

85

00365

lej.
2

```

*****      *****      *****      **      *****
**           **           **           **           **
**           ***          *****          **          *****
**           **           **           **           **
**           *****          *****          **          *****

```

=====

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

=====

PRESENTA

JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

=====

REGULARIZACION DE SINGULARIDADES EN PROBLEMAS DE FUERZA CENTRAL

=====

```

**  **      ***  **      *****      ***  ***
**  **      ***** **      ** * **      ** * **
**  **      **  ** **      *****      ** * **
** * **      **  ****      **  **      **  **
*****      **  ***      **  **      **  **

```

=====

DIRECTOR DE TESIS.

DR. ERNESTO A. LACOMBA ZAMORA
(Universidad Autónoma Metropolitana - Izt.)

1985

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I EL PROBLEMA DE KEPLER	
I.1 El problema de Kepler. Planteamiento del problema.	4
Figs. I.1	9
I.2 Estudio del problema reducido	10
Figs. I.2	18
CAPITULO II REGULARIZACION DE LAS SOLUCIONES	
II.1 Singularidades de las soluciones	22
Figs. II.1	28
II.2 Singularidad regularizable por ramas o regularizable analíticamente	31
Figs. II.2	35
CAPITULO III REGULARIZACIONES DEL TIPO GEOMETRICO	
III.1 Curvas invariantes en el problema reducido	36
Figs. III.1	39
III.2 Regularización de Sundman	41
Figs. III.2	43
III.3 Regularización de Levi-Civita	45
Figs. III.3	55
III.4 Descripción intrínseca de la regularización	62
Figs. III.4	66
CAPITULO IV GEOMETRIA Y SIMETRIAS EN EL PROBLEMA DE KEPLER	
IV.1 Regularización y geometrias clásicas en el problema de Kepler.	67
Figs. IV.1	72
IV.2 Regularización y flujos geodésicos	75

Figs. IV.2	83
IV.3 Simetrías en el problema de Kepler	84
IV.4 Clasificación de órbitas en términos de la curvatura en la métrica de Jacobi	91
Problemas propuestos	98
Bibliografía	100

INTRODUCCION

En 1970 Smale sistematiza un programa para estudiar globalmente a los sistemas mecánicos con simetría desde un punto de vista topológico. En su planteamiento abstracto una simetría es una acción de un grupo de Lie sobre el espacio fase que preserva a la forma de Liouville o forma simpléctica y al Hamiltoniano. El momento es entonces una función definida en el espacio fase con valores en el dual del álgebra de Lie del grupo (función momento de Soriiau). En muchos casos el Hamiltoniano representa la energía total del sistema.

En una serie de artículos [SM], Smale estudia el carácter topológico de las superficies invariantes de energía y momento angular constantes, Ich y al flujo restringido a cada Ich, en problemas de Mecánica Celeste.

Genéricamente, las superficies Ich resultan ser variedades diferenciables. Sin embargo en Mecánica Celeste es usual que sean no compactas y que algunas soluciones se "escapen" de Ich debido a colisiones entre partículas o singularidades de otro tipo. Así, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, se tiene una variedad no compacta y un campo vectorial incompleto en ella.

Como hemos mencionado, las singularidades son de dos tipos: Unas aparecen como el conjunto de colisiones de todos los órdenes en el espacio fase, donde no puede definirse el Hamiltoniano, es decir, no puede extenderse suavemente a tal conjunto singular. El otro tipo de singularidades son singularidades en el sentido de ecuaciones diferenciales: ¿es posible extender una solución más allá de un instante t^* ? Si la respuesta es negativa se dice que t^* es una singularidad de la solución. Para 2 y 3 cuerpos se sabe que si t^* es una singularidad entonces ocurre un choque doble o triple, pero a partir de 4 cuerpos no se sabe si toda singularidad de la solución corresponde a colisión de algún tipo.

La regularización consiste en conectar de una manera coherente una solución que termina en singularidad con otra que sale de singularidad. Si la regularización de soluciones es continua, en algún sentido, respecto a condiciones iniciales, hablamos de una regularización geométrica. (siguiendo la nomenclatura de Easton [EAS])

Vamos a resumir brevemente los aspectos de la regularización estudiados en la tesis.

En el primer capítulo presentamos el problema de Kepler que nos servirá como modelo para estudiar los tipos de regularizaciones más usados.

Estudiamos primero el problema de dos cuerpos y el proceso de reducción del centro de masa. Esto nos conduce al llamado problema de Kepler - que es un caso particular del problema de fuerza central - y, mediante una reducción adicional utilizando la integral de momento angular, llegamos a un problema de fuerza central en una dimensión.

Usando la integral de energía el problema se reduce a cuadraturas y reparametrizando las soluciones se resuelve el problema en forma implícita pues tenemos expresado al tiempo en función de la nueva variable independiente.

La presentación es elemental y no requiere más allá del cálculo diferencial e integral y un poco de geometría.

En el segundo capítulo discutimos con precisión el concepto de singularidad de una solución de una ecuación diferencial con miembros derecho analíticos. Siguiendo la nomenclatura de McGehee introducimos la noción de regularización por ramas o regularización analítica; después vemos que las soluciones obtenidas para el problema de Kepler reducido son regularizables por ramas. Introducimos también el concepto de regularización al infinito, que parece ser novedoso.

En el capítulo III mostramos dos regularizaciones del tipo geométrico de las más importantes: la de Sundman y Levi-Civita. Primeramente describimos las curvas invariantes de energía y momento angular constantes para el problema reducido. Haciendo un cambio de coordenadas y una reparametrización de las soluciones obtenemos la regularización de Sundman.

En el otro tipo de regularización primero reducimos el problema de Kepler a uno en el plano y aprovechando su estructura compleja definimos una transformación de coordenadas que al reparametrizar las soluciones y hacer ciertas identificaciones nos da la regularización de Levi-Civita. Entonces estudiamos la foliación singular de superficies invariantes $1ch$ regularizadas para energía negativa y vemos que es equivalente a la foliación de $\mathbb{R}P^3$ por toros.

Finalmente mencionamos una definición libre de coordenadas del concepto de regularización (geométrica) debida a Pham [PHAM],

En el capítulo IV estudiamos un tipo de regularización debida a Moser - Osipov y Belbruno ([MO],[OS],[BEL]) que muestran que el flujo del problema de Kepler para un valor fijo de la energía es equivalente, excepto por una reparametrización, al flujo geodésico en el haz cotangente unitario a un espacio Riemanniano de curvatura constante, T^*S , siendo el signo de la energía el negativo de la curvatura. La primera sección es una presentación elemental de este resultado debida a Milnor.

Posteriormente analizamos las simetrías del Hamiltoniano de Kepler en T^*S y calculamos la función momento de Soriau. Una componente de la función momento puede identificarse con el momento angular y otra con el vector de Laplace que determina la forma de las órbitas. En la sección 4 estudiamos la métrica de Jacobi para un problema de fuerza central en el plano y se clasifican las órbitas de acuerdo al signo de la curvatura de la variedad Riemanniana (region de Hill) para el potencial homogéneo central $U(x) = 1/|x|^5$.

La presente tesis persigue dos objetivos:

El primero es que sea una lectura accesible a cualquier lector que no sea un experto en la materia pero tenga conocimientos elementales de topología, geometría simpléctica y ecuaciones diferenciales.

Una autocrítica al trabajo es que la atención se centra demasiado en el problema de Kepler. Sin embargo hacemos una autodefensa mencionando al respecto un párrafo del libro de Abraham y Marsden [A-M]:

• Como nos conciernen sistemas con simetría, no estamos estudiando el caso "genérico". Sin embargo, éstos son los casos interesantes. La idea es que ellos son el eje alrededor del cual cualitativamente, diferentes clases de campos vectoriales Hamiltonianos dan vueltas; esto es, ellos son los "puntos de bifurcación" en el conjunto de todos los campos vectoriales Hamiltonianos, siendo las diferentes clases alcanzadas rompiendo la simetría de distintas maneras."

De ahí el segundo objetivo; queremos dejar sentados los antecedentes necesarios para estudiar posteriormente como se "rompen" las simetrías en dos tipos particularmente interesantes del problemas - que estrictamente se salen del terreno de la Mecánica Celeste -:

El problema del potencial homogéneo

$$H(x,y) = |y|^2/2 - 1/|x|^d, \quad x \in E^3 - \{0\}, \quad y \in E^3$$

El problema anisotrópico de Kepler

$$H(x,y) = |y|^2/2 - 1/\sqrt{x_1^2 + mx_2^2}, \quad x \in E^2 - \{0\}, \quad y \in E^2, \quad m > 0.$$

El primer sistema no admite al vector de Laplace como constante de movimiento mientras que el segundo sistema no admite ni al vector de Laplace ni al momento angular como integrales de movimiento. Ambos se reducen al problema de Kepler para $d = 1$ y $m = 1$ respectivamente.

El potencial central homogéneo $1/|x|^d$ es particularmente interesante ya que cualquier problema de fuerza central admite al momento angular como constante de movimiento y puede reducirse a un problema de fuerza central en una dimensión

$$H(r,v) = v^2/2 - U(r) + c^2/2r^3, \quad r = |x|, \quad c = \text{momento angular}$$

Si $U(r)$ tiene un polo algebraico de orden m a lo más en $r = 0$ entonces

$$U(r) = A_{-m}/r^{m/k} + A_{-m+1}/r^{(m+1)/k} + \dots \quad \text{con } k > 1.$$

Si $d = m/k$ entonces $1/r^d$ representa la parte dominante cerca del origen.

Creemos que el estudio de estas "bifurcaciones" es un tema interesante para una investigación posterior.

CAPITULO I EL PROBLEMA DE KEPLER

En las secciones que componen este capítulo veremos como el problema de dos cuerpos puede reducirse al problema de Kepler eliminando las coordenadas del centro de masa. Las constantes de movimiento como el momento angular y la energía permiten reducir entonces el problema a cuadraturas. Un cambio en la variable de integración conduce a una integración directa obteniéndose expresiones implícitas para las soluciones, a partir de las cuales obtenemos desarrollos en series de potencias fraccionarias en la variable temporal.

I.1 EL PROBLEMA DE KEPLER. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Dos partículas de masas m_1 y m_2 se encuentran sujetas a la acción de fuerzas gravitacionales mutuas. Las ecuaciones de movimiento son

$$(1) \dots \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -m_1 m_2 (x_1 - x_2) / r_{12}^3 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -m_2 m_1 (x_2 - x_1) / r_{21}^3 \end{cases}$$

donde $x_i \in E^3 - \{0\}$, $r_{12} = r_{21} = |x_1 - x_2|$ y hemos tomado unidades tales que la constante de gravitación sea igual a 1.

*** VER FIGURA 1 ***

Podemos escribir el sistema (1) como un sistema de ecuaciones de primer orden:

$$(2) \dots \begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = -m_2 (x_1 - x_2) / r_{12}^3 \\ \dot{x}_2 = v_2 \\ \dot{v}_2 = -m_1 (x_2 - x_1) / r_{21}^3 \end{cases}$$

y son necesarias en total 12 constantes de integración.

Las ecuaciones (2) también pueden escribirse en forma Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \partial H / \partial p_i \\ \dot{p}_i &= -\partial H / \partial x_i \quad p_i := m_i v_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

donde

$$H(\underline{x}_1, \underline{p}_1) = |\underline{p}_1|^2/2m_1 + |\underline{p}_2|^2/2m_2 - m_1 m_2 / |\underline{x}_1 - \underline{x}_2|$$

Veremos que como consecuencia de la invariancia del Hamiltoniano respecto a traslaciones $\underline{x}_i \rightarrow \underline{x}_i + \underline{s}$, $i = 1, 2$, podemos reducir el sistema de 12 ecuaciones a un sistema de 6 ecuaciones que además podrán escribirse en forma Hamiltoniana.

Pasando a coordenadas relativas y de centro de masa

$$\underline{r} = \underline{x}_2 - \underline{x}_1$$

$$\underline{R} = (m_1 \underline{x}_1 + m_2 \underline{x}_2) / (m_1 + m_2)$$

Los momentos se transforman de acuerdo a

$$\underline{p}_1 = m_1 \underline{Q} / (m_1 + m_2) - \underline{p}$$

$$\underline{p}_2 = m_2 \underline{Q} / (m_1 + m_2) + \underline{p}$$

donde \underline{p} es el momento conjugado a \underline{r} y \underline{Q} el momento conjugado a \underline{R} .

El Hamiltoniano se escribe como

$$H(\underline{r}, \underline{R}, \underline{p}, \underline{Q}) = |\underline{p}|^2/2m + |\underline{Q}|^2/2M - mM/|\underline{r}|$$

donde $M := m_1 + m_2$ es la masa del sistema y

$m := m_1 m_2 / M$ es la masa reducida.

Ahora tenemos $\partial H / \partial \underline{R} = 0$, luego $\dot{\underline{Q}} = 0$. Tomamos entonces $\underline{Q} = \text{cte.}$ y las ecuaciones quedan

$$(3) \dots \quad \dot{\underline{r}} = \partial H / \partial \underline{p} = \underline{p}/m$$

$$\text{equivalentemente} \quad \dot{\underline{p}} = - \partial H / \partial \underline{r} = - m M \underline{r} / |\underline{r}|^3$$

$$(4) \dots \quad \ddot{\underline{r}} = - M \underline{r} / |\underline{r}|^3$$

El sistema (3) es de orden 6 y la solución depende de 6 constantes arbitrarias $\underline{r}(t_0)$ y $\underline{p}(t_0)$. Una vez resuelto el sistema (3), podemos resolver la ecuación de Hamilton restante

$$\dot{\underline{R}} = \partial H / \partial \underline{Q} = \underline{Q}/M$$

para $\underline{Q} = \text{cte.}$, que en este caso es trivial y nos dice que el centro de masa se mueve a velocidad constante. En un caso general, sustituiríamos la solución $\underline{r}(t)$, $\underline{p}(t)$ en el miembro derecho de la última ecuación:

$$\dot{\underline{R}} = \partial H / \partial \underline{Q}(\underline{r}(t), \underline{R}, \underline{p}(t), \text{cte.})$$

obteniendo así un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, no autónomo.

Hemos visto entonces que el problema de dos cuerpos (1) puede reducirse a un problema de fuerza central (3) o (4), en el que se tiene un centro atractor de masa m sujeta a tal campo gravitatorio.

Si reparametrizamos las soluciones introduciendo un cambio de escala del tiempo $t = M^{-1/2} s$, la ecuación (4) se reduce a $\ddot{\underline{r}} = -\underline{r}/|\underline{r}|^3$ donde ahora convenimos en denotar por $(\dot{\quad})$ a d/ds .

DEFINICION. - El problema de fuerza central definido por las ecuaciones

$$\dot{\underline{r}} = \underline{v}$$

$$\dot{\underline{v}} = -\underline{r}/|\underline{r}|^3$$

equivalentemente

$$\ddot{\underline{r}} = -\underline{r}/|\underline{r}|^3$$

lo llamaremos el problema de Kepler.

El problema de Kepler admite una reducción adicional como resultado de la invariancia del Hamiltoniano

$$H(\underline{r}, \underline{v}) = |\underline{v}|^2/2 - 1/|\underline{r}|$$

ante rotaciones $\underline{r} \rightarrow A \underline{r}$, $A \in SO(3)$.

En efecto, $\underline{c} = \underline{r} \times \underline{v} = \underline{r} \times \dot{\underline{r}}$ es una constante de movimiento como puede comprobarse:

Ya que $\underline{r} \times \underline{v} = \underline{r} \times \dot{\underline{r}} = \underline{0}$, entonces

$$\dot{\underline{c}} = \dot{\underline{r}} \times \underline{v} + \underline{r} \times \dot{\underline{v}} = \underline{r} \times \dot{\underline{v}}$$

pero $\underline{r} \times \dot{\underline{v}} = -(\underline{r} \times \underline{r})/|\underline{r}|^3 = \underline{0}$, luego $\dot{\underline{c}} = \underline{0}$ y \underline{c} es

constante de movimiento.

Fijemos el momento angular $\underline{r} \times \underline{v} = \underline{c}$. Existe $A \in SO(3)$ tal que

$$A \underline{c} = (0, 0, c).$$

Hagamos la transformación

$$\begin{aligned} \underline{r}' &= A \underline{r} \\ \underline{v}' &= A \underline{v} \end{aligned}$$

Esta es una transformación canónica pues

$$\langle \underline{v}', d\underline{r}' \rangle = \langle A \underline{v}, d(A \underline{r}) \rangle = \langle A \underline{v}, A d\underline{r} \rangle = \langle \underline{v}, d\underline{r} \rangle,$$

luego $\underline{r}' \times \underline{v}' = (0, 0, c)$ y el nuevo Hamiltoniano queda idéntico solamente con \underline{r}' y \underline{v}' en lugar de \underline{r} y \underline{v} . La condición

$$\underline{r}' \times \underline{v}' = (0, 0, c)$$

significa que \underline{r}' y \underline{v}' están sobre un mismo plano si $c \neq 0$ o son colineales si $c = 0$. Tomando coordenadas $\underline{r}' = (x, y, z)$ y $\underline{v}' = (u, v, w)$, ésto implica que $z = 0$ y $w = 0$. Así el problema de

fuerza central se ha reducido a un problema de fuerza central en el plano con un Hamiltoniano (omitiendo primas)

$$H(\underline{r}, \underline{v}) = |\underline{v}|^2/2 - 1/|\underline{r}| \quad \underline{r} \in E^2 - \{0\}, \quad \underline{v} \in E^2.$$

con las ecuaciones de movimiento

$$(5) \dots \begin{cases} \dot{\underline{r}} = \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} = -\underline{r}/|\underline{r}|^3 \end{cases}$$

este es un sistema de orden 4.

Veamos ahora el método de Laplace para obtener la formas de las trayectorias. Escribimos

$$d/ds (\underline{r}/r) = (\underline{r}\ddot{\underline{r}} - \dot{\underline{r}}\dot{\underline{r}})/r^2, \text{ donde } r := |\underline{r}|$$

multiplicando numerador y denominador por r y tomando en cuenta las formulas

$$r^2 = \langle \underline{r}, \underline{r} \rangle, \quad r\dot{\underline{r}} = \langle \underline{r}, \dot{\underline{r}} \rangle, \text{ entonces}$$

$$d/ds (\underline{r}/r) = [\langle \underline{r}, \underline{r} \rangle \ddot{\underline{r}} - \langle \underline{r}, \dot{\underline{r}} \rangle \dot{\underline{r}}] / r^3 = (\underline{r} \times \dot{\underline{r}}) \times \underline{r} / r^3$$

sustituimos $\underline{r} \times \dot{\underline{r}} = \underline{c}$ y $\underline{r}/r^3 = -\ddot{\underline{r}}$ de las ecuaciones de movimiento para obtener

$$d/ds (\underline{r}/r) = -\underline{c} \times \ddot{\underline{r}},$$

integrando:

$$\underline{r}/r + \underline{e} = -\underline{c} \times \dot{\underline{r}} \text{ para un vector constante } \underline{e}.$$

Tomando el producto escalar con \underline{r} , tenemos

$$r + \langle \underline{e}, \underline{r} \rangle = c^2$$

Si escribimos el producto escalar $\langle \underline{e}, \underline{r} \rangle$ como $\langle \underline{e}, \underline{r} \rangle = e r \cos \theta$, obtenemos la ecuación de una cónica en coordenadas polares

$$(6) \dots \quad r = c^2 / (1 + e \cos \theta)$$

donde θ es el ángulo entre el vector de posición \underline{r} y el vector de Laplace \underline{e} . La ecuación (6) nos permite dar una interpretación geométrica de \underline{e} . Su magnitud da la excentricidad de la cónica y su dirección define la orientación del eje de ésta.

*** VER FIGURA 2 ***

Podemos hallar una relación entre las constantes c, e y h a partir de la ecuación

$$\underline{r}/r + \underline{e} = -\underline{c} \times \dot{\underline{r}}$$

Tomando la norma al cuadrado de ambos lados,

$$1 + e^2 + 2\langle \underline{e}, \underline{r} \rangle / r = c^2 |\dot{\underline{r}}|^2$$

sustituyendo $\langle \underline{e}, \underline{r} \rangle$ de la ecuación (6) y $|\dot{\underline{r}}|^2$ de la ecuación de

la energía obtenemos la ecuación "fundamental"

$$(7) \dots \quad e^2 - 1 = 2hc^2$$

El plano de movimiento está definido por una línea perpendicular al plano. Así, al fijar una línea, hemos fijado la dirección aunque no la magnitud y sentido del momento angular. De este modo si los valores de r y \underline{v} están restringidos por las condiciones $r \in E^2 - \{0\}$, $\underline{v} \in E^2$, entonces el momento angular es ahora una función

$$E^2 - \{0\} \times E^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Veremos que ésta es una integral del sistema reducido, que nos permitirá hacer una reducción adicional.

El momento angular se expresa como

$$c = x_1 v_2 - x_2 v_1 \quad \underline{r} = (x_1, x_2)$$

$$\underline{v} = (v_1, v_2)$$

Introduciendo coordenadas polares en el plano

$$x_1 = r \cos \theta \quad v = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta$$

$$x_2 = r \sin \theta \quad u/r = -v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta$$

donde U es el momento conjugado a r y u el momento conjugado a θ , permite expresar el momento angular simplemente como la coordenada u , $c = u$, y las ecuaciones de movimiento (5) quedan

$$\dot{r} = U \quad \dot{U} = -1/r^2 + u/r^3$$

$$\dot{\theta} = u/r^2 \quad \dot{u} = 0$$

el Hamiltoniano es,

$$H(r, \theta, U, u) = U^2/2 + u^2/2r^2 - 1/r$$

Al igual que en la reducción a coordenadas relativas, fijamos $u = \text{cte.}$ y resolvemos las ecuaciones para las coordenadas radiales

$$\dot{r} = U \quad \dot{U} = -1/r^2 + c^2/r^3$$

Una vez resuelto $r(t)$, $U(t)$ para condiciones iniciales dadas r_0 , U_0 , podemos sustituir $r(t)$ en la ecuación para θ : $\dot{\theta} = c/r^2(t)$ que al integrar da

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t c/r^2(t) dt + \theta_0.$$

Como antes, la reducción puede escribirse en forma Hamiltoniana dependiendo de un parámetro c

$$(9) \dots \quad \begin{aligned} \dot{r} &= \partial H / \partial U, & \dot{U} &= -\partial H / \partial r \quad \text{con} \\ H(r, U) &= U^2/2 - 1/r + c^2/2r^2 \end{aligned}$$

FIGURAS DE LA SECCION I.1

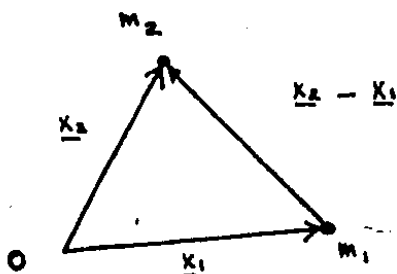


Fig.1 Problema de dos cuerpos.

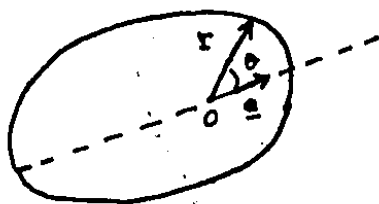


Fig.2 Interpretación del vector de Laplace.

I.2 ESTUDIO DEL PROBLEMA REDUCIDO.

A continuación presentamos una solución elemental al problema de Kepler. Para simplificar la escritura, en lo que sigue denotaremos las coordenadas radiales por (r, v) en vez de (r, V) ; el tiempo s lo denotaremos por t para reservar la letra s para un desarrollo posterior.

A partir de las condiciones iniciales r_0, v_0 , obtenemos un valor para la energía h

$$v_0^2/2 - 1/r_0 + c^2/2r_0^2 = h.$$

luego

$$(1) \dots \begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = h + \frac{1}{r} - \frac{c^2}{2r^2} \right. \\ & \left. \left| \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2 \left(h + \frac{1}{r} - \frac{c^2}{2r^2} \right)} \right. \end{aligned}$$

Hay una solución de (I.1.8) para la que $dr/dt \equiv 0$; ésta es una solución circular en el problema original. La solución es directa:

$$r(t) = r_0, \quad \theta(t) = ct/r_0^2 + \theta_0.$$

Supongamos lo contrario: O sea, que en un intervalo maximal (t_1, t_2) , se tiene $dr/dt \neq 0$. Para este intervalo

$$(2) \dots \quad t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \left(2 \left(h + \frac{1}{r} - \frac{c^2}{2r^2} \right) \right)^{-1/2} dr$$

donde t_0 es el instante en que se fijan las condiciones iniciales $r(t_0) = r_0, v(t_0) = v_0$. La integración de (2) puede simplificarse si hacemos previamente el cambio de variable independiente

$$(3) \dots \quad dt/ds = r(t(s)), \quad t(0) = t_0.$$

Es decir, para una solución particular $(r(t), v(t))$ definimos a $t = f(s)$ implícitamente por la ecuación (3) o equivalentemente

$$s = \int_{t_0}^t ds/r(s).$$

Con esta sustitución tenemos

$$(4) \dots \quad ds/dr = \pm \left(\frac{1}{2} \right)^{-1/2} \left(hr^2 + r - \frac{c^2}{2} \right)^{-1/2}.$$

Vamos a suponer que el intervalo (t_1, t_2) contiene al origen y que $t_0 = 0$. Luego $s = 0$ para $t = 0$. Integrando (4):

$$s = \pm \left(\frac{1}{2} \right)^{-1/2} \int_{r_0}^r \left(hr^2 + r - \frac{c^2}{2} \right)^{-1/2} dr$$

Tomando en cuenta la identidad (I.1.7), el polinomio $hr^2 + r - c^2/2$ puede factorizarse como

$$hr^2 + r - c^2/2 = h \left[r + \frac{(1+e)}{2h} \right] \left[r + \frac{(1-e)}{2h} \right] \quad \text{si } h \neq 0.$$

Dependiendo del signo de la energía, tenemos tres casos

CASO 1: $h = 0$.

$$s = \pm \left(\frac{1}{2} \right)^{-1/2} \int_{r_0}^r (r - c^2/2)^{-1/2} dr$$
$$= \sqrt{2} \sqrt{r - c^2/2}, \text{ donde hemos supuesto } r_0 = c^2/2 > 0$$

Por lo tanto

$$r = s^2/2 + c^2/2.$$

Integrando la ecuación $dt/ds = r(t(s)) = s^2/2 + c^2/2$ obtenemos

$$t = s^3/6 + c^2 s/2.$$

La variable θ puede escribirse también en términos del parámetro s como sigue:

Por conservación del momento angular, $d\theta/dt = c/r^2$, o bien $d\theta/ds = c/r$. Integrando esta última ecuación,

$$\theta = c \int_0^s (s^2/2 + c^2/2)^{-1} ds = 2 \arctan(s/c)$$

despejando a s

$$s = c \tan(\theta/2).$$

*** VEASE FIGURA 1 **

Viendo la figura 1, podemos comprobar que la transformación de θ a s se lleva a cabo mediante la proyección estereográfica desde el polo norte de un círculo de radio 1 sobre la línea ecuatorial AB, seguida de una homotecia.

Utilizando la regla de la cadena vemos que

$$dr(t(s))/ds = dr/dt(t(s)) dt/ds$$

$$\Rightarrow s = dr/dt(t(s)) s^2/2$$

$$\Rightarrow dr/dt(t(s)) = 2/(s + c^2/s)$$

Resumiendo,

$$(5) \dots \begin{cases} r(t(s)) = s^2/2 + c^2/2 \\ \theta(t(s)) = 2 \arctan(s/c) \\ v(t(s)) = 2/(s + c^2/s) \\ t(s) = s^3/6 + c^2 s/2. \end{cases}$$

Ya que $t(s)$ es creciente, es posible despejar a s como función de t para obtener a r , θ , y v como funciones de t .

Finalmente mostramos las gráficas de r , t y θ como funciones de s .

*** VER FIGURA 2 ***

Las expresiones (5) muestran que si $c \neq 0$ podríamos haber utilizado a la variable angular θ como variable independiente,

del mismo modo que s obteniendo

$$r = r(\theta) \quad , \quad v = v(\theta) \quad , \quad t = t(\theta) \quad , \quad \theta = \theta$$

Si $c = 0$, θ no es una variable adecuada. En ese caso las expresiones (5) se reducen a

$$r(t(s)) = s^2 / 2$$

$$v(t(s)) = 2/s$$

$$t(s) = s^3 / 6$$

La variable angular θ es constante en el intervalo

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

luego, $\theta = \theta_0$ antes de colisión y $\theta = \theta_1$ después de colisión. Es decir la partícula llega con una dirección dada y es "dispersada" en otra dirección...

CASO II: $h > 0$.

La integración de (4) se reduce a

$$s = \pm w^{-1} \int_{r_0}^r [(r + w^{-2}(1+e))(r + w^{-2}(1-e))]^{-1/2} dr$$

donde $e > 1$ y $w = \sqrt{2h}$.

$$s = \pm w^{-1} [\cosh^{-1}(w^2 r + 1)/e - \cosh^{-1}(w^2 r + 1)/e]$$

Ya que $e > 1$, entonces $(e-1)/w^2 > 0$. Para simplificar los cálculos tomemos este valor como condición inicial r_0 . Esta es la distancia mas cercana al origen (perihelio). Luego el término constante que aparece en el segundo término es cero y

$$s = \pm w^{-1} \cosh^{-1}(w^2 r + 1)/e$$

Despejando,

$$\begin{aligned} r &= (e/w^2) \cosh ws - 1/w^2 \\ &= w^{-2} (e \cosh ws - 1) \end{aligned}$$

Integrando la ecuación $dt/ds = r(t(s))$,

$$t(s) = w^{-3} (e \sinh ws - ws)$$

Integrando la ecuación $d\theta/ds = c/r(t(s))$, obtenemos

$$\theta = w^2 c \int_0^s (e \cosh ws - 1)^{-1} ds = -wc \int_0^{ws} (1 - e \cosh x)^{-1} dx$$

Haciendo la sustitución $z = \tanh x/2$, se tiene $dx = 2 dz / (1 - z^2)$ y la última integral se reduce a una integral racional.

El resultado final es:

$$\theta/2 = \tan^{-1} [(e - 1)^{-1/2} (e + 1)^{1/2} \tanh ws/2]$$

o equivalentemente

$$s/2 = w^{-1} \tanh [(e - 1)^{1/2} (e + 1)^{-1/2} \tan \theta/2] .$$

Estas dos relaciones pueden escribirse de manera sugestiva como

$$(e - 1)^{1/2} \tan \theta/2 = (e + 1)^{1/2} \tanh w s/2 .$$

Se puede dar una interpretación geométrica parecida al caso $h = 0$ para describir la relación entre θ y s . Para simplificar los cálculos supongase que $h = 1/2$ y escribase la relación como

$$(e - 1)^{1/2} \tan \theta/2 = (e + 1)^{1/2} \tanh s/2 .$$

Las cantidades $\tan \theta/2$ y $\tanh s/2$ son las proyecciones estereográficas del círculo unitario $u^2 + v^2 = 1$ y de la hipérbola $u^2 - v^2 = 1$ desde el punto $(-1, 0)$ como se muestra en la figura 3.

*** vease figura 3 ***

Los factores $(e - 1)^{1/2}$ y $(e + 1)^{1/2}$ pueden interpretarse como homotecias. La transformación completa que lleva θ en s y viceversa puede entonces interpretarse como en la figura 4.

*** VER FIGURA 4 ***

Aplicando la regla de la cadena para calcular $dr(t(s))/ds$ obtenemos igual que antes

$$dr/dt(t(s)) = ew (e \cosh ws - 1)^{-1} \sinh ws .$$

Resumiendo,

$$(6) \dots \left\{ \begin{array}{l} r(t(s)) = w^{-2} (e \cosh ws - 1) \\ \theta(t(s)) = 2 \tan^{-1} [(e + 1)^{1/2} (e - 1)^{-1/2} \tanh ws/2] \\ dr/dt(t(s)) = ew (e \cosh ws - 1)^{-1} \sinh ws \\ t(s) = w^{-3} (e \sinh ws - ws) . \end{array} \right.$$

Si $c \neq 0$ entonces $\theta(s)$ es invertible y podríamos haber utilizado a θ como variable independiente de la misma manera que s para obtener

$$r = r(\theta) , v = v(\theta) , t = t(\theta) , \theta = \theta$$

Si $c = 0$, a partir de la igualdad fundamental $e^2 - 1 = 2hc^2$ se sigue que $e = 1$ y las expresiones (6) se simplifican,

$$r(t(s)) = w^{-2} (\cosh ws - 1)$$

$$v(t(s)) = w (\cosh ws - 1)^{-1} \sinh ws$$

$$t(s) = w^{-3} (\sinh ws - ws)$$

Además se tiene que θ es constante en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Finalmente mostramos las graficas de r , θ y t en funcion de s

*** VEASE FIGURA 5 ***

CASO III: $h < 0$.

El desarrollo es analogo al caso $h > 0$. La integral queda

$$s = +w^{-1} \int_{r_0}^r [(-r + w^{-2}(1+e))(r - w^{-2}(1-e))]^{-1/2} dr$$

donde $0 < e < 1$ y $w = \sqrt{-2h}$.

En el caso $h < 0$, la derivada dr/ds es cero para $r = w^{-2}(1+e)$. En el intervalo $w^{-2}(1-e) < r < w^{-2}(1+e)$, dr/dt tiene un signo constante. Supongamos que este signo es +. Entonces,

$$s = w^{-1} [\sin^{-1}((w^2 r - 1)/e) - \sin^{-1}((w^2 r_0 - 1)/e)].$$

Tomemos $r_0 = w^{-2}(1-e)$, la distancia mínima al origen (perihelio), luego

$$s = w^{-1} [\sin^{-1}((w^2 r - 1)/e) + \pi/2]$$

(nótese de aquí que $|s| < w^{-1}\pi$).

Despejando a r ,

$$r = w^{-2} (1 - e \cos ws).$$

Integrando $dt/ds = r(t(s))$,

$$t = w^{-3} (ws - e \sin ws).$$

Integrando la ecuacion $d\theta/ds = c/r$,

$$\theta = wc \int_0^s (1 - e \cos ws)^{-1} ds$$

$$\theta/2 = \tan^{-1} [(1+e)^{1/2} (1-e)^{-1/2} \tan ws/2]$$

que tambien podemos escribir como

$$(1-e)^{1/2} \tan \theta/2 = (1+e)^{1/2} \tan ws/2.$$

La transformacion que lleva θ en s puede verse como una transformacion del círculo unitario en si mismo como se muestra en la figura (6) (tomando $h = -1/2$).

*** VER FIGURA 6 ***

Aplicando la regla de la cadena se verifica facilmente que

$$dr/dt(t(s)) = ew (1 - e \cos ws)^{-1} \text{sen } ws.$$

Resumiendo,

$$r(t(s)) = w^{-2} (1 - e \cos ws)$$

$$\theta(t(s)) = 2 \tan^{-1} [(1 + e)^{1/2} (1 - e)^{-1/2} \tan ws/2]$$

$$dr/dt(t(s)) = ew (1 - e \cos ws)^{-1} \text{sen } ws$$

$$t(s) = w^{-3} (ws - e \text{sen } ws).$$

Igual que antes podriamos haber utilizado a θ como variable independiente si $c \neq 0$. En caso contrario, las ecuaciones se simplifican;

$$(7) \dots \begin{cases} r(t(s)) = w^{-2} (1 - \cos ws) \\ v(t(s)) = w (1 - \cos ws)^{-1} \text{sen } ws \\ t(s) = w^{-3} (ws - \text{sen } ws) \end{cases}$$

mientras que θ es constante en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Las graficas de r , v y t como funcion de s se muestran en la figura 7.

*** VER FIGURA 7 ***

Hagamos $w = \sqrt{2|h|}$ si $h \neq 0$, y reescribamos las expresiones para r , la distancia al origen, y v , la velocidad radial, en terminos del parametro s para los distintos valores de la energia; para $c=0$.

$h = 0$

$$(8) \dots \begin{cases} r(s) = s^2 / 2 \\ v(s) = 2/s \\ t(s) = s^3 / 6 \end{cases}$$

$h > 0$

$$(9) \dots \begin{cases} r(s) = w^{-2} (\cos ws - 1) \\ v(s) = w (\cosh ws - 1)^{-1} \text{senh } ws \\ t(s) = w^{-3} (\text{senh } ws - ws) \end{cases}$$

$h < 0$

$$(10) \dots \begin{cases} r(s) = w^{-2} (1 - \cos ws) \\ v(s) = w (1 - \cos ws)^{-1} \text{sen } ws \\ t(s) = w^{-3} (ws - \text{sen } ws) \end{cases}$$

Estas expresiones son apropiadas para un esquema numérico. Vamos a encontrar desarrollos en serie para r y v en términos de t .

Para $h = 0$ $s = (6)^{1/3} t^{1/3}$, luego

$$r(t) = (6)^{2/3} t^{2/3} / 2$$

$$v(t) = (6)^{2/3} t^{-1/3} / 3$$

Para $h > 0$

$$\begin{aligned} r(s) &= w^{-2} [1 + (ws)^2 / 2! + (ws)^4 / 4! + \dots - 1] \\ &= s^2 / 2 + o(s^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(s) &= w^{-3} [ws + (ws)^3 / 3! + \dots - ws] \\ &= s^3 / 3! + o(s^5). \end{aligned}$$

Invirtiendo esta última serie [HI, p.265],

$$s = (3!)^{1/3} t^{1/3} + o(t^{4/3}), \text{ luego}$$

$$r(t) = (3!)^{2/3} t^{2/3} / 2 + o(t^{5/3})$$

$$v(t) = (3!)^{2/3} t^{-1/3} / 3 + o(t^{2/3}).$$

Para $h < 0$

$$\begin{aligned} r(s) &= w^{-2} [1 - (ws)^2 / 2! + (ws)^4 / 4! + \dots - 1] \\ &= s^2 / 2 + o(s^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(s) &= w^{-3} [ws - ws + (ws)^3 / 3! - (ws)^5 / 5! + \dots] \\ &= s^3 / 3! + o(s^5), \text{ invirtiendo esta serie,} \end{aligned}$$

$$s(t) = (3!)^{1/3} t^{1/3} + o(t^{4/3})$$

luego

$$r(t) = (3!)^{2/3} t^{2/3} / 2 + o(t^{5/3})$$

$$v(t) = (3!)^{2/3} t^{-1/3} / 3 + o(t^{2/3}).$$

Por lo tanto se tiene que independiente del signo de h ,

$$r(t) = O(t^{2/3}) \text{ y } v(t) = O(t^{-1/3}) \text{ cuando } t \rightarrow 0.$$

OBSERVACIONES

1) r y t son funciones \mathbb{R} - analíticas de s que pueden extenderse de manera natural a funciones \mathbb{C} - analíticas en todo el plano complejo, considerando a r , t y s como variables complejas. De todos modos r y t son reales para s real.

2) $t(s)$ es un homeomorfismo global considerando a s y t reales. Si t y s son complejas, entonces $t(s)$ es un biholomorfismo local excepto en $s = 0$ que es un cero de orden 3 para $t(s)$.

3) Para cada solución (r_1, v_1) que va a colisión cuando $t \rightarrow 0^-$, existe una solución (r_2, v_2) que viene de colisión, $r_2 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0^+$, tal que $r_1(-t) = r_2(t)$ y $v_1(-t) = -v_2(t)$. r_1, r_2 y v_1, v_2 son ramas (reales) de funciones multivaluadas $r(t), v(t)$.

4) Las ecuaciones de movimiento del problema reducido con $c = 0$

$$(11) \dots \begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = -1/r \end{cases}$$

pueden extenderse a un sistema holomorfo en $\mathbb{C} - \{0\} \times \mathbb{C}$.

5) $r(s)$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} r' &= w \\ w' &= 2hr + 1, \quad d/ds = ' \end{aligned}$$

Con más precisión: Si $r(t)$ es una solución de (11) con energía h , entonces $r(t(s))$ es solución de (12) satisfaciendo $w^2 = 2r + 2hr^2$. Efectivamente, de la ecuación de la energía,

$$v^2 = 2/r + 2h, \quad \text{identicamente para } t.$$

Multiplicando por $r^2 \neq 0$,

$$(rv)^2 = 2r + 2hr^2.$$

En la expresión anterior componemos con la función $t(s)$ y hacemos $w(s) := r(t(s)) v(t(s))$, luego

$$w^2 = 2r + 2hr^2.$$

Derivamos respecto a s

$$w(s) w'(s) = r'(s) + 2h r(s) r'(s).$$

Ya que $w(s) = v(t(s)) r(t(s)) = dr/dt(t(s)) t'(s)$; si $r'(s)$ no es identicamente nula podemos cancelar $r'(s)$ para obtener

$$w'(s) = 2h r(s) + 1.$$

SECCION I.2

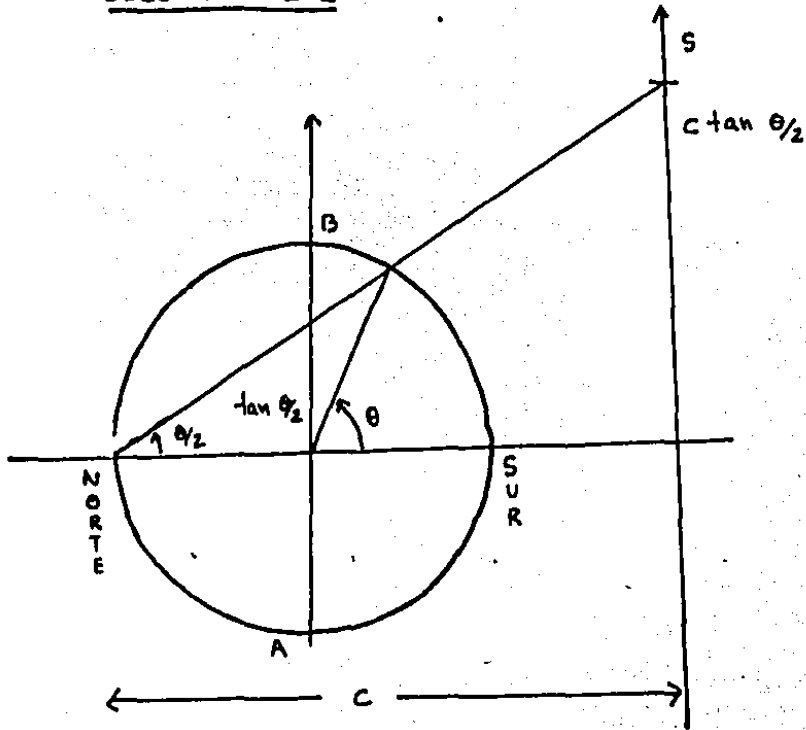


Fig.1 Relación entre la variable angular θ y la variable S

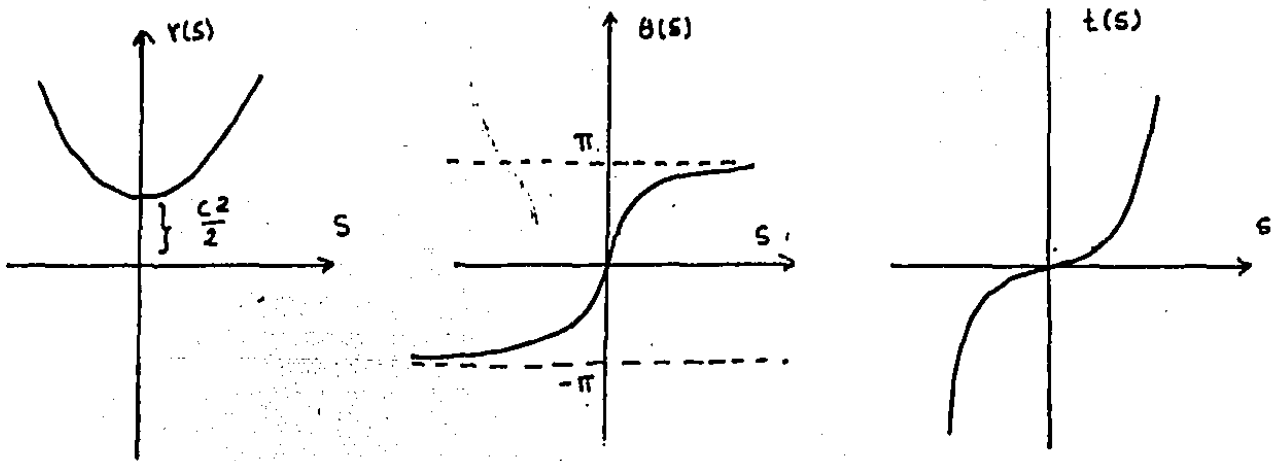


Fig.2 Graficas de r , θ y t como funciones de la variable S , para $h=0$.

SECCION I.2

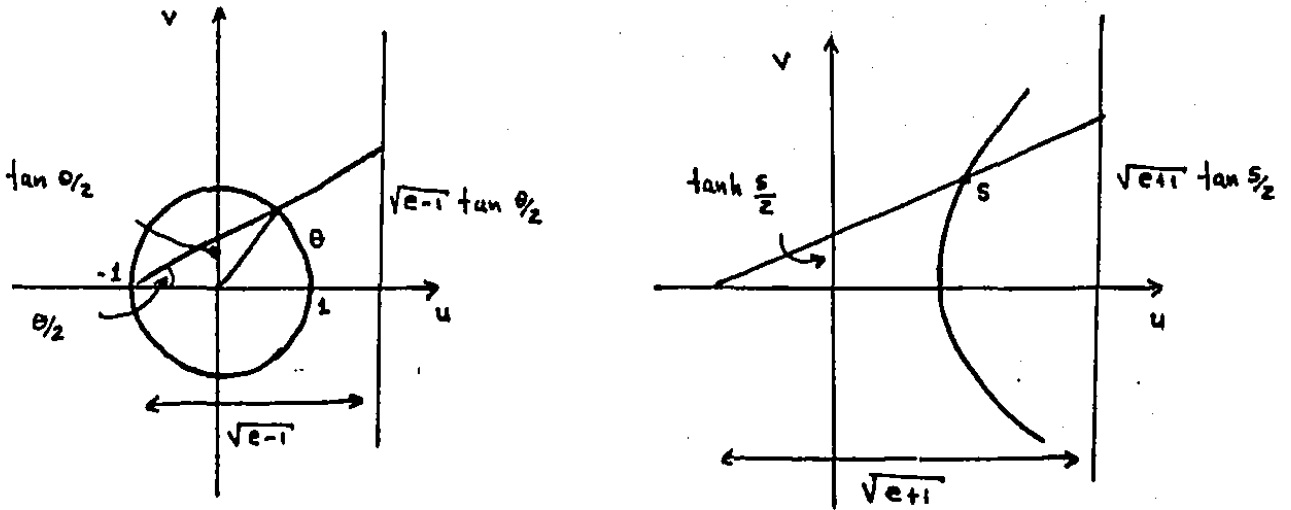


Fig. 3 Proyecciones estereograficas del circulo unitario y la hipérbola $u^2 - v^2 = 1$ respecto al punto $(-1, 0)$.

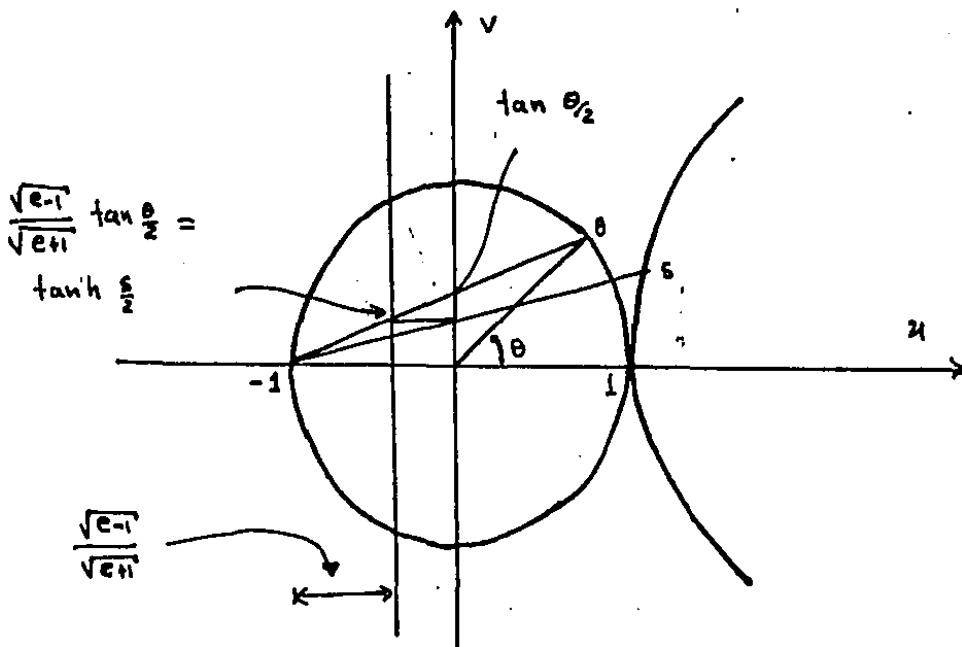


Fig. 4. Relación de la variable angular θ con el parámetro S para $h > 0$.

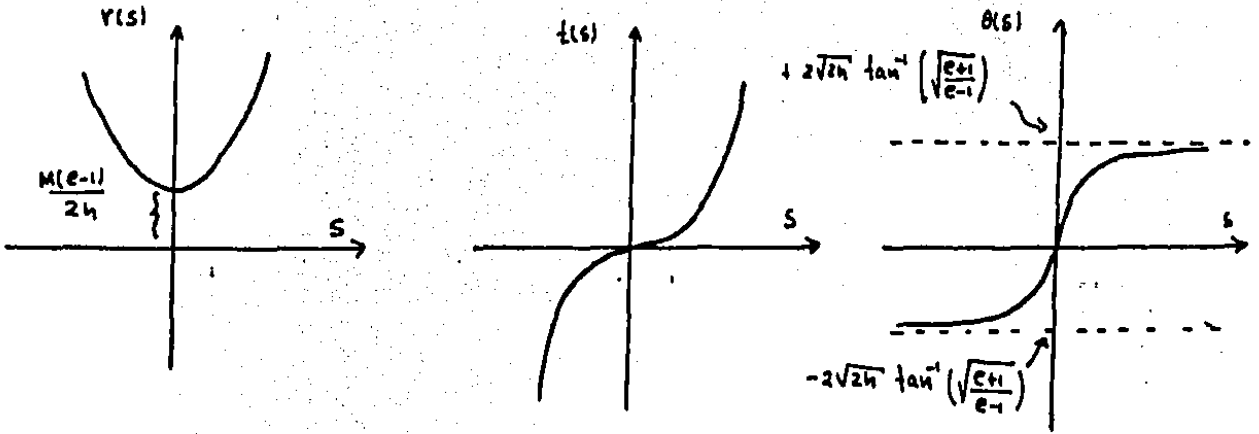


Fig. 5. Gráficas de r , θ y t en función de s para $h > 0$.

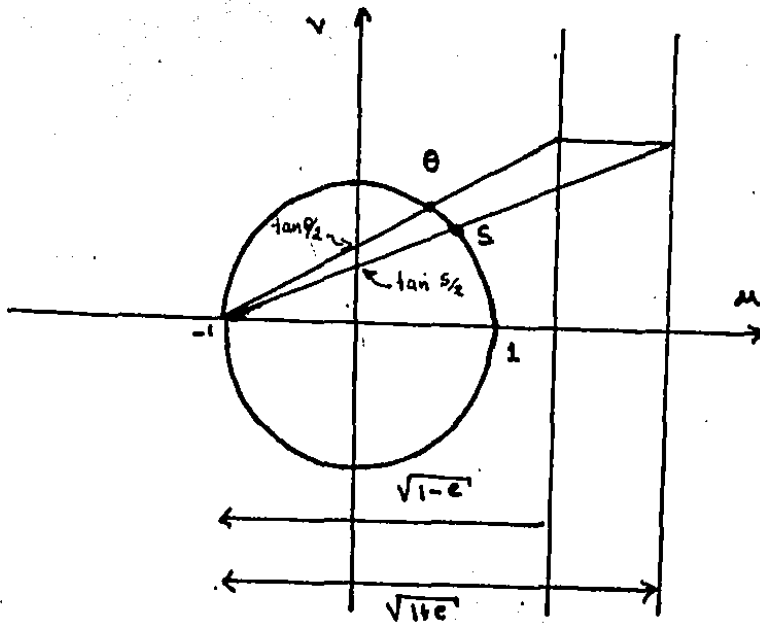


Fig. 6. Transformación del círculo en sí mismo que lleva θ en s . Caso $h < 0$.

SECCION I-2

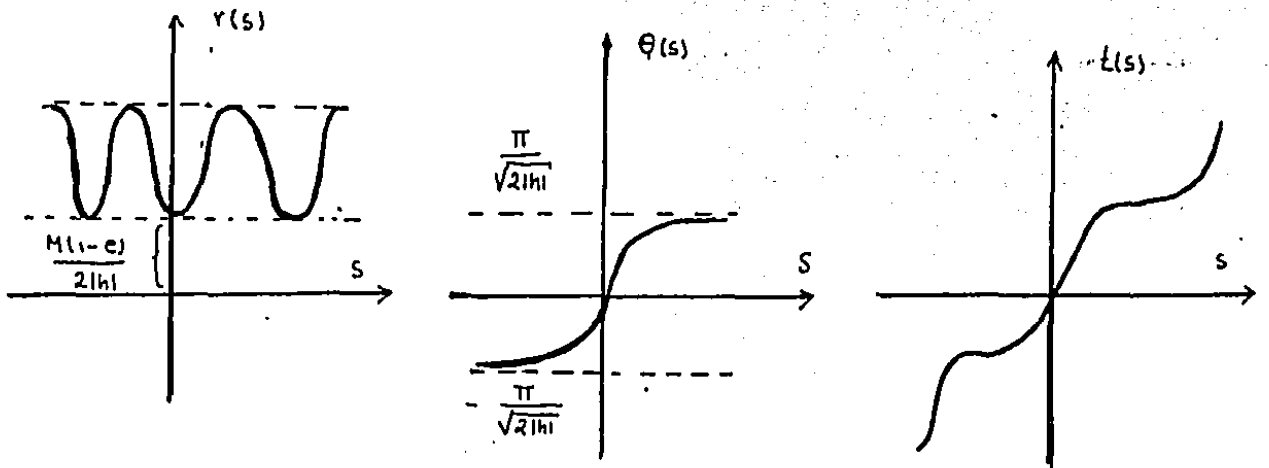


FIG. 7 Graficas de r , θ y s como funciones de s .

CAPITULO II REGULARIZACION DE LAS SOLUCIONES

Consideremos un problema repulsivo de dos cuerpos del tipo Coulombiano. Haciendo la reducción del centro de masa obtenemos

$$d^2 r/dt^2 = r/|r|^3, \quad r \in E^3 - \{o\}.$$

Introduciendo el cambio de variable independiente $iT = t$ se tiene que $d^2 r/dT^2 = -d^2 r/dt^2$ de modo que el problema repulsivo se convierte en un problema atractivo con el tiempo imaginario puro

$$d^2 r/dT^2 = -r/|r|^3.$$

Vemos entonces que tiene sentido físico considerar el tiempo como variable compleja. En este segundo capítulo estudiamos singularidades de soluciones de ecuaciones diferenciales desde el punto de vista de la variable compleja e introducimos la noción de regularización por ramas debida a McGehee [McGE]

II.1 SINGULARIDADES DE LAS SOLUCIONES

El teorema de Cauchy sobre existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales puede enunciarse de la siguiente manera para sistemas Hamiltonianos [SIE-MO, p. 15]

(1) TEOREMA Considerese el sistema Hamiltoniano

$$(1) \dots \dot{x}_k = \partial H / \partial y_k, \quad \dot{y}_k = -\partial H / \partial x_k, \quad \dot{} = d/dt, \quad t \in \mathbb{C}$$

donde $H(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ es \mathbb{C} -analítica en cada una de las variables x, y en el polidisco

$$|x_k - \xi_k| < 2r, \quad |y_k - \eta_k| < 2r, \quad \text{y} \quad |H(x, y)| < M \text{ ahí.}$$

Existe una única solución $x_k(t), y_k(t)$ definida en el disco $|t - \tau| < r^2 / 2(n+1)M$ que es analítica y satisface $x_k(\tau) = \xi_k, y_k(\tau) = \eta_k$, y además $|x_k(t) - \xi_k| < r, |y_k(t) - \eta_k| < r$.

Observación: El teorema de Cauchy en varias variables variables complejas permite dar una estimación de los segundos miembros de (1) a partir de la cota M para H . De ahí que sea importante que H sea \mathbb{C} -analítica.

Considérese un punto (ξ_k, η_k) donde H es analítica. El teorema de Cauchy nos da una solución local

$$F(\cdot; \tau) = (x_k(\cdot; \tau), y_k(\cdot; \tau))$$

analítica en un disco $|t - \tau| < \varepsilon$ y satisface $F(\tau; \tau) = (\xi_k, \eta_k)$.

Cada una de las x_k y admite un desarrollo en series de potencias

$$x_k(t; \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}(\tau)(t-\tau)^n, \quad y_k(t; \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn}(\tau)(t-\tau)^n$$

con radios de convergencia $R(\xi_k, \tau), R(\eta_k, \tau) \gg \varepsilon$.

Si alguno de los radios de convergencia es $< \infty$, digamos $R(\xi_k, \tau) < \infty$, entonces existe un punto t^* en el círculo de convergencia con la siguiente propiedad:

*** VER FIGURA 1 ***

No importando que tan pequeño se tome $\delta > 0$, es imposible encontrar una función analítica en el disco $D(t^*, \delta)$ de radio δ con centro en t^* que coincida con x_k en $D(\tau, R)$. Diremos entonces que t^* es una singularidad de la solución local $F(t; \tau)$. Si todos los radios de convergencia son infinitos diremos que la solución tiene una singularidad al infinito.

La distribución de singularidades en el círculo de convergencia puede ser muy complicado, por ejemplo, el conjunto de singularidades puede ser todo el círculo. Se tiene sin embargo la siguiente propiedad [DIEU, P.240], que es una propiedad topológica general.

-- El conjunto de singularidades aisladas en el círculo de convergencia es a lo mas numerable --

Denotemos por $S(t; t_0)$ una serie de potencias en $t - t_0$ con radio de convergencia R_0 . Se sigue que la serie es absolutamente convergente en cualquier disco $|t - t_0| \leq r$ siempre que $r < R_0$. En particular, cualquier rearrreglo de la serie converge al mismo valor.

Si $|t_1 - t_0| < R_0$, podemos desarrollar por el teorema del binomio

$$(t - t_0)^n = (t - t_1 + t_1 - t_0)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (t - t_1)^j (t_1 - t_0)^{n-j}$$

Luego

$$\begin{aligned} S(t; t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (t_1 - t_0)^{n-j} a_n (t - t_1)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j} (t_1 - t_0)^{n-j} a_n (t - t_1)^j = S(t; t_1). \end{aligned}$$

La serie $S(t; t_1)$ tiene un radio de convergencia R_1 que es $\geq R_0 - |t_1 - t_0|$. Si la desigualdad es estricta entonces $S(t; t_1)$ y $S(t; t_0)$ definen la misma función en $D(t_1, R_1) \cap D(t_0, R_0)$, pero a la vez $S(t; t_1)$ extiende a $S(t; t_0)$ a un dominio mayor.

*** VEASE FIGURA 2 ***

(4) DEFINICION Con la notación de arriba, si $R_1 > R_0 - |t_1 - t_0|$, diremos que $S(t; t_1)$ se obtiene de $S(t; t_0)$ por continuación analítica directa. En general; si (f_0, D_0) y (f_1, D_1) son funciones analíticas $f_0: D_0 \rightarrow C, f_1: D_1 \rightarrow C$ en dominios $D_0,$

D_1 , y $f_0 = f_1$ en $D_0 \cap D_1$, diremos que (f_0, D_0) y (f_1, D_1) son continuaciones analíticas directas una de la otra. Si (f_0, D_0) , (f_1, D_1) , ..., (f_n, D_n) es una cadena de continuaciones analíticas directas, diremos que (f_n, D_n) es una continuación analítica de (f_0, D_0) .

En el estudio global de las funciones analíticas es importante el concepto de configuración analítica, o superficie de Riemann cuya construcción es como sigue:

Un germen de función analítica en un punto $t \in \mathbb{C}$ es una clase de equivalencia de elementos (f, D) bajo la relación de equivalencia $(f, D) \sim (f', D')$ ssi $t \in D \cap D'$ y f coincide con f' en alguna vecindad de t contenida en $D \cap D'$.

Dado un elemento (f_0, D_0) se puede considerar la colección de todos los germenes (f, t) que se obtienen por continuaciones analíticas de (f_0, D_0) . Esta colección M' está dotada de una topología y una proyección continua $p(f, t) = t$, que es un homeomorfismo local en los puntos t que no son singularidades de algún elemento (f, D) y de hecho p define una estructura compleja en M' . M' es el dominio natural de una función analítica $F: M' \rightarrow \mathbb{C}$, $F(f, t) := f(t)$. La pareja (M', F) tiene las siguientes propiedades [POR, p.113]:

i) Para cada elemento (f, D) existe un único abierto $U \subset M'$ tal que $p|_U$ es un homeomorfismo de U sobre D y

$$F(m) = f(p(m)) \quad \text{para todo } m \in U$$

ii) Para todo $m \in M'$ hay al menos un elemento (f, D) tal que $p(m) \in D$.

La configuración analítica o superficie de Riemann completa para la función global analítica se obtiene agregando a M' ciertos puntos llamados puntos de ramificación y puntos al infinito de la única manera posible para que el conjunto agregado siga siendo una variedad compleja (i.e. estos puntos excepcionales aparecen como perforaciones en M' [POR, p.141]).

A continuación analizaremos este tipo de singularidades. Para ello es necesario introducir el concepto de continuación analítica a lo largo de una curva.

(5) **DEFINICION** Sea $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva diferenciable por tramos. (f_t, D_t) $0 \leq t \leq 1$ una familia de elementos de función analítica con las siguientes propiedades:

i) Para cada t existe $\epsilon_t > 0$ tal que si $|t' - t| < \epsilon_t$, entonces $c(t') \in D_t$ y

ii) $(f_{t'}, D_{t'})$ es continuación analítica directa de (f_t, D_t) .

Diremos entonces que (f_1, D_1) se obtiene por continuación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de c .

La definición más general de singularidad para una función global analítica es la siguiente:

(6) DEFINICION Decimos que t^* es una singularidad de la función global analítica F si existe una curva $c: [0,1] \rightarrow C$ diferenciable por tramos, tal que es posible continuar el elemento (f_0, D_0) a lo largo de $c: [0, 1-\epsilon]$ para todo $\epsilon > 0$ pero no a lo largo de la curva completa c .

En general nada puede decirse sobre la posibilidad de la continuación analítica a lo largo de una curva dada. Para sistemas Hamiltonianos, el teorema de Cauchy parece ser la herramienta más viable para ello. En ejemplos concretos puede ser requerida a forma explícita del Hamiltoniano.

Consideremos una singularidad aislada t^* con la propiedad de que en un disco alrededor de t^* suficientemente pequeño podamos continuar analíticamente algún elemento $(f_0, D_0) \in M'$ a lo largo de cualquier curva contenida en algún disco perforado digamos $D'(t^*, \epsilon)$.

*** VER FIGURA 3 **

(7) DEFINICION El índice de ramificación de t^* es el mínimo natural $k - 1$ con la propiedad de que al continuar (f_0, D_0) a lo largo de cualquier lazo de índice k el elemento terminal (f', D') determina el mismo germen que (f_0, D_0) en $D \cap D'$.

Observación: El índice de ramificación $k - 1$ no depende ni del elemento (f_0, D_0) ni del lazo.

Tenemos entonces la siguiente situación:

Si $p: M' \rightarrow C$ es la proyección, entonces sobre cada punto t en $D(t^*, \epsilon)$ excepto en t^* , la "fibra" $p^{-1}(t)$ consta de exactamente $k - 1$ germenos.

*** VER FIGURA 5 **

Denotemos por Q' el abierto en M' $p^{-1}(D'(t^*, \epsilon))$. Vamos a demostrar que Q' es conformemente equivalente a un disco perforado [SIE, p. 20]

(8) PROPOSICION Q' es conformemente equivalente al disco perforado $D'(0, \epsilon^{1/k})$ en el plano z .

Dem.: Elijamos $t_0 \in D(t^*, \epsilon)$ en el plano $t \in C$ y $z_0 \in D'(0, \epsilon^{1/k})$, en el plano $z \in C$, una de las $k - 1$ raíces $(t_0 - t^*)^{1/k}$. Sea s_0 un sector de ángulo $2\pi/k$ conteniendo a t_0 y sean s_1, s_2, \dots, s_{k-1} , $s_k = s_0$ los sectores sucesivos.

*** VER FIGURA 4 **

La transformación $z \rightarrow t^* + z^k$ manda a cada uno de los sectores conformemente sobre el disco perforado $D'(t^*, \epsilon)$. Elijamos ahora un germen inicial en $t_0, (f_0, t_0)$. Si $(f, t) \in Q'$ entonces (f, t) se obtiene por continuación analítica de (f_0, t_0) a lo largo de una curva de índice m , $0 \leq m \leq k - 1$;

hacemos corresponder entonces a (f, t) la determinación de $(t - t^*)^{1/k}$ que está precisamente en el m -ésimo sector. Es fácil ver que ésta es la equivalencia buscada. Denotaremos esta transformación por $h: D'(0, \varepsilon^{1/k}) \rightarrow Q'$.

Observación: Los germenes (f, t) que se obtienen por continuación analítica a lo largo de una curva de un índice fijo constituyen lo que se llama una hoja. A $z = (t - t^*)^{1/k}$ se le llama una variable uniformizante local. Tratamos de representar esta situación en la siguiente figura

*** VER FIGURA 5 **

En general, si $T: Q' \rightarrow C$ es una transformación continua sobre un dominio del plano complejo y tal que la transformación de coordenadas $h \circ T^{-1}: T(Q') \rightarrow D'(0, \varepsilon^{1/k})$ sea un biholomorfismo, diremos que T es una variable uniformizante local.

La función global analítica F en el dominio $Q' \subset M'$ está representada por una función analítica en el disco $D'(0, \varepsilon^{1/k})$ en el plano z como sigue:

(9) PROPOSICION [SIE, p. 20] Existe una única función analítica definida en el disco perforado del plano z , $G: D'(0, \varepsilon^{1/k}) \rightarrow C$ con la propiedad de que

$$G(z) = F(h^{-1}(z))$$

Dem: Sea c una curva contenida en $D'(0, \varepsilon^{1/k})$ en el plano z , uniendo z_0 con z_1 . Bajo la transformación $z \rightarrow t^* + z^k$, c se transforma en una curva c'' que une t_0 con $t_1 = t^* + z_1^k$. Sea (f_1, t_1) la continuación de (f_0, t_0) a lo largo de c'' y definamos

$$G(z_1) = f_1(t_1).$$

(*** VER FIGURA 6 ***)

Es fácil ver que la definición no depende de la curva c ; pues si c' es otra curva que une z_0 con z_1 entonces $(c')^{-1} \cdot c$ es un lazo cerrado en t con un índice múltiplo de k . Por lo tanto c'' y $(c')''$ determinan el mismo germe en t .

Ya que G es analítica en el disco perforado $D'(0, \varepsilon^{1/k})$, entonces admite un desarrollo en serie de Laurent.

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n$$

Recuérdese que $k-1$ es el índice de ramificación de la singularidad.

(10) DEFINICION Si $k = \infty$, decimos que t^* es una singularidad analítica.

Si $1 < k < \infty$, decimos que t^* es una singularidad algebraica y solo en tal caso decimos que t^* es una singularidad del tipo:

- 1) Esencial. Si $A_n \neq 0$ para una infinidad de índices negativos n .
- 2) Polo de orden $m > 0$. Si $A_{-m} \neq 0$ y $A_{-n} = 0$ para $-n < -m$.
- 3) Cero de orden $m > 0$. Si $A_m \neq 0$ y $A_n = 0$ para $n < m$.

De este modo, para cada germen $(f_1, t_1) \in Q'$, si (f_1, D_1) es un elemento de función analítica que determina a (f_1, t_1) , podemos escribir

$$G(z) = f_1(t_* + z^k)$$

Para z en una vecindad de z_1 . Donde z_1 es la determinación de $(t_1 - t_*)^{1/k}$ que bajo h se mapea a la hoja que contiene a (f_1, t_1) . En forma equivalente

$$f_1(t) = G[(t - t_*)^{1/k}].$$

La expresión anterior se traduce en una serie de Puiseux

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (t - t_*)^{n/k} \text{ para } t \in D_1$$

*** VER FIGURA 7 ***

SECCION II.1

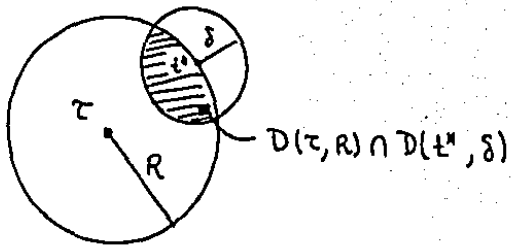


Fig. 1. Singularidad de la solución.

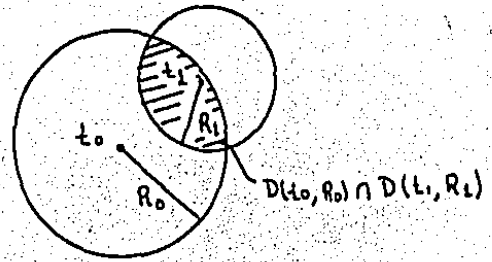


Fig. 2. Continuación analítica directa

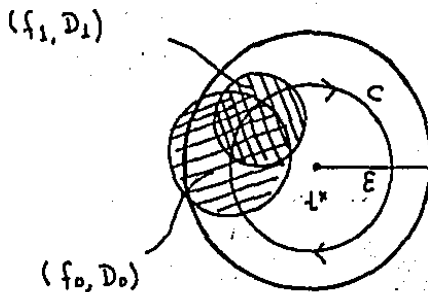


Fig. 3. Continuación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de una curva C (de índice 1).

SECCION II.1

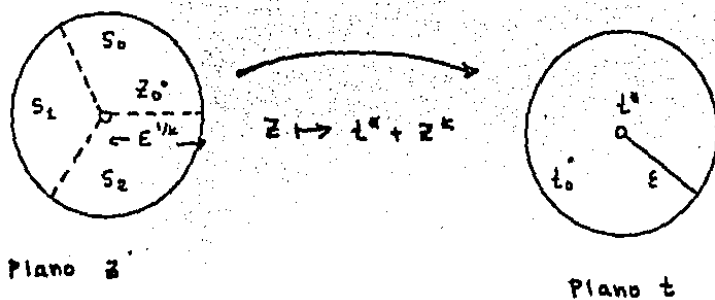


Fig. 4. Ilustración de la proposición (2) para el caso $k = 3$.

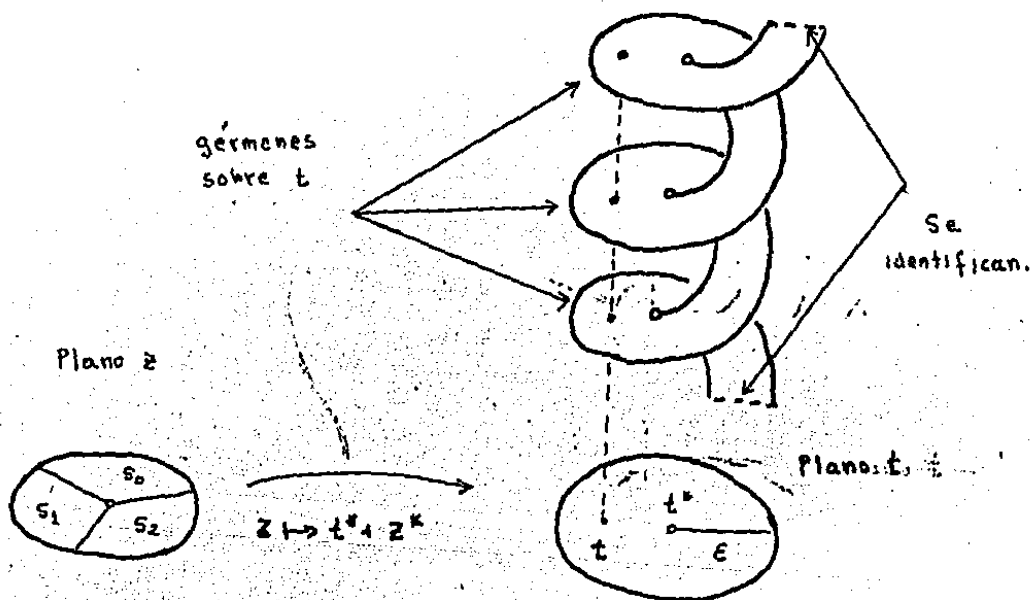


Fig. 5 Cada sector S_i en el plano z corresponde a una hoja sobre el disco $D'(t^k, E)$

SECCION II.1

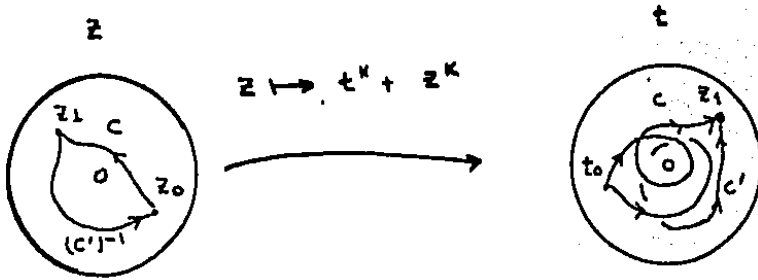


Fig. 6 Definición de $G(z)$.

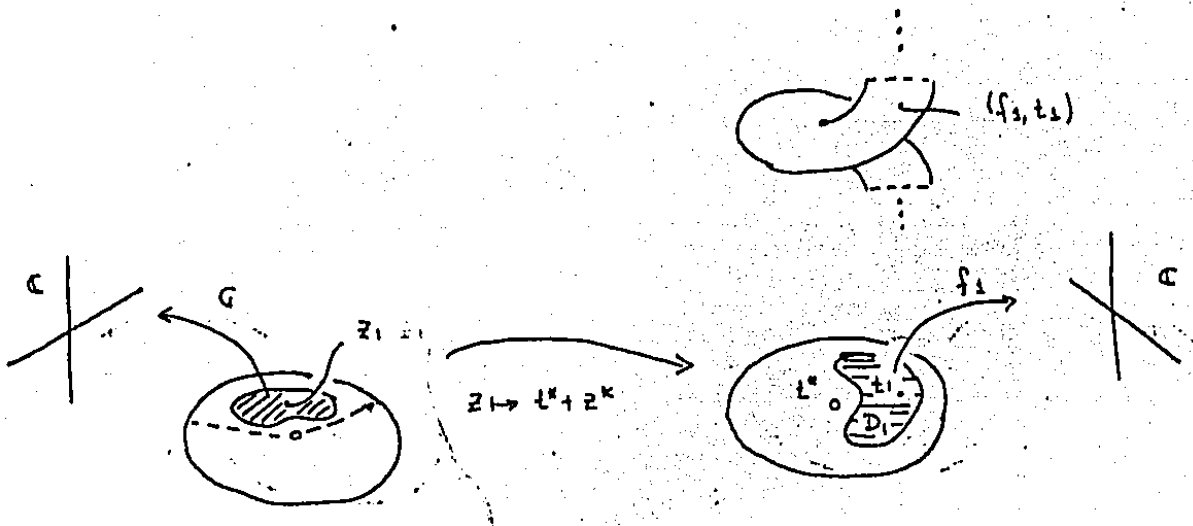


Fig. 7. Relación entre G y los elementos (f, D)

II.2 SINGULARIDAD REGULARIZABLE POR RAMAS O REGULARIZABLE ANALITICAMENTE.

Consideremos el sistema Hamiltoniano

$$\dot{x}_k = \partial H / \partial y_k, \quad \dot{y}_k = -\partial H / \partial x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

con $H(x, y) \in \mathbb{R}$ - analítica en un dominio D en \mathbb{R}^{2n} ; así que H admite una extensión natural a \mathbb{C} - analítica en un dominio D'' en \mathbb{C}^{2n} conteniendo a D . Para $(\xi_k, \eta_k) \in D''$ podemos aplicar el teorema de existencia de Cauchy. Luego existe una única solución $(x_k(t; \tau), y_k(t; \tau))$ que satisface $x_k(\tau; \tau) = \xi_k, y_k(\tau; \tau) = \eta_k$ y es \mathbb{C} - analítica en un disco $|t - \tau| < \delta$. Obtenemos de esta manera $2n$ elementos de funciones analíticas

$$x_1(t; \tau), \dots, x_n(t; \tau), y_1(t; \tau), \dots, y_n(t; \tau).$$

Como $H(x, y)$ es real para x, y reales, se sigue que si ξ_k, η_k son reales entonces la solución es real para t real.

Continuando analíticamente cada uno de estos elementos a lo largo del eje real, obtenemos soluciones de las ecuaciones de Hamilton con la misma energía siempre que permanezcan en D'' . Sucede entonces que o bien cada componente x_k, y_k puede continuarse a lo largo del eje real o bien existe una primera singularidad t^* de una o más de las componentes de la solución.

Denotemos por $x_k(t, t_1), y_k(t, t_1)$ los elementos, alguno de los cuales tiene una singularidad t^* en su círculo de convergencia.

(1) DEFINICION Decimos que la singularidad t^* es regularizable por ramas si:

- i) Para cada $j = 1, 2, \dots, n$ el índice de ramificación de t^* como singularidad (posiblemente removible) de $x_j(t; t_1)$ (respect. $y_j(t; t_1)$) es finito.
- ii) t^* es una singularidad algebraica no esencial.
- iii) Existen ramas únicas $x_j(t; t_2)$ (respect. $y_j(t; t_2)$) reales para t real que son continuaciones analíticas de $x_j(t; t_1)$ (respect. $y_j(t; t_1)$).

*** VER FIGURA 1 ***

Observaciones: Una singularidad analítica no puede ser regularizable de acuerdo a (i). Un ejemplo de este tipo de singularidad es $t^* = 0$ para la función $\log t$. Un ejemplo de singularidad algebraica esencial es

$$\exp(1/t) = 1 + 1/t + 1/2!t^2 + \dots, \quad \text{en } t^* = 0.$$

Este tipo de singularidades tampoco pueden ser regularizables.

El caso en el que es posible continuar analíticamente la solución para todo $t > 0$ y $t < 0$ (ambos) merece especial atención

(2) DEFINICION Si la solución no es periódica, y existe la continuación analítica para todo $t > 0$ y todo $t < 0$ (ambos), decimos que la solución tiene una singularidad al infinito. La singularidad al infinito es regularizable por ramas si al hacer la sustitución $z = 1/t$, $(x_K(1/z); 1/t_1)$, $y_K(1/z; 1/t_1)$ tiene una singularidad regularizable en el origen.

Consideremos ahora las soluciones obtenidas en el capítulo I para el problema de Kepler reducido.

(3) PROPOSICION Las soluciones al problema reducido son regularizables al infinito solo para energía cero. Las singularidades finitas son regularizables para cualquier valor de la energía.

Dem: Las singularidades al infinito ocurren solo si $c \neq 0$ y para energía $h > 0$. Para el problema de Kepler reducido las soluciones son (Ec. [I.2-5] con $c = 1$ lo cual no resta generalidad),

Para $h = 0$:

$$r(t(s)) = s^2/2 + 1/2$$

$$v(t(s)) = 2/s$$

$$t(s) = s^3/6 + s/2.$$

Como $t \rightarrow \infty \implies s \rightarrow \infty \implies r \rightarrow \infty$ y $v \rightarrow 0$, hacemos $w := 1/s$, $p := 1/r$, dejamos v igual. Las dos primeras ecuaciones quedan:

$$p(w) = 2w^2/(1 + w^2)$$

$$v(w) = 2w.$$

Si ahora hacemos $z := 1/t$ obtenemos de la ecuación para $t(s)$,

$$z(w) = 6w^3/(1 + 3w^2).$$

Se verifica que $z(0) = z'(0) = z''(0) = 0$, $z'''(0) = 36$. Si desarrollamos en series las expresiones anteriores obtenemos para $|w| < \epsilon_1$,

$$p(w) = 2w^2 - 2w^4 + 2w^6 - \dots$$

$$v(w) = 2w$$

$$z(w) = 36w^3 + a_0 w^4 + a_1 w^5 + \dots; a_i \in \mathbb{R}$$

La inversión de la última serie nos da tres series,

$$w = (36)^{-1/3} z^{1/3} + b_0 z^{2/3} + b_1 z + \dots; b_i \in \mathbb{R}, 0 < |z| < \epsilon_2,$$

una por cada rama de la raíz cúbica.

Al sustituir en los primeros dos desarrollos, obtenemos

$$p(z) = c_0 z^{2/3} + c_1 z + \dots$$

$$v(z) = d_0 z^{4/3} + d_1 z^{2/3} + \dots; \quad 0 < |z| < \epsilon_3,$$

de donde es evidente que $z = 0$ es una singularidad regularizable.

Para $h > 0$:

La ecuación de la órbita es

$$r(\theta) = c^2 / (1 + e \cos \theta).$$

A partir de la igualdad $dr/dt \cdot dt/d\theta = dr/d\theta$ y utilizando la constante de momento angular $c = r^2 d\theta/dt$, obtenemos

$$\begin{aligned} v(\theta) &= dr/dt (t(\theta)) = c/r^2 \cdot dr/d\theta = -c d/d\theta [1/r] \\ &= e/c \sin \theta. \end{aligned}$$

t en función de θ se obtiene al integrar la ecuación

$$dt/d\theta = r^2(\theta)/c = c^3 / (1 + e \cos \theta)^2.$$

La sustitución $x = \tan \theta/2$ reduce la integral a una integral racional obteniéndose

$$t(\theta) = ch^{-1} (e - 1)^{1/2} \tanh^{-1} \left((e - 1)^{1/2} (e + 1)^{-1/2} \tan \theta/2 \right).$$

Haciendo $p = 1/r$, resumimos lo anterior como

$$p(\theta) = (1 + e \cos \theta)/c$$

$$v(\theta) = ec \sin \theta$$

$$\tanh(hc^{-1} (e^2 - 1)^{1/2} t) = (e - 1)^{1/2} (e + 1)^{-1/2} \tan \theta/2.$$

p y v son funciones regulares de θ . Los valores θ_0 tales que $\cos \theta_0 = -e^{-1}$, hacen que $(e - 1)^{1/2} (e + 1)^{1/2} \tan \theta_0/2 = \pm 1$. Estos son precisamente los ángulos de escape. Si $t \rightarrow \pm \infty$ en los reales, $\theta(t) \rightarrow \pm \theta_0 \pmod{2\pi}$, sin embargo el comportamiento al infinito es más complicado: Haciendo $z = 1/t$, sabemos que $y = \tanh(hc^{-1} (e^2 - 1)^{1/2} z)$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$. Por lo tanto, dada y arbitraria, existe una sucesión $z_n \rightarrow 0$ tal que $y_n \rightarrow y$. Tomando por ejemplo la rama principal de \tanh^{-1} , podemos determinar una sucesión θ_n tal que $y_n = (e - 1)^{1/2} (e + 1)^{1/2} \tan \theta_n/2$, de modo que θ no puede definirse como función de z de manera continua en $z = 0$. La singularidad es esencial y por lo tanto no regularizable.

En cuanto a las singularidades finitas basta considerar el caso $c = 0$.

$h = 0$

$$r(t(s)) = s^2/2$$

$$v(t(s)) = 2/s$$

$$t(s) = s^3/6$$

$h > 0$

$$r(t(s)) = w^{-2} (\cos ws - 1)$$

$$v(t(s)) = w^{-1} (\cosh ws - 1) \sinh ws$$

$$t(s) = w^{-3} (\sinh ws - ws)$$

$h < 0$

$$r(t(s)) = w^{-2} (1 - \cos ws)$$

$$v(t(s)) = w^{-1} (1 - \cos ws) \sin ws$$

$$t(s) = w^{-3} (ws - \sin ws)$$

donde $v(t) = dr/dt(t)$ y $w = \sqrt{2|h|}$ en cada caso.

Para $h = 0$ la única singularidad finita es $t = 0$ y s es una variable uniformizante local, de donde el índice de ramificación es 2.

Las ramas que se obtienen por continuación analítica pueden tomarse como

$$r(t) = (6t)^{2/3} / 2 \quad |t| < 0$$

$$v(t) = 2/(6t)^{1/3} \quad |t| < 0$$

$$r(t) = (6t)^{2/3} / 2 \quad |t| > 0$$

$$v(t) = 2/(6t)^{1/3} \quad |t| > 0$$

Donde las raíces cúbicas son las raíces reales.

Para $h > 0$ la única singularidad finita es también $t^* = 0$. La transformación $t = w^{-3} (\sinh ws - ws)$ tiene un cero de orden 3 en $s = 0$ lo que muestra que el índice de ramificación es 2 y también podríamos haber tomado $t = s^3$ como variable uniformizante.

Para $t < 0$ y $t > 0$ siempre es posible despejar $s = s(t)$ de la relación $t = t(s)$ y podemos tomar como ramas las expresiones implícitas

$$r(t(s)) = w^{-2} (\cosh ws - 1)$$

$$v(t(s)) = w^{-1} (\cosh ws - 1) \sinh ws$$

$$t(s) = w^{-3} (\sinh ws - ws)$$

para $t < 0$ y para $t > 0$ respectivamente.

Para $h < 0$ las singularidades corresponden a valores de t donde $t'(s) = 0$ i.e. $s = 2n\pi/w$ $n \in \mathbb{Z}$. Todas ellas están sobre el eje real y son aisladas estando igualmente espaciadas por periodicidad de las soluciones. En cada intervalo $(2n\pi/w, 2(n+1)\pi/w)$ se pueden tomar expresiones implícitas semejantes al caso anterior.

SECCION II.2

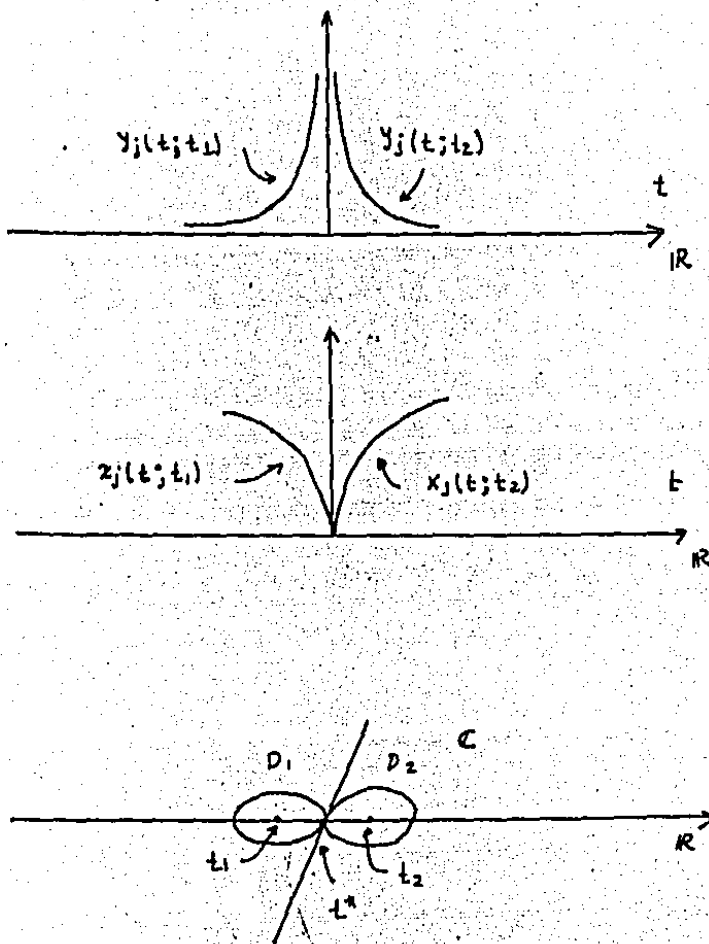


Fig. 1 Regularización por ramas. En la parte inferior representamos el plano t complejo y la singularidad t^* en el origen. En la parte superior representamos cortes reales de las gráficas de los elementos de función analítica $(f_1, D_1) = (x_j(t; t_1), y_j(t; t_1))$, $(f_2, D_2) = (x_j(t; t_2), y_j(t; t_2))$.

CAPITULO III REGULARIZACIONES DEL TIPO GEOMETRICO

En este capítulo mostramos dos tipos de regularización para el problema de Kepler. Las soluciones regularizadas de esta manera son adecuadas para determinar explícitamente sus valores numéricos, aunque no abordaremos esta cuestión aquí. Mas bien vamos a estudiar la topología de las foliaciones por curvas (en la regularización de Sundman) o superficies (en la regularización de Levi-Civita) de energía y momento angular constantes. La mayoría de los resultados son ya conocidos. El enfoque que aquí presentamos pretende ser mas sistemático.

Nosotros consideramos que el estudio de la foliación en la regularización de Sundman es todavía incompleto pues las coordenadas de posición y velocidad radiales se consideran reales. En realidad, G. Sierra y E. Lacombe al momento de escribirse este trabajo han estudiado esta foliación en los complejos con resultados interesantes. En la ultima sección discutimos brevemente la definición debida a Pham [PHAM] del concepto intrínseco de la regularización y otras ideas debidas a Sternberg [G-S].

III.1 CURVAS INVARIANTES EN EL PROBLEMA REDUCIDO

El propósito original del trabajo de Sundman [SUN] fue el de obtener un desarrollo en series de potencias de las soluciones para el problema de tres cuerpos. Primero demuestra - un teorema célebre - que para n - cuerpos, si el momento angular no es cero, entonces no puede haber colisión total. Para tres cuerpos esto implica que si el momento angular no es cero entonces de haber una singularidad en la solución, ésta se debe a colisión doble. Introduciendo un tiempo ficticio s relacionado con el tiempo físico t mediante un desarrollo en serie

$$t = a_0 s^3 + a_1 s^4 + \dots$$

obtiene entonces desarrollos en series de potencias de s para las componentes de la posición y de la velocidad.

La relación entre t y s puede expresarse implícitamente a través de una ecuación diferencial

$$(1) \dots \quad dt/ds = X(t(s))$$

siendo X la distancia entre las partículas que van a colisión. En el problema de dos cuerpos s coincide con la llamada excentricidad anómala. En el problema de Kepler - que es esencialmente equivalente al problema de dos cuerpos -, llamaremos "regularización de Sundman" al proceso de reducción a una dimensión con la integral de momento angular, junto con una reparametrización de las soluciones análoga a (1).

En esta sección estudiaremos la regularización de Sundman desde un punto de vista topológico.

La ecuación de la energía para el problema de Kepler reducido es (ver ec. [I.2-10])

$$v^2/2 = 1/r - c^2/2r^2 + h$$

donde $r :=$ longitud del vector de posición

$$v := dr/dt.$$

Las curvas de energía constante (para un valor fijo de c),

$$(2) \dots \text{Ich} = \{(r, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : v^2/2 = 1/r - c^2/2r^2 + h\}$$

son invariantes bajo el flujo definido por la ecuación diferencial

$$(3) \dots \begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = -1/r^2 + c^2/r^3 \end{cases}$$

y son por lo tanto curvas integrales - aunque no hay una reparametrización única de las Ich -. Recíprocamente, dado el sistema de ecuaciones (3) y condiciones iniciales, estas determinan un valor de h para el cual Ich esa una curva integral. La información dada por las Ich y las ecuaciones diferenciales son por tanto equivalentes hasta una reparametrización.

En la figura (1) mostramos la forma de las curvas Ich, para cada valor fijo de $c \neq 0$. Observamos que en este caso ninguna órbita va o viene de colisión, habiendo una distancia mínima de acercamiento al origen que se obtiene al tomar $v = 0$ en la ecuación de la energía.

*** VER FIGURA 1 **

Utilizando la relación [I.1-7], $e^2 - 1 = 2hc^2$, para encontrar las raíces del polinomio $hr^2 + r - c^2/2$ encontramos que la distancia mínima es

$$r_{\min} = \begin{cases} c^2/2 & \text{para } h = 0 \\ -(1 - e)/2h & \text{para } h \neq 0 \end{cases}$$

En la figura (1) la parte sombreada corresponde a energía h negativa. Para $h = 0$, la curva es asintótica al eje horizontal y para $h > 0$, las curvas tienen cada una dos asintotas horizontales $v = \pm \sqrt{2h}$, valor que corresponde a la velocidad de escape. Las curvas de energía $h < 0$ son todas cerradas y para $h = -1/2c^2$ se degenera en un punto. Tal valor de h corresponde a una órbita circular en el problema no reducido, y a un punto de equilibrio $(c^2, 0)$ del sistema (3).

Para $c = 0$, todas las órbitas van o vienen de colisión y la forma de las curvas de energía se muestran en la figura (2).

*** VER FIGURA 2 ***

De nuevo la región sombreada corresponde a $h < 0$ pero ahora las curvas no son cerradas. Para $h > 0$ hay dos componentes con asíntotas $v = \pm\sqrt{2h}$. La orientación de las curvas puede deducirse también de las ecuaciones diferenciales.

Para completar el esquema también mostramos la foliación singular definida por las I_{ch} para un valor fijo de h . Nótese que de la relación [I.1-7], si $c = 0 \Rightarrow e = 1$. También se siguen las siguientes desigualdades.

- (4-i) ... Si $h < 0 \Rightarrow 0 \leq e \leq 1$ y $-(2h)^{-1/2} \leq c \leq (2h)^{-1/2}$
 (4-ii) ... Si $h = 0 \Rightarrow e = 1$ y, $-\infty < c < +\infty$
 (4-iii) ... Si $h > 0 \Rightarrow e \geq 1$ y, $-\infty < c < +\infty$

*** VER FIGURAS 3, 4, 5 ***

Además ya que la ecuación de la energía (2) y en las ecuaciones diferenciales (3) aparece c^2 la forma y orientación de I_{ch} es la misma que para I_{-ch} .

SECCION III.1

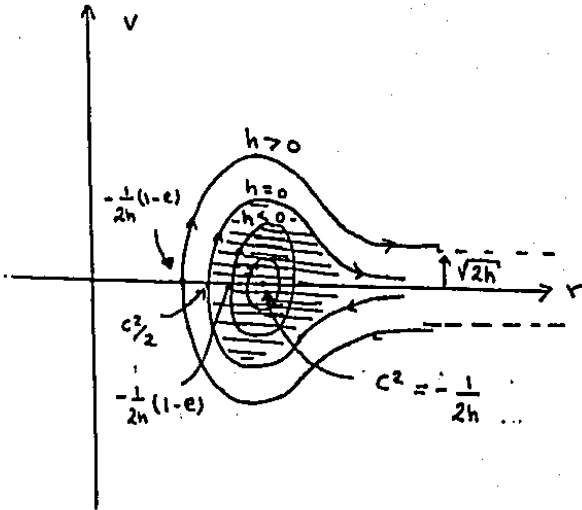


Fig. 1 Curvas Ich para $c \neq 0$.

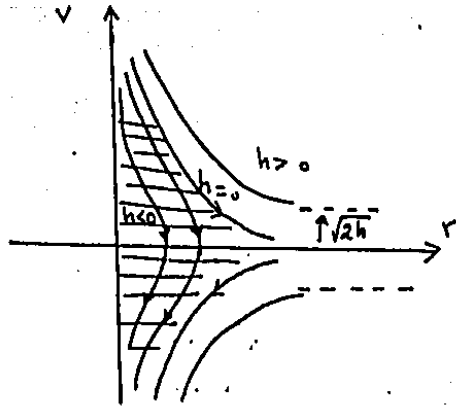


Fig. 2 Curvas Ich para $c = 0$.

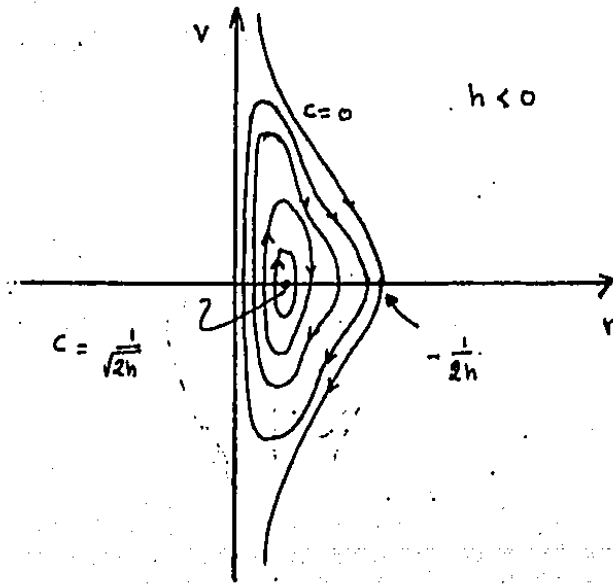


Fig. 3. Curvas Ich para $h < 0$ fijo, $0 \leq c \leq \frac{1}{\sqrt{-2h}}$. Nótese que $I_{ch} = I_{-ch}$ y para $-\frac{1}{\sqrt{-2h}} \leq c \leq 0$ basta invertir la orientación. Los puntos de retorno son las raíces $-\frac{1}{2h}(1 \pm e)$ del polinomio $hr^2 + r - \frac{c^2}{2} = 0$. La curva singular (un punto) corresponde a una órbita circular en el problema no reducido.

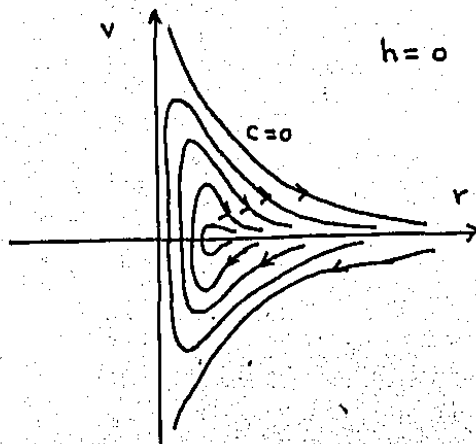


Fig. 4. Curvas I_{c0} , $0 \leq c < \infty$. Las curvas más interiores corresponden a valores crecientes de c y todas son asintóticas al eje $v=0$. Las curvas $I_{-c0}=I_{c0}$ tienen la orientación opuesta.

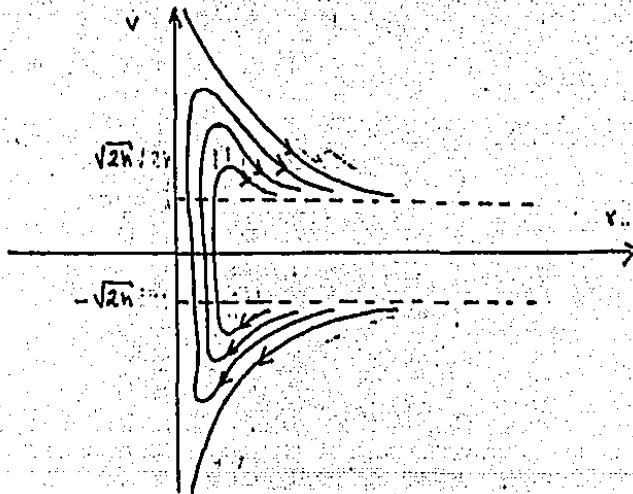


Fig. 5. Curvas I_{ch} , para $h > 0$ fijo, $0 \leq c < \infty$. Las curvas más interiores corresponden a valores crecientes de c y todas son asintóticas a las rectas $v = \pm\sqrt{2h}$.

III.2 REGULARIZACION DE SUNDMAN

Consideremos la transformación $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dada por $(r, v) \rightarrow (r, w)$ con $w = rv$.
Las curvas I_{ch} se transforman en

$$Sch = \{(r, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : w^2/2 = hr^2 + r - c^2/2\}$$

Con auxilio de la identidad $e^2 - 1 = 2hc^2$, podemos expresar la relación

$$(1) \dots \quad w^2 = 2hr^2 + 2r - c^2$$

como

$$\begin{cases} w^2 = 2r^2 - c^2 & \text{para } h = 0 \\ w^2 = 2h(r + (1+e)/2h)(r + (1-e)/2h) & \text{para } h \neq 0, \end{cases}$$

con $e > 1$ para $h > 0$ y $0 \leq e \leq 1$ para $h < 0$.

Graficando la relación (1) obtenemos una parábola si $h = 0$, hipérbolas si $h > 0$ y elipses si $h < 0$; además, $w = 0$ para $r = -(1 \pm e)/2h$.

Si $h > 0$ solo el valor $-(1 - e)/2h$ es positivo, mientras que si $h < 0$ ambas raíces $-(1 \pm e)/2h$ son positivas. Estos valores de r son precisamente los puntos de retorno. Para $h = -1/2c^2$, la elipse degenera en un punto. Para $h > 0$, la ecuación

$$w^2 = 2h(r + (1+e)/2h)(r + (1-e)/2h)$$

se puede escribir como

$$\frac{(r + 1/2h)^2}{(e/2h)^2} - \frac{w^2}{(e/\sqrt{2h})^2} = 1$$

de donde se sigue que los centros de las hipérbolas se localizan en $(-1/2h, 0)$ y las asíntotas tienen las ecuaciones

$$w = \pm \sqrt{2h} (r + 1/2h) \dots$$

*** VER FIGURA 1 ***

Si $c \rightarrow 0$, los puntos de retorno que son los vértices $(-(1 - e)/2h, 0)$ y $(c^2/2, 0)$ para $h \neq 0$ y $h = 0$ respectivamente, tienden al origen colapsándose en un punto (ya que en tal caso $e = 1$). Por lo tanto para $c = 0$, todas las conicas son tangentes al eje vertical en el origen.

*** VER FIGURA 2 ***

También se muestran las dos ramas de las hipérbolas para $h > 0$, todas ellas con el vértice en el punto $(-1/h, 0)$.

Afirmamos que es posible reparametrizar las curvas I_{ch} en el plano $r-w$ de modo que bajo la transformación inversa

$(r,w) \rightarrow (r,v)$ se obtienen las soluciones del sistema [II.1-3].
Para ello sea $w(s)$, $r(s)$ una parametrización de I_{ch} , luego

$$w^2/2 = hr^2 + r - c^2/2.$$

Derivando respecto a s ,

$$w \, dw/ds = (2h + 1) \, dr/ds$$

de modo que si $dr/ds = w$ no es idénticamente cero, entonces

$$dw/ds = 2hr + 1.$$

Para que la transformación $(r,w) \rightarrow (r,v)$ lleve soluciones de 2 en soluciones de [II.1-3], debemos escoger $t(s)$ de tal forma que $w(s) = r(t(s)) \, v(t(s))$, 0 sea

$$dr/ds = r(t(s)) \, dr/dt(t(s))$$

y basta tomar $dt/ds = r(t(s))$. Esto demuestra que las curvas S_{ch} con la orientación que hemos indicado en las figuras (1) y (2), son realmente las curvas regularizadas.

Por completez mostramos las curvas regularizadas para valores fijos de la energía.

*** VER FIGURA 3 ***

SECCION III. 2

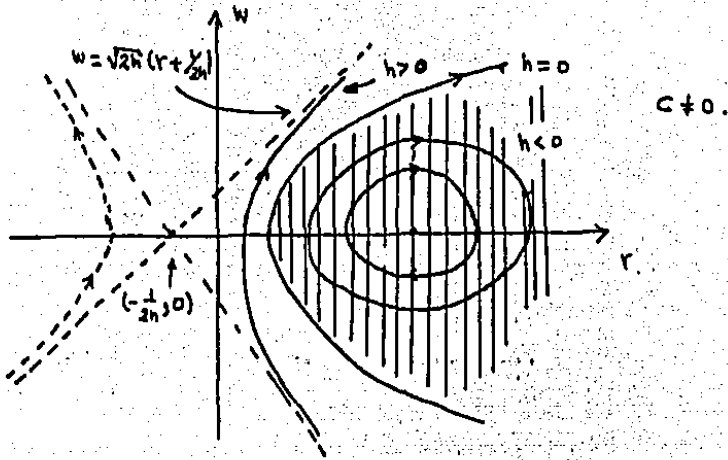


Fig. 1 Curvas Sch. para un valor fijo de $c \neq 0$. En líneas punteadas se muestran las otras ramas de las hipérbolas para $h > 0$ y sus asíntotas. Una rama derecha, próxima al eje vertical tiene una rama izquierda muy alejada del mismo.

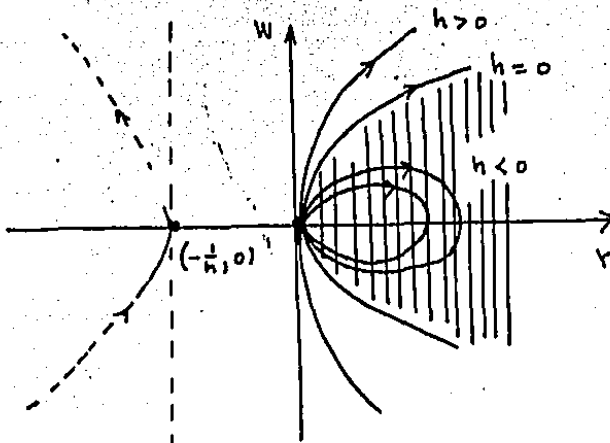


Fig. 2 Curvas Sch, $c = 0$.

SECCION III.2

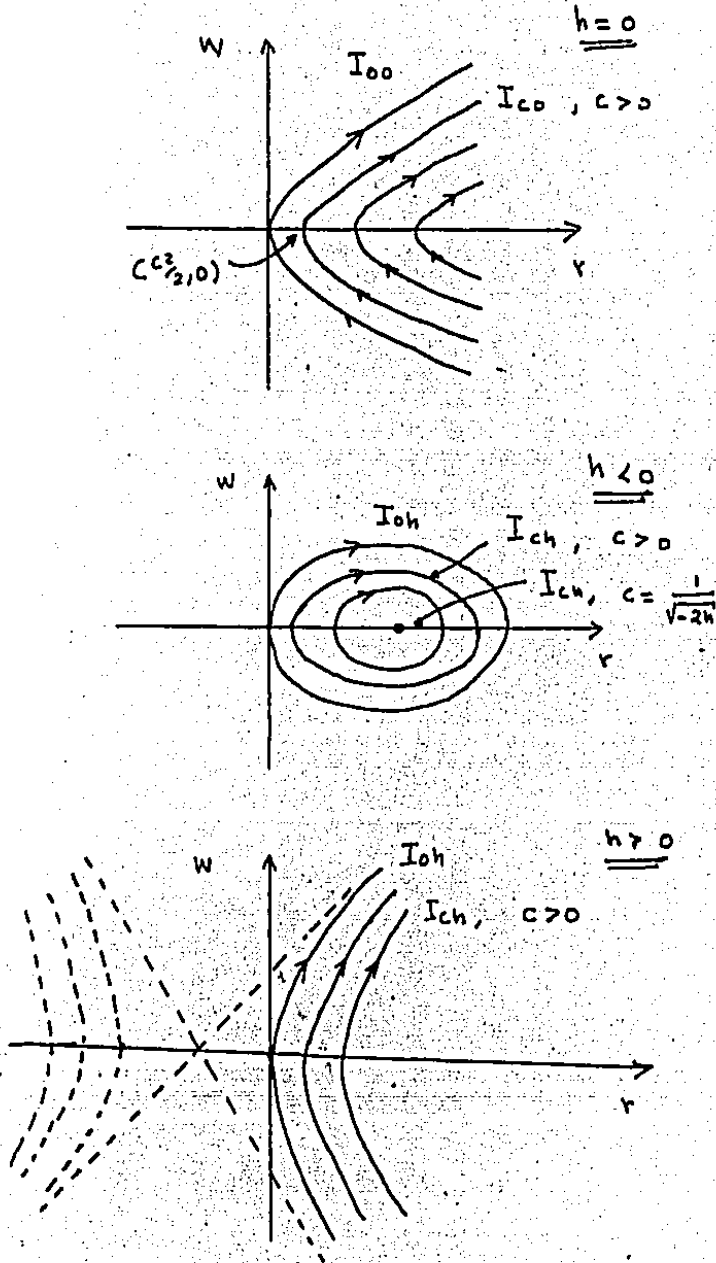


Fig. 3. Curvas I_{ch} para valores fijos de h .

III.3 REGULARIZACION DE LEVI - CIVITA

Otro metodo de regularización muy usado debido al caracter canónico de la transformación involucrada es debida a Levi - Civita [LEV]. En esta sección mostraremos este procedimiento para el problema de Kepler en el plano y estudiaremos la transformación de Levi - Civita desde el punto de vista topológico.

Consideremos el problema de Kepler en el plano [I.1-3]

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \\ \dot{v} &= -r/|r|^3 \quad r \in E^2 - \{0\}, v \in E^2. \end{aligned}$$

En lugar de proceder a la reducción del problema de Kepler mediante la integral de momento angular, podemos aprovechar la estructura del plano, identificando $E^2 \cong C$. Con esta identificación escribiremos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x/|x|^3 \quad x \in C^* := C - \{0\}, y \in C. \end{aligned}$$

Efectuemos la transformación de coordenadas $C^* \times C \rightarrow C^* \times C$, $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$ dada por (Levi - Civita)

$$x = \xi^2, \quad y = \eta / \xi.$$

Esta es una transformación 2 a 1 ya que los puntos (ξ, η) y $(-\xi, -\eta)$ corresponden a un mismo valor de (x, y) . Además es diferenciable aunque no es C^∞ analítica debido al denominador que involucra una conjugación.

Si escribimos $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$; $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, entonces la transformación puede escribirse como

$$x_1 = \xi_1^2 - \xi_2^2, \quad x_2 = 2\xi_1\xi_2$$

$$y_1 = (\eta_1\xi_1 - \eta_2\xi_2) / (\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad y_2 = (\eta_1\xi_2 + \eta_2\xi_1) / (\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

Esta transformación preserva las ecuaciones de Hamilton si y solo si [SIE-MO, p. 11]

$$dy_2 \wedge dx_2 + dy_1 \wedge dx_1 = k(d\eta_2 \wedge d\xi_2 + d\eta_1 \wedge d\xi_1)$$

para alguna constante k . En notación compleja esto es equivalente a

$$\operatorname{Re}(dy \wedge d\bar{x}) = k \operatorname{Re}(d\eta \wedge d\bar{\xi})$$

Un cálculo sencillo muestra que la igualdad anterior se verifica con $k = 2$ (esta es la razón de tomar el conjugado $\bar{\xi}$ en la transformación de Levi - Civita).

La superficie de energía

$|y|^2 / 2 = 1/|x| + h$
 se transforma en
 $| \eta |^2 / 2 | \xi |^2 - 1/| \xi |^2 = h$
 o bien (multiplicando por $| \xi |^2$)

$$| \eta |^2 - 2h | \xi |^2 = 2$$

Las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x/|x|^3 \end{aligned}$$

se transforman en

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta / 2 | \xi |^2 \\ \dot{\eta} &= 2h \xi / 2 | \xi |^2 \end{aligned}$$

Finalmente introduciendo el cambio de variable independiente $dt/ds = 2 | \xi (t(s)) |^2$ las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned} \xi' &= \eta \\ \eta' &= 2h \xi \quad ' = d/ds \end{aligned}$$

o en forma equivalente $\xi'' - 2h \xi = 0$, que es la ecuación de un oscilador armónico si $h < 0$.

Ya que en la deducción utilizamos la ecuación de la energía, las soluciones de $\xi'' - 2h \xi = 0$ corresponden a soluciones del problema de Kepler con energía h solo si las condiciones iniciales (ξ_0, η_0) satisfacen dicha ecuación,

$$| \eta_0 |^2 - 2h | \xi_0 |^2 = 2$$

ESTUDIO DE LA TRANSFORMACION DE LEVI - CIVITA

En la transformación de Levi - Civita

$$x = \xi^2, \quad y = \eta / \xi$$

los puntos (ξ, η) y $(-\xi, -\eta)$ corresponden a un mismo valor (x, y) . Al identificar (ξ, η) con $(-\xi, -\eta)$ para (ξ, η) en C^2* , obtenemos el espacio cociente que denotamos por C^2*/\sim .

(1) PROPOSICION C^2*/\sim es difeomorfo a $|\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^+$ donde $\mathbb{R}P^3$ es el proyectivo real en $\mathbb{R}^4 - \{0\} = \sim C^2*$.

Dem: Denotemos por $[\xi, \eta]$ a las clases en $|\mathbb{R}P^3$ y por $(\xi, \eta)^\sim$ las clases en el cociente C^2*/\sim . Sea $| \xi, \eta | := | \xi |^2 + | \eta |^2$. Entonces las transformaciones

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow C^2*/\sim, \quad ([\xi, \eta], t) \rightarrow (t \xi / | \xi, \eta |, \eta / | \xi, \eta |)^\sim \\ C^2*/\sim &\rightarrow \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^+, \quad (\xi, \eta)^\sim \rightarrow ([\xi, \eta], | \xi, \eta |) \end{aligned}$$

son funciones bien definidas y difeomorfismos uno del otro. -1

Para determinar la topología de las superficies de energía constante en coordenadas de Levi-Civita debemos determinar primeramente la topología de los conjuntos

$$E_h := \{ (\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 : |\eta|^2 - 2h|\xi|^2 = 2 \}$$

y después pasar al cociente,

$$E_h^* := \{ (\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 / \sim : |\eta|^2 - 2h|\xi|^2 = 2 \}.$$

Dependiendo del signo de h tomaremos como modelos topológicos para E_h ,

$$S_3 := \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1 \}$$

$$H_3 := \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 - |w|^2 = 1 \}$$

$$E_3 := \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 = 1 \}$$

S_3 es la esfera unitaria en \mathbb{R}^4 .

H_3 es un hiperboloide de una hoja en \mathbb{R}^4 .

E_3 es $S^1 \times \mathbb{C}$ o un toro sólido sin frontera.

En cualquier caso S_3 , H_3 o E_3 tiene dimensión real 3.

La imagen de estos conjuntos bajo la proyección $(z, w) \rightarrow (|z|, |w|)$ se muestra en la figura (1)

*** VER FIGURA 1 ***

(2) PROPOSICION Sea $r := \sqrt{2|h|}$ si $h \neq 0$, $r = \sqrt{2}$ si $h = 0$.
Las transformaciones (que dependen del signo de h)

$$S_3, H_3, E_3 \rightarrow E_h, (z, w) \rightarrow (\sqrt{2}w/r, \sqrt{2}z)$$

son difeomorfismos.

Dem.: Si $\eta = \sqrt{2}z$, $\xi = \sqrt{2}w/r$, entonces

$$|\eta|^2 - 2h|\xi|^2 = 2|z|^2 - 2(2h|w|^2/|2h|) =$$

$$\begin{cases} 2(|z|^2 + |w|^2) & \text{si } h < 0 \\ -2(|z|^2 - |w|^2) & \text{si } h < 0 \\ 2|z|^2 & \text{si } h = 0 \end{cases} = 2$$

Obviamente las transformaciones son difeomorfismos. -1

Esta última proposición permite determinar completamente la topología de las superficies E_h . Nuestro siguiente paso es identificar la topología de $E_h^* := E_h / \sim$.

Veremos en seguida que el signo de h determina una identificación de \mathbb{C}^2 / \sim con $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^+$, que en un caso especial coincide con la identificación de la proposición (1).

Defínase primero

$$|z,w|_- := |z|^2 + |w|^2, \quad |z,w|_+ := |z|^2 - |w|^2, \quad |z,w|_0 := |z|.$$

$|z,w|_-$ es una función diferenciable en \mathbb{C}^2 .

$|z,w|_+$ es una función diferenciable en $P := \{(z,w) : |z| > |w|\}$

$|z,w|_0$ es una función diferenciable en $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$

Los dominios de estas funciones $|z,w|_-$ son los abiertos de \mathbb{C}^2 , \mathbb{C}^2 , P , y $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$. Sus imágenes en $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, denotadas por $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, P^* y $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})^*$ son por tanto abiertos. Análogamente sus imágenes en $\mathbb{R}P^3$, denotadas por $\mathbb{R}P^3$, $[P]$ y $[\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}]$, son también abiertos.

(3) PROPOSICION Con la notación de arriba, las transformaciones

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^+ & (z,w) &\rightarrow ([z,w], |z,w|_-) \\ P^* &\rightarrow [P] \times \mathbb{R}^+ & (z,w) &\rightarrow ([z,w], |z,w|_+) \\ (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})^* &\rightarrow [\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}] \times \mathbb{R}^+ & (z,w) &\rightarrow ([z,w], |z,w|_0) \end{aligned}$$

son difeomorfismos.

Dem: El primer caso ya se ha visto en la proposición (1). Para el segundo caso la función inversa es

$$[P] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow P^* \times \mathbb{R}^+, \quad ([z,w], t) \rightarrow (tz/|z,w|_+, tw/|z,w|_+)^*$$

Para el tercer caso la inversa es

$$[\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})^*, \quad ([z,w], t) \rightarrow (tz/|z|, tw/|z|).$$

No es difícil verificar que las funciones definidas al principio y sus inversas están bien definidas y además son diferenciables.

-1

Nótese que los modelos topológicos S^3 , H^3 , y E^3 están contenidos en los abiertos de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} S^3 &\subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \text{y por tanto } S^3 &\subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ H^3 &\subset P & \text{y por tanto } H^3 &\subset P^* \\ E^3 &\subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} & \text{y por tanto } E^3 &\subset (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})^* \end{aligned}$$

Por otro lado, las transformaciones mencionadas en la proposición (2) $S^3, H^3, E^3 \rightarrow E^h$, inducen transformaciones $S^3^*, H^3^*, E^3^* \rightarrow E^h^*$. Luego, dependiendo del signo de h , E^h^* es difeomorfo a S^3^*, H^3^* , y a E^3^* . Finalmente basta observar que estos conjuntos pueden identificarse con $\mathbb{R}P^3$, $[P]$ o $[\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}]$ encajando a estos conjuntos en $\mathbb{R}P^3 \times \{1\}$ y utilizando la proposición (3).

Explicitamente:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^3 &\rightarrow S^3^* & (z,w) &\rightarrow (z/|z,w|_-, w/|z,w|_-)^* \\ [P] &\rightarrow H^3^* & (z,w) &\rightarrow (z/|z,w|_+, w/|z,w|_+)^* \\ [\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}] &\rightarrow E^3^* & (z,w) &\rightarrow (z/|z,w|_0, w/|z,w|_0)^* \end{aligned}$$

Tenemos así el siguiente

(4) TEOREMA Las superficies de energía regularizadas E^h^* tienen la topología (de hecho la estructura diferenciable) siguiente

$$\begin{aligned} h < 0 &: E^h^* \cong \mathbb{R}P^3 \\ h = 0 &: E^h^* \cong \{(z,w) \in \mathbb{R}P^3 / z \neq 0\} \text{ un abierto de } \mathbb{R}P^3. \end{aligned}$$

$h > 0$: $Eh^* = \{ [z, w] \in \mathbb{R}P^3 / |z| > |w| \}$ un abierto de $\mathbb{R}P^3$.
 Eh^* es compacto solo para $h < 0$.

EL MOMENTO ANGULAR.

El momento angular es una función $M: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ que en notación compleja se expresa como

$$M(x, y) = \text{Im}(\bar{x} y).$$

En coordenadas (ξ, η) , la expresión para M es la misma,

$$M(\xi, \eta) = \text{Im}(\bar{\xi} \eta).$$

De manera análoga a las superficies Eh , definimos

$$M_c := \{ (\xi, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} / \text{Im}(\bar{\xi} \eta) = c \}$$

$$I_{ch} := Eh \cap M_c$$

Vamos a estudiar la foliación de Eh por superficies I_{ch} en coordenadas (ξ, η) para posteriormente estudiar la foliación Eh^* por hojas I_{ch}^* . Estas últimas son las superficies regularizadas de energía y momento angular constantes.

Para un valor fijo de h conviene trabajar con el modelo topológico de Eh . Sea entonces $Pr(z, w) := (\sqrt{2} w/r, \sqrt{2} z)$, $M^* := M \circ Pr$, el momento angular en coordenadas (z, w) . Entonces $M^*^{-1}(c) = Pr^{-1}(M_c)$; luego Pr manda

$$S_3 \cap M^*_c \text{ en } Eh \cap M_c.$$

$$H_3 \cap M^*_c \text{ en } Eh \cap M_c.$$

$$E_3 \cap M^*_c \text{ en } Eh \cap M_c.$$

El problema se reduce entonces a estudiar las foliaciones de S_3 , H_3 y E_3 por superficies $S_3c := S_3 \cap M^*_c$, $H_3c := H_3 \cap M^*_c$ y $E_3c := E_3 \cap M^*_c$ respectivamente. Consideraremos solamente el caso $h < 0$. Un estudio similar puede hacerse para $h > 0$ y $h = 0$.

Para $h < 0$, los valores posibles del momento angular c varían en el intervalo $[-(2|h|)^{1/2}, +(2|h|)^{1/2}] = [-r^{-1}, +r^{-1}]$. Esto se sigue de la ecuación fundamental:

$$r^2 c^2 = 2|h|c^2 = 1 - e^2 \leq 1, \quad (0 \leq e \leq 1).$$

La foliación que vamos a estudiar es entonces

$$\{ S_3c / c \in [-r^{-1}, +r^{-1}] \}$$

Las ecuaciones que definen a cada hoja son

$$S_3c : |z|^2 + |w|^2 = 1, \quad M^*(z, w) = \text{Im}(\sqrt{2} \bar{w}/r, \sqrt{2} z) = c, \quad 0 \text{ sea}$$

$$S_3c : |z|^2 + |w|^2 = 1, \quad \text{Im}(\bar{w} z) = rc/2.$$

Con un ligero cambio de notación, sea $\gamma := rc/2$ $\therefore |\gamma| \leq 1/2$ y la foliación a estudiar es

$$G := \{S3_\gamma; \gamma \in [-\pi/2, \pi/2]\} \quad S3_\gamma: |z|^2 + |w|^2 = 1, \operatorname{Im}(\bar{w}z) = \gamma.$$

Primeramente describiremos la foliación de S^3 por toros [MA, p.138]. Esta foliación nos servirá de referencia para determinar a la foliación G .

Considérense dos números no negativos $\alpha, \beta \geq 0$ sujetos a la condición $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Entonces

$$T_{\alpha\beta} := \{(z,w) / |z| = \alpha, |w| = \beta\}$$

es una hoja de la foliación de S^3 por toros. Para $\alpha = 0, \beta = 1$ y para $\alpha = 1, \beta = 0$, los toros degeneran en círculos

$$T_{01} = \{(z,w) / |z| = 1, w = 0\}$$

$$T_{10} = \{(z,w) / z = 0, |w| = 1\}.$$

Luego la foliación es singular.

En uno de los modelos para esta foliación, representamos a S^3 como dos toros sólidos identificados por sus fronteras. Si cada toro sólido se descompone en toros concéntricos obtenemos la foliación de S^3 por toros.

*** VER FIGURA 2 ***

Otro modelo para esta foliación consiste en representar a S^3 por dos esferas identificadas por sus fronteras al "rodar" una sobre la otra.

Cada esfera puede intersectarse con cilindros concéntricos obteniendo un par de foliaciones que al hacer la identificación dan la foliación de S^3 por toros.

*** VER FIGURA 3 ***

Pasemos ahora a analizar la foliación $G = \{S3_\gamma; |\gamma| \leq 1/2\}$ donde cada hoja $S3_\gamma$ esta definida por las ecuaciones.

$$|z|^2 + |w|^2 = 1, \operatorname{Im}(\bar{w}z) = \gamma.$$

La idea es ver como intersecta cada hoja $S3_\gamma$ a la foliación de S^3 por toros. La intersección de $S3_\gamma$ con $T_{\alpha\beta}$ la llamaremos la traza de $S3_\gamma$ en $T_{\alpha\beta}$.

En lo que sigue T^\wedge denotará al toro $T_{\alpha\beta}$ con $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$. Abreviaremos también, $S = S^3$; $S_\gamma = S3_\gamma$.

Si parametrizamos a S por $(z,w) = (\alpha e^{i\theta}, \beta e^{i\phi})$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$, en estas coordenadas $\operatorname{Im}(\bar{w}z) = \gamma$ si y solo si $\alpha\beta \sin(\phi - \theta) = \gamma$.

(7) LEMA Las soluciones de la ecuación $\alpha\beta \sin(\phi - \theta) = \gamma$ para $|\gamma| \leq 1/2$ pueden describirse como sigue:

(i) Si $|\gamma| = 1/2$, la única solución es $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$,
 $\phi - \theta = \pi/2 + 2n\pi$, $\phi - \theta = -\pi/2 + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ según
 sea $\gamma = 1/2$ o $\gamma = -1/2$.

(ii) Si $\gamma = 0$, las soluciones son $\alpha\beta = 0$, ϕ, θ
 arbitrarios. O bien $\alpha\beta \neq 0$, $\phi - \theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

(iii) Si $0 < |\gamma| < 1/2$, existen soluciones solo si $\alpha\beta > |\gamma|$
 γ , para cada elección de (α, β) satisfaciendo la desigualdad
 anterior, existen números λ_1, λ_2 , simétricamente dispuestos
 respecto a $\pi/2$ o $-\pi/2$, según sea $\gamma > 0$ o $\gamma < 0$, tales que
 $\phi - \theta = \lambda_1 + 2n\pi$, $\phi - \theta = \lambda_2 + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ son soluciones de
 la ecuación. Si $\gamma \rightarrow \pm 1/2$ entonces $\lambda_j \rightarrow \pm \pi/2 + 2n\pi$,
 $j = 1, 2$, mientras que si $\gamma \rightarrow 0$ entonces $\lambda_j \rightarrow 0, \pm\pi, \pm 2\pi$

Dem.: Haciendo la gráfica de la función $\alpha\beta \text{ sen } \lambda$,

***-VER FIGURA 4 ***

vemos que la ecuación $\alpha\beta \text{ sen } \lambda = \gamma$ tiene soluciones solo si
 $|\gamma| \leq \alpha\beta$. Si $|\gamma| = 1/2$, de la restricción $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ se
 sigue que $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ y las soluciones de la ecuación
 $\text{sen } \lambda = \pm 1$ son $-\lambda = \pm \pi/2 + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Esto demuestra (i).

Si $0 < \gamma < \alpha\beta$, existen λ_1, λ_2 simétricos respecto a
 $\pi/2$, soluciones de $\alpha\beta \text{ sen } \lambda = \gamma$ tal como se muestra en la
 figura (4). Si $-\alpha\beta < \gamma < 0$, ocurre algo similar respecto a $-\pi/2$. Esto demuestra (ii).

Finalmente notemos que si $\gamma = \pm \alpha\beta$, estos valores λ_1, λ_2
 coinciden $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm \pi/2$, mientras que si $\gamma = 0$ y $\alpha\beta \neq 0$,
 las soluciones son $0, \pm\pi, \pm 2\pi$, etc. -1

(B) PROPOSICION

(i) Si $|\gamma| = 1/2$, la hoja S_γ es una curva del tipo (1,1) en
 el toro T^\wedge .

(ii) Si $\gamma = 0$, la superficie S_0 contiene a las curvas enlazadas
 T_{10} y T_{01} en S , y la traza de S_0 en cada $T_{\alpha\beta}$ son dos curvas
 del tipo (1,1).

(iii) Si $0 < |\gamma| < 1/2$, la hoja S_γ tiene traza solamente en
 los toros T con $\alpha\beta > |\gamma|$. Si $\alpha\beta = |\gamma|$, la traza
 es una curva del tipo (1,1); si $\alpha\beta > |\gamma|$, la traza son dos
 curvas paralelas del tipo (1,1).

Nota: Una curva toroidal del tipo (m,n) es una curva cerrada que
 se enreda m veces en el toro mientras da n vueltas, p. ej.

*** VER FIGURA 5 ***

Dem: Veamos el caso $\gamma > 0$, si $\gamma < 0$ el argumento es
 similar.

(i) Si $\gamma = 1/2$, sea $(z(t), w(t)) = (e^{it}/\sqrt{2}, e^{i(t+\pi/2)}/\sqrt{2})$,
 $-\pi \leq t \leq \pi$. Entonces $(z(t), w(t))$ es una curva en T^\wedge
 y además $\text{Im}(\bar{w}(t)z(t)) = \text{sen}(\pi/2)/2 = 1/2 = \gamma$, es decir
 $(z(t), w(t)) \in T^\wedge \cap S_{1/2}$, $-\pi \leq t \leq \pi$.

(ii) $\gamma = 0$ implica que $\alpha\beta = 0$ en cuyo caso nos dan los círculos enlazados T_{10} y T_{01} en S , o bien $\alpha\beta > 0$ en cuyo caso sean $(z(t), w(t)) = (\alpha e^{it}, \beta e^{it})$, $(z'(t), w'(t)) = (\alpha e^{it}, \beta e^{i(t+\pi)})$, $-\pi \leq t < \pi$, dos curvas en $T_{\alpha\beta}$. Como $\text{Im}(\bar{w}(t) z(t)) = \alpha\beta \sin 0 = 0$ y $\text{Im}(\bar{w}(t) z'(t)) = \alpha\beta \sin \pi = 0$, entonces ambas curvas están también en S_0 y por tanto forman la traza de S_0 en $T_{\alpha\beta}$.

(iii) Si $0 < \gamma < 1/2$ sean α, β tales que $\alpha\beta > \gamma$ y sean λ_1, λ_2 las soluciones de la ecuación $\alpha\beta \sin \lambda = \gamma$, como en el lema (7). Las curvas $(\alpha e^{it}, \beta e^{i(t+\lambda_1)})$ y $(\alpha e^{it}, \beta e^{i(t+\lambda_2)})$, $-\pi \leq t < \pi$, son dos curvas en $T_{\alpha\beta}$ que satisfacen $\alpha\beta \sin \lambda_1 = \gamma = \alpha\beta \sin \lambda_2$, luego forman la traza de S_γ en $T_{\alpha\beta}$.

Solo falta hacer notar que si $\alpha\beta = \gamma$, las raíces λ_1, λ_2 coinciden con $\pi/2$ teniéndose solamente una curva en la intersección. -1

Las curvas mencionadas en los incisos (i) - (iii) de la proposición anterior pueden representarse en el cuadrado $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$ con las fronteras identificadas, como se muestra en la figura (6). Las curvas punteadas corresponden a valores negativos de γ .

*** VER FIGURA 6 ***

Nótese que la primera figura es un caso límite de la última cuando $\gamma \rightarrow \pm 1/2$, pues entonces $\alpha, \beta \rightarrow 1/\sqrt{2}$.

La intersección de los toros $T_{\alpha\beta}$ con las superficies S_γ puede describirse en términos de α, β y γ como sigue: Trazamos en el primer cuadrante del plano α - β la circunferencia $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Cada punto de ella representa a un toro $T_{\alpha\beta}$. En los modelos de las figs. (2) y (3), los puntos extremos $\alpha = 1, \beta = 0$ y $\alpha = 0, \beta = 1$ representan los toros degenerados en círculos T_{10} y T_{01} . El toro T^\wedge viene representado por el punto medio del arco de circunferencia.

*** VER FIGURA 7 ***

Consideremos la familia de hipérbolas $\alpha\beta = |\gamma|$. Para cada valor de γ , los puntos (α, β) sobre el círculo $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ que satisfacen $\alpha\beta > |\gamma|$ dan toros $T_{\alpha\beta}$ que sí interseccionan a la superficie S_γ . Por ejemplo para $\gamma = 0$, $\alpha\beta > 0$, i.e., S_0 intersecciona a todos los toros $T_{\alpha\beta}$. Si $|\gamma| = 1/2$, la hipérbola $\alpha\beta = 1/2$ es tangente al círculo $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ en el punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y por lo tanto la hoja S_γ está totalmente contenida en el toro T^\wedge . En el caso en que $0 < |\gamma| < 1/2$, la hipérbola $\alpha\beta = |\gamma|$ intersecciona al círculo $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ en dos puntos simétricos respecto a $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

*** VER FIGURA 8 ***

Esto significa que S_γ intersecciona a los toros $T_{\alpha\beta}$ para valores (α, β) en el arco con línea gruesa de la figura (8).

Refiriéndonos a la figura (2), basta analizar la intersección de S_γ con uno de los toros sólidos, por ejemplo con $T_1 := \cup \{T_{\alpha\beta} : \alpha > 1/\sqrt{2}, \beta < 1/\sqrt{2}, \alpha^2 + \beta^2 = 1\}$.

Tomando en cuenta la proposición (8) y los comentarios anteriores, la intersección de S_γ con uno de los toros sólidos por ejemplo con T_1 (dicha intersección es una semihoja), se vería como se muestra en la figura (9)

*** VER FIGURA 9 ***

Notese que las superficies S_γ para $0 \leq \gamma < 1/2$ intersectan al toro $T^* = \partial T_1$ en dos curvas enlazadas y para estos casos la topología de la intersección de S_γ con el toro sólido es la de un haz de líneas trazadas entre los círculos enlazados. Con mas precisión; proyectamos los círculos enlazados sobre un plano y cortamos en los cruces obteniendo dos círculos ajenos que "rellenamos" obteniendo dos discos. Finalmente "pegamos" a lo largo de los cortes torciendo 180 grados.

*** VER FIGURA 10 ***

La intersección de S_γ con el otro toro sólido $T_2 := \cup \{T_{\alpha\beta} : \alpha \leq 1/\sqrt{2}, \beta > 1/\sqrt{2}\}$ da una superficie semejante, por simetría, que debe "pegarse" con su copia en el toro T_1 a lo largo de dos círculos. El resultado es un toro (recuérdese que las semihojas $S_\gamma \cap T_1$ y $S_\gamma \cap T_2$ están enlazadas).

*** VER FIGURA 11 ***

Tenemos entonces el siguiente

TEOREMA La topología de las hojas S_γ es la siguiente:

- (i) S_γ es un toro para $0 \leq |\gamma| < 1/2$.
- (ii) $S_{1/2}$ y $S_{-1/2}$ son dos círculos.

Además las hojas S_γ y $S_{-\gamma}$ están enlazadas para cada $0 < \gamma \leq 1/2$.

Dem.: Ya hemos visto que la topología de las hojas es la descrita en los incisos (i) y (ii). Para ver que S_γ y $S_{-\gamma}$ están enlazadas, tómesese en cuenta que en la figura (9) la semihoja $S_\gamma \cap T_1$ se obtiene de la semihoja $S_{-\gamma} \cap T_1$ reflejando respecto al plano $\theta = 0$. Al identificar los extremos $\phi = -\pi$ con $\phi = \pi$, las semihojas $S_{-\gamma} \cap T_1$ y $S_\gamma \cap T_1$ en el toro sólido están enlazadas y por lo tanto las hojas completas $S_{-\gamma}$ y S_γ -!

Globalmente la foliación G que acabamos de describir es equivalente a la foliación de S^3 por toros. Para $0 < \gamma < 1/2$ S_γ y $S_{-\gamma}$ son dos toros enlazados como en la figura (12-i). Al disminuir γ hasta hacer $\gamma = 0$, los toros se identifican para dar el toro que corresponde a momento angular cero, i.e. la superficie de colisión regularizada (12-ii). Al hacer tender $|\gamma|$ a $1/2$ los toros degeneran en un par de círculos $S_{1/2}$, $S_{-1/2}$ que

corresponden a las trayectorias circulares con orientaciones opuestas (12-iii).

*** VER FIGURA 12 ***

Igualmente podríamos haber descrito la foliación G en el segundo modelo de S^3 (fig. 3), que mostramos en la figura (13)

*** VER FIGURA 13 ***

Estudiemos ahora la foliación G^* que se obtiene al identificar (z,w) con $(-z,-w)$ en S^3 . Como hemos tomado coordenadas polares, $z = \alpha e^{i\theta}$, $w = \beta e^{i\phi}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, esto equivale a identificar (θ, ϕ) con $(\theta + \pi, \phi + \pi)$. Examinemos una de las hojas $T_{\alpha\beta}$ de la foliación de S^3 por toros. Tomamos el rectángulo $-\pi < \theta < \pi$, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. Al identificar (θ, ϕ) con $(\theta + \pi, \phi + \pi)$ obtenemos un toro "torcido" $T_{\alpha\beta}^*$.

*** VER FIGURA 14 ***

Si hacemos esto para cada toro $T_{\alpha\beta}$, obtenemos una foliación de S^3 por toros $T_{\alpha\beta}^*$, es decir una foliación de $\mathbb{R}P^3$. Esta construcción se visualiza fácilmente en el segundo modelo de S^3 como dos copias de D^3 , la bola unitaria en \mathbb{R}^3 , identificadas por sus fronteras. Simplemente tomamos una de las copias e identificamos por antípodos.

*** VER FIGURA 15 ***

Notese que la identificación antípoda de las hojas singulares T_{10} y T_{01} vuelven a dar dos curvas cerradas. Podemos proceder de manera análoga a examinar la traza de las hojas de la foliación G^* en cada toro $T_{\alpha\beta}^*$. Para ello basta considerar en la figura (6) las trazas cuando hacemos las identificaciones de la figura (14). La foliación G^* es entonces la que obtenemos al considerar en la figura (13) la foliación G de una de las esferas D^3 e identificar por antípodos.

*** VER FIGURA 16 ***

SECCION III.3

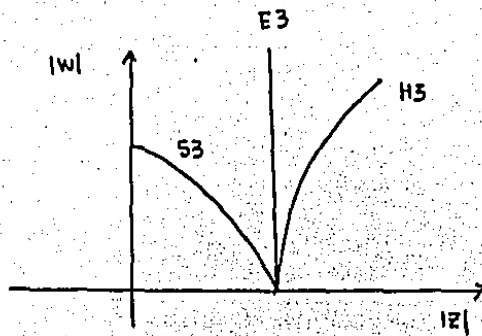


Fig. 1 Imágenes de los modelos de E_3 bajo la proyección $(z, w) \mapsto (|z|, |w|)$.

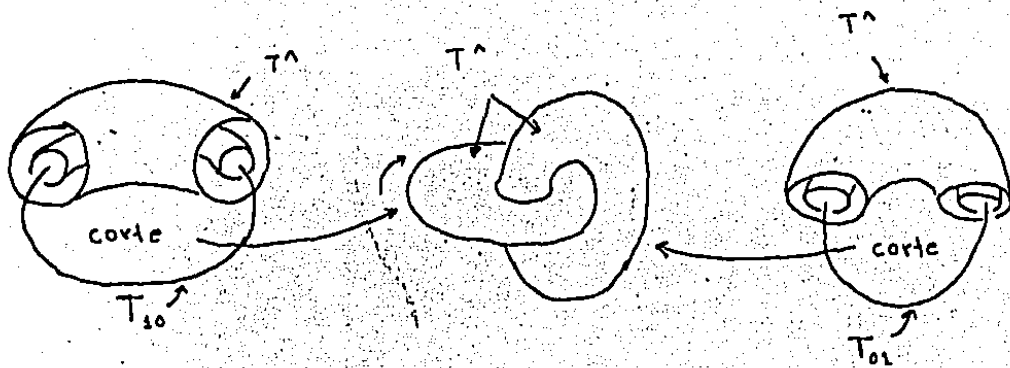


Fig. 2. Foliación de S^3 por toros. T^\wedge es el toro $T_{d\beta}$ con $d = \beta = 1/\sqrt{2}$.

SECCION III.3

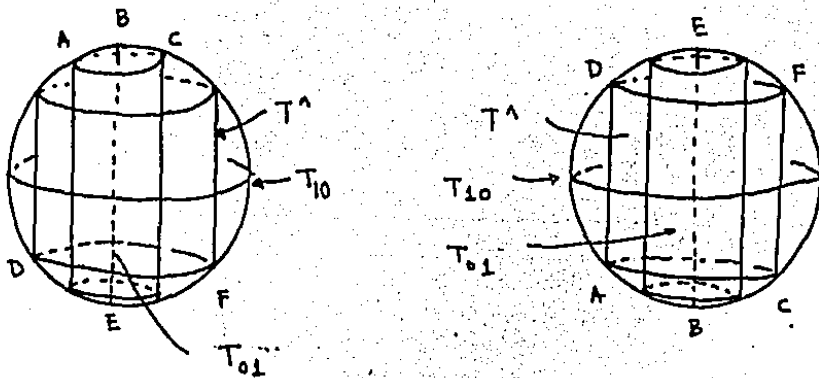


Fig. 3 Foliation de S^3 por toros en otro modelo de S^3 : Dos copias de D^3 identificadas por la frontera.
 $\hat{T} = T_{\alpha\beta}$ con $\alpha, \beta = 1/\sqrt{2}$

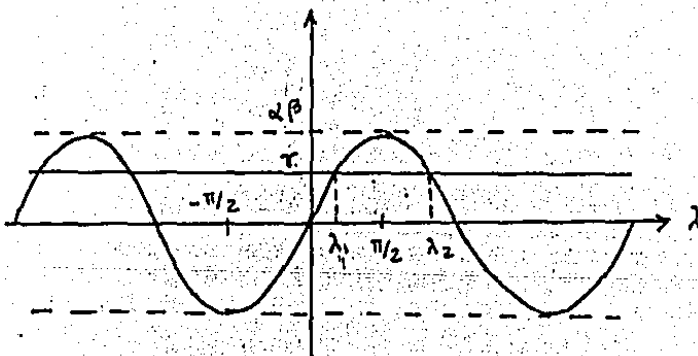
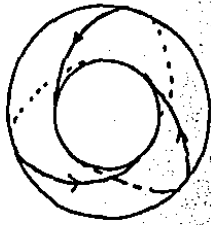
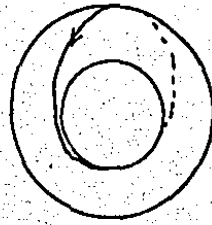


Fig. 4 Grafica de la función $\alpha\beta \text{sen } \lambda$.

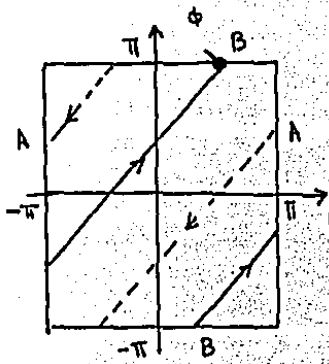


curva del tipo (2,3)

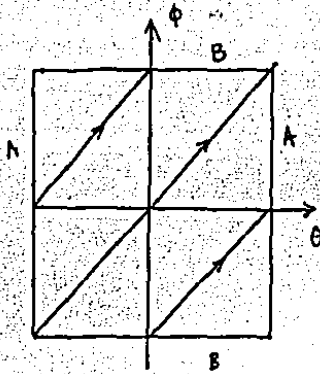


curva del tipo (1,1)

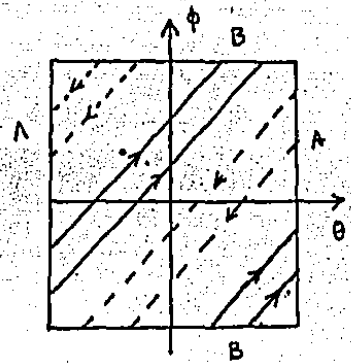
FIGURA 5.



Hojas singulares $S_{1/2}, S_{-1/2}$
sobre el toro T^2 .



Traza de S_0 sobre
 $T_{\alpha\beta}$ para $\alpha > 0$



Traza de S_γ sobre
 $T_{\alpha\beta}$ para $\alpha > \gamma > 0$.

FIGURA 6. Traza de S_γ sobre $T_{\alpha\beta}$.

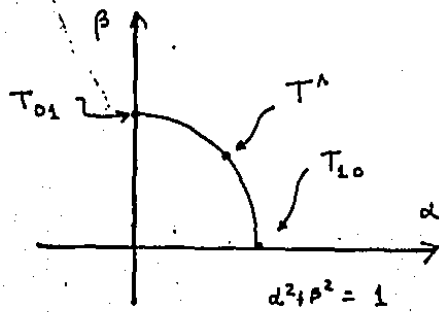


FIGURA 7.

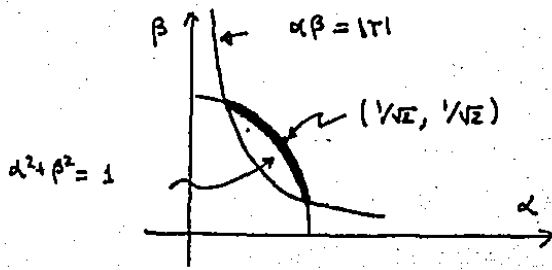
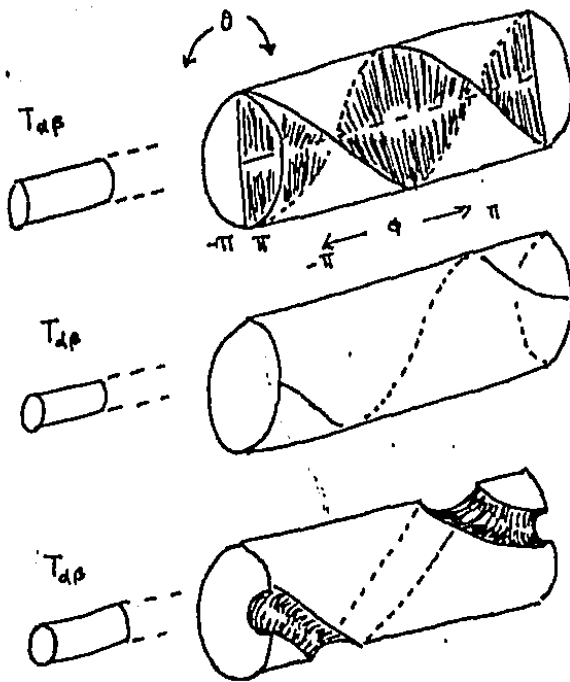


FIGURA 8.

SEMIHOJA



$$S_0 \cap T_1$$

$$S_{1/2} \cap T_1$$

$$S_r \cap T_1, 0 < r < \frac{1}{2}$$

Fig. 4. Interseccion de la superficie S_r con el toro solido $T_1 := U\{T_{\alpha\beta} \mid \alpha \geq 1/\sqrt{2}; \beta \leq 1/\sqrt{2}\}$. Cada toro $T_{\alpha\beta}$ intersecciona a S_r de acuerdo a la proposicion (8)

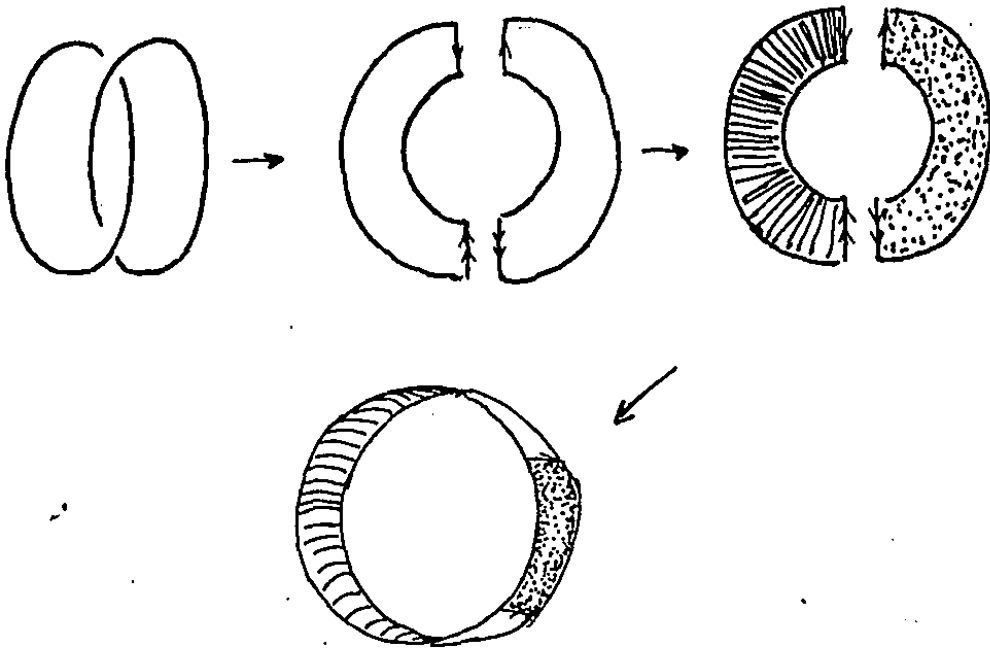


Fig. 10. Topología de la intersección de S_T con el toro sólido T_1 (semi hoja)

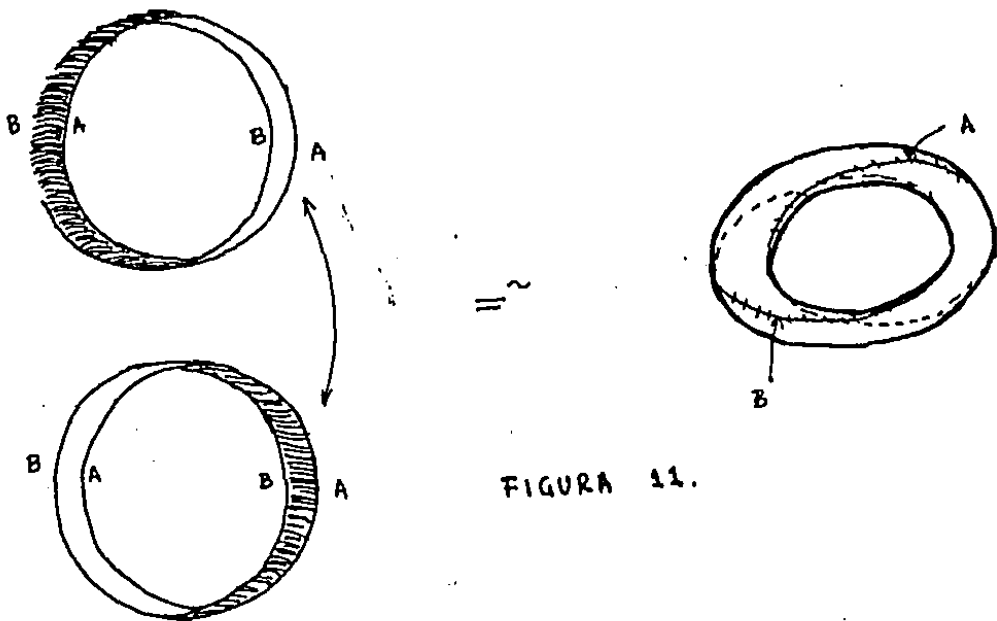


FIGURA 11.

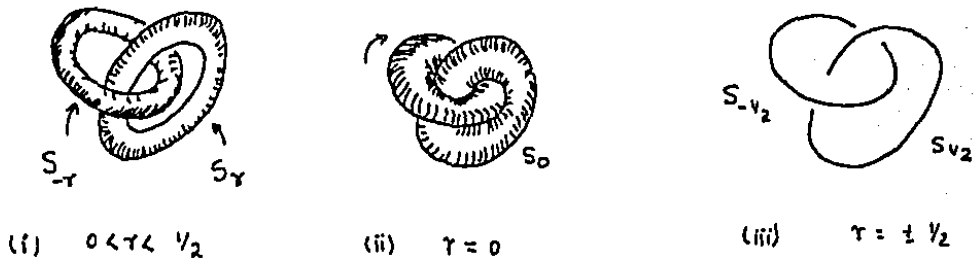


FIG.12 ASPECTO GLOBAL DE LA FOLIACION G.

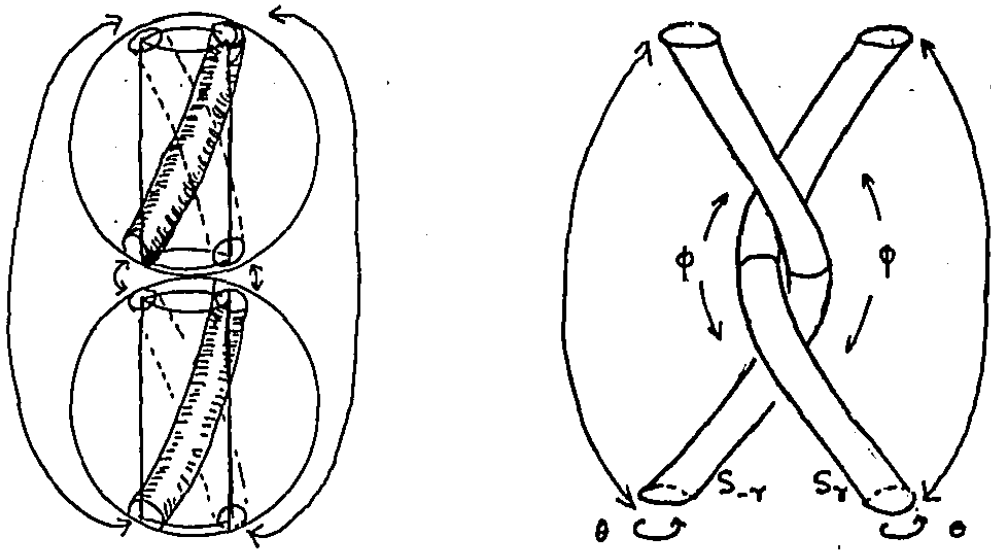


Fig.13 Descripción de la foliación G en el segundo modelo. También se muestran las coordenadas θ, ϕ .

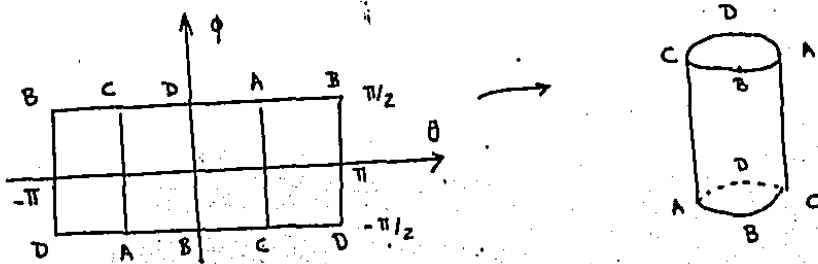


Fig.14 Construcción del toro $T_{\mathbb{R}^2}$.

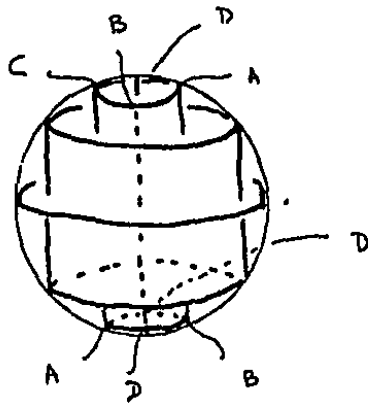


Fig. 15. Foliación de $RP^3 = S^3/\sim$ por toros T^2_{α} .

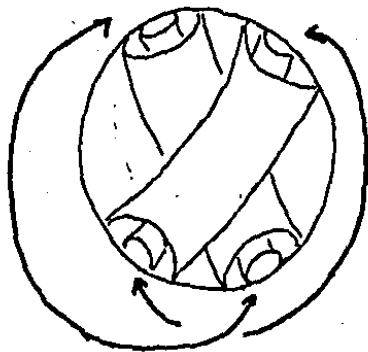


Fig. 16 Aspecto global de la foliación G^{\sim} .

III.4 DESCRIPCIÓN INTRÍNSECA DE LA REGULARIZACIÓN.

La definición libre de coordenadas del concepto de regularización de un campo vectorial parece ser debida a Pham [PHAM]. Esta definición incluye las regularizaciones del tipo de Sundman y Levi Civita, así como la regularización del problema de Kepler por flujos geodésicos como se verá más adelante. En el caso de campos Hamiltonianos la regularización del campo vectorial sobre un nivel de energía puede describirse modificando apropiadamente el Hamiltoniano.

(1) **DEFINICIÓN** Sea M una variedad diferenciable, X un campo vectorial incompleto en M . Una regularización de X es una cuaterna (N, θ, X^*, f) donde N es una variedad diferenciable, $\theta: M \rightarrow N$ un encaje denso en N , X^* un campo completo en N , $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente positiva o estrictamente negativa tal que

$$\theta_* X = (f \circ \theta^{-1}) X^* |_{\theta(M)}$$

Obs. $\theta_* X$ es un campo definido en $\theta(M)$ que como derivación en $C^\infty(\theta(M))$ es $[\theta_* X](h) = X(h \circ \theta^{-1})$ para $h \in C^\infty(\theta(M))$.

En términos menos precisos, X^* es un campo que coincide con X en un dominio denso excepto por un cambio de coordenadas θ y una reparametrización f .

(1) **EJEMPLO (Regularización de Sundman).** Para c fijo,

$X = v(\partial/\partial r) + (-1/r^2 + c^2/r^3)(\partial/\partial v)$, restringido a

$M = \{(r, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : v^2/2 = 1/r - c^2/2r^2 + h\}$.

Si $c \neq 0$ el campo X ya es completo, si $c = 0$ el campo es incompleto debido a las colisiones. En ambos casos tiene sentido regularizar.

Si $c \neq 0$ sea $N = \{(r, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : w^2/2 = hr^2 + r - c^2/2\}$.

Si $c = 0$ sea $N = \{(r, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : w^2/2 = hr^2 + r\}$.

Sea $\theta: M \rightarrow N$, $\theta(r, v) = (r, rv)$. θ es un encaje denso en N .

Calculamos, $[\theta_*(\partial/\partial r)](r, w) = \partial/\partial r + (w/r)(\partial/\partial w)$

$$[\theta_*(\partial/\partial v)](r, w) = r(\partial/\partial w).$$

Luego

$$(\theta_* X)(r, w) = [\theta_*(v(\partial/\partial r) + (-1/r^2 + c^2/r^3)(\partial/\partial v))](r, w)$$

$$= (w/r)((\partial/\partial r) + (w/r)(\partial/\partial w)) + (-1/r^2 + c^2/r^3)r(\partial/\partial w)$$

$$= (w/r)(\partial/\partial r) + (w^2/r^2 - 1/r + c^2/r^2)(\partial/\partial w),$$

pero de la ecuación $w^2/2 = hr^2 + r - c^2/2$, se sigue que

$$w^2/r^2 = 2h + 2/r - c^2/r^2.$$

Al sustituir en la última expresión obtenemos

$$\begin{aligned} (\theta^*X)(r,w) &= (w/r)(\partial/\partial r) + (2h + 1/r)(\partial/\partial w) \\ &= (1/r)[w(\partial/\partial r) + (2hr + 1)(\partial/\partial w)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto si tomamos $f(r,w) = 1/r$ obtenemos que

$$\begin{aligned} X^*(r,w) &= w(\partial/\partial r) + (2hr + 1)(\partial/\partial w) \text{ satisface la relación} \\ \theta^*X &= (f \circ \theta^{-1}) X^*|_{\theta(M)}. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial definida por X^* es

$$r' = w$$

$$w' = 2hr + 1.$$

Vease ec. [II.2-2].

(2) EJEMPLO (Regularización de Levi - Civita).

$$X = y \cdot (\partial/\partial x) - (x/|x|^3) \cdot (\partial/\partial y)$$

$$(y \cdot (\partial/\partial x)) = y_1 (\partial/\partial x_1) + y_2 (\partial/\partial x_2), \text{ etc.}$$

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} : |y|^2/2 = 1/|x| + h\};$$

$$N = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} : |\eta|^2 - 2h|\xi|^2 = 2\}; \text{ definimos } \theta: M \rightarrow N$$

por su inversa: $\theta^{-1}[(\xi, \eta)] = (\xi^2, \eta/\xi)$ siempre que $\xi \neq 0$.

$$N \setminus \theta(M) = \{(0, \eta) : |\eta|^2 = 2\}, \text{ y } \theta \text{ es un encaje denso en } N.$$

$$(\theta^*X)(\xi, \eta) = (\eta/2|\xi|^2) \cdot (\partial/\partial \xi) + (2h\xi/2|\xi|^2) \cdot (\partial/\partial \eta).$$

(vease secc. III.3). Si $f \circ \theta^{-1}[(\xi, \eta)] = 1/2|\xi|^2$, entonces

$$X^* = \eta (\partial/\partial \xi) + 2h\xi (\partial/\partial \eta) \text{ es el campo regularizado.}$$

Recordemos brevemente algunos aspectos elementales de la Mecánica Hamiltoniana. (Vease [ARN], [A-M]).

Sea (P,p) una variedad simpléctica. Así, P tiene dimensión par y p es una 2-forma cerrada y no degenerada. Supongase que H es una función y X un campo en P , relacionados mediante la ecuación

$$X \lrcorner p = dH$$

(Aquí $X \lrcorner p$ es una 1-forma llamada producto interior de p con X o la contracción de p con X . Si Y es cualquier otro campo,

entonces

$$X_{-1} p(Y) = p(X, Y) = -p(Y, X) = -Y_{-1} p(X)$$

Entonces en coordenadas de Darboux $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, P es constante en el dominio de la carta, donde

$$p = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

El campo vectorial X se expresa como

$$X = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial y_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

y sus curvas integrales $(x(t), y(t))$ satisfacen las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Utilizaremos la notación $X = X_H$ o $H = H_X$. Nótese que si P es conexa entonces H_X está determinado hasta una constante.

La regularización de Levi-Civita es un ejemplo de regularización especialmente adaptada para preservar la forma de las ecuaciones de Hamilton. Veamos algunos aspectos de este tipo de regularizaciones.

Supongase que (Q, ω) es una variedad simpléctica, X un campo Hamiltoniano, incompleto en Q . Típicamente Q es un abierto denso de una variedad simpléctica Q^\sim y $Q^\sim \setminus Q$ es el conjunto de "singularidades" del campo o del Hamiltoniano, es decir X o H no pueden extenderse suavemente a todo Q^\sim .

Si h es un valor regular de H entonces $E_h := H^{-1}(h)$ es una variedad diferenciable invariante bajo el flujo de X_H . La restricción de X_H a E_h la denotaremos por X_h .

Podemos construir una vecindad tubular de E_h siguiendo las líneas del gradiente de H . Sea entonces U una vecindad de E_h conteniendo a una vecindad tubular de E_h y supongase que $\theta: U \rightarrow V^\sim$ es un encaje abierto y denso en una variedad simpléctica (V^\sim, ω) que además es una transformación canónica sobre (V, ω) con $V = \theta(U)$. El Hamiltoniano $F := H \circ \theta^{-1}$ define un campo vectorial X_F en V .

(1) PROPOSICION Si $u: (h - \delta, h + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $u(h) = h$, $u'(h) = 1$, entonces F y $F^\wedge := u \circ F - h$ definen el mismo campo vectorial en $F^{-1}(h) = F^\wedge^{-1}(0)$.

Dem. Por definición, $X_{F^\wedge} \lrcorner v = dF^\wedge$, pero

$$dF^\wedge = (u' \circ F) \cdot dF = (u' \circ F) (X_F \lrcorner v)$$

$$\therefore X_{F^\wedge} \lrcorner v = (u' \circ F) (X_F \lrcorner v) = (u' \circ F) X_F \lrcorner v.$$

Si $x \in F^{-1}(h)$ entonces $X_{F^\wedge}(x) \lrcorner v_x = X_F(x) \lrcorner v_x$ y como v es no degenerada se sigue que $X_{F^\wedge}(x) = X_F(x)$. -1

Ahora supongase que existe una función $f:V \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente positiva o estrictamente negativa tal que $G := f \cdot F^\wedge$ puede extenderse suavemente a V^\wedge . Entonces igual que en la proposición (1) el campo X_G es una reparametrización de X_{F^\wedge} en $F^\wedge^{-1}(0)$. Por lo tanto

$N = \overline{\theta(E_h)}$, $\theta|_{E_h} : E_h \rightarrow N$, $X_h := X_G|_{\theta(E_h)}$, $f|_{\theta(E_h)} : \theta(E_h) \rightarrow \mathbb{R}$

es una regularización del campo X_h sobre el nivel de energía h .

Si escribimos el Hamiltoniano G como

$$G = f(u \cdot H \circ \theta^{-1} - h)$$

vemos que una regularización de este tipo consiste de una transformación canónica de coordenadas θ , una transformación en la energía u y una reparametrización f .

*** VER FIGURA 1 ***

CONJETURA Supongase que $G = f(u \cdot F - h)$ puede extenderse suavemente a V^\wedge , donde $u(h) = h$ y $u'(h) = 1$. Entonces X_e es regularizable para e cercano a h .

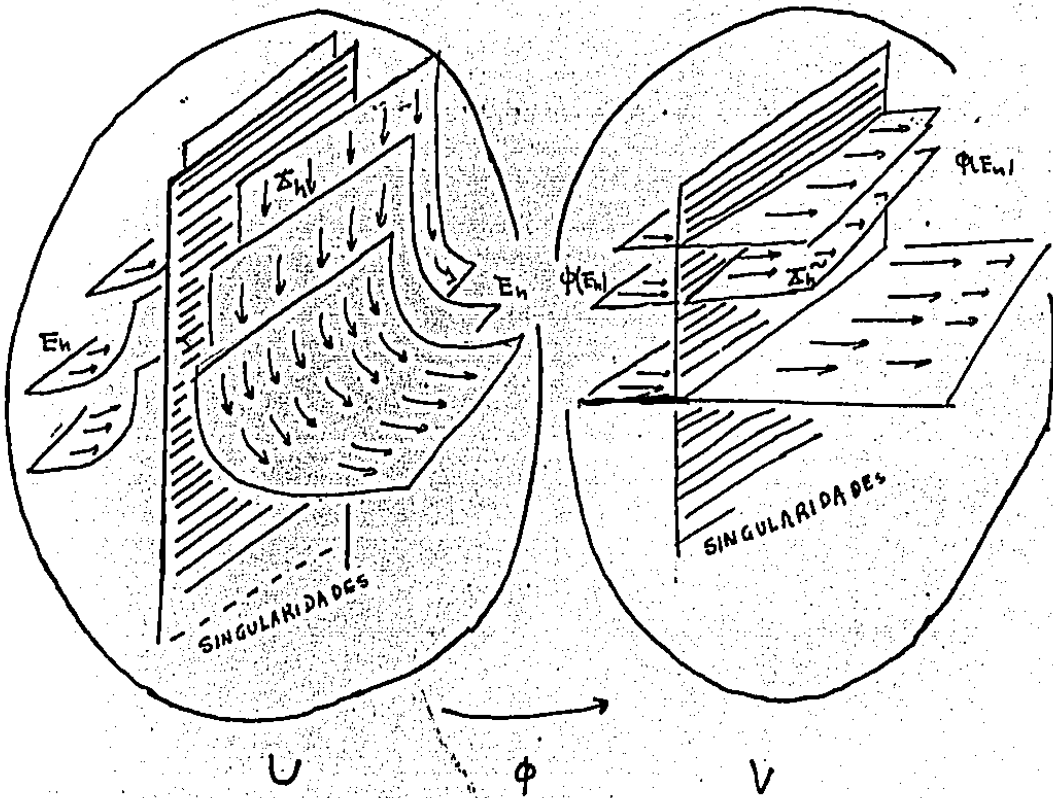


Fig.1 Ilustración de la regularización para campos Hamiltonianos.

CAPITULO IV GEOMETRIA Y SIMETRIAS DEL PROBLEMA DE KEPLER.

En el artículo [MO-I], J. Moser demuestra que es posible regularizar el problema de Kepler de modo que el flujo para un valor fijo de energía negativa es equivalente al flujo geodésico en la esfera. En la sección IV.1 hacemos una presentación elemental de este resultado debida a Milnor [MIL].

La sección IV.2 está parcialmente inspirada en el artículo de Moser [MO-II] donde obtiene formulas para extender el flujo geodésico al espacio ambiente para variedades encajadas en el espacio euclidiano. La sección IV.3 esta motivada por los artículos de Alekseev [AL] y Pham [PHAM-I]. En la ultima sección seguimos con pocas variantes un artículo poco conocido de Ong Ping Chong [ONG] referente a la clasificación de órbitas en terminos de la curvatura de la métrica de Jacobi.

Como Katok gentilmente me hizo ver, la métrica de Jacobi ha sido poco estudiada.

IV.1 REGULARIZACION Y GEOMETRIAS CLASICAS EN EL PROBLEMA DE KEPLER

El problema de Kepler en el plano

$$\dot{r} = \dot{y}$$

$$\dot{y} = -r/|r|^3 \quad r \cdot E^2 = -c_0, \quad y \cdot E^2$$

puede escribirse, introduciendo coordenadas polares $r = r(\cos \theta, \sin \theta)$, como

$$dv/dt = -(\cos \theta, \sin \theta)/r^2.$$

(1) TEOREMA (Hamilton) El vector velocidad v se mueve en un círculo, aunque su centro no esta necesariamente en el origen.

Dem. $dv/d\theta = dv/dt \cdot dt/d\theta$ y, por conservación del momento angular, $d\theta/dt = c/r^2$, de modo que si $c \neq 0$

$$dv/d\theta = (r^2/c)(-(\cos \theta, \sin \theta)/r^2) = -(\cos \theta, \sin \theta)/c$$

integrando respecto a θ ,

$$(1) \dots \quad v(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)/c + b.$$

Luego v se mueve sobre un círculo de radio $R = 1/|c|$ y centro en b , con la orientación positiva si $c > 0$ o negativa si $c < 0$ esto se sigue de la ecuación $\theta = c/r^2$.

*** VER FIGURA 1 ***

Nótese que no sabemos hasta ahora si el vector $v(\theta(t))$ recorre todo el círculo de velocidades.

Conviene definir la excentricidad del círculo, $e = |b|/R$. Si ahora orientamos los ejes de modo que b este sobre el eje horizontal; $b = (0, eR)$ y podemos reescribir (1) como

$$v(\theta) = R(-\sin \theta, \cos \theta + e).$$

Si ahora sustituimos en la ecuación $c = r \times v$, obtenemos la ecuación de la órbita en coordenadas polares

$$|r|(\theta) = c^2 / (1 + e \cos \theta) = 1/R (1 + e \cos \theta)$$

$$\Rightarrow r(\theta) = (c^2 \cos \theta / (1 + e \cos \theta), c^2 \sin \theta / (1 + e \sin \theta))$$

Veamos algunas propiedades geométricas del círculo de velocidades.

(2) PROPOSICION El radio $R = 1/|c|$, el centro b del círculo de velocidades y la energía h satisfacen $2h = |b|^2 - R^2$.

Dem. A partir de la ecuación de la energía tenemos

$$2h = 2|v|^2 - 2/|r|$$

pero de $v(\theta) = R(-\sin \theta, \cos \theta) + (0, eR)$, obtenemos

$$|v(\theta)|^2 = R^2 + e^2 R^2 + 2eR^2 \cos \theta$$

$$\therefore 2h = R^2 + eR^2(e + 2 \cos \theta) - 2R^2(1 + e \cos \theta)$$

$$= R^2 + e^2 R^2 - 2R^2 = e^2 R^2 - R^2 = |b|^2 - R^2 - 1$$

Obs.: Si sustituimos $|b|^2 = e^2 R^2$, $R = 1/|c|^2$ en la fórmula anterior obtenemos la expresión familiar $2hc^2 = e^2 - 1$.

Con ayuda de la relación obtenida en la proposición (2) podemos construir los círculos de velocidades de acuerdo al siguiente esquema.

CONSTRUCCION DE LOS CIRCULOS DE VELOCIDADES

A.- Construyase el círculo de referencia de radio $\sqrt{2|h|}$ si $h \neq 0$; $\sqrt{2}$ si $h = 0$ con centro en el origen (la elección $\sqrt{2}$ para $h = 0$ es un tanto arbitraria pero se justificará en la sección IV.2)

B.- Localícese el punto $(0, |b|)$ en el eje vertical. Este es el centro del círculo de velocidades.

(i) Si $h > 0$, trácese una recta tangente al círculo de referencia a partir del centro $(0, |b|)$. El segmento determinado es entonces un radio del círculo de velocidades. *** VER FIG. 1 ***

(ii) Si $h = 0$ trácese el círculo de radio $R = |b|$. ** VER FIG.2 **

(iii) Si $h < 0$, trácese un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{2|h|}$ y $|b|$ con el vértice recto en el origen. La hipotenusa determina entonces el radio del círculo de velocidades ** VER FIG. 3 **

De la ecuación de la energía se obtiene que $|v|^2 > 2h$; por lo tanto si $h > 0$, el vector $v(t)$ recorre la parte del círculo de velocidades exterior al círculo de referencia. Si $h < 0$ no hay restricción alguna sobre el vector $v(t)$ y éste recorre por tanto todo el círculo de velocidades.

(3) LEMA Sean v_1, v_2 puntos sobre el círculo de velocidades y sobre una misma línea que pasa por el origen. Entonces $v_1 v_2 = 2h$.

Dem.: *** VER FIGURA 4 ***

Sea w el vector diametralmente opuesto a v_1 . Escribamos $v_1 = b + e$, $w = b - e$, siendo b el centro del círculo. Ya que v_1 es ortogonal a $w - v_2$, tenemos entonces que

$$v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot (v_2 + w - v_2) = v_1 \cdot w = (b + e) \cdot (b - e) = |b|^2 - |e|^2 = |b|^2 - R^2$$

; y de acuerdo a la proposición (2) se sigue que

$$v_1 \cdot v_2 = 2h \quad -1$$

Recordemos ahora como se define la operación de inversión. Si k es una constante positiva y p el centro de un círculo de radio r , la transformación $r \rightarrow r'$ definida por las condiciones

$$(r - p)(r' - p) = k^2 \quad ; \quad r, p \text{ y } r' \text{ colineales}$$

define la operación de inversión respecto al círculo. Si la anterior relación se cambia a

$$(r - p)(r' - p) = -k^2$$

entonces tenemos la inversión negativa. Ambas operaciones pueden hacerse con regla y compás como se muestra en la figura (5).

*** VER FIGURA 5 ***

(4) PROPOSICION

- (i) Si $h > 0$, el círculo de velocidades es invariante bajo la inversión respecto al círculo de radio $\sqrt{2h}$ y centro en el origen.
- (ii) Si $h < 0$, el círculo de velocidades es invariante bajo la inversión negativa respecto al círculo de radio $\sqrt{2|h|}$ y centro en el origen.
- (iii) Si $h = 0$, la inversión del círculo de velocidades respecto al círculo de radio $\sqrt{2}$ (en realidad de cualquier radio) y centro en el origen es una recta.

Dem.: De acuerdo al lema (3), un punto v_1 sobre el círculo de velocidades va a un punto v_2 en la misma línea que une v_1 con el origen y sobre el círculo de velocidades. La transformación $v_1 \rightarrow$

v_2 es una inversión respecto al círculo de radio $\sqrt{2h}$ y centro en el origen si $h > 0$, o una inversión negativa si $h < 0$, ya que $v_1 \cdot v_2 = 2|h|$ si $h > 0$, $v_1 \cdot v_2 = -2|h|$ si $h < 0$.

Si $h = 0$ *** VER FIGURA 6 *** Los puntos A y B quedan fijos bajo la inversión respecto al círculo de radio $\sqrt{2}$ (arbitrariamente elegido) y el origen o va al infinito. Esto es suficiente para concluir que la inversión del círculo es la recta determinada por el segmento AB.

Consideremos el caso $h = -1/2$. Luego el círculo de velocidades es invariante bajo la inversión negativa respecto al círculo unitario. No es difícil ver que la inversión negativa es, en notación compleja, $v \rightarrow -1/\bar{v}$, $v \in \mathbb{C}$. Ahora transformamos el plano complejo con el punto al infinito $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en la esfera S^2 mediante la proyección estereográfica $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, con

$$\begin{aligned} x_1 &= (v + \bar{v}) / (1 + |v|^2) \\ x_2 &= (v - \bar{v}) / i(1 + |v|^2) \\ x_3 &= (|v|^2 - 1) / (|v|^2 + 1) \end{aligned}$$

luego, si $v \rightarrow v' = -1/\bar{v}$, entonces $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x'_1, x'_2, x'_3)$ donde

$$\begin{aligned} x'_1 &= (-1/\bar{v} - 1/v) / (1 + |v|^2) = -(v + \bar{v}) / |v|^2(1 + |v|^2) = -x_1 \\ x'_2 &= (-1/\bar{v} + 1/v) / i(1 + |v|^2) = -(v - \bar{v}) / i|v|^2(1 + |v|^2) = -x_2 \\ x'_3 &= (|v|^2 - 1) / (|v|^2 + 1) = (1 - |v|^2) / (1 + |v|^2) = -x_3 \end{aligned}$$

Es decir, la inversión negativa corresponde a la transformación antípoda en S^2 . Al llevar los círculos de velocidades con energía $h = -1/2$ a S^2 obtenemos curvas cerradas que son invariantes bajo la transformación $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (-x_1, -x_2, -x_3)$, i.e. son círculos máximos en S^2 .

En el caso $h = 1/2$, la parte del círculo de velocidades exterior al círculo unitario se transforma en la parte interior bajo la transformación de inversión. Además por construcción, el círculo de velocidades intersecta ortogonalmente al círculo unitario. El resultado de invertir el exterior del círculo de velocidades es entonces un segmento de círculo que intersecta ortogonalmente al círculo unitario.

Para el caso $h = 0$, ya hemos visto que el resultado de invertir un círculo de velocidades nos da una recta. Tenemos así el siguiente:

(5) TEOREMA Los círculos de velocidades para un valor fijo de la energía h están en correspondencia 1 - 1 con geodesicas, en S^2 si $h < 0$, en el disco de Poincaré D^2 si $h > 0$ y el plano Euclidiano si $h = 0$.

*** VER FIGURA 7 ***

Con más precisión, sean

$$M_+ = \{ w \in \mathbb{R}^2 : |w|^2 < 1 \} \text{ con métrica } ds_+^2 = 4|dw|^2 / (1 - |w|^2)^2$$

$$M_- = \{ w \in \mathbb{R}^2 \} \cup \{\infty\} \text{ con métrica } ds_-^2 = 4|dw|^2 / (1 + |w|^2)^2$$

$$M_0 = \{ w \in \mathbb{R}^2 \} \text{ con métrica } ds_0^2 = 4|dw|^2.$$

M_+ , M_- y M_0 representan la unión de todos los círculos de velocidades invertidos para un valor fijo de la energía $1/2$, $-1/2$ o 0 respectivamente.

Sea I la operación de inversión. Entonces es posible reparametrizar los círculos invertidos $w(t) = I(v(t))$ de modo que sean geodésicas en la métrica correspondiente.

En los casos M_+ y M_0 es claro que ds_+^2 y ds_0^2 determinan la métrica hiperbólica en el disco unitario y la métrica Euclídea. Falta tan solo ver que podemos reparametrizar a $w(t)$ para que el vector tangente tenga norma 1.

En el caso M_- , la métrica en la esfera S^3 , $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ se transforma via la proyección estereográfica en la métrica ds_-^2 - este es un largo cálculo que haremos en la sección siguiente -, luego los círculos invertidos $w(t)$ son líneas geodésicas en M_- pues corresponden a círculos máximos en la esfera S^2 . Así, en los tres casos basta reparametrizar los círculos invertidos.

(6) PROPOSICION Sea s el parametro auxiliar $dt/ds = |r(t(s))|$. Entonces los círculos de velocidades invertidos $w(s) = I(v(s))$ son geodésicas.

Dem. Por la regla de la cadena

$$dv/ds = dv/dt dt/ds = (-r/|r|^3)|r| = -r/|r|^2$$

$$\Rightarrow |dv/ds| = 1/|r| = |v|^2/2 - h = (|v|^2 + e)/2, \quad e = 1, -1, 0.$$

$$\Rightarrow 2|dv/ds|/(|v|^2 + e) = 1.$$

$$\text{Si } h \neq 0, w = \pm v/|v|^2 \Rightarrow |dw|^2 = |dv|^2/|v|^4 \Rightarrow |dv| = |dw|/|w|^2$$

$$\therefore 2|dv/ds|/(|v|^2 + e) = 1 \Rightarrow 2|dw/ds|/|w|^2(1/|w|^2 + e) = 1$$

$$\Rightarrow 2|dw/ds|/(1 + e|w|^2) = 1.$$

$$\text{Si } h = 0, w = 2v/|v|^2 \Rightarrow |dw|^2 = 4|dv|^2/|v|^4 \Rightarrow |dv| = 4|dw|/|w|^2$$

$$2|dv/ds|/|v|^2 = 1 \Rightarrow 2(4|dw/ds|/|w|^2)/(4/|w|^2) =$$

$$2|dw/ds| = 1,$$

i.e., $w(s)$ tiene modulo 1 en la métrica correspondiente.

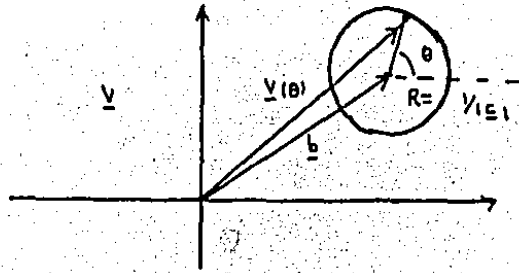


Fig. 1 círculo de velocidades.

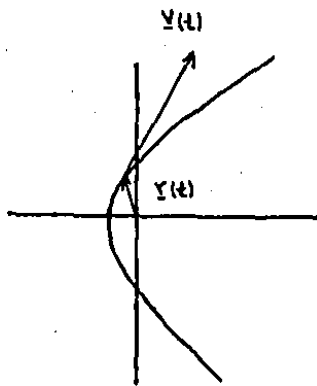
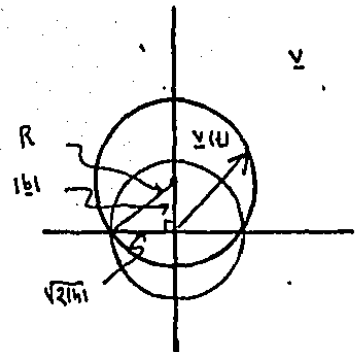
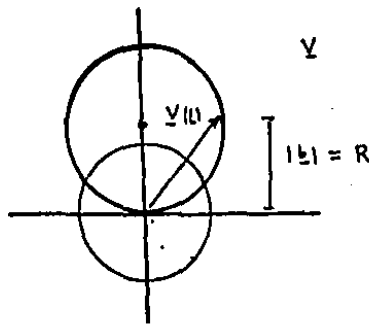
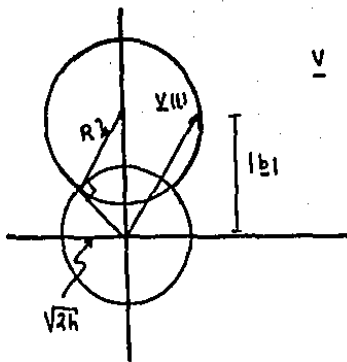


Fig.1 círculo de velocidades $h > 0$

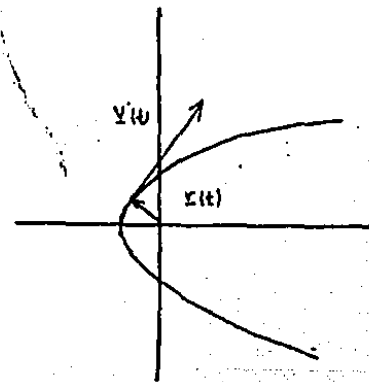


Fig.2 Círculo de velocidades $h = 0$.

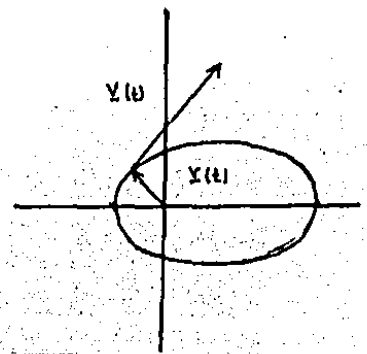
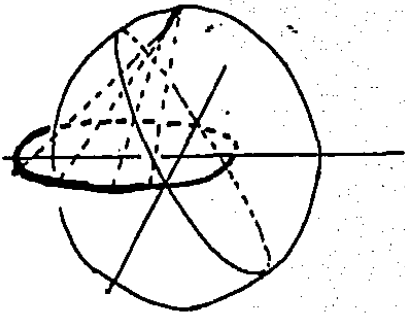
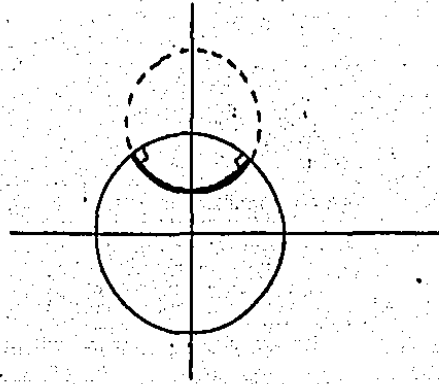


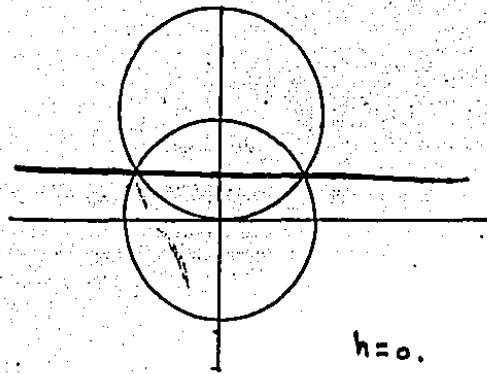
Fig.3 Círculo de velocidades $h < 0$



$h < 0$



$h > 0$



$h = 0$

Fig. 7. Los círculos de velocidades y su relación con geodésicas en la esfera, el disco de Poincaré y el plano euclidiano.

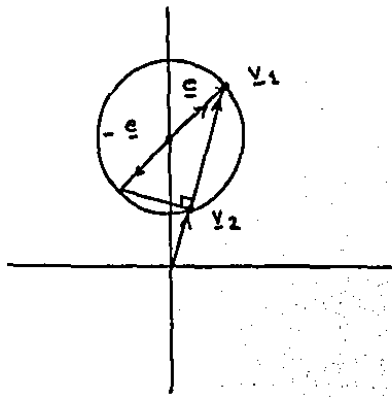


Fig. 4. Ilustracion del lema (3).

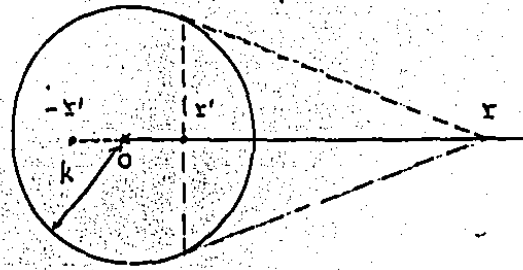


Fig. 5. La inversion del punto P es P' la inversion negativa $-r'$. Se ha supuesto que el centro del rad está en el origen.

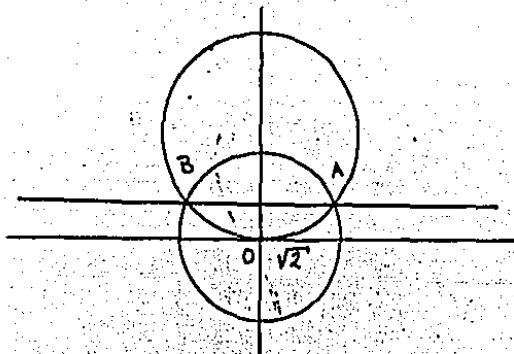


Fig. 6. Inversión del círculo de velocidades para energía $h=0$.

La descripción simpléctica de la regularización abordada en la sección III.4 permite entender con mas claridad el papel que juegan las simetrias en el problema de Kepler. A primera vista parecería que el grupo de simetrias es $SO(3)$, el grupo de rotaciones en E^3 , sin embargo la presencia de otra integral de movimiento que es el vector de Laplace, hizo pensar que este grupo podría ser mas grande. V. Fock en 1935 mostró que cada nivel de energía en el átomo de hidrógeno ocurre con una multiplicidad igual a la de una representación irreducible de $O(4)$. En los metales alcalinos para los que el potencial es de la forma k/r aparece una degeneración aproximada del tipo de $O(4)$, mientras que los niveles mas próximos muestran un espectro correspondiente a una simetría del tipo de $O(3)$. En la década pasada J. Moser (1970), J.M. Soriau (1973) y E. Onofri (1976) encontraron grupos de simetrias mas grandes que $SO(3)$ [ON]

En esta sección veremos que el flujo del problema de Kepler regularizado sobre un nivel de energía es equivalente, excepto por una reparametrización, al flujo geodésico en un espacio de curvatura constante. J. Moser [MO-I] fue el primero en hacer ver esto para energía negativa aunque ya se encuentran antecedentes de este resultado en [SIE-MO]. Posteriormente Osipov [OS] y Belbruno [BEL] demostraron resultados análogos para energía positiva y cero. Resulta que el signo de la energía y el de la curvatura es uno el negativo del otro.

El desarrollo no ofrece mayor dificultad si consideramos el "problema de Kepler en n-dimensiones", vgr. el flujo Hamiltoniano correspondiente a

$$H(x,y) = |y|^2/2 - 1/|x| \quad x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

1.- Para energía $h < 0$, el problema de Kepler regularizado es equivalente al flujo geodésico en la esfera S_n .

En \mathbb{R}^{n+1} tomamos coordenadas (x_1, \dots, x_{n+1}) y vía la métrica euclidiana en \mathbb{R}^{n+1} identificamos \mathbb{R}^{n+1} con $(\mathbb{R}^{n+1})^*$. Explicítamente

$$\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1})^*, \quad (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \rightarrow \xi_1 dx_1 + \dots + \xi_{n+1} dx_{n+1}$$

donde $dx_i : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ son las proyecciones, $i = 1, \dots, n+1$.
Tenemos entonces

$$T^*\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \times (\mathbb{R}^{n+1})^* \cong \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}, \text{ con la forma simpléctica}$$

$$d\xi_1 \wedge dx_1 + \dots + d\xi_{n+1} \wedge dx_{n+1}$$

Consideremos el Hamiltoniano $H: T^*\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(1) \dots \quad H(x,y) = |x|^2 |y|^2 / 2$$

(1) LEMA El flujo Hamiltoniano para $H(x,y) = |x|^2 |y|^2 / 2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ deja invariante a

$$T^* S^n = \{(x, \xi) \in T^* \mathbb{R}^{n+1} / |x| = 1, \langle x, \xi \rangle = 0\}$$

Dem.: El flujo Hamiltoniano es

$$(2) \dots \begin{cases} \dot{x} = |x|^2 \xi \\ \dot{\xi} = -|x|^2 x \end{cases}$$

Luego, $d/ds \langle x, \xi \rangle = \langle \dot{x}, \xi \rangle + \langle x, \dot{\xi} \rangle = |x|^2 |x|^2 - |x|^2 |x|^2 = 0$.

$$d/ds |x|^2 = 2 \langle \dot{x}, x \rangle = 2 |x|^2 \langle x, \xi \rangle = 0. \quad -1$$

Si ahora restringimos el Hamiltoniano y el campo vectorial a $T^* S^n$ obtenemos

$$(3) \dots H(x, \xi) = |x|^2 |x|^2 / 2 \quad \text{si } |x| = 1, \langle x, \xi \rangle = 0 \quad \text{y}$$

$$(4) \dots \begin{cases} \dot{x} = \xi \\ \dot{\xi} = -|x|^2 x \end{cases} \implies \ddot{x} = -|x|^2 x$$

Ya que S^n tiene la métrica inducida de \mathbb{R}^{n+1} , la derivada covariante del vector velocidad $\dot{x}(s)$ a lo largo de la curva $x(s)$ se obtiene simplemente proyectando el vector $\ddot{x}(s)$ sobre el espacio tangente $T_{x(s)} S^n$, por lo tanto

$$\nabla_x \dot{x} = \ddot{x} - \langle \ddot{x}, x \rangle x = -|x|^2 x + |x|^2 x = 0; \quad \text{i.e. } \ddot{x} = -|x|^2 x$$

es la ecuación diferencial de una geodésica en S^n que es un círculo máximo.

Tomemos la proyección estereográfica de $S^n - \{(0, \dots, 1)\} =: S^n_0$ sobre \mathbb{R}^n desde "el polo norte". Obtenemos entonces la transformación $S^n_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow (y_1, \dots, y_n) \quad \text{donde}$$

$$(5) \dots y_k = x_k / (1 - x_{n+1}), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

y la inversa $\mathbb{R}^n \rightarrow S^n_0$, dada por (6) ...

$$x_k = 2y_k / (|y|^2 + 1), \quad k = 1, \dots, n; \quad x_{n+1} = (|y|^2 - 1) / (|y|^2 + 1).$$

Si $x(s)$ es una curva en S^n y $y(s)$ su imagen bajo la proyección estereográfica, utilizando las ecuaciones anteriores podemos demostrar que

$$\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_{n+1}^2 = 4(\dot{y}_1^2 + \dots + \dot{y}_n^2) / (|y|^2 + 1)$$

lo que demuestra que la transformación estereográfica es conforme.

Para extender la transformación $S_n: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a una transformación canónica $T^*S_n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$, nótese que la estructura simpléctica en T^*S_n es la que se obtiene al restringir la 1-forma $\xi_1 dx_1 + \dots + \xi_{n+1} dx_{n+1}$ en $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ a T^*S_n , de modo que denotando a los elementos de T^*S_n por (x, ξ) y a los elementos de $T^*\mathbb{R}^n$ por (y, η) , necesariamente

$$\xi_1 dx_1 + \dots + \xi_{n+1} dx_{n+1} = \eta_1 dy_1 + \dots + \eta_n dy_n$$

$$|x| = 1, \langle x, \xi \rangle = 0$$

Al expresar las diferenciales dx_i del miembro izquierdo en términos de las dy_i éstas son ya independientes y al igualar los coeficientes correspondientes tenemos

$$(7) \dots \quad \eta_k = \xi_{n+1} x_k + (1 - x_{n+1}) \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

y la transformación inversa

$$(8) \dots \quad \xi_k = (|y|^2 + 1) \eta_k / 2 - (\eta \cdot y) y_k, \quad \xi_{n+1} = (\eta \cdot y)$$

El Hamiltoniano transformado de

$$H(x, \xi) = |\xi|^2 / 2, \quad |x| = 1, \quad \langle x, \xi \rangle = 0 \quad \text{es}$$

$$(9) \dots \quad F(y, \eta) = (|y|^2 + 1)^2 |\eta|^2 / 8.$$

Las geodésicas en S_n que tienen velocidad p , están parametrizadas "diferenciabilmente" por la $2n-1$ variedad

$$\Sigma_p^0 = \{(x, \xi) \in T^*S_n : |\xi| = p\} = H^{-1}(p^2/2).$$

Σ_1 se conoce también como el haz cotangente unitario.

La superficie $H = p^2/2$ se transforma en la superficie

$$F(y, \eta) = (|y|^2 + 1)^2 |\eta|^2 / 8 = p^2/2.$$

Sea $G = (2p^2 - F)^{1/2} - p^2$. Luego $F = p^2/2$ corresponderá $G = 0$ y el campo vectorial definido por el Hamiltoniano F coincide en $F^{-1}(p^2/2)$ con el campo definido por G en $G^{-1}(0)$. Esto último se sigue de que

$$dG = p^2 F^{-1} dF \Rightarrow dG|_{G^{-1}(0)} = dG|_{F^{-1}(p^2/2)} = dF|_{F^{-1}(p^2/2)}.$$

Explícitamente tenemos,

$$G(y, \eta) = p (|y|^2 + 1) |\eta|^2 / 2 - p^2.$$

Pero G se obtiene a partir del Hamiltoniano

$$h(y, \eta) = |y|^2 / 2p^2 - 1/p |\eta|^2$$

regularizando, sobre el nivel de energía $h = -1/2p^2$ con el cambio de parámetro $dt/ds = p^3 |\eta|^2$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
 p^3 [\eta |h + 1/2p^2] &= p^3 [\eta (|y|^2/2p - 1/p) | \eta | + 1/2p^2] = \\
 &= p | \eta | |y|^2/2 - p^2 + p | \eta | /2 \\
 &= p (|y|^2 + 1) | \eta | /2 - p^2 .
 \end{aligned}$$

Si ahora hacemos la transformacion canonica

$$P = -y/p, \quad Q = p\eta,$$

$h(y, \eta)$ se transforma en

$$h(Q, P) = -|P|^2/2 - 1/|Q|$$

De la ecuación de la energia

$$|P|^2/2 - 1/|Q| = -1/2p,$$

vemos que si $|Q| \rightarrow 0$, entonces $|P| \rightarrow \infty$ con $|Q||P|^2/2 \rightarrow 1$.
 En coordenadas (y, η) , esto significa que si $|\eta| \rightarrow 0$, entonces $|y| \rightarrow \infty$ con $|\eta||y|^2/2 \rightarrow p$.

En coordenadas (x, ξ) , la condicion $|y| \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow (0, \dots, 1)$ y la condicion $|\eta||y|^2/2 \rightarrow p$ implica que

$$|\xi|^2/2 = (1/2)(|y|^2 + 1)|\eta|^2 \rightarrow p^2/2$$

por tanto los estados de colision $Q = 0, P = \infty$ vienen descritos por

$$\{(x, \xi) \in T^*S^n / x = (0, 0, \dots, 1), |\xi| = p\}.$$

De este modo la superficie de energia $h = -1/2p < 0$ ya regularizada es equivalente a

$$\sum_p = \{(x, \xi) \in T^*S^n / |\xi| = p\}.$$

2.- Para $h > 0$, el problema de Kepler regularizado es equivalente al flujo geodesico en el disco de Poincaré D_n .

Denotemos por $\mathbb{R}^{1,n}$ al conjunto de $n+1$ -adas (x_0, x_1, \dots, x_n) con la pseudo-métrica definida por la matriz $g = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Con ella podemos identificar a $\mathbb{R}^{1,n}$ con $(\mathbb{R}^{1,n})^*$ via la transformación

$$\mathbb{R}^{1,n} \rightarrow (\mathbb{R}^{1,n})^*, \quad (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow -\xi_0 dx_0 + \xi_1 dx_1 + \dots + \xi_n dx_n$$

siendo $dx_i: \mathbb{R}^{1,n} \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n$, las proyecciones.

Tenemos entonces

$$T^*\mathbb{R}^{1,n} = \mathbb{R}^{1,n} \times (\mathbb{R}^{1,n})^* \simeq \mathbb{R}^{1+n} \times \mathbb{R}^{1+n}$$

con la forma simpléctica . . .

$$d\xi_0 \wedge dx_0 + d\xi_1 \wedge dx_1 + \dots + d\xi_n \wedge dx_n .$$

Tomaremos esencialmente el mismo Hamiltoniano que en (1), pero con respecto a la pseudométrica g en vez de la métrica euclidiana. Mas precisamente,

(2) LEMA Denotemos a los elementos de $\mathbb{R}^{1,n} \times \mathbb{R}^{1,n} \simeq T^*\mathbb{R}^{1,n}$ por $(x_0, x; \xi_0, \xi)$ y definase $|x|^2 = x_0^2 + \dots + x_n^2$, $|\xi|^2 = \xi_0^2 + \dots + \xi_n^2$, $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$.
Entonces el flujo Hamiltoniano para

$$H(x_0, x; \xi_0, \xi) = (-x_0 + |x|^2)(-\xi_0^2 + |\xi|^2)/2$$

deja invariante al conjunto

$$\{(x_0, x; \xi_0, \xi) / -x_0^2 + |x|^2 = -1, x_0 \xi_0 + x \cdot \xi = 0\} .$$

Dem. Las ecuaciones de Hamilton son :

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -(-x_0^2 + |x|^2) \xi_0 & \dot{\xi}_0 &= (-\xi_0^2 + |\xi|^2) x_0 \\ \dot{x} &= (-x_0^2 + |x|^2) \xi & \dot{\xi} &= -(-\xi_0^2 + |\xi|^2) x . \end{aligned}$$

\implies

$$\begin{aligned} d/ds [x_0 \xi_0 + x \cdot \xi] &= \dot{x}_0 \xi_0 + x_0 \dot{\xi}_0 + \dot{x} \cdot \xi + x \cdot \dot{\xi} \\ &= -(-x_0^2 + |x|^2) \xi_0^2 + (-\xi_0^2 + |\xi|^2) x_0^2 + \\ &\quad (-x_0^2 + |x|^2) |\xi|^2 - (-\xi_0^2 + |\xi|^2) |x|^2 \\ &= (-x_0^2 + |x|^2)(-\xi_0^2 + |\xi|^2) + (-\xi_0^2 + |\xi|^2)(x_0^2 - |x|^2) = 0 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d/ds [-x_0^2 + |x|^2] &= -\dot{x}_0 x_0 + \dot{x} \cdot x \\ &= (-x_0^2 + |x|^2) x_0 \xi_0 + (-x_0^2 + |x|^2) x \cdot \xi \\ &= (-x_0^2 + |x|^2)(x_0 \xi_0 + x \cdot \xi) = 0 \end{aligned}$$

Observación: El conjunto invariante es el espacio cotangente al hiperboloide de dos hojas $H_n = \{x / -x_0^2 + |x|^2 = -1\}$ cuando hacemos la identificación $\xi_0 dx_0 + \dots + \xi_n dx_n \rightarrow \dot{x}_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \dots + \dot{x}_n \frac{\partial}{\partial x_n}$
 $\xi_0 = -\dot{x}_0$, $\xi_k = \dot{x}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Si restringimos el Hamiltoniano y el campo vectorial a T^*H_n obtenemos

$$H(x_0, x; \xi_0, \xi) = -(-\xi_0^2 + |\xi|^2)/2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \xi_0 & \dot{\xi}_0 &= (-\xi_0^2 + |\xi|^2) x_0 \\ \dot{x} &= -\xi & \dot{\xi} &= -(-\xi_0^2 + |\xi|^2) x \end{aligned}$$

de lo cual se sigue que

$$\ddot{x}_0 = (-\dot{x}_0^2 + |\dot{x}|^2)x_0, \quad \ddot{x} = (-\dot{x}_0^2 + |\dot{x}|^2)x.$$

Estas son las ecuaciones diferenciales de curvas geodésicas en H_n .

Consideremos ahora la hoja superior del hiperboloide :

$$-x_0 + |x|^2 = -1, \quad x_0 > 1 \quad \text{y proyectemos sobre el disco} \\ \{(1, x) / |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^{1+n} \quad \text{desde el origen.}$$

*** VER FIGURA 1 ***

Tal disco puede identificarse con el disco $D_n = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ en \mathbb{R}^n . Con esta identificación, la proyección $H_n \rightarrow D_n$ viene dada por las formulas

$$(10) \dots \dots \quad y = x / (1 + x_0)$$

y la transformación inversa por (11) ...

$$x_k = 2y_k / (1 - |y|^2), \quad k = 1, \dots, n, \quad x_0 = (1 + |y|^2) / (1 - |y|^2).$$

De manera análoga al caso de energía negativa podemos completar la proyección a una transformación canónica $T^*H_n \rightarrow T^*D_n$, $(x_0, x_k; \xi_0, \xi_k) \rightarrow (y, \eta)$ con

$$(12) \dots \quad \eta_k = (1 + x_0) \xi_k + \xi_0 x_k, \quad k = 1, \dots, n$$

equivalentemente

$$(13) \dots \quad \xi_k = (1 - |y|^2) \eta_k / 2 + (\eta \cdot y) y_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\xi_0 = -(\eta \cdot y).$$

El Hamiltoniano $H(x_0, x; \xi_0, \xi_k) = -(-\xi_0^2 + \sum_{k=1}^n \xi_k^2) / 2$, queda expresado en coordenadas (y, η) como

$$(13) \dots \quad H(x_0, x; \xi_0, \xi_k) = F(y, \eta) = -(1 - |y|^2)^2 + |\eta|^2 / 8.$$

Las geodésicas con velocidad p , i.e., tales que $-\dot{x}_0^2 + |\dot{x}|^2 = p^2$ están parametrizadas por la superficie $h = -p^2/2$. (recuérdese la identificación $\xi_0 = -\dot{x}_0, \xi_k = \dot{x}_k$), por lo tanto debemos considerar la superficie

$$F(y, \eta) = -(1 - |y|^2)^2 + |\eta|^2 / 8 = -p^2/2.$$

Al igual que antes, el Hamiltoniano $G = -(-2p^2 F)^2 + p^2$ define el mismo campo vectorial en $G = 0$ que el Hamiltoniano F en $F = -p^2/2$. Puede verificarse que

$$G(y, \eta) = p(1 - |y|^2) |\eta|^2 / 2 + p^2.$$

Veamos que G se obtiene por el proceso de regularización del Hamiltoniano

$$(14) \dots \quad h(y, \eta) = |y|^2 / 2p - 1/p |\eta|^2,$$

sobre el nivel de energía $h = 1/2p^2 > 0$, con la reparametrización $dt/ds = -p^3 |\eta|$.

Efectivamente,

$$\begin{aligned} -p^3 |\eta| [h - 1/2p^2] &= -p^3 |\eta| [|y|^2 / 2p^2 - 1/|P|\eta| - 1/2p^2] \\ &= -p |\eta| |y|^2 / 2 + p |\eta| / 2 + p^2 \\ &= p(1 - |y|^2) |\eta| / 2 + p^2. \end{aligned}$$

Finalmente, la transformación canónica de coordenadas $P = -y/p$, $Q = p|\eta|$, transforma (14) en el Hamiltoniano de Kepler

$$h(Q,P) = |P|^2 / 2 - 1/|Q|$$

A partir de la ecuación de la energía vemos que si $|Q| \rightarrow 0$, $\Rightarrow |P| \rightarrow \infty$, para un nivel de energía fijo, y $|Q||P|^2/2 \rightarrow 1$ o lo que es lo mismo; si $|\eta| \rightarrow 0$, entonces $|y| \rightarrow \infty$ con $|\eta| |y|^2/2 \rightarrow p^2$.

Tomando en cuenta las ecuaciones de transformación (11), vemos que si $|y| \rightarrow \infty$ entonces $|x| \rightarrow 0$ mientras que $x_0 \rightarrow 1$, i.e. (x_0, x) tiende al vértice del hiperboloide $(1, 0, \dots, 0)$. Por otro lado la condición $|\eta| |y|^2/2 \rightarrow 1$ implica que

$$-(-\xi_0^2 + |\xi|^2)/2 = -[(1 - |y|^2) |\eta|]^2 / 8 \rightarrow -p^2/2,$$

luego los estados de colisión vienen descritos por la fibra sobre el vértice del hiperboloide

$$\{(x, \xi) \in T^*H^n / x = (1, 0, \dots, 0), |\xi| = p\}$$

y la superficie de energía $h = +1/2p^2$ ya regularizada es por lo tanto difeomorfa a

$$= \{(x, \xi) \in T^*H^n / |\xi| = p\}.$$

3.- Para $h = 0$, el problema de Kepler regularizado es equivalente al flujo geodésico en \mathbb{R}^n .

La métrica euclidiana en \mathbb{R}^n nos permite hacer la identificación

$$T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*} \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Denotaremos a los elementos de $T^*\mathbb{R}^n$ por (x, ξ) con $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ bajo la identificación de arriba.

Consideremos el Hamiltoniano en $T^*\mathbb{R}^n$ dado por

$$(14) \dots \quad H(x, \xi) = |\xi|^2 / 2.$$

Las ecuaciones de Hamilton dan por soluciones curvas geodésicas

en \mathbb{R}^n , i.e., rectas recorridas con velocidad constante.
 Las ecuaciones

$$(15) \dots \quad x = 2y/|y|^2 \quad \xi = |y|^2 \eta / 2 - (y \cdot \eta)y$$

definen una involucion en $T^*\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n - \{o\} \times \mathbb{R}^n$, luego

$$(16) \dots \quad y = 2x/|x|^2 \quad \eta = |x|^2 \xi / 2 - (x \cdot \xi)x.$$

La relación $x = 2y/|y|^2$ define la transformación de inversión respecto a la esfera con centro en el origen y radio $\sqrt{2}$. La transformación completa $T^*\mathbb{R}_0^n \rightarrow T^*\mathbb{R}_0^n$, $(x, \xi) \rightarrow (y, \eta)$ es una transformación canónica que transforma el Hamiltoniano (3.1) en

$$F(y, \eta) = |y|^4 |\eta|^2 / 8.$$

Sea $G(y, \eta) = (2F)^{1/2} - 1 = |y|^2 |\eta| / 2 - 1$; luego F, G definen el mismo campo vectorial en las superficies $F = 1/2$ o $G = 0$. La superficie $F = 1/2$ corresponde a la superficie $H = 1/2$ bajo la transformación canónica (15), la cual parametriza a las geodesicas en \mathbb{R}^n con velocidad unitaria pues $H = 1/2 \Leftrightarrow |\xi|^2 / 2 = 1/2$.

Ahora veremos que el Hamiltoniano G se obtiene por el proceso de regularización del Hamiltoniano $h(y, \eta) = |y|^2 / 2 - 1/|\eta|$ sobre el nivel de energía $h = 0$ con un cambio de parámetro $dt/ds = |\eta|$. Basta calcular

$$|\eta| h(y, \eta) = |\eta| (|y|^2 / 2 - 1) = G(y, \eta).$$

Finalmente haciendo la transformación de coordenadas canónica $y = -P$, $\eta = Q$ obtenemos que (17) se transforma en el Hamiltoniano del problema de Kepler

$$h(Q; P) = |P|^2 / 2 - 1/|Q|$$

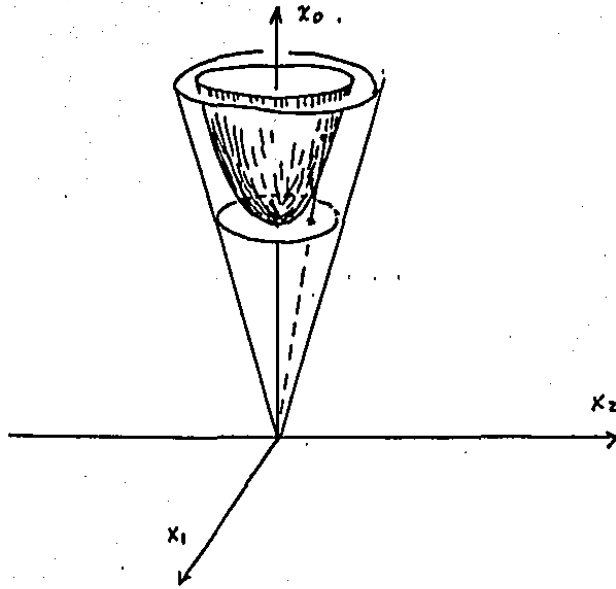


Fig. 1. proyección de una hoja del hiperboloide $-x_0^2 + |x|^2 = -1$, $x_0 \geq 1$ sobre el disco de Poincaré.

La equivalencia de flujos geodésicos y el problema de Kepler regularizado permite relacionarlos como sistemas mecánicos con simetría. Esta teoría se remonta al procedimiento de "reducción del centro de masa" en el problema de n-cuerpos y al proceso de "eliminación de nodos" en el problema de tres cuerpos debida a K.G. Jacobi. Su enfoque moderno se debe a J.M. Soriou con grandes contribuciones debidas a S. Smale, A. Weinstein y otros. Para mayor información, el lector debera consultar los libros de Abraham-Marsden [A-M] y Arnold [ARN].

En esta sección veremos que dependiendo del signo de la energía h , el grupo de simetrías en el problema de Kepler en n -dimensiones es $SO(n+1)$, el grupo ortogonal si $h < 0$; $SO(1,n)$ las matrices que preservan una forma bilineal de signatura $(-,+, \dots, +)$ si $h > 0$ y $SO(n) \times \mathbb{R}^n$, el grupo euclideo, para $h = 0$. Posteriormente calcularemos la función momento de Soriou e identificaremos las constantes de movimiento. Referimos al lector a la sección anterior para los antecedentes necesarios.

CASO DE ENERGIA NEGATIVA

Variedad simpléctica:

$$T^*S_n = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1, \langle x, \xi \rangle = 0\}.$$

Hamiltoniano:

$$H(x, \xi) = |\xi|^2 / 2, \quad |x| = 1, \quad \langle x, \xi \rangle = 0.$$

El grupo de Lie $SO(n+1)$ actúa sobre S_n

$$SO(n+1) \times S_n \rightarrow S_n, \quad (A, x) \rightarrow Ax$$

y por lo tanto en T^*S_n ,

$$SO(n+1) \times T^*S_n \rightarrow T^*S_n, \quad (A, (x, \xi)) \rightarrow (Ax, A\xi).$$

En efecto; $|Ax| = 1$ y $\langle Ax, A\xi \rangle = \langle x, \xi \rangle = 0$, implican que la acción preserva la fibración cotangente. Además, la acción es simpléctica pues

$$\langle A\xi, d(Ax) \rangle = \langle A\xi, Adx \rangle = \langle \xi, dx \rangle,$$

y H es invariante bajo la acción del grupo. Llamaremos a la terna $(T^*S_n, H, SO(n+1))$ un sistema mecánico con simetría (compárese con [A-M], p. 341).

Denotaremos por $\mathfrak{so}(n+1)$ al álgebra de Lie de $SO(n+1)$.

(1) PROPOSICION $\mathfrak{so}(n+1) = \{a \in L(n+1, \mathbb{R}) : a^t = -a\}$

Dem.: Sea $A(t)$ una curva en $SO(n+1)$ que pasa por la identidad en $t = 0$. Como $so(n+1) = T_{id}SO(n+1)$, derivando respecto a t en $t = 0$ la relación

$$A(t)A(t)^t = id, \quad \text{obtenemos}$$

$$\dot{A}(0)^t + \dot{A}(0) = 0, \quad \text{es decir } \dot{A}(0)^t = -\dot{A}(0) \quad -1$$

Si $a \in so(n+1)$, $e^{ta} \cdot x$ es un subgrupo a un parámetro en S^n , luego a define un campo vectorial a^\sim en S^n por la regla

$$a^\sim(x) = d/dt [e^{ta} \cdot x] |_{t=0} = ax.$$

Para ver que a^\sim es en efecto un campo vectorial en S^n , basta observar que $\langle x, ax \rangle = \langle a^t x, x \rangle = -\langle ax, x \rangle = -\langle x, ax \rangle \therefore \langle x, ax \rangle = 0$.

La función momento $J^\sim : T^*S^n \rightarrow so(n+1)^*$ es (vease [A-M])

$$J^\sim(x, \xi)(a) = \langle \xi, a^\sim(x) \rangle = \langle \xi, ax \rangle.$$

Denotemos por $\{e_i\}$ la base canónica en \mathbb{R}^{n+1} , e_i visto como matriz columna de orden $n+1$. Para cada (i, j)

$$e_i \wedge e_j := e_i e_j^t - e_j e_i^t$$

es una matriz antisimétrica con un "1" en el lugar (i, j) y un "-1" en el lugar (j, i) , "0" en cualquier otro lugar.

$$\{e_i \wedge e_j / 1 < i, j < n+1, i < j\}$$

constituye una base de $so(n+1)$ con $n(n+1)/2 = id$ elementos. Esta base permite identificar $so(n+1)$ con $so(n+1)^*$ y podemos por lo tanto definir el momento como una función

$$J : T^*S^n \rightarrow so(n+1)$$

mediante la regla

$$J(x, \xi) = \sum_{i,j} J^\sim(x, \xi)(e_i \wedge e_j) (e_i \wedge e_j).$$

(2) PROPOSICION La función momento $J : T^*S^n \rightarrow so(n+1)$ es

$$J(x, \xi) = -(x \wedge \xi) := -(x \xi^t - \xi x^t).$$

Dem.: Basta calcular

$$\begin{aligned} J^\sim(x, \xi)(e_i \wedge e_j) &= \langle \xi, (e_i \wedge e_j)x \rangle = \xi^t (e_i \wedge e_j)x \\ &= \xi^t (e_i e_j^t - e_j e_i^t)x \\ &= (\xi^t e_i)(e_j^t x) - (e_j^t x)(\xi^t e_i) \\ &= (e_i^t \xi)(x^t e_j) - (e_i^t x)(\xi^t e_j) \\ &= e_i^t (\xi x^t - x \xi^t) e_j \\ &= -e_i^t (x \xi^t - \xi x^t) e_j = -e_i^t (x \wedge \xi) e_j \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J(x, \xi) &= - \sum_{i < j} (e_i^t (x \wedge \xi) e_j) (e_i \wedge e_j) \\
 &= -1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (e_i^t (x \wedge \xi) e_j) (e_i \wedge e_j) = \\
 &= -1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_i (e_i^t (x \wedge \xi) e_j) e_j^t - e_j (e_i^t (x \wedge \xi) e_j) e_i^t = \\
 &= -1/2 \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (e_i e_i^t) (x \wedge \xi) (e_j e_j^t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (e_j e_j^t) (x \wedge \xi) (e_i e_i^t) \right] \\
 &= - \sum_{i=1}^n (e_i e_i^t) (x \wedge \xi) \sum_{j=1}^n (e_j e_j^t) = - \text{id.} (x \wedge \xi) \text{id.} = - x \wedge \xi
 \end{aligned}$$

Mediante la transformación canónica $T^*\mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{S}^n$, $(y, \eta) \rightarrow (x, \xi)$ donde

$$x_k = 2y_k / (|y|^2 + 1), \quad x_{n+1} = (|y|^2 - 1) / (|y|^2 + 1)$$

$$\xi_k = (|y|^2 + 1) \eta_k / 2 - (\eta \cdot y) y_k, \quad \xi_{n+1} = (\eta \cdot y)$$

llevamos la función momento $J: T^*\mathbb{S}^n \rightarrow \mathfrak{so}(n+1)$ o $T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{so}(n+1)$ que seguimos denotando por J . Explicitamente,

$$J(y, \eta) = \begin{bmatrix} 2y \\ |y|^2 - 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \eta / 2 - (\eta \cdot y) y / (|y|^2 + 1) \\ (\eta \cdot y) / (|y|^2 + 1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2y \\ |y|^2 - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta^t / 2 - (\eta \cdot y) y^t / (|y|^2 + 1) \\ (\eta \cdot y) / (|y|^2 + 1) \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \eta / 2 - (\eta \cdot y) y / (|y|^2 + 1) \\ (\eta \cdot y) / (|y|^2 + 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 y^t \\ |y|^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Aquí, y , η son vectores columna de $n \times 1$. Un cálculo simple muestra que

$$J(y, \eta) = \begin{bmatrix} y \eta^t - \eta y^t & (\eta \cdot y)^t - (|y|^2 + 1) \eta / 2 \\ (|y|^2 - 1) \eta^t / 2 - (\eta \cdot y) y^t & 0 \end{bmatrix}$$

Fijando el valor de la energía, por ejemplo $h = -1/2$ y haciendo $y = -P$, $\eta = Q$ obtenemos el par de integrales

$$Q \wedge P = \text{cte.} \in \mathfrak{so}(n)$$

$$(|P|^2 + 1) Q/2 - \langle Q, P \rangle P = \text{cte.} \in \mathbb{R}^n.$$

Utilizando la relación de energía

$$|P|^2/2 - 1/|Q| = -1/2,$$

podemos reescribir la segunda constante de movimiento como

$$Q/|Q| - Q - (Q \cdot P)P = \text{cte.}$$

que puede identificarse con el "vector de Laplace" en n dimensiones.

CASO DE ENERGIA POSITIVA

Variedad symplectica:

$$T^*H_n = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{1,n} \times \mathbb{R}^{n+1} : -x_0^2 + |x|^2 = -1, \langle x, \xi \rangle = 0\}.$$

Hamiltoniano:

$$H(x, \xi) = (-\xi_0^2 + |\xi|^2)/2, \quad -x_0^2 + |x|^2 = -1, \quad \langle x, \xi \rangle = 0.$$

El grupo de Lie $SO(1, n)$ es el grupo de matrices cuadradas de orden $n+1$ que dejan invariante a la forma $g := \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.

(3) LEMA $SO(1, n)$ actúa sobre H_n y sobre T^*H_n por simplectomorfismos. Además el Hamiltoniano H es invariante bajo la acción del grupo.

Dem. Si $A \in SO(1, n)$ y $x \in H_n$ entonces $\langle x, gx \rangle = -1$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto euclidiando en \mathbb{R}^{n+1} .

$$\langle Ax, gAx \rangle = \langle x, A^t g Ax \rangle = \langle x, gx \rangle = -1, \text{ i.e. } Ax \in H_n.$$

La acción sobre T^*H_n es

$$A(x, \xi) = (Ax, gAg\xi), \text{ y la relación}$$

$$\langle Ax, gAg\xi \rangle = \langle x, A^t gAg\xi \rangle = \langle x, g^2\xi \rangle = \langle x, \xi \rangle$$

muestra que la acción preserva la fibración cotangente.

Análogamente,

$$\langle gAg\xi, d(Ax) \rangle = \langle gAg\xi, Adx \rangle = \langle \xi, dx \rangle;$$

luego la acción es symplectica.

Finalmente, ya que $H(x, \xi) = \langle x, g\xi \rangle/2$, se tiene que

$$H(Ax, gAg\xi) = \langle gAg\xi, g(gAg)\xi \rangle/2 = \langle Ag\xi, g^t g(gAg)\xi \rangle/2$$

$$= \langle Ag\xi, gAg\xi \rangle/2 = \langle g\xi, A^t gAg\xi \rangle/2$$

$$= \langle g\xi, \xi \rangle/2 = H(x, \xi), \text{ i.e. la acción preserva a } H.$$

Ahora calculamos el álgebra de Lie de $SO(1,n)$ que denotamos por $so(1,n)$.

(4) PROPOSICION [PHAM-I] Si $a \in so(1,n)$ entonces $ga \in so(1+n)$, la correspondencia $so(1,n) \rightarrow so(1+n)$, $a \rightarrow ga$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Dem.: Sea $A(t)$ una curva en $SO(1,n)$ tal que $A(0) = id$. Derivando respecto a t en $t = 0$ la relación

$$A(t)^t g A(t) = g$$

se obtiene $\dot{A}(0)^t g + g \dot{A}(0) = 0$, por lo tanto $a = \dot{A}(0)$ satisface $(ga)^t + ga = a^t g + ga = 0$, lo que significa que ga es una matriz antisimétrica.

La inversa de $a \rightarrow ga$ es $c \rightarrow gc$ como puede verificarse, luego la correspondencia $so(1,n) \rightarrow so(1+n)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Puede demostrarse que $[a,b] = g[ga,gb]g$ por lo que $so(1,n)$ y $so(1+n)$ no son álgebras de Lie isomorfas. -!

Si $\{e_i \wedge e_j\}$ denota como antes la base de $so(1+n)$ entonces $\{g(e_i \wedge e_j)\}$ es una base para $so(1,n)$. Podemos por lo tanto identificar los espacios $so(1,n)^*$, $so(1,n)$ y $so(1+n)$.

(5) PROPOSICION Sea $J^* : T^*H_n \rightarrow so(1,n)^*$ la función momento y $J : T^*H_n \rightarrow so(1+n)$ la función obtenida haciendo las identificaciones de arriba. Entonces

$$J(x, \xi) = -(x \wedge g\xi).$$

Dem.: Si J' denota a la función $T^*H_n \rightarrow so(1,n)$, entonces

$$J'(x, \xi) = \sum_{i < j} J^*(x, \xi) (g(e_i \wedge e_j)) g(e_i \wedge e_j), \text{ por lo tanto}$$

$$J(x, \xi) = \sum_{i < j} J^*(x, \xi) (g(e_i \wedge e_j)) (e_i \wedge e_j).$$

Pero $J^* : T^*H_n \rightarrow so(1+n)^*$ esta definida como

$$J^*(x, \xi)(a) = \langle \xi, d/dt [e^{ta} \cdot x] |_{t=0} \rangle = \langle \xi, ax \rangle, \text{ por lo tanto}$$

$$\begin{aligned} J^*(x, \xi)(g(e_i \wedge e_j)) &= \langle \xi, g(e_i \wedge e_j)x \rangle \\ &= \langle g\xi, (e_i \wedge e_j)x \rangle. \end{aligned}$$

De manera enteramente análoga al cálculo hecho en la página 85 se verifica que

$$\begin{aligned} J^*(x, \xi)(g(e_i \wedge e_j)) &= -e_i^t (x \wedge g\xi) e_j \\ J(x, \xi) &= - \sum_{i < j} e_i^t (x \wedge g\xi) e_j (e_i \wedge e_j) = -(x \wedge g\xi) \end{aligned}$$

En forma equivalente, ya que $\dot{x} = g \xi$, la función momento definida en el espacio tangente $T(Hn)$ es

$$J(x, \dot{x}) = -(x \wedge \dot{x}),$$

Mediante la transformación canónica $T^*Dn \rightarrow T^*Hn$, $(y, \eta) \rightarrow (x, \xi)$ donde

$$x_0 = (1 + |y|^2)/(1 - |y|^2), \quad x_k = 2y_k/(1 - |y|^2)$$

$$\xi_0 = -(\eta \cdot y), \quad \xi_k = (1 - |y|^2) \eta_k/2 + (\eta \cdot y) y_k$$

podemos pensar que J está definido en T^*Dn . Si efectuamos un cálculo analogo al caso de energía negativa obtenemos

$$J(y, \eta) =$$

$$\begin{bmatrix} (1 + |y|^2)/(1 - |y|^2) & | & | \\ \hline 2y/(1 - |y|^2) & | & | \\ \hline (y \cdot \eta) & | & | \\ \hline (1 - |y|^2) \eta/2 + (\eta \cdot y)y & | & | \end{bmatrix}$$

$$J(y, \eta) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & | & (1 + |y|^2) \eta/2 - (\eta \cdot y)y \\ \hline (\eta \cdot y)y - (1 + |y|^2) \eta/2 & | & y \eta^t - \eta y^t \\ \hline \end{bmatrix}$$

Haciendo la transformación canónica $y = -P$, $\eta = Q$, para $h = 1/2$ podemos reconocer las integrales de movimiento:

El momento angular $Q \wedge P = \text{cte.} \in \mathfrak{so}(1+n)$

El "vector de Laplace" $Q/|Q| - Q - \langle Q, P \rangle P = \text{cte.} \in \mathbb{R}^n$

CASO DE ENERGIA CERO

Variedad simpléctica: $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Hamiltoniano: $H(x, \xi) = |\xi|^2/2$.

La acción del grupo euclideo $SO(n) \times \mathbb{R}^n$:

$SO(n) \times \mathbb{R}^n \times T^*\mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$

$(A, z)(x, \xi) = (Ax + z, A\xi)$.

Algebra de Lie del grupo: $\mathfrak{so}(n) \times \mathbb{R}^n$.

Aplicación exponencial: $so(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow SO(n) \times \mathbb{R}^n$,

$$(a, z) \rightarrow (e^a, z)$$

Función momento: $J^* : T^*\mathbb{R}^n \rightarrow so(n)^* \times \mathbb{R}^n$

$$J^*(x, \xi)(a, z) = \langle \xi, az \rangle + \langle \xi, z \rangle$$

Función momento: $J : T^*\mathbb{R}^n \rightarrow so(n) \times \mathbb{R}^n$

$$J(x, \xi) = -(x \wedge \xi) + \xi.$$

Transformación canónica de coordenadas, $T^*\mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$,
 $(y, \eta) \rightarrow (x, \xi)$

$$x = 2y/|y|^2, \quad \xi = |y|^2 \eta / 2 - (y \cdot \eta)y$$

$$J(y, \eta) = -(y \wedge \eta) + |y|^2 \eta / 2 - (y \cdot \eta)y.$$

Constantes de movimiento:

Momento angular: $Q \wedge P = \text{cte.}$ $so(n)$

"vector de Laplace": $Q/|Q| - \langle Q, P \rangle P = \text{cte.} \in \mathbb{R}^n.$

IV.4 CLASIFICACION DE ORBITAS EN TERMINOS DE LA CURVATURA EN LA METRICA DE JACOBI.

Consideremos un sistema mecanico simple (M, V, \langle, \rangle) donde (M, \langle, \rangle) es una variedad Riemanniana y V una función diferenciable en M llamada "energía potencial". La "energía cinética" es una función en TM ,

$$K(x, y) = \langle y, y \rangle_x / 2, \text{ para } \langle x, y \rangle \in T_x M$$

y la función Lagrangiana $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$L(x, y) = K(x, y) - V(x) = \langle y, y \rangle_x / 2 - V(x).$$

Una condición necesaria para que la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} L(x(t), y(t)) dt$$

se mínima - sobre las clase de curvas diferenciables $(x(t), y(t))$ en TM con extremos fijos - es que se satisfagan las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$(1) \dots dx/dt = y, \quad d/dt(\partial L / \partial y) = \partial L / \partial x$$

o bien; si denotamos por g_{ij} las componentes del tensor métrico en algún sistema de coordenadas, entonces (notación de Einstein)

$$K(x, y) = g_{kl}(x) y^k y^l$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan (∂_i indica derivada parcial respecto de la i -ésima coordenada)

$$d/dt [g_{ij} \dot{x}^j] = (1/2) [g_{kl,i} \dot{x}^k \dot{x}^l - V_{,i}], \quad i = 1, 2, \dots, n. \implies$$

$$g_{ij} \ddot{x}^j + d/dt [g_{ij}] \dot{x}^j - (1/2) (g_{kl,i} \dot{x}^k \dot{x}^l) = -V_{,i} \dots \text{ Pero}$$

$$d/dt [g_{ij}] \dot{x}^j = (1/2) [d/dt [g_{ij}] \dot{x}^j + (1/2) d/dt [g_{ik}] \dot{x}^k] \\ = (1/2) g_{i\ell, k} \dot{x}^k \dot{x}^{\ell} + (1/2) g_{ik, \ell} \dot{x}^{\ell} \dot{x}^k \implies$$

$$g_{ij} \ddot{x}^j + (1/2) (g_{i\ell, k} + g_{ik, \ell} - g_{kl, i}) \dot{x}^k \dot{x}^{\ell} = -V_{,i}.$$

Multiplicando por g^{mi} , el tensor métrico contravariante, y sumando sobre i , obtenemos

$$\ddot{x}^m + \Gamma_{kl}^m \dot{x}^k \dot{x}^l = -g^{mi} V_{,i}$$

$$\text{donde } \Gamma_{kl}^m = (1/2) g^{mi} (g_{i\ell, k} + g_{ik, \ell} - g_{kl, i})$$

son los símbolos de Christoffel. Tenemos así, la siguiente proposición.

(1) proposición Las ecuaciones de Euler-Lagrange (1) son equivalentes a las "ecuaciones de Newton"

$$Dx/dt = - \text{grad } V$$

donde D/dt es la derivada covariante a lo largo de la curva $x(t)$ y $\text{grad } V$ denota el gradiente respecto a la métrica \langle , \rangle .

Si V es constante, obtenemos las ecuaciones diferenciales de geodésicas en la variedad Riemanniana (M, \langle , \rangle) .

El siguiente lema muestra la relación entre las derivadas covariantes asociadas a métricas conformes.

(2) LEMA Sean g y g^* dos métricas conformes en M y $p: M \rightarrow \mathbb{R}$ con la propiedad de que

$$g^* = e^{2p} g$$

Entonces las derivadas covariantes $\tilde{\nabla}$ y ∇ están relacionadas por

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = A_X Y \quad \forall X, Y \text{ campos vectoriales en } M$$

donde $A_X Y = dp(X)Y + dp(Y)X - g(X, Y)\text{grad } p$ y $\text{grad } p$ es el gradiente respecto a g .

Dem.: Se verifica que

$$\nabla_X Y + A_X Y$$

satisface las propiedades de derivada covariante y que es compatible con la métrica g^* , por unicidad de la conexión asociada a una métrica Riemanniana se obtiene la fórmula deseada. -

Para un valor fijo de la energía, la región de Hill

$$M_h = \{x \in M / h - V(x) \geq 0\}$$

es una subvariedad de M con frontera

$$\text{Fr. } M_h = \{x \in M_h / V(x) = h\}$$

Si h es un valor regular de la energía potencial, entonces $\text{Fr. } M_h$ es también una subvariedad de codimensión 1 en M .

La región de Hill es la proyección sobre M de la superficie de energía constante

$$E_h = \{(x, y) \in TM / K(x, y) + V(x) = h\}$$

y describe la región accesible al sistema para una energía dada h . En la nomenclatura de Smale $(E_h, M_h, pr.)$ - donde $pr.$ es la proyección $pr.(x, y) = x$ - , es un haz sobre M_h pellizcado en la frontera.

En M_h' , el interior de la region de Hill, introduzcamos la métrica de Jacobi

$$g_h = 2(h - V)g.$$

Notese que g_h se anula en la frontera.

(3) PROPOSICION Las trayectorias $(x(t), y(t))$ con energia h son precisamente las geodésicas en la métrica de Jacobi reparametrizadas por $dt/ds = 1/2(h - V(x(t)))$.

Dem.: Definamos $p : M' \rightarrow \mathbb{R}$ por la relación $e^{2p} = 2(h - V)$ luego g y g_h son métricas conformes en M' y $g_h = e^{2p}g$. Diferenciando la relación $e^{2p} = 2(h - V)$,

$$e^{2p} dp = -dV.$$

Si grad denota el gradiente respecto a g , entonces

$$(2) \dots e^{2p} \text{grad } p = -\text{grad } V.$$

Sea $(x(t), y(t)) = (x(t), \dot{x}(t))$ una solución a las ecuaciones de Euler-Lagrange; ∇ la derivada covariante respecto a g y $\tilde{\nabla}$ la derivada covariante respecto a la métrica de Jacobi. Luego,

$$\nabla_{\dot{x}} \dot{x} =: D\dot{x}/dt = -\text{grad } V$$

con

$$\tilde{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x} = \nabla_{\dot{x}} \dot{x} + A_{\dot{x}} \dot{x}, \text{ de acuerdo al lema (2).}$$

por tanto,

$$(3) \dots \tilde{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x} = -\text{grad } V + A_{\dot{x}} \dot{x}$$

donde

$$A_{\dot{x}} \dot{x} = 2dp(\dot{x}) \dot{x} - g(\dot{x}, \dot{x}) \text{grad } p.$$

Utilizando la relación de energía,

$$g(\dot{x}, \dot{x}) = 2(h - V(x)), \text{ se sigue que}$$

$$A_{\dot{x}} \dot{x} = 2dp(\dot{x}) \dot{x} - 2(h - V(x)) \text{grad } p$$

pero de acuerdo a (2)

$$2(h - V(x)) \text{grad } p = e^{2p} \text{grad } p = -\text{grad } V,$$

por lo tanto

$$(4) \dots A_{\dot{x}} \dot{x} = 2dp(\dot{x}) \dot{x} + \text{grad } V$$

Entonces de (3) y (4) obtenemos

$$\tilde{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x} = -\text{grad } V + 2dp(\dot{x}) \dot{x} + \text{grad } V$$

$$(5) \dots = 2dp(\dot{x}) \dot{x}$$

Sea s el nuevo parámetro relacionado con t por

$$dt/ds = 1/2(h - V) = e^{-2p}$$

Si x' denota la derivada de x respecto a s , entonces $x' = e^{-2p} \dot{x}$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{x'} x' &= \tilde{\nabla}_{e^{-2p} \dot{x}} (e^{-2p} \dot{x}) = e^{-2p} \tilde{\nabla}_{\dot{x}} (e^{-2p} \dot{x}) \\ &= e^{-2p} (e^{-2p} \tilde{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x} + d[e^{-2p}]/\dot{x} \dot{x}) \\ &= e^{-2p} (e^{-2p} \tilde{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x} - 2 e^{-2p} dp(\dot{x}) \dot{x}) \\ &= \tilde{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x} - 2 dp(\dot{x}) \dot{x} = 0, \text{ de acuerdo a (5)} \end{aligned}$$

Esto último significa que la curva $(x(s), x'(s))$ es una curva geodésica en la métrica de Jacobi -1

La demostración de la proposición (3) sigue el espíritu de la geometría Riemanniana. De hecho la demostración puede simplificarse si trabajamos en la formulación Hamiltoniana como veremos en seguida.

Introduciendo la transformación de Legendre $TM \rightarrow T^*M$ $(x, y) \rightarrow (x, p)$ que en coordenadas es

$$p_i = g_{ij} y^j$$

$$x_i = x_i$$

La función Hamiltoniana es simplemente

$$H = T + V$$

donde $T(x, p) = \sharp \langle p, p \rangle_x / 2$, para $(x, p) \in T_x M^*$ y $\sharp \langle \cdot, \cdot \rangle_x$ denota el producto escalar inducido en $T_x M^*$ por la transformación de Legendre.

Para reparametrizar las soluciones $(x(t), p(t))$ de las ecuaciones de Hamilton con energía h , podemos aplicar el método de 'regularización' visto en el capítulo anterior. En consecuencia

$$\begin{aligned} Hh &= (H - h)/2(h - V) = (T + V - h)/2(h - V) \\ &= T/2(h - V) + 1/2 \end{aligned}$$

el término constante en Hh no modifica las ecuaciones de Hamilton, mientras que

$$T/2(h - V)$$

es la energía cinética asociada a la métrica de Jacobi trasladada a T^*M ; las soluciones son por tanto geodésicas en la métrica de Jacobi.

EL TENSOR DE CURVATURA

Si $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es una variedad Riemanniana, el tensor de curvatura R es una función trilineal

$$X(M) \times X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$$

donde $X(M)$ denota a los campos vectoriales en M , definido por la regla

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Tomando $X_i = \partial/\partial x_i$, $X_j = \partial/\partial x_j$, $[X_i, X_j] = 0$ y

$R(X_i, X_j)Z = D/\partial x_i (DZ/\partial x_j) - D/\partial x_j (DZ/\partial x_i)$, por lo tanto

$R(X_i, X_j)$ mide que tanto conmutan las derivadas parciales covariantes

$$D/\partial x_i := \nabla_{X_i}, \quad D/\partial x_j := \nabla_{X_j}$$

Pongamos $X_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$$R(X_i, X_j)X_k =: R^l_{ijk} X_l$$

$$R_{ijkl} := R^l_{ijk} g_{ls}$$

R_{ijkl} son las componentes del tensor de curvatura en la base $\{X_i\}$.

CALCULO DEL TENSOR DE CURVATURA

El siguiente resultado de geometría Riemanniana [BOOTH] da un método, efectivo en ocasiones, para calcular las componentes del tensor de curvatura, que de otro modo tendrían que calcularse en términos de derivadas parciales de los símbolos de Christoffel.

* Sean $\{X_i\}$ una familia de campos vectoriales ortonormales y $\{w_i\}$ la familia dual de 1-formas en M .

Entonces existen 1-formas w_i^j , $1 < i, j < n$ con las siguientes propiedades:

(i) $dw^i = w_k^i \wedge w^k$

ii $w_j^i = -w_i^j$

(iii) $dw_i^j = w_i^k \wedge w_k^j = R_{iklj} w^k \wedge w^l$, localmente.

(iv) En dicha base, $R_{i^jkl} = R_{ijkl}$.

Para el caso $n = 2$ solo una de las componentes del tensor de curvatura es independiente. Especializando a tal caso, sean w^1, w^2 1-formas ortonormales. Buscamos una 1-forma $w_1^2 = -w_2^1$ que satisfaga

$$dw^1 = W_2^1 \wedge w^2$$

$$dw^2 = W_1^2 \wedge w^1$$

y $dw^2 = k w^1 \wedge w^2$, entonces $k = R_{1212}$

Queremos determinar el tensor de curvatura asociado a la métrica de Jacobi para un problema de fuerza central en el plano con la métrica plana. En coordenadas polares,

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

y $g_h = 2(h - V(r))(dr^2 + r^2 d\theta^2)$

donde $V: E^2 \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{R}$ es el potencial.

Vamos a calcular el tensor de curvatura en general para una métrica de la forma

$$g = f(r)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2)$$

Tomamos $w^1 = f dr$, $w^2 = rf d\theta$, entonces w^1 y w^2 son ortonormales respecto a g . Calculamos

$$dw^1 = 0, \quad dw^2 = (rf)' dr \wedge d\theta = - (rf)' / f d\theta \wedge w^1$$

$$\therefore W_1^2 = - ((rf)' / f) d\theta = - W_2^1$$

(naturalmente $W_2^1 \wedge w^2 = ((rf)' / f) d\theta \wedge (rf d\theta) = 0 = d w^1$).

$$d W_1^2 = - [(rf)' / f]' dr \wedge d\theta = - (1/rf^2) [(rf)' / f]' w^1 \wedge w^2,$$

por lo tanto el tensor de curvatura es

$$K = -(1/rf^2) [(rf)' / f]'$$

Para el potencial central $f^2 = 2(h - V)$, luego

$$K = [(h - V)(r V')' + r (V')^2] / [2r(h - V)^3]$$

Veamos algunos resultados generales [ONG]

(4) PROPOSICION Sea r^* un punto crítico de V en Mh' , el interior de la region de Hill, entonces

a) Si r^* es un mínimo, $K > 0$ en un anillo conteniendo al círculo de radio r^* .

b) Si r^* es un máximo, $K < 0$ en un anillo conteniendo al círculo de radio r^* .

Si h es un valor regular de V entonces

c) $K > 0$ en una vecindad de $Fr.Mh$ en Mh .

Dem.: Si r^* es un punto crítico entonces de la última fórmula tenemos

$$k(r^*) = V''(r^*)/2(h - V(r^*)) .$$

Si r^* es un mínimo (máximo), entonces $V''(r^*) > 0$ ($V''(r^*) < 0$) y por continuidad, $V''(r) > 0$ ($V''(r) < 0$) para r cercano a r^* . Esto demuestra a) y b). Para c), si h es un valor regular de V entonces no hay puntos críticos en $Fr.Mh$, i.e. $V' \neq 0$ en $Fr.Mh$, por continuidad $(h - V)(rV')' + r(V')^2 > 0$ en una vecindad de $Fr.Mh$.
-1

Como ejemplo consideremos el potencial central homogéneo

$$V(r) = -1/r^s .$$

Se puede verificar que la curvatura $k(r)$ en este caso es

$$k(r) = -hs^2 / 2r^{s+2} (hr + 1/r^s)^3$$

por lo que la curvatura tiene el signo constante opuesto al de la energía. Como un caso especial tenemos el problema de Kepler con $s = 1$ y la curvatura es

$$k(r) = -h/2(hr + 1)^3 .$$

Siguiendo la nomenclatura de las órbitas para el problema de Kepler, para el potencial central homogéneo las órbitas se clasifican en

elípticas : $k > 0$, $h < 0$

hiperbólicas : $k < 0$, $h > 0$

parabólicas : $k = 0$, $h = 0$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Queremos consignar una serie de problemas que surgieron en forma paralela durante el desarrollo de este trabajo y que pueden retomarse como temas de investigación posterior.

REFERENTES AL PROBLEMA DE KEPLER.

1) La relación entre el parámetro uniformizante s y la variable angular θ tiene indudablemente un sentido geométrico (ver figs. I.2.1, I.2.4 y I.2.6). Tratar de resolver el problema de Kepler con "regla y compás".

Las graficas de $\theta(s)$ en las figs. I.2.2, I.2.5 y I.2.7 sugieren que para momento angular $c = 0$, θ es constante en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. I.e., θ es la derivada, en el sentido de distribuciones, de una δ de Dirac. Esto permitiría calcular el cambio en el ángulo "de dispersión" para una órbita que va a colisión, se regulariza y sale de colisión. De otro modo no es claro el ángulo con el que debe "salir" la órbita regularizada. Esto es más complicado para otro tipo de potenciales homogéneos centrales (véase [McGE]).

2) Obtener las soluciones al problema de Kepler para energía $h > 0$ a partir de las soluciones del problema repulsivo (véase la introducción al capítulo II), tomando el tiempo imaginario. Hacer primero la reducción a un problema en una dimensión. Véase [PER].

3) Estudiar el problema de Kepler reducido con el tiempo complejo. Obtener las soluciones al problema repulsivo.

4) Probar que el flujo regularizado para el problema repulsivo es equivalente al flujo geodésico en el disco de Poincaré D_2 .

5) Estudiar la foliación por superficies I_{ch} en el problema de Kepler regularizado por el método de Levi-Civita para $h \geq 0$. (véase secc. III.3).

OTROS PROBLEMAS DE FUERZA CENTRAL

1) Para el potencial central homogéneo $U(r) = 1/r^d$ $d \geq 1$. Estudiar la foliación de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ por curvas de energía-momento angular constantes en el problema reducido:

$$v^2/2 = 1/r^d - c^2/2r^2 + h$$

(comparar figs. III.1.1, III.1.5).

Estudiar la foliación en los complejos.

Estudiar la superficie de Riemann

$$r^{d+1} v^2/2 = r - c r^{d-1}/2 + h r^{d+1}$$

Regularizar haciendo el cambio de coordenadas $w = r^{d+1/2} v$, $r = r$.

2) Para valores "d" de la forma $d = 2(1-1/n)$, $n = 2, 3, \dots$, el problema del potencial homogéneo en el plano, con Hamiltoniano

$$H(r, v) = |v|^2/2 - 1/|r|^d$$

admite una regularización análoga a la de Levi-Civita. (vease [McGE]). Estudiar la foliación de las superficies de energía $h = \text{cte.}$ por superficies I_{ch} (vease secc. III.3).

3) Para un problema de fuerza central con singularidad en el origen el vector de Laplace no siempre es una constante de movimiento (parece ser que solo para el potencial gravitacional y Coulombiano). ¿Es equivalente que el vector de Laplace sea una constante de movimiento a que el flujo regularizado sea equivalente al flujo geodésico en un espacio de curvatura constante? Las secciones IV.2 y IV.3 pueden ser de ayuda.

4) Estudiar la métrica de Jacobi en problemas específicos. p. ej. en el problema anisotrópico de Kepler. Pham [PHAM] ha hecho ésto para el potencial central homogéneo.

BIBLIOGRAFIA

- [A-M] Abraham R. - Marsden J.E. Foundations of Mechanics. Benjamin/Cummings (1978).
- [AL] Alekseev V.M. Three Papers on Diff. Equations. Am. Math. Soc. Providence Rhode Island.
- [ARN] Arnold V.I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Graduate Texts in Math. Springer - Verlag 60 (1978).
- [BEL] Belbruno E.A. Two Body Motion Under the Inverse Squared Central Force and Equivalent Geodesic Flows. Cel. Mech. 16 (1978).
- [BOOTH] Boothby W.M. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic. Press (1975).
- [DIEU] Dieudonne J. Foundations of Modern Analysis. Academic Press (1960).
- [EAS] Easton R. Regularization of Vector Fields by Surgery J. Diff. Eq. 10 (1971).
- [G-S] Guillemin V. - Sternberg Sh. Geometric Asymptotics. Math Surveys, 14 Am. Math. Soc. Providence Rh. Is. pp. 169-177.
- [HI] Hille E. Analytic Function Theory (II) . Blaisdel Publ. Co. (1965).
- [LEVI] Levi-Civita Sur la Résolution Qualitative du Problème Restreint des Trois Corps. Opere Matematiche. (1906).
- [McGE] McGehee R. Double Collisions for a Classical Particle System with Non-gravitational Interactions. Comm. Math. Helvetici. 56 (1981)
- [MIL] Milnor J. On the Geometry of the Kepler Problem. Am. Math. Monthly 90 (1983).
- [MO-I] Moser J. Regularization of Kepler's Problem and the Averaging Method on a Manifold. Comm. Pure and Appl. Math. 23 (1970).
- [MO-II] Various aspects of Integrable Hamiltonian Systems. En Dynamical Systems C.I.M.E. Lectures Bressanone, Italy. Birkhauser (1980).
- [ONG] Ong Chong Pin. Curvature and Mechanics. Advances in Math. 15 (1975).

- [CON] Onofri E. Dynamical Quantization of the Kepler Manifold. J. Math. Phys. 17 (1976).
- [COS] Osipov Yu. S. The Kepler Problem and Geodesic Flows in Spaces of Constant Curvature. Cel. Mech. 16 (1977).
- [PER] Peredo F. El Problema Isocelas Restringido con fuerzas repulsivas. Tesis Doctoral. CINVESTAV - IPN. (1984).
- [PHAM] Pham Mau Quan. Riemannian Regularization of Singularities. Application to the Kepler Problem. Comm. Pure and Appl. Math. 1982.
- [PHAM-I] ----- Riemannian Geometry and Mechanics.. The Kepler Problem. C.I.S.M. Udine (1981).
- [POR] Porter M. Superficies de Riemann. III Coloquio del Depto de Mat. CINVESTAV-IPN. (1983).
- [SIE] Siegel C. L. Topics in Complex Function Theory (I). Intersc. Tracts in Pure and Appl. Math. 25 (1969) Wiley.
- [SIE-MO] Siegel C.L. - Moser J. Lectures on Celestial Mechanics. Springer Verlag 187 (1971).
- [SM] Smale S. Topology and Mechanics (I,II) Inventiones Math. 10 (1970), 11 (1971).
- [SO] Soriau J.M. Sur la Variété de Képler. Proc. Convegno di Geometria Simplettica, Roma (1973).
- [SUN] Sundman K.F. Memoire sur le Probleme des Trois Corps. Acta Math. 36 (1913).