Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

División de Estudios de Posgrado

Un estudio de subretículas de R-tors para anillos perfectos.

T E S I S

Que para obtener el Grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P r e s e n t a :

M. en C. Hugo Alberto Rincón Mejía

México, D. F. **1986**

Indice.

Introducción.

Es un hecho que las teorías de torsión han sido de gran utilidad para el estudio de los anillos. El conocimiento de la retícula R-tors proporciona una gran cantidad de información sobre el anillo R, básteme citar la elegante caracterización de los anillos perfectos dada por Dlab y las diversas caracterizaciones de otras clases de anillos que existen en la literatura.

En esta Tesis estudiamos R-tors vía una partición inducida por la relación de equivalencia $\sim_{\amalg}$ que introducimos.

En el caso de que R sea un anillo perfecto, demostramos que cada clase de equivalencia $[\tau]\in$ R-tors$/\sim_{\amalg}$, es una subretícula completa de R-tors. En particular, en este caso, $[\tau]$ es cerrada bajo tomar uniones ($\bigvee$) e intersecciones ($\bigwedge$) arbitrarias. Así que en $[\tau]$ deben existir un elemento mayor τ^* (que llamamos "supremo") y uno menor τ_* (que llamamos "ínfimo").

Uno de nuestros resultados principales, consiste en dar descripciones de τ^* y de τ_*, explícitamente, si R es perfecto o local (e.d. con un único ideal izquierdo máximo) entonces $\tau^* = \chi(\mathrm{Rad}\,R/t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))$ y $\tau_* = \xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))$.

Si R es un anillo tal que toda teoría de torsión hereditaria es cohereditaria (BT- anillo, pág. 56), demostramos que $\tau\leq\sigma \Longrightarrow \tau^*\leq\sigma^*$ y $\tau_*\leq\sigma_*$. Como consecuencia de lo anterior (Lema 57) tenemos que la clase de equivalencia de ξ, $[\xi]$, incluye una copia isomorfa de cada $[\tau]\in$R-tors$/\sim_{\amalg}$. Así que en este caso, el estudio de R-tors, como retícula, se reduce al estudio de $[\xi]$.

El tratamiento seguido en la Tesis fue sugerido por mi asesor, el Dr. Francisco Raggi C., quien conjuntamente con el M. en C. José Ríos M. han estudiado R-tors con procedimientos similares a los que he seguido (ver |18| y |19|). De hecho, una gran cantidad de los resultados presentados en este trabajo se inspiraron en sus resultados.

Los resultados principales en esta Tesis, se refieren principalmente a anillos perfectos y semiperfectos. Esto es debido al hecho de que los anillos perfectos (resp. semiperfectos) están caracterizados por el hecho de que existen cubiertas proyectivas para todo $_RM$ (resp. para todo $_RM$ cíclico).

Otra motivación para estudiar las clases propias generadas por $\{0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0 \ : \ K \in \mathbb{L}_\tau\}$, donde $\tau \in$ R-tors, fue que había sido probado en [2] que R-mod tiene suficientes $\mathcal{A}_\tau$-proyectivos, es decir, que $\forall M \in$ R-mod existe una sucesión exacta $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ con $K \in \mathbb{L}_\tau$ y P $\mathcal{A}_\tau$-proyectivo (es decir proyectivo respecto a cada sucesión $0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0 \ \cdot\ni\cdot \ L' \in \mathbb{L}_\tau$).

Raggi observó que un módulo $_RM$ es $\mathcal{A}_\tau$-proyectivo si y sólo si M es un sumando directo de un módulo de la forma P/T, donde P es proyectivo y $T \subsetneq t_\tau(P)$, y que en la caracterización anterior de los módulos $\mathcal{A}_\tau$-proyectivos, puede sustituirse "proyectivo" por "libre". Posteriormente encontré que Ohtake en [16] había dado una caracterización parecida de los módulos $\mathcal{A}_\tau$-proyectivos (que él llama τ-codivisibles).

También encontré que Bland, con otras motivaciones, había introducido las cubiertas $\mathcal{A}_\tau$-proyectivas (cubiertas τ-codivisibles.

Uno de los resultados principales de Bland en [3] , es que si R es un anillo semiperfecto, y $\tau \in$ R-tors, entonces todo módulo es τ-codivisible ($\tau \in [\chi]$, en nuestro contexto) si y sólo si Rad R $\in \mathbb{T}_\tau$, donde Rad R es el radical de Jacobson de R. Esto resulta ser equivalente (Teorema 67) a que $[\chi]$ tenga un elemento menor χ_* que además es igual a ξ(Rad R). Hecho que también puede expresarse de la siguiente manera: Si R es semiperfecto, entonces $[\chi]$ es una subretícula completa de R-tors.

Se demuestra en este trabajo que si R es semiperfecto también $[\xi]$ es una subretícula completa de R-tors, lo que equivale a decir que $[\xi]$ tiene un elemento mayor ξ^*, que además es igual a χ(Rad R), como se demuestra en este trabajo.

Otro de los resultados de Bland [3, Corollary 2.3] es que si existe $\tau \in$ R-tors, fiel (e.d. R $\in \mathbb{L}_\tau$) y tal que todo módulo es τ-codivisible (e.d. $\tau \in [\chi]$) entonces R es semisimple.

Demostramos en el Corolario 47, que lo anterior es una caracterización de los anillos semisimples (R es semisimple $\Longleftrightarrow$ $\exists \tau \in$ R-tors, fiel y en $[\chi]$). Esto es una consecuencia de nuestra caracterización de los anillos semisimples en el Corolario 46.

Como dijimos antes, si R es perfecto, hemos demostrado que cada $[\tau] \in$ R-tors/$\sim_{\mathbb{L}}$ es una subretícula completa de R-tors. Hemos podido demostrar que lo anterior también es cierto para anillos locales.

Para anillos semiperfectos en general, sabemos que $[\chi]$ y $[\xi]$ son, como mencionamos más arriba, subretículas completas de R-tors. No he podido decidir si lo mismo resulta cierto para cualquier clase de equivalencia $[\tau]$. Me inclino a pensar que la afirmación anterior es verdadera y que los elementos τ^* y τ_* cuya existencia (o inexistencia) resta probar , debieran poder expresarse como en el caso en que R es perfecto.

Como consecuencias de la teoría desarrollada en esta Tesis damos una condición necesaria y suficiente para que la teoría de torsión de Goldman se escinda centralmente, en el caso de que R sea semiperfecto (Teorema 71). Como resultado del teorema mencionado y de un resultado de Raggi y Ríos, demostramos que si R es perfecto y conmutativo, la teoría de torsión de Goldman se escinde centralmente.

Considero que la condición del Teorema 71 es importante, dada su sencillez $(soc_p : Rad\ R) = (0))$.

El Teorema 75 nos dá una agradable equivalencia entre una ecuación "homológica" y una ecuación de teorías de torsión, que tiene la consecuencia interesante de que para un anillo casi-frobenius el elemento menor de $[\chi]$ es τ_G (¡la teoría de torsión de Goldie!).

Creo, por todo lo anteriormente mencionado, que los resultados presentados en este trabajo pueden tener alguna importancia. Como también queda claro que se puede extender este trabajo en diversas direcciones.

Para terminología y notación sobre teorías de torsión ver [10] y [21] y sobre teoría de anillos ver [14], [1], [21] y [20].

A menos que se diga lo contrario, los conceptos que se usan son "por la izquierda" (p. ej. ideales, módulos, etc.).

Agradezco al Dr. Francisco Raggi Cárdenas, director de esta Tesis y al M. en C. José Ríos Montes, por la generosidad que siempre han tenido conmigo, por el estímulo que me han dado a lo largo de mi desarrollo como matemático y por sus enseñanzas y sugerencias, sin las que no hubiera podido desarrollar este trabajo.

Agradezco a los miembros del jurado, Dr. Hugo Arizmendi Peimbert, Dr. Humberto Cárdenas Trigos, Dr. Alejandro Díaz-Barriga Casales, Dr. Emilio LLuis Riera, M. en C. Alejandro Odgers López, Dr. Francisco Raggi Cárdenas, Dr. Francisco Tomás Pons, el haber aceptado integrar la comisión dictaminadora para esta Tesis.

Hugo Alberto Rincón Mejía.

NOTACION Y PRELIMINARES

En este trabajo R denotará un anillo asociativo con 1. R-mod denotará la categoría de los R-módulos unitarios izquierdos. R-tors la retícula de las teorías de torsión hereditarias para el anillo R. $0 \longrightarrow K(M) \longrightarrow P(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$ denotará una cubierta proyectiva para el R-módulo izquierdo ${}_RM$ y $0 \longrightarrow K_\tau(M) \longrightarrow P_\tau(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$ una cubierta $\mathbb{L}_\tau$-proyectiva para ${}_RM$ (cubierta τ-codivisible para otros: Bland ([3]), Golan([12]), Teply ([22])). $E(M)$ y $E_\tau(M)$ denotarán la cápsula inyectiva y la cápsula τ-inyectiva de ${}_RM$, respectivamente.

Definición 1(Dickson ([6])).

. Una teoría de torsión en R-mod es una pareja $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{L})$ de clases de objetos de R-mod tales que:

(i) $Hom_R(T,L) = 0 \quad \forall T \in \mathbb{T}, \quad \forall L \in \mathbb{L}$.

(ii) $Hom_R(C,L) = 0 \quad \forall L \in \mathbb{L} \Longrightarrow C \in \mathbb{T}$.

(iii) $Hom_R(T,C) = 0 \quad \forall T \in \mathbb{T} \Longrightarrow C \in \mathbb{L}$.

Nosotros estamos interesados en estudiar las teorías de torsión hereditarias.

Definición. 2.

Una teoría de torsión hereditaria es una pareja $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{L})$ de clases de R-módulos izquierdos tales que:

(i) $Hom_R(T,E(L)) = 0 \quad \forall T \in \mathbb{T}, \quad \forall L \in \mathbb{L}$.

(ii) $Hom_R(C,E(L)) = 0 \quad \forall L \in \mathbb{L} \Longrightarrow C \in \mathbb{T}$.

(iii) $Hom_R(T,E(C) = 0 \quad \forall T \in \mathbb{T} \Longrightarrow C \in \mathbb{L}$.

Es fácil ver que la pareja $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ para una teoría de tor sión goza de las siguientes propiedades:

$\mathbb{T}$1) $\mathbb{T}$ es cerrada bajo tomar sumas directas, es decir que si $\{M_\alpha\}_X$ es uan familia de módulos en $\mathbb{T}$, entonces $\bigoplus_{\alpha\in X} M_\alpha$ también pertenece a $\mathbb{T}$.

$\mathbb{T}$2) $\mathbb{T}$ es cerrada bajo tomar cocientes.

$\mathbb{T}$3) $\mathbb{T}$ es cerrada bajo tomar extensiones (una clase $\mathbb{C}$ de objetos en R-mod es cerrada bajo tomar extensiones si $0 \to N \to M \to P \to 0$ exacta con N y P en $\mathbb{C} \Rightarrow M \in \mathbb{C}$).

$\mathbb{L}$1) $\mathbb{L}$ es cerrada bajo tomar productos.

$\mathbb{L}$2) $\mathbb{L}$ es cerrada bajo tomar submódulos.

$\mathbb{L}$3) $\mathbb{L}$ es cerrada bajo tomar extensiones.

Notemos que si $(\mathbb{T},\mathbb{L})$ es una teoría de torsión hereditaria entonces también valen las siguientes dos propiedades (equivalentes):

$\mathbb{T}$4) $\mathbb{T}$ es cerrada bajo tomar submódulos.

$\mathbb{L}$4) $\mathbb{L}$ es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas.

Observación 3

Cada elemento de una pareja $(\mathbb{T},\mathbb{L})$, teoría de torsión hereditaria, determina el otro: $\mathbb{T} = \{M \in R\text{-mod} : Hom_R(M,E(N)) = 0 \ \forall N \in \mathbb{L}\}$ y $\mathbb{L} = \{N \in R\text{-mod} : Hom_R(M,E(N)) = 0, \ \forall M \in \mathbb{T}\}$.

Definición 4

Una clase no vacía de módulos que goza de las propiedades $\mathbb{T}$1) - $\mathbb{T}$4) se llama clase de torsión hereditaria, y una clase de módulos que goza de las propiedades $\mathbb{L}$1) - $\mathbb{L}$4) se llama clase libre de torsión.

Definición 5

Un filtro (izquierdo) de Gabriel $\mathcal{F}$ para un anillo R es una colección $\neq \emptyset$ de ideales izquierdos del anillo que satisfacen:

$\mathcal{F}$1) $I \in \mathcal{F},\ a \in R \Rightarrow (I:a) = \{r \in R\ :\ ra \in I\} \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$2) $(I:a) \in \mathcal{F}\ \ \forall a \in J,\ J \in \mathcal{F} \Rightarrow I \in \mathcal{F}$.

Un filtro de Gabriel $\mathcal{F}$ determina una teoría de torsión hereditaria $(\mathbb{T}_{\mathcal{F}}, \mathbb{L}_{\mathcal{F}})$ de la siguiente manera:

$\mathbb{T}_{\mathcal{F}} = \{ {}_R M \in R\text{-mod}\ :\ \forall m \in M\ \exists I \in \mathcal{F} \text{ tal que } Im = 0 \}$

$\mathbb{L}_{\mathcal{F}} = \{ {}_R N \in R\text{-mod}\ :\ In = 0,\ I \in \mathcal{F},\ n \in N \Rightarrow n = 0 \}$.

Es fácil ver que la pareja $(\mathbb{T}_{\mathcal{F}}, \mathbb{L}_{\mathcal{F}})$ es una teoría de torsión hereditaria viendo que $\mathbb{T}$ goza de las propiedades $\mathbb{T}$1) - $\mathbb{T}$4).

Observación 6

Un filtro de Gabriel $\mathcal{F}$ goza además de las siguientes propiedades que se deducen facilmente de $\mathcal{F}$1) y $\mathcal{F}$2):

$\mathcal{F}$3) $\mathcal{F}$ es cerrado bajo productos finitos de ideales del anillo, es decir que si $I_1, \ldots, I_n$ pertenecen a $\mathcal{F}$ entonces el ideal $I_1 I_2 \ldots I_n$ también pertenece a $\mathcal{F}$.

4) $\mathcal{F}$ es cerrado bajo tomar intersecciones finitas.

5) $I \subset J,\ I \in \mathcal{F} \Rightarrow J \in \mathcal{F}$.

Ahora, dada una teoría de torsión hereditaria $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{L})$, podemos obtener un filtro de Gabriel de la manera siguiente:

$\mathcal{F}_\tau = \{ {}_R I \subseteq R\ :\ R/I \in \mathbb{T} \}$.

Se puede ver facilmente que las correspondencias

$\tau \longmapsto \mathcal{F}_{\tau}$ y $\mathcal{F} \longmapsto \tau_{\mathcal{F}}$ son correspondencias inversas (Stenström 21

Obsérvese que de la existencia de la biyección dada arriba entre R-tors y el conjunto de los filtros de Gabriel para el anillo R, podemos inferir que la clase R-tors es un conjunto (un filtro de Gabriel pertenece a $\mathbb{P}(\mathbb{P}(R))$, así que la clase de los filtros de Gabriel para el anillo R es un subconjunto de $\mathbb{P}(\mathbb{P}(R))$).

Observemos que para todo M R-mod y para toda $\tau \in$ R-tors existe un único submódulo de M, máximo con la propiedad de pertenecer a la clase $\mathbb{T}$: la suma de todos los submódulos de M que pertenecen a la clase $\mathbb{T}$ (esta suma pertenece a $\mathbb{T}$ porque es un cociente del módulo $\bigoplus_{X} N_{\alpha}$ donde $\{N_{\alpha}\}_{X}$ es la familia de submódulos de M que pertenecen a $\mathbb{T}$, usando las propiedades $\mathbb{T}$2) y $\mathbb{T}$1)).

Definición 7

Llamaremos preradical a un funtor t: R-mod —— R-mod que sea un subfuntor del funtor identidad Id: R-mod —— R-mod.

Un preradical t se llamará idempotente si $t^2 = t \circ t = t$.

Un preradical t se llamará un radical si para todo $M \in$ R-mod, se satisface que $t(M/t(M)) = 0$.

Llamaremos funtor de torsión a todo radical idempotente que sea exacto izquierdo.

Es fácil ver, que si denotamos t(M) al mayor submódulo de τ-torsión de ${}_R M$, donde τ es una teoría de torsión hereditaria, la asignación $M \longmapsto t(M)$ y $M \xrightarrow{f} N \longmapsto$

$f|_{t(M)}: t(M) \longrightarrow t(N)$, define un subfuntor del funtor identidad $:R\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$, que resulta ser idempotente, exacto izquierdo y radical, es decir un funtor de torsión, en el sentido de la definición de la página anterior (Stenström[21], Proposition 3.1, pág. 141). Reciprocamente, dado un funtor de torsión (= radical idempotente exacto izquierdo) obtenemos una teoría de torsión hereditaria de la manera siguiente:
definimos una clase de torsión $\mathbb{T}_t = \{M \in R\text{-mod} : t(M) = M\}$, cuya correspondiente clase libre de torsión es $\mathbb{F}_t = \{N \in R\text{-mod} : t(N) = 0\}$.

Se puede ver facilmente que las correspondencias $t \longmapsto (\mathbb{T}_t, \mathbb{F}_t)$ y $(\mathbb{T}, \mathbb{F}) =: \longmapsto t$, son funciones inversas, donde $t : R\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$ es el funtor que asigna al módulo ${}_RM$ su mayor submódulo en $\mathbb{T}$ (Stenström, Proposition 3.1, pág. 141).

<u>Descripción de las teorías de torsión hereditarias mediante cogeneradores inyectivos.</u>

Si ${}_RE$ es un módulo inyectivo definimos una teoría de torsión hereditaria $\chi(E) = (\mathbb{T}_E, \mathbb{F}_E)$ dada por $\mathbb{T}_E = \{M \in R\text{-mod} : \mathrm{Hom}_R(M,E) = 0\}$, la clase $\mathbb{F}_E$ queda descrita así: $\mathbb{F}_E = \{N \in R\text{-mod} : \exists\ X$ conjunto y un monomorfismo $N \rightarrowtail E^X\}$, donde E^X denota, como de costumbre, el producto de card(X) copias de E. Reciprocamente, para cada teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$, existe un módulo inyectivo E tal que $(\mathbb{T}, \mathbb{F}) = (\mathbb{T}_E, \mathbb{F}_E)$. E se puede escoger como $\prod_Y R/I_y$, donde $\{{}_RI_y\}_Y$ es la familia de ideales tales que $R/I \in \mathbb{F}$, para toda $y \in Y$ (Stenström, Proposition 3.7, pág. 142).

Lo anterior hace que se vea natural la siguiente definición (Golan [10], página 9).

Definición 8

Definimos la relación $\sim$ en la clase $\mathcal{J}$ de los R-módulos izquierdos inyectivos por: $I_1 \sim I_2$ si existen conjuntos X_1, X_2 y monomorfismos $I_1 \rightarrowtail I_2^{X_1}$ e $I_2 \rightarrowtail I_1^{X_2}$.

Es claro que la relación así definida es una relación de equivalencia y por lo tanto parte $\mathcal{J}$ en clases de equivalencia. Denotaremos $\bar{E}$ la clase de equivalencia del módulo $_RE$.

Se puede ver fácilmente que hay una correspondencia biyectiva entre R-tors e $\mathcal{J}/\sim$ (Golan [10] Prop. 1.6 p. 15).

En resumidas cuentas, tenemos el siguiente

Teorema 9

Para un anillo R hay una correspondencia biyectiva entre:

(1) Teorías de torsión hereditarias $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{L})$.

(2) Clases de torsión hereditarias $\mathbb{T}$.

(3) Clases libres de torsión cerradas bajo tomar cápsulas inyectivas.

(4) Filtros de Gabriel.

(5) Funtores de torsión.

(6) Clases de equivalencia de módulos inyectivos, bajo la relación definida arriba. //

El menor radical $\bar{r}$ mayor o igual que un preradical dado r y la sucesión de Loewy.

<u>Proposición 10</u>

Dado un prerradical r existe un menor radical $\bar{r}$ mayor o igual que r.

Demostración

Definimos por inducción transfinita, para cada ordinal β un prerradical r_β por: $r_\beta(C)/r_{\beta-1}(C) = r(C/r_{\beta-1}C)$ si β no es un ordinal límite y por $r_\beta = \sum_{\alpha<\beta} r_\alpha(C)$ si β es un ordinal límite. Esto dá lugar a una sucesión creciente de prerradicales y resulta que $\bar{r} = \sum r_\beta$ (Stenström [21] Prop. VI.1.5 p. 37).

<u>Proposición 11</u>

a) Si r es un prerradical idempotente entonces $\bar{r}$ también lo es.(Stenström, Proposition VI.1.6,pág. 138).

b) Si r es un prerradical exacto izquierdo entonces también lo es $\bar{r}$.(Stenström, Corollary VI.3.4, pág. 142).

c) Si r es un prerradical exacto izquierdo y ${}_RM$ es un módulo, entonces $r(M)$ es un submódulo esencial de $\bar{r}(M)$.(Stenström, Corollary VI.3.5, pág. 142). //

<u>Algunas teorías de torsión importantes.</u>

<u>La teoría de torsión de Goldie.</u>

Si consideramos $\mathcal{E} = \{{}_RI : {}_RI \subset_e R\}$, definimos el submódulo singular de M, Z(M) por $Z(M) = \{x \in M : \exists I \in \mathcal{E},$ tal que $Ix=0\}$. Es facil ver que

$$\begin{aligned} Z : R\text{-mod} &\longrightarrow R\text{-mod} \\ M &\longmapsto Z(M) \end{aligned}$$

define un prerradical idempotente exacto izquierdo (también se puede ver que la familia $\mathcal{E}$ de los ideales izquierdos esenciales no es un filtro de Gabriel, pues aunque satisface $\mathcal{F}1)$, no satisface $\mathcal{F}2)$), así que Z no es un funtor de torsión, y no lo es porque no es un radical.

De la Proposición 10 tenemos que existe un menor funtor de torsión mayor o igual que Z, que denotaremos t_G (el funtor de torsión asociado a la teoría de torsión de Goldie $(\Pi_G, \amalg_G)$) y que está dado por la sucesión de Loewy de preradicales (Proposición 10). De hecho, se puede ver que en este caso $t_G = Z_2$: primero, observemos que $Z(M) \leq_e t_G(M)$ (se puede ver directamente, o usando la Proposición c)), por lo tanto $Z(t_G(M)/Z(M)) = t_G(M)/Z(M)$, ya que si $x \in t_G(M)$ entonces $(Z(M):x) \leq_e R$ (si ésto último no fuera cierto, entonces $0 \neq {}_RK \leq R$ tal que $(Z(M):x) \cap K = 0$, por lo tanto $Kx \neq (0)$ y así $Kx \cap Z(M) = 0$, contradiciendo que $Z(M) \prec_e t_G(M)$). Entonces $t_G(M)/Z(M) = Z(t_G(M)/Z(M)) \subset Z(M/Z(M))$, de donde tenemos que $\sum_\alpha Z_\alpha(M) = t_G(M) \subset Z_2(M)$. Así que $t_G(M) = Z_2(M)$, en consecuencia $M \in \Pi_G$, por lo tanto $M \in \Pi_G \Longleftrightarrow Z_2(M) = M \Longleftrightarrow Z(M) \prec_e M$.

Usando lo anterior, podemos describir el filtro de Gabriel asociado a la teoría de torsión de Goldie de la manera siguiente:

$$\mathcal{F}_G = \{ {}_RI \ : \ Z(R/I) \prec_e R/I \} .$$

Para dar una descripción más concreta, observemos que $Z(R/I) = J/I$ para algún ideal ${}_RJ$ R, y que $J/I \prec_e R/I \Longrightarrow J \prec_e R$. Además $J/I = Z(R/I) \Longrightarrow \forall j \in J$, $(I:j) \prec_e R$. Así pues, $I \in \mathcal{F}_G \Longrightarrow \exists J \prec_e R$ $(\ni Z(R/I) = J/I)$ tal que $\forall j \in J$, $(I:j) \prec_e R$. Y recíprocamente, si $\exists\, {}_RJ \prec_e R$, $I < J$ $\ni$ $\forall j \in J$ $(I:j) \prec_e R$, entonces $J/I < Z(R/I)$ de donde $R/I \in \Pi_G$ y por lo tanto $I \in \mathcal{F}_G$.

En resumen, $\mathcal{F}_G = \{ {}_RI \subset R : \exists\, {}_RJ <_e R,\ I \subset J \text{ y } (I:j) <_e R,\ \forall j \in J \}$. Por último, es muy claro que $N \in \mathbb{L}_G$ sii $Z(N) = 0$.

<u>La teoría de torsión de Lambek.</u>

La teoría de torsión de Lambek es denotada $\tau(R) = (\mathbb{T}_1, \mathbb{L}_1)$.

Así, $\mathbb{T}_1 = \{ M \in R\text{-mod} : Hom_R(M, E(R)) = 0 \}$

$\mathbb{L}_1 = \{ N \in R\text{-mod} : \exists$ X-conjunto y un monomorfismo $N \rightarrowtail E(R)^X \}$.

Observemos que como la teoría de torsión de Lambek está cogenerado por la cápsula inyectiva del anillo, es inmediatamente una teoría de torsión hereditaria, así que el filtro correspondiente es de Gabriel.

El filtro de Gabriel asociado a la teoría de torsión de Lambek es:
$$\mathcal{F}_1 = \{ {}_RI : Hom_R(R/I, E(R)) = 0 \} = \{ {}_RI : Hom_R(R/(I:a), R) = 0\ \ \forall a \in R \},$$
ésto es debido a que cada submódulo cíclico de R/I es isomorfo a $R/(I:a)$ para alguna $a \in R$ (y a que, en general, $Hom_R(M, E(N)) = 0$ sii $Hom_R(Rm, N) = 0\ \forall m \in M$).

Así pues,
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{ {}_RI : Hom_R(R/(I:a), R) = 0\ \ \forall a \in R \} \\ &= \{ {}_RI : \forall r \in R\ \exists\, j \in (I:a) \ni jr \neq 0 \} \\ &= \{ {}_RI : \forall a \in R,\ r \neq 0 \Rightarrow r \notin an_d(I:a) \} \\ &= \{ {}_RI \subseteq R : an_d(I:a) = 0\ \ \forall a \in R \}. \end{aligned}$$

<u>Observación 12</u>

$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_G$: de hecho se puede ver que cada ideal en el filtro de Lambek es esencial. Pues si ${}_RI \in \mathcal{F}_1$ no fuera esencial, entonces E(I) sería un sumando directo de de E(R), así que $E(R) = E(I) \oplus K$, donde $0 \neq {}_RK \leq E(R)$. Como $R \leq_e E(R)$, tendríamos entonces que $R \cap K \neq 0$, y podríamos escoger $0 \neq k \in R \cap K$, obteniendo la siguiente situación:

$$\begin{array}{c} 0 \neq RT \hookrightarrow R \hookrightarrow E(R) \\ \cong \\ R/(I:k) \end{array}$$

por lo tanto $Hom_R(R/(I:k), E(R)) \neq 0$, de donde $(I:k) \notin \mathcal{F}_1$ y por lo tanto $I \notin \mathcal{F}_1$. Por lo tanto $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{E}_R \subseteq \mathcal{F}_G$ //.

Observación 13

Los filtros de Gabriel asociados a las teorías de torsión de Goldie y de Lambek coinciden $\Longleftrightarrow Z(R) = 0 \Longleftrightarrow R \in \mathbb{L}_G$ $\Longleftrightarrow \mathcal{F}_1 = {}_R\mathcal{E}$. Pues si suponemos que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_G$ entonces $\{0\} = \{x \in R : (0:x) \in \mathcal{F}_1\} = \{x \in R : (0:x) \in \mathcal{F}_G\}$ por lo tanto $R \in \mathbb{L}_G$. Supongamos ahora que $R \in \mathbb{L}_G$, y sea $I \in \mathcal{F}_G$. Como $R \in \mathbb{L}_G$, entonces $\forall 0 \neq r \in R$, $\forall a \in R$, $(I:a)r \neq (0)$, e.d. $\forall a \in R$, $an_d\ (I:a) = 0$, por lo tanto $I \in \mathcal{F}_1$ y así $\mathcal{F}_G \subseteq \mathcal{F}_1$.

Observemos también que si $Z(R) = (0)$, entonces el filtro de Goldie consta precisamente de los ideales esenciales, ya que siempre tenemos que $\mathcal{F}_1 \subseteq {}_R\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}_G$ y en este caso $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_G$.

Teorías de torsión generadas por familias de módulos y teorías de torsión cogeneradas por familias de módulos.

Si $\{M_\alpha\}_X$ es una familia de R-módulos izquierdos entonces $\mathbb{L}_{\xi(\{M_\alpha\})_X} = \{{}_RN : Hom_R(M_\alpha, E(N)) = 0\ \forall \alpha \in X\}$, es una clase libre de torsión, y en consecuencia determina una teoría de torsión hereditaria que se denota $\xi(\{M_\alpha\}_X)$.

Observemos que la clase de torsión correspondiente a $\xi(\{M_\alpha\}_X)$ es la menor clase de torsión hereditaria que contiene a cada $M_\alpha \ \forall \alpha \in X$.

Análogamente se define $\chi(\{M_\alpha\}_X)$ por:

$\mathbb{T}_{\chi(\{M_\alpha\}_X)} = \{{}_R N : Hom_R(N, E(M_\alpha)) = 0 \quad \forall \alpha \in X\}$, ésta resulta ser una clase de torsión hereditaria, y por lo tanto tiene una clase libre de torsión correspondiente, que es la más chica clase libre de torsión que contiene a cada M_α.

La teoría de torsión de Goldman.

Si denotamos $\mathcal{A}_{sp}$ la clase de los módulos simples proyectivos, entonces la teoría de torsión de Goldman τ_{sp} es $\xi(\mathcal{A}_{sp})$.

Se puede ver que un módulo es de torsión de Goldman sii es semisimple y proyectivo, más aún que el funtor de torsión correspondiente es el zoclo proyectivo soc_p, ($soc_p({}_R M) = \sum_X S_\alpha$, donde $\{S_\alpha\}_X$ es la familia de submódulos de M que son simples y proyectivos).

La retícula brouweriana R-tors.

R-tors se puese ordenar por medio de las siguientes condiciones equivalentes:

1) $\sigma \leq \tau$ si $\mathbb{T}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_\tau$

2) si $\mathbb{L}_\tau \subseteq \mathbb{L}_\sigma$

3) si $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$

4) Supongamos que $\tau_1 = \chi(E_1)$ y que $\tau_2 = \chi(E_2)$ (ver la página 5), entonces hacemos $\tau_1 \leq \tau_2$ sii $\exists\ E_2 \rightarrowtail E_1^X$, monomorfismo, donde X es un conjunto.

Notemos que por la observación 12 $\tau_I \leq \tau_G$ y que se tiene la igualdad cuando el anillo es no singular, es decir, cuando R es tal que $Z(R) = (0)$.

R-tors queda ordenado parcialmente por $\leq$, como se definió arriba, además tiene estructura de retícula si definimos las operaciones de unión $\vee$ e intersección $\wedge$ de la manera siguiente: para una familia de teorías de torsión $\{\tau_\alpha\}_{\alpha}$, su intersección $\bigwedge_{\alpha} \tau_\alpha$ es la teoría de torsión con clase de torsión $\bigcap_{\alpha} \mathbb{T}_\alpha$ y su unión $\bigvee_{\alpha} \tau_\alpha$, es la teoría de torsión con clase libre de torsión $\bigcap_{\alpha} \mathbb{L}_\alpha$.

Además, si τ es una teoría de torsión hereditaria, admite un pseudocomplemento $\tau^{\perp}$ que está dado por:

$$\tau^{\perp} = \chi\{{}_R S \ : \ S \text{ es simple, } S \notin \mathbb{T}_\tau\}.$$

(R-tors, $\vee$, $\wedge$) es una retícula distributiva (Golan[10], (8.11) Proposition, pág.82). Además, R-tors es una retícula brouweriana completa ([11], Proposition 1.4, p. 7), puesto que vale la igualdad

$$\tau \wedge (\vee Y) = \vee\{\tau \wedge \sigma \ : \sigma \in Y\} \ \forall \tau \in R\text{-tors y todo } Y \subseteq R\text{-tors}.$$

Algunos tipos importantes de teorías de torsión.

Enseguida damos las definiciones de algunos tipos de teorías de torsión que aparecerán en la tesis.

Definición 14 (Jans [13]).

$\tau \in$ R-tors es TTF (o jansiana) si $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo tomar productos. Equivalentemente, si existe I un ideal bilateral idempotente tal que $\mathbb{T}_\tau = \{_R M : IM = (0)\}$.

Es claro que para un anillo artiniano toda teoría de torsión es TTF, puesto que un filtro de Gabriel contiene un elemento mínimo, que resulta ser bilateral e idempotente.

Definición 15

$\tau \in$ R-tors es estable si $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas.

Por ejemplo, la teoría de torsión de Goldie es estable.

Definición 16

$\tau \in$ R-tors se escinde si t(M) es un sumando directo de M $\forall$ M $\in$ R-mod.

Definición 17

Una teoría de torsión TTF se escinde centralmente si valen las siguientes condiciones equivalentes:

i) $\exists$ e $\in$ R, e idpotente central $\cdot\ni\cdot$ M $\in \mathbb{T}_\tau \iff$ eM = (0).

ii) $\mathbb{C}_\tau = \mathbb{L}_\tau$, donde $\mathbb{C}_\tau = \{_R N : Hom_R(N, M) = (0)\ \forall M \in \mathbb{T}_\tau\}$

Denotemos $\tau^+ = (\mathbb{C}_\tau, \mathbb{T}_\tau)$, es una teoría de torsión que es hereditaria sii τ es estable.

iii) τ^+ y τ se escinden.

iv) $\tau^{\perp}$ es hereditaria y se escinde.

v) $\tau^{\perp}$ es hereditaria y $\mathbb{L}_{\tau}$ es cerrada bajo cocientes.

vi) τ es estable y $\mathbb{L}_{\tau}$ es cerrada bajo tomar cocientes.

vii) $R = t_{\tau}(R) \times t_{\tau^{\perp}}(R)$.

<u>Definición 18</u>

$\tau \in$ R-tors es cohereditaria si $\mathbb{L}_{\tau}$ es cerrada bajo tomar cocientes.

Son equivalentes:

i) τ es cohereditaria.

ii) t_{τ} es un funtor exacto.

iii) $t_{\tau}(M) = t_{\tau}(R)M \quad \forall M \in$ R-mod.

Por ejemplo, la teoría de torsión de Goldman es cohereditaria [17 , Corolario 2.9] .

<u>Definición 19</u>

$\tau \in$ R-tors es fiel si $R \in \mathbb{L}_{\tau}$.

La teoría de torsión de Lambek τ_1 es (la mayor teoría de torsión) fiel.

Por la observación 13 , $\tau_1 = \tau_G \Longleftrightarrow \tau_G$ es fiel.

<u>Definición 20</u>

Una teoría de torsión τ es simple si $\exists \{S_x\}_X$ una familia de módulos simples tal que $\tau = \xi(\{S_x\}_X)$.

Por ejmplo si R-simp denota la familia de los módulos izquierdos simples, entonces la teoría de torsión de Dickson τ_D es $=$ ξ(R-simp).

Diab [7] demuestra que un anillo R es perfecto izquierdo si y sólo si toda teoría de torsión derecha es simple y TTF.

Un anillo es semiartiniano sii $\tau_D = \chi$.

CLASES PROPIAS EN R-mod. (Ver [18], [19], [9], [8] y [15]).

Definición 21

Una clase $\mathcal{A}$ de sucesiones exactas cortas en R-mod es una clase propia si goza de las siguientes propiedades:

1) La clase de las sucesiones exactas cortas escindibles es una subclase de $\mathcal{A}$.

Denotemos $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{0 \longrightarrow K \longrightarrow L \;:\; 0 \longrightarrow K \xrightarrow{1} L \longrightarrow \operatorname{Cok} 1 \longrightarrow 0 \in \mathcal{A}\}$

2) $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $f \circ g$ definida $\Longrightarrow f \circ g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

3) $f\,g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Longrightarrow g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Denotemos $\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0 \;:\; 0 \longrightarrow \operatorname{Ker} p \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow 0 \in \mathcal{A}\}$

4) $f, g \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ y $f \circ g$ definida $\Longrightarrow f \circ g \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$.

5) $f \circ g \in \mathcal{E}(\mathcal{A}) \Longrightarrow f \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$.

Ejemplos 22

i) La clase de todas las sucesiones exactas cortas es una clase propia (de hecho es la mayor), como resulta evidente.

ii) La clase de las sucesiones exactas cortas escindibles en R-mod es una clase propia (y es claro que debe ser la menor clase propia de módulos, de acuerdo con la definición):

Veamos que la clase ii) es una clase propia.

1) Se satisface trivialmente. Denotemos $\mathcal{a}$ la clase considerada.

2) $A \xrightarrow{f} B \in \mathcal{M}(\mathcal{a})$, $B \xrightarrow{g} C \in \mathcal{M}(\mathcal{a}) \Longrightarrow \exists f' : B \longrightarrow A$ y $g' : C \longrightarrow B$, R-morfismos $\ni$ $f' f = \mathrm{Id}_A$ y $g' g = \mathrm{Id}_B$. Entonces $(f' \circ g') \circ (g \circ f) = \mathrm{Id}_A$, es decir, que el monomorfismo $A \xrightarrow{g \circ f} C$ admite el inverso izquierdo $(f' \circ g') : C \longrightarrow A$, por lo tanto $0 \longrightarrow A \xrightarrow{g \circ f} C \in \mathcal{M}(\mathcal{a})$.

3) $0 \longrightarrow (A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Longrightarrow \exists\, h: C \longrightarrow A$ R-morfismo tal que $h \circ (g \circ f) = Id_A$, $\Longrightarrow (h \circ g) \circ f = Id_A$, entonces $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Análogamente, valen 4) y 5). //

Notación 23

Si $\{M_x\}_X$ es una familia de R-módulos y $\mathcal{A}$ es la clase de todas las sucesiones que hacen proyectivos a todos los M_x, escribiremos $\{M_x\}_X \Longrightarrow \mathcal{A}$ (siguiendo a Eilenberg ([illegible])).

Así, $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0 \in \mathcal{A}$ $\quad \forall f: M_x \longrightarrow M$

$\exists\, \bar{f}: M_x \longrightarrow L$ $\cdot\ni\cdot$

$$\begin{tikzcd} & M_x \arrow[dl, "\bar{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ L \arrow[r, "p"'] & M \end{tikzcd}$$ conmuta.

Recíprocamente, si $\mathcal{S}$ es una clase de sucesiones exactas cortas en R-mod y $\mathcal{P}$ es la familia de los módulos proyectivos respecto a cada elemento de $\mathcal{S}$, escribiremos $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{P}$.

Así, $P \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \forall\, 0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0 \in \mathcal{S}$ y

$\forall f: P \longrightarrow M$ $\exists\, \bar{f}: P \longrightarrow L$ $\cdot\ni\cdot$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\bar{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ L \arrow[r, "p"'] & M \end{tikzcd}$$ conmuta.

El siguiente Teorema nos proporcionará una clase mayor de clases propias.

Teorema 24

Si $\{M_x\}_X$ es una familia arbitraria de módulos y $\{M_x\}_X \Longrightarrow \mathcal{R}$, entonces $\mathcal{R}$ es una clase propia.

<u>Demostración</u>

1) Claramente la clase de las sucesiones exactas cortas escindibles es una subclase de $\mathbb{R}$, pues si tenemos el diagrama siguiente, donde los morfismos son los naturales,

$$\begin{tikzcd} & & & M_x \arrow[d, "f"] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & L \oplus M \arrow[r, shift left, "p"] & M \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

entonces $\bar{f} = i\circ f$ tiene la propiedad de que $p\circ(i\circ f) = (p\circ i)\circ f = Id_M\circ f = f$

2) Supongamos que $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_1} L \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$

y que $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_2} U \xrightarrow{p_2} T \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$, queremos demostrar que $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_2\circ i_1} U \xrightarrow{c} C \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$, donde $C = \mathrm{Cok}\,(i_2\circ i_1)$ y $c = \mathrm{cok}\,(i_2\circ i_1)$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2\circ i_1"'] & M \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "i_2"] & L \arrow[r] & 0 \\ & & U \arrow[d, "p_2"] \arrow[dr, "c"] & & M_x \arrow[dl, "\sigma"] \\ & & T \arrow[d] & C \arrow[dr] & \\ & & 0 & & 0 \end{tikzcd}$$

donde $x \in X$.

Por la propiedad universal del conúcleo (C), $\exists\, \alpha : C \longrightarrow T$

tal que $\alpha \circ c = p_2$ (1) .

Por la propiedad universal del conúcleo (L) $\exists\, \beta : L \longrightarrow C$ tal que $\beta \circ p_1 = c \circ i_2$ (2) .

Como $0 \longrightarrow M \longrightarrow U \longrightarrow T \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$, y $x \in X$,

$\exists\, \tau : M_x \longrightarrow U$ tal que

$$\alpha c \tau = p_2 \tau = \alpha \sigma$$

por lo que $\operatorname{Im}(\sigma - c\tau) \subset \operatorname{Ker} \alpha$.

Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\alpha \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_2 \circ i_1"] \arrow[d, "i_1"] & U \arrow[r, "c"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "p_1"] & U \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] & 0 \\
 & L \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

tenemos, por el Lema de la Serpiente que $\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\cong} L$. Así, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & & M_x \arrow[dl, "\phi(\sigma - c\tau)'"'] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_1"] & M \arrow[r, "p_1"] & L \arrow[r] & 0 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$,

donde $(\sigma - c\tau)'$ es $\ni$

$$\begin{tikzcd}
M_x \arrow[r, "(\sigma - c\tau)'"] \arrow[dr, "\sigma - c\tau"'] & \operatorname{Ker} \arrow[d, hook, "\operatorname{inc}\alpha"] \\
 & C
\end{tikzcd} \quad (3)$$

conmuta.

Tenemos que $\exists\, \nu : M_x \longrightarrow M \ni p_1 \nu = \phi(\sigma - c\tau)$ (4).

Considerando ahora

$$\begin{tikzcd} & M_x \arrow[dl, "i_2\nu+\bar{\nu}"'] \arrow[d, "\sigma"] \\ U \arrow[r, "c"] & C \end{tikzcd}$$

, vemos que conmuta:

$$c\,(i_2\nu+\bar{\nu}) = c\,i_2\nu + c\bar{\nu} = \beta\,p_1\nu + c\bar{\nu} \quad \text{por (2)}$$
$$= \beta\phi(\sigma - c\bar{\nu})' + c\bar{\nu} \qquad \text{por (4).}$$

Pero por la manera en que se define ϕ en el Lema de la Serpiente, tenemos que $\beta\phi = \ker\alpha$

Así:

$$\begin{aligned} c(i_2\nu+\bar{\nu}) &= \beta\phi(\sigma - c\bar{\nu})' + c\bar{\nu} \\ &= \ker\alpha\,(\sigma - c\bar{\nu})' + c\bar{\nu} \\ &= \sigma - c\bar{\nu} + c\bar{\nu} \qquad \text{por (3),} \\ &= \sigma \quad . \end{aligned}$$

Y así tenemos que $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_2 i_1} U \xrightarrow{c} C \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$ //

3) Supongamos ahora que $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_2 i_1} U \xrightarrow{c} C \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$ donde $i_1 : N \longrightarrow M$, $i_2 : M \longrightarrow U$. Sea $\sigma : M_x \longrightarrow L$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[d] & M_x \arrow[d, "\sigma"] & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2 i_1"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "i_2"] & L \arrow[r] & 0 \\ & & U \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, "c"] & & \\ & & T \arrow[d] & C \arrow[dr] & \\ & & 0 & & 0 \end{tikzcd}$$

$\in \mathbb{R}$

Por la propiedad universal del conúcleo (L),
$\exists\, \beta : L \longrightarrow C$ tal que

$$\beta\, p_1 = c\, i_2 .$$

Ahora $\beta\sigma : M_X \longrightarrow C$ y $0 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow C \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow \exists\, \nu : M_X \longrightarrow U \ \ni\ c\,\nu = \beta\sigma$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[d] & M_X \arrow[d, "\sigma"] \arrow[ddl, dashed, "\nu"'] & \\
& N \arrow[r] \arrow[dr] & M \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "i_2"] & L \arrow[dd, "\beta"] & \\
& & U \arrow[d, "p_2"] \arrow[dr, "c"] & & \\
& & T \arrow[d] & C \arrow[dr] & \\
& & 0 & & 0
\end{tikzcd}$$

De la propiedad universal del conúcleo (C), tenemos $\alpha: C \longrightarrow T \ni \alpha c = p_2$. Entonces $p_2 \nu = \alpha c \nu = \alpha\beta\sigma$. Pero $\alpha\beta = 0$: tomemos $l \in L$, entonces $\alpha\beta(l) = \alpha\beta(p_1(m)) = \alpha(c\, i_2(m)) = \alpha c(i_2 m) = p_2 i_2(m) = 0(m) = 0$.

Así que $p_2\nu = 0$, $\therefore$ $\mathrm{Im}\,\nu \subset \mathrm{Ker}\, p_2 = \mathrm{Im}\, i_2$ y en consecuencia $\exists\, \nu': M_x \longrightarrow M$ tal que

$$\begin{tikzcd}
 & M_x \arrow[dl, "\nu'"'] \arrow[ddl, "\nu"] \\
M \arrow[d, "i_2"'] & \\
U &
\end{tikzcd}$$

conmuta, e.d. $i_2\nu' = \nu$

Ahora, $\beta p_1 \nu' = c i_2 \nu' = c\nu = \beta\sigma$ y como β es un monomorfismo, tenemos que $p_1 \nu' = \sigma$, así que

$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$ y $\therefore$ $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$. //

4) Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & K_2 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2\circ\pi_1"'] & L \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"] & 0 \\
 & & & U \arrow[d] & M_x \arrow[l, "\alpha"] \arrow[ul, dotted, "\sigma_1"'] \arrow[ull, dotted, "\sigma_2"'] \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$

entonces $\exists\, \sigma_1: M_x \longrightarrow L \ni \pi_2\, \sigma_1 = \alpha$, y como $0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0 \in \mathbb{P}$, $\exists\sigma_2: M_x \longrightarrow M \ni \pi_1\sigma_2 = \sigma_1$. Pero entonces $(\pi_2 \circ \pi_1)\circ\sigma_2 = \pi_2\circ\sigma_1 = \alpha$, de donde tenemos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & M_X \arrow[dl] \arrow[d, "\alpha"] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi_2\circ\pi_1"'] & U \arrow[r, dash] & 0 \end{tikzcd}$$ y por lo tanto $\pi_2 \circ \pi_1 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. //

5) Por último, si $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{\pi_2\circ\pi_1} U \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$ con $\pi_1 : M \longrightarrow N$, $\pi_2 : N \longrightarrow U$, y tenemos β: $M_X \longrightarrow U$, $M_X \in \{M_a\}_X$, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr] & & & 0 \arrow[d] & \\ & K \arrow[dr] & & K_2 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r, dash] & K_1 \arrow[r, dash] & M \arrow[r, dash, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2\circ\pi_1"'] & N \arrow[r, dash] \arrow[d, "\pi_2"] & 0 \\ & & & U \arrow[dr] & \\ & & M_X \arrow[ur, "\beta"] & & 0 \end{tikzcd}$$ donde

$K_1 = \operatorname{Ker} \pi_1$. Entonces, como $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{\pi_2\circ\pi_1} U \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$, $\exists \bar{\beta}: M_X \longrightarrow M \ \cdot\ni\cdot \ (\pi_2 \circ \pi_1) \circ \bar{\beta} = \beta = \pi_2(\pi_1 \circ \bar{\beta})$.

Así es que

$$\begin{tikzcd} & & & M_X \arrow[dl, "\pi_1\circ\bar{\beta}"'] \arrow[d, "\beta"] & \\ 0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & N \arrow[r, "\pi_2"'] & U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ conmuta, y

por lo tanto $0 \longrightarrow K \longrightarrow N \xrightarrow{\pi_2} U \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$. //

<u>Observaciones 25</u>

1) R-mod $\Longrightarrow$ Clase de las sucesiones exactas cortas escindibles.

2) Clase de los R-módulos proyectivos $\Longrightarrow$ Clase de todas las sucesiones exactas cortas.

Notación 26

Para $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{L}) \in$ R-tors, denotaremos

$S_\tau = \{0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$: exactas, con $K \in \mathbb{L}_\tau\}$; denotaremos $\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$ la clase de los R-módulos izquierdos proyectivos respecto a cada sucesión en S_τ (e.d. $S_\tau \Longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$) y denotaremos $\mathcal{A}_\tau$ la clase propia (ver el teorema anterior) de las sucesiones exactas cortas en R-mod que hacen proyectivos a cada uno de los elementos de $\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$ (e.d. $\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)} \Longrightarrow \mathcal{A}_\tau$).

Observación 27

${}_RP \in$ R-mod es proyectivo respecto de cada sucesión exacta en $S_\tau \Longleftrightarrow$ P es proyectivo respecto de cada sucesión exacta en $\mathcal{A}_\tau$: " $\Longleftarrow$ " es clara, ya que $S_\tau \subseteq \mathcal{A}_\tau$, y la implicación recíproca se sigue de que, por definición, $\mathcal{A}_\tau$ tiene como elementos a las sucesiones que hacen proyectivos a los módulos en $\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$.

Teorema 28

Sea $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{L})$ una teoría de torsión en R-tors y $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $K \in \mathbb{T}$ y P proyectivo, entonces $M \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$.

Demostración:

Supongamos que tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & M \arrow[d, "a"] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & N \arrow[r, "p"] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con $L \in \mathbb{L}_\tau$,

entonces, por la proyectividad de P, $\exists\ \bar{a}: P \longrightarrow M$ tal que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\bar{\pi}"] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\bar{\pi}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & N \arrow[r, "p"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde $\bar{\pi}$ es el morfismo inducido por la propiedad universal del núcleo (K). Como $K \in \mathbb{T}$ y $L \in \mathbb{L}$, entonces $\bar{\pi} = 0$, y por la propiedad universal del conúcleo (M), existe $\beta : M \longrightarrow N$ tal que $\beta\pi = \bar{\pi}$. Pero entonces $p\beta\pi = p\circ\bar{\pi} = \alpha\pi$, y como π es un epimorfismo, tenemos que $p\beta = \alpha$, es decir

$$\begin{tikzcd}
 & & & M \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & N \arrow[r, "p"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, es conmutativo. //

Definición 29

Si $\mathcal{A}$ es una clase propia en R-mod, diremos que R-mod tiene suficientes $\mathcal{A}$-proyectivos si $\forall M \in$ R-mod $\exists$ $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0 \in \mathcal{A}$ con P proyectivo respecto a cada elemento de $\mathcal{A}$ (e.d. $P \in \mathbb{P}$, $\mathbb{P}$ dada por $\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{P}$)

Teorema 30

R-mod tiene suficientes $\mathcal{A}_\tau$-proyectivos.

Demostración

Sea $M \in$ R-mod, podemos considerar una sucesión exacta $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$, con ${}_RP$ un módulo proyectivo. Tomemos ahora el diagrama conmutativo con hileras exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & P \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K/t(K) \arrow[r] & P/t(K) \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde p y p' son los epimorfismos canónicos. Entonces, como $t(K/t(K)) = 0$ (e.d. como $K/t(K) \in \mathbb{L}_\tau$), tenemos que $0 \longrightarrow K/t(K) \longrightarrow P/t(K) \longrightarrow M \longrightarrow 0 \in S_{\mathbb{L}(\tau)} \subseteq \mathcal{A}_\tau$. Por otra parte, considerando la sucesión exacta $0 \longrightarrow t(K) \longrightarrow P \longrightarrow P/t(K) \longrightarrow 0$, tenemos por el Teorema 28 que $P/t(K)$ es proyectivo respecto a cada sucesión en $S_{\mathbb{L}(\tau)}$, y por la observación 27 pertenece a $\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$. //

<u>Teorema 31</u>

${}_RM \in R\text{-mod}$ pertenece a $\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$ $\Longleftrightarrow$ M es sumando directo de un módulo de la forma P/T donde ${}_RP$ es proyectivo y $T \in \mathbb{T}$.

Demostración

$\Longleftarrow$) Por el Teorema 28 tenemos que $P/T \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$. Así que si M es un sumando directo de P/T, $\beta: M \longrightarrow N$ es un R-morfismo y $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0 \in \mathcal{A}_\tau$, entonces, observando el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "\beta"'] & P/T \arrow[dl, "\beta\oplus 0"] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & L \arrow[r, "\pi"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $\beta + 0 : P/T = M \oplus U \longrightarrow N$, tenemos, dado que
$\qquad m + u \longmapsto \beta(m)$

$P/T \in \mathbb{P}_{\amalg(\tau)}$, $\alpha: P/T \longrightarrow L$ tal que $\pi\alpha = \beta \oplus 0$, pero entonces $(\pi \circ \alpha) \circ i_M = \pi \circ (\alpha \circ i_M) = (\beta \oplus 0) i_M = \beta$, por lo tanto $M \in \mathbb{P}_\tau$. //

$\Longrightarrow$) Si $M \in \mathbb{P}_\tau$, dado que R-mod tiene suficientes proyectivos, podemos considerar una sucesión exacta
$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ con ${}_RP$ proyectivo.
Como en el Teorema anterior tenemos que

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow K/t(K) \longrightarrow P/t(K) \xrightarrow{\pi'} M \longrightarrow 0 \in \mathcal{Q}_\tau,$$

y como $M \in \mathbb{P}_\tau$, $\exists\ \alpha: M \longrightarrow P/t(K)$ tal que $\pi'\alpha = Id_M$, es decir, (*) se escinde y así M es isomorfo a un sumando directo de $P/t(K)$. //

<u>Teorema 32</u>

$\mathcal{A}_\tau$ es la menor clase propia tal que $S_{\mathbb{L}(\tau)} \subseteq \mathcal{A}_\tau$.

Demostración

Supongamos que $\mathbb{D}$ es una clase propia tal que $S_{\mathbb{L}(\tau)} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathcal{A}_\tau$.

Sea $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0 \in \mathcal{A}_\tau$, podemos considerar $0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow K \longrightarrow 0$ y $0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow N \longrightarrow 0$ exactas, y tales que $K_1, K_2 \in \mathbb{L}_\tau$ y $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$ (dado que R-mod tiene suficientes $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectivos, teorema 30).

Consideremos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & K_1 \arrow[d, "i_1"] & & K_2 \arrow[d, "i_2"] & \\
0 \arrow[r, dash] & P_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "p_1"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "ip_1 \oplus \alpha"] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "p_2"] \arrow[dll, dotted, "\alpha"'] & 0 \\
0 \arrow[r, dash] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[r, "p"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

entonces: $0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow K \longrightarrow 0 \in S_\tau \subseteq \mathbb{D}$,

$0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow N \longrightarrow 0 \in S_\tau \subseteq \mathbb{D}$,

$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_1 \oplus P_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow 0 \in \mathbb{D}$, dado que $\mathbb{D}$ es una clase propia (propiedad 1)). Por la propiedad en la definición de clase propia, tenemos que $p_2 \pi_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{D})$, pero dada la conmutatividad en el cuadrado de arriba, tenemos que

$p\in \mathcal{E}(\mathbb{A})$. Por lo tanto $0 \to K \to M \xrightarrow{p} N \to 0 \in \mathbb{A}$ y en consecuencia $\mathbb{A}=\mathcal{A}_{\tau}$. //

<u>Definición 33</u>

Una cubierta $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectiva de un R-módulo izquierdo M, es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\ i\ } P \xrightarrow{\ p\ } M \longrightarrow 0$$ tal que $L\in\mathbb{L}_{\tau}$, $P\in\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$, e $i(L)$ es superfluo en P $(i(L)\ll P)$.

<u>Teorema 34</u>

Si $0 \to L \xrightarrow{i'} P \xrightarrow{p'} M \to 0$ es una cubierta $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectiva, entonces para cualquier otra sucesión

$0 \to L' \to P' \xrightarrow{p'} M \to 0$ con $L'\in\mathbb{L}_{\tau}$ y $P'\in\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$, existe $\alpha : P' \twoheadrightarrow P$ epimorfismo tal que $p\alpha = p'$, y además P es isomorfo a un sumando directo de P'.

Demostración

Sean $0 \to L \to P \xrightarrow{p} M \to 0$ y $0 \to L' \to P' \xrightarrow{p'} M \to 0$ como en el enunciado, entonces $\exists\ \alpha : P' \longrightarrow P$ tal que $p\alpha = p'$ y resta probar que α es epi. Como $p\alpha = p' : P' \twoheadrightarrow M$ entonces $p(\alpha(P')) = M$, $\alpha(P') + i(L) = P = p^{-1}(M)$. Pero como $i(L)\ll P$, tenemos que $\alpha(P') = P$, es decir $\alpha : P' \twoheadrightarrow P$ es epi. //

Así, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & P \arrow[r, "p"] & M \arrow[d, equal] \\
 & L' \arrow[r, "i'"] & P' \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "p'"] & M \\
 & & \mathrm{Ker}\,\alpha \arrow[u, "\ker\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, como $p'\ker\alpha = \mathrm{Id}_M\, p'\ker\alpha = p\,\alpha\ker\alpha = 0$, tenemos, por la propiedad universal del núcleo ($L' = \mathrm{Ker}\, p'$), que existe $m: \mathrm{Ker}\,\alpha \longrightarrow L'$ tal que $i'm = \ker\alpha$. Así, m es un monomorfismo y como $L' \in \mathbb{L}_\tau$, entonces $\mathrm{Ker}\,\alpha \in \mathbb{L}_\tau$, por lo tanto $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\alpha \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow 0 \in \mathcal{Q}_{\mathbb{L}(\tau)}$ y siendo P un elemento de $\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$, tenemos que la sucesión anterior se escinde. //

Corolario 35

Las cubiertas $\mathcal{Q}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectivas son únicas, excepto por isomorfismos.

Demostración

Si $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$ y

$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{p'} M \longrightarrow 0$

son dos cubiertas $\mathcal{Q}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectivas de M, tenemos que $\exists\ \alpha: P' \longrightarrow P$ epimorfismo que se escinde, como en la demostración del teorema anterior. Además $\exists\ j: \mathrm{Ker}\,\alpha \longrightarrow K'$ monomorfismo tal que $i'j = \ker\alpha$. Pero entonces $\ker\alpha\,(\mathrm{Ker}\,\alpha) = i'j(\mathrm{Ker}\,\alpha) < i(K') \ll P'$, por hipótesis. Así que $\ker\alpha(\mathrm{Ker}\,\alpha)$ es un sumando directo superfluo de P', ésto es posible solamente si $\ker\alpha\,(\mathrm{Ker}\,\alpha) \cong \mathrm{Ker}\,\alpha = 0$. Así que α es un monomorfismo y un epimorfismo, por lo tanto $\alpha: P \xrightarrow{\cong} P'$. //

Notación 36

Denotaremos $0 \longrightarrow K_\tau(M) \longrightarrow P_\tau(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$ la cubierta $\mathcal{Q}_{\mathbb{L}(\tau)}$ proyectiva de M (cuando exista) y por $0 \longrightarrow K(M) \longrightarrow P(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$ la cubierta proyectiva de M (cuando la haya).

Teorema 37

Son equivalentes para un anillo R:

1) R es perfecto izquierdo.

2) Todo ${}_RM$ R-mod tiene una cubierta proyectiva.

3) $\forall \tau \in R\text{-tors}$ y $\forall\ {}_RM \in R\text{-mod}$, ${}_RM$ tiene una cubierta $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectiva.

Demostración

1) $\Longleftrightarrow$ 2) es conocida (de hecho, algunas veces se define anillo perfecto por medio de 2), ver [1] p. 315)

2) $\Longrightarrow$ 3) Si $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una cubierta proyectiva de M, entonces

$0 \to K/t(K) \longrightarrow P/t(K) \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una cubierta $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectiva de M, donde t es el funtor de torsión asociado a τ, ya que $K/t(K) \in \mathbb{L}_\tau$, $P/t(K) \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$ (ver el Teorema 28) y $K \ll P \Longrightarrow K/t(K) \ll P/t(K)$.

3) $\Longrightarrow$ 2) Tomemos una cubierta $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\xi)}$-proyectiva de ${}_RM$, donde $\xi = (\ (0),\ R\text{-mod}\ )$,

$0 \longrightarrow K_\xi(M) \longrightarrow P_\xi(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Entonces $K_\xi(M) \ll P_\xi(M)$ (por definición), además $P_\xi(M)$ es proyectivo, ya que si tenemos la situación

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & P_\xi(M) & & \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \\ 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\pi} & D & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

, en tanto que $U \in R\text{-mod} = \mathbb{L}_\xi$ existe $\bar{\alpha}: P_\xi(M) \longrightarrow N$ tal que $\pi\bar{\alpha} = \alpha$ (es decir, $\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\xi)}$ es precisamente la clase de los módulos proyectivos). //

<u>Definición 28</u>

Definimos $\sim_{\amalg}$ en R-tors por: $\sigma \sim_{\amalg} \tau$ si $a_\sigma = a_\tau$ (o equivalentemente si $\mathbf{P}_{\amalg(\sigma)} = \mathbf{P}_{\amalg(\tau)}$).

Esta relación es de equivalencia, y en consecuencia parte R-tors en clases de equivalencia, que bajo condiciones apropiadas (existencia de cubiertas a_σ-proyectivas) resultan ser subretículas completas de R-tors, como veremos más adelante. En vista del Teorema 37 y de la afirmación anterior, los anillos perfectos son anillos para los que se puede ver fácilmente que cada clase de equivalencia $[\sigma] \in$ R-tors/ $\sim_{\amalg}$ es una subretícula completa de R-tors. Para estos anillos obtenemos resultados bastante agradables.

Para demostrar las afirmaciones anteriores, comenzamos con el siguiente

<u>Teorema 39</u>.

Consideremos el diagrama conmutativo con hileras y columna exacta:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & U \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K(M) \arrow[r] & P(M) \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_\tau(M) \arrow[r] & P_\tau(M) \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

donde las hileras son cubierta proyectiva y cubierta $\mathcal{Q}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectiva respectivamente, y donde la columna es inducida por

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K(M) \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & P(M) \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & M \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & K(M)/t(K(M)) \arrow[r] & P(M)/t(K(M)) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\pi}"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_\tau(M) \arrow[r] & P_\tau(M) \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde π y π' son los epimorfismos canónicos y $\bar{\pi}$ es el epimor fismo que se tiene del hecho de que $P(M)/t(K(M)) \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$, $K(M)/t(K(M)) \in \mathbb{L}_\tau$ y $0 \longrightarrow K_\tau(M) \longrightarrow P_\tau(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una cubierta $\mathcal{Q}_\tau$-proyectiva (ver el Teorema 28). Entonces $U \in \Pi_\tau$.

Demostración

Por el Teorema 37 , tenemos que

$$0 \longrightarrow K(M)/t(K(M)) \longrightarrow P(M)/t(K(M)) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es una cubierta $\mathcal{Q}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectiva de M. Como por el Corolario 35 , tenemos que las cubiertas $\mathcal{Q}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectivas son únicas, entonces tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K(M)/t(K(M)) \arrow[r] \arrow[d] & P(M)/t(K(M)) \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_\tau(M) \arrow[r] & P_\tau(M) \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Así que $U \cong t(K(M)) \in \Pi_\tau$, en el diagrama anterior. //

Lema 40

Sea $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ una cubierta proyectiva. Supon gamos que $\tau \sim_{\amalg} \sigma$, <u>entonces</u>:

$K \in \Pi_\tau \Longleftrightarrow K \in \Pi_\sigma$.

Demostración

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K/t_\tau(K) \arrow[r] \arrow[d, "\beta|_{K/t(K)}"] & P/t_\tau(K) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & K/t_\sigma(K) \arrow[r] \arrow[d] & P/t_\sigma(K) \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

entonces, la conmutatividad del cuadrado (1) $\operatorname{Ker}\beta \ll P/t(K)$ (ya que $K/t(K) \ll P/t(K)$). Además, el epimorfismo β ($0 \to K/t_\sigma(K) \to P/t_\sigma(K) \to M \to 0$ es una cubierta $\mathcal{A}_{\amalg(\sigma)}$-proyectiva y $\mathcal{A}_{\amalg(\sigma)} = \mathcal{A}_{\amalg(\tau)}$) se escinde. Por lo tanto $\operatorname{Ker}\beta$ es un sumando directo de $P/t(K)$ y $\operatorname{Ker}\beta \ll P/t(K)$. Esto sólo es posible si $\operatorname{Ker}\beta = 0$, es decir, si $t_\tau(K) = t_\sigma(K)$. //

<u>Teorema 41</u>

Supongamos que $\tau \sim_{\amalg} \sigma$ y que $0 \to K(M) \xrightarrow{i} P(M) \xrightarrow{p} M \to 0$ es una cubierta proyectiva. Entonces

$$(*) \qquad 0 \to K(M)/t_\tau(K(M)) \to P(M)/t(K(M)) \to M \to 0$$

además de ser una cubierta $\mathcal{A}_{\amalg(\tau)}$-proyectiva (definición 33) es una cubierta $\mathcal{A}_{\amalg(\sigma)}$-proyectiva.

Demostración

$K(M) \ll P(M) \Longrightarrow t_{\tau}(K(M)) \ll P(M) \Longrightarrow$

$$0 \longrightarrow t_{\tau}(K(M)) \longrightarrow P(M) \longrightarrow P(M)/t\,(K(M)) \longrightarrow 0$$

es una cubierta proyectiva. Por el lema anterior, tenemos que $t_{\tau}(K(M)) \in \mathbb{T}_{\sigma}$, por lo tanto $t_{\tau}(K(M)) \subseteq t_{\sigma}(K(M))$. Simétricamente, $t_{\sigma}(K(M)) \subseteq t_{\tau}(K(M))$. Así que $K(M)/t_{\tau}(K(M)) \in \mathbb{L}_{\sigma}$, por lo tanto (*) es una cubierta $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\sigma)}$-proyectiva. //

Corolario 42

Si $0 \longrightarrow K_{\tau}(M) \longrightarrow P_{\tau}(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una cubierta $\mathcal{A}_{\tau}$-proyectiva, entonces es una cubierta $\mathcal{A}_{\sigma}$-proyectiva $\forall \sigma \in [\tau]$. En particular $K_{\tau}(M) \in \bigcap_{\sigma \in [\tau]} \mathbb{L}_{\sigma} = \mathbb{L}_{\bigvee_{[\tau]} \sigma}$ (ver el orden en R-tors y la definición de $\bigvee$, pág. 12). //

Observación 43

$$\tau \leq \sigma \Longleftrightarrow \mathbb{L}_{\tau} \supseteq \mathbb{L}_{\sigma} \Longleftrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)} \supseteq \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\sigma)}$$
$$\Longleftrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\sigma)}.$$

Ejemplos 44

Para una clase propia $\mathcal{A}$ tenemos:

1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\xi)} \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ = clase de todas las sucesiones exactas cortas en R-mod

$\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\xi)}$ = Clase de los módulos proyectivos.

11) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{L}(x)} \Longleftrightarrow S_x = \{0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0\}$

$\Longleftrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{L}(x)}$ = R-mod .

$\Longleftrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{L}(x)}$ = clase de las sucesiones exactas cortas que se escinden.

iii) $\tau \in$ R-tors es fiel $\Longrightarrow \tau \in [\xi]$.
Pues si $P \in \mathbb{P}_{\tau}$, entonces P es un sumando directo de un módulo de la forma $R^{(X)}/T$ donde T es un submódulo de τ-torsión de $R^{(X)}$ ($\in \mathbb{L}_{\tau}$), por lo tanto P es un sumando directo de $R^{(X)}$ y en consecuencia es proyectivo. $\therefore$ $\mathbb{P}_{\tau}$ es la clase de los módulos proyectivos y así $\tau \in [\xi]$ (ejemplo 1)).

iv) Si R es un dominio entero (p.ej. $\mathbb{Z}$):
toda teoría de torsión $\tau \neq \chi$ es fiel y por lo tanto pertenece a $[\xi]$. Así R-tors/$\sim_{\mathbb{L}}$ contiene únicamente los elementos $[\chi] = \{\chi\}$ y $[\xi] =$ R-tors$\setminus\{\chi\}$. Observemos además que $[\xi]$ tiene un elemento máximo: $\chi(R) = \tau_1$.

v) Son equivalentes para una teoría de torsión estable :
a) $R \cong t_{\tau}(R) \times S$, donde S es un anillo semisimple artiniano.
b) $\tau \in [\chi]$.
c) $\forall N \in \mathbb{L}_{\tau}$, N es semisimple e inyectivo.
Demostración: a) $\Longleftrightarrow$ b) Por [10] ,(11.7) Prop.,p.35. b) $\Longleftrightarrow$ c) Por el Teorema 45 .

vi) Son equivalentes para un anillo semiartiniano izquierdo:
a) $\tau_G \in [\chi]$
b) $R \cong \tau_G(R) \times S$, con S anillo semisimple artiniano.
c) τ_G se escinde centralmente.
d) τ_0 es estable.
Demostración: b) $\Longleftrightarrow$ c) $\Longleftrightarrow$ d) [17 , Corolario 3.2]. a) $\Longleftrightarrow$ b) por el ejemplo anterior.

vii) Si R es un anillo perfecto derecho, entonces las condiciones anteriores, equivalentes entre sí, son también equivalentes con e) $soc_p(\mathrm{Rad}\ R) = (0)$ (Teorema 73). //

Teorema 45 (Bland [3], demuestra la equivalencia de ii), iv) y v)).

Son equivalentes para una teoría de torsión hereditaria R-tors:

i) $\tau \in [\chi]$.

ii) $\mathbb{P}_\tau = \mathbb{P}_\chi$ = clase de todos los módulos.

iii) $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$ = clase de las sucesiones exactas cortas que se escinden.

iv) $\forall\, {}_RN \in \mathbb{L}(\tau)$, N es semisimple e inyectivo.

v) El anillo $R/t_\tau(R)$ es semisimple.

vi) Todo módulo cíclico es $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectivo.

Demostración

ii) $\Longleftrightarrow$ iii) Se sigue del ejemplo 44.ii en la página 34

i) $\Longleftrightarrow$ iii) Se sigue de la definición de $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$.

iii) $\Longrightarrow$ iv) Si ${}_RN \in \mathbb{L}(\tau)$ entonces la sucesión exacta $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E(N) \longrightarrow E(N)/i(N) \longrightarrow 0$ pertenece a $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$ y por iii) se escinde, ésto implica que $i(N) = E(N)$, y así N es un módulo inyectivo. Por lo tanto todo módulo en $\mathbb{L}(\tau)$ es inyectivo. En particular, como $\mathbb{L}(\tau)$ es cerrada bajo tomar submódulos, tenemos que todo submódulo H de un módulo $N \in \mathbb{L}(\tau)$ es inyectivo, y por lo tanto es un sumando directo de N, lo que demuestra que N es semisimple.

iv $\Longrightarrow$ v) Se sigue del hecho de que $R/t_\tau(R)$ es libre de τ-torsión.

v $\Longrightarrow$ vi) Basta ver que todo módulo cíclico es sumando directo de un módulo $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectivo. En efecto, si ${}_RM$ es un módulo cíclico, entonces $M \cong R/I$, donde ${}_RI$ es un ideal izquierdo de R. Pero entonces $M \cong R/I \cong R/t_\tau(I)\,/\,I/t_\tau(I)$, ahora, como $t_\tau(R)$ anula a $I/t_\tau(I)$ (ya que $t_\tau(R)\,I = \sum_{i \in I} t_\tau(R)i$ que es un cociente de $\bigoplus_{i \in I} t_\tau(R)i$ de τ-torsión, ya que $t_\tau(R)i$ es una imagen epimórfica de $t_\tau(R)$), tenemos que $I/t_\tau(I)$ es un $R/t_\tau(R)$-módulo y por lo tanto es semisimple e inyectivo. es fácil ver que entonces $I/t_\tau(I)$ es semisimple e inyectivo como R-módulo, por lo tanto la sucesión exacta $0 \longrightarrow I/t_\tau(I) \longrightarrow R/t_\tau(I) \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$ se escinde. Concluímos que R/I es un sumando directo del módulo $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectivo $R/t_\tau(I)$ (ver el Teorema 31).

vi) $\Longrightarrow$ v) Basta ver que todo ideal de $R/t_\tau(R)$ es un sumando directo de $R/t_\tau(R)$. En efecto, si $\bar{I}$ es un ideal izquierdo de $R/t_\tau(R)$, entonces $\bar{I} = I/t_\tau(R)$ donde $t_\tau(R) \leq_R I \leq R$, pero entonces, dado que $I/t_\tau(R) \in \mathbb{L}(\tau)$, tenemos que la sucesión exacta $0 \longrightarrow I/t_\tau(R) \longrightarrow R/t_\tau(R) \longrightarrow R/I \longrightarrow 0 \in \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$. y dado que el módulo cíclico R/I es $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectivo, tenemos que la sucesión anterior se escinde. Por lo tanto $I/t_\tau(R)$ es un sumando directo de $R/t_\tau(R)$.

v) $\Longrightarrow$ iv) Si ${}_RN \in \mathbb{L}(\tau)$, entonces N es semisimple como $R/t_\tau(R)$-módulo y por lo tanto como R-módulo. Análogamente $E(N)$ es semisimple, ya que también es libre de τ-torsión, dada la cerradura de una clase libre de torsión bajo tomar cápsulas inyectivas. Así, N es un sumando directo esencial de $E(N)$, lo que es posible únicamente si $N = E(N)$, es decir si N es inyectivo.

iv) $\Longrightarrow$ iii) Si $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta con $K \in \mathbb{L}(\tau)$, por iv) la sucesión se escinde, ya que K

es inyectivo. Es claro, por lo tanto, que la menor clase propia que contiene cada clase $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ con $K \in \mathbb{L}(\tau)$ es la clase de las sucesiones exactas cortas que se escinden. //

<u>Corolario 46</u>

R es semisimple $\Longleftrightarrow$ R-tors/$\sim_{\mathbb{L}}$ $= \{[\xi]\} \Longleftrightarrow \xi \sim_{\mathbb{L}} \chi$

Demostración

$\Longrightarrow$) Si R es semisimple entonces $\forall \tau \in$ R-tors, $R/t_{\tau}(R)$ es semisimple, así que por v)$\Longleftrightarrow$i) en el Teorema anterior, tenemos que $\tau \in [\chi]$ $\therefore$ $[\xi] = [\chi] =$

$\Longleftarrow$) Si R-tors/$\sim_{\mathbb{L}} = \{[\xi]\} = \{[\chi]\}$, en particular $\xi \in [\chi]$ así que $\forall\, {}_R N \in \mathbb{L}(\xi) =$ R-mod tenemos que N es semisimple (usando i)$\Longleftrightarrow$iv) del Teorema anterior). //

De lo anterior se sigue inmediatamente el

<u>Corolario 47</u> (Bland [3], Corollary 3.4, demuestra $\Longleftarrow$).

R es semisimple $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \tau \in [\chi]$. τ fiel.

Demostración

$\Longrightarrow$) Si R es semisimple, ξ tiene las propiedades requeridas.

$\Longleftarrow$) Si $\tau \in [\chi]$ es fiel, entonces, en vista de que $\tau \in [\xi]$ (ejemplo 34.iii), tenemos que $\tau \in [\xi] \cap [\chi]$. Por lo tanto $[\xi] = [\chi]$. //

Teorema 48

Sea $\tau \in$ R-tors. Entonces $[\tau]$ es cerrada bajo tomar $\wedge$ finitas.

Demostración

Supongamos $\tau_1 \sim_{\mathbb{L}} \tau_2 \sim_{\mathbb{L}} \tau$. Por la observación en la página 34 , tenemos que

$$\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau_1)} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau_1 \wedge \tau_2)} \qquad (\tau_1 \wedge \tau_2 \leq \tau_1).$$

ahora consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & S & & \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con $L \in \mathbb{L}_{\tau_1 \wedge \tau_2}$ (recordemos que S es $\mathcal{A}_{\tau}$-proyectivo $\Longleftrightarrow$ S es proyectivo respecto de cada una de las sucesiones de la forma $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ con $L \in \mathbb{L}_{\tau}$, por la Observación 27).

Podemos extender el diagrama de arriba a

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & S & & \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \xrightarrow{p} & M/L & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \| & & \uparrow{\scriptstyle \pi} & & \\ 0 & \longrightarrow & t_2(L) & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\bar{p}} & M/t_2(L) & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

donde π es el epimorfismo natural. Ahora $M/t_2(L) \in \mathbb{L}_{\tau_2}$,

así que $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \pi \longrightarrow M/t_2(L) \xrightarrow{\pi} M/L \longrightarrow 0 \in \mathcal{A}_{\tau_2} = \mathcal{A}_{\tau_1}$.

Como S está en $\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau_1)} = \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau_2)}$, tenemos que $\exists\ \beta: S \longrightarrow M/t_2(L)$,

tal que $\pi\beta = \alpha$. Observemos ahora que $t_1(t_2(L)) \in \mathbb{T}_{\tau_1} \cap \mathbb{T}_{\tau_2}$
$= \mathbb{T}_{\tau_1 \wedge \tau_2}$.

Pero por otra parte, $t_1(t_2(L)) \subseteq L \in \mathbb{L}_{\tau_1 \wedge \tau_2}$, por lo tanto $t_1(t_2(L)) = 0$. Así $t_2(L) \in \mathbb{L}_{\tau_1}$, de donde

$0 \longrightarrow t_2(L) \longrightarrow M \longrightarrow M/t_2(L) \longrightarrow 0$ pertenece a $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau_1)}$

Así, $\exists\ \nu : S \longrightarrow M$ tal que $\bar{p} \circ \nu = \beta$, es decir, conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & S \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, "\beta"'] \arrow[ddl, "\nu"'] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & M/L \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & t_2(L) \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r, "\bar{p}"] & M/t_2(L) \arrow[r] \arrow[u, "\pi"'] & 0
\end{tikzcd}$$

.

Pero entonces $\nu p = \pi \bar{p} \nu = \pi \beta = \alpha$. Por lo tanto $S \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau_1 \wedge \tau_2)}$. $\therefore \mathbb{P}_{\mathbb{L}_{\tau_1}} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau_1 \wedge \tau_2)}$, de donde $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau_1 \wedge \tau_2)} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau_1)}$, (veáse la observación de la pág. 34).

$\therefore \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau_1 \wedge \tau_2)} = \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau_1)}$ y así $\tau_1 \wedge \tau_2 \sim_{\mathbb{L}} \tau_1 \sim_{\mathbb{L}} \tau$.

//

En caso de que el anillo R sea perfecto, podemos probar mucho más:

<u>Teorema 49</u>

Si R es un anillo perfecto izquierdo entonces $[\tau]$ es cerrada bajo tomar $\wedge$ arbitrarias, $\forall\ \tau \in$ R-tors.

<u>Demostración</u>

Sea $P' \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$ y

$$\begin{tikzcd} & & P' \arrow[d, "\alpha"] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "p"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

un diagrama con $L \in \mathbb{L}_{\wedge[\tau]}$. Sean $0 \longrightarrow K(N) \longrightarrow P(N) \longrightarrow N \longrightarrow 0$ y $0 \longrightarrow K_\tau(N) \longrightarrow P_\tau(N) \longrightarrow N \longrightarrow 0$ cubierta proyectiva y cubierta $\mathcal{Q}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectiva de N , respectivamente. Entonces $\exists\ \bar{\alpha}: P' \longrightarrow P_\tau(N)$ $\ni$

$$\begin{tikzcd} & K' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & P(N) \arrow[r, two heads, "s"] \arrow[d, "\pi'"] & P_\tau(N) \arrow[d, "\pi"] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "p"] & N & P' \arrow[ul, "\bar{\alpha}"'] \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

conmuta (ya que $P' \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$ y $0 \longrightarrow K_\tau(N) \longrightarrow P_\tau(N) \longrightarrow N \longrightarrow 0 \in \mathcal{Q}_{\mathbb{L}(\tau)}$), donde π' es el epimorfismo garantizado por el hecho de que P(N) es proyectivo, u es el morfismo dado por la propiedad universal el núcleo (K).

Además por el Lema 40 . tenemos que $K' \in \mathbb{T}_\sigma$ $\forall \sigma \in [\tau]$ de donde $K' \in \mathbb{T}_{\bigwedge \sigma}$. Como $L \in \mathbb{L}_{\bigwedge \sigma}$, tenemos que $u = 0$. Pero entonces, dada la conmutatividad del primer cuadrado, tenemos que $\exists$ $\beta: P_\tau(N) \longrightarrow M$ $\ni$ $\beta s = \pi'$.

Así que en el diagrama

$$\begin{tikzcd} P(N) \arrow[r, two heads, "s"] \arrow[d, "\pi'"'] & P_\tau(N) \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, "\beta"'] \\ M \arrow[r, "p"] & N \end{tikzcd}$$

, el cuadrado y el triángulo superior conmutan $\therefore$ $\pi s = p \pi' = p \beta s$, pero como s es epi, tenemos que $\pi = p\beta$, es decir que también conmuta el triángulo inferior.

En resumidas cuentas, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & & & P_\tau(N) \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d, "\pi"] & P \arrow[l, "\bar{\alpha}"'] \arrow[dl, "\alpha"] \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r, "p"'] & N & \end{tikzcd}$$

de donde tenemos que $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}_{\wedge_{[\tau]}\sigma}} \therefore \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\wedge\tau)}$ por lo tanto $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\wedge\tau)} \subset \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$. Pero $\wedge_{[\tau]}\sigma \le \tau \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{L}_{\wedge}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$ (observación en la pág. 34) $\therefore \mathcal{A}_{\mathbb{L}_{\wedge\tau}} = \mathcal{A}_{\mathbb{L}_{\tau}}$ y así $\wedge_{[\tau]}\sigma \sim_{\mathbb{L}} \tau$.

Así, hemos probado que $\wedge[\tau] \in [\tau]$, y ésto basta para que $[\tau]$ sea cerrada bajo $\wedge$ arbitrarias ($\{\tau_\alpha\} \subset [\tau]$ $\cdot$ $\wedge[\tau] \le \wedge\{\tau_\alpha\} \le \tau_\alpha$ $\therefore \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau_\alpha)} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\wedge\{\tau_\alpha\})} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\wedge[\tau])} = \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$). //

Teorema 50

Si R es un anillo perfecto, entonces $[\tau]$ es cerrada bajo tomar $\vee$ arbitrarias.

Demostración

Basta probar que $\vee[\tau] \in [\tau]$.

Sea

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & & & P' & & \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ 0 & \longrightarrow & L_\tau & \longrightarrow & P_\tau & \xrightarrow{p} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

, donde la hilera es una cubierta $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectiva de M y $P' \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\vee[\tau])}$ Por el Corolario 42 tenemos que $L \in \mathbb{L}_\sigma \; \forall \sigma \in [\tau] \therefore L \in \bigcap_{[\tau]} \mathbb{L}_\sigma = \mathbb{L}_{\vee[\tau]}$. Así, (*) pertenece a $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\vee[\tau])}$, de donde $\exists\, \bar{\alpha} : P' \longrightarrow P_\tau \;\cdot\!\ni\!\cdot\; p\bar{\alpha} = \alpha$. Por lo tanto $P' \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$ y así $\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\vee[\tau])} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}$ lo que es equivalente a que $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\vee[\tau])}$.

Por otra parte, $\tau \le \vee[\tau] \Longleftrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)} \supset \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\vee[\tau])}$.

Por lo tanto, $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)} = \mathcal{A}_{\mathbb{L}(\vee[\tau])}$ y así: $\vee[\tau] \in [\tau]$. //

De los dos teoremas anteriores, tenemos inmediatamente :

Teorema 51

R perfecto izquierdo $\Longrightarrow [\tau]$ es una subretícula completa de R-tors, $\forall\, \tau \in$ R-tors. //

Por el Teorema anterior, sabemos que si R es un anillo perfecto izquierdo entonces $[\tau]$ es cerrada bajo $\vee$ e $\wedge$ arbitrarias. En consecuencia, en $[\tau]$ existen un elemento menor que todos los demás y un elemento mayor que todos los demás, que denotaremos τ_* y τ^*, respectivamente. El siguiente teorema nos dá una descripción útil de ambas.

<u>Teorema 52</u>

Si R es un anillo perfecto izquierdo, entonces:

i) $\tau^* = x\left\{ K_\tau(M) : \begin{array}{l} 0 \longrightarrow K_\tau(M) \longrightarrow P_\tau(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ \text{es cubierta } \mathcal{a}_{\amalg(\tau)}\text{-proyectiva de} \\ M, \quad M \in R\text{-mod} \end{array} \right\}$

ii) $\tau_* = \varepsilon\left\{ K(P_\tau(M)) : \begin{array}{l} 0 \longrightarrow K(P_\tau(M)) \longrightarrow P(M) \longrightarrow P_\tau(M) \longrightarrow 0 \\ \text{es una cubierta proyectiva de} \\ P(M)\text{, que a su vez, proviene de} \\ \text{un cubierta } \mathcal{a}_\tau\text{-proyectiva de } M, \\ M \in R\text{-mod} \end{array} \right\}$

En ii) $0 \longrightarrow K(P_\tau(M)) \longrightarrow P(M) \longrightarrow P_\tau(M) \longrightarrow 0$, viene del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & K(P_\tau(M)) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K(M) \arrow[r] & P(M) \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_\tau(M) \arrow[r, dash] & P_\tau(M) \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

, donde

las hileras y la columna son sucesiones exactas. Las hileras son la cubierta y la cubierta $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectiva de M, respectivamente, y el morfismo : $P(M) \longrightarrow P_\tau(M)$ es el dado por la proyectividad de P(M).

Demostración:

i) Por el Corolario 42 , tenemos que $K_\tau(M) \in \mathbb{L}_\sigma$ $\forall \sigma \in [\tau]$, así es que $x\{K_\tau(M) : M \in R\text{-mod}\} \geq \sigma$ $\forall \sigma \in [\tau]$ (ver la definición de $\mathcal{X}(\ )$, en la pág. 11). Por lo tanto $x\{K_\tau(M) : M \in R\text{-mod}\} \geq \tau^*$.

Restaría ver que $x\{K_\tau(M) : M \in R\text{-mod}\} \in [\tau]$ y para ésto basta ver que $\mathbb{P}_{\mathbb{L}_{x\{K_\tau(M):\ldots\}}} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau^*)}$ ($\Longleftrightarrow \mathcal{A}_{x\{K_\tau(M):M\in R\text{-mod}\}} \supset \mathcal{A}_{\tau^*} \Longleftrightarrow \mathbb{L}_{x\{K_\tau(M)\}_{R\text{-mod}}} \supseteq \mathbb{L}_{\tau^*} \Longleftrightarrow \tau^* \leq x\{K_\tau(M)\}_{R\text{-mod}}$).

Pero si $P \in \mathbb{P}_{x\{K_\tau(M) : M \in R\text{-mod}\}}$ y

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[d, "\alpha"] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] & L \arrow[r, "p"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es $\cdot\ni\cdot$ $K \in \mathbb{L}_{\tau^*}$, entonces tomando una cubierta τ-proyectiva de M tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & & & \\ & & K_\tau(M) \arrow[dr] & & \\ & & & P_\tau(M) \arrow[d, "\pi"] & P \arrow[dl, "\alpha"] \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & L \arrow[r, "p"] & M \arrow[r] \arrow[dr] & 0 \\ & & & & 0 \end{tikzcd}$$

En tanto que $K_\tau(M) \in \mathbb{L}_{x\{K_\tau(M)\}_{R\text{-mod}}}$ $\exists\ \bar{\alpha} : P \longrightarrow P_\tau(M)$ $\cdot\ni\cdot$ $\pi\bar{\alpha} = \alpha$, y en tanto que $K \in \mathbb{L}_{\tau^*} \subset \mathbb{L}_\tau$, $\exists\ \bar{\bar{\alpha}} : P_\tau(M) \longrightarrow L$ $\cdot\ni\cdot$

$p\bar{\bar{\alpha}} = \pi$, $\therefore$ $p(\bar{\bar{\alpha}} \circ \bar{a}) = \alpha$ y por lo tanto $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau^*)}$.
así que $\mathbb{P}_{\mathbb{L}\chi\{K_\tau(M)\ldots\}} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau^*)}$.

$$\therefore \quad \tau^* \leq \chi\{K_\tau(M) : M \in R\text{-mod}\} \therefore \tau^* = \chi\{K_\tau(M) : M \in R\text{-mod}\}$$

ii) Por el Lema 40 , tenemos que $K(P_\tau(M)) \in \Pi_{\widehat{\wedge[\tau]}}$, por lo tanto $\xi\{K(P_\tau(M)) : M \in R\text{-mod}\} \leq \tau_* = \wedge[\tau]$.

Para tener la inclusión recíproca, basta ver que
$\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau^*)} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\xi(K(P_\tau(M))))}$.

Así pues, sea $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau^*)}$ y

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & P & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$ con $K \in \mathbb{L}(\xi(K(P_\tau(M))))$.

Tomemos $0 \longrightarrow K_\tau(M) \longrightarrow P(M) \longrightarrow P_\tau(M) \longrightarrow 0$ como en el , entonces $K_\tau(P_\tau(M)) \in \Pi_{\wedge[\tau]}$

En el diagrama
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_\tau(P_\tau(M)) & \longrightarrow & P(M) & \longrightarrow & P_\tau(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$\exists\ \bar{\pi}: P(M) \longrightarrow L$, dada la proyectividad de $P(M)$, y $\bar{\pi}|K_\tau P_\tau(M)$, dado que $K \in \mathbb{L}(\xi(K(P_\tau(M))))$ tenemos que $(\bar{\pi}\,|\,K_\tau(P_\tau(M))) = 0$. Así que de la propiedad universal del conúcleo $(P_\tau(M))$, $\exists\ \beta: P_\tau(M) \longrightarrow L$ $\ni$

$$\begin{array}{ccc} P(M) & \twoheadrightarrow & P_\tau(M) \\ \downarrow{\scriptstyle\bar{\pi}} & \swarrow{\scriptstyle\beta} & \\ L & & \end{array}$$

conmuta, pero como $P(M) \twoheadrightarrow P_\tau(M)$ es epi, tenemos que

$$\begin{tikzcd} & P_\tau(M) \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d] \\ L \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

también es conmutativo.

Ahora,

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[d, "\alpha"] & \\ 0 \arrow[r] & K_\tau(M) \arrow[r] & P_\tau(M) \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau^*)}$ y $K_\tau(M) \in \mathbb{L}_\sigma$ ($\forall\ \sigma \in [\tau]$) implican que $K_\tau(M) \in \mathbb{L}_{\tau^*}$, y así $\exists\ \nu : P \longrightarrow P_\tau(M)\ \ni\ \pi\nu = \alpha$. Pero entonces

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dd, "\alpha"] \\ & P_\tau(M) \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr] & \\ L \arrow[rr] & & M \end{tikzcd}$$

conmuta.

$\therefore\ P \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\xi(K(P_\tau(M))))}$. Así que $\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau^*)} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\xi(K(P_\tau(M))))}$.

$\therefore\ \tau^* = \xi(K(P_\tau(M)))$. //

Teorema

Para R perfecto tenemos que

i) $\xi^* = \chi(J(R))$

ii) $\chi_* = \xi(J(R))$

donde $J(R)$ denota el radical de Jacobson del anillo R.

Demostración

i) Por el Teorema . . , $\xi^* = \chi\{K_\xi(M) : 0 \to K_\xi(M) \to P_\xi(M) \to M \to 0$ es una cubierta $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\xi)}$-proy.$\}$

$= \chi\{K(M) : 0 \to K(M) \to P(M) \to M \to 0$ es una cubierta proyectiva$\}$

$= \chi\{K : K \ll P$ y ${}_R P$ es proyectivo$\}$

Como R es perfecto, $\mathrm{rad}(P) = J(R)P$ (Anderson-Fuller [1], Remark 28.5(3)), así que $K \ll P \Longleftrightarrow K \subseteq J(R)P \subseteq J(R)R^{(X)}$ para algún conjunto X $\therefore$ $K \ll P \Longleftrightarrow \exists\, K \rightarrowtail J(R)^{(X)} \Longleftrightarrow K \in \mathbb{L}_{\chi(J(R))}$ $\therefore$ $\xi^* \geq \chi(J(R))$.

Por otra parte $J(R) \ll R$ $\therefore$ $0 \to J(R) \to R \to R/J(R) \to 0$ es una cubierta proyectiva (=cubierta $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\xi)}$-proyectiva) $\Longrightarrow$ $J(R) \in \mathbb{L}_{\xi^*}$ (ya que es uno de los cogeneradores de ξ^*) $\Longrightarrow$ $\chi(J(R)) \geq \xi^*$ $\therefore$ $\xi^* = \chi(J(R))$. //

ii) $\chi_* = \xi\{K_\chi(P_\chi(M)) : 0 \to K_\chi(P_\chi(M)) \to P(M) \to P_\chi(M) \to 0$ está inducida por

$$\begin{tikzcd} P(M) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\pi"'] & P_\chi(M) \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

π, π' cubiertas proyectiva y $\mathcal{A}_{\mathbb{L}\chi}$-proyectiva, respectivamente.$\}$

Pero $0 \longrightarrow K_{\chi}(M) \longrightarrow P_{\chi}(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una cubierta $\mathcal{a}_{\mathbb{L}(\chi)}$-proyectiva y $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es otra (todos los módulos son $\mathcal{a}_{\mathbb{L}(\chi)}$-proyectivos). Así es que

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_{\chi}(P_{\chi}(M)) & \longrightarrow & P(M) & \longrightarrow & P_{\chi}(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \| & & \\ & & & & & & M & & \end{array}$$

es una cubierta proyectiva de ${}_RM$. Tenemos pues, que $\chi_* = \xi\left\{K : K \ll P\ ,\ {}_RP \text{ proyectivo}\right\}$.

Otra vez, $K \ll P$, ${}_RP$ proyectivo $\longleftrightarrow K \subset J(R)^{(X)}$ p.a. X $\therefore$ $K \ll P$, P proyectivo $\longrightarrow K \in \xi(J(R))$ $\therefore$ $\chi_* \leq \xi(J(R))$.

Por otra parte, $0 \longrightarrow J(R) \longrightarrow R \longrightarrow R/J(R) \longrightarrow 0$ es una cubierta proyectiva $J(R) \in \Pi_{\xi(K_{\chi}(P_{\chi}(M)))}$ (es uno de los generadores) $\therefore$ $\xi(J(R)) \leq \chi_*$ $\therefore$ $\chi_* = \xi(J(R))$. //

Damos ahora descripciones más "concretas" de τ^* y τ_* para un anillo perfecto izquierdo, que luego generalizaremos para un anillo semiperfecto izquierdo.

<u>Teorema 54</u>

Si R es un anillo perfecto izquierdo, entonces

i) $\tau^* = \chi(\text{Rad } R\ /\ t_{\tau}(\text{Rad } R))$.

ii) $\tau_* = \xi(t_{\tau}(\text{Rad } R))$.

Donde Rad R denota el radical de Jacobson de R.

Demostración

i) $0 \longrightarrow \text{Rad } R\ /\ t_{\tau}(\text{Rad } R) \longrightarrow R/t_{\tau}(\text{rad } R) \longrightarrow R/\text{Rad } R \longrightarrow 0$ es una cubierta proyectiva, ya que $\text{Rad } R/t_{\tau}(\text{Rad } R) \ll R/t_{\tau}(\text{Rad } R)$, $R/t_{\tau}(\text{Rad } R)$ es $\mathcal{a}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectivo (Teo. 28) y $\text{Rad } R/t_{\tau}\text{Rad } R) \in$

$\mathbb{L}_\tau$. Así que por el Corolario 42 $\text{Rad } R / t_\tau(\text{Rad } R) \in \mathbb{L}_{\tau^*}$ por lo tanto $\tau \le \tau^* \le \chi(\text{Rad } R / t_\tau(\text{Rad } R))$.

Si $\tau^* \lneqq \chi(\text{Rad } R / t_\tau(\text{rad } R))$ entonces $\exists\ 0 \neq {}_RM \in \mathbb{T}_{\chi(\text{Rad } R/t_\tau(\text{Rad } R))} \cap \mathbb{L}_{\tau^*}$ ($\exists\ 0 \neq M$ de $\chi(\text{Rad } R/t_\tau(\text{Rad } R))$-torsión pero no de τ^*-torsión, tomando $M/t_{\tau^*}(M)$ si fuera necesario, podemos suponer, sin perder generalidad, que $M \in \mathbb{L}_{\tau^*}$). Por el Teorema 52 , $\tau^* = \chi\left\{K_\tau(M) : M \in R\text{-mod}\right\}$, así que si $M \in \mathbb{L}_{\tau^*}$, entonces M está cogenerado por $\left\{E(K_\tau(M)) : M \in R\text{-mod}\right\}$ (es decir, $\exists\ M \hookrightarrow \prod E(K_\tau(N))$. Por lo tanto, $\forall\ 0 \neq x \in M$ $\exists\ f_x : M \longrightarrow E(K_\tau(N))$ $\cdot\ni\cdot$ $f_x(x) \neq 0$ (21 ,Prop. VI.3.9) $\therefore\ 0 \neq f_x(x) \in E(K_\tau(N))$. Como $K_\tau(N) <_e E(K_\tau(N))$ tenemos que $f_x(M) \cap K_\tau(N) \neq (0)$. $\therefore\ \exists\ 0 \neq y \in M \cdot\ni\cdot 0 \neq f_x(y) \in K_\tau(N)$. Así, está definida $Ry \xrightarrow{(f_x|Ry)} K_\tau(N)$.

Ahora, en virtud del Corolario 35 tenemos que conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_\tau(N) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & P_\tau(N) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r, dash] & K(N)/t_\tau(N) \arrow[r, dash] & P(N)/t_\tau(N) \arrow[r, dash] & N \arrow[r, dash] & 0 \end{tikzcd} ,$$

donde $0 \longrightarrow K(N) \longrightarrow P(N) \longrightarrow N \longrightarrow 0$ es una cubierta proyectiva de N. Así $K(N) \ll P(N)$ y entonces tenemos que $K(N) \le J(P(N)) = J(R)\ P(N) \le J(R)\ R^{(Z)} = J(R)^{(Z)}$ p.a. conjunto Z $(J(P(N)) = J(R)P(N)$ pues R es proyectivo).

$\therefore$ tenemos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd} Ry \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_x"] & M \\ K_\tau(N) \arrow[r, "\cong"] & \frac{K(N)}{t_\tau(K(N))} \arrow[r, "i"] & \frac{J(R)^{(Z)}}{t_\tau(K(N))} \arrow[r, two heads] & \frac{J(R)^{(Z)}}{t_\tau(J(R)^{(Z)})} \cong \left(\frac{J(R)}{t_\tau(J(R))}\right)^{(Z)} \end{tikzcd} ,$$

como $\mathrm{Hom}_R\,(M,\ J(R)/t_\tau(J(R))\,) = 0$. tenemos también que $\mathrm{Hom}_R\,(Ry\ ,\ J(R)/\ t_\tau(J(R))\,) = 0$, lo que implica que $i\alpha\,(f_x(y)) \in t_\tau(J(R)^{(Z)})$. Por lo tanto $\exists\ I \in \mathcal{F}_\tau \cdot \ni\cdot$ $I\ i\alpha(f_x(y)) = 0$, pero como i es mono, entonces $I\,(f_x(y)) = 0$ $\therefore\ 0 \neq f_x(y) \in t_\tau(K_\tau(N))) = 0$ ∇ $(K_\tau(N) = K(N)/t_\tau(K(N) \in \mathbb{L}_\tau)$.
La contradicción viene de suponer que $\tau^* \lneqq \chi(\mathrm{Rad}\ R/t_\tau(\mathrm{Rad}\ R)$ $\therefore\ \tau^* = \chi\,(\mathrm{Rad}\ R/t_\tau(\mathrm{Rad}\,R)\,)$. $\mathcal{H}$

ii) Si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & & \\
 & t_\tau(\mathrm{Rad}\ R) \arrow[r, no head] \arrow[d] & t_\tau(\mathrm{Rad}\ R) \arrow[r, no head] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Rad}\ R \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & R/\mathrm{Rad}\ R \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & \dfrac{\mathrm{Rad}\ R}{t_\tau(\mathrm{Rad}\ R)} \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{R}{t_\tau(\mathrm{Rad}\ R)} \arrow[r] \arrow[d] & R/\mathrm{Rad}\ R \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (2) \\
 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & & &
\end{tikzcd}$$

el hecho de que (1) y (2) sean cubierta y cubierta $\mathcal{Q}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectiva respectivamente, nos dice que el núcleo de π en la columna (3) es uno de los generadores de τ_* (Teorema 52)
$\therefore\ t_\tau(\mathrm{Rad}\,R) \in \mathbb{T}_{\tau_*}$ y $\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\,R)) \leq \tau_*$.

Ahora, si $K(P_\tau(M))$ es uno de los generadores de τ_* , es decir si $0 \longrightarrow K(P_\tau(M)) \longrightarrow P(M) \longrightarrow P_\tau(M) \longrightarrow 0$

se extiende a

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K(P_\tau(M)) \arrow[r] \arrow[d] & K(M) \arrow[r] \arrow[d] & K_\tau(M) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K(P_\tau(M)) \arrow[r] \arrow[d] & P(M) \arrow[r] \arrow[d] & P_\tau(M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde las dos ultimas columnas son cubierta y cubierta $\mathcal{C}_{\amalg(\tau)}$-proyectiva de ${}_RM$, respectivamente, entonces tenemos que $K(P_\tau(M)) \leq K(M) \ll P(M)$.

Por el Teorema 37 , $K(P_\tau(M)) = t_\tau(K(M))$, así que $K(P_\tau(M)) \leq \operatorname{Rad}(P(M)) = \operatorname{Rad} R\ (P(M)) \hookrightarrow \operatorname{Rad} R\ R^{(X)} = \operatorname{Rad} R^{(X)}$ y además $K(P_\tau(M)) \hookrightarrow t_\tau((\operatorname{Rad} R)^{(X)}) = (t_\tau(\operatorname{Rad} R))^{(X)}$

$\therefore\ K(P_\tau(M)) \in \Pi_\xi(t_\tau(\operatorname{Rad} R)) \quad \forall\ M \in R\text{-mod}$

$\therefore\ \tau_* = \xi\{K(P_\tau(M)) : M \in R\text{-mod}\} \leq \xi(t_\tau(\operatorname{Rad} R))$

$\therefore\ \tau_* = \xi(t_\tau(\operatorname{Rad} R))$. //

<u>Corolario 55</u>

Si R es un anillo perfecto izquierdo, entonces:

$\tau \leq \sigma \Longrightarrow \tau_* \leq \sigma_*$.

Demostración

$\tau \leq \sigma \Longrightarrow t_\tau(\mathrm{Rad}\, R) \leq t_\sigma(\mathrm{Rad}\, R) \Longrightarrow \xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\, R)) \leq \xi(t_\sigma(\mathrm{Rad}\, R)) \Longrightarrow \tau_* \leq \sigma_*$ .//

En las págs. 67 y 68 extenderemos el Teorema 54 para anillos locales , es decir veremos que en esa situación cada $[\tau] \in$ R-tors/ $\sim_{\amalg}$ es cerrada bajo tomar uniones e intersecciones arbitrarias y que además la teoría de torsión máxima en $[\tau]$, τ^* es: $\tau^* = \chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R))$ y también $\tau_* = \xi(t(\mathrm{Rad}\, R))$.

Sin embargo, un anillo puede tener la propiedad de que cada $[\sigma]$ sea cerrada bajo tomar $\vee$ e $\wedge$ arbitrarias sin ser semiperfecto. Además, los elementos σ^* y σ_* en general no están dados por $\chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\sigma(\mathrm{Rad}\, R))$ y $\xi(t_\sigma \mathrm{Rad}\, R)$. Como veremos en los siguientes:

<u>Ejemplos 56</u>

1) En vista del Teorema 31 si R es un dominio entero entonces R-tors admite la siguiente partición:

$$\{[\xi] = [\chi(R)] , [\chi] = \{\chi\}\}$$.

Ya que si $\tau \neq \chi$ es una teoría de torsión, entonces $R \in \amalg_\tau$ puesto que el único elemento de un dominio anulable por un ideal (perteneciente a un filtro de Gabriel) es 0. En consecuencia también los módulos libres (que son de la forma $R^{(X)}$) son libres de τ-torsión, siendo submódulos de un módulo de la forma R^X, dada la cerradura de $\mathbb{L}_\tau$ bajo tomar productos y submódulos.

Ahora, si $_RP$ es un módulo $\mathbb{L}_\tau$-proyectivo, entonces, por el Teorema 31, tiene que ser un sumando dir. de P'/T donde $_RP'$ es un módulo proyectivo y $_RT$ es un submódulo de τ-torsión del módulo $P' \in \mathbb{L}_\tau$ $\therefore$ $T \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{L}_\tau = (0)$, de donde $T = (0)$ y $P' = P$. así tenemos que la clase de los módulos $\mathbb{L}_\tau$-proyectivos coincide con la clase de los módulos proyectivos ($\mathcal{P}_\tau = \mathcal{P}$).

Por el ejemplo 44 iii, concluímos que $\tau \in [\xi]$.

Ahora, $R \in \mathbb{L}_\tau \ \forall \tau \neq \chi \Longrightarrow \chi(R) \geq \tau \ \ \forall \tau \in R\text{-tors} \setminus \{\chi\}$. Como además $\chi(R) \neq \chi$ (ya que R es libre de $\chi(R)$-torsión pero es de χ-torsión), tenemos que $\chi(R) \in [\xi]$ y a fortiori que $\chi(R) = \xi^*$.

Así, tenemos que para un dominio entero, R-tors tiene exactamente dos clases de equivalencia respecto a $\sim_{\mathbb{L}}$: $[\xi]$ y $[\chi]$ donde $[\chi] = \{\chi\}$ y $[\xi] = R\text{-tors} \setminus \{\chi\}$.

Es claro pues que cada elemento de $R\text{-tors}/\sim_{\mathbb{L}}$ admite un elemento mayor y uno menor.

En particular, tal es la situación para el anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$, que no es un anillo perfecto.

Notemos además que para $\mathbb{Z}$, aunque cada elemento de $R\text{-tors}/\sim_{\mathbb{L}}$ admite un elemento mayor y uno menor, éstos no están dados como en el Teorema 54. Explícitamente, para $\mathbb{Z}$, Rad $(\mathbb{Z}) = (0)$, como tenemos además que $\chi = \chi$, entonces $\chi_* = \chi = \chi^*$, sin embargo $\chi_* \neq \xi(t_\chi(\text{Rad } \mathbb{Z})) = \xi(t_\chi(0)) = \xi(0) = \xi$.

Por otro lado, $[\xi] = [\tau_G = \tau_1]$ y $\xi^* = \tau_1$, pero $\xi^* \neq \chi(\text{Rad } (\mathbb{Z})/t_\xi(\text{Rad}(\mathbb{Z}))) = \chi((0)/(0)) = \chi(0) = \chi$.

2) Si R es un anillo simple, entonces cada clase de equivalencia tiene elementos mayor y menor, ya que sólo hay dos clases de equivalencia, así que R-tors/ $\sim_{\amalg}$ = $\{\{\xi\},\{\chi\}\}$ o bien R-tors/ $\sim_{\amalg}$ = $\{\{\xi,\chi\}\}$. El segundo caso se dá si R es simple artiniano (Corolario 46) y el primero se dá si R no es artiniano.

Lema 57

Son equivalentes para R un anillo perfecto izquierdo:

i) $\xi^* \vee \tau = \tau^* \quad \forall \tau \in$ R-tors.

ii) $[\tau] \xrightarrow{\ -\wedge \xi^*\ } [\xi]$ es un monomorfismo de retículas con inverso izquierdo $[\xi] \xrightarrow{\ -\vee \tau^*\ } [\tau]$.

iii) $\sigma \le \tau \Longrightarrow [\tau] \xrightarrow{\ -\wedge\sigma^*\ } [\sigma]$ es un monomorfismo de retículas con inverso izquierdo $[\sigma] \xrightarrow{\ -\vee\tau_*\ } [\tau]$.

iv) $\sigma \le \tau \Longrightarrow \tau \vee \sigma^* = \tau^*$.

v) $\forall\, \sigma, \tau \in$ R-tors $\quad \tau \vee \sigma^* = (\tau \vee \sigma)^* = \tau^* \vee \sigma$.

Demostración

i) $\Longrightarrow$ ii) $\quad (\tau \wedge \xi^*) \vee \tau^* = (\tau \vee \tau_*) \wedge (\xi^* \vee \tau_*) =$

$= \tau \wedge \tau^* = \tau$ de donde

$\_\wedge \xi^*$ es un morfismo inyectivo y por lo tanto es un monomorfismo de retículas con inverso izquierdo $\_\vee \tau^*$.

ii) $\Longrightarrow$ i) $[\xi] \xrightarrow{\ -\vee\tau^*\ } [\tau]$ siendo un morfismo supravectivo implica que $\xi^* \vee \tau_* = \tau^*$, en particular $\xi^* \le \tau^*$

$\therefore \tau^* = \xi^* \vee \tau_* \le \xi^* \vee \tau \le \tau^* \vee \tau = \tau^*$.

iii) $\Longrightarrow$ iv) $\forall \beta \in [\tau] \quad \beta = (\beta \wedge \sigma^*) \vee \tau_*$, en particular

$\tau^* = (\tau^* \wedge \sigma^*) \vee \tau_* = (\tau^* \vee \tau_*) \wedge (\sigma^* \vee \tau_*) = \tau^* \wedge (\sigma^* \vee \tau_*)$

$= \sigma^* \vee \tau_*$ (dado que $[\sigma] \xrightarrow{\ \vee\tau_*\ } [\tau]$ es sobre por hipótesis y en particular $\sigma^* \leq \tau_*$).

En particular si $\beta \in [\tau]$

$$\tau^* = \sigma^* \vee \tau_* \leq \sigma^* \vee \beta \leq \sigma^* \vee \tau^* = \tau^* \therefore \sigma^* \vee \beta = \tau^*$$

y por lo tanto $\sigma^* \vee \tau = \tau^*$ y tenemos iv).

iv) $\Longrightarrow$ iii) $\forall \beta \in [\tau]$ $\beta = (\beta \wedge \sigma^*) \vee \tau_* = (\beta \vee \tau_*) \wedge (\sigma^* \vee \tau_*)$

$$= \beta \wedge (\tau^*) = \beta \quad .$$

iii) $\Longrightarrow$ i) es obvio.

i) $\Longrightarrow$ iii) Si $\sigma \leq \tau$ entonces $\tau^* = \xi^* \vee \tau \leq \sigma^* \vee \tau \leq$ $\leq \sigma^* \vee \tau^* = \tau^* \therefore \sigma^* \vee \tau = \tau^*$.

v) $\Longrightarrow$ iv) es obvio.

iv) $\Longrightarrow$ v) $\sigma \leq \sigma \vee \tau \Longrightarrow (\sigma \vee \tau) \vee \sigma^* = (\sigma \vee \tau)^*$. Pero entonces $(\sigma \vee \tau)^* = (\sigma \vee \tau) \vee \sigma^* = \sigma^* \vee \tau$. //

<u>Definición 58</u>

Llamaremos (A)-anillos a los anillos para los cuales $\tau \leq \sigma \Longrightarrow \tau_* \leq \sigma_*$ y $\tau^* \leq \sigma^*$.

<u>Teorema 59</u>

Si R es un anillo perfecto izquierdo en la que cada clase libre de torsión $\mathbb{L}_\tau$ es una clase de torsión (es decir, cada clase libre de torsión $\mathbb{L}_\tau$ es cerrada bajo tomar cocientes) entonces R es un (A)-anillo.

Demostración

Demostraremos que $\xi^* \vee \tau = \tau^*$ $\forall \tau \in$ R-tors. Como $\xi^* \leq \tau^*$ (por el Teorema 53 tenemos que $\xi^* = \chi(\text{Rad } R)$; $\tau^* = \chi(\text{Rad } R/t_\tau(\text{Rad } R))$ y la hipótesis de que $\mathbb{L}_\tau$ es cerrada bajo tomar cocientes $\Longrightarrow \text{Rad } R/t_\tau(\text{Rad } R) \in \mathbb{L}_{\xi^*} \Longrightarrow \tau^* \geq \xi^*$), tenemos que $\xi^* \vee \tau \leq \tau^*$.

Resta probar que $\xi^* \vee \tau$ no puede ser distinta de τ^*, ya que si lo fuera:

$\exists\ 0 \neq M \in \mathbb{T}_{\tau^*} \cap \mathbb{F}_{\xi^* \vee \tau} = \mathbb{T}_{\tau^*} \cap \mathbb{F}_{\xi^*} \cap \mathbb{F}_{\tau}$.

Como $\tau^* = \chi(\mathrm{Rad}\ R/t_{\tau}(\mathrm{Rad}\ R))$ (Teorema 54), tenemos que $\mathrm{Hom}_R(M, E(\mathrm{Rad}\ R/t_{\tau}(\mathrm{Rad}\ R))) = 0$ $(*)$.

Pero como $M \in \mathbb{F}_{\xi^*}$ y $\xi^* = \chi(\mathrm{Rad}\ R)$ (Teorema 53) tenemos que $\exists\, u: M \rightarrowtail (E(\mathrm{Rad}\ R))^X$ monomorfismo, para algún conjunto X. $\therefore\ \exists\, x \in X \ni p_x u(M) \neq 0$, donde $p_x : E(\mathrm{Rad}\ R)^X \longrightarrow E(\mathrm{Rad}\ R)$ es la proyección canónica. Por lo tanto, en vista de $(*)$, tenemos que $u(M) \subseteq (t_{\tau}(E(\mathrm{Rad}\ R)))^X$, ya que en caso contrario,

$\exists\, y \in X \ni p_y(u(M)) \not\subseteq t_{\tau}(E(\mathrm{Rad}\ R))$ y por lo tanto

$M \xrightarrow{p_y \circ u} E(\mathrm{Rad}\ R) \longrightarrow E(\mathrm{Rad} R)/t_{\tau}(E(\mathrm{Rad}\ R)) \neq 0 : M \longrightarrow \dfrac{E(\mathrm{Rad}\ R)}{t_{\tau}(E(\mathrm{Rad}\ R)}$

pero $E(\mathrm{Rad}\ R)/t_{\tau}(E(\mathrm{Rad} R)) \in \mathbb{F}_{\tau^*}$ siendo un cociente de $E(\mathrm{Rad}\ R)/t_{\tau}(\mathrm{Rad}\ R) \in \mathbb{F}_{\tau^*}$ y $M \in \mathbb{T}_{\tau^*}$ ∇ .

Ahora como $u(M) \subseteq (t_{\tau}(E(\mathrm{Rad}\ R)))^X$, tenemos que $p_x(u(M))$ $t_{\tau}(E(\mathrm{Rad}\ R)) \in \mathbb{T}_{\tau}$, pero siendo también un cociente de $M \in \mathbb{F}_{\tau}$ pertenece a $\mathbb{F}_{\tau}$ $\therefore\ 0 \neq u(M) \in \mathbb{T}_{\tau} \cap \mathbb{F}_{\tau} = \{(0)\}$ ∇.

$\xi^* \vee \tau = \tau^*$. //

Los anillos tales que toda clase libre de torsión es cerrada bajo tomar cocientes ha sido caracterizados por Teply([22, Corollary 3.5]) y por Bronowitz y Teply ([5 , Theorem 3]). Escribimos su resultado aquí para comodidad del lector, ya que lo usaremos en lo que sigue.

Teorema 60

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:

1) Todas las teorías de torsión en R-tors son TTF y estables.

2) Todos los elementos de R-tors son TTF.

3) R es perfecto izquierdo y derecho y $\cdot\ni\cdot$ $\mathrm{Ext}^1_R(S_1, S_2) = 0$ para $S_1, S_2 \in$ R-simp no isomorfos.

4) Todo elemento de R-tors es semisimple y R tiene descomposición primaria.

5) R es una suma directa finita de anillos de matrices sobre anillos locales perfectos por la izquierda y por la derecha.

6) Toda teoría de torsión se escinde centralmente.

7) Para toda teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ el funtor de torsión asociado $M \xrightarrow{t} t(M)$ es exacto.

8) Cada clase libre de torsión es una clase de torsión (e.d. cada clase libre de torsión es cerrada bajo tomar cocientes).//

Llamaremos BT-anillo a un anillo que satisfaga las condiciones del Teorema anterior.

Es claro que para un BT-anillo tenemos:

$$\tau \leq \sigma \Longrightarrow t_\tau(\mathrm{Rad}\, R) \leq t_\sigma(\mathrm{Rad}\, R) \Longrightarrow \frac{\mathrm{Rad}\, R}{t_\tau(\mathrm{Rad}\, R)} \longrightarrow \frac{\mathrm{Rad}\, R}{t_\sigma(\mathrm{Rad}\, R)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{Rad}\, R}{t_\sigma(\mathrm{Rad}\, R)} \in \mathbb{L}\, \chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R)) = \mathbb{L}_{\tau^*} \Longrightarrow \sigma^* = \chi\left(\frac{\mathrm{Rad}\, R}{t_\sigma(\mathrm{Rad}\, R)}\right) \geq \tau^* \Longrightarrow \tau^* \leq \sigma^* .$$

Además para un BT-anillo tenemos que $\xi^* \vee \tau = \tau^*$ pues es claro de lo anterior que $\xi^* \vee \tau \leq \tau^*$, y tendríamos

por otra parte, como cada clase libre de torsión es cerrada bajo cocientes, si la relación de arriba fuera estricta, que

$\exists\ 0 \neq f \in Hom_R\ (M, E(Rad\ R))$ $\therefore$ $\exists\ m \in M \ni Hom_R(Rm, Rad\ R) \neq 0$.
Pero como $M \in \mathbb{T}_{\tau^*}$, tenemos que $Hom_R(Rm, Rad\ R/t_\tau(Rad\ R)) = 0$
$(Rm \subseteq M \in \mathbb{T}_{\tau^*})$. Así que si tomamos $0 \neq g \in Hom_R(Rm, Rad\ R)$,
$0 \neq g(Rm) \subseteq t_\tau(Rad\ R)$, pero por otra parte $g(Rm)$ es un cociente de $Rm \subseteq M \in \mathbb{L}$, por lo que $0 \neq g(Rm) \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{L}_\tau$ $\forall$. $\therefore$ $*\vee\tau = \tau*$.

Así que para un BT-anillo tenemos que vale el Lema 57 , obteniendo así una partición agradable de R-tors por medio de la relación de equivalencia $\sim_{\mathbb{L}}$. Puesto que la clase de equivalencia de $[\xi]$, contiene una copia isomorfa de cada otra clase $[\tau] \in$ R-tors/$\sim_{\mathbb{L}}$, tendremos determinada R-tors, como retícula, si conocemos $[\xi]$.

Llamaremos "suprema" a la teoría de torsión $\tau^* \in [\tau] \in R\text{-tors}/\sim_{\mathbb{L}}$ e "ínfima" al elemento τ_* menor de $[\tau]$ (cuando existan).

<u>Teorema 61</u>

Si $\mathcal{A}_\sigma \subseteq \mathcal{A}_\tau$ $\tau = \tau_*$ entonces $\tau \leq \sigma$.

Demostración

Por el Teorema 52, $\tau = \tau_*$ está generada por la clase de módulos $\{K_\tau : 0 \longrightarrow K_\tau \longrightarrow P \longrightarrow P_\tau \longrightarrow 0$ es cubierta proyectiva con $P_\tau \in \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)}\}$.

Ahora, como $\mathcal{A}_\sigma \subseteq \mathcal{A}_\tau$, entonces $\mathbb{P}_{\mathbb{L}(\tau)} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{L}(\sigma)}$ y así cada K_τ es uno de los generadores de σ_* $K_\tau \in \mathbb{T}_{\sigma_*} \subseteq \mathbb{T}_\sigma$. Así que cada K_τ pertenece a $\mathbb{T}_\sigma$ $\therefore$ $\tau = \tau_* \leq \sigma_* \leq \sigma$. //

<u>Teorema 62</u>

Una unión de teorías de torsión ínfimas es también ínfima.

Demostración

Sea $\{\tau_\alpha\}_X$ una familia de teorías de torsión ínfimas, entonces $\tau_\alpha \leq \bigvee_X \tau_\alpha \Longrightarrow \mathcal{A}_{(\bigvee_X \tau_\alpha)_*} = \mathcal{A}_{\bigvee_X \tau_\alpha} \subseteq \mathcal{A}_{\tau_\alpha}$

Así, por el Teorema anterior, tenemos que $(\bigvee_X \tau_\alpha)_* \geq \tau_\alpha$ $\forall \alpha$
$(\bigvee_X \tau_\alpha)_* \geq \bigvee_X \tau_\alpha$ $\therefore$ $(\bigvee_X \tau_\alpha)_* = \bigvee_X \tau_\alpha$. //

<u>Lema 63</u>

Si $\{\tau_\alpha\}_X$ es una familia de teorías de torsión cohereditarias, entonces $t_{\bigvee_X \tau_\alpha}(M) = \sum_X t_\alpha(M)$ $\forall M \in R\text{-mod}$.

Demostración

Claramente $\sum_X t_\alpha(M) \subseteq t_{\bigvee_X \tau_\alpha}(M)$. Por otra parte, $t_{\bigvee_X \tau_\alpha}(M) / \sum t_\alpha(M)$ es un cociente de $t_{\bigvee_X \tau_\alpha}(M) / t_\alpha(M)$ que es un submódulo de $M/t_{\tau_\alpha}(M) \in \mathbb{L}_{\tau_\alpha}$.

$$t_{\bigvee_X \tau_\alpha}(M) / \sum t_\alpha(M) \in \mathbb{L}_{\tau_\alpha} \forall \alpha \in X.$$

Por lo tanto $t_{\underset{X}{\vee}\tau_\alpha}(M) / \sum t_{\tau_\alpha}(M) \in \mathbb{T}_{\underset{X}{\vee}\tau_\alpha} \cap \mathbb{L}_{\underset{X}{\vee}\tau_\alpha} = (0)$. //

Teorema 64

Si R es un BT-anillo (pág. 57) entonces unión de supremas es suprema.

Demostración

Por hipótesis, toda teoría de torsión es cohereditaria.

Sea $\{\tau_\alpha\}_X$ una familia de teorías de torsión supremas, es decir $\tau_\alpha = \chi(\mathrm{Rad}/t_{\tau_\alpha}(\mathrm{Rad}\,R))$ $\forall \alpha \in X$. Como en la demostración del Lema anterior, $\mathrm{Rad}\,R/\ t_{\vee\tau_\alpha}(\mathrm{Rad}\ R) \in \mathbb{L}_{\tau_\alpha}$ $\forall \alpha \in X$. En consecuencia $(\underset{X}{\vee}\tau_\alpha)^* = \chi(\mathrm{Rad}\ R/\ \ t_{\vee\tau_\alpha}(\mathrm{Rad}\ R) \geq \underset{X}{\vee}\tau_\alpha$. Si la desigualdad fuera estricta, $\exists\,(0) \neq M \in \mathbb{T}_{(\vee\tau_\alpha)^*} \cap \underset{X}{\cap} \mathbb{L}_{\tau_\alpha}$. Podemos suponer, sin perder generalidad podemos suponer que $M = Rm$, y que $\exists\ 0 \neq f: Rm \longrightarrow \mathrm{Rad}\ R/t_{\tau_\alpha}(\mathrm{Rad}\,R)$, ya que $Rm \in \mathbb{L}_{\tau_\alpha}$. Componiendo f con el epimorfismo natural $\mathrm{Rad}\ R/t\ \ \ \ (\mathrm{Rad}\ R)$, tenemos que $\pi\circ f = 0$, es decir que $0 \neq f(m) \in t_{\underset{X}{\vee}\tau_\alpha}(\mathrm{Rad}\ R) = \sum t_{\tau_\alpha}(\mathrm{Rad}\,R)$, por el Lema anterior. Pero entonces $\exists\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in X \cdot\ni\cdot\ 0 \neq f(m) \in \mathbb{T}_{\tau_1\vee\ldots\vee\tau_n} \cap \mathbb{L}_{\tau_1\vee\ldots\vee\tau_n}$ $\underset{\bullet}{\nabla}$. Por lo tanto $\underset{X}{\vee}\tau_\alpha = (\ \underset{X}{\vee}\tau_\alpha\ )^*$. //

Ejemplos 65

1) Todo $\mathbb{Z}_n$ es un BT-anillo en vista de 5) en el Teorema de Bronowitz y Teply ($\mathbb{Z}_n$ es la suma directa de sus partes p primarias, un grupo abeliano p-primario es local y un anillo artiniano es perfecto).

2) Todo anillo artiniano es un BT-anillo, en vista de 2) en el Teorema de Bronowitz y Teply (usando el hecho de que $\mathcal{F}_\tau$, el filtro correspondiente a τ tiene un ideal mínimo I_τ que tiene que ser idempotente $\therefore \mathcal{F}_\tau = \{{}_RJ \leq R : I \leq J\}$, de donde $M \in \mathbb{T}_\tau \iff IM = 0$. Esto implica que $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo productos, es decir τ es TTF).

Teorema 66 (Bland [3, Theorem 2.8]).

Si R es un anillo semiperfecto entonces

$\tau \sim_{\amalg} \chi \iff \mathrm{Rad}\ R \in \mathbb{T}_{\tau}$.

Demostración

$\Longrightarrow$) $0 \longrightarrow \mathrm{Rad}\ R \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathrm{Rad}\ R \longrightarrow 0$ es una cubierta proyectiva con $R/\mathrm{Rad}\ R \in \mathbb{P}_{\amalg(\chi)}$, ya que R es proyectivo y $\mathrm{Rad}\ R \in \mathbb{T}_{\chi}$ = R-mod (usando el Teorema 28).

Así, tenemos que la sucesión exacta

$0 \longrightarrow \mathrm{Rad}\ R/t_{\tau}(\mathrm{Rad}\ R) \longrightarrow R/t_{\tau}(\mathrm{Rad}\ R) \longrightarrow R/\mathrm{Rad}\ R \longrightarrow 0$

se escinde puesto que pertenece a $\mathcal{A}_{\amalg(\tau)} = \mathcal{A}_{\amalg(\chi)}$ $(\tau \in [\chi])$ y $R/\mathrm{Rad}\ R \in \mathbb{P}_{\amalg(\chi)}$. Pero entonces $\mathrm{Rad}\ R/t_{\tau}(\mathrm{Rad}\ R)$ es un sumando directo superfluo de $R/t_{\tau}(\mathrm{Rad}\ R)$ $(\mathrm{Rad}\ R \ll R)$, lo que es posible únicamente si $\mathrm{Rad}\ R/t_{\tau}(\mathrm{Rad}\ R) = (0)$, es decir si $\mathrm{Rad}\ R = t_{\tau}(\mathrm{Rad}\ R) \in \mathbb{T}_{\tau}$. //

$\Longleftarrow$) $\mathrm{Rad}\ R \in \mathbb{T}_{\tau} \Longrightarrow \mathrm{Rad}\ R \cdot R = \mathrm{Rad}\ R \leq t_{\tau}(R)$, así que $\mathrm{Rad}\ R$ anula a $R/t_{\tau}(R)$ y por lo tanto $R/t_{\tau}(R)$ es un $R/\mathrm{Rad}\ R$-módulo y es por lo tanto semisimple. Concluimos usando el Teorema 45 .//

El Teorema de Bland es equivalente al siguiente

Teorema 67

Si R es semiperfecto, entonces $[\chi]$ contiene un elemento menor $\chi_{*} = \xi(\mathrm{Rad}\ R)$.

Demostración

$\Longrightarrow$) Como $0 \longrightarrow \mathrm{Rad}\ R \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathrm{Rad}\ R \longrightarrow 0$ es una cubierta proyectiva con $\mathrm{Rad}\ R \in \mathbb{T}_{\chi}$ = R-mod, tenemos, por el Teorema de Bland que $\xi(\mathrm{Rad}\ R) \in [\chi]$. $\therefore$ $(\mathrm{Rad}\ R)$ es el elemento menor de $[\chi]$. $_{//}$

$\Longleftarrow$) Suponiendo que $\chi_* = \xi(\text{Rad } R)$, tenemos que $\tau \in [\chi]$ $\Longleftrightarrow \tau \geq \xi(\text{Rad } R) \Longleftrightarrow \text{Rad } R \in \Pi_\tau$. //

Teorema 68

Si R es un anillo semiperfecto, entonces $\xi^* = \chi(\mathrm{Rad}\ R)$. Donde ξ^* es el elemento mayor de $[\xi]$.

Demostración

Como $0 \longrightarrow \mathrm{Rad}\ R \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathrm{Rad}\ R \longrightarrow 0$ es una cubierta $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\xi)}$-proyectiva, entonces $\mathrm{Rad}\ R \in \mathbb{L}_\sigma$ $\forall \sigma \in [\xi]$ $\therefore$ $\chi(\mathrm{Rad}\ R) \geq \sigma$ $\forall \sigma \in [\xi]$, y por lo tanto $\mathbb{P}_{\chi(\mathrm{Rad}\ R)} \supseteq \mathbb{P}_\xi$. Así que para demostrar que $\chi(\mathrm{Rad}\ R) = \xi^*$, basta ver que $\mathbb{P}_{\chi(\mathrm{Rad}\ R)} \subseteq \mathbb{P}_\xi$.

Tomemos ${}_RM \in \mathbb{P}_{\chi(\mathrm{Rad}\ R)}$ tenemos que demostrar que M es proyectivo ya que $\mathbb{P}_\xi$ es la clase de los módulos proyectivos.

$M \in \mathbb{P}_{\chi(\mathrm{Rad}\ R)} \Longrightarrow \exists\ 0 \longrightarrow K \longrightarrow \bigoplus_X P_\alpha \longrightarrow M \longrightarrow 0$ exacta con $K \in \mathbb{T}_{\chi(\mathrm{Rad}\ R)}$ y $\bigoplus_X P_\alpha$ proyectivo con cada P_α proyectivo inescindible isomorfo a Re_α, donde e_α es un idempotente primitivo en R.

Observemos primero que $\mathrm{Rad}\ R \cdot K \hookrightarrow \mathrm{Rad}\ R \cdot \bigoplus P_\alpha \rightarrowtail \mathrm{Rad}\ R \cdot R^{(X)} = \mathrm{Rad}\ R^{(X)}$. De donde tenemos que $\mathrm{Rad}\ R \cdot K \in \mathbb{L}_{\chi(\mathrm{Rad}\ R)} \cap \mathbb{T}_{\chi(\mathrm{Rad}\ R)} = \{(0)\}$ $\therefore$ $\mathrm{Rad}\ R \cdot K = (0)$. Así que K es un $R/\mathrm{Rad}\ R$-módulo izquierdo, y por lo tanto es semisimple ($R/\mathrm{Rad}\ R$ es un anillo semisimple ya que R es semiperfecto).

Sea ${}_RS$ un submódulo simple de K y tomemos $S \hookrightarrow \bigoplus_A P_\alpha$, donde $A \subseteq X$ es de cardinalidad mínima (y por tanto A es finito ya que S es finitamente generado).

Sea $0 \longrightarrow S \longrightarrow \bigoplus_A P_\alpha \longrightarrow C \longrightarrow 0$ exacta. Como C es finitamente generado entonces admite una cubierta proyectiva: $0 \longrightarrow U_C \longrightarrow P_C \longrightarrow C \longrightarrow 0$, así tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \bigoplus_{X} P_\beta \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_C \arrow[r] & P_C \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde g está dada por la proyectividad de $\bigoplus P_\beta$ y f por la propiedad universal del núcleo (U_C).

Como S es simple entonces f es un monomorfismo o es cero. Pero f no es mono, ya que si lo fuera, entonces $S \cong U_C \ll P_C$, pero $U_C \ll P_C \Longrightarrow U_C \leq \text{Rad } R\, P_C \rightarrowtail \text{Rad } R^{(A)}$ y así $\exists\ S \rightarrowtail \text{Rad } R^{(A)}$, de donde $S \in \amalg_{X(\text{Rad } R)} \cap \Pi_{X(\text{Rad } R)} = (0)$ $\blacktriangledown$. Por lo tanto $f = 0$ en el diagrama de arriba y como además f es epi, tenemos entonces que $U_C = (0)$, así que $C \cong P_C$ es proyectivo. Por lo tanto $0 \longrightarrow S \longrightarrow \bigoplus_{X} P_\beta \longrightarrow C \longrightarrow 0$ se escinde, y así tenemos que S es simple proyectivo. En consecuencia, K es semisimple proyectivo y por lo tanto es un submódulo de $\text{soc}_p(\bigoplus_{X} P_\alpha) = \bigoplus_{X} \text{soc}_p P_\alpha$. Ahora, $\bigoplus_{X} \text{soc}_p P_\alpha$ tiene una descomposición como suma directa de simples proyectivos (y por tanto inescindibles), de la manera obvia. Por otro lado K es un sumando directo de $\text{soc}_p(\bigoplus_{X} P_\alpha)$, así que dada una descomposición de K como suma directa de simples, cada uno de los sumandos simples de K en dicha descomposición es un sumando directo de $\text{soc}_p(P_\alpha)$ p. a. $\alpha \in X$, puesto que los módulos proyectivos tienen descomposición única como suma directa de proyectivos inescindibles, cuando R es semiperfecto. Así, para cada sumando directo simple S de K, tenemos $S \hookrightarrow \text{soc}_p(P_\alpha) \hookrightarrow \text{Rad } P_\alpha \rightarrowtail \text{Rad } R$, p. a. $\alpha \in X$, a menos que $\text{soc } (P_\alpha) = P_\alpha$, en cuyo caso, dada la inescindibilidad de P_α tendríamos que $S \cong P_\alpha$. Veamos que éste es necesariamente el caso. La otra posibilidad, como ya vimos, implicaría que $\exists\ S \rightarrowtail \mathrm{Rad}\, R$ y por lo tanto $S \in \amalg_{\mathfrak{X}(\mathrm{Rad}\, R)}$, pero también $S \in \Pi_{\mathfrak{X}(\mathrm{Rad}\, R)}$, siendo un submódulo de K, por lo tanto $S = (0)$ ∇. Así pues $S \cong P_\alpha$ p. a. $\alpha \in X$, y por lo tanto $K \cong \bigoplus_{Y} P_\alpha$ con $Y \subsetneq X$. Concluimos que. $M \cong \bigoplus_{X \setminus Y} P$ y es por lo tanto proyectivo. //

Teorema 70

Si R es un anillo local (y por lo tanto semiperfecto) entonces $\forall\ [\tau] \in R\text{-tors}/\sim_{\mathfrak{L}}$, $\tau_* = \xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))$, es el menor elemento de $[\tau]$.

Demostración

Dado que la sucesión $0 \longrightarrow t_\tau(\mathrm{Rad}\,R) \longrightarrow R \longrightarrow R/t_\tau(\mathrm{Rad}\,R) \longrightarrow 0$ es una cubierta proyectiva, entonces por el Lema 40 tenemos que $t_\tau(\mathrm{Rad}\,R) \in \mathbb{T}_\sigma\ \forall\, \sigma \in [\tau]$. Por lo tanto $\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\,R)) \leq \sigma\ \ \forall\ \sigma \in [\tau]$.

Ahora, como R es local entonces tenemos que vale una de las siguientes afirmaciones:

i) $R \in \mathbb{T}_\tau$, en cuyo caso $\tau = \chi$. O bien

ii) $R \notin \mathbb{T}_\tau$, en cuyo caso $t_\tau(R) \lneqq R$ y $\therefore$ $t_\tau(R) \leq \mathrm{Rad}\,R$.

En el caso i) $\tau_* = \chi_* = \xi(\mathrm{Rad}\ R)$, por el Teorema de Bland. Como $\mathrm{Rad}\,R \leq R \in \mathbb{T}_\tau$, entonces $\mathrm{Rad}\,R \in \mathbb{T}_\tau$ y por lo tanto $\mathrm{Rad}\,R = t_\tau(\mathrm{Rad}\,R)$, así que en este caso $\tau_* = \xi(\mathrm{Rad}\ R) = \xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))$.

Si vale ii) y si P_τ es un módulo $\mathcal{Q}_{\mathfrak{L}(\tau)}$-proyectivo, entonces es sum. directo de P/T donde P es un módulo proyectivo y T es un submódulo de P de τ-torsión. Pero para un anillo local todo módulo proyectivo es libre (Teorema de Kaplanski en [1], 26.7 Corollary). Así que $P \cong R^{(X)}$ p.a. conjunto X, de donde tenemos que $P_\tau \lhd R^{(X)}/T$ y $T \rightarrowtail (t_\tau(R))^{(X)} \subseteq \mathrm{Rad}\ R^{(X)}$ y así $T \rightarrowtail t_\tau((\mathrm{Rad}\,R)^{(X)}) = (t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))^{(X)}$. Por lo tanto $T \in \mathbb{T}_{\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))}$ así que $P_\tau \cong R^{(X)}/\ T \in \mathbb{P}_{\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))}$

$\therefore\ \mathbb{P}_\tau = \mathbb{P}_{\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))}$ $\therefore\ \xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\,R)) \in [\tau]$.

$\therefore\ \tau_* = \xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))$. //

<u>Teorema 70b</u>

Si R es un anillio local, entonces $\forall \tau \in R\text{-tors}/\sim_{\mathbb{L}}$ existe un elemento mayor $\tau^* = \chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R))$.

Demostración

Dado que la sucesión exacta

$0 \longrightarrow \mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R) \longrightarrow R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R) \longrightarrow R/\mathrm{Rad}\, R \longrightarrow 0$ es una cubierta $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectiva, entonces por el Corolario 42 tenemos que $\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R) \in \mathbb{L}_\sigma$ $\forall \sigma \in [\tau]$. $\therefore$ $\chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R)) \geq \sigma$ $\forall \sigma \in [\tau]$. En consecuencia $\mathbb{P}_\tau \subseteq \mathbb{P}_{\chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau \mathrm{Rad}\, R))}$. Si probamos la inclusión recíproca, tendremos que $\chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R)) \in [\tau]$, con lo cual tendríamos lo que se afirma en el enunciado.

Tomemos pues un módulo en $\mathbb{P}_{\chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R))}$, que es un sum. directo de algún P/T donde P es un módulo proyectivo y T es un submódulo de P de $\chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R))$-torsión. Como R es local entonces todo módulo proyectivo es libre, por el Teorema de Kaplanski citado en el Teorema anterior. Otra vez, tenemos dos casos:

i) R es de $\chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R))$-torsión.

ii) R no es de $\chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R))$-torsión.

En el caso i), como todo módulo es cociente de un módulo libre, tendríamos que todo módulo sería de $\chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R))$-torsión, es decir $\chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R)) = \chi$. En particular $\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R) \in \mathbb{T}_{\chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R))}$ y también pertenece a $\mathbb{L}_{\chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R))}$, en consecuencia $\mathrm{Rad}\, R/t_\tau(\mathrm{Rad}\, R) = (0)$ y por lo tanto $\mathrm{Rad}\, R = t_\tau(\mathrm{Rad}\, R)$. Por el Teorema de Bland tenemos entonces que todo módulo es $\mathcal{A}_{\mathbb{L}(\tau)}$-proyectivo, es decir que $\tau \in [\chi]$. Así que en este caso $\tau^* = \chi = \chi(0) = \chi(\mathrm{Rad}\, R/t_\tau \mathrm{Rad}\, R)$.

En el caso ii) tendríamos que $t_{\mathcal{X}(\mathrm{Rad}\,R/t_\tau \mathrm{Rad}\,R)}(R) \subsetneq R$, y en consecuencia, dado que R es local (y así Rad R es el único ideal máximo de R), $t_{\mathcal{X}(\mathrm{Rad}\,R/t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))}(R) \subseteq \mathrm{Rad}\,R$. Ahora, la composición

$t_{\mathcal{X}(\mathrm{Rad}\,R/t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))}(R) \hookrightarrow \mathrm{Rad}\,R \twoheadrightarrow \mathrm{Rad}\,R/t_\tau(\mathrm{Rad}\,R)$ es cero, por definición de la teoría de torsión $\mathcal{X}(\mathrm{Rad}\,R/t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))$. Por lo tanto $t_{\mathcal{X}(\mathrm{Rad}\,R/t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))}(R) \subseteq t_\tau(\mathrm{Rad}\,R) \in \mathbb{T}_\tau$.

Por lo tanto para el módulo $P/T = R^{(X)}/T$, tenemos que $T \hookrightarrow t_{\mathcal{X}(\mathrm{Rad}\,R/t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))}(R^{(X)}) = (t_{\mathcal{X}(\mathrm{Rad}\,R/t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))}(R))^{(X)} \in \mathbb{T}_\tau$. Por lo tanto $T \in \mathbb{T}_\tau$ y así P/T es $\mathcal{Q}_{M(\tau)}$-proyectivo. Por lo tanto $\mathbb{P}_{\mathcal{X}(\mathrm{Rad}\,R/t_\tau(\mathrm{Rad}\,R))} = \mathbb{P}_\tau$. Que era lo que nos hacía falta. //

Teorema 71

Si R es un anillo semiperfecto, entonces: la teoría de torsión de Goldman $(\Pi_o, \amalg_o)$ se escinde centralmente $\Longleftrightarrow$ $soc_p(\text{Rad } R) = (0)$.

Demostración

$\Longleftarrow$) Si $soc_p(\text{Rad } R) = (0)$ entonces todo módulo ${}_RS$ simple y proyectivo es inyectivo: ya que si ${}_RS$ es simple y proyectivo entonces $S \in \Pi_{\xi(\text{Rad } R)} \cup \amalg_{\xi(\text{Rad } R)}$, pero $S \in \Pi_{\xi(\text{Rad } R)} \Longrightarrow$ $\exists\ 0 \neq f : \text{Rad } R \longrightarrow E(S)$. Como $S <_e E(S)$, tenemos que $S \leq \text{Im } f$, así tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \text{Rad } R \\ f^{-1}(S) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "f|_{f^{-1}(S)}"] & S \end{tikzcd}$$

, donde $f|_{f^{-1}(S)}$ se escinde ya que es un epimorfismo con codominio proyectivo. Por lo tanto S es isomorfo a un submódulo de $f^{-1}(S)$, que pertenece al zoclo proyectivo de $\text{Rad } R$ $\blacktriangledown$.

Así que si ${}_RS$ es un simple proyectivo, entonces $S \in \amalg_{\chi(\text{Rad } R)}$ pero $\xi(\text{Rad } R) = \chi_*$, por el Teorema de Bland, de aquí que si M es una suma directa de simples proyectivos, $M \in \amalg_{\chi_*}$, y por lo tanto M es inyectivo (por el Teorema 45 iv)).

Así tenemos que $\forall\ N \in R\text{-mod}$, $soc_p(N)$ es un submódulo inyectivo de N, y así $soc_p(N)$ es un sumando directo de N, es decir $(\Pi_o, \amalg_o)$ se escinde centralmente. $/\!\!/$

$\Longrightarrow$) Si $soc_p(\text{Rad } R) \neq (0)$, entonces

$0 \longrightarrow soc_p(R) \longrightarrow R \longrightarrow R/soc_p(R) \longrightarrow 0$ no se escinde, pues si se escindiera, los monomorfismos $S \hookrightarrow soc_p(\text{Rad } R)$ (S un submódulo simple de $soc_p(\mathrm{Rad}\ R)$, que existe por hipótesis), $soc_p(\mathrm{Rad}\ R) \hookrightarrow soc_p(R)$ y $soc_p(R) \hookrightarrow R$ se escinden, y por lo tanto la composición de ellos $S \hookrightarrow R$ también se escindiría, así que $R = S \oplus K$, donde $_RK$ es un ideal máximo de R $\forall$ $(S \leq \mathrm{Rad}\ R \leq K \Longrightarrow S \cap K = S \neq (0))$.

Por lo tanto $(\Pi_0, \amalg_0)$ no se escinde centralmente. //

Corolario 72

Si R es un anillo semiperfecto conmutativo, entonces $(\Pi_0, \amalg_0)$ se escinde centralmente.

Demostración

Raggi y Ríos (17 , Corolario 2.9) han demostrado, en general, que $soc_p(M) = soc_p(R) \cdot M$ $\forall$ $M \in R$-mod. En nuestro caso particular tenemos que $soc_p(\mathrm{Rad}\ R) = soc_p(R) \cdot \mathrm{Rad}\ R = (0)$, ya que $\mathrm{Rad}\ R$ anula a cualquier módulo semisimple. //

Notar que el argumento anterior no se aplica para anillos semiperfectos no conmutativos, porque $soc_p(\mathrm{Rad}\ R)$ no tiene por qué ser semisimple como módulo derecho.

Teorema 73

Son equivalentes para un anillo perfecto derecho:

i) $soc_p(\mathrm{Rad}\ R) = (0)$

ii) $\tau_0 = (\Pi_0, \amalg_0)$ se escinde centralmente.

iii) τ_0 es estable.

iv) τ_G se escinde centralmente.

v) $R = R_1 \times R_2$, donde R_1 es semisimple y R_2 es un anillo con ideal singular izquierdo esencial.

vi) Todo módulo semisimple y proyectivo es inyectivo.

vii) $\tau_G \in [\chi]$.

Demostración

Observemos que como R es perfecto derecho es semiartiniano izquierdo y semiperfecto izquierdo (Stenström [21], Proposition VIII.5.1).

i) $\Longleftrightarrow$ ii) Teorema 71 . vii) $\Longleftrightarrow$ v) [10] (ver el ejemp. 44 vi)).

ii) $\Longleftrightarrow$ iii) Ha sido demostrada por Raggi y Ríos, en general ([17] ., Corolario 2.15).

ii) $\Longleftrightarrow$ iv) $\Longleftrightarrow$ v) Por el Corolario 3.2 de Raggi y Ríos para anillos semiartinianos en [17] .

i) $\Longleftrightarrow$ vi) Pör la demostración del Teorema 71 . //

Corolario 74

Si R es un anillo perfecto conmutativo entonces son válidas las condiciones del Teorema 73 .

Demostración

El mismo argumento en la demostración del Corolario 72 , nos permite concluir que $soc_p(\mathrm{Rad}\, R) = (0)$. //

Del Teorema 3.1 de Raggi y Ríos ([17]) tenemos que para un anillo perfecto derecho, la teoría de torsión de Goldie τ_G es TTF y generada por los módulos izquierdos simples singulares, y también que está cogenerada por los módulos izquierdos simples proyectivos. (de hecho las sondiciones anteriores se siguen cuando el anillo R es semiartiniano izquierdo).

En el siguiente Teorema denotaremos $\mathcal{S}_I$ la clase de los módulos izquierdos simples e inyectivos y por $\mathcal{S}_P$ la clase de los módulos izquierdos simples y proyectivos.

Teorema 75

Si R es un anillo perfecto derecho, que goza de las condiciones del Teorema 73 (por ej. si R es además conmutativo), entonces son equivalentes:

i) $\chi_* = \tau_G$, donde χ_* es el elemento menor de $[\chi] \in R\text{-tors}/\sim_{\amalg}$.

ii) $\mathcal{A}_I = \mathcal{A}_P$.

Demostración

i) $\Longrightarrow$ ii) Por el Teorema 71 , tenemos que $\mathcal{A}_P \subseteq \mathcal{A}_I$.

Sea ${}_RS$ simple inyectivo, queremos demostrar que es proyectivo. Observemos que como el anillo es perfecto, entonces $R/\mathrm{Rad}\ R$ es semisimple, así que un módulo ${}_RM$ es semisimple si y sólo si $\mathrm{Rad}\ R\cdot M = (0)$. Por lo tanto todo producto directo de simples es semisimple. Como consecuencia de lo anterior y usando el Teorema 45 , concluimos que la teoría de torsión $\chi(S)$ pertenece a $[\chi]$ (ya que si $M \in \amalg_{\chi(S)}$, entonces $M \rightarrowtail S^X$, para algún conjunto X, y como S^X es semisimple, concluimos que M es semisimple y además es inyectivo, por ser isomorfo a un sumando directo del módulo inyectivo S^X).

Así, $\chi(S) \in [\chi]$ y por lo tanto $\chi(S) \geq \chi_* = \tau_G$. Así tenemos que S es libre de torsión de Goldie, la que está cogenerada por los simples proyectivos, $\therefore\ \exists\ 0 \neq f : S \longrightarrow U$ con U simple proyectivo. Como f es necesariamente un isomorfismo, concluimos que S es proyectivo. $\therefore \mathcal{A}_I \subseteq \mathcal{A}_P$ y así $\mathcal{A}_I = \mathcal{A}_P$. $\not\!\!H$

ii) $\Longrightarrow$ i) Como τ_G está cogenerada por los módulos simples proyectivos, entonces todo módulo libre de torsión de Goldie es semisimple, siendo (isomorfo a) un submódulo de un produc to de módulos simples (que es anulado por Rad R). Pero además un módulo libre de torsión de Goldie es inyectivo, ya que es un sumando directo de un producto de simples proyectivos, siendo este último inyectivo, ya que por hipótesis todos los simples proyectivos son inyectivos. Como todo módulo libre de torsión de Goldie es semisimple e inyectivo, concluimos, mediante el Teorema 45 , que $\tau_G \in [\chi]$.

Análogamente, si $\tau \in [\chi]$, tomemos E un cogenerador inyectivo de τ , es decir $\tau = \chi(E)$ (página 5). Nuevamente por el Teorema 45 , concluimos que E es semisimple. Ahora, si ${}_RS$ es un submódulo simple de E, siendo un sumando directo de E, es inyectivo. Como S es inyectivo entonces es proyectivo por hipótesis, por lo tanto es libre de torsión de Goldie. Así $E \in \mathbb{L}_G$, siendo una suma directa de módulos libres de torsión de Goldie. Pero $E \in \mathbb{L}_G \Longrightarrow \tau = \chi(E) \geq \tau_G$. Así tenemos que $\tau_G = \chi_*$. //

Corolario 76

Si R es un anillo casifrobenius (QF en la literatura), entonces $\chi_* = \tau_G$.

Demostración

Como R es artiniano izquierdo y derecho, es perfecto (derecho e izquierdo). Además, la clase de los módulos proyectivos coincide con la clase de los módulos inyectivos (Stenström, [21] ,Proposition XIV.3.6). Resta ver que vale alguna de las condiciones del Teorema 73 , por ejemplo, veamos que $soc_p(\text{Rad } R) = (0)$: si ${}_RS$ fuera un simple proyectivo en el zocio de Rad R, entonces S sería inyectivo, y por lo tanto sería un sumando directo de R, así que $S = Re \leq \operatorname{Rad} R$, con e un elemento idempotente de R ∇ (Rad R no contiene elementos idempotentes).//

Referencias

[1] Anderson F., Fuller K. . Rings and Categories of Modules. Springer Verlag (1973) .

[2] Bican L., Kepka T., Němec P. Torsion Theories and Homological Dimensions. Journal of Algebra 35, 99-122 (1975).

[3] Bland P. E. Divisible and codivisible modules. Math. Scand. 34, 153-161 (1974).

[4] Perfect torsion theories. Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 41, 349-355 (1973).

[5] Bronowitz R., Teply M. Torsion theories of simple type. Journal of Pure and Applied Algebra 3, 329-336 (1973).

[6] Dickson S. E. A torsion theory for abelian categories. Trans. Amer. Math. Soc. 121, 223-235 (1966).

[7] Dlab V. A characterization of perfect rings. Pacific Journal of Mathematics 33, 79-88 (1970).

[8] Eilenberg S., Moore J.C. Foundations of Relative Homological Algebra. Memories of the American Mathematical Society, Number 55.

[9] Eilenberg S. Algebra Homológica. Anales del Instituto de Matemáticas, U.N.A.M. 1 p. 117-145 (1961).

[10] Golan J. Localization of noncommutative rings. Marcel Dekker (1975).

[11] Structure Sheaves over a noncommutative ring. Lecture notes in Mathematics.Marcel Dekker (1980).

[12] Torsion Theories. To appear (preliminary version).

[13] Jans J. Some aspects of torsion. Pacific Journal Math. 15, p. 1249-1259 (1965).

[14] Kasch F. Modules and Rings. Academic Press (1982).

[15] Mac Lane S. Homology . Springer Verlag (1963).

[16] Ohtake K. Colocalization and Localization. Journal of Pure and Applied Algebra. p. 217-241 (1977).

[17] Raggi F, Ríos J. Algunas relaciones entre anillos semiartinianos y la teoría de torsión de Goldie. Anales del Instituto de Matemáticas, U.N.A.M. Vol. 23 p. 41-54 (1983).

[18] Proper classes associated to torsion theories. To appear in Comm. in Algebra (1986).

[19] Sublattices of R-tors associated to proper classes. To appear in Comm. in Algebra (1986).

[20] Rotman J. An Introduction to Homological Algebra. Academic Press (1979).

[21] Stenström B. Rings of Quotients. Springer Verlag (1975).

[22] Teply M. Homological dimension and splitting torsion theories. Pacific Journal of Mathematics 34, p. 193-205 (1970).

[23] Codivisible and projective covers. Communications in Algebra 1, p. 23-38 (1974).