UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

AMPLIFICACION SISMICA EN DEPOSITOS DE SUELO BLANDO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A :

MARTIN APANTENCO LOPEZ

MEXICO, D. F. 1987

Universidad Nacional Autónoma

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN.
COORDINACION DEL PROGRAMA DE INGENIERIA.

CI/132/1987.

SR. MARTIN APANTENCO LOPEZ
Alumno de la carrera de Ingeniería Civil.
P r e s e n t e.

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha 30 de septiembre de 1985, me complace notificarle que esta Coordinación tuvo a bien asignarle el siguiente tema de tesis: "Amplificación Sísmica en Depósitos de Suelo Blando", el cual se desarrollará como sigue:

- Introducción.
- I.- Propagación de Ondas Elásticas.
- II.- Modelos Unidimensionales.
- III.- Modelos Bidimensionales.
- IV.- Ejemplos de Aplicación
- Conclusiones.
- Referencias.

Así mismo, fue designado como Asesor de tesis el señor Dr. Francisco J. Sánchez-Sesma.

Ruego a usted tomar nota, que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar examen profesional, así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado. Esta comunicación, deberá imprimirse en el interior de la tesis.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Acatlán, Edo. de Méx., a 10 de agosto de 1987.

ING. HERMENEGILDO ARCOS SERRANO
Coordinador del Programa de
Ingeniería.

HAS'PGG/rcm.

INDICE

	INTRODUCCION	1
I.	PROPAGACION DE ONDAS ELASTICAS.	6
II.	MODELOS UNIDIMENSIONALES.	22
II.1	Método de Haskell.	31
III.	MODELOS BIDIMENSIONALES.	39
IV.	EJEMPLOS DE APLICACION.	53
	CONCLUSIONES	66
	AGRADECIMIENTOS	68
	REFERENCIAS	69

INTRODUCCION

Los temblores han aterrorizado a la humanidad y han sido variados los intentos para explicarlos. Demócrito, por ejemplo los atribuía al agua de la lluvia la que al filtrarse en la tierra provocaría grandes movimientos subterraneos. Hace más de dos mil años (por el 56 A.C) Tito Lucrecio Caro, en versos memorables relacionaba los temblores de la Tierra *"con fuertes corrientes invisibles bajo su costra"*.

Por muchos años se consideró a los temblores como instrumentos divinos para castigar a la humanidad por sus pecados. Paradójicamente el temblor de Lisboa del primero de noviembre de 1755 motivó a Voltaire para escribir una fina sátira contra el fanatismo religioso pues miles de creyentes murieron sepultados en los templos. Hoy sabemos que los versos de Lucrecio tienen base en una teoría científica desarrollada en la segunda mitad de este siglo: la tectónica de placas. De acuerdo con esta teoría la superficie del planeta está formada por placas relativamente delgadas y en movimiento debido a los flujos convectivos que existen en el interior de la tierra. La mayoría de los temblores se originan en los desplazamientos relativos de esas placas. Así los movimientos sísmicos resultan de la liberación repéntina de la energía de deformación acumulada en ciertas zonas. Las fuentes sísmicas suelen encontrarse en el manto (focos profundos) o en lechos rocosos de la corteza (focos superficiales).

La energía irradiada por la fuente se distribuye en la tierra en forma de ondas primarias, con desplazamientos de las partículas en la dirección de la propagación, y ondas secundarias en las que esos desplazamientos son perpendiculares a dicha dirección. Estas ondas son llamadas P y S, respectivamente.

Las amplitudes y formas de las ondas sísmicas generadas dependen del mecanismo focal y de la cantidad de energía liberada en la zona de ruptura. El mecanismo focal controla la manera en que las ondas son irradiadas en el espacio y en el tiempo. No obstante, las ondas sísmicas una vez emitidas por la fuente sufren modificaciones en cu trayecto que dependen de las propiedades mecánicas de los medios en que se propagan y del tamaño de las inhomogeneidades o irregularidades con que se encuentren.

Si los cambios de las propiedades en una interfase son grandes o si la dimensión de las irregularidades es comparable con la longitud de onda predominante de las ondas incidentes, se generarán cambios importantes en el movimiento debidos a la reflexión, refracción y difracción de las ondas.

Interesa entender la naturaleza de esos cambios porque pueden ocasionar grandes amplificaciones locales y variaciones significativas del movimiento del terreno en distancias relativamente pequeñas. Este efecto es de particular importancia en la respuesta sísmica de estructuras grandes como presas, puentes o líneas de trasmisión. Se trata de estructuras en las que los movimientos diferentes en los apoyos pueden ser muy peligrosos.

Existe evidencia del papel que juegan los efectos de las condiciones locales en estudios de la distribución espacial del daño en temblores.

Si bien el daño depende de la calidad de las construcciones, en muchos casos los daños severos están asociados a fenómenos de amplificación. Por ejemplo, la distribución de los daños en el temblor de Skopje, Yugoeslavia, del 26 de julio de 1963 (*Poceski, 1969*), la falla de tuberías enterradas durante el temblor de Miyagiken-Oki, Japón, del 12 de junio de 1978 (*Kubo e Isoyama, 1980*) y mas recientemente, los daños observados durante el temblor de Michoacán, México del 19 de septiembre de 1985, el cual causó una destrucción sin precedente en la ciudad de México ,donde las condiciones locales afectaron de manera importante la naturaleza de la respuesta del suelo (*Sánchez-Sesma et al., 1986*).

Para estudiar el fenómeno se han utilizado modelos de propagación unidimensional de ondas de cortante cuando la configuración del sitio en estudio está formada por estratos aproximadamente horizontales. Sin embargo el uso indiscriminado de modelos unidimensionales puede dar lugar a errores importantes cuando las irregularidades locales son significativas pues no se toma en cuenta la naturaleza física del problema.

Los temblores fuertes, áquellos de interés en Ingeniería Sismica, tienen componentes importantes en la banda de frecuencias de 0.1 Hz a 15 o 20 Hz. Por otra parte, las velocidades de propagación cerca de la superficie de la tierra varían de unos 200 m/s a casi 2 km/s; de manera que las correspondientes longitudes de onda caen en el rango de las decenas de metros a las decenas de kilómetros.

Las irregularidades geológicas y topográficas con dimensiones comparables con las longitudes de onda predominantes tendrán entonces, considerable influencia en el movimiento. La extensión y detalle con que deben estudiarse las condiciones locales podrá estimarse en términos de las longitudes de onda asociadas con los periodos de oscilación que sean más significativos para un análisis particular.

El problema de calcular el movimiento en la vecindad de una irregularidad topográfica o estratigráfica ante incidencia de ondas sismicas ha sido tratado como un problema de difracción de ondas elásticas. Se define como difracción a cualquier cambio en la trayectoria de las ondas que no puede describirse como reflexión o refracción. La mayoría de los estudios de difracción de ondas elásticas consideran configuraciones bidimensionales y solo algunos casos de incidencia de ondas SH admiten soluciones analíticas (en el dominio de la frecuencia). Si bien las soluciones bidimensionales son una aproximación, proporcionan información útil sobre la respuesta sismica de irregularidades; de hecho, algunos resultados preliminares de difracción tridimensional son similares a los obtenidos para dos dimensiones.

Los métodos que se han empleado para estudiar el problema son de varios tipos (de acuerdo con cada caso particular) y en algunos casos son de reciente desarrollo. Se ha empleado por ejemplo, el método de los elementos finitos, que permite una gran flexibilidad en el modelado de dominios irregulares y aun de materiales no lineales. Suele ser sin embargo, costoso y requiere precauciones especiales para tratar las fronteras del dominio y definir apropiadamente la excitación.

Los elementos finitos pueden combinarse con esquemas de dife-

rencias finitas en el tiempo o con solución en el dominio de la frecuencia.
Se han aplicado con éxito esquemas de diferencias finitas en el espacio y en el tiempo, sin embargo, algunas de las restricciones mencionadas para los elementos finitos limitan el uso generalizado de esta técnica.

Los métodos de frontera, basados en representaciones integrales y/o en expansiones en términos de familias completas de soluciones, están en desarrollo y es de esperarse que no sufran las desventajas de otras técnicas; en particular al tratar solo las fronteras se reduce en uno la dimensionalidad del problema. Por ejemplo, se han aplicado formulaciones en términos de ecuaciones integrales para estudiar en dos dimensiones, la difracción de ondas con polarización horizontal (SH) por cañones de sección arbitraria (*Wong y Jennings, 1975; Sánchez-Sesma y Rosenblueth, 1979*) y por depósitos aluviales (*Sánchez-Sesma y Esquivel, 1979*).

Al tratar un depósito se idealiza este como una inclusión elástica en la superficie de un semiespacio. Para este caso las trayectorias de integración están definidas fuera de la región de interés para evitar el tratamiento directo de las singularidades. Al discretizar el problema se obtiene un sistema de ecuaciones sobredeterminado, y una manera de resolverlo es a través de la minimización del error cuadrático medio.
El uso de formulaciones integrales ha permitido tratar el caso de un estrato sobre un medio semi-infinito (*Wong et al., 1977*).

Los casos de incidencia de ondas P, SV y Rayleigh son más complicados a causa del acoplamiento de las condiciones de frontera (*Sánchez-Sesma et al., 1985*). Para resolver este problema se han propuesto diversas técnicas. Para irregularidades pequeñas se ha usado el método de perturbaciones (*Herrera, 1964; Hudson, 1967; McIvor, 1969; Hudson y Boore, 1980*) así como expansiones asintóticas (*Sabina y Willis, 1977*). En topografías como cañones (*Sánchez-Sesma, 1978; Wong, 1982*) y valles aluviales (*Dravinski, 1982*) se ha aplicado un método de frontera que usa soluciones de fuentes lineales discretas de ondas P y SV localizadas fuera de la región de interés para construir los campos difractados. En este caso las condiciones de frontera se satisfacen sobre la irregularidad con un criterio de error cuadrático mínimo.

Hasta aquí, se han descrito de manera muy general algunos de los métodos usados para estudiar la influencia de las condiciones locales en la respuesta sísmica. En la mayoría de los casos la solución es compleja y su tratamiento riguroso suele ser difícil pues implica considerables dificultades analíticas y numéricas.

En este trabajo se estudia el problema de amplificación sísmica en depósitos de suelo blando. Se presentan conceptos básicos y se hacen hipótesis simplificadoras que permitirán analizar algunos problemas con el uso de modelos que, siendo sencillos, ayuden a la comprensión de este importante fenómeno.

Primeramente se presenta una revisión de los conceptos básicos sobre propagación de ondas elásticas así como las ecuaciones e hipótesis usadas para describir y resolver el problema. En seguida se estudian las soluciones para modelos de depósitos unidimensionales con base rígida y deformable para un movimiento de excitación prescrito. Con base en estos resultados, se describe el método matricial de Haskell, usado comunmente cuando se tienen medios estratificados, para calcular funciones de transferencia. En este método se parte de la existencia de una matriz propagadora en cada estrato, expresando el campo de desplazamientos y esfuerzos en función de sus valores en las fronteras del estrato.

Se presenta también un método geométrico de reciente desarrollo para incidencia de ondas SH en depósitos bidimensionales de formas geométricas sencillas. El método permite manejar base rígida o deformable y en este caso, diferentes ángulos de la onda incidente. La solución es de relativa sencillez gracias a las consideraciones e hipótesis que se hacen. De modo que la obtención de resultados es más sencilla y a un costo menor comparado con el que se tendría al usar métodos más sofisticados. El método muestra una aproximación satisfactoria al comparar sismogramas sintéticos con resultados obtenidos con otros métodos como el de elementos finitos, el de diferencias finitas y el de números de onda discretos.

I. PROPAGACION DE ONDAS ELASTICAS.

Las ondas sísmicas se propagan desde la fuente de acuerdo con las propiedades mecánicas del medio en que viajan y, naturalmente, dependen también de las características de la fuente.

La descripción del fenómeno ha podido hacerse recurriendo a simplificaciones e hipótesis que llevan a la formulación de modelos que representan los aspectos más importantes de la propagación de ondas en la tierra. Es usual aceptar que la tierra es un medio elástico lineal, homogéneo e isótropo. En un medio de esta naturaleza con extensión ilimitada se pueden propagar dos tipos de ondas elásticas: las ondas P primarias o de compresión y las ondas S secundarias o de cortante. Las primeras se propagan con mayor velocidad y por eso se les suele llamar primarias. Existen diversas soluciones para las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de propagación. Así para una fuente puntual se podría hablar de ondas esféricas, que a grandes distancias de la fuente se pueden representar como ondas planas. En algunos casos se modela el problema de propagación como bidimensional y las soluciones para una fuente se dan en términos de ondas cilíndricas, que también a grandes distancias son aproximadamente planas. La existencia de una superficie libre introduce reflexiones de las ondas al llegar a esta. Para estudiar la naturaleza de las reflexiones dicha superficie debe considerarse libre de esfuerzos. Dado que a grandes distancias de la fuente las ondas pueden suponerse planas y que para las longitudes de onda de interés la curvatura de la tierra es, comparativamente, pequeña se estudiará el problema de reflexión de ondas planas por la superficie de un medio elástico.

Consideremos el elemento diferencial de volumen de la Fig.1, sujeto a un estado de esfuerzos definido por el tensor σ_{ij}, donde i,j = x,y,z (o bien i,j = 1,2,3 , además las coordenadas x,y,z se pueden intercambiar con x_1, x_2, x_3, respectivamente).

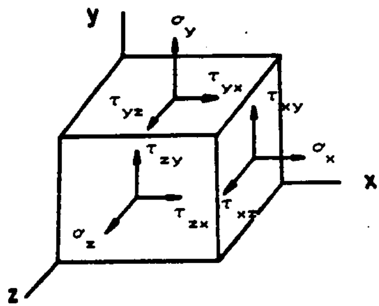


Fig. 1 Componentes de esfuerzo.

Las ecuaciones de equilibrio dinámico (segunda ley de Newton en forma compacta) se pueden escribir mediante

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad , \quad i=1,2,3 \qquad \text{(I.1)}$$

donde u = vector de desplazamientos (u_1= u, u_2= v, u_3= w), ρ = densidad del medio y t = tiempo.

Los componentes de esfuerzo se expresan mediante la ley de Hooke generalizada (*ver p.ej., Fung, 1956*)

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{I.2}$$

donde

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \tag{I.3}$$

es el tensor de deformaciones, $e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ representa el cambio de volumen del elemento considerado, δ_{ij} es la "delta de Kronecker" ($=1$, para $i=j$; $=0$, para $i \neq j$), λ y μ son las constantes de Lamé definidas por

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

donde, E = módulo de Young (o de elasticidad) y ν = relación de Poisson.

Haciendo sustituciones y considerando las definiciones anteriores, las ecs I.1 se pueden escribir en la forma

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] + (\lambda+\mu)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right] = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] + (\lambda+\mu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\right] = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + (\lambda+\mu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right] = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

donde u,v,w = desplazamientos en las direcciones x,y,z, respectivamente; ρ = densidad del medio y t = tiempo. Estas ecuaciones pueden escribirse en forma compacta (ecuación de Navier) a través de operadores diferenciales

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\ u) + \mu\nabla^2 u = \rho u \qquad (I.5)$$

donde u = (u,v,w) = vector desplazamiento, ∇^2 = $(\delta^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$ = operador Laplaciano y $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/z)$ = operador gradiente.

Antes de considerar soluciones generales, veamos dos ejemplos simples para ilustrar las principales características de las ondas planas en un sólido elástico de extensión ilimitada.

Supóngase que $w\neq 0$, $u=v=0$ y que $w=w(z,t)$. Las ecs I.4 se reducen a la expresión

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (I.6)$$

una solución particular es

$$w = f(t-z/\alpha) + g(t+z/\alpha) \qquad (I.7)$$

donde $\alpha^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ y f,g son funciones de una sola variable que pueden describir una forma de onda arbitraria. Un simple análisis de los argumentos de f y g permite establecer que $f(t-z/\alpha)$ representa una onda que viaja en la dirección positiva de z con velocidad α y $g(t+z/\alpha)$ describe una onda en la dirección negativa. Debe notarse que $f(t-z/\alpha)$ puede representar una onda armónica estacionaria, $\exp[i\omega(t-z/\alpha)]$ donde ω = frecuencia circular del movimiento. La ec I.7 representa ondas de compresión o P.

Un segundo ejemplo se obtiene si se supone que $u=w=0$ y que $v=v(z,t)$. De las ecs I.4 se obtiene que

$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (I.8)$$

y la solución tiene la misma forma que la ec I.7 pero representa ondas que viajan con una velocidad $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$.

Debe notarse que el movimiento es perpendicular a la dirección de avance. Las soluciones de la ec I.8 representan ondas de cortante, sin cambio de volumen.

Una solución más general de las ecs I.4 se obtiene por medio de potenciales de desplazamiento. Si el vector desplazamiento se expresa como

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla\times\psi \qquad \text{con} \qquad \nabla\cdot\psi = 0 \qquad (I.9)$$

la ec I.9 representa una solución de la ec I.5 (o de la ec I.4 en coordenadas rectangulares) si los potenciales ϕ y ψ satisfacen las ecuaciones

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \qquad (I.10)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad (I.11)$$

Así, por ejemplo, una solución de la ec I.10 que representa una onda plana de compresión que viaja en una dirección arbitraria está dada por

$$\phi = f(t - \frac{xl+ym+zn}{\alpha}) \qquad (I.12)$$

donde l,m,n =cosenos directores.
Si $\mathbf{r} = (x,y,z)$ y $\mathbf{n} = (l,m,n)$, la ec I.12 puede escribirse como

$$\phi = f(t-\mathbf{r}\ \mathbf{n}/\alpha) \qquad (I.13)$$

Es evidente que soluciones similares pueden encontrarse para los tres componentes del potencial vectorial y representarían ondas de cortante viajando con una velocidad β.

Los potenciales de desplazamiento ϕ y ψ permiten especificar ondas planas de compresión y cortante respectivamente, que viajen en cualquier dirección y con cualquier forma. Además, dado el caracter lineal de las ecuaciones involucradas, cualquier combinación de soluciones sigue satisfaciendo las ecuaciones de movimiento, este hecho se hace evidente cuando se hace necesario seleccionar una combinación particular de ondas planas que satisfaga una cierta condición de frontera o que describa una fuente.

Consideremos por ejemplo, que la frontera libre de un semiespacio elástico es el plano xy (Fig.2). Suponiendo que las direcciones de avance de las ondas están en el plano xz.

Para describir el movimiento debido a ondas de cortante se se introduce el concepto de planos de polarización.

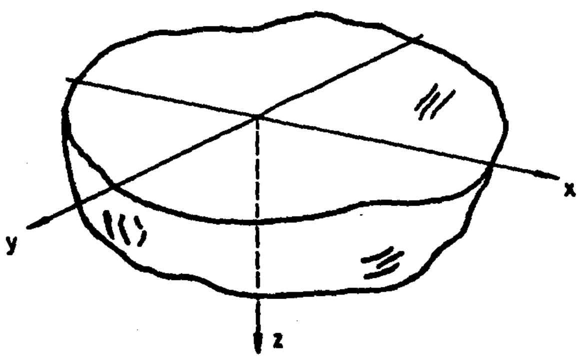


Fig. 2. Semiespacio elástico.

El movimiento se descompone en dirección de la coordenada y (ondas polarizadas horizontalmente o SH) y en la dirección perpendicular al avance en el plano vertical xz (ondas polarizadas verticalmente o SV). Esto se ilustra en la figura 3.

En la propagación de ondas P el movimiento es en la dirección de avance de la onda. Según muestra la misma figura.

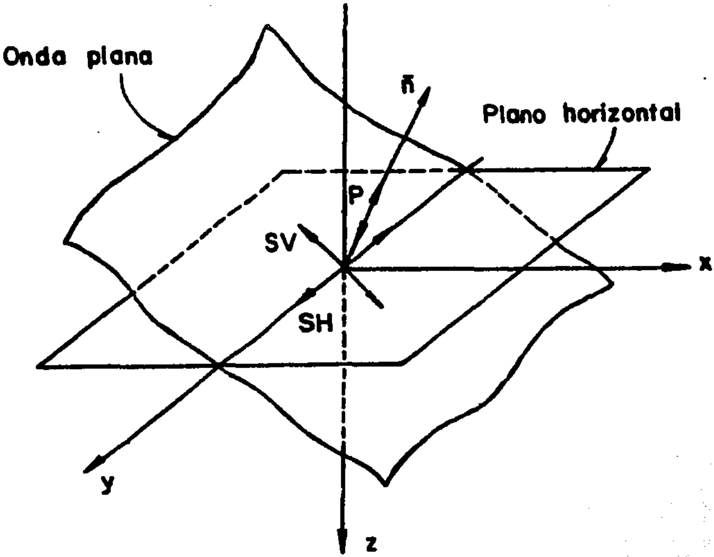


Fig. 3 Nomenclatura para ondas planas.

La propagación de ondas SH está gobernada por la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad \text{(I.14)}$$

Que es precisamente la ecuación de onda en dos dimensiones. Puede demostrarse que, en la reflexión de una onda SH plana por una frontera libre, el ángulo de incidencia en igual al ángulo de reflexión y la onda reflejada mantiene la forma de la onda incidente. Si la onda incidente está dada por

$$v^{(i)} = f(t + \frac{z\cos\gamma - x\,\mathrm{sen}\gamma}{\beta}) \qquad \text{(I.15)}$$

la onda reflejada está dada simplemente por

$$v^{(r)} = f(t - \frac{z\cos\gamma + x\,\mathrm{sen}\gamma}{\beta}) \qquad (I.16)$$

aquí γ = ángulo de incidencia. Puede verificarse que $v = v^{(i)} + v^{(r)}$ satisface la ec I.14 y la condición de que el plano $z = 0$ esté libre de esfuerzo pues los únicos esfuerzos relevantes están dados por

$$\tau_{zy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \tau_{yx} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (I.17)$$

Debe observarse que en estas condiciones el movimiento en z = 0, la superficie libre, se puede escribir como

$$v\Big|_{z=0} = 2\, f(t - \frac{x\,\mathrm{sen}\gamma}{\beta}) \qquad (I.18)$$

por lo que el factor de amplificación es dos.

En la propagación de ondas P y SV el movimiento está alojado en planos paralelos al plano xz. En èste caso las ecuaciones de onda son respectivamente

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \qquad (I.19)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad (I.20)$$

Consideremos la incidencia de ondas P y SV, tal como se muestra en las figuras 4a y 4b.

Mediante la técnica de separación de variables se puede demostrar que las soluciones de las ecs I.19 e I.20 son de la forma

$$\phi = A_o e^{Mz}\, e^{Lx}\, e^{\Omega t} \tag{I.21}$$

$$\psi = B_o e^{Kz}\, e^{Lx}\, e^{\Omega t} \tag{I.22}$$

donde

$$M^2 + L^2 = \frac{\Omega^2}{\alpha^2} \qquad y \qquad K^2 + L^2 = \frac{\Omega^2}{\beta^2} \tag{I.23}$$

haciendo que

$$l = \omega/c, \qquad \Omega = i\omega \qquad y \qquad L = -il \tag{I.24}$$

se garantiza que los potenciales sean finitos.

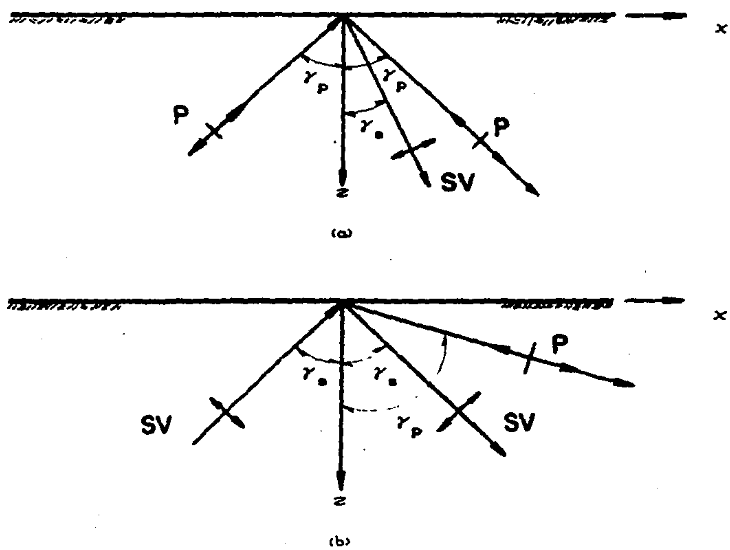


Fig. 4 Incidencia de ondas P y SV.

Además se observa que el producto

$$e^{-ilx}e^{i\omega t} = e^{i\omega(t-x/c)} \qquad (I.25)$$

representa una onda armónica que viaja en la dirección de x con una velocidad de fase c. En términos de los ángulos de la Fig.4 se tiene que

$$c = \frac{\alpha}{sen\gamma_p} = \frac{\beta}{sen\gamma_s} \qquad (I.26)$$

Con estas definiciones M y K deben ser reales o imaginarios pues, de las ecs I.23 y I.24, se tiene que

$$M^2 = l^2 - \omega^2/\alpha^2 = \omega^2(1/c^2 - 1/\alpha^2) \qquad (I.27)$$

y

$$K^2 = l^2 - \omega^2/\beta^2 = \omega^2(1/c^2 - 1/\beta^2) \qquad (I.28)$$

Así, para $\beta < \alpha < |c|$, M y K son imaginarios; para $\beta < |c| < \alpha$, M es real y K imaginario; para $|c| < \beta < \alpha$, M y K son reales.

Para el primer caso, $\beta < \alpha < |c|$,se tienen los potenciales

$$\phi = (A_1 e^{imz} + A_2 e^{-imz})e^{-ilx}e^{i\omega t} \qquad (I.29)$$

$$\psi = (B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz})e^{-ilx}e^{i\omega t} \qquad (I.30)$$

donde $l = \omega/c$, $m = \omega(1/\alpha^2 - 1/c^2)^{1/2}$ y $k = \omega(1/\beta^2 - 1/c^2)^{1/2}$.
Si $B_1 = 0$ se tiene el caso mostrado en la Fig 4(a), si $A_1 = 0$ se tendrá el caso de la Fig 4(b).
Los esfuerzos que al valuarse en la superficie deben anularse son

$$\sigma_x = \lambda\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) + 2\mu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right) \qquad (I.31)$$

$$\tau_{zx} = \mu\left[2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right] \tag{I.32}$$

ya que $\tau_{zy} = 0$. Sustituyendo las ecs I.29 y I.30 en las ecs I.31 y I.32, haciendo que $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ en $z = 0$ y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtiene

a) Para $B_1 = 0$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4\cot\gamma_p\cot\gamma_s - (\cot^2\gamma_s - 1)^2}{4\cot\gamma_p\cot\gamma_s + (\cot^2\gamma_s - 1)^2} \tag{I.33}$$

$$\frac{B_2}{A_1} = \frac{4\cot\gamma_p(\cot^2\gamma_s - 1)}{4\cot\gamma_p\cot\gamma_s + (\cot^2\gamma_s - 1)^2} \tag{I.34}$$

donde γ_p = ángulo de incidencia y reflexión de la onda P y γ_s = ángulo de incidencia y reflexión de la onda SV.

b) Para $A_1 = 0$

$$\frac{A_2}{B_1} = -\frac{4\cot\gamma_s(\cot^2\gamma_s - 1)}{4\cot\gamma_p\cot\gamma_s + (\cot^2\gamma_s - 1)^2} \tag{I.35}$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{4\cot\gamma_p\cot\gamma_s - (\cot^2\gamma_s - 1)^2}{4\cot\gamma_p\cot\gamma_s + (\cot^2\gamma_s - 1)^2} \tag{I.36}$$

La incidencia de una onda P puede variar de vertical (c infinita) a horizontal ($c = \alpha$) y las ecs I.33 y I.34 permiten calcular las amplitudes de los potenciales de las ondas reflejadas. Para la incidencia de una onda SV se tiene que $0 \leq \gamma_e \leq \mathrm{sen}^{-1}(\beta/\alpha)$.

Para el segundo caso, $\beta < |c| < \alpha$, se tienen los potenciales

$$\phi = (A_1 e^{mz} + A_2 e^{-mz}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \qquad (I.37)$$

$$\psi = (B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz}) e^{ilx} e^{i\omega t} \qquad (I.38)$$

donde $l = \omega/c$, $m = |\omega|(1/c^2 - 1/\alpha^2)^{1/2}$ y $k = \omega(1/\beta^2 - 1/c^2)^{1/2}$.

Para evitar que ϕ crezca indefinidamente al aumentar z se hace que $A_1 = 0$ por lo que no hay onda P incidente en este caso. Mediante un proceso análogo al del caso anterior se obtiene que

$$\frac{A_2}{B_1} = - \frac{4\cot\gamma_e(\cot^2\gamma_e - 1)}{(\cot^2\gamma_e - 1)^2 - 4i(1 - c^2/\alpha^2)^{1/2} \cot\gamma_e \, sgn\omega} \qquad (I.39)$$

$$\frac{B_2}{B_1} = - \frac{(\cot^2\gamma_e - 1)^2 + 4i(1 - c^2/\alpha^2)^{1/2} \cot\gamma_e \, sgn\omega}{(\cot^2\gamma_e - 1)^2 - 4i(1 - c^2/\alpha^2)^{1/2} \cot\gamma_e \, sgn\omega} \qquad (I.40)$$

donde $sgn\omega = (-1$ si $\omega < 0$ o 1 si $\omega > 1)$. En este caso, la incidencia de ondas SV con ángulos de incidencia mayores que $\mathrm{sen}^{-1}(\beta/\alpha)$ genera ondas P no homogéneas que se atenuan con la profundidad.

Para el tercer caso, $|c| < \beta < \alpha$, se tiene que

$$\phi = A_2 e^{-mz} e^{-ilx} e^{i\omega t} \qquad (I.41)$$

$$\psi = B_2 e^{-kz} e^{-ilx} e^{i\omega t} \qquad (I.42)$$

donde $m = |\omega|(1/c^2 - 1/\alpha^2)^{1/2}$ y $k = |\omega|(1/c^2 - 1/\beta^2)^{1/2}$. Se han eliminado A_1 y B_1 pues no representan ondas incidentes con potenciales finitos. Las ecuaciones de esfuerzos nulos en $z = 0$ conducen a

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{2i(1 - c^2/\beta^2)^{1/2} sgn\omega}{2 - c^2/\beta^2} \qquad (I.43)$$

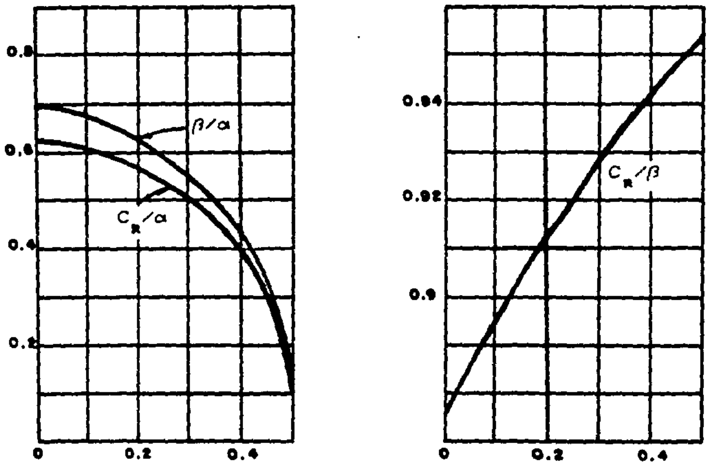
$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{2 - c^2/\beta^2}{2i(1 - c^2/\alpha^2)^{1/2}\, sgn\omega} \qquad (I.44)$$

como las ecs I.43 y I.44 deben ser iguales se obtiene que la velocidad de fase, c, debe satisfacer la siguiente ecuación

$$(2 - c^2/\beta^2)^2 - 4(1 - c^2/\alpha^2)^{1/2}(1 - c^2/\beta^2)^{1/2} = 0 \qquad (I.45)$$

La raíz real de esta ecuación, C_R, encontrada por vez primera por Rayleigh, da la velocidad de las llamadas ondas de Rayleigh, (Fig.5).

Las ondas de Rayleigh son ondas superficiales y debido a ello sufren menor atenuación geométrica. Puede demostrarse que el movimiento generado por estas ondas hace que las partículas describan trayectorias elípticas con ciclos retrógrados, a diferencia de los ciclos progresivos que se presentan en las ondas superficiales en líquidos (Fig.6).



Relaciones β/α , C_R/α y C_R/β como funciones del módulo de Poisson ν.

Fig. 5 Valores de C_R para distintos valores de ν.

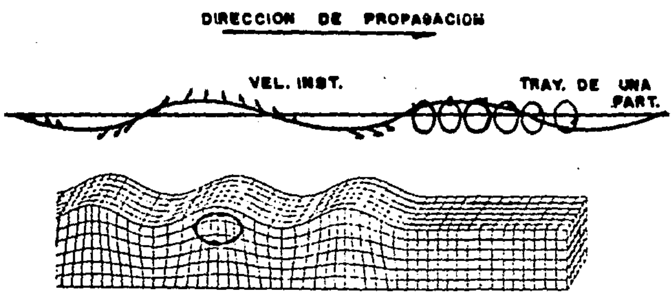


Fig. 6 Ondas de Rayleigh.

Se puede demostrar que la propagación de ondas superficiales (que se atenúen con la profundidad) del tipo SH es imposible en un semiespacio homogéneo. No obstante, estas ondas se observan en la superficie de la tierra. Love encontró que una teoría suficiente para explicarlas puede desarrollarse si se tiene un estrato homogéneo de espesor uniforme H con propiedades μ_1 y β_1 sobre un semiespacio de propiedades μ_2 y β_2 (Fig.7). Supóngase que los desplazamientos son independientes de la coordenada y, es decir, $v = v(x,z,t)$ y además que la variación con el tiempo está dada por $\exp(i\omega t)$. El plano $z = -H$ representa la superficie libre. Las ecuaciones de movimiento (ecsI.4) se reducen a

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + k_1^2 v_1 = 0 \qquad \text{(I.46)}$$

para el estrato y

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + k_2^2 v_2 = 0 \qquad \text{(I.47)}$$

para el semiespacio, donde $k_j = \omega/\beta_j$, con $j = 1,2$.
Haciendo uso de soluciones del tipo de las ecs I.21 y I.22

$$v_1 = (Ae^{-k_1\gamma_1 z} + Be^{k_1\gamma_1 z})e^{ik_1(x-ct)} \qquad \text{(I.48)}$$

$$v_2 = Ce^{-k_2\gamma_2 z}e^{ik_2(x-ct)} \qquad \text{(I.49)}$$

donde $\gamma_1 = (1 - c^2/\beta_1^2)^{1/2}$ y $\gamma_2 = (1 - c^2/\beta_2^2)^{1/2}$. Se observa que si $c < \beta_2$, $v_2 \to 0$ cuando $z \to \infty$.

Con las condiciones de frontera $v_1 = v_2$ y $(\tau_{zy})_1 = (\tau_{zy})_2$ en $z = 0$ y que $\tau_{zy} = 0$ en $z = -H$, se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo en A, B y C.

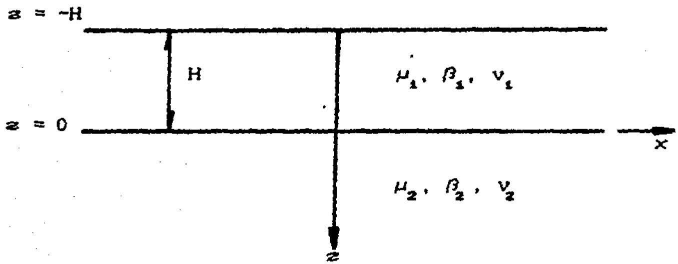


Fig. 7 Notación para un estrato sobre un semiespacio elástico.

Para obtener una solución diferente de cero el determinante debe anularse. Así, se tiene que

$$tank\gamma_1 H = i \frac{\mu_2\gamma_2}{\mu_1\gamma_1} = \frac{\mu_2(1 - c^2/\beta_2^2)^{1/2}}{\mu_1 (c^2/\beta_1^2 - 1)^{1/2}} \qquad (I.50)$$

es la ecuación para obtener la velocidad de las ondas de Love.

Si $\beta_1 < \beta_2$ la ec I.50 da valores reales de c, en el intervalo $\beta_1 < c < \beta_2$, que dependen de k y H. Pueden obtenerse ondas de Love de forma general superponiendo ondas de Love del tipo de la ec I.48 con diferentes k.

La dependencia de la velocidad de propagación con la frecuencia ocasiona el fenómeno de dispersión y, en general, este es el caso en medios estratificados.

II. MODELOS UNIDIMENSIONALES.

Considérese el modelo unidimensional que se muestra en la figura 8. Se trata de un estrato uniforme de espesor H apoyado en base rígida con movimiento prescrito en la dirección x. En estas condiciones $v = w = 0$ y $u = u(z,t)$.

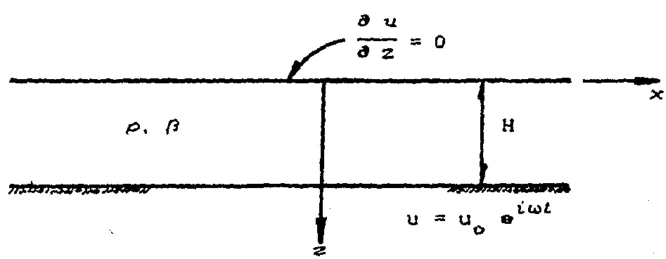


Fig. 8 Modelo unidimensional

De las ecs I.4 se obtiene que

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{(II.1)}$$

Se puede demostrar que el movimiento en el estrato, solución de la ec II.1 esta dado por

$$u(z,t) = u_o \frac{\cos kz}{\cos kH} \exp(i\omega t) \qquad \text{(II.2)}$$

donde $i = \sqrt{-1}$, $k = \omega/\beta$ y $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$.

Cuando el desplazamiento en la base $z = H$ está dado por $u = u_o \exp(i\omega t)$ con la condición de frontera adicional de tracciones nulas en la superficie ($z = 0$).

$$\mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

Mediante el método de separación de variables se puede resolver la ec II.1 de la siguiente manera: sea u el producto de dos funciones

$$u(z,t) = Z(z)\ T(t) \qquad \text{(II.3)}$$

donde $Z(z)$ y $T(t)$ son funciones exclusivamente de z y t, respectivamente. Derivando dos veces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = Z''(z)T(t) = Z''\ T$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Z(z)T''(t) = Z\ T''$$

sustituyendo en la ec II.1 con $1/\beta^2 = \rho/\mu$

$$Z''\,T = \frac{1}{\beta^2}\,Z\,T''$$

dividiendo por $Z(z)T(t)$

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{1}{\beta^2}\,\frac{T''}{T} = \eta$$

para que se describa un movimiento armónico, se debe cumplir que $\eta < 0$; si hacemos $\eta = -k^2$, entonces las ecuaciones diferenciales que resultan son

$$Z'' = -k^2\,Z$$

$$T'' = -(k\beta)^2\,T$$

cuyas soluciones están dadas por

$$Z = A\,\cos kz + B\,\operatorname{sen} kz$$

$$T = C\,\cos k\beta t + D\,\operatorname{sen} k\beta t$$

sustituyendo en la ecuación II.3 obtenemos

$$u(z,t) = (A\,\cos kz + B\,\operatorname{sen} kz)(C\,\cos k\beta t + D\,\operatorname{sen} k\beta t) \qquad \text{(II.4)}$$

aplicando condiciones de frontera

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = (-Ak\,\operatorname{sen} 0 + Bk\,\cos 0)(C\,\cos k\beta t + D\,\operatorname{sen} k\beta t) = 0$$

$$Bk(C\,\cos k\beta t + D\,\operatorname{sen} k\beta t) = 0$$

entonces observamos que $B = 0$, además en $z = H$, $u = u_o e^{i\omega t}$

$$u(H,t) = A\,\cos kH(C\,\cos k\beta t + D\,\operatorname{sen} k\beta t) = u_o e^{i\omega t}$$

haciendo que $\omega = k\beta$, $C = 1$ y $D = i$

$$u(H,t) = A \cos kH(\cos\omega t + i\ \mathrm{sen}\,\omega t) = u_o e^{i\omega t}$$

$$A = \frac{u_o}{\cos kH}$$

sustituyendo en la ecuación II.4

$$u(z,t) = \frac{u_o}{\cos kH} \cos kz\ (\cos\omega t + i\ \mathrm{sen}\,\omega t)$$

que es equivalente a escribir

$$u(z,t) = u_o \frac{\cos kz}{\cos kH} \exp(i\omega t) \qquad (II.2)$$

la cual es solución de la ec II.1. Evaluando el movimiento en $z = 0$, la superficie libre, se obtiene la gráfica mostrada en la siguiente figura

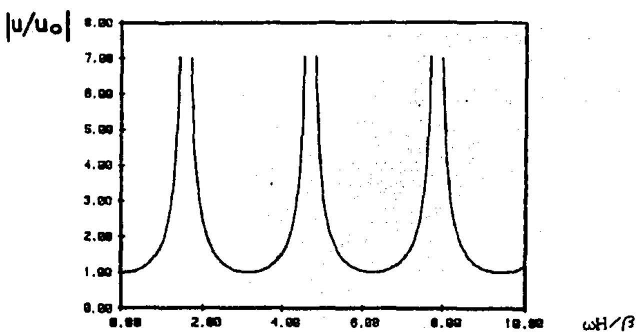


Fig. 9 Gráfica de la función de transferencia.

Consideremos ahora un problema unidimensional de un estrato apoyado sobre un semiespacio, con las características y propiedades mostradas en la Fig.10

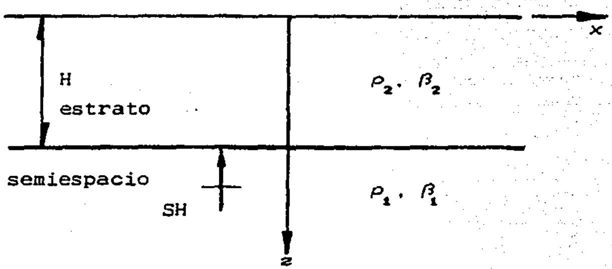


Fig. 10 **Estrato apoyado sobre un semiespacio con diferentes propiedades mecánicas.**

La suma de las ondas incidente y reflejada da el campo de desplazamiento en el semiespacio, esto es

$$u^{(1)} = u^{(i)} + u^{(r)} \tag{II.5}$$

donde

$$u^{(i)} = \frac{u_o}{2}\exp[i\omega(t + \frac{z}{\beta_1} - \frac{H}{\beta_1})] \ ,$$

$$u^{(r)} = B\exp[i\omega(t - \frac{z}{\beta_1} + \frac{H}{\beta_1})] \tag{II.6}$$

y B = constante por determinar. Por otra parte, en el estrato se supone que

$$u^{(2)} = A\cos\left[\frac{\omega z}{\beta_2}\right]\exp(i\omega t) = \frac{A}{2}\left[\exp\left[\frac{i\omega z}{\beta_2}\right] + \exp\left[-\frac{i\omega z}{\beta_2}\right]\right]\exp(i\omega t)$$

y esta solución (ec. II.7) cumple con la condición de frontera libre de esfuerzos en $z = 0$. Las constantes A y B se pueden determinar a partir de las condiciones de frontera de continuidad de desplazamientos y tracciones respectivamente dadas por

$$u^{(2)}\Big|_{z=H} = u^{(1)}\Big|_{z=H} \qquad \text{(II.8)}$$

$$\mu_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z}\Bigg|_{z=H} = \mu_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}\Bigg|_{z=H} \qquad \text{(II.9)}$$

evaluando la primera condición, ec II.8 con las ecs II.6 y II.7 para $z = H$, se tiene

$$A \cos\left(\frac{\omega H}{\beta_2}\right) \exp(i\omega t) = \frac{u_o}{2} \exp(i\omega t) + B \exp(i\omega t)$$

haciendo $k_j = \omega/\beta_j$ y $\beta_j = \sqrt{\mu_j / \rho_j}$, con j = 1,2

$$A \cos k_2 H = u_o/2 + B \qquad \text{(II.10)}$$

del mismo modo, con la segunda condición, ec II.9, se tiene

$$-A\left[\mu_2 k_2\right] sen(k_2 H)\, e^{i\omega t} = \mu_1 \left[u_o/2\right] i k_1 e^{i\omega t} - \mu_1 B i k_1 e^{i\omega t}$$

$$A\left[\mu_2/\mu_1\right] k_2 sen(k_2 H) + \left[u_o k_1/2 - B k_1\right] i = 0 \qquad \text{(II.11)}$$

sea $\mu_2/\mu_1 = \tilde{\mu}_2$. Así, se obtiene de las ecs II.10 y II.11

el siguiente sistema lineal de ecuaciones en A y B

$$\cos(k_2 H)\, A - B = u_o / 2$$

$$\tilde{\mu}_2 k_2 \operatorname{sen}(k_2 H)\, A - k_1 i B = -\frac{1}{2}\left[u_o k_1 i\right]$$

resolviendo el sistema y sustituyendo $k_j = \omega / \beta_j$ y $\mu_j = \beta_j^2 \rho_j$, con j = 1,2 se obtiene

$$A = \frac{u_o}{\cos k_2 H + i\left[\frac{\rho_2 \beta_2}{\rho_1 \beta_1}\right] \operatorname{sen} k_2 H} \qquad \text{(II.12)}$$

$$B = \frac{u_o}{2} \; \frac{\cos k_2 H - i\left[\frac{\rho_2 \beta_2}{\rho_1 \beta_1}\right] \operatorname{sen} k_2 H}{\cos k_2 H + i\left[\frac{\rho_2 \beta_2}{\rho_1 \beta_1}\right] \operatorname{sen} k_2 H} \qquad \text{(II.13)}$$

De la ec II.7 para $z = 0$ y $t = 0$ tenemos que

$$u^{(2)} = \frac{u_o}{\cos k_2 H + i\left[\frac{\rho_2 \beta_2}{\rho_1 \beta_1}\right] \operatorname{sen} k_2 H} \qquad \text{(II.14)}$$

que es la función de transferencia compleja. El módulo de la misma puede escribirse mediante

$$\left|\frac{u^{(2)}}{u_o}\right| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 k_2 H + \left[\frac{\rho_2 \beta_2}{\rho_1 \beta_1}\right]^2 \operatorname{sen}^2 k_2 H}} \qquad \text{(II.15)}$$

cuya gráfica se muestra en la Fig.11, para los casos de $\rho_2\beta_2/\ \rho_1\beta_1$ = 0.5, 0.25, 0.125 y 0.0625. Las máximas amplitudes en las frecuencias ($k_2H = \omega\ H/\beta_2$) de resonancia dependen de la relación de impedancias y están dadas por $\rho_1\beta_1/\ \rho_2\beta_2$. Es posible incluir amortiguamiento en la ec II.15 multiplicando β_2 por el factor $(1 + i/2Q)$ donde Q es el factor de calidad, de este modo, se tienen las gráficas mostradas en la Fig.12.

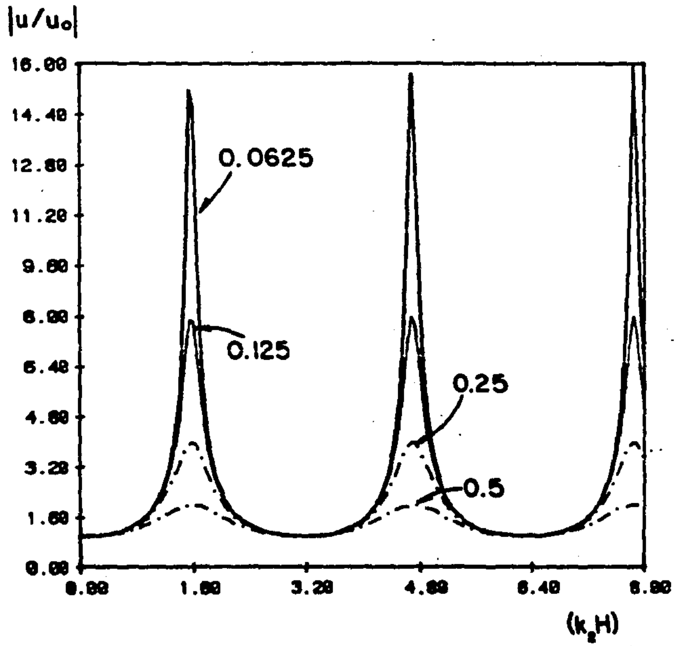


Fig. 11 Gráfica de la función de transferencia.

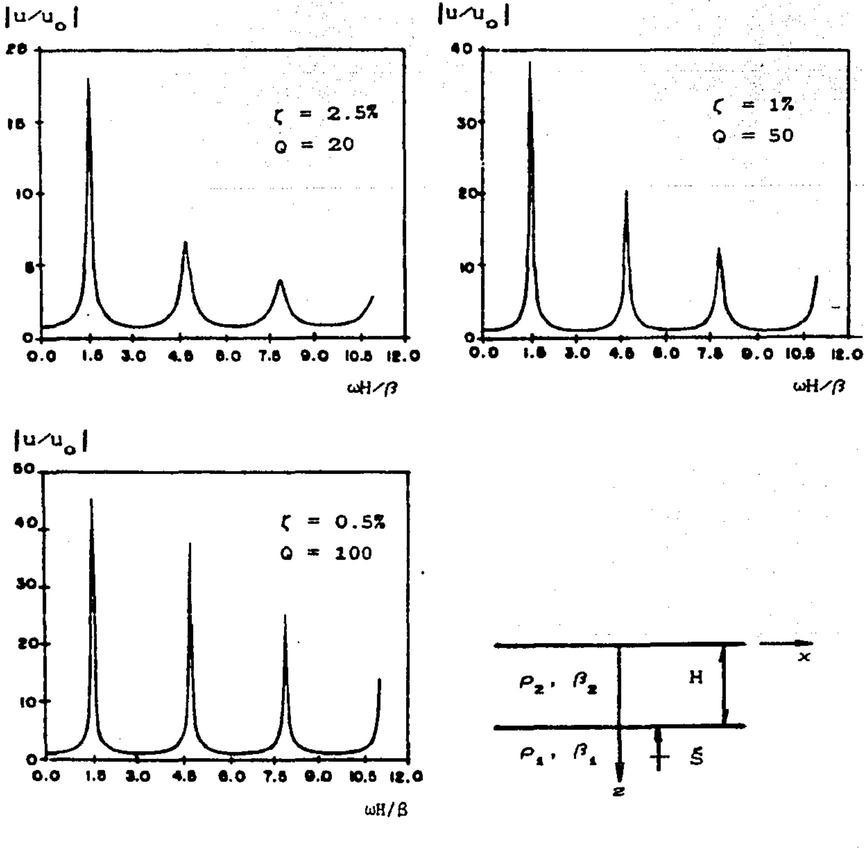


Fig. 12 Funciones de transferencia en el dominio de la frecuencia $(\omega H/\beta)$. El amortiguamiento está dado por $\zeta = 1/2Q$.

Para ilustrar la consistencia de la formulación de esta solución examinemos un caso extremo; si hacemos $\rho_2\beta_2 / \rho_1\beta_1 = 1$ (el estrato y el semiespacio con las mismas propiedades mecánicas), entonces la ec II.12 queda

$$A = \frac{u_o}{\cos k_2 H + i \operatorname{sen} k_2 H} = u_o \exp(-ik_2 H) \qquad \text{(II.16)}$$

sustituyendo este valor en la ec II.7

$$^{(2)} = u_o \cos\left(\frac{\omega z}{\beta_2}\right) \exp\left(-\frac{i\omega H}{\beta_2}\right) \exp(i\omega t)$$

$$u^{(2)} = \frac{u_o}{2} \left[\exp\left(\frac{i\omega z}{\beta_2}\right) + \exp\left(-\frac{i\omega H}{\beta_2}\right)\right] \exp\left[i\omega\left(t - \frac{H}{\beta_2}\right)\right]$$

$$u^{(2)} = \frac{u_o}{2} \left\{\exp\left[i\omega\left(t + \frac{z}{\beta_2} - \frac{H}{\beta_2}\right)\right] + \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{\beta_2} - \frac{H}{\beta_2}\right)\right]\right.$$

...(II.17)

El primer término del segundo miembro de la ec II.17 representa una onda armónica que viaja en la dirección positiva de z, mientras que el segundo término representa una onda propagándose en la dirección negativa.

II.1 Método de Haskell.

Como hemos visto en el problema anterior, las ecuaciones de movimiento son distintas en el estrato, pues de este al semiespacio varían las propiedades mecánicas. Del mismo modo para un medio estratificado ante incidencia de ondas elásticas se deben resolver las ecuaciones y satisfacer las condiciones de frontera en las interfases, si se desea conocer el movimiento en cualquier punto de la estratificación. Este problema se ha resuelto mediante un método matricial de considerable elegancia, el cual se ha hecho muy útil en sismología para estudiar ondas superficiales, conocido como método de Thomson-Haskell (o método de Haskell) y se basa en la existencia de una matriz propagadora en cada estrato mediante la cual el campo de desplazamientos y esfuerzos se expresa en función de los valores de estas cantidades en las fronteras del estrato.

Al imponer condiciones de continuidad, de superficie libre de esfuerzos y de compatibilidad con el tipo de ondas incidentes, se obtiene el campo de desplazamientos superficiales en función del ángulo de incidencia y la frecuencia de la excitación.

Con este método se trata de manera muy sencilla la propagación de ondas SH, y es posible estudiar también la parte SV para describir los efectos de polarización de las ondas de cortante en el movimiento de la superficie libre.

Consideremos entonces, la propagación de ondas de cortante armónicas con polarización horizontal (ondas SH) en un medio continuo, homogéneo e isótropo con el sistema de referencia de la figura 13.

El único componente de desplazamiento será llamado v y es perpendicular al plano xz. En este caso u = w = 0, y la ecuación de movimiento es

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} v = 0 \qquad \text{(II.18)}$$

Las condiciones de frontera en cada estrato son las de continuidad de desplazamientos y esfuerzos.

De este modo en $z = z_1$ el esfuerzo es

$$\sigma_{yz} = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=z_1} \qquad \text{(II.19)}$$

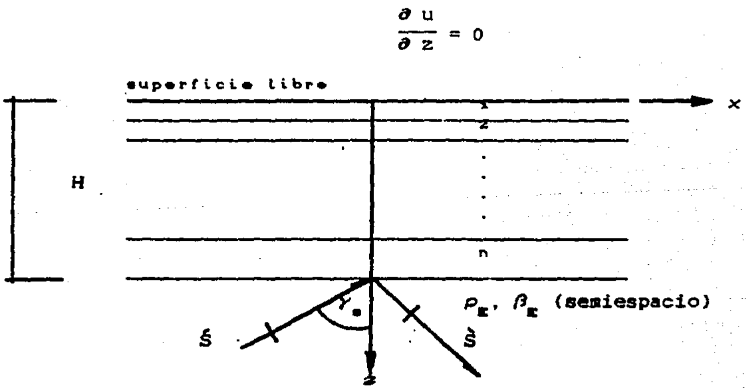


Fig. 12 Estratos paralelos sobre un semiespacio, bajo incidencia de ondas SH. γ_e ángulo de incidencia.

Si se define el vector desplazamiento-esfuerzo $\langle l \rangle_j$, $j=1,2$, mediante

$$v = l_1(k,z,\omega)\exp[i(-kx + \omega t)] \qquad \text{(II.20)}$$

$$\sigma_{yz} = l_2(k,z,\omega)\exp[i(-kx + \omega t)] \qquad \text{(II.21)}$$

Donde el exponencial es el factor de propagación horizontal. En efecto, k = número de onda horizontal = ω/c, donde c = velocidad de fase horizontal.

A partir de las ecuaciones 18, 19, 20 y 21 se puede demostrar que

$$\frac{dl_1}{dz} = \frac{1}{\mu} l_2 \qquad \text{(II.22)}$$

$$\frac{dl_2}{dz} = (k^2\mu - \omega^2\rho)l_1 \qquad \text{(II.23)}$$

siendo un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que se puede escribir en forma matricial

$$\frac{d}{dz}\begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\mu \\ k^2\mu - \omega^2\rho & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.24)}$$

La ec II.24 se denomina vector movimiento-esfuerzo para ondas planas y es de la forma

$$\frac{d}{dz}\,\mathbf{f} = [\mathbb{A}]\mathbf{f} \qquad \text{(II.25)}$$

Esta ecuación se puede resolver mediante la matriz propagadora, la cual se define como (*ver p.e., Aki y Richards, 1980*)

$$\mathbb{P}(z,z_0) = [\mathbb{I}] + \int_{z_0}^{z}[\mathbb{A}](\xi_1)d\xi_1 + \int_{z_0}^{z}[\mathbb{A}](\xi_1)\int_{z_0}^{\xi_1}[\mathbb{A}](\xi_2)d\xi_2 d\xi_1 + \ldots$$

$$\ldots\text{(II.26)}$$

donde $[\mathbb{I}]$ es la matriz unitaria de orden n. Puede verificarse por sustitución que $\mathbb{P}$ es solución de la ec 25. Además $\mathbb{P}(z_0,z_0) = [\mathbb{I}]$. De manera que

$$\mathbf{f}(z) = \mathbb{P}(z,z_0)\,\mathbf{f}(z_0) \qquad \text{(II.27)}$$

en donde se ve la propiedad más importante de la matriz propagadora. Así, conocido el vector desplazamiento-esfuerzo en z_0, se puede determinar en $z = z$.

Cuando $[\mathbb{A}]$ es constante independiente de z, como se supone dentro de un estrato, la matriz propagadora toma una forma muy simple

$$\mathbb{P}(z,z_o)=[\mathbb{I}]+ (z-z_o)[\mathbb{A}] + \frac{1}{2!}[\mathbb{A}]^2(z-z_o)^2 + \frac{1}{3!}[\mathbb{A}]^3(z-z_o)^3 +..$$

$$\mathbb{P}(z,z_o) = \exp\langle(z - z_o)[\mathbb{A}]\rangle \qquad \text{(II.28)}$$

Una función de matriz $[\mathbb{A}]$, cuadrada con eigenvalores distintos λ_k (k=1,2,...,n) puede expanderse por la fórmula de Sylvester (*ver p.e., C. Ray Wylie, 1982*)

$$F([\mathbb{A}]) = \sum_{k=1}^{n} F(\lambda_k) \frac{\prod_{r\neq k}([\mathbb{A}] - \lambda_r[\mathbb{I}])}{\prod_{r\neq k}(\lambda_k - \lambda_r)} \qquad \text{(II.29)}$$

Así para la ec 24,

$$\lambda_k^2 - (k^2\mu - \omega^2\rho) = 0$$

de la cual

$$\lambda_k = \pm i\sqrt{\omega^2/\beta^2 - k^2} = \pm i\eta$$

donde $\lambda_1 = i\eta$, $\lambda_2 = -i\eta$ y $\eta = \sqrt{\omega^2/\beta^2 - k^2}$.

Aplicando la fórmula de Sylvester

$$F([\mathbb{A}]) = [\exp(z-z_o)\lambda_1] \frac{[\mathbb{A}]-\lambda_2[\mathbb{I}]}{\lambda_1 - \lambda_2} + [\exp(z-z_o)\lambda_2] \frac{[\mathbb{A}]-\lambda_1[\mathbb{I}]}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Después de hacer el álgebra necesaria, se puede obtener la matriz propagadora

$$F([A]) = \begin{bmatrix} \cos\eta(z-z_0) & \frac{1}{\eta\mu}\,\mathrm{sen}\,\eta(z-z_0) \\ -\eta\mu\,\mathrm{sen}\,\eta(z-z_0) & \cos\eta(z-z_0) \end{bmatrix} = \mathbb{P}(z,z_0) \qquad (II.30)$$

Con la ec II.30 se puede obtener el vector desplazamiento-esfuerzo en cada estrato. Así se tiene que

$$\langle 1\rangle_1 = [\mathbb{P}]_1 \begin{Bmatrix} V_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \; en \quad 0 \le z \le z_1 \qquad (II.31)$$

$$\langle 1\rangle_2 = [\mathbb{P}]_2 \langle 1\rangle_1 \quad , \; en \quad z_1 \le z \le z_2 \qquad (II.32)$$

$$\langle 1\rangle_n = [\mathbb{P}]_n \langle 1\rangle_{n-1} \quad , \; en \quad z_{n-1} \le z \le z_n \qquad (II.33)$$

$$\langle 1\rangle_E = [M] \begin{Bmatrix} \acute{S} \\ \grave{S} \end{Bmatrix} \quad , \; en \; z \ge H = z_n \qquad (II.34)$$

donde $\acute{S}$ y $\grave{S}$ son las amplitudes de las ondas incidente y reflejada respectivamente, y cuyo factor de propagación horizontal es

$$\exp[i(kx - \omega t)]$$

donde $k = (\omega/\beta)\mathrm{sen}\gamma_0$. Es posible demostrar que el vector desplazamiento-esfuerzo $\langle 1\rangle_E$, se puede expresar mediante

$$\begin{Bmatrix} 1_1 \\ 1_2 \end{Bmatrix}_E = \begin{bmatrix} \exp[i\eta_E(z-H)] & \exp[-i\eta_E(z-H)] \\ i\mu_E\eta_E\exp[i\eta_E(z-H)] & -i\mu_E\eta_E\exp[-i\eta_E(z-H)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \acute{S} \\ \grave{S} \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots(II.35)$$

Esta ecuación permite conocer las amplitudes de las ondas en términos del vector $\langle 1\rangle_E$ usando la matriz inversa de $[M]$. Las expresiones explícitas para $[M]$ y $[M]^{-1}$ se encuentran en textos estándar como el de Aki y Richards.

Conocidas la amplitud y el tipo de onda incidente se puede conocer el campo de desplazamientos en cualquier punto de la estratigrafía, considerando las condiciones de frontera.

Sabemos que en la superficie libre los esfuerzos son nulos. A partir de esto, el vector desplazamiento-esfuerzo, para ondas SH, en la base de una formación de n estratos estará dado por

$$\begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}_{z=H} = \mathbb{P}(H,z_{n-1})\mathbb{P}(z_{n-1},z_{n-2})\ldots\mathbb{P}(z_1,z_0)\begin{Bmatrix} l_1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{z=z_0} \qquad \text{(II.36)}$$

En virtud de las propiedades de la matriz propagadora, y teniendo en cuenta que $\langle l \rangle_E = \langle l \rangle_n$, en $z = H$. Si hacemos

$$[\mathbb{B}] = \mathbb{M}^{-1}\,\mathbb{P}(H,z_{n-1})\ldots\mathbb{P}(z,z_0) \qquad \text{(II.37)}$$

de donde podemos obtener

$$\begin{Bmatrix} \acute{S} \\ \hat{S} \end{Bmatrix} = [\mathbb{B}]\begin{Bmatrix} l_1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{z=z_0} \qquad \text{(II.38)}$$

de modo que el desplazamiento en la superficie libre es

$$(l_1)_{z=z_0} = \acute{S}\,(B_{11})^{-1} \qquad \text{(II.39)}$$

Si se define la función de transferencia de la estratigrafía en cualquier punto, como el cociente del desplazamiento en ese punto entre el desplazamiento que se tendría en la base de la formación si no existieran los estratos. Podemos entonces obtener la función de transferencia para las ondas SH.

$$H_{SH}(\omega,k,z_0) = \frac{l_1}{2\acute{S}} = \frac{1}{2}\,(B_{11})^{-1}$$

donde se ve la dependencia del ángulo de incidencia por la dependencia de $k = (\omega / \beta)\mathrm{sen}\gamma_s$. Para el caso de ondas P, SV y Rayleigh, la solución es completamente análoga.

En el último capítulo veremos un ejemplo de aplicación de este método.

III. MODELOS BIDIMENSIONALES.

En el capítulo precedente consideramos únicamente modelos unidimensionales de extensión ilimitada, sin embargo, el uso indiscriminado de estos puede dar lugar a errores importantes debidos a que no se toman en cuenta los efectos de las irregularidades laterales. Por esta razón en ocasiones es indispensable recurrir a un tratamiento bidimensional del problema.

Los métodos que se han usado para estudiar modelos bidimensionales son diversos (según el caso particular). Se han empleado por ejemplo, elementos finitos, diferencias finitas y recientemente métodos de frontera, pero ya se ha advertido en la introdución que un anáisis riguroso de estos quedaría fuera del alcance de esta tesis.

En este capítulo se presenta un método muy sencillo de reciente desarrollo para investigar el movimiento de depósitos bidimensionales para incidencia de ondas SH, el cual proporciona resultados bastante aproximados comparados con los que se obtienen con el uso de técnicas más sofisticadas.

El método es aplicable a ciertas formas de valles y se basa principalmente en consideraciones geométricas que lo hacen más sencillo que otros métodos. El inconveniente que presenta es el de no considerar la difracción de ondas en las discontinuidades y en el vértice del depósito (*Sánchez-Sesma, Chávez-García and Bravo, 1986*).

Describiremos la respuesta de un estrato inclinado sobre una base rígida. La simplicidad de la solución permite extenderla a considerar frontera deformable y diferentes ángulos de incidencia, esto se logra afectando las amplitudes de los rayos por coeficientes de trasmisión y reflexión cada vez que chocan con la frontera del depósito.

Consideremos una cuña de forma triangular con ángulo de inclinación de la forma $\pi/2N$, donde $N = 1,3,5,\ldots$ (Fig.14). Se encontró (*Sánchez-Sesma y Velázquez, 1986*) que el desplazamiento superficial para movimiento armónico de la base dado por $v_0 \exp(i\omega t)$, se puede escribir como

$$\frac{v}{v_0} = \sum_{j=0}^{M} \varepsilon_{M-j} \, (-1)^j \exp(ikx \cos\theta_j) \qquad \text{(III.1)}$$

donde $M = (N-1)/2$, ε_m = factor de Newmann (=1, si $m=0$; =2, si $m \geq 1$), $k = \omega/\beta$ = número de onda, β = velocidad de onda cortante, x = coordenada horizontal y θ_j está dado por

$$\theta_j = (N - 2j - 1)\pi/2N \qquad \text{(III.2)}$$

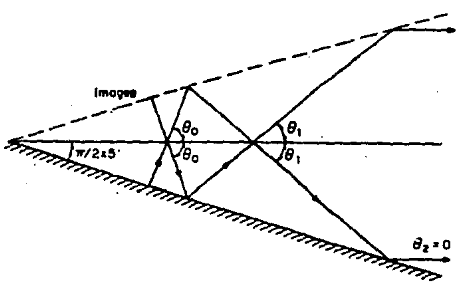


Fig. 14 Estrato inclinado sobre base rígida en movimiento. Familia completa de rayos para N=5.

En general, si el movimiento en la base está dado por una función de tiempo arbitraria $v_o f(t)$, el movimiento superficial se expresa

$$\frac{v}{v_o} = \sum_{j=o}^{M} \varepsilon_{M-j} (-1)^j \, f(t - x \cos\theta_j/\beta) \qquad \text{(III.3)}$$

que puede ser obtenida a partir de un análisis de Fourier de la ec III.1. Las soluciones que dan las ecuaciones III.1 y III.3 son exactas. Los rayos usados para obtener la solución representan ondas planas. Debe notarse que con la elección apropiada del ángulo del estrato no existe difracción (*Sánchez-Sesma et al., 1986*).

Consideremos por ejemplo un estrato simétrico con ángulos de la forma $\pi/2N$, donde $N = 3,5,7,...$ (ver la Fig. 15 en que se ilustra el caso $N = 5$).

Se puede mostrar que hay $(N+1)/2$ trayectorias diferentes (considerando reflexiones en la superficie libre y en la base rigida).
Estas $(N+1)/2$ familias de trayectorias tienen longitudes $L_j = 2a \cos\theta_j$ donde a = semiancho del depósito. El ancho de la banda en la cual existe la trayectoria de rayos es $W_j = L_j \tan(\pi/2N)$.

Podemos entonces considerar cada banda normal a la base rigida en sus extremos como una membrana de longitud L_j y ancho W_j (Fig.16), con una coordenada S sobre la banda y el origen en el centro. Así el campo de cada banda se escribe como

$$\frac{v}{v_o} = \frac{\cos(\omega S/\beta)}{\cos(\omega a \cos\theta \,/\beta)} \qquad \text{(III.4)}$$

que satisface la ecuación escalar de onda y las condiciones de frontera en $S = \pm L_j/2$. Considerando reflexiones en la

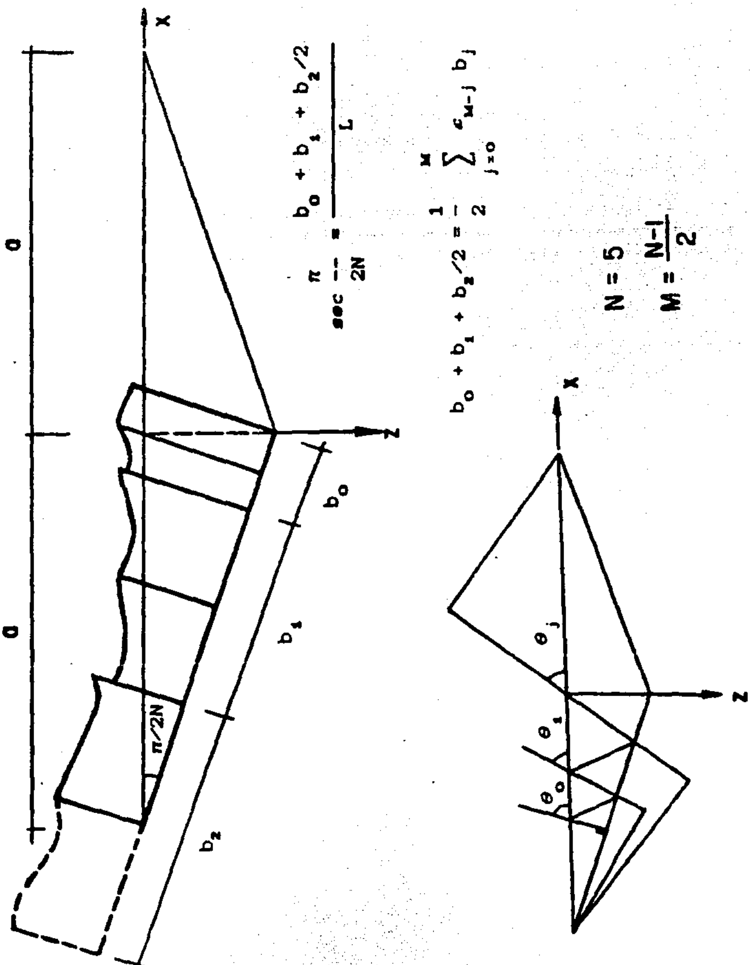


Fig.15 Modelo bidimensional de un depósito en forma de cuña triangular.
Solución a través del método de "origami".

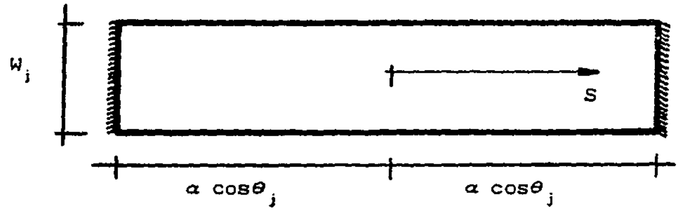


Fig.16 Longitud y ancho de la banda j.

superficie libre y en la base del depósito, se puede evaluar el campo de desplazamientos por medio del doblamiento de la banda al llegar a las fronteras y dando el cambio de signo por reflexión, asi como el factor de superficie libre que sabemos es igual a dos (Fig.16). La solución completa será la superposición de todas las bandas. Expresemos entonces la posición sobre la banda en términos de las variables de espacio. En la superficie libre, una banda j que forma un ángulo θ_l ($l \leq j$) con la horizontal tiene una coordenada de banda de la forma

$$S = a\cos\theta_j - (a - |x|)\cos\theta_l \qquad \text{(III.5)}$$

Después de hacer el álgebra necesaria se puede demostrar (*Sánchez-Sesma et al., 1986*) que el intervalo de validez de la ec III.5 es

$$\sum_{k=l}^{j-1} \varepsilon_{k-l}\cos\theta_k \leq \left|\frac{x\,\mathrm{sen}\theta_l}{a\tan\pi/2N}\right| < \sum_{k=l}^{j} \varepsilon_{k-l}\cos\theta_k \qquad \text{(III.6)}$$

Para $l = j$, el primer miembro de la inecuación es cero. De modo, que el desplazamiento superficial del suelo se puede escribir como

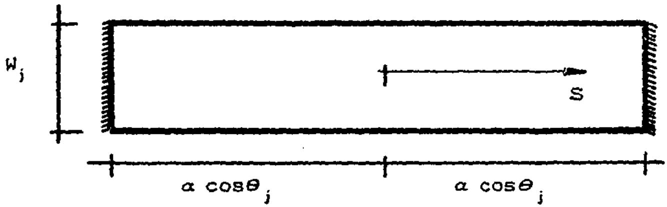


Fig. 16 Longitud y ancho de la banda j.

superficie libre y en la base del depósito, se puede evaluar el campo de desplazamientos por medio del doblamiento de la banda al llegar a las fronteras y dando el cambio de signo por reflexión, así como el factor de superficie libre que sabemos es igual a dos (Fig.16). La solución completa será la superposición de todas las bandas. Expresemos entonces la posición sobre la banda en términos de las variables de espacio. En la superficie libre, una banda j que forma un ángulo θ_l ($l \leq j$) con la horizontal tiene una coordenada de banda de la forma

$$S = \alpha \cos\theta_j - (\alpha - |x|)\cos\theta_l \qquad \text{(III.5)}$$

Después de hacer el álgebra necesaria se puede demostrar (*Sánchez-Sesma et al., 1986*) que el intervalo de validez de la ec III.5 es

$$\sum_{k=l}^{j-1} \epsilon_{k-l} \cos\theta_k \leq \left| \frac{x\ sen\theta_l}{\alpha\ \tan\pi/2N} \right| < \sum_{k=l}^{j} \epsilon_{k-l} \cos\theta_k \qquad \text{(III.6)}$$

Para $l = j$, el primer miembro de la inecuación es cero. De modo, que el desplazamiento superficial del suelo se puede escribir como

$$\frac{V}{V_o} = \sum_{j=0}^{M} \sum_{l=0}^{j} \varepsilon_{M-l}(-1)^l \frac{\cos\{\frac{\omega}{\beta}[a\cos\theta_j - (a-|x|)\cos\theta_l]\}}{\cos(\frac{\omega}{\beta} a\cos\theta_j)} R_{jl} \qquad \text{(III.7)}$$

Donde $R_{jl} = 1$ si se satisface la inecuación III.6 ,si no, $R_{jl} = 0$. La ecuación III.7 es la solución completa si despreciamos la difracción del vértice central del depósito. Para ondas superficiales se tiene $j = l = M$.

Se puede incluir atenuación inelástica, multiplicando en la ecuación III.7 por el factor $(1+i/2Q)$, donde Q = factor de calidad.

Vamos a extender los resultados para base deformable, considerando coeficientes de reflexión y trasmisión. Según la figura 17, tenemos que C y D son los coeficientes de reflexión en los puntos A y B, respectivamente. Sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\delta}$ las amplitudes de las ondas emitidas desde los puntos A y B respectivamente. De modo que, la onda emitida desde el punto B llegará al punto A con una amplitud

$$\tilde{\delta} \prod_{k=0}^{j} A_k^2 \quad .$$

De igual manera, la onda que va desde A a B tendrá en B una amplitud

$$\tilde{\alpha} \prod_{k=0}^{j} A_k^2$$

donde A_k = coeficiente de reflexión, está dado por

$$A_k = \frac{\eta - \dfrac{\sqrt{1 - (\beta_r/\beta)^2\cos^2(\theta_k+\pi/2N)}}{sen(\theta_k+\pi/2N)}}{\eta + \dfrac{\sqrt{1 - (\beta_r/\beta)^2\cos^2(\theta_k+\pi/2N)}}{sen(\theta_k+\pi/2N)}} \quad , \; I_m(\surd)\leq 0 \qquad \text{(III.8)}$$

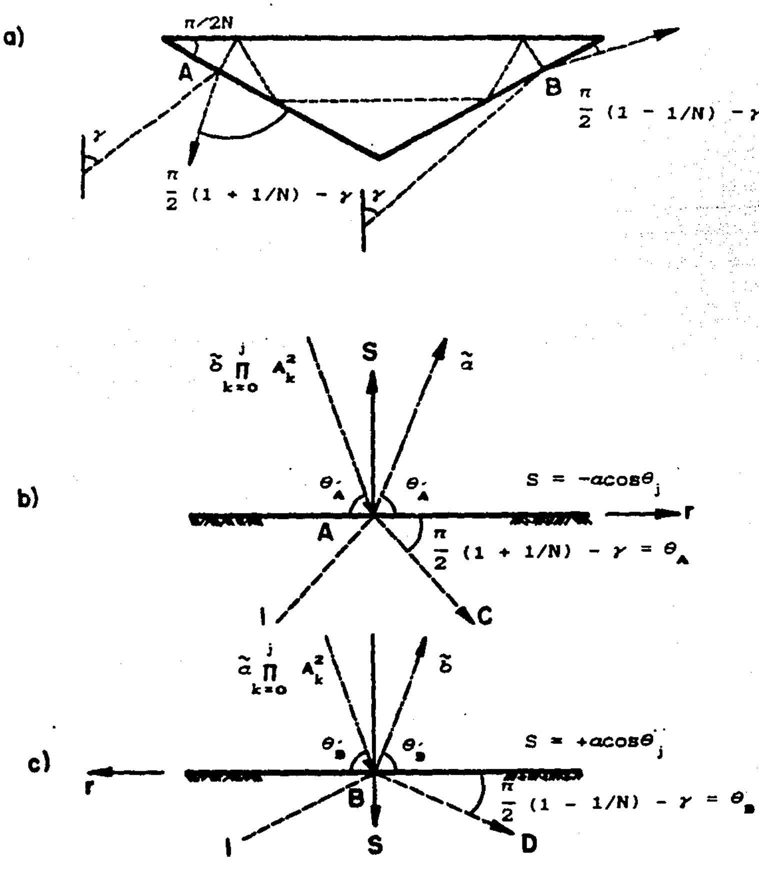


Fig. 17 a) Trasmisión y reflexión de onda en los puntos A y B. Angulo de incidencia γ. b) Reflexión y trasmisión en el punto A. c) Reflexión y trasmisión en el punto B.

Aquí $\eta = \rho\beta/\rho_r\beta_r$ = relación de impedancia y $A_o \equiv 1$ (el subíndice r se refiere a roca).

Examinemos con más detalle las anteriores expresiones. De la Fig.17(b), podemos ver que la onda incidente y reflejada están dadas por

$$v^{(i)}=v_o\exp\left[\frac{\iota\omega}{\beta_r}\left[-x_A\operatorname{sen}\gamma+z_A\cos\gamma\right]+\iota\omega\left[t-\frac{(S+\alpha\cos\theta_j)}{\beta_r}\operatorname{sen}\theta_A-\frac{r\cos\theta_A}{\beta_r}\right]\right]$$

....(III.9)

$$v^{(r)}=v_o\exp\left[\frac{\iota\omega}{\beta_r}\left[-x_A\operatorname{sen}\gamma+z_A\cos\gamma\right]\right]C\exp\left[\iota\omega\left[t+\frac{S+\alpha\cos\theta_j}{\beta_r}-\frac{r\cos\theta_A}{\beta_r}\right]\right]$$

....(III.10)

De manera semejante, dentro del depósito las ondas emitidas desde el punto B y la que sale del punto A son respectivamente

$$\tilde{\delta}A^2\exp\left[\iota\omega\left[t+\frac{S-\alpha\cos\theta_j}{\beta}\operatorname{sen}\theta'_A-\frac{r\cos\theta'_A}{\beta}\right]\right] \qquad \text{(III.11)}$$

$$\tilde{\alpha}\exp\left[\iota\omega\left[t-\frac{S+\alpha\cos\theta_j}{\beta}\operatorname{sen}\theta'_A-\frac{r\cos\theta'_A}{\beta}\right]\right] \qquad \text{(III.12)}$$

los ángulos de incidencia dentro y fuera del depósito están relacionados mediante

$$\cos\theta'_A = \frac{\beta}{\beta_r}\cos\theta_A \tag{III.13}$$

$$sen\theta'_A = \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\beta_r}\right)^2 \cos^2\theta_A}$$

cabe señalar que $sen\theta_A$ es aproximadamente uno cuando la relación β/β_r es pequeña, como casi siempre sucede.

Al aplicar condiciones de frontera de continuidad de desplazamientos y tracciones en el punto A donde la coordenada de banda es S = $-a \cos\theta_j$, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$vv_o^A\ (1 + C) = \tilde{\alpha} + \tilde{\delta}A^2\exp\left[i\omega\left(-\frac{2a\cos\theta_j}{\beta} sen\theta'_A\right)\right]$$

(III.14)

$$\mu_r\left[-i\omega\frac{sen\theta_A}{\beta_r}\right]v_o v_o^I\ (1 - C) =$$

$$= \mu\left[-i\omega\frac{sen\theta'_A}{\beta}\right]\left[\tilde{\alpha} - \tilde{\delta}A^2\exp\left[-i\omega\frac{2a\cos\theta_j}{\beta} sen\theta'_A\right]\right]$$

donde

$$v_o^I = \exp\left[\frac{i\omega}{\beta_r}\left[-x_A sen\gamma + z_A\cos\gamma\right]\right]$$

sea

$$\eta_A = \frac{sen\theta'_A}{sen\theta_A}\frac{\beta_r\mu}{\beta\ \mu_r} = \frac{\rho\beta}{\rho_r\beta_r}\frac{\sqrt{1 - (\beta/\beta_r)^2\cos^2\theta_A}}{sen\theta_A} \tag{III.15}$$

Con las expresiones anteriores se obtienen las ecuaciones

$$v_o v_o^A(1 + C) = \tilde{a} + \tilde{b}A^2 \exp\left[-i\omega\left(\frac{2a\cos\theta_j}{\beta}\right)\operatorname{sen}\theta_A'\right]$$

(III.16)

$$v_o v_o^A(1 - C) = \eta_A\left\{\tilde{a} - \tilde{b}A^2 \exp\left[-i\omega\left(\frac{2a\cos\theta_j}{\beta}\right)\operatorname{sen}\theta_A'\right]\right\}$$

Procediendo de manera semejante para el punto B, Fig.17(c), se llega a

$$v_o v_o^B(1 + D) = \tilde{b} + \tilde{a}A^2 \exp\left[-i\omega\left(\frac{2a\cos\theta_j}{\beta}\right)\operatorname{sen}\theta_B'\right]$$

(III.17)

$$v_o v_o^B(1 - D) = \eta_B\left\{\tilde{b} - \tilde{a}A^2 \exp\left[-i\omega\left(\frac{2a\cos\theta_j}{\beta}\right)\operatorname{sen}\theta_B'\right]\right\}$$

donde

$$\eta_B = \frac{\rho\beta}{\rho_r\beta_r}\,\frac{\sqrt{1 - (\beta/\beta_r)^2\cos^2\theta_B}}{\operatorname{sen}\theta_B} \qquad \text{(III.18)}$$

A partir de las ecs III.16 y III.17, se puede obtener un sistema de ecuaciones en $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$, que son los coeficientes que interesa conocer, y quedan determinados por

$$\tilde{\alpha} = 2v_o\left[\frac{v_o^A(1+\eta_B)-v_o^B(1-\eta_A)A^2\exp\left[-i\ \dfrac{2\omega a}{\beta}\ \cos\theta_j\operatorname{sen}\theta'_A\right]}{(1+\eta_A)(1+\eta_B)-(1-\eta_A)(1-\eta_B)A^2A^2\exp\left[-i\ \dfrac{2\omega a}{\beta}\ \cos\theta_j\operatorname{sen}\theta'_A\right]}\right]$$

(III.19)

$$\tilde{\delta} = 2v_o\left[\frac{v_o^B(1+\eta_A)-v_o^A(1-\eta_B)A^2\exp\left[-i\ \dfrac{2\omega a}{\beta}\ \cos\theta_j\cos\theta'_B\right]}{(1+\eta_A)(1+\eta_B)-(1-\eta_A)(1-\eta_B)A^2A^2\exp\left[-i\ \dfrac{2\omega a}{\beta}\ \cos\theta_j\operatorname{sen}\theta'_B\right]}\right]$$

Se puede ver además que v_o^A y v_o^B están relacionados mediante

$$\frac{v_o^B}{v_o^A} = \exp\left[-i\omega\ \frac{2x^B}{\beta}\ \operatorname{sen}\gamma\right] \qquad \text{(III.20)}$$

donde $\tau_j = \dfrac{2x^B}{\beta}\operatorname{sen}\gamma$ = tiempo de retraso de la onda incidente desde el punto A al B (Fig.18).

Finalmente el campo de desplazamientos en la banda j, está dado por (*Sánchez-Sesma et al., 1986*)

$$\frac{v}{v_o} = \exp\left[-i\ \frac{\omega a}{\beta}\ \cos\theta_j\right]\left[\tilde{\alpha}\overrightarrow{\Pi}\exp\left(-\ \frac{i\omega S}{\beta}\right) + \tilde{\delta}\overleftarrow{\Pi}\exp\left(\frac{i\omega S}{\beta}\right)\right] \qquad \text{(III.21)}$$

donde

$$\overrightarrow{\Pi} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=0}^{l} A_k\ , & \text{si } S < 0 \\ \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{l} A_k\right)\displaystyle\prod_{k=l+1}^{k} A_k^2\ , & \text{si } S > 0 \end{cases} \qquad \text{(III.22)}$$

y

$$\underleftarrow{\Pi} = \begin{cases} \left(\prod_{k=0}^{l} A_k\right) \prod_{k=l+1}^{k} A_k^2 , & \text{si } S < 0 \\ \prod_{k=0}^{l} A_k , & \text{si } S > 0 \end{cases} \qquad \text{(III.23)}$$

La superposición de la ec III.21 para las bandas, nos permite calcular aproximadamente la respuesta superficial de un valle aluvial con frontera deformable y ángulo de incidencia arbitrario.

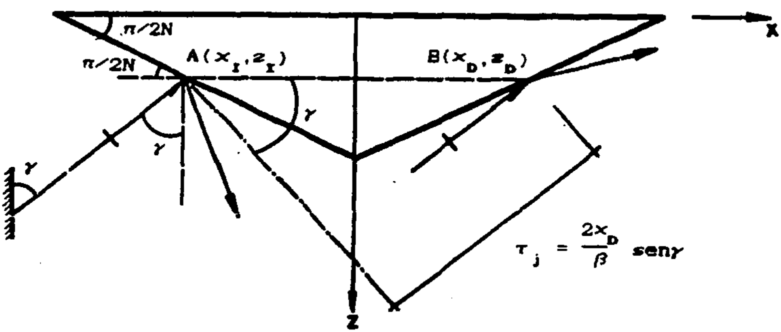


Fig. 18 Tiempo de retraso τ_j de la onda incidente desde el punto A al B.

Con base en las ecuaciones que se han encontrado para los casos anteriores se pueden hallar resultados para otras formas geométricas, haciendo las modificaciones algebraicas para cada forma particular. Por ejemplo, para un trapecio con ángulo de inclinación $\pi/2N = 30^{\circ}$ (Fig.19), el campo de desplazamientos en la superficie del depósito está dado por

$$\frac{v}{v_o} = \frac{1}{cos(\omega H/\beta)} \quad , \quad \text{en } |x| < a \qquad \text{(III.24)}$$

$$\frac{v}{v_o} = -2\,\frac{sen(\omega/\beta)[2a/3 + (|x| - a/3)/2]}{sen\left(\frac{5a\omega}{2\beta}\right)} \quad , \text{ en } 0<|x|<2a/3$$

$$\frac{v}{v_o} = 2\,\frac{sen(\omega/\beta)[2a + (|x| - a)/2]}{sen\left(\frac{5a\omega}{2\beta}\right)} \quad , \text{ en } 2a/3<|x|<4a/3$$

$$\frac{v}{v_o} = 2\,\frac{cos(\omega/\beta)[2a + (|x| - 2a)/2]}{sen\left(\frac{5a\omega}{2\beta}\right)} \quad , \text{ en } |x|<4a/3$$

$$\frac{v}{v_o} = -\frac{cos(\omega x/\beta)}{cos(2\omega a/\beta)} \qquad \text{en } |x|\geq 0$$

Obsérvese que la ecuación III.24 corresponde a la solución unidimensional vista anteriormente (Fig.9), cuando $z = 0$, en la superficie libre. Cabe señalar que en las anteriores ecuaciones hemos omitido el factor $exp(i\omega t)$ de tiempo. En este caso corresponde a la parte central del depósito, $x \in \langle -a, a\rangle$.

De este modo se pueden obtener resultados interesantes para formas geométricas en las que se puedan combinar soluciones para definir el campo de desplazamientos. Por ejemplo, en la Fig.20 se aproxima con una cuña triangular el depósito mostrado. Obteniéndose así los sismogramas sintéticos de la Fig.29.

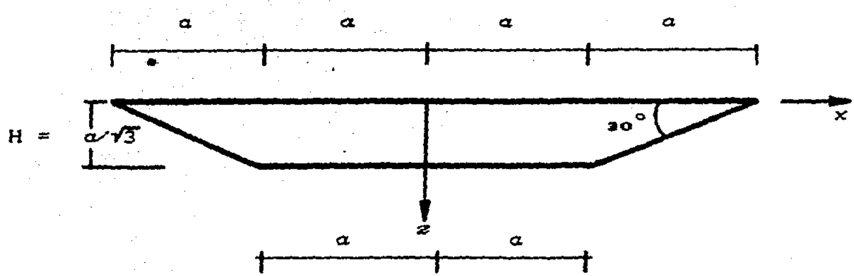


Fig. 19 Depósito trapezoidal con ángulo de inclinación $\pi/2N = 30°$, (N=3).

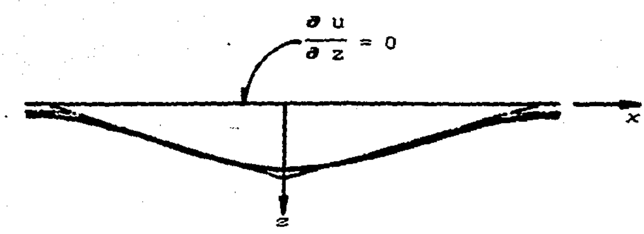


Fig. 20 Depósito de forma irregular aproximado por medio de una cuña triangular.

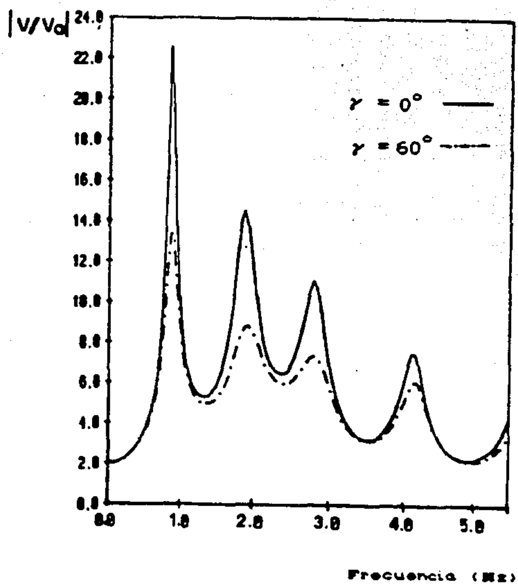
IV. EJEMPLOS DE APLICACION.

Para calibrar la aproximación de los métodos estudiados se calcularon algunos resultados tanto para modelos unidimensionales como bidimensionales.

Considérese primero el modelo de la Fig.21, correspondiente a un medio estratificado con las características geométricas y propiedades mecánicas mostradas. Bajo estas condiciones se obtuvieron las funciones de transferencia para incidencia de ondas SH, por medio del método de Haskell (*Geli, 1985*). Los cálculos se hicieron para incidencias de, $\gamma = 0°$ (ondas verticales) y $\gamma = 60°$. En la Fig.22 se muestran también resultados para un modelo estratificado apoyado sobre un semiespacio con las mismas características anteriores.

Las funciones de transferencia se calcularon también para dos ángulos de incidencia.

Observese que los resultados obtenidos con la ec II.15 (Fig.13), presentan cierta semejanza con los calculados mediante el método de Haskell para dos estratos (Fig.22).



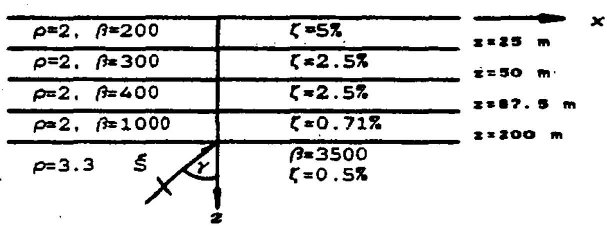
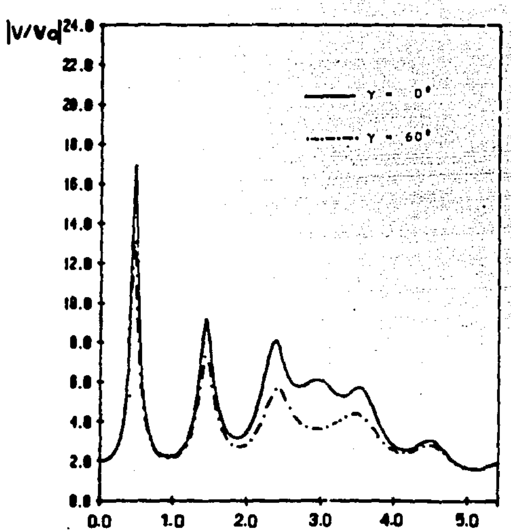


Fig. 21 Amplitudes contra frecuencia obtenidas con el método de Haskell. El amortiguamiento es $\zeta=1/2Q$.



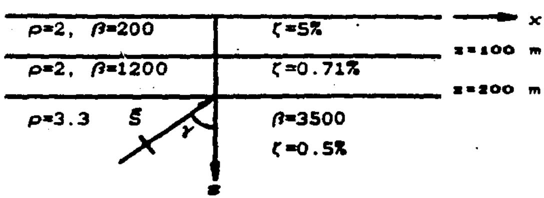


Fig. 22 Amplitudes contra frecuencia obtenidas con el método de Haskell. El amortiguamiento es $\zeta=1/2Q$.

Consideremos ahora una de las estratigrafías del valle de México (*referencias 4 y 17*). La cual se puede representar a través de un modelo unidimensional estratificado.

El modelo se presenta en la Fig.23 junto con las características geométricas y propiedades mecánicas de los estratos; este ejemplo se resuelve también con las ecs II.38 y II.39 del método de Haskell. En la misma figura se muestran las funciones de transferencia comparadas para incidencias de 0° y 60°.

Se puede observar en este ejemplo que el modelo predice mayores amplitudes en bajas frecuencias de 0.5 a 1.5 Hertz, correspondientes a periodos de 2 a 0.7 seg. respectivamente.

Como último ejemplo del método de Haskell se ha tomado un modelo simplificado de la estratigrafía anterior tal como se muestra en la Fig.24, donde se ve claramente la influencia del número de estratos y sus propiedades mecánicas en la magnitud de las amplitudes de respuesta $|v/v_o|$ Esto ilustra la gran importancia que tienen las condiciones locales en la amplificación del movimiento.

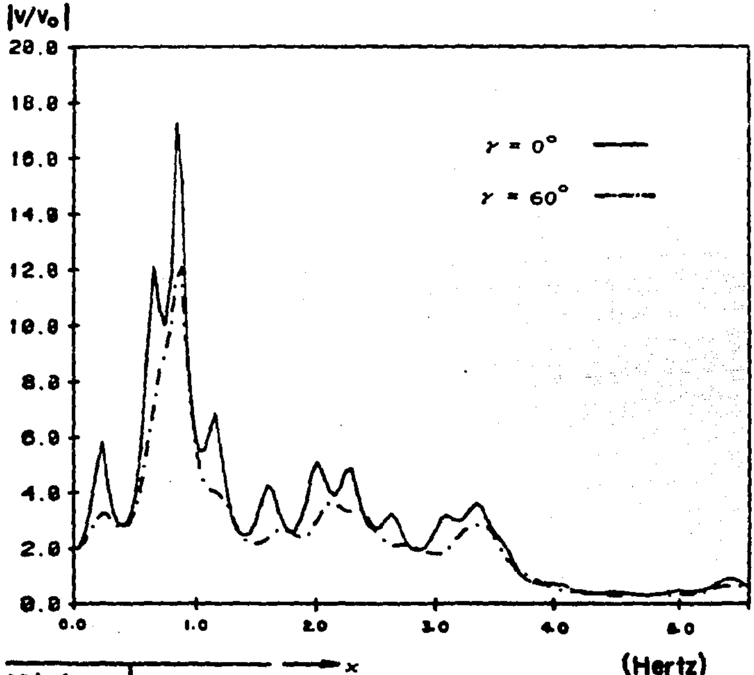
Veamos ahora la aplicación del método geométrico estudiado en el tercer capítulo.

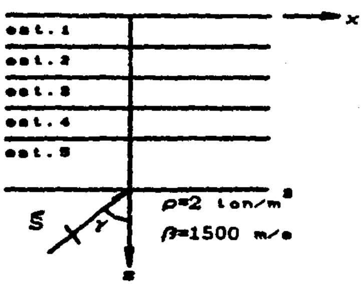
Consideremos como un primer ejemplo el depósito de forma triangular de la Fig.25, con las características geométricas y propiedades mecánicas que se muestran. El modelo se ha elegido de modo que corresponda aproximadamente a un perfil del valle de México, desde el cerro de Chapultepec al cerro del Peñón.

Se calcularon funciones de transferencia en el dominio de la frecuencia (Hertz) en estaciones localizadas sobre la superficie a una distancia x/L, a partir del centro del depósito. Las amplitudes están graficadas para incidencia vertical de ondas SH, los resultados se muestran en la Fig.26. De igual manera se obtuvieron resultados en el dominio del espacio para frecuencias 0.15π y 0.16π Hz. En la Fig.27 se muestran las gráficas respectivamente.

Finalmente se han calculado para este mismo ejemplo sismogramas sintéticos usando como señal de excitación un pulso del tipo Ricker, en cinco estaciones localizadas sobre la superficie del depósito. El pulso es de la forma

$$f(t) = (A - B)\exp(-A)$$





ESTRATOS	H m	ρ t/m³	β m/s	ξ %
1.Depósitos superficiales	6.8	1.5	403	2.5
2.Formación arcillosa	21.8	1.2	9?	3.0
3.Capa dura	31.0	1.6	529	2.5
4.Formación arcillosa	35.0	1.3	118	3.0
5.Depósitos profundos	635.0	1.7	600	2.0

Fig.28 Amplitudes contra frecuencia de una estratigrafía correspondiente a la zona del lago del valle de México. Se tienen dos incidencias (0° y 60°).

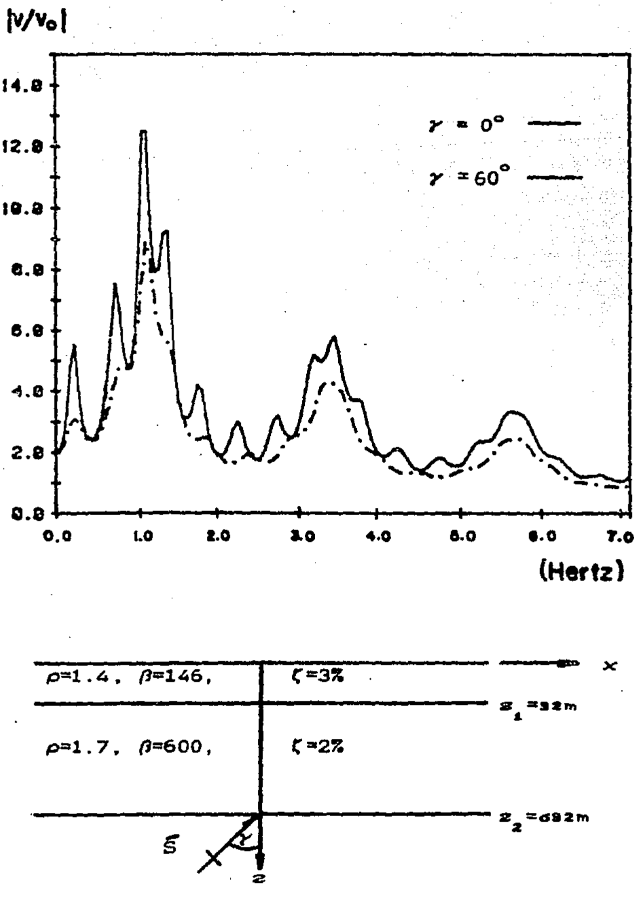


Fig. 24 Modelo simplificado para la estartigrafía de la Fig. 23. Solución con método de Haskell.

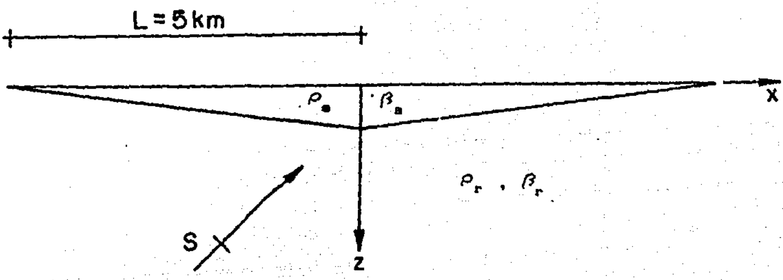


Fig. 25. . . Modelo bidimensional que representa aproximadamente un perfil del Valle de México.
Las propiedades mecánicas son ρ_s=1.8 ton/m^3; β_s=500 m/s; ρ_r= 2.2 ton/m^3; β_r= 1500 m/s; Q = 20 (ζ=2.5%).

donde $A = \pi^2(t - t_s)^2/t_p^2$, $B = \pi^2 t_s^2/t_p^2$, t_p= periodo "característico" del pulso, y t_s = tiempo del valor máximo.

En la Fig.28 se muestran los resultados para distintos valores de γ y t_o/t_p, donde $t_o = 4L/\beta$. En los cálculos se usó $t_s/t_p = 0.1983$.

Se puede ver como influye el ángulo de incidencia en el tiempo de retraso de llegada del pulso, asi por ejemplo para $\gamma = 30^\circ$ es notable el retraso en cada estación.

Como una prueba a la bondad del método se ha sometido a comparación con métodos más sofisticados aplicados a un depósito como el de la Fig.20, presentado al final del capítulo anterior, del cual dijimos se podía aproximar mediante una cuña triangular como las estudiadas. Los resultados se muestran en la Fig.29, donde se puede ver que la aproximación es muy satisfactoria.

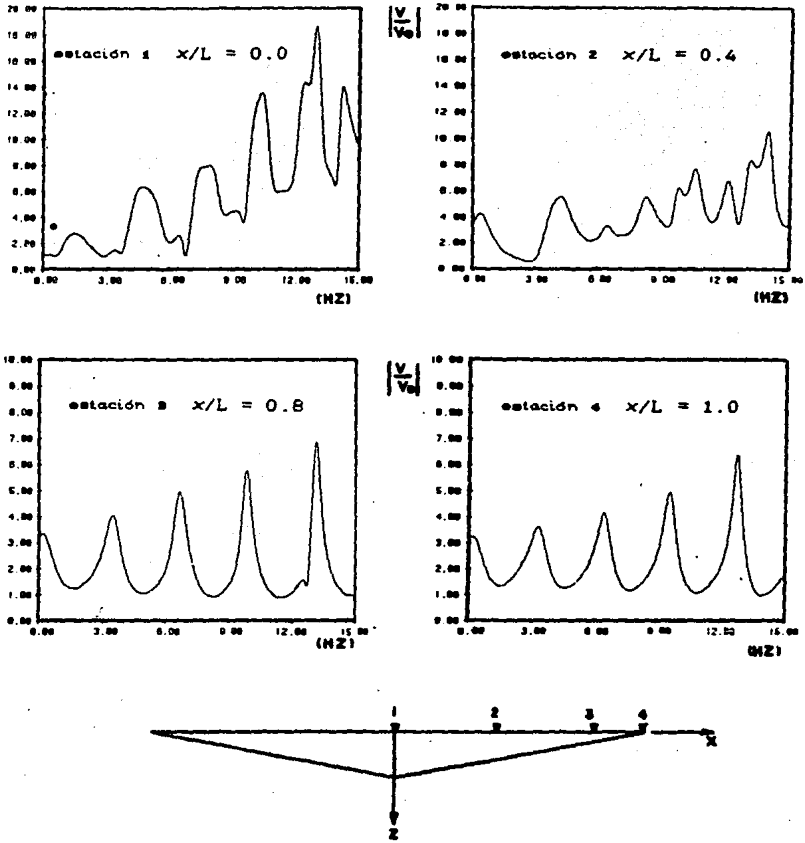
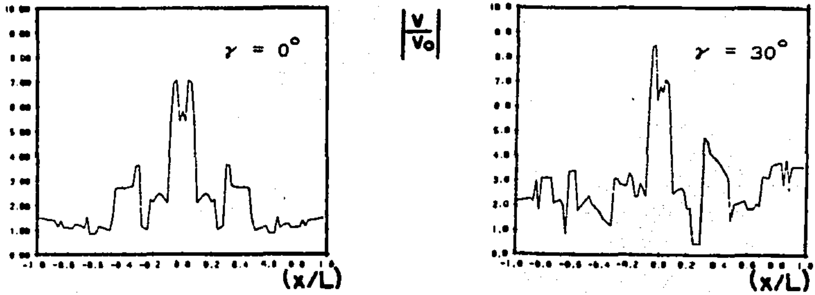
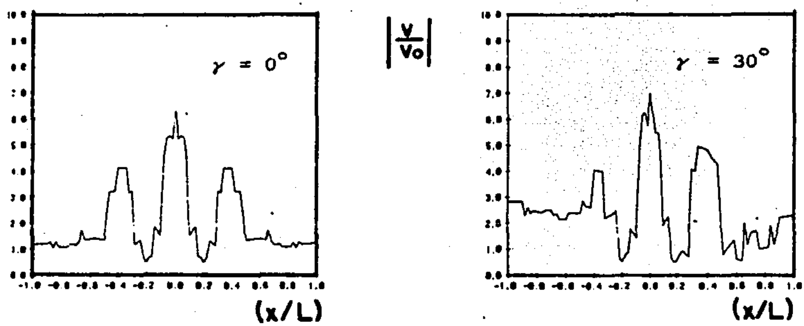


Fig. 26 Amplitudes contra frecuencia (Hertz) para el modelo mostrado en la Fig. 25, ante incidencia vertical de ondas SH.



Frecuencia = 0.15π Hz.



Frecuencia = 0.16π Hz.

Fig. 27 Amplitudes contra espacio (x/L) para el depósito mostrado en la Fig. 25, con frecuencias de 0.15π y 0.16π (Hertz). Con ángulo de incidencia γ de ondas SH.

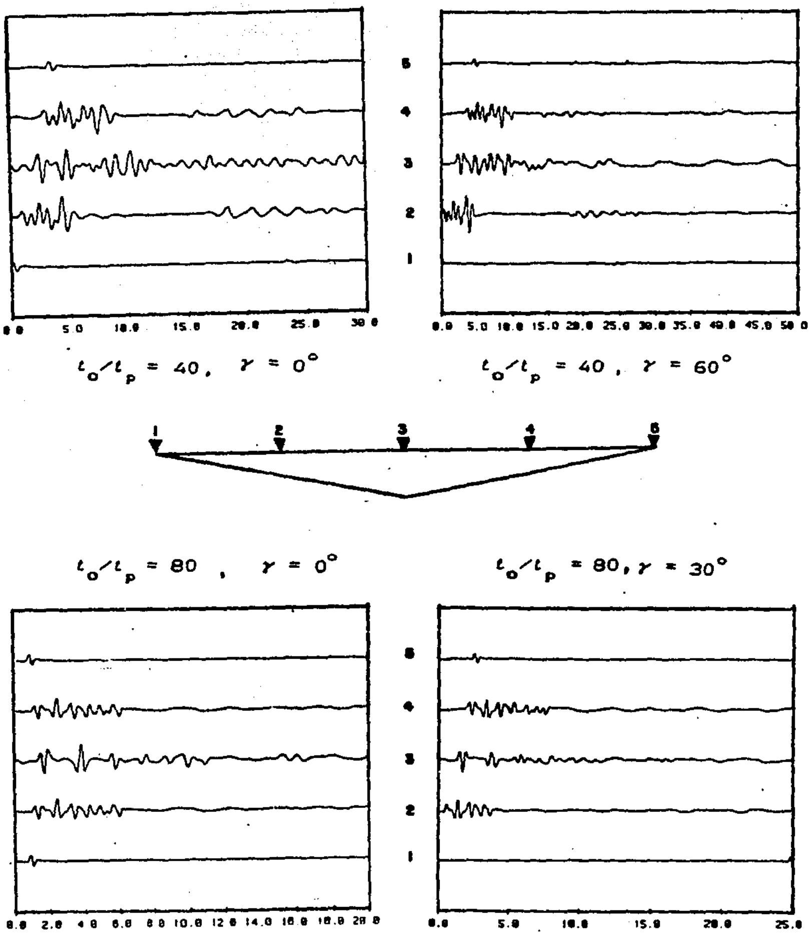
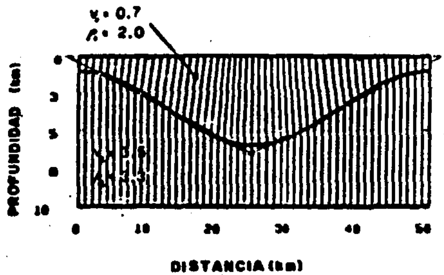


Fig. 28 Sismogramas sintéticos para el depósito de la Fig. 25.



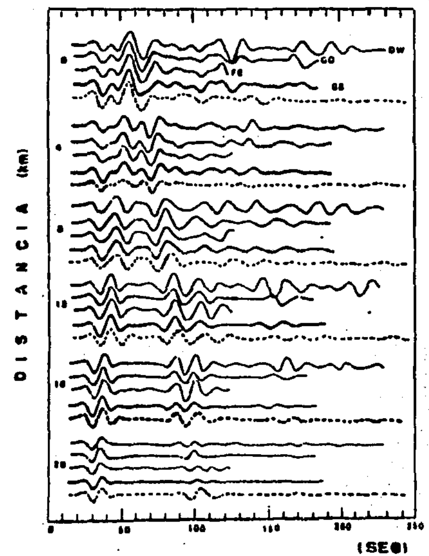


Fig. 29 Comparación del método geométrico con métodos más elaborados, para el depósito mostrado. Incidencia vertical de ondas SH. Se hizo la aproximación con una cuña en la cual N=7.

Los métodos con los cuales se compara son: Número de onda discreta (DW); Rayos glorificados (GO); Elemento finito (FE); y Rayos Gaussianos (GB). Con línea discontinua el método geométrico presentado aquí.

Un problema interesante consiste en usar como excitación un intervalo de señal de un acelerograma real en lugar del pulso de Ricker que hemos usado. Como ejemplo se han tomado diez segundos de la componente Este-Oeste (E-W) del acelerograma registrado en la estación de Tacubaya durante el temblor del 19 de septiembre de 1985.

El tratamiento del problema es similar, la diferencia básica está en leer la señal del acelerograma, en lugar de generarla con el pulso de Ricker, tampoco se usan algunos parámetros como t_p, t_s y $q = \Delta t/t_p$. Después de hacer algunas modificaciones en la sistematización del método, hemos calculado sismogramas sintéticos para el mismo depósito de la Fig.25.

Los resultados se presentan en la Fig.30, de donde podemos observar la notable diferencia entre el acelerograma y el pulso de Ricker antes usado, en las estaciones extremas 1 y 5 del depósito. Se nota también mayor amplificación a medida que nos movemos hacia el centro del depósito, estación en la cual se tiene la llegada de ondas de los dos extremos y de ondas debidas a las reflexiones dentro de la cuña que no han disipado toda su energía.

Estos resultados nos muestran la importancia de las condiciones locales en la amplificación del movimiento durante los temblores.

Es posible considerar en las condiciones locales otros aspectos como la estratificación superficial, lo cual ya no sería difícil después del manejo sistemático que se ha hecho del problema.

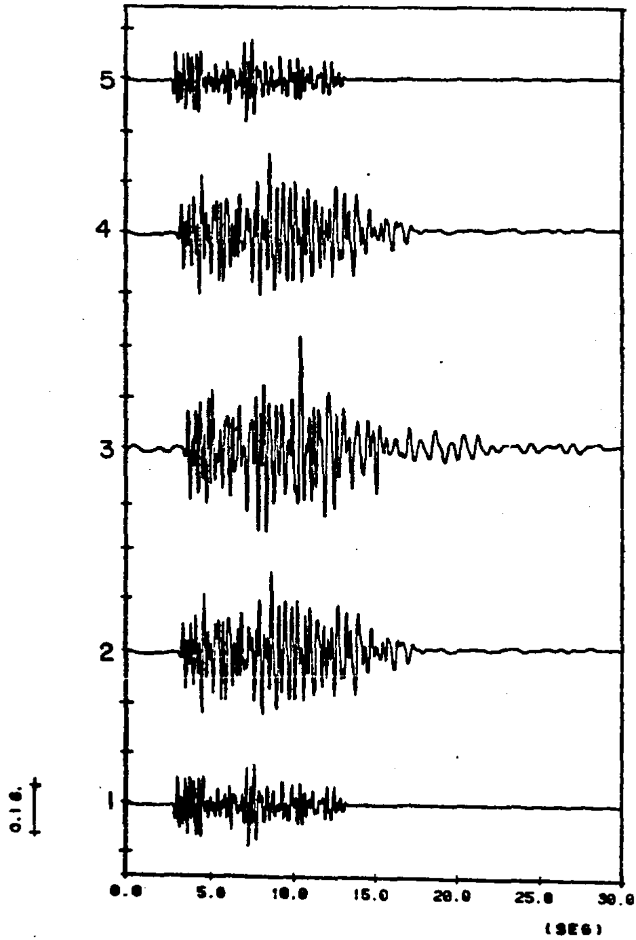


Fig. 30 Sismogramas sintéticos, tomando como excitación un segmento del acelerograma (componente E-W), registrado en la estación de Tacubaya durante el temblor del 19 de septiembre de 1985. Incidencia vertical.

CONCLUSIONES

Los métodos presentados han permitido calcular de manera sencilla la respuesta de modelos ante incidencia de ondas elásticas. Los resultados obtenidos muestran claramente la influencia de las condiciones locales sobre las características de la respuesta.

Se ha podido apreciar que los modelos unidimensionales permiten el manejo de depósitos estratificados ante incidencia oblicua de ondas SH, para determinar el movimiento en cualquier punto de la estratificación. Así por ejemplo, en la estratigrafía correspondiente a la zona del lago del valle de México, al usar el método de Haskell se ha podido constatar la mayor amplificación del movimiento alrededor de las frecuencias de resonancia (0.5-1.0 Hertz). De modo que la predicción del modelo concuerda satisfactoriamente con las observaciones y mediciones físicas.

Se ha hecho notar también que al introducir irregularidades laterales se presentan cambios importantes en el tipo de respuesta, por lo que es recomendable hacer uso del caso bidimensional. Para lo cual la solución geométrica estudiada no es muy complicada y permite además manejar altas frecuencias, en donde otros métodos tienen limitación. Se ha presentado así, de manera aproximada, un modelo bidimensional del valle de México y se han calculado resultados en los dominios del tiempo y la frecuencia que permitan explicar la influencia de las condiciones.locales.

Finalmente, es de esperar que puedan combinarse los casos unidimensional y bidimensional para generalizar la solución y tener mayor aproximación en las estimaciones de respuesta. Por ejemplo para el modelo del valle se podría considerar estratificación superficial, con lo cual estaríamos más cerca del caso real.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi más sincero agradecimiento al Dr. Francisco J. Sánchez-Sesma, por su inteligente y valiosa dirección de esta tesis. También agradezco de manera especial al Dr. Miguel A. Bravo Díaz por la lectura de la tesis y sugerencias para mejorarla.

Asimismo al centro de cómputo del Instituto de Ingeniería por las facilidades prestadas para calcular los resultados.

También quiero agradecer a mis amigas, Ing. Martha Suaréz y Susana A. Velázquez que directa o indirectamente me ayudaron durante la edición.

REFERENCIAS

Aki, K. and Richards, P.G. (1980). *Quantitative Seismology, Theory and Methods*, San Francisco, W.H. Freeman and Co., 560(pp).

Aki, K. and Larner, K.L. (1970). *Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves*, U.S.A., J. Geophys. Res., 75, 933-954.

C. Ray Wylie (1982). *Matemáticas superiores para Ingeniería*, Pérez Castellanos J. Hernán, cuarta edición, México, Mc Graw Hill, 1013(pp).

Del Castillo, R. "Ciudad de México". *El subsuelo y la Ingeniería de cimentaciones en el área urbana del valle de México*. Simposio 10 de marzo de 1978. SMMS 15 (pp).

Dravinski, M. (1982). *Scattering of SH waves by subsurface topography*. J. Eng. Mech. Div., Proc, ASCE, 108,1-17.

Dravinski, M. (1983). *Scattering of plane harmonic SH wave by dipping layers of arbitrary shape*. U.S.A., Bulletin of the Seismological Society of America, 73, 1303-1319.

Fung, Y.C. (1965). *Foundations of solid mechanics*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

Geli, L. (1985). *Propagation des ondes sismiques dans les formations superficielles.* Thèsé Presentée à L' Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Grenoble, France, June 1985.

Herrera, I. (1964). *A perturbation method for elastic wave propagation: 1-nonparallel boundaries*. J. Geophys. Res, 69, 3845-3851.

Hudson, J.A. (1967). *Scattered surface waves from a surface obstacle*. Geophys. J. R. astr. Soc., 13, 441-458.

Hudson, J.A. and D. M. Boore (1967). *Comments on 'Scattered surface waves from a surface obstacle'*. Geophys. J. R. astr. Soc., 60, 123-127.

Hwei P. Hsu (1973). *Análisis de Fourier*. Ramón G. Flórez, México, Fondo Educativo Interamericano, 269(pp).

Kubo, K. y R. Isoyama (1980). *Damage to buried utility pipes in the 1978 Miyagiken-Oki earthquake*. Proc. World Conf. Earthquake Engrg., 7th, Istanbul, 8, 225-232.

McIvor, I.K. (1969). *Two-dimensional scattering of a plane compressional wave by surface imperfections*, Bull. Seism. Soc. Am., 59, 1349-1364.

Newland, D.E. (1975). *An introduction to Random vibrations and spectral analysis*. London, Longman, 285(pp).

Poceski, A. (1969). *The ground effects of the Skopje July 26, 1963 earthquake*, Bulletin of the Seismological Society of America, 59, 1-29.

Reséndiz, D., Springall, G., J., Esquivel, R., "Información reciente sobre las características del subsuelo y la práctica de la Ingeniería de cimentaciones en la ciudad de México". *IV Reunión Nacional de Mecánica de Suelos. Cimentaciones en áreas urbanas de México, Coatzacoalcos, Guadalajara, México D.F., Monterrey*. Tomo I. SMMS, México,1970 pp IV-1 a IV-59.

Sabina, F.J. and J.R. Willis (1977). *Scattering of Rayleigh waves by a ridge*, J. Geophys., 43, 401-419.

Sánchez-Sesma, F.J. (1978). *Ground motion amplification due to canyons of arbitrary shape*. Proc. Int. Conf. on microzonations, 2nd., San Francisco, California, 2, 729-738.

Sánchez-Sesma, F.J. y E. Rosenblueth (1979). *Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves*. Int. J. Earthquake Engrg. Struct. Dyn., 7, 441-450.

Sánchez-Sesma, F.J. y J.A. Esquivel (1979). *Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves*. Bull. Seism. Soc. Am., 69, 1107-1120.

Sánchez-Sesma, F.J. (1980). *Propagación de ondas elásticas en un medio seminfinito*, México, Instituto de Ingeniería, U.N.A.M.

Sánchez-Sesma, F.J. (1983). *Difraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities*, U.S.A., Bulletin of the Seismological Society of America, 1621-1636.

Sánchez-Sesma, F.J., S. Chávez Pérez, and J. Avilés (1984). *Scattering of elastic waves by three-dimensional topographies*, California, U.S.A., Proc. World Conf. Earthquake Engrg., 8th.

Sánchez-Sesma, F.J., M.A. Bravo and I. Herrera (1985). *Surface motion of topographical irregularities for incident P, SV and Rayleigh waves*, Bull. Seism. Soc. Am., 75, 263-269.

Sánchez-Sesma, F.J., Chávez-García, F.J., and Bravo, A. (1986). *Seismic response of class of alluvial valleys for incident SH waves*, México, Bulletin of the Seismological Society of America.

Sánchez-Sesma, F.J. y Velázquez (1987). *On the seismic response of a dipping layer wave motion*. (en trámite de publicación).

Tito Lucrecio Caro (1981). *"De la naturaleza de las cosas"*. Colección nuestros clásicos, U.N.A.M., 284(pp).

Wong, H.L. and P.C. Jennings (1975). *Effect of canyon topography on strong ground motion*. Bulletin of the Seismological Society of America, 65, 1239-1257.

Wong, H.L., Trifunac, M.D. and B. Westermo (1977). *Effects of surface and subsurface irregularities on the amplitude of monochromatic waves*. Bulletin of the Seismological Society of America, 67, 353-368.

Wong, H.L. (1982). *Effect of surface topography on the diffraction of P, SV and Rayleigh waves*. Bull. Seism. Soc. Am., 72, 1167-1183.