00382

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INMERSION DE R_4 EN E_6

T E S I S

Que para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Especialidad en Física

P r e s e n t a

JOSÉ LUIS FERNÁNDEZ CHAPOU

México, D.F., 1986.

C O N T E N I D O

INTRODUCCION

El problema de la inmersión en relatividad general es de gran importancia para dicha teoría y concierne al estudio de R_4 como un subespacio de E_m, $m = 5,\ldots,10$; el caso $m = 5$ se encuentra adecuadamente discutido en Fuentes (1985) y Ladino (1986) por lo que aquí nos dedicamos con mayor énfasis a la situación $m = 6$. Para tal fin fue necesario explicar la herramienta matemática a emplear (formalismo de Newman-Penrose (NP) (1962)) en sus aspectos algebraicos y diferenciales con especial atención a la clasificación de Petrov, este material dió origen al Cap. I. Las ecuaciones e ideas involucradas en espacios de clase uno constituyen una buena preparación previa al problema de clase dos, es por esto que en el Cap. II se exponen las Ecuaciones de Gauss y Codazzi en sus versiones tensorial y NP, así como las correspondientes condiciones necesarias para R_4 sumergido en E_5, se realizan aplicaciones para algunas métricas. Con todo el análisis anterior en el Cap. III se procede a investigar espacio-tiempos inmersos en E llevando como objetivo básico la generalización a espacios de Einstein ($R_{ab} = \frac{R}{4}\, g_{ab}$) de los resultados de Collinson (1966) para $R_{ab} = 0$ y la prueba del teorema de Yakupov (1973) (publicado sin demostración), aquí también se efectúan aplicaciones a diversas métricas de interés en relatividad general. En el Cap. IV se estudia al espintensor de Lanczos (1962): aunque este tema no pertenece al campo de la inmersión lo hemos incluído porque es un tópico interesante y novedoso y que además ejemplifica el poder del formalismo de NP, todos los resultados son originales.

Cabe mencionar que en casi todos los capítulos se han expuesto problemas abiertos que aún subsisten en los temas de: clasificaciones de Petrov y Churchill-Plebañski, inmersión de espacios Riemannianos y espintensor de Lanczos.

CAPITULO I

FORMALISMO DE NEWMAN-PENROSE

INTRODUCCIÓN.

La herramienta de tetradas nulas desarrollada por Newman-Penrose (NP) (1962) tiene gran importancia en relatividad general, en particular, aquí nos interesa su poderío en el análisis de la inmersión de espacio-tiempos, a esto se debe que en el presente capítulo se expongan aquellos aspectos algebraicos y diferenciales del formalismo de NP de relevancia al sumergir R_4 en E_5 ó E_6. En la Secc. 1 se estudian las propiedades locales de diversos objetos geométricos (expresados en función de la tetrada nula) anclados en un evento, se dá atención especial a la clasificación Petrov del tensor conformal. La Secc. 2 tiene como finalidad el establecer las relaciones básicas (ecs. de NP e identidades de Bianchi) que gobiernan la evolución de la curvatura (campo gravitacional) de una región a otra de R_4; también se exponen los teoremas de Goldberg-Sachs (1962), Kundt-Thompson (1962) y Wainwright (1974) los cuales son útiles al obtener condiciones necesarias para que un espacio-tiempo sea de clase dos.

1. TETRADAS NULAS: ASPECTOS ALGEBRAICOS.

En la presente Secc. se hará una breve exposición del formalismo desarrollado por Newman-Penrose (NP) (1962) para el estudio de la geometría Riemanniana, la mayor parte del material se localiza en detalle en Ovando (1985) y Torres (1985), en estas referencias se encuentran aplicaciones e importancia actual y futura de dicho formalismo.

La idea básica de esta técnica de NP consiste en edificar en cada evento del espacio-tiempo una tetrada real ortonormal con la cual se construye un cuarteto de vectores nulos (dos reales y dos complejos) que a su vez proporciona una base para <u>todo</u> objeto tensorial T (omitimos los índices) en el evento en cuestión, entonces analizar a T equivale a estudiar sus componentes en esta base. De esta forma, a T le asociamos un conjunto de cantidades escalares (independientes del sistema coordenado) que dependen de la tetrada nula seleccionada, es decir, la herramienta de NP permite "desglosar" a T y mostrar así explícitamente la información contenida en él. Cuando permanecemos sobre un evento dado entonces sólo existe interés en las propiedades algebraicas de T (presente Secc.), y cuando investigamos cómo evoluciona T al pasar de un punto a otro de R_4 entonces ya aparecen las características diferenciales del objeto tensorial (próxima Secc.). Por tanto, si deseamos aplicar este enfoque de NP a relatividad general entonces las relaciones fundamentales de esta teoría deben transcribirse al formalismo de tetradas nulas, esta es la intención principal de este Cap.

En un punto del 4-espacio construímos una tetrada real ortonormal $e_{(a)}{}^{r}$, $a = 1,\dots,4$:

$$e_{(a)}{}^{r}\, e_{(b)r} = \eta_{(a)(b)} \text{ con } \underset{\sim}{\eta} = (\eta_{(a)(b)} = \mathrm{Diag}(1,1,1,-1) \qquad \text{(I.1a)}$$

donde hemos utilizado signatura +2 y la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos. Es claro que existe plena libertad para rotar a la tetrada anclada en nuestro evento, así estamos en condiciones de elegir al cuerteto de vectores que genere la mayor simplificación en el problema bajo estudio. En Ovando (1985) se probó que la Clasificación de Petrov (CP) para el tensor conformal conducía de manera natural a la tetrada nula de NP (una raya sobre una cantidad denotará el proceso de conjugación compleja):

$$m^{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_{(1)}{}^{r} - i\, e_{(2)}{}^{r}) \ , \ \overline{m}^{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_{(1)}{}^{r} + i\, e_{(2)}{}^{r}) \ , \ i = \sqrt{-1}$$
$$\text{(I.1b)}$$
$$\ell^{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_{(4)}{}^{r} - e_{(3)}{}^{r}) \ , \ n^{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_{(4)}{}^{r} + e_{(3)}{}^{r}) \ ,$$

con las propiedades (consecuencia de (1a,b)):

$$m^{r}\, m_{r} = \ell^{r}\, \ell_{r} = n^{r}\, n_{r} = 0 \ , \ m^{r}\, \overline{m}_{r} = -\ \ell^{r}\, n_{r} = 1 \ ,$$
$$\text{(I.1c)}$$
$$\overline{\ell}^{r} = \ell^{r} \ , \ \overline{n}^{r} = n^{r} \ , \ \ell^{r}\, m_{r} = n^{r}\, m_{r} = 0 \ .$$

De aquí en adelante la tetrada de NP será ordenada en la forma

$$(Z_{(a)}{}^{r}) = (m^{r}, \overline{m}^{r}, \ell^{r}, n^{r}) \ , \quad a = 1,\ldots,4 \quad , \ \text{(I.1d)}$$

es decir, $Z_{(1)}{}^{b} = m^{b}$, $Z_{(3)}{}^{b} = \ell^{b}$, etc., así (1c) se compacta a:

$$\underset{\sim}{Z} = (Z_{(a)}{}^{r}\, Z_{(b)r}) = (Z_{(a)(b)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad (I.1e)$$

la matriz $\underset{\sim}{Z}^{-1} = Z = (Z^{(a)(b)})$ permite introducir una base asociada a (1d):

$$Z^{(a)r} = Z^{(a)(b)}\, Z_{(b)}{}^{r} \quad \therefore \quad (Z^{(a)r}) = (\overline{m}^{r}, m^{r}, -n^{r}, -\ell^{r}) \qquad (I.1f)$$

en otras palabras, $\underset{\sim}{Z}$ y $\underset{\sim}{Z}^{-1}$ se comportan como una "métrica" para bajar y subir los índices entre paréntesis de - la tetrada nula.

Si A_r es un vector arbitrario entonces (1d) es una base para él en el sentido

$$A_r = A_{(2)}\, m_r + A_{(1)}\, \overline{m}_r - A_{(4)}\, \ell_r - A_{(3)}\, n_r \qquad (I.2a)$$

donde $A_{(c)} \equiv A^{r}\, Z_{(c)r}$ son las componentes o proyecciones de A_b sobre la tetrada de NP:

$$\begin{aligned} A_{(1)} &= A^{r}\, m_r \equiv \Theta_1 \quad , \quad A_{(2)} = A^{r}\, \overline{m}_r = \overline{\Theta}_1 \quad , \\ A_{(3)} &= A^{r}\, \ell_r \equiv \Theta_3 \quad , \quad A_{(4)} = A^{r}\, n_r \equiv \Theta_4 \quad , \end{aligned} \qquad (I.2b)$$

entonces Θ_3 y Θ_4 son reales y Θ_1 es complejo lo cual equi vale a las cuatro componentes independientes de A^b; así (2a) nos queda

$$A_r = \overline{\Theta}_1 \, m_r + \Theta_1 \, \overline{m}_r - \Theta_4 \, \ell_r - \Theta_3 \, n_r \quad , \qquad (I.2c)$$

esta expresión la aplicaremos en la Secc. 1 Cap. III al vector de Ricci que aparece al sumergir R_4 en E_6.

Con (1d) podemos formar 10 tensores simétricos de orden dos:

$$\underset{r}{W}_{ab} = Z_{(r)a} \, Z_{(r)b} \quad \text{sin suma sobre } r$$

$$\underset{5}{W}_{ab} = m_a \, \overline{m}_b + m_b \, \overline{m}_a \quad , \quad \underset{6}{W}_{ab} = n_a \, \ell_b + n_b \, \ell_a \quad ,$$

$$\underset{7}{W}_{ab} = m_a \, n_b + m_b \, n_a \quad , \quad \underset{8}{W}_{ab} = \underset{7}{\overline{W}}_{ab} \quad , \qquad (I.3a)$$

$$\underset{9}{W}_{ab} = m_a \, \ell_b + m_b \, \ell_a \quad , \quad \underset{10}{W}_{ab} = \underset{9}{\overline{W}}_{ab} \quad ,$$

entonces cualquier tensor real simétrico Q_{ab} puede desarrollarse en términos de (3a):

$$Q_{ab} = \sum_{r=1}^{10} P^r \, \underset{r}{W}_{ab} \quad , \qquad (I.3b)$$

por la propiedad $\overline{Q}_{ab} = Q_{ab}$ tenemos que

$$p^1 = \overline{p}^2 \quad , \quad p^7 = \overline{p}^8 \quad , \quad p^9 = \overline{p}^{10}$$

$$p^r \quad , \quad r = 3,\ldots,6 \quad \text{son cantidades reales,} \tag{I.3c}$$

así (3b) se reduce a

$$Q_{ab} = \overline{p}^2 \underset{1}{W}_{ab} + p^2 \underset{2}{W}_{ab} + \sum_{r=3}^{6} p^r \underset{r}{W}_{ab} + \overline{p}^8 \underset{7}{W}_{ab} + + p^8 \underset{8}{W}_{ab} + \overline{p}^{10} \underset{9}{W}_{ab} + p^{10} \underset{10}{W}_{ab} \ , \tag{I.3d}$$

Si ahora contraemos (3d) con la tetrada nula obtenemos - las proyecciones (con la notación $Q_{(p)(r)} = Q_{ab}\, z_{(p)}{}^a\, z_{(r)}{}^b$):

$$p^2 = Q_{(1)(1)} \ , \ p^3 = Q_{(4)(4)} \ , \ p^4 = Q_{(3)(3)} \ , \ p^5 = Q_{(1)(2)} \ ,$$
$$p^6 = Q_{(3)(4)} \ , \ p^8 = - Q_{(1)(3)} \ , \ p^{10} = - Q_{(1)(4)} \ . \tag{I.3e}$$

En particular si Q_{ab} coincide con el tensor métrico g_{ab}, de (1c,3e) resulta que $p^a = 0$ excepto $p^5 = - p^6 = 1$ y - (3a,d) implican:

$$g_{ab} = m_a \overline{m}_b + \overline{m}_a m_b - n_a \ell_b - n_b \ell_a \ , \tag{I.4a}$$

entonces dada la tetrada de NP en un evento podemos de-- terminar la métrica en dicho evento vía (4a); si en (3e) utilizamos (4a) obtenemos que:

$$p^5 = \frac{Q}{2} + p^6 \quad , \quad Q \equiv Q^r{}_r \quad . \tag{I.4b}$$

Como segunda aplicación consideremos el caso

$$Q_{ab} = E_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{R}{4} g_{ab} \quad \therefore \quad Q = 0 \text{ (traza nula)} \quad , \tag{I.5a}$$

donde R_{ab} y R son el tensor de Ricci y la curvatura escalar respectivamente definidos por

$$R_{ab} = R^c{}_{abc} \quad , \quad R = R^a{}_a \quad , \tag{I.5b}$$

siendo $R^a{}_{bcd}$ el tensor de curvatura del espacio-tiempo:

$$R^i{}_{jkm} = \Gamma^i{}_{jm,k} - \Gamma^i{}_{jk,m} + \Gamma^i{}_{ck}\Gamma^c{}_{jm} - \Gamma^i{}_{cm}\Gamma^c{}_{jk} \quad , \tag{I.5c}$$

$$\Gamma^i{}_{jm} = \frac{1}{2} g^{ir}(g_{rj,m} + g_{rm,j} - g_{jm,r}) \quad \text{Símbolos de Christoffel} \quad , \tag{I.5d}$$

con ,r denotando derivada parcial respecto a x^r. Entonces de (3e,4b,5a):

$$p^2 = E_{ab}\, m^a\, m^b = R_{ab}\, m^a\, m^b \equiv 2\,\phi_{02} \quad ,$$

$$p^3 = E_{ab}\, n^a\, n^b = R_{ab}\, n^a\, n^b \equiv 2\,\phi_{00} \quad ,$$

$$p^4 = E_{ab}\, \ell^a\, \ell^a = R_{ab}\, \ell^a\, \ell^b \equiv 2\,\phi_{22} \quad ,$$

$$p^5 = p^6 = E_{ab}\, m^a\, \bar{m}^b = E_{ab}\, \ell^a\, n^b \equiv 2\, \phi_{11} \quad ,$$

$$p^8 = -\, E_{ab}\, m^a\, \ell^b = -\, R_{ab}\, m^a\, \ell^b \equiv -\, 2\, \phi_{12} \quad , \qquad \text{(I.5e)}$$

$$p^{10} = -\, E_{ab}\, m^a\, n^b = -\, R_{ab}\, m^a\, n^b \equiv -\, 2\, \phi_{01} \quad ,$$

donde ϕ_{00}, ϕ_{11}, ϕ_{22} son reales y ϕ_{01}, ϕ_{02}, ϕ_{12} son complejos lo cual equivale a 9 cantidades reales (éste es el número de componentes independientes de E_{ab}); con (3a,d,5e) obtenemos la expansión:

$$E_{ab} = 2\Big[\phi_{02}\, \bar{m}_a\, \bar{m}_b + \bar{\phi}_{02}\, m_a\, m_b + \phi_{00}\, \ell_a\, \ell_b + \phi_{22}\, n_a\, n_b + \phi_{11}(m_a\, \bar{m}_b + \bar{m}_a\, m_b + \ell_a\, n_b + n_a\, \ell_b) - \bar{\phi}_{01}(m_a\, \ell_b + m_b\, \ell_a) - \bar{\phi}_{12}(m_a\, m_b + m_b\, n_a) - \phi_{01}(\bar{m}_a\, \ell_b + \ell_a\, \bar{m}_b) - \phi_{12}(\bar{m}_a\, n_b + \bar{m}_b\, n_a)\Big] \quad . \qquad \text{(I.5f)}$$

Las ecuaciones de campo de relatividad general pueden escribirse en la forma (sin constante cosmológica)

$$E_{ab} - \frac{R}{4}\, g_{ab} = -\, 8\pi\, T_{ab} \quad , \quad \pi = 3.14\ldots \qquad \text{(I.6a)}$$

entonces

$$\phi_{00} = -4\pi\, T_{ab}\, n^a\, n^b \;,\; \phi_{01} = -4\pi\, T_{ab}\, n^a\, m^b \;,\; \phi_{02} = -4\pi\, T_{ab}\, m^a\, m^b \quad ,$$

$$\phi_{11} = -4\pi\ T_{ab}\, n^a \ell^b - \frac{R}{8}\ , \quad \phi_{12} = -4\pi\ T_{ab}\, \ell^a m^b\ ,$$
$$\phi_{22} = -4\pi\ T_{ab}\, \ell^a \ell^b \tag{I.6b}$$

El tensor de materia o/y radiación T_{ij} puede generar simplificaciones en las ϕ_{ab}, por ejemplo, si T_{ab} está asociado a un fluído perfecto entonces es posible elegir la tetrada tal que $\phi_{01} = \phi_{02} = \phi_{12} = 0$ (esto queda ilustrado con la métrica de Gödel, ver el Cap. IV); en el caso electromagnético podemos hacer cero a determinadas componentes (6b) si tomamos a ℓ^r y n^r coincidentes con los eigenvectores nulos del campo de Maxwell. Por definición, un espacio-tiempo es de Einstein si los tensores métricos y de Ricci son proporcionales entre sí:

$$R_{ab} = \frac{R}{4} g_{ab} \quad \therefore \quad E_{ab} = 0\ , \quad \phi_{ab} = 0\ , \tag{I.6c}$$

esto sucede, por ejemplo, en las métricas de Kaigorodov (1963) tipo N (ver IV.19a,b) y de Novotný-Horský (1974) (consultar IV.18a,b). A (6c) podemos escribirla en dos formas de acuerdo a la interpretación que quiera dársele ($G_{ab} = R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab}$ tensor de Einstein):

$$G_{ab} + \frac{R}{4} g_{ab} = 0 \ :\ T_{ab} = 0\ , \quad \text{constante cosmológica} = \frac{R}{4}\ ,$$
$$G_{ab} = -\frac{R}{4} g_{ab} \ :\ T_{ab} = \frac{R}{32\pi} g_{ab}\ , \quad \text{cte. cosmol.} = 0\ , \tag{I.6d}$$

el punto importante es que un espacio es de Einstein -

cuando $\phi_{ab} = 0$ (equivalente a $E_{ij} = 0$), y si además - $R = 0$ entonces $R_{ab} = 0$ y decimos que R_4 es vacío; recuérdese que cuando $R_{ab} = \frac{R}{4} g_{ab}$ las identidades de Bianchi - (próxima Secc.) implican R = cte. En las Seccs. 3 y 4 - del Cap. III estudiaremos espacio-tiempos de Einstein inmersos en E_6 y deduciremos algunos teoremas originales al respecto.

En el Cap. IV durante el análisis del espintensor de - Lanczos (1962) aparece un tensor simétrico K_{ab} con traza cero al cual admite una expansión semejante a (5f), ver (IV.9c); en los Caps. II y III el proceso de inmersión da origen a las segundas formas fundamentales (tensores simétricos de orden dos) de R_4 en relación a E_5 o E_6, a estos tensores también les aplicaremos desarrollos análogos a (5f).

J. Plebański, Acta Phys. Polon. 26, 963 (1964) estudió - con espinores la estructura algebraica de E_{ab} lo cual ya había sido hecho en forma geométrica (con mucho menos detalle) por R.V. Churchill, Trans. Am. Math. Soc. 34, 784 (1932), el resultado de este análisis ahora se conoce como Clasificación Churchill-Plebański (CH-P) del tensor - de materia: los tensores R_{ab}, G_{ab} y E_{ab} tienen el mismo tipo algebraico porque sus eigenvectores coinciden aunque difieran en sus valores propios; en Plebański-Stachel (1968) y H. Goenner, J. Stachel, J. Math. Phys. 11, 3358 (1970) y Barnes (1974) se encuentran resúmenes muy claros sobre la CH-P. En Ludwig-Scanlan, Commun. Math. - Phys. 20, 291 (1971) y Collinson-Shaw (1972) se realiza esta clasificación mediante el formalismo de NP, y en - Goenner (1976) se indican relaciones tensoriales satisfechas por algunos tipos CH-P (existen errores tipográficos en las relaciones dadas por este autor), sin embargo, en estas tres últimas referencias no se propone un algoritmo o diagrama de flujo completo que permita obtener de manera infalible y sistemática el tipo CH-P de un E_{ab} dado. Al respecto tenemos la siguiente idea que no desarrollaremos aquí porque la CH-P no es muy relevante en nuestro trabajo: Mediante algún método, p. ej. el de H. Takeno, Tensor N.S. 3, 119 (1954), escribir la ecuación característica de E_{ab} y entonces con el polinomio mínimo (usar las formas canónicas de Jordan) para cada tipo CH-P obtener la correspondiente relación tensorial satisfecha por E_{jk} y sus invariantes, de esta manera surgirá un proceso tensorial para el análisis de la estructura algebraica de (5a), este algoritmo será análogo al enfoque tensorial de A. Peres, Nuovo Cim. 18, 36 (1960) para el cálculo del tipo Petrov del tensor de Weyl, ver Ovando (1985). El último paso consiste en sustituir (5f) en el proceso tensorial para así deducir un diagrama de flujo tipo NP para la CH-P. Los algoritmos tensorial y de NP para la clasificación de E_{ab} no se encuentran de manera completa y ordenada en la literatura, así que su construcción debe ser interesante para los investigadores de relatividad general.

Con lo anterior hemos mostrado que la tetrada nula proporciona una base para tensores simétricos de segundo orden, algo semejante ocurre con tensores antisimétricos de este orden: Mediante (1d) construímos seis tensores antisimétricos

$$\underset{1}{Y}_{ab} = V_{ab} = n_a\, m_b - n_b\, m_a \quad , \quad \underset{2}{Y}_{ab} = \overline{V}_{ab} \quad ,$$

$$\underset{3}{Y}_{ab} = U_{ab} = -\,\ell_a\, \overline{m}_b + \ell_b\, \overline{m}_a \quad , \quad \underset{4}{Y}_{ab} = \overline{U}_{ab} \quad , \qquad \text{(I.7a)}$$

$$\underset{5}{Y}_{ab} = M_{ab} = m_a\, \overline{m}_b - m_b\, \overline{m}_a - n_a\, \ell_b + n_b\ a \ , \ \underset{6}{Y}_{ab} = \overline{M}_{ab} \quad ,$$

entonces para $F_{ij} = - F_{ji}$ arbitrario tenemos la expansión

$$F_{ab} = \sum_{r=1}^{6} T^r \underset{r}{Y}_{ab} \qquad (I.7b)$$

y como $\overline{F}_{ab} = F_{ab}$ resulta que

$$T^1 = \overline{T}^2 \quad , \quad T^3 = \overline{T}^4 \quad , \quad T^5 = \overline{T}^6 \quad . \qquad (I.7c)$$

Al proyectar (7b) sobre la tetrada de NP obtenemos (con - la notación $F_{(p)(q)} = F_{ab}\, Z_{(p)}{}^a\, Z_{(q)}{}^b$):

$$T^1 = F_{(2)(3)} \equiv \gamma_2 \quad , \quad T^3 = F_{(4)(1)} \equiv \gamma_0 \quad ,$$
$$\overline{T}^6 = \frac{1}{2}\,(F_{(2)(1)} + F_{(4)(3)}) \equiv \gamma_1 \quad , \qquad (I.7d)$$

las cantidades complejas γ_a, $a = 0,1,2$ equivalen a las 6 componentes reales independientes de F_{ij}, así (7b) nos - queda

$$F_{ab} = \gamma_0\, U_{ab} + \gamma_1\, M_{ab} + \gamma_2\, V_{ab} + \overline{\gamma}_0\, \overline{U}_{ab} + \overline{\gamma}_1\, \overline{M}_{ab} + \overline{\gamma}_2\, \overline{V}_{ab} \quad , \qquad (I.7e)$$

esta relación es aplicable al tensor de Faraday del campo electromagnético y al tensor antisimétrico que aparece en las ecs. de Ricci al sumergir R_4 en E_6 (ver Secc. 1 Cap. III).

Con los tensores de Levi-Civita:

$$\eta_{abcd} = - \sqrt{-g}\, \varepsilon_{abcd} \quad , \quad \eta^{abcd} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \varepsilon^{abcd} \quad , \qquad (\text{I.8a})$$

donde $g = \det(g_{ab})$ y

$$\varepsilon_{abcd} = \varepsilon^{abcd} = \begin{cases} 1 \text{ Si (abcd) es permutación par de (1234)} & , \\ -1 \text{ Si (abcd) es perm. impar de (1234)} & , \\ 0 \text{ en los demás casos} & , \end{cases} \qquad (\text{I.8b})$$

se puede definir el tensor dual de F_{ab}:

$$^{*}F_{ab} = \frac{1}{2}\, \eta_{abcd}\, F^{cd} = - \,^{*}F_{ba} \quad , \qquad (\text{I.8c})$$

en particular, no es difícil probar que (7a) son autoduales ($i = \sqrt{-1}$):

$$^{*}\underset{r}{Y}_{ab} = (-1)^{r}\, i\, \underset{r}{Y}_{ab} \quad , \quad r = 1,\ldots,6 \quad , \qquad (\text{I.8d})$$

entonces (7e,8d) implican el desarrollo

$$^{*}F_{ab} = i(-\gamma_0\, U_{ab} - \gamma_1\, M_{ab} - \gamma_2\, V_{ab} + \overline{\gamma}_0\, \overline{U}_{ab} + \overline{\gamma}_1\, \overline{M}_{ab} + \overline{\gamma}_2\, \overline{V}_{ab}) \quad . \qquad (\text{I.8e})$$

Sabemos que un tensor antisimétrico de segundo orden sólo tiene dos invariantes algebraicos independientes, a saber (se utilizan (7e,8e)):

$$F_1 \equiv F_{ab}\, F^{ab} = 4(\gamma_0\, \gamma_2 + \overline{\gamma}_0\, \overline{\gamma}_2 - \gamma^2{}_1 - \overline{\gamma}^2{}_1) \quad ,$$
$$\tag{I.8f}$$
$$F_2 \equiv {}^*F_{ab}\, F^{ab} = 4i(\gamma^2{}_1 - \overline{\gamma}^2{}_1 + \overline{\gamma}_0\, \overline{\gamma}_2 - \gamma_0\, \gamma_2) \quad ,$$

de importancia en el análisis del tensor de Ricci (Cap. III). En el caso electromagnético $F_1 = 2(B^2 - E^2)$ y $F_2 = 4\, \vec{E} \cdot \vec{B}$ donde E y B son las magnitudes de los 3-vectores de campo eléctrico y magnético respectivamente. Cuando F_1 y F_2 valen cero simultáneamente decimos que F_{ab} es nulo, en caso contrario es no-nulo. Con (1c,4a, 7a,e,8e,f) es simple obtener las identidades:

$$F^{ab}\, F_{cb} - {}^*F^{ab}\, {}^*F_{cb} = \frac{F}{2}\, \delta^a{}_c \quad , \quad {}^*F^{ab}\, F_{cb} = \frac{F}{4}\, \delta^a{}_c \quad , \tag{I.8g}$$

las cuales pueden localizarse en J. Plebański, Bull. Acad. Polon. Sci. (ℓ. 9, 587 (1961), R. Penney, J. Math. Phys. 5, 1431 (1964) y E. Piña, Rev. Mex. Fís. 16, 233 (1967) entre otros.

Ahora consideremos el tensor de Weyl C_{ijkr} definido en 4 dimensiones por:

$$C_{ajkm} = R_{ajkm} + \tfrac{1}{2}(R_{ak}\, g_{jm} + R_{jm}\, g_{ak} - R_{jk}\, g_{am} - R_{am}\, g_{jk}) + $$
$$+ \frac{R}{6}\,(g_{am}\, g_{jk} - g_{ak}\, g_{jm}) \quad , \tag{I.9a}$$

y representa la parte sin traza del tensor de Riemann, - por eso lo asociamos a gravitación pura ya que no está - directamente relacionado al tensor de materia, a esto se debe que en general R_{ijkm} tenga más información geométri ca que C_{pqrt}. Se tienen las simetrías:

$$C_{ajkm} = - C_{jakm} = - C_{ajmk} \quad , \quad C_{ajkm} + C_{akmj} + C_{amjk} = 0 \quad , \tag{I.9b}$$

$$C_a{}^j{}_{jm} = 0 \quad , \tag{I.9c}$$

recuérdese que (9b) implican $C_{ajkm} = C_{kmaj}$; con (8a) pue de definirse el tensor dual simple de (9a):

$$^*C_{ajkm} = \frac{1}{2} \eta_{ajbr} C^{br}{}_{km} \quad , \tag{I.9d}$$

el cual también satisface (9b,c). El estudio de la es-- tructura algebraica de (9a) se conoce como Clasificación Petrov (CP), en Ovando (1985) se hizo un análisis deta-- llado de la CP mostrándose y relacionandose entre sí di- versos métodos de hacer esta clasificación, uno de ellos (quizás el más fundamental por sus consecuencias) es el Matricial debido a Petrov (1962) pág. 371: Existe mucha literatura (ver Ovando) sobre este método pero vale la - pena recomendar los trabajos de J.L. Synge, Comm. Dublin Inst. Adv. Stud. Serie A. No. 15 (1964) (agradecemos al M. en C. G. González Padrón de la Univ. de Konstanz, RFA, el envío de este artículo); R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, Introduction to general relativity, MacGraw-Hill (1965) págs. 176-182; R. Adler, C. Shefield, J. Math. Phys. <u>14</u>, 465 (1972); T.M. Kalotas, C.J. Eliezer, Am.J. Phys. 51, 24 (1983) y J.L. López, Rep. de Invest. No. 118 DCBI-UAM-A (1984) entre otros. Este enfoque matricial muestra la relevancia del tensor complejo:

$$W_{abcd} = C_{abcd} + i\ {}^*C_{abcd} \quad , \qquad \text{(I.10a)}$$

que en virtud de (9b,cd) posee las simetrías

$$W_{abcr} = -W_{bacr} = -W_{abrc} = W_{crab} \quad , \quad W_{a\ \ cr}^{\ \ c} = 0 \quad ,$$
$$\text{(I.10b)}$$
$$^*W_{abcr} = W^*_{abcr} = -i\ W_{abcr} \quad ,$$

con éstas y (7a) podemos escribir (10a) en términos de la tetrada nula bajo la misma filosofía que lo realizado en (3b,7b):

$$W_{abcr} = 2\Big[\psi_0\, U_{ab}\, U_{cr} + \psi_1 (U_{ab}\, M_{cr} + U_{cr}\, M_{ab}) + \psi_2 (M_{ab}\, M_{cr} + V_{ab}\, U_{cr} +$$
$$\text{(I.10c)}$$
$$+ V_{cr}\, U_{ab}) + \psi_3 (V_{ab}\, M_{cr} + V_{cr}\, M_{ab}) + \psi_4\, V_{ab}\, V_{cr}\Big] \quad ,$$

las 5 cantidades complejas ψ_r, $r = 0,\ldots,4$ contienen la misma información que las 10 componentes reales independientes de C_{abjk} y fueron introducidas en relatividad general por R.K. Sachs, Proc. Roy. Soc. London A264, 309 (1961) aunque su aplicación sistemática se debe a Newman-Penrose

(1962). Al contraer (10c) con la tetrada de NP obtenemos:

$$\psi_0 = \frac{1}{8} W_{abcr} V^{ab} V^{cr} = C_{abjr} n^a m^b n^j m^r ,$$

$$\psi_1 = -\frac{1}{16} W_{abcr} V^{ab} M^{cr} = C_{abjr} n^a \ell^b n^j m^r ,$$

$$\psi_2 = \frac{1}{8} W_{abcr} U^{ab} V^{cr} = \frac{1}{32} W_{abcr} M^{ab} M^{cr} = - C_{abjr} \ell^a \bar{m}^b n^j m^r , \tag{I.10d}$$

$$\psi_3 = -\frac{1}{16} W_{abcr} U^{ab} M^{cr} = C_{abjr} \ell^a n^b \ell^j \bar{m}^r ,$$

$$\psi_4 = \frac{1}{8} W_{abcr} U^{ab} U^{cr} = C_{abjr} \ell^a \bar{m}^b \ell^j \bar{m}^r ,$$

lo cual coincide con la convención del libro de Kramer-Stephani-MacCallum-Herlt (1980). Las ψ_a son independientes de las coordenadas pero sí se alteran al cambiar de tetrada nula, en particular, ésta puede elegirse tal que genere simplificaciones en (10d) como se verá más adelante. En (9a) observamos que R_{ajkm} está en función de los tensores de Weyl, Ricci y de la curvatura escalar, esto significa que las cantidades ψ_k, ϕ_{ab} y R describen completamente al tensor de Riemann (20 componentes reales independientes en 4 dimensiones).

El tensor conformal tiene 4 invariantes algebraicas independientes, a saber,

$$C_2 = C_{abjk}\,C^{abjk} \quad , \quad {}^*C_2 = {}^*C_{abjk}\,C^{abjk} = {}^*R_{abjk}\,R^{abjk} \quad ,$$
$$C_3 = C_{abjk}\,C^{jkpq}\,C_{pq}{}^{ab} \quad , \quad {}^*C_3 = {}^*C_{abjk}\,C^{jkpq}\,C_{pq}{}^{ab} \quad , \tag{I.11a}$$

y al contraer (10c) consigo misma obtenemos a estos esca lares en términos de las cantidades de NP:

$$C_2 + i\,{}^*C_2 = 16(3\,\psi^2{}_2 + \psi_0\,\psi_4 - 4\,\psi_1\,\psi_3) \quad , \tag{I.11b}$$

$$C_3 + i\,{}^*C_3 = 96\,(-\psi^3{}_2 + 2\,\psi_1\,\psi_2\,\psi_3 + \psi_0\,\psi_2\,\psi_4 - \psi_0\,\psi^2{}_3 - \psi^2{}_1\,\psi_4) \quad , \tag{I.11c}$$

estas relaciones coinciden con (187,188) de P.J. Greenberg, Stud. Appl. Math. 51, 277 (1972) si en su artículo hacemos la asociación

$$C_r = \psi_{r-1} \quad , \quad r = 1,\ldots,5 \quad . \tag{I.11d}$$

Las identidades (11b,c) también existen en la pág. 994 - de S.J. Campbell, J. Wainwright, Gen. Relat. Grav. 8, - 987 (1977) aunque por razones de imprenta estos autores escribieron (11c) incorrectamente. Los invariantes (11a) son de interés al construir condiciones necesarias para la inmersión de R_4 en E_5 o E_6, Caps. II y III.

Con (10c,11b,c) resultan las identidades

$$C_{ajkm}\, C_{b}{}^{jkm} = \frac{C_2}{4}\, g_{ab} \quad , \quad {}^{*}C_{ajkm}\, C_{b}{}^{jkm} = \frac{{}^{*}C_2}{4}\, g_{ab} \quad ,$$

$$C_{a}{}^{j}{}_{km}\, C^{kmpt}\, C_{ptbj} = \frac{C_3}{4}\, g_{ab} \quad , \quad {}^{*}C_{a}{}^{j}{}_{km}\, C^{kmpt}\, C_{ptbj} = \frac{{}^{*}C_3}{4}\, g_{ab} \quad , \tag{I.11e}$$

las cuales pueden encontrarse en M. Novello, J. Duarte, Gen. Relat. Grav. 12, 871 (1980); si empleamos (11e) en (3.6) pág. 193 de D. Lovelock, Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. 42, 187 (1967) obtenemos una identidad general poco conocida (consultar Ovando (1985) pág. 44):

$$C^{ai}{}_{km}\, C^{pk}{}_{ar}\, C^{rm}{}_{pj} = -\,\frac{C}{16}\, \delta^{i}{}_{j} \quad . \tag{I.11f}$$

La operación de dualidad (9d) puede aplicarse a los dos pares de índices, en particular, el tensor de Weyl es autodual porque ${}^{*}C^{*}{}_{abkm} = -\,C_{abkm}$, sin embargo, con el tensor de Riemann el asunto es diferente porque Lanczos (1938,62) demostró la relación

$${}^{*}R^{*}{}_{ijkm} \quad \frac{1}{4}\, \eta_{ijab}\, R^{abpq}\, \eta_{pqkm} = -\, R_{ijkm} + R_{im}\, g_{jk}\, R_{jk}\, g_{im} -$$

$$-\, R_{ik}\, g_{jm} - R_{jm}\, g_{ik} + \frac{R}{2}\,(g_{ik}\, g_{jm} - g_{im}\, g_{jk}) \quad , \tag{I.12a}$$

aunque de hecho ya había sido encontrada por A. Einstein, Math. Ann. 97, (1926); mediante el tensor doble dual (12a) Lanczos (1962) construyó su espintensor apoyándose en un principio variacional con Lagrangiana:

$$K_2 \equiv {}^{*}R^{*}{}_{abcd}\, R^{abcd} \quad , \tag{I.12d}$$

ver Cap. IV. Con las propiedades de los tensores de Levi-Civita es simple deducir la identidad (4.10) de Lanczos (1938):

$$ {}^{*}R^{*}{}_{ajkm}\; R_{b}{}^{jkm} = \frac{K_2}{4}\, g_{ab} \quad . \tag{I.12c} $$

Las expresiones (12a,c) son relevantes en la obtención de la identidad de Geonner (1973) y González-Piña (1981) para R_4 de clase uno (Secc. 2 Cap. II) como fue probado por Becerril-López (1983) y en la deducción de la condición necesaria de Yakupov (1968) para espacio-tiempos inmersos en E_6 (Cap. III Secc. 2).

Enseguida vamos a exponer algunos aspectos de la CP que serán de utilidad en los próximos capítulos: En el proceso matricial de Petrov (1962) al tensor (10c) se le asocia una matriz $\underset{\sim}{P}$ 3x3 compleja, simétrica y con traza cero mediante la regla

$$ P^{A}{}_{B} = \tilde{C}^{aj}{}_{km} + i\; {}^{*}\tilde{C}^{aj}{}_{km} \quad , \quad A,B = 1,2,3 \tag{I.13a} $$

entendiéndose que $1 \to 23$, $2 \to 31$ y $3 \to 12$, además:

$$ \tilde{C}^{aj}{}_{km} = C^{pq}{}_{rb}\; e^{(a)}{}_{p}\; e^{(j)}{}_{q}\; e_{(k)}{}^{r}\; e_{(m)}{}^{b} \tag{I.13b} $$

donde se emplearon la tetrada real ortonormal (1a) y su base dual $e^{(a)}{}_{r}$:

$$e^{(\sigma)}{}_{r} = e^{(\sigma)}{}_{r} \quad , \quad \sigma = 1,2,3 \quad , \quad e^{(4)}{}_{r} = - e_{(4)r} \quad . \tag{I.13c}$$

Entonces la CP se reduce al análisis del problema de - eigenvalores de (13a) y así el número de eigenvectores linealmente independientes y el número de valores pro-- pios distintos conducen a 6 tipos de campo gravitacional los cuales se resumen en la siguiente tabla (los tipos Petrov se asignan a C_{ijkm} porque él da origen a $\underset{\sim}{P}$):

Tipo	No. de eigenvect. linealm. indep.	No. de valores propios distintos	
I	3	3	→ algebraicamente general
D	3	2	→ Tipo I degenerado
II	2	2	
N	2	1	→ Tipo II degenerado = Tipo Nulo
III	1	1	
O	3	1	→ Conformalmente plano

Tabla 1.- Tipos Petrov para R_4

Cuando el tensor de Weyl tiene tipo ≠ I decimos que es - algebraicamente especial; el tipo O representa el caso - $C_{ijkm} = 0$. Como $\underset{\sim}{P}$ tiene traza cero entonces es nula la suma de sus tres eigenvalores, por lo tanto, para II y D ningún valor propio es cero y para N, III y O los tres - eigenvalores coinciden entre sí y se anulan. En virtud de (13a) un vector propio de $\underset{\sim}{P}$ equivale a un eigentensor de C_{abpq}, este hecho lo utilizaremos en las Seccs. 3 y 4 del Cap. III. Podemos visualizar a la Tabla 1 mediante el diagrama de R. Penrose, Ann. of Phys. 10, 171 (1960) (este autor obtuvo la CP con el cálculo espinorial):

DIAGRAMA DE PENROSE

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{I} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[r, dash, dashed] & \text{3 valores propios distintos} \\
 & \mathrm{II} \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d] & \mathrm{D} \arrow[d] \arrow[dl] \arrow[r, dash, dashed] & \text{2 eigenvalores diferentes} \\
\mathrm{III} \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathrm{O} \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, dash] & \text{1 valor propio distinto} \\
\text{1 eigenvector linealm. indep. } (\ell.\mathrm{i}) & \text{2 vect. propios } \ell.\mathrm{i}. & \text{3 eigenvectores } \ell.\mathrm{i}. &
\end{tikzcd}$$

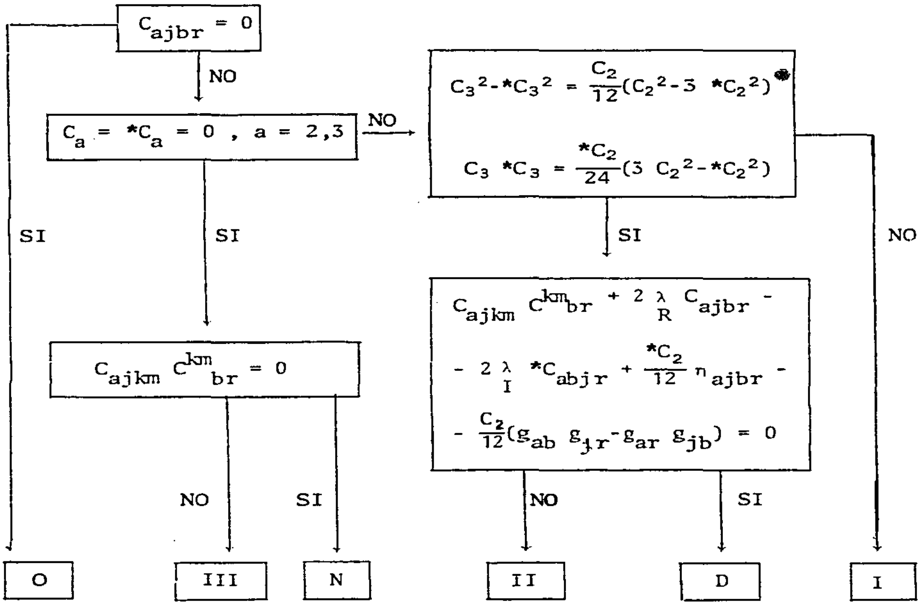
(I.13d)

En (13d) las flechas indican especialización algebraica en el sentido de la Tabla 1 (esto quedará más claro al - exponer los vectores de Debever-Penrose). El tipo Petrov puede cambiar evento por evento, exactamente cómo cambie depende de la estructura geométrica del espacio-tiempo: estudiar esta evolución conduce a un problema no-local - porque involucra más de un punto, este análisis puede encontrarse en L.A. Case, Phys. Rev. 176, 1554 (1968) y A. Bialas, Acta Phys. Polon. 23, 699 (1963).

Para cada tipo de la Tabla 1 podemos indicar su forma canónica de Jordan y en consecuencia obtener el polinomio mínimo satisfecho por $\mathcal{P}$, entonces con (13a) deducir la correspondiente relación tensorial para C_{ijkm}, este proceso genera el enfoque tensorial de A. Peres, N. Cim. 18, 36 (1960) (este autor no utiliza el concepto de polinomio mínimo, sus cálculos son más complicados) resumimos en el siguiente algoritmo:

MÉTODO TENSORIAL DE PERES

(I.13e)



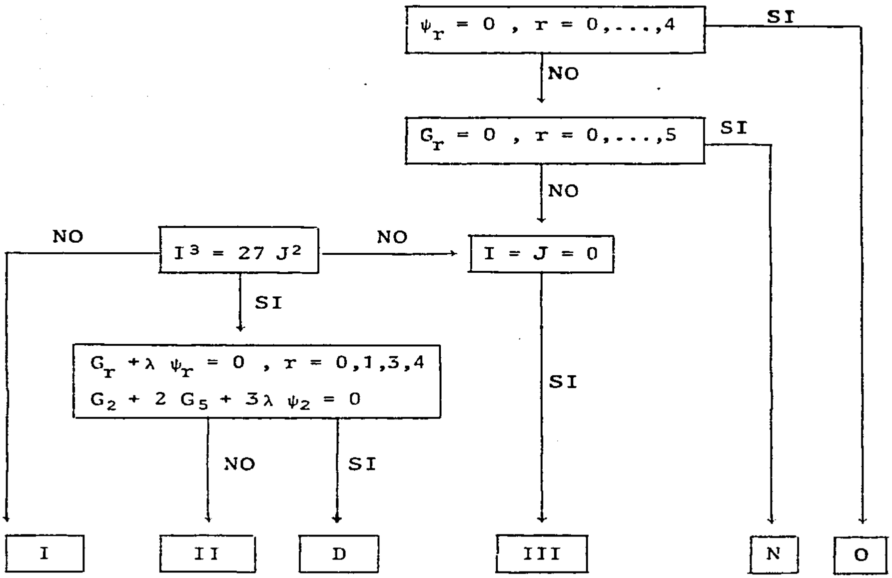
donde $\lambda = \lambda_R + i\ \lambda_I$ se determina vía las relaciones:

$$\lambda^2 = \frac{1}{48}\,(C_2 + i\ {}^*C_2) \quad , \quad \lambda^3 = -\frac{1}{96}\,(C_3 + i\ {}^*C_3) \quad . \tag{I.13f}$$

El diagrama de flujo (13e) no se localiza en la literatura excepto en Ovando (1985) pág. 70 (aunque escrito de otra manera), y en él aprendemos que $C_2 = C_3 = {}^*C_2 = {}^*C_3 = 0$ para los tipos III, N y O. Obsérvese que en el método de Peres no interviene tetrada alguna y que los cálculos se realizan en coordenadas arbitrarias.

Si en (13e) sustituímos (10c) entonces obtenemos la versión NP de este método tensorial, el algoritmo resultante es muy simple y novedoso y fue deducido por Ovando (1985) pág. 144 y es más poderoso que el proceso NP propuesto por D'Inverno-Russell-Clark (1971):

MÉTODO TENSORIAL-TETRADAS NULAS



(I.13g)

donde

$$G_0 = 2(\psi_0 \psi_2 - \psi^2{}_1) \qquad G_1 = \psi_0 \psi_3 - \psi_1 \psi_2 \quad ,$$

$$G_2 = \psi^2{}_2 + \psi_0 \psi_4 - 2 \psi_1 \psi_3 \quad , \quad G_3 = \psi_1 \psi_4 - \psi_2 \psi_3 \quad ,$$

$$G_4 = 2(\psi_2 \psi_4 - \psi^2{}_3) \quad , \quad G_5 = 2(\psi_1 \psi_3 - \psi^2{}_2) \quad , \quad (I.13h)$$

$$I = G_2 - G_5 \quad , \quad J = - \psi_3 G_1 + \frac{1}{2}(\psi_2 G_5 + \psi_4 G_0) \quad ,$$

$$\lambda^2 = \frac{I}{3} \quad , \quad \lambda^3 = - J \quad .$$

El algoritmo (13g) es válido para una tetrada de NP arbitraria; agradecemos al Dr. R. Schimming, Akademie der Wissenschaften der DDR, Einstein-Laboratorium, el interés que ha mostrado por este algoritmo. El diagrama de flujo anterior puede adaptarse a la computadora, debe ser útil probar su eficiencia (en cuanto a tiempo de máquina) para diversas métricas; el proceso (13g) puede checarse, por ejemplo, con las soluciones (IV.12,...,21).

De (1b) podemos despejar $e_{(a)r}$ en función de la tetrada nula y sustituir en (13a,b,c) tomando en cuenta (10d) para obtener la matriz:

$$\underset{\sim}{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2\psi_2 - \psi_0 - \psi_4) & \frac{i}{2}(\psi_4 - \psi_0) & \psi_1 - \psi_3 \\ \frac{i}{2}(\psi_4 - \psi_0) & \frac{1}{2}(2\psi_2 + \psi_0 + \psi_4) & i(\psi_1 + \psi_3) \\ \psi_1 - \psi_3 & i(\psi_1 + \psi_3) & - 2\psi_2 \end{bmatrix} \quad , \quad (I.14a)$$

que G. Ludwig, Am. J. Phys. 37, 1225 (1969) deduce con espinores y mediante un 5-espacio complejo, a nuestro juicio su método es no-trivial y poco claro, consultar J. López-G. Ovando, Rep. de Invest. No. 154 DCBI-UAM-A (1985). Para cada tipo Petrov de la Tabla 1 la matriz $\underset{\sim}{P}$ adquiere su correspondiente forma canónica de Jordan, entonces en virtud de (14a) esto significa que para cada tipo existe una tetrada nula (no necesariamente única) que llamaremos canónica en la cual $\underset{\sim}{P}$ (y en consecuencia las ψ_r) tiene la estructura más simple. Es posible demostrar, ver Ovando (1985), que la tetrada de NP siempre puede elegirse tal que:

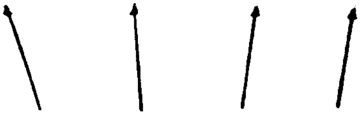
$$\begin{aligned}
&N &&: \psi_4 = 1 \quad , \quad \psi_r = 0 \quad , \quad r \neq 4 \\
&III &&: \psi_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \quad , \quad \psi_r = 0 \quad , \quad r \neq 3 \\
&D &&: \psi_2 = \lambda_1 \quad , \quad \psi_r = 0 \quad , \quad r \neq 2 \\
&II &&: \psi_2 = \lambda_1 \quad , \quad \psi_4 = 1 \quad , \quad \psi_r = 0 \quad , \quad r \neq 2,4 \\
&I &&: \psi_0 = \psi_4 = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \quad , \quad \psi_2 = -\frac{1}{2}\lambda_3 \quad , \quad \psi_r = 0 \quad , \quad r = 1,3
\end{aligned} \tag{I.14b}$$

donde los λ_r son los eigenvalores complejos (no tienen porqué ser constantes) de $\underset{\sim}{P}$. En los tipos II y D el valor propio λ_1 no puede anularse; nótese que en los casos N y III las cantidades ψ_4 y ψ_3 son constantes respectivamente. La tetrada canónica (14b) es equivalente a (A.9.7, ...,11) de R. Sachs, Proc. Roy. Soc. London A264, 309 (1961) y en el Cap. III sólo trabajaremos con esta tetrada. El resultado (14b) conduce al tema de direcciones principales nulas:

Un vector K^b nulo y real es de Debever-Penrose si cumple con ([ ] denota antisimetrización para los índices capturados):

$$K^r \, K_{[t} \, C_{b]rp[q} \, K_{c]} \, K^p = 0 \quad , \qquad \text{(I.14c)}$$

R. Penrose, Ann. of Phys. 10, 171 (1960) y R. Debever, Cah. de Phys. 18, 303 (1964) pág. 327 mostraron que todo espacio-tiempo tiene 4 vectores con la propiedad (14c):



$\underset{1}{K}{}^r \qquad \underset{2}{K}{}^r \qquad \underset{3}{K}{}^r \qquad \underset{4}{K}{}^r$

$\underset{j}{K}{}^r$: Vectores simples de Debever-Penrose (DP)

(I.14d)

símbolo [1111]

Si, por ejemplo, n^r se elige proporcional a uno de estos vectores entonces de (10c,14c) obtenemos $\psi_0 = 0$, y a la inversa: si para una cierta tetrada resulta $\psi_0 = 0$ entonces n^e es de DP; similarmente, si ℓ^r es proporcional a alguno de los vectores (14d) entonces $\psi_4 = 0$. La existencia de los vectores de DP fue anticipada por E. Cartan, C.R. Acad. Sci. París 174, 857 (1922).

Puede ocurrir que en (14d) dos vectores colapsen (esto se simboliza con la flecha doble):

$\underset{1}{K}^r$ $\underset{3}{K}^r$ $\underset{4}{K}^r$

$\underset{1}{K}^r = \underset{2}{K}^r$: Vector <u>2-degenerado</u> de DP,

$\underset{3}{K}^r$ y $\underset{4}{K}^r$: Vectores simples de DP,

(I.14e)

<u>Símbolo [211]</u>

Si n^r es proporcional a $\underset{1}{K}^r$ entonces $\psi_0 = \psi_1 = 0$ pero si n^r es proporcional a $\underset{3}{K}^r$ ó $\underset{4}{K}^r$ entonces sólo podemos asegurar que $\psi_0 = 0$; análogamente, si $\ell^r \propto \underset{1}{K}^r$ resulta $\psi_3 = \psi_4 = 0$. Los vectores (14e) cumplen (14c) pero además aparece la relación (producto del colapso entre $\underset{1}{K}^r$ y $\underset{2}{K}^r$):

$$\underset{1}{K}^r \, C_{brp[q} \, \underset{1}{K}_{c]} \, \underset{1}{K}^p = 0 \quad , \tag{I.14f}$$

así un vector simple de DP satisface (14c) pero viola (14f) y sólo cuando es 2-degenerado cumple con ésta. Al suscitarse un triple colapso:

$\underset{1}{K}^r$ $\underset{4}{K}^r$

$\underset{1}{K}^r$: Vector <u>3-degenerado</u> de DP,

$\underset{4}{K}^r$: Vector simple de DP, (I.14g)

<u>Símbolo [31]</u>

en este caso $n^r \propto \underset{1}{K}^r$ implica $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0$ y $n^r \propto \underset{4}{K}^r$

sólo conduce a ψ_0 =; ℓ^r proporcional a $\underset{1}{K}^r$ da origen a - $\psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0$. El vector $\underset{4}{K}^r$ cumple (14c), $\underset{1}{K}^r$ satisface (14c,e) y además:

$$C_{brp[q}\,\underset{1}{K}_{c]}\,\underset{1}{K}^p = 0 \quad . \qquad \text{(I.14h)}$$

La última situación se obtiene cuando las 4 direcciones principales coinciden entre sí:

$\underset{1}{K}^r$

$\underset{1}{K}^r$: Vector <u>4-degenerado</u> de DP,

<u>Símbolo [4]</u> (I.14i)

Si $n^r \propto \underset{1}{K}^r$ ó $\ell^r \propto \underset{1}{K}^r$ entonces $\psi_a = 0$, $a \neq 4$ ó $\psi_b = 0$, - $b \neq 0$. El vector (14i) satisface (14c,f,h) y además cumple:

$$C_{brpq}\,\underset{1}{K}^p = 0 \quad . \qquad \text{(I.14j)}$$

Aquí es interesante comentar lo siguiente: Cuando en un R_4 (con $C_{brpq} \neq 0$) existe un vector nulo real con la propiedad (14j) entonces dicho vector es único excepto por un factor, esto se debe a un teorema de D. Lovelock, - Proc. Camb. Phil. Soc. <u>68</u>, 345 (1970) pág. 348.

Es claro que (14j) $\Longrightarrow$ (14h) $\Longrightarrow$ (14f) $\Longrightarrow$ (14c). En resumen, si K^r es un vector de DP entonces K^r es ($C_{abpq} \neq 0$):

4-degenerado si cumple (14j) ,

3-degenerado si satisface (14h) pero viola (14j) ,

(I.15a)

2-degenerado si verifica (14f) pero sin cumplir (14j,h) ,

simple si satisface (14c) pero sin verificar (14j,h,f) .,

y a esto lo debemos complementar con (5.b) de Torres (1985):

Degeneración	n^r	ℓ^r
Simple	$\psi_0 = 0$	$\psi_4 = 0$
Doble	$\psi_0 = \psi_1 = 0$	$\psi_3 = \psi_4 = 0$
Triple	$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0$	$\psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0$
Cuadruple	$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$	$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0$

(I.15b)

lo cual se cumple cuando n^r o/y ℓ^r son de Debever-Penrose; en (15b) es válido el si y sólo si, por ejemplo, n^r es 3-degenerado $\Longleftrightarrow$ $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0$, ℓ^r es simple $\Longleftrightarrow$ $\psi_4 = 0$, etc..

Si en (14c,f,h,j) adaptamos la tetrada de NP de acuerdo a (15b) y utilizamos el algoritmo (13g) concluímos que los tipos I, II, III, D y N corresponden a [1111], [211], [31], [22] y [4] respectivamente, entonces el diagrama de Penrose nos queda:

$$\begin{tikzcd} & & {[1111]} \arrow[dl] \arrow[d] \\ & {[211]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & {[22]} \arrow[d] \\ {[31]} \arrow[r] & {[4]} \arrow[r] & O \end{tikzcd} \qquad (I.15c)$$

y así las flechas indican especialización algebraica en cuanto al colapso de los vectores de DP; en el tipo O no se definen direcciones principales nulas porque $C_{abpq} = 0$.

Ahora es natural preguntarse sobre la relación existente entre la tetrada canónica (que subrayaremos) que conduce a (14b) y los vectores de Debever-Penrose, la respuesta la damos con la siguiente tabla:

Tabla 2.- Tipos Petrov, tetrada canónica y vectores de Debever-Penrose.

N	$\underline{n}^r$ $\Rrightarrow$
III	$\underline{n}^r$ $\Rrightarrow$ $\quad$ $\underline{\ell}^r$ $\rightarrow$
D	$\underline{n}^r$ $\Rightarrow$ $\quad$ $\underline{\ell}^r$ $\Rightarrow$
II	$\underline{n}^r$ $\Rightarrow$ $\quad$ $\underset{1}{K}^r$ $\rightarrow$ $\quad$ $\underset{2}{K}^r$ $\rightarrow$ $\quad$ $\underset{j}{K}^r = \underline{n}^r + \frac{1}{2}\omega_j \overline{\omega}_j \underline{\ell}^r - \frac{i}{\sqrt{2}} \overline{\omega}_j \underline{m}^r + \frac{i}{\sqrt{2}} \omega_j \underline{\overline{m}}^r$, $\omega^2_j = 12\lambda_1$, $j = 1,2$
I	$\rightarrow$ $\underset{11}{K}^r$ $\quad$ $\rightarrow$ $\underset{12}{K}^r$ $\quad$ $\rightarrow$ $\underset{21}{K}^r$ $\quad$ $\rightarrow$ $\underset{22}{K}^r$ $\quad$ $\underset{jc}{K}^r = - \frac{\overline{\beta}_c(i+\phi_j)}{\beta_c(i+\overline{\phi}_j)} \underline{\ell}^r + \underline{n}^r + \underset{jc}{B}\,\underline{m}^r + \underset{jc}{\overline{B}}\,\underline{\overline{m}}^r$, $i = \sqrt{-1}$ $\underset{jc}{B} = - \frac{i\overline{\beta}_c}{i + \overline{\phi}_j}$, $\phi^2_j = - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}$, $j,c = 1,2$ $\beta^2_c = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}$

Así aprendemos que el vector n^r de la tetrada canónica - es una dirección principal repetida cuando el espacio-tiempo es algebraicamente especial y que ℓ^r sólo es de DP para los tipos III y D; en casi todos nuestros cálculos - (Cap. III) utilizaremos la tetrada canónica.

La colección de vectores de DP ó los canónicos definen - congruencias nulas (familias de curvas) en R_4 las cuales tienen gran relevancia para el estudio del campo gravitacional, en particular para nuestros fines de inmersión, sin embargo, las propiedades (escalares ópticos entre - otras cosas) de las congruencias involucran más de un - evento y el análisis deja de ser algebraico por lo que - dicho análisis diferencial constituirá el punto de partida de la próxima Secc.

Queremos recordar que en los párrafos entre (6d) y (7a) se mencionó la falta de algoritmos semejantes a (13e,g) para la clasificación de Churchill-Plebañski, nos encontramos elaborando dichos algoritmos.

Antes de finalizar esta Secc. quizás sea conveniente hacer tres observaciones:

a).- "Que toda métrica con simetría esférica es tipo O ó D" ,

(I.16a)

este resultado se debe a Rao (1966) y Plebañski- - Stachel (1968): Por ejemplo, la solución de - Schwarzchild (ver (IV.12a)) es tipo D por ser esféricamente simétrica, y J.R. Rao, R.T. Singh, Inter. - J. Theor. Phys. 20, 775 (1981) contruyeron métricas tipo O con esta simetría.

b).- En el libro de M. Carmeli, "Group theory and general relativity", McGraw-Hill, N.Y. (1977) pág. 267 se manifiesta la necesidad de una interrelación entre la CP y la existencia de simetrías (vectores de Killing), tal parece que esto continúa siendo un problema abierto, al respecto mencionemos el teorema de Collinson (1969) (agradecemos al M. en C. G. González Padrón - el envío de este artículo):

"Un R_4 vacío tipo N con una congruencia nula con - rotación tiene a lo más una simetría" , (I.16b)

la métrica de I. Hauser, Phys. Rev. Lett. 33, 1112 - (1974) (por ahora visitante en el Depto. de Física - del CIEA-IPN) ejemplifica (16b) aunque este autor no hace referencia al teorema de Collinson, sólo lo menciona en I. Hauser, F.J. Ernst, J. Math. Phys. 19, - 1316 (1978). En el Cap. III Secc. 3 probaremos que la solución de Hauser no es sumergible en E_6.

c).- Aquí hemos expuesto la tetrada de NP la cual es una tetrada muy particular con las propiedades (1b), quizás existan otros tipos de tetradas más eficientes - que la de NP para ciertos problemas de relatividad - general, esta posibilidad fue estudiada en parte por J. Thompson, G. Schrank, J. Math. Phys. 10, 766 (1969).

2. TETRADAS NULAS: ASPECTOS DIFERENCIALES.

En la Secc. anterior sólo se consideraron aspectos locales del espacio-tiempo, es decir, ha bastado con un evento, por ello no han aparecido explícitamente derivadas -

respecto a las coordenadas; toda la información obtenida es valiosa pero incompleta ya que no indica cómo lo que ocurre en un punto se relaciona con lo que sucede en - otro. Aquí trataremos de remediar esta deficiencia y de esta manera entraremos en los aspectos dinámicos de la - relatividad general. El análisis se iniciará con el estudio de las propiedades diferenciales de la tetrada nula, así hablaremos de coeficientes de rotación y de es-- pín, escalares ópticos, cantidades de NP, operadores y - ecs. de NP, etc., todo esto dará origen a la herramienta completa del formalismo de Newman-Penrose.

Ya introducimos la idea de que los objetos tensoriales - pueden escribirse en función de la tetrada nula tomando a ésta como base, entonces para analizar la evolución de dichos objetos sobre R_4 es necesario estudiar los cambios que sufre la tetrada de NP al pasar de un evento a otro lo cual conduce al cálculo de las derivadas covariantes de (1d):

$$z_{(a)b;c} = \text{Tensor de segundo orden que puede expresare en función de (1f)} ,$$

$$= \gamma_{qah}\, z^{(q)}{}_{b}\, z^{(h)}{}_{c} , \qquad (I.17a)$$

los coeficientes γ_{qah} de este desarrollo son los Coefi-- cientes de Rotación asociados a la tetrada bajo estudio, los cuales pueden despejarse si contraemos (17a) con la propia tetrada, obteniéndose:

$$\gamma_{abc} = - \gamma_{bac} = - z_{(a)r;t}\, z_{(b)}{}^{r}\, z_{(c)}{}^{t} , \qquad (I.17b)$$

esta antisimetría implica 24 componentes (en general complejas) independientes para γ_{abc}, un gran logro de NP fue la elección de estas 24 cantidades (12 coeficientes de espín + sus complejos conjugados): κ, σ, ρ, $\tau, \ldots, \bar{\kappa}$, $\bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}, \ldots$ y el significado geométrico de algunas de ellas está en términos de las congruencias nulas definidas por n^a y ℓ^a:

γ_{abc}

c \ ab	23	31	12	14	24	34
1	μ	$-\bar{\lambda}$	$\bar{\alpha} - \beta$	$-\sigma$	$-\bar{\rho}$	$-(\bar{\alpha}+\beta)$
2	λ	$-\bar{\mu}$	$\bar{\beta} - \alpha$	$-\rho$	$-\bar{\sigma}$	$-(\alpha+\bar{\beta})$
3	ν	$-\bar{\nu}$	$\bar{\gamma} - \gamma$	$-\tau$	$-\bar{\tau}$	$-(\gamma+\bar{\gamma})$
4	π	$-\bar{\pi}$	$\bar{\epsilon} - \epsilon$	$-\kappa$	$-\bar{\kappa}$	$-(\epsilon+\bar{\epsilon})$

Tabla 3.- Coeficientes de Espín.

(I.17c)

entonces de (1d, 17b,c)

$$\kappa = -n_{a;b}\, m^a n^b \quad , \quad \tau = -n_{a;b}\, m^a \ell^b \quad , \quad \lambda = \ell_{a;b}\, \bar{m}^a \bar{m}^b \quad ,$$

$$\rho = -n_{a;b}\, m^a n^b \quad , \quad \nu = \ell_{a;b}\, \bar{m}^a \ell^b \quad , \quad \pi = \ell_{a;b}\, \bar{m}^a n^b \quad ,$$

$$\sigma = -n_{a;b}\, m^a m^b \quad , \quad \mu = \ell_{a;b}\, \bar{m}^a m^b \quad , \tag{I.17d}$$

$$\epsilon = \tfrac{1}{2}(m_{a;b}\, \bar{m}^a - n_{a;b}\, \ell^a) n^b \; , \; \gamma = \tfrac{1}{2}(\ell_{a;b}\, n^a - \bar{m}_{a;b}\, m^a)\, \ell^b \quad ,$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\ell_{a;b}\, n^a - \bar{m}_{a;b}\, m^a) \bar{m}^b \; , \; \beta = \tfrac{1}{2}(m_{a;b}\, \bar{m}^a - n_{a;b}\, \ell^a)\, m^b \quad .$$

En estas relaciones aparecen derivadas covariantes lo cual hace creer que estamos obligados al cálculo de los símbolos de Christoffel, pero no es así, en efecto (ver (7) de Torres (1985)):

Definimos las siguientes cantidades complejas en las que sólo se necesitan derivadas parciales respecto a las coordenadas:

$$C_{abr} = - C_{arb} = - \left[Z_{(a)p,q} - Z_{(a)q,p} \right] Z_{(b)}{}^{p} Z_{(r)}{}^{q} \quad , \tag{I.17e}$$

entonces los coeficientes de rotación nos quedan

$$\gamma_{abr} = \frac{1}{2}(C_{abr} + C_{bra} - C_{rab}) \quad , \tag{I.17f}$$

y (17c) equivalen a

$$\kappa = C_{414} \quad , \quad \sigma = C_{114} \quad , \quad \rho = \frac{1}{2}(C_{124} + C_{412} + C_{214}) \quad ,$$

$$\nu = C_{332} \quad , \quad \lambda = C_{232} \quad , \quad \mu = \frac{1}{2}(C_{231} + C_{312} + C_{132}) \quad ,$$

$$\tau = \frac{1}{2}(C_{134} + C_{413} + C_{314}) \; , \; \pi = \frac{1}{2}(C_{234} + C_{342} + C_{432}) \quad ,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}(C_{142} + C_{214} + C_{412} + 2\, C_{434}) \; , \; \gamma = \frac{1}{4}(C_{132} + C_{213} + C_{312} + 2\, C_{334}) \; ,$$

$$\alpha = \frac{1}{4}(C_{324} + C_{432} + C_{234} + 2\, C_{212}) \; , \; \beta = \frac{1}{4}(C_{314} + C_{431} + C_{134} + 2\, C_{112}) \; , \tag{I.17g}$$

estas expresiones permiten un cálculo más ágil de los coeficientes de espín para una tetrada específica.

De aquí en adelante $\Gamma(A^r)$ denotará la congruencia o familia de curvas generada por el campo vectorial A^r. Entonces las propiedades geométricas de $\Gamma(n^a)$ y $\Gamma(\ell^a)$ se encadenan con (17g) mediante:

Propiedad ↓	$\Gamma(n^r)$	$\Gamma(\ell^r)$
Geodésica	κ	ν
Parametrización	$\epsilon + \bar{\epsilon}$	$\gamma + \bar{\gamma}$
Deformación	σ	λ
Expansión	$\Theta \equiv -\frac{1}{2}(\rho+\bar{\rho})$	$-\frac{1}{2}(\mu+\bar{\mu})$
Rotación	$\omega \equiv \frac{i}{2}(\rho-\bar{\rho})$	$\frac{i}{2}(\mu-\bar{\mu})$

(I.18a)

Tabla 4.- Escalares Opticos.

Asi, por ejemplo, decimos que $\Gamma(n^r)$ es geodésica si $\kappa = 0$, que $\Gamma(\ell^a)$ tiene un parámetro especial sobre ella si $(\gamma+\bar{\gamma}) = 0$, que $\Gamma(n^b)$ no se deforma si $\sigma = 0$, etc.; las cantidades σ, Θ y ω reciben el nombre de Escalares Opticos asociados a $\Gamma(n^c)$ ($\Gamma(\ell^i)$ también tiene sus escalares ópticos) y puede demostrarse que:

$$\Theta = \frac{1}{2}\left[n^{a}{}_{;a} - (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\right] ,$$

$$\omega^2 = \frac{1}{4}(n_{a;b} - n_{b;a})\, n^{a;b} + \frac{1}{2}\left[\bar{\kappa}(\tau-\bar{\alpha}-\beta) + \kappa(\bar{\tau}-\alpha-\bar{\beta}) + \frac{1}{2}(\varepsilon+\bar{\varepsilon})^2\right] ,$$

$$\sigma\bar{\sigma} = \frac{1}{4}\left[(n_{a;b} + n_{b;a})\, n^{a;b} - (n^{a}{}_{;a})^2\right] + \tag{I.18b}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\bar{\kappa}(\tau+\bar{\alpha}+\beta) + \kappa(\bar{\tau}+\alpha+\bar{\beta}) + (\varepsilon+\bar{\varepsilon})\, n^{a}{}_{;a} - (\varepsilon+\bar{\varepsilon})^2\right] ,$$

entonces cuando $\Gamma(n^r)$ es geodésica ($\kappa = 0$) con parámetro especial ($n^r{}_{;a}\, n^a = 0$, es decir, $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 0$) de (18b) obtenemos

$$\Theta = \frac{1}{2}\, n^{a}{}_{;a} \quad , \quad \omega^2 = \frac{1}{4}(n_{a;b} - n_{b;a})n^{a;b} ,$$

$$\sigma\bar{\sigma} = \frac{1}{4}(n_{a;b} + n_{b;a})\, n^{a;b} - \Theta^2 , \tag{I.18c}$$

esto significa que Θ, ω y σ son propiedades intrínsecas (independientes de m^r, $\bar{m}^r$ y ℓ^r) de $\Gamma(n^b)$ que sólo dependen de n^a y de sus primeras derivadas; relaciones análogas a (18b,c) pueden deducirse para los escalares ópti-cos de $\Gamma(\ell^c)$. El material expuesto en (18) es estandard, por ejemplo, consultar R. Sachs, Proc. Roy. Soc. London A264, 309 (1961) y Torres (1985).

En (6a) indicamos las ecuaciones de campo de Einstein, supongamos que el tensor de materia corresponde a un fluído perfecto entonces la 4-velocidad u^r del fluído define $\Gamma(u^r)$ que es una congruencia de curvas temporales la cual también tiene sus escalares Θ, ω y σ (que ya no podemos llamar ópticos porque las trayectorias dejaron - de ser nulas) con expresiones semejantes a (18c) en términos de u^r, a propósito, creemos que el artículo de - Greenberg (1970) es uno de los mejores trabajos sobre la geometría de congruencias de curvas tipo-tiempo. Por - otro lado, el R_4 cuya curvatura es producida por el fluído perfecto tiene sus vectores de DP (simples o degenerados) los cuales generan sus propias congruencias nulas; al punto que deseamos llegar es el siguiente:

"La rotación de $\Gamma(u^r)$ no tiene relación directa con la rotación de Γ(dirección principal nula)" , (I.19)

por ejemplo, en la métrica de Gödel (1949) (ver (IV.10a,11a)) tanto el fluído como los dos vectores repetidos de DP tienen rotación, sin embargo, en la reciente solución tipo II de Bonnor-Davidson (1985) el fluído posee vorticidad pero el vector 2-degenerado de DP no rota.

Cuando una congruencia tiene $\omega = 0$ decimos que es ortogonal a una hipersuperficie o normal.

La derivada covariante es un proceso tensorial que también posee su contraparte NP, esta transcripción se logra proyectándola sobre la tetrada nula dando así origen a - cuatro importantes operadores diferenciales lineales, a saber,

$$\delta = m^a \nabla_a \quad , \quad \bar{\delta} = \bar{m}^a \nabla_a \quad , \quad \Delta = \ell^a \nabla_a \quad , \quad D = n^a \nabla_a \qquad \text{(I.20a)}$$

con la notación ∇_a = ;a , los cuales obedecen las siguientes:

RELACIONES DE CONMUTACIÓN

$$[\Delta, D] = (\gamma+\bar{\gamma})D + (\varepsilon+\bar{\varepsilon})\Delta - (\tau+\bar{\pi})\bar{\delta} - (\bar{\tau}+\pi)\delta \quad ,$$

$$[\delta, D] = (\bar{\alpha}+\beta-\bar{\pi})D + \kappa\Delta - \sigma\bar{\delta} - (\bar{\rho}+\varepsilon-\bar{\varepsilon})\delta \quad ,$$

$$[\delta, \Delta] = -\bar{\nu}D + (\tau-\bar{\alpha}-\beta)\Delta + \bar{\lambda}\bar{\delta} + (\mu-\gamma+\bar{\gamma})\delta \quad , \qquad (I.20b)$$

$$[\bar{\delta}, \delta] = (\bar{\mu}-\mu)D + (\bar{\rho}-\rho)\Delta - (\bar{\alpha}-\beta)\bar{\delta} - (\bar{\beta}-\alpha)\delta \quad ,$$

de gran utilidad en las aplicaciones de la técnica de NP. Los operadores δ, $\bar{\delta}$, Δ y D permiten proyectar sobre la tetrada nula aquellas expresiones que involucren a la derivada covariante en forma explícita, por ejemplo, la fórmula de Ricci (la cual es equivalente a (5c)):

$$A_{r;pq} - A_{r;qp} = R^{c}{}_{rpq}\, A_c \quad , \qquad (I.20c)$$

siendo A_r un campo vectorial arbitrario, en particular, si $A_r = Z_{(a)r}$ y proyectamos (20c) sobre la tetrada de NP obtenemos

$$R_{(i)(j)(t)(d)} = \gamma_{jit;c}\, Z_{(d)}{}^{c} - \gamma_{jid;c}\, Z_{(t)}{}^{c} + \gamma_{qid}\, \gamma^{q}{}_{jt} - \gamma_{qit}\, \gamma^{q}{}_{jd} +$$

$$+ \gamma_{jiq}\, \gamma^{q}{}_{dt} - \gamma_{jiq}\, \gamma^{q}{}_{td} \quad , \qquad (I.20d)$$

donde $\gamma^{a}{}_{bc} = Z^{(a)(r)}\,\gamma_{rbc}$, si ahora damos valores a los índices ijtd en (20d) y tomamos en cuenta (1d,5a,e,9a,-10d,17c,20a) resultan 18 ecuaciones tipo NP que en sí mismas contienen idéntica información que el tensor de Riemann:

ECUACIONES DE NEWMAN-PENROSE

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & D\rho-\bar{\delta}\kappa=\rho^2+\sigma\bar{\sigma}+(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\rho-\bar{\kappa}\tau-\kappa(3\alpha+\bar{\beta}-\pi)-\phi_{00} \quad , \\
\text{(b)} & D\sigma-\delta\kappa=(\rho+\bar{\rho})\sigma+(3\varepsilon-\bar{\varepsilon})\sigma-(\tau-\bar{\pi}+\bar{\alpha}+3\beta)\kappa+\psi_0 \quad , \\
\text{(c)} & D\tau-\Delta\kappa=(\tau+\bar{\pi})\rho+(\bar{\tau}+\pi)\sigma+(\varepsilon-\bar{\varepsilon})\tau-(3\gamma+\bar{\gamma})\kappa+\psi_1-\phi_{01} \quad , \\
\text{(d)} & D\alpha-\bar{\delta}\varepsilon=(\rho+\bar{\varepsilon}-2\varepsilon)\alpha+\beta\bar{\sigma}-\bar{\beta}\varepsilon-\kappa\lambda-\bar{\kappa}\gamma+(\varepsilon+\rho)\pi-\bar{\phi}_{01} \quad , \\
\text{(e)} & D\beta-\delta\varepsilon=(\alpha+\pi)\sigma+(\bar{\rho}-\bar{\varepsilon})\beta-(\mu+\gamma)\kappa-(\bar{\alpha}-\bar{\pi})\varepsilon+\psi_1 \quad , \\
\text{(f)} & D\gamma-\Delta\varepsilon=(\tau+\bar{\pi})\alpha+(\bar{\tau}+\pi)\beta-(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\gamma-(\gamma+\bar{\gamma})\varepsilon+\tau\pi-\nu\kappa+\psi_2-\phi_{11}+\frac{R}{24} \quad , \\
\text{(g)} & D\lambda-\bar{\delta}\pi=\rho\lambda+\bar{\sigma}\mu+\pi^2+(\alpha-\bar{\beta})\pi-\nu\bar{\kappa}-(3\varepsilon-\bar{\varepsilon})\lambda-\bar{\phi}_{02} \quad , \\
\text{(h)} & D\mu-\delta\pi=\bar{\rho}\mu+\sigma\lambda+\pi\bar{\pi}-(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\mu-\pi(\bar{\alpha}-\beta)-\nu\kappa+\psi_2-\frac{R}{12} \quad , \\
\text{(i)} & D\nu-\Delta\pi=(\pi+\bar{\tau})\mu+(\bar{\pi}+\tau)\lambda+(\gamma-\bar{\gamma})\pi-(3\varepsilon+\bar{\varepsilon})\nu+\psi_3-\bar{\phi}_{12} \quad , \\
\text{(j)} & \Delta\lambda-\bar{\delta}\nu=-(\mu+\bar{\mu})\lambda-(3\gamma-\bar{\gamma})\lambda+(3\alpha+\bar{\beta}+\pi-\bar{\tau})\nu-\psi_4 \quad , \\
\text{(k)} & \delta\rho-\bar{\delta}\sigma=\rho(\bar{\alpha}+\beta)-\sigma(3\alpha-\bar{\beta})+(\rho-\bar{\rho})\tau+(\mu-\bar{\mu})\kappa-\psi_1-\phi_{01} \quad , \\
(\ell) & \delta\alpha-\bar{\delta}\beta=\mu\rho-\lambda\sigma+\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-2\alpha\beta+\gamma(\rho-\bar{\rho})+\varepsilon(\mu-\bar{\mu})-\psi_2-\phi_{11}-\frac{R}{24} \quad , \\
\text{(m)} & \delta\lambda-\bar{\delta}\mu=(\rho-\bar{\rho})\nu+(\mu-\bar{\mu})\pi+\mu(\alpha+\bar{\beta})+\lambda(\bar{\alpha}-3\beta)-\psi_3-\bar{\phi}_{12} \quad , \\
\text{(n)} & \delta\nu-\Delta\mu=\mu^2+\lambda\bar{\lambda}+(\gamma+\bar{\gamma})\mu-\bar{\nu}\pi+(\tau-3\beta-\bar{\alpha})\nu-\phi_{22} \quad , \\
\text{(o)} & \delta\gamma-\Delta\beta=(\tau-\bar{\alpha}-\beta)\gamma+\mu\tau-\sigma\nu-\varepsilon\bar{\nu}-\beta(\gamma-\bar{\gamma}-\mu)+\alpha\bar{\lambda}-\phi_{12} \quad , \\
\text{(p)} & \delta\tau-\Delta\sigma=\mu\sigma+\bar{\lambda}\rho+(\tau+\beta-\bar{\alpha})\tau-(3\gamma-\bar{\gamma})\sigma-\kappa\bar{\nu}-\phi_{02} \quad , \\
\text{(q)} & \Delta\rho-\bar{\delta}\tau=-\rho\bar{\mu}-\sigma\lambda+(\bar{\beta}-\alpha-\bar{\tau})\tau+(\gamma+\bar{\gamma})\rho+\nu\kappa-\psi_2+\frac{R}{12} \quad , \\
\text{(r)} & \Delta\alpha-\bar{\delta}\gamma=(\rho+\varepsilon)\nu-(\tau+\beta)\lambda+(\bar{\gamma}-\bar{\mu})\alpha+(\bar{\beta}-\bar{\tau})\gamma-\psi_3 \quad ,
\end{array}
\qquad \text{(I.21)}
$$

Para una tetrada de NP dada, con (17e,g) se determinan los coeficientes de espín y éstos a través de (21) permiten calcular las cantidades ψ_a, ϕ_{ab} y R las cuales especifican completamente al tensor de curvatura, este proceso fue el que se siguió para obtener (IV.11a,12b,13b,14c, 15c,16b,17b,18b,19b,20b).

El tensor de Riemann cumple con las identidades de Bianchi:

$$R_{abcf;r} + R_{abfr;c} + R_{abrc;f} = 0 \quad , \qquad \text{(I.22a)}$$

que en 4 dimensiones adquieren la forma (ver Lanczos (1962)):

$$*R*_{abc}{}^{r}{}_{;r} = 0 \qquad \text{(I.22b)}$$

en términos del doble dual definido en (12a); si observamos que $G_{ab} = *R*^{r}{}_{abr}$ entonces (22b) implican las identidades de Bianchi contraídas o "leyes de conservación":

$$G_a{}^b{}_{;b} = 0 \quad . \qquad \text{(I.22c)}$$

para el tensor de Einstein. Ahora proyectamos (22a) sobre la tetrada nula para obtener:

$$R_{(k)(q)(\ell)(p);g}\, Z_{(h)}{}^{g} + R_{(k)(q)(p)(h);g}\, Z_{(\ell)}{}^{g} + R_{(k)(q)(h)(\ell);g}\, Z_{(p)}{}^{g} +$$

$$+ \gamma^{i}{}_{qh}\, R_{(i)(k)(\ell)(p)} + \gamma^{i}{}_{q\ell}\, R_{(i)(k)(p)(h)} + \gamma^{i}{}_{qp}\, R_{(i)(k)(h)(\ell)} -$$

$$- \gamma^{i}{}_{kh}\, R_{(i)(q)(\ell)(p)} - \gamma^{i}{}_{k\ell}\, R_{(i)(q)(p)(h)} - \gamma^{i}{}_{kp}\, R_{(i)(q)(h)(\ell)} +$$

$$+ (\gamma^{i}{}_{ph} - \gamma^{i}{}_{hp})\, R_{(i)(\ell)(k)(q)} + (\gamma^{i}{}_{\ell p} - \gamma^{i}{}_{p\ell})\, R_{(i)(h)(k)(q)} + \qquad \text{(I.22d)}$$

$$+ (\gamma^{i}{}_{h\ell} - \gamma^{i}{}_{\ell h})\, R_{(i)(p)(k)(q)} = 0 \quad ,$$

y al dar valores a los correspondientes índices resultan 11 ecs. tipo NP con la misma información que (22a):

IDENTIDADES DE BIANCHI

$$\begin{aligned}
\text{(a)}\quad & \bar\delta\psi_0 - D\psi_1 - D\phi_{01} + \delta\phi_{00} = (4\alpha-\pi)\psi_0 - 2(2\rho+\epsilon)\psi_1 + 3\kappa\psi_2 - (\bar\pi - 2\bar\alpha - 2\beta)\phi_{00} - \\
& \qquad - 2(\epsilon+\bar\rho)\phi_{01} - 2\sigma\bar\phi_{01} + 2\kappa\,\phi_{11} + \bar\kappa\phi_{02} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)}\quad & \Delta\psi_0 - \delta\psi_1 - D\phi_{02} + \delta\phi_{01} = (4\gamma-\mu)\psi_0 - 2(2\tau+\beta)\psi_1 + 3\sigma\psi_2 - (2\epsilon - 2\bar\epsilon + \bar\rho)\phi_{02} - \\
& \qquad - 2(\bar\pi - \beta)\phi_{01} - 2\sigma\,\phi_{11} + 2\kappa\,\phi_{12} + \bar\lambda\,\phi_{00} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(c)}\quad & \bar\delta\psi_3 - D\psi_4 - \bar\delta\,\bar\phi_{12} + \Delta\bar\phi_{02} = (4\epsilon-\rho)\psi_4 - 2(2\pi+\alpha)\psi_3 + 3\lambda\psi_2 - (2\gamma - 2\bar\gamma + \bar\mu)\bar\phi_{02} - \\
& \qquad - 2(\bar\tau-\alpha)\bar\phi_{12} - 2\lambda\phi_{11} + 2\nu\bar\phi_{01} + \bar\sigma\phi_{22} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(d)}\quad & \Delta\psi_3 - \delta\psi_4 + \bar\delta\phi_{22} + \Delta\bar\phi_{12} = (4\beta-\tau)\psi_4 - 2(2\mu+\gamma)\psi_3 + 3\nu\psi_2 - (\bar\tau - 2\bar\beta - 2\alpha)\phi_{22} - \\
& \qquad - 2(\gamma+\bar\mu)\bar\phi_{12} - 2\lambda\,\phi_{12} + 2\nu\,\phi_{11} + \bar\nu\,\bar\phi_{02} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(e)}\quad & D\psi_2 - \bar\delta\psi_1 - \Delta\phi_{00} + \bar\delta\phi_{01} - \frac{1}{12}DR = -\lambda\psi_0 + 2(\pi-\alpha)\psi_1 + 3\rho\psi_2 - 2\kappa\psi_3 + 2(\bar\tau+\alpha)\phi_{01} - \\
& \qquad - (2\gamma+2\bar\gamma-\bar\mu)\phi_{00} + 2\tau\,\bar\phi_{01} - 2\rho\phi_{11} - \bar\sigma\,\phi_{02} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(f)}\quad & \Delta\psi_2 - \delta\psi_3 - D\phi_{22} + \bar\delta\,\bar\phi_{12} - \frac{1}{12}\Delta R = \sigma\psi_4 + 2(\beta-\tau)\psi_3 - 3\mu\psi_2 + 2\nu\psi_1 - 2(\bar\pi+\beta)\bar\phi_{12} - \\
& \qquad - (\bar\rho - 2\epsilon - 2\bar\epsilon)\phi_{22} - 2\pi\phi_{12} + 2\mu\phi_{11} + \bar\lambda\,\bar\phi_{02} \quad , \qquad (\text{I}.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(g)}\quad & D\psi_3 - \bar\delta\psi_2 + D\bar\phi_{12} - \delta\bar\phi_{02} + \frac{1}{12}\bar\delta R = -\kappa\psi_4 + 2(\rho-\epsilon)\psi_3 + 3\pi\psi_2 - 2\lambda\psi_1 + 2(\bar\rho-\epsilon)\bar\phi_{12} - \\
& \qquad - (2\bar\alpha - 2\beta - \bar\pi)\bar\phi_{02} + 2\pi\phi_{11} - 2\mu\bar\phi_{01} - \bar\kappa\phi_{22} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(h)}\quad & \Delta\psi_1 - \delta\psi_2 + \Delta\phi_{01} - \bar\delta\phi_{02} + \frac{1}{12}\delta R = \nu\psi_0 + 2(\gamma-\mu)\psi_1 - 3\tau\psi_2 + 2\sigma\psi_3 - 2(\bar\mu-\gamma)\phi_{01} - \\
& \qquad - (\bar\tau - 2\bar\beta + 2\alpha)\phi_{02} - 2\tau\phi_{11} + 2\rho\phi_{12} + \bar\nu\phi_{00} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\quad & D\phi_{11} - \delta\bar\phi_{01} - \bar\delta\phi_{01} + \Delta\phi_{00} + \frac{1}{8}DR = (2\gamma-\mu+2\bar\gamma-\bar\mu)\phi_{00} + (\pi - 2\alpha - 2\bar\tau)\phi_{01} + \bar\sigma\,\phi_{02} + \\
& \qquad + (\bar\pi - 2\bar\alpha - 2\tau)\bar\phi_{01} + 2(\rho+\bar\rho)\phi_{11} + \sigma\bar\phi_{02} - \bar\kappa\phi_{12} - \kappa\bar\phi_{12} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(j)}\quad & D\phi_{12} - \delta\phi_{11} - \bar\delta\phi_{02} + \Delta\phi_{01} + \frac{1}{8}\delta R = (-2\alpha + 2\bar\beta + \pi - \bar\tau)\phi_{02} + (\bar\rho + 2\rho - 2\bar\epsilon)\phi_{12} + 2(\bar\pi - \tau)\phi_{11} + \\
& \qquad + (2\gamma - 2\bar\mu - \mu)\phi_{01} + \bar\nu\phi_{00} - \bar\lambda\,\bar\phi_{01} + \sigma\bar\phi_{12} - \kappa\phi_{22} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(k)}\quad & D\phi_{22} - \delta\bar\phi_{12} - \bar\delta\phi_{12} + \Delta\phi_{11} + \frac{1}{8}\Delta R = (\rho+\bar\rho - 2\epsilon - 2\bar\epsilon)\phi_{22} + (2\bar\beta + 2\pi - \bar\tau)\phi_{12} - 2(\mu+\bar\mu)\phi_{11} + \\
& \qquad + (2\beta + 2\bar\pi - \tau)\bar\phi_{12} + \nu\phi_{01} + \bar\nu\,\bar\phi_{01} - \bar\lambda\,\bar\phi_{02} - \lambda\phi_{02} \ ,
\end{aligned}$$

en particular, (22c) es equivalente a (23i,j,k). Es útil hacer algunas observaciones sobre (21,23):

a).- De (21b) tenemos que $\kappa = \sigma = 0$ implica $\psi_0 = 0$ y así por (15b) concluímos que n^r es una dirección principal nula, en otras palabras, cuando $\Gamma(n^a)$ es geodésica sin deformación entonces n^c es de Debever-Penrose (no necesariamente repetido).

b).- Los valores de ψ_a, ϕ_{ab} y R obtenidos con (21) deben checarse verificando el cumplimiento de (23) porque en realidad las identidades de Bianchi son las condiciones de compatibilidad para (21); Brans (1977), Edgar (1979,80) y Becerril (1986) establecen las relaciones de integrabilidad para (23) cuando R_4 es de Einstein (esto incluye el caso vacío), las cuales reciben el nombre de Ecs. de Brans-Edgar, a su vez, las condiciones de compatibilidad de éstas se reducen a 0 = 0 (esto fue probado por Brans mediante la computadora).

c).- Papapetrou (1970) y Herrera-Papapetrou (1971) entre otros estudiaron la estructura de (21,23) para los casos vacío y con campo electromagnético cuando R_4 es asintóticamente plano, su conclusión básica fue que dicho conjunto de ecuaciones podía dividirse en principales, suplementarias y triviales, aquí proponemos un análisis semejante para las ecuaciones de Codazzi (Caps. II y III) y de Weyl-Lanczos (IV.8).

d).- Cuando el espacio-tiempo es de Einstein (ver (6c)) tenemos $\phi_{ab} = 0$, entonces (23i,j,k) implican $\delta R = \overline{\delta} R = \Delta R = DR = 0$ por lo tanto R es constante, este hecho lo ocuparemos en la Secc. 4 del Cap. III.

Ahora indicaremos sin demostración tres teoremas consecuencia de (21,23) que serán de gran utilidad en la búsqueda de condiciones necesarias para la inmersión de R_4 en E_6, sus pruebas mediante la técnica de NP pueden encontrarse en Torres (1985):

A).- TEOREMA DE WAINWRIGHT (1974).-

"Aceptamos que el espacio-tiempo satisface las condiciones:

i) Existe $\Gamma(K^c)$: congruencia nula geodésica sin deformación,

ii) K^r es un vector repetido de DP y eigenvector de R_{ab},

iii) R = constante (Wainwright sólo consideró el caso $R = 0$),

(I.24a)

iv) $*C_2 = *C_3 = 0$,

v) $C_2 \neq 0$ o/y $\phi_{11} \neq 0$ (con $n^r = K^r$) ,

entonces

$\Gamma(K^r)$ no tiene rotación" .

B).- TEOREMA DE KUNDT-THOMPSON (1962).-

"En lo que sigue cualesquiera dos incisos implica el tercero:

i) R tiene tipo $\neq$ I siendo n^r una dirección principal nula repetida,

ii) $\Gamma(n^r)$ es geodésica con deformación cero,

iii) 1.- $V^{ab}\ C_{abc}{}^{r}{}_{;r}\ V^{cp} = 0$ tipos II y D (I.24b)

2.- $V^{ab}\ C_{abc}{}^{r}{}_{;r} = 0$ tipo III

3.- $U^{ab}\ C_{abc}{}^{r}{}_{;r}\ V^{cp} = 0$ tipo N" .

Este resultado también fue obtenido por I. Robinson, A. Schild, J. Math. Phys. 4, 484 (1963).

C).- TEOREMA DE GOLDBERG-SACHS (1962).-

C1 : "Supongamos que en R_4 existe $\Gamma(n^c)$: congruencia nula geodésica con deformación cero tal que

$$R_{ab}\ n^a\ n^b = R_{ab}\ n^a\ m^b = R_{ab}\ m^a\ m^b = 0 \quad , \qquad (I.24c)$$

entonces R_4 es algebraicamente especial y n^r es un vector repetido de DP" ,

C2 : "Si el espacio-tiempo vacío tiene tipo $\neq$ I entonces la dirección principal nula repetida define una congruencia geodésica sin deformación" ,

(I.24d)

C3 : "Un R_4 vacío es algebraicamente especial si y sólo si contiene una congruencia nula geodésica sin deformación" .

(I.24e)

De hecho C3 es consecuencia de C1 y C2; los resultados (24c,d,e) están contenidos en (24b). Los teoremas expuestos relacionan la clasificación de Petrov (para obtener el tipo Petrov se necesitan las segundas derivadas de la métrica) con propiedades de congruencias nulas (carácter geodésico, deformación, rotación, etc., es decir, primeras derivadas del tensor métrico).

Por último, mostremos otro caso donde se involucren los operadores (20a): En (7e) tenemos el desarrollo NP para un tensor F_{ab} antisimétrico y totalmente arbitrario, ahora aceptemos que dicho tensor satisface la mitad de las "ecuaciones de Maxwell", a saber,

$$F_{ab;c} + F_{bc;a} + F_{ca;b} = 0 \quad , \tag{I.25a}$$

que al proyectar sobre la tetrada nula implica

$$\begin{aligned} &F_{(h)(\ell);(t)} + F_{(\ell)(t);(h)} + F_{(t)(h);(\ell)} + (\gamma^{p}{}_{ht} - \gamma^{p}{}_{th})\, F_{(\ell)(p)} + \\ &+ (\gamma^{p}{}_{t\ell} - \gamma^{p}{}_{\ell t})\, F_{(h)(p)} + (\gamma^{p}{}_{\ell h} - \gamma^{p}{}_{h\ell})\, F_{(t)(p)} = 0 \quad , \end{aligned} \tag{I.25b}$$

y al dar valores a $h\ell t$ obtenemos las

ECUACIONES I DE MAXWELL-RICCI

$$\begin{aligned} &(a)\quad \delta\gamma_2-\bar{\delta}\,\bar{\gamma}_2+\Delta\bar{\gamma}_1-\Delta\gamma_1 =\bar{\nu}\,\bar{\gamma}_0-\nu\gamma_0+2(\mu\gamma_1-\bar{\mu}\,\bar{\gamma}_1)+(\tau-2\beta)\gamma_2-(\bar{\tau}-2\bar{\beta})\bar{\gamma}_2 \quad , \\ &(b)\quad D\gamma_2-\bar{\delta}\gamma_1-\bar{\delta}\bar{\gamma}_1+\Delta\bar{\gamma}_0=-\lambda\gamma_0+(2\bar{\alpha}-\bar{\pi})\bar{\gamma}_0+2(\pi\gamma_1-\bar{\tau}\,\bar{\gamma}_1)+\bar{\sigma}\,\bar{\gamma}_2-(2\varepsilon-\rho)\gamma_2 \quad , \\ &(c)\quad D\bar{\gamma}_1-D\gamma_1+\bar{\delta}\gamma_0-\delta\bar{\gamma}_0=(2\alpha-\pi)\gamma_0-(2\bar{\alpha}-\bar{\pi})\bar{\gamma}_0+2(\bar{\rho}\,\bar{\gamma}_1-\rho\gamma_1)+\kappa\gamma_2-\bar{\kappa}\,\bar{\gamma}_2 \quad , \end{aligned} \tag{I.26}$$

les hemos anexado el nombre de Ricci porque aquí serán - importantes al estudiar R_4 en E_6. Por otro lado, sabe-- mos que (25a) implica la existencia del 4-potencial o - vector de Ricci (según sea el caso) A_r tal que:

$$F_{rc} = A_{c;r} - A_{r;c} \quad . \tag{I.27a}$$

equivalente a

$$F_{(p)(h)} = A_{(h);(p)} - A_{(p);(h)} + (\gamma^{c}{}_{ph} - \gamma^{c}{}_{hp})\, A_{(c)} \quad , \tag{I.27b}$$

que a su vez conduce a (recordar (2c)):

<u>ECUACIONES II DE MAXWELL-RICCI</u>

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\ \dot{\gamma}_0 = D\Theta_1 - \delta\Theta_4 + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon - \bar{\rho})\Theta_1 - \sigma\bar{\Theta}_1 + \kappa\Theta_3 + (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})\Theta_4 \ , \\
&\text{(b)}\ 2\gamma_1 = \bar{\delta}\Theta_1 - \delta\bar{\Theta}_1 + D\Theta_3 - \Delta\Theta_4 + (\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau} - \pi)\Theta_1 + (\bar{\alpha} - \beta - \tau - \bar{\pi})\bar{\Theta}_1 + \\
&\qquad + (\rho - \bar{\rho} + \varepsilon + \bar{\varepsilon})\Theta_3 + (\mu - \bar{\mu} + \gamma + \bar{\gamma})\Theta_4 \ , \qquad\qquad (I.28) \\
&\text{(c)}\ \gamma_2 = \bar{\delta}\Theta_3 - \Delta\bar{\Theta}_1 - \lambda\Theta_1 + (\bar{\gamma} - \gamma - \bar{\mu})\bar{\Theta}_1 + (\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\Theta_3 + \nu\Theta_4 \ .
\end{aligned}$$

En este capítulo hemos tratado de exponer lo más relevan te del formalimso de Newman-Penrose y que tenga utilidad en los capítulos posteriores, esto lleva la intención de que el presente trabajo sea auto-contenido en lo esencial.

CAPITULO II

ESPACIO-TIEMPO INMERSO EN E_5

INTRODUCCIÓN.

En Fuentes (1985), Fuentes-López (1985) y Ladino (1986) se realizó un estudio detallado del espacio-tiempo como una hipersuperficie de un 5-espacio pseudo-Euclideano, - ahí se expusieron resultados originales y se enfatizó la importancia del problema de la inmersión en relatividad general, así que en este Cap. nos limitaremos a resumir los principales conceptos, ecuaciones, teoremas,..., etc. para R_4 de clase uno y que tengan alguna relevancia para 4-espacio sumergidos en E_6. La Secc. 1 está dedicada a las versiones tensorial y NP de las Ecuaciones de Gauss y Codazzi (EGC) que debe satisfacer la segunda forma fundamental de R_4 respecto a E_5, el estar familiarizado con las propiedades y estructura de las EGC es un buen antecedente para el estudio de espacio-tiempos de clase dos (objetivo principal de nuestro trabajo). En la Secc. 2 se coleccionan diversos resultados para R_4 inmerso en E_5 (algunos de ellos también son válidos para R_n en E_{n+1}) - haciendo énfasis en los casos con fluido perfecto y campo electromagnético.

1. ECUACIONES DE GAUSS Y CODAZZI.

La segunda geometría intrínseca de R_n es generada por el tensor métrico g_{ab} (mediante él puede construirse el tensor de curvatura entre otras cosas) y cuando suponemos que el n-espacio está inmerso en E_{n+q} (espacio pseudo-Euclideano (n+q) dimensional) entonces es necesario introducir nuevos objetos geométricos, a saber, segundas formas fundamentales y vectores de Ricci, que describan este hecho, es decir, que cuantifiquen los aspectos "externos" de R_n respecto a su espacio receptor. De otra manera: en un problema usual de inmersión la geometría interna es dato y la externa es la incógnita a determinar, aunque ocasionalmente este enfoque se invierte para construir métricas mediante consideraciones de inmersión lo cual ha sido realizado por Karmarkar (1948), Sing-Pandey (1960) y Stephani (1967a,b) entre otros. Si R_n es sumergible en E_{n+q} y (n+q) es la mínima dimensión en que esto puede hacerse entonces decimos que R_n es de <u>clase q</u>, por ejemplo, si R_4 acepta inmersión en E_6 pero no en E_5 entonces este R_4 es de clase dos, este caso particular lo discutiremos en el próximo Capítulo; cuando q = 1 sólo existe una segunda forma fundamental b_{ij} que gobierna la geometría externa de nuestro espacio vía las Ecuaciones de Gauss y Codazzi (EGC), pero conforme q aumenta entonces crece el número de tensores b_{ij} acompañados de vectores de Ricci (para q = 2 aparecen dos segundas formas fundamentales y sólo un vector de Ricci) y esto a su vez produce nuevos grados de libertad que están a nuestra disposición y con los cuales podemos intentar explicar algunos fenómenos físicos como lo han propuesto Fronsdal (1965), Joseph (1965), Ne'eman (1965) y Phát (1971). Además, los avances que se obtengan en el problema de la in mersión no sólo benefician al campo gravitacional, por ejemplo, Barbashov-Nesterenko (1980) han aplicado las EGC en el análisis de modelos no-lineales (solitones, cuerdas, método inverso de dispersión, etc.); también es interesante mencionar que R.W. Brehme, W.E. Moore, Am.J. Phys. 37, 683 (1969) han mostrado el valor pedagógico de la técnica de inmersión en la enseñanza de relatividad general.

Cualquier R_n puede sumergirse local e isométricamente en E_m con $m = \frac{n(n+1)}{2}$, este teorema fue enunciado por L. Schlaefli, Annali di Mat. (2), 5, 170 (1871-73) y demostrado por M. Janet, Ann. Soc. Polon. Math. 5, 38 (1926) y E. Cartan, (revista anterior) 6, 1 (1927) (agradecemos al M. en C. G. González Padrón, Universidad de Konstanz, RFA, el envío de este artículo), por lo tanto, cualquier R_4 (espacio-tiempo) admite inmersión en E_{10} pero puede ocurrir (en realidad casi siempre sucede con la mayoría de las soluciones de las ecs. de Einstein) que también sea sumergible en E_r con $r < 10$, así uno de los problemas básicos del proceso de inmersión es la búsqueda del valor mínimo de $r = r_{mín.}$, entonces la clase de inmersión de R_4 es $(4-r_{mín})$, el concepto de "clase" se debe a G. Ricci, Annali di Mat. (2), 12, 135 (1883) y conduce a una caracterización invariante de R_4 alternativa a las clasificaciones de Petrov y Churchill-Plebański entre otras.

Aceptemos que q = clase de inmersión de un determinado espacio, entonces en Kramer-Stephani-MacCallum-Herlt (1980) págs. 356-358 encontramos los interesantes teoremas:

1.- "Si R_n es conformalmente plano entonces q es a lo más dos" ,

(II.1a)

el cual fue demostrado por H.W. Brinkmann, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 9. 1(1923) (el M. en C. G. González P. también nos envió este artículo), en particular, si un R_4 tipo O no es sumergible en E_5 entonces con seguridad admite inmersión en E_6, en la próxima Secc. aplicaremos este resultado a tres métricas de este tipo Petrov.

Los siguientes cinco teoremas conciernen al espacio-tiempo:

2.- "Si existe V^r no-nulo constante ($V^r{}_{;c} = 0$) entonces $q \leq 3$" ,

(II.1b)

por ejemplo, la métrica de Gödel (1949) indicada en (IV.10a) tiene el vector espacial unitario constante $e_{(3)a}$ (ver (IV.10c) así que por (1b) acepta inmersión en E_7.

3.- "Si está presente V^r nulo constante entonces $q \leq 4$" ,

(II.1c)

aquí recordemos una interesante proposición de Ladino (1986): El teorema de Taub (1984) nos dice que R_4 está asociado a campo electromagnético nulo o a radiación pura cuando tiene un vector nulo constante y como estos 4-espacios normalmente son sumergibles en E_5 o E_6 entonces existe gran probabilidad de que $q \leq 2$ en (1c), una manera de investigar esto es tratar de probar que la métrica general (para R_4 con V^r nulo constante) de Letelier (1970) siempre admite inmersión en E_6.

4.- "Si existen dos vectores linealmente independientes no-nulos constantes entonces $q \leq 1$" , (II.1d)

5.- "Si están presentes V^r no-nulo constante y K^r nulo fijo tal que $V^r K_r = 0$ entonces $q \leq 2$" , (II.1e)

6.- "Si existe un vector k_r de Killing $K_{r;s} + K_{s;r} = 0$ no-nulo normal entonces $q \leq 4$" , (II.f)

7.- "Si R_4 posee simetría esférica (entonces es tipo O ó D, ver (I.16a)) resulta que $q \leq 2$" ,

demostrado por J. Eiesland, Trans. Amer. Math. Soc. 27, 213 (1925), también consultar M. Matsumoto, S. Kitamura, J. Math. Kyoto Univ. 2, 97 (1962) pág. 97 y K.R. Karmarkar, Proc. Indian Acad. Sci. 27, 56 (1948): las métricas de Schwarzschild ($R_{ab} = 0$) y Reissner-Nordstrom (hoyo negro cargado) son de clase dos por su simetría esférica: la primera porque un espacio vacío no puede sumergirse en E_5 y la segunda porque viola un teorema de Collinson (1968b) que indicaremos en la próxima Sección, ver (12d).

De aquí en adelante nos limitaremos al caso $q = 1$; decimos que R_n está inmerso en E_{n+1} si existe el tensor segunda forma fundamental $b_{ij} = b_{ji}$ definida en R_n cumpliendo las EGC:

$$R_{ijkm} = \varepsilon_1 (b_{ik}\, b_{jm} - b_{im}\, b_{jk}) \qquad \text{Gauss} \qquad (\text{II}.2a)$$

$$b_{ij;k} = b_{ik;j} \quad i,j,\ldots = 1,2,\ldots n \qquad \text{Codazzi} \qquad (\text{II}.2b)$$

donde ε_1 es el indicador de la normal a R_n:

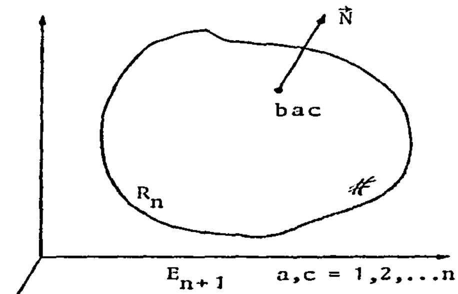


Fig. 1.- Espacio Riemanniano de clase uno.

Sólo analizaremos los casos $\varepsilon_1 = \pm 1$, es decir, se descartan las hipersuperficies nulas ($\varepsilon_1 = 0$), ver Bonnor (1972); cuando R_n es dato entonces las incógnitas son b_{ac} y ε_1 si la inmersión se efectúa vía (2): Para algunas métricas no es necesario calcular el tensor de curvatura sino que es más simple buscar funciones z^j, $j = 1,\ldots, n+1$ tales que el ds^2 en cuestión pueda escribirse como una suma algebraica de los $(dz^j)^2$, este enfoque lo aplicamos en (III.26c,e,36b, 40b).

El teorema de Thomas (1936) nos manifiesta cuándo la ec. de Codazzi es consecuencia de la ec. de Gauss:

"Si $\det(b^r{}_c) \neq 0$ y $n > 3$ entonces (2a) implica (2b)" ,

(II.3a)

cuando $n = 4$ tenemos que $\det(b^i{}_j) = - K_2/24$ donde K_2 es el invariante de Lanczos definido en (I.12b) y el cual es la base del principio variacional (IV.1); (3a) se debe a las identidades de Bianchi (I.22a) del tensor de Riemann. En Goenner (1977) puede encontrarse un estudio muy completo sobre la interdependencia de las ecs. de Gauss, Codazzi y Ricci para clase de inmersión arbitraria.

En el resto de nuestro trabajo sólo consideraremos el caso $n = 4$ que corresponde al espacio-tiempo de relatividad general; dado un R_4, (3a) nos dice que primero debe calcularse K_2 para así conocer si será necesaria (2b). Ahora el siguiente paso consiste en obtener una relación que en determinadas circunstancias permita obtener a b_{ij}, esto fue realizado por Goenner (1973) y González-Piña (1981):

$$p\, b_{ij} = \frac{K_2}{48} g_{ij} - \frac{1}{2} R_{imnj} G^{mn} \equiv B_{ij} \quad , \quad p = \frac{\epsilon_1}{3} b^{ar} G_{ar} \quad , \tag{II.3b}$$

por lo tanto

$$p^2 = \frac{\epsilon_1}{3} B^{ar} G_{ar} = - \frac{\epsilon_1}{6} \left(\frac{R}{24} K_2 + R_{imnj} G^{ij} G^{mn}\right) \geq 0 \quad , \tag{II.3c}$$

así vemos que p sólo depende de la geometría interna de R_4; después de calcular K_2 es conveniente obtener p con (3c), si $p \neq 0$ entonces de (3b) despejamos a b_{ij} en función de la geometría intrínseca del espacio-tiempo y decimos que R_4 tiene <u>rigidez intrínseca</u>, como ejemplo, los 4-espacios de clase uno con campo electromagnético no -

poseen esta rigidez, ver Collinson (1968b) y Goenner (1976) pág. 18. En Becerril-López (1983) se expuso una deducción simple de (3b): con el método de Takeno (1954) se escribió la ecuación característica de b_{ac} (la ec. resultante fue compatible con la obtenida por Lovelock (1971)) y en ella bastó sustituir (I.12a,II.2a) para obtener (3b,c). Fuentes-López (1985) utilizando un teorema de Lovelock (1972) probaron que cuando $p \neq 0$ la segunda forma fundamental adquiere la estructura

$$b_{ij} = A\, R_{ij} - \frac{1}{6}\,(AR + 2B)\, g_{ij} \quad \text{con } A,B \text{ constantes} \quad , \qquad \text{(II.3d)}$$

debe enfatizarse que (II.3d) es aplicable cuando p y K_2 no se anulan; con (2b,3d) es inmediato demostrar que el tensor conformal satisface las identidades de Bianchi, espacios con esta última propiedad han sido estudiados por P. Szekeres, Proc. Roy. Soc. London A274, 206 (1963) y Kozameh-Newman-Tod (1985) entre otros. J. López, G. Ovando, A. Torres, Rep. de invest. No. 145 DCBI-UAM-A (1985) emplearon (3a,...,d) y el teorema de Kundt-Thompson (1962), ver (I.24b), para obtener el resultado original:

"Si R_4 satisface:

$$K_2 \neq 0 \quad y \quad (R\, K_2 + 24\, R_{imnj}\, G^{ij}\, G^{mn}) \neq 0 \; .$$

entonces (II.3e)

R_4 es algebraicamente especial con n^r dirección principal nula repetida $\Longleftrightarrow$ $\Gamma(n^r)$ tiene $\kappa = \sigma = 0$" .

De (I.11a, II.2a) es evidente que

$$*C_2 = *C_3 = 0 \qquad \text{(II.4a)}$$

para 4-espacios de clase uno, por lo tanto

$$*R^{cjkm} R_{ijkm} \equiv \frac{*C_2}{4} \delta^c{}_i = 0 \quad . \qquad \text{(II.4b)}$$

Por otro lado, la identidad de Lanczos (I.12c) puede escribirse en términos del dual simple:

$$\frac{K_2}{4} \delta^i{}_a = \frac{1}{2} \eta^{ijrc} *R^{km}{}_{rc} R_{ajkm}$$

que al multiplicarse por η_{ipqt} conduce a una relación general para todo R_4:

$$\frac{K_2}{4} \eta_{apqt} = *R^{km}{}_{qt} R_{pakm} + *R^{km}{}_{tp} R_{qakm} + *R^{km}{}_{pq} R_{takm} \quad . \qquad \text{(II.4c)}$$

Si el espacio-tiempo es de clase uno entonces la ec. de Gauss permite demostrar que los tres términos del miembro derecho de (4c) son iguales entre sí, en consecuencia

$$*R^{km}{}_{qt} R_{kmpa} = - \frac{K_2}{12} \eta_{qtpa} \qquad \text{(II.4d)}$$

que a su vez implica una expresión semejante a (4b):

$$*R^{kmq}{}_{t}\ R_{kmqa} = 0 \quad . \qquad \text{(II.4e)}$$

La relación (4d) es más fuerte que (2.6) de Collinson - (1968b); además al contraer (4d) con $\frac{1}{2}\,n^{qtij}$ resulta la identidad (5) de Yakupov (1968). Si proyectamos (4d) sobre la tetrada nula obtenemos catorce ecuaciones tipo NP que indicamos en la próxima página y que imponen restricciones sobre el tensor de curvatura:

IDENTIDADES DE COLLINSON

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad \psi_0\ \phi_{22}-2\psi_1\ \phi_{12}+(\psi_2-\overline{\psi}_2)\phi_{02}+2\overline{\psi}_3\ \phi_{01}-\overline{\psi}_4\ \phi_{00}=0 ,\\
&(b)\quad -\psi_0\ \psi_3\ +\psi_1(\psi_2+\tfrac{R}{6})\ +\phi_{00}\ \phi_{12}-2\phi_{01}\ \phi_{11}+\phi_{02}\ \overline{\phi}_{01}=0 ,\\
&(c)\quad \psi_1\ \psi_4\ -\psi_3(\psi_2+\tfrac{R}{6})\ -\overline{\phi}_{01}\ \phi_{22}-\overline{\phi}_{02}\ \phi_{12}+2\phi_{11}\ \overline{\phi}_{12}=0 ,\\
&(d)\quad -\psi_0\ \overline{\phi}_{12}+2\psi_1\ \phi_{11}+\overline{\psi}_1\ \phi_{02}-(\psi_2+2\overline{\psi}_2)\phi_{01}+\overline{\psi}_3\ \phi_{00}=0 ,\\
&(e)\quad -\overline{\psi}_1\ \phi_{22}+(\psi_2+2\overline{\psi}_2)\overline{\phi}_{12}-2\psi_3\ \phi_{11}-\overline{\psi}_3\ \overline{\phi}_{02}+\psi_4\ \phi_{01}=0 ,\\
&(f)\quad \psi_0\ \overline{\phi}_{02}-\overline{\psi}_0\ \phi_{02}-2\psi_1\ \overline{\phi}_{01}+2\overline{\psi}_1\ \phi_{01}+(\psi_2-\overline{\psi}_2)\phi_{00}=0 ,\\
&(g)\quad (\overline{\psi}_2-\psi_2)\phi_{22}+2\psi_3\ \phi_{12}-2\overline{\psi}_3\ \overline{\phi}_{12}-\psi_4\ \phi_{02}+\overline{\psi}_4\ \overline{\phi}_{02}=0 ,\\
&(h)\quad \psi_0(-\psi_2+\tfrac{R}{12})+\psi^2{}_1+\phi_{00}\ \phi_{02}-\phi^2{}_{01}=0 , \qquad \text{(II.5)}\\
&(i)\quad \psi_4(-\psi_2+\tfrac{R}{12})+\psi^2{}_3+\ \overline{\phi}_{02}\ \phi_{22}-\overline{\phi}^2{}_{12}=0 ,\\
&(j)\quad -(\psi_1+\phi_{01})(\psi_3+\overline{\phi}_{12})+(\overline{\psi}_1+\overline{\phi}_{01})(\overline{\psi}_3+\phi_{12})+(\psi_2+\overline{\psi}_2+2\phi_{11}+\tfrac{R}{12})(\psi_2-\overline{\psi}_2)=0 ,\\
&(k)\quad (\psi_1-\phi_{01})(-\psi_3+\overline{\phi}_{12})-(\overline{\psi}_1-\overline{\phi}_{01})(-\overline{\psi}_3+\phi_{12})+(\psi_2+\overline{\psi}_2-2\phi_{11}+\tfrac{R}{12})(\psi_2-\overline{\psi}_2)=0 ,\\
&(\ell)\quad -\psi_0\ \psi_4-2\overline{\psi}_1\ \overline{\psi}_3+\overline{\psi}^2{}_2-2\psi_2\ \overline{\psi}_2+\tfrac{R}{6}\ \psi_2+(\psi_2+\overline{\psi}_2+2\phi_{11}+\tfrac{R}{12})\cdot\\
&\qquad \cdot(\psi_2+\overline{\psi}_2-2\phi_{11}+\tfrac{R}{12})+\phi_{00}\ \phi_{22}+2\overline{\phi}_{01}\ \phi_{12}+\overline{\phi}_{02}\ \phi_{02}-\tfrac{R^2}{144}=0 ,\\
&(m)\quad -2\psi_1\ \psi_3-2\overline{\psi}_1\ \overline{\psi}_3+(\psi_2-\overline{\psi}_2)^2+(\psi_2+\overline{\psi}_2+2\phi_{11}+\tfrac{R}{12})(\psi_2+\overline{\psi}_2-2\phi_{11}+\tfrac{R}{12})\ +\\
&\qquad\qquad +2\phi_{01}\ \overline{\phi}_{12}+2\overline{\phi}_{01}\ \phi_{12}=-\tfrac{K_2}{12} ,\\
&(n)\quad -\psi_0\ \psi_4+2\psi_1\ \psi_3-(\psi_2-\tfrac{R}{12})^2+\phi_{00}\ \phi_{22}-2\phi_{01}\ \overline{\phi}_{12}+\phi_{02}\ \overline{\phi}_{02}=\tfrac{K_2}{12} ,
\end{aligned}
$$

Mostremos algunas aplicaciones de (5):

a).- La métrica (IV.17a):

$$ds^2 = f^{4/3}(dx'^2+dx^{2^2}) + f^2\, dx^{3^2} - dx^{4^2} \ , \ f = kx^4 + 1 \ , \ k = \text{cte.} \tag{II.6a}$$

es tipo O, entonces por (1a) sí es sumergible en E_6, ahora veamos cómo las identidades de Collinson impiden su inmersión en E_5, en efecto, sus cantidades de NP se encuentran en (IV.17b) las cuales contradicen (5ℓ), por lo tanto, (6a) es de clase dos y su inmersión explícita está dada en (III.26e,f).

b).- La solución (IV.20a) de Kaigorodov (1963) no acepta inmersión en E_5 porque sus cantidades de NP (V.20b) contradicen a (5i), hasta donde tenemos noticia no se conoce la clase de esta métrica.

c).- El espacio (IV.16a) tipo O de Narlikar-Karmarkar (1949) es de clase uno ó dos dependiendo de la función $A(x'-x^4)$ que en ella interviene, por ejemplo, si $A = x' - x^4$ entonces (IV.16b) violan (5) así que su clase es dos.

d).- La métrica

$$ds^2 = -\frac{K^{-1}}{2}\, dz^2 + e^{4z}\, dy^2 + 2e^{-2z}\, dx^2 - 4e^z\, dx\, dy - 8e^{2z}\, dy\, dz - 2e^{2z}\, du\, dy \ , \ K < 0. \tag{II.6b}$$

es tipo II con cantidades de NP ($x^1=x$, $z^2=y$, $x^3=z$, $x^4=u$):

$$(m^a)=(\frac{ie^z}{2},0,\sqrt{-k},-4\sqrt{-k}-i) \ , \ (\ell^a) = (0,\sqrt{2}\ e^{-2z},0,\frac{1}{\sqrt{2}}) \ , \ i = \sqrt{-1} \ ,$$

$$(n^a) = (0,0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}) \ , \ \kappa = \sigma = \rho = \varepsilon = \lambda = \beta = 0 \ , \ R = -8K \ ,$$

$$\tau = \frac{\nu}{2} = -\pi = -\alpha = -\sqrt{-K} \ , \quad \gamma = \frac{\mu}{2} = -i\sqrt{-\frac{K}{2}} \ , \qquad \text{(II.6c)}$$

$$\psi_0 = \psi_1 = 0 \ , \ \psi_2 = -\frac{2K}{3} \ , \ \psi_3 = i\sqrt{2}\ K \ , \ \psi_4 = 10K \ ,$$

$$\phi_{00} = \phi_{01} = 0 \ , \ \phi_{02} = -2K \ , \ \phi_{11} = 0 \ , \ \phi_{12} = -2i\sqrt{2}\ K \ , \ \phi_{22} = -4K,$$

las cuales contradicen (5e) por lo que este espacio no es sumergible en E_5, no conocemos su clase de inmersión.

Mediante un proceso semejante a (III.3,...,6) las EGC pueden transcribirse al formalismo de NP, así resultan dos conjuntos de ecuaciones que exponemos en las siguientes dos páginas:

ECUACIONES DE GAUSS PARA R_4 EN E_5

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad \psi_0 = 4\varepsilon_1(\underset{1}{\phi}_{02}\,\underset{1}{\phi}_{00} - \underset{1}{\phi}_{01}{}^2) ,\\
&(b)\quad \psi_1 + \phi_{01} = \varepsilon_1\left[4(\underset{1}{\phi}_{02}\,\overline{\underset{1}{\phi}}_{01} - \underset{1}{\phi}_{01}\,\underset{1}{\phi}_{11}) - \tfrac{1}{2}\,\underset{1}{b}\,\underset{1}{\phi}_{01}\right] ,\\
&(c)\quad \psi_1 - \phi_{01} = \varepsilon_1\left[4(\underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{1}{\phi}_{00} - \underset{1}{\phi}_{01}\,\underset{1}{\phi}_{11}) + \tfrac{1}{2}\,\underset{1}{b}\,\underset{1}{\phi}_{01}\right] ,\\
&(d)\quad \psi_2 + \overline{\psi}_2 + 2\phi_{11} + \frac{R}{12} = \varepsilon_1\left[4(\underset{1}{\phi}_{02}\,\overline{\underset{1}{\phi}}_{02} - \underset{1}{\phi}{}^2_{11}) - \underset{1}{b}\,\underset{1}{\phi}_{11} - \tfrac{1}{16}\,\underset{1}{b}{}^2\right] ,\\
&(e)\quad \psi_2 + \overline{\psi}_2 - 2\phi_{11} + \frac{R}{12} = \varepsilon_1\left[4(\underset{1}{\phi}_{22}\,\underset{1}{\phi}_{00} - \underset{1}{\phi}{}^2_{11}) + \underset{1}{b}\,\underset{1}{\phi}_{11} - \tfrac{1}{16}\,\underset{1}{b}{}^2\right] ,\\
&(f)\quad -\psi_2 + \frac{R}{12} = \varepsilon_1\left[4(\underset{1}{\phi}{}^2_{11} - \overline{\underset{1}{\phi}}_{01}\,\underset{1}{\phi}_{12}) - \tfrac{1}{16}\,\underset{1}{b}{}^2\right] ,\\
&(g)\quad -\psi_3 - \overline{\phi}_{12} = \varepsilon_1\left[4(\underset{1}{\phi}_{11}\,\overline{\underset{1}{\phi}}_{12} - \overline{\underset{1}{\phi}}_{02}\,\underset{1}{\phi}_{12}) + \tfrac{1}{2}\,\underset{1}{b}\,\overline{\underset{1}{\phi}}_{12}\right] ,\\
&(h)\quad -\psi_3 + \overline{\phi}_{12} = \varepsilon_1\left[4(\underset{1}{\phi}_{11}\,\overline{\underset{1}{\phi}}_{12} - \overline{\underset{1}{\phi}}_{01}\,\underset{1}{\phi}_{22}) - \tfrac{1}{2}\,\underset{1}{b}\,\overline{\underset{1}{\phi}}_{12}\right] ,\\
&(i)\quad \psi_4 = 4\varepsilon_1(\overline{\underset{1}{\phi}}_{02}\,\underset{1}{\phi}_{22} - \overline{\underset{1}{\phi}}_{12}{}^2) ,\\
&(j)\quad -\phi_{00} = \varepsilon_1\left[4(\underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{1}{\phi}_{00} - \underset{1}{\phi}_{01}\,\overline{\underset{1}{\phi}}_{01}) + \tfrac{1}{2}\,\underset{1}{b}\,\underset{1}{\phi}_{00}\right] ,\\
&(k)\quad -\phi_{02} = \varepsilon_1\left[4(\underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{1}{\phi}_{01} - \underset{1}{\phi}_{02}\,\underset{1}{\phi}_{11}) + \tfrac{1}{2}\,\underset{1}{b}\,\underset{1}{\phi}_{02}\right] ,\\
&(\ell)\quad \phi_{22} = \varepsilon_1\left[4(\overline{\underset{1}{\phi}}_{12}\,\underset{1}{\phi}_{12} - \underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{1}{\phi}_{22}) - \tfrac{1}{2}\,\underset{1}{b}\,\underset{1}{\phi}_{22}\right] ,
\end{aligned}
\tag{II.7}
$$

ECUACIONES DE CODAZZI PARA R_4 DE CLASE UNO

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad D\underset{1}{\phi}_{11}-\bar{\delta}\underset{1}{\phi}_{01}+\frac{1}{8}\,D\underset{1}{b}=-\bar{\mu}\underset{1}{\phi}_{00}+(\pi-2\alpha)\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\pi}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}+\bar{\sigma}\underset{1}{\phi}_{02}+2\rho\underset{1}{\phi}_{11}-\bar{\kappa}\underset{1}{\phi}_{12}-\kappa\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}\ ,\\
&(b)\quad D\underset{1}{\phi}_{11}-\Delta\underset{1}{\phi}_{00}-\frac{1}{8}\,D\underset{1}{b}=-2(\gamma+\bar{\gamma})\underset{1}{\phi}_{00}+(2\bar{\tau}+\pi)\underset{1}{\phi}_{01}+(2\tau+\bar{\pi})\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}-\bar{\kappa}\underset{1}{\phi}_{12}-\kappa\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}\ ,\\
&(c)\quad \Delta\underset{1}{\phi}_{11}-D\underset{1}{\phi}_{22}-\frac{1}{8}\,\Delta\underset{1}{b}=\nu\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\nu}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}-(\bar{\tau}+2\pi)\underset{1}{\phi}_{12}-(\tau+2\bar{\pi})\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+2(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\underset{1}{\phi}_{22}\ ,\\
&(d)\quad \Delta\underset{1}{\phi}_{11}-\bar{\delta}\underset{1}{\phi}_{12}+\frac{1}{8}\,\Delta\underset{1}{b}=\nu\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\nu}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}-\lambda\underset{1}{\phi}_{02}-2\bar{\mu}\underset{1}{\phi}_{11}+(2\bar{\beta}-\bar{\tau})\underset{1}{\phi}_{12}-\tau\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+\rho\underset{1}{\phi}_{22}\ ,\\
&(e)\quad \delta\underset{1}{\phi}_{11}-\bar{\delta}\underset{1}{\phi}_{02}+\frac{1}{8}\,\delta\underset{1}{b}=(\mu-2\bar{\mu})\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\lambda}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}+2(\bar{\beta}-\alpha)\underset{1}{\phi}_{02}+(2\rho-\bar{\rho})\underset{1}{\phi}_{12}-\sigma\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}\ ,\\
&(f)\quad \delta\underset{1}{\phi}_{11}-D\underset{1}{\phi}_{12}-\frac{1}{8}\,\delta\underset{1}{b}=\mu\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\lambda}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}-\pi\underset{1}{\phi}_{02}-2\bar{\pi}\underset{1}{\phi}_{11}+(2\bar{\varepsilon}-\bar{\rho})\underset{1}{\phi}_{12}-\sigma\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+\kappa\underset{1}{\phi}_{22}\ ,\\
&(g)\quad \delta\underset{1}{\phi}_{11}-\Delta\underset{1}{\phi}_{01}-\frac{1}{8}\,\delta\underset{1}{b}=-\bar{\nu}\underset{1}{\phi}_{00}+(\mu-2\gamma)\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\lambda}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}+\bar{\tau}\underset{1}{\phi}_{02}+2\tau\underset{1}{\phi}_{11}-\bar{\rho}\underset{1}{\phi}_{12}-\sigma\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}\ ,\\
&(h)\quad D\underset{1}{\phi}_{02}-\delta\underset{1}{\phi}_{01}=-\bar{\lambda}\underset{1}{\phi}_{00}+2(\bar{\pi}-\beta)\underset{1}{\phi}_{01}+(\bar{\rho}+2\varepsilon-2\bar{\varepsilon})\underset{1}{\phi}_{02}+2\sigma\underset{1}{\phi}_{11}-2\kappa\underset{1}{\phi}_{12}\ ,\\
&(i)\quad \Delta\underset{1}{\phi}_{02}-\delta\underset{1}{\phi}_{12}=2\bar{\nu}\underset{1}{\phi}_{01}+(2\gamma-2\bar{\gamma}-\mu)\underset{1}{\phi}_{02}-2\bar{\lambda}\underset{1}{\phi}_{11}+2(\bar{\alpha}-\tau)\underset{1}{\phi}_{12}+\sigma\underset{1}{\phi}_{22}\ ,\\
&(j)\quad \delta\underset{1}{\phi}_{22}-\Delta\underset{1}{\phi}_{12}=-\nu\underset{1}{\phi}_{02}-2\bar{\nu}\underset{1}{\phi}_{11}+2(\mu+\bar{\gamma})\underset{1}{\phi}_{12}+2\bar{\lambda}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+(\tau-2\bar{\alpha}-2\beta)\underset{1}{\phi}_{22}\ ,\\
&(k)\quad \delta\underset{1}{\phi}_{00}-D\underset{1}{\phi}_{01}=(2\bar{\alpha}+2\beta-\bar{\pi})\underset{1}{\phi}_{00}-2(\bar{\rho}+\varepsilon)\underset{1}{\phi}_{01}-2\sigma\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}+\bar{\kappa}\underset{1}{\phi}_{02}+2\kappa\underset{1}{\phi}_{11}\ ,
\end{aligned}
\tag{II.8}
$$

Con la ecuación (2a) de Gauss es fácil probar que:

$$R^{q}{}_{p}\, b_{qc} - R^{q}{}_{c}\, b_{qp} = 0 \quad , \tag{II.9a}$$

$$*C^{ijkr}\, b_{jk} = 0 \tag{II.9b}$$

que al proyectarlas sobre la tetrada nula se generan las - relaciones:

$$\text{(a)}\ -\phi_{22}\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\phi}_{12}\underset{1}{\phi}_{02}+2\phi_{12}\underset{1}{\phi}_{11}-2\phi_{11}\underset{1}{\phi}_{12}-\phi_{02}\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+\phi_{01}\underset{1}{\phi}_{22}=0 \quad ,$$

$$\text{(b)}\ \phi_{12}\underset{1}{\phi}_{00}-\phi_{02}\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}+2\phi_{01}\underset{1}{\phi}_{11}-2\phi_{11}\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\phi}_{01}\underset{1}{\phi}_{02}-\phi_{00}\underset{1}{\phi}_{12}=0 \quad ,$$

$$\text{(c)}\ \bar{\phi}_{02}\underset{1}{\phi}_{02}-\phi_{02}\underset{1}{\bar{\phi}}_{02}+2\phi_{12}\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}-2\bar{\phi}_{01}\underset{1}{\phi}_{12}+\phi_{00}\underset{1}{\phi}_{22}-\phi_{22}\underset{1}{\phi}_{00}=0 \quad ,$$

$$\text{(d)}\ \bar{\psi}_4\underset{1}{\phi}_{00}-2\bar{\psi}_3\underset{1}{\phi}_{01}+(\bar{\psi}_2-\psi_2)\underset{1}{\phi}_{02}+2\psi_1\underset{1}{\phi}_{12}-\psi_0\underset{1}{\phi}_{22}=0 \quad ,$$

$$\text{(e)}\ \psi_4\underset{1}{\phi}_{02}-\bar{\psi}_4\underset{1}{\bar{\phi}}_{02}-2\psi_3\underset{1}{\phi}_{12}+2\bar{\psi}_3\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+(\psi_2-\bar{\psi}_1)\underset{1}{\phi}_{22}=0 \quad , \tag{II.10}$$

$$\text{(f)}\ (\bar{\psi}_2-\psi_2)\underset{1}{\phi}_{00}-2\bar{\psi}_1\underset{1}{\phi}_{01}+2\psi_1\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}+\bar{\psi}_0\underset{1}{\phi}_{02}-\psi_0\underset{1}{\bar{\phi}}_{02}=0 \quad ,$$

$$\text{(g)}\ -\bar{\psi}_4\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}+\psi_3\underset{1}{\phi}_{02}+2\bar{\psi}_3\underset{1}{\phi}_{11}-(\bar{\psi}_2+2\psi_2)\underset{1}{\phi}_{12}+\psi_1\underset{1}{\phi}_{22}=0 \quad ,$$

$$\text{(h)}\ \bar{\psi}_3\underset{1}{\phi}_{00}-(\psi_2+2\bar{\psi}_2)\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\psi}_1\underset{1}{\phi}_{02}+2\psi_1\underset{1}{\phi}_{11}-\psi_0\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}=0 \quad ,$$

$$\text{(i)}\ -\psi_3\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\psi}_3\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}+2(\psi_2-\bar{\psi}_2)\underset{1}{\phi}_{11}+\bar{\psi}_1\underset{1}{\phi}_{11}-\psi_1\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}=0 \quad ,$$

(10a,b,c) contienen la misma información que (9a), y (10d,...,i) equivalen a (9b).

La métrica (IV.21b):

$$ds^2 = -2\,dx^1\,dx^4 + \mathrm{Sen}^2\,x^4(dx^{2^2} + dx^{3^2}) \qquad (II.11a)$$

es tipo O, entonces por (1a) con seguridad puede meterse en E_6, demostremos que no admite inmersión en E_5: Sus cantidades de NP nos quedan ($K_2 = p = 0$):

$$(m^a) = \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{Sen}x^4}(0,1,-i,0)\ ,\ (\ell^a) = (0,0,0,1)\ ,\ (n^a) = (1,0,0,0)\ ,$$

$$\mu = \mathrm{ctg}\,x^4 \text{ y los demás coef. de espín se anulan} \qquad , \qquad (II.11b)$$

$$\psi_a = 0\ ,\ a = 0,\ldots,4\ ,\ R = 0\ ,\ \phi_{ab} = 0 \text{ excepto } \phi_{22} = -1\ .$$

Entonces de (10) tenemos $\underset{1}{\phi}_{01} = \underset{1}{\phi}_{00} = 0$; ahora multiplicamos (7$\ell$) por $\overline{\underset{1}{\phi}}_{02}$ y se llega a contradicción con las restantes ecs. de Gauss, por lo tanto (11a) es de clase dos.

2. RESUMEN DE RESULTADOS BÁSICOS PARA R_4 DE CLASE UNO.

Esta Sección será muy breve porque sólo tiene la finalidad de exponer algunos teoremas de interés para espacio-tiempos inmersos en E_5, se considerarán los casos vacío, con campo electromagnético y fluído perfecto, a).- E. Kasner, Am. J. Math. 43, 126 (1921) fue el primero en probar que

"Ningún R_4 vacío es sumergible en E_5" , (II.12a)

los autores Szekeres (1966a) y Fuentes-López (1985) (éstos últimos apoyándose en la densidad gravitacional de Synge (1957) dieron otras demostraciones más simples de (12a). El espacio vacío tipo I de Petrov (1962):

$$ds^2 = e^f\left[\mathrm{Cos}(\sqrt{3}f)\, dx'^2 - 2\,\mathrm{Sen}(\sqrt{3}f)\, dx'\, dx^4 - \mathrm{Cos}(\sqrt{3}f)\, dx^{4^2}\right] + \qquad \text{(II.12b)}$$

$$+ dx^{2^2} + e^{-2f}\, dx^{3^2} , \quad f = k\, x^2 , \quad k = \text{cte.}$$

no está inmerso en E_5 por (12a), se desconoce su clase de inmersión.

b).- Szekeres (1966a) obtuvo que:

"El modelo de DeSitter es el único R_4 de Einstein (con $R \neq 0$) de clase uno" , (II.12c)

es decir, bajo (I.6c) R_4 es sumergible en E_5 si y sólo si es de curvatura constante (este espacio fue estudiado por González (1981) y Ladino (1986), y posee rigidez intrínseca).

c).- De acuerdo a Collinson (1968b):

"R_4 debe ser tipo N con tensor de Faraday nulo" ,
(II.12d)

cuando el espacio-tiempo está inmerso en E_5 en presencia de un campo de Maxwell. La solución (V.14a) de Bertotti (1959) puede ser conformalmente plana ó tipo D, entonces por (12d) no es de clase uno; cuando es tipo O, por (1a) admite inmersión en E_6, pero no conocemos la clase para el caso tipo D.

d.- La técnica de inmersión es útil en la construcción de nuevas soluciones a las ecuaciones de Einstein, de esta manera Stephani (1967a,b,1968) pudo resolver los tres siguientes problemas:

1.- "Encontrar todas las soluciones de las ecs. de Einstein-Maxwell que sean tipo O",
(II.12e)

2.- "Determinar todas las métricas tipo O con fluído perfecto" ,
(II.12f)

3.- "Obtener todos los elementos de línea tipo D con fluído perfecto y aceleración cero de materia" .
(II.12g)

En relación a fluídos perfectos conviene recordar el teorema de Szekeres (1966b), también ver Greenberg (1972), a saber

"No existen fluídos perfectos incoherentes (presión cero) tipo N que satisfagan las ecs. de Einstein sin constante cosmológica" .
(II.12h)

e).- Szekeres (1966a) probó los teoremas:

"Si R_4 con fluído perfecto es de clase uno entonces el fluído no debe rotar"

(II.12i)

y

"Si R_4 está inmerso en E_5 con fluído perfecto y presión cero entonces el espacio-tiempo es de Friedmann (tipo O)" ,

(II.12j)

en particular, cualesquiera de estos resultados impide que la métrica de Gödel (1949) sea sumergible en E_5.

f).- Barnes (1974) empleó la ecuación de Gauss (así que su estudio es totalmente algebraico) para investigar la relación existente entre las clasificaciones de Petrov (tensor conformal) y Churchill-Plebañski (tensores de Ricci y segunda forma fundamental), en la Tabla II de la pág. 152 de su artículo se resumen los correspondientes resultados y como una aplicación de éstos demuestra que

"Todo fluído perfecto de clase uno es tipo O ó D y b_{ac} sólo puede ser $[1(111)]$ ó $[11(11)]$ respectivamente" ,

(II.12k)

y obtuvo tales métricas; en consecuencia, las soluciones tipo III de Allnutt (1981) y tipo II de Bonnor-Davidson (1985) no admiten inmersión en E_5 debido a (12k). Si el estudio de Barnes se refina con la ec. de Codazzi pudiera ocurrir que se eliminaran algunas de las posibilidades que él indica en la Tabla II; también se podrían combinar (12k) con las detalladas investigaciones que Wainwright (1970,74a,b,77) y Carminati-Wainwright (1985) han realizado sobre fluídos perfectos en espacios-curvos.

g).- K. Rao, Gen. Relat. Grav. 3, 211 (1971) estudió fluídos perfectos sin la constante cosmológica y obtuvo dos teoremas, a saber:

1.- "Todo R_4 tipo O estático con simetría esférica de un fluído perfecto es de clase uno" , (II.12ℓ)

a esto se debe que la solución interior de Schwarzschild sea sumergible en E_5,

y su inverso:

2.- "Un R_4 estático de un fluído perfecto con simetría esférica y ecuación de estado (densidad) = 3(presión es tipo O y de clase uno" , (II.12m)

R.S. Tikekar, Curr. Sci. 39, 460 (1970) construyó una métrica cumpliendo (12m).

h).- Por ahora nadie ha publicado métricas explícitas de clase uno y tipos Petrov I, II ó III, este es un problema abierto que amerita un análisis cuidadoso. Sin embargo, si aceptamos que existe un R_4 tipo III inmerso en E_5 entonces Ladino (1986) pág. 40 logró probar que:

"Si un espacio-tiempo de clase uno es tipo III entonces la congruencia nula repetida de Debever-Penrose es geodésica y carece de rotación y deformación" ,

(II.12n)

en la solución tipo III de Allnut (1981) la congruencia nula asociada al vector repetido de DP sí se deforma, así que por (12n) no puede sumergirse en E_5.

Existe mucha literatura sobre el problema de la inmersión en relatividad general y en base a ello podemos afirmar que los espacio-tiempos de clase uno están casi completamente estudiados, así que debemos concentrarnos en el caso de R_4 sumergido en E_6 y E_7 donde aún es posible obtener nuevos e importantes resultados.

CAPITULO III

R_4 DE CLASE DOS

INTRODUCCIÓN.

Aquí nos dedicamos al estudio de espacio-tiempos que aceptan inmersión local e isométrica en E_6, es decir, 4-espacios de clase dos. Al concebir a R_4 como un subespacio de un espacio plano 6-dimensional aparecen nuevos objetos tensoriales (segundas formas fundamentales y vector de Ricci) que enriquecen la geometría Riemanniana ofreciendo así la posibilidad de que algún campo físico pueda interpretarse en términos de ellos, por ahora desafortunadamente no ha cristalizado dicha esperanza ya que ha sido imposible asignar de manera natural algún significado a las cantidades que gobiernan la geometría extrínseca de R_4, a pesar de esto, es indudable el valor del proceso de inmersión porque éste combina en forma armoniosa temas tales como las clasificaciones de Petrov y Churchill-Plebański, soluciones exactas, simetrías, cálculo de Newman-Penrose (NP), cinemática de congruencias temporales y nulas, etc. En la Secc. 1 se exponen las Ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci (EGCR) para R_4 sumergido en E_6 en sus formas tensorial y de NP, en la Secc. 2 éstas se analizan para generar condiciones necesarias algebraicas que todo espacio-tiempo de clase dos debe cumplir, algunas de estas condiciones son muy conocidas pero otras son originales. En la Secc. 3 se utiliza el material de las Seccs. anteriores para estudiar R_4 vacío lo cual conduce a los teoremas de Collinson (1966), además, se ofrece una prueba tipo NP del resultado de Yakupov (1973) publicado sin demostración, las conclusiones se aplican a diversas métricas. En la Secc. 4 las investigaciones de Collinson se generalizan a espacios de Einstein no-vacíos, todos los teoremas resultantes son originales.

En la literatura no existe un estudio sistemático mediante el formalismo de NP de espacio-tiempos inmersos en E_6, con este Cap. y el próximo esperamos remediar en parte esta situación.

1. ECUACIONES DE GAUSS, CODAZZI Y RICCI.

En la presente Sección se exponen las ecuaciones que gobiernan el proceso de la inmersión del espacio-tiempo en un 6-espacio plano, las cuales se conocen con el nombre de Ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci (EGCR), dichas relaciones constituyen un sistema algebraico-diferencial que en general es difícil resolver para las incógnitas: dos segundas formas fundamentales y un vector de Ricci. Diversos investigadores emplean las EGCR en su aspecto tensorial, aquí además de este enfoque también proyectaremos a las EGCR sobre la tetrada nula, así el proceso resultante es tensorial-NP con gran poder para analizar R_4 de clase dos. Recordemos que en el problema de la inmersión la geometría intrínseca (determinada por el tensor métrico g_{ab}) del espacio-tiempo es dato, lo que debe encontrarse es la geometría externa de R_4, es decir, el encadenamiento de E_6 con el 4-espacio en cuestión.

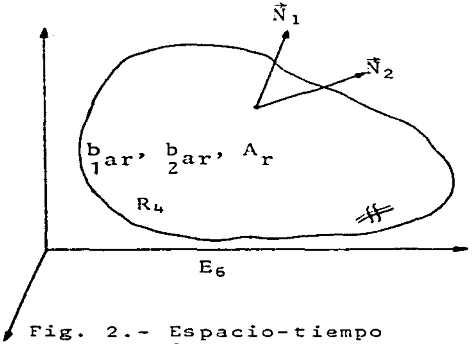


Fig. 2.- Espacio-tiempo de clase dos.

La Fig. 2 muestra la presencia de dos dimensiones adicionales lo cual significa que R_4 posee las normales $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$ con indicadores $\varepsilon_r = \pm 1$, $r=1,2$, esto genera dos segundas formas fundamentales $\underset{a}{b}_{ij} = \underset{a}{b}_{ji}$, $a = 1,2$ y el vector de Ricci A_r, cantidades que controlan la geometría extrínseca de R_4 en relación a E_6. Para que la inmersión local e isométrica sea realizable es ne cesario y suficiente el cumplimiento de las EGCR, las cuales son ecuaciones diferenciales para los nuevos grados de libertad $\underset{c}{b}_{jr}$ y A_r (cuyo significado físico aun desconocemos):

$$R_{acpq} = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r (\underset{r}{b}_{ap}\, \underset{r}{b}_{cq} - \underset{r}{b}_{aq}\, \underset{r}{b}_{cp}) \quad , \qquad \text{Gauss} \qquad \text{(III.1a)}$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{b}_{ac;r} - \underset{1}{b}_{ar;c} &= \varepsilon_2 (A_c\, \underset{2}{b}_{ar} - A_r\, \underset{2}{b}_{ac}) \quad , \qquad \text{(III.1b)} \\ \underset{2}{b}_{ac;r} - \underset{2}{b}_{ar;c} &= -\,\varepsilon_1 (A_c\, \underset{1}{b}_{ar} - A_r\, \underset{1}{b}_{ac}) \quad , \qquad \text{(III.1c)} \end{aligned}\right\} \text{Codazzi} ,$$

$$F_{jr} = A_{r,j} - A_{j,r} = \underset{1}{b}_j{}^{c}\, \underset{2}{b}_{cr} - \underset{1}{b}_r{}^{c}\, \underset{2}{b}_{cj} \quad . \qquad \text{Ricci} \qquad \text{(III.1d)}$$

Puede observarse la semejanza de (1b,c), basta reemplazar en la primera a $\underset{1}{b}_{cr}$ por $\underset{2}{b}_{cr}$ y a ε_2 por $-\varepsilon_1$ para obtener la segunda; además, en (1d) aparece el tensor F_{ar} antisimétrico que llamaremos tensor de Ricci al cual evidentemente son aplicables las relaciones (I.2c,7e,8e,f,25,..., 28).

En general es muy complicado resolver el conjunto acoplado (1), así que es natural buscar alguna simplificación con la misma filosofía del teorema de Thomas (1936) del Cap. II, a saber: "Para espacios de clase uno con det(bij)≠0 la ecuación de Gauss implica la de Codazzi", por lo tanto la búsqueda de $\underset{\sim}{b}$ adquiere carácter algebraico, esto facilita el proceso de inmersión porque ya no debemos tratar con relaciones diferenciales. Desafortunadamente, para espacios de clase dos en la mayoría de los casos estará -

presente al menos una ecuación diferencial, aquí reside su mayor dificultad respecto al análisis para R_4 en E_5. Los autores Gupta-Goel (1975) demostraron que

"(1c,d) son consecuencia de (1a,b) cuando $\det(\underset{2}{b}_{ar}) \neq 0$" , (III.2a)

y utilizaron su resultado para sumergir en E_6 a todo espacio-tiempo estático con simetría esférica, la correspondiente inmersión explícita ya había sido realizada por Plebański (1962), en este proceso quedan incluídas por ejemplo las métricas de Schwarzchild y Reissner-Nördstrom las cuales no aceptan inmersión en E_5, Cap. II, también consultar Fronsdal (1959) para un análisis de la geometría externa de la primera métrica. Un estudio muy completo de la interdependencia de las EGCR puede encontrarse en Goenner (1977) (agradecemos a este autor el envío de este artículo) en cuya pág. 144 se prueban dos interesantes teoremas más generales que (2a), a saber (notación: rango de $\underset{\sim}{b} = r(\underset{\sim}{b})$):

"Si $r(\underset{2}{b}_{at}) \geq 3$ entonces (1a,b,c) implican (1d)" (III.2b)

y

"Si $r(\underset{2}{b}_{at}) \geq 4$ entonces (1c,d) se siguen de (1a,b)" , (III.2c)

nótese que en (2c) no se pide que exista $\underset{\sim}{b}^{-1}$ como ocurre en (2a); los resultados (2) en realidad son válidos para R_n inmerso en E_{n+2} y se deben a las identidades de Bianchi satisfechas por el tensor de curvatura.

Ahora nuestro siguiente objetivo consiste en transcribir al formalismo de NP las EGCR, en efecto, las segundas formas fundamentales $\underset{r}{b}_{ac}$ permiten definir los tensores simétricos con traza nula:

$$\underset{r}{E}_{ac} = \underset{r}{b}_{ac} - \frac{1}{4}\underset{r}{b}\, g_{ac} \quad , \quad \underset{r}{b} = \mathrm{traza}(\underset{r}{b}^{a}{}_{c}) \quad , \qquad \text{(III.3a)}$$

así $\underset{r}{b}_{ac}$ quedan especificadas por las cantidades $\underset{r}{b}$ y $\underset{r}{\phi}_{ab}$, estas últimas construídas de manera análoga a (I.5e). Sustituímos (3a) en (1a) y después proyectamos sobre la tetrada nula para obtener $R_{(a)(p)(q)(h)}$; al analizar con cuidado los valores de los índices apqh que conducen a relaciones independientes deducimos doce posibilidades:

2323	1212	1423
2331	1214	1424
2312	3114	1434
2334	1414	3434

La opción 1234 queda incluida en 1423 más la propiedad cíclica de $R_{(a)(p)(q)(h)}$, (III.3b)

en esta forma resultan 12 ecuaciones tipo NP (que indicamos en la siguiente página) con la misma información que (1a):

ECUACIONES DE GAUSS PARA R_4 EN E_6

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \psi_0 = 4 \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \left(\underset{r}{\phi_{02}}\, \underset{r}{\phi_{00}} - \underset{r}{\phi^2_{01}}\right) , \\
(b) & \psi_1+\phi_{01} = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \left[4\left(\underset{r}{\phi_{02}}\, \underset{r}{\overline{\phi}_{01}} - \underset{r}{\phi_{01}}\, \underset{r}{\phi_{11}}\right) - \frac{1}{2} \underset{r}{b}\, \underset{r}{\phi_{01}}\right] , \\
(c) & \psi_1-\phi_{01} = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \left[4\left(\underset{r}{\phi_{12}}\, \underset{r}{\phi_{00}} - \underset{r}{\phi_{01}}\, \underset{r}{\phi_{11}}\right) + \frac{1}{2} \underset{r}{b}\, \underset{r}{\phi_{01}}\right] , \\
(d) & \psi_2+\overline{\psi}_2+2\phi_{11}+\frac{R}{12} = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \left[4\underset{r}{\phi_{02}}\, \underset{r}{\overline{\phi}_{02}} - \left(2\underset{r}{\phi_{11}} + \frac{1}{4} \underset{r}{b}\right)^2\right] , \\
(e) & \psi_2+\overline{\psi}_2-2\phi_{11}+\frac{R}{12} = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \left[4\underset{r}{\phi_{00}}\, \underset{r}{\phi_{22}} - \left(2\underset{r}{\phi_{11}} - \frac{1}{4} \underset{r}{b}\right)^2\right] , \\
(f) & -\psi_2+\frac{R}{12} = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \left[4\left(\underset{r}{\phi^2_{11}} - \underset{r}{\overline{\phi}_{01}}\, \underset{r}{\phi_{12}}\right) - \frac{1}{16} \underset{r}{b^2}\right] , \\
(g) & -\psi_3-\overline{\phi}_{12} = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \left[4\left(\underset{r}{\phi_{11}}\, \underset{r}{\overline{\phi}_{12}} - \underset{r}{\overline{\phi}_{02}}\, \underset{r}{\phi_{12}}\right) + \frac{1}{2} \underset{r}{b}\, \underset{r}{\overline{\phi}_{12}}\right] , \\
(h) & -\psi_3+\overline{\phi}_{12} = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \left[4\left(\underset{r}{\phi_{11}}\, \underset{r}{\overline{\phi}_{12}} - \underset{r}{\overline{\phi}_{01}}\, \underset{r}{\phi_{22}}\right) - \frac{1}{2} \underset{r}{b}\, \underset{r}{\overline{\phi}_{12}}\right] , \\
(i) & \psi_4 = 4 \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \left(\underset{r}{\overline{\phi}_{02}}\, \underset{r}{\phi_{22}} - \underset{r}{\overline{\phi}^2_{12}}\right) , \\
(j) & -\phi_{00} = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \left[4\left(\underset{r}{\phi_{11}}\, \underset{r}{\phi_{00}} - \underset{r}{\phi_{01}}\, \underset{r}{\overline{\phi}_{01}}\right) + \frac{1}{2} \underset{r}{b}\, \underset{r}{\phi_{00}}\right] , \\
(k) & -\phi_{02} = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \left[4\left(\underset{r}{\phi_{12}}\, \underset{r}{\phi_{01}} - \underset{r}{\phi_{02}}\, \underset{r}{\phi_{11}}\right) + \frac{1}{2} \underset{r}{b}\, \underset{r}{\phi_{02}}\right] , \\
(\ell) & \phi_{22} = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \left[4\left(\underset{r}{\overline{\phi}_{12}}\, \underset{r}{\phi_{12}} - \underset{r}{\phi_{11}}\, \underset{r}{\phi_{22}}\right) - \frac{1}{2} \underset{r}{b}\, \underset{r}{\phi_{22}}\right] ,
\end{array}
\qquad (III.4)
$$

El siguiente paso es considerar la ecuación de Codazzi (1b) que en términos de (3a) nos queda

$$Q_{cra} = - Q_{rca} \equiv \underset{1}{E}_{ac;r} - \underset{1}{E}_{ar;c} + \frac{1}{4}(\underset{1}{b}_{;r} g_{ac} - \underset{1}{b}_{;c} g_{ar}) + \varepsilon_2 (A_r \underset{2}{E}_{ac} - A_c \underset{2}{E}_{ac}) + \frac{\varepsilon_2}{4} \underset{2}{b} (A_r g_{ac} - A_c g_{ar}) = 0 \tag{III.5a}$$

con la propiedad cíclica $Q_{cra} + Q_{rac} + Q_{acr} = 0$. Al contraer (5a) con la tetrada de NP obtenemos

$$Q_{(p)(h)(q)} = \underset{1}{E}_{(q)(p);(h)} - \underset{1}{E}_{(q)(h);(p)} + \gamma^{t}{}_{qp} \underset{1}{E}_{(t)(h)} - \gamma^{t}{}_{qh} \underset{1}{E}_{(t)(p)} + (\gamma^{t}{}_{hp} - \gamma^{t}{}_{ph}) \underset{1}{E}_{(q)(t)} + \varepsilon_2 (A_{(h)} \underset{2}{E}_{(p)(q)} - A_{(p)} \underset{2}{E}_{(h)(q)}) + \frac{1}{4}(\underset{1}{b}_{;(h)} + \varepsilon_2 \underset{2}{b} A_{(h)}) Z_{(p)(q)} - \frac{1}{4}(\underset{1}{b}_{;(p)} + \varepsilon_2 \underset{2}{b} A_{(p)}) \cdot Z_{(h)(q)} = 0 \tag{III.5b}$$

donde $Z_{(a)(b)}$ fue definida en (1e); un análisis de los índices phq revela once posibilidades (en cuanto a relaciones independientes):

231	233	121	142	144	344
232	234	141	143	343	

(III.5c)

con estos valores y (I.1e,2,5e,17c) resultan 11 ecs. tipo NP (próxima página) equivalentes a (1b):

ECUACIONES DE CODAZZI PARA R_4 DE CLASE DOS

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad D\underset{1}{\phi}_{11}-\bar{\delta}\underset{1}{\phi}_{01}+\frac{1}{8}D\underset{1}{b}=-\bar{\mu}\underset{1}{\phi}_{00}+(\pi-2\alpha)\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\pi}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}+\bar{\sigma}\underset{1}{\phi}_{02}+2\rho\underset{1}{\phi}_{11}-\bar{\kappa}\underset{1}{\phi}_{12}-\\
&\qquad -\kappa\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+\varepsilon_2(\bar{\Theta}_1\underset{2}{\phi}_{01}-\Theta_4\underset{2}{\phi}_{11}-\frac{1}{8}\Theta_4\underset{2}{b})\ ,\\
&(b)\quad D\underset{1}{\phi}_{11}-\Delta\underset{1}{\phi}_{00}-\frac{1}{8}D\underset{1}{b}=-2(\gamma+\bar{\gamma})\underset{1}{\phi}_{00}+(2\bar{\tau}+\pi)\underset{1}{\phi}_{01}+(2\tau+\bar{\pi})\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}-\bar{\kappa}\underset{1}{\phi}_{12}-\\
&\qquad -\kappa\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+\varepsilon_2(\Theta_3\underset{2}{\phi}_{00}-\Theta_4\underset{2}{\phi}_{11}+\frac{1}{8}\Theta_4\underset{2}{b})\ ,\\
&(c)\quad \Delta\underset{1}{\phi}_{11}-D\underset{1}{\phi}_{22}-\frac{1}{8}\Delta\underset{1}{b}=\nu\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\nu}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}-(\bar{\tau}+2\pi)\underset{1}{\phi}_{12}-(\tau+2\bar{\pi})\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+2(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\underset{1}{\phi}_{22}+\\
&\qquad +\varepsilon_2(\Theta_4\underset{2}{\phi}_{22}-\Theta_3\underset{2}{\phi}_{11}+\frac{1}{8}\Theta_3\underset{2}{b})\ ,\\
&(d)\quad \Delta\underset{1}{\phi}_{11}-\bar{\delta}\underset{1}{\phi}_{12}+\frac{1}{8}\Delta\underset{1}{b}=\nu\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\nu}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}-\lambda\underset{1}{\phi}_{02}-2\bar{\mu}\underset{1}{\phi}_{11}+(2\bar{\beta}-\bar{\tau})\underset{1}{\phi}_{12}-\tau\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+\\
&\qquad +\rho\underset{1}{\phi}_{22}+\varepsilon_2(\bar{\Theta}_1\underset{2}{\phi}_{12}-\Theta_3\underset{2}{\phi}_{11}-\frac{1}{8}\Theta_3\underset{2}{b})\ ,\\
&(e)\quad \delta\underset{1}{\phi}_{11}-\bar{\delta}\underset{1}{\phi}_{02}+\frac{1}{8}\delta\underset{1}{b}=(\mu-2\bar{\mu})\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\lambda}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}+2(\bar{\beta}-\alpha)\underset{1}{\phi}_{02}+(2\rho-\bar{\rho})\underset{1}{\phi}_{12}-\sigma\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+\\
&\qquad +\varepsilon_2(\bar{\Theta}_1\underset{2}{\phi}_{02}-\Theta_1\underset{2}{\phi}_{11}-\frac{1}{8}\Theta_1\underset{2}{b})\ ,\qquad\qquad\qquad (III.6)\\
&(f)\quad \delta\underset{1}{\phi}_{11}-D\underset{1}{\phi}_{12}-\frac{1}{8}\delta\underset{1}{b}=\mu\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\lambda}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}-\pi\underset{1}{\phi}_{02}-2\bar{\pi}\underset{1}{\phi}_{11}+(2\bar{\varepsilon}-\bar{\rho})\underset{1}{\phi}_{12}-\sigma\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+\kappa\underset{1}{\phi}_{22}+\\
&\qquad +\varepsilon_2(\Theta_4\underset{2}{\phi}_{12}-\Theta_1\underset{2}{\phi}_{11}+\frac{1}{8}\Theta_1\underset{2}{b})\ ,\\
&(g)\quad \delta\underset{1}{\phi}_{11}-\Delta\underset{1}{\phi}_{01}-\frac{1}{8}\delta\underset{1}{b}=-\bar{\nu}\underset{1}{\phi}_{00}+(\mu-2\gamma)\underset{1}{\phi}_{01}+\bar{\lambda}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}+\bar{\tau}\underset{1}{\phi}_{02}+2\tau\underset{1}{\phi}_{11}-\bar{\rho}\underset{1}{\phi}_{12}-\sigma\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+\\
&\qquad +\varepsilon_2(\Theta_3\underset{2}{\phi}_{01}-\Theta_1\underset{2}{\phi}_{11}+\frac{1}{8}\Theta_1\underset{2}{b})\ ,\\
&(h)\quad D\underset{1}{\phi}_{02}-\delta\underset{1}{\phi}_{01}=-\bar{\lambda}\underset{1}{\phi}_{00}+2(\bar{\pi}-\beta)\underset{1}{\phi}_{01}+(\bar{\rho}+2\varepsilon-2\bar{\varepsilon})\underset{1}{\phi}_{02}+2\sigma\underset{1}{\phi}_{11}-2\kappa\underset{1}{\phi}_{12}+\\
&\qquad +\varepsilon_2(\Theta_1\underset{2}{\phi}_{01}-\Theta_4\underset{2}{\phi}_{02})\ ,\\
&(i)\quad \Delta\underset{1}{\phi}_{02}-\delta\underset{1}{\phi}_{12}=2\bar{\nu}\underset{1}{\phi}_{01}+(2\gamma-2\bar{\gamma}-\mu)\underset{1}{\phi}_{02}-2\bar{\lambda}\underset{1}{\phi}_{11}+2(\bar{\alpha}-\tau)\underset{1}{\phi}_{12}+\sigma\underset{1}{\phi}_{22}+\\
&\qquad +\varepsilon_2(\Theta_1\underset{2}{\phi}_{12}-\Theta_3\underset{2}{\phi}_{02})\ ,\\
&(j)\quad \delta\underset{1}{\phi}_{22}-\Delta\underset{1}{\phi}_{12}=-\nu\underset{1}{\phi}_{02}-2\bar{\nu}\underset{1}{\phi}_{11}+2(\mu+\bar{\gamma})\underset{1}{\phi}_{12}+2\bar{\lambda}\,\underset{1}{\bar{\phi}}_{12}+(\tau-2\bar{\alpha}-2\beta)\underset{1}{\phi}_{22}+\varepsilon_2(\Theta_3\underset{2}{\phi}_{12}-\Theta_1\underset{2}{\phi}_{22})\ ,\\
&(k)\quad \delta\underset{1}{\phi}_{00}-D\underset{1}{\phi}_{01}=(2\bar{\alpha}+2\beta-\bar{\pi})\underset{1}{\phi}_{00}-2(\bar{\rho}+\varepsilon)\underset{1}{\phi}_{01}-2\sigma\underset{1}{\bar{\phi}}_{01}+\bar{\kappa}\,\underset{1}{\phi}_{02}+2\kappa\underset{1}{\phi}_{11}+\varepsilon_2(\Theta_4\underset{2}{\phi}_{01}-\Theta_1\underset{2}{\phi}_{00})\ ,
\end{aligned}
$$

Debido a la semejanza entre (1b,c) es claro que existen otras once ecuaciones tipo (6) para $\underset{2}{\phi}_{ab}$, sólo es cues-- tión de poner $-\varepsilon_1$ en lugar de ε_2, sustituir $\underset{2}{b}$ por $\underset{1}{b}$ y - reemplazar $\underset{1}{\phi}_{ac}$ por $\underset{2}{\phi}_{ac}$ y a la inversa.

Sólo nos falta la contraparte NP de la ecuación de Ricci (1d): En realidad esta ecuación conduce a tres conjuntos de relaciones, dos de ellos son (I.26,28) y el tercero - se origina de:

$$F_{rc} = \underset{1}{b}_r{}^a \, \underset{2}{b}_{ac} - \underset{1}{b}_c{}^a \, \underset{2}{b}_{ar} = \underset{1}{E}_r{}^a \, \underset{2}{E}_{ac} - \underset{1}{E}_c{}^a \, \underset{2}{E}_{ar} \quad , \tag{III.7a}$$

cuya proyección sobre la tetrada nula es

$$F_{(p)(h)} = \underset{1}{E}_{(p)}{}^{(r)} \, \underset{2}{E}_{(r)(h)} - \underset{1}{E}_{(h)}{}^{(r)} \, \underset{2}{E}_{(r)(p)} \quad , \tag{III.7b}$$

de donde se originan las

ECUACIONES III DE MAXWELL-RICCI

$$\text{(a)} \quad \gamma_0 = 4(\underset{1}{\bar\phi}_{01} \underset{2}{\phi}_{02} + 2\underset{1}{\phi}_{01} \underset{2}{\phi}_{11} - 2\underset{1}{\phi}_{11} \underset{2}{\phi}_{01} - \underset{1}{\phi}_{00} \underset{2}{\phi}_{12} - \underset{1}{\phi}_{02} \underset{2}{\bar\phi}_{01} + \underset{1}{\phi}_{12} \underset{2}{\phi}_{00}) \quad ,$$

$$\text{(b)} \quad \gamma_1 = 2(\underset{1}{\bar\phi}_{02} \underset{2}{\phi}_{02} + 2\underset{1}{\phi}_{01} \underset{2}{\bar\phi}_{12} - 2\underset{1}{\bar\phi}_{12} \underset{2}{\phi}_{01} - \underset{1}{\phi}_{00} \underset{2}{\phi}_{22} - \underset{1}{\phi}_{02} \underset{2}{\bar\phi}_{02} + \underset{1}{\phi}_{22} \underset{2}{\phi}_{00}) \quad ,$$

$$\text{(c)} \quad \gamma_2 = 4(\underset{1}{\bar\phi}_{02} \underset{2}{\phi}_{12} - \underset{1}{\bar\phi}_{01} \underset{2}{\phi}_{22} - 2\underset{1}{\bar\phi}_{12} \underset{2}{\phi}_{11} + 2\underset{1}{\phi}_{11} \underset{2}{\bar\phi}_{12} - \underset{1}{\phi}_{12} \underset{2}{\bar\phi}_{02} + \underset{1}{\phi}_{22} \underset{2}{\bar\phi}_{01}) \quad . \tag{III.8}$$

Entonces la información existente en (1d) queda almacenada en (I.16,28,III.8); es útil recordar que F_{ac} posee los invariantes (I.8f).

Las ecuaciones (I.28,III.4,6,8) no se encuentran de manera explícita en la literatura.

En una situación dada las cantidades ψ_a, ϕ_{ac}, R y los coeficientes de espín son datos, así el problema radica en la búsqueda de $\underset{r}{\phi}_{ac}$, $\underset{r}{b}$, Θ_c y ε_a soluciones de (I.26,28, III.4,6,8), sin embargo, antes de iniciar esta búsqueda es conveniente verificar el cumplimiento de ciertas condiciones (consecuencias de (1), ver la próxima Secc.) que todo R_4 de clase dos debe satisfacer, si no se cumplen dichas condiciones entonces es inútil buscar las segundas formas fundamentales y el vector de Ricci.

2. CONDICIONES NECESARIAS PARA LA INMERSIÓN DE R_4 EN E_6.

Demostrar que un espacio-tiempo no es sumergible en E_6 significa verificar que (1) no tienen solución pero resulta que esto es muy difícil de probar directamente (por ejemplo, consultar Collinson (1968a) para la métrica de Gödel), en su lugar buscamos pruebas indirectas que se conocen como "condiciones necesarias para la inmersión". Cuando estas condiciones no se cumplen podemos estar seguros de que no existe solución para las EGCR; en esta Secc. consideraremos algunos requisitos que debe satisfacer un R_4 de clase dos, el análisis es general (las aplicaciones a métricas específicas se localizan en las próximas Seccs. 3 y 4) y se emplean las herramientas tensorial y de NP.

La ecuación de Gauss (1a) puede escribirse en la forma

$$R_{acpq} = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r \underset{r}{B}_{acpq} \quad \text{con} \quad \underset{r}{B}_{acpq} = \underset{r}{b}_{ap} \underset{r}{b}_{cq} - \underset{r}{b}_{aq} \underset{r}{b}_{cp} \quad , \quad r = 1,2 \tag{III.9}$$

los tensores $\underset{r}{B}_{acpq}$ tienen la misma estructura del tensor de Riemann para espacios de clase uno así que son váli-das las relaciones, ver Fuentes (1985) y nuestra Secc. 2 del capítulo anterior (no existe suma sobre r):

$$\text{(a)} \quad {}^{*}\underset{r}{B}{}^{*ijcm} \underset{r}{B}_{abcm} = \frac{1}{12} \underset{r}{K_2} \, \delta^{ij}_{ab} \quad , \quad \underset{r}{K_2} \equiv - 24 \det(\underset{r}{b}{}^{a}{}_{c}) \quad ,$$

$$\text{(b)} \quad {}^{*}\underset{r}{B}{}^{ij}{}_{ab} \underset{r}{B}_{cmij} = - \frac{1}{12} \underset{r}{K_2} \, \eta_{abcm} \quad ,$$

$$\text{(c)} \quad {}^{*}\underset{r}{B}{}^{ijkm} \underset{r}{B}_{cjkm} = 0 \quad , \tag{III.10}$$

$$\text{(d)} \quad {}^{*}\underset{r}{B}_{ijkm} \underset{r}{B}{}^{jk} = 0 \quad \text{con} \quad \underset{r}{B}_{jk} = \underset{r}{B}_{kj} \equiv \underset{r}{B}{}^{a}{}_{jka} \; .$$

Además, (1d,9) permiten deducir las expresiones

$$\text{(a)} \quad \underset{1}{B}{}^{ijkr} \; {}^{*}\underset{2}{B}_{ijkc} = - 2 \; {}^{*}F_{ij} \; \underset{1}{b}{}^{ir} \; \underset{2}{b}{}^{j}{}_{c} \quad ,$$

$$\text{(b)} \quad \underset{1}{B}{}^{ijkr} \; {}^{*}\underset{2}{B}_{ijkr} = - F_2 \quad , \tag{III.11}$$

$$\text{(c)} \quad {}^{*}C_2 = - 2 \, \varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \, F_2 \quad ,$$

esta última corresponde a (10) de Yakupov (1968), en re-lación a (11) recordar las definiciones (I.8f,11a).

Matsumoto (1950) pág. 69 demostró (para R_4 con métrica positiva definida inmerso en E_6, pero Goenner (1973) observó su validez para el espacio-tiempo):

"Si R_4 es de clase dos entonces

$$F^{ij}\,F^{kr} + F^{ik}\,F^{rj} + F^{ir}\,F^{jk} = -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}\,(R^{acij}\,R_{ac}{}^{kr} + R^{acik}\,R_{ac}{}^{rj} + R^{acir}\,R_{ac}{}^{jk})" \quad , \qquad \text{(III.12)}$$

Si ahora multiplicamos (12) por $\frac{1}{2}\,\eta_{pjkr}$ y empleamos (I.8g,9a,11e) volvemos a deducir (11c). Es simple probar que todo espacio-tiempo (sin pedir que sea de clase uno o dos) satisface

$$^{*}R^{*tjkc}\;{}^{*}R_{arkc}\;R_{pj}{}^{ar} = \frac{Y}{4}\,\delta^{t}{}_{p} \quad , \qquad \text{(III.13a)}$$

con

$$Y \equiv {}^{*}R^{*tjkc}\;{}^{*}R_{arkc}\;R_{tj}{}^{ar} = -\,{}^{*}C_3 + \frac{R}{2}\,{}^{*}C_2 + 6\,{}^{*}R_3 \quad ,$$

$$^{*}R_3 \equiv {}^{*}R_{ijab}\;R^{ia}\;R^{jb} \quad , \qquad \text{(III.13b)}$$

la identidad (13a) no se localiza de manera explícita en la literatura. Yakupov (1968) expresión (7), también consultar Goenner (1980) pág. 451, encontró una condición muy general empleando sólo (1a):

"Todo R_4 inmerso en E_6 debe tener $Y = 0$" , (III.13c)

(13c) constituye una restricción sobre la geometría intrínseca de un espacio-tiempo de clase dos: si un R_4 tiene $Y \neq 0$ entonces no es sumergible en E_6. La condición (13c) es necesaria porque $Y = 0$ no garantiza la inmersión ya que en la obtención de (13c) sólo se utilizó la ecuación de Gauss.

A (1b) le aplicamos ;p y luego rotamos cíclicamente los índices crp y sumamos entre sí las tres ecuaciones resultantes para obtener:

$$R^q{}_{arp}\,\underset{1}{b}{}_{qc} + R^q{}_{apc}\,\underset{1}{b}{}_{qr} + R^q{}_{acr}\,\underset{1}{b}{}_{qp} = \varepsilon_2 (F_{rp}\,\underset{2}{b}{}_{ac} + F_{pc}\,\underset{2}{b}{}_{ar} + F_{cr}\,\underset{2}{b}{}_{ap}) , \quad \text{(III.14a)}$$

similarmente

$$R^q{}_{arp}\,\underset{2}{b}{}_{qc} + R^q{}_{apc}\,\underset{2}{b}{}_{qr} + R^q{}_{acr}\,\underset{2}{b}{}_{qp} = -\,\varepsilon_1 (F_{rp}\,\underset{1}{b}{}_{ac} + F_{pc}\,\underset{1}{b}{}_{ar} + F_{cr}\,\underset{1}{b}{}_{ap}) , \quad \text{(III.14b)}$$

(14a,b) equivalen a (8) de Yakupov (1968) y a (A2.5,6) de Hodgkinson (1984) aunque este autor sólo considera el caso $R_{ab} = 0$. Al multiplicar (14a,b) por η^{trpc} se deducen:

$$*R^{ijkr}\,\underset{1}{b}{}_{jk} = \varepsilon_2\, *F^{ij}\,\underset{2}{b}{}^r{}_j \;, \quad *R^{ijkr}\,\underset{2}{b}{}_{jk} = -\,\varepsilon_1\, *F^{ij}\,\underset{1}{b}{}^r{}_j \;, \quad \text{(III.14c)}$$

las cuales ofrecen la posibilidad de calcular, por ejemplo, $\underset{2}{b}_{ij}$ en función de F^{ab}, $\underset{1}{b}^{rc}$ y el dual simple del tensor de curvatura, en efecto, al multiplicar (14c) por $-F_{ic}$ obtenemos

$$F_2\, \underset{2}{b}_{ij} = 4\,\varepsilon_2\, {}^*R^{acr}{}_i\, \underset{1}{b}_{cr}\, F_{aj} \quad , \quad F_2\, \underset{1}{b}_{ij} = -4\,\varepsilon_1\, {}^*R^{acr}{}_i\, \underset{2}{b}_{cr}\, F_{aj} \tag{III.14d}$$

así que la mencionada posibilidad procede cuando $F_2 \neq 0$; en las siguientes dos Seccs. probaremos que $F_2 = 0$ para 4-espacios de Einstein de clase dos y tipo Petrov $\neq$ I.

Si ahora en (14a,b) sumamos r con a deducimos las relaciones:

$$R^q{}_p\, \underset{1}{b}_{qc} - R^q{}_c\, \underset{1}{b}_{qp} = \varepsilon_2 (F_{qp}\, \underset{2}{b}^q{}_c - F_{qc}\, \underset{2}{b}^q{}_p + \underset{2}{b}\, F_{pc}) \quad , \tag{III.14e}$$

$$R^q{}_p\, \underset{2}{b}_{qc} - R^q{}_c\, \underset{2}{b}_{qp} = -\,\varepsilon_1 (F_{qp}\, \underset{1}{b}^q{}_c - F_{qc}\, \underset{1}{b}^q{}_p + \underset{1}{b}\, F_{pc}) \quad , \tag{III.14f}$$

las cuales coinciden con (9) de Yakupov (1968) (este autor emplea $R_{ab} = \frac{R}{4} g_{ab}$) y (A2.7) de Hodgkinson (1984) - ($R_{ab} = 0$); a partir de (14e,f) es inmediato que

$${}^*F^{pc}\, R^q{}_p\, \underset{1}{b}_{qc} = \frac{\varepsilon_2}{4} F_2\, \underset{2}{b} \ , \ {}^*F^{pc}\, R^q{}_p\, \underset{2}{b}_{qc} = -\frac{\varepsilon_1}{4} F_2\, \underset{1}{b} \ . \tag{III.14g}$$

Al multiplicar (14a) por $\varepsilon_1\, \underset{1}{b}^a{}_t$ y (14b) por $\varepsilon_2\, \underset{2}{b}^a{}_t$ y sumar las ecuaciones resultantes volvemos a obtener (12).

Multiplicamos (14e) por $\underset{2}{b}{}^{p}{}_{t}$ y antisimetrizamos en ct para deducir una ecuación que denotamos por (*), posteriormente contraemos (14e) con $\underset{1}{b}{}^{p}{}_{t}$ y antisimetrizamos en ct para obtener (**), entonces restamos entre sí (*) y (**) originándose

$$R^{ap}{}_{ct}\ F_{ap} = 2\left[R^{q}{}_{t}\ F_{qc} - R^{q}{}_{c}\ F_{qt} + R_{qp}(\underset{1}{b}{}^{a}{}_{c}\ \underset{2}{b}{}^{p}{}_{t} - \underset{1}{b}{}^{q}{}_{t}\ \underset{2}{b}{}^{p}{}_{c})\right] \qquad \text{(III.15a)}$$

o si usamos la definición del tensor de Weyl:

$$C_{apct}\ F^{ap} = 2R_{qp}(\underset{1}{b}{}^{q}{}_{c}\ \underset{2}{b}{}^{p}{}_{t} - \underset{1}{b}{}^{q}{}_{t}\ \underset{2}{b}{}^{p}{}_{c}) + R_{qt}\ F^{q}{}_{c} - R_{qc}\ F^{q}{}_{t} - \frac{R}{3}\ F_{ct}\ . \qquad \text{(III.15b)}$$

Más adelante veremos que para espacios de Einstein F^{ap} es un eigentensor del tensor conformal. Las relaciones (15) no se encuentran en la literatura, Hodgkinson (1984) pág. 584 sólo las exhibe para el caso $R_{ab} = 0$.

En términos de C_{ijkr} las expresiones (14c) nos quedan:

$$(^{*}C^{ijkr} + \frac{1}{2}\ \eta^{ijra}\ R_{a}{}^{k})\ \underset{1}{b}{}_{jk} = \varepsilon_{2}\ {}^{*}F^{ij}\ \underset{2}{b}{}^{r}{}_{j}\ ,$$

$$(^{*}C^{ijkr} + \frac{1}{2}\ \eta^{ijra}\ R_{a}{}^{k})\ \underset{2}{b}{}_{jk} = -\ \varepsilon_{1}\ {}^{*}F^{ij}\ \underset{1}{b}{}^{r}{}_{j}\ . \qquad \text{(III.16a)}$$

Por último, de (16a) son inmediatas las relaciones (que no hemos visto publicadas):

$$*C^{ijkc} \underset{r}{b}_{jk} \underset{r}{b}_{ic} = -\frac{1}{4}\varepsilon_r *C_2 \ , \quad *C^{ijkc} \underset{2}{b}_{ic} \underset{1}{b}_{jk} = 0 \ , \quad r = 1,2 \qquad (III.16b)$$

$$*C^{ijkc} \underset{1}{b}_{jk} = \frac{\varepsilon_2}{2}(*F^{ij} \underset{2}{b}^{c}{}_{j} + *F^{cj} \underset{2}{b}^{i}{}_{j}) \ , \qquad (III.16c)$$

y de (11a,13b,c,15b) resulta la identidad original:

$$*C_{apct} F^{ap} F^{ct} = \frac{1}{3}\varepsilon_1 \varepsilon_2 *C_3 \ . \qquad (III.16d)$$

Con (9,...,16) ya tenemos las principales relaciones para 4-espacios de clase dos, nótese que todas estas condiciones son algebraicas, hasta la fecha nadie ha construído condiciones necesarias diferenciales para R_4 inmerso en E_6: Para el espacio-tiempo sumergido en E_5 la única condición diferencial que se conoce es la obtenida por R. Fuentes, J. López, Rep. Invest. No. 119, DCBI-UAM-A - (1984) y Fuentes-López (1985) expresión (52.c). El próximo paso consiste en la transcripción NP de algunas de las relaciones (9,...,16), para tal fin nos apoyaremos en el formalismo expuesto en el Cap. I.

Empecemos con (14a), al proyectarla sobre la tetrada nula deducimos que:

$$Q_{(i)(t)(j)(k)} \equiv R^{(\ell)}{}_{(i)(j)(k)} \underset{1}{E}_{(\ell)(t)} + R^{(\ell)}{}_{(i)(k)(t)} \underset{1}{E}_{(\ell)(j)} +$$

$$+ R^{(\ell)}{}_{(i)(t)(j)} \underset{1}{E}_{(\ell)(k)} = \varepsilon_2 \Big[F_{(j)(k)} \underset{2}{E}_{(i)(t)} +$$

$$+ F_{(k)(t)} \underset{2}{E}_{(i)(j)} + F_{(t)(j)} \underset{2}{E}_{(i)(k)} + \frac{1}{4} \underset{2}{b}(F_{(j)(k)} Z_{(i)(t)} +$$

$$+ F_{(k)(t)} Z_{(i)(j)} + F_{(t)(j)} Z_{(i)(k)})\Big] \quad , \qquad (III.17a)$$

de donde son evidentes las propiedades

$$Q_{(i)(t)(j)(k)} = Q_{(i)(j)(k)(t)} = Q_{(i)(k)(t)(j)} = -Q_{(i)(t)(k)(j)} = -$$

$$- Q_{(i)(j)(t)(k)}$$

en virtud de las cuales sólo es necesario considerar los siguientes cuartetos de valores para los índices itjk:

1123	1234	3134		
1124	3123	4123	4134	(III.17b)
1134	3124	4124		

en esta forma de (17) obtenemos 10 ecuaciones tipo NP que no hemos localizado en la literatura:

IDENTIDADES DE YAKUPOV

(a) $$\bar\psi_4 \underset{1}{\phi}_{00} - 2\bar\psi_3 \underset{1}{\phi}_{01} + (\bar\psi_2-\psi_2)\underset{1}{\phi}_{02} + 2\psi_1 \underset{1}{\phi}_{12} - \psi_0 \underset{1}{\phi}_{22} = \epsilon_2\left[\gamma_0 \underset{2}{\phi}_{12} - (\gamma_1+\bar\gamma_1)\underset{2}{\phi}_{02} + \bar\gamma_2 \underset{2}{\phi}_{01}\right] ,$$

(b) $$\psi_4 \underset{1}{\phi}_{02} - \bar\psi_4 \underset{1}{\bar\phi}_{02} - 2\psi_3 \underset{1}{\phi}_{12} + 2\bar\psi_3 \underset{1}{\bar\phi}_{12} + (\psi_2-\bar\psi_2)\underset{1}{\phi}_{22} = \epsilon_2\left[\gamma_2 \underset{2}{\phi}_{12} - \bar\gamma_2 \underset{2}{\bar\phi}_{12} + (\bar\gamma_1-\gamma_1)\underset{2}{\phi}_{22}\right] ,$$

(c) $$(\bar\psi_2-\psi_2)\underset{1}{\phi}_{00} - 2\bar\psi_1\underset{1}{\phi}_{01} + 2\psi_1\underset{1}{\bar\phi}_{01} + \bar\psi_0\underset{1}{\phi}_{02} - \psi_0\underset{1}{\bar\phi}_{02} = \epsilon_2\left[(\bar\gamma_1-\gamma_1)\underset{2}{\phi}_{00} - \bar\gamma_0\underset{2}{\phi}_{01} + \gamma_0\underset{2}{\bar\phi}_{01}\right] ,$$

(d) $$-\bar\psi_4\underset{1}{\bar\phi}_{01} + \psi_3\underset{1}{\phi}_{02} + 2\bar\psi_3\underset{1}{\phi}_{11} - (\bar\psi_2+2\psi_2)\underset{1}{\phi}_{12} + \psi_1\underset{1}{\phi}_{22} = \frac{\epsilon_2}{2}\left(\gamma_2\underset{2}{\phi}_{02} - 2\bar\gamma_2\underset{2}{\phi}_{11} + 2\bar\gamma_1\underset{2}{\phi}_{12} - \gamma_0\underset{2}{\phi}_{22}\right) ,$$

(e) $$\bar\psi_3\underset{1}{\phi}_{00} - (\psi_2+2\bar\psi_2)\underset{1}{\phi}_{01} + \bar\psi_1\underset{1}{\phi}_{02} + 2\psi_1\underset{1}{\phi}_{11} - \psi_0\underset{1}{\bar\phi}_{12} = \frac{\epsilon_2}{2}\left(\bar\gamma_2\underset{2}{\phi}_{00} - \bar\gamma_0\underset{2}{\phi}_{02} + 2\gamma_0\underset{2}{\phi}_{11} - 2\gamma_1\underset{2}{\phi}_{01}\right) ,$$

(f) $$-\psi_3\underset{1}{\phi}_{01} + \bar\psi_3\underset{1}{\bar\phi}_{01} + 2(\psi_2-\bar\psi_2)\underset{1}{\phi}_{11} + \bar\psi_1\underset{1}{\phi}_{12} - \psi_1\underset{1}{\bar\phi}_{12} = \frac{\epsilon_2}{2}\left(\gamma_0\underset{2}{\bar\phi}_{12} - \bar\gamma_0\underset{2}{\phi}_{12} + \bar\gamma_2\underset{2}{\bar\phi}_{01} - \gamma_2\underset{2}{\phi}_{01}\right) ,$$

(III.18)

(g) $$-\phi_{22}\underset{1}{\phi}_{01} + \bar\phi_{12}\underset{1}{\phi}_{02} + 2\phi_{12}\underset{1}{\phi}_{11} - 2\phi_{11}\underset{1}{\phi}_{12} - \phi_{02}\underset{1}{\bar\phi}_{12} + \phi_{01}\underset{1}{\phi}_{22} = \frac{\epsilon_2}{2}\left(\gamma_0\underset{2}{\phi}_{22} + \gamma_2\underset{2}{\phi}_{02} - 2\gamma_1\underset{2}{\phi}_{12} - \frac{1}{4}\underset{2}{b}\,\bar\gamma_2\right) ,$$

(h) $$\phi_{12}\underset{1}{\phi}_{00} - \phi_{02}\underset{1}{\bar\phi}_{01} + 2\phi_{01}\underset{1}{\phi}_{11} - 2\phi_{11}\underset{1}{\phi}_{01} + \bar\phi_{01}\underset{1}{\phi}_{02} - \phi_{00}\underset{1}{\phi}_{12} = \frac{\epsilon_2}{2}\left(-\bar\gamma_0\underset{2}{\phi}_{02} - \bar\gamma_2\underset{2}{\phi}_{00} + 2\bar\gamma_1\underset{2}{\phi}_{01} + \frac{1}{4}\underset{2}{b}\,\gamma_0\right) ,$$

(i) $$\bar\phi_{02}\underset{1}{\phi}_{02} - \phi_{02}\underset{1}{\bar\phi}_{02} + 2\phi_{12}\underset{1}{\bar\phi}_{01} - 2\bar\phi_{01}\underset{1}{\phi}_{12} + \phi_{00}\underset{1}{\phi}_{22} - \phi_{22}\underset{1}{\phi}_{00} = \epsilon_2\left[\gamma_0\underset{2}{\bar\phi}_{12} + \gamma_2\underset{2}{\phi}_{01} - 2\left(\gamma_1\underset{2}{\phi}_{11} + \frac{1}{8}\bar\gamma_1\underset{2}{b}\right)\right]$$

Ahora analicemos (15b) la cual es equivalente a (15a); - si en ella colocamos (I.5a,III.3a) resulta

$$C_{apct}\,F^{ap} = -\frac{R}{3}F_{ct} + 2\,E_{pq}(\underset{1}{E}{}^{q}{}_{c}\,\underset{2}{E}{}^{p}{}_{t} - \underset{1}{E}{}^{q}{}_{t}\,\underset{2}{E}{}^{p}{}_{c}) + E_{qt}\Big[F^{q}{}_{c} + \frac{1}{2}(\underset{2}{b}\,\underset{1}{E}{}^{q}{}_{c} - \underset{1}{b}\,\underset{2}{E}{}^{q}{}_{c})\Big] - E_{qc}\Big[F^{q}{}_{t} + \frac{1}{2}(\underset{2}{b}\,\underset{1}{E}{}^{q}{}_{t} - \underset{1}{b}\,\underset{2}{E}{}^{q}{}_{t})\Big] , \qquad \text{(III.19)}$$

cuya proyección sobre la tetrada nula conduce a 3 ecua-- ciones tipo NP que tampoco se encuentran explícitamente en la literatura:

$$\begin{aligned}
&\psi_4\gamma_0 - 2\psi_3\gamma_1 + (\psi_2+\tfrac{R}{6})\gamma_2 = 8\Big[\phi_{00}(\underset{1}{\bar\phi}_{12}\,\underset{2}{\phi}_{22} - \underset{1}{\phi}_{22}\,\underset{2}{\bar\phi}_{12}) + \phi_{01}(\underset{1}{\phi}_{22}\,\underset{2}{\bar\phi}_{02} - \underset{1}{\bar\phi}_{02}\,\underset{2}{\phi}_{22}) +\\
&\qquad + \bar\phi_{01}(\underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\bar\phi}_{12} + \underset{1}{\phi}_{22}\,\underset{2}{\phi}_{11} - \underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\phi}_{22} - \underset{1}{\bar\phi}_{12}\,\underset{2}{\phi}_{12}) +\\
&+\phi_{02}(\underset{1}{\bar\phi}_{02}\,\underset{2}{\bar\phi}_{12} - \underset{1}{\bar\phi}_{12}\,\underset{2}{\bar\phi}_{02}) + \bar\phi_{02}(\underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\phi}_{12} - \underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\phi}_{11}) + \phi_{11}(\underset{1}{\bar\phi}_{02}\,\underset{2}{\phi}_{12} - \underset{2}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\bar\phi}_{02} +\\
\text{(a)}\quad &+\underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{22} - \underset{1}{\phi}_{22}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01}) + \phi_{12}(\underset{1}{\bar\phi}_{12}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01} - \underset{1}{\bar\phi}_{02}\,\underset{2}{\phi}_{11} + \underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\bar\phi}_{02} - \underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\bar\phi}_{12}) + \bar\phi_{12}(\underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01} -\\
&-\underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{12}) + \phi_{22}(\underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{11} - \underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01})\Big] + \bar\phi_{01}(\underset{2}{b}\,\underset{1}{\phi}_{22} - \underset{1}{b}\,\underset{2}{\phi}_{22}) + \bar\phi_{02}\Big[-\bar\gamma_2 + (\underset{1}{b}\,\underset{2}{\phi}_{12} -\\
&-\underset{2}{b}\,\underset{1}{\phi}_{12})\Big] + 2\phi_{11}(\underset{1}{b}\,\underset{2}{\bar\phi}_{12} - \underset{2}{b}\,\underset{1}{\bar\phi}_{12}) + \phi_{12}(\underset{2}{b}\,\underset{1}{\bar\phi}_{02} - \underset{1}{b}\,\underset{2}{\bar\phi}_{02}) + 2\bar\phi_{12}\Big[\bar\gamma_1 + (\underset{2}{b}\,\underset{1}{\phi}_{11} -\\
&-\underset{1}{b}\,\underset{2}{\phi}_{11})\Big] + \phi_{22}\Big[-\bar\gamma_0 + (\underset{1}{b}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01} - \underset{2}{b}\,\underset{1}{\bar\phi}_{01})\Big] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-(\psi_2+\tfrac{R}{6})\gamma_0 + 2\psi_1\gamma_1 - \psi_0\gamma_2 = 8\Big[\phi_{00}(\underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\phi}_{11} - \underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\phi}_{12}) + \phi_{01}(\underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{12} - \underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01}) +\\
&\qquad + \bar\phi_{01}(\underset{1}{\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{12} - \underset{1}{\phi}_{02}\,\underset{2}{\phi}_{11} + \underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\phi}_{02} - \underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\phi}_{01}) +
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&+\phi_{02}(\underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01}-\underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{11})+\bar\phi_{02}(\underset{1}{\phi}_{02}\,\underset{2}{\phi}_{01}-\underset{1}{\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{02})+\phi_{11}(\underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\phi}_{00}-\underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{02}+\\
&+\underset{1}{\phi}_{02}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01}-\underset{1}{\phi}_{00}\,\underset{2}{\phi}_{12})+\phi_{12}(\underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{01}-\underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\phi}_{00}+\underset{1}{\phi}_{00}\,\underset{2}{\phi}_{11}-\underset{1}{\phi}_{01}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01})+\bar\phi_{12}(\underset{1}{\phi}_{00}\,\underset{2}{\phi}_{02}-\\
&-\underset{1}{\phi}_{02}\,\underset{2}{\phi}_{00})+\phi_{22}(\underset{1}{\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{00}-\underset{1}{\phi}_{00}\,\underset{2}{\phi}_{01})\Big]+\phi_{00}\Big[\bar\gamma_2+(\underset{1}{b}\,\underset{2}{\phi}_{12}-\underset{2}{b}\,\underset{1}{\phi}_{12})\Big]+2\phi_{01}\Big[-\bar\gamma_1+\\
&+(\underset{2}{b}\,\underset{1}{\phi}_{11}-\underset{1}{b}\,\underset{2}{\phi}_{11})\Big]+\bar\phi_{01}(\underset{2}{b}\,\underset{1}{\phi}_{02}-\underset{1}{b}\,\underset{2}{\phi}_{02})+2\phi_{11}(\underset{1}{b}\,\underset{2}{\phi}_{01}-\underset{2}{b}\,\underset{1}{\phi}_{01})+\phi_{02}\Big[\bar\gamma_0+(\underset{1}{b}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01}-\\
&-\underset{2}{b}\,\underset{1}{\bar\phi}_{01})\Big]+\phi_{12}(\underset{2}{b}\,\underset{1}{\phi}_{00}-\underset{1}{b}\,\underset{2}{\phi}_{00})\quad, \qquad\qquad \text{(III.20)}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
&-\psi_3\,\gamma_0+(2\psi_2-\tfrac{R}{6})\gamma_1-\psi_1\,\gamma_2=4\Big[\phi_{00}(\underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\bar\phi}_{12}+\underset{1}{\phi}_{22}\,\underset{2}{\phi}_{11}-\underset{1}{\bar\phi}_{12}\,\underset{2}{\phi}_{12}-\underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\phi}_{22})+\\
&\qquad+\phi_{01}(\underset{1}{\bar\phi}_{02}\,\underset{2}{\phi}_{12}-2\underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\bar\phi}_{12}+2\underset{1}{\bar\phi}_{12}\,\underset{2}{\phi}_{11}-\underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\bar\phi}_{02}-\\
&-\underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{22}+\underset{1}{\phi}_{22}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01})+\bar\phi_{01}(\underset{1}{\bar\phi}_{12}\,\underset{2}{\phi}_{02}-\underset{1}{\phi}_{02}\,\underset{2}{\bar\phi}_{12}-\underset{1}{\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{22}+\underset{1}{\phi}_{22}\,\underset{2}{\phi}_{01})+\phi_{02}(\underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\bar\phi}_{02}-\\
&-\underset{1}{\bar\phi}_{02}\,\underset{2}{\phi}_{11}+\underset{1}{\bar\phi}_{12}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01}-\underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\bar\phi}_{12})+\bar\phi_{02}(\underset{1}{\phi}_{02}\,\underset{2}{\phi}_{11}-\underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\phi}_{02}+\underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\phi}_{01}-\underset{1}{\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{12})+\\
&+\phi_{11}(\underset{1}{\phi}_{02}\,\underset{2}{\bar\phi}_{02}-\underset{1}{\bar\phi}_{02}\,\underset{2}{\phi}_{02}-2\underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{12}+2\underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01}-\underset{1}{\phi}_{00}\,\underset{2}{\phi}_{22}+\underset{1}{\phi}_{22}\,\underset{2}{\phi}_{00})+\\
&+\phi_{12}(\underset{1}{\bar\phi}_{02}\,\underset{2}{\phi}_{01}-\underset{1}{\phi}_{01}\,\underset{2}{\bar\phi}_{02}+\underset{1}{\bar\phi}_{12}\,\underset{2}{\phi}_{00}-\underset{1}{\phi}_{00}\,\underset{2}{\bar\phi}_{12})+\bar\phi_{12}(\underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{02}-\underset{1}{\phi}_{02}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01}+2\underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\phi}_{01}-\\
&-2\underset{1}{\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{11}+\underset{1}{\phi}_{12}\,\underset{2}{\phi}_{00}-\underset{1}{\phi}_{00}\,\underset{2}{\phi}_{12})+\phi_{22}(\underset{1}{\phi}_{01}\,\underset{2}{\bar\phi}_{01}-\underset{1}{\bar\phi}_{01}\,\underset{2}{\phi}_{01}+\underset{1}{\phi}_{11}\,\underset{2}{\phi}_{00}-\underset{1}{\phi}_{00}\,\underset{2}{\phi}_{11})\Big]+\\
&+\frac{1}{2}\,\phi_{00}(\underset{1}{b}\,\underset{2}{\phi}_{22}-\underset{2}{b}\,\underset{1}{\phi}_{22})+\phi_{01}(\underset{2}{b}\,\underset{1}{\bar\phi}_{12}-\underset{1}{b}\,\underset{2}{\bar\phi}_{12})+\bar\phi_{01}\,\bar\gamma_2+\frac{1}{2}\,\phi_{02}(\underset{1}{b}\,\underset{2}{\bar\phi}_{02}-\underset{2}{b}\,\underset{1}{\bar\phi}_{02})+\\
&+\frac{1}{2}\,\bar\phi_{02}(\underset{2}{b}\,\underset{1}{\phi}_{02}-\underset{1}{b}\,\underset{2}{\phi}_{02})-2\phi_{11}\,\bar\gamma_1+\phi_{12}\,\bar\gamma_0+\bar\phi_{12}(\underset{1}{b}\,\underset{2}{\phi}_{01}-\underset{2}{b}\,\underset{1}{\phi}_{01})+\frac{1}{2}\,\phi_{22}(\underset{2}{b}\,\underset{1}{\phi}_{00}-\\
&-\underset{1}{b}\,\underset{2}{\phi}_{00})\;.
\end{aligned}
$$

Estas tres relaciones (20) se ven muy complicadas, sin embargo, más adelante se simplificarán notablemente para espacios de Einstein y serán de gran ayuda.

La expresión original (16d) también tiene su contraparte NP, a saber:

$$(-\psi_0\ \gamma^2{}_2+\overline{\psi}_0\ \overline{\gamma}^2{}_2)+4(\psi_1\ \gamma_1\ \gamma_2-\overline{\psi}_1\ \overline{\gamma}_1\ \overline{\gamma}_2)+2\Big[-\psi_2(\gamma_0\ \gamma_2+2\gamma^2{}_1)+\overline{\psi}_2(\overline{\gamma}_0\ \overline{\gamma}_2\ +$$

$$+2\overline{\gamma}^2{}_1)\Big]\ +4(\psi_3\ \gamma_0\ \gamma_1\ -\ \overline{\psi}_3\ \overline{\gamma}_0\ \overline{\gamma}_1)+(-\psi_4\ \gamma^2{}_0+\overline{\psi}_4\ \overline{\gamma}^2{}_0)=\ -\ \frac{i}{12}\ \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\ {}^*C_3\ ,$$

$$,\ i\ =\ \sqrt{-1}\ .$$

$$\text{(III.21)}$$

Si (16b) se proyectan sobre la tetrada de NP obtenemos:

$$-\psi_0(2\underset{2}{\overline{\phi}}_{12}\ \underset{1}{\overline{\phi}}_{12}-\underset{2}{\overline{\phi}}_{02}\ \underset{1}{\phi}_{22}-\underset{2}{\phi}_{22}\ \underset{1}{\overline{\phi}}_{02})-2\psi_1(\underset{2}{\overline{\phi}}_{01}\ \underset{1}{\phi}_{12}-2\underset{2}{\phi}_{11}\ \underset{1}{\overline{\phi}}_{12}-2\underset{2}{\overline{\phi}}_{12}\ \underset{1}{\phi}_{11}+$$

$$+\underset{2}{\phi}_{12}\ \underset{1}{\overline{\phi}}_{02}+\underset{2}{\overline{\phi}}_{01}\ \underset{1}{\phi}_{22}+\underset{2}{\phi}_{22}\ \underset{1}{\overline{\phi}}_{01})+\psi_2(-8\underset{2}{\phi}_{11}\ \underset{1}{\phi}_{11}+\underset{2}{\phi}_{02}\ \underset{1}{\overline{\phi}}_{02}+\underset{2}{\overline{\phi}}_{02}\ \underset{1}{\phi}_{02}+\underset{2}{\phi}_{22}\ \underset{1}{\phi}_{00}+$$

$$\text{(a)}\quad +\underset{2}{\phi}_{00}\ \underset{1}{\phi}_{22}+4\underset{2}{\overline{\phi}}_{01}\ \underset{1}{\phi}_{12}+4\underset{2}{\phi}_{12}\ \underset{1}{\overline{\phi}}_{01}-2\underset{2}{\phi}_{01}\ \underset{1}{\overline{\phi}}_{12}-2\underset{2}{\overline{\phi}}_{12}\ \underset{1}{\phi}_{01})+2\psi_3(2\underset{2}{\phi}_{01}\ \underset{1}{\phi}_{11}-\underset{2}{\phi}_{02}\ \underset{1}{\overline{\phi}}_{01}-$$

$$-\underset{2}{\overline{\phi}}_{01}\ \underset{1}{\phi}_{02}-\underset{2}{\phi}_{12}\ \underset{1}{\phi}_{00}-\underset{2}{\phi}_{00}\ \underset{1}{\phi}_{12}+2\underset{2}{\phi}_{11}\ \underset{1}{\phi}_{01})-\psi_4(2\underset{2}{\phi}_{01}\ \underset{1}{\phi}_{01}-\underset{2}{\phi}_{02}\ \underset{1}{\phi}_{00}-\underset{2}{\phi}_{00}\ \underset{1}{\phi}_{02})\ -$$

$$-\ \text{C.C.}\ =\ 0\ ,\qquad\qquad \text{(III.22)}$$

$$\frac{i}{32}\ \varepsilon_r\ {}^*C_2=-\psi_0(\underset{r}{\overline{\phi}}{}^2{}_{12}-\underset{r}{\overline{\phi}}_{02}\ \underset{r}{\phi}_{22})-\psi_1(\underset{r}{\overline{\phi}}_{01}\ \underset{r}{\phi}_{12}-4\underset{r}{\phi}_{11}\ \underset{r}{\overline{\phi}}_{12}+\underset{r}{\phi}_{12}\ \underset{r}{\overline{\phi}}_{02}+2\underset{r}{\overline{\phi}}_{01}\ \underset{r}{\phi}_{22})+$$

$$\text{(b)}\qquad +\psi_2(\underset{r}{\overline{\phi}}_{02}\ \underset{r}{\phi}_{02}+\underset{r}{\phi}_{00}\ \underset{r}{\phi}_{22}-2\underset{r}{\phi}_{01}\ \underset{r}{\overline{\phi}}_{12}+4\underset{r}{\overline{\phi}}_{01}\ \underset{r}{\phi}_{12}-4\underset{r}{\phi}{}^2{}_{11})+2\psi_3(2\underset{r}{\phi}_{01}\ \underset{r}{\phi}_{11}-$$

$$-\underset{r}{\phi}_{02}\ \underset{r}{\overline{\phi}}_{01}-\underset{r}{\phi}_{00}\ \underset{r}{\phi}_{12})-\psi_4(\underset{r}{\psi}{}^2{}_{01}-\underset{r}{\phi}_{00}\ \underset{r}{\phi}_{02})\ -\ \text{C.C.}\ ,\quad r\ =\ 1,2\ .$$

donde C.C. denota el complejo conjugado de todos los términos anteriores.

Por último, las relaciones (14g) son equivalentes a:

$$\overline{\gamma}_0(\text{lado izquierdo de } (18g)) + \gamma_2(\text{miembro izq. de } (18h)) + \qquad \text{(III.23)}$$
$$+ (\gamma_1 - \overline{\gamma}_1)(\text{miem. izq. de } (18i)) = \frac{\varepsilon_2}{32}\, i\, \underset{2}{b}\, F_2 \quad ,$$

y se genera una ecuación semejante si ponemos $\underset{2}{\phi}_{ac}$ en lugar de $\underset{1}{\phi}_{ac}$ y $-\varepsilon_1$ sustituyendo a ε_2.

En esta forma hemos obtenido las principales condiciones necesarias que un R_4 debe cumplir para poder ser de clase dos, las cuales siempre deben verificarse antes de intentar la inmersión: si no se cumplen entonces es imposible concebir al espacio-tiempo como un subespacio de E_6. Algunas de estas condiciones son generalizaciones de relaciones ya presentes en la literatura, pero otras son totalmente originales. Conviene enfatizar que aún no se han construído (si existen) condiciones necesarias diferenciales para R_4 en E_6 ni algebraicas o diferenciales para R_4 en E_7.

3. ESPACIO-TIEMPO VACÍO.

Aquí mostraremos cómo el material desarrollado en el Cap. I y en las dos Seccs. anteriores permite realizar un adecuado estudio de las propiedades de inmersión de aquellas regiones de R_4 desprovistas de las fuentes del campo gravitacional ($R_{ab} = 0$). Veremos que la hipótesis de clase dos implicará determinadas características de las congruencias nulas generadas por los vectores de Debever-Penrose para cada tipo Petrov (nos limitaremos a espacios algebraicamente especiales porque para el tipo I nos fue imposible sacar conclusión alguna), en esta forma resultarán los teoremas de Collinson (1966) y Yakupov (1973); esperamos que el análisis de esta Secc. y de la siguiente muestre el poder de la técnica de NP.

En 1966 Collinson estudió a R_4 vacío sumergido en E_6 y logró obtener dos resultados que constituyen condiciones necesarias para la inmersión, a saber (utilizaremos la notación y terminología del Cap. I):

"En un R_4 vacío de clase dos y tipo II ó III debe existir una congruencia nula geodésica con sus tres escalares ópticos igual a cero" (III.24a)

y

"En un espacio-tiempo vacío inmerso en E_6 y tipo N ó D debe existir una congruencia nula geodésica sin deformación ni rotación" . (III.24b)

Aquí mostraremos que la congruencia nula de (24a,b) es generada por el vector repetido de Debever-Penrose. Posteriormente, Yakupov (1973), ver Hodgkinson (1984) pág. 582, encontró que:

"Es imposible sumergir en E_6 a cualquier R_4 vacío tipo III" , (III.24c) esto significa que (24a) sólo se aplica al tipo II. La conclusión (24c) se publicó sin prueba en una revista rusa (consultar Kramer-Stephani-MacCallum-Herlt (1980) pág. 369), aquí demostraremos dicho resultado.

Junto con (24c) Yakupov obtuvo que

$$\text{"En un } R_4 \text{ vacío de clase dos y tipo D ó II se tiene } F_{ac} = 0\text{"} \quad , \tag{III.24d}$$

donde F_{ar} es el tensor de Ricci que aparece en (1d). Hodgkinson (1984) pág. 584 afirma que F_{ac} también se anula para el tipo N, probaremos que esto es falso: F_{ij} puede o no ser cero para este tipo Petrov.

Del Cap. II recordemos que cualquier espacio-tiempo vacío no puede sumergirse en E_5, entonces un R_4 con $R_{ab} = 0$ tiene clase dos si acepta inmersión en E_6.

Por definición, el tensor de Ricci se anula para R_4 vacío así que en esta Secc. tendremos

$$\phi_{ab} = 0 \quad , \quad R = 0 \quad , \tag{III.24e}$$

y las propiedades de inmersión se analizarán para cada tipo $\neq$ I de campo gravitacional:

A).- <u>Tipo D</u>.

Con la tetrada canónica (I.14b) de NP tenemos

$$\psi_2 \neq 0 \quad , \quad \psi_r = 0 \quad , \quad r \neq 2 \quad , \qquad \text{(III.25a)}$$

entonces de (I.7d,III.11c,13b,16d,18,20):

$$\gamma_r = 0 \ , \ r = 0,1,2 \ ; \ F_{ap} = 0 \ , \ {}^*C_2 = {}^*C_3 = 0 \quad , \qquad \text{(III.25b)}$$

$$\underset{a}{\phi_{01}} = \underset{a}{\phi_{12}} = 0 \quad , \quad a = 1,2 \quad , \qquad \text{(III.25c)}$$

(25c) no se encuentran en el trabajo de Collinson (1966); de (I.11b,c,III.25a,b) obtenemos que ψ_2 es real:

$$\psi_2 = \overline{\psi}_2 \quad , \qquad \text{(III.25d)}$$

que en general no se cumple, es decir, (25d) es consecuencia de la hipótesis de que el R_4 vacío es sumergible en E_6; de (I.13e) es claro que C_2 y C_3 son distintos de cero. Si el teorema de Goldberg-Sachs (1962), ver (I.24e) lo aplicamos a cada dirección principal repetida (consultar la Tabla 2.- después de (I.15c)) concluímos que

$$\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0 \qquad \text{(III.25e)}$$

independientemente del proceso de inmersión, sin embargo, con (25d,e) ya es aplicable el teorema de Wainwright - (1974), ver (I.24a), entonces

$$\rho - \overline{\rho} = \mu - \overline{\mu} = 0 \qquad \text{(III.25f)}$$

cuando R_4 es de clase dos; así queda probado (24b) para el tipo D: los dos vectores de DP generan congruencias nulas geodésicas sin rotación ni deformación, consultar (I.18a).

El resultado $\rho = \overline{\rho}$ hace pensar en las métricas de Robinson-Trautman, pero recordemos (ver Bonnor-Davidson (1985)) que dichas soluciones tienen $\rho \neq 0$ y son generadas por un fluído perfecto lo cual no necesariamente ocurre en nuestro análisis. Collinson (1968a) pág. 410 probó que los espacios de Robinson-Trautman siempre pueden sumergirse en E_8 aunque algunas métricas quizás acepten inmersión en menor número de dimensiones.

Como $F_{ac} = 0$ (compatible con (24d)) entonces de (1d) vemos que las dos segundas formas fundamentales conmutan entre sí; de (I.23g,h,III.25d) obtenemos

$$\tau = - \overline{\pi} \quad . \qquad \text{(III.25g)}$$

Si sustituímos (25b,c) en (8b) entonces las partes real e imaginaria de ésta implican que

$$\underset{1}{\overline{\phi}}_{02} \underset{2}{\phi}_{02} - \underset{1}{\phi}_{02} \underset{2}{\overline{\phi}}_{02} = 0 \quad , \quad \underset{1}{\phi}_{22} \underset{2}{\phi}_{00} - \underset{1}{\phi}_{00} \underset{2}{\phi}_{22} = 0 \quad , \qquad \text{(III.25h)}$$

Collinson no deduce (25g,h). Ahora consideremos algunas métricas particulares tipo D con $R_{ab} = 0$:

a).- Schwarzschild.-

Por los trabajos de E. Kasner, Am. J. Math. 43, 130 (1921) (agradecemos al M. en C. G. González Padrón el habernos proporcionado este artículo), Fronsdal (1959), Plebański (1962) y Gupta-Goel (1975) sabemos que esta métrica es sumergible en E_6, las correspondientes cantidades de NP están en (IV.12b) y satisfacen las condiciones necesarias (25e,f,g) como debía de ser.

b).- Kerr (1963).-

Esta métrica es una generalización de la anterior y corresponde a un hoyo negro descargado en rotación; en Demianski (1976) y Hogan-Criss (1976) encontramos las cantidades de NP para esta solución las cuales violan (25d,f) así que esta solución no admite inmersión en E_6: El Dr. J. Plebański nos ha informado que él logró sumergirla en E_9, pero aún se desconoce si es un subespacio de E_7 ó E_8.

c).- Petrov (1962).-

Collinson (1968a) demostró que las primeras tres métricas (IV.21a) obtenidas por Petrov son de clase dos e indicó la inmersión explícita, dicho autor no estudió la cuarta métrica (IV.21a):

$$ds^2 = f^2(dx^{1^2} - dx^{4^2}) + f\, dx^{2^2} + f^{-1}\, dx^{3^2} \; , \; f = kx^3 + 1 \; , \; k = \text{cte.}, \tag{III.26a}$$

aquí probaremos que ella también tiene clase dos, en efecto, elegimos la tetrada nula tal que

$$(m^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, f^{-\frac{1}{2}}, -i\ f^{\frac{1}{2}}, 0) \quad , \quad (\ell^a) = \frac{f^{-1}}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1) \quad ,$$

$$(n^a) = \frac{f^{-1}}{\sqrt{2}}(1,0,0,1) \ , \ \tau = \pi = -4\alpha = -4\beta = \frac{ik}{\sqrt{2f}} \ , \ R = 0 \quad . \qquad \text{(III.26b)}$$

$$\phi_{ab} = 0 \quad , \quad \psi_a = 0 \quad , \quad a \neq 2 \quad , \quad \psi_2 = -\frac{K^2}{2f} \quad ,$$

y los demás coeficientes de espín se anulan; (26b) satisfacen (25d,...,g). Si ahora definimos las funciones

$$z^1 = \frac{f}{2}(x^{1^2} - x^{4^2} + 1) \ , \ z^2 = \frac{f}{2}(x^{1^2} - x^{4^2} - 1) \ , \ z^3 = x^1\ f \ ,$$

$$\text{(III.26c)}$$

$$z^4 = x^4\ f \ , \ z^5 = \frac{2}{k}\sqrt{f}\ \mathrm{Sen}(\frac{kx^2}{2}) \ , \ z^6 = \frac{2}{k}\sqrt{f}\ \mathrm{Cos}(\frac{kx^2}{2}) \quad ,$$

entonces (26a) nos queda:

$$ds^2 = -dz^{1^2} + dz^{2^2} + dz^{3^2} - dz^{4^2} + dz^{5^2} + dz^{6^2} \quad ,$$

$$\text{(III.26d)}$$

por lo tanto esta métrica es de clase dos.

Se nos ocurrió modificar las funciones (16c) para así generar un espacio sumergible en E_6 por construcción:

$$z^1 = \frac{f^{2/3}}{2}(x^{1^2} + x^{2^2} + 1) \ , \ z \ = \frac{f^{2/3}}{2}(x^{1^2} + x^{2^2} - 1) \ , \ z^3 = x^1\ f^{2/3} \quad ,$$

$$\text{(III.26e)}$$

$$z^4 = x^2\ f^{2/3} \ , \ z^5 = \frac{f}{k}\ \mathrm{Senh}(kx^3) \ , \ z^6 = \frac{f}{k}\ \mathrm{Cosh}(kx^3) \quad ,$$

entonces

$$ds^2 = f^{4/3}({dx'}^2+{dx^2}^2) + f^2\, {dx^3}^2 - {dx^4}^2 \ , \ f = kx^4 + 1 \ , \ k = \text{cte.}$$

(III.26f)

$$= -{dz'}^2 + {dz^2}^2 + {dz^3}^2 + {dz^4}^2 + {dz^5}^2 - {dz^6}^2 \ ,$$

la cual es tipo O y no cumple $R_{ab} = 0$, ver (IV.17a,b). Esta métrica es de clase dos porque no acepta inmersión en E_5 ya que viola la expresión (ℓ) de las identidades de Collinson del Cap. II.

d).- Métrica C.-

Este espacio vacío es tipo D con elemento de línea (ver Kramer-Stephani-MacCallum-Herlt (1980) pág. 188):

$$ds^2 = (x+y)^{-2}\,(f^{-1}\, dx^2 + h^{-1}\, dy^2 + f\, d\phi^2 - h\, dt^2) \ ,$$

(III.27a)

$$f = x^3 + ax + b \ , \quad h = y^3 + ay - b \ , \quad a,b = \text{ctes.} \ ,$$

cuyas cantidades de NP están dadas por ($x' = x$, $x^2 = y$, $x^3 = \phi$, $x^4 = t$):

$$(m^a) = \frac{(x+y)}{\sqrt{2}}\,(\sqrt{f},0,\frac{i}{\sqrt{f}},0) \ , \quad (\ell^a) = \frac{(x+y)}{\sqrt{2}}\,(0,-\sqrt{h},0,\frac{1}{\sqrt{h}},0) \ ,$$

$$(n^a) = \frac{(x+y)}{\sqrt{2}}\,(0,\sqrt{h},0,\frac{1}{\sqrt{h}}) \ , \quad \kappa = \sigma = \lambda = \nu = 0 \ , \quad R = 0 \ ,$$

$$\mu = \rho = \sqrt{\frac{h}{2}}\ , \quad \tau = -\pi = \sqrt{\frac{f}{2}}\ , \quad \phi_{ab} = 0\ , \quad \psi_r = 0\ , \quad r \neq 2\ ,$$

$$\gamma = \varepsilon = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2h}}(3y^2+a)(x+y)\ , \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(x+y)^3\ , \qquad \text{(III.27b)}$$

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{f}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2f}}(3x^2+a)(x+y)\ ,$$

cumpliendose las condiciones necesarias (25d,f,g); no se sabe si esta métrica es sumergible en E_6 ni siquiera se ha publicado su inmersión en algún E_r, $r = 7,\ldots,10$.

e).- Kasner (1921) tipo D.-

Esta solución de las ecuaciones de campo $R_{ab} = 0$ se indicó en (IV.15) y es de clase dos, consultar Kramer-Stephani-MacCallum-Herlt (1980) pág. 370; se desconoce la clase de inmersión de la métrica tipo I de Kasner ($2 \leq$ clase $\leq$ según Goenner (1980) pág. 455).

f).- Taub (1951).-

En (IV.13) expusimos este 4-espacio junto con sus cantidades de NP satisfaciendo (25.d,f,g), de acuerdo a Goenner (1980) pág. 455 esta métrica es de clase dos.

B).- TIPO II.-

La tetrada canónica (I.14b) nos permite elegir:

$$\psi_2 \neq 0\ , \quad \psi_4 = 1\ , \quad \psi_r = 0\ , \quad r \neq 2,4 \qquad \text{(III.28a)}$$

entonces en forma análoga al tipo D volvemos a obtener (25b,...,g) y

$$\underset{r}{\phi_{00}} = 0 \quad , \quad \underset{r}{\phi_{02}} = \underset{r}{\overline{\phi}_{02}} \quad , \quad r = 1,2 \tag{III.28b}$$

$$D\psi_2 = 3\rho \ \psi_2 \quad ; \tag{III.28c}$$

con $\underset{r}{\phi_{00}} = \underset{r}{\phi_{01}} = 0$ y (I.5e) concluímos que

$$\text{"}n^a \text{ es eigenvector de } \underset{r}{b}_{pq} \ , \ r = 1,2\text{"} \quad . \tag{III.28d}$$

De (6a,b) obtenemos:

$$\begin{aligned} D\underset{1}{\phi_{11}} &= \rho \ \underset{1}{\phi_{11}} - \varepsilon_2 \ \Theta_4 \ \underset{2}{\phi_{11}} \ , \ D\underset{1}{b} = 8\rho \ \underset{1}{\phi_{11}} - \varepsilon_2 \ \Theta_4 \ \underset{2}{b} \ , \\ D\underset{2}{\phi_{11}} &= \rho \ \underset{1}{\phi_{11}} + \varepsilon_1 \ \Theta_4 \ \underset{1}{\phi_{11}} \ , \ D\underset{2}{b} = 8\rho \ \underset{2}{\phi_{11}} + \varepsilon_1 \ \Theta_4 \ \underset{1}{b} \ , \end{aligned} \tag{III.28e}$$

entonces al aplicar el operador D a (4e) y emplear (28c, e) resulta $\rho = 0$ verificándose así (24a) para el tipo II; además, (6h,i) y $\rho = 0$ implican

$$\gamma - \overline{\gamma} = \lambda - \overline{\lambda} = \varepsilon - \overline{\varepsilon} = 0 \quad . \tag{III.28f}$$

Para este tipo Petrov debe tenerse $\tau \neq 0$ para no contradecir a (I.21q); aquí vuelve a comprobarse (24d).

C).- TIPO III.-

Aquí daremos una prueba NP del resultado (24c) debido a

Yakupov (1973). De (I.8f,14b,23,III.18,20) obtenemos:

$$\psi_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\ ,\ \psi_r = 0\ ,\ r \neq 3\ ,\ C_a = {}^*C_a = 0\ ,\ a = 2,3\ ,$$

$$\gamma_0 = \gamma_1 = F_1 = F_2 = 0\ ,\quad \underset{r}{\phi}_{00} = \underset{r}{\phi}_{01} = 0\ ,\quad r = 1,2\ ,$$

$$\gamma_2\ \underset{r}{\phi}_{02} - \frac{1}{4}\underset{r}{b}\ \bar{\gamma}_2 = 0\ ,\quad D\gamma_2 = -\rho\,\gamma_2\ ,\quad \rho = \varepsilon\ ,\quad \beta = \tau\ , \tag{III.29a}$$

$$2\psi_3(\underset{1}{\phi}_{12} + \underset{1}{\bar{\phi}}_{12}) = \varepsilon_2(\bar{\gamma}_2\ \underset{2}{\bar{\phi}}_{12} - \gamma_2\ \underset{2}{\phi}_{12})\ ,\ \gamma = -2\mu\ ,\ \kappa = \sigma = 0\ ,$$

$$2\,\psi_3(\underset{1}{\phi}_{02} - 2\underset{1}{\phi}_{11}) = \varepsilon_2(\gamma_2\ \underset{2}{\phi}_{02} - 2\bar{\gamma}_2\ \underset{2}{\phi}_{11})\ ,\quad \alpha = -2\pi\ ,$$

y con (4e,f,29a) es fácil deducir que ($H = \pm 1$):

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1,\ \underset{1}{\phi}_{11} = H\underset{2}{\phi}_{11}\ ,\ \underset{1}{b} = H\underset{2}{b}\ ,\ (2\psi_3 + H\varepsilon_2\ \gamma_2)(\underset{2}{\phi}_{02} - H\underset{1}{\phi}_{02}) = 0\ . \tag{III.29b}$$

Ahora es conveniente considerar dos casos:

i).- $\underline{\gamma_2 = 0}$.

Entonces de (29) resulta:

$$\underset{r}{\bar{\phi}}_{12} = -\underset{r}{\phi}_{12}\ ,\ \underset{r}{\phi}_{02} = \underset{r}{\bar{\phi}}_{02} = 2\underset{r}{\phi}_{11}\ ,\ \underset{1}{\phi}_{02} = H\underset{2}{\phi}_{02}\ ,\ r = 1,2$$

que en unión de (4g,h,i,ℓ) implica

$$\underset{r}{\phi}_{02} = -\frac{1}{4}\underset{r}{b}\ ,\ \underset{r}{\phi}_{11} = -\frac{1}{8}\underset{r}{b}\ ,\ \underset{1}{\phi}_{22} = H\underset{2}{\phi}_{22}\ ,\ \underset{1}{\phi}_{12} = -H\underset{2}{\phi}_{12}\ ,$$

$$\psi_3 = -2\varepsilon_1 \underset{1}{b} \underset{1}{\phi}_{12} \quad ,$$

por otro lado, las ecuaciones de Codazzi (6a,d,e,g,i) y $\delta\psi_3 = 0$ nos dan

$$\rho = \varepsilon = 0 \quad , \quad \mu = \overline{\mu} \quad , \quad \lambda = -\mu \quad , \quad \pi = -\frac{1}{4}(\tau + 3\overline{\tau})$$

y finalmente de (I.21m) deducimos

$$\psi_3 = \delta\mu + \overline{\delta}\mu - 2\mu(\pi + \overline{\pi}) = \text{cantidad real}$$

en contradicción con $\psi_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}}$.

ii).- $\underline{\gamma_2 \neq 0}$.

De (4g,h,i,k,ℓ,8c,29) obtenemos que

$$\underset{1}{\phi}_{02} = H \underset{2}{\phi}_{02} \; , \; \underset{r}{\phi}_{02} = \overline{\underset{r}{\phi}}_{02} = -\frac{1}{4}\underset{r}{b} \; , \; \overline{\underset{r}{\phi}}_{12} = -\underset{r}{\phi}_{12} \quad ,$$

$$\underset{1}{\phi}_{22} = H \underset{2}{\phi}_{22} \quad , \quad \underset{1}{\phi}_{12} = -H \underset{2}{\phi}_{12} \quad , \quad \rho = \overline{\rho} = \varepsilon \quad , \tag{III.30a}$$

$$\psi_3 = \varepsilon_1 (8\underset{1}{\phi}_{11} - \underset{1}{b}) \underset{1}{\phi}_{12} \; , \; \gamma_2 = -2(8\underset{1}{\phi}_{11} + \underset{1}{b}) \underset{2}{\phi}_{12} \quad ,$$

además, (6a,b,f,g,29,30a) generan las relaciones:

$$\rho = \epsilon = 0 \quad , \quad \tau = -\overline{\pi} \quad , \quad D\underset{r}{\phi_{11}} = \epsilon_1 \, \Theta_4 \, H \, \underset{r}{\phi_{11}} \quad ,$$

$$D\underset{r}{b} = \epsilon_1 \, \Theta_4 \, H \, \underset{r}{b} \quad , \quad D\underset{r}{\phi_{12}} = -\,\epsilon_1 \, H \, \Theta_4 \, \underset{r}{\phi_{12}} \quad , \tag{III.30b}$$

entonces (I.21) implican

$$\tau = \pi = \alpha = \beta = 0 \quad , \quad D\mu = D\lambda = \delta\mu = 0 \quad ,$$

$$\delta\lambda = -\frac{3}{2}\psi_3 \ , \ \delta\overline{\mu} = \frac{1}{2}\psi_3 \quad , \quad D\nu = \psi_3 \quad , \tag{III.30c}$$

por último, de (6d,g,i,j,30) y $\delta\psi_3 = 0$ deducimos que

$$\lambda - \overline{\lambda} = 3(\overline{\mu} - \mu) \ , \ \lambda = \frac{1}{5}(7\overline{\mu} - 8\mu) \ , \ \underset{r}{\phi_{11}} = -\frac{3}{2}\underset{r}{\phi_{02}} = \frac{3}{8}\underset{r}{b} \quad ,$$

$$\psi_3 = 2\epsilon_1 \underset{1}{b}\,\underset{1}{\phi_{12}} \ , \ \delta\underset{r}{b} = \epsilon_1 \, H \, \Theta_1 \, \underset{r}{b} \ , \ \delta\underset{r}{\phi_{12}} = -\,\epsilon_1 \, H \, \Theta_1 \, \underset{r}{\phi_{12}} \quad ,$$

$$\Delta\underset{r}{b} = (\epsilon_1 \, H \, \Theta_3 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2}\overline{\mu}) \, \underset{r}{b} \quad ,$$

de donde $\delta\lambda = \frac{7}{10}\psi_3$ contradiciendo así a (30c) porque - $\psi_3 \neq 0$.

En los casos $\gamma_2 = 0$ y $\gamma_2 \neq 0$ llegamos a inconsistencias, esto prueba (24c); sólo se indicaron los aspectos principales de la demostración, ésta es muy laboriosa (y no-trivial) por lo que decidimos no exponerla en detalle. Consideremos algunas métricas tipo III con $R_{ab} = 0$:

a).- Petrov (1962).-

En Collinson (1968a) pág. 410 el espacio:

$$ds^2 = e^{x^2}\left[e^{-2x^4}(dx^1)^2+(dx^2)^2\right] + 2\,dx^3\,dx^4 - x^2(x^3 + e^{x^2})(dx^4)^2 \quad , \tag{III.31a}$$

se sumerge en E_7, así en virtud de (24c) concluímos que (31a) es de clase tres. Por completez indicaremos cantidades de NP para esta métrica:

$$(m^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,(e^{x^4},i,0,0) \ , \quad (\ell^a) = (0,0,\frac{x^2}{\sqrt{2}}\,(x^3 + e^{x^2}) \ , \sqrt{2}) \quad ,$$

$$(n^a) = (0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},0) \quad , \quad \kappa = \varepsilon = \sigma = \rho = \pi = \tau = 0 \quad , \quad R = 0 \quad ,$$

$$\mu = \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \gamma = -\frac{x^2}{2\sqrt{2}} \ , \ \alpha = \beta = \frac{i}{4\sqrt{2}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} \ , \quad \phi_{ab} = 0 \quad , \tag{III.31b}$$

$$\nu = -\frac{i}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\left[x^3 + (1 + x^2)e^{x^2}\right] \quad , \quad \psi_a = 0 \quad , \quad a \neq 3,4 \quad ,$$

$$\psi_3 = \frac{i}{2}\,e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad \psi_4 = -\frac{1}{2}(3 + x^2 - x^3\,e^{-x^2}) \quad ,$$

el tipo Petrov puede checarse con (I.13g); de (I.18a, - III.31b) vemos que el vector repetido de DP genera una - congruencia nula geodésica con sus tres escalares ópti-- cos igual a cero: no existe deformación, rotación ni expansión.

b).- Siklos (1978).-

El siguiente espacio vacío tipo III (ver Kramer-Stephani--MacCallum-Herlt (1980) pág. 378):

$$ds^2 = \frac{r^2}{x^3}\,(dx^2 + dy^2) - 2\,du\,dr + \frac{3}{2}\,x\,du^2 \quad , \qquad \text{(III.32a)}$$

no acepta inmersión en E_6 debido a (24c), sin embargo, sí es sumergible en E_8 porque es una solución tipo -; Robinson-Trautman (consultar J9 de Collinson (1968a)): se desconoce si es un subespacio de E_7 por lo que se ignora su clase de inmersión. Las cantidades de NP para esta métrica son ($x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = r$, $x^4 = u$):

$$(m^a) = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2}\,r}\,(1,-i,0,0) \ , \quad (\ell^a) = \left(0,0,-\frac{\sqrt{3x}}{2}, \frac{2}{\sqrt{3x}}\right) \quad ,$$

$$(n^a) = \left(0,0,-\frac{\sqrt{3x}}{2},0\right) \ , \quad \kappa = \sigma = \lambda = \tau = \pi = \varepsilon = \gamma = 0 \quad ,$$

$$\rho = -\mu = \frac{\sqrt{3x}}{2r} \ , \quad \alpha = -\nu = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{x}{2}} \ , \quad \beta = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2r}\sqrt{\frac{x}{2}} \ , \qquad \text{(III.32b)}$$

$$\phi_{ab} = 0 \ , \quad R = 0 \ , \quad \psi_a = 0 \ , \quad a \neq 3,4 \quad ,$$

$$\psi_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{x}{2r^2} \quad , \quad \psi_4 = -\frac{3x}{2r^2} \quad ,$$

en este caso la congruencia nula del vector repetido de DP sí se expande.

c).- <u>Held-Robinson</u>.-

Métricas tipo III con $R_{ab} = 0$ y cuya congruencia nula degenerada rota fueron construídas por A. Held, Lett. Nuovo Cim. 11, 545 (1974) e I. Robinson, Gen. Relat. Grav. 6, 423 (1974), entonces por (24c) concluímos que dichos espacios no admiten inmersión en E_6.

D).- <u>TIPO N</u>.-

El teorema de Goldberg-Sachs (I.24e) conduce a $\kappa = \sigma = 0$, y para este tipo Petrov $*C_a = C_a = 0$, $a = 2,3$, ver (I.13e), entonces con la tetrada canónica, (20) y las identidades de Bianchi tenemos

$$\psi_4 = 1 \ , \ \psi_r = 0 \ , \ r \neq 4 \ , \ \gamma_0 = F_2 = 0 \ , \ \gamma^2{}_1 = \overline{\gamma}^2{}_1 \ ,$$
$$\rho = 4\varepsilon \ , \ \tau = 4\beta \ , \ \gamma_1 = \text{real ó imaginario} \ , \qquad \text{(III.33a)}$$

así que es conveniente estudiar tres casos:

a).- $\underline{\gamma_1 = \overline{\gamma}_1 \neq 0}$.

De (I.26c) es inmediato que $\rho = \overline{\rho}$ en acuerdo con (24b).

b).- $\underline{\gamma_1 = - \overline{\gamma}_1 \neq 0}$.

De (6a,18,20) obtenemos:

$$\underset{r}{\phi_{11}} = \frac{1}{8} \underset{r}{b} \quad , \quad \underset{r}{\phi_{00}} = \underset{r}{\phi_{01}} = 0 \quad , \quad (\rho - \overline{\rho})\underset{r}{\phi_{11}} = 0$$

$$\gamma_2 \underset{r}{\phi_{02}} - \frac{1}{4} \underset{r}{b} \overline{\gamma}_2 - 2\gamma_1 \underset{r}{\phi_{12}} = 0 \quad , \qquad \text{(III.33b)}$$

$$\underset{1}{\phi_{02}} - \underset{1}{\overline{\phi}_{02}} = \varepsilon_2(\gamma_2 \underset{2}{\phi_{12}} - \overline{\gamma}_2 \underset{2}{\overline{\phi}_{12}} - 2\gamma_1 \underset{2}{\phi_{22}}) \quad ,$$

Si $\left[(\underset{1}{\phi_{11}})^2 + (\underset{2}{\phi_{11}})^2\right] \neq 0$ entonces es claro que $\rho = \overline{\rho}$ cum- pliéndose así (24b). En consecuencia, aceptemos $\underset{r}{\phi_{11}}=0$ ∴

$$\underset{r}{b} = 0 \quad , \quad \gamma_2 \underset{r}{\phi_{02}} - 2\gamma_1 \underset{r}{\phi_{12}} = 0 \quad , \qquad \text{(III.33c)}$$

aquí se originan dos casos:

b_1).- $\gamma_2 = 0$.

Las relaciones (6d,f,g,33c) implican

$$\rho \underset{r}{\phi_{22}} - \lambda \underset{r}{\phi_{02}} = 0 \ , \ \pi \underset{r}{\phi_{02}} = \overline{\tau} \underset{r}{\phi_{02}} = 0 \ , \ \underset{r}{\phi_{12}} = 0 \quad , \qquad \text{(III.33d)}$$

si $\underset{r}{\phi_{02}} = 0$, $r = 1,2$ entonces se viola (4i), por lo tanto $\underset{1}{\phi_{02}} \neq 0$ ó/y $\underset{2}{\phi_{02}} \neq 0$ y así (I.21p,33d) nos dan $\pi=\tau=\overline{\lambda}\rho=0$: si $\rho = 0$ queda probado (24b), entonces aceptemos $\rho \neq 0$ ∴ $\lambda = 0$ y (33d) implica $\underset{r}{\phi_{22}} = 0$ en contradicción con (4i).

b_2).- $\gamma_2 \neq 0$.

Si $\rho = 0$ se verifica (24b) y finaliza el análisis, entonces sea $\rho \neq 0$, y de (6g,8b,c) obtenemos

$$\underset{r}{\phi_{12}} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\rho}} \underset{r}{\phi_{02}} \;,\; \gamma_2 = \frac{4\bar{\tau}}{\bar{\rho}} (\underset{1}{\bar{\phi}_{02}} \underset{2}{\phi_{02}} - \underset{1}{\phi_{02}} \underset{2}{\bar{\phi}_{02}}) = \frac{2\bar{\tau}}{\bar{\rho}} \gamma_1 \;,\; \tau \neq 0 \;,$$

si a esta última relación le aplicamos el operador D y - utilizamos (I.21a,c,26b,c,III.33a) deducimos que

$$D\rho = \frac{\rho}{4}(5\rho+\bar{\rho}) \;,\; D\tau = \frac{1}{4}\left[\rho(5\tau+4\bar{\pi})-\bar{\rho}\tau\right] \;,\; \bar{\tau}(\rho-\bar{\rho}) = 0 \;,$$

entonces $\rho = \bar{\rho}$ porque $\tau \neq 0$ y así vuelve a cumplirse - (24b).

c).- $\gamma_1 = 0$.

Aquí es útil considerar dos casos:

c_1).- $\gamma_2 \neq 0$.

Entonces de (6a,18) obtenemos

$$\underset{r}{\phi_{00}} = \underset{r}{\phi_{01}} = 0 \;,\; \underset{r}{\phi_{11}} = \frac{1}{8} \underset{r}{b} \;,\; (\rho - \bar{\rho})\underset{r}{\phi_{11}} = 0 \;,\; \gamma_2 \underset{r}{\phi_{02}} - \frac{1}{4} \underset{r}{b}\, \bar{\gamma}_2 = 0 \;, \qquad \text{(III.33e)}$$

si $\left[(\underset{1}{\phi_{11}}) + (\underset{2}{\phi_{11}})^2\right] \neq 0$ resulta $\rho = \bar{\rho}$ en acuerdo con (24b). Aceptemos $\underset{r}{\phi_{11}} = 0$, así (4$\ell$,18,33e) implican

$$\underset{r}{b} = \underset{r}{\phi_{02}} = 0 \;,\; \gamma_2 \underset{r}{\phi_{12}} - \bar{\gamma}_2 \underset{r}{\bar{\phi}_{12}} = 0 \;,\; \sum_r \varepsilon_r \underset{r}{\bar{\phi}_{12}}^2 = 0$$

en contradicción con (4i).

c_2).- $\gamma_2 = 0$.

De (6a,18):

$$\underset{r}{\phi}_{00} = \underset{r}{\phi}_{01} = 0 \quad , \quad \underset{r}{\phi}_{02} - \underset{r}{\bar{\phi}}_{02} = 0 \quad , \quad (\rho - \bar{\rho})\underset{r}{\phi}_{11} = 0 \quad , \tag{III.33f}$$

si $\underset{1}{\phi}_{11} \neq 0$ o/y $\underset{2}{\phi}_{11} \neq 0$ entonces (24b) queda probado. Sean $\underset{r}{\phi}_{11} = 0$, así (4e,33f) nos dan

$$\varepsilon_1 \underset{1}{b}^2 + \varepsilon_2 \underset{2}{b}^2 = 0 \quad , \tag{III.33g}$$

esto genera dos opciones: $\underset{r}{b} = 0$ que en unión de (6g) conduce a

$$\bar{\tau} \underset{1}{\phi}_{02} - \bar{\rho} \underset{1}{\phi}_{12} = 0 \quad ,$$

si $\rho = 0$ no hay nada que probar. Si $\rho \neq 0$ entonces (4d) implica

$$\varepsilon_1 (\underset{1}{\phi}_{02})^2 + \varepsilon_2 (\underset{2}{\phi}_{02})^2 = 0 \tag{III.33h}$$

cuyas posibilidades $\underset{r}{\phi}_{02} = 0$ y $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, $\underset{1}{\phi}_{02} = H \underset{2}{\phi}_{02}$, $H = \pm 1$ contradicen a (4i). La otra opción permitida por (33g), a saber, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ y $\underset{1}{b} = H \underset{2}{b}$ con $\rho \neq 0$ vuelve a dar (33h) en oposición a (4i).

Con lo efectuado queda demostrado (24b) para el tipo N y vemos que F_{ac} puede o no valer cero, así que no es correcta la afirmación de Hodgkinson (1984) pág. 584. Consideremos tres métricas tipo N con $R_{ab} = 0$:

a).- Petrov (1962) pág. 384.

El espacio vacío con elemento de línea:

$$ds^2 = -2\,dx'\,dx^4 + \mathrm{Sen}^2\,x^4\,{dx^2}^2 + \mathrm{Senh}^2\,x^4\,{dx^3}^2 \quad , \qquad \text{(III.34a)}$$

admite un vector nulo constante (su dirección principal degenerada) así que debe ser tipo N por los teoremas de Letelier (1979) y Taub (1984), además, es de clase dos como fue probado en J11 por Collinson (1968a). Sus cantidades de NP son:

$$(m^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, \frac{1}{\mathrm{Sen}x^4}, -\frac{i}{\mathrm{Senh}x^4}, 0\right) \ , \ (\ell^a) = (0,0,0,1) \ ,$$

$$(n^a) = (1,0,0,0) \ , \ \phi_{ab} = 0 \ , \ R = 0 \ , \ \psi_a = 0 \ , \ a \neq 4 \ , \ \psi_4 = 1 \ , \qquad \text{(III.34b)}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(\mathrm{ctg}\,x^4 - \mathrm{ctgh}\,x^4) \ , \ \mu = \frac{1}{2}(\mathrm{ctg}\,x^4 + \mathrm{ctgh}\,x^4) \ ,$$

y los demás coeficientes de espín se anulan; se verifica (24b).

b).- Ondas gravitacionales.

La métrica para ondas planas sobre el eje x^3 está dada por:

$$ds^2 = (dx')^2 + (dx^2)^2 - 2\, dx^3\, dx^4 + 2\, H(x', x^2, x^4)\, (dx^4)^2 \quad , \quad (III.34c)$$

es tipo N con $H_{,11} + H_{,22} = 0$ y es sumergible en E_6, ver J8 de Collinson (1968a).

c).- Hauser.-

En el artículo de I. Hauser, Phys. Rev. Lett. 33, 1112 (1974) se obtuvo una métrica tipo N con $R_{ab} = 0$ pero cuya congruencia principal repetida posee rotación, así que viola (24b) y en consecuencia no es de clase dos. Esta métrica de Hauser es bi-paramétrica por lo que dependiendo de los valores de sus parámetros aceptará inmersión en algún E_r ,$r = 7,\ldots,10$.

Antes de finalizar esta Sección haremos tres comentarios:

1.- No se han publicado métricas Tipo I ó II con $R_{ab} = 0$ inmersas en E_6.

2.- Para los tipos O, III y N es claro que ${}^*C_2 = 0$ independientemente del proceso de inmersión, ver (I.13e). Si ahora exigimos que R_4 sea de clase dos entonces ${}^*C_2$ también vale cero para los tipos II y D por el teorema (24d) el cual es válido para $R_{ab} = 0$, en la próxima Secc. mostraremos que (24d) también se aplica a espacios de Einstein no-vacíos (ver (I.6c)). El asunto es que Goenner (1973,75,80) afirma (sin prueba) que

$$\text{"}{}^*C_2 = 0 \text{ para todo } R_4 \text{ tipo II ó D inmerso en } E_6\text{"} \quad , \quad (III.35)$$

por lo tanto: si (35) es válida (lo cual dudamos) entonces está pendiente su demostración, en caso contrario debe construirse una métrica de clase dos con $^{*}C_2 \neq 0$. El descuido de Goenner estuvo así: En su tesis de Habilitación (1973) él se apoyó en el trabajo de Yakupov (1968) para probar (35) pero nunca se dió cuenta de que los resultados de éste autor <u>sólo</u> valían para espacios con $R_{ab} = \frac{R}{4} g_{ab}$, hasta que se lo hicimos notar según lo admite en una carta que nos dirigió el 4 de Julio de 1985.

3.- En los párrafos depués de (27b) indicamos que la métrica de Taub (1951):

$$ds^2 = f^{-1}(dx^2-dt^2)+f^2(dy^2+dz^2) \quad , \quad f = \sqrt{1+kx} \quad , \quad k = \text{cte.} \qquad \text{(III.36a)}$$

era de clase dos, enseguida daremos la inmersión explícita (es poco usual que en la literatura se indiquen las funciones que definen a (36a) como un subespacio de E_6, al menos no las hemos localizado en alguna publicación):

$$z^1 = A(x)+\frac{f}{2}(y^2+z^2-1) \quad , \quad z^2 = A(x)+\frac{f}{2}(y^2+z^2+1) \quad , \quad A(x) = \frac{x}{k} - \frac{f^{-2}}{16} \quad ,$$

$$z^3 = yf \; , \; z^4 = zf \; , \; z^5 = f^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Cosh} t \; , \; z^6 = f^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Senh} t \quad , \qquad \text{(III.36b)}$$

$$ds^2 = (36.a) = dz'^2 - dz^{2^2} + dz^{3^2} + dz^{4^2} + dz^{5^2} - dz^{6^2} \quad .$$

4. ESPACIOS DE EINSTEIN CON $R \neq 0$.

En esta Sección mostraremos que los teoremas (24a,b) obtenidos por Collinson (1966) pueden extenderse a espacios de Einstein no-vacíos, es decir, cuando

$$R_{ab} = \frac{R}{4} g_{ab} \quad \therefore \quad \phi_{ab} = 0 \quad . \qquad \text{(III.37)}$$

Si R_4 es conformalmente plano entonces (37) implica el modelo de DeSitter de clase uno, así que en nuestro análisis descartaremos el tipo O; en los tipos III y N es evidente que $*C_2 = *C_3 = 0$, enseguida probaremos que estos invariantes también se anulan en los tipos II y D inmersos en E_6 cumpliendo (37). En efecto, para un espacio de Einstein, (15b) nos queda

$$C_{rjkm} F^{km} = - \frac{R}{3} F_{rj}$$

es decir,

$$C_{rjkm} N^{km} = - \frac{R}{3} N_{rj} \text{ con } N_{rj} \equiv F_{rj} + i *F_{rj} \text{ , } i = \sqrt{-1} \qquad \text{(III.38a)}$$

esto significa que N_{rj} es un eigentensor principal de C_{rjkm} con valor propio real $= - \frac{R}{3}$, entonces de acuerdo a la clasificación de Petrov, ver el Cap. I, deducimos que $*C_a = 0$, $a = 2,3$, así se origina el teorema:

"Todo espacio-tiempo de Einstein (incluyendo $R = 0$) de clase dos y tipo D ó II satisface $*C_2 = *C_3 = 0$" , (III.38b)

este resultado se debe a Yakupov (1968) pág. 586; de (I.13e,III.38b) es inmediato que

"Si R_4 es de Einstein y está inmerso en E_6, entonces $C^2{}_3 = \frac{1}{12} C^3{}_2$ (por lo tanto $C_2 > 0$) para los tipos II y D" . (III.38c)

En realidad más adelante probaremos mediante el formalismo de NP que:

"Todo R_4 de Einstein ($R \neq 0$) de clase dos y tipo D ó II tiene $F_{ac} = 0$" , (III.38d)

el cual incluye a (38b) como caso particular cuando $R \neq 0$ (recordar (11c,13b,c)).

Como II y D representan espacios algebraicamente especiales entonces

$$\psi_0 = \psi_1 = 0 \ , \ n^r : \text{dirección principal repetida} \ , \quad \text{(III.38e)}$$

además por (I.22c,III.37):

$$C_{abj}{}^{r}{}_{;r} = 0 \quad , \quad R_{ac}\, n^c = \frac{R}{4}\, n_a \quad , \qquad \text{(III.38f)}$$

con (38.b,e,f) podemos aplicar (I.24a,b) para obtener:

"Si R_4 de Einstein es de clase dos entonces $\kappa = \sigma = \rho - \overline{\rho} = 0$ para los tipos II ó D" , (III.38g)

en otras palabras, si un espacio-tiempo tipo D ó II cumple (37) entonces $\kappa = \sigma = 0$, y la condición $\rho = \overline{\rho}$ sólo aparece cuando se impone la hipótesis de clase dos. Los teoremas (38d,g) no se localizan en la literatura; enfatizamos que (38g) es válido incluso para $R = 0$.

Ahora aceptemos $R \neq 0$ con R_4 tipo N ó III, entonces como los eigentensores de estos tipos Petrov sólo tienen eigenvalores nulos, de (38a) concluímos que $F_{ac} = 0$:

"En todo R_4 de Einstein ($R \neq 0$) de clase dos y tipo III ó N se tiene $F_{ac} = 0$" , (III.38h)

resultado original; por (I.24b) en este caso también tenemos que $\kappa = \sigma = 0$. De (38d,h) deducimos que:

"Si un espacio-tiempo de Einstein ($R \neq 0$) inmerso en E_6' es algebraicamente especial entonces $F_{ac} = 0$" . (III.38i)

Analicemos a cada uno de los tipos Petrov en la <u>tetrada canónica</u>:

A).- <u>TIPO D.</u>

En esta situación contamos con (25a,38b,g):

$$\psi_2 = \overline{\psi}_2 \neq 0 \ , \ \psi_r = 0 \ , \ r \neq 2 \ , \ \kappa = \sigma = \nu = \lambda = \rho - \overline{\rho} = \mu - \overline{\mu} = 0 \ , \ F_2 = 0 \qquad \text{(III.39a)}$$

y por (20)

$$\gamma_0(\psi_2 + \frac{R}{6}) = \gamma_2(\psi_2 + \frac{R}{6}) = \gamma_1(\psi_2 - \frac{R}{12}) = 0 \ , \qquad \text{(III.39b)}$$

así aparecen dos opciones:

a_1).- $\psi_2 + \frac{R}{6} = 0$.

Por lo tanto ψ_2 es constante, lo cual en unión de las identidades de Bianchi (I.23) implica $\rho = \mu = \pi = \tau = 0$ en contradicción con (I.21q) porque $R \neq 0$.

a_2).- $(\psi_2 + \frac{R}{6}) \neq 0$.

Entonces (39b) conducen a

$$\gamma_0 = \gamma_2 = 0 \ , \quad \gamma_1(\psi_2 - \frac{R}{12}) = 0 \ , \qquad \text{(III.39c)}$$

aceptemos $\gamma_1 \neq 0$ y tratemos de llegar a una inconsistencia: De (39c) obtenemos $\psi_2 = \frac{R}{12} = $ cte., en consecuencia $\rho = \mu = \pi = \tau = 0$ y por (I.8f,III.39a,c):

"$\gamma^2{}_1 = \overline{\gamma}^2{}_1$, o sea γ_1 es real ó imaginario" .

Supongamos que $\underline{\gamma_1 = \overline{\gamma}_1}$, entonces de (18) $\underset{r}{\phi_{02}} = \underset{r}{\phi_{12}} = \underset{r}{\phi_{01}} = \underset{r}{\phi_{11}} + \frac{1}{8}\underset{r}{b} = 0$ en contradicción con (4d). Ahora sea -

$\gamma_1 = -\overline{\gamma}_1$, de (18) resulta $\underset{r}{\phi_{22}} = \underset{r}{\phi_{00}} = \underset{r}{\phi_{12}} = \underset{r}{\phi_{01}} = \underset{r}{\phi_{11}} - \frac{1}{8}\underset{r}{b} = 0$ lo cual contradice (4e), por lo tanto γ_1 debe anularse en acuerdo con (38d). En (39a) tenemos $\kappa = \sigma = \rho - \overline{\rho} = 0$ así (24b) queda generalizado a espacios de Einstein.

La métrica de Novotný-Horský (1974) (pág. 159 de Kramer-Stephani-MacCallum-Herlt (1980)) expuesta en (V.18a):

$$ds^2 = \text{Sen}^{\frac{4}{3}}(az)(dx^2+dy^2) + dz^2 - \text{Cos}^2(az)\ \text{Sen}^{-\frac{2}{3}}(az)dt^2\ ,\ a = \text{cte.} \tag{III.40a}$$

es un espacio de Einstein tipo D con simetría plana, satisface las ecuaciones de campo en el vacío con la constante cosmológica: $G_{ab} - \Lambda\, g_{ab} = 0$ donde $\Lambda = \frac{4}{3}a^2$; de (V.18b) observamos que (40a) satisface nuestras condiciones necesarias $\kappa = \sigma = \rho - \overline{\rho} = 0$ (algo semejante para la otra dirección principal degenerada). Esta métrica sí es sumergible en E_6 (resultado original):

$$z^1 = f(z) - \frac{1}{2}\text{Sen}^{2/3}(az)(x^2+y^2-1)\ ,\ z^2 = f(z) - \frac{1}{2}\text{Sen}^{2/3}(az)(x^2+y^2+1)\ ,$$

$$z^3 = x\ \text{Sen}^{2/3}(az)\ ,\quad z^4 = y\ \text{Sen}^{2/3}(az)\ ,$$

$$z^5 = \text{Sen}\ t\ \text{Cos}(az)\ \text{Sen}^{-\frac{1}{3}}(az)\ ,\ z^6 = \text{Cos}\ t\ \text{Cos}(az)\ \text{Sen}^{-\frac{1}{3}}(az)\ , \tag{III.40b}$$

$$\frac{4}{3}\frac{df}{dz}\cdot \text{Sen}^{-\frac{1}{3}}(az)\text{Cos}(az) - a\Big(\text{Sen}^{\frac{4}{3}}(az) + \frac{1}{9}\text{Sen}^{-\frac{8}{3}}(az)\ \text{Cos}^4(az) + \frac{2}{3}\text{Sen}^{-\frac{2}{3}}(az)\text{Cos}^2(az)\Big) = \frac{1}{a}\ ,$$

$$\therefore\ ds^2 = (40a) = dz^{1\,2} - dz^{2\,2} + dz^{3\,2} + dz^{4\,2} - dz^{5\,2} - dz^{6\,2}\ .$$

B).- <u>TIPO N</u>.

De (I.14b,23,III6a,18,33a,38h) obtenemos

$$\psi_4 = 1 \;,\; \psi_r = 0 \;,\; r \neq 4 \;,\; \gamma_c = 0 \;,\; c = 0,1,2 \;,\; \underset{r}{\phi}_{00} = \underset{r}{\phi}_{01} = \underset{r}{\phi}_{02} = 0 \;,$$

$$\kappa = \sigma = 0 \;,\; \tau = 4\beta \;,\; \rho = 4\varepsilon \;,\; (\rho - \bar{\rho})\, \underset{r}{\phi}_{11} = 0 \;, \qquad \text{(III.41a)}$$

lo cual amerita dos casos: Cuando $(\underset{1}{\phi}_{11})^2 + (\underset{2}{\phi}_{11})^2 \neq 0$ de (41a) es inmediato que $\rho = \bar{\rho}$ generalizandose así (24b) a espacios de Einstein. Si $\underset{r}{\phi}_{11} = 0$ entonces (6e,41a) implica

$$\frac{1}{8}\, \delta \underset{1}{b} = (2\rho - \bar{\rho})\, \underset{1}{\phi}_{12} - \frac{1}{8}\, \varepsilon_1\, \Theta_1\, \underset{2}{\dot{b}} \;,$$

que al sustituir en (6g) conduce a $(\rho - \bar{\rho})\, \underset{r}{\phi}_{12} = 0$. Si $(\rho - \bar{\rho}) \neq 0$ entonces $\underset{r}{\phi}_{12} = 0$ contradiciendo a (4i), por lo tanto $\rho = \bar{\rho}$, q.e.d. En resumen, (24b,39a) y lo hecho aquí generan el teorema original:

"Si R_4 de Einstein (incluye el vacío) está inmerso en E_6 y es tipo N ó D entonces la congruencia nula repetida de Debever-Penrose es geodésica, no se deforma ni rota".

(III.41b)

<u>Kaigorodov</u> (1963) (agradecemos al Dr. M. Berrondo el habernos proporcionado este artículo) (pág. 378 de

Kramer-Stephani-MacCallum-Herlt (1980)) construyó un espacio de Einstein homogéneo tipo N cuyo elemento de línea fue indicado en (IV.19a), a saber

$$ds^2 = \frac{2}{k^2x^2}(dx^2+dy^2) - 2\,du(dv + \frac{2v}{x}dx + x\,du) \quad , \quad k = \text{cte.} \qquad \text{(III.42)}$$

cumpliendo las ecuaciones de campo $G_{ab} + \frac{3}{2}k^2 g_{ab} = 0$; con (IV.19b) es evidente la validez de (41b), sin embargo, no se conoce si (42) sea sumergible en E_6.

C).- TIPO III.

De (1.23,24b,III.6a,18) obtenemos:

$$\psi_3 = \frac{-i}{\sqrt{2}} \,,\; \psi_r = 0 \,,\; r \neq 3 \,,\; \gamma_c = 0 \,,\; c = 0,1,2 \,,\; (\rho - \bar{\rho})\underset{r}{\phi}_{11} = 0 \,,$$

$$\underset{r}{\phi}_{00} = \underset{r}{\phi}_{01} = 0 \,,\; \underset{r}{\phi}_{12} = -\underset{r}{\bar{\phi}}_{12} \,,\; \underset{r}{\phi}_{02} = 2\underset{r}{\phi}_{11} \,,\; \kappa = \sigma = 0 \,,$$
$$\text{(III.43a)}$$
$$\rho = \varepsilon \,,\quad \tau = \beta \,,\quad \gamma = -2\mu \,,\quad \alpha = -2\pi \,.$$

Si $(\rho - \bar{\rho}) \neq 0$ entonces $\underset{r}{\phi}_{02} = \underset{r}{\phi}_{11} = 0$ en contradicción con (4g,h), por lo tanto $\rho - \bar{\rho} = \varepsilon - \bar{\varepsilon} = 0$. De (6a,b) es simple deducir que

$$D\underset{1}{\phi}_{11} = \rho\underset{1}{\phi}_{11} - \varepsilon_2\,\Theta_4\,\underset{2}{\phi}_{11} \,,\quad D\underset{1}{b} = 8\rho\underset{1}{\phi}_{11} - \varepsilon_2\,\Theta_4\,\underset{2}{b} \,,$$
$$\text{(III.43b)}$$
$$D\underset{2}{\phi}_{11} = \rho\underset{2}{\phi}_{11} + \varepsilon_1\,\Theta_4\,\underset{1}{\phi}_{11} \,,\quad D\underset{2}{b} = 8\rho\underset{2}{\phi}_{11} + \varepsilon_1\,\Theta_4\,{}_{1} \;;$$

restamos entre sí (6f,g):

$$\underbrace{D\underset{1}{\phi}_{12}}_{\text{imaginario}} = \underbrace{2(\tau+\overline{\tau}+\pi+\overline{\pi})\underset{1}{\phi}_{11}}_{\text{real}} - \underbrace{2\rho\,\underset{1}{\phi}_{12} - \epsilon_2\,\Theta_4\,\underset{2}{\phi}_{12}}_{\text{imaginario}} ,$$

Una relación semejante es válida para $\underset{2}{\phi}_{11}$, entonces como $\underset{r}{\phi}_{11} \neq 0$ resulta que $(\tau + \overline{\tau} + \pi + \overline{\pi}) = 0$, en consecuencia

$$D\underset{1}{\phi}_{12} = -2\rho\,\underset{1}{\phi}_{12} - \epsilon_2\,\Theta_4\,\underset{2}{\phi}_{12}\ ,\quad D\underset{2}{\phi}_{12} = -2\rho\,\underset{2}{\phi}_{12} + \epsilon_1\,\Theta_4\,\underset{1}{\phi}_{12}\ . \qquad \text{(III.43c)}$$

Sumamos entre sí (4g,h):

$$\psi_3 = 8 \sum \epsilon_r\,\underset{r}{\phi}_{11}\,\underset{r}{\phi}_{12} \qquad \text{(III.43d)}$$

que al aplicarse al operador D y emplear (43b,c,d) implica (recordar que $D\psi_3 = 0$) $\rho\,\psi_3 = 0$ de donde $\rho = 0$, por lo tanto:

"Si un espacio-tiempo de Einstein ($R \neq 0$) está inmerso en E_6 y es tipo III entonces la congruencia nula repetida de DP es geodésica con sus tres escalares ópticos igual a cero" , (III.43e)

teorema que no se localiza en la literatura.

D).- <u>TIPO II</u>.

En esta situación (20,28a,38b,g) implican

$$\psi_2 = \overline{\psi_2} \neq 0 \ , \ \psi_4 = 1 \ , \ \psi_r = 0 \ , \ r \neq 2,4 \ , \ \kappa = \sigma = \rho - \overline{\rho} = 0 \ , \ F_2 = 0 \ , \tag{III.44a}$$

$$\gamma_0(\psi_2 + \frac{R}{6}) = \gamma_2(\psi_2 + \frac{R}{6}) + \gamma_0 = \gamma_1(\psi_2 - \frac{R}{12}) = 0 \quad ,$$

consideremos dos posibilidades: $\psi_2 + \frac{R}{6} = 0$, entonces (I.23) nos dan $\rho = \mu = \pi = \tau = 0$, $3\lambda\ \psi_2 + 4\varepsilon = 0$, $3\nu\ \psi_2 + 4\beta = 0$ en contradicción con (I.21q). Ahora supongamos $(\psi_2 + \frac{R}{6}) \neq 0$, así (44a) conduce a (39c) con $\psi_2 = \frac{R}{12}$ cuando $\gamma_1 \neq 0$:

Sea $\underline{\gamma_1 = \overline{\gamma_1} \neq 0}$: De (18) obtenemos

$$\underset{r}{\phi_{01}} = \underset{r}{\phi_{12}} = \underset{r}{\phi_{11}} + \frac{1}{8}\underset{r}{b} = 0 \ , \ \underset{r}{\phi_{02}} = \underset{r}{\overline{\phi_{02}}} \ , \ \underset{1}{\phi_{00}} = -2\ \varepsilon_2\ \gamma_1\ \underset{2}{\phi_{02}} \quad ,$$

que al sustituir en (6d,f,g) nos dá $\nu\underset{r}{\phi_{02}} = \lambda\underset{r}{\phi_{02}} = 0$: Si $\underset{r}{\phi_{02}} = 0$ contradecimos (4i), y si $\underset{1}{\phi_{02}} \neq 0$ o/y $\underset{2}{\phi_{02}} \neq 0$ entonces $\lambda = \nu = 0$ violando (I.21j), así que es imposible γ_1 real diferente de cero.

Sea $\underline{\gamma_1 = -\overline{\gamma_1}} \neq 0$: De (18) resulta

$$\underset{r}{\phi_{01}} = \underset{r}{\phi_{12}} = \underset{r}{\phi_{00}} = 0 \ , \ \underset{1}{\phi_{02}} - \underset{1}{\overline{\phi_{02}}} = -2\ \varepsilon_2\ \gamma_1\ \underset{2}{\phi_{22}} \ , \ \underset{r}{\phi_{11}} = \frac{1}{8}\underset{r}{b} \quad ,$$

en contradicción con (4e), entonces tampoco es posible γ_1 imaginario distinto de cero.

Por lo tanto $\gamma_1 = 0$ y como ya teníamos $\gamma_0 = \gamma_2$ queda probado (38d) para el tipo II (ya lo habíamos demostrado para el tipo D). Las conclusiones (24d,38d) se unifican para dar el teorema original:

"Todo R_4 de Einstein tipo II ó D y de clase dos tiene $F_{ac} = 0$" . (III.44b)

Ya tenemos $\gamma_r = 0$, $r = 0,1,2$ y esto en unión de (18,44a) vuelven a dar (28a,...,e) y por (4e):

$$2\psi_2 + \frac{R}{12} = - \sum \epsilon_r (2 \underset{r}{\phi_{11}} - \frac{1}{4} \underset{r}{b})^2$$

que al aplicarle el operador D implica $D\psi_2 = 0$, por lo tanto $\rho = 0$: este resultado junto con (24a,43e) conducen a nuestros teoremas:

"En un R_4 de Einstein ($R \neq 0$) de clase dos y tipo II ó III la congruencia nula repetida de DP tiene $\kappa = \sigma = \rho = 0$" , (III.44c)

y

"En un espacio-tiempo de Einstein inmerso en E_6 y tipo II la congruencia principal repetida de DP tiene $\kappa = \sigma = \rho = 0$" . (III.44d)

El análisis de esta Sección ha mostrado la validez de -

los teoremas (24a,b) de Collinson (1966) para aquellos espacios con la propiedad $R_{ab} = \frac{R}{4} g_{ab}$, entonces quizás sea útil hacer una Tabla para concentrar y resumir los resultados obtenidos en estas dos últimas Seccs.:

$\kappa = \sigma = 0$, $*C_2 = 0$ En todos los casos				
Petrov / Espacio	II	D	III	N
$R_{ab} = 0$	$\rho = 0$ $F_{ac} = 0$	$\rho = \bar{\rho}$ $F_{ac} = 0$	No existe	$\rho = \bar{\rho}$
$R_{ab} = \frac{R}{4} g_{ab}$	$\rho = 0$	$\rho = \bar{\rho}$	$\rho = 0$	$\rho = \bar{\rho}$

(III.45)

$\left.\right\} F_{ac} = 0$

Tabla 5.- Espacios de Einstein inmersos en E_6.

El vector degenerado de Debever-Penrose tiene $\kappa = \sigma = 0$ por los teoremas de Goldberg-Sachs (1962) y Kundt-Thompson (1962) sin que intervenga el proceso de inmersión, pero al exigir que el R_4 bajo estudio sea de clase dos entonces aparecen restricciones sobre la expansión y rotación de la congruencia degenerada; en (45) se tiene $*C_2 = 0$ en todos los casos. Para $R_{ab} = 0$ es original la prueba de la no-existencia de espacios tipo III de clase dos, y para espacios de Einstein ($R \neq 0$) inmersos en E_6 todos los resultados son originales, en ambas circunstancias se han hecho aplicaciones (algunas de ellas también inéditas) a diversas métricas de interés en relatividad general.

CAPITULO IV

ESPINTENSOR DE LANCZOS

INTRODUCCIÓN.

Cornelius Lanczos siempre estuvo interesado en geometrizar el campo electromagnético sin abandonar la geometría Riemanniana así que se dedicó a investigar si en un R_4 arbitrario había algún objeto que permitiera reproducir las ecuaciones de Maxwell, en esta forma los campos eléctrico y magnético quedarían en función de propiedades intrínsecas del espacio-tiempo así como la curvatura (desviación relativa de geodésicas vecinas) está asociada a la gravedad. Lanczos no culminó su geometrización del campo de Maxwell pero logró probar que en todo 4-espacio de Riemann existe un tensor (no necesariamente único) K_{ijr} llamado espintensor que genera al tensor conformal vía una expresión algebraica-diferencial: Debe enfatizarse que este interesante resultado no depende de ecuaciones de campo así que es válido para toda teoría geométrica sobre un R_4, aunque aquí concedemos atención especial a relatividad general. La Secc. 1 es conceptual porque tiene la finalidad de convencer sobre la posible importancia del espintensor para teorías gravitacionales, simultáneamente se expone un resumen de lo publicado y de las investigaciones pendientes sobre K_{ijr}, en particular se manifiesta la falta de espintensores explícitos. En la Secc. 2 se escriben dentro del formalismo de Newman--Penrose las ecuaciones de Weyl-Lanczos que gobiernan a todo espintensor, esto se hace con la intención de tener un método sistemático para construir K_{pqc}. En la Secc. 3 se aplica el material de la Secc. anterior en la búsqueda de espintensores para diversas métricas de interés en relatividad general, la mayoría de los resultados son originales.

El tensor de Riemann R_{ijkc} ya ocupa un lugar en la teoría de Einstein, así que es natural preguntarse sobre la importancia física (si la tiene) de K_{jpq} en dicha teoría, por lo expuesto en la Secc. 1 es difícil dudar que el potencial de Lanczos tenga relevancia en relatividad y simultáneamente causa asombro la poca atención que los investigadores han concedido al espintensor.

1. GENERADOR DEL TENSOR CONFORMAL.

Aquí vamos a considerar un resultado geométrico el cual es válido para todo 4-espacio de Riemann y que fue obtenido por Lanczos (1962) aunque dicho resultado ya estaba implícito en su artículo de 1949 titulado "Multiplicador de Lagrange y espacios Riemannianos", ver (III.5) de esta publicación. Lanczos siempre estuvo interesado en geometrizar el campo electromagnético bajo el mismo espíritu con el que Einstein había geometrizado la gravedad, así que desde 1931 hasta su muerte en 1974 intentó extender la relatividad general mediante ecuaciones de campo deducibles de un principio variacional tipo Hilbert con Lagrangiana L cuadrática en el tensor de Riemann, en particular, en su artículo de 1938 él había demostrado que cuando $L = L_0 \equiv {}^*R^{*abcd} R_{abcd}$ el proceso variacional conducía a 0 = 0 (esto se debe a que dicha Lagrangiana es una divergencia exacta, ver Buchdahl (1960)) es decir, no aparecen ecuaciones de campo que restrinjan la geometría del espacio-tiempo en cuestión, en otras palabras, las consecuencias de

$$\delta \int_{V_4} L_0 \sqrt{-g} \; d^4x = 0 \qquad \text{(IV.1)}$$

son válidas para <u>todo</u> R_4 de Riemann. Ya se comentó que (1) conduce a 0 = 0 sin beneficio alguno cuando el proceso variacional simbolizado por δ se efectúa sobre la métrica (técnica de Hilbert), esta situación fue remediada por Lanczos (1962) en forma ingeniosa al sugerir realizar δ variando g_{ab} y ${}^*R^{*abcd}$ independientemente e introduciendo multiplicadores de Lagrange para tomar en cuenta las restricciones que este enfoque origina, de esta manera (1) proporcionó nueva información sobre la estructura de la geometría Riemanniana, a saber, uno de estos multiplicadores resultó ser el tensor k_{ijb} con las simetrías

$$k_{aij} = - k_{iaj} \quad , \quad k_a{}^r{}_r = 0 \quad , \quad k_{ab}{}^c{}_{;c} = 0 \tag{IV.2a}$$

$$k_{aij} + k_{ija} + k_{jai} = 0 \quad ,$$

el cual genera al tensor conformal vía la relación:

$$C_{pqjb} = k_{pqj;b} - k_{pqb;j} + k_{jbp;q} - k_{jbq;p} + g_{pb}\, k_{jq} - \tag{IV.2b}$$

$$- g_{pj}\, k_{qb} + g_{qj}\, k_{pb} - g_{qb}\, k_{pj}$$

donde

$$k_{jr} \equiv k_j{}^a{}_{r;a} \overset{(2a)}{=\!=\!=} k_{rj} \quad . \tag{IV.2c}$$

Así podemos afirmar que en todo espacio-tiempo existe un tensor de tercer orden que juega el papel de superpotencial para el tensor de Weyl que a su vez es la parte del tensor de Riemann no ligada directamente al tensor de Ricci. Bampi-Caviglia (1983) volvieron a probar (2b) de manera rigurosa y mostraron que (2a) son fundamentales para la existencia del potencial de Lanczos, además estos autores demuestran lo incorrecto de la proposición de Elisa Brinis (1980) de que el tensor de curvatura también es generado por un potencial mediante una expresión semejante a (2b), es decir, en general no podemos garantizar la existencia de un superpotencial para R_{abcd} excepto cuando éste coincida con C_{ijrb} lo cual ocurre en el espacio vacío ($R_{ab} = 0$).

Es conveniente hacer algunos comentarios sobre el cálculo de k_{ijc} y respecto a su posible importancia física en relatividad general: En un espacio-tiempo dado tenemos como dato la métrica g_{ab} entonces es rutina determinar C_{ijra} porque existe una relación definida que encadena a estos tensores, por ejemplo, con g_{pq} podemos calcular los símbolos de Christoffel y con ellos obtener los tensores de Riemann y Ricci que de inmediato conducen al tensor conformal, así tenemos que $C_{ijra} = C_{ijra}(g_{pq}; g_{pq,r}; g_{pq,rb})$. En el caso de k_{ijc} no es cierto que éste sea función del tensor métrico y de sus primeras derivadas, de hecho no existe una regla o fórmula que permita obtener el potencial de Lanczos a partir de g_{ab}. En (2b) los datos son la métrica y C_{ijra}, y al dar valores a los índices pqjb resulta un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales para las componentes k_{ijc} y la dificultad en resolver este sistema dependerá de g_{ab}, el asunto es que debemos <u>integrar</u> (2b) para obtener k_{prt} y por eso diremos que éste es un tensor <u>no-local</u>, este sentido de no-localidad se originó durante una conversación con el Dr. Sergio Hojman: En la literatura el aspecto no-local de k_{ijr} se ha interpretado como que dicho tensor dependerá en forma explícita de la geometría global de R_4 y por eso casi todos los autores afirman que resolver (2b) es una "tarea formidable", creemos que esta inadecuada interpretación bloqueó psicológicamente una investigación sistemática de las soluciones (2) impidiendo así la construcción de potenciales de Lanczos para diversas métricas de interés en relatividad general, así han transcurrido 24 años durante los cuales casi no se ha prestado atención a K_{ijc}. En la próxima Secc. 3 mostraremos que para muchos espacio-tiempos es simple la construcción de sus potenciales mediante el formalismo de Newman-Penrose (NP) (1962) el cual proporciona un método más sistemático para resolver (2), enfatizamos que en ninguno de nuestros potenciales aparece explícitamente la estructura global del 4-espacio en cuestión.

Ahora consideremos la posible relevancia física de K_{ijc}: Lanczos (1962) resolvió (2) para campos gravitacionales débiles con $R_{ab} = 0$ y quedó muy entusiasmado por la aparición de la ecuación de Dirac para espín $\frac{1}{2}$ aunque en su proceso no está claro a qué "partícula" se refiere esta ec. de Dirac, de todas formas este hecho hizo que bautizara a K_{ijr} con el nombre de Espintensor y en la última página de su artículo afirma que su espintensor será importante en la unificación de la mecánica cuántica con la gravedad, esta afirmación a muchos investigadores (por ejemplo, Taub (1966, 75)) les parece atrevida porque en el proceso variacional de Lanczos en ningún momento se toman en cuenta efectos cuánticos así que la presencia de la ec. de Dirac la consideran accidental y sin importancia alguna. Después de 1962 Lanczos ya no estudió su potencial y nunca le pudo asignar (si lo tiene) significado físico preciso según lo admitió durante una entrevista en Irlanda unos años antes de su muerte, ver Davis-Green-Norris (1975). Sin embargo, existen ciertos hechos que hacen pensar que Lanczos quizás no esté del todo equivocado en cuanto a sus esperanzas de encadenar gravitación con la mecánica cuántica vía K_{ijc}: Maher-Zund (1968), Taub (1975) y Zund (1975) escribieron (2) en forma espinorial y fue inesperada la presencia de una ecuación para una partícula con masa cero y espín 2 que algunos tratan de identificar con el gravitón. Por otro lado, en la pág. 208 de Newman-Goenner (1984) (agradecemos al Prof. Dr. H.F. Goenner habernos enviado este trabajo) aprendemos que Ashtekar obtuvo la versión espinorial de (2b) con toda la maquinaria de cuantización canónica de la gravedad, tal parece que el estudió de la formulación Hamiltoniana de relatividad general traerá a escena al espintensor de Lanczos, aquí también debemos agradecer al Dr. C.D. Collinson (el cual investiga K_{ijr} con la colaboración del relativista portugues Dr. R. Vaz) sus comentarios sobre la expresión espinorial de Ashtekar.

Es interesante recordar que Becerril (1986) pág. 40 ha propuesto la posibilidad de que ciertas componentes del espintensor tengan algún significado físico a través de las expresiones que proporcionan la energía y momento lineal globales de un espacio-tiempo asintóticamente plano; algo semejante puede intentarse vía las constantes de Newman-Penrose (1965). Para checar la viabilidad de esta idea es necesario construir espintensores para diversos campos gravitacionales: Bampi-Caviglia (1983) obtuvieron de manera explícita el potencial de Lanczos para cualquier R_4 conformalmente plano (tipo O en la clasificación de Petrov), en este caso los cálculos son simples con (2), sin embargo, hasta donde tenemos noticia nadie ha podido deducir K_{ijr} para alguna métrica con tipo $\neq$ O, prácticamente se puede decir que los únicos espintensores conocidos se encuentran en Fernández-López-

Ovando-Rosales (1985), García (1985), Becerril (1986) y en la Secc. 3 de este Capítulo. En particular, en estas referencias se obtuvo K_{ijc} para el espacio de Minkowski y resultó ser más simple que el propuesto por Takeno - (1964): A este investigador le enviamos nuestro espintensor para el modelo de Gödel y en su opinión dicho potencial debe tener significado en la teoría de la relatividad, simultáneamente, nos informa que hace 13 años se retiró por su edad de la Universidad de Hiroshima y que - por ahora K_{ijr} no está en su campo de investigación. - Takeno (1964) también estudió el superpotencial de - Lanczos para espacios esféricamente simétricos y espacio-tiempos H (soluciones tipo ondas planas para campos gravitacionales coexistiendo con campos electromagnéticos).

En la teoría de Maxwell al 4-potencial puede agregársele un gradiente sin que se afecte al correspondiente tensor de Faraday, estas transformaciones de norma pueden extenderse al espintensor: Si a K_{ijr} lo reemplazamos por - $K_{ijr} + B_{ijr}$ donde B_{ijr} es cualquier espintensor de - Lanczos para un espacio conformalmente plano entonces - permanece inalterado el lado izquierdo de (2b), estas - transformaciones de norma generalizadas fueron sugeridas por Zund (1975) y estudiadas por Atkins-Davis (1980) en teorías de norma no-Abelianas, así vemos que el resultado de Lanczos introduce un nuevo grupo de transformaciones en relatividad general el cual amerita un análisis - cuidadoso para conocer sus implicaciones para el campo - gravitacional.

Cuando Lanczos llamó espintensor a K_{ijr} sembró la idea - de que dicho tensor es capaz de describir el espín de - ciertas partículas, esta idea ha sido adoptada por aquellos que intentan explicar la rotación de las partículas mediante una torsión del 4-espacio, así consideran a K_{ijr} como una contorsión en teorías de Einstein-Cartan, ver Davis-Atkins-Baker (1978), estos autores también generalizan (1) a este tipo de teorías.

Brinis (1977,80,81) sugirió la existencia de un superpotencial para R_{ijrc}, sin embargo, Massa-Pagani (1984) mostraron que en general esto no es posible, pero es interesante hacer notar que en aquellos espacios no-vacíos donde el tensor de Riemann tiene un generador aparece un campo escalar en analogía con los potenciales escalares de Brans-Dicke.

Recordemos que Ruse (1948) fue el primero en estudiar la estructura algebraica de C_{ijrp} mediante la geometría proyectiva y el resultado básico fue lo que ahora conocemos como clasificación de Petrov (CP), de gran importancia en la relatividad actual, consultar Ovando (1985); así aprendimos que el tensor de Weyl posee eigenvectores nulos llamados vectores de Debever-Penrose o direcciones principales nulas y observamos el relevante papel que en dicha clasificación desempeñan los invariantes de C_{ijrp}. Zund (1969) aplicó geometría proyectiva al espintensor pero no obtuvo una clasificación de él y mucho menos sus direcciones principales, sin embargo, su intento es muy loable porque manifiesta la necesidad de analizar los aspectos algebraicos del superpotencial de Lanczos. En Becerril (1985) pág. 41 se proponen dos caminos para efectuar la clasificación de K_{ijr}, a saber: (a).- (Idea del Dr. J. Plebański) Con el espintensor construir un tensor de cuarto orden con las mismas simetrías que C_{ijrc} y entonces a dicho tensor aplicarle la CP para así obtener -

información algebraica de K_{ijr} y (b).- (Idea adaptada de Collinson-Shaw (1972)) Mediante K_{bcd} formar un tensor simétrico de segundo orden con traza nula y aplicar a éste la clasificación de Churchill-Plebañski; en ambos casos sería interesante poder relacionar las direcciones principales del espintensor con los eigenvectores de los tensores de Weyl y Ricci. Estas sugerencias de Becerril no se han trabajado.

Ahora deseamos proponer otro posible método para el análisis de la estructura algebraica de K_{ijr} el cuál tiene semejanza con el enfoque matricial de Petrov para la CP: En un evento dado del espacio-tiempo construímos una tetrada real ortonormal arbitraria y proyectamos sobre ésta al espintensor, originándose así una matriz 6 x 4 de acuerdo a:

$$K^{A}{}_{B} = K^{(a)(b)}{}_{(c)} \qquad \text{(IV.3a)}$$

donde B = 1,...,4 y:

A :	1	2	3	4	5	6
(a)(b) :	(2)(3)	(3)(1)	(1)(2)	(1)(4)	(2)(4)	(3)(4)

(IV.3b)

entonces a la matriz rectangular $(K^{A}{}_{B})$ puede obtenersele sus eigenvalores y vectores propios mediante el ingenioso método de Lanczos (1958). Normalmente estamos acostumbrados a pensar en el problema de eigenvalores de matrices cuadradas, sin embargo, Lanczos extendió este problema a matrices arbitrarias y su trabajo mereció el Premio Chauvenet en 1960 otorgado por la Sociedad Matemática de América, ver Scaife (1974) pág. X. Esta técnica de Lanczos ha encontrado utilidad en la teoría del control (consultar Butler (1975) pág. 258) y en el cálculo de matrices pseudo-inversas (ver Gellai (1975) pág. 262. Nuestra sugerencia será aceptable si la clasificación resultante de (3) es covariante (como ocurre con la CP), es decir, independiente de las coordenadas y de la tetrada real ortonormal que se utilicen, nos encontramos investigando estas cuestiones.

Avez (1967) ha empleado el espintensor para el análisis de la geometría global de 4-espacios compactos.

El concepto de espintensor no es útil solamente en la geometría del espacio-tiempo sino que también encuentra aplicación en la electrodinámica de partículas clásicas cargadas como fue demostrado en López (1982a), García (1985) y Becerril (1986): El tensor de Maxwell asociado al campo de Liénard-Wiechert se rompe en sus partes acotada $\underset{B}{T}_{ij}$ y radiativa $\underset{R}{T}_{ij}$ de acuerdo a Teitelboim (1970)

$$T_{ij} = \underset{B}{T}_{ij} + \underset{R}{T}_{ij} \tag{IV.4a}$$

con las propiedades (además de simetría y traza nula):

$$\underset{B}{T}_{a}{}^{c}{}_{;c} = \underset{R}{T}_{a}{}^{c}{}_{;c} = 0 \tag{IV.4b}$$

lo cual conduce a la búsqueda del superpotencial $\underset{B}{K}_{ijr}$ con las simetrías (2a) tal que se comporte como un generador para la parte acotada:

$$\underset{B}{T}_{ij} = \underset{B}{K}_{i}{}^{a}{}_{j;a} \quad . \qquad \text{(IV.4c)}$$

Con la herramienta de la próxima Secc. es simple obtener el "espintensor electromagnético" $\underset{B}{K}_{ijr}$ el cual coincide con el superpotencial de Weert (1974), este autor nunca dió un método sistemático para construir su potencial. Este concepto de espintensor permitió a López (1982a) deducir en forma inmediata la descomposición de $\underset{B}{T}_{ij}$ propuesta por López (1978) y condujo al significado físico del potencial de Weert, a saber, $\underset{B}{K}_{ijr}$ es un tensor densidad de momento angular intrínseco del campo electromagnético. Además, López-Tun (1983) emplearon (2b) para introducir una CP del campo de Liénard-Wiechert, esto reforzó las analogías encontradas por Newman (1974) entre este campo y las métricas de Robinson-Trautman. López (1982a) obtuvo un superpotencial no-local para la parte radiativa sin las propiedades (2a), hasta la fecha nadie ha logrado construir un generador para $\underset{R}{T}_{ij}$ con las simetrías (2a) satisfechas por todo espintensor.

Por todo lo expuesto en esta Secc. es difícil aceptar que el espintensor de Lanczos no tendrá importancia en teorías geométricas de la gravedad, sin embargo, por ahora continúa siendo un "objeto misterioso e intrigante" (como lo afirma Bireline en Scaife (1974) pág. 25) y que constituye un atractivo tópico de investigación en relatividad general.

2. ECUACIONES DE WEYL-LANCZOS.

Ya comentamos que (2) en su forma tensorial no proporcionan un método sistemático para encontrar K_{ijr} una vez dada la métrica del R_4 en cuestión. Aquí vamos a obtener la transcripción al enfoque de NP de estas relaciones (en la próxima Secc. mostraremos que las ecuaciones resultantes permiten construir espintensores con relativa facilidad), Maher-Zund (1968) y Zund (1975) fueron los primeros en hacer esto, sin embargo, sus artículos tienen muchos errores tipográficos y nuestras ecuaciones son más simples que las suyas. En esta Secc. usaremos libremente la técnica de tetradas nulas expuesta en el Cap. I.

Al aplicar el formalismo de NP al tensor de Weyl se expande el tensor ($C_{abpq} + i\ {}^*C_{abpq}$) en función de los bivectores V_{ab}, U_{ab} y M_{ab}, esto da origen a las cantidades complejas $\psi_0,\ldots,\psi_4$. Algo semejante puede hacerse con K_{jrc} a sugerencia de Zund (1969), en efecto, construímos el tensor complejo:

$$Q_{abc} \equiv K_{abc} + i\ {}^*K_{abc} \quad \text{con} \quad {}^*K_{abc} = \frac{1}{2}\,\eta_{abpq}\,K^{pq}{}_c \quad , \quad i = \sqrt{-1} \tag{IV.5a}$$

que en virtud de las propiedades <u>algebraicas</u> (2a) satisface

$$Q_{abc} = -\,Q_{bac} \quad , \quad Q_a{}^c{}_c = 0 \tag{IV.5b}$$

entonces no es difícil probar que (5a) admite el desarrollo:

$$Q_{abc} = 2\Big[\Omega_0 U_{ab} \ell_c + \Omega_1 (M_{ab} \ell_c - U_{ab} m_c) + \Omega_2 (V_{ab} \ell_c - M_{ab} m_c) -$$

$$- \Omega_3 V_{ab} m_c - \Omega_4 U_{ab} \overline{m}_c + \Omega_5 (U_{ab} n_c - M_{ab} \overline{m}_c) + \Omega_6 (M_{ab} n_c -$$

$$- V_{ab} \overline{m}_c) + \Omega_7 V_{ab} n_c\Big] \quad , \qquad \text{(IV.6a)}$$

donde las Ω_a, $a = 0,\ldots 7$ (ocho cantidades complejas equivalentes a las dieciseis componentes reales independientes de K_{ijr}) son adecuadas proyecciones del espintensor sobre la tetrada nula:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= K_{(1)(4)(4)} \quad , & \Omega_4 &= K_{(1)(4)(1)} \quad , \\ \Omega_1 &= K_{(1)(4)(2)} \quad , & \Omega_5 &= K_{(1)(4)(3)} \quad , \\ \Omega_2 &= K_{(3)(2)(4)} \quad , & \Omega_6 &= K_{(3)(2)(1)} \quad , \\ \Omega_3 &= K_{(3)(2)(2)} \quad , & \Omega_7 &= K_{(3)(2)(3)} \quad . \end{aligned} \qquad \text{(IV.6b)}$$

Al construir una clasificación algebraica de K_{ijr} mediante el formalismo de NP entonces el algoritmo resultante quedará en términos de estas Ω_r. En (2a) tenemos la propiedad diferencial:

$$N_{ab} \equiv K_{ab}{}^{c}{}_{;c} = 0 \qquad \text{(IV.7a)}$$

que al contraer con la tetrada nula implica

$$N_{(t)(h)} = K_{(t)(h)}{}^{(r)}{}_{;(r)} + K_{(t)(h)}{}^{(r)} Z_{(r)}{}^{c}{}_{;c} - \qquad \text{(IV.7b)}$$

$$- K_{(p)(h)}{}^{(r)} \gamma^{p}{}_{tr} - K_{(t)(p)}{}^{(r)} \gamma^{p}{}_{hr}$$

con los valores th = 23,14,12,34 generándose así tres ecs. tipo NP las cuales tienen la misma información que (7a):

$$\Delta\Omega_2 - \delta\Omega_3 - \bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 - 2\nu\Omega_1 + (3\mu + \bar{\mu} + \gamma - \bar{\gamma})\Omega_2 + (\bar{\alpha} - 3\beta + \tau - \bar{\pi})\Omega_3 +$$

$$+ 2\lambda\Omega_5 + (-\alpha - \bar{\beta} + \bar{\tau} - 3\pi)\Omega_6 + (3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \rho - \bar{\rho})\Omega_7 = 0 \quad ,$$

$$\Delta\Omega_0 - \delta\Omega_1 - \bar{\delta}\Omega_4 + D\Omega_5 + (\mu + \bar{\mu} - 3\gamma - \bar{\gamma})\Omega_0 + (3\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + \beta)\Omega_1 - 2\sigma\Omega_2 + (3\alpha - \bar{\beta} + \bar{\tau} - \pi)\Omega_4 +$$

$$+ (\bar{\varepsilon} - \varepsilon - \bar{\rho} - 3\rho)\Omega_5 + 2\kappa\Omega_6 = 0 \quad , \qquad \text{(IV.7c)}$$

$$-\Delta\Omega_1 + \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 - D\Omega_6 + \nu\Omega_0 + (\gamma + \bar{\gamma} - 2\mu - \bar{\mu})\Omega_1 + (-\bar{\alpha} + \beta - 2\tau + \bar{\pi})\Omega_2 + \sigma\Omega_3 - \lambda\Omega_4 +$$

$$+ (-\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau} + 2\pi)\Omega_5 + (-\varepsilon - \bar{\varepsilon} + 2\rho + \bar{\rho})\Omega_6 - \kappa\Omega_7 = 0 \quad .$$

Estas relaciones (7c) coinciden con (1,2,3) de la Secc. 5 de Zund (1975) aunque este autor tiene un error de imprenta: en el coeficiente de Ω_4 de (1) debe ser π en lugar de $\bar{\pi}$.

Bajo la misma filosofía podemos proyectar (2b) sobre la tetrada de NP para así deducir el encadenamiento exis--

tente entre las Ω_r y las cantidades ψ_a, esto vuelve a sugerir el estudio de la CP en términos de una correspondiente clasificación algebraica o/y diferencial del espintensor de Lanczos, esta idea no la hemos visto desarrollada adecuadamente en la literatura, así que es una cuestión abierta. De (2b) se originan 5 ecs. tipo NP:

$$
\begin{aligned}
\psi_0 &= 2\left[-\delta\Omega_0+D\Omega_4+(\bar{\alpha}+3\beta-\bar{\pi})\Omega_0-3\sigma\Omega_1+(-3\varepsilon+\bar{\varepsilon}-\bar{\rho})\Omega_4+3\kappa\Omega_5\right] \quad ,\\
2\psi_1 &= -\Delta\Omega_0-3\delta\Omega_1+\bar{\delta}\Omega_4+3D\Omega_5+(3\gamma+\bar{\gamma}+3\mu-\bar{\mu})\Omega_0+3(\bar{\alpha}+\beta-\bar{\pi}-\tau)\Omega_1-\\
&\quad -6\sigma\Omega_2+(-3\alpha+\bar{\beta}-3\pi-\bar{\tau})\Omega_4+3(-\varepsilon+\bar{\varepsilon}+\rho-\bar{\rho})\Omega_5+6\kappa\Omega_6 \quad ,\\
\psi_2 &= -\Delta\Omega_1-\delta\Omega_2+\bar{\delta}\Omega_5+D\Omega_6+\nu\Omega_0+(2\mu-\bar{\mu}+\gamma+\bar{\gamma})\Omega_1+(\bar{\alpha}-\beta-\bar{\pi}-2\tau)\Omega_2-\sigma\Omega_3-\\
&\quad -\lambda\Omega_4+(-\alpha+\bar{\beta}-2\pi-\bar{\tau})\Omega_5+(\varepsilon+\bar{\varepsilon}-\bar{\rho}+2\rho)\Omega_6+\kappa\Omega_7 \quad , \qquad \text{(IV.7d)}\\
2\psi_3 &= -3\Delta\Omega_2-\delta\Omega_3+3\bar{\delta}\Omega_6+D\Omega_7+3(-\bar{\mu}+\mu+\bar{\gamma}-\gamma)\Omega_2+6\nu\Omega_1+(\bar{\alpha}-3\beta-3\tau-\bar{\pi})\Omega_3-\\
&\quad -6\lambda\Omega_5+3(\alpha+\bar{\beta}-\bar{\tau}-\pi)\Omega_6+(3\varepsilon+\bar{\varepsilon}-\bar{\rho}+3\rho)\Omega_7 \quad ,\\
\psi_4 &= 2\left[-\Delta\Omega_3+\bar{\delta}\Omega_7+3\nu\Omega_2+(-\bar{\mu}-3\gamma+\bar{\gamma})\Omega_3-3\lambda\Omega_6+(3\alpha+\bar{\beta}-\bar{\tau})\Omega_7\right] \quad ,
\end{aligned}
$$

las cuales coinciden con (4,...,8) de la Secc. 5 de Zund (1975) si corregimos los errores tipográficos de este investigador. Las relaciones (7c,d) pueden combinarse entre sí para crear un sistema equivalente que no hemos localizado en la literatura, estas ocho ecs. para las 8 incógnitas Ω_r son más simples que (7c,d):

ECUACIONES DE WEYL-LANCZOS

$$
\begin{aligned}
\psi_0 &= 2\left[-\delta\Omega_0+D\Omega_4+(\overline{\alpha}+3\beta-\overline{\pi})\Omega_0 - 3\sigma\Omega_1+(-3\varepsilon+\overline{\varepsilon}-\overline{\rho})\Omega_4 + 3\kappa\Omega_5\right] , \\
\psi_1 &= 2\left[-\delta\Omega_1+D\Omega_5+\mu\Omega_0+(\overline{\alpha}+\beta-\overline{\pi})\Omega_1 - 2\sigma\Omega_2-\pi\Omega_4+(\overline{\varepsilon}-\varepsilon-\overline{\rho})\Omega_5 + 2\kappa\Omega_6\right] , \\
\psi_2 &= 2\left[-\delta\Omega_2+D\Omega_6+2\mu\Omega_1+(\overline{\alpha}-\beta-\overline{\pi})\Omega_2 - \sigma\Omega_3-2\pi\Omega_5+(\overline{\varepsilon}+\varepsilon-\overline{\rho})\Omega_6 + \kappa\Omega_7\right] , \\
\psi_3 &= 2\left[-\Delta\Omega_2+\overline{\delta}\Omega_6+2\nu\Omega_1+(-\overline{\mu}+\overline{\gamma}-\gamma)\Omega_2 - \tau\Omega_3-2\lambda\Omega_5+(\alpha+\overline{\beta}-\overline{\tau})\Omega_6 + \rho\Omega_7\right] , \\
\psi_4 &= 2\left[-\Delta\Omega_3+\overline{\delta}\Omega_7+3\nu\Omega_2+(-\overline{\mu}-3\gamma+\overline{\gamma})\Omega_3 - 3\lambda\Omega_6+(3\alpha+\overline{\beta}-\overline{\tau})\Omega_7\right] , \qquad (IV.8) \\
\psi_1 &= 2\left[-\Delta\Omega_0+\overline{\delta}\Omega_4+(-\overline{\mu}+3\gamma+\overline{\gamma})\Omega_0 - 3\tau\Omega_1+(-3\alpha+\overline{\beta}-\overline{\tau})\Omega_4 + 3\rho\Omega_5\right] , \\
\psi_2 &= 2\left[-\Delta\Omega_1+\overline{\delta}\Omega_5+\nu\Omega_0+(\gamma+\overline{\gamma}-\overline{\mu})\Omega_1 - 2\tau\Omega_2-\lambda\Omega_4+(-\alpha+\overline{\beta}-\overline{\tau})\Omega_5 + 2\rho\Omega_6\right] , \\
\psi_3 &= 2\left[-\delta\Omega_3+D\Omega_7+3\mu\Omega_2+(\overline{\alpha}-3\beta-\overline{\pi})\Omega_3 - 3\pi\Omega_6+(3\varepsilon+\overline{\varepsilon}-\overline{\rho})\Omega_7\right] .
\end{aligned}
$$

Cuando deseamos construir un espintensor sólo debemos ocuparnos de (8): Con la métrica dada se genera algún cuarteto de vectores nulos tipo NP (en dicho cuarteto conviene incluir a los vectores de Debever-Penrose porque en general esto causa simplicidad en los coeficientes de espín) y respecto a él determinamos $\psi_0,\ldots,\psi_4,\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\tau,\pi,\ldots$ y los operadores $\delta,\overline{\delta},\Delta,D$, entonces procedemos a resolver el sistema (8) de ecuaciones diferenciales parciales acopladas en las Ω_r.

Al proyectar (2c) sobre la tetrada nula obtenemos:

$$K_{(t)(h)} = K_{(t)}{}^{(q)}{}_{(h);(q)} - K_{(p)}{}^{(q)}{}_{(h)}\,\gamma^{p}{}_{tq} + K_{(t)}{}^{(q)}{}_{(h)}\,Z_{(q)}{}^{a}{}_{;a} -$$

$$- K_{(t)}{}^{(q)}{}_{(p)}\,\gamma^{p}{}_{hq} \quad , \tag{IV.9a}$$

con los valores th = 11,12,13,14,33,44, esto conduce al siguiente conjunto de ecuaciones (se utilizaron (7c) para simplificar algunas expresiones) que no se encuentra en la literatura:

$$K_{(1)(1)} = \delta(\Omega_5-\overline{\Omega}_2) - \Delta\Omega_4 + D\overline{\Omega}_3 + \overline{\nu}\Omega_0 + \overline{\lambda}(2\overline{\Omega}_1-\Omega_1) + (-\overline{\alpha}+\beta-3\overline{\pi})\overline{\Omega}_2 + (-\overline{\rho}-\varepsilon+3\overline{\varepsilon})\overline{\Omega}_3 +$$

$$+ (-\mu-\overline{\gamma}+3\gamma)\Omega_4 + (\overline{\alpha}-\beta-3\tau)\Omega_5 + 2\sigma\Omega_6 - \sigma\overline{\Omega}_6 + \kappa\overline{\Omega}_7 \quad ,$$

$$K_{(1)(2)} = -\delta\overline{\Omega}_5 - \overline{\delta}\Omega_5 + D(\Omega_6+\overline{\Omega}_6) + \overline{\mu}\Omega_1 + \mu\overline{\Omega}_1 - \overline{\pi}\Omega_2 - \pi\overline{\Omega}_2 + \lambda\Omega_4 + \overline{\lambda}\,\overline{\Omega}_4 + (\alpha-\overline{\beta}-2\pi)\Omega_5 +$$

$$+ (\overline{\alpha}-\beta-2\overline{\pi})\overline{\Omega}_5 + (\varepsilon+\overline{\varepsilon}-2\rho)\Omega_6 + (\varepsilon+\overline{\varepsilon}-2\overline{\rho})\overline{\Omega}_6 + \kappa\Omega_7 + \overline{\kappa}\,\overline{\Omega}_7 \quad ,$$

$$K_{(1)(3)} = \delta\Omega_6 + \overline{\delta}\,\overline{\Omega}_3 - \Delta(\overline{\Omega}_2+\Omega_5) + \overline{\nu}(\Omega_1+2\overline{\Omega}_1) - \overline{\lambda}\Omega_2 + (\gamma-\overline{\gamma}-3\overline{\mu})\overline{\Omega}_2 + (3\overline{\beta}-\alpha-\overline{\tau})\overline{\Omega}_3 +$$

$$+ \nu\Omega_4 + (\gamma-\overline{\gamma}-2\mu)\Omega_5 + (\overline{\alpha}+\beta-2\tau)\Omega_6 - \tau\overline{\Omega}_6 + \sigma\Omega_7 + \rho\overline{\Omega}_7 \quad , \tag{IV.9b}$$

$$K_{(1)(4)} = -\delta\overline{\Omega}_1 - \overline{\delta}\Omega_4 + D(\overline{\Omega}_2+\Omega_5) + \overline{\mu}\Omega_0 + \overline{\lambda}\,\overline{\Omega}_0 - \overline{\pi}\Omega_1 + (\overline{\alpha}+\beta-2\overline{\pi})\overline{\Omega}_1 + (\overline{\varepsilon}-\varepsilon-\overline{\rho})\overline{\Omega}_2 +$$

$$+ \overline{\kappa}\,\overline{\Omega}_3 + (3\alpha-\overline{\beta}-\pi)\Omega_4 + (\overline{\varepsilon}-\varepsilon-3\rho)\Omega_5 - \sigma\overline{\Omega}_5 + \kappa(2\Omega_6+\overline{\Omega}_6) \quad ,$$

$$K_{(3)(3)} = \delta\Omega_7 + \overline{\delta}\,\overline{\Omega}_7 - \Delta(\Omega_6+\overline{\Omega}_6) + \overline{\nu}\Omega_2 + \nu\overline{\Omega}_2 - \overline{\lambda}\Omega_3 - \lambda\overline{\Omega}_3 + 2\nu\Omega_5 + 2\overline{\nu}\,\overline{\Omega}_5 - (\gamma+\overline{\gamma} +$$

$$+ 3\mu)\Omega_6 - (\gamma+\overline{\gamma}+3\overline{\mu})\overline{\Omega}_6 + (-\tau+\overline{\alpha}+3\beta)\Omega_7 + (-\overline{\tau}+\alpha+3\overline{\beta})\overline{\Omega}_7 \quad ,$$

$$K_{(4)(4)} = -\delta\bar{\Omega}_0-\bar{\delta}\Omega_0+D(\Omega_1+\bar{\Omega}_1)+(3\alpha+\bar{\beta}-\pi)\Omega_0+(3\bar{\alpha}+\beta-\bar{\pi})\bar{\Omega}_0-(\varepsilon+\bar{\varepsilon}+3\rho)\Omega_1-$$

$$-(\varepsilon+\bar{\varepsilon}+3\bar{\rho})\bar{\Omega}_1+2\kappa\Omega_2+2\bar{\kappa}\ \bar{\Omega}_2-\bar{\sigma}\Omega_4-\sigma\bar{\Omega}_4+\bar{\kappa}\Omega_5+\kappa\bar{\Omega}_5 \quad .$$

Estas relaciones (9b) no se necesitan cuando se trabaja con (2b) para la obtención de superpotenciales de Lanczos, sin embargo, sí son fundamentales en unión de (7c) al construir generadores para tensores simétricos de orden dos con traza y divergencia nulas como sucede con T_{Bij} para el campo de Liénard-Wiechert, en García (1985) y Becerril (1986) pueden encontrarse aplicaciones de (7c,9b). El tensor K_{ij} es simétrico con traza cero así que admite un desarrollo en la tetrada nula semejante al de $E_{ab} = R_{ab} - \frac{R}{4} g_{ab}$ indicado en el Cap. I, entonces

$$K_{ab} = K_{(1)(1)}\ \bar{m}_a\ \bar{m}_b + \bar{K}_{(1)(1)}\ m_a\ m_b + K_{(4)(4)}\ \ell_a\ \ell_b + K_{(3)(3)}\ n_a\ n_b +$$

$$+ K_{(1)(2)}\ (m_a\ \bar{m}_b + \bar{m}_a\ m_b + \ell_a\ n_b + n_a\ \ell_b) - \bar{K}_{(1)(4)}\ (m_a\ \ell_b +$$

$$+ m_b\ \ell_a) - \bar{K}_{(1)(3)}\ (m_a\ n_b + n_a\ m_b) - K_{(1)(4)}\ (\bar{m}_a\ \ell_b + \ell_a\ \bar{m}_b) -$$

$$- K_{(1)(3)}\ (\bar{m}_a\ n_b + \bar{m}_b\ n_a) \quad , \qquad \text{(IV.9c)}$$

por lo tanto, una vez calculadas (respecto a determinada tetrada de NP) las Ω_r para una métrica dada, con (9b,c) podemos obtener K_{jc} y preguntarnos sobre su tipo Churchill-Plebański y también cuestionarnos acerca de su relación (si la hay) con E_{jc}.

3. POTENCIAL DE LANCZOS PARA DIVERSAS MÉTRICAS.

En la literatura sobre el espintensor se arraigó la idea de que para una métrica dada es sumamente difícil construir el generador del tensor conformal, esto quizás sea cierto si empleamos (2b) en su forma tensorial porque entonces se carece de un conjunto básico de ecuaciones cuyo análisis nos lleve a K_{ijr}. En (2b) sólo tenemos la esperanza de que las coordenadas utilizadas simplifiquen la derivada covariante y las componentes C_{ijkr}, fuera de esto no poseemos libertad adicional para introducir más simplificaciones en (2b). Sin embargo, si (2b) se transfieren al formalismo de NP entonces se adquiere mayor maniobrabilidad porque ahora además de la arbitrariedad de las coordenadas también tenemos libertad de seleccionar una adecuada tetrada nula con la intención de simplificar los coeficientes de espín y los operadores δ, Δ y D, en particular, podría emplearse la tetrada canónica y así incorporar de manera natural el tipo Petrov del espacio-tiempo en cuestión, todo esto aumenta la probabilidad de resolver (8). Aquí vamos a obtener espintensores para algunas métricas de interés en relatividad general.

El primer espintensor que construimos fue para el modelo cosmológico de Gödel (1949) el cual es tipo D:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - 2e^{x^4} dx^1 dx^2 - \frac{1}{2} e^{2x^4} (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \quad , \tag{IV.10a}$$

lo hicimos en forma tensorial vía (2b) y debemos aceptar que el proceso fue no-trivial, resultó que

$$K_{pqj} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \eta_{pqab} L^{ab}{}_{j} \tag{IV.10b}$$

donde

$$L_{bij} = (e_{(3)b} e_{(4)i} - e_{(3)i} e_{(4)b}) e_{(4)j} + \frac{1}{3} (e_{(3)b} g_{ij} - e_{(3)i} g_{bj})$$

$$(e_{(3)a}) = (0,0,1,0) \quad , \quad (e_{(4)a}) = (-1, -e^{x^4}, 0, 0) \quad , \tag{IV.10c}$$

los vectores $e_{(a)b}$, $a = 3,4$ son de Killing con las propiedades:

$$e_{(3)b;c} = 0 \quad , \quad e_{(3)a} e_{(3)}{}^{a} = 1 \quad , \quad e_{(3)a} e_{(4)}{}^{a} = 0 \quad ,$$

$$e_{(4)a} e_{(4)}{}^{a} = -1 \quad , \quad e_{(4)}{}^{a}{}_{;a} = 0 \quad , \quad e_{(4)}{}^{a} e_{(4)b;a} = 0 \quad , \tag{IV.10d}$$

de hecho el vector $e_{(4)}{}^{r}$ corresponde a la 4-velocidad del fluído perfecto que genera a (10a); nótese la simplicidad de (10b,c) y la ausencia explícita de integración sobre toda la geometría de R_4. Al checar la validez de (2) recuérdese que para (10a) el tensor de Weyl sólo tiene 8 componentes distintas de cero, a saber

$$C_{2323} = -5\, C_{1212} = -\frac{5}{4} C_{2424} = -\frac{5}{12} e^{2x^4} \quad ,$$

$$C_{2331} = 2\, C_{1424} = \frac{1}{3} e^{x^4} \tag{IV.10e}$$

$$C_{3131} = 2\, C_{3434} = -2\, C_{1414} = -\frac{1}{3} \quad .$$

En Becerril (1986) pág. 42 se manifestó la posibilidad de que (10b) esté asociado a la rotación del fluído perfecto incoherente que intenta simular al Universo rotando. Nuestro espintesor para (10a) se lo enviamos al Dr. Roland de Azeredo Campos del Depto. de Física, Universidad de Brasilia, le pareció muy interesante y nos sugirió construir potenciales de Lanczos para las métricas clasificadas por Bianchi, lo cual reportaremos en otro trabajo. También queda pendiente estudiar la utilidad (si la tiene) de (10b) para el modelo de Gödel.

Ahora mostraremos que la técnica de NP permite deducir (10b) con gran facilidad: Para tal fin nos apoyamos en la tetrada nula

$$(m^r) = (1,-e^{-x^4},0,\frac{i}{\sqrt{2}}) \quad , \quad (\ell^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0) \quad ,$$

$$(n^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0) \quad , \quad \kappa = \sigma = \tau = \nu = \lambda = \pi = 0 \quad ,$$

$$\alpha = \beta = \frac{i}{2\sqrt{2}} \quad , \quad \mu = \rho = \frac{i}{2} \quad , \quad \varepsilon = \gamma = \frac{i}{4} \quad , \quad \psi_r = 0 \quad , \quad r \neq 2 \quad , \tag{IV.11a}$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{6} \quad , \quad \phi_{01} = \phi_{02} = \phi_{12} = 0 \quad , \quad \phi_{00} = \phi_{22} = 2\,\phi_{11} = -\frac{1}{4} \quad ,$$

así (8) nos quedan:

$$-\delta\Omega_0 + D\Omega_4 + i(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\Omega_0 - \frac{1}{2}\,\Omega_4) = 0 \quad ,$$

$$- \delta\Omega_1 + D\Omega_5 + \frac{i}{2}\,\Omega_0 = 0 \quad ,$$

$$- \delta\Omega_2 + D\Omega_6 + i(\Omega_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Omega_2 + \frac{1}{2}\,\Omega_6) = -\frac{1}{12} \quad ,$$

$$- \Delta\Omega_2 + \overline{\delta}\Omega_6 + \frac{i}{2}\,\Omega_7 = 0 \quad ,$$

$$- \Delta\Omega_3 + \overline{\delta}\Omega_7 + i(\frac{i}{\sqrt{2}}\,\Omega_7 - \frac{1}{2}\,\Omega_3) = 0 \quad , \qquad \text{(IV.11b)}$$

$$- \Delta\Omega_0 + \overline{\delta}\Omega_4 + i(\Omega_0 - \sqrt{2}\,\Omega_4 + \frac{3}{2}\,\Omega_5) = 0 \quad ,$$

$$- \Delta\Omega_1 + \overline{\delta}\Omega_5 + i(\frac{1}{2}\,\Omega_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Omega_5 + \Omega_6) = -\frac{1}{12} \quad ,$$

$$- \delta\Omega_3 + D\Omega_7 + i(\frac{3}{4}\,\Omega_2 - \sqrt{2}\,\Omega_3 + \Omega_7) = 0 \quad ,$$

y es simple ver que (11b) admite la solución:

$$\Omega_r = 0 \quad , \quad r \neq 1,6 \quad , \quad \Omega_1 = \Omega_6 = \frac{i}{18} \quad , \qquad \text{(IV.11c)}$$

que al colocar en (6a) implica

$$K_{abc} = \frac{i}{18}\left[(M_{ab} - \overline{M}_{ab})(n_c + \ell_c) + (\overline{V}_{ab} - U_{ab})m_c - (V_{ab} - \overline{U}_{ab})\overline{m}_c\right] \quad , \qquad \text{(IV.11d)}$$

por último, si en (11d) sustituímos las definiciones de V_{ab}, U_{ab} y M_{ab} volvemos a deducir (10b). Con (11,...,d) hemos intentado ilustrar el procedimiento normal para - construir un espintensor mediante el formalismo de NP, enseguida aplicaremos este proceso a diversos campos gravitacionales, sólo mostraremos los resultados esenciales:

a).- METRICA DE SCHWARZSCHILD.

Las conocidas tres pruebas a favor de la relatividad general se apoyan en la solución de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\Theta^2 + \mathrm{Sen}^2\Theta\, d\phi^2) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 \quad , \qquad (IV.12a)$$

así que debe ser interesante indagar si K_{abc} tiene alguna interpretación física respecto a dichas pruebas. Elegimos las coordenadas tales que $x^1 = r$, $x^2 = \Theta$, $x^3 = \phi$ y $x^4 = t$, entonces para (12a) (sólo consideraremos la región $r > 2m$):

$$(m^a) = \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(0, 1, -\frac{i}{\mathrm{Sen}\Theta}, 0\right) , \quad (\ell^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{1-\frac{2m}{r}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}\right) ,$$

$$(n^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-\frac{2m}{r}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}\right) , \quad \psi_a = 0 , \quad a \neq 2 , \quad \psi_2 = -\frac{m}{r^3} ,$$

$$\mu = \rho = -\frac{1}{\sqrt{2}r}\sqrt{1-\frac{2m}{r}} , \quad \gamma = \varepsilon = \frac{m}{2\sqrt{2}\, r^2 \sqrt{1-\frac{2m}{r}}} , \quad R = 0 , \qquad (IV.12b)$$

$\alpha = -\beta = -\dfrac{\mathrm{ctg}\Theta}{2\sqrt{2}r}$ y los restantes coef. de espín valen cero, $\phi_{ab} = 0$,

esto muestra que (12a) satisface $R_{ab} = 0$ y tiene tipo D; los resultados (12b) de hecho están contenidos en (29.b) de Torres (1985) donde se obtuvieron las cantidades de -

NP para el caso general con simetría esférica. Al sustituir (12b) en (8) se origina un sistema de ecs. para las Ω_r el cual acepta la solución:

$$\Omega_a = 0 \;,\quad a \neq 1,6 \;,\quad \Omega_1 = \Omega_6 = \frac{m}{3\sqrt{2}\;\; r^2 \sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \;,\quad r > 2m \;, \qquad \text{(IV.12c)}$$

que mediante (6a) permite construir el correspondiente - espintensor; algo semejante puede hacerse para la región interna al horizonte ($r < 2m$).

b).- SOLUCION DE TAUB.

La métrica

$$ds^2 = f^{-1}(dx^2-dt^2) + f^2(dy^2+dz^2) \;,\quad f = \sqrt{1+kx} \;,\quad k = \text{cte.} \neq 0 \qquad \text{(IV.13a)}$$

la cual posee simetría plana a lo largo del eje X y satisface $R_{ab} = 0$ fue obtenida por Taub (1951) haciendo énfasis en los grupos de movimientos admitidos por el espacio-tiempo. Si empleamos la etiquetas $x^1 = x$, $x^2 = y$, - $x^3 = z$ y $x^4 = t$, entonces para (13a):

$$(m^a) = \frac{f^{-1}}{\sqrt{2}}(0,1,-i,0) \;,\quad (\ell^a) = \frac{f}{2}(-1,0,0,1) \;,\quad (n^a) = \frac{f}{2}(1,0,0,1) \;,$$

$$\rho = \mu = 4\varepsilon = 4\gamma = -\frac{kf^{-3/2}}{2\sqrt{2}} \text{ y los demás coef. de espín se anulan} \;,$$

$$\psi_r = 0 \;,\quad r \neq 2 \;,\quad \psi_2 = \frac{k^2}{8}f^{-3} \;,\quad R = 0 \;,\quad \phi_{ab} = 0 \;,\quad \text{tipo D} \;, \qquad \text{(IV.13b)} \;.$$

que en unión de (8) conduce a un espintensor con

$$\Omega_r = 0 \ , \ r \neq 1,6 \ , \ \Omega_1 = \Omega_6 = -\frac{k\sqrt{2}}{24} f^{-3/2} = -\frac{k\sqrt{2}}{24}(1+kx)^{-3/4} \quad . \qquad \text{(IV.13c)}$$

c).- METRICA DE BERTOTTI.

El elemento de línea

$$ds^2 = f^{-1}\,dx^2 - f\,dt^2 + h\,dy^2 + h^{-1}\,dz^2 \qquad \text{(IV.14a)}$$

con

$$f = 1 + \frac{x^2}{r^2{}_1} \ , \quad h = 1 - \frac{z^2}{r^2{}_2} \ , \quad r_a = \text{ctes.} \ , \quad a = 1,2 \qquad \text{(IV.14b)}$$

propuesto por Bertotti (1959) genera un R_4 en presencia de un campo electromagnético uniforme. Si $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ y $z^4 = t$, para (14a) utilizamos

$$(m^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, \frac{1}{\sqrt{h}}, -i\sqrt{h}, 0\right) \ , \quad (\ell^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{f}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{f}}\right) \ ,$$

$$(n^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{f}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{f}}\right) \ , \ \alpha = \beta = \frac{iz}{2r^2{}_2\sqrt{2h}} \ , \ \psi_a = 0 \ , \ a \neq 2 \ ,$$

$$\varepsilon = \gamma = \frac{x}{2r^2{}_1\sqrt{2f}} \ , \ \psi_2 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{r^2{}_1} - \frac{1}{r^2{}_2}\right) \ , \ R = 12\,\psi_2 \ , \qquad \text{(IV.14c)}$$

$$\phi_{ab} = 0 \text{ excepto } \phi_{11} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r^2{}_1} + \frac{1}{r^2{}_2}\right) \ ,$$

los coef. de espín no indicados valen cero , .

aquí es necesario considerar dos situaciones:

Tipo D.-

En este caso $r^2{}_1 \neq r^2{}_2$, entonces de (8,14c) obtenemos

$$\Omega_a = 0 \quad , \quad a \neq 1,6 \quad , \quad \Omega_1 = \Omega_6 = \frac{\psi_2 - x}{\sqrt{2F}} \quad , \qquad \text{(IV.14d)}$$

Tipo O.-

El tensor de Weyl se anula cuando $r^2{}_1 = r^2{}_2$, entonces - (8,14c) implican

$$\Omega_r = 0 \quad , \quad r \neq 1,6 \quad , \quad \Omega_1 = \Omega_6 = \frac{1}{\sqrt{F}} \quad . \qquad \text{(IV.14e)}$$

d).- ESPACIO DE KASNER.

El turno es ahora para la métrica de Kasner (1921)

$$ds^2 = t^{2p_1}\, dx^2 + t^{2p_2}\, dy^2 + t^{2p_3}\, dz^2 - dt^2 \quad , \qquad \text{(IV.15a)}$$

donde p_a, $a = 1,2,3$ son constantes tales que

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad , \quad p^2{}_1 + p^2{}_2 + p^2{}_3 = 1 \quad . \qquad \text{(IV.15b)}$$

Sean $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ y $x^4 = t$, entonces empleamos

$$(m^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(t^{-p_1}, -i\, t^{-p_2}, 0, 0) \quad , \quad (\ell^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0, 0, -t^{-p_3}, 1) \quad ,$$

$$(n^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,0,t^{-p_3},1) \quad , \quad R = 0 \quad , \quad \phi_{ab} = 0 \quad ,$$

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}t}\,(p_2-p_1) \ , \ \rho = -\frac{1}{2\sqrt{2}t}\,(p_2+p_1) \ , \ \epsilon = \frac{p_3}{2\sqrt{2}t} \quad ,$$

$$\lambda = -\sigma \quad , \quad \mu = -\rho \quad , \quad \gamma = -\epsilon \quad , \qquad \text{(IV.15c)}$$

$$\kappa = \tau = \alpha = \beta = \nu = \pi = 0 \quad ,$$

$$\psi_0 = \psi_4 = \frac{p_3}{2t^2}\,(p_1-p_2) \ , \ \psi_2 = -\frac{p_1 p_2}{2t^2} \ , \ \psi_1 = \psi_3 = 0 \quad ,$$

así vemos que el espacio-tiempo de Kasner acepta tres tipos Petrov:

Tipo I : $p_1 \neq p_2 \quad , \quad p_3 \neq 0$

Tipo D : $p_1 = p_2 \neq 0 \quad , \quad p_3 \neq 0$ (IV.15d)

Plano : $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = 0$ ó $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = 1$ ó $p_1 = p_3 = 0$, $p_2 = 1$,

nos limitaremos a los tipos I y D porque el espacio de Minkowski ya fue considerado en García (1985) y Becerril (1986), por lo tanto $p_3 \neq 0$ durante nuestro análisis. Para estos dos tipos Petrov de (8,15c) resulta

$$\Omega_a = 0 \quad , \quad a \neq 1,6 \quad , \quad \Omega_1 = -\Omega_6 = \frac{\sqrt{2}\,p_3}{6t} \quad ; \qquad \text{(IV.15e)}$$

al efectuar los cálculos conviene observar que (15b) implican las relaciones

$$p^2{}_1 + p^2{}_2 - p_1 - p_2 + p_1\,p_2 = 0 \quad , \quad p^2{}_3 = p_3 + p_1\,p_2 \quad ,$$

Con (15e) queda determinado el espintensor para (15a).

e).- SOLUCION DE NARLIKAR-KARMARKAR.

La métrica conformalmente plana (tipo O):

$$ds^2 = A(\xi)\;({dx^1}^2 + {dx^2}^2 + {dx^3}^2 - {dx^4}^2) \qquad \text{(IV.16a)}$$

con A función arbitraria de $\xi = x^1 - x^4$ fue obtenida por Narlikar-Karmarkar (1949), agradecemos al M. en C. Guillermo González Padrón, Universidad de Konstanz, Alemania Federal, el envío del artículo de estos autores. En este caso utilizamos ($\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$):

$$(m^a) = \frac{1}{\sqrt{2A}}\,(1,-i,0,0) \; , \; (\ell^a) = -\frac{1}{\sqrt{2A}}\,(0,0,1,1) \; , \; (n^a) = \frac{1}{\sqrt{2A}}\,(0,0,1,-1) \; ,$$

$$\rho = -\frac{A'}{(2A)^{3/2}} = \tau = -\mu = -\pi \; , \; \epsilon = -2\rho = \beta = -\gamma = -\alpha \; , \; A' = \frac{dA}{d\xi} \; ,$$

$$\psi_a = 0 \; , \; \phi_{00} = \phi_{02} = \phi_{22} = \frac{1}{4A^3}\,(A\,A'' - 3A'^2) \; , \; A'' = \frac{d^2A}{d\xi^2} \; , \; R = 0 \; ,$$

$$\phi_{01} = \frac{1}{8A^3}\,(2A\,A'' - 3A'^2) \; , \; \phi_{12} = \frac{1}{8A^3}\,(8A\,A'' - 9A'^2) \; , \; \phi_{11} = \frac{1}{8A^3}\,(8A\,A'' + 3A'^2) \; ,$$

(IV.16b)

entonces (8,16b) implican

$$\Omega_a = 0 \quad , \quad a \neq 2,6 \quad , \quad \Omega_2 = \Omega_6 = \frac{A'}{A\sqrt{2A}} \tag{IV.16c}$$

f).- METRICA NUESTRA.

En el Cap. III estudiamos espacio-tiempos de clase dos y ahí mostramos cómo el proceso de inmersión permitía construir nuevas soluciones de las ecs. de Einstein, en particular, obtuvimos una métrica semejante en forma a las métricas de Petrov (1962) la cual es tipo O y no satisface $R_{ab} = 0$:

$$ds^2 = f^{4/3}\,({dx^1}^2+{dx^2}^2) + f^2\,{dx^3}^2-{dx^4}^2 \quad , \quad f = k\,x^4+1 \; , \; k = \text{cte.} \tag{IV.17a}$$

Para (17a) empleamos:

$$(m^a) = \frac{f^{-2/3}}{\sqrt{2}}\,(1,-i,0,0) \; , \; (\ell^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,0,-f^{-1},1) \; , \; (n^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,0,f^{-1},1) \quad ,$$

$$\rho = -\mu = -\frac{\sqrt{2}k}{3f} \; , \; \varepsilon = -\gamma = \frac{\sqrt{2}k}{4f} \text{ y los demás coef. de espín se anulan} \; ,$$

$$\psi_a = 0 \; , \; \phi_{01} = \phi_{02} = \phi_{12} = 0 \; , \; \phi_{00} = \phi_{22} = 4\phi_{11} = -\frac{4k^2}{9f^2} \; , \; R = 6\phi_{00} \quad , \tag{IV.17b}$$

y de (8,17b) obtenemos que

$$\Omega_a = 0 \; , \; a \neq 4 \; , \; \Omega_4 = c\,f^{1/3} \; , \; c = \text{cte. arbitraria} \quad . \tag{IV.17c}$$

g).- ESPACIO DE NOVOTNY-HORSKY.

En la Secc. 4 del Cap. III se mostró que el espacio de Einstein:

$$ds^2 = \mathrm{Sen}^{4/3}(az)(dx^2+dy^2) + dx^2 - \mathrm{Cos}^2(az)\,\mathrm{Sen}^{-3/2}(az)\,dt^2 \ , \ a = \mathrm{cte.} \tag{IV.18a}$$

era de clase dos realizándose en forma explícita la correspondiente inmersión, esta métrica se debe a Novotný-Horský (1974) y mediante ella logramos ejemplificar nuestros teoremas (generalizaciones de los obtenidos por Collinson (1966)) para R_4 de Einstein sumergidos en E_6. Ahora determinaremos su espintensor, en efecto, sean $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ y $x^4 = t$, entonces para (18a) utilizamos:

$$(m^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Sen}^{-2/3}(az)(1,-i,0,0) \ , \ (\ell^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,0,-1,\mathrm{Sen}^{1/3}(az)\,\mathrm{Sec}(az)) \ ,$$

$$(n^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,0,1,\mathrm{Sen}^{1/3}(az)\,\mathrm{Sec}(az)) \ , \ \kappa = \sigma = \alpha = \beta = \pi = \tau = \nu = \lambda = 0 \ , \tag{IV.18b}$$

$$\mu = \rho = -\frac{a}{3}\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}(az) \ , \ \varepsilon = \gamma = -\frac{a\sqrt{2}}{4}\left[\mathrm{tg}(az) + \frac{1}{3}\,\mathrm{ctg}(az)\right] \ , \ \phi_{bc} = 0 \ ,$$

$$\psi_r = 0 \ , \ r \neq 2 \ , \ \psi_2 = \frac{2a^2}{9}\,\mathrm{Csc}^2(az) \ , \ R = -\frac{16}{3}\,a^2 \ , \ \text{Tipo D} \ ,$$

y de (8,18b) concluímos que un potencial de Lanczos está dado por:

$$\Omega_r = 0 \ , \ r \neq 1,6 \ , \ \Omega_1 = \Omega_6 = -\frac{a\sqrt{2}}{9}\,\mathrm{Csc}(2az) \ . \tag{IV.18c}$$

h).- METRICA TIPO N DE KAIGORODOV:

El espacio-tiempo homogêneo:

$$ds^2 = \frac{2}{k^2x^2}(dx^2+dy^2) - 2du(dv + \frac{2v}{x}dx + x\,du) \quad , \quad k = \text{cte.} \qquad (IV.19a)$$

fue obtenido por Kaigorodov (1963) y es un espacio de Einstein porque satisface $R_{ab} = \frac{R}{4} g_{ab}$. Si las coordenadas son etiquetadas como $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = v$, $x^4 = u$, entonces construímos la tetrada nula:

$$\begin{aligned}
&(m^a) = k(\tfrac{k}{2}, \tfrac{ik}{2}, -v, 0) \quad , \quad (\ell^a) = (0,0,-\sqrt{x}, \tfrac{1}{\sqrt{x}}) \quad , \\
&(n^a) = (0,0,\sqrt{x},0) \quad , \quad \kappa = \sigma = \lambda = \rho = \epsilon = \mu = \gamma = 0 \quad , \\
&\tau = -\pi = \frac{\nu}{3} = \frac{k}{2} \quad , \quad \alpha = 5\beta = \frac{5k}{8} \quad , \quad R = 6k^2 \quad , \\
&\psi_a = 0 \quad , \quad a \neq 4 \quad , \quad \psi_4 = \frac{3k^2}{2} \quad , \quad \phi_{ab} = 0 \quad ,
\end{aligned} \qquad (IV.19b)$$

y estas cantidades de NP en unión de las ecs. de Weyl-Lanczos implican:

$$\Omega_a = 0 \quad , \quad a \neq 7 \quad , \quad \Omega_7 = \frac{k}{2} \quad . \qquad (IV.19c)$$

i).- SOLUCION TIPO III DE KAIGORODOV.

Ahora el turno es para el espacio homogêneo de Kaigorodov (1963):

$$ds^2 = 2(kx)^{-2}(dx^2+dy^2)-2du(dv+\frac{2v}{x}\,dx + \frac{4x}{3k}\,dy + 2x^3\,du) \quad , \; k = \text{cte.} \tag{IV.20a}$$

para el cual elegimos $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = v$, $x^4 = u$, - entonces trabajamos con

$$(m^a) = (\frac{kx}{2}, -\frac{ikx}{2}, -kv+\frac{2x^2}{3}\,i, 0) \; , \; (\ell^a) = (0,0,\sqrt{2}\,x\, , -\frac{1}{\sqrt{2}\,x^2}) \; ,$$

$$(n^a) = (0,0,-\sqrt{2}\,x^2,0) \; , \; \kappa = \rho = \varepsilon = \sigma = \lambda = 0 \; ,$$

$$\tau = -\pi = \beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{\nu}{6} = \frac{k}{2} \; , \; \gamma = \frac{\mu}{2} = \frac{ik}{2\sqrt{2}} \; , \; R = 6k^2 \; ,$$

$$\psi_a = 0 \; , \; a \neq 3,4 \; , \; \psi_3 = \frac{ik^2}{2\sqrt{2}} \; , \; \psi_4 = \frac{15}{2}\,k^2 \; , \tag{IV.20b}$$

$$\phi_{ab} = 0 \; \text{excepto} \; \phi_{22} = -\,5k^2 \; ,$$

y de (8,20b) obtenemos el espintensor:

$$\Omega_a = 0 \; , \; a \neq 3,6,7 \; , \; \Omega_3 = -\Omega_6 = -\frac{ik}{6\sqrt{2}} \; , \; \Omega_7 = \frac{28k}{18} \; . \tag{IV.20c}$$

j).- METRICAS DE PETROV.

Aquí solo deseamos indicar las soluciones de Petrov - (1962) para las cuales Becerril (1986) Apéndice C ha - construído su potencial de Lanczos:

$$1.- \; ds^2 = f^{4/3}({dx^1}^2+{dx^2}^2)+f^{-2/3}\,{dx^3}^2-{dx^4}^2 \quad , \; f = kx^4+1 \; , \; k = \text{cte.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2.- \; ds^2 = f^{4/3}({dx^1}^2+{dx^2}^2) + {dx^3}^2-f^{-2/3}\,{dx^4}^2 & , \\ 3.- \; ds^2 = f^{4/3}({dx^1}^2-{dx^4}^2) + f^{-2/3}\,{dx^2}^2+{dx^3}^2 & , \\ 4.- \; ds^2 = f^2({dx^1}^2-{dx^4}^2)+ f\,{dx^2}^2+f^{-1}\,{dx^3}^2 & , \end{array}\right\} f = kx^3+1 \; , \; k = \text{cte.} \qquad \text{(IV.21a)}$$

$$5.- \; ds^2 = -2\,dx^1\,dx^4 + \text{Sen}^2\,x^4\,{dx^2}^2+\text{Senh}^2\,x^4\,{dx^3}^2 \; , \qquad ,$$

las primeras cuatro son tipo D y la última es tipo N, todas ellas satisfacen $R_{ab} = 0$. Becerril también obtuvo el espintensor para la métrica (10.35) de Kramer-Stephani-MacCallum (1980) asociada a radiación pura:

$$6.- \; ds^2 = -2\,dx^1\,dx^4 + \text{Sen}^2\,x^4({dx^2}^2+{dx^3}^2) \quad , \; \text{tipo O.} \qquad \text{(IV.21b)}$$

En esta Secc. hemos expuesto espintensores para diversas soluciones de las ecuaciones de Einstein, sólo se indicaron los resultados esenciales para así mostrar que con el formalismo de NP se "cae en la rutina" en el sentido de que rápidamente se establece un proceso sistemático para construir superpotenciales para el tensor conformal, lo cual no ocurre con el enfoque tensorial. Esto refleja la superioridad de las tetradas nulas en la investigación de cierto tipo de problemas en relatividad general.

El presente Cap. lo finalizamos con un resumen de algunos aspectos de espintensor que amerita un cuidadoso análisis:

1.- Elaborar la clasificación algebraica de K_{jrp} y relacionar esta con la CP para el tensor de Weyl.

2.- Asignar significado físico al potencial de Lanczos para aquellas métricas con relevancia física en la teoría de Einstein.

3.- Estudiar K_{pqt} mediante la formulación Hamiltoniana del campo gravitacional.

4.- Analizar las transformaciones de norma del espintensor que dejan invariante al tensor conformal.

5.- Sustituir las ecs. de Weyl-Lanczos en las identidades de Bianchi e investigar qué restricciones imponen éstas sobre las primeras.

6.- Con la técnica del espintensor construir el superpotencial para la parte radiativa del tensor de Maxwell asociado al campo de Liénard-Wiechert.

7.- Estudiar la estructura de las ecs. de Weyl-Lanczos bajo la misma filosofía con que Papapetrou (1970), Herrera-Papapetrou (1971), Goldberg (1974), Brans (1977), Edgar (1979,80) y Novak-Goldberg (1981) han investigado las 18 ecs. de NP y las 11 identidades de Bianchi.

8.- Para espacio-tiempos asintóticamente planos obtener en coordenadas de Robinson-Trautman el comportamiento de K_{ijc} a grandes distancias de las fuentes.

9.- Trabajar la clasificación Churchill-Plebański del tensor $K_{ab} = K_{a\ b;r}^{\ r}$.

10.- Usando las identidades de Bianchi, estudiar las relaciones diferenciales de orden dos que se obtendrían para el espintensor de Lanczos.

C O N C L U S I O N E S

El objetivo principal de este trabajo es el problema de la inmersión en relatividad general con especial énfa-- sis en el caso de R_4 sumergido en E_6, en la correspon-- dente investigación se hace un empleo sistemático del - formalismo de Newman-Penrose ((NP) (1962) el cual reve- la estar notablemente adaptado al análisis de dicho pro blema, esta técnica de NP también permite realizar un - adecuado estudio del interesante espintensor de Lanczos (1962).

En el Cap. I se da una breve exposición de tetradas nu- las, clasificación de Petrov y vectores de Debever-Penrose (DP) con la idea de que esta tesis sea auto-contenida - en los conceptos y ecuaciones de NP; además, se sugiere elaborar un algoritmo eficiente (tensorial y NP) para - efectuar la clasificación de Churchill-Plebañski. Todo lo aquí discutido es de utilidad en los capítulos res-- tantes.

El Cap. II contiene los antecedentes necesarios para ob tener la inmersión del espacio-tiempo en E_6, es decir: se indican los principales resultados para R_4 en E_5, se manifiestan algunos problemas abiertos en este tema y - se muestra que algunas métricas no son sumergibles en - E_5.

El Cap. III es el núcleo de nuestro trabajo porque todo el análisis previo tenía la intención de aplicarse a - 4-espacios de clase dos, el material de aquí es relevan te porque se:

a).- Realiza un estudio sistemático (obteniéndose relaciones originales) tensorial-NP de R_4 en E_6, el cual no existe en la literatura.

b).- Da la primera demostración explícita de un teorema de Yakupov (publicado sin prueba) sobre la no existencia de espacio-tiempos vacíos tipo III de clase dos.

c).- Generalizan a espacios de Einstein los teoremas de Collinson (1966) para R_4 vacío, en esta forma se deducen condiciones necesarias (sobre las congruencias nulas repetidas de DP) que todo 4-espacio con la propiedad $R_{ab} = \frac{R}{4} g_{ab}$, $R \neq 0$, debe satisfacer al aceptar inmersión en E_6.

d).- Demuestra que las métricas de Hauser, Held-Robinson, Kerr y Siklos no son de clase dos.

e).- Obtiene la inmersión explícita en E_6 de las soluciones de Novotný-Horský y Taub.

f).- Cuestiona un teorema de Goenner (1973) acerca de que $^*C_2 = 0$ para R_4 algebraicamente especial sumergido en E_6.

g).- Enfatiza la ausencia en la literatura de espacio-tiempos vacíos tipos I ó II inmersos en E_6.

Prácticamente todo el contenido del Cap. IV es original porque el espintensor de Lanczos K_{ijr} se encuentra muy ignorado en relatividad general, en este material desta can: la forma NP de las ecuaciones de Weyl-Lanczos, las sugerencias de elaborar una clasificación algebraica de K_{ijc} y las posibles interpretaciones físicas de éste, - la construcción explícita de espintensores para las métricas de Schwarzschild, Taub, Gödel, Bertotti, Kasner, Narlikar-Karmarkar, Novotný-Horský y Kaigorodov entre - otras.

REFERENCIAS

J.A. Allnutt, Gen.Relat. Grav. 13, 1017 (1981).

W.K. Atkins, W.R. Davis, N. Cim. B59, 116 (1980).

A. Avez, C.R. Acad. Sci. París A264, 738 (1967).

F. Bampi, G. Caviglia, Gen. Relat. Grav. 15, 375 (1983); 16, 423 (1984).

F. Bampi, C. Zordan, Gen. Relat. Grav. 9, 393 (1978).

B.M. Barbashov, V.V. Nesterenko, Forts. d. Physik 28, 427 (1980).

A. Barnes, Gen. Relat. Grav. 5, 147 (1974).

R. Becerril, Tesis de Maestría ESFM-IPN (1986).

R. Becerril, J. López, Bol. Depto. Fís. ESFM-IPN 3, No. 2, 99 (1983).

B. Bertotti, Phys. Rev. 116, 1331 (1959).

W.B. Bonnor, Tensor N.S. 24, 329 (1972).

W.B. Bonnor, W. Davidson, Class. Quantum Grav. 2, 775 (1985).

C. Brans, J. Math. Phys. 18, 1378 (1977).

E. Brinis, Rend. Inst. Lomb. A111, 466 (1977).

————————, Gen. Relat. Grav. 12, 429 (1980).

————————, Meccanica 16, 75 (1981).

H.A. Buchdahl, J. Math. Phys. 1, 537 (1960).

R. Butler, Comp. Maths. with Appl. 1, 258 (1975).

J. Carminati, J. Wainwright Gen. Relat. Grav. 17, 853 (1985).

C.D. Collinson, J. Math. Phys. 7, 608 (1966); 9, 403 (1968a).

————————, Commun. Math. Phys. 8, 1 (1968b).

————————, J. Phys. A Serie 2, 2, 621 (1969).

C.D. Collinson, R. Shaw Int. J. Theor. Phys. 6, 347 (1972).

W.R. Davis, L.H. Green L.K. Norris Comp. Maths. with Appls. 1, 361 (1975).

W.R. Davis, W.K. Atkins W.M. Baker N. Cim. B44, 23 (1978).

M. Demianski, Gen. Relat. Grav. 7, 551 (1976).

R.A. D'Inverno, R.A. Russell-Clark J. Math. Phys. 12, 1258 (1971).

S.B. Edgar, Int. J. Theor. Phys. 18, 251 (1979).

————————, Gen. Relat. Grav. 12, 347 (1980).

K. Eguchi, J. Math. Tokushima Univ. 1, 17 (1967).

J. Fernández, J. López, G. Ovando, M. Rosales, Rep. internos DCBI-UAM-A (1985).

C. Fronsdal, Phys. Rev. 116, 778 (1959).

————————, Rev. Mod. Phys. 37, 221 (1965).

R. Fuentes, Tesis de Maestría Facultad de Ciencias UNAM (1985).

R. Fuentes, J. López, Acta Mex. Ciencia y Tec.-IPN 3, No. 9, 9 (1985).

M. García, Tesis de Licenciatura ESFM-IPN (1985).

B. Gellai, Comp. Math. with Appl. 1, 260 (1975).

K. Gödel, Rev. Mod. Phys. 21, 447 (1949).

H.F. Goenner, Lectura de Habilitación, Univ. de Göttingen (1973).

————————, Gen. Relat. Grav. 6, 75 (1975); 8, 139 (1977).

————————, Tensor N.S. 30, 15 (1976).

————————, General relativity and gravitation, Ed. A. Held, Vol. I Cap. 14 Plenum, N.Y. (1980).

J.N. Goldberg, Gen. Relat. Grav. 5, 183 (1974).

J.N. Goldberg, R.K. Sachs, Acta Phys. Polon. Suppl. 22, 13 - (1962)

G. González, Tesis de Maestría ESFM-IPN (1981).

P.J. Greenberg, J. Math. Anal. Appl. 29, 647 (1970).

————————, Stud. Appl. Math. 51, 415 (1972).

Y.K. Gupta, P. Goel, Gen. Relat. Grav. 6, 499 (1975).

A. Held, Gen. Relat. Grav. 7, 177 (1976).

L.A. Herrera, A. Papapetrou, C.R. Acad. Sci. París A272, 1756 (1971).

D.E. Hodgkinson, Gen. Relat. Grav. 16, 569 (1984).

P.A. Hogan, T. Criss, Int. J. Theor. Phys. 15, 207 (1976).

D.W. Joseph, Rev. Mod. Phys. 37, 225 (1965).

V.R. Kaigorodov, Sov. Phys. Doklady 7, 893 (1963).

K.R. Karmarkar, Proc. Indian Acad. Sci. A27, 56 (1948).

E. Kasner, Amer. J. Math. 43, 217 (1921).

R.P. Kerr, Phys. Rev. Lett. 11, 237 (1963).

C.N. Kozameh, E.T. Newman, K.P. Tod, Gen. Relat. Grav. 17, 343 (1985).

D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, Exact solutions of Einstein's field equations, Camb. Univ. Press (1980).

W. Kundt, A. Thompson	C.R. Acad. Sci. París <u>A254</u>, 4257 (1962).
D. Ladino,	Tesis de Maestría ESFM-IPN (1986).
C. Lanczos,	Ann. of Math. <u>39</u>, 842 (1938).
——————,	Rev. Mod. Phys. <u>21</u>, 497 (1949).
——————,	Am. Math. Mon. <u>65</u>, 665 (1958).
——————,	Rev. Mod. Phys. <u>34</u>, 379 (1962).
B.E. Laurent, K. Rosquist E. Sviestins	Gen. Relat. Grav. <u>13</u>, 1093 (1981).
P.S. Letelier,	Gen. Relat. Grav. <u>11</u>, 367 (1979).
C.A. López,	Phys. Rev. <u>D17</u>, 2004 (1978).
J. López,	Rep. interno DCBI-UAM-A No. 59 (1981).
——————,	Tesis Doctoral ESFM-IPN (1982a).
——————,	Rep. interno DCBI-UAM-A No. 66 (1982b).
J. López, D. Tun	Bol. Depto. Fís. ESFM-IPN <u>3</u>, No. 2, 57 (1983)
D. Lovelock,	Tensor N.S. <u>22</u>, 274 (1971).
——————,	J. Math. Phys. <u>13</u>, 874 (1972).
W.F. Maher, J.D. Zund	N. Cim. <u>A57</u>, 638 (1968).

D.B. Malament, J. Math. Phys. 26, 774 (1985).

E. Massa, E. Pagani Gen. Relat. Grav. 16, 805 (1984).

M. Matsumoto, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A28, 179 (1953); A32, 259 (1959).

V.V. Narlikar, K.R. Karmarkar Proc. Indian Acad. Sci. A29, 91 (1949).

Y. Ne'eman, Rev. Mod. Phys. 37, 227 (1965).

E.T. Newman, J. Math. Phys. 15, 44 (1974).

E.T. Newman, R. Penrose J. Math. Phys. 3, 566 (1962).

————————, Phys. Rev. Lett. 15, 231 (1965).

E.T. Newman, H.F. Goenner General relativity and gravitation, Ed. B. Bertotti, F. de Felice, A. Pascolini D. Reidel, pág. 199 (1984).

S. Novak, J.N. Goldberg Gen. Relat. Grav. 13 79 (1981).

J. Novotný, J. Horský Czech. J. Phys. B24, 718 (1974)

G. Ovando, Tesis de Maestría ESFM-IPN (1985).

S.N. Pandey, S.P. Sharma Gev. Relat. Grav. 8, 147 (1977).

A. Papapetrou, Ann. Inst. Henri Poincaré A13, 271 (1970).

A.Z. Petrov,	Recent developments in general relativity, Pergamon Press (1962).
J. Pfarr,	Gen. Relat. Grav. 13, 1073 (1981).
T.H. Phát,	Acta Phys. Polon. B2, 567 (1971).
J. Plebañski,	Bull. Acad. Polon. Sci. 9, 373 (1962).
J. Plebañski, J. Stachel	J. Math. Phys. 9, 269 (1968).
K. Rao,	Curr. Sci. 35, 589 (1966).
H.S. Ruse,	Proc. London Math. Soc. 50, 75 (1948).
B.K.P. Scaife,	Studies in numerical analysis, Academic Press (1974).
S.T.C. Siklos,	Algebraically special homogeneous space-times, Preprint Univ. Oxford (1978).
K.P. Singh, S.N. Pandey	Proc. Nat. Inst. Sci. India A26, 665 (1960).
H. Stephani,	Commun. Math. Phys. 4, 137 (1967a); 5, 337 (1967b); 9, 53 (1968).
J.L. Synge,	Proc. Roy. Irish Acad. A58, 29 (1957).
P. Szekeres,	N. Cim. A43, 1062 (1966a).
——————,	J. Math. Phys. 7, 751 (1966b).
A.H. Taub,	Ann. of Math. 53, 472 (1951).

———————,	Perspectives in geometry and relativity, Ed. B. Hoffmann, p. 360 (1966).
———————,	Comp. Maths. with Appls. 1, 377 (1975).
———————,	Ann. Inst. Henri Poincaré A41, 227 (1984).
H. Takeno,	Tensor N.S. 3, 119 (1954); 15, 103 (1964).
C. Teitelboim,	Phys. Rev. D1, 1572 (1970).
T.Y. Thomas,	Acta Math. 67, 169 (1936).
J.A. Torres,	Tesis de Maestría ESFM-IPN (1985).
T.W. Unti, R.J. Torrence	J. Math. Phys. 7, 535 (1966).
J. Wainwright,	Commun. Math. Phys. 17, 42 (1970).
———————,	Int. J. Theor. Phys. 10, 39 (1974).
———————,	N. Cim. B22, 131 (1974).
———————,	Gen. Relat. Grav. 8, 797 (1977).
J. Wainwright, P.E.A. Yaremovicz	Gen. Relat. Grav. 7, 345 (1976); 7, 595 (1976).
Ch.G. van Weert,	Phys. Rev. D9, 339 (1974).
M.Sh. Yakupov,	Sov. Phys. Doklady 13, 585 (1968).
———————,	Grav. Teor. Otnos. Univ. Kazan 9, 109 (1973).
J.D. Zund,	Ann. Math. Pura Appl. 82, 381 (1969); 104, 239 (1975).