Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

División de Estudios de Postgrado

"MEDIDAS VECTORIALES Y OPERADORES COMPACTOS"

T E S I S

para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS

P r e s e n t a :

José Luis Carballido Carranza

México, D. F. 1986

INDICE

CAPITULO I

- Teorema de Descomposición Primaria.................... 2
- Un Teorema de Descomposición para Operadores Definidos en Espacios de Dimensión Finita.................... 5

CAPITULO II

- Bases de Schauder....................................10
- Bases de Schauder Incondicionales....................14
- Ortogonatización de una Base de Schauder Mediante un Operador Continuo con Inverso Continuo...............18

CAPITULO III

- Operadores Compactos..................................19
- Una generalización del Teorema de Descomposición Primaria para Espacios de Banach Separables...........29
- Un Teorema de Descomposición para Operadores Compactos...42

CAPITULO IV

- Medidas Vectoriales...................................46
- El Espacio de Funciones Integrables con Respecto a una Medida Vectorial...............................46
- Medidas Básicas de Schauder...........................53
- Medidas Básicamente Distribuidas......................58

CAPITULO V

- Medidas Ortogonalmente distribuidas................65

- Teorema de Dilatación Ortogonal para Medidas con Valores en Espacios de Hilbert......................69

- Equivalencia entre Medidas Básicas de Schauder y Medidas Ortogonalmente Distribuidas en Espacios de Hilbert....................................80

CAPITULO VI

- Medidas Espectrales...............................83

- La Familia de Funciones Integrables Respecto de una Medida Espectral................................84

- Medidas Espectrales Ortogonalmente Distribuidas.....88

- Teorema de Wermer..................................93

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION

El objeto de este trabajo es dar algunas generalizaciones a espacios de dimension infinita de Tres resultados básicos del álgebra lineal:

1°) La descomposición de un espacio lineal complejo de dimensión finita en suma directa de los espacios propios generalizados definidos por los valores característicos de un operador.

2°) La descomposición de un operador definido en un espacio de dimensión finita, en una suma de dos operadores, uno de los cuales es nilpotente y el otro diagonal.

3°) La ortonormalización de una familia finita de vectores linealmente independientes en un espacio de dimensión finita por medio de un operador lineal continuo con inverso continuo.

Para esto definiremos los conceptos de operadores compactos, medidas vectoriales y medidas espectrales y estudiaremos algunas de sus propiedades.

Aprovecho estas líneas para agradecer a mi amigo José Luis Abreu su ayuda y paciencia para la elaboración de esta Tesis y en general a mis amigos que a lo largo de este trabajo supieron escucharme y darme consejos.

CAPITULO I

En este capítulo establecemos dos Teoremas de descomposición. En el primero expresamos un espacio lineal complejo finito-dimensional en términos de los espacios propis generalizados definidos por un operador.

En el segundo resultado descomponemos un operador definido sobre un espacio lineal complejo de dimensión finita como suma de dos operadores, uno de los cuales es diagonal y el otro nilpotente. Seguimos la presentación de Hirsch, Smale [1].

Dado un espacio vectorial complejo finito dimensional X y un operador $T : X \longrightarrow X$, denotamos el polinomio característico de T por:

$$P(T) = \prod_{k=1}^{r} (T - \lambda_K)^{n_k}$$

donde $\{\lambda_k\}_{k=1}^{r}$ son las raíces distintas de $P(T)$ y $n_k \geq 1$ es la multiplicidad de λ_k. Notemos que $\sum_{k=1}^{r} n_k = dim\ X$.

Recordemos que el espacio propio de T correspondiente a λ_k

es el subespacio $Ker(T - \lambda_k) \subset X$ donde λ_k denota el operador $\lambda_k I$.

Notemos que T es diagonizable si y sólo si X es la suma directa de los espacios propios.

Definimos el espacio propio generalizado de T correspondiente a λ_k como el subespacio:

$$(T, \lambda_k) = Ker(T - \lambda_k)^{n_k} \subset X$$

Observemos que este subespacio es invariante bajo T.

1.1 Teorema de descomposición primaria.

Sea X un espacio vectorial complejo de dimensión finita y sea $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal. Entonces X es la suma directa de los espacios propios generalizados de T, y la dimensión de cada espacio propio generalizado iguala la multiplicidad del valor propio correspondiente.

Dem.: Dividimos la demostración en dos proposiciones.

Definamos para cada $j \geq 0$ los subespacios siguientes

$K_j = Ker\ T^j$, $N = \bigcup_j K_j$

$I_j = R\ T^j$, $M = \bigcap_j I_j$ donde R denota el rango.

Es claro que: $\{0\} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset N$ y

$$X = L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset M$$

Sean n y m tales que $K_j = K_n \ \forall j > n$ y

$I_j = I_m \ \forall j > m$. La existencia de n y m está garantizada del hecho de que X es de dimensión finita.

Claramente N y M son invariantes bajo T.

Proposición 1. Con la notación anterior tenemos que $X = N \oplus M$

Dem.: Como $TM = I_{m+1} = M$, la restricción $T|_M$ es invertible También $T^n(M) = M$, por lo tanto $T^n x \neq 0 \ \forall x \in M - \{0\}$. Como $T^n(N) = 0$, tenemos que $N \cap M = \{0\}$. Sea $x \in X$ arbitrario, sea $T^m x = y \in M$. Como $T^m|_M$ es invertible tenemos que $T^m x = T^m z$ para algún $z \in M$. Pongamos $x = (x-z) + z$, entonces $x - z \in N$ y $z \in M$. //

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los valores propios distintos de T. Para cada λ_k definamos:

$$N_k = \bigcup_{j \geq 0} Ker(T - \lambda_k)^j \qquad M_k = \bigcap_{j \geq 0} R(T - \lambda_k)^j$$

Claramente, estos subespacios son invariantes bajo T.

Por la proposición anterior tenemos que $X = N_k \oplus M_k \ \forall K \in \{1, .., r\}$

Proposición 2: $X = N_1 \oplus, \ldots, \oplus N_r$.

Dem.: Usemos inducción sobre, $dim X = d$. El caso $d = 1$ es inmediato.

Supongamos que $d > 1$ y que la proposición es cierta para cualquier espacio de dimensión menor que d. En particular suponemos que la proposición es cierta para $T|_{M_1} : M_1 \rightarrow M_1$.

Por consiguiente es suficiente probar que los valores propios de $T|_{M_1}$ son $\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ y que $Ker(T - \lambda_k|_{M_1}) = Ker(T - \lambda_k)$.

Veamos primero que $Ker(T - \lambda_1|_{N_k}) = \{0\}$ si $k > 1$ (1).

Supongamos que $(T - \lambda_1)x = 0$ con $x \neq 0$ entonces: $Tx = \lambda_1 x$, por lo tanto $(T - \lambda_k)^j x = (\alpha_1 - \alpha_k)^j x \neq 0 \ \forall j > 0$.

Por consiguiente $x \notin N_k$.

Como N_k es invariante bajo $T - \lambda_1$, tenemos:
$(T - \lambda_1)N_k = N_k$ y por lo tanto:

$N_k \subset I_m(T - \lambda_1)^j \ \forall j > 0,\ k > 1$. Esto muestra que $N_k \subset M_1$ si $k > 1$.

Esto implica que $\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ son los valores propios de $T|_{M_1}$.

Probemos ahora el Teorema 1.1

Sea n_k la multiplicidad de λ_k como raiz del polinomio característico de T, por el mismo argumento que se usó en (1), se tiene que $T|_{N_k} : N_k \longrightarrow N_k$ tiene el único valor propio λ_k, y, de hecho, de la proposición 1 se desprende que λ_k tiene multiplicidad n_k como valor propio de $T|_{N_k}$. Así, el grado del polinomio característico de $T|_{N_k}$ es $n_k = dim\, N_k$.

Sólo resta probar que $(T, \lambda_k) = Ker(T - \lambda_k)^{n_k} = N_k$.

Por la definición de N_k tenemos que $(T,\lambda_k) \subset N_k$.

Probemos que $N_k \subset (T,\lambda_k)$.

Como $Ker(T - \lambda_k)^{s+1} = \{x \in X : (T - \lambda_k)((T - \lambda_k)^s x) = 0\}$ es claro que si $Ker(T - \lambda_k)^s = Ker(T - \lambda_k)^{s+1}$ entonces $Ker(T - \lambda_k)^{s+p} = Ker(T - \lambda_k)^s \quad \forall \; p \geq 1$.

Basta ver entonces que $Ker(T - \lambda_k)^{n_k} = Ker(T - \lambda_k)^{n_k+1}$. Sin pérdida de generalidad sea $x \in Ker(T - \lambda_1)^{n_1+1}$ y mostremos que $x \in Ker(T - \lambda_1)^{n_1}$.

Supongamos que $(T - \lambda_1)^{n_1}x \neq 0$, claramente $(T - \lambda_1)^{n_1}x \in N_1$.

Usando la proposición 2 $(T - \lambda_1)^{n_1}x \notin N_2$, en particular $(T - \lambda_2)^{n_2}(T - \lambda_1)^{n_1}x \neq 0$, y es claro que $(T - \lambda_2)^{n_2}(T - \lambda_1)^{n_1}x \in N_1$, por lo tanto $(T - \lambda_3)^{n_3}(T - \lambda_2)^{n_2}(T - \lambda_1)^{n_1}x \neq 0$.

Aplicando un número finito de veces el mismo paso llegamos a:
$\prod_{i=1}^{r} (T - \lambda_i)^{n_i}(x) = P(T)x \neq 0$.

Esto es una contradicción y así queda probado el Teorema 1.1.

Veamos lo que significa la descomposición del Teorema 1.1. Supongamos que $T : X \longrightarrow X$ tiene un sólo valor propio λ con multiplicidad $n = dim\, X$. El Teorema implica que $X = (T, \lambda)$. Sea $N = T - \lambda I$ y $S = \lambda I$ entonces:

$T = N + S$, $SN = NS$, S es diagonal (en cualquier base) y N es nilpotente, pues $X = Ker(T - \lambda)^n$.

1.2 *Teorema.* Sea X un espacio vectorial complejo finito-di mensional y $T : X \longrightarrow$ ■ un operador lineal. Entonces $T = S + N$ donde S es diagonal, N nilpotente y $NS = SN$. Además esta descomposición es única.

Dem.: Sea $T_k = T|_{(T,\lambda_k)}$ donde $\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$ son los valores propios de T, entonces: $T = T_1 \oplus \dots \oplus_k$.

Como cada T_k tiene un valor propio λ_k, aplicamos el resultado previo a cada T_k. Así:

$T_k = S_k + N_k$ donde $S_k, N_k : (T,\lambda_k) \longrightarrow (T,\lambda_i)$, $S_k = \lambda_k I$, $N_k = T_k - S_k$ sobre (T,λ_k) y N_k es nilpotente de orden n_k.

Tenemos entonces: $T = S + N$ donde $S = S_1 \oplus, \dots, \oplus S_r$, $N = N_1 \oplus, \dots, \oplus N_r$.

Claramente $SN = NS$, N es nilpotente pues si $m = m\acute{a}x\{n_1,\dots,n_r\}$ entonces $N^m = 0$. Además S es diagonalizado por una base la cual está formada de bases para los espacios propios generalizados.

Probemos la unicidad de la descomposición para lo cual necesitamos el siguiente lema:

1.3 Lema. Sea $F \subset X$ un subespacio propio invariante bajo T si T es diagonizable entonces $T|_F$ también lo es.

Dem.: Sean $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ los valores propios de T y $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ los valores propios de $T|_F$ $(s < n)$.

Supongamos que $T|_F$ no es diagonalizable, esto implica que $Ker(T|_F - \lambda_1) \oplus,\ldots,\oplus Ker(T|_F - \lambda_s)$ es un subespacio propio de F. De la proposición 1.1 y del hecho siguiente ya mencionado:

$Ker(T|_F - \lambda_i)^{s+1} = Ker(T|_F - \lambda_i)^s \Rightarrow Ker(T|_F - \lambda_i)^{s+k} =$
$= Ker(T|_F - \lambda_i)^s \quad \forall\, k > 1$. Se sigue que existe λ_i tal que:

$$Ker(T|_F - \lambda_i) \subsetneq Ker(T|_F - \lambda_i)^2.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que:

$$Ker(T|_F - \lambda_1) \subsetneq Ker(T|_F - \lambda_1)^2.$$

Sea $x \in F$ tal que $(T - \lambda_1)x \neq 0$ y $(T - \lambda_1)^2 x = 0$.

Sea $\{e_j^i\}_{j=1}^{n_i}$ una base para $Ker(T - \lambda_i)$ $i \in \{1,\ldots,r\}$.

Sea $x = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i e_j^i$, entonces existen $k \neq 1$ y $j > 1$ tales que $\alpha_j^k \neq 0$, de lo contrario $(T - \lambda_1)x = 0$, lo cual contradice la elección de x.

Tenemos entonces $(T - \lambda_1)^2 x = (T - \lambda_1)^2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i e_j^i =$

$$= (T - \lambda_1)^2 \sum_{i=2}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i e_j^i.$$

Ahora bien, como $Ker(T - \lambda_i) = <\{e_j^i\}>$ es invariante bajo $T - \lambda_1$ $\forall\, i \neq 1$, como $Ker(T - \lambda_k) \cap (T - \lambda_i) = \{0\}$ (Obsérvese que $Ker(T - \lambda_k)^j = Ker(T - \lambda_k)$ $\forall\, j > 1$ $k \in \{1,\ldots,r\}$ pues T es diagonalizable), y como $\alpha_j^k \neq 0$ para $k \neq 1$

tenemos que $(T - \lambda_1)^2 x \neq 0$ lo cual es una contradicción.

Probemos la unicidad.

Si T tiene sólo un valor propio λ entonces $X = Ker(T - \lambda)^n$ donde $n = dim\ X$. Pongamos $N = T - \lambda I$, $S = \lambda I$ claramente S es diagonal en cualquier base y N es nilpotente. Si $T = N' + S'$ donde S' es diagonal respecto de una base B entonces:

$T = N' + S' = N_B + S$ donde N_B es la matriz de N con respecto a la base B.

Por consiguiente $N' - N_B = S - S'$ está representado por una matriz diagonal y nilpotente, concluimos entonces que $S = S'$ $N' = N_B$.

En el caso general, sean $X_k = Ker(T - \lambda_k)^{n_k}$ los espacios propios generalizados, $k = \{1,\ldots,r\}$. Entonces $X = X_1 \oplus,\ldots,\oplus X_r$ $T = T_1 \oplus,\ldots,\oplus T_r$ donde $T_k = T|_{X_k}$.

Notemos que X_k es invariante bajo todo operador que conmuta con T por lo tanto es invariante bajo S y N.

Sea $S_k = \lambda_k I|_{X_k}$ y $N_k = T_k - S_k$.

Es suficiente probar que $S|_{X_k} = S_k$, pues entonces $N|_{X_k} = N_k$, probando así la unicidad de S y N.

Como S es diagonizable, $S|_{X_k}$ también lo es por el lema 3.

Por lo tanto $S|_{X_k} - S_k$ es diagonizable. Ahora, como $T|_{X_k} = S + N|_{X_k} = S_k + N_k$ se sigue que $S|_{X_k} - S_k = N_k - N|_{X_k}$. Como $N|_{X_k}$ conmuta con $\lambda_k I$ y con T_k, también conmuta con N_k. Por lo tanto $N_k - N|_{X_k}$ es nilpotente. Así $S|_{X_k} - S_k$ está representado por una matriz diagonal nilpotente, de esto concluimos que $S|_{X_k} = S_k$. Esto termina la demostración.

CAPITULO II

BASES DE SCHAUDER

Dado un espacio de Hilbert H, de dimensión finita y una base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ existe un operador $T : H \longrightarrow H$ lineal acotado con un inverso acotado tal que $\{T(e_i)\}_{i=1}^n$ es una base ortonormal de H. En este capítulo generalizamos este resultado a espacios de Hilbert infinito dimensionales y separables. Para esto necesitamos introducir el concepto de base de schauder.

2.1 *Definición.* Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach real o complejo. Una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ es una base de schauder de X si para todo $x \in X$ hay una única sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$$

Una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ la cual es una base de schauder para la cerradura del espacio que genera $\overline{<\{x_n\}>}$, se llama una sucesión básica.

Observemos, que al definir una base de schauder se tiene que especificar el orden de los vectores y no sólo el conjunto.

Notemos también que si un espacio de Banach tiene una base de schauder, entonces dicho espacio es separable.

De aquí en adelante, por base entenderemos base de schauder. Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach con una base $(X_n)_{n=1}^{\infty}$.

Es claro que si $X = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ entonces la expresión

$|||X||| = \sup_n \| \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \|$ es finita.

No es difícil comprobar que $||| \ ||| : X \to \mathbb{R}$ es una norma tal que $(X, ||| \ |||)$ es un espacio de Banach y $|||X||| \geq \|X\| \quad \forall\, x \in X$.

De esto y haciendo uso del Teorema del mapeo abierto se desprende que las normas $||| \ |||$, $\| \ \|$ son equivalentes.

2.2 *Teorema.* Sea X un espacio de Banach con una base $(X_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces las proyecciones $P_n : X \to X$ definidas por $P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ son operadores lineales acotados y $\sup_n \|P_n\| < \infty$.

La demostración es inmediata de las consideraciones anteriores.

2.3 *Definición.* Con la notación del Teorema 2.2 el número $\sup_n \|P_n\|$ se llama la constante básica de la base $(X_n)_{n=1}^{\infty}$.

Esta constante jugará un papel muy importante a lo largo de nuestro trabajo.

2.4 Teorema. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de schauder de X si y sólo si las siguientes tres condiciones se cumplen

i) $X_n \neq 0 \quad \forall \; n$

ii) Existe una constante $K > 0$ tal que para cualquier elección de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $n < m \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\| < K\|\sum_{i=1}^{m} a_i X_i\|$$

iii) La cerradura del espacio lineal generado por $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es X.

Dem.: $\Rightarrow$) Es claro de la definición de base que i), iii) se cumplen. Que ii) se cumple se sigue el Teorema 2.2, de hecho la mínima constante K es $\sup_n \|P_n\|$.

$\Leftarrow$) De i), ii) se sigue que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n = 0$ entonces $a_n = 0$ $\forall \; n \in \mathbb{N}$, probando así la unicidad de la expansión en términos de $\{X_n\}$.

Probemos ahora que todo elemento de X se puede expresar como una suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$.

En virtud de iii) basta probar que el conjunto de elementos de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ es cerrado.

Sea $\{X^J\}_{J=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy con $X^J = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^J X_n$.

Sea $S \in N$ y $\epsilon > 0$ fijos entonces existe $N \in N$ tal que $\forall\ J, J' > N$ tenemos

$$\left\| \sum_{n=1}^{S} a_n^J X_n - \sum_{n=1}^{S} a_n^{J'} X_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{S+r} a_n^J X_n - \sum_{n=1}^{S+r} a_n^{J'} X_n \right\| \quad \forall\ r \in N.$$

Por lo tanto $\left\| \sum_{n=1}^{S} a_n^J X_n - \sum_{n=1}^{S} a_n^{J'} X_n \right\| \leq K\epsilon$, entonces para cada $S \in N$, $\{\sum_{n=1}^{S} a_n^J X_n\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. De esto se deduce que $(a_n^J)_{J=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy para $n \in N$ fija.

Aquí hemos usado el hecho de que convergencia en norma implica convergencia de los coeficientes.

Sea $a_n = \lim_{J\to\infty} a_n^J \ \forall\ n \in N$, entonces es fácil ver que

$$\left\| X^J - \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n \right\| \xrightarrow[J\to\infty]{} 0 \qquad //$$

Observemos que las condiciones i, ii) del Teorema 2.4 son necesarias y suficientes para que una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea una sucesión básica.

Ejemplos de bases de schauder.

Los vectores canónicos $e_n = (0,\ldots,0,1,\ldots)$ con la unidad en la n-sima entrada forman una base en los espacios C_o, ℓ_p. $1 \leq p < \infty$ y tiene constante básica 1.

Un ejemplo de una base en el espacio C de sucesiones convergentes, está dado por:

$X_1 = (1,1,\ldots)$ y para $n > 1$ $x_n = e_{n-1}$.

La expansión de $X = (a_1, a_2, \ldots\ldots) \in C$ con respecto a esta base es $x = \alpha x_1 + (a_1 - \alpha)x_2 + (a_2 - \alpha)x_3 + \ldots\ldots$ donde $\alpha = \lim_{i\to\infty} a_i$.

Un importante ejemplo de una base de schauder es el sistema de Haar en $L_p(0,1)$ $1 < p < \infty$ definido como sigue: $\eta_1(t) = 1$ y para $K = 0,1,\ldots,$ $\ell = 1,2,\ldots,2^k$

$$\eta_{2^k+\ell}(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [(2\ell-2)2^{-k-1}, (2\ell-1)2^{-k-1}] \\ -1 & \text{si } t \in [(2\ell-1)2^{-k-1}, 2\ell-2^{-k-1}] \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

(Ver Lindestrauss, Tzafriri [1]).

2.5 *Definición.* Sea X un espacio de Banach y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de X. Decimos que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es incondicional si para cada $X = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ la convergencia de su serie es incondicional, esto es, dada $\in > 0$ existe un conjunto finito $F \subset N$ tal que si $F \subset S$ entonces $\| X - \sum_{n\in S} a_n X_n \| < \in$.

Notemos que bases ortonormales en espacios de Hilbert separables son bases incondicionales.

2.6 Teorema. Sea X un espacio de Banach y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base incondicional, entonces existe una constante $K > 0$ tal que siempre que, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ converja incondiconalmente y $|b_n| \leq |a_n|$ $\forall\, n \in N$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n$ converge incondicionalmente y $\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n \| \leq K \| \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n \|$.

La demostración de este resultado quedará incluida en el capítulo sobre medidas básicas de schauder, donde presentamos un hecho más general (ver también Lindestrauss y Tzafriri [1])

Nos proponemos ahora, dar un resultado que generaliza el resultado mencionado al principio del capítulo.

Necesitamos dos lemas.

2.7 Lema. Sean $X_1,\ldots,X_n$ vectores en un espacio de Hilbert complejo, entonces:

$$\inf_{|C_k|=1} \| \sum_{k=1}^{n} C_k X_k \|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \| X_k \|^2 \leq \sup_{|C_k|=1} \| \sum_{k=1}^{n} C_k X_k \|^2$$

donde el ínfimo y el supremo son tomados sobre todas las n-adas de números complejos $(C_1,\ldots,C_n)$ con $|C_k| = 1$ $\forall\, K \in \{1,\ldots,n\}$.

Dem.: Observemos primero que para cualesquiera dos vectores $x,y \in H$, si $\|x-y\| \leq \|x+y\|$ entonces $\|x+y\| \geq \|x\|^2 + \|y\|^2$ y si $\|x-y\| \geq \|x+y\|$ entonces $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$. Sean $a_1 = b_1 = 1$ y $a_2, b_2 \in \mathbb{C}$ con $\|a_2\| = \|b_2\| = 1$ y tales que $\|a_1 X_1 + a_2 X_2\| \leq \|a_1 X_1 + CX_2\|$ y

$\| b_1 X_1 + C X_2 \| < \| b_1 X_1 + b_2 x_2 \|$ para toda $c \in \mathbb{C}$ con $\| C \| = 1$.

Procedemos inductivamente hasta tener definidos $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ con $\| a_n \| = \| b_n \| = 1$ y tales que:

$$\| \sum_{k=1}^{n} a_k X_k \| < \| \sum_{k=1}^{n-1} a_k X_k + C X_n \| \quad y \quad \| \sum_{k=1}^{n-1} b_k X_k + C X_n \| <$$

$$< \| \sum_{k=1}^{n} b_k X_k \| \quad \forall\, C \in \mathbb{C} \text{ con } \| C \| = 1$$

Usando repetidamente la observación al comienzo de la demostración, obtenemos:

$$\| \sum_{k=1}^{n} a_k X_k \|^2 < \| \sum_{k=1}^{n-1} a_k X_k \|^2 + \| X_n \|^2 < \ldots < \sum_{k=1}^{n} \| X_k \|^2 <$$

$$< \ldots < \| \sum_{k=1}^{n-1} b_k X_k \|^2 + \| X_n \|^2 < \| \sum_{k=1}^{n} b_k X_k \|^2 .$$

Esto prueba el lema.

2.8 Lema. Sea H un espacio de Hilbert y $\{X_n\}$ una base de schauder de H. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ converge incondicionalmente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \| X_n \|^2 < \infty$.

Además si K es la constante del Teorema 2.6, entonces:

$$\frac{1}{K^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \| X_n \|^2 < \| \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n \|^2 < K^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \| X_n \|^2 .$$

Dem.: Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Para cualquier conjunto finito de índices, tenemos usando 2.7:

$$\inf_{|c_n| = 1} \| \sum_{n \in F} c_n a_n X_n \|^2 < \sum_{n \in F} |a_n|^2 \| X_n \|^2 < \sup_{|c_n| = 1} \| \sum_{n \in F} c_n a_n X_n \|^2 .$$

Del Teorema 2.6 se sigue que:

$$\frac{1}{K^2} \sup_{|c_n|=1} \| \sum_{n\in F} c_n a_n X_n \|^2 < \| \sum_{n\in F} a_n X_n \|^2 < K^2 \inf_{|c_n|=1} \| \sum_{n\in F} c_n a_n X_n \|^2 .$$

Combinando los dos renglones de desigualdades de arriba obtenemos:

$$\frac{1}{K^2} \sum_{n\in F} |a_n|^2 \| X_n \|^2 < \| \sum_{n\in F} a_n X_n \|^2 < K^2 \sum_{n\in F} |a_n|^2 \| X_n \|^2 \qquad (1)$$

para toda familia finita F de índices. Por lo tanto si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ converge se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \| X_n \|^2 < \infty$.

Inversamente si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \| X_n \|^2 < \infty$. Dado $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito F tal que $\sum_{n\notin F} |a_n|^2 \| X_n \|^2 < \epsilon/K^2$.

Dados dos conjuntos finitos F', F'' tales que $F \subset F' \cap F''$ tenemos, aplicando (1):

$$\| \sum_{n\in F'} a_n X_n - \sum_{n\in F''} a_n X_n \|^2 = \| \sum_{n\in F'-F''} a_n X_n + \sum_{n\in F''-F'} (-a_n) X_n \|^2 <$$

$$< K^2 \sum_{n\in F' \Delta F''} |a_n|^2 \| X_n \|^2 < \epsilon$$

Esto prueba que la familia $\{ \sum_{n\in F} a_n X_n : F \text{ finito} \}$ es un filtro de Cauchy y por lo tanto tiene un límite $X = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ donde la serie converge incondicionalmente. Esto prueba el lema 2.8.

2.9 *Teorema.* Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base incondicional en un espacio de Hilbert H. Entonces X_n es la imagen bajo un operador lineal acotado A con un inverso acotado de una base ortogonal $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ de H.

Dem.: Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal para H. Definimos $r_n = \|X_n\| e_n$. Para cualquier $X \in H$, $X = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n$ para una única sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell$.

Definamos $AX = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$.

A está bien definido, pues según el lema 2.8 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ converge incondicionalmente si y sólo si

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|X_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|r_n\|^2 < \infty$. También, del hecho de que

$\{X_n\}$ es una base se sigue que A es uno a uno y sobre. Además como $AX = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$, $\|X\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|X_n\|^2$ se sigue del lema

2.8 que:

$$\frac{1}{K^2}\|X\|^2 < \|AX\|^2 < K^2 \|X\|^2$$

Esto prueba el Teorema.

CAPITULO III

En este capítulo generalizamos los Teoremas 1.1 y 1.2 del Capítulo Primero a operadores compactos definidos en espacios de Banach separables complejos.

3.1 Definición. Sean X, Y espacios lineales normados. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ es compacto, si para cada conjunto acotado $B \subset X$, $T(B)$ es relativamente compacto.

Observemos que, como Y es un espacio métrico, T es compacto si y sólo si para cada sucesión acotada $(x_n) \subset X$, la sucesión $(T(x_n))_n$ contiene una subsucesión convergente.

Notemos que el operador identidad sobre un espacio normado X es compacto si y solo si X es finito dimensional, pues la bola unitaria es compacta si y solo si el espacio es de dimensión finita. De manera más general, supongamos que $P : X \longrightarrow X$ es una proyección, es decir, $P^2 = P$. Si P es compacto, $Im(P)$ es de dimensión finita debido a que P es la identidad sobre $Im(P)$.

El recíproco es también cierto, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal tal que $Im(T)$ es de dimensión finita, entonces T es compacto, pues la imagen de la bola unitaria es un conjunto acotado y por lo tanto es relativamente compacto. Estos operadores se llaman operadores de rango finito o degenerados.

Establecemos ahora algunas propiedades de los operadores compactos. Denotemos por T_λ al operador $T - \lambda I$ donde $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ y por $Ker(T_\lambda)$ el núcleo de T_λ.

3.2 Teorema. Sea X un espacio lineal normado y $T : X \longrightarrow Y$ un operador compacto, si $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ entonces $Ker(T_\lambda^n)$ es de dimensión finita para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dem.: Sea $n = 1$. Si $X \in Ker(T_\lambda)$ entonces $X = \lambda^{-1}TX$. Por lo tanto $\lambda^{-1}T$ es la identidad sobre $Ker(T_\lambda)$. Consecuentemente la bola unitaria en $Ker(T_\lambda)$ es compacta. Se desprende que $dim\, Ker(T_\lambda) < \infty$.

Si $n > 1$ escribimos $T_\lambda^n = (T - \lambda)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^{n-k}(-\lambda)^k =$ $= (-1)^n\lambda^n + A$ donde A es un operador compacto pues el producto de dos operadores continuos es compacto si al menos uno de los factores es compacto.

El razonamiento para $n = 1$ aplicado a $(-1)^n\lambda^n + A$ muestra que $Ker(T_\lambda^n)$ es de dimensión finita. //

3.3 *Teorema.* Sea M cualquier subespacio cerrado de un espacio lineal normado X tal que $M \cap Ker(T_\lambda) = 0$ donde $T : X \longrightarrow X$ es compacto y $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Entonces la restricción de T_λ a M tiene un inverso acotado y $T_\lambda(M)$ es cerrado en X.

Dem.: Supongamos que la restricción no tiene un inverso continuo definido en $T_\lambda(M)$. Entonces existe una sucesión $\{X_n\} \subset M$ tal que $\|X_n\| = 1$ y $T_\lambda X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Como T es compacto, existe una subsucesión $\{X_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{TX_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge. Como $X_{n_k} = \lambda^{-1}(TX_{n_k} - T_\lambda X_{n_k})$.

Tenemos que $\{X_{n_k}\}$ converge a un $X \in M$, pues M es cerrado. Entonces $0 = \lim T_\lambda X_k = T_\lambda X$.

Esto es absurdo pues T_λ es uno a uno y $\|X\| = 1$. Por lo tanto T_λ restringido a M tiene un inverso acotado.

Supongamos ahora que $Y \in \overline{T_\lambda(M)}$ y $T_\lambda X_n \longrightarrow Y$ para alguna sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$. Se sigue de la primera parte del Teorema que $\{X_n\}$ es acotado. Entonces existe una subsucesión $\{X_{n_k}\}$ tal que Tx_{n_k} converge.

Como $X_{n_k} = \lambda^{-1}(TX_{n_k} - T_\lambda X_{n_k})$, se sigue que X_{n_k} converge a algún $X \in M$. Por lo tanto $Y = \lim_{k\to\infty} T_\lambda X_{n_k} = T_\lambda X \in T_\lambda M$. Por lo tanto $T_\lambda M$ es cerrado. //

3.4 *Lema.* Sea X un espacio normado y P una proyección con tinua sobre X. Entonces el rango $R(P)$ y el núcleo $Ker(P)$ de P son cerrados.

Dem.: Como $\{0\}$ es cerrado su imagen inversa es cerrada, es decir $Ker(P)$ es cerrado, similarmente, $R(P)$ es el espacio nulo de $I - P$. //

3.5 *Lema.* Sea X un espacio de Banach y M_1, M_2 subespacios cerrados tales que $X = M_1 \oplus M_2$. Entonces la proyección P de X sobre M_1 a lo largo de M_2 es continua.

Dem.: Por el Teorema de la gráfica cerrada es suficiente probar que P es un operador cerrado.

Supongamos que $X_n \longrightarrow X$ y $PX_n \longrightarrow Y$ cuando $n \to \infty$. Entonces $X_n - PX_n \to x - Y$. Como $PX_n \in M_1$ y $X_n - PX_n \in M_2$, se sigue que $Y \in M_1$ y $X - Y \in M_2 = Ker(P)$. Entonces $PX - PY = 0$ y $PX = PY = Y$. Así que P es cerrado. //

3.6 *Teorema.* Sea X un espacio lineal normado y $M \subset X$ un subespacio de dimensión finita. Entonces existe una proyección continua de X sobre M.

Dem.: Sea $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ una base para M y sea M_J el subespacio generado por $\{X_i\}_{i=1}^{n} - \{X_J\}$ $J \in \{1,...,n\}$.

Cada M_J es cerrado. Por el Teorema de Hahn-Banach existe $x_J' \in X'$ (El espacio dual) tal que $X_J'(X_J) = 1$ y $X_J'(X) = 0$ $\forall\, X \in M_J$. Entonces el operador P definido por:

$P(X) = \sum_{j=1}^{n} X_j'(X)X_j$ es una proyección continua de X sobre M. //

3.7 *Teorema.* Sea X un espacio lineal normado y $T : X \longrightarrow X$ un operador compacto. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, el rango $R(T_\lambda^n)$ es cerrado.

Dem.: Igual que en el Teorema 3.2 basta hacerlo para $n = 1$. Sea M como en el Teorema 3.3 tal que $X = M \oplus Ker(T_\lambda)$ (M existe por el Teorema 3.6 y ya que $dim\ Ker(T_\lambda) < \infty$). Entonces $R(T_\lambda) = T_\lambda(M)$ el cual es cerrado. //

Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador cualquiera en un espacio lineal, entonces $Ker(T^{n+1}) = \{X \in X : TX \in Ker(T^n)\}$ y

$$R(T^{n+1}) = T(R(T^n)) \text{ donde } R \text{ denota el rango.}$$

Es claro de las igualdades anteriores que si $Ker(T^n) = Ker(T^{n+1})$ entonces $Ker(T^{n+k}) = Ker(T^n)$ para todo $K \in \mathbb{N}$ y análogamente con el rango.

Denotemos por $D(T)$ el dominio de T.

3.8 *Definición.* Denotamos por $\alpha(T)$ el entero q más pequeño tal que $Ker(T^q) = Ker(T^{q+1})$ y por $\delta(T)$ al entero p más pequeño tal que $R(T^p) = R(T^{p+1})$. Ambos pueden ser infinitos.

3.9 *Teorema.* Sea X un espacio lineal y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal. Supongamos que $\alpha(T)$, $\delta(T) < \infty$ entonces $\alpha(T) = \delta(T) = p$ y $X = R(T^p) \oplus Ker(T^p)$.

Dem.: Sea $J > 1$ fijo y sea $p = \alpha(T)$.

Si $X \in R(T^p) \cap Ker(T^j)$, entonces $X = T^p v$ para algún $v \in \mathfrak{X}$ y $0 = T^j X = T^{p+j} v$. Así $v \in Ker(T^{p+j}) = Ker(T^p)$.

Esto muestra que $x = T^p v = 0$ y así $R(T^p) \cap Ker(T^j) = \{0\}$ para $j = 1, 2, \ldots$ (1)

Ahora si $q = \delta(T)$, para $X \in D(T^q)$ tenemos:
$T^q X \in R(T^q) = R(T^{q+j})$. Entonces $T^q X = T^{q+j} v$ para algún v, por consiguiente $0 = T^q(X - T^j v)$.

Así $X = T^j v + (X - T^j v) \in R(T^j) + Ker(T^q)$

Esto prueba que $D(T^q) \in R(T^j) + Ker(T^q)$ $j = 1, 2, \ldots$ (2)
Si $X \in Ker(T^{q+1}) \subset D(T^q)$, de (2) podemos escribir $X = X_1 + X_2$, con $X_1 \in R(T^p)$, $x_2 \in Ker(T^q)$

De aquí que: $X_1 = X - X_2 \in Ker(T^{q+1}) + Ker(T^q) = Ker(T^{q+1})$.

En virtud de (1) esto implica que $X_1 = 0$ y $X = X_2 \in Ker(T^q)$
Así, $Ker(T^{q+1}) = Ker(T^q)$, lo cual muestra que $p = \alpha(T) \leq q$.
De (2) se sigue que $\mathfrak{X} = R(T^j) + Ker(T^q)$ $j = 1, 2, \ldots$

Tomando $j = q$ en (1) y $j = p$ en la igualdad de arriba tenemos que $\mathfrak{X} = R(T^p) \oplus Ker(T^q)$.
De las dos últimas igualdades es claro que $R(T^j)$ no puede ser un subconjunto propio de $R(T^p)$ para $j \geq 1$. Por lo tanto $q = \delta(T) \leq p$. Así $p = q$//.

Presentamos ahora un lema muy útil cuya prueba omitimos (ver Taylor, Lay [1]).

3.10 Lema de Riesz. Sea X un espacio lineal normado. Sea $X_0 \subset X$ un subespacio propio cerrado. Entonces para cada $0 < \theta < 1$ existe $x_\theta \in X$ con $\|x_\theta\| = 1$ y $\|x - x_\theta\| > \theta$ si $x \in X_0$.

3.11 Teorema. Sea X un espacio lineal normado, y sea $T : X \to X$ compacto. Entonces para $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tenemos que $\alpha(T\lambda) = \delta(T\lambda) = p < \infty$. Además $X = R(T_\lambda^p) \oplus Ker(T_\lambda^p)$ y ambos subespacios son cerrados.

Dem.: Supongamos que $\alpha(T - \lambda) = \infty$. Entonces $Ker(T_\lambda^{n-1})$ es un subespacio propio cerrado de $Ker(T_\lambda^n)$ para $n = 1,2,\ldots$ Por el lema 3.10 existe $x_n \in Ker(T_\lambda^n)$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|x_n - x\| > \frac{1}{2}$ si $x \in Ker(T_\lambda^{n-1})$.

Si $m < n$, entonces:

$$Tx_n - Tx_m = \lambda x_n - (\lambda x_m - T_\lambda x_n + T_\lambda x_m) = \lambda x_n - z$$

con $z \in Ker(T_\lambda^{n-1})$ (pues $m \le n-1$). Entonces:

$$\|Tx_n - Tx_m\| = |\lambda|\,\|x_n - \lambda^{-1}z\| > \frac{|\lambda|}{2} > 0.$$

Esto muestra que $\{Tx_n\}$ no tiene subsucesión convergente, contradiciendo el hecho de que T es compacto.

Así $\alpha(T - \lambda) < \infty$. La demostración de que $\delta(T - \lambda) < \infty$ es similar. El resto del Teorema se sigue de los teoremas 3.9 y 3.7 //.

El siguiente resultado es importante en la Teoría de operadores compactos. Para una demostración, ver por ejemplo Taylor,Lay [1].

3.12 *Teorema.* Sea X un espacio lineal normado, y sea $T : X \to X$ compacto. Entonces el espectro de T, $\sigma(T)$ contiene a lo más una familia numerable de puntos y no tiene puntos de acumulación excepto posiblemente el cero. Cada punto diferente de cero en el espectro es un valor propio.

Observación: Si X es de dimensión infinita entonces el cero está en el espectro de T, de lo contrario $TT^{-1} = I$ y el operador identidad sería compacto lo cual no es cierto.

Dado un espacio lineal normado X y $T : X \to X$ compacto con espectro $\sigma(T)$, entonces para $\lambda \in \sigma(T) - \{0\}$ tenemos que $X = R(T_\lambda^p) \oplus Ker(T_\lambda^p)$ donde $p = \alpha(T_\lambda) = \delta(T_\lambda)$.

Intentamos ahora dar una descomposición más parecida a la del Teorema de descomposición primaria (Teorema 1.1) para operadores compactos.

Sea $T : X \to X$ un operador compacto y supongamos que el espectro $\sigma(T)$ es infinito, $\sigma(T) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{0\}$ donde $\lambda_i \neq 0 \;\; \forall\, i \in \mathbb{N}$ y además, por el Teorema 3.12 $\lambda_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$

Sabemos que $X = R(T_{\lambda_1}^{p_1}) \oplus Ker(T_{\lambda_1}^{p_1})$.

Veamos primero que $Ker(T_{\lambda_2}^{p_2}) \subset R(T_{\lambda_1}^{p_1})$, para lo cual es suficiente probar que $T_{\lambda_1}(Ker(T_{\lambda_2}^{p_2})) = Ker(T_{\lambda_2}^{p_2})$.

Como T_{λ_1} y $T_{\lambda_2}^{p_2}$ conmutan, es claro que $T_{\lambda_1}(Ker(T_{\lambda_2}^{p_2})) \subset$ $\subset Ker(T_{\lambda_2}^{p_2})$, por lo tanto es suficiente ver que T_{λ_1} restringido a $Ker(T_{\lambda_2}^{p_2})$ es inyectivo.

Sea X tal que $T_{\lambda_1}(X) = 0$, entonces $(T-\lambda_2)X = (\lambda_1 - \lambda_2)X$ de esto se sigue que $T_{\lambda_2}^{J} X \neq 0 \quad \forall\, J \geq 1$ y por lo tanto la restricción de T_{λ_1} a $Ker(T_{\lambda_2}^{p_2})$ es inyectiva.

De lo anterior se desprende que el conjunto de valores propios diferentes de cero de la restricción de T a $R(T_{\lambda_1}^{p_1})$ es $(\lambda_i)_{i=2}^{\infty}$. Denotando por T^1 dicha restricción, no es difícil probar que $\alpha(T_{\lambda_k}^1) = \alpha(T_{\lambda_k}) = p_k$ y $\delta(T_{\lambda_k}^1) = \delta(T_{\lambda_k}) = p_k$ para $k > 1$.

Del Teorema 3.11 obtenemos:

$R(T_{\lambda_1}^{p_1}) = R(T_{\lambda_k}^{1\,p_k}) \oplus Ker(T_{\lambda_k}^{1\,p_k})$ para $k > 1$ (1)

Y de las consideraciones anteriores concluímos que:

$$Ker(T_{\lambda_k}^{1\,p_k}) = Ker(T_{\lambda_k}^{p_k}) \quad (2)$$

probemos ahora que $R(T_{\lambda_k}^{1\,p_k}) = R(T_{\lambda_1}^{p_1}) \cap R(T_{\lambda_k}^{p_k})$ para $k > 1$

Si $y \in R(T_{\lambda_k}^{1\,p_k})$ entonces para algún $x \in X$ tenemos que $y = (T^1 - \lambda_k)^{p_k}(X)$, esto es, $y = (T - \lambda_k)^{p_k}(X)$ donde $X \in R(T_{\lambda_1}^{p_1})$ y por lo tanto $X = T_{\lambda_1}^{p_1} z$ para algún z.

Como $T_{\lambda_k}^{p_k}$ y $T_{\lambda_1}^{p_1}$ conmutan, se sigue que:

$y \in R(T_{\lambda_1}^{p_1}) \cap R(T_{\lambda_k}^{p_k})$.

Ahora sea $y \in R(T_{\lambda_1}^{p_1}) \cap R(T_{\lambda_k}^{p_k})$ entonces:

$y = T_{\lambda_1}^{p_1} x_1 = T_{\lambda_k}^{p_k} x_k$ con $x_1, x_k \in X$.

como $X = R(T_{\lambda_1}^{p_1}) \oplus Ker(T_{\lambda_1}^{p_1})$ tenemos que $x_k = z + z'$

con $z \in R(T_{\lambda_1}^{p_1})$ $z' \in Ker(T_{\lambda_1}^{p_1})$

Así $y = T_{\lambda_1}^{p_1}(x_1) = T_{\lambda_k}^{p_k}(z) + T_{\lambda_k}^{p_k}(z')$

Ahora, como $R(T_{\lambda_1}^{p_1})$, $Ker(T_{\lambda_1}^{p_1})$ son invariantes bajo $T_{\lambda_k}^{p_k}$ tenemos que $T_{\lambda_k}^{p_k}(z) \in R(T_{\lambda_1}^{p_1})$, $T_{\lambda_k}^{p_k}(z') \in Ker(T_{\lambda_1}^{p_1})$ y

$y = T_{\lambda_1}^{p_1}x_1 \in R(T_{\lambda_1}^{p_1})$ y como y debe tener una única descomposición en $X = R(T_{\lambda_1}^{p_1}) \oplus Ker(T_{\lambda_1}^{p_1})$ concluímos que $T_{\lambda_k}^{p_k} z' = 0$.

Así $y = T_{\lambda_k}^{p_k} z$ con $z \in R(T_{\lambda_1}^{p_1})$.

Por lo tanto $y \in R(T_{\lambda_k}^{1\,p_k})$. Esto prueba que:

$$R(T_{\lambda_k}^{1\,p_k}) = R(T_{\lambda_1}^{p_1}) \cap R(T_{\lambda_k}^{p_k})$$

De (1), (2) y la última igualdad hemos probado que:

$$X = R(T_{\lambda_1}^{p_1}) \cap R(T_{\lambda_2}^{p_2}) \oplus Ker(T_{\lambda_1}^{p_1}) \oplus Ker(T_{\lambda_2}^{p_2}).$$

Usando inducción lleganos al siguiente resultado:

3.13 *Teorema.* Sea X un espacio lineal normado, sea $T : X \longrightarrow X$ un operador compacto con espectro infinito $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{0\}$ con $\lambda_i \neq 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Entonces, para cualquier $s \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$X = \bigcap_{i=1}^{s} R(T_{\lambda_i}^{p_i}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})$$

Podemos entonces preguntarnos, bajo qué condiciones se tiene que:

$X = \bigcap_{i=1}^{\infty} R(T_{\lambda_i}^{p_i}) \oplus \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$ donde $\bigoplus_{i=1}^{\infty}$ denota la suma directa algebraica.

Presentamos ahora un resultado que asegura, que bajo ciertas condiciones, la suma de arriba es cierta para espacios de Banach separables, en particular se cumple para espacios de Hilbert separables. Este resultado generaliza el Teorema 1.1. Posteriormente daremos algunos ejemplos mostrando que la suma no es cierta en general.

3.14 Teorema. Sea X un espacio de Banach separable, cuya bola unitaria es débil-secuencialmente compacta.
Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador compacto con espectro $\sigma(T) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{0\}$ donde $\lambda_i \neq 0$ $\forall$ $i \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\sup_n \|\sum_{i=1}^{n} \Pi_i\| \leq M$ para algún $M \in \mathbb{R}$ donde $\Pi_i : X \to Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})$ denota la proyección a lo largo de $R(T_{\lambda_i}^{p_i})$.

Entonces $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} R(T_{\lambda_i}^{p_i}) \oplus \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$

Dem.: Sea $\{X^j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ un conjunto denso, fijemos X^1 y consideremos la sucesión $\{\sum_{i=1}^{n} \Pi_i X^1\}_{n=1}^{\infty} = \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Es claro que $\|Y_n\| \leq M \|X^1\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto existe una subsucesión que converge débilmente a un elemento

$y^1 \in X$. Denotemos dicha subsucesión por $y_{(n,1)}$.

Tenemos que $y_{(n,1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} y^1$ débilmente y se desprende del Teorema de Hahn-Banach que $\|y^1\| \leq M\,\|x^1\|$.

De la subsucesión $\{(n,1)\} \subset \mathbb{N}$ extraemos una subsucesión $\{(n,2)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ tal que $\{\sum_{i=1}^{(n,2)} \Pi_i X^2\}_{n=1}^{\infty} = \{y^2_{(n,2)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a un elemento $y^2 \in X$. Tenemos, como arriba, que $\|y^2\| \leq M\|X^2\|$.

Repetimos este procedimiento obteniendo una subsucesión $\{(n,k)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ de la sucesión $\{(n,k-1)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que: $\{\sum_{i=1}^{(n,k)} \Pi_i X^k\}_{n=1}^{\infty} = \{y^k_{(n,k)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a un elemento $y^k \in X$ con $\|y^k\| \leq M\|X^k\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos ahora, la subsucesión $\{(n,n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, es entonces claro de la construcción que:

$$\sum_{i=1}^{(n,n)} \Pi_i X^k \longrightarrow y^k \text{ débilmente cuando } n \to \infty \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Para cada X^k definamos $P(X^k) = y^k$, y en general para el espacio lineal E, generado por los X^k, la construcción de la sucesión $\{(n,n)\}_{n=1}^{\infty}$ nos permite definir el operador lineal $P : E \longrightarrow X$ donde $P(X)$ es el límite débil de $\{\sum_{i=1}^{(n,n)} \Pi_i X\}_{n=1}^{\infty}$ y $\|P(X)\| \leq M\|X\|$ $\forall\; X \in E$.

Como P está definido sobre un conjunto denso en X se sigue que P tiene una extensión continua sobre X.

Sea $\overline{P} : X \to X$ dicha extensión, con $\|\overline{P}\| \leq M$. De hecho no es difícil probar, usando la densidad de $\{X^J\}_{J=1}^{\infty}$, que para cualquier $x \in X$ $\overline{P}(X)$ es el límite débil de $\sum_{i=1}^{(n,n)} \Pi_i X$.

Probemos ahora que $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} R(T_{\lambda_i}^{p_i}) \oplus \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$. Sea $x \in X$, $\overline{P}(X)$ es límite débil de elementos en $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})$, por lo tanto, tenemos que $\overline{P}(X) \in \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$.

Por otro lado $x - \overline{P}(X)$ es el límite débil de $X - \sum_{i=1}^{(n,n)} \Pi_i X$.

de aquí que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $\Pi_k(x - \sum_{i=1}^{(n,n)} \Pi_i X)$ tiende débilmente a $\Pi_k(X - \overline{P}(X))$.

Pero si $(n,n) > K$ entonces $\Pi_k(X - \sum_{i=1}^{(n,n)} \Pi_i X) = \Pi_k X - \Pi_k X = 0$ pues $\Pi_i \Pi_J = 0$ si $i \neq J$.

Concluímos así que: $\Pi_k(X - \overline{P}(X)) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ y $X - \overline{P}(X) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R(T_{\kappa_i}^{p_i})$.

Así $X = (X - \overline{P}(X)) + \overline{P}(X)$ con $X - \overline{P}(X) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R(T_{\lambda_i}^{p_i})$ y $\overline{P}(X) \in \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$.

Para terminar, probemos que $\overline{P}$ es una proyección cuyo núcleo es $\bigcap_{i=1}^{\infty} R(T_{\lambda_i}^{p_i})$ y cuyo rango es $\overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$

Es claro de la definición de $\overline{P}$ que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ $\overline{P}\Pi_k = \Pi_k\overline{P} = \Pi_k$ y, usando este hecho concluimos que:

$\overline{P}\overline{P} = \overline{P}$. Así $\overline{P}$ es una proyección continua.

Ahora bien, si $X \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R(T_{\lambda_i}^{p_i})$ entonces $\Pi_k(X) = 0$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$ por lo tanto $\overline{P}(X) = 0$.

Inversamente si $\overline{P}(X) = 0$ entonces $\Pi_k\overline{P}(X) = \Pi_k(X) = 0$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$ y así $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R(T_{\lambda_i}^{p_i})$. Concluímos que:

$$Ker\ \overline{P} = \bigcap_{i=1}^{\infty} R(T_{\lambda_i}^{p_i})$$

De la construcción de $\overline{P}$ sabemos que $\overline{P}(X) \in \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$ $\forall$ $x \in X$.

Ahora, si $x \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})$, entonces existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \bigoplus_{i=1}^{s} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})$ y así para todo $(n,n) > s$ $\sum_{i=1}^{(n,n)} \Pi_i x = x$ y por lo tanto $\overline{P}(X) = X$. Concluimos entonces que $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i}) \subset R(\overline{P})$, pero como $R(\overline{P})$ es cerrado por ser $\overline{P}$ continuo, llegamos a que $\overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\kappa_i}^{p_i})} \subset R(\overline{P})$.

Así $R(\overline{P}) = \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$ Esto termina la demostración.

Observaciones: 1) Hemos probado un teorema de descomposición para operadores compactos cuyo conjunto de valores propios es no vacío. Esto en general no es cierto, como lo muestra el ejemplo siguiente:

a) Sea $X = C_o$ el espacio de las sucesiones que convergen a cero con la norma infinito. Sabemos que los vectores canónicos $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ forman una base de schauder para C_o y usamos el siguiente hecho conocido: Un operador que es límite de operadores de rango finito en la Topología uniforme es compacto [Taylor, Lay 1].

Sea $T : C_o \longrightarrow C_o$ tal que $T(e_i) = \frac{e_{i+1}}{i}$ $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

Sea $X \in C_o$ $X = (x_1, x_2, \ldots)$ entonces

$T(X) = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$

Definamos $T_n : C_o \longrightarrow C_o$ por $T_n(X) = (0, x_1, \ldots, \frac{x_{n-1}}{n-1})$

entonces $\|(T - T_n)(X)\| = \| \frac{x_n}{n} e_{n+1} + \frac{x_{n+1}}{n+1} e_{n+2} + \ldots \| \leq \frac{1}{n} \|X\|$

Por lo tanto $\|T_n - T\| \to 0$ y T es compacto.

Ahora, si $TX = \lambda X$ entonces $(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3 \ldots)$

De donde se desprende que no hay valores propios.

2) Para cualquier operador compacto T, sabemos que $0 \in \sigma(T)$, sim embargo el cero no siempre es valor propio como lo muestra el ejemplo anterior.

En caso de que el cero sea valor propio, tenemos del Teorema 3.9 que $X = R(T^p) \oplus Ker(T^p)$ pero algún $p \in \mathbb{N}$, sin embargo no podemos asegurar que estos espacios sean cerrados, en caso de serlos el Teorema sigue siendo cierto al añadir el valor propio cero.

Demos ahora un ejemplo de un operador compacto sobre un espacio sobre el cual la bola unitaria no es débil-secuencialmente compacta. Para esto necesitamos el siguiente resultado.

3.15 *Lema.* Sea C el espacio de sucesiones convergentes con la norma sup. La bola unitaria B en C no es secuencialmente compacta en la Topología débil.

Dem.: Recordemos que el espacio dual de C es ℓ_1 y cada elemento $\xi = (\xi_i) \in \ell_1$ como funcional de C actúa sobre $c = (c_i) \in C$ como sigue:

$$\xi(c) = \xi_0 \alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i c_i \quad \text{donde} \quad \alpha = \lim_{i\to\infty} c_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{\infty} |\xi_i| < \infty$$

[ver Banach, 1].

Consideremos la siguiente sucesión de elementos acotados en C.

$F_1 = (1,0,0\ldots)$ $F_2 = (1,1,0,0\ldots)$ $F_3 = (1,1,1,0,0\ldots)$ *etc.*

es decir $F_i = \sum_{j=1}^{i} e_j$

Consideremos ahora los elementos $a_1 = (1,0,0,\ldots)$ $a_2 = (1,1,0,0\ldots)$ $\in \ell_1$. Es claro entonces que $a_1(F_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $a_2(F_i) = 1$ para $i \geq 2$. Por lo tanto (F_i) no tiene subsucesión que converja en la Topología débil.

Ejemplo b) Sea $T : C \longrightarrow C$ donde C es el espacio de sucesiones convergentes, definido como sigue:

$T(e_0) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} e_n \quad T(e_n) = \frac{1}{n} e_n$

donde $e_0 = (1,1,1,\ldots)$ y $\{e_n\}$ son los vectores canónicos si $n \geq 1$.

Recordemos (Capítulo 2) que $\{e_0, e_1, \ldots\}$ es una base de Schauder para C.

Veamos primero que T es compacto.

Definamos para $n \in \mathbb{N}$, $T_n : C \to C$ como sigue:

$T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} X_k T(e_k)$ donde $X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k e_k$.

Es fácil ver que $R(T_n) = < e_1, e_2, \ldots, e_n, \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k >$

donde R denota el rango. Por lo tanto los T_n son de rango finito.

De manera análoga al ejemplo anterior se puede probar que $\|(T_n - T)X\| \leq \frac{1}{n+1} \|X\|$, es decir $T = \lim_n T_n$ y por lo tanto T es compacto.

Si $X = X_0 e_0 + X_1 e_1 + \ldots$ entonces $T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{X_0 + X_i}{i}) e_i$.

De esto es inmediato probar que el espectro de T es:

$\sigma(T) = \{\frac{1}{i}\}_{i=1}^{\infty} \cup \{0\}$ y el cero no es valor propio.

Además $Ker(T - \frac{1}{i})^2 = Ker(T - \frac{1}{i}) = <e_i>$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

También es fácil checar que $R(T - \frac{1}{i})$ consiste de las sucesiones convergentes cuya i-ésima coordenada es cero, o lo que es lo mismo:

$R(T - \frac{1}{i}) = \{X \in C : X = \sum_{j=0}^{\infty} x_j e_j$ y $x_i = -x_0\}$

Por consiguiente: $\bigcap_{i=1}^{\infty} R(T - \frac{1}{i}) = \{0\}$ y

$\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T - \frac{1}{i}) = C_0$ es decir las sucesiones que convergen a cero, y $C \neq C_0$.

Es claro que en este último ejemplo, las proyecciones $\Pi_k : C \longrightarrow Ker(T - \frac{1}{k})$ satisfacen la desigualdad siguiente:
$\| \sum_{i=1}^{n} \Pi_i \| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo c) Sea $T : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ definido como sigue: $T(e_1) = 0$
$T(e_n) = \frac{e_1}{n} + \frac{e_n}{n^2}$ si $n \geq 2$.

Veamos que T es compacto.
Si $x = (x_n) \in \ell_1$ entonces $T(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{n} e_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{n^2} e_n$.

Definamos una sucesión de operadores de rango finito. Sea $T_k : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ dado por $T_k(X) = \sum_{n=2}^{k} X_n T(e_n)$ para $k \geq 2$, entonces es fácil ver que
$\|(T - T_k)(x)\| \leq \frac{2}{k+1} \|x\|$ donde $\| \ \|$ denota la norma en ℓ_1.
Por lo tanto $T = \lim T_k$ y T es compacto.

Ahora bien, para $n \geq 2$ $T(e_1 + \frac{e_n}{n}) = \frac{1}{n^2}(e_1 + \frac{e_n}{n})$, por lo tanto $\frac{1}{n^2}$ es un valor propio para $n \geq 2$ y de hecho, no hay más valores propios.

Veamos ahora qué es el $Ker(T - \frac{1}{k^2})$ para $k \geq 2$.

Si $(T - \frac{1}{k^2})X = [\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{n} - \frac{x_1}{k^2}] e_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{x_n}{n^2} - \frac{x_n}{k^2}) e_n = 0$ (1)

entonces $x_n = 0$ para $n \geq 2$ y $n \neq k$ y $x_1 = kx_k$.

Por consiguiente $Ker(T - \frac{1}{k^2}) = \langle e_1 + \frac{1}{k} e_k \rangle$ si $k \geq 2$. Y es fácil ver de la expresión (1) de arriba que

$Ker(T - \frac{1}{k^2})^2 = Ker(T - \frac{1}{k})$.

También de la expresión (1) se concluye que el rango $R(T - \frac{1}{k^2})$ consta de todos los vectores en ℓ_1 cuya k-ésima coordenada es cero.

Es claro entonces que $\overline{\bigoplus_{n=2}^{\infty} Ker(T - \frac{1}{k^2})} = \ell_1$ Y

$\bigcap_{k=2}^{\infty} R(T - \frac{1}{k^2}) = \langle e_1 \rangle$.

Sin embargo ℓ_1 no es suma directa de estos dos espacios. Observemos que para $X = (X_n) \in \ell_1$ y para $k \geq 2$. Tenemos que $x = k\, x_k (e_1 + \frac{1}{k}) e_k + [(x_1 - k\, x_k) e_1 + \sum_{\substack{n \geq 2 \\ n \neq k}} x_n e_n]$ donde el primer sumando está en $Ker(T - \frac{1}{k^2})$ y el segundo está en $R(T - \frac{1}{k^2})$. De esta última igualdad se sigue que las proyecciones Π_k no están acotadas uniformemente.

Demos un ejemplo en un espacio de Hilbert en el que se tiene la descomposición del Teorema 3.13 a pesar de no estar acotadas las proyecciones.

Ejemplo d) Sea $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ definido por: $T(e_1) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ y $T(e_k) = \frac{1}{k} e_k$ para $k \geq 2$.

Definamos $T_n : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ como sigue:

$T_n(e_i) = T(e_i)$ si $i \leq n$ y $T_n(e_i) = 0$ si $i > n$

Tenemos que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ y así T es compacto. No es difícil checar que el espectro de T es:

$\sigma(T) = \{\frac{1}{k}\}_{k\geq 2} \cup \{0\}$ y el cero no es valor propio. Además

$Ker(T - \frac{1}{k})^2 = Ker(T - \frac{1}{k}) = \langle e_k \rangle$ para $k \geq 2$ y

$R(T - \frac{1}{k}) = \{\bar{X} \in \ell_2 : X_1 = -X_k\}$ $k \geq 2$

Por lo tanto:

$\bigcap_{k=2}^{\infty} R(T - \frac{1}{k}) = \{0\}$ y $\bigoplus_{k=2}^{\infty} Ker(T - \frac{1}{k}) = \langle \{e_k\}_{k=2}^{\infty} \rangle = \ell_2$.

Notemos que por ser ℓ_2 un espacio de Hilbert es reflexivo y por lo tanto la bola unitaria es débil-secuencialmente compacta (ver Teorema 3.19).

Se puede ver fácilmente que $\operatorname{Sup}_n \|\sum_{i=1}^{n} \Pi_i\| = \infty$.

Veamos ahora que para espacios de Banach reflexivos, la bola unitaria es débil-secuencialmente compacta.

3.16 Lema. Sea X un espacio lineal normado, la bola unitaria B es débilmente cerrada.

Dem.: Sea (X_n) con $\|X_n\| \leq 1$ y $X_n \longrightarrow X$ débilmente, hay que probar que $\|X\| \leq 1$.

Sabemos que $\|X\| = \operatorname{Sup}_{\|X^*\|=1} |X^*(X)|$ donde X^* denota un elemento del espacio dual de X, además:

$|X^*(X)| = \lim\limits_n |X^*(X_n)| \leq \underline{\lim}_n (\|X^*\| \|X_n\|) = \|X^*\| \underline{\lim} \|X_n\|$.
Por consiguiente $\|X\| \leq 1$. //

Mencionamos dos hechos conocidos [ver Kolmogorov [1] Friedman [1]].

3.17 *Lema.* Sea X un espacio lineal normado. Si el dual X^* es separable, entonces X es separable.

3.18 *Lema.* Sea X un espacio lineal normado y B un subconjunto denso de X^*. Si $\{X_n\} \subset X$ es acotada, y si $\lim X^*(X_n)$ existe para todo $X^* \in B$ entonces $\lim X^*(X_n)$ existe para todo $X^* \in X^*$.

Probemos ahora que en espacios de Banach reflexivos la bola unitaria es secuencialmente compacta en la Topología débil.

3.19 *Teorema.* Sea X un espacio de Banach reflexivo. Sea $K \subset X$ acotado y débilmente cerrado entonces K es débil-secuencialmente compacto. En particular la bola unitaria es débil secuencialmente compacto.

Dem.: Supongamos que K es acotado y débilmente cerrado. Sea $\{X_n\} \subset K$ una sucesión acotada.

Sea Z el subespacio lineal cerrado generado por $\{X_1, X_2, \ldots\}$
Es claro que Z es separable y también es reflexivo por ser un subespacio cerrado de un espacio reflexivo. De aquí que el doble dual de $Z(Z^{**})$ es separable. Y por el lema 3.17 Z^* es separable.

Sea $\{X_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en Z^*.

Como la sucesión $\{X_1^*(X_n)\}$ es acotada, extraemos una subsucesión convergente $\{X_1^*(X_{n,1})\}$. En seguida extraemos de la sucesión $\{X_2^*(X_{n,1})\}$ una subsucesión convergente $\{X_2^*(X_{n,2})\}$ y procedemos por inducción. Sea $Y_k = X_{k,k}$ para $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim_k X_n^*(Y_k)$ existe para cualquier X_n^*. Como $\{X_n^*\}$ es denso en Z^* y como $\{Y_k\}$ es una sucesión acotada en Z se siguio del lema 3.18 que $\lim_k Z^*(Y_k)$ existe para cada $Z^* \in Z^*$.

Considerando a Y_k como elementos de Z^{**} tenemos que $\lim_k Y_k(Z^*)$ existe para cada $z^* \in Z^*$. Por lo tanto existe $Y^{**} \in Z^{**}$ tal que $\lim_k Y_k(z^*) = Y^{**}(z^*)$ para todo $z^* \in Z^*$. Como Z es reflexivo hay un $Y \in Z$ tal que su imagen en Z^{**} bajo la inmersión natural es Y^{**}. De aquí que:
$\lim_k Z^*(Y_k) = z^*(Y)$ para todo $z^* \in Z^*$.

Tomemos ahora cualquier $X^* \in X^*$. X^* determina un elemento $z^* \in Z^*$ por: $z^*(z) = X^*(z)$ para todo $z \in Z$.

Como $\{Y_k\} \subset Z$, $Y \in Z$ concluimos que:

$$\lim_k X^*(Y_k) = X^*(Y)$$

Por lo tanto $Y_k \longrightarrow Y$ débilmente y $Y \in K$ por ser K débilmente cerrado. Así K es débil-secuencialmente compacto. La última afirmación del Teorema es consecuencia del lema 3.16.

3.20 Corolario. Sea H un espacio de Hilbert separable y $T : H \longrightarrow H$ un operador compacto con espectro:
$\sigma(T) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{0\}$, $\lambda_i \neq 0$ $i \in N$, entonces
$$H = \bigcap_{i=1}^{\infty} R(T - \lambda_i)^{p_i} \oplus \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T-\lambda_i)^{p_i}}$$

Dem.: Sabemos que toda base ortonormal en un espacio de Hilbert separable es una base de schauder incondicional y cualquier base ortonormal de $\overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T-\lambda_i)^{p_i}}$ la podemos extender a una base ortonormal de H. De estos hechos y un resultado que se probará en el capítulo siguiente (Teorema 4.2.4) se sigue que $\sup_n \|\sum_{i=1}^{n} \Pi_i\| < \infty$ donde $\Pi_i : H \to Ker(T - \lambda_i)^{p_i}$ son las proyecciones a lo largo de $R(T - \lambda_i)^{p_i}$. La demostración se sigue ahora de los Teoremas 3.19 y 3.13. //

Hemos probado el Teorema 3.13 para espacios de Banach separables, y pensamos que dicho resultado sigue siendo válido para espacios de Banach arbitrarios, pero dejamos esta cuestión abierta.

En el capítulo 1 vimos que como consecuencia del Teorema de descomposición primaria (Teorema 1.1) obtenemos la descomposición de un operador, como una suma de dos operadores, uno de los cuales es diagonal y el otro nilpotente (Teorema 2.2).

Presentamos ahora una generalización de este Teorema para operadores compactos definidos en espacios de dimensión infinita.

Mantenemos la misma notación que en el Teorema 3.13.

3.21 Teorema. Sea X un espacio de Banach separable cuya bola unitaria es débil-secuencialmente compacta. Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador compacto con espectro $\sigma(T) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{0\}$ donde $\lambda_i \neq 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\sup_n \| \sum_{i=1}^{n} \Pi_i \| < M$. Entonces la restricción de T al espacio $\overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker\, T_{\lambda_i}^{p_i}}$ se puede expresar como la suma de dos operadores $U + N$, donde U es diagonal y N es cuasinilpotente, es decir, el espectro de N consiste sólamente del cero. Además U y N conmutan.

Dem.: Del Teorema 3.13 tenemos que:

$$X = \prod_{i=1}^{\infty} R(T_{\lambda_i}^{p_i}) \oplus \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$$

Sea $\overline{P}(X)$ el límite débil de $\{ \sum_{i=1}^{(n,n)} \Pi_i X\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión que se construyó en el Teorema 3.13.

Sabemos que $\overline{P}$ es continuo, por lo tanto $T\overline{P}$ es compacto, y es claro de la definición de $\overline{P}$ que $T\overline{P}$ es la restricción de T al espacio $\overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$.

Ahora bien, como T es compacto manda sucesiones débilmente convergentes a sucesiones fuertemente convergentes, así, para cualquier $x \in X$:

$$T\overline{P}(X) = \lim_{n\to\infty} T \sum_{i=1}^{(n,n)} \Pi_i(X)$$

Por otro lado, la sucesión de operadores $\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Pi_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en la Topología uniforme de operadores, de hecho tenemos:

$\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Pi_i - \sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i\Pi_i\| \leq \max_{i>n}|\lambda_i|(2M) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ pues $\lambda_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$.

Sea $U = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Pi_i$, entonces U es compacto, por ser límite de operadores de rango finito [Taylor, Lay 1]. Además U es un operador diagonal: $U = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\Pi_i$.

Demostremos que el operador $T\overline{P} - U$ es cuasinilpotente, para esto, basta ver que $T\overline{P} - U$ no tiene valores propios diferentes de cero, pues es un operador compacto [Teorema 3.12].

Supongamos que $(T\overline{P} - U)X = \lambda X$ para algún $\lambda \neq 0$ y un $x \in X - \{0\}$ y sea $X = X_1 + X_2$ con $X_1 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R(T_{\lambda_i}^{p_i})$, $X_2 \in \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$, entonces:

$(T\overline{P} - U)(X_1 + X_2) = (T\overline{P} - U)X_2 = \lambda X_1 + \lambda X_2$

Es claro que $(T\overline{P} - U)X_2 \in \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$. Por lo tanto, del Teorema 3.13 $\lambda X_1 = 0$, así $X_1 = 0$ y $X = X_2$.

Tenemos entonces que $(T\overline{P} - U)X = \lambda X$ o equivalentemente

$\lambda X = \lim_{n\to\infty} T\sum_{i=1}^{(n,n)}\Pi iX - \sum_{i=1}^{(n,n)}\lambda_i\Pi_iX$ con $X \in \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$

Sea $J \in \mathbb{N}$ fija entonces:

$\lambda\Pi_J X = \lim_{n\to\infty}\Pi_J T\sum_{i=1}^{(n,n)}\Pi_i X - \lambda_J\Pi_J X$ pues $\Pi_i\Pi_J = 0$ si $i \neq J$

Usamos ahora el hecho de que los subespacios $Ker(T - \lambda_i)^{p_i}$ son invariantes bajo T para obtener:

$\lambda\Pi_J X = T\Pi_J X - \lambda_J\Pi_J X$, por lo tanto:

$(T - \lambda_J - \lambda)\ \Pi_J X = 0$. Como $\lambda_J - \lambda$ no es valor propio de la restricción de T al espacio $Ker(T - \lambda_J)^{p_J}$, concluimos que $\Pi_J X = 0$. Como J es arbitrario tenemos que

$X \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R(T_{\lambda_i}^{p_i})$ lo cual es una contradicción. Concluímos que $T\overline{P} - U$ es cuasinilpotente.

Así $T\overline{P} = U + N$ donde U es diagonal y $N = T\overline{P} - U$ es cuasinilpotente.

Veamos ahora que U y N conmutan.

Sea $X = X_1 + X_2 \in X$ donde $X_1 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R(T_{\lambda_i}^{p_i})$, $X_2 \in \overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$

Basta ver que $UT\overline{P}\,X = T\overline{P}U\,X$.

De las definiciones de U y $\overline{P}$ se sigue que:

$UT\overline{P}\,X = UT\overline{P}\,X_2$ y $T\overline{P}U\,X = T\overline{P}U\,X_2$.

Por consiguiente basta probar que $UT\overline{P}$ y $T\overline{P}U$ definen el mismo operador sobre $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})$, pues este espacio es denso en $\overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})}$.

Sea $X \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$X \in \bigoplus_{i=1}^{m} Ker(T_{\lambda_i}^{p_i})$ y:

$$UT\overline{P}\,X = UT\,X = UT\sum_{i=1}^{m}\Pi_i X = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i T\Pi_i X = T\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Pi_i X = TU\,X = T\overline{P}U\,X.$$

Hemos usado el hecho de que $\Pi_i \Pi_j = 0$ si $i \neq j$ y $T\Pi_i = \Pi_i T \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$. Esto termina la demostración.

CAPITULO IV

MEDIDAS VECTORIALES

En este capítulo estudiamos las medidas vectoriales, estas son medidas que toman valores en un espacio de Banach.

En particular consideraremos dos tipos de medidas; las medidas básicas de Schauder y las medidas básicamente distribuidas. Ambas son generalizaciones del concepto de base de Schauder, de hecho, uno de los principales resultados es que bajo cierta condición estas medidas son las mismas.

En el capítulo 5 estudiaremos las medidas vectoriales en espacios de Hilbert y daremos una generalización del Teorema 2.9 en el contexto de medidas vectoriales.

§ 1. El espacio de funciones integrables con respecto a una medida con valores en un espacio de Banach.

Sea X un espacio de Banach con norma $\| \ \|$, Ω un conjunto, Σ una σ-álgebra de conjuntos de Ω y μ una medida nume rablemente adiviva con valores en X.

$\|\mu\|(E)$ denota la semivariación y $|\mu|(E)$ la variación total de μ sobre E, para cada $E \in \Sigma$.

Decimos que un conjunto $E \in \Sigma$ es μ-nulo si $\|\mu\|(E) = 0$, esto es equivalente a que $\mu(A) = 0$ para toda $A \subset E$, $A \in \Sigma$. Si dos funciones medibles f y g coinciden excepto sobre un conjunto μ-nulo decimos que $f = g$ μ-casi dondequiera (μ c.d.). Una función medible $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es μ integrable si existe una sucesión de funciones simples (ψ_n) que convergen puntualmente a f, excepto quizás, sobre un conjunto μ-nulo, y si para $E \in \Sigma$, $(\int_E \psi_n d\mu)$ es una sucesión de Cauchy en X. Si f es μ integrable definimos $\int_E f d\mu$ como $\lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n d\mu$.

En Dunford-Schwartz Vol. I § IV.10 se estudian algunas propiedades de la semivariación y otros aspectos de la Teoría de Integración de Funciones con Valores Complejos con respecto a una medida vectorial. Ahí se prueba que $\int_E f d\mu$ está bien definida, es lineal como función de f y numerablemente aditiva como función de E. Además se prueba que toda función medible acotada f es μ-integrable y si $|f| \leq M$ μ c.d entonces $\|\int_E f d\mu\| \leq M\|\mu\|(E)$.

Lo que nos proponemos ahora, es dar una estructura de espacio de Banach al conjunto de clases de equivalencia de funciones μ-integrables (dos funciones están en la misma clase si son iguales μ *c.d.*). Para esto necesitamos algunos resultados.

Lema 4.1 Para todo $E \in \Sigma$ $\|\mu\|(E) = \sup_{|f|\leq 1} \|\int_E f d\mu\|$ donde el supremo se toma sobre todas las funciones μ-medibles acotadas por 1.

Demostración:

Definimos para cada $E \in \Sigma$:

$C(E) = \sup \{\|\int_E f d\mu\| : f$ es medible y $|f| \leq 1\}$.

De la definición de semivariación, es claro que $\|\mu\|(E) \leq C(E)$. Ya que $|f| \leq 1$ $\|\int_E f d\mu\| \leq \|\mu\|(E)$. (ver párrafo anterior). Por lo tanto $C(E) \leq \|\mu\|(E)$. Esto termina la prueba.

4.2. *Definición.* Sea f μ-integrable entonces $f d\mu$ denota la medida $E \longrightarrow \int_E f d_\mu$.

4.3 *Proposición.* Sea f μ-integrable. Entonces $\|f d\mu\|(\Omega) = 0$ si y sólo si $f = 0$ μ c.d.

Demostración: Sea $E_n = \{\omega \in \Omega : 0 < |f(\omega)| < \frac{1}{n}\}$. $\{E_n\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles con intersección vacía.

Sea λ una medida positiva definida sobre (Ω, Σ) tal que $\|\mu\|(E) \longrightarrow 0$ cuando $\lambda(E) \longrightarrow 0$. La existencia de tal λ está garantizada por el lema IV.10.5 de [Dunford Schwartz 1].

Por ser λ finita $\lambda(E_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto $\|\mu\|(E_n) \to 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Sea $N = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq 0\}$, usando la proposición 1.1, tenemos $\|\mu\|(N-E_n) = \sup\limits_{|h|\leq 1} \|\int_{N-E_n} h d_\mu\| \leq$

$$\leq \sup_{|h'|\leq 1} \|\int_{N-E_n} h' n f d_\mu\| = n \|f d_\mu\| (N-E_n)$$

puesto que $\{h : |h| \leq 1\} \subset \{h' n f : |h'| \leq 1\}$.

Esto muestra que si $\|f d\mu\|(\Omega) = 0$ entonces $\|\mu\|(N) \leq \|\mu\|(N-E_n) + \|\mu\|(E_n) \leq 0 + \|\mu\|(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Por consiguiente $\|\mu\|(N) = 0$, es decir $f = 0$ μ c.d.

Inversamente si $f = 0$ μ c.d. entonces la sucesión constante cero converge a f μ c.d. por lo tanto $\int_E f d\mu = 0$ $\forall E \in \Sigma$, de ésto se concluye que $\|f d\mu\|(\Omega) = 0$. Esto completa la demostración. Es inmediato comprobar que: $\|(f + g) d\mu\|(\Omega) \leq \|f d\mu\|(\Omega) + \|g d\mu\|(\Omega)$ y $\|c f d\mu\|(\Omega) =$ $= |c| \|f d\mu\|(\Omega)$ para funciones f, g μ-integrables y $c \in \mathbb{C}$, esto nos permite dar la siguiente definición:

4.4 *Definición*: $I(\mu)$ es el espacio lineal normado de clases de equivalencia de funciones con valores complejos μ-integrables equipadas con la norma $|||f||| = \|f d\mu\|(\Omega)$.

Nuestro objetivo ahora es mostrar que $I(\mu)$ es un espacio de Banach, para lo cual necesitamos dos lemas.

4.5 Lema. Sean $f,g \in I(\mu)$ y $E \in \Sigma$. Si $|f| \leq |g|$ sobre E entonces $\|fd\mu\|(E) \leq \|gd\mu\|(E)$. Si $|f| = |g|$ sobre Ω entonces $|||f||| = |||g|||$.

Dem: Usando la proposición 1.2 vemos que $\|gd\mu\|(E) = $
$= \sup\limits_{|h|\leq 1} \|\int_E hgd\mu\| \geq \sup\limits_{|h|\leq 1} \|\int_E h\frac{f}{g}gd\mu\| = \|fd\mu\|(E)$.

Esto prueba la primera parte, la segunda parte es una consecuencia inmediata de la primera.

4.6 Lema. Las funciones simples son densas en $I(\mu)$, es decir, dada $f \in I(\mu)$ y $\epsilon > 0$ hay una función simple ϕ tal que $|||\phi - f||| < \epsilon$.

Dem: Sea $f \in I(\mu)$ y sea λ una medida positiva finita sobre (Ω, Σ) tal que $\lim\limits_{\lambda(E)\to 0} \|fd\mu\|(E) = 0$. Para cada entero positivo n definamos:

$E_n = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > n\}$. Entonces $\lambda(E_n) \to 0$ y por consiguiente $\|fd\mu\|(E_n) \to 0$. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos n tal que $\|fd\mu\|(E_n) < \epsilon/2$ y elegimos ϕ simple tal que $\phi = 0$ sobre E_n y $|\phi - f| < \epsilon/2\|\mu\|(\Omega - E_n)$ sobre $\Omega - E_n$. Entonces:

$\|(\phi - f)d\mu\|(\Omega) \leq \|(\phi - f)d\mu\|(\Omega - E_n) + \|fd\mu\|(E_n) < \epsilon$, donde se ha usado la subaditividad de la semivariación y el lema 4.5.

4.7 Proposición. $I(\mu)$ es un espacio de Banach.

Dem: Sólo hay que probar que $I(\mu)$ es completo. Sea $\{\delta_n\}$ una sucesión de Cauchy en $I(\mu)$. Usando el lema 4.6 podemos construir una sucesión de funciones simples $\{\phi_n\}$ tal que $|||\phi_n - \delta||| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. En particular $\{\phi_n\}$ es también una sucesión de Cauchy en $I(\mu)$. Extraemos una subsucesión $\{\phi_{n_k}\}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |||\phi_{n_{k+1}} - \phi_{n_k}||| < \infty$. Sea

$N = \{\omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_{n_{k+1}}(\omega) - \phi_{n_k}(\omega)| = \infty\}$.

Mostramos ahora que $\|\mu\|(N) = 0$.

Supongamos que $\|\mu\|(N) = \epsilon > 0$. Sea M un número real positivo tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |||\phi_{n_{k+1}} - \phi_{n_k}||| < M$. Definamos para todo entero positivo m, $N_m = \{\omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{m} |\phi_{n_{k+1}}(\omega) - \phi_{n_k}(\omega)| > \frac{2M}{\epsilon}$ y $N' = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$.

Usando nuevamente la existencia de una medida finita y positiva λ tal que $\|\mu\|(E) \xrightarrow[\lambda(E)\to 0]{} 0$, tenemos que:

$\|\mu\|(N'-N_m) \to 0$, cuando $m \to \infty$.

Ya que $\epsilon = \|\mu\|(N) \leq \|\mu\|(N_m) + \|\mu\|(N' - N_m)$ existe m_0 tal que $\|\mu\|(Nm_0) > \epsilon/2$. Por consiguiente

$$\sum_{k=1}^{\infty} |||\phi_{n_{k+1}} - \phi_{n_k}||| \geq \sum_{k=1}^{m_0} \|(\phi_{n_{k+1}} - \phi_{n_k})d\mu\|(Nm_0) \geq$$

$$\geq \|\sum_{k=1}^{m_0} |\phi_{n_{k+1}} - \phi_{n_k}|\, d\mu\|(Nm_0) \geq \|\frac{2m}{\epsilon}\, d\mu\|(Nm_0) =$$

$= \frac{2m}{\epsilon}\|\mu\|(Nm_0) > M$. ∇_0 (En la penúltima desigualdad se ha usado el lema 4.5). Esta contradicción prueba que $\|\mu\|(N) = 0$.

Definamos ahora; $f(\omega) = \begin{cases} \phi_{n_1}(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{n_{k+1}}(\omega) - \phi_{n_k}(\omega) & \omega \in \Omega - N \\ 0 & \text{si } \omega \in N \end{cases}$

entonces $\phi_{n_k} \longrightarrow f$ puntualmente μ c.d. conforme $k \longrightarrow \infty$.

También, para todo $E \in \Sigma$ $\{\int_E \phi_{n_k} d\mu\}_k$ es una sucesión de Cauchy en X, ya que para todo par de enteros positivos k, j

$$\|\int_E \phi_{n_{k+j}} d\mu - \int_E \phi_{n_k} d\mu\| \leq |||(\phi_{n_{k+j}} - \phi_{n_k}) d\mu||| \leq$$

$$\leq \sum_{l=k}^{\infty} |||\phi_{n_{l+1}} - \phi_{n_l}||| \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \longrightarrow \infty$$

Esto prueba que $f \in I(\mu)$.

Probemos ahora que $\phi_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ con la norma $|||\ \ |||$

veamos ahora que $\phi_{n_k} \longrightarrow f$ en la norma $|||\ |||$. Sea $\epsilon > 0$ y sea N tal que $|||\phi_{n_k} - \phi_{N_I}||| < \epsilon/4$ $k, I > N$.

Sea h una función simple con valores complejos tal que $|h| \leq 1$ y $|||\phi_{n_N} - f||| = \|\phi_{n_N} d\mu - f d\mu\|(\Omega) <$

$< \epsilon/4 + \|\int_\Omega h(\phi_{n_N} - f) d\mu\|$.

Sea $m > N$ tal que $\|\int_\Omega h(\phi_{n_m} - f) d\mu\| < \epsilon/4$, esto último es posible debido a que h toma un número finito de valores y a que $\|\int_E \phi_{n_m} - f\| \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$, $E \in \Sigma$.

Para $k > N$ tenemos:

$$|||\phi_{n_k} - f||| < |||\phi_{n_k} - \phi_{n_N}||| + |||\phi_{n_N} - f||| <$$

$$< \epsilon/4 + \epsilon/4 + \|\int_\Omega h(\phi_{n_N} - f)d\mu\| <$$

$$< \epsilon/2 + \|\int_\Omega h(\phi_{n_N} - \phi_{n_m})d\mu\| + \|\int_\Omega h(\phi_{n_m} - f)d\mu\| <$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon.$$

Esto prueba que $|||\phi_{n_k} - f||| \to 0$ cuando $k \to \infty$ lo cual implica que $|||f_n - f||| \longrightarrow 0$ esto completa la demostración.

§ 2. Medidas básicas de schauder y medidas básicamente distribuidas.

Introducimos ahora una clase particular de medidas vectoriales que generalizan el concepto de base de schauder en espacios de Banach y para espacios de Hilbert introducimos las medidas ortogonalmente distribuidas que son en cierto sentido bases ortogonales continuamente distribuidas. Con estas medidas generalizaremos el Teorema 2.9.

Las medidas básicas de schauder y las medidas básicamente distribuidas aparecen en Abreu y Salehi [1] y en Kalton, Turentt, Uhl [1]. Probaremos que bajo cierta restricción estas medidas son las mismas.

Mantenemos la misma notación que en § 1.

4.2.1 Definición: Sea μ una medida con valores en X numerablemente aditiva, μ se llama una medida básica de Schauder si el mapeo $T : I(\mu) \longrightarrow X$ dado por $T(f) = \int_{\Omega} f d\mu$ es uno a uno y su rango es cerrado.

Ejemplo: Una sucesión básica incondicional (2.1, 2.5) $\{X_n\}$ puede ser considerada como una medida básica de Schauder sobre un espacio discreto, siempre que $\sum_n X_n$ converja incondicionalmente, esto es:

Sea $\Omega = N$ y $\Sigma = 2^N$ definimos $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ como sigue $\mu(E) = \sum_{n \in E} X_n$.

Sea $f \in I(\mu)$ tal que $T(f) = \int_{\Omega} f d\mu = 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\mu(n) = 0$ concluimos $f(n) = 0$, $n \in N$, esto último se sigue de la definición de sucesión básica, así $f \equiv 0$ y T es inyectiva. Que ImT es cerrado en X es consecuencia inmediata de la misma definición.

4.2.2 Proposición. Sea μ una medida básica de schauder sobre (Ω,Σ) con valores en X y sea Q un operador lineal acotado sobre X con inverso acotado. Entonces $Q\mu$ es también una medida básica de schauder. Además μ y $Q\mu$ tienen las mismas funciones integrables.

Dem.: Sea $\kappa(E) = Q\mu(E)$ $E \in \Sigma$. Es claro que κ es una medida numerablemente aditiva sobre (Ω,Σ).

Si $f \in I(\mu)$, entonces existe $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples tal que $\phi_n \to f$ μ c.d. y $\{\int_E \phi_n\} \subset X$ es una sucesión de Cauchy para todo $E \in \Sigma$ y $\lim \int_E \phi_n d\mu = \int_E f d\mu$. Usando la continuidad del operador Q y el hecho de que $Q \int_E \phi_n d\mu = \int_E \phi_n dQ\mu$, $E \in \Sigma$ obtenemos:

$$\lim_n Q \left(\int_E \phi_n d\mu\right) = \lim_n \int_E \phi_n dQ\mu = Q \int_E f d\mu, \quad E \in \Sigma$$

Por consiguiente $f \in I(\eta)$ y $\int_E f d\eta = Q \int_E f d\mu$.

Análogamente se prueba que si $f \in I(\eta)$ entonces $f \in I(\mu)$. Observemos también que μ y η tienen los mismos conjuntos nulos.

Supongamos ahora que $f \in I(\eta)$ y $\int_\Omega f d\eta = 0$. Entonces $Q^{-1} \int_\Omega f d\eta = \int_\Omega f d\mu = 0$, por lo tanto $f = 0$ μ c.d. y en consecuencia $f = 0$ η c.d. Esto prueba que el mapeo $T : I(\eta) \to X$ tal que $T(f) = \int_\Omega f d\eta$ es uno a uno.

Sea X_η el espacio lineal cerrado generado por $\{\eta(E) : E \in \Sigma\}$. Es claro que $\{\int_\Omega f d\eta : f \in I(\eta)\} \subset X_\eta$.

Sea $x \in X_\eta$, como $X_\eta = Q X_\mu$ y μ es básica de schauder, existe $f \in I(\mu)$ tal que $Q^{-1}x = \int_\Omega f d\mu$.

De esto se sigue que $f \in I(\eta)$ y $x = Q \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f d\eta$ probando así que el rango de T es cerrado.

Ahora generalizamos la caracterización de bases de Schauder que aparece en las proposiciones 2.4 y 2.6.

4.2.3 *Proposición*. Sea μ una medida vectorial con valores en X, entonces μ es básica de Schauder si y solo si existe una constante $K > 0$ tal que si $f, g \in I(\mu)$ y $|f| < |g|$ sobre Ω entonces $\|\int_\Omega f d\mu\| < K \|\int_\Omega g d\mu\|$.

Dem.: Supongamos que μ es básica de Schauder.

Sea $X\mu$ el subespacio lineal cerrado generado por $\{\mu(E) : E \in \Sigma\}$. De la hipótesis se sigue que el mapeo $T : I(\mu) \to X$ dado por $T(f) = \int_\Omega f d\mu$ tiene a $X\mu$ como su rango.

Como $\|Tf\| < |||f|||$ para toda $f \in I(\mu)$, T es continuo y como $I(\mu)$ es un espacio de Banach, por el Teorema del mapeo abierto T tiene un inverso acotado $T^{-1} : X\mu \to I(\mu)$.

Sea $K = \|T^{-1}\|$ sea $c = f/g$ donde $g \neq 0$ y $c = 0$ donde $g = 0$. Entonces $|c| < 1$ y

$$\|\int_\Omega f d\mu\| = \|\int_\Omega cg d\mu\| < \|g d\mu\|(\Omega) = |||g||| = |||T^{-1}Tg||| <$$

$$< K\|Tg\| = K\|\int_\Omega g d\mu\|.$$

Inversamente supongamos que si $|f| < |g|$ entonces $\|\int_\Omega f d\mu\| < K\|\int_\Omega g d\mu\|$.

Sea $f \in I(\mu)$ tal que $\|\int_\Omega f d\mu\| = 0$ Sea $|\phi| < 1$

entonces $\|\int_\Omega f\phi d\mu\| < K\|\int_\Omega f d\mu\| = 0$.

Así $\sup_{|\phi|<1} \|\int_\Omega \phi f d\mu\| = 0$ es decir $\|f d\mu\|(\Omega) = 0$

y por la proposición 4.3 $f = 0$ μ c.d.

Veamos ahora que ImT es cerrado en X.

Sea $\{\int_\Omega f_n d\mu\}$ una sucesión de Cauchy en X, $f_n \in I(\mu)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

dado $\epsilon > 0$ existe N tal que si $m, n > N$ tenemos:

$\|\int_\Omega (f_n - f_m)d\mu\| < \epsilon$ Por lo tanto:

$\epsilon > 1/K \|\int_\Omega \phi(f_n - f_m)d\mu\|$ para cualquier ϕ con $|\phi| < 1$.

Por consiguiente $\|(f_n - f_m)d\mu\|(\Omega) < K\epsilon$ $n, m > N$.

Es decir (f_n) es una sucesión de Cauchy en $I(\mu)$.

Sea $f = \lim f_n$ $f \in I(\mu)$ entonces

$|||f_n - f||| \to 0$ es decir $\|\int_\Omega \phi(f_n - f)d\mu\| \longrightarrow 0$

para cualquier ϕ con $|\phi| < 1$

en particular $\|\int_\Omega (f_n - f)d\mu\| \longrightarrow 0$

Concluimos que $\int_\Omega f d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n d\mu$ en X //

Es claro que este resultado no solo generaliza el Teorema 2.4 relativo a bases de schauder si no que es una generalización del Teorema 2.6 que trata de bases incondicionales de schauder, de hecho este es un corolario de 4.2.3 como vemos ahora:

4.2.4 Corolario. Sea X un espacio de Banach y sea (X_n) una sucesión básica incondicional en X. Entonces existe una constante $K > 0$ tal que si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ son sucesiones de escalares con $|a_n| \leq |b_n|$ $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ converge entonces $\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\| \leq K \|\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n\|$.

Dem.: Sea $\Omega = \mathbb{N}$ y Σ la σ-álgebra de todos los subconjuntos de Ω. Definamos $\mu(E) = \sum_{n\in E} \frac{x_n}{\|x_n\|n^2}$ para $E \in \Sigma$. Entonces el corolario es consecuencia inmediata de la proposición 4.2.3 //.

Medidas vectoriales básicamente distribuidas.

4.2.5 *Definición*. Una medida vectorial numerablemente aditiva $\mu : \Sigma \to X$ se llama básicamente distribuida si para cada sucesión $\{E_n\} \subset \Sigma$ de conjuntos no μ-nulos y ajenos dos a dos, la sucesión $\{\mu(E_n)\}$ es una sucesión básica en X.

Observemos que de la definición se sigue que la sucesión $\mu(E_n)$ es una sucesión básica incondicional.

Ejemplo. Sea (Ω, Σ, ν) un espacio de medida finita y definamos $\mu : \Sigma \to L_1(\nu)$ como $\mu(E) = \chi_E$ para $E \in \Sigma$. (χ_E denota la función característica de E).

Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ una sucesión de conjuntos ajenos con cada E_n no μ-nulo.

Es claro entonces que para cualquier sucesión de escalares $\{a_n\}$ se tiene

$\|\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(E_i)\| \leq \|\sum_{i=1}^{m+p} a_i \mu(E_i)\|$ $m, p \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\{\mu(E_i)\}$ es una sucesión básica (Teorema 2.4). Por lo tanto μ es una medida vectorial básicamente distribuida.

Notemos que dada una medida básicamente distribuida, para cada sucesión $\{E_n\} \subset \Sigma$ de conjuntos ajenos dos a dos que no son μ-nulos existe una constante $K > 0$ tal que $\|\sum_{n=1}^{m} a_n \mu(E_n)\| \leq K \|\sum_{n=1}^{m+p} a_n \mu(E_n)\|$ para $m, p \in \mathbb{N}$ y cualquier sucesión $\{a_n\}$ de escalares.

4.2.6 Definición. Sea μ una medida vectorial básicamente distribuida, definida sobre (Ω, Σ), si existe una constante $K > 0$ tal que para cualquier sucesión $\{a_n\}$ de escalares y cualquier sucesión $\{E_n\} \subset \Sigma$ de conjuntos no μ-nulos se tiene que:

$$\|\sum_{n=1}^{m} a_n \mu(E_n)\| \leq K \|\sum_{n=1}^{m+p} a_n \mu(E_n)\| \qquad m, p \in \mathbb{N}$$

entonces decimos que μ tiene constante básica acotada.

Para un ejemplo de una medida básicamente distribuida que no tiene constante básica acotada ver Kalton, Turett, Uhl [1].

En seguida probamos que las medidas básicas de Schauder y las medidas básicamente distribuidas con constante básica acotada son las mismas.

4.2.7 Teorema. Una medida $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ es básica de Schauder si y solo si es básicamente distribuida con constante básica acotada.

Dem.: Supongamos primero que μ es básica de Schauder, por el Teorema 4.2.3 existe $K > 0$ tal que si f y g son funciones μ-integrables con $|f| \leq |g|$ sobre Ω entonces $\|\int_\Omega f d\mu\| \leq K \|\int_\Omega g d\mu\|$.

Sea $\{E_n\} \subset \Sigma$ una sucesión de conjuntos que no son μ-nulos, y ajenos dos a dos. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de escalares y definamos $f = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \chi_{E_n}$ $g = \sum_{n=1}^{m+p} \alpha_n \chi_{E_n}$.

Por la desigualdad de arriba tenemos:

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} \alpha_n \mu(E_n)\right\| \leq K \left\|\sum_{n=1}^{m+p} \alpha_n \mu(E_n)\right\|$$

De esto concluimos que $\mu(E_n)$ es una sucesión básica (Teorema 2.4). Además como la K es independiente de la sucesión (E_n) tenemos que μ es básicamente distribuida con constante básica acotada.

Supongamos ahora que μ es una medida básicamente distribuida con constante básica acotada.

Para probar que μ es básica de Schauder basta demostrar la existencia de una constante $K_1 > 0$ tal que para toda $f \in I(\mu)$ se tiene:

$$\frac{1}{K_1} |||f||| \leq \left\|\int_\Omega f d\mu\right\| \leq K_1 |||f|||$$

Es claro que si $f \in I(\mu)$ entonces $\|\int_\Omega f d\mu\| \leq |||f|||$. Por hipótesis, existe $K > 0$ tal que:

$\|\sum_{n\in I} \alpha_n \mu(E_n)\| \leq K \|\sum_{n\in J} \alpha_n \mu(E_n)\|$ (1) para cualquier sucesión $\{E_n\} \subset \Sigma$ de conjuntos que no son μ-nulos y ajenos dos a dos, para cualquier sucesión (α_n) de escalares y para $I, J \subset \mathbb{N}$ finitos con $I \subset J$.

Denotemos $\mu(E_n)$ por χ_n y probemos la siguiente desigualdad:

$\|\sum_{n\in I} \alpha_n \beta_n \chi_n\| \leq 4K \|\sum_{n\in J} \alpha_n \chi_n\|$ con $|\beta_n| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para cualquier elección de (C_n) con $C_n \in \{-1, 0, 1\}$ $n \in \mathbb{N}$ obtenemos, aplicando la desigualdad del triángulo y (1) que:

$$\|\sum_{n\in I} C_n \alpha_n \chi_n\| \leq 2K \|\sum_{n\in J} \alpha_n \chi_n\|$$

Por lo tanto la envolvente convexa de $\{\sum_{n\in I} C_n \alpha_n \chi_n\}$ que denotamos por V, está contenida en la bola centrada en el origen y de radio $2K \|\sum_{n\in J} \alpha_n \chi_n\|$.

Probemos que $\sum_{n\in I} \alpha_n \beta_n \chi_n \in V$ para cualquier colección $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ con $|\beta_n| \leq 1$ para toda n.

Hagámoslo por inducción remunerando los índices si es necesario.

Sea $\beta_1 > 0$ entonces $\beta_1 \alpha_1 \chi_1 \in V$ pues $0 \in V$, además $\beta_1 \alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2 = \beta_1(\alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2) + (1 - \beta_1)\alpha_2 \chi_2 \in V$ pues $\beta_1 + (1 - \beta_1) = 1$. Si $-1 \leq \beta_1 \leq 0$ entonces $\beta_1 \alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2 =$

$= |\beta_1|(-\alpha_1\chi_1) + \alpha_2\chi_2$ y la prueba es la misma.

Para demostrar que $\beta_1\alpha_1\chi_1 + \beta_2\alpha_2\chi_2 \in V$ si $-1 < \beta_1, \beta_2 < 1$ sólo observamos que $\beta_2\alpha_2\chi_2 \in V$ y aplicamos el caso anterior.

La inducción es consecuencia directa de los casos anteriores.

Por lo tanto $\|\sum_{n\in I}\alpha_n\beta_n\chi_n\| < 2K\|\sum_{n\in J}\alpha_n\chi_n\|$ $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$.

Si los β_n son complejos aplicamos la última desigualdad a las partes reales e imaginarias y obtenemos que:

$$\|\sum_{n\in I}\alpha_n\beta_n\chi_n\| < 4K\|\sum_{n\in J}\alpha_n\chi_n\|$$

De la definición de semivariación se sigue que esta desigualdad prueba que:

$$|||\phi||| < 4K\|\int_\Omega \phi d\mu\| \quad \text{para } \phi \text{ simples.}$$

Probemos ahora que $|||f||| < 4K\|\int_\Omega f d\mu\|$ para cualquier $f \in I(\mu)$.

Consideremos una sucesión de funciones simples $\{\phi_n\}$ con las siguientes propiedades:

$\phi_n \longrightarrow f$ μ-c.d., $\{\int_E \phi_n d\mu\}$ es una sucesión de Cauchy para toda $E \in \Sigma$ y $|||\phi_n - f||| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. En la proposición 4.7 se ha construído una sucesión con tales propiedades.

Sabemos que $|||\phi_n||| < 4K\|\int_\Omega \phi_n d\mu\|$ $n \in \mathbb{N}$

Tomando límites cuando $n \longrightarrow \infty$ obtenemos:

$$|||f||| \leq 4K \left\| \int_{\Omega} f d\mu \right\|$$

Tomando K_1 como el máximo entre 1 y $4K$ obtenemos las desigualdades deseadas. Esto concluye la demostración. //

Observemos que de paso hemos probado la proposición 2.6.

CAPITULO V

MEDIDAS VECTORIALES EN ESPACIOS DE HILBERT.

En este capítulo nos ocupamos de medidas vectoriales con valores en un espacio de Hilbert, en particular estudiaremos las medidas vectoriales ortogonalmente distribuidas, esto es, medidas que toman valores ortogonales cuando se evalúan en conjuntos medibles ajenos dos a dos.

Obtendremos dos resultados importantes para medidas acotadas con valores en un espacio de Hilbert:

1) Cualquier medida vectorial acotada con valores en un espacio de Hilbert puede obtenerse como proyección ortogonal de una medida vectorial ortogonalmente distribuida con valores en un espacio de Hilbert más grande.

2) Dada una medida básica de schauder μ con valores en un es-

pacio de Hilbert, existe un operador lineal acotado con un inverso acotado tal que $Q\mu$ es ortogonalmente distribuida.

El segundo resultado es una generalización del Teorema 2.9.

De aquí en adelante las medidas que consideremos serán finitamente aditivas. En caso de ser σ-aditivas las llamaremos numerablemente aditivas.

5.1 *Definición.* Sea (Ω,Σ) un espacio de medida, H un espacio de Hilbert y μ una medida definida sobre (Ω,Σ) con valores en H. Decimos que μ es ortogonalmente distribuida si para $A, B \in \Sigma$ con $A \cap B = \emptyset$ tenemos que $\mu(A)$ es ortogonal a $\mu(B)$ $(\mu(A) \perp \mu(B))$.

5.2 *Definición.* Sea μ una medida sobre (Ω,Σ) con valores en H y m una medida no negativa finitamente aditiva definida sobre (Ω,Σ). Decimos que m es un 2-mayorante de μ si para toda función simple ϕ con valores complejos se tiene:

$$\left\|\int_\Omega \phi d\mu\right\|^2 \leq \int_\Omega |\phi|^2 dm$$

La existencia de 2-mayorantes para medidas con valores en H es importante para demostrar el primer resultado citado al principio del capítulo.

Se sabe que toda medida acotada μ con valores en un espacio de Hilbert, admite un 2-mayorante m. Además μ es numerablemente aditiva si y sólo si m lo es (Chatterji S.D. [1]).

En particular cualquier medida numerablemente aditiva es acotada (Diestel, Uhl [1]).

Presentamos aquí tres ejemplos de 2 mayorantes para algunas clases de medidas con valores en H.

1° Ejemplo: Sea μ una medida vectorial ortogonalmente distribuida definida sobre (Ω,Σ) y con valores en H.

Definamos $m(A) = \|\mu(A)\|^2$ para $A \in \Sigma$.

Entonces m es una medida no negativa sobre (Ω,Σ), y para cualesquiera funciones simples ϕ, Ψ definidas sobre Ω se tiene:

$$<\int_\Omega \phi d\mu, \int_\Omega \Psi d\mu> = \int_\Omega \phi\bar{\Psi}\, dm$$

En particular $\|\int_\Omega \phi d\mu\|^2 = \int_\Omega |\phi|^2 dm$

Aquí $<,>$ denota el producto interno en H.

La medida m es la medida positiva asociada a μ. En particular es un 2-mayorante de μ.

2° Ejemplo. Sea μ una medida numerablemente aditiva definida sobre (Ω,Σ) con valores en H y supongamos que μ es de variación acotada, es decir:

$$|\mu|(\Omega) = Sup \sum_n \|\mu(A_n)\| < \infty$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\{A_1,\ldots,A_N\} \subset \Sigma$ de Ω.

Definamos $m(E) = |\mu|(\Omega)\,|\mu|(E)$ para $E \in \Sigma$.

Entonces, si $\phi = \sum_J \alpha_J I_{A_J}$ con $\alpha_J \in \mathbb{C}$ y $\{A_1,\ldots,A_N\} \subset \Sigma$ una partición de Ω

$$\|\int_\Omega \phi d\mu\|^2 = \|\sum_J \alpha_J \mu(A_J)\|^2 \leq (\sum_J |\alpha_J|\,\|\mu\|(A_J))^2 \leq (\sum_J |\alpha_J|\,|\mu|(A_J))^2 \leq$$

$$\leq \sum_J |\alpha_J|^2\,|\mu|(A_J)\,\sum_K |\mu|(A_k) \leq \sum_J |\alpha_J|^2\,|\mu|(A_J)\,|\mu|(\Omega) = \int_\Omega |\phi|^2 dm$$

Así, m es un 2-mayorante para μ.

3° Ejemplo: Sea μ definida sobre (Ω,Σ) y numerablemente aditiva con valores en H. Supongamos que existe una medida β numerablemente aditiva con valores complejos definida sobre $(\Omega \times \Omega, \Sigma \times \Sigma)$ tal que $\langle \mu(A), \mu(B)\rangle = \beta(A \times B)$ para cualesquiera $A, B \in \Sigma$.

Definamos $m(E) = |\beta|(E \times \Omega)$ para $E \in \Sigma$.

Entonces m es un 2-mayorante de μ. De hecho, si ϕ es simple, tenemos:

$$\|\int_\Omega \phi d\mu\|^2 = \int_{\Omega \times \Omega} \phi(S)\overline{\phi(T)}\,\beta(dS \times dT) \leq \int_{\Omega \times \Omega} |\phi(S)|\,|\phi(t)|\,|\beta|(dS \times dT) \leq$$

$$\leq \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|\phi(S)|^2 + |\phi(t)|^2}{2}\,|\beta|(dS \times dT) = \int_\Omega |\phi|^2 dm.$$

5.3 *Lema.* Sea F un anillo de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea S el espacio de funciones F simples con valores complejos definidas sobre Ω, supongamos que $B : S \times S \to \mathbb{C}$ es lineal en la primera variable y antilineal en la segunda.

$B(\phi,\Psi) = \overline{B(\Psi,\phi)}$, $B(\phi,\phi) \geq 0$ para $\phi,\Psi \in S$.

Entonces existe un espacio de Hilbert H_B y una medida η sobre (Ω,F) con valores en H_B tal que para cualesquiera ϕ, $\Psi \in S$:

$$B(\phi,\Psi) = < \int_\Omega \phi d\eta, \int_\Omega \Psi d\eta >_B$$

donde $<,>_B$ denota el producto interno en H_B.

Dem.: Sea N el espacio de $\phi \in S$ tales que $B(\phi,\phi) = 0$. De las propiedades de B es fácil mostrar que N es un subespacio lineal de S y $B(,)$ define un producto interno en el espacio cociente S/N.

Sea H_B la completación, con respecto a este producto interno, de S/N.

Sea $J : S \longrightarrow S/N \subset H_B$ el mapeo que manda a toda función a su clase de equivalencia como elemento de H_B.

Definamos $\eta(E) = J(I_E)$ para todo $E \in F$.

Sean $\phi,\Psi \in S$. Entonces:

$\int_\Omega \phi d\eta = J(\phi)$ $\int_\Omega \Psi d\eta = J(\Psi)$ y

$< \int_\Omega \phi d\eta, \int_\Omega \Psi d\eta >_B = < J(\phi), J(\Psi) >_B = B(\phi,\Psi)$. //

Probemos ahora uno de los resultados importantes de este capítulo.

5.4 *Teorema.* (dilatación ortogonalmente distribuida de una medida con valores en un espacio de Hilbert).

Sea Ω un conjunto y F un anillo de subconjuntos de Ω. Sea H un espacio de Hilbert y μ una medida con valores en H definida sobre (Ω,F). Supongamos que existe una medida positiva m que es un 2-mayorante para μ. Entonces existe un espacio de Hilbert H' que contiene H como subespacio y una medida ξ ortogonalmente distribuida con valores en H' definida sobre (Ω,F), cuya medida positiva asociada es m y tal que:

$\mu = P\circ\xi$ donde $P : H' \longrightarrow H$ es la proyección ortogonal.

Dem.: Sea S el espacio de funciones F-simples con valores complejos definidas sobre Ω.

Para $\phi,\Psi \in S$ definimos:

$$B(\phi,\Psi) = \int_\Omega \phi\bar{\Psi}dm - < \int_\Omega \phi d\mu, \int_\Omega \psi d\mu >$$

No es difícil ver que B es lineal en ϕ, antilineal en Ψ, $B(\phi,\Psi) = \overline{B(\Psi,\phi)}$ y $B(\phi,\phi) \geq 0$ para toda $\phi \in S$.

Sean H_B y η el espacio de Hilbert y la medida con valores en H_B construidos en el lema 5.3.

Sea $H' = H \oplus H_B$ y definamos para todo $E \in F$, $\xi(E) = \mu(E) \oplus \eta(E)$. Si ϕ, $\Psi \in S$ entonces:

$$< \int_\Omega \phi d\xi \quad \int_\Omega \Psi d\xi >_{H'} = < \int_\Omega \phi d\mu \quad \int_\Omega \Psi d\mu > + B(\phi,\Psi) = \int_\Omega \phi\bar{\Psi} dm$$

Así, ξ es una medida ortogonalmente distribuida con medida positiva asociada m. Identificamos H con el subespacio $H \oplus \{0\}$ de H' y sea $P : H' \longrightarrow H$ la proyección ortogonal sobre H. Entonces $P \circ \xi = \mu$.

Para llegar al segundo resultado mencionado al principio del capítulo necesitamos definir los conceptos de bimedida positivo definida y la medida diagonal asociada a dicha bimedida. (Seguimos la presentación de Niemi [1]).

5.5 *Definición i)* Sea (Ω,Σ) un espacio de medida, un mapeo $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ es una bimedida, si es separadamente aditiva, es decir si $B(E,\circ)$ y $B(\circ,E')$ son medidas (finitamente aditivas) para cualesquiera $E, E' \in \Sigma$.

ii) Una bimedida $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ es numerablemente aditiva si $B(E,\circ)$ y $B(\circ,E')$ son numerablemente aditivas.

iii) Una bimedida $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ es acotada, si su semivariación es acotada, es decir, si:

$$Sup \left| \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_j b_k \; B(E_j,E'_k) \right| < \infty$$

Donde el supremo está tomado sobre todas las particiones finitas Σ-medibles: $\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} E_j$ $\Omega = \sum_{k=1}^{n} E'_k$ y $a_j, b_k \in \mathbb{C}$ con $|a_j|, |b_k| < 1$

iv) Una bimedida $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ es positiva definida, si $\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_j \bar{a}_k \, B(E_j, E_k) \geq 0$ para $a_J \in \mathbb{C}$, $E_J \in \Sigma$ $J = 1, \ldots, m$.

5.6 *Lema.* Sea $F : \Sigma \longrightarrow H$ una medida vectorial (acotada); Entonces el mapeo $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por:

$$B(E, E') = (F(E), F(E'))_H \qquad E, E' \in \Sigma$$

es, claramente una bimedida positiva definida (acotada); llamada la bimedida definida por F.

Inversamente, se sigue del lema 5.3 que dada una bimedida positiva definida (acotada) $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ existe un espacio de Hilbert H_B y una medida vectorial (acotada) $F_B : \Sigma \longrightarrow H_B$ tal que

a) $(F_B(E), F_B(E'))_{H_B} = B(E, E') \qquad E, E' \in \Sigma$

b) $\overline{SP\,(F_B)} = H_B$

donde $SP(F_B)$ es el espacio lineal generado por $\{F(E) : E \in \Sigma\}$

5.7 *Teorema.* Un mapeo $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ es una bimedida acotada positivo definida y numerablemente aditiva, si y sólo si existe un espacio de Hilbert H y una medida vectorial acotada numerablemente aditiva $F : \Sigma \longrightarrow H$ tal que

$$B(E, E') = (F(E), F(E'))_H \qquad E, E' \in \Sigma$$

Dem.: Si $F : \Sigma \longrightarrow H$ es acotada y numerablemente aditiva, es inmediato verificar que la bimedida $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por F es acotada y numerablemente aditiva.

Inversamente, supongamos que $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ es una bimedida positiva definida, acotada y numerablemente aditiva.

Sea H_B un espacio de Hilbert y $F_B : \longrightarrow H_B$ una medida vectorial acotada con las propiedades a) y b) del lema 5.6.

Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos.

Sea H' un espacio de Hilbert, ξ una medida medida ortogonalmente distribuida definida sobre Σ y con valores en H' y con medida positiva asociada m tal que $H_B \subset H'$ y $F_B = P \circ \xi$ donde P denota la proyección ortogonal $P : H' \to H_B$ (Teorema 5.4) entonces

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \xi(E_n) \right\|^2 = \sum_{n=1}^{m} \| \xi(E_n) \|^2 < \sum_{n=1}^{m} m(E_n) \leq m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) < \infty.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{m} \sum_{n=1}^{m} \xi(E_n)$ existe, y por la continuidad de P tenemos también que

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} F_B\ (E_n) \quad \text{existe.}$$

Sea $A = \lim\limits_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} F_B(E_n)$.

Como $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ es numerablemente aditiva se sigue que para cualquier $E' \in \Sigma$

$$(A,\ F_B(E'))_{H_B} = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} F_B(E_n), F_B(E') \right)_{H_B} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} B(E_n, E') = B(E, E') \quad \text{donde} \quad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Así, $(A, z)_{H_B} = (F_B(E), z)_{H_B}$ para toda $z \in SP\{F_B\}$

como $\overline{SP\{F_B\}} = H_B$ tenemos que $A = F_B(E)$ y por lo tanto F_B es numerablemente aditiva. //

5.8 *Corolario.* Una medida vectorial $F : \Sigma \longrightarrow H$ es acotada y numerablemente aditiva, si y sólo si la medida definida por F es acotada y numerablemente aditiva.

Introducimos ahora el concepto de medida diagonal de una bimedida acotada positivo definida.

Sea F una medida definida sobre (Ω,Σ) con valores en H y ortogonalmente distribuida. Entonces la bimedida definida por F esta concentrada sobre la diagonal de $\Sigma \times \Sigma$. Es decir
$(F(E), F(E'))_H = \upsilon(E \cap E')$ para $E, E' \in \Sigma$ donde
$\upsilon : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ es la medida no negativa acotada definida por
$\upsilon(E) = \|F(E)\|_H^2 \quad E \in \Sigma.$
Claramente υ es numerablemente aditiva si y solo si F lo es.

5.9 *Definición.* Supongamos que Σ es generado por una partición finita $d = \{E_1, \ldots, E_n\}$ de Ω. La medida diagonal de una bimedida positiva definida $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ es la medida no negativa $\Delta_B : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$\Delta_B(E_k) = B(E_k, E_k) \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

Sea Σ una sigma algebra de subconjuntos de Ω. De aquí en adelante por $\mathcal{D}$ denotamos el conjunto de todas las particiones finitas Σ-medibles de Ω. El conjunto $\mathcal{D}$ puede ser considerado como un semigrupo conmutativo con identidad, si la operación de semigrupo asocia a $d, d' \in \mathcal{D}$ la partición refinamiento denotada por dd'.

Presentamos un teorema sin demostración, el cual será útil en lo que resta del capítulo.

5.10 *Teorema.* Sea $C(\mathcal{D})$ el espacio lineal de todas las funciones acotadas con valores en $\mathbb{C}$ definidas sobre $\mathcal{D}$. Entonces existe al menos una medida invariante M de $C(\mathcal{D})$, es decir, existe, un mapeo lineal $M : C(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:

i) $\inf_{d \in \mathcal{D}} g(d) \leq M(g) \leq \sup_{d \in \mathcal{D}} g(d)$ para toda $g \in C(\mathcal{D})$ con valores reales.

ii) $M(\bar{g}) = \overline{M(g)}$

iii) $M(T d' g) = M(g)$ para toda $g \in C(\mathcal{D})$ y $d' \in \mathcal{D}$ donde $T d' g(d) = g(dd')$, $d \in \mathcal{D}$ (ver Day MM [1], Grenleaf F.P. [1]).

Observación: Sea $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ una bimedida positiva definida acotada y sea $\Sigma(d)$ el álgebra generada por $d \in \mathcal{D}$. Por $B(d) : \Sigma(d) \times \Sigma(d) \longrightarrow \mathbb{C}$ denotamos la restricción de $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ a $\Sigma(d) \times \Sigma(d)$ y por $\Delta_{B(d)}$ la medida diagonal de $B(d)$.

5.11 *Teorema.* Sea $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ una bimedida positivo definida acotada. Entonces para cualquier media invariante

$M : C(D) \longrightarrow \mathbb{C}$ el mapeo $\Delta_B^M(E) = M(\Delta_{B(d)}(E))$, $E \in \Sigma$

donde $\Delta_{B(d)}(E) = 0$ si $E \notin \Sigma(D)$ es una medida no-negativa acotada sobre Σ tal que:

i) $\Delta_B^M(E) \leq \upsilon(E)$, $E \in \Sigma$, para cualquier 2-mayorante $\upsilon : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ de la medida vectorial $F_B : \Sigma \longrightarrow H_B$ definida según el lema 5.6.

ii) $\Delta_B^M : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es numerablemente aditiva, si $B : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{C}$ es numerablemente aditiva.

iii) si $E \in \Sigma$ y $B(E',E') = 0$ para toda $E' \subset E$ $E' \in \Sigma$ entonces $\Delta_B^M(E) = 0$.

Dem.: Para ver que el mapeo $\Delta_B^M : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^+$ está bien definido y es aditivo, definamos, para $E \in \Sigma$ fijo, la función $g_E : D \to \mathbb{R}^+$ por

$$g_E(d) = \begin{cases} \Delta_{B(d)}(E) & \text{si} \quad E \in \Sigma(d) \\ 0 & \text{si} \quad E \notin \Sigma(d) \end{cases}$$

Ya que la medida vectorial $F_B : \Sigma \longrightarrow H_B$ definida de acuerdo al lema 5.6 es acotada, existe al menos un 2-mayorante $\upsilon : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ de F_B. Es inmediato de la definición de υ que $0 \leq g_E(d) \leq \upsilon(E)$ para toda $d \in D$, mostrando así que $g_E \in C(D)$ y, usando la propiedad i) del teorema 5.10 obtenemos: $0 \leq \Delta_B^M(E) = M(g_E) \leq \upsilon(E)$ así i) se cumple.

Ahora, fijemos dos conjuntos ajenos $E, E' \in \Sigma$, entonces existe $d_{E,E'} = d' \in D$ tal que $E, E' \in \Sigma(d'd)$ para toda $d \in D$.

Ya que: $T_{d'}.\,g_{E+E'}(d) = \Delta_{B(d'd)}(E+E') =$

$$= \Delta_{B(d'd)}(E) + \Delta_{B(d'd)}(E') =$$

$$= T_{d'}.\,g_E(d) + T_{d'}.\,g_{E'}(d) \quad \text{para toda} \quad d \in D$$

se sigue que:

$$\Delta_B^M(E+E') = M(G_{E+E'}) = M(T_{d'}.\,g_{E+E'}) =$$

$$= M(T_{d'}.\,g_E) + M(T_{d'}.\,g_{E'}) = \Delta_B^M(E) + \Delta_B^M(E')$$

Por consiguiente $\Delta_B^M : \Sigma \to R^+$ es una medida no negativa.

Para mostrar ii) supongamos $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{C}$ es numerablemente aditiva. Entonces $F_B : \Sigma \longrightarrow H_B$ es numerablemente aditiva según el Teorema 5.7, y de la observación posterior a la definición 5.2 existe un 2-mayorante numerablemente aditivo $u' : \Sigma \longrightarrow R^+$ de F_B.

Como $\Delta_B^M(E) \leq u'(E)$ para todo $E \in \Sigma$ se sigue que la medida Δ_B^M es numerablemente aditiva.

Finalmente supongamos que $B(E', E') = 0$ para todo $E' \subset E$ E' $E \in \Sigma$. Entonces $\Delta_{B(d)}(E) = 0$ para toda $d \in D$ implicando $\Delta_B^M(E) = 0$. //

5.12 Definición. Sea $B : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{C}$ una bimedida acotada positivo definida, y sea M una media invariante, entonces la medida acotada no negativa $\Delta_B^M : \Sigma \to R$ definida en el Teorema anterior se llama la medida diagonal de B para la media invariante M.

Caracterizaremos ahora las medidas vectoriales acotadas $F : \Sigma \to H$ las cuales pueden transformarse en una medida vectorial acotada ortogonalmente distribuida $F_o : \Sigma \to H_o$ por medio de un operador lineal acotado con un inverso acotado.

Como corolario obtendremos que una medida básica de schauder μ, con valores en un espacio de Hilbert se puede transformar en una medida ortogonalmente distribuida por medio de un operador acotado con inverso acotado.

5.13 *Teorema.* Sea $F : \Sigma \to H$ una medida acotada con valores en un espacio de Hilbert H. Las siguientes tres condiciones son equivalentes:

i) Existe una medida vectorial acotada ortogonalmente distribuida $F_o : \Sigma \to H_o$ con valores en un espacio de Hilbert H_o y un operador lineal acotado $A : \overline{SP(F_o)} \longrightarrow \overline{SP(F)}$ con un inverso acotado tal que:

$$F(E) = A\, F_o(E) \quad \text{para toda } E \in \Sigma$$

ii) Existe una constante $K > 0$ tal que para cualquier partición Σ-medible $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de Ω se tiene:

$$\frac{1}{K} \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \, \|F(E_j)\|_H^2 \leq \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j F(E_j) \Big\|_H^2 \leq K \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \, \|F(E_j)\|_H^2$$

para $a_j \in \mathbb{C}$ $j = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

iii) Existe una constante $K' > 0$ y una medida acotada no negativa $\upsilon : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\frac{1}{K'}\int|\phi|^2\,d\upsilon \leq \|\int\phi dF\|_H^2 \leq K'\int|\phi|^2 d\upsilon$$

para cualquier función $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ simple Σ-medible.

Dem.: Probaremos i) $\Rightarrow$ iii), ii) $\Rightarrow$ iii) y por último i) $\Rightarrow$ ii).

Supongamos que i) se cumple. Como F_o es ortogonalmente distribuida admite un 2-mayorante m definido por

$m(E) = \|F_o(E)\|^2$ y tal que $\|\int\phi dF_o\|^2 = \int|\phi|^2 dm$

(primer ejemplo, definición 5.2).

Usando la existencia de los operadores acotados A y A^{-1} tenemos que existe una constante K' tal que:

$$\frac{1}{K'}\|\int\phi dF_o\|_{H_o}^2 \leq \|\int\phi dF\|_H^2 \leq K'\|\int\phi dF_o\|_{H_o}^2$$

Por lo tanto: $\frac{1}{K'}\int|\phi|^2 dm \leq \|\int\phi dF\|_H^2 \leq K'\int|\phi|^2 dm$

poniendo $\upsilon = m$ probamos iii).

Supongamos que se cumple iii). Definimos un mapeo

$<,> : SP(F) \times SP(F) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$<x, y> = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_j \bar{b}_k \upsilon(E_j \cap E_k')$ para $x, y \in SP(F)$

con $x = \sum_{j=1}^{m} a_j F(E_j)$, $y = \sum_{k=1}^{m} b_k F(E_k')$

De la desigualdad en iii) se sigue que $<,>$ es una forma sesquilineal acotada, en el sentido de que existe una constante R tal que $|<x, y>| \leq R\|x\|\|y\|$ y además cumple

$\frac{1}{K'}\|x\|_H^2 \leq \langle x, x\rangle \leq K'\|x\|_H^2$ con $x,\ y \in SP(F)$.

Por el Teorema de Lax-Milgram (Yosida [1]) existe un operador acotado $Q : \overline{SP(F)} \to \overline{SP(F)}$ con un inverso acotado tal que $(Qx, y)_H = \langle x, y\rangle$.

Además, de la definición de $\langle,\rangle$ se sigue que Q es positivo y autoadjunto. (Si T es positivo entonces T es autoadjunto. Ver Rudin [1] Teorema 12.32).

Ahora bien, Q tiene una única raíz cuadrada positiva: $Q^{1/2}$ que es un operador acotado (Rudin [1] Teorema 12.33). Y tiene inverso acotado.

El mapeo $F_0 : \Sigma \longrightarrow \overline{SP(F)}$ definido por $F_0(E) = Q^{1/2}F(E)$, $E \in \Sigma$ es una medida vectorial acotada que resulta ser ortogonalmente distribuida pues $(F_0(E), F_0(E'))_H = \nu(E \cap E')$ para $E, E' \in \Sigma$.

Así queda probado i).

Supongamos que ii) es cierto. Sea $\phi = \sum_{J=1}^{m} a_J \chi_{E_J}$ una función simple Σ-medible sobre Ω y sea $d = (E_1, \ldots, E_m)$ la partición correspondiente de Ω. Entonces para cualquier $d' = (E'_1, \ldots, E'_n)$ Tenemos por la desigualdad en ii) y la propiedad iii) del Teorema 5.10 que:

$$\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_J|^2\,\|F(E_J \cap E'_k)\|_H^2 \leq \|\int\phi dF\|_H^2 \leq K\sum_{J=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_J|^2\|F(E_J \cap E'_k)\|_H^2$$

Así, para cualquier media invariante $M : C(D) \longrightarrow \mathbb{C}$ se tiene:

$$\frac{1}{K}\int|\phi|^2\, d\Delta_B^M \leq \|\int\phi dF\|_H^2 \leq K\int|\phi|^2 d\Delta_B^M$$

probando así que iii) se cumple.

Finalmente, supongamos que i) se cumple. Sea

$\{E_1,\dots,E_n\} \in \mathcal{D}$ y $a_J \in \mathbb{C}$ $J = 1,\dots,n.$

Entonces para una constante $K > 0$ tenemos

$$\frac{1}{K}\|\int\phi dF_0\|_{H_0}^2 \leq \|\int\phi dF\|_H^2 \leq K\|\int\phi dF_0\|_{H_0}^2$$

para toda función $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ simple y Σ-medible.

Así, $\|\sum_{J=1}^{n} a_j F(E_J)\|_H^2 \leq K\|\sum_{J=1}^{n} a_J F_0(E_J)\|_{H_0}^2 =$

$$= K\sum_{J=1}^{n}|a_j|^2\|F_0(E_j)\|_{H_0}^2 \leq K^2\sum_{J=1}^{n}|a_J|^2\|F(E_J)\|_H^2$$

De manera similar obtenemos:

$K^{-2}\sum_{J=1}^{n}|a_J|^2\|F(E_J)\|_H^2 \leq \|\sum_{J=1}^{n} a_j F(E_J)\|_H^2$ probando así ii). /

El siguiente resultado generaliza el Teorema 7.9.

5.14 *Teorema.* Sea $\mu : \Sigma \longrightarrow H$ una medida vectorial sobre (Σ,Ω) y con valores en un espacio de Hilbert H. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) μ es una medida básica de schauder.

b) Existe un operador lineal acotado $Q : H \longrightarrow H$ con un inverso acotado tal que $Q\mu$ es una medida ortogonalmente distribuida.

Dem.: Veamos primero b) $\Rightarrow$ a).

Como Q_μ es ortogonalmente distribuida entonces es claro que Q_μ es básicamente distribuida con constante básica 1. Por lo tanto, por los Teoremas 4.2.7 y 4.2.2 obtenemos que μ es básica de schauder.

a) $\Rightarrow$ b): Sea K la constante de la proposición 4.2.3.
Sea $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\} \subset \Sigma$ una partición de Ω y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. De el lema 2.7 obtenemos

$$\inf_{|c_j|=1} \left\|\sum_{j=1}^{n} c_j a_j \mu(E_j)\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \|\mu(E_j)\|^2 \leq \sup_{|c_j|=1} \left\|\sum_{j=1}^{n} c_j a_j \mu(E_j)\right\|^2$$

La propiedad de la constante K en el Teorema 4.2.3 muestra que:

$$\frac{1}{K} \sup_{|c_j|=1} \left\|\sum_{j=1}^{n} c_j a_j \mu(E_j)\right\| \leq \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)\right\| \leq K \inf_{|c_j|=1} \left\|\sum_{j=1}^{n} c_j a_j \mu(E_j)\right\|$$

Combinando las dos desigualdades anteriores tenemos:

$$\frac{1}{K^2} \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \|\mu(E_j)\|^2 \leq \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)\right\|^2 \leq K^2 \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \|\mu(E_j)\|^2$$

Por el Teorema anterior esta desigualdad es equivalente a la existencia de una medida vectorial ortogonalmente distribuida $\mu_0 : \Sigma \longrightarrow H_0$ con valores en un espacio de Hilbert H_0, y un operador lineal acotado $A : \overline{SP(\mu_0)} \longrightarrow \overline{SP(\mu)}$ con inverso acotado tal que $\mu = A\mu_0$.

Sea U una transformación unitaria de $\overline{SP(\mu_0)}$ sobre $\overline{SP(\mu)}$ y definamos $\xi = U\mu_o$.

Definamos ahora $Q = U A^{-1}$ sobre $\overline{SP(\mu)}$ y Q igual a la identidad sobre el complemento ortogonal $H \ominus \overline{SP(\mu)}$. Entonces, es claro que ξ es ortogonalmente distribuida, Q es un operador lineal acotado sobre H con inverso acotado y $\xi = Q\mu$. /

Como un Corolario de este último Teorema presentamos una caracterización de sucesiones básicas incondicionales en espacios de Hilbert. (ver Teorema 2.9)

5.15 *Corolario.* Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio de Hilbert H. Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión básica incondicional si y solo si existe un operador lineal acotado $Q : H \longrightarrow H$ con un inverso acotado tal que $\{Qx_n\}$ es xna familia de vectores ortogonales dos a dos.

La demostración es inmediata al aplicar el Teorema 5.14 a la medida dada por:

$$\mu(E) = \sum_{n \in E} \frac{x_n}{\|x_n\| n^2}$$ definida sobre los subconjuntos de

los enteros positivos.

CAPITULO VI

MEDIDAS ESPECTRALES

En este capítulo nos ocupamos de las medidas espectrales, es decir, medidas que toman valores en espacios de operadores. Veremos algunas relaciones que existen entre las medidas básicas de schauder, las medidas ortogonalmente distribuidas y las medidas espectrales. De hecho, estas últimas son generalizaciones de las otras.

Al final del capítulo daremos una generalización de los Teoremas 2.9 y 5.14 para medidas espectrales cuyos valores son operadores definidos sobre un espacio de Hilbert.

6.1 Definición. Sea X un espacio de Banach, $B(X)$ el conjunto de operadores continuos definidos sobre X y con valores en X, y (Ω,Σ) un espacio medible.

Una medida espectral $F : \Sigma \rightarrow B(X)$ es una función que satisface:

i) Si $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \Sigma$ son ajenos dos a dos, entonces

$F(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n F(A_i)$ con $n \in \mathbb{N}$. En particular $F(\emptyset) = 0$.

ii) $F(\Omega) = I$ donde I denota el operador identidad.

iii) $F(A \cap A') = F(A) \circ (A')$ para $A, A' \in \Sigma$. En particular $F(A)$ es una proyección $\forall A \in \Sigma$.

iv) F es σ-aditiva en la Topología fuerte de operadores.

Observemos que de iv) se sigue que $\forall x \in X$ la función $F(\circ)x : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida vectorial numerablemente aditiva.

6.2 Definición: Por $I(F)$ denotamos al conjunto de funciones $F : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ medibles, tales que $f \in I(Fx)$ $\forall x \in X$ donde Fx denota la medida vectorial $Fx = F(\cdot)x : \Sigma \longrightarrow X$ (Definición 4.4)

6.3 Lema. Sea (Ω,Σ) un espacio medible, y $F : \Sigma \longrightarrow B(X)$ una medida espectral. Sea $x \in X$ fijo y $g \in I(Fx)$. Entonces $F(E) \int_\Omega g dFx = \int_E g dFx$ $\forall E \in \Sigma$.

Dem.: Probemos la igualdad primero para funciones simples. Sea $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por: $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ con $E_i \in \Sigma$ $i \in \{1,\ldots,n\}$, donde χ_{E_i} denota la función característica de E_i, entonces:

$$\int_E g dFx = \int_E \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i} dFx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i \cap E} dFx = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(E \cap E_i)\, x =$$

$$= F(E) \sum_{i=1}^n \alpha_i F(E_i) x = F(E)\left(\int_\Omega g dFx\right)$$

si g no es simple basta tomar una sucesión de funciones simples $\{\phi_n\}$ tal que $\phi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ c.d. respecto de Fx y tal que $\lim_{n\to\infty} \int_E \phi_n dFx$ existe $\forall\ E \in \Sigma$. La igualdad deseada se obtiene tomando límites. //

6.4 *Lema.* Sea $x \in X$ y $g \in I(Fx)$ si $y = \int_\Omega g dFx$ y $f \in I(Fy)$, entonces $f \circ g \in I(Fx)$ y además

$\int_\Omega f dFy = \int_\Omega f g dFx.$

Dem.: Supongamos que f es simple $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$. Por ser f simple, tenemos que $f \in I(Fy)$ y $fg \in I(Fx)$. Ahora:

$$\int_\Omega fg\, dFx = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}\right) g\, dFx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_\Omega \chi_{E_i}\, g\, dFx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{E_i} g\, dFx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, F(E_i) \int_\Omega g\, dFx = \int_\Omega f\, dFy.$$

donde hemos usado el lema 6.3 en el último renglón. Si f no es simple, tomamos una sucesión de funciones simples $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\phi_n \rightarrow f$ c.d. respecto de Fy y tal que $\lim_{n\to\infty} \int_E \phi_n dFy$ exista $\forall\ E \in \Sigma$. La igualdad deseada se obtiene tomando el límite. //

Veamos ahora que las medidas vectoriales generadas por una medida espectral, son medidas básicas de schauder.

6.5 *Teorema.* Sea X un espacio de Banach, (Ω, Σ) un espacio medible y $F : \Sigma \longrightarrow B(X)$ una medida espectral. Entonces $\forall\ x \in X$ la función $F(\circ)x : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida básica de schauder. Además existe $K > 0$ tal que:

$\|\int_\Omega f dFx\| \leq K \|\int_\Omega g dFx\|$ $\forall\, x \in X$ y $\forall\, f, g \in I(F)$ con $|f| \leq |g|$.

Dem.: Denotamos por D el conjunto de particiones de Ω que son finitas y Σ-medibles.

Se sigue de la proposición 4.2.3 que la existencia de la K demuestra que $F(\cdot)x : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida básica de schauder $\forall\, x \in X$.

Probemos primero que la familia de operadores $S = \{F(A) : A \in \Sigma\}$ está uniformemente acotada.

Sea $x \in X$ fija, entonces $\{F(A)x : A \in \Sigma\}$ es un conjunto acotado, pues $F(\cdot)x$ es de semivariación acotada por ser σ-aditiva (ver Diestel Uhl [1]).

Por el principio de acotamiento uniforme (Yosida [1]) existe una constante M tal que $\|F(A)\| \leq M$ $\forall\, A \in \Sigma$. Consideremos ahora el conjunto:

$S' = \{\sum_{A_i \in \Pi} C_i F(A_i) : C_i = \pm 1,\ \Pi \in D\}$ y veamos que las normas de los operadores en S' están acotadas por $2M$.

Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n} = \Pi \in D$ fija, entonces:

$\|\sum_{A_i \in \Pi} C_i F(A_i)\| \leq \|\sum_{C_i = 1} C_i F(A_i)\| + \|\sum_{C_i = -1} C_i F(A_i)\| =$

$= \|F(\bigcup_{c_i=1} A_i)\| + \|F(\bigcup_{c_i=-1} A_i)\| < 2M.$

Consideremos ahora el conjunto:

$$R = \{ \sum_{A_i \in \Pi} \alpha_i F(A_i) : \Pi \in \mathcal{D},\ \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ y } |\alpha_i| < 1\}.$$

Como en la demostración del Teorema 4.2.7 se prueba que R está contenida en la envolvente convexa de S', de esto concluimos que $\|\sum_{A_i \in \Pi} \alpha_i F(A_i)\| < 2M.$

Si los $\alpha_i \in \mathbb{C}$, usando la desigualdad del Triángulo obtenemos

$\|\sum_{A_i \in \Pi} \alpha_i F(A_i)\| < 4M.$ (1)

Demostremos ahora que $\forall\, f \in I(F)$ tal que $|f| < 1$ se tiene que la transformación lineal $T_f : X \to X$ dada por $T_f(x) = \int_\Omega f dFx$ es acotada y, de manera más general, el conjunto $\{T_f \ ;\ f \in I(F),\ |f| < 1\}$ es un conjunto de operadores uniformemente acotado.

Sea $f \in I(F)$ fija con $|f| < 1$ y sea $x \in X$. Veamos que $\|T_f(x)\| < 4M\ \|x\|$.

Como $f \in I(Fx)$ existe una sucesión $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples tales que $\phi_n \longrightarrow f$ c.d. respecto de Fx, $\int_\Omega \phi_n dFx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega f dFx$ y además, podemos suponer que $|\phi_n| < |f|$.

Sea $\epsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|\int_\Omega f dFx - \int_\Omega \phi_n dFx\| < \epsilon.$

Entonces $\|\int_\Omega f dFx\| < \epsilon + \|\int_\Omega \phi_n dFx\| < \epsilon + 4M\|x\|$.

Donde hemos usado la desigualdad (1) en el último renglón.

Por consiguiente: $\|T_f(x)\| = \|\int_\Omega f dFx\| < 4M\|x\|$. Supongamos ahora que $f, g \in I(F)$, $|f| < |g|$ y $x \in X$. Definamos $y = \int_\Omega g dFx$, entonces:

$$\|T_h(y)\| = \|\int_\Omega h dFy\| < 4M \|\int_\Omega g dFx\| \quad \forall \ h \in I(Fy) \ \text{y} \ |h| < 1.$$

En particular, para $h(x) = \begin{cases} f/g(x) & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } g(x) = 0 \end{cases}$

Tenemos:

$$\|\int_\Omega h dFy\| = \|\int_\Omega f/g \, dFy\| = \|\int_\Omega f dFx\| < 4M \|\int_\Omega g dFx\|.$$

Aquí, hemos usado el Lema 6.4.

Poniendo $K = 4M$, el Teorema queda probado.

Consideramos ahora medidas espectrales que toman valores en el espacio de operadores continuos definidos sobre un espacio de Hilbert. En particular generalizamos el concepto de medida vectorial ortogonalmente distribuida (definición 5.1).

6.6 *Definición*. Sea (Ω, Σ) un espacio medible, H un espacio de Hilbert y $F : \Sigma \rightarrow B(H)$ una medida espectral.

Decimos que F es ortogonalmente distribuida, si $\forall \ x \in H$ la medida vectorial $F(\cdot)x : \Sigma \rightarrow H$ es ortogonalmente distribuida.

Demos una caracterización de las medidas espectrales ortogonalmente distribuidas, en términos de los valores que toman.

6.7 Teorema. Sea (Ω,Σ) un espacio medible, H un espacio de Hilbert y $F : \Sigma \longrightarrow B(H)$ una medida espectral. Entonces F es ortogonalmente distribuida si y sólo si $\forall\ A \in \Sigma$, $F(A)$ es una proyección ortogonal.

Dem.: Supongamos que F es ortogonalmente distribuida y probamos que $F(A)$ es un operador hermitiano $\forall\ A \in \Sigma$.

Sean $A, A' \in \Sigma$ con $A \cap A' = \emptyset$, entonces $F(A)x, F(A')x) = 0$ $\forall\ x \in H$, donde $(,)$ denota el producto interno en H, por lo tanto si $y \in H$. $(F(A)x, F(A')y) =$
$= (F(A)\ (F(A)x + F(A')Y),\ F(A')\ (F(A)x + F(A')y)) = 0$

De esto se sigue que:

$(F(A)x,y) = (F(A)x, F(A)y + F(A')y) = (F(A)x, F(A)y) =$

$= (F(A)x + F(A')x, F(A)y) = (X,F(A)u)$. Por lo tanto F es hermitiano.

Supongamos ahora que $F(A)$ es una proyección ortogonal $\forall\ A \in \Sigma$ y mostremos que si $A, A' \in \Sigma$ con $A \cap A' = \emptyset$ entonces $F(A)H \subset (F(A')H)^{\perp}$. Como $F(A')$ es una proyección ortogonal entonces $F(\Omega - A')$ es una proyección ortogonal sobre el espacio: $E = \{X : (F(\Omega) - F(A')x = x\} = \{X : F(A')x = 0\}$. Por lo tanto $E = (F(A')H)^{\perp}$. ∎

Ahora, como $F(A)x = F((\Omega - A')\cap A)x = F(\Omega - A') \circ F(A)x$ se sigue que $F(A)x \in F(\Omega - A')H = (F(A')H)^{\perp}$. //

Denotamos, como antes, por $\mathcal{D}$ el conjunto de particiones Σ-medibles y finitas de Ω.

6.8 Lema. Sea (Ω,Σ) un espacio medible, H un espacio de Hilbert con producto interno dado por $(,)$ y $F : \Sigma \longrightarrow B(H)$ una medida espectral. Sea $\Pi \in \mathcal{D}$, $\Pi = (A_i)_{i=1}^{n}$ entonces $H = H(A_1) \oplus \ldots\ldots \oplus H(A_n)$ donde $H(A_i) = F(A_i)H$. Además la función $<,>_{\Pi} : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$<x,y>_{\Pi} = \sum_{A_i\in\Pi} (F(A_i)x, F(A_i)y)$ es un producto escalar en H

tal que los $H(A_i)$ son ortogonales en $(H, < >_{\Pi})$.

Dem.: Sabemos que $F(\Omega) = I$. Por lo tanto: $H = F(\Omega)H = F(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)H = \sum_{i=1}^{n} F(A_i)H = \sum_{i=1}^{n} H(A_i)$.

Además, sea $i \neq j$, tenemos que si $F(A_i)x = F(A_j)y$ entonces $F(A_i)x = F(A_i)F(A_i)x = F(A_i)F(A_j)y = F(\emptyset)y = 0$.

De esto concluimos que $H = H(A_1) \oplus \ldots \oplus H(A_n)$. Es fácil ver que $<,>_{\Pi}$ es un producto escalar en H. Por último, para probar que $H(A_i) \perp H(A_j)$ en $(H, <,>_{\Pi})$ con $i \neq j$ basta ver que:

$F(A_i) \circ F(A_j) = F(A_i \cap A_j) = 0$. //

6.9 Lema. Sean $x \in H$ y $\Pi \in D$ fijos, entonces:

$$\inf_{|c_A|=1} \| \sum_{A\in\Pi} c_A F(A)x\|^2 < \sum_{A\in\Pi} \|F(A)x\|^2 < \sup_{|c_A|=1} \| \sum_{A\in\Pi} c_A F(A)x\|^2$$

donde los c_A son números complejos.

Dem.: Este resultado se probó en el Lema 2.7

6.10 Teorema. Sea H un esp-cio de Hilbert y (Ω,Σ) un espacio medible. Para $x, y \in H$ fijos, la función $f_{x,y}: D \to \mathbb{C}$, con $F_{x,y}(\Pi) = \langle x,y\rangle_\Pi$ es acotada. Donde $\langle,\rangle_\Pi$ es el producto definido en 6.8.

Dem.: Sea $x \in H$ fijo y sea $\Pi = \{A_1,\ldots,A_n\}$. Por el lema 6.9 existen $\{c_i\}_{i=1}^n$, $\{d_i\}_{i=1}^n$ números complejos de norma uno tales que:

$$\|\sum_{i=1}^n c_i F(A_i)x\|^2 < \sum_{i=1}^n \|F(A_i)x\|^2 < \|\sum_{i=1}^n d_i F(A_i)x\|^2 \quad (1)$$

Definamos $\phi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$, $\Psi = \sum_{i=1}^n d_i \chi_{A_i}$

Del teorema 6.5 tenemos:

$$K^2 \|\int_\Omega \phi dFx\|^2 > \|\int_\Omega 1 dFx\|^2 > \frac{1}{K^2} \|\int \Psi dFx\|^2,$$ o bien:

$$K^2 \|\sum_{i=1}^n c_i F(A_i)x\|^2 > \|x\|^2 > \frac{1}{K^2} \|\sum_{i=1}^n d_i F(A_i)x\|^2$$

Usando (1) y (2) vemos que:

$$\frac{1}{K^2} \|x\|^2 < \sum_{i=1}^n \|F(A_i)x\|^2 < K^2 \|x\|^2,$$ es decir:

$$\frac{1}{K^2} \|x\|^2 < f_{x,x}(\Pi) < K^2 \|x\|^2 \quad \forall\, \Pi \in D.$$

De esto concluimos que

$$|\phi_{x,y}(\Pi)| = |<x,y>_\Pi| \leq |<x,x>_\Pi|^{1/2} \; |<y,y>_\Pi|^{1/2} \leq K^2\|x\|\,\|y\|$$

y $\phi_{x,y} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ está acotada por $K^2 \|x\| \; \|y\|$. //

Consideremos ahora el espacio $C(\mathcal{D})$ consistente de todas las funciones acotadas con valores complejos definidas sobre $\mathcal{D}$.

Del Teorema 6.10 sabemos que $\phi_{x,y} \in C(\mathcal{D})$ $\forall$ $x,y \in H$. En virtud del Teorema 5.10 del capítulo anterior, sabemos que existe una media invariante, $M : C(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$\inf_{\Pi\in C(D)} \phi(\Pi) \leq M(\phi) \leq \sup_{\Pi\in C(D)} \phi(\Pi) \text{ para } \phi \text{ con valores reales.}$$

Por lo tanto, del Teorema anterior se tiene que:

$$\frac{1}{K^2}\|x\|^2 \leq M(\phi_{x,x}) \leq K^2\|x\|^2.$$

Además, de la bilinealidad de las funciones $<,>_\Pi : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ $\forall$ $\Pi \in \mathcal{D}$, del hecho de que $\phi_{x,y} = \overline{\phi_{y,x}}$ y de que las partes reales e imaginarias de $\phi_{x,y} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ son acotadas, se sigue que la función $<,> : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:
$<x,y> = M(\phi_{x,y})$ es un producto escalar en H, tal que

$\frac{1}{K}\|x\| \leq |||x||| \leq K\|x\|$ donde $|||\;|||$ es la norma inducida por $<,>$.

Este producto escalar tiene la siguiente propiedad interesante.

6.11 Lema. Sea H un espacio de Hilbert, (Ω,Σ) un espacio medible y $F : \Sigma \longrightarrow B(H)$ una medida espectral. Para $x, y \in H$ tales que existen $A, A' \in \Sigma$ con $A \cap A' = \emptyset$, $x \in H(A)$ y $y \in H(A')$ se tiene que $\langle x, y\rangle = 0$.

Dem.: Sean $A, A' \in \Sigma$ con $A \cap A' = \emptyset$ sea $\Pi_0 = \{A_1, \ldots, A_n\} \in D$ tal que $A \subset A_i$ y $A' \subset A_j$ con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

De la definición de F es inmediato ver que si $x \in H(A)$, $y \in H(A')$ entonces $x \in H(A_i)$, $y \in H(A_j)$ y del lema 6.8 se sigue que $\langle x, y\rangle_{\Pi_0} = 0$ y en consecuencia:

$\langle x, y\rangle_{\Pi\Pi_0} = \delta_{x,y}(\Pi\Pi_0) = T_{\Pi_0}\delta_{x,y}(\Pi) = 0$

donde $\Pi\Pi_0$ es el refinamiento de Π y Π_0 y T_{Π_0} está definido de la manera siguiente: si $g \in C(D)$ entonces $T_{\Pi_0}g(\Pi) = g(\Pi\Pi_0)$ $\forall\, \Pi \in D$. [Ver Teorema 5.10].

Se sigue entonces del Teorema 5.10 que:

$\langle x, y\rangle = M(\delta_{x,y}) = M(T_{\Pi_0}\delta_{x,y}) = 0$. Esto concluye la demostración.

Probemos ahora el principal resultado de este capítulo el cual generaliza el Teorema 5.14.

6.12 Teorema de Wermer. Sea H un espacio de Hilbert con producto interno dado por $(,)$, (Ω, Σ) un espacio medible y $F : \Sigma \longrightarrow B(H)$ una medida espectral. Entonces existe un operador $Q : H \longrightarrow H$ continuo con inverso continuo tal que $Q^{-1}F(\cdot)Q : \Sigma \longrightarrow B(H)$ es una medida espectral ortogonalmente distribuida.

Dem.: Sea $<,>$ el producto interior definido por la media invariante M como en el lema 6.11. Denotemos por $(H, (\,))$ al espacio original y por $(H,<,>)$ al espacio con el producto interno definido por M.

Sean $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$, $(\delta_\alpha)_{\alpha\in I}$ bases ortonormales de $(H,(,))$ y $(H,<,>)$ respectivamente y definamos $Q : (H,(,)) \longrightarrow (H,(,))$ como sigue:

$$Q(x) = \sum_{\alpha\in I} (x,e_\alpha)\,\delta_\alpha \qquad \forall\, x \in H$$

De las observaciones que preceden al lema 6.11 se sigue que:

$\frac{1}{K}\|Qx\| \leq |||Qx||| \leq K\|Qx\|$ donde $|||\ |||$ es la norma inducida por $<,>$. De esto obtenemos:

$$\frac{1}{K}\|x\| = \frac{1}{K}|||Qx||| \leq \|Qx\| \leq K|||Qx||| = K\|x\|$$

Por consiguiente Q es un operador acotado con inverso acotado. Observemos la siguiente propiedad de Q, la cual será útil para el resto de la demostración.

$<Qx, Qy> = \sum_{\alpha\in I} (x,e_\alpha)\overline{(y,e_\alpha)} = (x,y)$. Observemos que, de hecho $Q : (H, (,)) \longrightarrow (H,<,>)$ es una transformación unitaria.

Definamos ahora $\tilde{F} : \Sigma \longrightarrow B(H)$ por:

$\tilde{F}(A) = Q^{-1}F(A)Q$, $\forall\, A \in \Sigma$. Es claro que $\tilde{F}$ es una medida espectral. Veamos que $\tilde{F}(A)$ es una proyección ortogonal $\forall\, A \in \Sigma$.

Sean $x,y \in H$ y $A, A' \in \Sigma$ con $A \cap A' = \emptyset$. Entonces:

$$(\bar{F}(A)x, \bar{F}(A')y) = (Q^{-1}F(A)Qx, Q^{-1}F(A')Qy) =$$
$$= \langle F(A)Qx, F(A')Qy\rangle = 0$$

donde la última igualdad es consecuencia del lema 6.11.

De esto se sigue que:

$$(\bar{F}(A)x,y) = (\bar{F}(A)x, \bar{F}(A)y + \bar{F}(A^c)y) = (\bar{F}(A)x, \bar{F}(A)y)$$

$$= (\bar{F}(A)x + \bar{F}(A^c)x, \bar{F}(A)y) = (x,\bar{F}(A)y).$$

Por lo tanto $\bar{F}(A)$ es un operador hermitiano $\forall A \in \Sigma$. La idempotencia de $\bar{F}(A)$ se sigue de la idempotencia de $F(A)$, $\forall A \in \Sigma$.

Concluimos que $\bar{F}(A)$ es una proyección ortogonal. Por consiguiente $\bar{F}$ es una medida espectral ortogonalmente distribuida. Esto termina la demostración.

BIBLIOGRAFIA

1 Abreu, J.L. Prediction Theory for Second Order Processes Notas, IIMAS.

2 Abreu, J.L. Salehi H. Schauder Basic Measures in Banach and Hilbert Spaces.

1 Avner, F. Foundations of Modern Analysis Dover Publications, 1982.

1 Banach, S. Theorie des Operations Lineaires, Vol. 1 Varsovia, 1932.

1 Brown, A., Pearcy, C. Introduction to Operator Theory, Vol. 1, Springer Verlag, 1977.

1 Chatterji, S.D. Orthogonally Scattered Dilations of Hilbert Space Valued set Functions. 1981.

1 Day, M.M. Normed Linear Spaces. Third Edition, 1973. Springer, Verlag.

1 Diestel, Uhl. Vector Measures. Mathematical Surveys A.M.S., 1977.

1 Dunford, Schwartz. Linear Operators, Vol. I, III Interscience Publishers, 1958.

1 Geenleaf, F.P. Invariant Means on Topological Groups. Van Nostrand Reinhold, 1969.

1 Halmos, P. Introduction to Hilbert Space. Chelsea, Second Edition, 1957.

1 Hirsh, Smale. Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.
Academic Press, 1974.

1 Horvâth. Topological Vector Spaces and Distributions
Vol. 1. Addison Wesley, 1966.

1 Kalton, Turett, Uhl. Basically Scattered Vector Measures.
Indiana University Mathematics Journal.
Vol. 28, No. 5, 1979.

1 Kolmogorov, Fomin. Introductory Real Analysis
Dover, 1970.

1 Lindenstrauss, Tzafriri. Classical Banach Spaces, Vol. 1
Springer Verlag, 1977.

1 Niemi, H. Diagonal Measure of a Positive Definite Bimeasure. Lectures Notes in Mathematics, 945, Springer Verlag, 1982.

1 Taylor, Lay. Introduction to Functional Analysis.
Wiley and Sons. Second Edition, 1980.

1 Rudin, W. Functional Analysis
Mc Graw-Hill.

1 Yosida Kosaku. Functional Analysis, 6a. Edition.
Springer Verlag, 1980.