$ , definimos al ovillo  $(B, 0)$  como  $(B, 0) = t(B, 1/0)$  y al ovillo  $(B, p/q)$  por

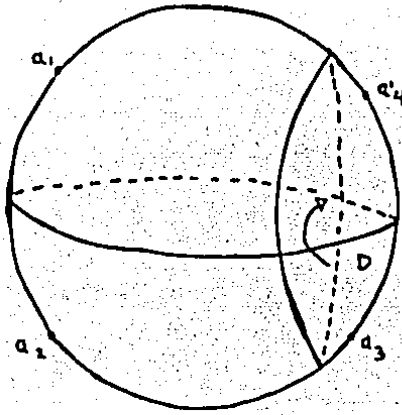
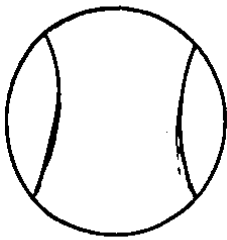
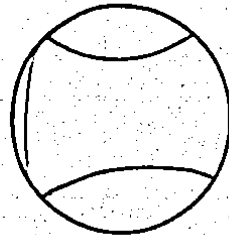


Figura 9

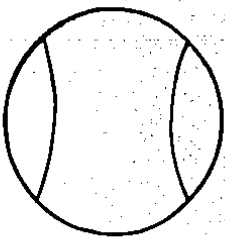


$(B, 1/0)$

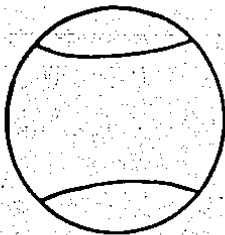


$(B, 0)$

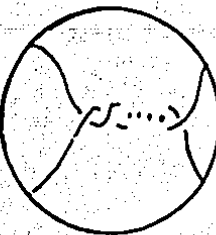
$$1/n = 0 + \frac{1}{n}$$



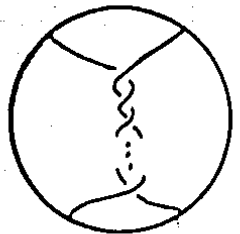
$\tau$



$\nu^n$



$\tau$



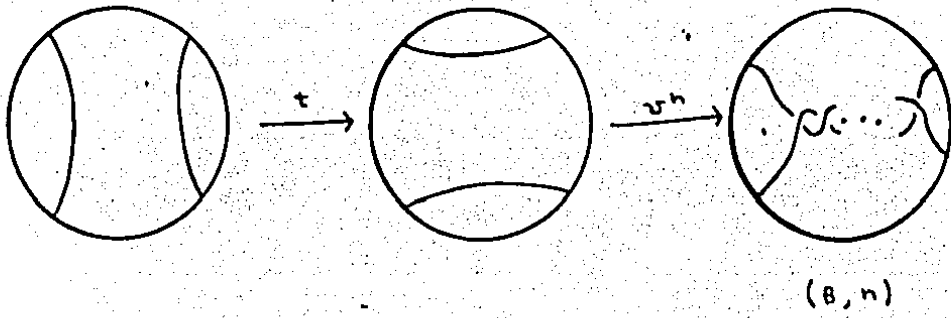
$(B, 1/n)$

Figura 10

$(B, p/q) = f(p/q)(B, 1/0)$  . Se puede ver que  $f(p/q)$  no depende de la fracción continuada elegida para  $p/q$  . En la figura 10 damos algunos ejemplos.



$$h = n$$



$$9/4 = 2 + \frac{1}{4}$$

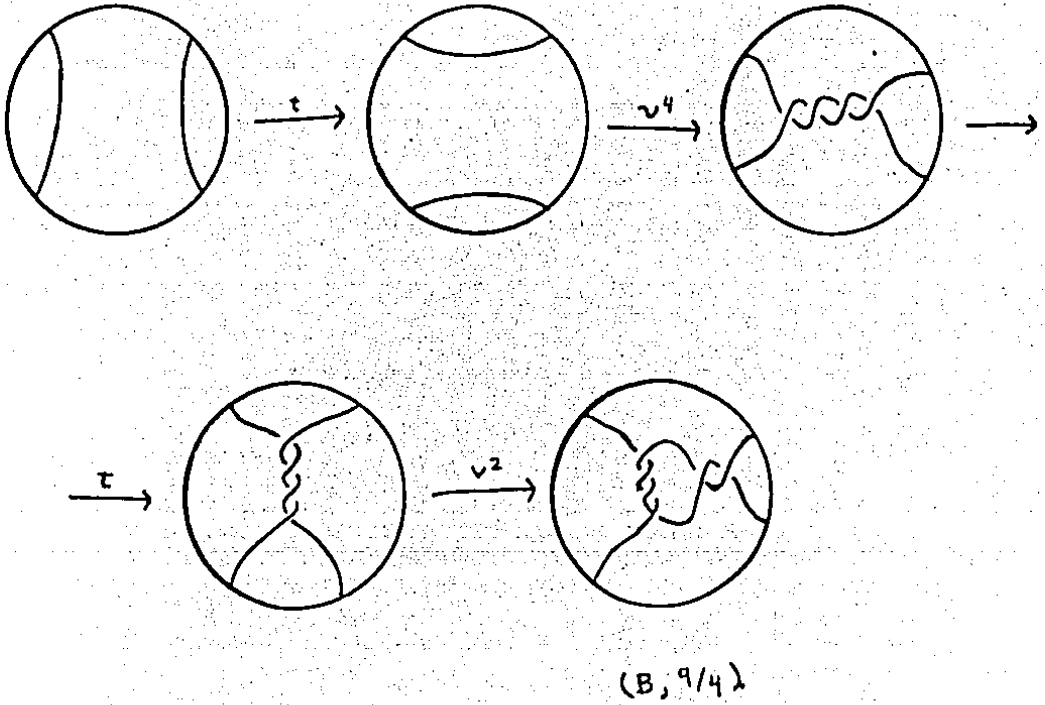


Figura 10.

## 1.2 Algunos problemas sobre ovillos.

1.2.1 El óvillo  $(B, t)$  de la figura 6(6) tiene la propiedad de que  $(B, t) + (B', 1/0) =$  nudo de dos sumandos, y  $(B, t) + (B', 0) =$  nudo de tres sumandos; haciendo unas modificaciones al óvillo  $(B, t)$  es posible encontrar un óvillo primo  $(B'', t)$  tal que  $(B'', t) + (B', 1/0) =$  nudo de dos sumandos, y  $(B'', t) + (B', 0) =$  nudo de  $n$  sumandos. Sería interesante tener ejemplos de ovillos con las siguientes propiedades, o bien probar que no pueden existir tales ovillos.

a) Dado  $n \geq 2$  encontrar un óvillo primo  $(B, t)$  tal que  $(B, t) + (B', 1/0) =$  nudo trivial, y  $(B, t) + (B', 0) =$  nudo (enlace) de  $n$  sumandos.

b) Dado  $n \geq 2$  encontrar un óvillo primo  $(B, t)$  tal que  $(B, t) + (B', 1/0) =$  enlace separable, y  $(B, t) + (B', 0) =$  nudo de  $n$  sumandos.

c) Dados  $n, m \geq 2$  encontrar un óvillo primo  $(B, t)$  tal que  $(B, t) + (B', 1/0) =$  nudo (enlace) de  $n$  sumandos, y  $(B, t) + (B', 0) =$  nudo de  $m$  sumandos.

Es claro que podemos suponer sin pérdida de generalidad que los ovillos que hay que sumarle al óvillo primo  $(B, t)$  son  $(B', 1/0)$  y  $(B', 0)$ ; debido a los teoremas 1-6.

1.2.2 Un nudo o enlace  $k$  es primo doble, si  $k$  es primo y  $k$  no puede expresarse como la suma de dos ovillos primos (vease por ejemplo  $[B_2]$ , en donde se prueba que ciertas familias de nudos son primos dobles). Podemos preguntarnos si al sumar un óvillo primo con ovillos racionales podemos obtener pocos nudos o enlaces que no sean primos dobles. Un óvillo  $(B, t)$  se dice que es primo doble si  $(B, t)$  es primo, y no existe una esfera  $S$  encajada en  $B$  que intersecta a  $t$  en cuatro puntos, de modo que la 3-bola que determina  $S$  en  $B$  intersecta a  $t$  en dos arcos, formando un óvillo primo, y además  $S$  no es isotópica a  $\partial B$  (relativa a  $t$ ). Ejemplos de ovillos que no son primos dobles son los formados como en la figura 11. Los ovillos 6(1), 6(2) y 6(5) son primos dobles, y los ovillos 6(3), 6(4) y 6(6) no lo son. Al sumar un óvillo primo que no es primo doble con un óvillo racional, lo más probable es que el nudo o enlace que resulta no sea primo doble, por lo que la pregunta anterior tiene poco interés para estos ovillos.

Sea  $(B, t)$  un ovrillo primo doble, y  $(B', r_1)$ ,  $(B', r_2)$  dos ovillos racionales. Sea  $k_i$  el nudo o enlace obtenido al sumar  $(B, t)$  con  $(B', r_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Conjetura 2. Supongase que  $k_1$  no es primo doble.

- a) Si  $k_2$  es trivial, existe  $n_1$  tal que  $d(r_1, r_2) \leq n_1$ .
- b) Si  $k_2$  es compuesto, existe  $n_2$  tal que  $d(r_1, r_2) \leq n_2$ .
- c) Si  $k_2$  es separable, existe  $n_3$  tal que  $d(r_1, r_2) \leq n_3$ .
- d) Si  $k_2$  no es primo doble, existe  $n_4$  tal que  $d(r_1, r_2) \leq n_4$ .

Una respuesta afirmativa a estas cuestiones implicaría que dado un ovrillo primo doble existen un número finito de ovillos racionales tal que al sumárselos se obtengan nudos o enlaces que no sean primos dobles. Luego esto implicaría que dado un ovrillo primo doble, podemos encontrar una infinidad de nudos y enlaces primos dobles, sumándole a dicho ovrillo distintos ovillos racionales. Probablemente esta conjetura se pueda resolver con las mismas técnicas con que se prueban los teoremas 1-6, pero quizás la prueba sea mucho más complicada.

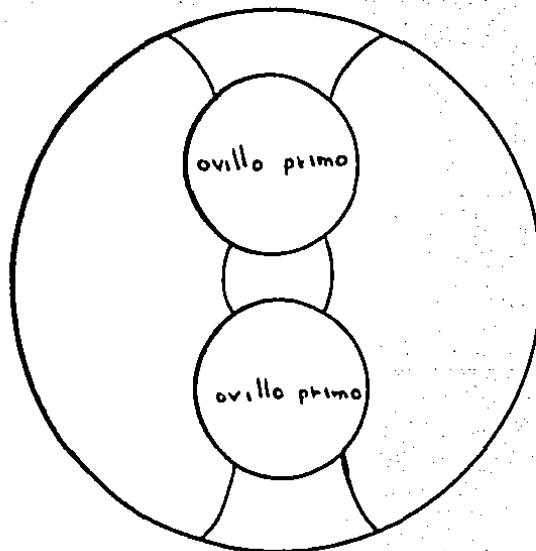


Figura 11

### 1.3 Cirugía en nudos.

1.3.1 Sea  $k$  un nudo en  $S^3$ , y sea  $V(k)$  una vecindad regular de  $k$ , el exterior de  $k$  es el espacio  $S^3 - V(k)$ . Hacer cirugía en  $k$  significa pegar  $S^3 - V(k)$  con  $S^1 \times D^2$  por medio de un homeomorfismo de sus fronteras; parametrizamos a las distintas cirugías con  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  al igual que en [R]. Denotamos por  $M(k, r)$  a la variedad obtenida al hacer cirugía con coeficiente  $r$  en el nudo  $k$ . Tenemos que  $M(k, r) = S^3$ . Surge la siguiente pregunta, ¿que características tiene la variedad  $M(k, r)$ ?

Un nudo  $k$  tiene la propiedad  $P$  si  $M(k, r)$  es simplemente conexa solo en el caso de la cirugía trivial ( $r = 1/0$ ). Una de las más famosas conjeturas en cirugía de nudos, la cual está relacionada con la conjetura de Poincaré es la siguiente.

*Conjetura 3. Todo nudo no trivial tiene la propiedad  $P$ .*

Se conoce que muchas familias de nudos tienen la propiedad  $P$ . Recientemente se ha probado [CGLS] que para un nudo  $k$  a lo mucho hay una cirugía no trivial que produce una variedad simplemente conexa, y dicha cirugía solo puede tener coeficiente  $1$  o  $-1$ . El problema que hay para resolver el último caso de esta conjetura se parece al problema que se presenta en la conjetura 1.

Otra conjetura en cirugía de nudos es la siguiente.

*Conjetura 4. Solo la cirugía  $pq$  en los nudos cable  $k_{pq}$  produce variedades reducibles.*

Se ha probado esta conjetura para varias clases de nudos, entre ellos los nudos cable. Recientemente se ha probado que solo la cirugía entera puede producir variedades reducibles [GL], y si hay dos de tales cirugías con coeficientes  $r_1$  y  $r_2$  entonces  $|r_1 - r_2| \leq 4$

Un nudo  $k$  tiene la propiedad  $K$  si la variedad  $M(k, r)$  nunca es  $S^1 \times S^2$  (tal variedad puede ser  $S^1 \times S^2$  solo si  $r = 0$ ).

Recientemente Gabai [Ga] ha probado que todos los nudos no triviales tienen la propiedad  $R$ , mas aun ha probado que  $M(k,0)$  es siempre irreducible.

Los teoremas 1-6 tienen implicaciones en cirugía de nudos, antes de verlas veamos algunas definiciones y teoremas. Nos referimos a [R] o [H] para definiciones y hechos acerca de 3-variedades no encontrados aqui.

1.3.2 Un nudo  $k$  en  $S^3$  es fuertemente invertible si existe una involución de  $S^3$  preservando la orientación que lleva a  $k$  sobre si mismo invirtiendo su orientación. Se conoce que tal involución es equivalente a una  $\pi$ -rotación cuyo eje intersecta a  $k$  en exactamente dos puntos. Ejemplos de nudos fuertemente invertibles son los nudos de dos puentes, los toroidales y la mayoría de los nudos de las tablas de nudos.

Mencionamos el siguiente teorema [ $M_2$ ].

*Teorema. Para un nudo fuertemente invertible  $k$ , la variedad  $M(k,r)$  obtenida por cirugía con coeficiente  $r$  en  $k$ , es cubierta doble ramificada de  $S^3$ . El espacio base y el conjunto de ramificación  $B(k,r)$  de esta cubierta se descompone como un ovillo trivial  $(B',t')$  pegado a un ovillo localmente primo  $(B,t)$  en una manera especificada por  $r$ . Ademas si  $k$  no es trivial,  $(B,t)$  es en efecto primo.*

Podemos agregar en este teorema que el espacio base y el conjunto de ramificación de esta cubierta puede ser obtenido cambiando al ovillo  $(B,1/0)$  por  $(B,r)$  en una apropiada proyección del nudo trivial.

Tenemos también el siguiente teorema [KT].

*Teorema. Un enlace  $k$  es primo si y solo si la doble cubierta ramificada  $H$  de  $S^3$  ramificada sobre  $k$  es irreducible.*

Los dos teoremas anteriores y los teoremas 1, 2 implican lo siguiente.

Corolario 2. Para un nudo fuertemente invertible  $k$  la variedad  $M(k,r)$  puede ser reducible solo si  $r$  es un entero. Además si  $M(k,r_1)$  y  $M(k,r_2)$  son reducibles entonces  $|r_1 - r_2| \leq 1$ .

Este corolario implica que para un nudo fuertemente invertible a lo mucho hay dos cirugías que producen variedades reducibles, lo que es una buena aproximación a la conjetura 4 para este tipo de nudos.

Corolario 3. Si  $k$  es fuertemente invertible y anfiqueiral entonces la variedad  $M(k,r)$  es siempre irreducible.

## CAPITULO II

La prueba de los teoremas 1-4 consiste en traducir el problema topológico a un problema combinatorio de gráficas planas. Utilizamos la técnica introducida por M. Scharlemann en  $[S_1]$  y  $[S_2]$ .

En este capítulo desarrollamos la mayor parte de los argumentos topológicos y combinatorios, lo que nos lleva a la demostración del teorema 1. En el capítulo III probamos los teoremas 2, 3, 4. La prueba del teorema 2 es una pequeña variación de la del teorema 1, pero será necesario desarrollar más argumentos topológicos y combinatorios. Las pruebas de los teoremas 3 y 4 son más fáciles que las anteriores, y se deducen fácilmente de lo realizado en el capítulo II.

Nos referimos a [R] o [H] para definiciones y hechos acerca de tres variedades no encontrados aquí. Definiciones tales como variedad irreducible, espacio lente, superficie incompresible, etc. Todo nuestro trabajo se debe interpretar en la categoría PL, como ya habíamos dicho anteriormente.

### 2.1 Preliminares.

#### 2.1.1 En este capítulo probamos el teorema 1.

**Teorema 1.** Sea  $(B, t)$  un ovillo primo y  $(B', r_1)$ ,  $(B', r_2)$  dos ovillos racionales. Sea  $k_i$  el nudo o enlace obtenido al sumar  $(B, t)$  con  $(B', r_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Si  $k_1$  y  $k_2$  son compuestos entonces  $d(r_1, r_2) \leq 1$ .

Supondremos que el teorema es falso, y por lo tanto existe un contraejemplo. Sea  $(B, t)$  un ovillo primo, y  $(B', r_1)$ ,  $(B', r_2)$  dos ovillos racionales, tales que  $r = d(r_1, r_2) \geq 2$ . En este capítulo usamos los índices  $a, b$  para denotar 1 o 2, con la convención de que cuando son usados juntos  $(a, b) = (1, 2)$ .

Sea  $k_a$  el nudo o enlace obtenido al sumar  $(B, t)$  y  $(B', r_a)$ . Supóngase que  $k_a$  es compuesto, esto es, existe una  $S^2$

que interseca transversalmente a  $k_a$  en dos puntos, tal que ninguna de las cerraduras de las componentes de  $S^3 - S^2$  interseca a  $k_a$  en un arco desanudado; supongase además que  $k_a$  no es un enlace separable, este caso lo tratamos en el teorema 3. Podemos suponer lo siguiente, pues se consigue por medio de isotopías:

a) Las cuerdas de  $(B', r_a)$  están contenidas en  $\partial B'$ , esto puede hacerse porque  $(B', r_a)$  es un ovillo trivial.

b)  $S^2$  interseca a  $k_a$  sobre las cuerdas de  $(B', r_a)$ .

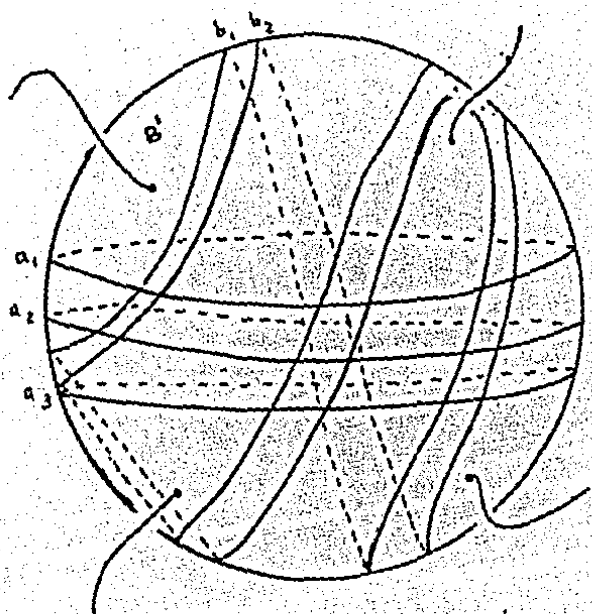
c) Las intersecciones entre  $S^2$  y  $\partial B$  son todos círculos esenciales en  $\partial B - \{ \text{cuerdas de } (B', r_a) \}$ , tal que cada uno de estos círculos es la frontera de un disco en  $S^2$  contenido propiamente en  $B'$ .

De entre todas las esferas con las propiedades arriba mencionadas tomemos una tal que el número de círculos de intersección entre ella y  $\partial B$  es mínimo, sea esta  $S_a$ .

Sea ahora  $P_a = B \cap S_a$ , luego  $P_a$  es una superficie planar conexa en  $B$ .  $\partial P_a$  está formada de  $n_a$  círculos, paralelos a  $hr_a(J)$ , denotados por  $a_1, a_2, \dots, a_{n_a}$ , y numerados de modo que  $a_i$  y  $a_{i+1}$  sean frontera de un anillo esencial contenido en  $\partial B - \{ \text{cuerdas de } (B', r_a) \}$ , cuyo interior no interseca  $S_a$ , para  $1 \leq i \leq n_a - 1$ . Denotamos a los puntos de  $P_a \cap k_a$  por  $a_+$  y  $a_-$ . Mostramos a estas colecciones de curvas en la figura 12.

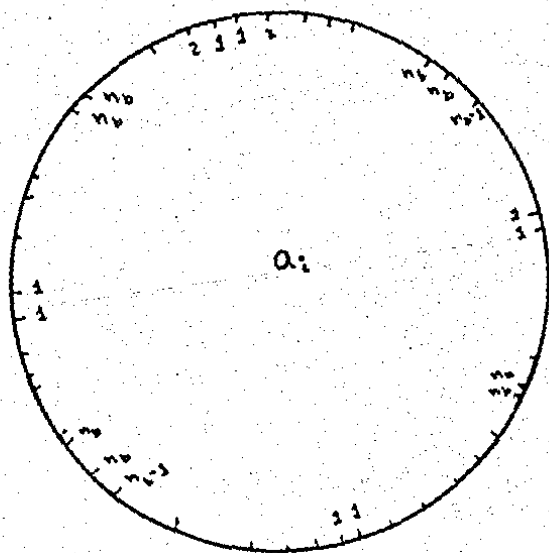
Sean  $a_i$  y  $b_j$  componentes de  $\partial P_a$  y  $\partial P_b$  respectivamente. Podemos suponer que  $\#(a_i \cap b_j)$  es mínimo, esto es, igual a  $2r$ . El círculo  $a_i$  interseca a los círculos de  $\partial P_b$  como sigue: digamos que primero interseca a  $b_1$ , entonces después interseca a  $b_2, b_3, \dots, b_{n_b}$ , después a  $b_{n_b}, \dots, b_1$ , entonces otra vez  $b_1, \dots, b_{n_b}$ , y así sucesivamente hasta regresar al punto inicial.  $b_j$  interseca  $\partial P_a$  de manera similar. Marcamos a los puntos de intersección entre  $a_i$  y  $b_j$ , con  $j$  en  $P_b$  y con  $i$  en  $P_a$ , para  $1 \leq i \leq n_a, 1 \leq j \leq n_b$ . En la figura 13 mostramos la colección de marcas alrededor de un vértice.





Curvas  $a_i$ 's y  $b_i$ 's  
 En el caso  
 $r_a = 0$   $r_b = 2$

Figura 12



Marcas en  $a_i$

Figura 13

Las intersecciones entre  $k_a$  y  $k_b$  consisten de dos arcos, estos son las cuerdas de  $(B, t)$ , y de  $2r$  puntos que corresponden a cruces transversales de  $k_a$  y  $k_b$  sobre  $\partial B$ .  $k_b$  intersecta a  $P_a$  en los siguientes puntos,  $a_+$  y  $a_-$  y  $2r$  puntos en cada una de las componentes de  $\partial P_a$ , estos últimos ocurren entre las marcas  $i-1$  y las  $n_b-n_b$ . Para lo que sigue será importante tener una imagen clara de la forma en que las  $a_i$ 's intersectan a  $\partial P_b$ , y de como  $k_a$  intersecta a  $P_b$ .

2.1.2 Afirmación. Ambas  $P_1$  y  $P_2$  son incompresibles en  $B$  - (cuerdas de  $(B, t)$ ).

Demostración. Supóngase que  $P_a$  es compresible, y sea  $D$  un disco de compresión. Si  $\partial D$  es esencial en  $S_a - \{a_+, a_-\}$ , haciendo cirugía en  $S_a$  con  $D$  nos da una esfera que intersecta a  $k_a$  en un punto, pero esto es imposible pues  $S^3$  es irreducible. Si  $\partial D$  no es esencial en  $S_a - \{a_+, a_-\}$ ,  $\partial D$  es frontera de un disco  $D'$  contenido en  $S_a$  que no contiene a  $a_+$  y  $a_-$ , como  $\partial D$  es esencial en  $P_a$ ,  $D'$  contiene algunos  $a_i$ 's en su interior;  $D'$  no intersecta a  $k_a$  y por lo tanto  $D \cup D'$  es una esfera ajena de  $k_a$ , y luego es frontera de una 3-bola en  $S^3$  que no intersecta a  $k_a$ , pues  $k_a$  no es separable; haciendo una isotopía podemos llevar a  $D'$  hasta  $D$ , reduciendo el número de círculos de intersección entre  $S_a$  y  $\partial B$ , lo cual no es posible, por lo tanto  $P_a$  es incompresible. ■

$P_a \cap P_b$  consiste de arcos y círculos, y por la incompresibilidad de  $P_a$  y  $P_b$ , podemos suponer que los posibles círculos de intersección entre ellas son esenciales en ambas  $P_a - \{a_+, a_-\}$  y  $P_b - \{b_+, b_-\}$ .

Podemos suponer también lo siguiente.

2.1.3 No hay círculos de intersección entre  $P_a$  y  $P_b$ , tal que uno de los discos determinados por él en  $S_a$  tenga en su interior a  $a_+$  ( $a_-$ ) pero no tenga ni a  $a_-$  ( $a_+$ ) ni a ninguno de los  $a_i$ 's.

*Demostración.* Supóngase que existe una de esas curvas, tómesese una tal que el interior del disco determinado por ella con las propiedades arriba mencionadas no interseque a  $P_b$ ; sea esta  $\gamma$  y sea  $D$  el disco determinado por  $\gamma$  en  $S_a$  como arriba. Veamos a  $\gamma$  en  $P_b$ , si  $\gamma$  es inesencial en  $S_b - (b_+, b_-)$  podemos construir una esfera que interseque transversalmente a  $k_b$  en un punto, pero esto es imposible. Si  $\gamma$  es esencial en  $S_b - (b_+, b_-)$  tenemos dos posibilidades:

a)  $\gamma$  es frontera de un disco en  $S_b$  que contiene en su interior a  $b_+$  (o  $b_-$ ) pero no contiene a ninguno de los  $b_j$ 's.

Sea  $D'$  este disco en  $S_b$ .  $D \cup D'$  es una esfera contenida totalmente en  $B$  que interseca en dos puntos a  $k_b$ , como  $(B, t)$  es un ovrillo primo dicha esfera es frontera de una 3-bola contenida en  $B$  que interseca en un arco desanudado a  $k_b$ , entonces podemos hacer una isotopía, moviendo a  $P_b$ , quitando ese círculo de intersección, como mostramos en la figura 14.

b) Los dos discos determinados por  $\gamma$  en  $S_b$  tienen en su interior a algunos de los  $b_j$ 's.

Haciendo cirugía en  $S_b$  con  $D$  se obtienen dos esferas  $S'$  y  $S''$ , ambas esferas intersecan a  $k_b$  en dos puntos, pero al menos una de ellas separa a  $k_b$  en dos partes no triviales (es decir ninguna de las partes es un arco desanudado); puesto que de otro modo  $S_b$  separaría a  $k_b$  en dos partes y alguna de ellas sería un arco desanudado; pero esto es una contradicción pues  $S'$  y  $S''$  tienen menos círculos de intersección con  $\partial B$  que  $S_b$ , (ver la figura 15). Esto completa la prueba. ■

2.1.4 Construimos una gráfica en  $S_a$  como sigue: El conjunto de vértices está formado por los  $a_i$ 's, y las aristas son los arcos de intersección entre  $P_a$  y  $P_b$ . Denotamos a la gráfica por  $G_a$  (similarmente  $G_b$ ). A  $a_+$  y  $a_-$  no los consideramos como vértices de la gráfica, pues no hay incidente a ellos ningún arco de intersección.

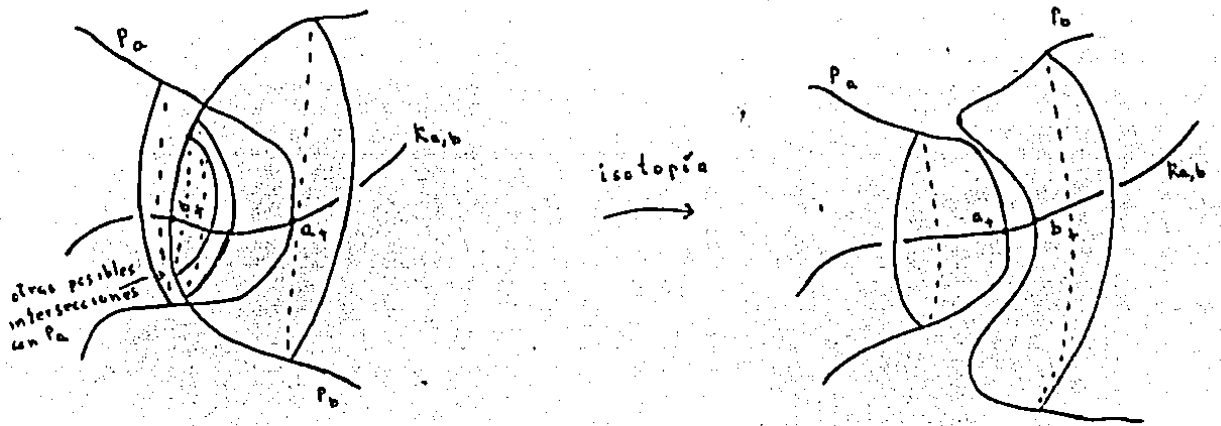


Figura 14

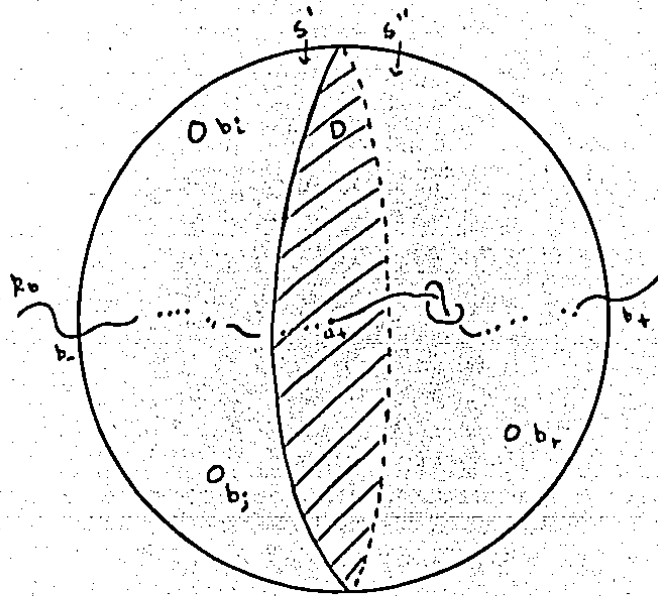


Figura 15

Un extremo de una arista corresponde a un punto de intersección entre  $a_i$  y  $b_j$ , estos puntos los marcamos con un número en la sección 2.1.1, luego consideramos que cada arista en  $G_a$  tiene sus extremos marcados con ciertos números. Si  $\gamma$  es una arista en  $G_a$  que une  $a_i$  y  $a_j$  con marcas en sus finales  $s$  y  $t$  respectivamente, entonces  $\gamma$  en  $G_b$  une  $b_s$  y  $b_t$  y sus finales están marcados con  $i$  y  $j$  respectivamente. Si una arista tiene sus finales con marcas distintas, orientamos la arista de la marca mayor a la menor. Entonces  $G_a$  y  $G_b$  son gráficas que tienen algunas aristas orientadas. A una arista no orientada la llamamos nivelada.

Un circuito es una subgráfica que consiste de aristas  $e_0, e_1, \dots, e_{k-1}$ , y vértices  $v_0, \dots, v_{k-1}$ ,  $k \geq 1$ , tal que  $e_i$  y  $e_{i+1} \pmod{k}$  son adyacentes al mismo vértice  $v_i$ , y tal que podemos escoger un arco  $\gamma_i$  de  $v_i$  de modo que  $\gamma_i$  conecte a las marcas de  $e_i$  y  $e_{i+1}$  y no toque a las otras  $e_j$ 's. Además la unión de los  $e_j$ 's y los  $\gamma_j$ 's es un círculo  $\alpha$  en  $S_a$ , que separa en dos partes a  $S_a$ ; podemos escoger a los  $\gamma_j$ 's de modo que los vértices  $v_i$ 's queden en la misma componente de  $S_a - \alpha$ . Si las aristas del circuito pasan solo una vez por cada vértice, entonces hay dos maneras de escoger a las  $\gamma_j$ 's, pero si pasan dos o mas veces por un mismo vértice entonces solo hay una manera de hacer tal elección (figura 16). El interior de un circuito en  $G_a$  es esta componente de  $S_a - \alpha$  que no contiene a  $a_+$ . Según esta definición de interior dependiendo de la elección de los  $\gamma_i$ 's, los vértices del circuito estarán o no en el interior de dicho circuito, pero todos los circuitos que consideraremos aquí tendrán sus vértices fuera del interior.

Un circuito es malo si contiene en su interior a  $a_+$ , de otra manera es bueno. Un vértice interior de un circuito es un vértice que se encuentra en el interior del circuito (pero no es un vértice del circuito). Un lazo es un circuito con solo una arista, el vértice al que incide dicho lazo lo llamamos la base del lazo. Una cuerda de un circuito es una arista contenida en el interior del circuito cuyos finales se encuentran en vértices del

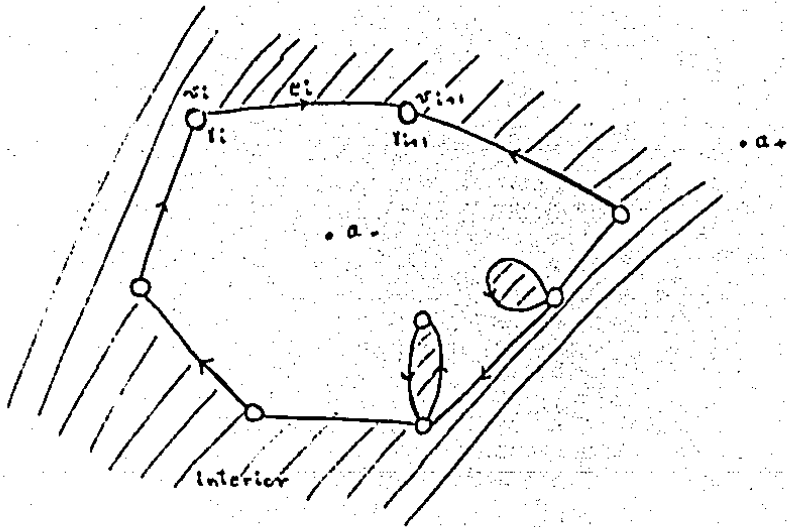
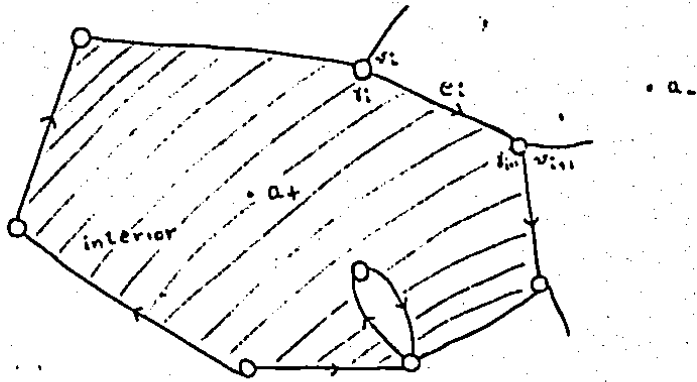


Figura 16

circuito. Un radio de un circuito es una cuerda que no es un lazo. Un lazo doble es un circuito formado por dos lazos  $c_1$ ,  $c_2$  basados en el mismo vertice y tal que  $c_2$  esta en el interior de  $c_1$ .

Si todas las aristas de un circuito están orientadas y existe una trayectoria alrededor del circuito la cual es siempre consistente con las orientaciones de las aristas, el circuito es un ciclo. Si al menos una arista del circuito está orientada y existe una trayectoria alrededor del circuito que nunca es inconsistente con las orientaciones de las aristas, el circuito es un semiciclo. Un uniciclo es un lazo orientado. Decimos que un circuito  $c_1$  esta en el interior de otro circuito  $c_2$ , si el interior de  $c_1$  está contenido en el interior de  $c_2$ ; bien puede ser que  $c_1$  y  $c_2$  tengan vértices y aristas en común.

Un vértice es una fuente (sumidero) si ninguna de sus aristas entra a él (sale de él). Dos aristas en  $G_a$  son paralelas si bordean un disco en  $P_a$ , o sea son lazos basados en el mismo vértice, o unen dos vértices distintos, pero en cualquier caso el circuito que forman no tiene vértices en su interior.

El interior de un circuito define una sucesión de marcas como sigue. Escojamos una trayectoria que vaya una vez a través de cada arista del circuito y en cada vertice  $a_i$  contenga al segmento de  $a_i$  contenido en el interior del circuito (este segmento no toca a las aristas del circuito salvo en sus extremos). Ahora leamos las marcas de finales de aristas que la trayectoria atraviesa (esto es aristas del circuito), o cruza transversalmente. A esta colección de marcas la llamamos la sucesión de marcas del circuito. La sucesión depende, por supuesto, de donde empezemos la trayectoria y de que orientación tomemos. Si dicho circuito es un ciclo o semiciclo la última elección está naturalmente dada. A las marcas de finales de aristas a las cuales la trayectoria antes mencionada cruza transversalmente las llamamos marcas interiores del circuito.

Sea  $p$  un entero,  $1 \leq p \leq n_a$ , definimos un  $p$ -biflujo como un circuito en  $G_a$  con las siguientes propiedades:

- a) Todas las aristas están orientadas, con cabezas (raíces)

marcados con  $p$ .

b) Todas las marcas interiores son enteros mayores (menores) que  $p$ .

c) Existe precisamente un vértice del circuito (al que llamamos la base) para el cual las aristas del circuito incidentes a él salen (entran) de él, y uno (al que llamamos el ápice) tal que las aristas del circuito incidentes a él entran (salen) a él.

d) Hay marcas interiores en el ápice, en efecto al menos hay dos.

Definimos un  $p$ -lazo como un lazo con un final marcado con  $p$ , y todas las marcas interiores mayores o menores que  $p$ . Un  $p$ -lazo doble es un lazo doble que es un ciclo, tiene las dos cabezas (raíces) marcadas con  $p$ , y todas las marcas interiores son mayores (menores) que  $p$ .

Hacemos ahora algunas observaciones fáciles.

2.1.5 Lema. 1) Cualquier cuerda de un ciclo (semiciclo) que no tiene ciclos (semiciclos) en su interior es nivelada.

2) Si un ciclo (semiciclo) que no tiene ciclos (semiciclos) en su interior tiene vértices interiores, entonces debe tener una fuente o sumidero interior.

3) Cualquier lazo que tiene vértices interiores y está basado en una fuente (sumidero) tiene un vértice interior el cual es un sumidero (fuente) o tiene un ciclo en su interior.

4) Si un ciclo (semiciclo con solo una arista nivelada) no tiene vértices ni lazos en su interior, entonces hay en su interior un ciclo o semiciclo con solo una arista nivelada pero sin cuerdas ni vértices interiores.

Demostración. 1) Sea  $\gamma$  un ciclo (semiciclo) que cumple con las hipótesis, supóngase que  $\gamma$  tiene una cuerda orientada; si dicha cuerda es un lazo, es por sí misma un ciclo y está en el interior de  $\gamma$ , lo que contradice las hipótesis; si la cuerda es un radio, separará al ciclo (semiciclo) en dos circuitos, y uno de ellos será un ciclo (semiciclo) en el interior de  $\gamma$ , lo que contradice las hipótesis, luego todas las cuerdas son niveladas. Si  $\gamma$  es un semiciclo podemos agregar que toda cuerda es un lazo nivelado.

2) Sea  $\gamma$  un ciclo (semiciclo) que cumple con las hipótesis. Supóngase que ningún vértice interior es una fuente o sumidero. Entonces cualquier vértice interior tiene una arista que sale de



él y otra que entra. Empezando en un vértice interior  $v$ , podemos construir una trayectoria a través de aristas interiores orientadas que sea siempre consistente con las orientaciones de dichas aristas; dicha trayectoria no puede pasar dos veces por el mismo vértice, pues se crearía un ciclo en el interior de  $\gamma$ , luego debe de terminar en un vértice de  $\gamma$ . Similarmente podemos construir una trayectoria que empieza en  $v$ , a través de aristas interiores orientadas que sea siempre inconsistente con sus orientaciones; tal trayectoria también debe terminar en un vértice de  $\gamma$ , y no debe pasar dos veces por un mismo vértice. La unión de las dos trayectorias, que es una trayectoria orientada que empieza y termina en  $\gamma$  y no pasa dos veces por un mismo vértice, divide al interior de  $\gamma$  en dos partes, al menos una de estas partes es el interior de un ciclo (semiciclo), lo que contradice la elección de  $\gamma$ .

3) La prueba es similar. Si un lazo está basado en una fuente  $v$ , y su interior tiene vértices pero no sumideros, empezando en cualquier vértice interior podemos construir una trayectoria a través de aristas orientadas que sea siempre consistente con sus orientaciones. Puesto que  $v$  es una fuente, la trayectoria nunca llega a  $v$ , y como no hay sumideros en el interior del lazo la trayectoria nunca se detiene, luego debe de pasar dos veces por un mismo vértice, con lo que se crea un ciclo en el interior del lazo.

4) Sea  $\gamma$  un ciclo (semiciclo con solo una arista nivelada) que cumple con las hipótesis. Si  $\gamma$  no tiene cuerdas terminamos, luego supóngase que  $\gamma$  tiene cuerdas, además supóngase que tiene  $n$  cuerdas. Cualquier cuerda divide al circuito en dos circuitos, podemos escoger una cuerda de modo que uno de los circuitos por ella determinados no tenga cuerdas, sea esta  $\alpha$ . Si  $\alpha$  está orientada uno de los dos circuitos en los que  $\alpha$  divide a  $\gamma$  será un ciclo o semiciclo con solo una arista orientada que o bien no tendrá cuerdas o bien tendrá  $n-1$  cuerdas. Si  $\alpha$  es nivelada entonces uno de los circuitos en los que  $\alpha$  divide a  $\gamma$  será un semiciclo con solo una arista nivelada que no tendrá cuerdas o bien que tendrá  $n-1$  cuerdas. Continuando de esta manera se encuentra un ciclo o semiciclo con solo una arista nivelada y sin cuerdas ni vértices interiores. ■

El siguiente lema se aplicará a sucesiones de marcas en la próxima sección.

2.1.6 Lema. Sea  $c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_r, d_r$ ,  $r \geq 2$ , una sucesión de enteros satisfaciendo para todo  $i \in \mathbb{Z}_r$ ,

- 1)  $c_i \geq d_i$ .
- 2)  $|d_i - c_{i+1}| \leq 1$ .
- 3) Si  $c_i = d_i$  entonces  $d_{i-1} = c_{i+1}$ .
- 4)  $c_i > d_i$ .

Entonces para toda  $i$ ,

- a)  $c_i = c_1$  y  $d_i = c_1 - 1$ ; o
- b)  $c_i = d_i = c_1$  y  $c_{i+1} = d_{i+1} = c_1 - 1$ ; o
- c)  $c_i = d_i = c_1 - 1$  y  $c_{i-1} = d_{i-1} = c_1$ .

*Demostración.* La haremos por inducción sobre el número  $p$  de  $i$ 's para los cuales  $c_i = d_i$ .

a)  $p = 0$ . Entonces para todo  $i$ ,  $c_i \geq d_{i+1}$ , y por (2)  $c_{i+1} - d_i \leq 1$ , luego  $c_i \geq c_{i+1}$ . Las relaciones  $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_r \geq c_1$  fuerzan a que todas sean igualdades, o sea  $c_i = c_1$  para toda  $i$ , como  $c_i \geq d_{i+1} \geq c_{i+1}$  tenemos que  $d_i = c_1 - 1$  para toda  $i$ , por lo que se satisface (a).

b)  $p > 0$ . Sea  $j$  el mínimo entero  $2 \leq j \leq r$  tal que  $c_j = d_j$ . Entonces  $c_{j-1} > d_{j-1}$ , y

Afirmación.  $c_{j+1} = d_{j+1}$ .

*Demostración.* Supóngase que  $c_{j-1} > d_{j-1}$ ,  $c_j = d_j$  y  $c_{j+1} > d_{j+1}$ . Al eliminar  $c_j, d_j$  de la sucesión, obtenemos una nueva sucesión  $c_1', d_1', \dots, c_{r-1}', d_{r-1}'$ , con  $(c_i', d_i') = (c_i, d_i)$  para  $i < j$  y  $(c_i', d_i') = (c_{i+1}, d_{i+1})$  para  $i \geq j$ . Para esta nueva sucesión las condiciones 1, 3 y 4 se satisfacen trivialmente. La condición 2 es verdadera para  $i = j-1$  puesto que la condición 3 implica que  $c_{j+1} = d_{j-1}$ , de modo que  $|d_{j-1}' - c_j'| = |d_{j-1} - c_{j+1}| = |d_{j-1} - d_{j-1}| = 0$ , y claramente se satisface (2) para cualquier otra  $i$ . Por lo tanto por inducción, la nueva sucesión satisface (a), (b) o (c). Pero ni (b) ni (c) se satisfacen para  $i = j-1$  o  $i = j$  en la nueva sucesión, y puesto que  $c_j' = d_{j-1}'$  (a) debe fallar para  $i = j-1$  o  $i = j$ . La contradicción completa la prueba de la afirmación.

Entonces tenemos que  $c_{j-1} > d_{j-1}$ ,  $c_j = d_j$  y  $c_{j+1} = d_{j+1}$ . Por la condición 3  $c_{j+2} = d_j = c_j$  y  $d_{j-1} = c_{j+1} = d_{j+1}$ . Al eliminar a  $c_j, d_j, c_{j+1}, d_{j+1}$  de la sucesión, obtenemos una nueva sucesión  $c_1', d_1', \dots, c_{r-2}', d_{r-2}'$  con  $(c_i', d_i') = (c_i, d_i)$  para  $i < j$ , y con  $(c_i', d_i') = (c_{i+2}, d_{i+2})$  para  $i \geq j$ . Fácilmente se ve que (1) y (4) se verifican para la nueva sucesión, así como (2) cuando  $i \neq j-1$  y (3) cuando  $i \neq j$ . Nótese que  $|d_{j-1}' - c_j'| = |d_{j-1} - c_{j+2}| = |d_{j-1} - c_j| \leq 1$ , por hipótesis, lo que verifica (2) para  $i = j-1$ . También notamos que si  $c_j' = d_j'$ , entonces  $c_{j+2} = d_{j+2}$  y luego  $c_{j+1}' = c_{j+3} = d_{j+1} = d_{j-1} = d_{j-1}'$ , luego se verifica (3) para  $i = j$ .

Por lo tanto por la hipótesis de inducción, para cada  $i$  en la nueva sucesión (a), (b) o (c) se satisfacen. Puesto que (b) y (c) no se satisfacen para  $i = j-1$ , (a) debe de satisfacerse, por lo que  $c_{j-1}' = c_1$ ,  $d_{j-1}' = c_1 - 1$ . Puesto que (c) no se verifica para  $i = j$  en la nueva sucesión, (a) o (b) deben de satisfacerse (en particular  $c_j' = c_1$ ). Entonces (a), (b) o (c) se satisfacen en la sucesión original para cada  $i \neq j, j+1$ . Pero  $c_j = d_j = c_{j+2} = c_j' = c_1$  y  $c_{j+1} = d_{j+1} = d_{j-1} = d_{j-1}' = c_1 - 1$ . Entonces (b) y (c) se satisfacen para  $i = j$  y  $i = j+1$  respectivamente en la sucesión original, con lo que se completa la prueba. ■

## 2.2 Argumentos topológicos.

### 2.2.1 Lema. $n_a > 0$ .

*Demostración.* Si  $n_a = 0$ ,  $S_a$  no interseca a  $\partial B$ , y por lo tanto está contenida en el interior de  $B$ ; pero  $(B, t)$  es un ovillo primo y por lo tanto  $S_a$  es la frontera de una 3-bola  $D$  contenida en  $B$ , de modo que  $D$  interseca a  $k_a$  en un arco desanudado, esto contradice la elección de  $S_a$ . ■

### 2.2.2 Lema. Un lazo bueno en $G_a$ tiene vértices interiores.

*Demostración.* Supóngase que existe un lazo bueno que no tiene vértices en su interior, tomemos uno de esos lazos de modo que el disco determinado por su interior no interseca a  $P_b$ , sea este  $\gamma$ , supóngase que está basado en  $a_i$ . Las marcas de  $\gamma$  en  $a_i$  son adyacentes y por lo tanto son  $j, j+1, 0, 1, 1$  o  $n_b, n_b$  (ver la figura 13). En el primer caso el disco determinado por el interior de  $\gamma$  junto con el anillo en  $\partial B$  bordeado por  $b_j$  y  $b_{j+1}$  pueden ser usados para construir un disco de compresión para  $P_b$ , lo cual no es posible. Supóngase entonces que los finales de  $\gamma$  están marcados con 1 (el caso restante es similar a éste). Considérese el arco  $\gamma$  en  $G_b$ , un lazo basado en  $b_i$  con ambos finales marcados con 1. Sea  $D$  el disco determinado por el interior de  $\gamma$  en  $G_a$ , y sea  $\alpha$  el arco de  $a_i$  contenido en el interior de  $\gamma$ , entonces  $\partial D = \gamma \cup \alpha$ ; de igual manera sea  $E$  el disco determinado por el interior de  $\gamma$  en  $S_b$ , y sea  $\beta$  el arco de  $b_i$  contenido en el interior de  $\gamma$ , entonces  $\partial E = \gamma \cup \beta$ . Existe un disco  $F$  propiamente encajado en  $B'$  con interior ajeno de  $S_b$  y tal que  $\partial F = \alpha \cup \beta$ , como en la figura 17.  $k_b$  interseca a  $D$  en un solo punto, tal cruce ocurre sobre  $\alpha$ ,  $k_b$  interseca a  $F$  solo en este mismo punto. Tenemos dos subcasos.

a)  $\gamma$  es un lazo bueno en  $G_b$ .

En este caso  $k_b$  no interseca al disco  $E$ , luego  $D \cup E \cup F$  es una esfera que interseca a  $k_b$  en un solo punto, lo cual no es posible pues  $S^3$  es irreducible.

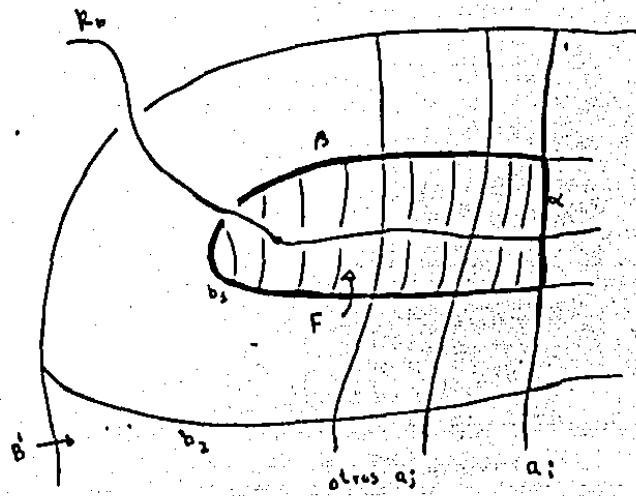


Figura 17

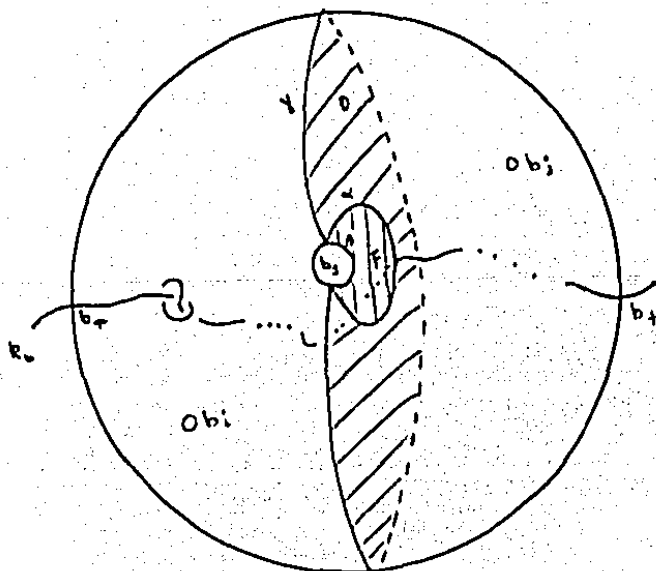


Figura 18

b)  $\gamma$  es un lazo malo en  $G_b$ .

Sea  $E'$  el otro disco en  $S_b$  determinado por  $\gamma\beta$ .  $k_b$  intersecciona a cada uno de  $E$  y  $E'$  en un punto. Haciendo cirugía sobre  $S_b$  con  $D \cup F$  obtenemos dos esferas,  $S = D \cup F \cup E$  y  $S' = D \cup F \cup E'$  (figura 18),  $k_b$  intersecciona a cada una de ellas en dos puntos, al menos una de ellas, digamos  $S$ , debe de separar a  $k_b$  en dos partes no triviales (esto es, ninguna de las partes es un arco desanudado), pues de otro modo  $S_b$  separaría en dos partes a  $k_b$ , y una de ellas sería un arco trivial. Después de una isotopía podemos suponer que  $S \cap \partial B$  consiste de círculos esenciales en  $\partial B = \{ \text{cuerdas de } (B', r_b) \}$  y además  $\# \partial P \leq n_b - 1$  ( $P = S \cap B$ ), pues una isotopía elimina al menos a  $b_1$ . Esto contradice la minimalidad de  $\# \partial P_b$ . Lo que completa la prueba. ■

En el lema que se acaba de probar, así como en los lemas 2.2.3 y 2.2.6, estamos usando el hecho de que no hay círculos de intersección entre  $P_a$  y  $P_b$  que sean inesenciales en alguna de ellas. En el lema 2.2.3 estamos usando también a 2.1.3.

2.2.3 Sea  $\gamma$  un lazo nivelado malo en  $G_a$  sin vértices o aristas en su interior, entonces el correspondiente lazo nivelado  $\gamma$  en  $G_b$  es bueno.

*Demostración.* Supóngase que esto es falso, o sea  $\gamma$  en  $G_b$  es un lazo malo. Los finales de  $\gamma$  en  $G_a$  están marcados con 1 o  $n_b$ , supóngase sin pérdida de generalidad que con 1, luego  $\gamma$  en  $G_b$  es un lazo basado en  $b_1$ . Sea  $D(E)$  el disco en  $S_a$  ( $S_b$ ) determinado por el interior de  $\gamma$  en  $G_a$  ( $G_b$ ); como en el lema anterior existe un disco  $F$  propiamente encajado en  $B'$ , con interior ajeno de  $S_b$ , tal que  $F \cap (D \cup E) = \partial F = \partial(D \cup E)$ , pero  $k_b$  intersecciona transversalmente a la esfera  $D \cup E \cup F$  en tres puntos, uno en el interior de  $D$  ( $a_+$ ), otro en el interior de  $E$  ( $b_+$ ), y el otro en  $\partial F \cap \partial D$ , pero esto no es posible, pues  $S^3$  es irreducible. ■

2.2.4 Lema. Sea  $a$  una arista nivelada en  $G_a$ , que une a los vértices  $u$  y  $v$ . Entonces las marcas que se encuentran a la

derecha y a la izquierda de  $\alpha$  en  $u$ , son iguales a las marcas que se encuentran a la derecha y a la izquierda de  $\alpha$  en  $v$  respectivamente.

*Demostración.* Es claro que para definir lo que significa estar a la derecha o a la izquierda de alguna arista nos estamos fijando en un lado de la superficie  $P_a$  y estamos haciendo cierta convención. Supóngase que los finales de  $\alpha$  están marcados con  $i$  en ambos  $u$  y  $v$ . El par de marcas adyacentes a la marca  $i$  en  $u$  es igual al par de marcas adyacentes a  $i$  en  $v$  (figura 13); además las marcas adyacentes a  $i$  en  $u$  o  $v$  son distintas. Supóngase que la marca que se encuentra a la derecha de  $\alpha$  en  $u$  es distinta de la marca que esta a la derecha de  $\alpha$  en  $v$ , entonces esta marca es igual a la que se encuentra a la izquierda de  $\alpha$  en  $v$ , sea  $k$  esta marca. Existe un arco  $\beta$  que va de  $u$  a  $v$ , muy cercano a  $\alpha$ , que empieza a la derecha de  $\alpha$  en  $u$ , entre las marcas  $i$  y  $k$ , y que termina a la izquierda de  $\alpha$  en  $v$ , entre las marcas  $i$  y  $k$ , intersectando una vez a  $\alpha$  (ver figura 19).  $\beta$  tiene sus finales en  $\partial B$ , encontrándose cerca de la misma componente  $b_i$  de  $\partial P_b$  y en el lado de  $b_i$  entre  $b_i$  y  $b_k$ . entonces los finales de  $\beta$  pueden ser conectados por un arco  $\beta'$  en una vecindad de  $b_i$  en  $\partial B$ , tal que  $\beta\beta'$  es una curva simple cerrada en  $B$  encontrándose en una vecindad regular de  $P_b$  e intersectándola una vez. Luego  $P_b$  es de un lado en  $B$ , lo cual no puede ser pues  $B$  es orientable. Con lo que se completa la prueba. ■

En este lema podríamos haber hecho el argumento diciendo que  $\beta\beta'$  es una curva cerrada simple que intersecta una sola vez a la esfera  $S_b$ , llegando a una contradicción por la irreducibilidad de  $S^3$ , pero lo hacemos un poco más general para que se aplique en el próximo capítulo, en donde trabajamos con un disco y una esfera.

**2.2.5 Lema.** *Un semiciclo en  $G_a$  sin cuerdas y sin vértices interiores no puede tener exactamente una arista nivelada.*

*Demostración.* Supóngase que tenemos un semiciclo sin cuerdas y sin vértices interiores. Dos aristas consecutivas de tal semiciclo que son por lo tanto incidentes a un mismo vértice deben tener marcas adyacentes en ese vértice, debido a que no hay aristas en el interior del semiciclo. Empezando en la raíz de una

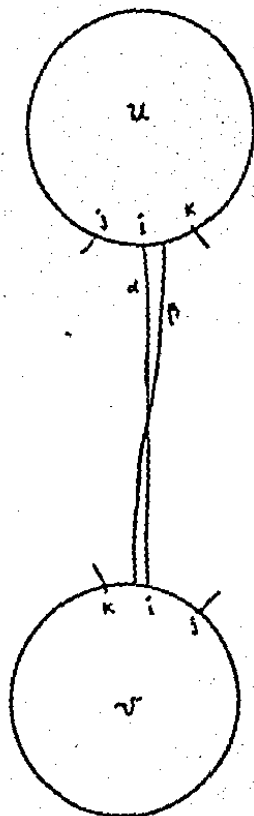


Figura 19



arista orientada del semiciclo, sea  $c_1, d_1, \dots, c_r, d_r$  la sucesión de marcas del circuito, aplicaremos 2.1.6 a esta sucesión de marcas. Puesto que el circuito es un semiciclo, las hipótesis (1) y (4) de 2.1.6 se satisfacen para esta sucesión. Además (2) se satisface porque dos marcas adyacentes en un vértice difieren a lo mucho en 1, y (3) se satisface por el lema 2.2.4. Entonces se satisfacen las conclusiones de 2.1.6 para esta sucesión de marcas. Si tal semiciclo tiene una arista nivelada entonces se debe cumplir (b) o (c) de 2.1.6 para algún  $i$ , pero esto implica que dicha arista nivelada precede o antecede a otra arista nivelada, o sea no puede haber una sola arista nivelada. ■

2.2.6 Lema. Un ciclo en  $G_a$  con mas de una arista y sin ciclos en su interior tiene vértices interiores.

*Demostración.* Supóngase que esto es falso, sea  $\gamma$  un ciclo sin vertices interiores que cumple con las hipótesis; supóngase que  $\gamma$  tiene  $p$  aristas,  $p \geq 2$ . Toda cuerda de  $\gamma$  es nivelada, pues de haber alguna cuerda orientada, habría por 2.1.5 un ciclo en el interior de  $\gamma$ . Si alguna cuerda es un lazo nivelado, por 2.2.2 debe ser un lazo malo, entonces si hay lazos nivelados en el interior de  $\gamma$  todos deben estar basados en el mismo vértice, digamos  $a_i$ , y deben ser concéntricos. Si hay otra cuerda nivelada, ésta divide al ciclo en dos semiciclos, cada uno con una arista nivelada, luego es posible escoger una arista nivelada de modo que uno de los semiciclos por ella determinados no tenga radios ni los lazos malos basados en  $a_i$ , obteniendo un semiciclo sin cuerdas y sin vértices interiores y con exactamente una arista nivelada, lo que contradice 2.2.5; luego todas las cuerdas que tiene  $\gamma$  son lazos nivelados malos basados en  $a_i$ . Sea  $\alpha$  el lazo nivelado malo basado en  $a_i$  que tiene a los demás en su interior, entonces  $\gamma \setminus \alpha$  es un semiciclo con exactamente una arista nivelada y sin cuerdas ni vértices interiores, contradiciendo 2.2.5. Por lo tanto supóngase que no hay cuerdas en el interior de  $\gamma$ . Sea  $c_1, d_1, \dots, c_p, d_p$  la sucesión de marcas del ciclo, iniciada en la raíz de alguna arista. Aplicaremos 2.1.6 a esta sucesión. La sucesión de marcas del ciclo satisface las hipótesis de 2.1.6, (1) y (4) por ser  $\gamma$  un ciclo, (2) porque al no tener  $\gamma$  aristas en su interior, dos aristas consecutivas tienen marcas adyacentes en el vértice al que inciden, y (3) se cumple por vacuidad. Luego por este lema la sucesión de marcas es

$i, i-1, \dots, i, i-1$ , para alguna  $i$ ,  $2 \leq i \leq n_b$ , pues en este caso no se pueden satisfacer (b) y (c) de 2.1.6 porque todas las aristas de  $\gamma$  están orientadas.

Considérese la unión de la esfera  $S_b$  y la 1-asa contenida en  $B'$  bordeada por los discos determinados por  $b_i$  y  $b_{i-1}$ , una vecindad regular de esta unión es un  $S^1 \times D^2$  agujerado; ahora el disco  $F$  determinado por el interior de  $\gamma$ , tiene su frontera sobre  $S^1 \times D^2$ , y dicha frontera recorre  $p$  veces longitudinalmente a  $S^1 \times D^2$  (recorre  $p$  veces a la 1-asa en dirección de  $b_{i-1}$  a  $b_i$ ), luego una vecindad regular de  $(S^1 \times D^2) \cup F$  es un espacio lente con dos agujeros, o sea  $S^3$  tiene como sumando a un espacio lente no trivial, lo cual no es posible, luego dicho ciclo debe tener vértices interiores. Nótese que aquí no tuvo importancia si  $K_a$  intersectaba o no a  $F$ . ■

De este lema y de 2.2.2 se sigue que todos los ciclos buenos tienen vértices en su interior. Además los únicos ciclos que probablemente no tengan vértices interiores son aquellos ciclos que tienen en su interior a algún uniciclo malo.

### 2.3 Argumentos combinatorios.

Lo que queremos probar ahora es que en  $G_a$  o  $G_b$  hay una fuente o sumidero en el que no está basado ningún lazo.

2.3.1 Lema. Si  $G_a$  tiene un lazo bueno o un ciclo bueno, entonces  $G_a$  tiene una fuente o sumidero sin lazos.

Demostración. De entre todos los ciclos y lazos buenos en  $G_a$  tómesese uno que no tenga en su interior ni ciclos ni lazos, sea este  $\mu$ . Por 2.2.2 y 2.2.6  $\mu$  debe tener vértices en su interior, y por 2.1.5 debe tener una fuente o sumidero en su interior; dicha fuente o sumidero no puede tener lazos, pues contradiría la elección de  $\mu$ . ■

2.3.2 Lema. Si  $G_a$  tiene un lazo nivelado malo sin aristas ni vértices en su interior, entonces  $G_b$  tiene una fuente o sumidero sin lazos.

Demostración. Si existe tal lazo, por 2.2.3 el correspondiente lazo en  $G_b$  es bueno, y por lo tanto de 2.3.1 se sigue que  $G_b$  tiene una fuente o sumidero sin lazos. ■

2.3.3 Lema. Si  $G_a$  tiene un ciclo malo con más de dos aristas pero sin uniciclos malos en su interior, o si  $G_a$  tiene un lazo malo sin uniciclos malos en su interior pero que tiene vértices en su interior, entonces  $G_a$  o  $G_b$  tienen una fuente o sumidero sin lazos.

Demostración. Supóngase que existe un ciclo o lazo con tales propiedades. Se puede tomar por lo tanto un ciclo o lazo con esas propiedades tal que no contenga en su interior a otro ciclo o lazo con las mismas propiedades, sea este  $\mu$ . Si  $\mu$  tiene un ciclo en su interior, entonces este ciclo debe de ser bueno, en tal caso terminamos por 2.3.1. Si  $\mu$  tiene un lazo en su interior, este lazo es bueno o bien es un lazo nivelado malo sin vértices en su interior, por lo que por 2.3.1 o 2.3.2 terminamos. Se puede suponer entonces que  $\mu$  no tiene ciclos o lazos en su interior.  $\mu$  tiene vértices en su interior, por 2.2.6 si  $\mu$  es un ciclo con más de dos aristas, y por hipótesis si  $\mu$  es un lazo. Entonces por 2.1.5  $\mu$  tiene una fuente o sumidero en su interior, y como no hay lazos en el interior de  $\mu$ , dicha

fuente o sumidero no tiene lazos. Con lo que se completa la prueba. ■

2.3.4 Lema.  $G_a$  o  $G_b$  tiene una fuente o sumidero sin lazos a menos que en  $G_a$  haya un unicyclo malo sin vértices interiores.

Demostración. Supóngase que  $G_a$  no tiene ciclos, en tal caso  $G_a$  tiene fuentes y sumideros, si alguno de ellos no tiene lazos terminamos; si hay lazos tómesese uno tal que en su interior no haya más lazos, sea este  $\mu$ , si  $\mu$  tiene vértices en su interior, debe tener una fuente o sumidero sin lazos en su interior debido a la elección de  $\mu$ . Si  $\mu$  no tiene vértices en su interior, entonces  $\mu$  es malo y tampoco tiene aristas en su interior, luego por 2.3.2  $G_b$  tiene una fuente o sumidero sin lazos.

Supóngase ahora que  $G_a$  tiene ciclos, tómesese uno tal que en su interior no haya más ciclos, sea este  $\mu$ . Si  $\mu$  es bueno, o  $\mu$  es malo pero tiene más de dos aristas, o  $\mu$  es un unicyclo malo con vértices en su interior, por 2.3.1 y 2.3.3 terminamos; entonces  $G_a$  o  $G_b$  tienen fuentes o sumideros como los deseados a menos que  $\mu$  sea un unicyclo malo sin vértices en su interior. ■

Ahora probaremos que si  $G_a$  tiene un unicyclo malo sin vértices en su interior, entonces  $G_a$  tiene una fuente o sumidero sin lazos. La prueba de esto es larga, la hacemos en los siguientes lemas.

2.3.5 Lema. Sean  $e_1, \dots, e_p$  aristas paralelas en  $G_a$ , entonces

a) Cada  $e_i$  es nivelada; o

b) Cada  $e_i$  está orientada.

Si sucede (b) entonces

b')  $p \leq n_b$ ; o

b'') Existen dos aristas  $e_i, e_j$  que forman un ciclo.

Demostración. Las aristas  $e_1, \dots, e_p$  unen a  $u$  y  $v$  (posiblemente  $u = v$ ); si alguna arista es nivelada y otra orientada, entonces hay dos aristas consecutivas  $e_i$  y  $e_{i\pm 1}$ , tal que  $e_i$  está orientada y  $e_{i\pm 1}$  es nivelada, o sea hay un

semiciclo con exactamente una arista nivelada y sin vértices ni aristas interiores, contradiciendo 2.2.5. Por lo tanto todas las aristas son niveladas u orientadas.

Supóngase que todas estas aristas están orientadas, que ningún par de ellas forma un ciclo y que  $p > n_b$ ; supóngase además que las aristas están orientadas de  $u$  hacia  $v$ . Tómese un subconjunto de estas aristas que conste exactamente de  $n_b + 1$  aristas consecutivas, llamémoslas  $e_1, e_2, \dots, e_{n_b + 1}$ . La marca de cada  $e_i$  en  $u$  ( $v$ ) debe ser mayor que 1 (menor que  $n_b$ ) pues si ocurre lo contrario alguna arista está orientada de  $v$  hacia  $u$ . Si las marcas de  $e_1$  son  $k$  y  $s$  en  $u$  y  $v$  respectivamente, las marcas de  $e_{n_b + 1}$  deben ser  $n_b - k + 1$  y  $n_b - s + 1$  en  $u$  y  $v$ , por lo tanto  $k > s$  y  $n_b - k + 1 > n_b - s + 1$ , esto es  $k > s$  y  $k < s$ , pero esto no es posible. Con lo que se completa la prueba. ■

Note que este lema implica que no puede haber más de  $n_b$  aristas paralelas orientadas, pues se formaría un ciclo con dos aristas y sin vértices en su interior, contradiciendo 2.2.6.

2.3.6 Lema. Sea  $v$  un vértice de  $G_a$ , supóngase que existe una familia  $A$  de  $p$  aristas consecutivas que entran a  $v$ , y una familia  $B$  de  $q$  aristas consecutivas que salen de  $v$ ; además la última arista de  $A$  y la primera de  $B$  (o viceversa) son adyacentes en  $v$ . Entonces para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq n_b$ , existe al menos una marca  $j$  en  $v$  a la que no incide ninguna arista de  $A \cup B$ .

Demostración. Tenemos una situación como en la figura 20. Supóngase que esto es falso, entonces existe un  $j$ ,  $1 \leq j \leq n_b$ , tal que hay al menos cuatro aristas de  $A \cup B$  incidentes a  $v$  con marca  $j$ , luego las marcas de  $v$  a las que son incidentes aristas de  $A \cup B$  están ordenadas como sigue:  $\dots, j, \dots, n_b, n_b, \dots, j, \dots, 1, 1, \dots, j, \dots, n_b, n_b, \dots, j, \dots$  (o  $\dots, j, \dots, 1, 1, \dots, j, \dots, n_b, n_b, \dots, j, \dots, 1, 1, \dots, j, \dots$ ), luego un subconjunto de estas marcas se ve como sigue,  $1, \dots, n_b, n_b, \dots, 1$  (o  $n_b, \dots, 1, 1, \dots, n_b$ ). Pero a una marca  $1$  ( $n_b$ ) solo puede

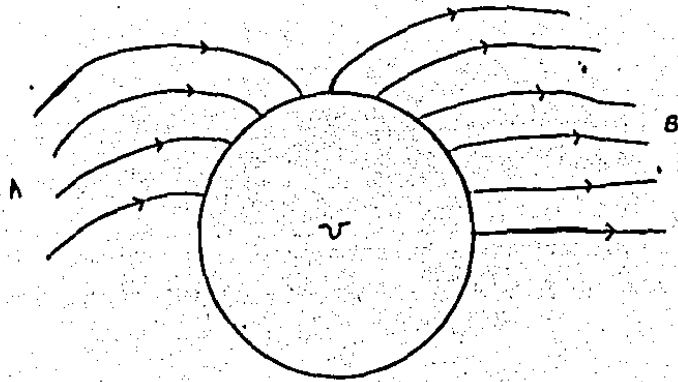


Figura 20

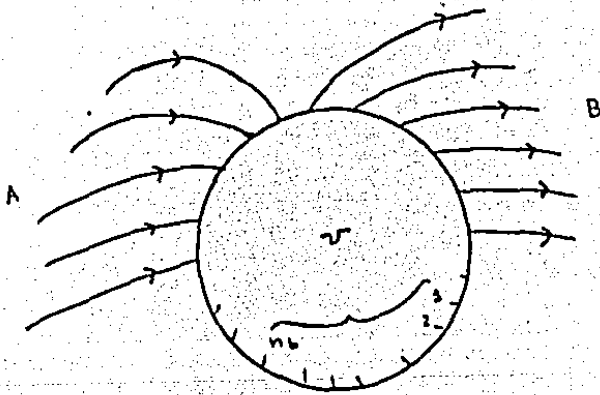


Figura 21

ser incidente una arista de  $A(B)$ , y el subconjunto de tales marcas mostrado antes dice las aristas de  $A(B)$  no son consecutivas, pues entre dos de ellas hay una que pertenece a  $B(A)$ , lo cual es una contradicción. Podemos notar además que existen  $n_b$  marcas consecutivas en  $v$ , que son  $1, 2, \dots, n_b$ , a las que no son incidentes aristas de  $A \cup B$  y tal que la marca  $1$  ( $n_b$ ) es cercana a las aristas de  $B(A)$ , esto es, hay un arco de  $v$  que une a la marca  $1$  ( $n_b$ ) con la marca de la primera (o última, depende de donde comencemos) arista de  $B(A)$  y dicho arco es ajeno de las marcas de  $A \cup B$  y de las  $n_b$  marcas antes citadas. Mostramos esto en la figura 21. ■

2.3.7 Lema. Para cada vértice  $v$  en  $G_a$  existe un  $i$ ,  $1 \leq i \leq n_b$ , tal que todas las aristas incidentes a  $v$  con marca  $i$  están orientadas. En particular  $n_b > 1$ .

Demostración. Supóngase que esto es falso, entonces existe un vértice  $v$  en  $G_a$  tal que para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n_b$ , hay una arista nivelada incidente a  $v$  con marca  $i$ . Esto implica que cada vértice  $b_j$  en  $G_b$  es la base de un lazo; si alguno de estos lazos es bueno, es posible encontrar un lazo bueno sin vértices en su interior, contradiciendo 2.2.2. Supóngase entonces que todos los lazos en  $G_b$  son malos; tenemos una situación como en la figura 22. Existe por lo tanto un vértice  $b_x \in G_b$  tal que todos los lazos basados ahí no tienen vértices interiores, como en la figura 23.

Si  $n_b = 1$ ,  $b_x$  es el único vértice en  $G_b$ , y todas las aristas son lazos malos, por 2.3.5 todos estos lazos son nivelados o todos están orientados. Si todos los lazos son nivelados, en  $G_a$  cada vértice es la base de un lazo y puesto que en  $G_b$  hay un lazo nivelado malo sin cuerdas ni vértices interiores, en  $G_a$  hay un lazo bueno por 2.2.3, y luego es posible encontrar un lazo bueno en  $G_a$  sin vértices interiores, contradiciendo 2.2.2. Si todos los lazos están orientados, por 2.3.5 debemos tener un ciclo en  $G_b$ , puesto que hay al menos  $2n_a$  lazos, pero este ciclo es bueno y no tiene vértices en su interior, lo que contradice 2.2.6. Por lo tanto  $n_b > 1$ .

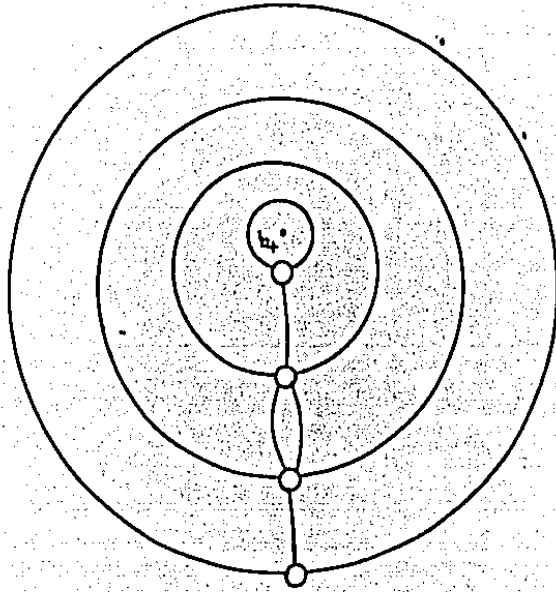


Figura 22

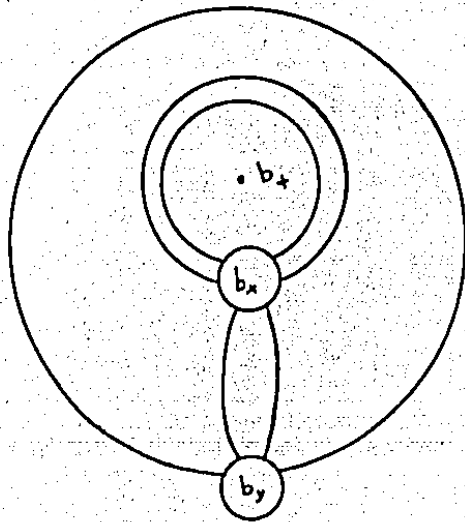


Figura 23



Como  $n_b > 1$  existe otro vértice  $b_y$  en  $G_b$ , tal que los lazos basados ahí solo tienen a  $b_x$  como vértice interior, entonces todas las aristas incidentes a  $b_x$  son lazos o arcos que unen  $b_x$  y  $b_y$ . Sea  $\gamma$  un lazo basado en  $b_x$  tal que en su interior no haya lazos. Tenemos dos posibles casos.

1)  $\gamma$  es nivelado.

Por 2.2.3 el correspondiente lazo  $\gamma$  en  $G_a$  es bueno, por lo que basta probar que para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n_a$ , hay incidente a  $b_x$  una arista nivelada con marca  $i$ , pues esto implica que cada vértice en  $G_a$  es la base de un lazo, y al haber un lazo bueno, habrá un lazo bueno sin vértices en su interior, contradiciendo 2.2.2.

Las marcas de  $\gamma$  en  $b_x$  son  $1, 1, 0, n_a, n_a$ . Si hay  $n_a$  o más lazos basados en  $b_x$ , para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n_a$ , habrá un lazo nivelado basado en  $b_x$  con marca  $i$ , con lo que terminamos. Si hay menos de  $n_a$  lazos en  $b_x$ , hay al menos  $2n_a + 2$  aristas conectando  $b_x$  y  $b_y$ ; existen una o dos familias de aristas paralelas,  $A$  y  $B$ , que conectan  $b_x$  y  $b_y$ , como mostramos en la figura 24; alguno de estos conjuntos, digamos  $A$ , contiene al menos  $n_a + 1$  aristas, por 2.3.5 estas aristas son niveladas, pues de otro modo habría un ciclo bueno sin vértices en su interior, como las marcas de las aristas de  $A$  y las marcas de los lazos basados en  $b_x$  son consecutivas, debemos tener para cada marca  $i$ ,  $1 \leq i \leq n_a$ , al menos una arista nivelada con marca  $i$  en  $b_x$ , con lo que terminamos.

2)  $\gamma$  es un lazo orientado.

Por 2.3.5 hay a lo mucho  $n_a$  lazos orientados basados en  $b_x$ . Sea  $r = d(r_1, r_2)$ . Existen al menos  $2(r-1)n_a$  aristas conectando  $b_x$  y  $b_y$ , hay una o dos familias  $A, B$  de aristas paralelas conectando  $b_x$  y  $b_y$  como en la figura 24. Si alguno de estos conjuntos tiene más de  $n_a$  aristas, estas aristas deben ser niveladas, por 2.3.5. Supóngase que  $r \geq 3$ , luego  $|A \cup B| \geq 4n_a$ ; si  $|A| > n_a$  y  $|B| > n_a$ , todas estas aristas son niveladas, si

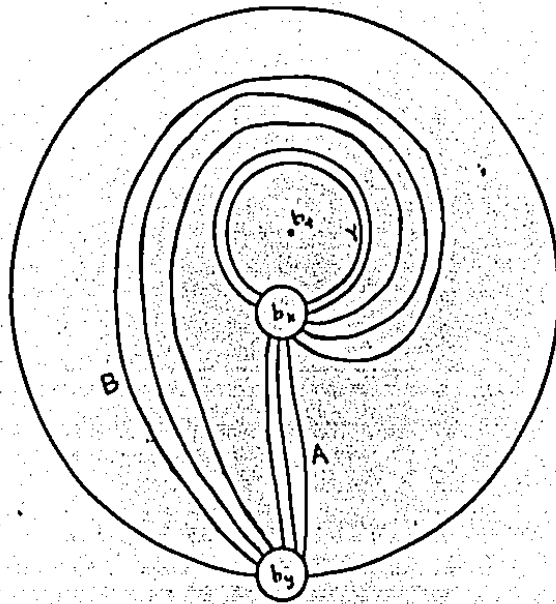


Figura 24

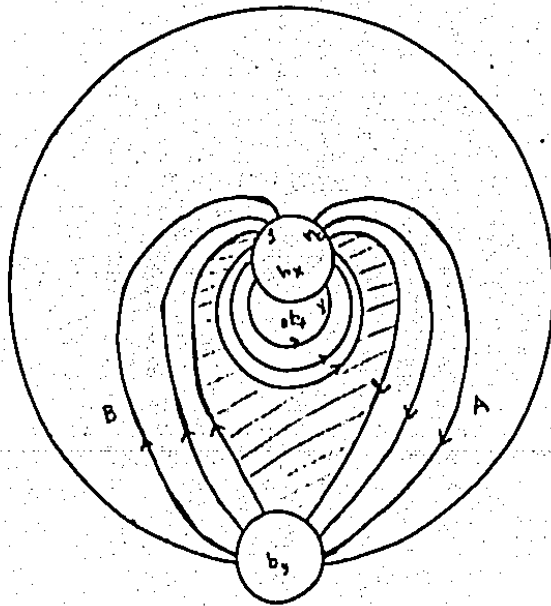


Figura 25

$|A| \geq 3n_a$  y  $|B| \leq n_a$ , las aristas de  $A$  son niveladas y las de  $B$  puede que sean o no niveladas; en cualquiera de los dos casos existen al menos  $3n_a$  aristas niveladas conectando  $b_x$  y  $b_y$ , y para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n_a$ , hay al menos una arista nivelada con marca  $i$  conectando estos dos vertices; por lo tanto en  $G_a$  cada vértice es la base de algun lazo orientado con marcas en sus finales  $x, y$ , todos estos lazos son malos. Todos los lazos basados en un vértice de  $G_a$  son paralelos y existen por lo tanto a lo mucho  $n_a$  lazos en cada vertice de  $G_a$ , o sea hay a lo mucho dos lazos basados en un mismo vértice con marcas  $x, y$ . Como hay al menos  $3n_a$  aristas niveladas uniendo  $b_x$  y  $b_y$  que tienen marcas consecutivas en  $b_x$ , existe al menos una marca  $i$ , tal que hay tres aristas niveladas con marca  $i$  uniendo  $b_x$  y  $b_y$ , o sea  $a_i$  en  $G_a$  es la base de tres lazos con marcas  $x, y$ , lo que contradice lo anteriormente dicho.

Supóngase ahora que  $r = 2$ . Deseamos probar que para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n_a$ , existe una arista nivelada con marca  $i$ , conectando  $b_x$  y  $b_y$ , y que para las marcas  $1, n_a$  existen dos aristas niveladas con marcas  $1, n_a$  conectando  $b_x$  y  $b_y$ .

Hay a lo mucho  $n_a$  lazos en  $b_x$ . Supóngase sin pérdida de generalidad que el número de enrollamiento de estos lazos con respecto a  $a_x$  es 1. Hay al menos  $2n_a$  aristas conectando  $b_x$  y  $b_y$ , todas estas aristas pueden estar orientadas solo si  $|A| = |B| = n_a$  por 2.3.5, y en este caso hay  $n_a$  lazos en  $b_x$ . Supóngase que dichas aristas están orientadas, tenemos entonces una situación como en la figura 25. A la derecha de  $\gamma$  debe haber una arista  $e_a$  de  $A$  con marca  $n_a$  en  $b_x$  y a la izquierda de  $\gamma$  debe haber una arista  $e_b$  de  $B$  con marca  $1$  en  $b_x$ , entonces  $e_a$  ( $e_b$ ) está orientada de  $b_x$  hacia  $b_y$  ( $b_y$  hacia  $b_x$ ) y como todas las aristas de  $A$  ( $B$ ) tienen la misma orientación, se forma un ciclo bueno con dos de estas aristas y con un lazo basado en  $b_x$ , como en la figura 25, pero este ciclo no tiene vértices interiores, lo que contradice 2.2.6.

Supóngase por lo tanto que las aristas de  $A$  son niveladas

(el otro caso es similar, esto es cuando las aristas de  $B$  son niveladas). Si las aristas de  $B$  son también niveladas, habremos terminado, luego supóngase que las aristas de  $B$  están orientadas; dichas aristas deben estar orientadas de  $b_x$  hacia  $b_y$ , pues de otro modo habría un semiciclo con una sola arista nivelada y sin cuerdas ni vértices interiores, contradiciendo 2.2.5. Hay cuatro marcas  $1$  en  $b_x$ , dichas marcas no pueden ser finales de aristas de  $B$  pues estas aristas están orientadas de  $b_x$  hacia  $b_y$ , a lo mucho dos de estas marcas son finales de los lazos basados en  $b_x$ , luego al menos dos de estas marcas son finales de aristas de  $A$ ; por otro lado debe haber también dos marcas  $n_a$  entre los finales de aristas de  $A$  (esto se debe a la existencia de las dos marcas  $1$  en  $A$  y a la orientación de los lazos), luego para cada marca  $i$ ,  $1 \leq i \leq n_a$ , hay una arista nivelada en  $A$  con marca  $i$ , y hay dos aristas niveladas con marca  $1$  ( $n_a$ ).

Por lo tanto cada vértice de  $G_a$  es la base de un lazo, todos estos lazos deben ser malos, tenemos una situación como en la figura 22. Marquemos los cuatro puntos de intersección entre  $a_i$  y  $b_j$  como  $j_1, j_2, j_3, j_4, (i_1, i_2, i_3, i_4)$ , en  $a_i$  ( $b_j$ ), tal que  $a_i$  los recorre en el orden cíclico  $j_1, j_2, j_3, j_4$ , la colección completa de marcas en  $a_i$  es  $1_1, 2_1, \dots, nb_1, nb_2, \dots, 1_2, 1_3, \dots, 1_4$ . Es una observación fácil que  $b_j$  recorre a las marcas  $i_k$ 's en el orden cíclico  $i_1, i_2, i_3, i_4$  o en su inverso como es mostrado en la figura 26. Si una arista  $\alpha$  en  $G_a$  une a los vértices  $a_i$  y  $a_k$  con marcas  $j_s$  y  $g_t$  respectivamente, entonces la correspondiente arista  $\alpha$  en  $G_b$  une a los vértices  $b_j$  y  $b_g$  con marcas  $i_s$  y  $k_t$  respectivamente.

Consideremos solo a los vértices  $b_x, b_y, a_1, a_{n_a}$ . Las marcas de  $a_1$  con respecto a  $b_x$  y  $b_y$  son las siguientes,  $x_1, x_2, y_2, y_3, x_3, x_4, y_4, y_1$  o  $x_1, y_1, y_2, x_2, x_3, y_3, y_4, x_4$ . Las marcas en  $b_x$  y  $b_y$  son  $1_1, 1_2, na_2, na_3, 1_3, 1_4, na_4, na_1$  o  $1_1, na_1, na_2, 1_2, 1_3, na_3, na_4, 1_4$ , pero igual en ambos  $b_x$  y  $b_y$ . Hay dos lazos basados en  $a_1$  con marcas  $x, y$ , dichos lazos

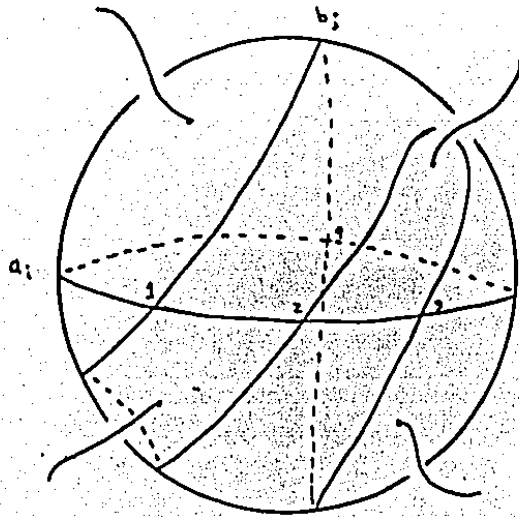


Figura 26

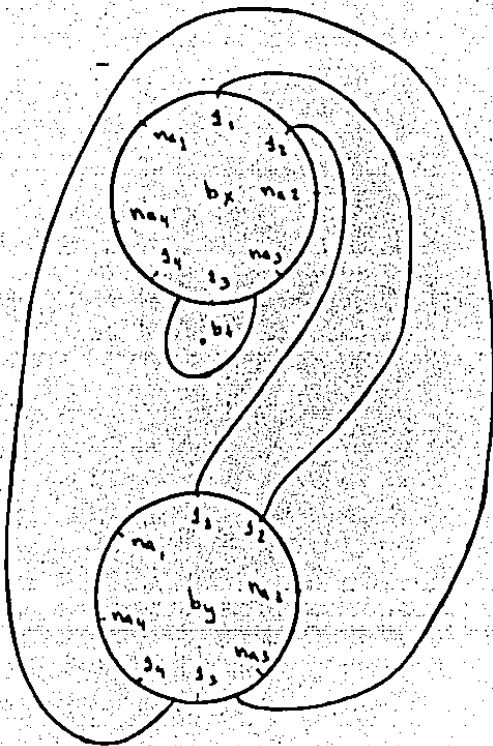
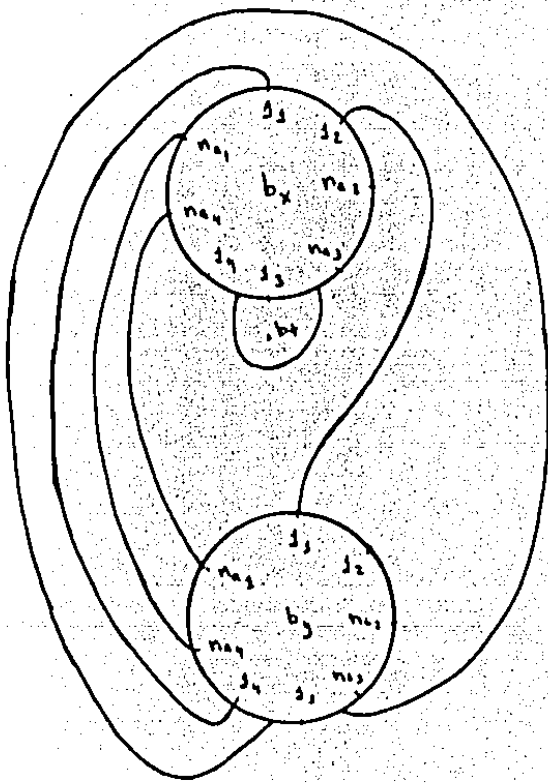
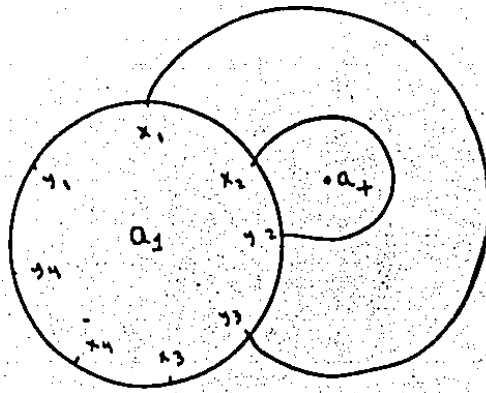


Figura 27

tienen la misma orientación (si tuvieran la orientación opuesta formarían un ciclo bueno sin vértices en su interior), y por lo tanto usamos exactamente tres subíndices (por ejemplo 1, 2, 2, 3); las correspondientes aristas a dichos lazos en  $G_b$  son dos aristas niveladas que unen  $b_x$  y  $b_y$  con marcas 1, y además podemos suponer que las marcas 1 son adyacentes en  $b_x$ , si también en  $b_y$  las marcas son adyacentes, entonces estamos usando solo dos o cuatro subíndices (por ejemplo 1, 2, en ambos  $b_x$  y  $b_y$ , o 1, 2 en uno y 3, 4 en el otro) lo cual es una contradicción. Ahora si los finales de dichas aristas no son adyacentes en  $b_y$ , entonces tenemos que los finales de las dos aristas niveladas con marca  $n_a$  si son adyacentes en ambos  $b_x$  y  $b_y$ , por lo que usando a  $n_a$  en vez de 1 y repitiendo el argumento, llegamos a una contradicción. Mostramos esto en la figura 27. ■

2.3.8 Lema. Sea  $v$  un vértice en  $G_a$  en el cual está basado un unicyclo malo sin vértices en su interior. Entonces en  $G_a$  hay una fuente o sumidero sin lazos.

Demostración. Todos los lazos en  $v$  sin vértices interiores están orientados. Sea  $c_1$  el unicyclo malo en  $v$  que no tiene vértices ni cuerdas en su interior. Hay a lo mucho  $n_b$  unicyclos malos basados en  $v$  que no tienen vértices interiores, sean estos  $c_1, c_2, \dots, c_m$ . Podemos suponer que no hay lazos buenos en  $G_a$ , pues de haberlos por 2.3.1 terminamos. Supóngase que existe otro lazo malo, digamos  $c'$ , basado en  $u$  tal que no hay lazos en el interior del disco o anillo bordeado por  $c_m$  y  $c'$ , sea  $D$  este disco o anillo. Si  $v \neq u$ , un argumento análogo a éste de 2.3.7 muestra que hay vértices en el interior de  $D$ ; si  $v = u$  la elección de  $c'$  implica que  $D$  tiene vértices en su interior. Si no existen otros lazos aparte de los  $c_i$ 's, la prueba es similar.

Si existe una fuente o sumidero en el interior de  $D$ , éste no tiene lazos y por lo tanto terminamos. Supóngase entonces que en el interior de  $D$  no hay fuentes ni sumideros, luego hay ciclos en  $D$ ; si hay un ciclo bueno por 2.3.1 terminamos, por lo tanto supóngase que todos los ciclos que están en el interior de

$c'$  son malos. Sea  $C$  el conjunto de los ciclos malos que están en el interior de  $c'$  y que no tienen vértices en su interior. Notamos que  $c_1 \in C$ ,  $v$  es un vértice de cada uno de estos ciclos, y cada uno de estos ciclos tiene el mismo número de enrollamiento con respecto a  $q_+$  que  $c_1$ . Tenemos una situación como en la figura 28. Sea  $H$  la subgráfica de  $G_a$  definida como sigue: {vértices de  $H$ } = {vértices de  $G_a$  que están en el interior de  $c'$  (incluido  $u$ )}, {aristas de  $H$ } = {aristas de  $G_a$  que están en el interior de  $c'$  excepto las aristas de los ciclos de  $C$ }. Ninguno de los vértices de  $H$  que no pertenecen a los ciclos de  $C$  es una fuente o sumidero (en  $H$ ), excepto posiblemente  $u$ .

Supóngase ahora que ninguno de los vértices de los ciclos de  $C$  es una fuente o sumidero en  $H$ , o sea en  $H$  puede haber solo una fuente o sumidero que es  $u$ . Al haber a lo mucho una fuente o sumidero en  $H$  (pero no ambos), debe haber ciclos en  $H$ , estos deben ser malos en  $G_a$  y además deben contener vértices en su interior, por la elección de  $C$ . Tómese uno de estos ciclos en  $H$  tal que en su interior no haya otro ciclo con las mismas propiedades, este ciclo tiene vértices en su interior y por 2.1.5 debe tener fuentes o sumideros en su interior, como  $u$  no puede estar en el interior de este ciclo, esto contradice el hecho de que no hay fuentes ni sumideros en  $H$ , aparte posiblemente de  $u$ .

Por lo tanto supóngase que uno de los vértices de los ciclos de  $C$  es una fuente en  $H$  (el caso de que haya un sumidero es análogo). Por 2.3.6 para cada vértice  $x$  que pertenece a los ciclos de  $C$ , y para cada entero  $j$ ,  $1 \leq j \leq n_b$ , existe al menos una marca  $j$  en  $x$  a la que no es incidente ninguna arista de los ciclos de  $C$  (excepto posiblemente si  $x = u$ ); por esto y por 2.3.7 para cada vértice  $x$  que pertenece a los ciclos de  $C$  hay incidente una arista orientada que pertenece a  $H$ . Si  $x$  es una fuente podemos encontrar por lo tanto una arista orientada  $e_x$  en  $H$  incidente a  $x$  tal que a su izquierda haya una marca  $1$  en  $x$  que es incidente a una arista de  $H$ , dicha arista debe ser nivelada pues  $x$  es una fuente, sea esta arista  $e_x'$ . Podemos formar una trayectoria en  $H$  empezando en  $e_x$  que sea siempre consistente con las orientaciones de las aristas; dicha trayectoria terminará en otro vértice de los ciclos de  $C$ , o



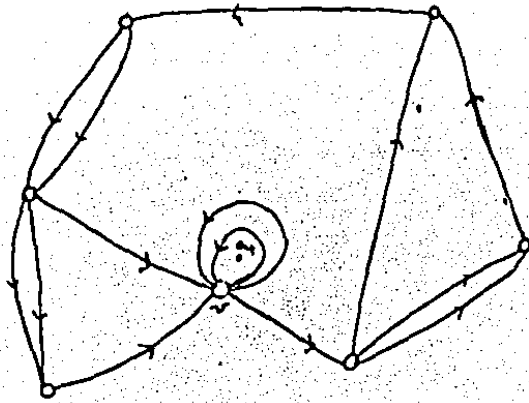


Figura 28

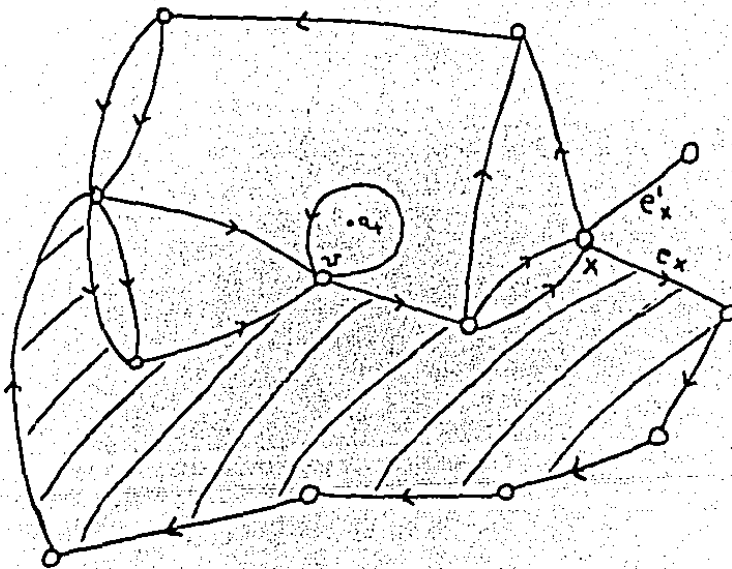


Figura 29

repetirá dos veces un mismo vértice formando un ciclo o bien terminará en  $u$ , en el caso que  $u$  sea un sumidero. En el primer caso dicha trayectoria debe tener en su interior a  $e_x'$ , pues de otro modo esta trayectoria y algunas aristas de los ciclos de  $C$  forman un ciclo bueno en  $G_a$ , que habíamos supuesto no existían (ver figura 29). En el segundo caso el ciclo es malo, tiene en su interior a todos los vértices de los ciclos de  $C$  y además hay una trayectoria que une  $x$  a este ciclo. Ahora formemos una trayectoria que empiece en  $e_x'$  y que sea siempre inconsistente con las orientaciones de las aristas, dicha trayectoria terminará en un vértice de los ciclos de  $C$  o en un vértice de la trayectoria antes construida, pero en cualquiera de los tres casos anteriores, esta trayectoria más una parte de la trayectoria antes construida y algunas aristas de los ciclos de  $C$  forman un semiciclo bueno con exactamente una arista nivelada, y como dicho semiciclo no contiene en su interior a vértices de los ciclos de  $C$  ni tampoco contiene a  $u$ , este semiciclo no tiene fuentes o sumideros en su interior; en los últimos dos casos la existencia de tal semiciclo está asegurada por la existencia de una trayectoria que une  $x$  con el ciclo y  $x$  con  $u$ , en el segundo y tercer casos respectivamente. 2.1.5 implica que hay un ciclo bueno en  $G_a$ , lo cual contradice nuestras suposiciones, o bien hay un semiciclo en  $G_a$  sin cuerdas ni vértices interiores y con exactamente una arista nivelada, lo que contradice 2.2.5. Ver las figuras 30 y 31. ■

Como consecuencia de los lemas anteriores tenemos que hay en  $G_a$  o en  $G_b$  una fuente o sumidero en el que no está basado ningún lazo.

2.3.9 Lema. Supóngase que  $b_s$  es una fuente o sumidero en  $G_b$  y  $\gamma$  es un  $s$ -biflujo bueno en  $G_a$ . Entonces en el interior de  $\gamma$  hay otro  $s$ -biflujo o un  $s$ -lazo.

Demostración. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $b_s$  es un sumidero en  $G_b$ . Supóngase también que todas las marcas interiores de  $\gamma$  son mayores que  $s$  (luego  $s \neq n_b$ ).

Probaremos primero que  $\gamma$  tiene vértices en su interior. Sea  $a_1$  el ápice del biflujo, luego los finales de las aristas de  $\gamma$  incidentes a  $a_1$  tienen marca  $s$  ahí, por la propiedad (d) de

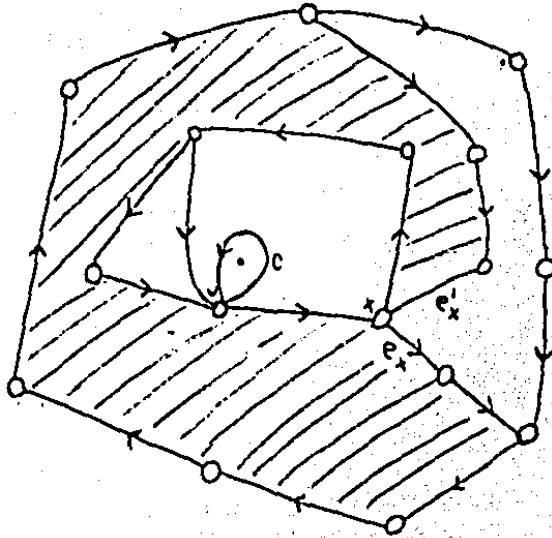


Figura 30

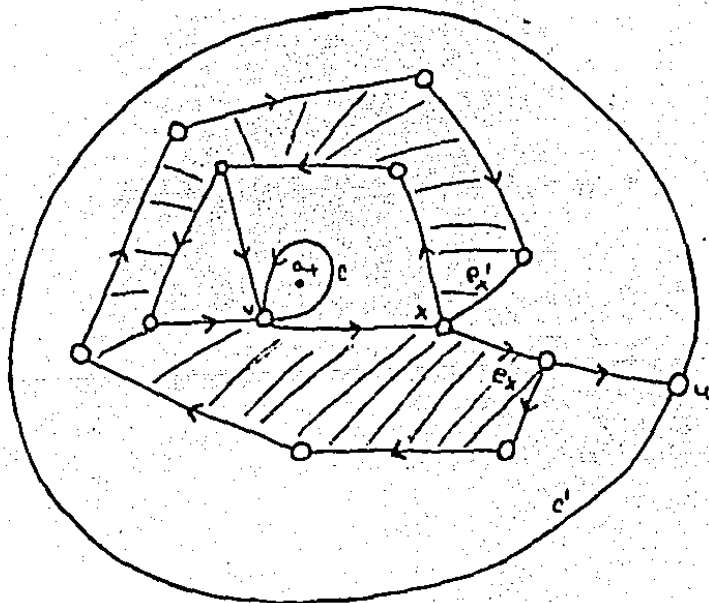


Figura 31

la definición de  $s$ -biflujo, dos marcas  $n_b$  en  $a_i$  son marcas interiores de  $\gamma$ . La arista  $\alpha$  incidente a una de estas marcas  $n_b$ , es incidente también a un vértice en el interior de  $\gamma$ , con lo que completamos el primer paso, o es incidente a otro vértice de  $\gamma$ ; sea entonces  $\alpha$  incidente a otro vértice de  $\gamma$ , si  $\alpha$  está orientada (necesariamente apunta hacia fuera de  $a_i$ ), o bien  $\alpha$  es un unicyclo bueno o divide a  $\gamma$  en dos partes, una de las cuales es un ciclo bueno, entonces por 2.2.2 y 2.2.6  $\gamma$  tiene vértices interiores; si  $\alpha$  es nivelada, entonces o bien  $\alpha$  es un lazo bueno y debe tener vértices interiores por 2.2.2, o  $\alpha$  es un radio, y divide a  $\gamma$  en dos semicyclos cada uno de ellos con una aristas nivelada, entonces si  $\gamma$  no tiene vértices en su interior 2.1.5 y 2.2.5 nos llevan a una contradicción. Luego  $\gamma$  tiene vértices en su interior.

Sea ahora  $k$  el entero más grande (más pequeño si  $b_s$  hubiese sido una fuente) tal que  $a_k$  está en el interior de  $\gamma$ . Las  $2r$  ( $r = d(r_1, r_2)$ ) aristas incidentes a  $a_k$  con marca  $s$  son incidentes a vértices de  $\gamma$  o bien son lazos; dichas aristas no pueden ser incidentes a otros vértices  $a_i$  en el interior de  $\gamma$ , pues esto implica que hay una arista en  $G_b$  uniendo  $b_s$  y  $b_j$  (algun  $j$  no determinado) con marca  $k$  en  $b_s$  y marca  $i$  en  $b_j$ , pero  $i < k$ , luego dicha arista sale de  $b_s$ , lo que contradice que  $b_s$  sea un sumidero. Supóngase que las  $2r$  aristas son incidentes a vértices de  $\gamma$ , todas estas aristas están orientadas de  $\gamma$  hacia  $a_k$ . Considérese los  $2r$  circuitos hacia los cuales estas aristas dividen  $\gamma$ , queremos ver que alguno de ellos es un  $s$ -biflujo. Todas las aristas de estos circuitos están orientadas y tienen sus cabezas marcadas con  $s$ ,  $r$  de estos circuitos tienen todas las marcas interiores mayores que  $s$  y tienen marcas interiores en  $a_k$ ; a lo mucho uno de estos circuitos contiene las dos aristas de  $\gamma$  incidentes a la raíz, por lo que al menos  $r-1$  de estos circuitos satisfacen las propiedades de la definición de  $s$ -biflujo. El ápice para los nuevos  $s$ -biflujos es  $a_k$ . Ver figura 32.

Ahora supóngase que una de las aristas incidentes a  $a_k$  con marca  $s$  es un lazo, tómesese uno de estos lazos tal que en su

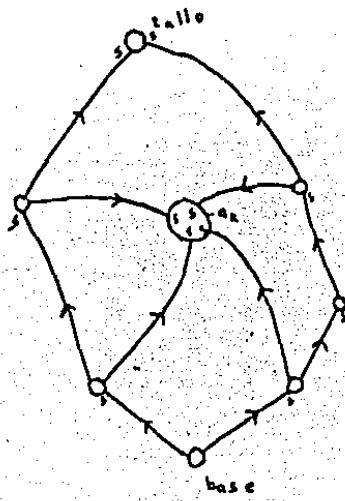


Figura 32

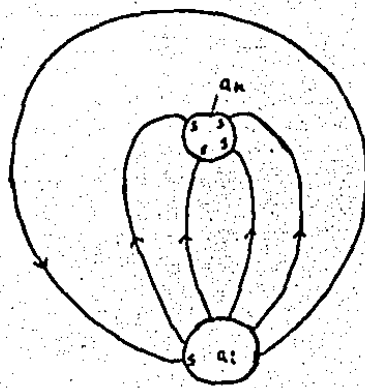


Figura 33

interior no haya más de dichos lazos, no puede haber una marca  $s$  en  $a_k$  en el interior de este lazo, pues a dicha marca sería incidente otro de estos lazos, entonces todas las marcas interiores a dicho lazo son mayores o menores que  $s$  (aunque este lazo puede ser nivelado), o sea este lazo es un  $s$ -lazo bueno. Con lo que se completa la prueba. ■

2.3.10 Lema. Supóngase que  $b_s$  es una fuente o sumidero en  $G_b$  y  $\gamma$  es un  $s$ -lazo bueno en  $G_a$ . Entonces en el interior de  $\gamma$  hay un  $s$ -biflujo o un  $s$ -lazo.

Demostración. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $b_s$  es un sumidero en  $G_b$  y que todas las marcas interiores de  $\gamma$  son mayores que  $s$ .

Por 2.2.2  $\gamma$  tiene vértices en su interior. Sea  $a_i$  el vértice en el que está basado  $\gamma$ . Sea  $k$  el entero más grande tal que  $a_k$  es un vértice en el interior de  $\gamma$ , las  $2r$  aristas incidentes a  $a_k$  con marca  $s$  son lazos o son incidentes también a  $a_i$ , esto es por las mismas razones que en el lema anterior. Supóngase primero que todas las aristas incidentes a  $a_k$  con marca  $s$  son también incidentes a  $a_i$ , todas estas aristas están orientadas de  $a_i$  hacia  $a_k$ , y dividen al interior de  $\gamma$  en  $2r$  circuitos, queremos ver que alguno de estos circuitos es un  $s$ -biflujo;  $r$  de estos circuitos tienen todas sus marcas mayores que  $s$ , y hay marcas interiores de  $a_k$  en el interior de estos  $r$  circuitos, todas las aristas tienen cabezas marcadas con  $s$ , y a lo mucho uno de ellos contiene a la arista del lazo  $\gamma$ , luego al menos  $r-1$  de estos circuitos son  $s$ -biflujos. El ápice de estos  $s$ -biflujos es  $a_k$  y la base es  $a_i$ . Ver figura 33.

Supóngase ahora que una de las aristas incidentes a  $a_k$  con marca  $s$  es un lazo; la prueba de este caso es análoga al caso correspondiente en el lema anterior. Luego en el interior de  $\gamma$  hay un  $s$ -biflujo o un  $s$ -lazo. ■

2.3.11 Lema. Supóngase que  $b_s$  es una fuente o sumidero en  $G_b$ , y  $\gamma$  es un  $s$ -lazo doble bueno en  $G_a$ . Entonces en el interior de  $\gamma$  hay un  $s$ -biflujo o un  $s$ -lazo.

*Demostración.* Por 2.2.6  $\gamma$  tiene vértices en su interior. La prueba es análoga a ésta de los lemas 2.3.9, y 2.3.10. Puede probarse un poco más que esto, esto es, puede probarse que si  $\gamma$  es un s-ciclo bueno entonces en el interior de  $\gamma$  hay un s-biflujo o un s-lazo, pero no necesitaremos esto. ■

2.3.12 Lema. Supongase que  $b_s$  es una fuente o sumidero en  $G_b$ , entonces en  $G_a$  no hay s-biflujos buenos, ni s-lazos buenos, ni s-lazos dobles buenos.

*Demostración.* Si hubiera uno de estos circuitos, habría uno que no tendría a otro de estos mismos circuitos en su interior, lo que contradiría a 2.3.9, 2.3.10 y 2.3.11. ■

2.3.13 Lema. Supóngase que  $b_s$  es una fuente o sumidero sin lazos en  $G_b$ , entonces en  $G_a$  hay un s-biflujo bueno, o un s-lazo bueno, o un s-lazo doble bueno.

*Demostración.* Supóngase sin pérdida de generalidad que  $b_s$  es un sumidero. Considérese las  $2r$  aristas incidentes a  $b_s$  con marca  $n_a$ , puesto que  $b_s$  es un sumidero, todas estas aristas son niveladas, y como no hay lazos basados en  $b_s$ , estas aristas son también incidentes a otros vértices. Sean  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n_a$ , las correspondientes aristas en  $G_a$ , todas son uniciclos basados en  $a_{n_a}$  con un final marcado con  $s$ . Si alguno de estos lazos es bueno, tendremos un lazo que no tiene en su interior a otro de estos mismos lazos, por lo que será un s-lazo bueno. Supóngase entonces que todos estos lazos son malos, por lo tanto estos lazos son concéntricos; numérense de modo que  $a_i$  esté en el interior de  $a_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n_a - 1$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el número de enrollamiento de  $a_i$  con respecto a  $a_+$  es 1, y que las marcas interiores de  $a_i$  son menores que  $s$ . Llamamos  $s_1$  a la marca  $s$  de  $a_i$ . A la derecha de  $a_i$  hay una marca  $s$ , a la que llamamos  $s_2$ , tal que las marcas que se encuentran entre  $s_1$  y  $s_2$  son mayores que  $s$ ; y hay una marca  $s$  a la izquierda de  $a_i$ , a la que llamamos  $s_3$ , tal que las marcas que hay entre esta marca y la marca de la

cabeza de  $\alpha_1$  son menores que  $s$  (ver la figura 34). Tenemos dos casos.

1) Uno de los finales de  $\alpha_2$  es  $s_2$ .

$\alpha_2$  tiene la misma orientación que  $\alpha_1$ , y el circuito que forman  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  tiene en uno de sus extremos marcas mayores que  $s$  y en el otro extremo marcas menores. Existe una marca  $s$  a la derecha de  $s_2$ , a la que llamamos  $s_4$ , tal que las marcas que se encuentran entre  $s_2$  y  $s_4$  son todas menores que  $s$  (ver la figura 35). Tenemos dos subcasos.

a) Uno de los finales de  $\alpha_3$  es  $s_4$ .

En este caso  $\alpha_3$  tiene la misma orientación que  $\alpha_2$  y  $\alpha_1$ , además la cabeza de  $\alpha_3$  se encuentra entre  $s_3$  y la cabeza de  $\alpha_1$ , todas las marcas que se encuentran entre estas dos marcas son menores que  $s$ , y también las marcas que hay entre  $s_2$  y  $s_4$  son menores que  $s$  (según nuestras suposiciones debemos tener  $s > 1$ ) y hay al menos dos marcas  $1$  entre  $s_2$  y  $s_4$ , por lo tanto  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  forman un  $s$ -biflujo bueno. Ver la figura 36.

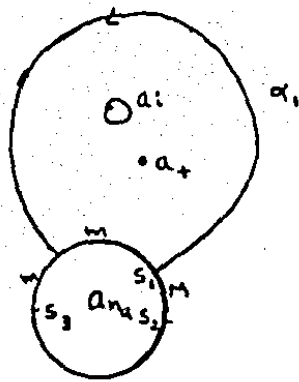
b) Uno de los finales de  $\alpha_3$  es  $s_3$ .

En este caso  $\alpha_3$  tiene orientación opuesta a  $\alpha_2$ , por lo que  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  forman un ciclo bueno, con las raíces de sus aristas marcadas con  $s$ ; las marcas que hay entre  $s_3$  y la cabeza de  $\alpha_1$  son menores que  $s$ , la cabeza de  $\alpha_3$  se encuentra entre  $s_2$  y  $s_4$  y las marcas que hay entre estas dos marcas son menores que  $s$ , por lo tanto las marcas interiores del circuito formado por  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  son menores que  $s$ , o sea  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  forman un  $s$ -lazo doble bueno. Ver la figura 37.

2) Uno de los finales de  $\alpha_2$  es  $s_3$ .

$\alpha_2$  tiene la misma orientación que  $\alpha_1$ , y el circuito que forman tiene en uno de sus extremos marcas menores que  $s$ , y el otro extremo tiene marcas mayores que  $s$ . Existe una marca  $s$  a la izquierda de  $s_3$ , a la que llamamos  $s_4$ , tal que las marcas que se encuentran entre  $s_3$  y  $s_4$  son mayores que  $s$  (ver la





$m$  = marcas menores  
que  $S$

$M$  = marcas mayores  
que  $S$

Figura 34

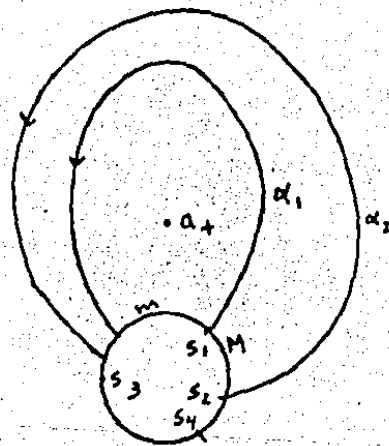


Figura 35

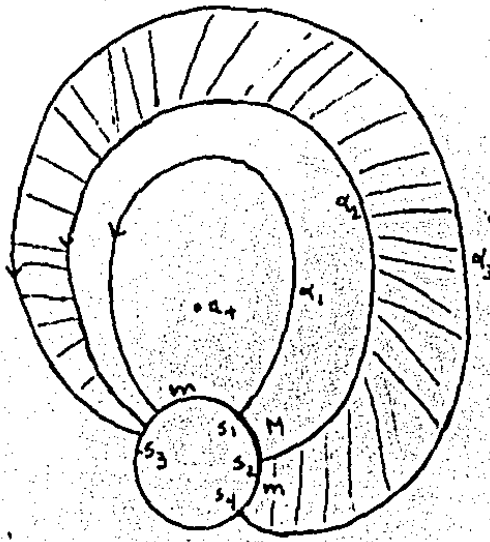


Figura 36

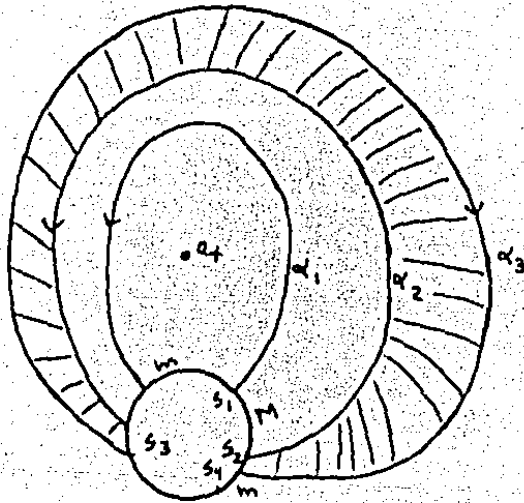


Figura 37

figura 38). Tenemos dos subcasos.

a) Uno de los finales de  $\alpha_3$  es  $s_2$ .

El otro extremo de  $\alpha_3$  se encuentra entre las marcas  $s_3$  y  $s_4$ , por lo que  $\alpha_3$  tiene orientación opuesta a  $\alpha_2$ , luego  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  forman un ciclo. Las marcas que hay entre  $s_3$  y  $s_4$  son mayores que  $s$ , y también son mayores que las marcas que hay entre  $s_2$  y la raíz de  $\alpha_2$ , es decir las marcas interiores del ciclo que forman  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  son mayores que  $s$ , además estas aristas tienen sus cabezas marcadas con  $s$ , o sea  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  forman un s-lazo doble bueno. Ver la figura 39.

b) Uno de los finales de  $\alpha_3$  es  $s_4$ .

El otro extremo de  $\alpha_3$  se encuentra entre las marcas  $s_2$  y la raíz de  $\alpha_2$ , luego  $\alpha_3$  tiene la misma orientación que  $\alpha_2$ . Las marcas que se encuentran entre  $s_4$  y  $s_3$  son mayores que  $s$ , como también son mayores que  $s$  las marcas que hay entre las raíces de  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ ; nótese que en este caso no es posible que  $s$  sea igual a  $n_b$ , por lo que hay dos marcas  $n_b$  entre las marcas  $s_3$  y  $s_4$ , o sea  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  forman un s-biflujo bueno. Ver la figura 40.

Por lo tanto hay en  $G_a$  un s-biflujo bueno, o un s-lazo bueno, o un s-lazo doble bueno. ■

La observación hecha después del lema 2.3.8, y los lemas 2.3.12 y 2.3.13 nos llevan a una contradicción, por lo que el teorema 1 queda probado.

Nótese que lo hecho en las secciones 2.1, 2.2, y en los lemas 2.3.1-2.3.5 es válido en el caso  $r = 1$ ; pero en los lemas 2.3.6-2.3.13 fue esencial el hecho que estábamos trabajando en el caso  $r \geq 2$ .

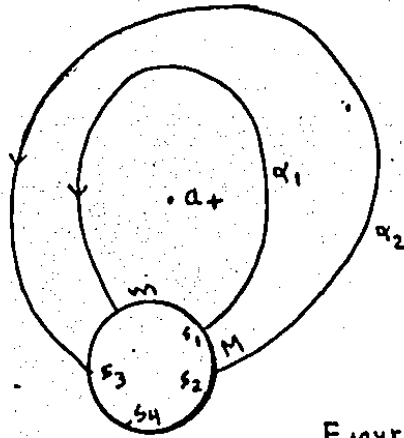


Figura 38

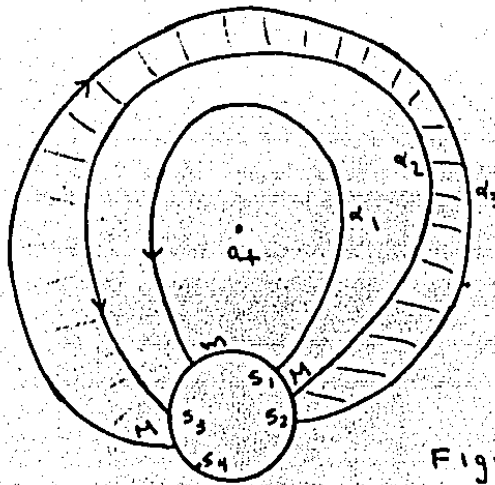


Figura 39

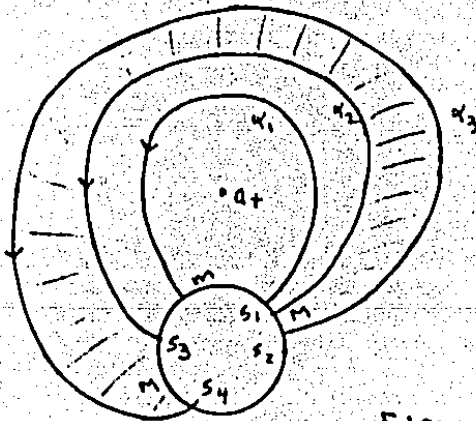


Figura 40

## CAPITULO III

### 3.1 Más argumentos topológicos y combinatorios.

#### 3.1.1 En esta sección probamos el teorema 2.

**Teorema 2.** Sea  $(B, t)$  un ovillo primo y  $(B', r_1)$ ,  $(B', r_2)$  dos ovillos racionales. Sea  $k_i$  el nudo o enlace obtenido al sumar  $(B, t)$  y  $(B', r_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Si  $k_2$  es el nudo trivial y  $k_1$  es compuesto, entonces  $d(r_1, r_2) \leq 1$ .

Supondremos que el teorema es falso, y que por lo tanto existe un contraejemplo. Sea  $(B, t)$  un ovillo primo, y  $(B', r_1)$  y  $(B', r_2)$  dos ovillos racionales tales que  $r = d(r_1, r_2) \geq 2$ . Sean  $k_1$  y  $k_2$  los nudos o enlaces obtenidos al sumar  $(B, t)$  con  $(B', r_1)$  y  $(B', r_2)$  respectivamente.

Supóngase que  $k_1$  es compuesto; por lo tanto existe una esfera  $S$  que interseca transversalmente a  $k_1$  en dos puntos, de modo que ninguna de las cerraduras de las componentes de  $S^3 - S^2$  interseca a  $k_1$  en un arco desanudado. Como en el capítulo anterior podemos suponer lo siguiente:

- Las cuerdas de  $(B', r_1)$  están contenidas en  $\partial B$ .
- $S$  interseca a  $k_1$  en las cuerdas de  $(B, t)$ .
- Las intersecciones entre  $S$  y  $\partial B$  son todos círculos esenciales en  $\partial B - \{ \text{cuerdas de } (B', r_1) \}$ , tal que cada uno de estos círculos es frontera de un disco en  $S$  que está propiamente encajado en  $B'$ .

De entre todas las esferas con estas propiedades tomemos una que tenga un número mínimo de círculos de intersección con  $\partial B$ , sea esta  $S_1$ .

Supóngase ahora que  $k_2$  es el nudo trivial, entonces existe un disco  $D$  tal que  $\partial D = k_2$ . Nuevamente podemos suponer lo siguiente, pues se consigue por medio de isotopías:

- Las cuerdas de  $(B', r_2)$  están contenidas en  $\partial B$ .

b)  $D$  intersecta a  $\partial B$  en dos arcos, correspondientes a las cuerdas de  $(B', r_2)$  que están contenidos en  $\partial D$ , y en círculos esenciales en  $\partial B - \{cuerdas\ de\ (B', r_2)\}$ , tal que cada uno de ellos es frontera de un disco en  $D$  propiamente encajado en  $B'$ .

De entre todos los discos con estas propiedades, tomemos uno que tenga un número mínimo de círculos de intersección con  $\partial B$ , sea este  $D_2$ .

Sea  $N$  el cubo con dos asas obtenido al pegarle dos 1-asas a  $B'$ , tal que los corazones de dichas 1-asas sean paralelos a las cuerdas de  $(B, t)$ , y tal que contengan a estas cuerdas sobre su frontera. Podemos suponer además que  $D_2$  intersecta a las 1-asas solo en las cuerdas de  $(B, t)$ , y que  $S_1$  y las 1-asas se intersectan solo en dos discos, que son meridianos de las 1-asas. Sean ahora  $P_1 = S_1 \cap N$ ,  $P_2 = D_2 \cap N$ ,  $P_1$  y  $P_2$  son superficies planares conexas en  $cl(S^3 - N)$ .

$\partial P_1$  está formada de  $m$  círculos paralelos a  $hr_1(J)$ , denotados por  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , numerados de modo que  $a_i$  y  $a_{i+1}$  sean frontera de un anillo esencial en  $\partial B - \{cuerdas\ de\ (B', r_1)\}$  cuyo interior no intersecta a  $P_1$ , para  $1 \leq i \leq m-1$ ,  $\partial P_1$  además contiene dos círculos, denotados por  $a_+$  y  $a_-$ , que son meridianos de las 1-asas.  $\partial P_2$  está formada de  $n$  círculos paralelos a  $hr_2(J)$ , denotados por  $b_1, \dots, b_n$  y numerados como antes, más un círculo denotado por  $b_0$ , que va una vez sobre cada 1-asa (este círculo no es mas  $\partial D$ ). Mostramos a estas curvas en la figura 41.

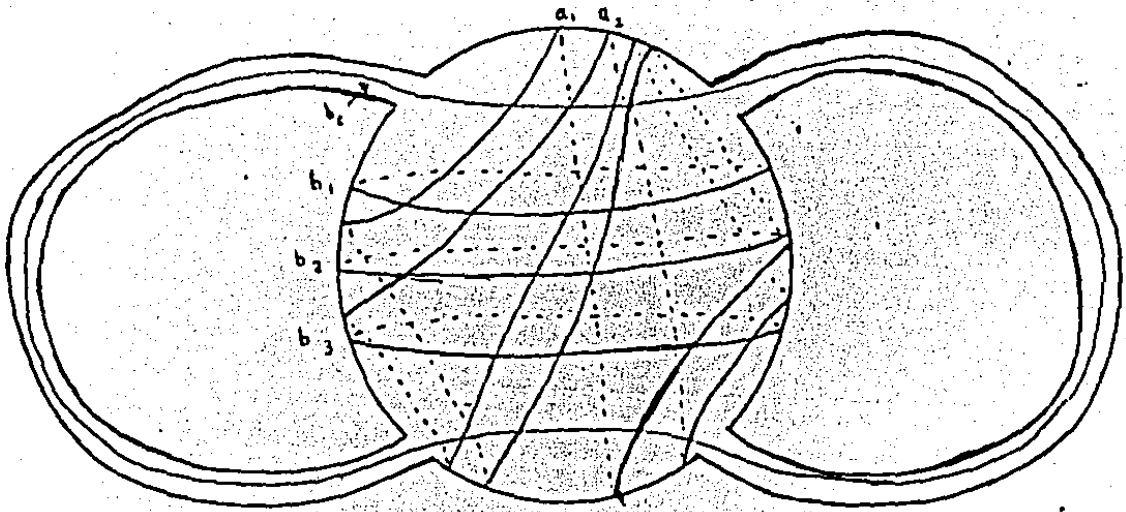
3.1.2 *Afirmación.* a)  $m > 0$ .

b)  $P_1$  y  $P_2$  son *incompresibles* en  $cl(S^3 - N)$ .

*Demostración.* La prueba de (a) es analoga a ésta de 2.2.1. La prueba de (b) es similar a 2.1.2. ■

Podemos por lo tanto suponer que los posibles círculos de intersección entre  $P_1$  y  $P_2$ , son esenciales en ambas  $P_1 - \{a_+, a_-\}$  y  $P_2$ .

3.1.3 Sean  $a_i$  y  $b_j$  componentes de  $\partial P_1$  y  $\partial P_2$



Curvas  $a_i$ 's y  $b_j$ 's en el caso  
 $\gamma_1 = 2 \quad \gamma_2 = 0$

Figura 41

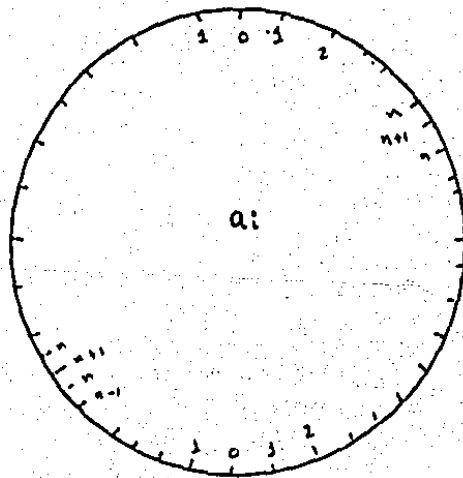


Figura 42

respectivamente, podemos suponer que  $\#(a_i, b_j)$  es mínimo, esto es, es igual a  $2r$ . Marcamos a los puntos de intersección entre  $a_i$  y  $b_j$  por  $i$  en  $P_2$  y por  $j$  en  $P_1$ , para  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ .  $b_1$  ( $b_n$ ) es frontera de un disco en  $\partial B$  que contiene uno de los arcos de  $(B', r_2)$ , o sea un arco de  $b_0$ , y dicho disco no contiene a ningún otro de los  $b_j$ 's; las intersecciones entre  $a_i$  y  $b_0$  que ocurren en el arco de  $b_0$  contenido en ese disco bordeado por  $b_1$  ( $b_n$ ) las marcamos con  $0$  ( $n+1$ ) en  $P_1$  y con  $i$  en  $P_2$ . Si  $n = 0$ , marcamos a las intersecciones con un arco de  $b_0$  con  $0$ , y con el otro arco con  $1$ . Denotamos a los puntos de intersección entre  $b_0$  y  $a_{\pm}$  por  $+$  y  $-$ , en ambas  $P_1$  y  $P_2$ . La colección de marcas en  $a_i$  está ordenada como sigue: digamos que primero está  $1$ , luego  $2, 3, \dots, n, n+1, n, \dots, 1, 0, 1, \dots$  y así sucesivamente; en  $b_j$ ,  $j \neq 0$ , están ordenadas como  $1, 2, \dots, m, m, \dots, 1, 1, \dots$  y así sucesivamente; en  $b_0$  están ordenadas como  $1, 2, \dots, m, m, \dots, 1, +, 1, \dots, 1, -, 1, \dots$  o  $1, 2, \dots, m, m, \dots, 1, +, m, \dots, m, -, \dots, 0, 1, \dots, m, m, \dots, 1, +, -, 1, \dots, 1, \dots, 0, 1, \dots, m, m, \dots, 1, +, -, m, \dots, m, \dots, 0$  alguna variante de estas. Mostramos estas colecciones de marcas en la figura 42.

Construimos gráficas en  $S_1$  y  $D_2$  como antes, los vértices son los  $a_i$ 's y los  $b_j$ 's, y las aristas son los arcos de intersección entre  $P_1$  y  $P_2$ . Denotamos a estas gráficas por  $G_1$  y  $G_2$ . Aquí consideramos a  $a_+$  y  $a_-$  como vértices, pues hay un arco incidente a ellos. Denotamos a la arista incidente a  $a_{\pm}$  por  $e_{\pm}$ .

Las aristas de  $G_1$  y  $G_2$  tienen sus finales marcados con algún número, por lo que al igual que en el capítulo anterior las orientamos. Si una arista tienen sus finales con marcas distintas, orientamos a la arista de la marca mayor a la menor (a  $e_{\pm}$  no la orientamos). Todas las definiciones de 2.1.4 las usamos aquí también, pero hacemos las siguientes convenciones. El interior de un circuito en  $G_1$  es esta componente de su complemento que no contiene a  $a_-$ , un circuito en  $G_1$  es malo si contiene en su



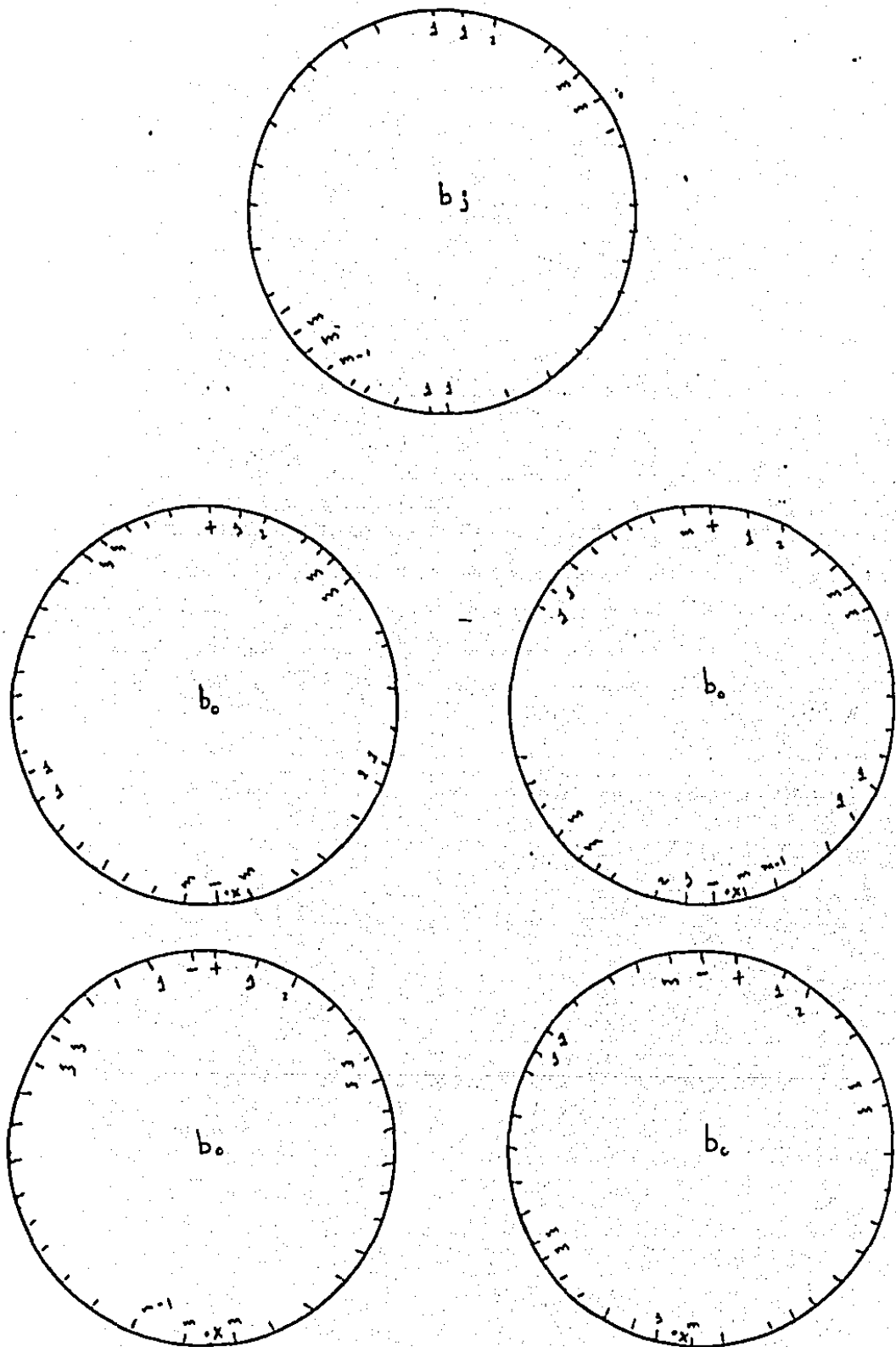


Figura 42

interior a  $a_+$ , de otra forma es bueno. El interior de un circuito en  $G_2$  es esta componente de su complemento que no contiene al punto  $x$ , cercano a  $b_0$ , escogido de modo que los puntos  $+y$  y  $x$  sean opuestos, como mostramos en la figura 42. Un circuito en  $G_2$  es bueno si  $b_0$  no es uno de sus vértices, o  $b_0$  es uno de sus vértices pero  $\pm$  no son marcas del circuito ni marcas interiores del circuito.

3.1.4 Lema. Un lazo en  $G_2$  tiene vértices interiores.

*Demostración.* Supóngase que es falso, por lo tanto existe un lazo sin vértices en su interior, tómese un lazo que no tenga ni vértices ni aristas en su interior, sea este  $\gamma$ . Los finales de  $\gamma$  son adyacentes, por lo que tenemos los siguientes casos.

a) Los finales de  $\gamma$  son  $i, i+1$ .

Con el disco determinado por el interior de  $\gamma$  y el anillo en  $\partial B$  bordeado por  $a_i$  y  $a_{i+1}$  podemos construir un disco de compresión para  $P_1$ , lo cual es una contradicción pues  $P_1$  es incompresible.

b) Los finales de  $\gamma$  son  $1, 1$  ( $m, m$ ).

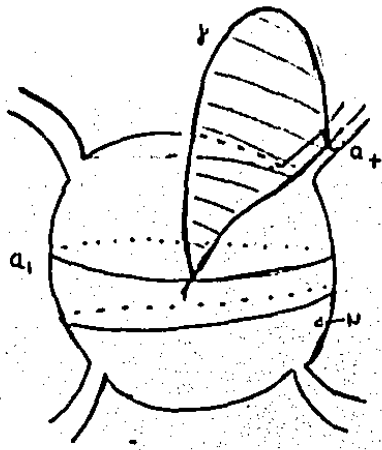
Este caso es similar a 2.2.2.

c) Los finales de  $\gamma$  son  $1, +$  ( $1, -, o m, \pm$ ).

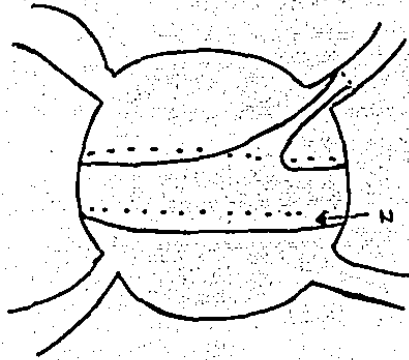
En este caso  $\gamma$  está basado en  $b_0$ . El disco determinado por el interior de  $\gamma$  puede ser usado para hacer una isotopía y convertir a  $a_+$  y  $a_1$  en un nuevo  $a_+$ , eliminando a  $a_1$ , como mostramos en la figura 43, lo cual contradice la minimalidad de  $m$ .

d) Los finales de  $\gamma$  son  $+, -$ .

Aquí nuevamente  $\gamma$  está basado en  $b_0$ .  $a_+$  y  $a_-$  están en la misma 1-asa, el arco de  $b_0$  contenido en el interior de  $\gamma$ , está totalmente contenido en una de las cuerdas de  $(B, t)$ , y es además uno de los arcos en los que  $S_1$  divide a  $k_1$ ,  $\gamma$  en  $P_1$  une  $a_+$  y  $a_-$ ; usando el disco determinado por el interior de  $\gamma$  podemos hacer una isotopía entre ese arco de  $b_0$  y un arco contenido en  $S_1$ , o sea uno de los arcos en los que  $S_1$  divide a  $k_1$  es



↓ isotopia



↓ isotopia

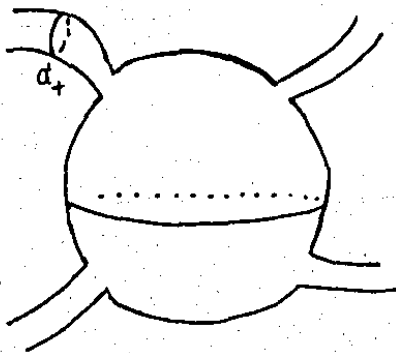


Figura 43

trivial, contradiciendo la elección de  $S_1$ .

En los casos (b), (c) y (d) estamos usando el hecho de que el interior de  $\gamma$  no contiene al punto  $x$  cercano a  $b_0$ , escogimos al interior de un circuito de ese modo para no tener ciertos problemas. ■

### 3.1.5 Lema. $n > 0$ .

*Demostración.* Si  $n = 0$   $G_2$  tiene solo un vértice, y cualquier arista es un lazo, pero ninguno de estos lazos tiene vértices interiores, lo que contradice 3.1.4. ■

### 3.1.6 Lema. Un lazo bueno en $G_1$ tiene vértices interiores.

*Demostración.* Supóngase que es falso, por lo tanto existe un lazo bueno sin vértices en su interior, tomemos pues un lazo bueno sin vértices ni cuerdas en su interior, sea este  $\gamma$ . Sea  $F$  el disco determinado por el interior de  $\gamma$ . Los finales de  $G$  son adyacentes, por lo que las marcas de sus finales son  $i, i+1$ . Si los finales de  $\gamma$  son  $i, i+1$ , con  $1 \leq i \leq n-1$ , con el disco  $F$  y el anillo en  $\partial B$  bordeado por  $b_i$  y  $b_{i+1}$  podemos construir un disco de compresión para  $P_2$ , lo cual no es posible. Supóngase entonces que los finales de  $\gamma$  están marcados con  $0, 1$  (el caso  $n, n+1$  es similar), supóngase que  $\gamma$  está basado en  $a_i$ . Sea  $\alpha$  el arco de  $a_i$  contenido en el interior de  $\gamma$ ,  $\alpha$  une  $b_1$  con  $b_0$ . Sea  $A$  un anillo contenido en  $\partial B$ , tal que  $\partial A$  consiste de cuatro arcos  $\beta_i, i = 1, 2, 3, 4$ ,  $\beta_1$  es parte de  $b_1$ ,  $\beta_3$  es parte de  $b_0$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_4$  unen  $b_0$  y  $b_1$  y son paralelos a  $\alpha$ , además  $\alpha$  está propiamente contenido en tal anillo, mostramos tal anillo en la figura 44. Considerese la unión de  $D_2$  (disco determinado por  $b_1$ ) y el anillo  $A$ , pegados a lo largo de  $\beta_1$  y  $\beta_3$ ; tal unión es un toro agujerado, al hacer cirugía sobre este toro con el disco  $F$ , y haciendo una isotopía, encontramos un nuevo disco que tiene como frontera a  $k_2$ , pero que tiene  $n-1$  círculos de intersección con  $\partial B$ , lo que contradice la elección de  $D_2$ . ■

3.1.7 Lema. Sea  $a$  una arista nivelada en  $G_1$  o  $G_2$ , que une a los vértices  $u$  y  $v$ . Entonces las marcas que se encuentran a la derecha y a la izquierda de  $a$  en  $u$ , son iguales a las

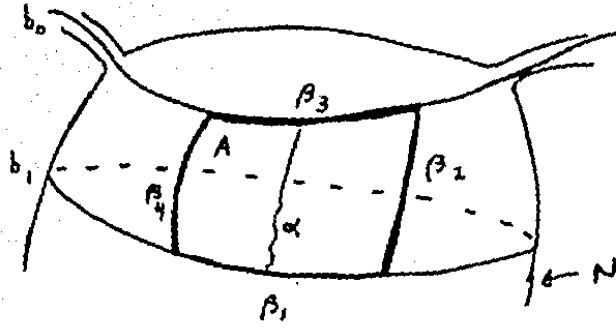


Figura 44

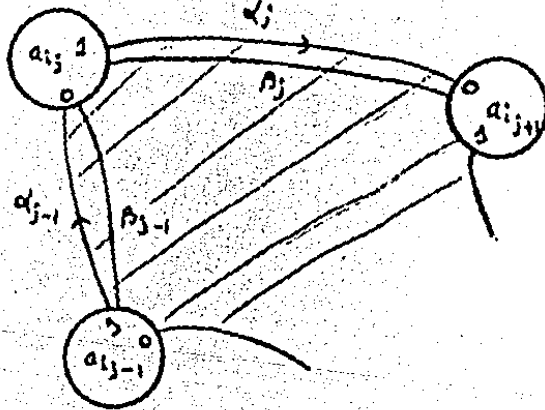


Figura 45

marcas que se encuentran a la derecha y a la izquierda de  $a$  en  $v$  respectivamente.

*Demostración.* Es similar a 2.2.4. ■

3.1.8 *Lema.* Un semiciclo bueno en  $G_1$  o  $G_2$  sin cuerdas y sin vértices interiores no puede tener exactamente una arista nivelada.

*Demostración.* Es similar a 2.2.5. ■

3.1.9 *Lema.* Un ciclo bueno en  $G_2$  tiene vértices interiores.

*Demostración.* Es similar a esta de 2.2.6. ■

3.1.10 *Lema.* Un ciclo bueno en  $G_1$  tiene vértices interiores.

*Demostración.* Supóngase que esto es falso, por lo tanto existe un ciclo bueno sin vértices en su interior, y además podemos suponer que no hay ciclos en su interior, sea  $\gamma$  este ciclo. Un argumento similar a este de 2.2.6 muestra que la sucesión de marcas del circuito es  $i, i-1, \dots, i, i-1$ ; si  $i$  es distinto de  $n+1$  o  $1$ ,  $b_i$  y  $b_{i+1}$  son círculos contenidos en  $\partial B$  que bordean un anillo  $A$  con interior ajeno de  $D_2$ . Consideremos la unión de  $D_2$  (discos determinados por  $b_i$  y  $b_{i+1}$ ) y el anillo  $A$ , pegados a lo largo de  $b_i$  y  $b_{i+1}$ , esta unión es un toro agujerado, y al hacer cirugía en este toro con el disco determinado por el interior de  $\gamma$ , obtenemos un nuevo disco con frontera  $k_2$  pero con  $n-2$  círculos de intersección con  $\partial B$ , lo cual es una contradicción.

Supóngase ahora que  $i = 1$  (el caso  $i = n+1$  es similar), sea  $D$  el disco determinado por el interior del ciclo.  $b_1$  es frontera de un disco en  $\partial B$  tal que en su interior hay un arco  $\alpha$  de  $b_0$ ;  $\partial D \cap \partial N$  consiste de una colección de arcos que unen  $b_0$  con  $b_1$ , queremos probar que todos esos arcos se encuentran de un mismo lado de  $b_0$ . Denotemos a los vértices del circuito, en orden, por  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ ,  $r \geq 2$ , sea  $\alpha_j$  la arista del ciclo que une  $a_{i_j}$  y  $a_{i_{j+1}}$ . Para cada  $j$ , sea  $\beta_j$  un arco en  $P_1$  paralelo a  $\alpha_j$  pero un poco empujado hacia dentro de  $D$  (ver

figura 45). Entonces el final de  $\beta_j$  que esta en  $a_{ij}$  puede conectarse por un arco  $\beta'$  en una vecindad de  $b_1$  en  $\partial N$  al final del arco  $\beta_{j-1}$  encontrándose en  $a_{i,j-1}$ , debido a que ambos se encuentran en el mismo lado de  $b_1$ . Entonces la unión de  $\beta_j$ ,  $\beta'$  y  $\beta_{j+1}$  es un arco en una vecindad de  $P_2$ , luego sus dos finales (encontrándose en  $a_{ij}$  y  $a_{i,j+1}$ ) deben de estar en el mismo lado de  $b_0$ , pues  $B$  y  $P_2$  son orientables. Esto prueba lo que queríamos, todos los arcos de intersección entre  $\partial D$  y  $\partial N$  están de un mismo lado de  $b_0$ .

Sea  $A$  un anillo en  $\partial B$ , tal que  $\partial A$  conste de cuatro arcos  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ ;  $\delta_1$  es un arco de  $b_1$ ,  $\delta_3$  es un arco de  $b_0$ ,  $\delta_2$  y  $\delta_4$  son arcos que unen  $b_0$  y  $b_1$ , además  $\partial D \cap \partial N$  está contenido en  $A$ , el interior de  $A$  es ajeno de  $P_2$  (ver la figura 44). Considérese la unión de  $D_2^-$  (disco determinado por  $b_1$ ) y el anillo  $A$ , pegados por  $\delta_1$  y  $\delta_3$ , tal unión es un toro agujerado; al hacer cirugía en este toro con el disco  $D$ , obtenemos un nuevo disco con frontera  $k_2$ , pero que tiene  $n-1$  círculos de intersección con  $\partial B$ , lo que contradice la elección de  $D_2$ . ■

Lo que queremos probar ahora es que en  $G_2$  hay una fuente o sumidero distinto de  $b_0$  en el que no está basado ningún lazo.

3.1.11 Lema. Si  $G_2$  tiene un lazo bueno o un ciclo bueno, entonces  $G_2$  tiene una fuente o sumidero, no  $b_0$ , sin lazos.

*Demostración.* Es similar a 2.3.1. ■

3.1.12 Lema. Si  $G_1$  tiene una arista nivelada (no  $e_{\pm}$ ) entonces  $G_2$  tiene un lazo bueno.

*Demostración.* Sea  $\alpha$  una arista nivelada en  $G_1$ , con sus finales marcados con  $i$ , entonces  $\alpha$  en  $G_2$  es un lazo basado en el vértice  $b_i$ , si  $i \neq 0, n+1$ , es claro que  $\alpha$  es un lazo bueno. Si  $i = 0$  o  $n+1$ ,  $\alpha$  es un lazo basado en  $b_0$ , pero como dicho lazo tiene sus finales en la parte '0' o 'n+1' de  $b_0$ ,

dicho lazo no puede tener en su interior a las marcas  $\pm$ , luego este lazo es bueno. ■

3.1.13 Lema. Si  $G_1$  tiene un ciclo bueno entonces  $G_2$  tiene un lazo bueno.

Demostración. Supóngase que  $G_1$  tiene un ciclo bueno, entonces existe un ciclo bueno que no tiene ciclos en su interior, sea  $\gamma$  este ciclo. Por 3.1.10  $\gamma$  tiene vértices en su interior y por 2.1.5  $\gamma$  tiene una fuente o sumidero en su interior. Supóngase sin pérdida de generalidad que hay una fuente en el interior de  $\gamma$ , a una marca 0 de tal vértice solo puede ser incidente una arista nivelada, no pueden ser incidentes las aristas  $e_{\pm}$  a esta marca pues el vértice está en el interior de un ciclo bueno, luego hay una arista nivelada en  $G_1$ , y por 3.1.12 hay un lazo bueno en  $G_2$ . ■

Por lo tanto si hay una arista nivelada o un ciclo bueno en  $G_1$ , habrá una fuente o sumidero en  $G_2$  distinto de  $b_0$  en el que no está basado ningún lazo.

3.1.14 Lema. Supóngase que todas las aristas de  $G_1$  están orientadas (excepto  $e_{\pm}$ ), entonces hay un ciclo bueno en  $G_1$ .

Demostración. Como todas las aristas están orientadas y cada vértice tiene marcas 0 y  $n+1$ , no hay fuentes ni sumideros en  $G_1$ , a menos que  $r = 2$  y haya un vértice  $v$  al cual son incidentes las aristas  $e_+$  y  $e_-$  ambas con marcas 0 (o  $n+1$ ) en  $v$ , pero en este caso habrá a lo mucho una fuente o sumidero y por lo tanto podemos encontrar un ciclo bueno que no pase por dicho vértice, con lo que terminamos. Supóngase entonces que no hay fuentes ni sumideros en  $G_1$ ; por lo tanto hay ciclos en  $G_1$ , pero supóngase que todos estos ciclos son malos, existe un ciclo malo tal que en su interior no hay más ciclos ni vértices interiores (aparte de  $a_+$ ). Sea  $C$  la colección de todos los ciclos malos en  $G_1$  que no tienen vértices en su interior (aparte claro está de  $a_+$ ); todos estos ciclos tienen el mismo número de enrollamiento con respecto a  $a_+$ , pues de otra forma habría un ciclo bueno, tenemos una situación como en la figura 46.



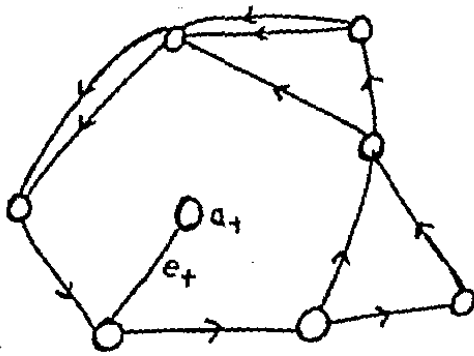


Figura 46

Sea  $v$  un vértice de los ciclos de  $C$ , hay incidentes a  $v$  dos familias de aristas que pertenecen a los ciclos de  $C$ , una familia  $A$  de aristas que entran a  $v$  y una familia  $B$  de aristas que salen de  $v$ ; una arista de  $A$  ( $B$ ) no puede ser incidente en  $v$  a una marca  $n+1$  ( $0$ ) pues estas aristas entran a (salen de)  $v$ ; tampoco puede haber dos marcas  $0$  ( $n+1$ ) en  $v$  a las que sean incidentes aristas de  $A$  ( $B$ ), pues como estas aristas son consecutivas habría forzosamente una marca  $n+1$  ( $0$ ) a la que sería incidente una de las aristas de  $A$  ( $B$ ), lo que no es posible. Por lo tanto para cada vértice de los ciclos de  $C$  hay al menos una marca  $0$  y una  $n+1$  a las que no son incidentes aristas de los ciclos de  $C$  (este argumento es análogo a 2.3.6).

Sea  $H$  la subgráfica de  $G_1$  definida como sigue:  $\{\text{vértices de } H\} = \{\text{vértices de } G_1 \text{ excepto } a_+\}$ ,  $\{\text{aristas de } H\} = \{\text{aristas de } G_1 \text{ excepto las aristas de los ciclos de } C \text{ y } e_+\}$ . Todas las aristas de  $H$  están orientadas excepto  $e_-$ ; puesto que cada vértice tiene una marca  $0$  y una  $n+1$  a las cuales son incidentes aristas de  $H$ , en  $H$  no hay fuentes ni sumideros, a menos que la arista  $e_-$  sea incidente a uno de los vértices de los ciclos de  $C$  con marca  $0$  o  $n+1$  en dicho vértice, pero en este caso habrá a lo mucho una fuente o sumidero, por lo que podremos encontrar un ciclo en  $H$  que no pase por dicho vértice y que por lo tanto sea bueno en  $G_1$ , con lo que terminamos. Supóngase por lo tanto que no hay fuentes ni sumideros en  $H$ , luego hay ciclos en  $H$ , supóngase que estos ciclos son malos, y tómesese uno tal que en su interior no haya más ciclos de  $H$ , sea este  $\mu$ .  $\mu$  en  $G_1$  es malo y por la elección de  $C$  debe tener vértices en su interior, o sea  $\mu$  en  $H$  tiene vértices en su interior y como no hay ciclos en el interior de  $\mu$  en  $H$ , por 2.1.5 debe haber una fuente o sumidero en el interior de  $\mu$ , o sea hay una fuente o sumidero en  $H$ , lo cual es una contradicción, con lo que se completa la prueba. ■

Como se habrá notado, la demostración del lema anterior es análoga a la del lema 2.3.8, pero es un poco más simple. La demostración del lema anterior no es válida en el caso  $r = 1$ , los lemas anteriores a éste si son válidos en ese caso.

3.1.15 Lema. En  $G_2$  hay una fuente o sumidero distinta de  $b_0$  sin lazos.

*Demostración.* Es una consecuencia de 3.1.11, 3.1.12, 3.1.13, 3.1.14. ■

Definimos un  $s$ -biflujo en  $G_1$  al igual que en la sección 2.1.4, pedimos que  $1 \leq s \leq n$ , o sea  $s \neq 0, n+1$ . La condición (d) de la definición de  $s$ -biflujo está de más en este caso, pues en el apice siempre habrá una marca interior 0 o  $n+1$ .

**3.1.16 Lema.** Supóngase que  $b_s, s \neq 0$ , es una fuente o sumidero en  $G_2$ , y  $\gamma$  es un  $s$ -biflujo bueno, o un  $s$ -lazo bueno, o un  $s$ -lazo doble bueno en  $G_1$ . Entonces en el interior de  $\gamma$  hay un  $s$ -biflujo o un  $s$ -lazo.

*Demostración.* Es similar a 2.3.9, 2.3.10 y 2.3.11. ■

**3.1.17 Lema.** Si  $b_s, s \neq 0$ , es una fuente o sumidero en  $G_2$  entonces en  $G_1$  no hay  $s$ -biflujos buenos, ni  $s$ -lazos buenos, ni  $s$ -lazos dobles buenos.

*Demostración.* Si hubiese uno de tales circuitos, podríamos encontrar uno de tales circuitos sin otro de ellos en su interior, pero esto contradiría 3.1.16. ■

**3.1.18 Lema.** Supóngase que  $b_s, s \neq 0$ , es una fuente o sumidero en  $G_2$  en el cual no hay lazos basados. Entonces en  $G_1$  hay un  $s$ -biflujo bueno, o un  $s$ -lazo bueno, o un  $s$ -lazo doble bueno.

*Demostración.* Es similar a 2.3.13. ■

Las contradicciones existentes entre 3.1.15, 3.1.17 y 3.1.18 completan la demostración del teorema 2. La demostración de este teorema es más simple que la del teorema 1 porque la gráfica  $G_2$  es más sencilla que las gráficas que aparecen en el capítulo anterior. Las pruebas de los teoremas 3 y 4 serán más sencillas todavía.

### 3.2 Más aplicaciones de argumentos combinatorios I.

#### 3.2.1 En esta sección probamos el teorema 3.

**Teorema 3.** Sea  $(B, t)$  un ovillo primo y  $(B', r_1)$ ,  $(B', r_2)$  dos ovillos racionales, sea  $k_i$  el nudo o enlace obtenido al sumar  $(B, t)$  y  $(B', r_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Si  $k_1$  es compuesto y  $k_2$  es un enlace separable, entonces  $d(r_1, r_2) \leq 1$ .

Supondremos nuevamente que el teorema es falso, y que por lo tanto existe un contraejemplo. Sea  $(B, t)$  un ovillo primo y  $(B', r_1)$  y  $(B', r_2)$  dos ovillos racionales tales que  $r = d(r_1, r_2) \geq 2$ . Sean  $k_1$  y  $k_2$  los nudos o enlaces obtenidos al sumar  $(B, t)$  con  $(B', r_1)$  y  $(B', r_2)$  respectivamente.

Supóngase que  $k_1$  es compuesto. Por lo tanto existe una esfera  $S$  que interseca transversalmente a  $k_1$  en dos puntos, tal que ninguna de las cerraduras de las componentes de  $S^3 - S^2$  interseca a  $k_1$  en un arco desanudado. Como en los casos anteriores podemos suponer lo siguiente:

- a) Las cuerdas de  $(B', r_1)$  están contenidas en  $\partial B'$ .
- b)  $S$  interseca a  $k_1$  sobre las cuerdas de  $(B, t)$ .
- c) Las intersecciones entre  $S$  y  $\partial B$  son todos círculos esenciales en  $\partial B - \{\text{cuerdas de } (B', r_1)\}$ , tal que cada uno de estos círculos es frontera de un disco en  $S$  que está propiamente encajado en  $B'$ .

De entre todas las esferas con estas propiedades tomemos una tal que el número de círculos de intersección entre ella y  $\partial B$  sea mínimo, sea esta esfera  $S_1$ .

Supóngase ahora que  $k_2$  es un enlace separable, entonces existe una esfera  $S$  ajena de  $k_2$  que separa las componentes de este enlace. Como antes supóngase que las cuerdas de  $(B', r_2)$  están contenidas en  $\partial B$ , y que las intersecciones entre  $S$  y  $\partial B$  son todos círculos esenciales en  $\partial B - \{\text{cuerdas de } (B', r_2)\}$  tal que cada uno de estos círculos es frontera de un disco en  $S$ , propiamente encajado en  $B'$ . De entre todas las esferas con estas

propiedades tómesese una que tenga un número mínimo de círculos de intersección con  $\partial B$ , sea esta  $S_2$ .

Sean ahora  $P_1 = S_1 \cap B$ ,  $P_2 = S_2 \cap B$ .  $P_1$  y  $P_2$  son superficies planares conexas.  $\partial P_1$  está formada de  $n$  círculos paralelos a  $hr_1(J)$ , denotados por  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , y numerados de modo que  $a_i$  y  $a_{i+1}$  sean frontera de un anillo esencial en  $\partial B - \{ \text{cuerdas de } (B', r_2) \}$  cuyo interior no intersecciona a  $S_1$ , para  $1 \leq i \leq n-1$ . Denotamos a los puntos de intersección entre  $P_1$  y  $k_1$  por  $a_+$  y  $a_-$ .  $\partial P_2$  está formada de  $m$  círculos, paralelos a  $hr_2(J)$ , denotados por  $b_1, \dots, b_m$ , y numerados como en  $P_1$ . El modo en que un  $a_i$  intersecciona a los  $b_j$ 's es similar a este de la sección 2.1.1 (ver figura 13). Marcamos a los puntos de intersección entre  $a_i$  y  $b_j$  por  $i$  en  $P_2$  y por  $j$  en  $P_1$ .

$P_1$  y  $P_2$  son incompresibles en  $B - \{ \text{cuerdas de } (B, t) \}$ . La prueba de esto es idéntica a la de 2.1.2. Por lo tanto podemos suponer que todos los círculos de intersección entre  $P_1$  y  $P_2$  son esenciales en ambas  $P_1 - \{a_+, a_-\}$  y  $P_2$ .

Construimos gráficas en  $S_1$  y  $S_2$  como antes; los vértices son los  $a_i$ 's y los  $b_j$ 's, y las aristas son los arcos de intersección entre  $P_1$  y  $P_2$ . Denotamos a las gráficas por  $G_1$  y  $G_2$ . Estas gráficas tienen los finales de las aristas marcados con un número, orientamos a las aristas al igual que en las secciones anteriores.

El interior de un circuito en  $G_1$  es la componente del complemento de este circuito que no contiene a  $a_-$ . Un circuito en  $G_1$  es bueno si no contiene en su interior a  $a_+$ . Tómesese un punto  $x \in P_2 - P_1$ , definimos el interior de un circuito en  $G_2$  como esta componente del complemento del circuito que no contiene al punto  $x$ .

3.2.2 Tenemos los siguientes hechos.

1)  $n > 0$ .

La prueba de esto es idéntica a 2.2.1.

2)  $m$  es impar.

Las cuerdas de  $(B', r_2)$  forman parte de distintas componentes de  $k_2$ ; podemos encontrar un arco contenido en  $\partial B$  que une estas dos cuerdas y que interseca transversalmente a  $S_2$  en exactamente  $m$  puntos, como  $S_2$  separa a  $S^3$  en dos partes y dicho arco une dos puntos que están en distintas de  $S^3 - S_2$ ,  $m$  debe ser impar.

3) Un lazo en  $G_2$  tiene vértices interiores.

La prueba de esto es igual a esta de 2.2.2.

4) Un lazo bueno en  $G_1$  tiene vértices interiores.

La prueba es idéntica a esta de 2.2.2, pero aquí el caso (b) no se presenta.

5)  $m > 1$ .

Si  $m = 1$  cualquier arista en  $G_2$  es un lazo, pero ninguno de estos lazos tiene vértices interiores, contradiciendo (3).

6) Un ciclo en  $G_2$  tiene vértices interiores.

La prueba es igual a ésta de 2.2.6.

7) Un ciclo bueno en  $G_1$  tiene vértices interiores.

Supóngase que hay un ciclo bueno en  $G_1$  sin vértices interiores, sea este  $\mu$ . Podemos suponer que no hay cuerdas en el interior de  $\mu$ , entonces un razonamiento análogo al del lema 2.2.6 nos muestra que la sucesión de marcas de  $\mu$  es  $i, i-1, \dots, i, i-1$ , para algún  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Considérese la unión de  $S_2$  (discos determinados por  $b_i$  y  $b_{i-1}$ ) y el anillo en  $\partial B$  determinado por  $b_i$  y  $b_{i-1}$ , esta unión es un toro. Al hacer cirugía sobre este toro con el disco determinado por el interior de  $\mu$ , obtenemos una nueva esfera  $S'$ , esta esfera tiene  $m-2$  círculos de intersección con  $\partial B$ , o sea un número impar, por lo que dicha esfera debe de separar a las componentes de  $k_2$ , lo que contradice la minimalidad de  $S_2$ . Luego todos los ciclos buenos en  $G_1$  tienen vértices interiores. Este argumento no lo podemos

hacer en el caso anterior, ni tampoco en 2.2.6, porque no podemos determinar si la nueva esfera que obtenemos separa al nudo en dos partes no triviales.

8) Hay una fuente o sumidero en  $G_2$  sin lazos.

Si  $G_2$  no tiene ciclos ni lazos, debe tener una fuente o sumidero, y dicho vértice no tiene lazos. Si  $G_2$  tiene ciclos o lazos, tómesese uno que no tenga a otro lazo o ciclo en su interior, sea este  $\gamma$ . Por (3) y (6)  $\gamma$  tiene vértices en su interior, y por 2.1.5 debe tener una fuente o sumidero en su interior, y debido a la elección de  $\gamma$  dicho vértice no tendrá vértices basados en él.

Los lemas 2.3.9, 2.3.10, 2.3.11 y 2.3.12 pueden ser aplicados sin dificultad en este caso. En estos lemas  $G_1$  juega el papel de  $G_a$  y  $G_2$  el de  $G_b$ . Con lo que queda probado el teorema 3. La prueba de este teorema es más fácil que la del teorema 1 debido a que en  $G_2$  no hay circuitos malos.

### 3.3 Más aplicaciones de argumentos combinatorios II.

3.3.1 En esta sección probamos el teorema 4.

**Teorema 4.** Sea  $(B, t)$  cualquier ovrillo y  $(B', r_1), (B', r_2)$  dos ovrillos racionales. Sea  $k_i$  el nudo o enlace obtenido al sumar  $(B, t)$  y  $(B', r_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Si  $k_1$  y  $k_2$  son enlaces separables entonces  $r_1 = r_2$ .

Nuevamente supondremos que el teorema es falso. Sea  $(B, t)$  cualquier ovrillo, y  $(B', r_1), (B', r_2)$  dos ovrillos racionales. Supóngase que sumando  $(B, t)$  y  $(B', r_i)$  nos resulta un enlace separable  $k_i$ . Como  $k_1$  y  $k_2$  son enlaces,  $r = d(r_1, r_2) \geq 2$  (ver 1.1.6). Usamos los índices  $a, b$  para denotar 1 o 2, como en el capítulo 2.

Como  $k_a$  es separable, existe una esfera  $S$  que no interseca a  $k_a$  y que separa las componentes de  $k_a$ . Como en las secciones anteriores podemos suponer lo siguiente: Las cuerdas de  $(B', r_a)$  están sobre  $\partial B$ ; las intersecciones entre  $S$  y  $\partial B$  son todos círculos esenciales en  $\partial B - \{ \text{cuerdas de } (B', r_a) \}$ , tal que cada uno de estos círculos es frontera de un disco en  $S$  que está propiamente encajado en  $B'$ . De entre todas las esferas con esas propiedades tómesese una que tenga un número mínimo de círculos de intersección con  $\partial B$ , sea esta  $S_a$ .

Sea  $P_a = S_a \cap B$ ,  $P_a$  es una superficie planar conexa.  $\partial P_a$  está formada por  $n_a$  círculos denotados por  $a_1, a_2, \dots, a_{n_a}$ , paralelos a  $hr_a(J)$ , numerados de modo que  $a_i$  y  $a_{i+1}$  sean frontera de un anillo esencial en  $\partial B - \{ \text{cuerdas de } (B', r_a) \}$ , ajeno de  $P_a$ , para  $1 \leq i \leq n_a - 1$ . Nuevamente podemos suponer que  $\#(a_i \cap b_j)$  es mínimo. El modo en que un  $a_i$  interseca a los  $b_j$ 's es similar a este de la sección 2.1.1 (ver figura 13). Marcamos a los puntos de intersección entre dos círculos como antes.

Un razonamiento análogo a este de 2.1.2 muestra que  $P_1$  y  $P_2$  son incompresibles en  $B - \{ \text{cuerdas de } (B, t) \}$ , por lo que podemos suponer que todos los círculos de intersección entre  $P_1$  y  $P_2$



son esenciales en ambas superficies.

Construimos una gráfica  $G_a$  en  $P_a$  como antes, orientamos a las aristas como en las secciones anteriores. Tómese un punto  $x \in P_a - P_b$ , definimos el interior de un circuito en  $G_a$  como la componente del complemento del circuito que no contiene al punto  $x$ . Como  $P_a$  no intersecta a  $k_a$  aquí no hay circuitos malos.

3.3.2 Tenemos los siguientes hechos.

1)  $n_a$  es impar.

La prueba a es igual a 3.2.2 (2).

2) Un lazo en  $G_a$  tiene vértices interiores.

La prueba es como la del lema 2.2.2, pero aquí el caso (b) no se presenta.

3)  $n_a > 1$ .

Es una consecuencia del caso (2).

4) Un ciclo en  $G_a$  tiene vértices interiores.

La prueba es igual a 3.2.2 (?).

5) En  $G_a$  hay una fuente o sumidero en el que no está basado ningún lazo.

La prueba es como en 3.2.2 (8).

supóngase que en  $G_a$  hay una fuente en la que no está basado ningún lazo, sea este  $a_i$ . Todas las aristas incidentes a  $a_i$  con marca 1 son niveladas, pues este vértice es una fuente. Por lo tanto en  $G_b$ ,  $b_i$  es la base de varios lazos orientados, todos ellos con una marca  $i$  (un lazo para cada marca  $i$ ), luego hay uno de esos lazos tal que en su interior no está contenido otro de estos mismos lazos, luego dicho lazo no tiene marcas  $i$  de  $b_i$  en su interior, o sea hay un  $i$ -lazo en  $G_b$ . Los lemas 2.3.9, 2.3.10, 2.3.12 se aplican también en este caso, por lo que llegamos a una contradicción y el teorema 4 queda probado.

Como se ve de la prueba de estos cuatro teoremas, el

resultado que se tiene que obtener para llegar a una contradicción en que en una de las gráficas haya una fuente o sumidero sin lazos.

## REFERENCIAS

- [B<sub>1</sub>] S.A. Bleiler, *Prime tangles and composite knots*, por aparecer.
- [B<sub>2</sub>] S.A. Bleiler, *Knots prime on many strings*, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 385-401.
- [BS<sub>1</sub>] S.A. Bleiler y M. Scharlemann, *Property P and strongly invertible knots*, preprint.
- [BS<sub>2</sub>] S.A. Bleiler y M. Scharlemann, *A projective plane in  $\mathbb{R}^4$  with three critical points is standard. Strongly invertible knots have property P*, preprint.
- [C] - J.H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, Oxford and New York, 1969, pp. 329-358.
- [CGLS] M. Culler, C. Gordon, J. Luecke, P. Shalen, *Dehn surgery on knots*, preprint.
- [Ga] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds II*, preprint.
- [GL] C. McA. Gordon y J. Luecke, *Only integral Dehn surgery can yield reducible manifolds*, preprint.
- [Go] J.C. Gómez Larrañaga, *Graphs of tangles*, Trans. Amer. Math. Soc. 286 (1984), 817-830.
- [H] J. Hempel, *3-manifolds*, Annals of Math. Studies 86, Princeton University Press, 1976.
- [KT] P.K. Kim y J.L. Tollefson, *Splitting the P.L. involutions of nonprime 3-manifolds*, Michigan Math. J. 27 (1980) 259-274.
- [L] W.B.R. Lickorish, *Prime knots and tangles*, Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), 321-332.

- [M<sub>1</sub>] J.M. Montesinos, *Varietades de Seifert que son recubridores cíclicos ramificados de dos hojas*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) 18 (1973), 1-32.
- [M<sub>2</sub>] J.M. Montesinos, *Surgery on links and double branched covers of S<sup>3</sup>*, Annals of Math. Studies 84, Princeton University Press, 1975, pp. 227-260.
- [R] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish, Berkeley, Calif., 1976.
- [S<sub>1</sub>] M. Scharlemann, *Smooth spheres in R<sup>4</sup> with four critical points are standard*, Invent. Math. 79 (1985), 125-141.
- [S<sub>2</sub>] M. Scharlemann, *Unknotting number one knots are prime*, Invent. Math. 82 (1985), 37-55.