2 ej
20

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

CATEGORIAS BICARTESIANAS CERRADAS Y ALGEBRAS DE HEYTING

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

IVONNE VICTORIA PALLARES VEGA

México, D. F. Septiembre, 1987

INDICE

Introducción	II
Capítulo 1	1
Capítulo 2	19
Capítulo 3	29
Capítulo 4	49
Apéndice	70
Bibliografía	76

INTRODUCCION

El objetivo del presente trabajo es, esencialmente, establecer bajo qué condiciones una categoría bicartesiana cerrada tiene estructura de álgebra de Heyting. Las definiciones adoptadas han sido, desde el concepto de sistema deductivo hasta el de categoría bicartesiana cerrada, ecuacionales. Las nociones usuales de productos y coproductos binarios y de exponenciación que caracterizan a las categorías bicartesianas cerradas, han sido sustituídas por las de conjunción, disyunción e implicación, respectivamente.

En el primer capítulo se definen los conceptos de gráfica, sistema deductivo, cálculo para la conjunción, cálculo proposicional intuicionista positivo, cálculo proposicional intuicionista y de lógica proposicional clásica. En esta primera parte, los resultados sólo se refieren a la existencia de pruebas, a la validez de ciertas reglas de inferencia y a la equivalencia entre algunas de las ecuaciones que definen a dichos conceptos.

En el segundo capítulo se dan las definiciones de categoría, categoría cartesiana y de categoría cartesiana cerrada. Se introduce también el concepto de isomorfismo, con lo cual, algunas de las proposiciones del capítulo anterior se traducen, de manera natural, en resultados conocidos acerca de las categorías cartesianas (cerradas).

Con el propósito de englobar en la definición de categoría bicartesiana cerrada los conceptos anteriores, en el tercer capítulo se define el de cálculo proposicional intuicionista completo y, finalmente, el de categoría bicartesiana cerrada. Al igual que en el caso de las categorías cartesianas (cerradas), la mayoría de los resultados relativos al cálculo proposicional intuicionista se traducen en forma directa para las categorías bicartesianas cerradas. Sin embargo, no fue posible, utilizando únicamente definiciones y algunos resultados previos, demostrar dos importantes resultados de este capítulo. Por esta razón fue necesario introducir los conceptos de funtor, transformación natural e isomorfismo natural y, finalmente, enunciar un caso particular del Lema de Yoneda (Proposición 3.5). De esta manera, dichos resultados se obtienen como corolarios de las proposiciones 3.5 y 3.6.

El último capítulo se inicia con la definición de álgebra de Heyting. Esta parte difiere en cierta forma de los capítulos anteriores; las definiciones no son ya ecuacionales y se introducen nuevos conceptos sin relación aparente con los anteriormente definidos. Sin embargo, esto fue hecho con el propósito de recuperar la noción usual de álgebra de Heyting, lo cual simplificó en gran medida las demostraciones de los resultados de este capítulo. También se han incluido en esta parte algunas proposiciones acerca de las álgebras de Boole, relacionando finalmente ambos conceptos. Por último, se introdujo la definición de equivalencia entre categorías para poder analizar bajo qué condiciones una categoría bicartesiana cerrada es equivalente a un álgebra de Heyting.

Mi más sincero agradecimiento al M. en C. Alejandro Odgers López por la dirección de este trabajo, y muy especialmente por la orientación que ha dado a mi formación matemática.

CAPITULO 1

Definición 1.1.
Una gráfica consiste de:
(i) un conjunto O de objetos, denotados por $A, B, C, \ldots$
(ii) un conjunto F de flechas, denotadas por $f, g, h, \ldots$
(iii) dos funciones $F \overset{dom}{\underset{cod}{\rightrightarrows}} O$.

Si f es una flecha tal que $dom(f) = A$ y $cod(f) = B$, entonces escribiremos simplemente $f: A \longrightarrow B$ ó $A \xrightarrow{f} B$.

Definición 1.2.
Un sistema deductivo es una gráfica en la cual se satisfacen:
R1a. Para todo objeto A, existe $1_A \in F$ tal que $dom(1_A) = cod(1_A) = A$, y
R1b. Existe una operación $\varphi: F X_o F \longrightarrow F$, denotada por $\varphi((g,f)) = gf$, tal que $dom(gf) = dom(f)$ y $cod(gf) = cod(g)$, donde
$F X_o F = \{(g,f) \in F X F \mid dom(g) = cod(f)\}$.

Si en una gráfica identificamos a los objetos con fórmulas de la lógica, entonces una flecha $A \xrightarrow{f} B$ de la gráfica será una prueba de B a partir de A. De esta forma, R1b. puede interpretarse como una regla de inferencia y reescribirse de la siguiente manera:

R1b. $\dfrac{A \xrightarrow{f} B,\ B \xrightarrow{g} C}{A \xrightarrow{gf} C}$.

Definición 1.3.
Un cálculo para la conjunción es un sistema deductivo junto con un objeto T (llamado verdad) y una operación $\wedge: O X O \longrightarrow O$ (llamada conjunción), denotada por $\wedge((A,B)) = A \wedge B$, que satisfacen, para cualesquiera objetos A, B y C:
R2. existe $A \xrightarrow{O_A} T$,

R3a. existe $A \wedge B \xrightarrow{\pi_{A,B}} A$,

R3b. existe $A \wedge B \xrightarrow{\pi'_{A,B}} B$, y

R3c. $\dfrac{C \xrightarrow{f} A,\ C \xrightarrow{g} B}{C \xrightarrow{\langle f,g\rangle} A \wedge B}$.

Proposición 1.1.

En un cálculo para la conjunción se satisfacen, para cualesquiera objetos A, B, C, D y flechas f, g:

(i) existe $A \xrightarrow{T_A} A \wedge T$,

(ii) existe $A \wedge B \xrightarrow{\tau_{A,B}} B \wedge A$,

(iii) existen $A \wedge (B \wedge C) \xrightarrow{\alpha_{A,B\wedge C}} (A \wedge B) \wedge C$ y $(A \wedge B) \wedge C \xrightarrow{\alpha_{A\wedge B,C}} A \wedge (B \wedge C)$, y

(iv) $\dfrac{A \xrightarrow{f} B,\ C \xrightarrow{g} D}{A \wedge C \xrightarrow{f \wedge g} B \wedge D}$.

Demostración.

(i) $\dfrac{A \xrightarrow{1_A} A,\ A \xrightarrow{0_A} T}{A \xrightarrow{\langle 1_A, 0_A\rangle} A \wedge T}$ (de R1a., R2. y R3c.).

Sea entonces $T_A = \langle 1_A, 0_A \rangle$.

(ii) $\dfrac{A \wedge B \xrightarrow{\pi'_{A,B}} B,\ A \wedge B \xrightarrow{\pi_{A,B}} A}{A \wedge B \xrightarrow{\langle \pi'_{A,B}, \pi_{A,B}\rangle} B \wedge A}$ (de R3b., R3a. y R3c.).

Sea $\tau_{A,B} = \langle \pi'_{A,B}, \pi_{A,B} \rangle$.

(iii) $\dfrac{A \wedge (B \wedge C) \xrightarrow{\pi'_{A,B\wedge C}} B \wedge C,\ B \wedge C \xrightarrow{\pi_{B,C}} B}{A \wedge (B \wedge C) \xrightarrow{\pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}} B}$ (de R3b., R3a. y R1b.),

$\dfrac{A \wedge (B \wedge C) \xrightarrow{\pi_{A,B\wedge C}} A,\ A \wedge (B \wedge C) \xrightarrow{\pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}} B}{A \wedge (B \wedge C) \xrightarrow{\langle \pi_{A,B\wedge C}, \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle} A \wedge B}$ (de R3a. y R3c.),

$\dfrac{A \wedge (B \wedge C) \xrightarrow{\pi'_{A,B\wedge C}} B \wedge C,\ B \wedge C \xrightarrow{\pi'_{B,C}} C}{A \wedge (B \wedge C) \xrightarrow{\pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}} C}$ (de R3b. y R1b.),

$$\frac{A\wedge(B\wedge C)\xrightarrow{\langle \pi_{A,B\wedge C},\ \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle} A\wedge B\ ,\quad A\wedge(B\wedge C)\xrightarrow{\pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}} C}{A\wedge(B\wedge C)\xrightarrow{\langle\langle \pi_{A,B\wedge C},\ \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle,\ \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle}(A\wedge B)\wedge C} \qquad (\text{de R3c.}).$$

Sea entonces $\alpha_{A,B\wedge C}=\langle\langle \pi_{A,B\wedge C},\ \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle,\ \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle$.

$$\frac{(A\wedge B)\wedge C\xrightarrow{\pi_{A\wedge B,C}} A\wedge B\ ,\quad A\wedge B\xrightarrow{\pi_{A,B}} A}{(A\wedge B)\wedge C\xrightarrow{\pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}} A} \qquad (\text{de R3a. y R1b.}),$$

$$\frac{(A\wedge B)\wedge C\xrightarrow{\pi_{A\wedge B,C}} A\wedge B\ ,\quad A\wedge B\xrightarrow{\pi'_{A,B}} B}{(A\wedge B)\wedge C\xrightarrow{\pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}} B} \qquad (\text{de R3a., R3b. y R1b.}),$$

$$\frac{(A\wedge B)\wedge C\xrightarrow{\pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}} B\ ,\quad (A\wedge B)\wedge C\xrightarrow{\pi'_{A\wedge B,C}} C}{(A\wedge B)\wedge C\xrightarrow{\langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C},\ \pi'_{A\wedge B,C}\rangle} B\wedge C} \qquad (\text{de R3b. y R3c.}),$$

$$\frac{(A\wedge B)\wedge C\xrightarrow{\pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}} A\ ,\quad (A\wedge B)\wedge C\xrightarrow{\langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C},\ \pi'_{A\wedge B,C}\rangle} B\wedge C}{(A\wedge B)\wedge C\xrightarrow{\langle \pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C},\ \langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C},\ \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\rangle} A\wedge(B\wedge C)} \qquad (\text{de R3c.}).$$

Sea entonces $\alpha_{A\wedge B,C}=\langle \pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C},\ \langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C},\ \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\rangle$.

(iv) Sean $f: A\longrightarrow B$ y $g: C\longrightarrow D$ dos flechas.

$$\frac{A\wedge C\xrightarrow{\pi_{A,C}} A\ ,\quad A\xrightarrow{f} B}{A\wedge C\xrightarrow{f\pi_{A,C}} B} \qquad (\text{de R3a. y R1b.}),$$

$$\frac{A\wedge C\xrightarrow{\pi'_{A,C}} C\ ,\quad C\xrightarrow{g} D}{A\wedge C\xrightarrow{g\pi'_{A,C}} D} \qquad (\text{de R3b. y R1b.}),$$

$$\frac{A\wedge C\xrightarrow{f\pi_{A,C}} B\ ,\quad A\wedge C\xrightarrow{g\pi'_{A,C}} D}{A\wedge C\xrightarrow{\langle f\pi_{A,C},\ g\pi'_{A,C}\rangle} B\wedge D} \qquad (\text{de R3c.}).$$

Sea entonces $f\wedge g=\langle f\pi_{A,C},\ g\pi'_{A,C}\rangle$.

$\square$.

Definición 1.4.

Un cálculo proposicional intuicionista positivo, es un cálculo para la conjunción junto con una operación $\Leftarrow : O \times O \longrightarrow O$, denotada por $\Leftarrow((A,B)) = A \Leftarrow B$, que satisface, para cualesquiera objetos A, B y C:

R4a. existe $(A \Leftarrow B) \wedge B \xrightarrow{\epsilon_{A,B}} A$, y

R4b. $\dfrac{C \wedge B \xrightarrow{h} A}{C \xrightarrow{h^*} A \Leftarrow B}$.

Proposición 1.2.

En un cálculo proposicional intuicionista positivo, R4b. es equivalente a:

R'4b. existe $C \xrightarrow{\eta_{C,B}} (C \wedge B) \Leftarrow B$, y

R'4c. $\dfrac{D \xrightarrow{g} A}{D \Leftarrow B \xrightarrow{g \Leftarrow 1_B} A \Leftarrow B}$, para cualesquiera objetos A, B, C, D y cualquier flecha g.

Demostración.

Primero se probará que en un cálculo proposicional intuicionista positivo se satisfacen R'4b. y R'4c.

$\dfrac{C \wedge B \xrightarrow{1_{C\wedge B}} C \wedge B}{C \xrightarrow{(1_{C\wedge B})^*} (C \wedge B) \Leftarrow B}$ (de R1a. y R4b.).

Sea entonces $\eta_{C,B} = (1_{C\wedge B})^*$.

Si $g : D \longrightarrow A$ es una flecha, entonces de R4a. y R1b. se tiene

$\dfrac{(D \Leftarrow B) \wedge B \xrightarrow{\epsilon_{D,B}} D, \; D \xrightarrow{g} A}{(D \Leftarrow B) \wedge B \xrightarrow{g\epsilon_{D,B}} A}$.

Y por R4b., existe $D \Leftarrow B \xrightarrow{(g\epsilon_{D,B})^*} A \Leftarrow B$. Sea $g \Leftarrow 1_B = (g\epsilon_{D,B})^*$.

Por lo tanto, en un cálculo proposicional intuicionista positivo se satisfacen R'4b. y R'4c.

Supongamos ahora que se satisfacen R'4b., R'4c. y R4a.

Sea $h : C \wedge B \longrightarrow A$ una flecha.

Entonces,

$$\frac{C \xrightarrow{\eta_{C,B}} (C\wedge B)\Leftarrow B,\ (C\wedge B)\Leftarrow B \xrightarrow{h\Leftarrow 1_B} A\Leftarrow B}{C \xrightarrow{(h\Leftarrow 1_B)\eta_{C,B}} A\Leftarrow B}$$ (de R'4b., R'4c. y R1b.).

Sea $h^{*} = (h\Leftarrow 1_B)\eta_{C,B}$. Entonces también se satisface R4b.

∴ R4b. es equivalente a R'4b. y R'4c.

□.

Proposición 1.3.

En un cálculo proposicional intuicionista positivo se tienen las siguientes reglas de inferencia, para cualesquiera objetos A, B, C y flechas f, g, h:

(i) $\dfrac{A \xrightarrow{f} B}{T \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} B\Leftarrow A}$,

(ii) $\dfrac{T \xrightarrow{g} B\Leftarrow A}{A \xrightarrow{g'} B}$, y

(iii) $\dfrac{A \xrightarrow{h} B}{C\Leftarrow B \xrightarrow{\bar{h}} C\Leftarrow A}$.

Demostración.

(i) Sea $f: A \longrightarrow B$ una flecha. Entonces, de R3b. y R1b. se tiene

$$\frac{T\wedge A \xrightarrow{\pi'_{T,A}} A,\ A \xrightarrow{f} B}{T\wedge A \xrightarrow{f\pi'_{T,A}} B}.$$

Y por R4b., existe $T \xrightarrow{(f\pi'_{T,A})^{*}} B\Leftarrow A$. Sea entonces $\ulcorner f \urcorner = (f\pi'_{T,A})^{*}$.

∴ $\dfrac{A \xrightarrow{f} B}{T \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} B\Leftarrow A}$.

(ii) Sea $g: T \longrightarrow B\Leftarrow A$ una flecha.

De R2. y R1b., $\dfrac{A \xrightarrow{O_A} T,\ T \xrightarrow{g} B\Leftarrow A}{A \xrightarrow{gO_A} B\Leftarrow A}$.

De R1a. y R3c., $\dfrac{A \xrightarrow{gO_A} B\Leftarrow A,\ A \xrightarrow{1_A} A}{A \xrightarrow{\langle gO_A, 1_A\rangle} (B\Leftarrow A)\wedge A}$.

Y de R4a. y R1b., $\dfrac{A \xrightarrow{\langle gO_A, 1_A\rangle} (B\Leftarrow A)\wedge A,\ (B\Leftarrow A)\wedge A \xrightarrow{\varepsilon_{B,A}} B}{A \xrightarrow{\varepsilon_{B,A}\langle gO_A, 1_A\rangle} B}$.

Sea entonces $g' = \epsilon_{B,A}\langle g O_A , 1_A\rangle$.

$$\therefore \ \frac{T \xrightarrow{g} B \Leftarrow A}{A \xrightarrow{g'} B} .$$

(iii) Sea $h: A \longrightarrow B$ una flecha.

De R3b. y R1b., $\dfrac{(C \Leftarrow B)\wedge A \xrightarrow{\pi'_{C\Leftarrow B,A}} A ,\ A \xrightarrow{h} B}{(C\Leftarrow B)\wedge A \xrightarrow{h\pi'_{C\Leftarrow B,A}} B}$.

De R3a. y R3c., $\dfrac{(C \Leftarrow B)\wedge A \xrightarrow{\pi_{C\Leftarrow B,A}} C \Leftarrow B ,\ (C\Leftarrow B)\wedge A \xrightarrow{h\pi'_{C\Leftarrow B,A}} B}{(C\Leftarrow B)\wedge A \xrightarrow{\langle \pi_{C\Leftarrow B,A} , h\pi'_{C\Leftarrow B,A}\rangle} (C\Leftarrow B)\wedge B}$.

De R4a. y R1b., $\dfrac{(C \Leftarrow B)\wedge A \xrightarrow{\langle \pi_{C\Leftarrow B,A} , h\pi'_{C\Leftarrow B,A}\rangle} (C\Leftarrow B)\wedge B ,\ (C\Leftarrow B)\wedge B \xrightarrow{\epsilon_{C,B}} C}{(C\Leftarrow B)\wedge A \xrightarrow{\epsilon_{C,B}\langle \pi_{C\Leftarrow B,A} , h\pi'_{C\Leftarrow B,A}\rangle} C}$.

Y por R4b., existe $C \Leftarrow B \xrightarrow{(\epsilon_{C,B}\langle \pi_{C\Leftarrow B,A} , h\pi'_{C\Leftarrow B,A}\rangle)^*} C \Leftarrow A$.

Sea $\overline{h} = (\epsilon_{C,B}\langle \pi_{C\Leftarrow B,A} , h\pi'_{C\Leftarrow B,A}\rangle)^*$.

$$\therefore \ \frac{A \xrightarrow{h} B}{C\Leftarrow B \xrightarrow{\overline{h}} C \Leftarrow A} .$$

$\square$.

Proposición 1.4.

En un cálculo proposicional intuicionista positivo existen las siguientes flechas, para cualesquiera objetos A, B y C:

(i) $A \Leftarrow T \longrightarrow A$, $A \longrightarrow A \Leftarrow T$,

(ii) $T \longrightarrow T \Leftarrow A$,

(iii) $(A\wedge B)\Leftarrow C \longrightarrow (A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C)$, $(A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C) \longrightarrow (A\wedge B)\Leftarrow C$,

(iv) $A \Leftarrow (B\wedge C) \longrightarrow (A\Leftarrow C)\Leftarrow B$, $(A\Leftarrow C)\Leftarrow B \longrightarrow A \Leftarrow (B\wedge C)$, y

(v) $(C\Leftarrow B)\wedge(B\Leftarrow A) \longrightarrow C \Leftarrow A$.

Demostración.

(i) $\dfrac{A\Leftarrow T \xrightarrow{1_{A\Leftarrow T}} A \Leftarrow T ,\ A\Leftarrow T \xrightarrow{O_{A\Leftarrow T}} T}{A\Leftarrow T \xrightarrow{\langle 1_{A\Leftarrow T} , O_{A\Leftarrow T}\rangle} (A\Leftarrow T)\wedge T}$ (de R1a., R2. y R3c.) ;

$$\frac{A\Leftarrow T \xrightarrow{\langle 1_{A\Leftarrow T} , O_{A\Leftarrow T}\rangle} (A\Leftarrow T)\wedge T ,\ (A\Leftarrow T)\wedge T \xrightarrow{\epsilon_{A,T}} A}{A\Leftarrow T \xrightarrow{\epsilon_{A,T}\langle 1_{A\Leftarrow T} , O_{A\Leftarrow T}\rangle} A}$$ (de R4a. y R1b.).

$$\frac{A \wedge T \xrightarrow{\pi_{A,T}} A}{A \xrightarrow{(\pi_{A,T})^*} A \Leftarrow T} \qquad \text{(de R3a. y R4b.).}$$

$\therefore$ Existen flechas $A \Leftarrow T \longrightarrow A$ y $A \longrightarrow A \Leftarrow T$.

(ii) $$\frac{A \xrightarrow{O_A} T}{T \xrightarrow{\ulcorner O_A \urcorner} T \Leftarrow A} \qquad \text{(de R2. y de la Proposición 1.3).}$$

$\therefore$ Existe una flecha $T \longrightarrow T \Leftarrow A$.

(iii) $$\frac{((A \wedge B) \Leftarrow C) \wedge C \xrightarrow{\epsilon_{A \wedge B, C}} A \wedge B,\ A \wedge B \xrightarrow{\pi_{A,B}} A}{((A \wedge B) \Leftarrow C) \wedge C \xrightarrow{\pi_{A,B}\, \epsilon_{A \wedge B, C}} A} \qquad \text{(de R4a., R3a. y R1b.),}$$

$$\frac{((A \wedge B) \Leftarrow C) \wedge C \xrightarrow{\pi_{A,B}\, \epsilon_{A \wedge B, C}} A}{(A \wedge B) \Leftarrow C \xrightarrow{(\pi_{A,B}\, \epsilon_{A \wedge B, C})^*} A \Leftarrow C} \qquad \text{(de R4b.),}$$

$$\frac{((A \wedge B) \Leftarrow C) \wedge C \xrightarrow{\epsilon_{A \wedge B, C}} A \wedge B,\ A \wedge B \xrightarrow{\pi'_{A,B}} B}{((A \wedge B) \Leftarrow C) \wedge C \xrightarrow{\pi'_{A,B}\, \epsilon_{A \wedge B, C}} B} \qquad \text{(de R4a., R3b. y R1b.),}$$

$$\frac{((A \wedge B) \Leftarrow C) \wedge C \xrightarrow{\pi'_{A,B}\, \epsilon_{A \wedge B, C}} B}{(A \wedge B) \Leftarrow C \xrightarrow{(\pi'_{A,B}\, \epsilon_{A \wedge B, C})^*} B \Leftarrow C} \qquad \text{(de R4b.),}$$

$$\frac{(A \wedge B) \Leftarrow C \xrightarrow{(\pi_{A,B}\, \epsilon_{A \wedge B, C})^*} A \Leftarrow C,\ (A \wedge B) \Leftarrow C \xrightarrow{(\pi'_{A,B}\, \epsilon_{A \wedge B, C})^*} B \Leftarrow C}{(A \wedge B) \Leftarrow C \xrightarrow{\left\langle (\pi_{A,B}\, \epsilon_{A \wedge B, C})^*,\ (\pi'_{A,B}\, \epsilon_{A \wedge B, C})^* \right\rangle} (A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)} \qquad \text{(de R3c.).}$$

$\therefore$ Existe una flecha $(A \wedge B) \Leftarrow C \longrightarrow (A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)$.

Ahora bien, por la Proposición 1.1. inciso (iii), existe una flecha $\alpha_{(A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C), C} : ((A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)) \wedge C \longrightarrow (A \Leftarrow C) \wedge ((B \Leftarrow C) \wedge C)$.

Por R3b., existe $\pi'_{A \Leftarrow C, (B \Leftarrow C) \wedge C} : (A \Leftarrow C) \wedge ((B \Leftarrow C) \wedge C) \longrightarrow (B \Leftarrow C) \wedge C$.

Y por R1b., existe $\pi'_{A \Leftarrow C, (B \Leftarrow C) \wedge C}\, \alpha_{(A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C), C} : ((A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)) \wedge C \longrightarrow (B \Leftarrow C) \wedge C$.

Finalmente, por R4a. y R1b., existe $\epsilon_{B,C}\, \pi'_{A \Leftarrow C, (B \Leftarrow C) \wedge C}\, \alpha_{(A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C), C} : ((A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)) \wedge C \longrightarrow B$.

Sea $g = \epsilon_{B,C}\, \pi'_{A \Leftarrow C, (B \Leftarrow C) \wedge C}\, \alpha_{(A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C), C}$.

Por la Proposición 1.1. inciso (ii), existe $\tau_{(A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C), C} : ((A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)) \wedge C \longrightarrow C \wedge ((A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C))$. Y por el inciso (iii) de la misma Proposición, existe $\alpha_{C, (A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)} : C \wedge ((A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)) \longrightarrow (C \wedge (A \Leftarrow C)) \wedge (B \Leftarrow C)$.

Entonces, por R1b., existe $\alpha_{C, (A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)}\, \tau_{(A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C), C} : ((A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)) \wedge C \longrightarrow (C \wedge (A \Leftarrow C)) \wedge (B \Leftarrow C)$.

Por R3a., existe $\pi_{C\wedge(A\Leftarrow C),B\Leftarrow C} : (C\wedge(A\Leftarrow C))\wedge(B\Leftarrow C) \longrightarrow C\wedge(A\Leftarrow C)$.

Y de nuevo por R1b., existe $\pi_{C\wedge(A\Leftarrow C),B\Leftarrow C}\,\alpha_{C,(A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C)}\,\tau_{(A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C),C} : ((A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C))\wedge C \to C\wedge(A\Leftarrow C)$

Por la Proposición 1.1. inciso (ii), existe $\tau_{C,A\Leftarrow C} : C\wedge(A\Leftarrow C) \longrightarrow (A\Leftarrow C)\wedge C$.

Por R4a., existe $\epsilon_{A,C} : (A\Leftarrow C)\wedge C \longrightarrow A$. Entonces por R1b., existe $\epsilon_{A,C}\tau_{C,A\Leftarrow C} : C\wedge(A\Leftarrow C) \to A$.

Usando nuevamente R1b., se tiene la siguiente flecha:

$$\epsilon_{A,C}\,\tau_{C,A\Leftarrow C}\,\pi_{C\wedge(A\Leftarrow C),B\Leftarrow C}\,\alpha_{C,(A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C)}\,\tau_{(A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C),C} : ((A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C))\wedge C \longrightarrow A.$$

Sea f dicha flecha.

De R3c., $$\frac{((A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C))\wedge C \xrightarrow{f} A,\quad ((A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C))\wedge C \xrightarrow{g} B}{((A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C))\wedge C \xrightarrow{\langle f,g\rangle} A\wedge B.}$$

Y por R4b.; existe $(A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C) \xrightarrow{(\langle f,g\rangle)^*} (A\wedge B)\Leftarrow C$.

(iv) Por la Proposición 1.1. inciso (iii), existe $\alpha_{(A\Leftarrow(B\wedge C))\wedge B,C}$ $((A\Leftarrow(B\wedge C))\wedge B)\wedge C \to (A\Leftarrow(B\wedge C))\wedge(B\wedge C)$.

Por R4a., existe $\epsilon_{A,B\wedge C} : (A\Leftarrow(B\wedge C))\wedge(B\wedge C) \longrightarrow A$. Entonces, por R1b., existe $\epsilon_{A,B\wedge C}\,\alpha_{(A\Leftarrow(B\wedge C))\wedge B,C} : ((A\Leftarrow(B\wedge C))\wedge B)\wedge C \longrightarrow A$. Por R4b., existe $(\epsilon_{A,B\wedge C}\,\alpha_{(A\Leftarrow(B\wedge C))\wedge B,C})^* : (A\Leftarrow(B\wedge C))\wedge B \longrightarrow A\Leftarrow C$. Y, nuevamente por R4b., existe $((\epsilon_{A,B\wedge C}\,\alpha_{(A\Leftarrow(B\wedge C))\wedge B,C})^*)^* : A\Leftarrow(B\wedge C) \longrightarrow (A\Leftarrow C)\Leftarrow B$.

Ahora, de R4a., R1a. y de la Proposición 1.1. inciso (iv), se obtiene:

$$\frac{((A\Leftarrow C)\Leftarrow B)\wedge B \xrightarrow{\epsilon_{A\Leftarrow C,B}} A\Leftarrow C,\quad C \xrightarrow{1_C} C}{(((A\Leftarrow C)\Leftarrow B)\wedge B)\wedge C \xrightarrow{\epsilon_{A\Leftarrow C,B}\wedge 1_C} (A\Leftarrow C)\wedge C}.$$

Por R4a. y R1b., existe $(((A\Leftarrow C)\Leftarrow B)\wedge B)\wedge C \xrightarrow{\epsilon_{A,C}(\epsilon_{A\Leftarrow C,B}\wedge 1_C)} A$.

Por la Proposición 1.1. inciso (iii), existe $((A\Leftarrow C)\Leftarrow B)\wedge(B\wedge C) \xrightarrow{\alpha_{(A\Leftarrow C)\Leftarrow B,B\wedge C}} (((A\Leftarrow C)\Leftarrow B)\wedge B)\wedge C$.

Y por R1b., existe $\epsilon_{A,C}(\epsilon_{A\Leftarrow C,B}\wedge 1_C)\,\alpha_{(A\Leftarrow C)\Leftarrow B,B\wedge C} : ((A\Leftarrow C)\Leftarrow B)\wedge(B\wedge C) \longrightarrow A$.

Por último, de R4b. se obtiene $(\epsilon_{A,C}(\epsilon_{A\Leftarrow C,B}\wedge 1_C)\,\alpha_{(A\Leftarrow C)\Leftarrow B,B\wedge C})^* : (A\Leftarrow C)\Leftarrow B \to A\Leftarrow(B\wedge C)$.

(v) De la Proposición 1.1. inciso (iii), de R3b. y de R1b. se obtiene

$\pi'_{C\Leftarrow B,(B\Leftarrow A)\wedge A}\,\alpha_{(C\Leftarrow B)\wedge(B\Leftarrow A),A} : ((C\Leftarrow B)\wedge(B\Leftarrow A))\wedge A \longrightarrow (B\Leftarrow A)\wedge A$.

Por R4a. y R1b., existe $\epsilon_{B,A}\,\pi'_{C\Leftarrow B,(B\Leftarrow A)\wedge A}\,\alpha_{(C\Leftarrow B)\wedge(B\Leftarrow A),A} : ((C\Leftarrow B)\wedge(B\Leftarrow A))\wedge A \longrightarrow B$

De R3a. y R1b. se obtiene $\pi_{C\Leftarrow B,(B\Leftarrow A)\wedge A}\,\alpha_{(C\Leftarrow B)\wedge(B\Leftarrow A),A} : ((C\Leftarrow B)\wedge(B\Leftarrow A))\wedge A \longrightarrow C\Leftarrow B$.

Finalmente, por R3c., R4a., R1b. y R4b., se obtiene

$$(\epsilon_{C,B}\langle \pi_{C\Leftarrow B,(B\Leftarrow A)\wedge A}\,\alpha_{(C\Leftarrow B)\wedge(B\Leftarrow A),A},\ \epsilon_{B,A}\,\pi'_{C\Leftarrow B,(B\Leftarrow A)\wedge A}\,\alpha_{(C\Leftarrow B)\wedge(B\Leftarrow A),A}\rangle)^* : (C\Leftarrow B)\wedge(B\Leftarrow A) \to C\Leftarrow A.$$

$\square$.

Proposición 1.5.

En un cálculo proposicional intuicionista positivo, para cualesquiera objetos A, B, C, D y flechas f, g, se satisface la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{A \xrightarrow{f} B,\ C \xrightarrow{g} D}{A \Leftarrow D \xrightarrow{f \Leftarrow g} B \Leftarrow C}\ .$$

Demostración.

Sean $f: A \longrightarrow B$ y $g: C \longrightarrow D$ dos flechas.

$$\frac{A \xrightarrow{f} B}{A \Leftarrow D \xrightarrow{f \Leftarrow 1_D} B \Leftarrow D} \qquad \text{(de R'4c.)}.$$

$$\frac{(A \Leftarrow D) \wedge C \xrightarrow{\pi'_{A \Leftarrow D, C}} C,\ C \xrightarrow{g} D}{(A \Leftarrow D) \wedge C \xrightarrow{g\pi'_{A \Leftarrow D, C}} D} \qquad \text{(de R3b. y R1b.)},$$

$$\frac{(A \Leftarrow D) \wedge C \xrightarrow{g\pi'_{A \Leftarrow D, C}} D}{A \Leftarrow D \xrightarrow{(g\pi'_{A \Leftarrow D, C})^*} D \Leftarrow C} \qquad \text{(de R4b.)},$$

$$\frac{A \Leftarrow D \xrightarrow{f \Leftarrow 1_D} B \Leftarrow D,\ A \Leftarrow D \xrightarrow{(g\pi'_{A \Leftarrow D, C})^*} D \Leftarrow C}{A \Leftarrow D \xrightarrow{\langle f \Leftarrow 1_D,\ (g\pi'_{A \Leftarrow D, C})^* \rangle} (B \Leftarrow D) \wedge (D \Leftarrow C)} \qquad \text{(de R3c.)}.$$

Por la Proposición 1.4. inciso (v), existe una flecha $(B \Leftarrow D) \wedge (D \Leftarrow C) \xrightarrow{h} B \Leftarrow C$.
Entonces, por R1b., existe $h\langle f \Leftarrow 1_D, (g\pi'_{A \Leftarrow D, C})^* \rangle : A \Leftarrow D \longrightarrow B \Leftarrow C$.
Sea $f \Leftarrow g$ dicha flecha.

$$\therefore \quad \frac{A \xrightarrow{f} B,\ C \xrightarrow{g} D}{A \Leftarrow D \xrightarrow{f \Leftarrow g} B \Leftarrow C}\ .$$

$\square$.

Definición 1.5.

Un cálculo proposicional intuicionista es un cálculo proposicional intuicionista positivo junto con un objeto $\perp$ (llamado falso) y una operación $\vee: O \times O \longrightarrow O$ (llamada disyunción), denotada por $\vee((A,B)) = A \vee B$, que satisfacen, para cualesquiera objetos A, B y C:

R5. existe $\perp \xrightarrow{\square_A} A$,

R6a. existe $A \xrightarrow{K_{A,B}} A \vee B$,

R6b. existe $B \xrightarrow{K'_{A,B}} A \vee B$, y

R6c. existe $(C \Leftarrow A) \wedge (C \Leftarrow B) \xrightarrow{\xi^C_{A,B}} C \Leftarrow (A \vee B)$.

Proposición 1.6.

En un cálculo proposicional intuicionista, para cualesquiera objetos A, B y C, existen las siguientes flechas:

(i) $T \longrightarrow A \Leftarrow \perp$, y

(ii) $C \Leftarrow (A \vee B) \longrightarrow (C \Leftarrow A) \wedge (C \Leftarrow B)$.

Demostración.

(i) $\dfrac{\perp \xrightarrow{\square_A} A}{T \xrightarrow{\ulcorner \square_A \urcorner} A \Leftarrow \perp}$ (de R5. y de la Proposición 1.3. inciso (i)).

$\therefore$ Existe una flecha $T \longrightarrow A \Leftarrow \perp$.

(ii) De R1a., R6a. y de la Proposición 1.1. inciso (iv), se obtiene

$$\frac{C \Leftarrow (A \vee B) \xrightarrow{1_{C \Leftarrow (A \vee B)}} C \Leftarrow (A \vee B),\ A \xrightarrow{K_{A,B}} A \vee B}{(C \Leftarrow (A \vee B)) \wedge A \xrightarrow{1_{C \Leftarrow (A \vee B)} \wedge K_{A,B}} (C \Leftarrow (A \vee B)) \wedge (A \vee B)}.$$

Por R4a. y R1b., existe $(C \Leftarrow (A \vee B)) \wedge A \xrightarrow{\epsilon_{C,A \vee B}(1_{C \Leftarrow (A \vee B)} \wedge K_{A,B})} C$.

Análogamente, de R1a., R6b, R4a. y de la Proposición 1.1. inciso (iv), se obtiene $C \Leftarrow (A \vee B) \wedge B \xrightarrow{\epsilon_{C,A \vee B}(1_{C \Leftarrow (A \vee B)} \wedge K'_{A,B})} C$.

Entonces, por R4b., existen las siguientes flechas:

$C \Leftarrow (A \vee B) \xrightarrow{(\epsilon_{C,A \vee B}(1_{C \Leftarrow (A \vee B)} \wedge K_{A,B}))^*} C \Leftarrow A$ y $C \Leftarrow (A \vee B) \xrightarrow{(\epsilon_{C,A \vee B}(1_{C \Leftarrow (A \vee B)} \wedge K'_{A,B}))^*} C \Leftarrow B$.

Finalmente, por R3c., existe

$$\left\langle (\epsilon_{C,A \vee B}(1_{C \Leftarrow (A \vee B)} \wedge K_{A,B}))^*,\ (\epsilon_{C,A \vee B}(1_{C \Leftarrow (A \vee B)} \wedge K'_{A,B}))^* \right\rangle : C \Leftarrow (A \vee B) \longrightarrow (C \Leftarrow A) \wedge (C \Leftarrow B).$$

$\square$

Proposición 1.7.

En un cálculo proposicional intuicionista, para cualesquiera objetos A, B, C y flechas f, g, se satisface la siguiente regla de inferencia:

R'6c. $\dfrac{A \xrightarrow{f} C,\ B \xrightarrow{g} C}{A \vee B \xrightarrow{[f,g]} C}$.

Demostración.

Sean $A \xrightarrow{f} C$ y $B \xrightarrow{g} C$ dos flechas.

Por la Proposición 1.3. inciso (i), existen $T \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} C \Leftarrow A$ y $T \xrightarrow{\ulcorner g \urcorner} C \Leftarrow B$.

Por R3c., existe $T \xrightarrow{\langle \ulcorner f \urcorner, \ulcorner g \urcorner \rangle} (C \Leftarrow A) \wedge (C \Leftarrow B)$.

Entonces, por R6c. y R1b., existe $T \xrightarrow{\xi^{C}_{A,B} \langle \ulcorner f \urcorner, \ulcorner g \urcorner \rangle} C \Leftarrow (A \vee B)$.

Y, por la Proposición 1.3. inciso (ii), existe $\left(\xi^{C}_{A,B} \langle \ulcorner f \urcorner, \ulcorner g \urcorner \rangle \right)^{r} : A \vee B \longrightarrow C$.

Sea entonces $[f, g] = \left(\xi^{C}_{A,B} \langle \ulcorner f \urcorner, \ulcorner g \urcorner \rangle \right)^{r}$.

$\therefore \dfrac{A \xrightarrow{f} C,\ B \xrightarrow{g} C}{A \vee B \xrightarrow{[f,g]} C}$.

□.

Proposición 1.8.

En un cálculo proposicional intuicionista se satisfacen, para cualesquiera objetos A, B, C, D y flechas f, g:

(i) existe $A \vee \perp \xrightarrow{\perp_A} A$,

(ii) existe $A \vee B \xrightarrow{\nu_{A,B}} B \vee A$,

(iii) existen $A \vee (B \vee C) \xrightarrow{\alpha_{A,B\vee C}} (A \vee B) \vee C$, $(A \vee B) \vee C \xrightarrow{\alpha_{A\vee B,C}} A \vee (B \vee C)$, y

(iv) $\dfrac{A \xrightarrow{f} B,\ C \xrightarrow{g} D}{A \vee C \xrightarrow{f \vee g} B \vee D}$.

Demostración.

(i) $\dfrac{A \xrightarrow{1_A} A,\ \perp \xrightarrow{\square_A} A}{A \vee \perp \xrightarrow{[1_A, \square_A]} A}$ (de R1a., R5 y R'6c.).

Sea entonces $\perp_A = [1_A, \square_A]$.

(ii) $\dfrac{A \xrightarrow{K'_{B,A}} B \vee A,\ B \xrightarrow{K_{B,A}} B \vee A}{A \vee B \xrightarrow{[K'_{B,A}, K_{B,A}]} B \vee A}$ (de R6b., R6a. y R'6c.).

Sea entonces $u_{A,B} = [K'_{B,A}, K_{B,A}]$.

(iii) $$\frac{A \xrightarrow{K_{A,B}} A\vee B,\quad A\vee B \xrightarrow{K_{A\vee B,C}} (A\vee B)\vee C}{A \xrightarrow{K_{A\vee B,C}\,K_{A,B}} (A\vee B)\vee C}$$ (de R6a. y R1b.),

$$\frac{B \xrightarrow{K'_{A,B}} A\vee B,\quad A\vee B \xrightarrow{K_{A\vee B,C}} (A\vee B)\vee C}{B \xrightarrow{K_{A\vee B,C}\,K'_{A,B}} (A\vee B)\vee C}$$ (de R6b., R6a. y R1b.),

$$\frac{B \xrightarrow{K_{A\vee B,C}\,K'_{A,B}} (A\vee B)\vee C,\quad C \xrightarrow{K'_{A\vee B,C}} (A\vee B)\vee C}{B\vee C \xrightarrow{[K_{A\vee B,C}K'_{A,B},\ K'_{A\vee B,C}]} (A\vee B)\vee C}$$ (de R6b. y R'6c.),

$$\frac{A \xrightarrow{K_{A\vee B,C}\,K_{A,B}} (A\vee B)\vee C,\quad B\vee C \xrightarrow{[K_{A\vee B,C}K'_{A,B},\ K'_{A\vee B,C}]} (A\vee B)\vee C}{A\vee(B\vee C) \xrightarrow{[K_{A\vee B,C}K_{A,B},\ [K_{A\vee B,C}K'_{A,B},\ K'_{A\vee B,C}]]} (A\vee B)\vee C}$$ (de R'6c.).

Sea entonces $\alpha_{A,B\vee C} = [K_{A\vee B,C}K_{A,B},\ [K_{A\vee B,C}K'_{A,B},\ K'_{A\vee B,C}]]$.

$$\frac{B \xrightarrow{K_{B,C}} B\vee C,\quad B\vee C \xrightarrow{K'_{A,B\vee C}} A\vee(B\vee C)}{B \xrightarrow{K'_{A,B\vee C}\,K_{B,C}} A\vee(B\vee C)}$$ (de R6a., R6b. y R1b.),

$$\frac{A \xrightarrow{K_{A,B\vee C}} A\vee(B\vee C),\quad B \xrightarrow{K'_{A,B\vee C}K_{B,C}} A\vee(B\vee C)}{A\vee B \xrightarrow{[K_{A,B\vee C},\ K'_{A,B\vee C}K_{B,C}]} A\vee(B\vee C)}$$ (de R6a. y R'6c.),

$$\frac{C \xrightarrow{K'_{B,C}} B\vee C,\quad B\vee C \xrightarrow{K'_{A,B\vee C}} A\vee(B\vee C)}{C \xrightarrow{K'_{A,B\vee C}\,K'_{B,C}} A\vee(B\vee C)}$$ (de R6b. y R1b.),

$$\frac{A\vee B \xrightarrow{[K_{A,B\vee C},\ K'_{A,B\vee C}K_{B,C}]} A\vee(B\vee C),\quad C \xrightarrow{K'_{A,B\vee C}K'_{B,C}} A\vee(B\vee C)}{(A\vee B)\vee C \xrightarrow{[[K_{A,B\vee C},\ K'_{A,B\vee C}K_{B,C}],\ K'_{A,B\vee C}K'_{B,C}]} A\vee(B\vee C)}$$ (de R'6c.).

Sea entonces $\alpha_{A\vee B,C} = [[K_{A,B\vee C},\ K'_{A,B\vee C}K_{B,C}],\ K'_{A,B\vee C}K'_{B,C}]$.

(iv) Sean $A \xrightarrow{f} B$ y $C \xrightarrow{g} D$ dos flechas.

$$\frac{A \xrightarrow{f} B,\quad B \xrightarrow{K_{B,D}} B\vee D}{A \xrightarrow{K_{B,D}f} B\vee D}$$ (de R6a. y R1b.),

$$\frac{C \xrightarrow{g} D\ ,\ D \xrightarrow{K'_{B,D}} B \vee D}{C \xrightarrow{K'_{B,D}\, g} B \vee D}$$ (de R6b. y R1b.),

$$\frac{A \xrightarrow{K_{B,D} f} B \vee D\ ,\ C \xrightarrow{K'_{B,D}\, g} B \vee D}{A \vee C \xrightarrow{[K_{B,D} f,\ K'_{B,D}\, g]} B \vee D}$$ (de R'6c.).

Sea entonces $f \vee g = [K_{B,D} f, K'_{B,D}\, g]$.

$\therefore$ $$\frac{A \xrightarrow{f} B\ ,\ C \xrightarrow{g} D}{A \vee C \xrightarrow{f \vee g} B \vee D}.$$

a.

Proposición 1.9.

Si A, B y D son objetos de un cálculo proposicional intuicionista, entonces son equivalentes:

(i) existen $A \xrightarrow{\lambda} D$, $B \xrightarrow{\lambda'} D$ y para cualquier objeto C, $\dfrac{A \xrightarrow{f} C,\ B \xrightarrow{g} C}{D \xrightarrow{(f,g)_{\lambda}^{\lambda'}} C}$, y

(ii) existen $D \xrightarrow{h} A \vee B$ y $A \vee B \xrightarrow{h'} D$.

Demostración.

Sean A, B y D objetos de un cálculo proposicional intuicionista.

Supongamos que se satisface la condición (i).

Por R6a. y R6b., existen $A \xrightarrow{K_{A,B}} A \vee B$ y $B \xrightarrow{K'_{A,B}} A \vee B$.

Entonces existe $(K_{A,B}, K'_{A,B})_{\lambda}^{\lambda'} : D \longrightarrow A \vee B$.

Y por R'6c., existe $[\lambda, \lambda'] : A \vee B \longrightarrow D$.

Sean entonces $h = (K_{A,B}, K'_{A,B})_{\lambda}^{\lambda'}$ y $h' = [\lambda, \lambda']$.

$\therefore$ Se satisface la condición (ii).

Supongamos ahora que se satisface la condición (ii).

$$\frac{A \xrightarrow{K_{A,B}} A \vee B\ ,\ A \vee B \xrightarrow{h'} D}{A \xrightarrow{h' K_{A,B}} D}$$ (de R6a. y R1b.),

$$\frac{B \xrightarrow{K'_{A,B}} A \vee B\ ,\ A \vee B \xrightarrow{h'} D}{B \xrightarrow{h' K'_{A,B}} D}$$ (de R6b. y R1b.).

Sean entonces $\lambda = h' K_{A,B}$ y $\lambda' = h' K'_{A,B}$.

Sea C un objeto y sean $A \xrightarrow{f} C$, $B \xrightarrow{g} C$ dos flechas.

Entonces, por R'6c., existe $[f,g] : A \vee B \longrightarrow C$.

Y por R1b., existe $[f,g]h : D \longrightarrow C$.

Sea entonces $(f,g)^{\lambda'}_{\lambda} = [f,g]h$.

$\therefore$ Se satisface la condición (i).

$\therefore$ Las condiciones (i) y (ii) son equivalentes.

$\square$.

Proposición 1.10.

En un cálculo proposicional intuicionista, para cualesquiera objetos A, B y C, existen $(A \vee B) \wedge C \xrightarrow{\delta^{C}_{A,B}} (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ y $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \xrightarrow{\delta^{A,B}_{C}} (A \vee B) \wedge C$.

Demostración.

Por la Proposición anterior, basta probar que existen flechas $A \wedge C \xrightarrow{\lambda} (A \vee B) \wedge C$, $B \wedge C \xrightarrow{\lambda} (A \vee B) \wedge C$ y que para cualquier objeto D, si $f : A \wedge C \longrightarrow D$ y $g : B \wedge C \longrightarrow D$ son dos flechas, entonces existe una flecha $(f,g)^{\lambda'}_{\lambda} : (A \vee B) \wedge C \longrightarrow D$.

$$\frac{A \xrightarrow{\kappa_{A,B}} A \vee B, \quad C \xrightarrow{1_C} C}{A \wedge C \xrightarrow{\kappa_{A,B} \wedge 1_C} (A \vee B) \wedge C}$$ (de R6a., R1a. y de la Proposición 1.1. inciso (iv)),

$$\frac{B \xrightarrow{\kappa'_{A,B}} A \vee B, \quad C \xrightarrow{1_C} C}{B \wedge C \xrightarrow{\kappa'_{A,B} \wedge 1_C} (A \vee B) \wedge C}$$ (de R6b., R1a. y de la Proposición 1.1. inciso (iv)).

$\therefore$ Existen $A \wedge C \xrightarrow{\kappa_{A,B} \wedge 1_C} (A \vee B) \wedge C$ y $B \wedge C \xrightarrow{\kappa'_{A,B} \wedge 1_C} (A \vee B) \wedge C$.

Sea D un objeto y sean $f : A \wedge C \longrightarrow D$ y $g : B \wedge C \longrightarrow D$ dos flechas.

Por la Proposición 1.1. inciso (ii), existen $\tau_{C,A} : C \wedge A \longrightarrow A \wedge C$ y $\tau_{C,B} : C \wedge B \rightarrow B \wedge C$.

Entonces, por R1b., existen $f\tau_{C,A} : C \wedge A \longrightarrow D$ y $g\tau_{C,B} : C \wedge B \longrightarrow D$.

Y por R4b., existen $(f\tau_{C,A})^{*} : C \longrightarrow D \Leftarrow A$ y $(g\tau_{C,B})^{*} : C \longrightarrow D \Leftarrow B$.

Así, por R3c., existe $\left\langle (f\tau_{C,A})^{*}, (g\tau_{C,B})^{*} \right\rangle : C \longrightarrow (D \Leftarrow A) \wedge (D \Leftarrow B)$.

Entonces, por R6c. y R1b., existe $\zeta^{D}_{A,B} \left\langle (f\tau_{C,A})^{*}, (g\tau_{C,B})^{*} \right\rangle : C \longrightarrow D \Leftarrow (A \vee B)$.

Ahora, por R1a. y por la Proposición 1.1. inciso (iv), existe

$1_{A\vee B} \wedge \left(\xi^{\circ}_{A,B}\left\langle (f\tau_{C,A})^{*}, (g\tau_{C,B})^{*}\right\rangle\right) : (A\vee B)\wedge C \longrightarrow (A\vee B)\wedge(D\Leftarrow(A\vee B))$.

Y por la misma Proposición, inciso (ii), existe $\tau_{A\vee B, D\Leftarrow(A\vee B)} : (A\vee B)\wedge(D\Leftarrow(A\vee B)) \longrightarrow (D\Leftarrow(A\vee B))\wedge(A\vee B)$. Por R4a., existe $\epsilon_{D,A\vee B} : (D\Leftarrow(A\vee B))\wedge(A\vee B) \longrightarrow D$.

Entonces, por R1b., existe $\epsilon_{D,A\vee B}\tau_{A\vee B, D\Leftarrow(A\vee B)} : (A\vee B)\wedge(D\Leftarrow(A\vee B)) \longrightarrow D$.

Y, nuevamente por R1b., existe la siguiente flecha:

$(\epsilon_{D,A\vee B}\tau_{A\vee B, D\Leftarrow(A\vee B)})\left(1_{A\vee B}\wedge\left(\xi^{\circ}_{A,B}\left\langle (f\tau_{C,A})^{*}, (g\tau_{C,B})^{*}\right\rangle\right)\right) : (A\vee B)\wedge C \longrightarrow D$.

Sea $(f,g)^{K_{A,B}\wedge 1_C}_{K_{A,B}\wedge 1_C}$ dicha flecha.

$\therefore$ $A\wedge C$, $B\wedge C$ y $(A\vee B)\wedge C$ satisfacen la condición (i) de la Proposición 1.9.

$\therefore$ Existen flechas $\delta^{C}_{A,B} : (A\vee B)\wedge C \longrightarrow (A\wedge C)\vee(B\wedge C)$ y $\delta^{A,B}_{C} : (A\wedge C)\vee(B\wedge C) \longrightarrow (A\vee B)\wedge C$.

$\square$.

Proposición 1.11.

En un cálculo proposicional intuicionista, R6c. es equivalente a R'6c.

Demostración.

Como en un cálculo proposicional intuicionista se satisface R'6c. (Proposición 1.7.), es suficiente probar que si se satisfacen R5., R6a., R6b. y R'6c., entonces también se satisface R6c.

Supongamos entonces que se satisfacen R5., R6a., R6b. y R'6c.

Por la Proposición 1.1., inciso (ii), existe

$\tau_{(C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B), A\vee B} : ((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B))\wedge(A\vee B) \longrightarrow (A\vee B)\wedge((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B))$.

Por la Proposición anterior, existe

$\delta^{(C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)}_{A,B} : (A\vee B)\wedge((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)) \longrightarrow (A\wedge((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)))\vee(B\wedge((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)))$.

Entonces, por R1b., existe

$h = \delta^{(C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)}_{A,B}\tau_{(C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B), A\vee B} : ((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B))\wedge(A\vee B) \longrightarrow (A\wedge((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)))\vee(B\wedge((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)))$.

Por la Proposición 1.1. inciso (iii), existe

$\alpha_{A,(C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)} : A\wedge((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)) \longrightarrow (A\wedge(C\Leftarrow A))\wedge(C\Leftarrow B)$.

Por R3a., existe $\pi_{A\wedge(C\Leftarrow A), C\Leftarrow B} : (A\wedge(C\Leftarrow A))\wedge(C\Leftarrow B) \longrightarrow A\wedge(C\Leftarrow A)$.

Por la Proposición 1.1. inciso (ii), por R4a. y por R1b., existe

$\epsilon_{C,A}\tau_{A,C\Leftarrow A} : A\wedge(C\Leftarrow A) \longrightarrow C$.

Entonces, por R1b., existe la siguiente flecha:

$f = \epsilon_{C,A}\tau_{A,C\Leftarrow A}\pi_{A\wedge(C\Leftarrow A),C\Leftarrow B}\alpha_{A,(C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)} : A\wedge((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)) \longrightarrow C.$

Análogamente, existen las siguientes flechas:

$B\wedge((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)) \xrightarrow{\tau_{B,(C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)}} ((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B))\wedge B,$

$((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B))\wedge B \xrightarrow{\alpha_{(C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B),B}} (C\Leftarrow A)\wedge((C\Leftarrow B)\wedge B),$

$(C\Leftarrow A)\wedge((C\Leftarrow B)\wedge B) \xrightarrow{\pi'_{C\Leftarrow A,(C\Leftarrow B)\wedge B}} (C\Leftarrow B)\wedge B$, y

$(C\Leftarrow B)\wedge B \xrightarrow{\epsilon_{C,B}} C.$

Entonces, por R1b., existe

$g = \epsilon_{C,B}\pi'_{C\Leftarrow A,(C\Leftarrow B)\wedge B}\alpha_{(C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B),B}\tau_{B,(C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)} : B\wedge((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)) \longrightarrow C.$

Así, por R'6c., existe $[f,g] : (A\wedge((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B)))\vee(B\wedge((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B))) \longrightarrow C.$

Y por R1b., existe $[f,g]h : ((C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B))\wedge(A\vee B) \longrightarrow C.$

Finalmente, por R4b., existe $([f,g]h)^* : (C\Leftarrow A)\wedge(C\Leftarrow B) \longrightarrow C\Leftarrow(A\vee B).$

Sea entonces $\xi^C_{A,B} = ([f,g]h)^*.$

Por lo tanto, también se satisface R6c.

$\therefore$ R6c. y R'6c. son equivalentes.

□.

Definición 1.6.

Una lógica proposicional clásica es un cálculo proposicional intuicionista en el cual se satisface, para cualquier objeto A:

R7. existe $\bot\Leftarrow(\bot\Leftarrow A) \longrightarrow A.$

En un cálculo proposicional intuicionista, para cualquier objeto A, siempre existe una flecha $A \longrightarrow \bot\Leftarrow(\bot\Leftarrow A)$:

$A\wedge(\bot\Leftarrow A) \xrightarrow{\tau_{A,\bot\Leftarrow A}} (\bot\Leftarrow A)\wedge A$ (de la Proposición 1.1. inciso (ii)),

$(\bot\Leftarrow A)\wedge A \xrightarrow{\epsilon_{\bot,A}} \bot$ (de R4a.),

$A\wedge(\bot\Leftarrow A) \xrightarrow{\epsilon_{\bot,A}\tau_{A,\bot\Leftarrow A}} \bot$ (de R1b.),

$A \xrightarrow{(\epsilon_{\bot,A}\tau_{A,\bot\Leftarrow A})^*} \bot\Leftarrow(\bot\Leftarrow A)$ (de R4b.).

Proposición 1.12.

En una lógica proposicional clásica, R7. es equivalente a:

R'7. existe $T \longrightarrow A\vee(\bot\Leftarrow A)$, para cualquier objeto A.

Demostración.

Supongamos primero que en un cálculo proposicional intuicionista se satisface R7.

De R3b. y R4b., se obtiene:

$$\frac{\top \wedge \bot \xrightarrow{\pi'_{\top,\bot}} \bot}{\top \xrightarrow{(\pi'_{\top,\bot})^{*}} \bot \Leftarrow \bot} \qquad \ldots(1).$$

De R3b. y de la Proposición 1.3. inciso (iii):

$$\frac{(\bot \Leftarrow A) \wedge \bot \xrightarrow{\pi'_{\bot\Leftarrow A,\bot}} \bot}{\bot \Leftarrow \bot \xrightarrow{\overline{\pi'_{\bot\Leftarrow A,\bot}}} \bot \Leftarrow ((\bot \Leftarrow A) \wedge \bot)} \qquad \ldots(2).$$

Por la Proposición 1.1. inciso (ii), por R4a. y R1b., existe

$\epsilon_{\bot,\bot\Leftarrow A}\,\tau_{\bot\Leftarrow A,\bot\Leftarrow(\bot\Leftarrow A)} : (\bot \Leftarrow A) \wedge (\bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow A)) \longrightarrow \bot.$

Por R3a., existe $\pi_{\bot\Leftarrow A,\bot\Leftarrow(\bot\Leftarrow A)} : (\bot \Leftarrow A) \wedge (\bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow A)) \longrightarrow \bot \Leftarrow A.$

Entonces, por R3c., existe $\langle \pi_{\bot\Leftarrow A,\bot\Leftarrow(\bot\Leftarrow A)}, \epsilon_{\bot,\bot\Leftarrow A}\,\tau_{\bot\Leftarrow A,\bot\Leftarrow(\bot\Leftarrow A)} \rangle : (\bot \Leftarrow A) \wedge (\bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow A)) \longrightarrow (\bot \Leftarrow A) \wedge \bot.$

Así, por la Proposición 1.3. inciso (iii), existe

$h = \overline{\langle \pi_{\bot\Leftarrow A,\bot\Leftarrow(\bot\Leftarrow A)}, \epsilon_{\bot,\bot\Leftarrow A}\,\tau_{\bot\Leftarrow A,\bot\Leftarrow(\bot\Leftarrow A)} \rangle} : \bot \Leftarrow ((\bot \Leftarrow A) \wedge \bot) \longrightarrow \bot \Leftarrow ((\bot \Leftarrow A) \wedge (\bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow A)))$ ...(3).

Por la Proposición 1.6. inciso (ii), existe

$f : \bot \Leftarrow (A \vee (\bot \Leftarrow A)) \longrightarrow (\bot \Leftarrow A) \wedge (\bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow A)).$

Y, de nuevo por la Proposición 1.3. inciso (iii), existe

$\overline{f} : \bot \Leftarrow ((\bot \Leftarrow A) \wedge (\bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow A))) \longrightarrow \bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow (A \vee (\bot \Leftarrow A)))$ ...(4).

Por R7., existe $g : \bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow (A \vee (\bot \Leftarrow A))) \longrightarrow A \vee (\bot \Leftarrow A)$ ...(5).

Finalmente, por (1), (2), (3), (4), (5) y por R1b., existe

$g(\overline{f}(h(\overline{\pi'_{\bot\Leftarrow A,\bot}}\,(\pi'_{\top,\bot})^{*}))) : \top \longrightarrow A \vee (\bot \Leftarrow A).$

∴ En una lógica proposicional clásica se satisface R'7.

Supongamos ahora que en un cálculo proposicional intuicionista, para cualquier objeto A, existe $f_A : \top \longrightarrow A \vee (\bot \Leftarrow A)$.

Por la Proposición 1.1. inciso (i), existe

$\tau_{\bot\Leftarrow(\bot\Leftarrow A)} : \bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow A) \longrightarrow (\bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow A)) \wedge \top$ ...(6).

Por R1a., R'7. y por la Proposición 1.1. inciso (iv), existe

$(\bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow A)) \wedge \top \xrightarrow{1_{\bot\Leftarrow(\bot\Leftarrow A)} \wedge f_A} (\bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow A)) \wedge (A \vee (\bot \Leftarrow A))$ ...(7).

Por la Proposición 1.1. inciso (ii), existe

$\tau_{\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A),A\vee(\perp\Leftarrow A)} : (\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A))\wedge(A\vee(\perp\Leftarrow A)) \longrightarrow (A\vee(\perp\Leftarrow A))\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A))$.

Por la Proposición 1.10., existe

$\delta^{\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)}_{A,\perp\Leftarrow A} : (A\vee(\perp\Leftarrow A))\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)) \longrightarrow (A\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)))\vee((\perp\Leftarrow A)\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)))$.

Entonces, por R1b., existe

$\delta^{\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)}_{A,\perp\Leftarrow A} \frown \tau_{\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A),A\vee(\perp\Leftarrow A)} : (\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A))\wedge(A\vee(\perp\Leftarrow A)) \longrightarrow (A\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)))\vee((\perp\Leftarrow A)\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)))$.

Sea $f_1 = \delta^{\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)}_{A,\perp\Leftarrow A} \frown \tau_{\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A),A\vee(\perp\Leftarrow A)}$ ...(8).

De nuevo, por la Proposición 1.1. inciso (ii), existe

$\tau_{\perp\Leftarrow A,\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)} : (\perp\Leftarrow A)\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)) \longrightarrow (\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A))\wedge(\perp\Leftarrow A)$.

Y por R4a. y R1b., existe $\epsilon_{\perp,\perp\Leftarrow A} \frown \tau_{\perp\Leftarrow A,\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)} : (\perp\Leftarrow A)\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)) \longrightarrow \perp$.

Entonces, por R1a. y por la Proposición 1.8. inciso (iv), existe

$1_{A\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A))}\vee(\epsilon_{\perp,\perp\Leftarrow A} \frown \tau_{\perp\Leftarrow A,\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)}) : (A\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)))\vee((\perp\Leftarrow A)\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A))) \longrightarrow (A\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)))\vee\perp$.

Sea $f_2 = 1_{A\vee(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A))}\vee(\epsilon_{\perp,\perp\Leftarrow A} \frown \tau_{\perp\Leftarrow A,\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)})$ ...(9)

Por la Proposición 1.8. inciso (i), existe

$\perp_{A\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A))} : (A\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)))\vee\perp \longrightarrow A\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A))$.

Por R3a., existe $\pi_{A,\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)} : A\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)) \longrightarrow A$.

Entonces, por R1b., existe $\pi_{A,\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)}\perp_{A\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A))} : (A\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)))\vee\perp \longrightarrow A$.

Sea $f_3 = \pi_{A,\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)}\perp_{A\wedge(\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A))}$ ...(10).

Finalmente, de (6),(7),(8),(9),(10) y de R1b., se obtiene

$f_3(f_2(f_1((1_{\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)}\wedge f_A)\,T_{\perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A)}))) : \perp\Leftarrow(\perp\Leftarrow A) \longrightarrow A$.

Entonces, también se satisface R7.

$\therefore$ R7. y R'7. son equivalentes.

□.

CAPITULO 2

Definición 2.1.

Una categoría es un sistema deductivo en el cual se satisface, para cualesquiera flechas $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ y $h: C \longrightarrow D$:

E1. $f 1_A = f$, $1_B f = f$ y $(hg)f = h(gf)$.

Notación.

Si $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, y $h: C \longrightarrow D$ son flechas de una categoría, entonces escribiremos hgf en lugar de $h(gf)$ (o de $(hg)f$).

Definición 2.2.

Una categoría cartesiana es tanto una categoría como un cálculo para la conjunción, en la cual se satisfacen, para cualesquiera flechas $f: A \longrightarrow T$, $f_1 : C \longrightarrow A$, $f_2 : C \longrightarrow B$ y $g: C \longrightarrow A \wedge B$:

E2. $f = O_A$,

E3a. $\pi_{A,B} \langle f_1, f_2 \rangle = f_1$,

E3b. $\pi'_{A,B} \langle f_1, f_2 \rangle = f_2$, y

E3c. $\langle \pi_{A,B}\, g, \pi'_{A,B}\, g \rangle = g$.

Proposición 2.1.

En una categoría cartesiana, E2. es equivalente a:

E'2. $1_T = O_T$, $O_B f = O_A$, para cualquier flecha $f: A \longrightarrow B$.

Demostración.

Primero se probará que en una categoría cartesiana se satisface E'2.

Consideremos entonces la flecha $1_T : T \longrightarrow T$; por E2., $1_T = O_T$.

Sea $f: A \longrightarrow B$ una flecha. Entonces, como $O_B f: A \longrightarrow T$, de nuevo por E2., se tiene que $O_B f = O_A$.

$\therefore$ También se satisface E'2.

Supongamos ahora que se satisface E'2.

Sea $f: A \longrightarrow T$ una flecha.

Por E1., $f = 1_T f$; por E'2., $1_T = O_T$, y entonces $1_T f = O_T f$. Pero, por E'2., $O_T f = O_A$.
Por lo tanto $f = O_A$ para cualquier flecha $f: A \longrightarrow T$, y se satisface E2.
$\therefore$ E2. y E'2. son equivalentes.

$\blacksquare$.

Proposición 2.2.

En una categoría cartesiana se satisfacen las siguientes igualdades:
(i) $\langle f, g\rangle h = \langle fh, gh\rangle$, para cualesquiera flechas $f: C \longrightarrow A$, $g: C \longrightarrow B$ y $h: D \longrightarrow C$,
(ii) $1_A \wedge 1_C = 1_{A\wedge C}$, para cualesquiera objetos A y C, y
(iii) $(f' \wedge g')(f \wedge g) = (f'f) \wedge (g'g)$, para cualesquiera flechas $f: A \longrightarrow B$, $g: C \longrightarrow D$, $f': B \longrightarrow E$ y $g': D \longrightarrow F$.

Demostración.

(i) Por E3c., $\langle f, g\rangle h = \langle \pi_{A,B}\langle f, g\rangle h, \pi'_{A,B}\langle f, g\rangle h\rangle$.
Por E3a. y E3b., $\pi_{A,B}\langle f, g\rangle = f$ y $\pi'_{A,B}\langle f, g\rangle = g$.
$\therefore \langle f, g\rangle h = \langle fh, gh\rangle$.

(ii) Por definición, $1_A \wedge 1_C = \langle 1_A \pi_{A,C}, 1_C \pi'_{A,C}\rangle$.
Por E1., $1_A \pi_{A,C} = \pi_{A,C} 1_{A\wedge C}$ y $1_C \pi'_{A,C} = \pi'_{A,C} 1_{A\wedge C}$.
Entonces $1_A \wedge 1_C = \langle \pi_{A,C} 1_{A\wedge C}, \pi'_{A,C} 1_{A\wedge C}\rangle$. Pero, por E3c., $\langle \pi_{A,C} 1_{A\wedge C}, \pi'_{A,C} 1_{A\wedge C}\rangle = 1_{A\wedge C}$.
$\therefore 1_A \wedge 1_C = 1_{A\wedge C}$.

(iii) Por definición, $f \wedge g = \langle f\pi_{A,C}, g\pi'_{A,C}\rangle$ y $f' \wedge g' = \langle f'\pi_{B,D}, g'\pi'_{B,D}\rangle$.
Entonces, de (i), E1., E3a. y de E3b., se obtienen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
(f' \wedge g')(f \wedge g) &= \langle f'\pi_{B,D}, g'\pi'_{B,D}\rangle \langle f\pi_{A,C}, g\pi'_{A,C}\rangle \\
&= \langle f'\pi_{B,D}\langle f\pi_{A,C}, g\pi'_{A,C}\rangle, g'\pi'_{B,D}\langle f\pi_{A,C}, g\pi'_{A,C}\rangle\rangle \\
&= \langle f'f\pi_{A,C}, g'g\pi'_{A,C}\rangle.
\end{aligned}
$$

Y, por definición, $(f'f) \wedge (g'g) = \langle f'f\pi_{A,C}, g'g\pi'_{A,C}\rangle$.
$\therefore (f' \wedge g')(f \wedge g) = (f'f) \wedge (g'g)$.

$\square$.

Definición 2.3.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean A y B objetos de $\mathcal{C}$. Entonces se define $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)=\{f \mid dom(f)=A \text{ y } cod(f)=B\}$. Es decir, $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ es el conjunto de flechas $A \xrightarrow{f} B$ de $\mathcal{C}$.

Definición 2.4.

Una categoría cartesiana cerrada es tanto un cálculo proposicional intuicionista positivo como una categoría cartesiana, en la cual, para cualesquiera flechas $h: C \wedge B \longrightarrow A$ y $k: C \longrightarrow A \Leftarrow B$, se satisfacen:

E4a. $\epsilon_{A,B}\langle h^{*}\pi_{C,B}, \pi'_{C,B}\rangle = h$, y

E4b. $(\epsilon_{A,B}\langle K\pi_{C,B}, \pi'_{C,B}\rangle)^{*} = K$.

Proposición 2.3.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana cerrada y sean A, B y C objetos de $\mathcal{C}$. Entonces existe una biyección $\varphi: Hom_{\mathcal{C}}(C\wedge B, A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(C, A\Leftarrow B)$.

Demostración.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana cerrada y sea $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C\wedge B, A)$. Definimos entonces $\varphi(h)=h^{*}$. Por R4b., $\varphi(h) \in Hom_{\mathcal{C}}(C, A\Leftarrow B)$.

Sea $\varphi': Hom_{\mathcal{C}}(C, A\Leftarrow B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(C\wedge B, A)$ dada por $\varphi'(K)=\epsilon_{A,B}(K\wedge 1_B)$.

Por definición, $\epsilon_{A,B}(K\wedge 1_B)=\epsilon_{A,B}\langle K\pi_{C,B}, \pi'_{C,B}\rangle$. Entonces $\varphi'(K) \in Hom_{\mathcal{C}}(C\wedge B, A)$.

Consideremos ahora $(\varphi'\circ\varphi)(h)$.

$(\varphi'\circ\varphi)(h)=\varphi'(\varphi(h))=\varphi'(h^{*})=\epsilon_{A,B}\langle h^{*}\pi_{C,B}, \pi'_{C,B}\rangle = h$.

$\therefore\ \varphi'\circ\varphi = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(C\wedge B, A)}$.

Sea ahora $K \in Hom_{\mathcal{C}}(C, A\Leftarrow B)$.

Entonces $(\varphi\circ\varphi')(K)=\varphi(\varphi'(K))=\varphi(\epsilon_{A,B}\langle K\pi_{C,B}, \pi'_{C,B}\rangle)=(\epsilon_{A,B}\langle K\pi_{C,B}, \pi'_{C,B}\rangle)^{*}=K$.

$\therefore\ \varphi\circ\varphi' = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(C, A\Leftarrow B)}$.

$\therefore\ \varphi$ es una biyección.

□.

Corolario 2.1.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana cerrada y sean A, B y C objetos de $\mathcal{C}$. Si $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C\wedge B, A)$, entonces existe una única $h^{*} \in Hom_{\mathcal{C}}(C, A\Leftarrow B)$

tal que $\epsilon_{A,B}(h^* \wedge 1_B) = h$.

□.

Proposición 2.4.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana cerrada y sean $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \wedge B, C)$ y $K \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D,A)$. Entonces $h^* K = (h\langle K\pi_{D,B}, \pi'_{D,B}\rangle)^*$.

Demostración.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana cerrada y sean $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A\wedge B, C)$ y $K \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D,A)$. Entonces $h^*K \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, C \Leftarrow B)$ y por E4b., $h^*K = (\epsilon_{C,B}\langle h^*K\pi_{D,B}, \pi'_{D,B}\rangle)^*$.

De E3a., E3b., de la Proposición 2.2. inciso (i) y de E4a., se tiene que

$$\begin{aligned}\epsilon_{C,B}\langle h^*K\pi_{D,B}, \pi'_{D,B}\rangle &= \epsilon_{C,B}\langle h^*\pi_{A,B}\langle K\pi_{D,B}, \pi'_{D,B}\rangle, \pi'_{A,B}\langle K\pi_{D,B}, \pi'_{D,B}\rangle\rangle\\ &= \epsilon_{C,B}\langle h^*\pi_{A,B}, \pi'_{A,B}\rangle\langle K\pi_{D,B}, \pi'_{D,B}\rangle\\ &= h\langle K\pi_{D,B}, \pi'_{D,B}\rangle.\end{aligned}$$

Entonces, $(\epsilon_{C,B}\langle h^*K\pi_{D,B}, \pi'_{D,B}\rangle)^* = (h\langle K\pi_{D,B}, \pi'_{D,B}\rangle)^*$.

$\therefore\ h^*K = (h\langle K\pi_{D,B}, \pi'_{D,B}\rangle)^*$.

□.

Proposición 2.5.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana cerrada y sean A y B objetos de $\mathcal{C}$. Entonces existe una biyección $\Psi: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, B \Leftarrow A)$.

Demostración.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana cerrada y sean $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, B \Leftarrow A)$. Por la Proposición 1.3., $\ulcorner f \urcorner \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, B\Leftarrow A)$ y $g^{\ulcorner} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$. Definimos entonces $\Psi: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, B\Leftarrow A)$ y $\Psi': \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, B\Leftarrow A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ como $\Psi(f) = \ulcorner f \urcorner$ y $\Psi'(g) = g^{\ulcorner}$.

De las definiciones de $\ulcorner f \urcorner$ y de $g^{\ulcorner}$, se tiene que

$(\Psi'_\circ \Psi)(f) = \Psi'(\Psi(f)) = \Psi'(\ulcorner f \urcorner) = (\ulcorner f \urcorner)^{\ulcorner} = (((f\pi'_{T,A})^*)^{\ulcorner} = \epsilon_{B,A}\langle (f\pi'_{T,A})^* O_A, 1_A\rangle$.

Y por E3a., E3b. y por la Proposición 2.2. inciso (i),

$\epsilon_{B,A}\langle (f\pi'_{T,A})^* O_A, 1_A\rangle = \epsilon_{B,A}\langle (f\pi'_{T,A})^*\pi_{T,A}\langle O_A, 1_A\rangle, \pi'_{T,A}\langle O_A, 1_A\rangle\rangle = \epsilon_{B,A}\langle (f\pi'_{T,A})^*\pi_{T,A}, \pi'_{T,A}\rangle\langle O_A, 1_A\rangle$.

Pero, por E4a., $\epsilon_{B,A}\langle (f\pi'_{T,A})^*\pi_{T,A}, \pi'_{T,A}\rangle = f\pi'_{T,A}$.

Entonces, $\epsilon_{B,A}\langle (f\pi'_{T,A})^* O_A, 1_A\rangle = f\pi'_{T,A}\langle O_A, 1_A\rangle = f1_A = f$.

$\therefore (\Psi'_\circ\Psi)(f) = f$ y $\Psi'_\circ\Psi = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}$.

Análogamente, se tiene que

$(\Psi_\circ \Psi')(g) = \Psi(\Psi'(g)) = \Psi(g') = \ulcorner (g') \urcorner = \ulcorner (\epsilon_{B,A}\langle g0_A, 1_A\rangle) \urcorner = (\epsilon_{B,A}\langle g0_A, 1_A\rangle \pi'_{T,A})^*$.

Pero $\epsilon_{B,A}\langle g0_A, 1_A\rangle \pi'_{T,A} = \epsilon_{B,A}\langle g0_A\pi'_{T,A}, 1_A\pi'_{T,A}\rangle$ y de E'2. y E1., se tiene que $\epsilon_{B,A}\langle g0_A\pi'_{T,A}, 1_A\pi'_{T,A}\rangle = \epsilon_{B,A}\langle g0_{T\wedge A}, \pi'_{T,A}\rangle = \epsilon_{B,A}\langle g\pi_{T,A}, \pi'_{T,A}\rangle$. Entonces, por E4b., $(\epsilon_{B,A}\langle g0_A, 1_A\rangle \pi'_{T,A})^* = (\epsilon_{B,A}\langle g\pi_{T,A}, \pi'_{T,A}\rangle)^* = g$, y así $(\Psi_\circ \Psi')(g) = g$.

$\therefore\ \Psi_\circ \Psi' = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(T,\, B \Leftarrow A)}$.

$\therefore\ \Psi$ es una biyección.

□.

Definición 2.5.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean A y B objetos de $\mathcal{C}$. Se dice que A es isomorfo a B ($A \cong B$) si existen $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$ tales que $gf = 1_A$ y $fg = 1_B$.

Observación.

Si A y B son objetos de una categoría $\mathcal{C}$ tales que existen $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} A$, flechas de $\mathcal{C}$, y $fg = 1_B$ y $gf = 1_A$, entonces g es el único elemento de $Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$ con esta propiedad, ya que si existe $B \xrightarrow{g'} A$ tal que $fg' = 1_B$ y $g'f = 1_A$, entonces $g' = g'1_B = g'fg = 1_A g = g$. Diremos entonces que f es un isomorfismo y a la flecha g la denotaremos por f^{-1}. Aplicando el mismo argumento a la flecha f, se tiene que $g^{-1} = f$, de donde se obtiene que g también es isomorfismo.

Proposición 2.6.

Sean A, B y C objetos de una categoría cartesiana cerrada. Entonces:

(i) $A \wedge T \cong A$,

(ii) $A \wedge B \cong B \wedge A$, y

(iii) $(A \wedge B) \wedge C \cong A \wedge (B \wedge C)$.

Demostración.

(i) Por R3a., existe $\pi_{A,T} : A \wedge T \longrightarrow A$.

De R1a., R2. y R3c. se obtiene $\dfrac{A \xrightarrow{1_A} A,\ A \xrightarrow{0_A} T}{A \xrightarrow{\langle 1_A, 0_A\rangle} A \wedge T}$.

Entonces, por la Proposición 2.2. inciso (i), por E1., E2. y E3c., se tiene que

$\langle 1_A, 0_A\rangle \pi_{A,T} = \langle 1_A\pi_{A,T}, 0_A\pi_{A,T}\rangle = \langle \pi_{A,T}, 0_{A\wedge T}\rangle = \langle \pi_{A,T}, \pi'_{A,T}\rangle = \langle \pi_{A,T}1_{A\wedge T}, \pi'_{A,T}1_{A\wedge T}\rangle = 1_{A\wedge T}$.

Y por E3a., $\pi_{A,T}\langle 1_A, 0_A\rangle = 1_A$.

$\therefore\ A\wedge T \cong A$.

(ii) De R3a., R3b. y R3c. se tiene que $\langle \pi'_{A,B}, \pi_{A,B}\rangle : A\wedge B \longrightarrow B\wedge A$ y que $\langle \pi'_{B,A}, \pi_{B,A}\rangle : B\wedge A \longrightarrow A\wedge B$.

Entonces, por la Proposición 2.2. inciso (i), por E3a., E3b., E1. y E3c., se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \pi'_{B,A}, \pi_{B,A}\rangle\langle \pi'_{A,B}, \pi_{A,B}\rangle &= \langle \pi'_{B,A}\langle \pi'_{A,B}, \pi_{A,B}\rangle, \pi_{B,A}\langle \pi'_{A,B}, \pi_{A,B}\rangle\rangle = \langle \pi_{A,B}, \pi'_{A,B}\rangle\\ &= \langle \pi_{A,B}1_{A\wedge B}, \pi'_{A,B}1_{A\wedge B}\rangle = 1_{A\wedge B}, \text{ y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \pi'_{A,B}, \pi_{A,B}\rangle\langle \pi'_{B,A}, \pi_{B,A}\rangle &= \langle \pi'_{A,B}\langle \pi'_{B,A}, \pi_{B,A}\rangle, \pi_{A,B}\langle \pi'_{B,A}, \pi_{B,A}\rangle\rangle = \langle \pi_{B,A}, \pi'_{B,A}\rangle\\ &= \langle \pi_{B,A}1_{B\wedge A}, \pi'_{B,A}1_{B\wedge A}\rangle = 1_{B\wedge A}.\end{aligned}$$

$\therefore\ A\wedge B \cong B\wedge A$.

(iii) Por la Proposición 1.1. inciso (iii), existen $\alpha_{A\wedge B,C} : (A\wedge B)\wedge C \longrightarrow A\wedge(B\wedge C)$ y $\alpha_{A,B\wedge C} : A\wedge(B\wedge C) \longrightarrow (A\wedge B)\wedge C$, donde $\alpha_{A\wedge B,C} = \langle \pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\rangle$ y

$\alpha_{A,B\wedge C} = \langle\langle \pi_{A,B\wedge C}, \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle, \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle$. Entonces, de la Proposición 2.2. inciso (i), de E1., E3a., E3b, E3c., se tiene que

$$\begin{aligned}&\langle\langle \pi_{A,B\wedge C}, \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle, \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle\langle \pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\rangle\\
&= \langle\langle \pi_{A,B\wedge C}, \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle\langle \pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\rangle, \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\langle \pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\rangle\rangle\\
&= \langle\langle \pi_{A,B\wedge C}\langle \pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\rangle, \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\langle \pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\rangle\rangle, \pi'_{B,C}\langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\rangle\\
&= \langle\langle \pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi_{B,C}\langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\rangle, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\\
&= \langle\langle \pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}\rangle, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle = \langle\langle \pi_{A,B}, \pi'_{A,B}\rangle\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\\
&= \langle\langle \pi_{A,B}1_{A\wedge B}, \pi'_{A,B}1_{A\wedge B}\rangle\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle = \langle 1_{A\wedge B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle = \langle \pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\\
&= \langle \pi_{A\wedge B,C}1_{(A\wedge B)\wedge C}, \pi'_{A\wedge B,C}1_{(A\wedge B)\wedge C}\rangle = 1_{(A\wedge B)\wedge C}, \text{ y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\langle \pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\rangle\langle\langle \pi_{A,B\wedge C}, \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle, \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle\\
&= \langle \pi_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}\langle\langle \pi_{A,B\wedge C}, \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle, \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle, \langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}, \pi'_{A\wedge B,C}\rangle\langle\langle \pi_{A,B\wedge C}, \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle, \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle\rangle\\
&= \langle \pi_{A,B}\langle \pi_{A,B\wedge C}, \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle, \langle \pi'_{A,B}\pi_{A\wedge B,C}\langle\langle \pi_{A,B\wedge C}, \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle, \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle, \pi'_{A\wedge B,C}\langle\langle \pi_{A,B\wedge C}, \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle, \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle\rangle\rangle\\
&= \langle \pi_{A,B\wedge C}, \langle \pi'_{A,B}\langle \pi_{A,B\wedge C}, \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle, \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle\rangle\\
&= \langle \pi_{A,B\wedge C}, \langle \pi_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}, \pi'_{B,C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle\rangle = \langle \pi_{A,B\wedge C}, \langle \pi_{B,C}, \pi'_{B,C}\rangle\pi'_{A,B\wedge C}\rangle\\
&= \langle \pi_{A,B\wedge C}, \langle \pi_{B,C}1_{B\wedge C}, \pi'_{B,C}1_{B\wedge C}\rangle\pi'_{A,B\wedge C}\rangle = \langle \pi_{A,B\wedge C}, 1_{B\wedge C}\pi'_{A,B\wedge C}\rangle = \langle \pi_{A,B\wedge C}, \pi'_{A,B\wedge C}\rangle\\
&= \langle \pi_{A,B\wedge C}1_{A\wedge(B\wedge C)}, \pi'_{A,B\wedge C}1_{A\wedge(B\wedge C)}\rangle = 1_{A\wedge(B\wedge C)}.\end{aligned}$$

$\therefore\ \alpha_{A,B\wedge C}\alpha_{A\wedge B,C} = 1_{(A\wedge B)\wedge C}$, $\alpha_{A\wedge B,C}\alpha_{A,B\wedge C} = 1_{A\wedge(B\wedge C)}$ y $(A\wedge B)\wedge C \cong A\wedge(B\wedge C)$.

$\square$.

Proposición 2.7.

Sean A, B y C objetos de una categoría cartesiana cerrada. Entonces:

(i) $T \Leftarrow A \cong T$,

(ii) $A \Leftarrow T \cong A$,

(iii) $(A \wedge B) \Leftarrow C \cong (A \Leftarrow C) \wedge (B \Leftarrow C)$, y

(iv) $A \Leftarrow (B \wedge C) \cong (A \Leftarrow C) \Leftarrow B$.

Demostración.

(i) Como A y T son objetos de una categoría cartesiana cerrada, entonces existen $O_{T\Leftarrow A} : T \Leftarrow A \longrightarrow T$ y $(\pi_{T,A})^* : T \longrightarrow T \Leftarrow A$. Se tiene así que

$$\begin{aligned}
(\pi_{T,A})^* O_{T\Leftarrow A} &= \left(\pi_{T,A}\left\langle O_{T\Leftarrow A}\pi_{T\Leftarrow A,A}, \pi'_{T\Leftarrow A,A}\right\rangle\right)^* = \left(O_{T\Leftarrow A}\pi_{T\Leftarrow A,A}\right)^* = \left(O_{(T\Leftarrow A)\wedge A}\right)^* \\
&= (\epsilon_{T,A})^* = \left(\epsilon_{T,A} 1_{(T\Leftarrow A)\wedge A}\right)^* = \left(\epsilon_{T,A}\left\langle \pi_{T\Leftarrow A,A} 1_{(T\Leftarrow A)\wedge A}, \pi'_{T\Leftarrow A,A} 1_{(T\Leftarrow A)\wedge A}\right\rangle\right)^* \\
&= \left(\epsilon_{T,A}\left\langle 1_{T\Leftarrow A}\pi_{T\Leftarrow A,A}, \pi'_{T\Leftarrow A,A}\right\rangle\right)^* = 1_{T\Leftarrow A}, \text{ y}
\end{aligned}$$

$$O_{T\Leftarrow A}(\pi_{T,A})^* = O_T = 1_T.$$

$\therefore\ T \Leftarrow A \cong T$.

(ii) Consideremos $\epsilon_{A,T}\langle 1_{A\Leftarrow T}, O_{A\Leftarrow T}\rangle : A \Leftarrow T \longrightarrow A$ y $(\pi_{A,T})^* : A \longrightarrow A \Leftarrow T$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\pi_{A,T})^* \epsilon_{A,T}\langle 1_{A\Leftarrow T}, O_{A\Leftarrow T}\rangle &= \left(\pi_{A,T}\left\langle \epsilon_{A,T}\langle 1_{A\Leftarrow T}, O_{A\Leftarrow T}\rangle \pi_{A\Leftarrow T,T}, \pi'_{A\Leftarrow T,T}\right\rangle\right)^* \\
&= \left(\epsilon_{A,T}\langle 1_{A\Leftarrow T}, O_{A\Leftarrow T}\rangle \pi_{A\Leftarrow T,T}\right)^* \\
&= \left(\epsilon_{A,T}\left\langle 1_{A\Leftarrow T}\pi_{A\Leftarrow T,T}, O_{A\Leftarrow T}\pi_{A\Leftarrow T,T}\right\rangle\right)^* \\
&= \left(\epsilon_{A,T}\left\langle \pi_{A\Leftarrow T,T}, O_{(A\Leftarrow T)\wedge T}\right\rangle\right)^* \\
&= \left(\epsilon_{A,T}\left\langle 1_{A\Leftarrow T}\pi_{A\Leftarrow T,T}, \pi'_{A\Leftarrow T,T}\right\rangle\right)^* \\
&= 1_{A\Leftarrow T}, \text{ y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{A,T}\langle 1_{A\Leftarrow T}, O_{A\Leftarrow T}\rangle(\pi_{A,T})^* &= \epsilon_{A,T}\left\langle 1_{A\Leftarrow T}(\pi_{A,T})^*, O_{A\Leftarrow T}(\pi_{A,T})^*\right\rangle \\
&= \epsilon_{A,T}\left\langle (\pi_{A,T})^*, O_A\right\rangle = \epsilon_{A,T}\left\langle (\pi_{A,T})^* 1_A, O_A\right\rangle \\
&= \epsilon_{A,T}\left\langle (\pi_{A,T})^*\pi_{A,T}\langle 1_A, O_A\rangle, \pi'_{A,T}\langle 1_A, O_A\rangle\right\rangle \\
&= \epsilon_{A,T}\left\langle (\pi_{A,T})^*\pi_{A,T}, \pi'_{A,T}\right\rangle\langle 1_A, O_A\rangle = \pi_{A,T}\langle 1_A, O_A\rangle = 1_A.
\end{aligned}$$

$\therefore\ A \Leftarrow T \cong A$.

(iii) Sean $\pi_1 = \pi_{A\Leftarrow C, B\Leftarrow C}$, $\pi_2 = \pi_{(A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C), C}$, $\pi_3 = \pi_{(A\wedge B)\Leftarrow C, C}$, $\epsilon_1 = \epsilon_{A,C}$, $\epsilon_2 = \epsilon_{B,C}$, $\epsilon = \epsilon_{A\wedge B, C}$ y $\pi = \pi_{A,B}$.

Entonces $\left\langle (\pi\epsilon)^*, (\pi'\epsilon)^*\right\rangle : (A\wedge B)\Leftarrow C \longrightarrow (A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C)$, y

$\left(\left\langle \epsilon_1\langle \pi_1\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\pi_2, \pi_2\rangle\right\rangle\right)^* : (A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C) \longrightarrow (A\wedge B)\Leftarrow C$.

Así, por ser A, B y C objetos de una categoría cartesiana cerrada, se tienen las siguientes igualdades:

$$\left(\langle \epsilon_1\langle \pi_1\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle\right)^* \langle (\pi\epsilon)^*, (\pi'\epsilon)^*\rangle$$
$$= \left(\langle \epsilon_1\langle \pi_1\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle \langle \langle (\pi\epsilon)^*, (\pi'\epsilon)^*\rangle \pi_3, \pi_3'\rangle\right)^*$$
$$= \left(\langle \epsilon_1\langle \pi_1\pi_3, \pi_3'\rangle\langle\langle (\pi\epsilon)^*, (\pi'\epsilon)^*\rangle\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\pi_3, \pi_3'\rangle\langle\langle (\pi\epsilon)^*, (\pi'\epsilon)^*\rangle\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle\right)^*$$
$$= \left(\langle \epsilon_1\langle \pi_1\pi_3\langle\langle (\pi\epsilon)^*, (\pi'\epsilon)^*\rangle\pi_3, \pi_3'\rangle, \pi_3'\langle\langle (\pi\epsilon)^*, (\pi'\epsilon)^*\rangle\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\pi_3\langle\langle (\pi\epsilon)^*, (\pi'\epsilon)^*\rangle\pi_3, \pi_3'\rangle, \pi_3'\langle\langle (\pi\epsilon)^*, (\pi'\epsilon)^*\rangle\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle\rangle\right)^*$$
$$= \left(\langle \epsilon_1\langle \pi_1\langle (\pi\epsilon)^*, (\pi'\epsilon)^*\rangle\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\langle (\pi\epsilon)^*, (\pi'\epsilon)^*\rangle\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle\right)^*$$
$$= \left(\langle \epsilon_1\langle (\pi\epsilon)^*\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle (\pi'\epsilon)^*\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle\right)^*$$
$$= \left(\langle \pi\epsilon, \pi'\epsilon\rangle\right)^* = \left(\langle \pi, \pi'\rangle\epsilon\right)^* = \left(\langle \pi_{A,B}1_{A\wedge B}, \pi_{A,B}'1_{A\wedge B}\rangle\epsilon_{A\wedge B,C}\right)^* = \left(1_{A\wedge B}\epsilon_{A\wedge B,C}\right)^* = \left(\epsilon_{A\wedge B,C}\right)^*$$
$$= \left(\epsilon_{A\wedge B,C}1_{((A\wedge B)\Leftarrow C)\wedge C}\right)^* = \left(\epsilon_{A\wedge B,C}\langle \pi_{(A\wedge B)\Leftarrow C,C}, \pi_{(A\wedge B)\Leftarrow C,C}'\rangle\right)^* = \left(\epsilon_{A\wedge B,C}\langle 1_{(A\wedge B)\Leftarrow C}\pi_{(A\wedge B)\Leftarrow C,C}, \pi_{(A\wedge B)\Leftarrow C,C}'\rangle\right)^*$$
$$= 1_{(A\wedge B)\Leftarrow C}, \text{ y}$$

$$\langle (\pi\epsilon)^*, (\pi'\epsilon)^*\rangle\left(\langle \epsilon_1\langle \pi_1\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle\right)^*$$
$$= \langle (\pi\epsilon)^*\left(\langle \epsilon_1\langle \pi_1\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle\right)^*, (\pi'\epsilon)^*\left(\langle \epsilon_1\langle \pi_1\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle\right)^*\rangle$$
$$= \langle \left(\pi\epsilon\langle\left(\langle \epsilon_1\langle \pi_1\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle\right)^*\pi_3, \pi_3'\rangle\right)^*, \left(\pi'\epsilon\langle\left(\langle \epsilon_1\langle \pi_1\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle\right)^*\pi_3, \pi_3'\rangle\right)^*\rangle$$
$$= \langle \left(\pi\langle \epsilon_1\langle \pi_1\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle\right)^*, \left(\pi'\langle \epsilon_1\langle \pi_1\pi_3, \pi_3'\rangle, \epsilon_2\langle \pi_1'\pi_3, \pi_3'\rangle\rangle\right)^*\rangle$$
$$= \langle \left(\epsilon_1\langle \pi_1\pi_3, \pi_3'\rangle\right)^*, \left(\epsilon_2\langle \pi_1'\pi_3, \pi_3'\rangle\right)^*\rangle = \langle \pi_1, \pi_1'\rangle = \langle \pi_{A\Leftarrow C, B\Leftarrow C}, \pi_{A\Leftarrow C, B\Leftarrow C}'\rangle = 1_{(A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C)}.$$

$\therefore\ (A\wedge B)\Leftarrow C \cong (A\Leftarrow C)\wedge(B\Leftarrow C).$

(iv) Sean $\pi_1 = \pi_{(A\Leftarrow C)\Leftarrow B, B\wedge C}$, $\pi_2 = \pi_{B,C}$, $\pi_3 = \pi_{(A\Leftarrow C)\Leftarrow B, B}$, $\pi_4 = \pi_{((A\Leftarrow C)\Leftarrow B)\wedge B, C}$, $\pi_5 = \pi_{(A\Leftarrow (B\wedge C))\wedge B, C}$, $\pi_6 = \pi_{A\Leftarrow (B\wedge C), B}$, $\pi_{A\Leftarrow (B\wedge C), B\wedge C} = \pi_7$ y $\epsilon_1 = \epsilon_{A\Leftarrow C, B}$, $\epsilon_2 = \epsilon_{A,C}$, $\epsilon_3 = \epsilon_{A, B\wedge C}$.
Entonces $\left(\epsilon_2\langle \epsilon_1\langle \pi_1, \pi_2\pi_1'\rangle, \pi_2'\pi_1'\rangle\right)^* : (A\Leftarrow C)\Leftarrow B \longrightarrow A\Leftarrow (B\wedge C)$, y
$\left(\left(\epsilon_3\langle \pi_6\pi_5, \langle \pi_6'\pi_5, \pi_5'\rangle\rangle\right)^*\right)^* : A\Leftarrow (B\wedge C) \longrightarrow (A\Leftarrow C)\Leftarrow B.$
Por ser A, B y C objetos de una categoría cartesiana cerrada, se tienen las siguientes igualdades:

$$\left(\left(\epsilon_3\langle \pi_6\pi_5, \langle \pi_6'\pi_5, \pi_5'\rangle\rangle\right)^*\right)^*\left(\epsilon_2\langle \epsilon_1\langle \pi_1, \pi_2\pi_1'\rangle, \pi_2'\pi_1'\rangle\right)^*$$
$$= \left(\left(\epsilon_3\langle \pi_6\pi_5, \langle \pi_6'\pi_5, \pi_5'\rangle\rangle\right)^*\langle \left(\epsilon_2\langle \epsilon_1\langle \pi_1, \pi_2\pi_1'\rangle, \pi_2'\pi_1'\rangle\right)^*\pi_3, \pi_3'\rangle\right)^*$$
$$= \left(\left(\epsilon_3\langle \pi_6\pi_5, \langle \pi_6'\pi_5, \pi_5'\rangle\rangle\langle\langle \left(\epsilon_2\langle \epsilon_1\langle \pi_1, \pi_2\pi_1'\rangle, \pi_2'\pi_1'\rangle\right)^*\pi_3, \pi_3'\rangle\pi_4, \pi_4'\rangle\right)^*\right)^*$$
$$= \left(\left(\epsilon_3\langle \pi_6\pi_5, \langle \pi_6'\pi_5, \pi_5'\rangle\rangle\langle\langle \left(\epsilon_2\langle \epsilon_1\langle \pi_1, \pi_2\pi_1'\rangle, \pi_2'\pi_1'\rangle\right)^*\pi_3\pi_4, \pi_3'\pi_4\rangle, \pi_4'\rangle\right)^*\right)^*$$
$$= \left(\left(\epsilon_3\langle \left(\epsilon_2\langle \epsilon_1\langle \pi_1, \pi_2\pi_1'\rangle, \pi_2'\pi_1'\rangle\right)^*\pi_3\pi_4, \langle \pi_3'\pi_4, \pi_4'\rangle\rangle\right)^*\right)^*$$
$$= \left(\left(\epsilon_3\langle \left(\epsilon_2\langle \epsilon_1\langle \pi_1, \pi_2\pi_1'\rangle\rangle, \pi_2'\pi_1'\rangle\right)^*\pi_1\langle \pi_3\pi_4, \langle \pi_3'\pi_4, \pi_4'\rangle\rangle, \pi_1'\langle \pi_3\pi_4, \langle \pi_3'\pi_4, \pi_4'\rangle\rangle\rangle\right)^*\right)^*$$
$$= \left(\left(\epsilon_3\langle \left(\epsilon_2\langle \epsilon_1\langle \pi_1, \pi_2\pi_1'\rangle, \pi_2'\pi_1'\rangle\right)^*\pi_1, \pi_1'\rangle\langle \pi_3\pi_4, \langle \pi_3'\pi_4, \pi_4'\rangle\rangle\right)^*\right)^*$$

$$=((\epsilon_2\langle\epsilon_1\langle\pi_1,\pi_3\pi_1'\rangle,\pi_3'\pi_1'\rangle\langle\pi_3\pi_4,\langle\pi_3'\pi_4,\pi_4'\rangle\rangle))^*$$
$$=((\epsilon_2\langle\epsilon_1\langle\pi_3\pi_4,\pi_3'\pi_4\rangle,\pi_4'\rangle)^*)^*$$
$$=((\epsilon_2\langle\epsilon_1\langle\pi_3,\pi_3'\rangle\pi_4,\pi_4'\rangle)^*)^* = (\epsilon_1\langle\pi_3,\pi_3'\rangle)^* = (\epsilon_1\langle 1_{(A\Leftarrow C)\times B}\pi_3,\pi_3'\rangle)^* = 1_{(A\Leftarrow C)\times B},\ y$$

$$(\epsilon_2\langle\epsilon_1\langle\pi_1,\pi_2\pi_1'\rangle,\pi_2'\pi_1'\rangle)^*((\epsilon_3\langle\pi_6\pi_5,\langle\pi_6'\pi_5,\pi_5'\rangle\rangle)^*)^*$$
$$=(\epsilon_2\langle\epsilon_1\langle\pi_1,\pi_2\pi_1'\rangle,\pi_2'\pi_1'\rangle\langle((\epsilon_3\langle\pi_6\pi_5,\langle\pi_6'\pi_5,\pi_5'\rangle\rangle)^*)^*\pi_7,\pi_7'\rangle)^*$$
$$=(\epsilon_2\langle\epsilon_1\langle((\epsilon_3\langle\pi_6\pi_5,\langle\pi_6'\pi_5,\pi_5'\rangle\rangle)^*)^*\pi_7,\pi_2\pi_7'\rangle,\pi_2'\pi_7'\rangle)^*$$
$$=(\epsilon_2\langle\epsilon_1\langle((\epsilon_3\langle\pi_6\pi_5,\langle\pi_6'\pi_5,\pi_5'\rangle\rangle)^*)^*\pi_6\langle\pi_7,\pi_2\pi_7'\rangle,\pi_6'\langle\pi_7,\pi_2\pi_7'\rangle\rangle,\pi_2'\pi_7'\rangle)^*$$
$$=(\epsilon_2\langle\epsilon_1\langle((\epsilon_3\langle\pi_6\pi_5,\langle\pi_6'\pi_5,\pi_5'\rangle\rangle)^*)^*\pi_6,\pi_6'\rangle\langle\pi_7,\pi_2\pi_7'\rangle,\pi_2'\pi_7'\rangle)^*$$
$$=(\epsilon_2\langle(\epsilon_3\langle\pi_6\pi_5,\langle\pi_6'\pi_5,\pi_5'\rangle\rangle)^*\langle\pi_7,\pi_2\pi_7'\rangle,\pi_2'\pi_7'\rangle)^*$$
$$=(\epsilon_2\langle(\epsilon_3\langle\pi_6\pi_5,\langle\pi_6'\pi_5,\pi_5'\rangle\rangle)^*\pi_5\langle\langle\pi_7,\pi_2\pi_7'\rangle,\pi_2'\pi_7'\rangle,\pi_5'\langle\langle\pi_7,\pi_2\pi_7'\rangle,\pi_2'\pi_7'\rangle\rangle)^*$$
$$=(\epsilon_2\langle(\epsilon_3\langle\pi_6\pi_5,\langle\pi_6'\pi_5,\pi_5'\rangle\rangle)^*\pi_5,\pi_5'\rangle\langle\langle\pi_7,\pi_2\pi_7'\rangle,\pi_2'\pi_7'\rangle)^*$$
$$=(\epsilon_3\langle\pi_6\pi_5,\langle\pi_6'\pi_5,\pi_5'\rangle\rangle\langle\langle\pi_7,\pi_2\pi_7'\rangle,\pi_2'\pi_7'\rangle)^*$$
$$=(\epsilon_3\langle\pi_7,\langle\pi_2\pi_7',\pi_2'\pi_7'\rangle\rangle)^* = (\epsilon_3\langle\pi_7,\langle\pi_2,\pi_2'\rangle\pi_7'\rangle)^* = (\epsilon_3\langle\pi_7,1_{B\wedge C}\pi_7'\rangle)^*$$
$$=(\epsilon_3\langle 1_{A\Leftarrow(B\wedge C)}\pi_7,\pi_7'\rangle)^* = 1_{A\Leftarrow(B\wedge C)}.$$

$\therefore\ A\Leftarrow(B\wedge C)\cong(A\Leftarrow C)\Leftarrow B.$

$\square$

Proposición 2.8.

Sean A, B, C y D objetos de una categoría cartesiana cerrada. Si $A\cong C$ y $B\cong D$, entonces $A\Leftarrow B\cong C\Leftarrow D$.

Demostración.

Sean A, B, C y D objetos de una categoría cartesiana cerrada tales que $A\cong C$ y $B\cong D$. Entonces existen flechas $A\xrightarrow{f_1}C$, $C\xrightarrow{g_1}A$, $B\xrightarrow{f_2}D$ y $D\xrightarrow{g_2}B$ con la propiedad de que $g_1f_1=1_A$, $f_1g_1=1_C$, $g_2f_2=1_B$ y $f_2g_2=1_D$.

Consideremos las siguientes flechas:

$(f_1\epsilon_{A,B}\langle\pi_{A\Leftarrow B,D};\,g_2\pi'_{A\Leftarrow B,D}\rangle)^*:\ A\Leftarrow B\longrightarrow C\Leftarrow D$, y

$(g_1\epsilon_{C,D}\langle\pi_{C\Leftarrow D,B},\,f_2\pi'_{C\Leftarrow D,B}\rangle)^*:\ C\Leftarrow D\longrightarrow A\Leftarrow B.$

Entonces, por ser A, B, C y D objetos de una categoría cartesiana cerrada, se tienen las siguientes igualdades:

$(g_1\epsilon_{C,D}\langle\pi_{C\Leftarrow D,B},\,f_2\pi'_{C\Leftarrow D,B}\rangle)^*(f_1\epsilon_{A,B}\langle\pi_{A\Leftarrow B,D},\,g_2\pi'_{A\Leftarrow B,D}\rangle)^*$

$$= \left(g_1 \epsilon_{C,D} \langle \pi_{C\Leftarrow D,B}, f_2 \pi'_{C\Leftarrow D,B}\rangle \langle (f_1 \epsilon_{A,B}\langle \pi_{A\Leftarrow B,D}, g_2 \pi'_{A\Leftarrow B,D}\rangle)^* \pi_{A\Leftarrow B,B}, \pi'_{A\Leftarrow B,B}\rangle\right)^*$$
$$= \left(g_1 \epsilon_{C,D} \langle (f_1 \epsilon_{A,B}\langle \pi_{A\Leftarrow B,D}, g_2 \pi'_{A\Leftarrow B,D}\rangle)^* \pi_{A\Leftarrow B,B}, f_2 \pi'_{A\Leftarrow B,B}\rangle\right)^*$$
$$= \left(g_1 \epsilon_{C,D} \langle (f_1 \epsilon_{A,B}\langle \pi_{A\Leftarrow B,D}, g_2 \pi'_{A\Leftarrow B,D}\rangle)^* \pi_{A\Leftarrow B,D}\langle \pi_{A\Leftarrow B,B}, f_2 \pi'_{A\Leftarrow B,B}\rangle, \pi'_{A\Leftarrow B,D}\langle \pi_{A\Leftarrow B,B}, f_2 \pi'_{A\Leftarrow B,B}\rangle\rangle\right)^*$$
$$= \left(g_1 \epsilon_{C,D} \langle (f_1 \epsilon_{A,B}\langle \pi_{A\Leftarrow B,D}, g_2 \pi'_{A\Leftarrow B,D}\rangle)^* \pi_{A\Leftarrow B,D}, \pi'_{A\Leftarrow B,D}\rangle \langle \pi_{A\Leftarrow B,B}, f_2 \pi'_{A\Leftarrow B,B}\rangle\right)^*$$
$$= \left(g_1 f_1 \epsilon_{A,B}\langle \pi_{A\Leftarrow B,D}, g_2 \pi'_{A\Leftarrow B,D}\rangle \langle \pi_{A\Leftarrow B,B}, f_2 \pi'_{A\Leftarrow B,B}\rangle\right)^*$$
$$= \left(1_A \epsilon_{A,B}\langle \pi_{A\Leftarrow B,D}\langle \pi_{A\Leftarrow B,B}, f_2 \pi'_{A\Leftarrow B,B}\rangle, g_2 \pi'_{A\Leftarrow B,D}\langle \pi_{A\Leftarrow B,B}, f_2 \pi'_{A\Leftarrow B,B}\rangle\rangle\right)^*$$
$$= \left(\epsilon_{A,B}\langle \pi_{A\Leftarrow B,B}, g_2 f_2 \pi'_{A\Leftarrow B,B}\rangle\right)^* = \left(\epsilon_{A,B}\langle 1_{A\Leftarrow B}\pi_{A\Leftarrow B,B}, 1_B \pi'_{A\Leftarrow B,B}\rangle\right)^* = \left(\epsilon_{A,B}\langle 1_{A\Leftarrow B}\pi_{A\Leftarrow B,B}, \pi'_{A\Leftarrow B,B}\rangle\right)^*$$
$$= 1_{A\Leftarrow B}, \quad y$$

$$\left(f_1 \epsilon_{A,B}\langle \pi_{A\Leftarrow B,D}, g_2 \pi'_{A\Leftarrow B,D}\rangle\right)^* \left(g_1 \epsilon_{C,D}\langle \pi_{C\Leftarrow D,B}, f_2 \pi'_{C\Leftarrow D,B}\rangle\right)^*$$
$$= \left(f_1 \epsilon_{A,B}\langle \pi_{A\Leftarrow B,D}, g_2 \pi'_{A\Leftarrow B,D}\rangle \langle (g_1 \epsilon_{C,D}\langle \pi_{C\Leftarrow D,B}, f_2 \pi'_{C\Leftarrow D,B}\rangle)^* \pi_{C\Leftarrow D,D}, \pi'_{C\Leftarrow D,D}\rangle\right)^*$$
$$= \left(f_1 \epsilon_{A,B}\langle (g_1 \epsilon_{C,D}\langle \pi_{C\Leftarrow D,B}, f_2 \pi'_{C\Leftarrow D,B}\rangle)^* \pi_{C\Leftarrow D,D}, g_2 \pi'_{C\Leftarrow D,D}\rangle\right)^*$$
$$= \left(f_1 \epsilon_{A,B}\langle (g_1 \epsilon_{C,D}\langle \pi_{C\Leftarrow D,B}, f_2 \pi'_{C\Leftarrow D,B}\rangle)^* \pi_{C\Leftarrow D,B}\langle \pi_{C\Leftarrow D,D}, g_2 \pi'_{C\Leftarrow D,D}\rangle, \pi'_{C\Leftarrow D,B}\langle \pi_{C\Leftarrow D,D}, g_2 \pi'_{C\Leftarrow D,D}\rangle\rangle\right)^*$$
$$= \left(f_1 \epsilon_{A,B}\langle (g_1 \epsilon_{C,D}\langle \pi_{C\Leftarrow D,B}, f_2 \pi'_{C\Leftarrow D,B}\rangle)^* \pi_{C\Leftarrow D,B}, \pi'_{C\Leftarrow D,B}\rangle \langle \pi_{C\Leftarrow D,D}, g_2 \pi'_{C\Leftarrow D,D}\rangle\right)^*$$
$$= \left(f_1 g_1 \epsilon_{C,D}\langle \pi_{C\Leftarrow D,B}, f_2 \pi'_{C\Leftarrow D,B}\rangle \langle \pi_{C\Leftarrow D,D}, g_2 \pi'_{C\Leftarrow D,D}\rangle\right)^*$$
$$= \left(1_C \epsilon_{C,D}\langle \pi_{C\Leftarrow D,B}\langle \pi_{C\Leftarrow D,D}, g_2 \pi'_{C\Leftarrow D,D}\rangle, f_2 \pi'_{C\Leftarrow D,B}\langle \pi_{C\Leftarrow D,D}, g_2 \pi'_{C\Leftarrow D,D}\rangle\rangle\right)^*$$
$$= \left(\epsilon_{C,D}\langle \pi_{C\Leftarrow D,D}, f_2 g_2 \pi'_{C\Leftarrow D,D}\rangle\right)^* = \left(\epsilon_{C,D}\langle \pi_{C\Leftarrow D,D}, 1_D \pi'_{C\Leftarrow D,D}\rangle\right)^* = \left(\epsilon_{C,D}\langle 1_{C\Leftarrow D}\pi_{C\Leftarrow D,D}, \pi'_{C\Leftarrow D,D}\rangle\right)^*$$
$$= 1_{C\Leftarrow D}.$$

$\therefore\ A \Leftarrow B \cong C \Leftarrow D.$

$\square$

CAPITULO 3

Definición 3.1.

Un cálculo proposicional intuicionista completo es un cálculo proposicional intuicionista en el cual se satisfacen, para cualesquiera objetos A, B y C:

E2. $f = O_A$, para cualquier flecha $A \xrightarrow{f} T$, y

E3a. $\pi_{A,B}\langle f, g\rangle = f$,

E3b. $\pi'_{A,B}\langle f, g\rangle = g$,

E3c. $\langle \pi_{A,B}h, \pi'_{A,B}h\rangle = h$,

E4a. $\epsilon_{A,B}\langle k_1^* \pi_{C,B}, \pi'_{C,B}\rangle = k_1$,

E4b. $(\epsilon_{A,B}\langle k_2 \pi_{C,B}, \pi'_{C,B}\rangle)^* = k_2$,

para cualesquiera flechas $C \xrightarrow{f} A$, $C \xrightarrow{g} B$, $C \xrightarrow{h} A\wedge B$, $C\wedge B \xrightarrow{k_1} A$ y $C \xrightarrow{k_2} A \Leftarrow B$.

Definición 3.2.

Una categoría bicartesiana cerrada es tanto una categoría como un cálculo proposicional intuicionista completo, en la cual, para cualesquiera objetos A, B y C, se satisfacen:

E5. $f = \square_A$, para cualquier flecha $\perp \xrightarrow{f} A$, y

E6a. $[f, g]k_{A,B} = f$,

E6b. $[f, g]k'_{A,B} = g$,

E6c. $[hk_{A,B}, hk'_{A,B}] = h$,

para cualesquiera flechas $A \xrightarrow{f} C$, $B \xrightarrow{g} C$ y $A\vee B \xrightarrow{h} C$.

Es inmediato de la definición que toda categoría bicartesiana cerrada es también una categoría cartesiana cerrada.

Proposición 3.1.

Sean $A \xrightarrow{f} C$, $B \xrightarrow{g} C$, $C \xrightarrow{h} D$, $A \xrightarrow{f_1} B$, $C \xrightarrow{g_1} D$, $B \xrightarrow{f_1'} E$ y $D \xrightarrow{g_1'} F$ flechas de una categoría bicartesiana cerrada. Entonces:

(i) $h[f, g] = [hf, hg]$,

(ii) $1_A \vee 1_C = 1_{A\vee C}$, y
(iii) $(f_1' \vee g_1')(f_1 \vee g_1) = (f_1' f_1) \vee (g_1' g_1)$.

Demostración.
(i) $h[f,g] = [h[f,g]K_{A,B}, h[f,g]K'_{A,B}]$ (de E6c.),
$= [hf, hg]$ (de E6a. y E6b.).
(ii) Por definición, $1_A \vee 1_C = [K_{A,C}1_A, K'_{A,C}1_C]$, y, por E1., se tiene que $[K_{A,C}1_A, K'_{A,C}1_C] = [K_{A,C}, K'_{A,C}] = [1_{A\vee C}K_{A,C}, 1_{A\vee C}K'_{A,C}]$.
Finalmente, por E6c., $[1_{A\vee C}K_{A,C}, 1_{A\vee C}K'_{A,C}] = 1_{A\vee C}$.
$\therefore\ 1_A \vee 1_C = 1_{A\vee C}$.
(iii) Por definición, $(f_1' \vee g_1')(f_1 \vee g_1) = [K_{E,F}f_1', K'_{E,F}g_1'][K_{B,D}f_1, K'_{B,D}g_1]$.
Entonces, del inciso (i), de E6a. y de E6b., se obtiene que
$[K_{E,F}f_1', K'_{E,F}g_1'][K_{B,D}f_1, K'_{B,D}g_1] = [[K_{E,F}f_1', K'_{E,F}g_1']K_{B,D}f_1, [K_{E,F}f_1', K'_{E,F}g_1']K'_{B,D}g_1]$
$= [K_{E,F}f_1'f_1, K'_{E,F}g_1'g_1]$.
Pero, por definición, $(f_1'f_1) \vee (g_1'g_1) = [K_{E,F}f_1'f_1, K'_{E,F}g_1'g_1]$.
$\therefore\ (f_1' \vee g_1')(f_1 \vee g_1) = (f_1'f_1) \vee (g_1'g_1)$.

□.

Proposición 3.2.
Sean A, B y C objetos de una categoría bicartesiana cerrada. Entonces:
(i) $A \vee \bot \cong A$,
(ii) $A \vee B \cong B \vee A$, y
(iii) $(A \vee B) \vee C \cong A \vee (B \vee C)$.

Demostración.
(i) De R1a., R5. y R6c., se obtiene $[1_A, \Box_A] : A \vee \bot \longrightarrow A$. Y de R6a., se obtiene $K_{A,\bot} : A \longrightarrow A \vee \bot$. Entonces, por la Proposición 3.1. inciso (i), por E1., E5. y E6c.,
$K_{A,\bot}[1_A, \Box_A] = [K_{A,\bot}1_A, K_{A,\bot}\Box_A] = [K_{A,\bot}, \Box_{A\vee\bot}] = [K_{A,\bot}, K'_{A,\bot}] = [1_{A\vee\bot}K_{A,\bot}, 1_{A\vee\bot}K'_{A,\bot}] = 1_{A\vee\bot}$.
Y por E6a., $[1_A, \Box_A]K_{A,\bot} = 1_A$.
$\therefore\ A \vee \bot \cong A$.
(ii) De R6a., R6b. y R6c., se obtienen $[K'_{B,A}, K_{B,A}] : A\vee B \longrightarrow B \vee A$ y $[K'_{A,B}, K_{A,B}] : B\vee A \longrightarrow A \vee B$.
Entonces, por la Proposición 3.1. inciso (i), por E6a., E6b., E1. y E6c., s tiene que

$[K'_{A,B}, K_{A,B}][K'_{B,A}, K_{B,A}] = [[K'_{A,B}, K_{A,B}]K'_{B,A}, [K'_{A,B}, K_{A,B}]K_{B,A}] = [K_{A,B}, K'_{A,B}] = [1_{AvB}K_{A,B}, 1_{AvB}K'_{A,B}] = 1_{AvB}$, y
$[K'_{B,A}, K_{B,A}][K'_{A,B}, K_{A,B}] = [[K'_{B,A}, K_{B,A}]K'_{A,B}, [K'_{B,A}, K_{B,A}]K_{A,B}] = [K_{B,A}, K'_{B,A}] = [1_{BvA}K_{B,A}, 1_{BvA}K'_{B,A}] = 1_{BvA}$.

$\therefore$ $AvB \cong BvA$.

(iii) Por la Proposición 1.8. inciso (iii), existen $\alpha_{AvB,C} : (AvB)vC \longrightarrow Av(BvC)$, y $\alpha_{A,BvC} : Av(BvC) \longrightarrow (AvB)vC$, donde, por definición,

$\alpha_{AvB,C} = [[K_{A,BvC}, K'_{A,BvC}K_{B,C}], K'_{A,BvC}K'_{B,C}]$ y $\alpha_{A,BvC} = [K_{AvB,C}K_{A,B}, [K_{AvB,C}K'_{A,B}, K'_{AvB,C}]]$.

Entonces,

$[K_{AvB,C}K_{A,B}, [K_{AvB,C}K'_{A,B}, K'_{AvB,C}]][[K_{A,BvC}, K'_{A,BvC}K_{B,C}], K'_{A,BvC}K'_{B,C}]$
$= [[K_{AvB,C}K_{A,B}, [K_{AvB,C}K'_{A,B}, K'_{AvB,C}]][K_{A,BvC}, K'_{A,BvC}K_{B,C}], [K_{AvB,C}K_{A,B}, [K_{AvB,C}K'_{A,B}, K'_{AvB,C}]]K'_{A,BvC}K'_{B,C}]$
$= [[K_{AvB,C}K_{A,B}, [K_{AvB,C}K'_{A,B}, K'_{AvB,C}]K_{B,C}], [K_{AvB,C}K'_{A,B}, K'_{AvB,C}]K'_{B,C}]$
$= [[K_{AvB,C}K_{A,B}, K_{AvB,C}K'_{A,B}], K'_{AvB,C}] = [K_{AvB,C}[K_{A,B}, K'_{A,B}], K'_{AvB,C}] = [K_{AvB,C}1_{AvB}, K'_{AvB,C}]$
$= [K_{AvB,C}, K'_{AvB,C}] = 1_{(AvB)vC}$, y

$[[K_{A,BvC}, K'_{A,BvC}K_{B,C}], K'_{A,BvC}K'_{B,C}][K_{AvB,C}K_{A,B}, [K_{AvB,C}K'_{A,B}, K'_{AvB,C}]]$
$= [[[K_{A,BvC}, K'_{A,BvC}K_{B,C}], K'_{A,BvC}K'_{B,C}]K_{AvB,C}K_{A,B}, [[K_{A,BvC}, K'_{A,BvC}K_{B,C}], K'_{A,BvC}K'_{B,C}][K_{AvB,C}K'_{A,B}, K'_{AvB,C}]]$
$= [[K_{A,BvC}, K'_{A,BvC}K_{B,C}]K_{A,B}, [[K_{A,BvC}, K'_{A,BvC}K_{B,C}]K'_{A,B}, K'_{A,BvC}K'_{B,C}]]$
$= [K_{A,BvC}, [K'_{A,BvC}K_{B,C}, K'_{A,BvC}K'_{B,C}]] = [K_{A,BvC}, K'_{A,BvC}[K_{B,C}, K'_{B,C}]] = [K_{A,BvC}, K'_{A,BvC}1_{BvC}]$
$= [K_{A,BvC}, K'_{A,BvC}] = 1_{Av(BvC)}$.

$\therefore$ $\alpha_{A,BvC}\alpha_{AvB,C} = 1_{(AvB)vC}$ y $\alpha_{AvB,C}\alpha_{A,BvC} = 1_{Av(BvC)}$.

$\therefore$ $(AvB)vC \cong Av(BvC)$.

□.

Observación.

Si A, B y C son objetos de una categoría $\mathcal{C}$ y $A \cong B$, entonces existen biyecciones $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ y $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,B)$. En efecto, como $A \cong B$, existe $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ tal que $f^{-1}f = 1_A$ y $ff^{-1} = 1_B$. Entonces, si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$, definimos $\varphi(g) = gf^{-1}$; y si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$, definimos $\psi(h) = fh$. Sean $\varphi' : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$ y $\psi' : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$ dadas por $\varphi'(g') = g'f$ y $\psi'(h') = f^{-1}h'$. Entonces, $(\varphi' \circ \varphi)(g) = \varphi'(\varphi(g)) = \varphi'(gf^{-1}) = gf^{-1}f = g1_A = g$, $(\varphi \circ \varphi')(g') = \varphi(\varphi'(g')) = \varphi(g'f) = g'ff^{-1} = g'1_B = g'$, y $(\psi' \circ \psi)(h) = \psi'(\psi(h)) = \psi'(fh) = f^{-1}fh = 1_A h = h$, $(\psi \circ \psi')(h') = \psi(\psi'(h')) = \psi(f^{-1}h') = ff^{-1}h' = 1_B h' = h'$. Por lo tanto, $\varphi' \circ \varphi = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)}$, $\varphi \circ \varphi' = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)}$, $\psi \circ \psi' = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,B)}$ y

$\Psi'\circ\Psi = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)}$.

$\therefore$ φ y Ψ son biyecciones.

Proposición 3.3.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría bicartesiana cerrada. Si existe $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\bot)$, entonces $A\cong\bot$.

Demostración.

Sea A un objeto de una categoría bicartesiana cerrada $\mathcal{C}$ y supongamos que existe $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\bot)$.

Por la Proposición 2.3., existe una biyección $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bot\wedge A, C)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bot, C\Leftarrow A)$ para cualquier objeto C de $\mathcal{C}$.

Por E5., $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bot, C\Leftarrow A)$ consta de un sólo elemento. Entonces, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bot\wedge A, C)$ consta también de un sólo elemento. Y por la observación anterior, como $A\wedge\bot\cong\bot\wedge A$ (Proposición 2.6. inciso (ii)), $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A\wedge\bot, C)$ consta de un único elemento para cualquier objeto C de $\mathcal{C}$. En particular, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A\wedge\bot, A\wedge\bot)$ consta de un sólo elemento.

Por R1a., R3b., R5. y R1b., se tiene que $1_{A\wedge\bot}, \Box_{A\wedge\bot}\pi'_{A,\bot}\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A\wedge\bot, A\wedge\bot)$. Entonces $\Box_{A\wedge\bot}\pi'_{A,\bot} = 1_{A\wedge\bot}$.

Consideremos ahora $\Box_A f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$.

Por E3b. y E5., $\pi'_{A,\bot}\langle 1_A, f\rangle = f$ y $\pi_{A,\bot}\Box_{A\wedge\bot} = \Box_A$. Entonces,

$$\begin{aligned}\Box_A f &= (\pi_{A,\bot}\Box_{A\wedge\bot})(\pi'_{A,\bot}\langle 1_A, f\rangle) = \pi_{A,\bot}(\Box_{A\wedge\bot}(\pi'_{A,\bot}\langle 1_A, f\rangle)) = \pi_{A,\bot}((\Box_{A\wedge\bot}\pi'_{A,\bot})\langle 1_A, f\rangle)\\ &= \pi_{A,\bot}(1_{A\wedge\bot}\langle 1_A, f\rangle) = \pi_{A,\bot}\langle 1_A, f\rangle = 1_A.\end{aligned}$$

Finalmente, como $f\Box_A\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bot,\bot)$, entonces por E5. y R1a., $f\Box_A = 1_\bot$.

$\therefore A\cong\bot$.

$\Box$.

Corolario 3.1.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría bicartesiana cerrada y A es un objeto de $\mathcal{C}$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\bot)$ consta a lo más de un elemento.

Demostración.

Supongamos que existe $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\bot)$. Entonces, por la Proposición anterior,

$A \cong \bot$. Así, como se observó anteriormente, existe una biyección $Hom_{\mathcal{C}}(A,\bot) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(\bot,\bot)$. Pero, por E5., $Hom_{\mathcal{C}}(\bot,\bot)$ consta de un sólo elemento.
$\therefore Hom_{\mathcal{C}}(A,\bot)$ consta a lo más de un elemento.

□.

Proposición 3.4.
Sea A un objeto de una categoría bicartesiana cerrada $\mathcal{C}$. Entonces:
(i) $A \wedge \bot \cong \bot$, y
(ii) $A \Leftarrow \bot \cong T$.

Demostración.
(i) Por R3b., existe $\pi'_{A,\bot} \in Hom_{\mathcal{C}}(A\wedge\bot,\bot)$. Entonces, por la Proposición 3.3., $A\wedge\bot \cong \bot$.
(ii) Por R2., existe $O_{A\Leftarrow\bot} \in Hom_{\mathcal{C}}(A\Leftarrow\bot, T)$, y por R3b., R5., R1b. y R4b., existe $(\Box_A \pi'_{T,\bot})^* \in Hom_{\mathcal{C}}(T, A\Leftarrow\bot)$.
Entonces, por E'2., $O_{A\Leftarrow\bot}(\Box_A \pi'_{T,\bot})^* = O_T = 1_T$.
Por la Proposición 2.3., existe una biyección $Hom_{\mathcal{C}}((A\Leftarrow\bot)\wedge\bot, A) \xrightarrow{\varphi} Hom_{\mathcal{C}}(A\Leftarrow\bot, A\Leftarrow\bot)$. Como $(A\Leftarrow\bot)\wedge\bot \cong \bot$ (inciso (i)), entonces existe una biyección $Hom_{\mathcal{C}}(\bot,A) \xrightarrow{\psi} Hom_{\mathcal{C}}((A\Leftarrow\bot)\wedge\bot, A)$. Así, $\varphi\circ\psi : Hom_{\mathcal{C}}(\bot,A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A\Leftarrow\bot, A\Leftarrow\bot)$ es una biyección.
Por E5., $Hom_{\mathcal{C}}(\bot,A)$ consta de un sólo elemento. Entonces, $Hom_{\mathcal{C}}(A\Leftarrow\bot, A\Leftarrow\bot)$ consta también de un único elemento.
Como $(\Box_A \pi'_{T,\bot})^* O_{A\Leftarrow\bot}, 1_{A\Leftarrow\bot} \in Hom_{\mathcal{C}}(A\Leftarrow\bot, A\Leftarrow\bot)$, se tiene que $(\Box_A \pi'_{T,\bot})^* O_{A\Leftarrow\bot} = 1_{A\Leftarrow\bot}$.
$\therefore A\Leftarrow\bot \cong T$.

□.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría, entonces $O(\mathcal{C})$ y $F(\mathcal{C})$ denotarán a los conjuntos de objetos y flechas de $\mathcal{C}$, respectivamente. Se tiene entonces la siguiente:

Definición 3.3.
Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías. Un funtor covariante H de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ (denotado por $H: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$) consta de dos funciones $H: O(\mathcal{C}) \longrightarrow O(\mathcal{C}')$ y $H: F(\mathcal{C}) \longrightarrow F(\mathcal{C}')$, tales que:
(i) si $f: A \longrightarrow B$ es una flecha de $\mathcal{C}$, entonces $H(f): H(A) \longrightarrow H(B)$ es una flecha de $\mathcal{C}'$,

(ii) $H(1_A) = 1_{H(A)}$, para cualquier $A \in O(\mathcal{C})$, y
(iii) $H(fg) = H(f)H(g)$.

Y se dice que $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ es un funtor contravariante si las funciones $H : O(\mathcal{C}) \longrightarrow O(\mathcal{C}')$ y $H : F(\mathcal{C}) \longrightarrow F(\mathcal{C}')$ son tales que:
(i)' si $f : A \longrightarrow B$ es una flecha de $\mathcal{C}$, entonces $H(f) : H(B) \longrightarrow H(A)$ es una flecha de $\mathcal{C}'$,
(ii) $H(1_A) = 1_{H(A)}$, para cualquier $A \in O(\mathcal{C})$, y
(iii)' $H(fg) = H(g)H(f)$.

Definición 3.4.
Sean $G, H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ dos funtores (covariantes). Una transformación natural τ de G a H (denotada por $\tau : G \longrightarrow H$), es una función que asigna a cada objeto C de $\mathcal{C}$, una flecha $\tau_C : G(C) \longrightarrow H(C)$ de $\mathcal{C}'$ y tal que si $f : C \longrightarrow C'$ es una flecha de $\mathcal{C}$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} G(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "G(f)"'] & H(C) \arrow[d, "H(f)"] \\ G(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & H(C') \end{tikzcd}$$

es conmutativo.
A las flechas τ_C de $\mathcal{C}'$ se les llama componentes de τ. Si cada componente de τ es un isomorfismo, entonces se dice que τ es un isomorfismo natural.
Al conjunto de transformaciones naturales de G a H se le denota por $\mathrm{Nat}(G,H)$.

En el caso de que los funtores G ó H (ó ambos) sean contravariantes, la definición de transformación natural de G a H es completamente análoga.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $\mathcal{S}et$ la categoría cuyos objetos son conjuntos y cuyas flechas son funciones entre éstos. Si A es un objeto de $\mathcal{C}$, entonces la función $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\_) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$ dada por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\_)(B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ y por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\_)(f)(g) = fg$, para cada objeto B de $\mathcal{C}$ y cada flecha $f : B \longrightarrow C$ de $\mathcal{C}$, donde $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, es claramente un funtor covariante.

Análogamente, la función $Hom_{\mathcal{C}}(\_,A):\mathcal{C}\longrightarrow \mathcal{S}et$, dada por $Hom_{\mathcal{C}}(\_,A)(B)=Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$ y por $Hom_{\mathcal{C}}(\_,A)(f)(g)=gf$, donde $f\in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ y $g\in Hom_{\mathcal{C}}(C,A)$, es un funtor contravariante.

Proposición 3.5.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean A y B objetos de $\mathcal{C}$. Entonces la función $\tilde{Y}: Hom_{\mathcal{C}}(B,A)\longrightarrow Nat(Hom_{\mathcal{C}}(A,\_),Hom_{\mathcal{C}}(B,\_))$, definida por $\tilde{Y}(f)_C(g)=gf$, donde C es un objeto de $\mathcal{C}$ y $g\in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$, es una biyección.

Demostración.

Sean $f: B\longrightarrow A$ y $h: C\longrightarrow C'$ flechas de $\mathcal{C}$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(A,C) \arrow[r, "\tilde{Y}(f)_C"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(A,_)(h)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(B,_)(h)"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(A,C') \arrow[r, "\tilde{Y}(f)_{C'}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(B,C')
\end{tikzcd}$$

Entonces, si $g\in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$, $((Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(h))\circ\tilde{Y}(f)_C)(g)=Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(h)(\tilde{Y}(f)_C(g))$
$=Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(h)(gf)=hgf$, y $(\tilde{Y}(f)_{C'}\circ(Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)(h)))(g)=\tilde{Y}(f)_{C'}(Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)(h)(g))$
$=\tilde{Y}(f)_{C'}(hg)=hgf$.

$\therefore\ (Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(h))\circ\tilde{Y}(f)_C=\tilde{Y}(f)_{C'}\circ(Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)(h))$.

$\therefore\ \tilde{Y}(f)\in Nat(Hom_{\mathcal{C}}(A,\_),Hom_{\mathcal{C}}(B,\_))$.

Sea ahora $\tau\in Nat(Hom_{\mathcal{C}}(A,\_),Hom_{\mathcal{C}}(B,\_))$. Se define $\tilde{Y}^{-1}(\tau)=\tau_A(1_A)$.
Probaremos entonces que $\tilde{Y}^{-1}\circ\tilde{Y}=1_{Hom_{\mathcal{C}}(B,A)}$ y que $\tilde{Y}\circ\tilde{Y}^{-1}=1_{Nat(Hom_{\mathcal{C}}(A,\_),Hom_{\mathcal{C}}(B,\_))}$.

Sea $f\in Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$. De las definiciones y de E1., se tiene que
$(\tilde{Y}^{-1}\circ\tilde{Y})(f)=\tilde{Y}^{-1}(\tilde{Y}(f))=\tilde{Y}(f)_A(1_A)=1_Af=f$.

$\therefore\ \tilde{Y}^{-1}\circ\tilde{Y}=1_{Hom_{\mathcal{C}}(B,A)}$.

Sea ahora τ una transformación natural de $Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)$ a $Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)$.
De las definiciones, $(\tilde{Y}\circ\tilde{Y}^{-1})(\tau)=\tilde{Y}(\tilde{Y}^{-1}(\tau))=\tilde{Y}(\tau_A(1_A))$. Entonces, basta probar que $\tilde{Y}(\tau_A(1_A))_C=\tau_C$, para cualquier objeto C de $\mathcal{C}$.

Sea $g \in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$. Consideremos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(A,A) & \xrightarrow{\tilde{Y}(\tau_A(1_A))_A} & Hom_{\mathcal{C}}(B,A) \\ \downarrow{\scriptstyle Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)(g)} & & \downarrow{\scriptstyle Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(g)} \\ Hom_{\mathcal{C}}(A,C) & \xrightarrow[\tilde{Y}(\tau_A(1_A))_C]{} & Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(A,A) & \xrightarrow{\tau_A} & Hom_{\mathcal{C}}(B,A) \\ \downarrow{\scriptstyle Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)(g)} & & \downarrow{\scriptstyle Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(g)} \\ Hom_{\mathcal{C}}(A,C) & \xrightarrow[\tau_C]{} & Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \end{array} .$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(\tau_A(1_A))_C(g) &= \tilde{Y}(\tau_A(1_A))_C(g1_A) = \tilde{Y}(\tau_A(1_A))_C(Hom_{\mathcal{C}}(A,_)(g)(1_A)) \\
&= (\tilde{Y}(\tau_A(1_A))_C \circ (Hom_{\mathcal{C}}(A,_)(g)))(1_A) \\
&= ((Hom_{\mathcal{C}}(B,_)(g)) \circ \tilde{Y}(\tau_A(1_A))_A)(1_A) \\
&= Hom_{\mathcal{C}}(B,_)(g)(\tilde{Y}(\tau_A(1_A))_A(1_A)) \\
&= Hom_{\mathcal{C}}(B,_)(g)(1_A\tau_A(1_A)) \\
&= Hom_{\mathcal{C}}(B,_)(g)(\tau_A(1_A)) \\
&= ((Hom_{\mathcal{C}}(B,_)(g)) \circ \tau_A)(1_A) \\
&= (\tau_C \circ (Hom_{\mathcal{C}}(A,_)(g)))(1_A) \\
&= \tau_C(Hom_{\mathcal{C}}(A,_)(g)(1_A)) \\
&= \tau_C(g1_A) = \tau_C(g).
\end{aligned}$$

$\therefore\ \tilde{Y}(\tau_A(1_A))_C = \tau_C$, para cualquier objeto C de $\mathcal{C}$.

$\therefore\ \tilde{Y}(\tau_A(1_A)) = \tau$ y $\tilde{Y}\circ\tilde{Y}^{-1}(\tau) = \tau$.

$\therefore\ \tilde{Y}\circ\tilde{Y}^{-1} = 1_{Nat(Hom_{\mathcal{C}}(A,\_),Hom(B,\_))}$.

Con lo cual queda probado que $\tilde{Y}$ es una biyección.

□.

El resultado dual al de la Proposición anterior podría enunciarse de la siguiente manera:

La función $\tilde{Y}'$: $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow Nat(Hom_{\mathcal{C}}(\_,A), Hom_{\mathcal{C}}(\_,B))$, definida por $\tilde{Y}'(f)_C(g) = fg$, donde C es un objeto de $\mathcal{C}$ y $g \in Hom_{\mathcal{C}}(C,A)$, es una biyección.

Su demostración es completamente análoga. Además, la siguiente Proposición también es válida si consideramos $\tilde{Y}'$: $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow Nat(Hom_{\mathcal{C}}(\_,A), Hom_{\mathcal{C}}(\_,B))$ (la demostración es igualmente análoga).

Proposición 3.6.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $f: B \longrightarrow A$ una flecha de $\mathcal{C}$. Entonces f es un isomorfismo si y sólo si $\tilde{Y}(f)$ es un isomorfismo natural.

Demostración.

Sea $f \in Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$. Si existe $f^{-1} \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, se define entonces, para cada objeto C de $\mathcal{C}$ y cada $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$, $\tilde{Y}(f)_C^{-1}(g) = g \circ f^{-1}$.

Consideremos ahora el siguiente diagrama, donde $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C,C')$:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \arrow[r, "\tilde{Y}(f)_C^{-1}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(B,_)(h)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(A,C) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(A,_)(h)"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(B,C') \arrow[r, "\tilde{Y}(f)_{C'}^{-1}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(A,C')
\end{tikzcd}$$

Entonces, si $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$,

$$\begin{aligned}
((Hom_{\mathcal{C}}(A,_)(h)) \circ \tilde{Y}(f)_C^{-1})(g) &= Hom_{\mathcal{C}}(A,_)(h)(\tilde{Y}(f)_C^{-1}(g)) \\
&= Hom_{\mathcal{C}}(A,_)(h)(gf^{-1}) = hgf^{-1}, \text{ y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{Y}(f)_{C'}^{-1} \circ (Hom_{\mathcal{C}}(B,_)(h)))(g) &= \tilde{Y}(f)_{C'}^{-1}(Hom_{\mathcal{C}}(B,_)(h)(g)) \\
&= \tilde{Y}(f)_{C'}^{-1}(hg) = hgf^{-1}.
\end{aligned}$$

$\therefore$ $(Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)(h)) \circ \tilde{Y}(f)_C^{-1} = \tilde{Y}(f)_{C'}^{-1} \circ (Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(h))$.

$\therefore$ $\tilde{Y}(f)^{-1}$ es una transformación natural de $Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)$ a $Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)$.

Sea ahora $h \in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$. Entonces,

$(\tilde{Y}(f)_C^{-1} \circ \tilde{Y}(f)_C)(h) = \tilde{Y}(f)_C^{-1}(\tilde{Y}(f)_C(h)) = \tilde{Y}(f)_C^{-1}(hf) = hff^{-1} = h1_A = h$, y si $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$,

$(\tilde{Y}(f)_C \circ \tilde{Y}(f)_C^{-1})(g) = \tilde{Y}(f)_C(\tilde{Y}(f)_C^{-1}(g)) = \tilde{Y}(f)_C(gf^{-1}) = gf^{-1}f = g1_B = g$.

$\therefore$ $\tilde{Y}(f)_C^{-1} \circ \tilde{Y}(f)_C = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(A,C)}$ y $\tilde{Y}(f)_C \circ \tilde{Y}(f)_C^{-1} = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(B,C)}$.

$\therefore$ $\tilde{Y}(f)_C$ es una biyección para cada objeto C de $\mathcal{C}$.

$\therefore$ $\tilde{Y}(f)$ es un isomorfismo natural.

Supongamos ahora que $\tilde{Y}(f)$ es un isomorfismo natural. Entonces, para cada objeto C de $\mathcal{C}$ existe $\tilde{Y}(f)_C^{-1} : Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$. En particular,

$\tilde{Y}(f)_A^{-1} \circ \tilde{Y}(f)_A = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(A,A)}$ y $\tilde{Y}(f)_B \circ \tilde{Y}(f)_B^{-1} = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(B,B)}$.

Consideremos ahora los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "\tilde{Y}(f)_B"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(A,_)(f)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(B,B) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(B,_)(f)"'] \\
Hom_{\mathcal{C}}(A,A) \arrow[r, "\tilde{Y}(f)_A"'] & Hom_{\mathcal{C}}(B,A)
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(A,A) \arrow[r, "\tilde{Y}(f)_A"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(A,_)(\tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B))"] & Hom_{\mathcal{C}}(B,A) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(B,_)(\tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B))"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "\tilde{Y}(f)_B"'] & Hom_{\mathcal{C}}(B,B)
\end{tikzcd}$$

Así, $f\,\tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B) = Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)(f)(\tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B)) = ((Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)(f)) \circ \tilde{Y}(f)_B^{-1})(1_B)$

$= (1_{Hom_{\mathcal{C}}(A,A)} \circ (Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)(f)) \circ \tilde{Y}(f)_B^{-1})(1_B)$

$= (\tilde{Y}(f)_A^{-1} \circ \tilde{Y}(f)_A \circ (Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)(f)) \circ \tilde{Y}(f)_B^{-1})(1_B)$

$= (\tilde{Y}(f)_A^{-1} \circ (Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(f)) \circ \tilde{Y}(f)_B \circ \tilde{Y}(f)_B^{-1})(1_B)$

$= (\tilde{Y}(f)_A^{-1} \circ (Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(f)) \circ 1_{Hom_{\mathcal{C}}(B,B)})(1_B)$

$= (\tilde{Y}(f)_A^{-1} \circ (Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(f)))(1_B) = \tilde{Y}(f)_A^{-1}(Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(f)(1_B))$

$= \tilde{Y}(f)_A^{-1}(f 1_B) = \tilde{Y}(f)_A^{-1}(f) = \tilde{Y}(f)_A^{-1}(1_A f) = \tilde{Y}(f)_A^{-1}(\tilde{Y}(f)_A(1_A))$

$= (\tilde{Y}(f)_A^{-1} \circ \tilde{Y}(f)_A)(1_A) = 1_A$, y

$\tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B) f = \tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B)(1_A f) = \tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B)(\tilde{Y}(f)_A(1_A))$

$= Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(\tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B))(\tilde{Y}(f)_A(1_A)) = ((Hom_{\mathcal{C}}(B,\_)(\tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B))) \circ \tilde{Y}(f)_A)(1_A)$

$= (\tilde{Y}(f)_B \circ (Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)(\tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B))))(1_A)$

$= \tilde{Y}(f)_B(Hom_{\mathcal{C}}(A,\_)(\tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B))(1_A)) = \tilde{Y}(f)_B(\tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B) 1_A)$

$= \tilde{Y}(f)_B(\tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B)) = (\tilde{Y}(f)_B \circ \tilde{Y}(f)_B^{-1})(1_B) = 1_B$.

$\therefore \tilde{Y}(f)_B^{-1}(1_B) = f^{-1}$ y f es un isomorfismo.

Con lo cual se ha probado que f es isomorfismo si y sólo si $\tilde{Y}(f)$ es isomorfismo natural.

$\square$.

Proposición 3.7.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría bicartesiana cerrada.

Sea $\varphi: Hom_{\mathcal{C}}((A \vee B) \wedge C, \_) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}((A \wedge C) \vee (B \wedge C), \_)$ la transformación natural definida por $\varphi_D(h) = [\epsilon_{D,C}((h^* K_{A,B}) \wedge 1_C), \epsilon_{D,C}((h^* K'_{A,B}) \wedge 1_C)]$. Entonces φ es un isomorfismo natural.

Demostración.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría bicartesiana cerrada y sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, D')$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\vee B)\wedge C, D) \arrow[r, "\varphi_D"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\vee B)\wedge C,_)(f)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\wedge C)\vee(B\wedge C), D) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\wedge C)\vee(B\wedge C),_)(f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\vee B)\wedge C, D') \arrow[r, "\varphi_{D'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\wedge C)\vee(B\wedge C), D').
\end{tikzcd}$$

Sea $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\vee B)\wedge C, D)$. Entonces,

$((\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\wedge C)\vee(B\wedge C),\_)(f))\circ\varphi_D)(g)$

$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\wedge C)\vee(B\wedge C),\_)(f)(\varphi_D(g))$

$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\wedge C)\vee(B\wedge C),\_)(f)([\epsilon_{D,C}((g^* \kappa_{A,B})\wedge 1_C), \epsilon_{D,C}((g^* \kappa'_{A,B})\wedge 1_C)])$

$= f[\epsilon_{D,C}((g^* \kappa_{A,B})\wedge 1_C), \epsilon_{D,C}((g^* \kappa'_{A,B})\wedge 1_C)]$

$= [f\epsilon_{D,C}((g^* \kappa_{A,B})\wedge 1_C), f\epsilon_{D,C}((g^* \kappa'_{A,B})\wedge 1_C)]$, y

$(\varphi_{D'}\circ(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\vee B)\wedge C,\_)(f)))(g)$

$= \varphi_{D'}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\vee B)\wedge C,\_)(f)(g))$

$= \varphi_{D'}(fg)$

$= [\epsilon_{D',C}(((fg)^* \kappa_{A,B})\wedge 1_C), \epsilon_{D',C}(((fg)^* \kappa'_{A,B})\wedge 1_C)]$.

Ahora bien, $\epsilon_{D',C}(((fg)^* \kappa_{A,B})\wedge 1_C) = \epsilon_{D',C}\langle (fg)^* \kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \pi'_{A,C}\rangle$

$= \epsilon_{D',C}\langle (fg\langle \kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \pi'_{A,C}\rangle)^* \pi_{A,C}, \pi'_{A,C}\rangle$

$= fg\langle \kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \pi'_{A,C}\rangle$, y

$f\epsilon_{D,C}((g^* \kappa_{A,B})\wedge 1_C) = f\epsilon_{D,C}\langle g^* \kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \pi'_{A,C}\rangle$

$= f\epsilon_{D,C}\langle (g\langle \kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \pi'_{A,C}\rangle)^* \pi_{A,C}, \pi'_{A,C}\rangle$

$= fg\langle \kappa_{A,B}\pi_{A,C}, \pi'_{A,C}\rangle$.

Entonces se tiene que $f\epsilon_{D,C}((g^* \kappa_{A,B})\wedge 1_C) = \epsilon_{D',C}(((fg)^* \kappa_{A,B})\wedge 1_C)$.

De manera completamente análoga se obtiene que $f\epsilon_{D,C}((g^* \kappa'_{A,B})\wedge 1_C) = \epsilon_{D',C}(((fg)^* \kappa'_{A,B})\wedge 1_C)$.

$\therefore\ [f\epsilon_{D,C}((g^* K_{A,B})\wedge 1_C),\ f\epsilon_{D,C}((g^* K'_{A,B})\wedge 1_C)] = [\epsilon_{D',C}(((fg)^* K_{A,B})\wedge 1_C),\ \epsilon_{D',C}(((fg)^* K'_{A,B})\wedge 1_C)].$

$\therefore$ El diagrama es conmutativo y φ es una transformación natural.

Sea $\varphi_D^{-1} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\wedge C)\vee(B\wedge C), D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\vee B)\wedge C, D)$ definida como $\varphi_D^{-1}(h) = \epsilon_{D,C}([(hK_{A\wedge C,B\wedge C})^*, (hK'_{A\wedge C,B\wedge C})^*]\wedge 1_C)$. Entonces,

$$(\varphi_D \circ \varphi_D^{-1})(h) = \varphi_D(\varphi_D^{-1}(h)) = [\epsilon_{D,C}(((\varphi_D^{-1}(h))^* K_{A,B})\wedge 1_C),\ \epsilon_{D,C}(((\varphi_D^{-1}(h))^* K'_{A,B})\wedge 1_C)].$$

Consideremos primero $(\varphi_D^{-1}(h))^* K_{A,B}$. De la definición de φ_D^{-1} y de E4b.,

$$\begin{aligned}(\varphi_D^{-1}(h))^* K_{A,B} &= \left(\epsilon_{D,C}([(hK_{A\wedge C,B\wedge C})^*, (hK'_{A\wedge C,B\wedge C})^*]\wedge 1_C)\right)^* K_{A,B}\\ &= [(hK_{A\wedge C,B\wedge C})^*, (hK'_{A\wedge C,B\wedge C})^*]\, K_{A,B}.\end{aligned}$$

Pero, por E6a., $[(hK_{A\wedge C,B\wedge C})^*, (hK'_{A\wedge C,B\wedge C})^*]\, K_{A,B} = (hK_{A\wedge C,B\wedge C})^*$.

Análogamente,

$$\begin{aligned}(\varphi_D^{-1}(h))^* K'_{A,B} &= \left(\epsilon_{D,C}([(hK_{A\wedge C,B\wedge C})^*, (hK'_{A\wedge C,B\wedge C})^*]\wedge 1_C)\right)^* K'_{A,B}\\ &= [(hK_{A\wedge C,B\wedge C})^*, (hK'_{A\wedge C,B\wedge C})^*]\, K'_{A,B}\\ &= (hK'_{A\wedge C,B\wedge C})^*.\end{aligned}$$

Entonces, utilizando E4a., se tiene que

$\epsilon_{D,C}(((\varphi_D^{-1}(h))^* K_{A,B})\wedge 1_C) = \epsilon_{D,C}((hK_{A\wedge C,B\wedge C})^*\wedge 1_C) = hK_{A\wedge C,B\wedge C}$, y

$\epsilon_{D,C}(((\varphi_D^{-1}(h))^* K'_{A,B})\wedge 1_C) = \epsilon_{D,C}((hK'_{A\wedge C,B\wedge C})^*\wedge 1_C) = hK'_{A\wedge C,B\wedge C}$.

$\therefore\ \varphi_D(\varphi_D^{-1}(h)) = [hK_{A\wedge C,B\wedge C},\ hK'_{A\wedge C,B\wedge C}] = h.$

$\therefore\ \varphi_D \circ \varphi_D^{-1} = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\wedge C)\vee(B\wedge C), D)}.$

Sea ahora $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((A\vee B)\wedge C, D)$. Entonces, de las definiciones de φ_D y φ_D^{-1} y de E4b., se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}(\varphi_D^{-1}\circ\varphi_D)(g) &= \varphi_D^{-1}(\varphi_D(g)) = \varphi_D^{-1}([\epsilon_{D,C}((g^*K_{A,B})\wedge 1_C),\ \epsilon_{D,C}((g^*K'_{A,B})\wedge 1_C)])\\ &= \epsilon_{D,C}([([\epsilon_{D,C}((g^*K_{A,B})\wedge 1_C), \epsilon_{D,C}((g^*K'_{A,B})\wedge 1_C)]K_{A\wedge C,B\wedge C})^*, ([\epsilon_{D,C}((g^*K_{A,B})\wedge 1_C), \epsilon_{D,C}((g^*K'_{A,B})\wedge 1_C)]K'_{A\wedge C,B\wedge C})^*]\wedge 1_C)\\ &= \epsilon_{D,C}([(\epsilon_{D,C}((g^*K_{A,B})\wedge 1_C))^*, (\epsilon_{D,C}((g^*K'_{A,B})\wedge 1_C))^*]\wedge 1_C)\end{aligned}$$

$= \epsilon_{D,C}([q^* \kappa_{A,B}, q^* \kappa'_{A,B}] \wedge 1_C) = \epsilon_{D,C}(q^* \wedge 1_C)$, y por E4a., $\epsilon_{D,C}(q^* \wedge 1_C) = q$.

$\therefore \varphi_D^{-1} \circ \varphi_D = 1_{Hom_{\mathcal{C}}((A \vee B) \wedge C, D)}$.

$\therefore \varphi_D$ es una biyección para cada objeto D de $\mathcal{C}$.

$\therefore \varphi$ es un isomorfismo natural.

$\square$.

Corolario 3.2.

Si A, B y C son objetos de una categoría bicartesiana cerrada, entonces $(A \vee B) \wedge C \cong (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

Demostración.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría bicartesiana cerrada.

Sea $\varphi : Hom_{\mathcal{C}}((A \vee B) \wedge C, \_) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}((A \wedge C) \vee (B \wedge C), \_)$ definida como en la Proposición anterior.

Por la Proposición 3.5., existe $f \in Hom_{\mathcal{C}}((A \wedge C) \vee (B \wedge C), (A \vee B) \wedge C)$ tal que $\tilde{Y}(f) = \varphi$.

Como φ es un isomorfismo natural, entonces, por la Proposición 3.6., f es un isomorfismo.

$\therefore (A \vee B) \wedge C \cong (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

$\square$.

Proposición 3.8.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría bicartesiana cerrada.

Sea $\varphi : Hom_{\mathcal{C}}(\_, A \Leftarrow (B \vee C)) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(\_, (A \Leftarrow B) \wedge (A \Leftarrow C))$ definida por

$$\varphi_D(q) = \langle (\epsilon_{A,D} \langle (\epsilon_{A,B \vee C} \langle q \pi'_{B \vee C, D}, \pi_{B \vee C, D} \rangle)^* \kappa_{B,C} \pi'_{D,B}, \pi_{D,B} \rangle)^*, (\epsilon_{A,D} \langle (\epsilon_{A,B \vee C} \langle q \pi'_{B \vee C, D}, \pi_{B \vee C, D} \rangle)^* \kappa'_{B,C} \pi'_{D,C}, \pi_{D,C} \rangle)^* \rangle.$$

Entonces φ es un isomorfismo natural.

Demostración.

Sean $F = Hom_{\mathcal{C}}(\_, A \Leftarrow (B \vee C))$ y $G = Hom_{\mathcal{C}}(\_, (A \Leftarrow B) \wedge (A \Leftarrow C))$ y sea $h : D' \longrightarrow D$ una flecha de $\mathcal{C}$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, A\Leftarrow(B\vee C)) \arrow[r, "\varphi_D"] \arrow[d, "F(h)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, (A\Leftarrow B)\wedge(A\Leftarrow C)) \arrow[d, "G(h)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D', A\Leftarrow(B\vee C)) \arrow[r, "\varphi_{D'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D', (A\Leftarrow B)\wedge(A\Leftarrow C)).
\end{tikzcd}
$$

Sea $q\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, A\Leftarrow(B\vee C))$. Entonces,

$(G(h)\circ\varphi_D)(q) = G(h)(\varphi_D(q)) = \varphi_D(q)h$

$$=\left\langle\left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K_{B,C}\pi'_{D,B}, \pi_{D,B}\right\rangle\right)^*, \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K'_{B,C}\pi'_{D,C}, \pi_{D,C}\right\rangle\right)^*\right\rangle h$$

$$=\left\langle\left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K_{B,C}\pi'_{D,B}, \pi_{D,B}\right\rangle\right)^* h, \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K'_{B,C}\pi'_{D,C}, \pi_{D,C}\right\rangle\right)^* h\right\rangle.$$

Consideremos primero $\pi_{A\Leftarrow B, A\Leftarrow C}\varphi_D(q)h$.

$$\pi_{A\Leftarrow B, A\Leftarrow C}\varphi_D(q)h = \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K_{B,C}\pi'_{D,B}, \pi_{D,B}\right\rangle\right)^* h$$

$$= \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K_{B,C}\pi'_{D,B}, \pi_{D,B}\right\rangle\langle h\pi'_{D',B}, \pi_{D',B}\rangle\right)^*$$

$$= \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K_{B,C}\pi'_{D',B}, h\pi_{D',B}\right\rangle\right)^*$$

$$= \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\langle K_{B,C}\pi_{B,D}, \pi'_{B,D}\rangle\right)^* \pi'_{D',B}, h\pi_{D',B}\right\rangle\right)^*$$

$$= \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B,D}, K_{B,C}\pi_{B,D}\rangle\right)^* \pi_{B,D}\langle \pi'_{D',B}, h\pi_{D',B}\rangle, \pi'_{B,D}\langle\pi'_{D',B}, h\pi_{D',B}\rangle\right\rangle\right)^*$$

$$= \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B,D}, K_{B,C}\pi_{B,D}\rangle\right)^* \pi_{B,D}, \pi'_{B,D}\right\rangle\langle\pi'_{D',B}, h\pi_{D',B}\rangle\right)^*$$

$$= \left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B,D}, K_{B,C}\pi_{B,D}\rangle\langle\pi'_{D',B}, h\pi_{D',B}\rangle\right)^*$$

$$= \left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi_{D',B}, K_{B,C}\pi'_{D',B}\rangle\right)^*.$$

Consideremos ahora $\pi'_{A\Leftarrow B, A\Leftarrow C}\varphi_D(q)h$.

$$\pi'_{A*B,A*C}\,\varphi_D(q)h = \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D},\pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K'_{B,C}\pi'_{D,C},\pi_{D,C}\right\rangle\right)^* h$$

$$=\left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D},\pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K'_{B,C}\pi'_{D,C},\pi_{D,C}\right\rangle\left\langle h\pi'_{D',C},\pi'_{D',C}\right\rangle\right)^*$$

$$=\left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D},\pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K'_{B,C}\pi'_{D',C},\ h\pi_{D',C}\right\rangle\right)^*$$

$$=\left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D},\pi_{B\vee C,D}\rangle\langle K'_{B,C}\pi_{C,D},\pi'_{C,D}\rangle\right)^*\pi'_{D',C},\ h\pi_{D',C}\right\rangle\right)^*$$

$$=\left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{C,D},K'_{B,C}\pi_{C,D}\rangle\right)^*\pi_{C,D}\langle\pi'_{D',C},h\pi_{D',C}\rangle,\ \pi'_{C,D}\langle\pi'_{D',C},h\pi_{D',C}\rangle\right\rangle\right)^*$$

$$=\left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{C,D},K'_{B,C}\pi_{C,D}\rangle\right)^*\pi_{C,D},\pi'_{C,D}\right\rangle\left\langle\pi'_{D',C},h\pi_{D',C}\right\rangle\right)^*$$

$$=\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{C,D},K'_{B,C}\pi_{C,D}\rangle\langle\pi'_{D',C},h\pi_{D',C}\rangle\right)^*$$

$$=\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi_{D',C},K'_{B,C}\pi'_{D',C}\rangle\right)^*.$$

$$\therefore\ (G(h)\circ\varphi_D)(q)=\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi_{D',B},K_{B,C}\pi'_{D',B}\rangle\right)^*,\ \left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi_{D',C},K'_{B,C}\pi'_{D',C}\rangle\right)^*\right\rangle\ \ldots(1).$$

Y ahora consideremos $(\varphi_{D'}\circ F(h))(q)=\varphi_{D'}(F(h)(q))=\varphi_{D'}(qh)$. Entonces,

$$\pi_{A*B,A*C}\,\varphi_{D'}(qh)=\left(\epsilon_{A,D'}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi'_{B\vee C,D'},\pi_{B\vee C,D'}\rangle\right)^* K_{B,C}\pi'_{D',B},\pi_{D',B}\right\rangle\right)^*$$

$$=\left(\epsilon_{A,D'}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi'_{B\vee C,D'},\pi_{B\vee C,D'}\rangle\langle K_{B,C}\pi_{B,D'},\pi'_{B,D'}\rangle\right)^*\pi'_{D',B},\pi_{D',B}\right\rangle\right)^*$$

$$=\left(\epsilon_{A,D'}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi'_{B,D'},K_{B,C}\pi_{B,D'}\rangle\right)^*\pi_{B,D'}\langle\pi'_{D',B},\pi_{D',B}\rangle,\ \pi'_{B,D'}\langle\pi'_{D',B},\pi_{D',B}\rangle\right\rangle\right)^*$$

$$=\left(\epsilon_{A,D'}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi'_{B,D'},K_{B,C}\pi_{B,D'}\rangle\right)^*\pi_{B,D'},\pi'_{B,D'}\right\rangle\left\langle\pi'_{D',B},\pi_{D',B}\right\rangle\right)^*$$

$$=\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi'_{B,D'},K_{B,C}\pi_{B,D'}\rangle\langle\pi'_{D',B},\pi_{D',B}\rangle\right)^*$$

$$=\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi_{D',B},K_{B,C}\pi'_{D',B}\rangle\right)^*,\quad y$$

$$\pi'_{A\Leftarrow B,A\Leftarrow C}\,\varphi_{D'}(qh) = \left(\epsilon_{A,D'}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi'_{B\vee C,D'},\pi_{B\vee C,D'}\rangle\right)^{*}K'_{B,C}\pi'_{D',C},\pi_{D',C}\right\rangle\right)^{*}$$

$$= \left(\epsilon_{A,D'}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi'_{B\vee C,D'},\pi_{B\vee C,D'}\rangle\langle K'_{B,C}\pi_{C,D'},\pi'_{C,D'}\rangle\right)^{*}\pi'_{D',C},\pi_{D',C}\right\rangle\right)^{*}$$

$$= \left(\epsilon_{A,D'}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi'_{C,D'},K'_{B,C}\pi_{C,D'}\rangle\right)^{*}\pi_{C,D'}\langle\pi'_{D',C},\pi_{D',C}\rangle,\pi'_{C,D'}\langle\pi'_{D',C},\pi_{D',C}\rangle\right\rangle\right)^{*}$$

$$= \left(\epsilon_{A,D'}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi'_{C,D'},K'_{B,C}\pi_{C,D'}\rangle\right)^{*}\pi_{C,D'},\pi'_{C,D'}\right\rangle\langle\pi'_{D',C},\pi_{D',C}\rangle\right)^{*}$$

$$= \left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi'_{C,D'},K'_{B,C}\pi_{C,D'}\rangle\langle\pi'_{D',C},\pi_{D',C}\rangle\right)^{*}$$

$$= \left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi_{D',C},K'_{B,C}\pi'_{D',C}\rangle\right)^{*}.$$

$$\therefore\ (\varphi_{D'}\circ F(h))(q) = \left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi_{D',B},K_{B,C}\pi'_{D',B}\rangle\right)^{*},\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle qh\pi_{D',C},K'_{B,C}\pi'_{D',C}\rangle\right)^{*}\right\rangle \ldots (2).$$

De (1) y (2) se obtiene que $G(h)\circ\varphi_D = \varphi_{D'}\circ F(h)$.

$\therefore$ El diagrama es conmutativo y φ es una transformación natural.

Ahora se probará que φ_D es una biyección.

Sea $\varphi_D^{-1}: Hom_{\mathcal{C}}(\_,(A\Leftarrow B)\wedge(A\Leftarrow C)) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(\_,A\Leftarrow(B\vee C))$ definida como

$$\varphi_D^{-1}(f) = \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left[\left(\epsilon_{A,B}\langle\pi f\pi'_{B,D},\pi_{B,D}\rangle\right)^{*},\left(\epsilon_{A,C}\langle\pi' f\pi'_{C,D},\pi_{C,D}\rangle\right)^{*}\right]\pi'_{D,B\vee C},\pi_{D,B\vee C}\right\rangle\right)^{*},$$

donde $\pi = \pi_{A\Leftarrow B,A\Leftarrow C}$.

Sea entonces $q\in Hom_{\mathcal{C}}(D,A\Leftarrow(B\vee C))$.

$(\varphi_D^{-1}\circ\varphi_D)(q) = \varphi_D^{-1}(\varphi_D(q))$

$$= \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left[\left(\epsilon_{A,B}\langle\pi\varphi_D(q)\pi'_{B,D},\pi_{B,D}\rangle\right)^{*},\left(\epsilon_{A,C}\langle\pi'\varphi_D(q)\pi'_{C,D},\pi_{C,D}\rangle\right)^{*}\right]\pi'_{D,B\vee C},\pi_{D,B\vee C}\right\rangle\right)^{*}$$

Ahora bien, $\pi\varphi_D(q) = \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D},\pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^{*}K_{B,C}\pi'_{D,B},\pi_{D,B}\right\rangle\right)^{*}$ y

$\pi'\varphi_D(q) = \left(\epsilon_{A,D}\left\langle\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle q\pi'_{B\vee C,D},\pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^{*}K'_{B,C}\pi'_{D,C},\pi_{D,C}\right\rangle\right)^{*}$.

Sean entonces $h^{*} = \pi\varphi_D(q)$ y $h'^{*} = \pi'\varphi_D(q)$.

Entonces,

$$(\epsilon_{A,B}\langle \pi^* \varphi_0(q)\pi'_{B,0}, \pi_{B,0}\rangle)^* = (\epsilon_{A,B}\langle h^* \pi'_{B,0}, \pi_{B,0}\rangle)^*$$

$$= (\epsilon_{A,B}\langle h^*\pi_{D,B}\langle \pi'_{B,0},\pi_{B,0}\rangle, \pi'_{D,B}\langle\pi'_{B,0},\pi_{B,0}\rangle\rangle)^* = (\epsilon_{A,B}\langle h^*\pi_{D,B},\pi'_{D,B}\rangle\langle\pi'_{B,0},\pi_{B,0}\rangle)^*$$

$$= (h\langle \pi'_{B,0},\pi_{B,0}\rangle)^* = (\epsilon_{A,0}\langle(\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi'_{BvC,0},\pi_{BvC,0}\rangle)^* K_{B,C}\pi'_{D,B},\pi_{D,B}\rangle\langle\pi'_{B,0},\pi_{B,0}\rangle)^*$$

$$= (\epsilon_{A,0}\langle(\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi'_{BvC,0},\pi_{BvC,0}\rangle)^* K_{B,C}\pi_{B,0},\pi'_{B,0}\rangle)^* = (\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi'_{BvC,0},\pi_{BvC,0}\rangle)^* K_{B,C}, \text{ y}$$

$$(\epsilon_{A,C}\langle \pi'\varphi_0(q)\pi'_{C,0}, \pi_{C,0}\rangle)^* = (\epsilon_{A,C}\langle h'^* \pi'_{C,0}, \pi_{C,0}\rangle)^*$$

$$= (\epsilon_{A,C}\langle h'^*\pi_{D,C}\langle \pi'_{C,0},\pi_{C,0}\rangle, \pi'_{D,C}\langle\pi'_{C,0},\pi_{C,0}\rangle\rangle)^* = (\epsilon_{A,C}\langle h'^*\pi_{D,C},\pi'_{D,C}\rangle\langle\pi'_{C,0},\pi_{C,0}\rangle)^*$$

$$= (h'\langle \pi'_{C,0},\pi_{C,0}\rangle)^* = (\epsilon_{A,0}\langle(\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi'_{BvC,0},\pi_{BvC,0}\rangle)^* K'_{B,C}\pi'_{D,C},\pi_{D,C}\rangle\langle\pi'_{C,0},\pi_{C,0}\rangle)^*$$

$$= (\epsilon_{A,0}\langle(\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi'_{BvC,0},\pi_{BvC,0}\rangle)^* K'_{B,C}\pi_{C,0},\pi'_{C,0}\rangle)^* = (\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi'_{BvC,0},\pi_{BvC,0}\rangle)^* K'_{B,C}.$$

Se tienen entonces las siguientes igualdades:

$$(\varphi_0^{-1}\circ\varphi_0)(q) = (\epsilon_{A,0}\langle[(\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi'_{BvC,0},\pi_{BvC,0}\rangle)^* K_{B,C}, (\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi'_{BvC,0},\pi_{BvC,0}\rangle)^* K'_{B,C}]\pi'_{D,BvC},\pi_{D,BvC}\rangle)^*$$

$$= (\epsilon_{A,0}\langle(\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi'_{BvC,0},\pi_{BvC,0}\rangle)^*\pi'_{D,BvC},\pi_{D,BvC}\rangle)^*$$

$$= (\epsilon_{A,0}\langle(\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi'_{BvC,0},\pi_{BvC,0}\rangle)^*\pi_{BvC,0}\langle\pi'_{D,BvC},\pi_{D,BvC}\rangle, \pi'_{BvC,0}\langle\pi'_{D,BvC},\pi_{D,BvC}\rangle\rangle)^*$$

$$= (\epsilon_{A,0}\langle(\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi'_{BvC,0},\pi_{BvC,0}\rangle)^*\pi_{BvC,0},\pi'_{BvC,0}\rangle\langle\pi'_{D,BvC},\pi_{D,BvC}\rangle)^*$$

$$= (\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi'_{BvC,0},\pi_{BvC,0}\rangle\langle\pi'_{D,BvC},\pi_{D,BvC}\rangle)^*$$

$$= (\epsilon_{A,BvC}\langle q\pi_{D,BvC},\pi'_{D,BvC}\rangle)^* = q.$$

$$\therefore\ \varphi_0^{-1}\circ\varphi_0 = 1_{Hom_C(D,A^{\Leftarrow(BvC)})}.$$

Finalmente, sea $f \in Hom_{\mathcal{C}}(D,(A \Leftarrow B)\wedge(A \Leftarrow C))$. Se tiene así, que
$(\varphi_0 \circ \varphi_0^{-1})(f) = \varphi_0(\varphi_0^{-1}(f))$

$$= \left\langle \left(\epsilon_{A,D}\left\langle \left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle \varphi_0^{-1}(f)\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K_{B,C}\pi'_{D,B}, \pi_{D,B}\right\rangle\right)^*, \left(\epsilon_{A,D}\left\langle \left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle \varphi_0^{-1}(f)\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K'_{B,C}\pi'_{D,C}, \pi_{D,C}\right\rangle\right)^* \right\rangle.$$

Sea ahora $h = \epsilon_{A,D}\left\langle \left[\left(\epsilon_{A,B}\langle \pi f \pi'_{B,D}, \pi_{B,D}\rangle\right)^*, \left(\epsilon_{A,C}\langle \pi' f \pi'_{C,D}, \pi_{C,D}\rangle\right)^*\right]\pi'_{D,B\vee C}, \pi_{D,B\vee C}\right\rangle.$

Entonces $h^* = \varphi_0^{-1}(f)$ y se tienen las siguientes igualdades:

$$\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle \varphi_0^{-1}(f)\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* = \left(\epsilon_{A,B\vee C}\left\langle \varphi_0^{-1}(f)\pi_{D,B\vee C}\langle \pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle, \pi'_{D,B\vee C}\langle \pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right\rangle\right)^*$$

$$= \left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle h^*\pi_{D,B\vee C}, \pi'_{D,B\vee C}\rangle\langle \pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^*$$

$$= \left(h\langle \pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^*$$

$$= \left(\epsilon_{A,D}\left\langle \left[\left(\epsilon_{A,B}\langle \pi f\pi'_{B,D}, \pi_{B,D}\rangle\right)^*, \left(\epsilon_{A,C}\langle \pi' f\pi'_{C,D}, \pi_{C,D}\rangle\right)^*\right]\pi'_{D,B\vee C}, \pi_{D,B\vee C}\right\rangle\langle \pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^*$$

$$= \left(\epsilon_{A,D}\left\langle \left[\left(\epsilon_{A,B}\langle \pi f\pi'_{B,D}, \pi_{B,D}\rangle\right)^*, \left(\epsilon_{A,C}\langle \pi' f\pi'_{C,D}, \pi_{C,D}\rangle\right)^*\right]\pi_{B\vee C,D}, \pi'_{B\vee C,D}\right\rangle\right)^*$$

$= \left[\left(\epsilon_{A,B}\langle \pi f\pi'_{B,D}, \pi_{B,D}\rangle\right)^*, \left(\epsilon_{A,C}\langle \pi' f\pi'_{C,D}, \pi_{C,D}\rangle\right)^*\right]$, de donde se tiene que

$$\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle \varphi_0^{-1}(f)\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K_{B,C}$$

$$= \left[\left(\epsilon_{A,B}\langle \pi f\pi'_{B,D}, \pi_{B,D}\rangle\right)^*, \left(\epsilon_{A,C}\langle \pi' f\pi'_{C,D}, \pi_{C,D}\rangle\right)^*\right]K_{B,C} = \left(\epsilon_{A,B}\langle \pi f\pi'_{B,D}, \pi_{B,D}\rangle\right)^*, \text{ y}$$

$$\left(\epsilon_{A,B\vee C}\langle \varphi_0^{-1}(f)\pi'_{B\vee C,D}, \pi_{B\vee C,D}\rangle\right)^* K'_{B,C}$$

$$= \left[\left(\epsilon_{A,B}\langle \pi f\pi'_{B,D}, \pi_{B,D}\rangle\right)^*, \left(\epsilon_{A,C}\langle \pi' f\pi'_{C,D}, \pi_{C,D}\rangle\right)^*\right]K'_{B,C} = \left(\epsilon_{A,C}\langle \pi' f\pi'_{C,D}, \pi_{C,D}\rangle\right)^*.$$

Entonces,

$$(\varphi_0 \circ \varphi_0^{-1})(f) = \left\langle \left(\epsilon_{A,D}\left\langle \left(\epsilon_{A,B}\langle \pi f\pi'_{B,D}, \pi_{B,D}\rangle\right)^*\pi'_{D,B}, \pi_{D,B}\right\rangle\right)^*, \left(\epsilon_{A,D}\left\langle \left(\epsilon_{A,C}\langle \pi' f\pi'_{C,D}, \pi_{C,D}\rangle\right)^*\pi'_{D,C}, \pi_{D,C}\right\rangle\right)^* \right\rangle$$

$$=\left\langle \left(\epsilon_{A,B}\left\langle \left(\epsilon_{A,B}\langle \pi f \pi'_{B,D}, \pi_{B,D}\rangle\right)^{*}\pi_{B,D}, \pi'_{B,D}\right\rangle \langle \pi'_{D,B}, \pi_{D,B}\rangle\right)^{*}, \left(\epsilon_{A,C}\left\langle \left(\epsilon_{A,C}\langle \pi' f \pi'_{C,D}, \pi_{C,D}\rangle\right)^{*}\pi_{C,D}, \pi'_{C,D}\right\rangle \langle \pi'_{D,C}, \pi_{D,C}\rangle\right)^{*}\right\rangle$$

$$=\left\langle \left(\epsilon_{A,B}\langle \pi f \pi'_{B,D}, \pi_{B,D}\rangle \langle \pi'_{D,B}, \pi_{D,B}\rangle\right)^{*}, \left(\epsilon_{A,C}\langle \pi' f \pi'_{C,D}, \pi_{C,D}\rangle \langle \pi'_{D,C}, \pi_{D,C}\rangle\right)^{*}\right\rangle$$

$$=\left\langle \left(\epsilon_{A,B}\langle \pi f \pi_{D,B}, \pi'_{D,B}\rangle\right)^{*}, \left(\epsilon_{A,C}\langle \pi' f \pi_{D,C}, \pi'_{D,C}\rangle\right)^{*}\right\rangle$$

$$= \langle \pi f, \pi' f\rangle = f.$$

$\therefore\ \varphi_D \circ \varphi_D^{-1} = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(D,(A\Leftarrow B)\wedge(A\Leftarrow C))}$.

$\therefore\ \varphi_D$ es una biyección (es decir, un isomorfismo en la categoría $\mathcal{S}et$) y φ es un isomorfismo natural.

□.

Corolario 3.3.

Sean A, B y C objetos de una categoría bicartesiana cerrada. Entonces $A\Leftarrow(B\vee C)\cong(A\Leftarrow B)\wedge(A\Leftarrow C)$.

□.

Se dice que una categoría es degenerada cuando todos sus objetos son isomorfos entre sí.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría bicartesiana cerrada en la cual $\perp\cong T$, entonces $\mathcal{C}$ es una categoría degenerada, pues si A es un objeto de $\mathcal{C}$, y $\perp\cong T$, entonces existe $f\in Hom_{\mathcal{C}}(T,\perp)$ (isomorfismo) y se tiene que $f0_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,\perp)$; por la Proposición 3.3., $A\cong\perp$. Así, todos los objetos de $\mathcal{C}$ serían isomorfos a $\perp$, y por lo tanto isomorfos entre sí.

Proposición 3.9.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría bicartesiana cerrada no degenerada y sea A un objeto de $\mathcal{C}$. Si $A\cong\perp$, entonces $\perp\Leftarrow A\not\cong\perp$.

Demostración.

Si $A \cong \perp$, entonces, por la Proposición 2.8., $\perp \Leftarrow A \cong \perp \Leftarrow \perp$.
Por la Proposición 3.4., inciso (ii), $\perp \Leftarrow \perp \cong \top$. Entonces $\perp \Leftarrow A \cong \top$.
Y como la categoría es no degenerada, se tiene que $\perp \Leftarrow A \not\cong \perp$.

□.

El recíproco de esta última Proposición, en general no es cierto.
Consideremos la categoría $\mathcal{S}et^2$ cuyos objetos son las parejas (A,B), donde A y B son conjuntos y cuyas flechas son parejas $(f,g):(A,B) \longrightarrow (A',B')$, donde $f: A \longrightarrow A'$ y $g: B \longrightarrow B'$ son funciones.
Si (A,B) y (A',B') son objetos de $\mathcal{S}et^2$, se definen $(A,B) \wedge (A',B') = (A \times A', B \times B')$, $(A,B) \vee (A',B') = (A+A', B+B')$ y $(A,B) \Leftarrow (A',B') = (A^{A'}, B^{B'})$, donde $A \times A'$ $(B \times B')$, $A+A'$ $(B+B')$ y $A^{A'}$ $(B^{B'})$ denotan al producto cartesiano, a la unión ajena y al conjunto de funciones de A' (B') en A (B), respectivamente.
Además, $\perp = (\phi, \phi)$ y $\top = (\{*\}, \{*\})$ (donde $\{*\}$ denota a cualquier conjunto que conste de un sólo elemento). Con ésto, es fácil comprobar que $\mathcal{S}et^2$ es una categoría bicartesiana cerrada (y no degenerada).
Sea A un conjunto no vacío y sea $\bar{A} = (\phi, A)$. Entonces $\bar{A} \not\cong \perp$ y se tiene que $\perp \Leftarrow \bar{A} = (\phi^{\phi}, \phi^{A}) \not\cong (\phi, \phi)$, pues $\phi^{\phi} \neq \phi$ (de hecho, $\phi^{\phi} \cong \top$).

CAPITULO 4

Definición 4.1.

Un álgebra de Heyting es una categoría bicartesiana cerrada $\mathcal{C}$ en la cual, para cualesquiera objetos A y B, $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ ó $Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$ consta a lo más de un elemento.

Así, si A y B son objetos de un álgebra de Heyting $\mathcal{C}$ y si existen $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$, entonces $f=g$ y $A = dom(f) = dom(g) = B$ (ó bien, $B = cod(f) = cod(g) = A$); en particular, si $A \cong B$, entonces $A = B$.

Definición 4.2.

Sean A y B objetos de un álgebra de Heyting $\mathcal{C}$. Se dice que A es menor o igual que B ($A \leq B$) si existe $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.

Definición 4.3.

Una latiz $(\mathcal{P}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo par de elementos $A, B \in \mathcal{P}$ tiene un ínfimo (denotado por $A \wedge B$) y un supremo (denotado por $A \vee B$).

Definición 4.4.

Una latiz $(\mathcal{P}, \leq)$ tiene elemento máximo si existe $1 \in \mathcal{P}$ tal que $A \leq 1$ para cualquier $A \in \mathcal{P}$, y tiene elemento mínimo si existe $0 \in \mathcal{P}$ tal que $0 \leq B$ para cualquier $B \in \mathcal{P}$. Si una latiz $(\mathcal{P}, \leq)$ tiene elemento máximo y elemento mínimo, se dice que es una latiz acotada.

Definición 4.5.

Una latiz $(\mathcal{P}, \leq)$ es distributiva, si para cualesquiera elementos A, B y C de $\mathcal{P}$, $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Definición 4.6.

Sea $(\mathcal{P},\leq)$ una latiz y sean $A,B\in\mathcal{P}$. Sea $S_A^B=\{C\in\mathcal{P}\mid C\wedge A\leq B\}$. El seudocomplemento de A relativo a B es el elemento máximo de S_A^B. Si para todo par de elementos de $\mathcal{P}$ existe el seudocomplemento relativo, entonces se dice que $(\mathcal{P},\leq)$ es una latiz relativamente seudocomplementada.

Proposición 4.1.

Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de Heyting. Entonces $(O(\mathcal{C}),\leq)$ es una latiz acotada, relativamente seudocomplementada y distributiva.

Demostración.

Primero se probará que "$\leq$" es un orden parcial en $O(\mathcal{C})$. Sean entonces A, B y C objetos de $\mathcal{C}$.

Por R1a., existe $1_A\in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$. Entonces $A\leq A$.

Supongamos ahora que $A\leq B$ y $B\leq A$. Entonces, por definición, existen $f\in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $g\in Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$. Como $\mathcal{C}$ es un álgebra de Heyting, entonces $f=g$ y por lo tanto $A=B$.

Finalmente, si $A\leq B$ y $B\leq C$, entonces existen $h\in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $h'\in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$. Por R1b., $h'h\in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$, y por lo tanto, $A\leq C$.

Con ésto se ha probado que $(O(\mathcal{C}),\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ahora bien, por R6a. y R6b., $A\leq A\vee B$ y $B\leq A\vee B$. Entonces, si C es tal que $A\leq C$ y $B\leq C$, existen $f\in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$ y $g\in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$. Por R'6c., $[f,g]\in Hom_{\mathcal{C}}(A\vee B,C)$, es decir, $A\vee B\leq C$ y por lo tanto $A\vee B$ es el supremo de A y B. Por R3a. y R3b., $A\wedge B\leq A$, $A\wedge B\leq B$. Si $C\leq A$ y $C\leq B$, por R3c., $C\leq A\wedge B$ y se si-que que $A \wedge B$ es el ínfimo de A y B.

$\therefore$ $(O(\mathcal{C}), \leq)$ es una latiz.

Como T y $\perp$ son objetos de $\mathcal{C}$ y para cualquier objeto A de $\mathcal{C}$, $O_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, T)$ y $\square_A \in Hom_{\mathcal{C}}(\perp, A)$, entonces $A \leq T$ y $\perp \leq A$, es decir, $(O(\mathcal{C}), \leq)$ es una latiz acotada.

Ahora se probará que $(O(\mathcal{C}), \leq)$ es una latiz relativamente seudocomplementada.

Como $\mathcal{C}$ es una categoría bicartesiana cerrada, para cualesquiera objetos A y B de $\mathcal{C}$, $B \Leftarrow A$ es un objeto de $\mathcal{C}$. Se tiene entonces que $(B \Leftarrow A) \wedge A \leq B$ (por R4a.) y por lo tanto, $B \Leftarrow A \in S_A^B$. Ahora, si $C \wedge A \leq B$ (es decir, $C \in S_A^B$), existe $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C \wedge A, B)$. Por R4b., existe $h^* \in Hom_{\mathcal{C}}(C, B \Leftarrow A)$ y se tiene que $C \leq B \Leftarrow A$. Con esto se ha probado que $B \Leftarrow A$ es el elemento máximo de S_A^B, es decir, que $B \Leftarrow A$ es el seudocomplemento de A relativo a B.

$\therefore$ $(O(\mathcal{C}), \leq)$ es una latiz relativamente seudocomplementada.

Finalmente, por la Proposición 2.6 inciso (ii) y por el Corolario 3.2., se tiene que $A \wedge (B \vee C) = (B \vee C) \wedge A = (B \wedge A) \vee (C \wedge A) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

$\therefore$ $(O(\mathcal{C}), \leq)$ es también una latiz distributiva.

$\square$.

Observación.

Sea $(\mathcal{P}, \leq)$ una latiz acotada. Si A y B son elementos de $\mathcal{P}$, diremos que existe una flecha f tal que $dom(f) = A$ y $cod(f) = B$ (lo cual se denotará por $A \xrightarrow{f} B$ ó $f: A \longrightarrow B$) si y sólo si $A \leq B$. Es claro entonces que para cualesquiera A y B elementos de $\mathcal{P}$, existe a lo más una flecha $f: A \longrightarrow B$.

Sea P la gráfica cuyos objetos son los elementos de $\mathcal{P}$.

Si $A \in \mathcal{P}$, entonces, por ser $(\mathcal{P}, \leq)$ una latiz, $A \leq A$. A la flecha f tal que $dom(f) = cod(f) = A$ la denotaremos por 1_A. Ahora bien, si existen $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$, entonces $A \leq B$ y $B \leq C$ y por lo tanto $A \leq C$, es decir, existe una flecha $h: A \longrightarrow C$, que denotaremos por $h = gf$.

Es claro entonces que P es una categoría. Más aún, como $(\mathcal{P}, \leq)$ es una latiz acotada, en particular tiene elemento máximo (al que ahora denotaremos por $\top$) y existe una operación $\wedge: \mathcal{P}\times\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ que satisfacen R2., R3a., R3b., R3c., E2., E3a., E3b. y E3c., es decir, $\mathcal{P}$ es en realidad una categoría cartesiana cerrada. Además, como existen una operación $\vee: \mathcal{P}\times\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ y un elemento mínimo (ahora denotado por $\perp$), se satisfacen también R5., R6a., R6b. y R'6c.

Para hacer de $\mathcal{P}$ una categoría bicartesiana cerrada, bastaría definir una nueva operación $\Leftarrow: \mathcal{P}\times\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ que satisfaciera R4a. y R4b. Con ésto, $\mathcal{P}$ no sólo sería una categoría bicartesiana cerrada, sino un álgebra de Heyting, ya que si existen $f: A\longrightarrow B$ y $g: B\longrightarrow A$, entonces, por definición, $A\leq B$ y $B\leq A$; pero, como "$\leq$" es un orden parcial, se tiene entonces que $A=B$ y por lo tanto $f=1_A=g$.

Veremos ahora bajo qué condiciones la categoría $\mathcal{P}$ tiene estructura de álgebra de Heyting.

Definición 4.7.

Sea $(\mathcal{P},\leq)$ una latiz. Se dice que $(\mathcal{P},\leq)$ es una latiz completa si cualquier familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{P}$ tiene un supremo. Al supremo de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ se le denota por $\bigvee_{i\in I} A_i$.

Proposición 4.2.

Sea $(\mathcal{P},\leq)$ una latiz acotada completa. Entonces $\mathcal{P}$ tiene estructura de álgebra de Heyting si y sólo si $A\wedge(\bigvee_{i\in I} B_i)=\bigvee_{i\in I}(A\wedge B_i)$ para cualquier $A\in\mathcal{P}$ y cualquier familia $\{B_i\}_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{P}$.

Demostración.

Sea $(\mathcal{P},\leq)$ una latiz acotada completa. Supongamos que $\mathcal{P}$ tiene estructura de álgebra de Heyting.

Sea $A\in\mathcal{P}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de $\mathcal{P}$. Entonces, para cada $i\in I$, $A\wedge B_i\leq B_i$ y $B_i\leq\bigvee_{i\in I} B_i$. Así, por transitividad, $A\leq\bigvee_{i\in I} B_i$. También, para cada $i\in I$, $A\wedge B_i\leq A$. Por lo tanto, $A\wedge B_i\leq A\wedge(\bigvee_{i\in I} B_i)$, para cada $i\in I$.

Sea C un elemento de $\mathcal{P}$ tal que $A \wedge B_i \leq C$, para cada $i \in I$. Entonces, como P tiene estructura de álgebra de Heyting, $B_i \leq C \Leftarrow A$, para cada $i \in I$. Y, como $\bigvee_{i \in I} B_i$ es el supremo de la familia $\{B_i\}_{i \in I}$, se tiene entonces que $\bigvee_{i \in I} B_i \leq C \Leftarrow A$. Por lo tanto, $A \wedge (\bigvee_{i \in I} B_i) \leq C$. Es decir, $A \wedge (\bigvee_{i \in I} B_i)$ es la mínima cota superior de la familia $\{A \wedge B_i\}_{i \in I}$.

$\therefore \quad A \wedge (\bigvee_{i \in I} B_i) = \bigvee_{i \in I} (A \wedge B_i)$.

Recíprocamente, si $(\mathcal{P}, \leq)$ es una latiz acotada completa en la cual $A \wedge (\bigvee_{i \in I} B_i) = \bigvee_{i \in I} (A \wedge B_i)$ para cualquier $A \in \mathcal{P}$ y cualquier familia $\{B_i\}_{i \in I}$ de elementos de $\mathcal{P}$, consideremos entonces, para cada par de elementos de $\mathcal{P}$, A y B, el conjunto $H_A^B = \{C \in \mathcal{P} \mid C \wedge A \leq B\}$. Claramente, $B \in H_A^B$; es decir, $H_A^B \neq \phi$.

Definimos entonces $B \Leftarrow A = \bigvee_{C \in H_A^B} C$.

Primero se probará que, con esta definición, en P se satisface R4a. Para ésto, basta probar que $(B \Leftarrow A) \wedge A \leq B$.

De la definición, se tiene que $(B \Leftarrow A) \wedge A = (\bigvee_{C \in H_A^B} C) \wedge A$. Pero, por hipótesis, $(\bigvee_{C \in H_A^B} C) \wedge A = \bigvee_{C \in H_A^B} (C \wedge A)$

Ahora bien, para cada $C \in H_A^B$, $C \wedge A \leq B$. Es decir, B es una cota superior de la familia $\{C \wedge A\}_{C \in H_A^B}$. Por lo tanto, $\bigvee_{C \in H_A^B} (C \wedge A) \leq B$. Se tiene así que $(B \Leftarrow A) \wedge A \leq B$, es decir, existe una (única) flecha f tal que $\mathrm{dom}(f) = (B \Leftarrow A) \wedge A$ y $\mathrm{cod}(f) = B$. Sea $\epsilon_{B,A} = f$. Con ésto se ha probado que en P se satisface R4a.

Finalmente, probaremos que en P también se satisface R4b.

Sea $D \in \mathcal{P}$ y supongamos que existe $h : D \wedge A \longrightarrow B$. Entonces, por definición, $D \wedge A \leq B$, es decir, $D \in H_A^B$. Por lo tanto, $D \leq \bigvee_{C \in H_A^B} C = B \Leftarrow A$. Así, existe una (única) flecha $g : D \longrightarrow B \Leftarrow A$. Sea entonces $h^* = g$. Y se tiene entonces que en P se satisface R4b.

$\therefore$ P tiene estructura de álgebra de Heyting.

$\square$.

Definición 4.8.

Sea A un objeto de una categoría bicartesiana cerrada. La negación de A, denotada por $\neg A$, es el objeto $\perp \Leftarrow A$.

Definición 4.9.

Sea $(\mathcal{P}, \leq)$ una latiz acotada y sea $A \in \mathcal{P}$. Un complemento para A es un elemento B de $\mathcal{P}$ tal que $A \wedge B = 0$ y $A \vee B = 1$. Si todo elemento de $\mathcal{P}$ tiene un complemento, se dice que $(\mathcal{P}, \leq)$ es una latiz complementada.

Proposición 4.3.

Sea A un objeto de un álgebra de Heyting. Si B es un complemento para A, entonces $B = \neg A$.

Demostración.

Sea B un complemento para A. Entonces $A \wedge B = \perp$ y $A \vee B = \top$. En particular, $A \wedge B \leq \perp$. Como $A \wedge B = B \wedge A$, se tiene que $B \wedge A \leq \perp$. Entonces, por definición, $B \in S_A^{\perp}$. Por la Proposición 4.1., $\perp \Leftarrow A$ es el seudocomplemento de A relativo a $\perp$ (es decir, $\perp \Leftarrow A$ es el elemento máximo de $S_A^{\perp}$), de donde se sigue que $B \leq \perp \Leftarrow A$.

$\therefore\ B \leq \neg A \ldots (1).$

Ahora bien, por la Proposición 2.6. inciso (i), $\neg A \wedge \top = \neg A$. Entonces, como $A \vee B = \top$ y toda álgebra de Heyting es una latiz distributiva, se tiene que $\neg A \wedge \top = \neg A \wedge (A \vee B) = (\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge B)$. Por R4a. y por la Proposición 3.3., se obtiene $\neg A \wedge A = \perp$.

Entonces $(\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge B) = \perp \vee (\neg A \wedge B) = \neg A \wedge B \leq B$.

Con ésto, se ha probado que $\neg A \wedge \top \leq B$.

$\therefore\ \neg A \leq B \ldots (2).$

De (1) y (2), se obtiene que $B = \neg A$.

$\square$.

Proposición 4.4.

Sean A y B objetos de un álgebra de Heyting. Entonces:

(i) $A \leq \neg(\neg A)$,

(ii) si $A \leq B$, entonces $\neg B \leq \neg A$, y

(iii) $\neg A = \neg(\neg(\neg A))$.

Demostración.

(i) Como $A \wedge \neg A = \neg A \wedge A = \perp$, en particular, $A \wedge \neg A \leq \perp$, es decir, $A \in S^{\perp}_{\neg A}$. Pero $\neg(\neg A)$ es el elemento máximo de $S^{\perp}_{\neg A}$.

$\therefore\ A \leq \neg(\neg A)$.

(ii) Si $A \leq B$, entonces, por definición, existe una flecha $f: A \longrightarrow B$. Consideremos ahora la flecha $1_{\neg B} \wedge f : \neg B \wedge A \longrightarrow \neg B \wedge B$. Y de nuevo por definición, se tiene que $\neg B \wedge A \leq \neg B \wedge B$. Pero $\neg B \wedge B = \perp$. Por lo tanto, $\neg B \wedge A \leq \perp$, es decir, $\neg B \in S^{\perp}_{A}$.

$\therefore\ \neg B \leq \neg A$.

(iii) Por (i), $A \leq \neg(\neg A)$. Entonces, por (ii), $\neg(\neg(\neg A)) \leq \neg A$.

Y, también por (i), $\neg A \leq \neg(\neg(\neg A))$.

$\therefore\ \neg A = \neg(\neg(\neg A))$.

□.

Definición 4.10.

Un álgebra de Boole es un álgebra de Heyting en la cual, para cualquier objeto A, $\neg(\neg A) = A$.

Proposición 4.5.

Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de Heyting. Entonces $\mathcal{C}$ es un álgebra de Boole si y sólo si $(O(\mathcal{C}), \leq)$ es una latiz complementada.

Demostración.

Sean A y B objetos de un álgebra de Heyting $\mathcal{C}$.

Por definición, $\neg(A \vee B) = \perp \Leftarrow (A \vee B)$, y por el Corolario 3.3., se tiene que $\perp \Leftarrow (A \vee B) = (\perp \Leftarrow A) \wedge (\perp \Leftarrow B)$. Por lo tanto $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.

Supongamos entonces que $\mathcal{C}$ es un álgebra de Boole.

Así, $A \vee \neg A = \neg(\neg(A \vee \neg A)) = \neg(\neg A \wedge \neg(\neg A)) = \neg(\neg A \wedge A) = \neg \perp$.

Pero, de la definición y de la Proposición 3.4., inciso (ii), se tiene que $\neg\bot = \bot \Leftarrow \bot = \top$. Entonces $A \vee \neg A = \top$. Además, $A \wedge \neg A = \bot$.

$\therefore$ Todo objeto de $\mathcal{C}$ tiene un complemento.

$\therefore$ $(o(\mathcal{C}), \leq)$ es una latiz complementada.

Recíprocamente, si $\mathcal{C}$ es un álgebra de Heyting en la cual todo objeto tiene un complemento, entonces para cualquier objeto A de $\mathcal{C}$, por la Proposición 4.3., $\neg A$ es un complemento para A. En particular, $A \vee \neg A = \top$. Así, $\neg(\neg A) = \neg(\neg A) \wedge \top = \neg(\neg A) \wedge (A \vee \neg A) = (\neg(\neg A) \wedge A) \vee (\neg(\neg A) \wedge \neg A)$ $= (\neg(\neg A) \wedge A) \vee \bot = \neg(\neg A) \wedge A \leq A$.

Por lo tanto, $\neg(\neg A) \leq A$ ... (1).

Y, por la Proposición anterior, inciso (i), $A \leq \neg(\neg A)$... (2).

De (1) y (2), se tiene que $\neg(\neg A) = A$.

$\therefore$ $\mathcal{C}$ es un álgebra de Boole.

$\square$.

Si A, B y C son objetos de un álgebra de Heyting, entonces es claro, por la Proposición 2.3., que $C \leq A \Leftarrow B$ si y sólo si $C \wedge B \leq A$. Si se define $A \Leftrightarrow B = (B \Leftarrow A) \wedge (A \Leftarrow B)$, se tiene entonces la siguiente Proposición:

Proposición 4.6.

Sean A, B y C objetos de un álgebra de Heyting. Entonces $C \leq A \Leftrightarrow B$ si y sólo si $C \wedge A = C \wedge B$.

Demostración.

Si $C \leq A \Leftrightarrow B$, entonces, por definición, $C \leq (B \Leftarrow A) \wedge (A \Leftarrow B)$. Como $(B \Leftarrow A) \wedge (A \Leftarrow B) \leq B \Leftarrow A$ y $(B \Leftarrow A) \wedge (A \Leftarrow B) \leq A \Leftarrow B$, entonces, por transitividad, $C \leq B \Leftarrow A$ y $C \leq A \Leftarrow B$.

Además, como $C \wedge A \leq C$ y $C \wedge B \leq C$, entonces $C \leq C \Leftarrow A$ y $C \leq C \Leftarrow B$. Por lo tanto, $C \leq (C \Leftarrow A) \wedge (B \Leftarrow A)$ y $C \leq (C \Leftarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$.

Pero, por la Proposición 2.7., inciso (iii), $(C \Leftarrow A) \wedge (B \Leftarrow A) = (C \wedge B) \Leftarrow A$ y $(C \Leftarrow B) \wedge (A \Leftarrow B) = (C \wedge A) \Leftarrow B$. Entonces $C \leq (C \wedge B) \Leftarrow A$ y $C \leq (C \wedge A) \Leftarrow B$. Por lo tanto, $C \wedge A \leq C \wedge B$ y $C \wedge B \leq C \wedge A$.

$\therefore\ C \wedge A = C \wedge B.$

Recíprocamente, si $C\wedge A = C\wedge B$, en particular, $C\wedge A \leq B$ y $C\wedge B \leq A$ (ya que $C\wedge B \leq B$ y $C\wedge A \leq A$). Entonces $C \leq B \Leftarrow A$ y $C \leq A \Leftarrow B$ y se tiene que
$C \leq (B \Leftarrow A) \wedge (A \Leftarrow B)$.
$\therefore\ C \leq A \Leftrightarrow B.$

$\square$.

Proposición 4.7.
Sean A, B y C objetos de un álgebra de Heyting $\mathcal{C}$. Entonces, si $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C = A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$, $\mathcal{C}$ es un álgebra de Boole.

Demostración.
Si $\mathcal{C}$ es un álgebra de Heyting en la cual "$\Leftrightarrow$" es una operación asociativa, entonces

$\neg(\neg A) = \bot \Leftarrow (\bot \Leftarrow A) = \bot \Leftarrow ((\bot \Leftarrow A) \wedge T) = \bot \Leftarrow ((\bot \Leftarrow A) \wedge (A \Leftarrow \bot)) = \bot \Leftarrow (A \Leftrightarrow \bot)$
$= (\bot \Leftarrow (A \Leftrightarrow \bot)) \wedge T = (\bot \Leftarrow (A \Leftrightarrow \bot)) \wedge ((A \Leftrightarrow \bot) \Leftarrow \bot) = (A \Leftrightarrow \bot) \Leftrightarrow \bot = A \Leftrightarrow (\bot \Leftrightarrow \bot)$
$= A \Leftrightarrow ((\bot \Leftarrow \bot) \wedge (\bot \Leftarrow \bot)) = A \Leftrightarrow (T \wedge T) = A \Leftrightarrow T = (T \Leftarrow A) \wedge (A \Leftarrow T) = T \wedge A = A.$
$\therefore\ \neg(\neg A) = A$ y $\mathcal{C}$ es un álgebra de Boole.

$\square$.

Proposición 4.8.
Si $\mathcal{C}$ es un álgebra de Heyting y $-: O(\mathcal{C}) \longrightarrow O(\mathcal{C})$ es una función (denotada por $-(A) = \bar{A}$) que satisface, para cualesquiera objetos A y B de $\mathcal{C}$:
(i) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$,
(ii) $A \leq \bar{A}$, y
(iii) si $A \leq B$, entonces $\bar{A} \leq \bar{B}$,
entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:
(a) $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$, y
(b) si $A = \bar{A}$, entonces $A \Leftarrow B = \overline{A \Leftarrow B}$.

Demostración.

Supongamos primero que se satisface la condición (a).

Entonces, si $A = \bar{A}$, consideremos $\overline{A \Leftarrow B} \wedge B$.

Por (ii), $B \le \bar{B}$, entonces $\overline{A \Leftarrow B} \wedge B \le \overline{A \Leftarrow B} \wedge \bar{B}$, y, por (a), $\overline{A \Leftarrow B} \wedge \bar{B} = \overline{(A \Leftarrow B) \wedge B}$.

Por lo tanto, $\overline{A \Leftarrow B} \wedge B \le \overline{(A \Leftarrow B) \wedge B}$.

Ahora bien, en un álgebra de Heyting, $(A \Leftarrow B) \wedge B \le A$; entonces, por (iii), $\overline{(A \Leftarrow B) \wedge B} \le \bar{A}$. Pero, por hipótesis, $A = \bar{A}$. Se tiene así que $\overline{A \Leftarrow B} \wedge B \le \overline{(A \Leftarrow B) \wedge B} \le A$, es decir, $\overline{A \Leftarrow B} \wedge B \le A$. Por lo tanto, $\overline{A \Leftarrow B} \le A \Leftarrow B$. Y por (ii), $A \Leftarrow B \le \overline{A \Leftarrow B}$, de donde se sigue que $A \Leftarrow B = \overline{A \Leftarrow B}$.

$\therefore$ se satisface la condición (b).

Recíprocamente, si se satisface la condición (b), entonces, como $\overline{\overline{A \wedge B}} = \overline{A \wedge B}$ (por (i)), se tiene que $\overline{\overline{A \wedge B} \Leftarrow B} = \overline{A \wedge B} \Leftarrow B$ y $\overline{\overline{A \wedge B} \Leftarrow \bar{A}} = \overline{A \wedge B} \Leftarrow \bar{A}$. Por (ii), $A \wedge B \le \overline{A \wedge B}$; entonces $A \le \overline{A \wedge B} \Leftarrow B$ y, por (iii), $\bar{A} \le \overline{\overline{A \wedge B} \Leftarrow B} = \overline{A \wedge B} \Leftarrow B$. Por lo tanto, $B \wedge \bar{A} \le \overline{A \wedge B}$, de donde se tiene que $B \le \overline{A \wedge B} \Leftarrow \bar{A}$. Y, de nuevo por (iii), $\bar{B} \le \overline{\overline{A \wedge B} \Leftarrow \bar{A}} = \overline{A \wedge B} \Leftarrow \bar{A}$. Entonces $\bar{A} \wedge \bar{B} \le \overline{A \wedge B}$ ... (1).

Finalmente, como $A \wedge B \le A$ y $A \wedge B \le B$, se tiene que $\overline{A \wedge B} \le \bar{A}$ y $\overline{A \wedge B} \le \bar{B}$.
Es decir, $\overline{A \wedge B}$ es una cota inferior de $\bar{A}$ y $\bar{B}$.
Por lo tanto, $\overline{A \wedge B} \le \bar{A} \wedge \bar{B}$ ... (2).
De (1) y (2), se tiene que $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$ y así, se satisface la condición (a).

$\therefore$ (a) y (b) son equivalentes.

◻.

Definición 4.11.

Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de Heyting. Si $-: O(\mathcal{C}) \longrightarrow O(\mathcal{C})$ es una función tal que, para cualesquiera objetos A y B de $\mathcal{C}$, $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, $A \le \bar{A}$ y $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$, entonces se dice que "$-$" es un operador cerradura.

Ahora bien, si $\mathcal{C}$ es un álgebra de Heyting y $-: O(\mathcal{C}) \longrightarrow O(\mathcal{C})$ es un operador cerradura, la condición $A \leq B$, implica que $\bar{A} \leq \bar{B}$, ya que $A = A \wedge B$ (pues por hipótesis A es también una cota inferior de B), y por lo tanto, $\bar{A} = \overline{A \wedge B} = \bar{A} \wedge \bar{B} \leq \bar{B}$.

Proposición 4.9.
Si $\mathcal{C}$ es un álgebra de Heyting, entonces la función $\neg\neg : O(\mathcal{C}) \to O(\mathcal{C})$ definida como $\neg\neg(A) = \neg(\neg A)$, es un operador cerradura.

Demostración.
Primero se probará que la función "$\neg\neg$" satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) de la Proposición 4.8.
Por la Proposición 4.4., inciso (iii), $\neg B = \neg(\neg(\neg B))$, para cualquier objeto B.
Entonces, si $B = \neg A$, se tiene que $\neg(\neg A) = \neg(\neg(\neg(\neg A)))$.
Por la misma Proposición, inciso (i), $A \leq \neg(\neg A)$.
Supongamos ahora que $A \leq B$. Entonces, por la Proposición 4.4., inciso (ii), $\neg B \leq \neg A$ y $\neg(\neg A) \leq \neg(\neg B)$.
∴ La función "$\neg\neg$" satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) de la Proposición 4.8.
Así, por dicha Proposición, para probar que $\neg\neg(A \wedge B) = \neg\neg(A) \wedge \neg\neg(B)$, basta probar que si $A = \neg\neg(A)$, entonces $A \Leftarrow B = \neg\neg(A \Leftarrow B)$.
Supongamos que $A = \neg(\neg A)$. Sea $C = \neg A$, es decir, $A = \neg C$. Entonces,
$A \Leftarrow B = \neg C \Leftarrow B = (\perp \Leftarrow C) \Leftarrow B = \perp \Leftarrow (B \wedge C) = \neg(B \wedge C)$ y $\neg(\neg(A \Leftarrow B)) = \neg(\neg(\neg(B \wedge C)))$.
Pero $\neg(\neg(\neg(B \wedge C))) = \neg(B \wedge C)$ (Proposición 4.4. inciso (iii)). Por lo tanto, $\neg(\neg(A \Leftarrow B)) = \neg(B \wedge C)$. Es decir, $\neg(\neg(A \Leftarrow B)) = A \Leftarrow B$.
Entonces, por la Proposición anterior, $\neg\neg(A \wedge B) = \neg\neg(A) \wedge \neg\neg(B)$.
∴ "$\neg\neg$" es un operador cerradura.

□.

En una categoría bicartesiana cerrada $\mathcal{C}$, podemos asimismo definir una operación $\neg : O(\mathcal{C}) \longrightarrow O(\mathcal{C})$, como $\neg(A) = \neg A$. En el caso particular de la categoría $\mathcal{S}et$ (que es bicartesiana cerrada), esta operación establece, en relación a la conjunción y a la disyunción, las leyes de De Morgan. Ahora bien, si A y B son objetos de una categoría bicartesiana cerrada, dichas leyes podrían expresarse, como en el caso del Corolario 3.2., en términos de isomorfismos, es decir, como $A\wedge B \cong \neg(\neg A \vee \neg B)$, $\neg(A\wedge B) \cong \neg A \vee \neg B$, $A \vee B \cong \neg(\neg A \wedge \neg B)$ y $\neg(A\vee B)\cong \neg A \wedge \neg B$. Sin embargo, de las ocho posibles flechas involucradas en estos isomorfismos, sólo cinco existen en toda categoría bicartesiana cerrada.

Proposición 4.10.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría bicartesiana cerrada. Para cualesquiera objetos A y B de $\mathcal{C}$, existen las siguientes flechas:

(i) $A \vee B \xrightarrow{\mu_1} \neg(\neg A \wedge \neg B)$,

(ii) $\neg A \vee \neg B \xrightarrow{\mu_2} \neg(A \wedge B)$,

(iii) $\neg(A \vee B) \xrightarrow{\mu_3} \neg A \wedge \neg B$,

(iv) $A \wedge B \xrightarrow{\mu_4} \neg(\neg A \vee \neg B)$, y

(v) $\neg A \wedge \neg B \xrightarrow{\mu_5} \neg(A \vee B)$.

Y, dichas flechas son únicas.

Demostración.

(i) Consideremos las siguientes flechas:

$\epsilon_{\perp,A}\langle \pi_{\neg A,\neg B}\pi'_{A,\neg A\wedge\neg B}, \pi_{A,\neg A\wedge \neg B}\rangle : A\wedge(\neg A\wedge\neg B)\longrightarrow \perp$ y $\epsilon_{\perp,B}\langle \pi'_{\neg A,\neg B}\pi'_{B,\neg A\wedge\neg B}, \pi_{B,\neg A\wedge\neg B}\rangle : B\wedge(\neg A\wedge \neg B)\longrightarrow\perp$.

Entonces, por R4b., existen $(\epsilon_{\perp,A}\langle \pi_{\neg A,\neg B}\pi'_{A,\neg A\wedge\neg B}, \pi_{A,\neg A\wedge\neg B}\rangle)^* : A \longrightarrow \neg(\neg A\wedge\neg B)$ y $(\epsilon_{\perp,B}\langle \pi'_{\neg A,\neg B}\pi'_{B,\neg A\wedge\neg B}, \pi_{B,\neg A\wedge\neg B}\rangle)^* : B\longrightarrow \neg(\neg A\wedge\neg B)$.

Sea $\mu_1 = [(\epsilon_{\perp,A}\langle \pi_{\neg A,\neg B}\pi'_{A,\neg A\wedge\neg B}, \pi_{A,\neg A\wedge\neg B}\rangle)^*, (\epsilon_{\perp,B}\langle \pi'_{\neg A,\neg B}\pi'_{B,\neg A\wedge\neg B}, \pi_{B,\neg A\wedge\neg B}\rangle)^*]$.

Así, $\mu_1 \in Hom_{\mathcal{C}}(A\vee B, \neg(\neg A\wedge\neg B))$.

Ahora bien, por la Proposición 2.3., existe una biyección $\varphi^{\perp}_{A\vee B,\neg A\wedge\neg B} : Hom_{\mathcal{C}}((A\vee B)\wedge(\neg A\wedge\neg B),\perp)\longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A\vee B, \neg(\neg A\wedge\neg B))$, y por el Corolario 3.1., $Hom_{\mathcal{C}}((A\vee B)\wedge(\neg A\wedge\neg B),\perp)$ consta a lo más de un elemento.

$\therefore$ μ_1 es el unico elemento de $Hom_{\mathcal{C}}(A\vee B,\neg(\neg A\wedge\neg B))$.

(ii) Consideremos ahora las siguientes flechas:

$\epsilon_{\perp,A}\langle \pi_{\neg A,A\wedge B}, \pi_{A,B}\pi'_{\neg A,A\wedge B}\rangle : \neg A\wedge(A\wedge B)\longrightarrow\perp$ y $\epsilon_{\perp,B}\langle \pi_{\neg B,A\wedge B}, \pi'_{A,B}\pi'_{\neg B,A\wedge B}\rangle : \neg B\wedge(A\wedge B)\longrightarrow \perp$.

Nuevamente, por R4b., existen $(\epsilon_{\perp,A}\langle\pi_{\neg A,A\wedge B}, \pi_{A,B}\pi'_{\neg A,A\wedge B}\rangle)^* : \neg A\longrightarrow\neg(A\wedge B)$ y

$(\epsilon_{\perp,B}\langle\pi_{\neg B,A\wedge B},\pi'_{A,B}\pi'_{\neg B,A\wedge B}\rangle)^{*}:\neg B\longrightarrow\neg(A\wedge B)$.

Sea $\mu_2=[(\epsilon_{\perp,A}\langle\pi_{\neg A,A\wedge B},\pi_{A,B}\pi'_{\neg A,A\wedge B}\rangle)^{*},(\epsilon_{\perp,B}\langle\pi_{\neg B,A\wedge B},\pi'_{A,B}\pi'_{\neg B,A\wedge B}\rangle)^{*}]$.

Se tiene así que $\mu_2\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\neg A\vee\neg B,\neg(A\wedge B))$.

Análogamente, por la Proposición 2.3. existe una biyección $\varphi^{\perp}_{\neg A\vee\neg B,A\wedge B}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((\neg A\vee\neg B)\wedge(A\wedge B),\perp)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\neg A\vee\neg B,\neg(A\wedge B))$, y por el Corolario 3.1., $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((\neg A\vee\neg B)\wedge(A\wedge B),\perp)$ consta a lo más de un elemento.

$\therefore$ μ_2 es el único elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\neg A\vee\neg B,\neg(A\wedge B))$.

(iii) Por el Corolario 3.3., $\neg A\wedge\neg B\cong\neg(A\vee B)$. Entonces existe una biyección $\Psi:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\neg(A\vee B),\neg A\wedge\neg B)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\neg(A\vee B),\neg(A\vee B))$.

Sea $\mu_3=\Psi^{-1}(1_{\neg(A\vee B)})$.

Por la Proposición 2.3. y el Corolario 3.1., se tiene también que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\neg(A\vee B),\neg(A\vee B))$ consta a lo más de un elemento.

$\therefore$ μ_3 es el único elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\neg(A\vee B),\neg A\wedge\neg B)$.

(iv) Sea $h=\epsilon_{\perp,A\wedge B}\langle\mu_2\pi'_{A\wedge B,\neg A\vee\neg B},\pi_{A\wedge B,\neg A\vee\neg B}\rangle:(A\wedge B)\wedge(\neg A\vee\neg B)\longrightarrow\perp$.

Por R4b., $h^{*}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A\wedge B,\neg(\neg A\vee\neg B))$. Sea entonces $\mu_4=h^{*}$.

Análogamente, por la Proposición 2.3. y el Corolario 3.1., $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A\wedge B,\neg(\neg A\vee\neg B))$ consta a lo más de un elemento.

$\therefore$ μ_4 es el único elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A\wedge B,\neg(\neg A\vee\neg B))$.

(v) Por R6c., $\xi^{\perp}_{A,B}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\neg A\wedge\neg B,\neg(A\vee B))$. Sea entonces $\mu_5=\xi^{\perp}_{A,B}$.

Y, nuevamente por la Proposición 2.3. y el Corolario 3.1., $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\neg A\wedge\neg B,\neg(A\vee B))$ consta a lo más de un elemento.

$\therefore$ μ_5 es el único elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\neg A\wedge\neg B,\neg(A\vee B))$.

□.

A continuación se dará un ejemplo de una categoría bicartesiana cerrada en la cual, para determinados objetos, no existen las flechas $\neg(\neg A\wedge\neg B)\longrightarrow A\vee B$, $\neg(A\wedge B)\longrightarrow\neg A\vee\neg B$ y $\neg(\neg A\vee\neg B)\longrightarrow A\wedge B$.

Sea $\mathcal{H}$ la gráfica cuyos objetos son $\bot, A, B, C$ y T, y cuyas flechas son $\bot \xrightarrow{1_\bot} \bot$, $\bot \xrightarrow{\Box_A} A$, $\bot \xrightarrow{\Box_B} B$, $\bot \xrightarrow{\Box_C} C$, $\bot \xrightarrow{\Box_T} T$, $A \xrightarrow{1_A} A$, $A \xrightarrow{f} C$, $B \xrightarrow{1_B} B$, $B \xrightarrow{g} C$, $C \xrightarrow{1_C} C$, $A \xrightarrow{O_A} T$, $B \xrightarrow{O_B} T$, $C \xrightarrow{O_C} T$ y $T \xrightarrow{1_T} T$.

Definimos ahora las siguientes flechas en $\mathcal{H}$:

$\Box_A 1_\bot = \Box_A$, $\Box_B 1_\bot = \Box_B$, $\Box_C 1_\bot = \Box_C$, $\Box_T 1_\bot = \Box_T$, $1_A \Box_A = \Box_A$, $f\Box_A = \Box_C$, $O_A\Box_A = \Box_T$, $1_B \Box_B = \Box_B$, $g\Box_B = \Box_C$, $O_B\Box_B = \Box_T$, $1_C\Box_C = \Box_C$, $O_C\Box_C = \Box_T$, $1_T\Box_T = \Box_T$, $f1_A = f$, $O_A 1_A = O_A$, $1_C f = f$, $O_C f = O_A$, $g1_B = g$, $O_B 1_B = O_B$, $1_C g = g$, $O_C g = O_B$, $O_C 1_C = O_C$, $1_T O_A = O_A$, $1_T O_B = O_B$, $1_T O_C = O_C$, $1_\bot 1_\bot = 1_\bot$, $1_A 1_A = 1_A$, $1_B 1_B = 1_B$, $1_C 1_C = 1_C$ y $1_T 1_T = 1_T$.

Y, por último, definimos los siguientes objetos en $\mathcal{H}$:

$T \wedge A = A \wedge T = A$, $T \wedge B = B \wedge T = B$, $T \wedge C = C \wedge T = C$, $T \wedge \bot = \bot \wedge T = \bot$, $T \wedge T = T$, $A \wedge A = A$, $\bot \wedge \bot = \bot$, $B \wedge B = B$, $C \wedge C = C$, $A \wedge B = B \wedge A = \bot$, $A \wedge C = C \wedge A = A$, $B \wedge C = C \wedge B = B$, $\bot \wedge A = A \wedge \bot = \bot$, $\bot \wedge B = B \wedge \bot = \bot$, $\bot \wedge C = C \wedge \bot = \bot$,

$T \Leftarrow \bot = T \Leftarrow A = T \Leftarrow B = T \Leftarrow C = T \Leftarrow T = T$, $\bot \Leftarrow T = \bot$, $A \Leftarrow T = A$, $B \Leftarrow T = B$, $C \Leftarrow T = C$, $\bot \Leftarrow \bot = A \Leftarrow \bot = B \Leftarrow \bot = C \Leftarrow \bot = T$, $\bot \Leftarrow A = B$, $\bot \Leftarrow B = A$, $\bot \Leftarrow C = \bot$, $A \Leftarrow A = T$, $B \Leftarrow B = T$, $C \Leftarrow C = T$, $A \Leftarrow B = A$, $B \Leftarrow A = B$, $A \Leftarrow C = A$, $C \Leftarrow A = T$, $B \Leftarrow C = B$, $C \Leftarrow B = T$, y

$A \vee \bot = \bot \vee A = A$, $\bot \vee B = B \vee \bot = B$, $\bot \vee C = C \vee \bot = C$, $\bot \vee T = T \vee \bot = T$, $A \vee A = A$, $B \vee B = B$, $C \vee C = C$, $T \vee T = T$, $A \vee B = B \vee A = C$, $A \vee C = C \vee A = C$, $A \vee T = T \vee A = T$, $B \vee C = C \vee B = C$, $B \vee T = T \vee B = T$, $C \vee T = T \vee C = T$, $\bot \vee \bot = \bot$.

Ahora bien, para demostrar que $\mathcal{H}$ es, en efecto, una categoría bicartesiana cerrada, se tendría que considerar cada caso en particular para verificar que se satisfacen todos los axiomas, es decir, R1a., R1b., R2., R3a., etc. Dada la extensión de este proceso, omitimos por el momento la demostración, misma que se da al final (ver Apéndice).

Consideremos ahora $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\neg(\neg A \wedge \neg B), A \vee B)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\neg(A \wedge B), \neg A \vee \neg B)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\neg(\neg C \vee \neg C), C \wedge C)$.

Por definición, $\neg A = \bot \Leftarrow A = B$ y $\neg B = \bot \Leftarrow B = A$; entonces $\neg A \wedge \neg B = B \wedge A = \bot$ y $\neg(\neg A \wedge \neg B) = \neg\bot = \bot \Leftarrow \bot = T$. También por definición, $A \vee B = C$. Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\neg(\neg A \wedge \neg B), A \vee B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(T, C) = \emptyset$.

Por definición, $A \wedge B = \bot$ y $\neg\bot = \bot \Leftarrow \bot = T$. Entonces $\neg(A \wedge B) = \neg\bot = T$. También por definición, $\neg A = B$ y $\neg B = A$ y $\neg A \vee \neg B = B \vee A = C$. Se tiene así que $Hom_{\mathcal{H}}(\neg(A \wedge B), \neg A \vee \neg B) = Hom_{\mathcal{H}}(T, C) = \emptyset$.

Y, por último, de las definiciones, se obtiene que $\neg C = \bot \Leftarrow C = \bot$, $\neg C \vee \neg C = \bot$ y $C \wedge C = C$. Entonces $Hom_{\mathcal{H}}(\neg(\neg C \vee \neg C), C \wedge C) = Hom_{\mathcal{H}}(\neg \bot, C) = Hom_{\mathcal{H}}(T, C) = \emptyset$.

Se tiene así que $\mathcal{H}$ es una categoría bicartesiana cerrada en la cual, para determinados objetos, no existen flechas $\neg(\neg A \wedge \neg B) \longrightarrow A \vee B$, $\neg(A \wedge B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$ y $\neg(\neg A \vee \neg B) \longrightarrow A \wedge B$. Sin embargo, existe una estrecha relación entre el hecho de que en una categoría bicartesiana cerrada la flecha μ_2 sea isomorfismo y el de que dicha categoría tenga estructura de álgebra de Heyting. Con el objeto de enunciar y demostrar esta relación, damos a continuación la siguiente definición.

Definición 4.12.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías. Se dice que $\mathcal{A}$ es equivalente a $\mathcal{B}$ si existen funtores $S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ tales que $T \circ S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ es naturalmente isomorfo al funtor $1_{\mathcal{A}}$ y $S \circ T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ es naturalmente isomorfo al funtor $1_{\mathcal{B}}$.

Entonces, si $\mathcal{A}$ es equivalente a $\mathcal{B}$, existen transformaciones naturales $\tau : T \circ S \longrightarrow 1_{\mathcal{A}}$, $\tau' : S \circ T \longrightarrow 1_{\mathcal{B}}$, tales que $\tau_A : (T \circ S)(A) \longrightarrow A$ y $\tau'_B : (S \circ T)(B) \longrightarrow B$ son isomorfismos, para cada objeto A de $\mathcal{A}$ y cada objeto B de $\mathcal{B}$, respectivamente.

Sea ahora $\mathcal{C}$ una categoría. Para cada objeto A de $\mathcal{C}$, sea $I(A) = \{ C \in O(\mathcal{C}) \mid C \cong A \}$. Como $A \in I(A)$, se tiene que $I(A) \neq \emptyset$. Elegimos entonces $C_A \in I(A)$, para cada objeto A de $\mathcal{C}$. Además, $I(A) = I(B)$ si y sólo si $A \cong B$. Formamos entonces la categoría $\mathcal{C}'$ cuyos objetos son $\{C_A\}_{A \in O(\mathcal{C})}$. Y si C_A y C_B son objetos de $\mathcal{C}'$, definimos $Hom_{\mathcal{C}'}(C_A, C_B)$ como $Hom_{\mathcal{C}}(C_A, C_B)$, es decir, $Hom_{\mathcal{C}'}(C_A, C_B) = Hom_{\mathcal{C}}(C_A, C_B)$.

Se tiene entonces la siguiente Proposición.

Proposición 4.11.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Entonces $\mathcal{C}$ es equivalente a $\mathcal{C}'$.

Demostración.

Sea $K: \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ el funtor inclusión, es decir, $K(C_A) = C_A$ y $K'(f) = f$, para cualquier objeto C_A de $\mathcal{C}'$ y cualquier $f \in Hom_{\mathcal{C}'}(C_A, C_B)$.

Para cada objeto A de $\mathcal{C}$, sea $A^{C_A} = \{ f \in Hom_{\mathcal{C}}(C_A, A) \mid f \text{ es isomorfismo} \}$.

Como $C_A \cong A$, se tiene que $A^{C_A} \neq \phi$. Elegimos entonces, para cada objeto A de $\mathcal{C}$, $\tau_A \in A^{C_A}$.

Sea $T: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ definido de la siguiente manera:
si A y B son objetos de $\mathcal{C}$ y $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, entonces $T(A) = C_A$ y $T(f) = \tau_B^{-1} f \tau_A$. Claramente $T(f) \in Hom_{\mathcal{C}'}(C_A, C_B)$. Veremos ahora que T es, en efecto, un funtor.

Consideremos $T(1_A)$. Por definición, $T(1_A) = \tau_A^{-1} 1_A \tau_A$. Pero, por E1., $\tau_A^{-1} 1_A \tau_A = \tau_A^{-1} \tau_A = 1_{C_A} = 1_{T(A)}$. Por lo tanto, $T(1_A) = 1_{T(A)}$.

Sean ahora $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$. Entonces, por definición, $T(gf) = \tau_C^{-1} g f \tau_A = \tau_C^{-1} g 1_B f \tau_A = \tau_C^{-1} g \tau_B \tau_B^{-1} f \tau_A = T(g) T(f)$.

$\therefore$ T es un funtor.

Definimos ahora $\tau: K \circ T \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$ y $\tau': T \circ K \longrightarrow 1_{\mathcal{C}'}$ como $\tau(A) = \tau_A$ y $\tau'(C_A) = \tau_{C_A}$.

De la elección de τ_A, para cada objeto A de $\mathcal{C}$, es claro que τ_A (y τ_{C_A}) es un isomorfismo.

Consideremos entonces los siguientes diagramas, donde A y B son objetos de $\mathcal{C}$, $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $h \in Hom_{\mathcal{C}'}(C_A, C_B)$:

$$\begin{array}{ccc} (K \circ T)(A) & \xrightarrow{\tau_A} & A \\ {\scriptstyle (K \circ T)(f)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f} \\ (K \circ T)(B) & \xrightarrow[\tau_B]{} & B \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{ccc} (T \circ K)(C_A) & \xrightarrow{\tau_{C_A}} & C_A \\ \downarrow {\scriptstyle (T \circ K)(h)} & & \downarrow {\scriptstyle h} \\ (T \circ K)(C_B) & \xrightarrow[\tau_{C_B}]{} & C_B \end{array}$$

Entonces, $\tau_B \, (K \circ T)(f) = \tau_B(K(T(f))) = \tau_B(T(f)) = \tau_B \tau_B^{-1} f \tau_A = 1_B f \tau_A = f \tau_A$ y $\tau_{C_B} \, (T \circ K)(h) = \tau_{C_B}(T(K(h))) = \tau_{C_B}(T(h)) = \tau_{C_B} \tau_{C_B}^{-1} h \tau_{C_A} = 1_{C_B} h \tau_{C_A} = h \tau_{C_A}$.

Se tiene así que ambos diagramas son conmutativos.

$\therefore$ τ y τ' son isomorfismos naturales.

$\therefore$ $\mathcal{C}$ es equivalente a $\mathcal{C}'$.

$\square$.

Observación.

La categoría $\mathcal{C}'$ (llamada esqueleto de $\mathcal{C}$), se obtuvo en realidad identificando a los objetos isomorfos entre sí de $\mathcal{C}$, en un sólo objeto. Es decir, la categoría $\mathcal{C}'$ consta de ciertos objetos y ciertas flechas de $\mathcal{C}$. Puede entonces afirmarse que si $\mathcal{C}$ es una categoría bicartesiana cerrada, $\mathcal{C}'$ también lo es. La demostración de este resultado se da en el Apéndice.

Proposición 4.12.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría bicartesiana cerrada. Si para cualesquiera objetos A y B de $\mathcal{C}$, $\neg(A\wedge B)\cong\neg A\vee\neg B$, entonces $\mathcal{C}$ es equivalente a un álgebra de Heyting.

Demostración.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría bicartesiana cerrada. Supongamos que para cualesquiera objetos A y B de $\mathcal{C}$, $\neg(A\wedge B)\cong\neg A\vee\neg B$.

Por la Proposición 3.4., $\top\cong\bot\Leftarrow\bot$ y $\bot\wedge\bot\cong\bot$. Entonces, por la Proposición 2.8., $\bot\Leftarrow\bot\cong\bot\Leftarrow(\bot\wedge\bot)$, es decir, $\top\cong\bot\Leftarrow(\bot\wedge\bot)$.

Por definición, $\bot\Leftarrow(\bot\wedge\bot)=\neg(\bot\wedge\bot)$, y, por hipótesis, $\neg(\bot\wedge\bot)\cong\neg\bot\vee\neg\bot$.

Se tiene así que $\top\cong\neg\bot\vee\neg\bot=(\bot\Leftarrow\bot)\vee(\bot\Leftarrow\bot)\cong\top\vee\top$.

Por lo tanto, $O_{\top\vee\top}:\top\vee\top\longrightarrow\top$ es un isomorfismo, es decir, existe $f\in Hom_{\mathcal{C}}(\top,\top\vee\top)$ tal que $fO_{\top\vee\top}=1_{\top\vee\top}$ (y $O_{\top\vee\top}f=1_{\top}$).

Ahora bien, por E'2., $O_{\top\vee\top}K_{\top,\top}=O_{\top}=1_{\top}$ y $O_{\top\vee\top}K'_{\top,\top}=O_{\top}=1_{\top}$; y por E6c., $O_{\top\vee\top}=[O_{\top\vee\top}K_{\top,\top},O_{\top\vee\top}K'_{\top,\top}]=[1_{\top},1_{\top}]$. Entonces, $f=f1_{\top}=fO_{\top\vee\top}K_{\top,\top}=1_{\top\vee\top}K_{\top,\top}=K_{\top,\top}$ y $f=f1_{\top}=fO_{\top\vee\top}K'_{\top,\top}=1_{\top\vee\top}K'_{\top,\top}=K'_{\top,\top}$.

Por lo tanto, $f=K_{\top,\top}=K'_{\top,\top}$.

Sean ahora A y C objetos de $\mathcal{C}$ y sea $h\in Hom_{\mathcal{C}}(C,A\wedge A)$. Veremos que $\pi_{A,A}h=\pi'_{A,A}h$.

Consideremos la flecha $[(\pi_{A,A}h\pi'_{T,C})^*,(\pi'_{A,A}h\pi'_{T,C})^*]:T\vee T\longrightarrow A\Leftarrow C$.

Como $K_{T,T}=K'_{T,T}$, se tiene entonces que

$(\pi_{A,A}h\pi'_{T,C})^*=[(\pi_{A,A}h\pi'_{T,C})^*,(\pi'_{A,A}h\pi'_{T,C})^*]K_{T,T}=[(\pi_{A,A}h\pi'_{T,C})^*,(\pi'_{A,A}h\pi'_{T,C})^*]K'_{T,T}=(\pi'_{A,A}h\pi'_{T,C})^*$.

Por lo tanto, se tienen las siguientes igualdades:

$\pi_{A,A}h\pi'_{T,C}=\epsilon_{A,C}\langle(\pi_{A,A}h\pi'_{T,C})^*\pi_{T,C},\pi'_{T,C}\rangle=\epsilon_{A,C}\langle(\pi'_{A,A}h\pi'_{T,C})^*\pi_{T,C},\pi'_{T,C}\rangle=\pi'_{A,A}h\pi'_{T,C}$.

Entonces, $\pi_{A,A}h=\pi_{A,A}h1_C=\pi_{A,A}h\pi'_{T,C}\langle 0_C,1_C\rangle=\pi'_{A,A}h\pi'_{T,C}\langle 0_C,1_C\rangle=\pi'_{A,A}h1_C=\pi'_{A,A}h$.

En particular, si $h=1_{A\wedge A}$, se tiene que $\pi_{A,A}=\pi'_{A,A}$.

$\therefore$ $\pi_{A,A}=\pi'_{A,A}$ para cualquier objeto A de $\mathcal{C}$.

Sean A y B objetos de $\mathcal{C}$. Veremos ahora que $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ consta a lo más de un elemento.

Sean entonces $f,g\in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$. Así, $\langle f,g\rangle\in Hom_{\mathcal{C}}(A,B\wedge B)$ y como $\pi_{B,B}=\pi'_{B,B}$, se tiene que $f=\pi_{B,B}\langle f,g\rangle=\pi'_{B,B}\langle f,g\rangle=g$.

$\therefore$ $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ consta a lo más de un elemento, para cualesquiera objetos A y B.

Consideremos ahora dos objetos, C_A y C_B, de la categoría $\mathcal{C}'$.

Si existen $f,g\in Hom_{\mathcal{C}'}(C_A,C_B)\cup Hom_{\mathcal{C}'}(C_B,C_A)$, entonces, por definición, $f,g\in Hom_{\mathcal{C}}(C_A,C_B)\cup Hom_{\mathcal{C}}(C_B,C_A)$. Como $Hom_{\mathcal{C}}(C_A,C_B)$ consta a lo más de un elemento, al igual que $Hom_{\mathcal{C}}(C_B,C_A)$, entonces $f\in Hom_{\mathcal{C}}(C_A,C_B)$ y $g\in Hom_{\mathcal{C}}(C_B,C_A)$, ó bien, $g\in Hom_{\mathcal{C}}(C_A,C_B)$ y $f\in Hom_{\mathcal{C}}(C_B,C_A)$. Consideranemos sólo uno de estos casos, ya que el otro es completamente análogo.

Supongamos que $f\in Hom_{\mathcal{C}}(C_A,C_B)$ y $g\in Hom_{\mathcal{C}}(C_B,C_A)$. Entonces, $gf\in Hom_{\mathcal{C}}(C_A,C_A)$ y $fg\in Hom_{\mathcal{C}}(C_B,C_B)$. Pero $1_{C_A}\in Hom_{\mathcal{C}}(C_A,C_A)$ y $1_{C_B}\in Hom_{\mathcal{C}}(C_B,C_B)$. Por lo tanto, $gf=1_{C_A}$ y $fg=1_{C_B}$. Es decir, se tiene que $C_A\cong C_B$. Entonces, como $A\cong C_A$ y $C_B\cong B$, $A\cong B$ y por lo tanto, $I(A)=I(B)$. Así, $C_A=C_B$ y $Hom_{\mathcal{C}}(C_A,C_B)\cup Hom_{\mathcal{C}}(C_B,C_A)=Hom_{\mathcal{C}}(C_A,C_A)\cup Hom_{\mathcal{C}}(C_A,C_A)=Hom_{\mathcal{C}}(C_A,C_A)$, es decir, $Hom_{\mathcal{C}'}(C_A,C_B)\cup Hom_{\mathcal{C}'}(C_B,C_A)=Hom_{\mathcal{C}}(C_A,C_A)$.

$\therefore$ $Hom_{\mathcal{C}'}(C_A,C_B)\cup Hom_{\mathcal{C}'}(C_B,C_A)$ consta a lo más de un elemento.

Entonces $\mathcal{C}'$ es un álgebra de Heyting y por la Proposición 4.11., $\mathcal{C}$ es equivalente a $\mathcal{C}'$. $\square$

El recíproco de la Proposición anterior no es, en general, cierto.
Consideremos de nuevo la categoría $\mathcal{H}$, que es bicartesiana cerrada. Por construcción, $Hom_{\mathcal{H}}(D,E) \cup Hom_{\mathcal{H}}(E,D)$ consta a lo más de un elemento para cualesquiera objetos D y E de $\mathcal{H}$. Es decir, $\mathcal{H}$ es en realidad un álgebra de Heyting. Sin embargo, $\neg(A \wedge B)$ no es isomorfo a $\neg A \vee \neg B$ ya que ni siquiera existe en $\mathcal{H}$ una flecha $\neg(A \wedge B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$.
La siguiente Proposición nos da una condición necesaria y suficiente para que una categoría bicartesiana cerrada sea equivalente a un álgebra de Heyting.

Proposición 4.13.
Sea $\mathcal{C}$ una categoría bicartesiana cerrada. Entonces $\mathcal{C}$ es equivalente a un álgebra de Heyting si y sólo si para cualquier objeto A de $\mathcal{C}$, $A \Leftarrow A \cong T$.

Demostración.
Supongamos primero que $\mathcal{C}$ es equivalente a un álgebra de Heyting $\mathcal{A}$. Entonces existen funtores $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ y $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ tales que $T \circ S$ es naturalmente isomorfo al funtor $1_{\mathcal{C}}$ y $S \circ T$ es naturalmente isomorfo al funtor $1_{\mathcal{A}}$. Es decir, existen $\tau : T\circ S \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$ y $\tau' : S \circ T \longrightarrow 1_{\mathcal{A}}$, isomorfismos naturales.
Ahora bien, como $Hom_{\mathcal{A}}(A,A') \subseteq Hom_{\mathcal{A}}(A,A') \cup Hom_{\mathcal{A}}(A',A)$ para cualesquiera objetos A y A' de $\mathcal{A}$, y $\mathcal{A}$ es un álgebra de Heyting, entonces $Hom_{\mathcal{A}}(A,A')$ consta a lo más de un sólo elemento.

Por definición, si C es un objeto de $\mathcal{C}$, $S(\tau_C) \in Hom_{\mathcal{A}}(S(TS(C)), S(C))$ y $\tau'_{S(C)} \in Hom_{\mathcal{A}}(ST(S(C)), S(C))$. Como S y T son funtores, en particular $S : O(\mathcal{C}) \longrightarrow O(\mathcal{A})$ y $T : O(\mathcal{A}) \longrightarrow O(\mathcal{C})$ son funciones; entonces se tiene que $S(TS(C)) = ST(S(C))$, es decir, $S(\tau_C), \tau'_{S(C)} \in Hom_{\mathcal{A}}(ST(S(C)), S(C))$. Por lo tanto, $S(\tau_C) = \tau'_{S(C)}$, para cualquier objeto C de $\mathcal{C}$.
Como S es funtor, se tiene que $S(\tau_C)S(\tau_C^{-1}) = S(\tau_C\tau_C^{-1}) = S(1_C) = 1_{S(C)}$ y $S(\tau_C^{-1})S(\tau_C) = S(\tau_C^{-1}\tau_C) = S(1_{TS(C)}) = 1_{S(TS(C))}$. Pero, como se vió en el Capítulo 2,

$S(\tau_c)^{-1}$ es el único elemento de $Hom_{\mathcal{A}}(S(C), S(TS(C)))$ tal que $S(\tau_c)S(\tau_c)^{-1} = 1_{S(C)}$ y $S(\tau_c)^{-1}S(\tau_c) = 1_{S(TS(C))}$.

Por lo tanto, $S(\tau_c^{-1}) = S(\tau_c)^{-1} = \tau'^{-1}_{S(C)}$, para cualquier objeto C de $\mathcal{C}$.

Sean $\varphi : Hom_{\mathcal{C}}(C,C') \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(S(C),S(C'))$ y $\varphi' : Hom_{\mathcal{A}}(S(C),S(C')) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(C,C')$ definidas como $\varphi(g) = S(g)$ y $\varphi'(h) = \tau_{c'}\,T(h)\,\tau_c^{-1}$.

Como τ y τ' son isomorfismos naturales, los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
(T \circ S)(C) \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "(T\circ S)(g)"'] & C \arrow[d, "g"] \\
(T \circ S)(C') \arrow[r, "\tau_{c'}"'] & C'
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
(S \circ T)(S(C)) \arrow[r, "\tau'_{S(C)}"] \arrow[d, "(S\circ T)(h)"] & S(C) \arrow[d, "h"] \\
(S \circ T)(S(C')) \arrow[r, "\tau'_{S(C')}"'] & S(C')
\end{tikzcd},$$

para cualesquiera objetos C y C' de $\mathcal{C}$, y flechas $g \in Hom_{\mathcal{C}}(C,C')$ y $h \in Hom_{\mathcal{A}}(S(C),S(C'))$.

Se tienen entonces las siguientes igualdades:

$(\varphi' \circ \varphi)(g) = \varphi'(\varphi(g)) = \varphi'(S(g)) = \tau_{c'}\,T(S(g))\,\tau_c^{-1} = \tau_{c'}(T\circ S)(g)\,\tau_c^{-1} = g\,\tau_c\,\tau_c^{-1}$
$= g\,1_c = g$, y $(\varphi \circ \varphi')(h) = \varphi(\varphi'(h)) = \varphi(\tau_{c'}\,T(h)\,\tau_c^{-1}) = S(\tau_{c'}\,T(h)\,\tau_c^{-1})$
$= S(\tau_{c'})\,S(T(h))\,S(\tau_c^{-1}) = \tau'_{S(C')}\,(S\circ T)(h)\,S(\tau_c)^{-1} = h\,\tau'_{S(C)}\,\tau'^{-1}_{S(C)} = h\,1_{S(C)} = h$.

Por lo tanto, $\varphi' \circ \varphi = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(C,C')}$ y $\varphi \circ \varphi' = 1_{Hom_{\mathcal{A}}(S(C),S(C'))}$, es decir, φ es una biyección.

$\therefore$ $Hom_{\mathcal{C}}(C,C')$ consta a lo más de un elemento, para cualesquiera objetos C y C' de $\mathcal{C}$.

Sea A un objeto de $\mathcal{C}$. Consideremos $O_{A\Leftarrow A}(\pi'_{T,A})^* \in Hom_{\mathcal{C}}(T,T)$ y $(\pi'_{T,A})^* O_{A\Leftarrow A} \in Hom_{\mathcal{C}}(A\Leftarrow A, A\Leftarrow A)$. Como $1_T \in Hom_{\mathcal{C}}(T,T)$, entonces, por E2., $O_{A\Leftarrow A}(\pi'_{T,A})^* = 1_T$, y como $1_{A\Leftarrow A} \in Hom_{\mathcal{C}}(A\Leftarrow A, A\Leftarrow A)$, se tiene que $(\pi'_{T,A})^* O_{A\Leftarrow A} = 1_{A\Leftarrow A}$, ya que $Hom_{\mathcal{C}}(A\Leftarrow A, A\Leftarrow A)$, por lo anterior, consta a lo más de un elemento.

$\therefore$ $A\Leftarrow A \cong T$ para cualquier objeto A de $\mathcal{C}$.

Recíprocamente, si para cualquier objeto A de $\mathcal{C}$, $A\Leftarrow A \cong T$, entonces existe una biyección $\Psi : Hom_{\mathcal{C}}(A,T) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, A\Leftarrow A)$. Pero, por E2.,

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,T)$ consta de un sólo elemento. Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A \Leftarrow A)$ consta de un único elemento. Y, por la Proposición 2.3., se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \wedge A, A)$ consta tambien de un sólo elemento. Entonces $\pi_{A,A} = \pi'_{A,A}$, para cualquier objeto A de $\mathcal{C}$. Así, si A y B son objetos de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ consta a lo más de un elemento.

Consideremos entonces la categoría $\mathcal{C}'$. Por lo anterior, si C_A y C_B son objetos de $\mathcal{C}'$, se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(C_A, C_B) \cup \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(C_B, C_A)$ consta a lo más de un elemento. Es decir, $\mathcal{C}'$ es un álgebra de Heyting.

$\therefore \mathcal{C}$ es equivalente a un álgebra de Heyting.

$\square$.

APENDICE

I. $\mathcal{H}$ es una categoría bicartesiana cerrada.

Por definición, $O(\mathcal{H}) = \{\perp, A, B, C, T\}$ y $F(\mathcal{H}) = \{1_\perp, \Box_A, \Box_B, \Box_C, \Box_T, 1_A, f, 1_B, g, 1_C, O_A, O_B, O_C, 1_T\}$. Entonces,
$F(\mathcal{H}) \times_0 F(\mathcal{H}) = \{(1_\perp, 1_\perp), (\Box_A, 1_\perp), (\Box_B, 1_\perp), (\Box_C, 1_\perp), (\Box_T, 1_\perp), (1_A, \Box_A), (1_A, 1_A), (f, \Box_A), (f, 1_A), (O_A, \Box_A), (O_A, 1_A), (1_B, \Box_B), (1_B, 1_B), (g, \Box_B), (g, 1_B), (O_B, \Box_B), (O_B, 1_B), (1_C, \Box_C), (1_C, f), (1_C, g), (1_C, 1_C), (O_C, \Box_C), (O_C, f), (O_C, g), (O_C, 1_C), (1_T, \Box_T), (1_T, O_A), (1_T, O_B), (1_T, O_C), (1_T, 1_T)\}$.

Sea $\varphi : F(\mathcal{H}) \times_0 F(\mathcal{H}) \longrightarrow F(\mathcal{H})$ dada por $\varphi((h, h')) = hh'$, donde hh' denota a la flecha ya definida en el Capítulo 4.
Por construcción de la gráfica, en $\mathcal{H}$ se satisface R1a. Y, con la definición de φ, se tiene que $\mathcal{H}$ es un sistema deductivo.

Sean ahora $D, D' \in O(\mathcal{H})$ y $h \in Hom_{\mathcal{H}}(D, D')$, $h' \in Hom_{\mathcal{H}}(D', D'')$. Entonces, por definición, $h1_D = 1_{D'}h = h$ y $1_{D''}(h'h) = h'h = (1_{D''}h')h$, $h'(h1_D) = h'h = (h'h)1_D$, $h'(1_{D'}h) = h'h = (h'1_{D'})h$. Así, para probar que satisface E1., sólo resta comprobar las igualdades $O_C(f\Box_A) = (O_Cf)\Box_A$ y $O_C(g\Box_B) = (O_Cg)\Box_B$.
De las definiciones, se tiene que $O_C(f\Box_A) = O_C\Box_C = \Box_T$, $(O_Cf)\Box_A = O_A\Box_A = \Box_T$ y $O_C(g\Box_B) = O_C\Box_C = \Box_T$, $(O_Cg)\Box_B = O_B\Box_B = \Box_T$. Por lo tanto $O_C(f\Box_A) = (O_Cf)\Box_A$ y $O_C(g\Box_B) = (O_Cg)\Box_B$.
Se tiene entonces que $\mathcal{H}$ es una categoría.

A continuación se probará que $\mathcal{H}$ es un cálculo para la conjunción.
Sea $\wedge : O(\mathcal{H}) \times O(\mathcal{H}) \longrightarrow O(\mathcal{H})$ dada por $\wedge((D, D')) = D \wedge D'$, donde $D \wedge D'$ denota al objeto ya definido en el Capítulo 4.
Sean $O_\perp = \Box_T$ y $O_T = 1_T$. Entonces en $\mathcal{H}$ se satisface R2.
Sean ahora D y D' objetos de $\mathcal{H}$.
Como $D \wedge D = D$, se definen $\pi_{D,D} = 1_D$ y $\pi'_{D,D} = 1_D$.

También, por definición, $\perp \wedge D' = \perp$ y $D' \wedge T = D'$. Sean entonces $\pi_{\perp,D'} = 1_\perp$, $\pi'_{\perp,D'} = \Box_{D'}$ y $\pi_{D',T} = 1_{D'}$, $\pi'_{D',T} = O_{D'}$.

Ahora definimos las siguientes flechas:

$\pi_{A,B} = \Box_A$, $\pi'_{A,B} = \Box_B$ ya que, por definición, $A \wedge B = \perp$;

$\pi_{A,C} = 1_A$, $\pi'_{A,C} = f$ ya que $A \wedge C = A$;

$\pi_{B,C} = 1_B$, $\pi'_{B,C} = g$ ya que $B \wedge C = B$.

Y, por último, como $D \wedge D' = D' \wedge D$ para cualesquiera objetos D y D' de $\mathcal{H}$, definimos $\pi_{D,D'} = \pi'_{D',D}$ y $\pi'_{D,D'} = \pi_{D',D}$.

Se tiene entonces que en $\mathcal{H}$ se satisfacen R3a. y R3b.

Sea ahora $h : D \longrightarrow D'$ una flecha de $\mathcal{H}$. Definimos entonces:

$\langle h, h \rangle = h : D \longrightarrow D' \wedge D'$;

$\langle O_D, h \rangle = h : D \longrightarrow T \wedge D'$;

$\langle \Box_D, 1_\perp \rangle = 1_\perp : \perp \longrightarrow D \wedge \perp$;

$\langle \Box_D, \Box_{D'} \rangle = \Box_{D \wedge D'} : \perp \longrightarrow D \wedge D'$;

$\langle f, 1_A \rangle = 1_A : A \longrightarrow C \wedge A$;

$\langle g, 1_B \rangle = 1_B : B \longrightarrow C \wedge B$.

Ahora bien, como $D \wedge D' = D' \wedge D$, entonces si $h' \in Hom_{\mathcal{H}}(D, D'')$ y $\langle h, h' \rangle : D \longrightarrow D' \wedge D''$, se define $\langle h', h \rangle = \langle h, h' \rangle$.

Con esto queda probado que en $\mathcal{H}$ también se satisface R3c.

Por lo tanto, $\mathcal{H}$ es un cálculo para la conjunción.

Sea ahora $\Leftarrow : O(\mathcal{H}) \times O(\mathcal{H}) \longrightarrow O(\mathcal{H})$ dada por $\Leftarrow((D, D')) = D \Leftarrow D'$, donde $D \Leftarrow D'$ denota al objeto ya definido en el último capítulo.

Sea $D \in O(\mathcal{H})$. Como $D \Leftarrow D = T$, $(\perp \Leftarrow D) \wedge D = \perp$, $T \Leftarrow D = T$ y $D \Leftarrow T = D$, definimos entonces las siguientes flechas:

$\epsilon_{D,D} = 1_D : (D \Leftarrow D) \wedge D \longrightarrow D$;

$\epsilon_{\perp,D} = 1_\perp : (\perp \Leftarrow D) \wedge D \longrightarrow \perp$;

$\epsilon_{T,D} = O_D : (T \Leftarrow D) \wedge D \longrightarrow T$;

$\epsilon_{D,T} = 1_D : (D \Leftarrow T) \wedge T \longrightarrow D$.

Y, si $D \neq \perp$, definimos $\epsilon_{D,\perp} = \Box_D : (D \Leftarrow \perp) \wedge \perp \longrightarrow D$, pues $D \Leftarrow \perp = T$.

Por último, se definen las siguientes flechas:

$\epsilon_{A,B} = \Box_A : (A \Leftarrow B) \wedge B \longrightarrow A$, ya que $A \Leftarrow B = A$;

$\epsilon_{A,C} = 1_A : (A \Leftarrow C) \wedge C \longrightarrow A$, ya que $A \Leftarrow C = A$;

$\epsilon_{B,A} = \Box_B : (B \Leftarrow A) \wedge A \longrightarrow B$, ya que $B \Leftarrow A = B$;

$\epsilon_{B,C} = 1_B : (B \Leftarrow C) \wedge C \longrightarrow B$, ya que $B \Leftarrow C = B$;

$\epsilon_{C,A} = f : (C \Leftarrow A) \wedge A \longrightarrow C$, ya que $C \Leftarrow A = T$;

$\epsilon_{C,B} = g : (C \Leftarrow B) \wedge B \longrightarrow C$, ya que $C \Leftarrow B = T$.

Se tiene así que en $\mathcal{H}$ se satisface R4a.

Sean ahora D y D' objetos de $\mathcal{H}$. Si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(D \wedge D', D')$, sea $h^* = O_D$.

Si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(D \wedge D, D)$, entonces $h = 1_D$. Sea $(1_D)^* = O_D : D \longrightarrow D \Leftarrow D = T$.

Si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(D \wedge \bot, D')$, entonces $h = \Box_{D'}$. Sea $(\Box_{D'})^* = O_D : D \longrightarrow D' \Leftarrow \bot = T$.

Si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\bot \wedge D, D)$, entonces $h = \Box_D$. Sea $(\Box_D)^* = \Box_T : \bot \longrightarrow D \Leftarrow D$.

Si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(D \wedge D', T)$, entonces $h = O_{D \wedge D'}$. Sea $(O_{D \wedge D'})^* = O_D : D \longrightarrow T \Leftarrow D' = T$.

Y, si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(D \wedge T, D')$, sea entonces $h^* = h : D \longrightarrow D' \Leftarrow T = D'$.

Finalmente se definen las siguientes flechas:

$(1_\bot)^* = \Box_B$ si $\mathrm{dom}(1_\bot) = \bot \wedge A$;

$(1_\bot)^* = \Box_A$ si $\mathrm{dom}(1_\bot) = \bot \wedge B$;

$(\Box_A)^* = \Box_A$ si $\mathrm{dom}(\Box_A) = \bot \wedge B$ ó $\mathrm{dom}(\Box_A) = \bot \wedge C$;

$(\Box_B)^* = \Box_B$ si $\mathrm{dom}(\Box_B) = \bot \wedge A$ ó $\mathrm{dom}(\Box_B) = \bot \wedge C$;

$(\Box_C)^* = \Box_T$ si $\mathrm{dom}(\Box_C) = \bot \wedge A$ ó $\mathrm{dom}(\Box_C) = \bot \wedge B$;

$(1_A)^* = 1_A$ si $\mathrm{dom}(1_A) = A \wedge C$;

$(f)^* = O_C$ si $\mathrm{dom}(f) = C \wedge A$;

$(f)^* = O_A$ si $\mathrm{dom}(f) = A \wedge A$;

$(f)^* = 1_T$ si $\mathrm{dom}(f) = T \wedge A$;

$(1_B)^* = 1_B$ si $\mathrm{dom}(1_B) = B \wedge C$;

$(g)^* = O_C$ si $\mathrm{dom}(g) = C \wedge B$;

$(g)^* = O_B$ si $\mathrm{dom}(g) = B \wedge B$;

$(g)^* = 1_T$ si $\mathrm{dom}(g) = T \wedge B$.

Se tiene entonces que en $\mathcal{H}$ también se satisface R4b.

Por lo tanto, $\mathcal{H}$ es un cálculo proposicional intuicionista positivo.

Definimos ahora $\vee : O(\mathcal{H}) \times O(\mathcal{H}) \longrightarrow O(\mathcal{H})$ como $\vee((D, D')) = D \vee D'$, donde $D \vee D'$ denota al objeto ya definido en el capítulo 4.

Sea $\Box_\bot = 1_\bot$. Entonces en $\mathcal{H}$ se satisface R5.

Sea D un objeto de $\mathcal{H}$. Como $D \vee D = D$, $\bot \vee D = D$ y $D \vee T = T$, definimos entonces las siguientes flechas:

$K_{D,D} = K'_{D,D} = 1_D$;

$K_{\bot,D} = \Box_D$, $K'_{\bot,D} = 1_D$;

$K_{D,T} = O_D$, $K'_{D,T} = 1_T$;

$K_{A,B} = f$, $K'_{A,B} = g$ ya que $A \vee B = C$;

$K_{A,C} = f$, $K'_{A,C} = 1_C$ ya que $A \vee C = C$;

$K_{B,C} = g$, $K'_{B,C} = 1_C$ ya que $B \vee C = C$.

Finalmente, como $D \vee D' = D' \vee D$ para cualesquiera objetos D y D' de $\mathcal{H}$, definimos $K_{D,D'} = K'_{D',D}$ y $K'_{D,D'} = K_{D',D}$.

Se tiene entonces que en $\mathcal{H}$ se satisfacen R6a. y R6b.

Ahora bien, por la Proposición 1.11., R6c. es equivalente a R'6c. Se probará entonces que en $\mathcal{H}$ se satisface R'6c.

Sean $D, D' \in O(\mathcal{H})$ y $h \in Hom_{\mathcal{H}}(D, D')$. Definimos entonces las siguientes flechas:

$[h, h] = h : D \vee D \longrightarrow D'$;

$[\Box_{D'}, h] = h : \bot \vee D \longrightarrow D'$;

$[O_D, 1_T] = 1_T : D \vee T \longrightarrow T$;

$[O_D, O_{D'}] = O_{D \vee D'} : D \vee D' \longrightarrow T$;

$[f, g] = 1_C : A \vee B \longrightarrow C$;

$[f, 1_C] = 1_C : A \vee C \longrightarrow C$;

$[g, 1_C] = 1_C : B \vee C \longrightarrow C$.

Y, si $h_1 \in Hom_{\mathcal{H}}(D, D'')$ y $h'_1 \in Hom_{\mathcal{H}}(D', D'')$ y $[h_1, h'_1] : D \vee D' \longrightarrow D''$, definimos $[h'_1, h_1] = [h_1, h'_1]$, ya que $D \vee D' = D' \vee D$.

Se tiene entonces que en $\mathcal{H}$ se satisface R'6c.

Por lo tanto, $\mathcal{H}$ es un cálculo proposicional intuicionista.

Para probar finalmente que $\mathcal{H}$ es una categoría bicartesiana cerrada, observamos primero que, por construcción de la gráfica $\mathcal{H}$, para cualesquiera objetos D y D' de $\mathcal{H}$, $Hom_{\mathcal{H}}(D, D')$ consta a lo más de un elemento. Se tiene entonces que en $\mathcal{H}$ se satisfacen E2. y E5.

Sean ahora $h \in Hom_{\mathcal{H}}(D, D')$, $h' \in Hom_{\mathcal{H}}(D, D'')$ y $h_1 \in Hom_{\mathcal{H}}(D, D' \wedge D'')$.

Entonces, $\operatorname{dom}(\pi_{D',D''}\langle h,h'\rangle) = \operatorname{dom}(\langle h,h'\rangle) = D = \operatorname{dom}(h)$,
$\operatorname{cod}(\pi_{D',D''}\langle h,h'\rangle) = \operatorname{cod}(\pi_{D',D''}) = D' = \operatorname{cod}(h)$,
$\operatorname{dom}(\pi'_{D',D''}\langle h,h'\rangle) = \operatorname{dom}(\langle h,h'\rangle) = D = \operatorname{dom}(h')$,
$\operatorname{cod}(\pi'_{D',D''}\langle h,h'\rangle) = \operatorname{cod}(\pi'_{D',D''}) = D'' = \operatorname{cod}(h')$,
$\operatorname{dom}(\langle \pi_{D',D''}h_1, \pi'_{D',D''}h_1\rangle) = D = \operatorname{dom}(h_1)$, y
$\operatorname{cod}(\langle \pi_{D',D''}h_1, \pi'_{D',D''}h_1\rangle) = D' \wedge D'' = \operatorname{cod}(h_1)$.
Por lo tanto, se tienen las siguientes igualdades:
$\pi_{D',D''}\langle h,h'\rangle = h$, $\pi'_{D',D''}\langle h,h'\rangle = h'$ y $\langle \pi_{D',D''}h_1, \pi'_{D',D''}h_1\rangle = h_1$.
Sean ahora $K_1 \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(D\wedge D', D'')$ y $K_2 \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(D, D'' \Leftarrow D')$. Entonces,
$\operatorname{dom}(\epsilon_{D'',D'}\langle K_1^*\pi_{D,D'}, \pi'_{D,D'}\rangle) = \operatorname{dom}(\langle K_1^*\pi_{D,D'}, \pi'_{D,D'}\rangle) = D \wedge D' = \operatorname{dom}(K_1)$,
$\operatorname{cod}(\epsilon_{D'',D'}\langle K_1^*\pi_{D,D'}, \pi'_{D,D'}\rangle) = \operatorname{cod}(\epsilon_{D'',D'}) = D'' = \operatorname{cod}(K_1)$,
$\operatorname{dom}((\epsilon_{D'',D'}\langle K_2\pi_{D,D'}, \pi'_{D,D'}\rangle)^*) = D = \operatorname{dom}(K_2)$ y
$\operatorname{cod}((\epsilon_{D'',D'}\langle K_2\pi_{D,D'}, \pi'_{D,D'}\rangle)^*) = D'' \Leftarrow D' = \operatorname{cod}(K_2)$.
Por lo tanto, $\epsilon_{D'',D'}\langle K_1^*\pi_{D,D'}, \pi'_{D,D'}\rangle = K_1$ y $(\epsilon_{D'',D'}\langle K_2\pi_{D,D'}, \pi'_{D,D'}\rangle)^* = K_2$.
Se tiene entonces que en $\mathcal{H}$ también se satisfacen E3a., E3b., E3c., E4a. y E4b. Es decir, $\mathcal{H}$ es un cálculo proposicional intuicionista completo.

Análogamente, si $h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(D',D)$, $h' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(D'',D)$ y $h_2 \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(D'\vee D'', D)$, entonces $[h,h']\kappa_{D',D''} = h$, $[h,h']\kappa'_{D',D''} = h'$ y $[h_2\kappa_{D',D''}, h_2\kappa'_{D',D''}] = h_2$. Es decir, en $\mathcal{H}$ también se satisfacen E6a., E6b. y E6c., con lo cual queda probado que $\mathcal{H}$ es una categoría bicartesiana cerrada.

II. Si $\mathcal{C}$ es una categoría bicartesiana cerrada, entonces la categoría $\mathcal{C}'$ también lo es.

Antes de demostrar este resultado, observamos primero lo siguiente. Si C_A es un objeto de $\mathcal{C}'$ (es decir, $C_A \cong A$) y A' es un objeto de $\mathcal{C}$ tal que $A \cong A'$, entonces $C_A \cong A'$ y se tiene que en $\mathcal{C}'$, C_A y A' son en realidad uno y el mismo objeto. En este caso la notación será $C_A =_{\mathcal{C}'} A'$. En particular se tiene que $C_A =_{\mathcal{C}'} A$, para cualquier objeto A de $\mathcal{C}$.

Ahora bien, si C_A y C_B son objetos de $\mathcal{C}'$, entonces $C_A \wedge C_B \cong A \wedge B$ (ya que $C_A \cong A$ y $C_B \cong B$) y, por definición, $C_{A\wedge B} \cong A \wedge B$; es decir, se tiene que $C_A \wedge C_B \cong C_{A\wedge B}$, ó bien, $C_A \wedge C_B =_{\mathcal{C}'} C_{A\wedge B}$. Análogamente, $C_A \Leftarrow C_B =_{\mathcal{C}'} C_{A\Leftarrow B}$ y $C_A \vee C_B =_{\mathcal{C}'} C_{A\vee B}$.

Definimos entonces $\wedge, \Leftarrow, \vee : O(\mathcal{C}') \times O(\mathcal{C}') \longrightarrow O(\mathcal{C}')$ como $\wedge((C_A, C_B)) = C_A \wedge C_B$, $\vee((C_A, C_B)) = C_A \vee C_B$ y $\Leftarrow((C_A, C_B)) = C_A \Leftarrow C_B$.

Por definición, $C_T \cong T$. Entonces, para cualquier objeto C_A de $\mathcal{C}'$ existe una biyección $\varphi : Hom_{\mathcal{C}}(C_A, C_T) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(C_A, T)$. Como $Hom_{\mathcal{C}}(C_A, T)$ consta de un sólo elemento (pues $\mathcal{C}$ es una categoría bicartesiana cerrada), entonces $Hom_{\mathcal{C}}(C_A, C_T)$ consta también de un único elemento. Y, como $Hom_{\mathcal{C}'}(C_A, C_T) = Hom_{\mathcal{C}}(C_A, C_T)$, se tiene que $Hom_{\mathcal{C}'}(C_A, C_T)$ consta de un sólo elemento para cualquier objeto C_A de $\mathcal{C}'$. Análogamente, $Hom_{\mathcal{C}'}(C_\bot, C_B)$ consta de un único elemento para cualquier objeto C_B de $\mathcal{C}'$.

Finalmente, como $\mathcal{C}$ es una categoría bicartesiana cerrada y $Hom_{\mathcal{C}'}(C_A, C_B) = Hom_{\mathcal{C}}(C_A, C_B)$ para cualesquiera objetos C_A y C_B de $\mathcal{C}'$, se tiene que $\mathcal{C}'$ es también una categoría bicartesiana cerrada.

BIBLIOGRAFIA

[1] Freyd, Peter. "Aspects of topoi". Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 7 (1972), 1-76.

[2] Herrlich, H., Strecker, G. E. Category Theory. An Introduction. Sigma Series in Pure Mathematics 1. Heldermann Verlag Berlin, 1979.

[3] Lambek, J., Scott, P.J. Higher Order Categorical Logic. Cambridge University Press, 1986.

[4] Mac Lane, S. Categories for the Working Mathematician. Springer Verlag N.Y., 1971.

[5] Szabo, M.E. "Categorical De Morgan laws." Algebra Universalis. Vol. 12 (1981), 93-102.