2ej
95

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA DE LA PRODUCCION, DUALIDAD Y ESTUDIO DE LA EFICIENCIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A:

Lucía Atzimba Ruiz Galindo

MEXICO, D. F. 1987

INDICE.

INTRODUCCION.

Una de las finalidades de la Econometría es volver operativa la Teoría Económica mediante la elaboración de métodos que puedan usarse para contrastar y utilizar resultados acerca de los fenómenos económicos. A pesar de ésta aserción, en algunas ocaciones es muy difícil llevar a cabo un análisis empírico que realmente tenga un sustento teórico a nivel económico, debido quizá al nivel de abstracción que presentan los trabajos más sólidos de la Teoría Económica.

Con base en lo anterior, este trabajo pretende establecer un marco teórico económico que permita la transición entre la teoría y la empiría, para el caso de la medición, en la Teoría de la Producción, de la eficiencia de las unidades productivas. Con esto en mente, se presenta un marco conceptual para la Teoría de la Producción, que conduce al estudio teórico y al análisis empírico de algunas medidas de eficiencia tanto para los programas de producción de una tecnología como para la comparación que surja entre tecnologías.

En el contexto establecido arriba, el trabajo se presenta como sigue: En el primer capítulo se exponen algunos conceptos básicos y resultados de la Teoría de la Producción; se genera el concepto de tecnología de producción y se hace un conjunto de supuestos sobre el comportamiento de las unidades productivas, que conducen a las funciones de producción, de costo y de beneficio asociadas a la tecnología en estudio. Dichas funciones se presentan con las propiedades que poseen de acuerdo a los supuestos dados previamente. En el siguiente capítulo se estudia la dualidad que hay entre la tecnología y cada una de las funciones mencionadas y la de las parejas de funciones. En el capítulo III se exponen algunos comentarios sobre el concepto de eficiencia y sus implicaciones a través de la función de producción, de costo y de beneficio, para después pasar a estudiar diferentes medidas de eficiencia en las cuales se basará el análisis empírico. Finalmente, en el capítulo IV, se lleva a cabo una aplicación de la teoría desarrollada, basada en una forma funcional específica de las unidades productivas y se trabaja empíricamente con programas de producción de los estados de Coahuila y Morelos; se analiza la eficiencia considerando las tecnologías de producción de maíz asociadas a las comunidades ejidales y a los propietarios privados, en ambos estados.

Agradezco a mis asesores, Rubén Hernández Cid y Leobardo Plata Pérez, por su guía, paciencia y apoyo durante la realización de este trabajo.

CAPITULO I.

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LA PRODUCCION.

En este primer capítulo se presentan algunos conceptos y resultados de la Teoría de la Producción, que sustentan el desarrollo de los siguientes capítulos. En la primera sección se estudia el concepto de tecnología como un conjunto cuyos elementos son las posibilidades técnicas de producción de una unidad productiva, se hacen ciertos supuestos sobre dichos conjuntos para que en las siguientes secciones se estudien los conceptos de función de producción, función de costo y función beneficio. Cada una de éstas funciones se presenta con las propiedades que hereda de los supuestos tecnológicos dados en la primera sección.

I.1 CONJUNTOS DE TECNOLOGIA

La producción en un sentido muy amplio, se ocupa de la transformación de unos bienes en otros; la unidad de decisión que lleva a cabo dicha transformación es la empresa, el productor o la unidad productiva.

Así pues, una empresa es la encargada de producir bienes llamados productos a partir de diversas combinaciones de otros bienes llamados insumos. Debido a que las decisiones sobre los insumos y productos no pueden desde luego tomarse arbitrariamente, resulta conveniente contar con una forma adecuada que resuma las posibilidades de producción de las unidades productivas o mas especificamente, las combinaciones de insumos y productos que le sean factibles.

Considérese que existen m_1 bienes que pueden servir como posibles insumos para producir otros m_2 bienes de forma que $z \in \mathbb{R}^{m_1+m_2}$ representa un determinado programa de producción con la siguiente interpretación: Si su i-ésima componente es negativa entonces el programa z usa z_i unidades del bien i, si la j-ésima componente es positiva entonces el programa z produce z_j unidades del bien j. De esta manera, un programa de producción usa m_1 insumos para producir m_2 bienes; además, en un programa un bien puede aparecer a la vez como insumo y como producto.

Por comodidad se supone:

(i) Que la lista de bienes usables coincide con la de bienes producibles.

(ii) Que las primeras coordenadas de z son no positivas y los restantes no negativas.

El primero de estos supuestos conduce a considerar $m_1 = m_2 = m$, por tanto cualquier programa z es tal que $z \in \mathbb{R}^{2m}$ es decir, se usan $x_1, \ldots, x_m$ cantidades de m insumos para producir $y_1, \ldots, y_m$ cantidades de m productos. El segundo supuesto establece que en las primeras m coordenadas de z aparecen los cantidades de insumos y en las restantes las correspondientes a los productos. Resumiendo se tiene

$$z = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in -\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^m_+$$

donde $\mathbb{R}^m_+$ es el cuadrante no negativo de $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^m_+$ es el vector de insumos y $y \in \mathbb{R}^m_+$ el de productos.

De éstas consideraciones se obtiene que para una empresa sus posibilidades de producción estan completamente determinadas por un subconjunto $T \subset -\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^m_+$, esto es,

$$z = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \text{ si y sólo si } y \text{ es producido a partir de } x.$$

Por tanto, T incluye todos los programas de producción que le son viables o factibles a la empresa. T así definido se denominará <u>conjunto de tecnología</u> o <u>conjunto de producción</u>.

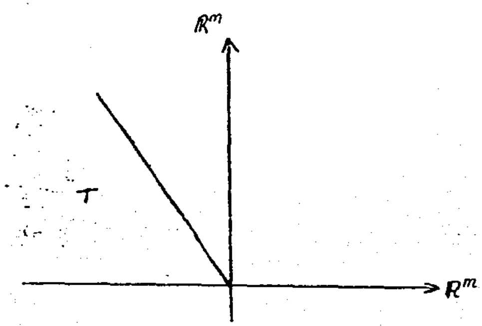


FIG. 1 Conjunto de Tecnología

Existe otra forma equivalente a ésta de caracterizar las posibilidades de producción. Para ello, la noción " y es producible a partir de x " puede quedar definida por una correspondencia : $\varphi : \mathbb{R}^m_+ \xrightarrow{c} \mathbb{R}^m_+$. φ definida como,

$$\varphi(x) = \{ y \mid y \text{ es producible con } x \}$$

es el conjunto de los productos que se pueden obtener a partir de los insumos x.

Por tanto, dada la correspondencia φ se tiene que

$$y \in \varphi(x) \text{ si y sólo si } y \text{ es producible con } x.$$

φ se denomina <u>correspondencia de producción</u>.

Dado el conjunto de tecnología y la correspondencia de producción se tiene la siguiente identificación entre ellos:

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \quad \text{si y sólo si} \quad y \in \varphi(x)$$

Lo importante de los dos enfoques alternativos es que ambos sirven de base para definir la relación: y es producible a partir de x. En lo que resta de este capítulo y en los siguientes se usará el enfoque de conjunto de tecnología ya que bajo éste no se requieren conocimientos especializados de matemáticas como lo es el estudio de las correspondencias.

Ahora considérese la siguiente afirmación:

$$\text{Si } \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \text{ entonces } \begin{pmatrix} -\alpha x \\ \beta y \end{pmatrix} \in T, \quad \alpha, \beta > 0$$

Esto es, si los insumos se expanden un factor α es posible expandir los productos un factor β.

Si la afirmación vale para $\alpha > \beta$, es decir, si los productos se expanden un factor menor que la expansión de los insumos, entonces en T se dan los <u>rendimientos decrecientes a escala</u>. Si la afirmación se satisface para $\alpha < \beta$, esto es, si los productos se expanden más que los insumos, entonces en T valen los <u>rendimientos crecientes a escala</u>. Finalmente, si la afirmacion se cumple para $\alpha = \beta$ entonces en T se dan los <u>rendimientos constantes a escala</u>.

Supuestos sobre el Conjunto de Tecnologia.

Sea $T = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; y \text{ es producible a partir de } x \right\}$.

En todo lo que sigue se considerará que T, el conjunto de tecnología satisface los supuestos que se listan a continuación.

(S1) En T se dan los rendimientos constantes a escala.

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \quad \text{implica} \quad \begin{pmatrix} -\alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \in T \quad , \alpha > 0$$

(S2) T es cerrado bajo la suma.

Si $z^1 = \begin{pmatrix} -x^1 \\ y^1 \end{pmatrix}$, $z^2 = \begin{pmatrix} -x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} \in T$ entonces $z^1 + z^2 \in T$

Por tanto, dados dos programas de producción viables es posible producir $y^1 + y^2$ a partir de $x^1 + x^2$. Sin embargo, ésto no implica que si $\begin{pmatrix} -(x^1 + x^2) \\ y \end{pmatrix} \in T$ entonces $y = y^1 + y^2$, sino solamente que T es cerrado bajo la suma.

(S3) En T hay libre disponibilidad.

Si $z^1 = \begin{pmatrix} -x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} \in T$ y $z^2 = \begin{pmatrix} -x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -x^1 \\ y^1 \end{pmatrix}$ entonces $z^2 \in T$

Este supuesto establece que para cualquier programa de producción en T, son tecnologicamente posibles los programas que usan más insumos y obtienen menos producto. Dicho de otra manera, los excesos de insumos que se obtienen al pasar de un programa a otro pueden ser desechados sin incurrir en costo alguno, de esta manera, tecnologicamente es posible despendiciar sin costo.

(S4) En T no hay producción gratuita.

Si $z = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in T$ entonces $y = 0$

Con este supuesto se evita el hecho contraintuitivo de que a partir de la nada se puede obtener algún producto. Un conjunto de tecnología que no cumpla esta propiedad no es aceptable como descripción de la realidad.

(S5) En T hay producción limitada

El conjunto $\left\{ y \,/\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$ es acotado superiormente para cada $x \in \mathbb{R}^m_+$.

Este supuesto establece que para un vector dado de insumos el producto obtenido a partir de él es limitado.

(S6) T es cerrado. [1]

Lo que postula este supuesto es que si un programa de produccion z esta "cercano" a T en el sentido de que toda vecindad de z contenga puntos de T entonces z esta en T o equivalentemente, z es un punto de acumulacion de T. Economicamente ésto significa que cualquier programa de producción que pueda ser aproximado por programas en el conjunto T, esta en T. Cabe mencionar que éste es un supuesto meramente matemático que por un lado no interfiere en el significado economico del conjunto T y por otro, es de gran utilidad para el desarrollo matemático de la teoría ya que a través de él se hace uso del instrumental del Análisis Matemático.

DEFINICION 1. $z^1 = \begin{pmatrix} -x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} \in T$ es <u>más eficiente</u> que $z^2 = \begin{pmatrix} -x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} \in T$ si $z^2 \leq z^1$.

---

[1] En este capítulo se hace referencia a la topología de $\mathbb{R}^{2m}$ generada a partir de la métrica euclidiana usual.

Esta definición establece que z^1 usa menos de algunos insumos o bien, produce más de algunos productos o ambos casos a la vez.

DEFINICION 2. $z^1 \in T$ es <u>eficiente</u> si no existe $z^2 \in T$ tal que $z^2 \geq z^1$.

Esto es equivalente a escribir: $z^1 \in T$ es eficiente si la aserción $z^2 \geq z^1$ no vale para ningún $z^2 \in T$; de esta forma, no puede obtenerse más de algunos productos con las mismas cantidades de insumos, ni el mismo producto con cantidades menores de insumos.

De esta última definición es claro que T puede tener un número infinito de programas eficientes. En realidad se desearía que un conjunto de tecnología estuviera constituido sólo por programas eficientes, sin embargo bajo el supuesto (S3) es posible producir de manera no eficiente de tal forma que para cualquier $z \in T$ los puntos en $-\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^m_+$ menos eficientes que z también estarán en T. Con base en esto podemos enunciar: En T hay libre disponibilidad si es posible producir en forma no eficiente.

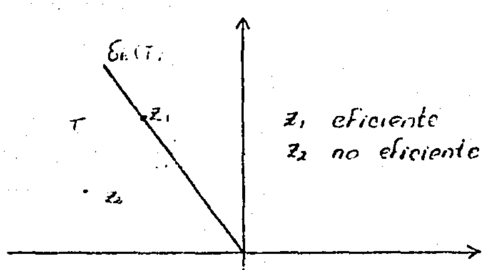


FIG. 2 Programas de Producción Eficiente y no Eficiente

El conjunto de programas eficientes de T constituirá la frontera de eficiencia o frontera de posibilidades de producción, la cual se denotará por $\delta^E(T)$.

Dados los supuestos del conjunto de tecnología se pueden deducir algunas propiedades importantes, como los que se exponen a continuación.

<u>TEOREMA I.</u> Si en T valen los rendimientos constantes a escala y es cerrado bajo la suma entonces T es cono.

<u>Demostración.</u>

Sean $z^1 = \begin{pmatrix} -x^1 \\ y^1 \end{pmatrix}$, $z^2 = \begin{pmatrix} -x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} \in T$

Como en T valen los rendimientos constantes a escala entonces $\alpha z^1 + \beta z^2 \in T$ con $\alpha, \beta \geq 0$; además, por ser T cerrado bajo la suma se tiene que $\alpha z^1 + \beta z^2 \in T$, pero ésto último vale para $\alpha, \beta \geq 0$ en particular para $\alpha = \beta = 0$, con lo cual se obtiene que $0 \in T$. Por lo anterior, $\alpha z^1 + \beta z^2 \in T$ y $0 \in T$ en consecuencia T es cono. ⊠

Con este resultados los supuestos (S1) y (S2) se pueden enunciar en uno sólo: T es cono.

<u>COROLARIO.</u> T es cono convexo

<u>Demostración</u>

Como la demostración del teorema vale para $\alpha, \beta \geq 0$ en particular para $\alpha \in [0,1]$ y $\beta = 1-\alpha$, con lo que se obtiene la convexidad de T. ⊠

De éstos resultados se puede observar que todo cono convexo contiene al origen y en consecuencia $T \neq \emptyset$.

De aquí en adelante se hará referencia a conjuntos de tecnología que satisfacen las siguientes propiedades:

(T1) T es cono.

(T2) Si $z^1 \in T$ y $z^2 \leq z^1$ entonces $z^2 \in T$.

(T3) Si $z = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in T$ entonces $y = 0$.

(T4) En T hay producción limitada.

(T5) T es cerrado.

Cabe mencionar que existen otras formas de especificar al conjunto de tecnología, las cuales son más generales y en consecuencia menos restrictivas en cuanto a los supuestos que se hacen sobre el conjunto de tecnología. Sin embargo éstas especificaciones adolecen de contrastación empírica debido a que se frasean con conceptos matemáticos especializados. La especificación que hemos adoptado permitirá desarrollar un trabajo empírico que se expondrá en el último capítulo.

I.2 FUNCION DE PRODUCCION.

Hasta aquí se ha caracterizado a la tecnología o más especificamente, a las transformaciones de insumos a productos tecnicamente eficientes lo cual proporciona una descripción completa de las posibilidades tecnologicas que la empresa tiene ante sí.

Con base en la caracterización del conjunto de posibilidades de producción es posible definir al conjunto de requerimientos de insumos de la siguiente forma:

$$I(y)=\left\{x\in\mathbb{R}_+^m \Big/ \begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix}\in T\right\}.$$

Este conjunto tiene gran reelevancia desde el punto de vista económico ya que en él se encuentran todas las combinaciones de insumos que permiten producir exactamente y.

Ahora bien, la caracterización de los posibilidades de producción implícitamente esta considerando una función de transformación: la función de producción. Con base en la descripción del conjunto de tecnología y con la idea de que la unidad productiva actua de manera racional se puede definir el concepto de función de producción a partir de conocer el conjunto de posibilidades tecnologicas de la empresa.

DEFINICION 3. La *función de producción* F asociada a la tecnología T es una funcion $F:\mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}_+^m$ tal que

$$F(x)=\max_y\left\{y \Big/ \begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix}\in T\right\}$$

De esta manera dados los insumos x la unidad de producción que actua de manera racional deberá producir lo máximo que su tecnología le permite.

Así pues, si y contiene sólo una componente entonces la función de producción selecciona al máximo el nivel de produccion escalar en función de las cantidades de los insumos; sin embargo, cuando y contiene más de una componente la función de producción seleccionará el máximo vector de producción. Es en este sentido que algunos autores [1] establecen la diferencia entre

---

1/ FUSS [1978]

función de producción y función de transformación, usando el primer término para cuando y es escalar y el segundo para y vector.

Ahora bien, es muy común contar con una idea bastante clara de lo que es el máximo de un conjunto constituido por escalares sin embargo, cuando ese conjunto esta compuesto por vectores esa idea se pierde y por tanto, es indispensable tener una forma que permita determinar ese máximo o más específicamente, la función de transformación; este último tema ha sido poco tratado empiricamente por tanto, en lo subsecuente se considerará que y es un escalar, lo cual nos conduce a trabajar en un marco de producción no conjunta. Para el enfoque de producción conjunta véase Pasinetti [1986].

Con base en todo lo anterior se considerará que F es una función de producción asociada a T si $F: \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que

$$F(x) = \max_y \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$$

Definida de esta forma, es claro que ésta es una función en el sentido matemático ya que sólo se esta maximizando una función lineal: la identidad, en un conjunto que es acotado por la propiedad (T4) y cerrado, dado que T lo es. Así pues, se esta maximizando sobre un conjunto compacto.

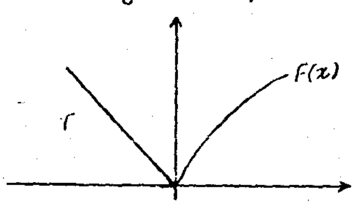


FIG. 3 Función de Producción

<u>TEOREMA 2.</u> Si T satisface de (T1) a (T5) entonces la función de producción f cumple las siguientes propiedades:

(P1) $f(0)=0$

(P2) f es monótona: Si $x^1 \leq x^2$ entonces $f(x^1) \leq f(x^2)$ con $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^m_+$. (Un incremento en los insumos no puede decrementar la producción).

(P3) f es cóncava: $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$ con $\lambda \in [0,1]$ y $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^m_+$.

(P4) f es homogenea de grado uno: $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para $\lambda > 0$ y $x \in \mathbb{R}^m_+$.

(P5) f es continua.

<u>Demostración</u>.

(P1) Dado que en T no hay produccion gratuita, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in T \quad \text{si y solo si} \quad y = 0$$

entonces se tiene que

$$f(0) = \max_y \left\{ y \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in T \right\} = \max_y \{ y \mid y=0 \} = \{0\}$$

por tanto $f(0)=0$.

(P2) Sean $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^m_+$ tales que $-x^1 \geq -x^2$.
Por ser T cerrado $\begin{pmatrix} -x^1 \\ f(x^1) \end{pmatrix} \in T$ y por libre disponibilidad $\begin{pmatrix} -x^2 \\ f(x^1) \end{pmatrix} \in T$ ya que $\begin{pmatrix} -x^2 \\ f(x^1) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -x^1 \\ f(x^1) \end{pmatrix}$; ahora bien, de esto último y de la definición de f se obtiene $\begin{pmatrix} -x^2 \\ f(x^1) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -x^2 \\ f(x^2) \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} -x^2 \\ f(x^2) \end{pmatrix} \in T$, lo cual conduce a $f(x^1) \leq f(x^2)$.

(P3) Sea $\lambda \in [0,1]$ y $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^m_+$. Por ser T cerrado se tiene que $\begin{pmatrix} -x^1 \\ f(x^1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^2 \\ f(x^2) \end{pmatrix} \in T$ y por la convexidad de T se obtiene $\begin{pmatrix} -[\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2] \\ \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \end{pmatrix} \in T$,
de ésto y de la definición de f se concluye que

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$$

esto es, F es una función cóncava.

(P4) Sea $\lambda > 0$ y $z = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ con $x \in \mathbb{R}_+^m$, $y \in \mathbb{R}$

Como T es cono entonces $z \in T$ si y sólo si $\lambda z \in T$, con base en esto se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda F(x) &= \lambda \max \{ y \mid z \in T \} \\ &= \lambda \max \{ y \mid \lambda z \in T \} \\ &= \max \{ \lambda y \mid \lambda z \in T \} \\ &= F(\lambda x) \end{aligned}$$

(P5) La continuidad de la función de producción se sigue de su concavidad. ⊠

Como puede observarse, las propiedades de la función de producción surgen de manera natural a partir de las correspondientes al conjunto de tecnología.

<u>TEOREMA 3.</u> $z = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T$ es eficiente si y sólo si $F(x) = y$.

<u>Demostración</u>.

Para x fija considerese que $z = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T$ es un programa eficiente entonces para toda $y' \in \mathbb{R}$ se tiene que $\begin{pmatrix} -x \\ y' \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Ahora bien, dada la condición anterior la función de producción queda determinada por

$$F(x) = \max \left\{ y' \,\Big|\, \begin{pmatrix} -x \\ y' \end{pmatrix} \in T \right\} = y$$

ya que el máximo de una función lineal en este caso la identidad, se da en la frontera del conjunto cerrado:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \,\Big|\, \begin{pmatrix} -x \\ y' \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora considérese $x \in \mathbb{R}_+^m$ tal que $F(x) = y$ o equivalentemente $y = \max\{y \mid \binom{-x}{y} \in T\}$, por lo tanto no existe y' tal que $\binom{-x}{y'} \in T$ y $\binom{-x}{y'} \geq \binom{-x}{y}$, en consecuencia $\binom{-x}{y} \in T$ es un programa eficiente. $\boxtimes$

TEOREMA 4. Si $z^0 \in T$ es eficiente entonces existe $p \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ tal que para todo $z \in T$, $pz \leq pz^0$.

Demostración.

Sea z^0 un programa eficiente de T y considérese el conjunto $T' = T - \{z^0\}$.

T' es convexo dado que es la diferencia de dos conjuntos convexos. Además $T' \cap (\mathbb{R}_+^{m+1})^0 = \emptyset$ [1] ya que si no lo fuera existiría $z \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ tal que $z \in T'$ o equivalentemente $z^0 + z \in T$ pero $z + z^0 \geq z^0$ lo cual contradice la eficiencia de z^0.

De lo anterior se tiene que T' es convexo y $T' \cap (\mathbb{R}_+^{m+1})^0 = \emptyset$ por tanto aplicando el Teorema de Separación de Minkowski [2] a los conjuntos T' y $\mathbb{R}_+^{m+1}$ se tiene que existe $p \in \mathbb{R}_+^{m+1}$, $p \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$pz' \geq \alpha \quad \text{para} \quad z' \in (\mathbb{R}_+^{m+1})^0$$
$$pz' \leq \alpha \quad \text{para} \quad z' \in T'$$

Ahora se demostrará que $\alpha = 0$.

Primero nótese que $0 \in T'$ ya que $z^0 \in T'$ entonces $\alpha \geq 0$.

Por otro lado, si $\alpha \geq 0$ existe $z' \in (\mathbb{R}_+^{m+1})^0$ de norma suficientemente pequeña y de modo que $pz' < \alpha$ lo cual contradice la definición de hiperplano separador, con ésto se concluye que $\alpha \leq 0$.

Además, obsérvese que si $p \leq 0$ existe un elemento de él digamos p_i, tal que $p_i < 0$; eligiendo la correspondiente componente z_i' de $z' \in (\mathbb{R}_+^{m+1})^0$ suficientemente

[1] $(\mathbb{R}_+^{m+1})^0$ es el interior de $\mathbb{R}_+^{m+1}$ en la topología usual

[2] TAKAYAMA [1974]

grande, de manera que $\rho z' < 0$ se contradice que $\rho z' \geq 0$ para $z' \in (\mathbb{R}^{m+1}_{+})^{o}$; en consecuencia se tiene que $\rho \geq 0$

Con todo lo anterior se ha obtenido que $\alpha = 0$ y $\rho \geq 0$, por tanto $\rho z' \leq 0$ para toda $z' \in T'$ o equivalentemente $\rho(z - z^{o}) \leq 0$, esto es, $\rho z \leq \rho z^{o}$ para todo $z \in T$ y $\rho \geq 0$. ⊠

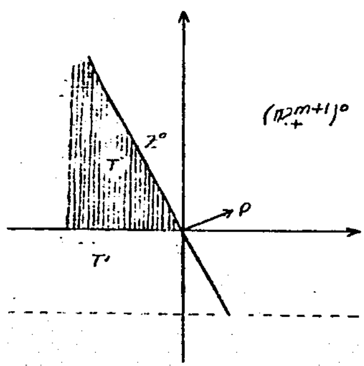


FIG. 4 Separación

El vector ρ definido en el teorema anterior es denominado sistema de precios de eficiencia asociado al programa eficiente z^{o}. Distintos programas eficientes pueden tener diferentes precios de eficiencia; el sistema de precios ρ es áquel al cual el programa eficiente z^{o} maximiza el valor neto de la producción, denotado por $\Pi(\rho)$.

TEOREMA 5. Si existe $\rho \in \mathbb{R}^{m+1}_{+}$, $\rho > 0$ tal que para todo $z \in T$ $\rho z \leq \rho z^{o}$ entonces $z^{o} \in T$ es eficiente.

Demostración.

Supongase que z^o no es eficiente, entonces existe $z \in T$ tal que $z \geq z^o$. Ahora, como $p > 0$ se tiene que $pz > pz^o$, lo cual es una contradicción. ⊠

I.3 FUNCION COSTO.

Lo desarrollado en las secciones anteriores proporciona una forma de describir las posibilidades tecnologicas de la empresa o unidad productiva, ahora se empezará a analizar el comportamiento económico de los mismas, para lo cual se estará considerando que la empresa enfrenta mercados competitivos, es decir, mercados en los cuales los precios tanto de los insumos como de los productos estan dados exogenamente.[1]

Sea $p = (p_1, \ldots, p_m)$ un vector no negativo constituido por los precios de cada insumo x_i que conforma el vector $x = (x_1, \ldots, x_m)'$ constituido por los insumos necesarios para la producción del bien y. Suponiendo que el productor actua de manera racional se puede definir la función costo como sigue.

DEFINICION 4. La función $C(y,p) = \min \left\{ px \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$

es la función costo asociada a la tecnología T.

Observese que ésta definición está considerando implicitamente la selección de una mezcla óptima entre algún $y \in \mathbb{R}$ y los precios de los insumos asumiendo comportamiento racional del productor, esto es, la unidad productiva estará interesada en minimizar el

[1] FUSS [1978].

costos de sus insumos; más específicamente, dicha función da el costo mínimo de producir un nivel de producto y cuando el precio de los insumos es p.

A continuación se justificará la existencia de la función costo, para lo cual se considerará el conjunto de requerimientos de insumos $I(y)$, que ha sido definido con anterioridad.

Dado el conjunto $I(y)=\left\{ x\in \mathbb{R}_+^m \,/\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$, la función costo se puede escribir como $C(y,p)=\min\limits_{x\in I(y)} px$.

Obsérvese que como T es cerrado entonces $I(y)$ también es cerrado. Ahora bien, como $x\geq 0$, $p\geq 0$ entonces la función px esta acotada inferiormente por el cero y además es una función lineal definida en el cerrado $I(y)$, en consecuencia px alcanza el mínimo sobre el conjunto de requerimientos de insumos. Por todo lo anterior, la función costo existe para toda y y para todo vector no negativo p.

Al igual que la función de producción la de costos hereda propiedades de la tecnología, las cuales se resumen en el siguiente resultado.

<u>TEOREMA 6</u>. Si T satisface de (T1) a (T5) entonces la funcion costo $C(y,p)$ cumple las propiedades siguientes:

(C1) $C(y,p)$ es una función real de valores no negativos definida para todo $p\geq 0$ y $y\geq 0$.

(C2) $C(y,p)$ es monótono: (i) En precios.- Si $p^1\leq p^2$ entonces $C(y,p^1)\leq C(y,p^2)$. (ii) En producto.- Si $y_1\leq y_2$ entonces $C(y_1,p)\leq C(y_2,p)$.

(C3) $C(y,p)$ es cóncava: En precios.- para $\lambda \in [0,1]$
$C(y, \lambda p^1 + (1-\lambda)p^2) \geq \lambda C(y,p^1) + (1-\lambda) C(y,p^2)$
(C4) $C(y,p)$ es homogénea de grado uno: (i) En precios.- $C(y,\lambda p) = \lambda C(y,p)$ para $\lambda > 0$. En producto.- para $\lambda > 0$ $C(\lambda y, p) = \lambda C(y,p)$.
(C5) $C(y,p)$ es continua.

Demostración.

(C1) Dado que p y x son vectores no negativos entonces claramente la función costo es no negativa; además, como en T no hay producción gratuita, si $y \neq 0$ entonces el vector de insumos x que puede producir y es distinto de cero. De estas dos consideraciones y dado que $p \geq 0$ se concluye que la función costo es no negativa para toda $y \neq 0$.

(C2) (i) Sea y fijo y $p^1 \leq p^2$, $p^1, p^2 \in \mathbb{R}^m_+$
Para cada $x \in I(y)$, $p^1 x \leq p^2 x$ y por la definición de la función costo se tiene,

$$C(y,p^1) = \min_{x \in I(y)} p^1 x \leq \min_{x \in I(y)} p^2 x = C(y,p^2)$$

(ii) Sea $p \in \mathbb{R}^m_+$ fijo y $y^1, y^2 \in \mathbb{R}$ tales que $y^1 \leq y^2$. Ahora bien, para $i=1,2$ denótese por

$$I(y_i) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m_+ \;\middle|\; \begin{pmatrix} -x \\ y_i \end{pmatrix} \in T \right\}$$

Como $y_1 \leq y_2$ y en T hay libre disponibilidad, entonces si $\begin{pmatrix} -x \\ y_2 \end{pmatrix} \in T$ implica $\begin{pmatrix} -x \\ y_1 \end{pmatrix} \in T$, con lo que se obtiene $I(y_2) \subset I(y_1)$. Además por ser $p x$ una función lineal de x entonces

$$C(y_2, p) = \min_{x \in I(y_2)} p x \geq \min_{x \in I(y_1)} p x = C(y_1, p)$$

(C3) Para probar que $C(y,p)$ es cóncava considérese $p^1, p^2 \in \mathbb{R}^m_+$ tales que $p^1 x^1$ y $p^2 x^2$ son dos combinaciones de insumos y precios que minimizan el costo. Además, sea $p = \lambda p^1 + (1-\lambda)p^2$ con $0 \leq \lambda \leq 1$ y x tal que $p x$ tambien minimiza el costo. Entonces,

$$C(y,p) = px = (\lambda p^1 + (1-\lambda)p^2)x = \lambda p^1 x + (1-\lambda)p^2 x,$$

pero como x no necesariamente es el vector de insumos que minimiza el costo para producir y a los precios p^1 o p^2, se tiene que $p^1 x \geq C(y,p^1)$ y $p^2 x \geq C(y,p^2)$, en consecuencia

$$C(y,p) \geq \lambda C(y,p^1) + (1-\lambda)C(y,p^2)$$

que es lo que se quería probar.

(C4) (i) Esta propiedad es evidente ya que si el costo mínimo se alcanza en px y el vector de precios es multiplicado por un escalar entonces la composición del mínimo no se altera y en consecuencia los costos deben aumentar según el factor λ. Mas especificamente,

$$\begin{aligned} C(y,\lambda p) &= \min\left\{ \lambda px \;\middle|\; \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\} \\ &= \lambda \min\left\{ px \;\middle|\; \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\} \\ &= \lambda C(y,p) \end{aligned}$$

(ii) Para probar la homogeneidad en producto se utilizara el hecho de que el conjunto de tecnología es un cono. Así,

$$\begin{aligned} \lambda C(y,p) &= \lambda \min\left\{ px \;\middle|\; \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\} \\ &= \min\left\{ \lambda px \;\middle|\; \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\} \\ &= \min\left\{ p(\lambda x) \;\middle|\; \begin{pmatrix} -\lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \in T \right\} \\ &= C(\lambda y, p) \end{aligned}$$

(C4) Finalmente la continuidad de la función costos se sigue de su concavidad. ⊠

Así pues, se ha definido otra función a partir de la tecnología a la que se le ha denominado función costo, la cual cumple ciertas propiedades facilmente deducibles a partir de los supuestos del conjunto de tecnología.

Cabe mencionar que la diferenciabilidad de la funcion costo respecto de los precios es inmediata en virtud de la definición de dicha función; concretamente,

$$C_n(y,p) = \frac{\partial C(y,p)}{\partial p_n} = x_n^0$$

donde x_n^0 es la n-ésima componente del vector de insumos $x^0 \in \mathbb{R}_+^m$ tal que $px^0 = \min_{x \in I(y)} px$.

I.4 FUNCION BENEFICIO

En la sección anterior se han analizado las implicaciones de la minimización del costo de los insumos con un nivel de producto fijo o más especificamente, se ha estudiado que cuando la unidad productiva actua de manera racional puede optimizar sus costos de producción. En esta sección se analizarán bajo el supuesto de comportamiento racional del productor, las implicaciones de la maximización del valor neto de la produccion, lo cual da lugar a la función beneficio.

Se considerará que los precios tanto de los insumos como del producto estan dados exogenamente. Así, $p \geq 0$ $p \in \mathbb{R}^m$ será el vector de precios asociado a los insumos y $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 0$ será el precio del producto.

DEFINICION 5. La maximización del valor neto de la producción para toda $p \in \mathbb{R}_+^m$ y $q \in \mathbb{R}^m$ es una función $\Pi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Pi(q,p) = \max \left\{ qy - px \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$$

$\Pi(q,p)$ es denominada la *función de beneficio* asociada a la tecnología T.

Ahora bien, si se considera $r = (p, q) \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ y $z = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ entonces la definición de la función beneficio se puede escribir como $\pi(r) = \max\{rz \mid z \in T\}$.

Otra forma alternativa de expresar la funcion beneficio es la siguiente:

$$\pi(q,p) = \max\left\{ qy - px \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$$

$$= \max\left\{ qy \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\} + \max\left\{ -px \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$$

$$\overset{1)}{=} q \max\left\{ y \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\} - \min\left\{ px \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$$

En el primer término se tiene la función de producción y el segundo es la de costos, ambas asociados al conjunto de tecnología T. Por lo que finalmente se puede escribir,

$$\pi(q,p) = qf(x) - C(y,p)$$

Con todo lo anterior, se ha logrado expresar la función de beneficio en términos de la función de producción y de la de costos, de aquí que resulte evidente que sea una función en el sentido matemático ya que las funciones de las que depende así lo son.

Se ha demostrado que la función de producción y la de costos heredan ciertas propiedades del conjunto de tecnología, ahora se verán las propiedades que la función de beneficio hereda del conjunto T. Dichas propiedades se pueden derivar directamente de las correspondientes a la tecnología o bien, a través de las correspondientes a las funciones de las cuales de-

---

1) Sobre cualquier región $\max g(x) = -\min -g(x)$.

pende la función beneficio

Propiedades de la
Tecnología: T

Propiedades de la
- Función Producción: $f(x)$
- Función Costo: $C(y, p)$

Propiedades de la
Función Beneficio: $\Pi(q, p)$

<u>TEOREMA 7.</u> Si T satisface de (T1) a (T5) entonces $\Pi(r)$ cumple las siguientes propiedades:

(B1) $\Pi(r)$ es una función no negativa de valores reales definida para $r \geq 0$.

(B2) $\Pi(r)$ es monótona: Sean $r^1 = (p^1, q_1)$, $r^2 = (p^2, q_2)$ Si $p^1 \leq p^2$ y $q_1 \geq q_2$ entonces $\Pi(r^1) \geq \Pi(r^2)$.

(B3) $\Pi(r)$ es convexa: $\Pi(\lambda r^1 + (1-\lambda) r^2) \leq \lambda \Pi(r^1) + (1-\lambda)\Pi(r^2)$ para $\lambda \in [0,1]$.

(B4) $\Pi(r)$ es homogénea de grado uno: $\Pi(\lambda r) = \lambda \Pi(r)$ para $\lambda > 0$.

(B5) $\Pi(r)$ es continua.

<u>Demostración</u>.

(B1) Supongase que $\Pi(r) < 0$, esto es

$$\Pi(r) = \max \left\{ qy - px \;\middle|\; \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\} = qy - px < 0$$

con $q \geq 0$ y $p \geq 0$. Dado que T es cono $0 \in T$, es decir existe un programa de producción en T que proporciona mayor beneficio que el programa $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$,

por tanto el máximo no se logra en este último programa; en consecuencia $\Pi(r) \geq 0$.

(B2) Sea z un programa de producción fijo. Se ha demostrado que la función costos es monótona en precios, es decir, si $p^1 \leq p^2$ entonces $C(y, p^1) \leq C(y, p^2)$ o equivalentemente $-C(y,p^1) \geq -C(y,p^2)$. Por tanto, considerando este hecho, que $q_1 \geq q_2$ y que la función beneficio se puede expresar en términos de la de costos y de la producción se obtiene lo siguiente,

$$\Pi(q_1, p^1) = q_1 f(x) - C(y, p^1) \geq q_2 f(x) - C(y, p^2) = \Pi(q_2, p^2)$$

de forma que $\Pi(r^1) \geq \Pi(r^2)$.

(B3) Considerense $r^1 = \begin{pmatrix} p^1 \\ q_1 \end{pmatrix}$, $r^2 = \begin{pmatrix} p^2 \\ q_2 \end{pmatrix}$ y $r = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

tales que $r = \lambda r^1 + (1-\lambda) r^2$. Así,

$$\Pi(r) = q f(x) - p C(y, p)$$
$$= [\lambda q_1 + (1-\lambda) q_2] f(x) - [\lambda p^1 + (1-\lambda) p^2] C(y, \lambda p^1 + (1-\lambda) p^2)$$

Dado que $C(y,p)$ es una función cóncava entonces $-C(y,p)$ es convexa, es decir,

$$-C(y, p) \leq -\lambda C(y, p^1) - (1-\lambda) C(y, p^2)$$

de esta forma

$$\Pi(r) \leq \lambda q_1 f(x) + (1-\lambda) q_2 f(x) - \lambda C(y, p^1) - (1-\lambda) C(y, p^2)$$

Agrupando términos en el lado derecho, se obtiene

$$\Pi(r) \leq \lambda \Pi(r^1) + (1-\lambda) \Pi(r^2)$$

que es lo que se quería demostrar.

(B4) Se ha probado que la función costo es homogénea de grado uno en precios, utilizando este resultado es evidente la homogeneidad de la función de beneficio ya que si $r = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ se tiene,

$$\Pi(\lambda r) = \lambda q f(x) - C(y, \lambda p) = \lambda q f(x) - C(y, \lambda p)$$
$$= \lambda q f(x) - \lambda C(y, p) = \lambda [q f(x) - C(y, p)]$$

pero lo que está entre corchetes no es mas que $\Pi(r)$ por tanto $\Pi(\lambda r) = \lambda \Pi(r)$.

(B5) La continuidad de $\Pi(r)$ se sigue de la continuidad de la función costo y de la de producción. ⊠

<u>COROLARIO</u>.. Si $r > 0$ entonces el programa que determina la función de beneficio es eficiente.

Demostración.
La prueba de este resultado se sigue directamente del Teorema 5, el cual se puede refrasear como sigue:
Si existe $r = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} > 0$ tal que el valor neto $qy - px$ es máximo en T entonces $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T$ es eficiente. $\boxtimes$

CAPITULO II

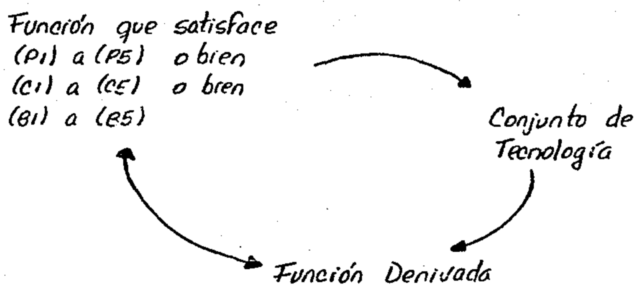
DUALIDAD EN LA TEORIA DE LA PRODUCCION.

Hasta este punto se ha establecido la existencia de ciertas funciones que toman gran reelevancia en el análisis empírico de la Teoría de la Producción. Para cada una de ellas se han derivado propiedades que surgen de manera natural del conjunto de tecnología o más específicamente, de los supuestos que se establecieron sobre dicho conjunto.

Ahora resulta conveniente preguntarse hasta que punto se puede obtener información sobre la tecnología a partir de una función que cumpla las propiedades de la función de produccion o bien, de la de costos o bien de la de beneficio, esto es, dada una función que cumpla cualesquiera de esas propiedades, ¿es posible deducir la tecnología consistente con ella? En la primera sección de este capítulo se verá que la dualidad entre el conjunto de tecnología y cada una de las funciones que se han venido estudiando, proporciona una respuesta afirmativa a la interrogante arriba establecida. Una vez determinado el conjunto de tecnología consistente con alguna función, a él le quedará asociada una función derivada [1] con las propiedades ya establecidas, en este punto resultará conveniente establecer alguna relación entre ésta última y la función de la cual se derivo el conjunto de tecnología.

---

[1] Se usará este término para hacer referencia a cualquiera de las funciones que se han venido estudiando.



Finalmente en la segunda sección de este capítulo se presentan resultados de dualidad entre parejas de funciones derivadas, lo cual se basa en el hecho de poder expresar una función derivada en terminos de cualquier otra.

II.1 DUALIDAD ENTRE TECNOLOGIA Y FUNCION DERIVADA.

Considérese una función que cumpla las propiedades de alguna función derivada, interesa generar un conjunto T^* tal que la función bajo estudio sea la que maximice la produccion o bien, minimice el costo o bien, maximice el beneficio, según sea el caso.

Sean $f(x)$, $C(y,p)$ y $\Pi(q,p)$ funciones que satisfacen las correspondientes propiedades de la función de produccion, costo y beneficio respectivamente, es evidente que los candidatos a una tecnología compatible con cada una de esas funciones son los puntos que conforman los siguientes conjuntos:

$$T_f^* = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; f(x) \geq y \right\}$$

$$T_C^* = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{m+1} \;\middle|\; C(y,p) \leq px \text{ para } p \in \mathbb{R}_+^m \right\}$$

$$T_\pi^* = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{m+1} \;\middle|\; \pi(q,p) \geq qy - px \text{ para } q \in \mathbb{R}_+,\ p \in \mathbb{R}_+^m \right\}$$

en donde los subíndices se refieren a las propiedades asociadas a la función derivada involucrada en cada conjunto.

Dado lo anterior es conveniente determinar si en realidad cada uno de los conjuntos propuestos es de tecnología, para lo cual hay que probar que satisfacen los supuestos (T1) a (T5) a partir de las propiedades específicas de la función derivada especificada en cada conjunto.

<u>TEOREMA 8.</u> Si $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que

(i) $f(0) = 0$.

(ii) Si $x^1 \leq x^2$ entonces $f(x^1) \leq f(x^2)$.

(iii) $f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2) \geq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$ para $\lambda \in [0,1]$.

(iv) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para $\lambda > 0$.

(v) f es continua.

y $T_f^* = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{m+1} \;\middle|\; f(x) \geq y \right\}$ entonces T_f^* es un conjunto de tecnología.

<u>Demostración</u>.

(T1) Se tiene que demostrar que T_f^* es cono, esto es, si $z^1, z^2 \in T_f^*$ entonces para toda $\alpha \geq 0$, $\alpha z^1 \in T_f^*$ y $z^1 + z^2 \in T_f^*$.

Como $z^1 \in T_f^*$ entonces $f(x^1) \geq y^1$ o equivalentemente $\alpha f(x^1) \geq \alpha y^1$, pero como f es homogénea se tiene que $f(\alpha x^1) = \alpha f(x^1)$, en consecuencia $f(\alpha x^1) \geq \alpha y^1$ y por tanto $\alpha z^1 \in T_f^*$.

Ahora veamos que la suma esta en T_f^*, como $z^1, z^2 \in T_f^*$ entonces $f(x^1) \geq y^1$ y $f(x^2) \geq y^2$ o bien, $\frac{1}{2} f(x^1) \geq \frac{1}{2} y_1$ y $\frac{1}{2} f(x^2) \geq \frac{1}{2} y_2$, sumando estas dos últimas expresiones y usando el hecho de que f es cóncava se obtiene, $f(\frac{1}{2}x^1+\frac{1}{2}x^2) \geq \frac{1}{2}f(x^1)+\frac{1}{2}f(x^2) \geq \frac{1}{2}y^1+\frac{1}{2}y^2$, pero $f(\frac{1}{2}x^1+\frac{1}{2}x^2)=\frac{1}{2}f(x^1+x^2)$ por ser f homogénea. Por tanto $\frac{1}{2}f(x^1+x^2) \geq \frac{1}{2}y^1+\frac{1}{2}y^2$, consecuentemente $z^1+z^2 \in T_f^*$.

(T2) Sea $z^1 = \begin{pmatrix} -x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} \in T_f^*$ y $z^2 \leq z^1$, hay que probar que $z^2 \in T_f^*$.

$z^1 \in T_f^*$ implica que $f(x^1) \geq y_1$, pero $\begin{pmatrix} -x^2 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -x^1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ nos conduce a $x^2 \geq x^1$ y $y_2 \leq y_1$ entonces por ser f monótona $f(x^2) \geq f(x^1)$ y por hipótesis $f(x^1) \geq y_1$ en consecuencia $f(x^2) \geq f(x^1) \geq y_1 \geq y_2$, o equivalentemente $f(x^2) \geq y^2$ por tanto $z^2 \in T_f^*$.

(T3) Considérese $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in T_f^*$ entonces $f(0) \geq y$, pero por hipótesis $f(0)=0$ lo cual implica $y \leq 0$, pero se ha supuesto que y es no negativa por tanto $y=0$.

(T4) Se tiene que demostrar que el conjunto

$$V(x) = \left\{ y \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T_f^* \right\}$$

es acotado para toda x.

Por definición de T_f^* se tiene que $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T_f^*$ si y sólo si $f(x) \geq y$, con lo cual $V(x)$ se puede expresar como $V(x) = \{ y \mid f(x) \geq y \}$ y de aquí resulta evidente que $f(x)$ es una cota para ese conjunto.

(T5) Hay que probar que T_f^* es cerrado.

Considérese la sucesión $\left\{ \begin{pmatrix} -x^k \\ y^k \end{pmatrix} \right\} \in T_f^*$ que converge a $\begin{pmatrix} -x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}$, esto es, $\lim x^k = x^0$ y $\lim y^k = y^0$. Así, se tiene que como cada elemento de la sucesión esto en T_F^*, $f(x^k) \geq y^k$ para toda k tomando límite en ambos lados de esta expresion y usando el hecho de que f es continua se puede escribir,

$$f(x^\circ) = f(\lim x^k) = \lim f(x^k) \geq \lim y^k = y^\circ$$

por tanto $f(x^\circ) \geq y^\circ$, es decir, $\begin{pmatrix} -x^\circ \\ y^\circ \end{pmatrix} \in T_F^*$ en consecuencia T_F^* es cerrado. $\boxtimes$

Con el teorema anterior se ha logrado demostrar que T_F^* es una tecnología y como tal, le queda asociada una función de costo, de beneficio y en particular, una de producción definida como,

$$f^*(x) = \max\left\{ y \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T_F^* \right\}$$

Ahora interesa saber la relación existente entre esta función y la que dio lugar a la tecnología T_F^*.

<u>TEOREMA 9</u>. Sea f una función que satisface las propiedades (i) a (v) del teorema anterior y sea f^* definida arriba, entonces $f^*(x) = f(x)$.

<u>Demostración</u>.

Recordemos que por definición $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T_F^*$ si y sólo si $f(x) \geq y$. Así,

$$f^*(x) = \max\left\{ y \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$$

$$= \max\{ y \mid f(x) \geq y \}$$

y este máximo se da en $f(x)$, por tanto se tiene $f^*(x) = f(x)$. $\boxtimes$

Se ha logrado establecer que cualquier función que cumpla de (i) a (v) tiene asociada una tecnología T_F^* y a su vez a ésta le corresponde una función de producción que coincide con la función que genero a T_F^*.

La idea desarrollada para la función $f(x)$ y el conjunto de tecnología T_f^* prevalece en el resto de la sección, en donde se procederá de la misma manera, pero ahora con las funciones $C(y,p)$, $\pi(q,p)$ y con sus correspondientes conjuntos T_c^*, T_π^*.

<u>TEOREMA 10.</u> Si $C: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface

(i) Para todo $p \in \mathbb{R}_+^m$, $y \in \mathbb{R}_+$, $C(y,p) \geq 0$.

(ii) Si $p^1 \leq p^2$ entonces $C(y,p^1) \leq C(y,p^2)$; $p^1, p^2 \in \mathbb{R}_+^m$.

(iii) $C(y, \lambda p^1 + (1-\lambda)p^2) \geq \lambda C(y,p^1) + (1-\lambda)C(y,p^2)$ para $\lambda \in [0,1]$.

(iv) $C(y, \lambda p) = \lambda C(y,p)$, $C(\lambda y, p) = \lambda C(y,p)$ para $\lambda > 0$.

(v) $C(y,p)$ es continua.

y $T_c^* = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{m+1} \;\middle|\; C(y,p) \leq px \text{ para } p \in \mathbb{R}_+^m \right\}$ entonces T_c^* es un conjunto de tecnología.

<u>Demostración</u>.

(T1) Sean $z^i = \begin{pmatrix} -x^i \\ y_i \end{pmatrix} \in T_c^*$, $i = 1,2$. Primeramente se probará que $\alpha z^1 \in T_c^*$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $z^1 \in T_c^*$ entonces $C(y_1, p) \leq px^1$ de modo que $\alpha C(y_1, p) \leq \alpha p x^1$, por ser C homogénea en y se tiene $C(\alpha y_1, p) \leq p(\alpha x^1)$ lo cual implica que $\alpha z^1 \in T_c^*$.

Resta demostrar que $z^1 + z^2 \in T_c^*$ para concluir que el conjunto es cono. Como cada $z^i \in T_c^*$ se tiene que $C(y_1, p) \leq px^1$ y $C(y^2, x) \leq px^2$, ahora considérese que $y = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$ en particular se cumple que $y \leq \lambda y_1$ y $y \leq (1-\lambda)y_2$ con lo cual se tiene que

$$C(y_1, p) \leq C(\lambda y_1, p) = \lambda (C(y_1, p)$$
$$C(y, p) \leq C((1-\lambda) y_2, p) = (1-\lambda) C(y_1, p)$$

usando además la propiedad (ii) y la homogeneidad de C. Sumando las dos últimas desigualdades se tiene

$$2C(y,p) \leq \lambda C(y_1, p) + (1-\lambda) C(y_2, p) \leq \lambda p x^1 + (1-\lambda) p x^2$$

la ultima desigualdad se da ya que $z^1, z^2 \in T_f^*$. De esto último se obtiene

$$C(\lambda y^1+(1-\lambda)y^2) \leq \tfrac{1}{2}\,p(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2) \leq p(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)$$

Lo desarrollado hasta aquí vale para toda $\lambda>0$, en particular para $\lambda=\frac{1}{2}$, de forma que

$$C(\tfrac{1}{2}(y^1+y^2),p) \leq \tfrac{1}{2}\,p(x^1+x^2)$$

o equivalentemente $C(y^1+y^2,p) \leq p(x^1+x^2)$, es decir, $z^1+z^2 \in T_c^*$.

(T2) Sea $z^1 \in T_c^*$ y $z^2 \leq z^1$, con ésto se tiene por un lado que $C(y_1,p) \leq px^1$ y además $x^2 \geq x^1$, $y^2 \leq y^1$, de modo que $px^1 \leq px^2$ y $C(y^2,p) \leq C(y^1,p)$ por la propiedad (ii) de C. De ésto se obtiene

$$C(y^2,p) \leq C(y^1,p) \leq px^1 \leq px^2$$

por tanto $z^2 \in T_c^*$.

(T3) Sea $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in T_c^*$ entonces $C(y,p) \leq p\cdot 0 = 0$, pero por hipótesis $C(y,p) \geq 0$ en consecuencia $C(y,p)=0$ y $y=0$

(T4) Considérese el conjunto

$$V(x) = \left\{ y \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T_c^* \right\} = \{ y \mid C(y,p) \leq px \text{ para } p \geq 0 \}$$

la segunda igualdad se da por la definición de T_c^*. / Obviamente $C(y,p)$ es una cota para ese conjunto por tanto $V(x)$ es acotado.

(T5) Sea $\left\{ \begin{pmatrix} -x^k \\ y^k \end{pmatrix} \right\} \in T_c^*$ tal que $\lim x^k = x^0$ y $\lim y^k = y^0$. Hay que probar que $\begin{pmatrix} -x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} \in T_c^*$.

Ahora, como cada elemento de la sucesión esta en T_c^* entonces $C(y^k,p) \leq px^k$ para toda $k \neq 0$, de modo que $\lim C(y^k,p) \leq \lim px^k$, pero como C es continua se puede escribir $C(\lim y^k,p) \leq p \lim x^k$ o equivalentemente $C(y^0,p) \leq px^0$ de donde se concluye que $\begin{pmatrix} -x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} \in T_c^*$ y por tanto T_c^* es cerrado.

De todo lo anterior T_c^* satisface de (T1) a (T5) y por tanto T_c^* es una tecnología. ∎

TEOREMA 11. Si $C^*(y,p) = \min\left\{ px \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T_C^* \right\}$ y C es una función que satisface de (i) a (v) del teorema anterior entonces $C^*(y,p) = C(y,p)$.

Demostración.

Dada la definición de T_C^*, la función $C^*(y,p)$ se puede escribir como $C^*(y,p) = \min\{px \mid C(y,p) \le px\}$ y este mínimo no es más que $C(y,p)$ por tanto se tiene la igualdad entre C^* y C. ⊠

TEOREMA 12. Si $F: \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $C: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones que satisfacen de (i) a (v) de los teoremas 8 y 10, respectivamente. y

$$T_\pi^* = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{m+1} \,\middle|\, qF(x) - C(y,p) \ge qy - px \text{ si } q \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}_+^m \right\}$$

entonces T_π^* es un conjunto de tecnología.

Demostración.

(T1) Sean $z^i = \begin{pmatrix} -x^i \\ y_i \end{pmatrix} \in T_\pi^*$ para $i = 1, 2$. Dado ésto se tiene que $qF(x^i) - C(y_i, p) \ge qy_i - px^i$ o equivalentemente $\alpha qF(x^i) - \alpha C(y_i, p) \ge \alpha(qy_i - px^i)$, pero como F y C son homogéneas se puede escribir

$$qF(\alpha x^i) - C(\alpha y_i, p) \ge q(\alpha y_i) - p(\alpha x^i)$$

es decir $\alpha z^i \in T_\pi^*$.

Como $z^i \in T_\pi^*$ para $i = 1, 2$ entonces

$$qF(x^i) - C(y_i, p) \ge qy_i - px^i$$

sumando sobre i y multiplicando el resultado por $1/2$ se obtiene,

$$q\left[\tfrac{1}{2}F(x^1) + \tfrac{1}{2}F(x^2)\right] - \tfrac{1}{2}\left[C(y_1,p) + C(y_2,p)\right]$$

$$\ge \tfrac{1}{2}\left[q(y_1 + y_2) - p(x^1 + x^2)\right]$$

Dado que F es cóncava $\frac{1}{2}F(x^1) + \frac{1}{2}F(x^2) \le F\left(\frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2\right)$ y por ser F homogénea $F\left(\frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}F(x^1 + x^2)$, de esta forma $\frac{1}{2}f(x^1)+\frac{1}{2}f(x^2)\leq\frac{1}{2}f(x^1+x^2)$.

Por otro lado, C es convexa y en consecuencia $-C$ es cóncava por lo cual se cumple que

$$-\frac{1}{2}\left[C(y_1,p)+C(y_2,p)\right]\leq-\frac{1}{2}C(y_1+y_2,p)$$

además aquí también se usa la homogeneidad de C.
Sumando las dos últimas desigualdades,

$$\frac{1}{2}\left[f(x^1+x^2)-C(y_1+y_2,p)\right]\geq\frac{1}{2}\left[f(x^1)+f(x^2)-C(y_1,p)-C(y_2,p)\right]$$

Finalmente,

$$\frac{1}{2}\left[f(x^1+x^2)-C(y_1+y_2,p)\right]\geq\frac{1}{2}\left[q(y_1+y_2)-p(x^1+x^2)\right]$$

y en consecuencia $z^1+z^2\in T_\pi^*$.
Como $\lambda z\in T_\pi^*$ y $z^1+z^2\in T_\pi^*$ entonces T_π^* es cono
(T2) Considerese $z^i=\begin{pmatrix}-x^i\\ y_i\end{pmatrix}$, $i=1,2$ tales que

$z^1\in T_\pi^*$ y $z^2\leq z^1$, esto último implica $-x^2\leq -x^1$ y $y_2\leq y_1$ como $p,q>0$ se tiene $-px^2\leq -px^1$ y $qy_2\leq qy_1$, de esto se concluye $qy_1-px^1\geq qy_2-px^2$.
Además se cumple que $qf(x^1)-C(y_1,p)\geq qy_1-px^1$ ya que $z^1\in T_\pi^*$, de esta manera $qf(x^1)-C(y_1,p)\geq qy_2-px^2$.
Por otro lado como $x^2\geq x^1$ y f es monótona entonces $qf(x^2)\geq qf(x^1)$ y además $y_2\leq y_1$ implica que $-C(y_2,p)\geq -C(y_1,p)$ ya que C también es monótona; sumando estas dos últimas desigualdades se obtiene $qf(x^2)-C(y_2,p)\geq qf(x^1)-C(y_1,p)$.
De todo lo anterior $qf(x^2)-C(y^2,p)\geq qy_2-px^2$ y por tanto $z^2\in T_\pi^*$.
(T3). Sea $\begin{pmatrix}0\\ y\end{pmatrix}\in T_\pi^*$ entonces $-C(y,p)\geq qy$ ya

que $f(0)=0$, pero $q\geq 0$ y $y\geq 0$ implican $qy\geq 0$ esto es $-C(y,p)\geq 0$ pero además por hipótesis $C(y,p)\geq 0$ entonces $C(y,p)=0$ y en consecuencia $y=0$.
(T5) Sea $\left\{\begin{pmatrix}-x^k\\ y_k\end{pmatrix}\right\}\in T_\pi^*$ tales que $\lim x^k=x^0$ y

$\lim y^k = y^o$ para toda k. Como cada elemento de la sucesión esta en T_π^* se satisface que $qf(x^k) - C(y^k, p) \geq qy^k - px^k$ y tomando límite se tiene $q\lim f(x^k) - \lim C(y^k, p) \geq q\lim y^k - p\lim x^k$. Dada la continuidad de f y C se tiene

$$q f(\lim x^k) - C(\lim y^k, p) \geq q\lim y^k - p\lim x^k$$

ésto es, $qf(x^o) - C(y^o, p) \geq qy^o - px^o$, con lo cual se tiene que $\begin{pmatrix} -x^o \\ y^o \end{pmatrix} \in T_\pi^*$ y por tanto T_π^* es cerrado.

(T4) Sea $V(x) = \left\{ y \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T_\pi^* \right\} = \left\{ y \,\middle|\, qf(x) - C(y,p) \geq qy - px \right\}$

Obviamente $qf(x) - C(y, p)$ es una cota de este conjunto. $\boxtimes$

Debe observarse que la definición de T_π^* presupone una función $\pi(q, p) = qf(x) - C(y, p)$ que cumple las propiedades de la función beneficio, lo cual implícitamente esta suponiendo la existencia de una función f y una C tales que satisfacen las propiedades de la función de producción y las de costo, respectivamente. Con el último teorema se ha logrado establecer que T_π^* es una tecnología y cómo tal, le quedan asociadas una función de producción, una de costos y una de beneficios, al igual que a T_f^* y a T_c^*. En particular interesa probar que la función de beneficio $\pi^*(q, p)$, asociada a T_π^* coincide con la que dio lugar a la definición de este conjunto.

<u>TEOREMA 13</u>. Si $\pi^*(q, p) = \max\left\{ qy - px \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T_\pi^* \right\}$

y $\pi(q,p) = qf(x) - C(y,p)$ con f y C que satisfacen de (i) a (v) del teorema 8 y del 10 respectivamente entonces $\pi^*(q, p) = \pi(q, p)$.

Demostración.

$$\pi^*(q,p) = \max\left\{ qy - px \,\Big|\, \binom{-x}{y} \in T_\pi^* \right\}$$
$$= \max\{ qy - px \mid qf(x) - C(y,p) \geq qy - px \}$$
$$= qf(x) - C(y,p)$$

y esto último no es mas que $\pi(q,p)$ ⌧

II.2 DUALIDAD ENTRE PAREJAS DE FUNCIONES.

Entre uno de los puntos que se han estudiado hasta aquí esta el haber definido las funciones derivadas a partir de una tecnología T^*; ahora, se esta en condiciones de exponer formas alternativas para expresar cada una de esas funciones en términos de cualquier otra bajo el supuesto de que corresponden a una misma tecnología. Este tipo de relación nos da la dualidad entre pares de funciones.

Así pues, considérese que al conjunto de tecnología T se le ha asociado una función de producción $f(x)$, una de costos $C(y,p)$ y una de beneficio $\pi(q,p)$. A continuación se presenta la dualidad entre costo y producción.

TEOREMA 14. Si $C^0(y,p) = \min\{ px \mid f(x) \geq y \}$ entonces $C(y,p) = C^0(y,p)$

Demostración.

$$C^0(y,p) = \min\{ px \mid f(x) \geq y \}$$
$$= \min\left\{ px \,\Big|\, \binom{-x}{y} \in T \right\}$$
$$= C(y,p)$$

⌧

COROLARIO $\therefore$ $C(y,p) = \min\{px \mid f(x) \geq y\}$

TEOREMA 15. Si $f^{o}(x) = \max\{y \mid C(y,p) \leq px \text{ si } p \in \mathbb{R}_+^m\}$ entonces $f(x) = f^{o}(x)$

Demostración

La prueba de este teorema es directa dada la definición de $f(x)$. ⊠

COROLARIO $\therefore$ $f(x) = \max\{y \mid C(y,p) \leq px \text{ si } p \in \mathbb{R}_+^m\}$

De manera análoga a estos resultados se obtienen otros que expresan la dualidad entre la función producción y la de beneficio, y entre la de costo y la de beneficio.

TEOREMA 16. Si $\pi^{o}(q,p) = \max\{qy - px \mid f(x) \geq y\}$ entonces $\pi(q,p) = \pi^{o}(q,p)$

TEOREMA 17. Si $f^{o}(x) = \max\{y \mid \pi(q,p) \geq qy - px \text{ si } q \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}_+^m\}$ entonces $f(x) = f^{o}(x)$

TEOREMA 18. Si $C^{o}(y,p) = \min\{px \mid \pi(q,p) \geq qy - px \text{ si } q \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}_+^m\}$ entonces $C(y,p) = C^{o}(y,p)$

TEOREMA 19. Si $\pi^{o}(q,p) = \max\{qy - px \mid C(y,p) \leq px,\ q \in \mathbb{R}_+,\ p \in \mathbb{R}_+^m\}$ entonces $\pi(q,p) = \pi^{o}(q,p)$.

Las demostraciones de cada uno de éstos teoremas resultan evidentes.

CAPITULO III.

MEDIDAS DE EFICIENCIA.

Este capítulo tiene como objetivo principal presentar una forma específica para medir la eficiencia de las unidades productivas o empresas. En la literatura existen diferentes enfoques en el estudio de la eficiencia y más específicamente en los métodos utilizados para medirla dichos procedimientos presentan problemas conceptuales y de aplicacion, es por ésto que algunas veces conducen a interpretaciones ambiguas como se podrá percibir en el desarrollo del capítulo.

La eficiencia puede ser estudiada desde dos puntos de vista: dentro de una unidad productiva, lo cual conduce al análisis de programas eficientes de una tecnología, el otro enfoque consiste en analizar la eficiencia entre unidades productivas lo cual implica comparaciones entre dos conjuntos de tecnología. Aquí se presentan algunas técnicas de la literatura para el primer enfoque y se propone una forma de hacer la comparación en el segundo.

En la primera sección de este capítulo se hacen algunos comentarios sobre el concepto de la eficiencia y sus implicaciones a través de la función de produccion, costo y de beneficio, todo en el contexto de una unidad productiva. En la segunda sección, se presenta una medida formal de la eficiencia técnica de una tecnología. Finalmente en la tercera sección se estudia el problema de la comparación de la eficiencia entre productores o empresas y más específicamente, entre tecnologías y además se deduce una medida que permite capturar dichos diferencias.

III.1 COMENTARIOS SOBRE LA EFICIENCIA EN UNA TECNOLOGIA.

La definición de una función de producción da el el producto máximo que puede obtenerse de un conjunto dado de insumos. Similarmente la funcion costo da el mínimo nivel de costo en el cual es posible producir una cantidad de producto dado el precio de los insumos. Finalmente, la función beneficio da el máximo beneficio que puede ser alcanzado dado el precio del producto y el de los insumos. Para cada una de esas funciones el concepto de máximo es de gran reelevancia.

La palabra "frontera" sera muy significativa en cada caso porque cada una de las funciones limita el rango de las posibles observaciones. Así por ejemplo, uno puede observar puntos por debajo de la frontera de la función de producción (empresas que producen menos que el máximo), pero no puntos que caen por encima de la frontera; comentarios similares pueden ser aplicados convenientemente a la frontera de la función costo y à la correspondiente al beneficio.

El monto por el cual una empresa o unidad productiva cae por debajo de su frontera de producción o beneficio y el monto por el cual cae por arriba de la función costo puede ser considerado como medida de ineficiencia. Las medidas de ineficiencia han sido la motivación principal para el estudio de las fronteras. Se verá que es posible bajo ciertos supuestos, medir al menos el nivel promedio de ineficiencia en una empresa.

Ahora bien, la transformación de insumos a productos puede quedar completamente caracterizada por una función de producción $f(x)$, la cual muestra el máximo producto obtenido de un vector dado de insumos. En el capítulo anterior se ha visto que la dualidad entre parejas de funciones da una forma de expresar la función costo y la de beneficio en términos de la de producción, es decir, $C(y,p) = \min\{px \mid f(x) \geq y\}$ y $\pi(q,p) = \max\{qy - px \mid f(x) \geq y\}$, respectivamente. La primera representación no es más que el mínimo costo requerido para producir y a precios p; la segunda muestra el máximo beneficio alcanzado a precios q para el producto y a p para los insumos.

Supongase que la empresa observa un programa de producción $z^o \in T$, $z^o = \begin{pmatrix} -x^o \\ y^o \end{pmatrix}$

DEFINICION 6. $z^o \in T$ es tecnicamente eficiente [1] si $y^o = f(x^o)$ y tecnicamente ineficiente si $y^o < f(x^o)$.

---

[1] Tradicionalmente se manejan dos componentes integrantes de la eficiencia: la eficiencia técnica y la eficiencia en precios. Aquí unicamente se analizará el primer concepto.

Dados los comentarios con que se inicia la sección $y^{\circ} > f(x^{\circ})$ es imposible.

Una medida de eficiencia técnica de este programa de producción esta dada por $0 \leq y^{\circ}/f(x^{\circ}) \leq 1$; la ineficiencia técnica es basicamente debido al uso excesivo de insumos lo cual implica que el costo para ese programa no es mínimo, esto es $px^{\circ} \geq C(y^{\circ}, p)$ y en consecuencia el programa tampoco maximiza beneficio, es decir, $(qy^{\circ} - px^{\circ}) \leq \pi(q, p)$.

Farrell [1957] en su trabajo pionero sobre frontera y eficiencia propone un marco no muy riguroso para medir entre otras cosas, la eficiencia técnica. Para un análisis intuitivo de ésta considérese una empresa que usa dos tipos de insumos x_1, x_2 para producir y y supóngase que la frontera de la función de produccion es: $y = f(x_1, x_2)$ Bajo el supuesto de rendimientos constantes a escala se puede escribir $f(x_1/y, x_2/y) = 1$ esto es, la frontera de tecnología puede ser representada por el conjunto $\text{Isoq}\, I(1) = \{x \in I(1) \,/\, \lambda x \notin I(1) \text{ si } \lambda \in [0,1)\}$ 1/ donde $I(1)$ es el conjunto de requerimientos de insumos para producir una unidad de producto. (éste conjunto ya ha sido definido anteriormente). De esta forma $\text{Isoq}\, I(1)$ representa las diferentes combinacionaciones de los dos insumos de forma que una empresa producirá de manera eficiente en el sentido técnico si se logra colocar sobre dicha curva, que generalmente se le conoce con el nombre de isocuanta.

1/ En la siguiente sección se definirá formalmente este concepto.

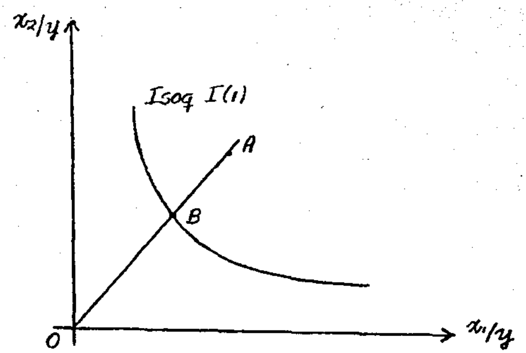


FIG. 5 Eficiencia Técnica de Farrell

Si la unidad productiva en estudio usa (x_1^0, x_2^0) cantidades de insumos para producir y^0 entonces el punto A sobre la figura representa $(x_1^0/y^0, x_2^0/y^0)$, (por definición este no puede caer por debajo de la isocuanta; obsérvese que también el punto B produce y^0 por tanto, existen dos combinaciones de insumos para producir una unidad de y^0 sin embargo en A se esta utilizando una cantidad mayor de insumos que la estrictamente indispensable, esto es, en B se uso la fracción OB/OA de la cantidad utilizada en A. De aquí que surga de manera natural que los puntos que estan sobre la isocuanta sean eficientes tecnicamente y por tanto la razón OB/OA proporciona una medida de la ineficiencia técnica.

En la siguiente sección se analizará que la última aseveración: los puntos sobre la isocuanta son eficientes en el sentido técnico, no siempre es verdadera, y se presentarán condiciones para que se cumpla.

III.2 MEDIDA DE LA EFICIENCIA EN UNA TECNOLOGIA.

En esta sección se hace notar que la medida de eficiencia técnica de Farrell ocaciona ciertas dificultades; en primer lugar porque conduce a dos interpretaciones diferentes y en segundo lugar, porque dicha medida se basa en una isocuanta y no un subconjunto eficiente lo cual en la práctica, puede llevar a identificar unidades eficientes en el sentido tecnico cuando no lo son. Finalizamos la sección presentando las condiciones bajo las cuales la isocuanta coincide con el conjunto eficiente.

Dada una tecnología T para cada $y>0$ se tiene asociado el conjunto $I(y)$ de requerimientos de insumos definido en el capítulo I.

$$I(y)=\left\{ x \in \mathbb{R}^m_+ \;\middle|\; \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$$

o equivalentemente

$$I(y) = \{ x \in \mathbb{R}^m_+ \mid f(x) \geq y \}$$

esto último en virtud de los teoremas de dualidad.

Asi, para $y>0$ interesa caracterizar los elementos de $I(y)$ que son eficientes. Con base en esta idea Färe [1978] introduce las siguientes definiciones.

Asociada a un conjunto de requerimientos de insumos $I(y)$ la ***isocuanta*** de y esta dada por

$$\text{Isoq } I(y) = \{ x \in I(y) \mid \lambda x \notin I(y) \text{ si } \lambda \in [0,1) \}.$$

El ***conjunto eficiente*** de $I(y)$ se define como,

$$\text{Eff } I(y) = \{ x \in I(y) \mid \forall x' (\text{si } x' \leq x \Rightarrow x' \notin I(y)) \}.$$

Con las definiciones anteriores es evidente que

$$\mathrm{Eff}\ I(y) \subset \mathrm{Isoq}\ I(y)$$

Más adelante se probará que bajo los supuestos tecnológicos que se han venido manejando y en particular, el de rendimientos constantes a escala, las isocuantas coinciden con los conjuntos eficientes. En general, las tecnologías que presentan una disponibilidad débil de insumos son ejemplos de funciones de producción donde las isocuantas no estan contenidas en los conjuntos eficientes.

Se puede demostrar que la función distancia de Shephard [1953],

$$\Psi(y,x) = \left[\min \{\lambda \mid \lambda x \in I(y)\}\right]^{-1}$$

sirve también para caracterizar totalmente una tecnología. En particular se tiene

$$I(y) = \{x \mid \Psi(y,x) \geq 1\}$$

$$\mathrm{Isoq}\ I(y) = \{x \mid \Psi(y,x) = 1\}$$

$$\mathrm{Eff}\ I(y) = \{x \mid \Psi(y,x) = 1,\ \Psi(y,x') < 1 \quad \text{para } x' \leq x\}$$

Así pues, con base en este contexto se ofrece una formalización de las medidas de eficiencia técnica asociadas a una unidad productiva.[1] De los trabajos de Farrell se desprende que se pueden definir dos medidas alternativas de eficiencia.

1/ Como mencionamos anteriormente el pionero de las medidas de eficiencia es Farrell, pero en sus trabajos no presenta una definicion precisa de las mismas.

DEFINICION 7. Sea $F: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(y,x) = \begin{cases} \min\{\lambda \mid \lambda x \in I(y)\} & \text{si } x \in I(y) \\ +\infty & \text{si } x \notin I(y) \end{cases}$$

F así definida mide la eficiencia técnica vía insumos.

Obsenvese que F da la máxima cantidad por la cual el vector de insumos x puede ser decrementado para seguir pnoduciondo y.

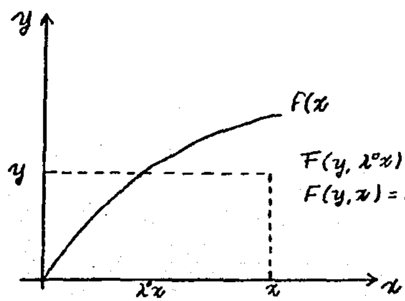


FIG. 6 Eficiencia vía Insumos

Alternativamente F se puede expresar como sigue:

$$F(y,x) = \frac{\|\lambda^{\circ}x\|}{\|x\|} \quad \text{con } \lambda^{\circ} = \min\{\lambda \mid \lambda x \in I(y)\}$$
$$x \in I(y), \ y > 0$$

La medida de eficiencia técnica vía insumos es la inversa de la función distancia de Shephard para $x \in I(y)$. Además, como $y > 0$ y $x \in \mathbb{R}_+^m$, entonces $F(y,x) \in (0,1]$. Por otro lado, también se cumple que

$$\{x \mid F(y,x) = 1\} = \text{Isoq } I(y)$$

Ahora bien, según Farrell $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ es eficiente si y sólo si $x \in \mathrm{Isoq}\, I(y)$, pero como el conjunto eficiente está contenido en la isocuanta se tiene que $x \in \mathrm{Eff}\, I(y) \Rightarrow F(y, x) = 1$; sin embargo, el inverso no se da como se desprende del siguiente ejemplo.

Sea $F(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ 1/ y considérese $(x_1, x_2) = (1, 2) \in I(1)$ y $F(1, (1,2)) = 1$ pero como $(1,2) \geq (1,1) \in I(1)$ entonces $(1,2) \notin \mathrm{Eff}\, I(1)$. De esto se deduce que el programa $(1, (1,2))$ es eficiente según la medida de Farrell a pesar de que no pertenezca al conjunto de eficiencia que se ha definido antes.

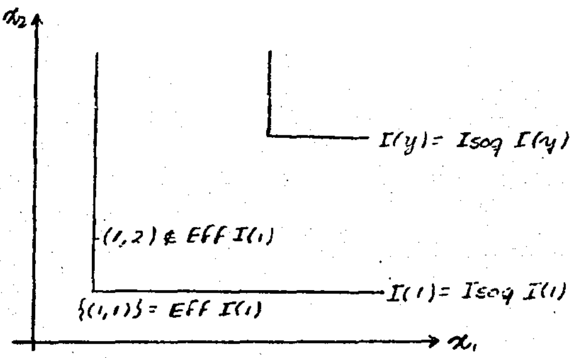


FIG. 7 Ejemplo de Eficiencia vía Insumos

1/ Esta función de producción es un caso particular de tecnología de Leontief.

Las restricciones que debe tener una estructura de producción para que el conjunto $\{x \mid F(y,x)=1\}$ coincida con $Eff\ I(y)$ estan dadas por el siguiente teorema cuya demostración se sigue de inmediato dadas las observaciones anteriores.

TEOREMA 20. $\{x \mid F(x,y)=1\} = Eff\ I(y)$ si y sólo si $Isoq\ I(y) = Eff\ I(y)$, $y>0$.

En resumen, a menos que la isocuanta coincida con el conjunto eficiente se tendrá que la medida de Farrel puede determinar como eficientes vectores que no lo sean.

La otra medida que se desprende de los trabajos de Farrel es la siguiente:

DEFINICION 8. Sea $G: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$G(y,x) = \begin{cases} \min\{\theta \mid x \in I(y/\theta) & \text{si } x \in I(y) \\ +\infty & \text{si } x \notin I(y) \end{cases}$$

G así definida representa la medida de eficiencia técnica vía productos.

Esta medida representa la máxima cantidad por la que la producción puede ser incrementada siendo producible aún por el vector de insumos x. Alternativamente, se puede definir,

$$G(y,x) = \frac{\|y\|}{\|\frac{y}{\theta^0}\|} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \theta^0 = \min\{\theta \mid x \in I(y/\theta)\} \\ x \in I(y),\ y>0 \end{array}$$

Observese que para $x \in I(y)$, $G(y,x) \in (0,1]$.

A continuación se probará que $G(y,x)$ es tambien la inversa de la función distancia de

Shephard del productor definida como:

$$\Omega(y,x)=\left[\max\{\theta \mid \theta y \in P(x)\}\right]^{-1}$$

donde $P(x)=\{y \mid x\in I(y)\}=[0,f(x)]$.

$$\begin{aligned} G(y,x) &= \min\{\theta \mid x\in I(y/\theta)\} \\ &= \max\{\lambda \mid x\in I(\lambda y)\} \\ &= \max\{\lambda \mid \lambda y\in P(x)\} \\ &= [\Omega(y,x)]^{-1} \end{aligned}$$

Ahora bien, con el ejemplo anterior se puede obtener que $G(x,y)=1 \not\Rightarrow x\in Eff\, I(y)$ ya que $G(1,(1,2))=\min\{\theta \mid (1,2)\in I(1/\theta)\}=1$ y como se hizo notar $Eff\, I(1)=\{(1,1)\}$.

Por otro lado, con el siguiente ejemplo puede desprenderse que $x\in Eff\, I(y) \not\Rightarrow G(y,x)=1$. Considerese,

$$I(y)=\left\{(x_1,x_2) \;\middle|\; \begin{array}{ll} x_1+x_2\geq y, & y\in[0,1) \\ yx_1+x_2\geq y, & y\in[1,2] \\ x_1+x_2\geq y, & y\in(2,\infty) \end{array}\right\}$$

Nótese que $(1,0)\notin Eff\, I(1)$, pero

$$G(1,(1,0))=\min\{\theta \mid (1,0)\in L(1/\theta)\}=1/2$$

y por tanto $x\in Eff\, I(y) \not\Rightarrow G(y,x)=1$

De lo anterior se obtiene que $x\in Eff\, I(y)$ no es una condición suficiente ni necesaria para que $G(y,x)=1$; sin embargo, el siguiente resultado cuya demostración puede consultarse en Färe [1978] establece condiciones bajo las cuales la medida de eficiencia de Farrell y los miembros del conjunto $\{x \mid G(y,x)\}=1$ coinciden.

<u>TEOREMA 21.</u> $x \in Eff\, I(y) \Leftrightarrow G(y,x)=1$ si y sólo si
(i) Para $x \in \mathbb{R}^m_+$, $\Psi(\theta y, x) \nleq \Psi(y,x)$, con $\theta > 0$
(ii) $Eff\, I(y) = Isoq\, I(y)$; $y > 0$.

El siguiente teorema establece bajo que condiciones las medidas de Farrell F y G, coinciden.

<u>TEOREMA 22.</u> Si f es homogénea de grado uno entonces $F(y,x) = G(y,x)$.
<u>Demostración.</u>

$$F(y,x) = \min\{\lambda \mid \lambda x \in I(y)\}$$
$$= \min\{\lambda \mid x \in I(y/\lambda)\}$$
$$= G(y,x).$$

$\boxtimes$

Con este último resultado se ha establecido que con una tecnología con rendimientos constantes a escala ambas medidas coinciden. Ahora veamos el inverso: supongase que $F(y,x) = G(y,x)$, $y > 0$, $x \in I(y)$. Por las relaciones entre las dos medidas de Farrell y las funciones distancia se tiene que $\Psi(y,x) = \Omega(x,y)$, ambas funciones son homogéneas de grado uno en su segundo subvector se sigue que Ψ es homogénea de grado uno en y. Así,

$$f(\lambda x) = \max\{y \mid \lambda x \in I(y)\}$$
$$= \max\{y \mid \Psi(y, \lambda x) \geq 1\}$$
$$= \max\{y \mid \Psi(y/\lambda, x) \geq 1\}$$
$$= \max \lambda \{v \mid \Psi(v, x) \geq 1\} \quad v = \frac{u}{\lambda}$$
$$= \lambda \max\{v \mid \Psi(v,x) \geq 1\}$$
$$= \lambda f(x).$$

Con lo anterior se ha probado el siguiente teorema.

TEOREMA 23. Las medidas de Farrell F y G asignan el mismo valor de eficiencia a $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$, $y>0$ $x \in I(y)$ si y solo si la función de producción es homogénea de grado uno.

III.3 EFICIENCIA ENTRE TECNOLOGIAS.

Consideremos dos tecnologías T_1 y T_2, con funciones de producción f_1, f_2 respectivamente. Supongase que ambas producen el mismo producto y comparten el mismo conjunto de posibilidades de insumos. Se puede pensar en distintos conceptos para hacer la comparación entre la eficiencia de ambas tecnologias.

Diremos que T_1 es mas eficiente que T_2 usando insumos x si $f_1(x) > f_2(x)$. T_1 es mas eficiente que T_2 si lo es para todo vector de insumos x.

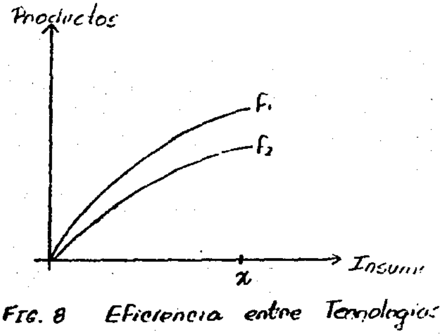


FIG. 8 Eficiencia entre Tecnologias

Intuitivamente se podría definir el concepto "T_1 es mas eficiente que T_2 para producir y" con esta misma idea. Habría que ver que T_1 usa menos insumos que T_2 para producir de modo eficiente y. Sin embargo, el orden usual de $\mathbb{R}^m_+$ no es total y en consecuencia no se podría hacer la comparación entre los vectores de insumos. Debido a ésto, se pueden suponer precios comunes a los que se enfrentan las unidades productivas que tienen asociadas T_1 y T_2 y así realizar la comparación usando la función de costos.

Así pues, T_1 es más eficiente que T_2 para producir y sí $C_1(y,p) < C_2(y,p)$, donde C_1 y C_2 son las funciones de costos asociadas a las tecnologías.

Sería interesante probar ahora que ambos conceptos coinciden.

<u>TEOREMA 24</u>. Para toda $x \in \mathbb{R}^m_+$, $f_1(x) \geq f_2(x)$ sí y sólo sí para toda $y \in \mathbb{R}_+$, $C_1(y,p) \leq C_2(y,p)$.

<u>Demostración</u>.

Sea $y > 0$ y supóngase $f_1(x) \geq f_2(x)$ para toda x. Obsérvese que

$$\{x \mid f_2(x) \geq y\} \subset \{x \mid f_1(x) \geq y\},$$

esto se desprende de que la hipótesis $f_1(x) \geq f_2(x)$ junto con $f_2(x) \geq y$ implican $f_1(x) \geq y$.

Ahora bien, de la contensión de arriba y el hecho de que px es función lineal de x se tiene que

$$\min\{px \mid f_2(x) \geq y\} \geq \min\{px \mid f_1(x) \geq y\}$$

es decir, $C_2(y,p) \geq C_1(y,p)$

Ahora, supóngase $x \geq 0$ y $C_1(y,p) \leq C_2(y,p)$ para toda $y > 0$.

Obsérvese que

$$\{y \mid C_2(y,\rho) \leq \rho x\} \subset \{y \mid C_1(y,\rho) \leq \rho x\}$$

esto se desprende de la hipótesis $C_1(y,\rho) \leq C_2(y,\rho)$ y de $C_2(y,\rho) \leq \rho x$ que implican $C_1(y,\rho) \leq \rho x$. Como y es una función lineal (a saber, la identidad)

$$\max\{y \mid C_1(y,\rho) \leq \rho x\} \geq \max\{y \mid C_2(y,\rho) \leq \rho x\}$$

es decir, $f_1(x) \geq f_2(x)$. ☒

CAPITULO IV.

ANALISIS EMPIRICO DE LA EFICIENCIA EN LA PRODUCCION DE MAIZ.

El objetivo principal de este capítulo es el presentar un ejemplo empírico sencillo del uso de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores. Concretamente, se hace un análisis empírico de la eficiencia en el sector agrícola y más específicamente, en la producción del maíz. Bajo el supuesto de una forma específica de tecnología, el análisis se realiza para dos estados de la República Mexicana, en cada uno se estudia la tecnología asociada a la producción de maíz que corresponde por un lado a los productores privados y por otro, a los que conforman las comunidades ejidales.

El capítulo se desarrolla de la siguiente manera: en la primera sección se especifica el modelo de tecnología que servirá de base para el análisis empírico, se desarrollan sus funciones derivadas y se presentan las medidas de eficiencia en términos de los parámetros y de los bienes que involucra la especificación de esa tecnología particular. En la segunda y última sección, se presenta la información que a nivel económico da lugar a la tecnología y se hace un análisis de los resultados obtenidos a partir de las estimaciones del modelo especificado.

IV.1 ESPECIFICACION DE LA TECNOLOGIA.

En los capítulos anteriores se ha realizado un análisis teórico de la Teoría de la Producción en el cual basicamente se han considerado empresas o unidades de producción que producen un sólo bien y por tanto su tecnología puede describirse mediante una función de producción. El paso siguiente consiste en elegir una forma algebraica para la descripción de esta función, la elección entre numerosas posibilidades se hace de ordinario de acuerdo a criterios como su consistencia con el cuerpo teórico establecido y a la sencillez de su computación.

Con base en los criterios mencionados se elige la tecnología Cobb-Douglas como una forma de representar las posibilidades de producción de maiz, que las unidades productoras del mismo tienen ante si. Una vez presentada la forma funcional de la función de producción asociada a esa tecnología se genera su función de costo y de beneficio para finalizar la sección introduciendo las medidas de eficiencia en términos de los parámetros y de los bienes que involucra la especificación de la tecnologia mencionada.

Considérese una empresa que utiliza los insumos x_1, x_2 para producir un nivel y de producto, la tecnología Cobb-Douglas generalizada esta determinada por el conjunto:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_+ \;\middle|\; y \leq A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \;,\; A>0,\; \alpha,\beta \geq 0 \right\}$$

donde $x = (x_1, x_2)'$.

Asociado a este conjunto de tecnología se encuentra la función Cobb-Douglas generalizada cuya forma funcional es la siguiente:

$$F(x) = \max\left\{ y \,\Big/ \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$$

$$= \max\left\{ y \,/\, y \leq A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \right\}$$

$$= A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

En este punto vale la pena preguntarse si la función Cobb-Douglas generalizada es una función de producción, para responder a esta interrogante es necesario demostrar que satisface las propiedades expuestas en el primer capítulo.

Resulta evidente que la especificación Cobb-Douglas conduce a lo siguiente:

(i) $F(0)=0$

(ii) Si $x^1 \leq x^2$, entonces $F(x^1) \leq F(x^2)$.

(iii) F es continua.

con lo cual sólo restará probar que (iv) F es cóncava y (v) F es homogénea de grado uno, para concluir que bajo nuestro marco teórico la especificación Cobb-Douglas representa una función de producción.

Para probar que F es cóncava es necesario ver si el determinante de su Hessiano, denotado por $|H_F|$, es no positivo.[1] Así,

---

[1] Uribe, P. [1982]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = A\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = A\beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = A\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}$$

con lo cual se obtiene

$$|H_f| = A^2\alpha\beta x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2}(1-\alpha-\beta)$$

y por tanto $|H_f| \leq 0$ sí y sólo sí $\alpha+\beta \geq 1$.

Ahora veamos si f es homogénea de grado uno, es decir, si $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Por un lado,

$$f(\lambda x) = A(\lambda x_1)^{\alpha}(\lambda x_2)^{\beta}$$
$$= A\lambda^{\alpha+\beta}x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$$

y por otro $\lambda f(x) = \lambda A x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ y obviamente $f(\lambda x) \neq \lambda f(x)$, a menos que $\lambda = \lambda^{\alpha+\beta}$ o equivalentemente, $\alpha+\beta=1$

Con lo anterior se tiene que bajo el marco teórico establecido, la función Cobb-Douglas generalizada no es de producción, para que lo sea, es necesario imponer ciertas condiciones sobre los parámetros que involucra. Puede observarse que si se impone que $\alpha+\beta=1$ entonces la tecnología representa rendimientos constantes a escala y además, su función de producción es cóncava. Imponiendo esta condición en la especificacion Cobb-Douglas se obtiene la forma funcional:

$$f(x) = Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$$

la cual corresponde a una función de producción, ya que satisface las propiedades requeridas en el marco conceptual establecido; se hará referencia a ella simplemente como función de producción Cobb-Douglas para diferenciarla de la generalizada.

Ahora bien, tanto en la función de producción Cobb-Douglas como en la generalizada se tomarán unidades de medida del producto de forma tal que con un reescalamiento se pueda suponer sin pérdida de generalidad $A=1$.

A continuación se obtendrán las funciones de costo y de beneficio asociadas a la tecnología Cobb-Douglas generalizada, ya que a partir de ellas se pueden deducir los correspondientes a la función de producción Cobb-Douglas por la simple imposición de la condición que garantiza bajo nuestro marco conceptual, concavidad y rendimientos constantes a escala.

Sean p_1, p_2 los precios de los insumos x_1, x_2 respectivamente, entonces

$$C(y,p) = \min \left\{ px \;\middle|\; \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$$

donde $p=(p_1,p_2)$. Dada la definición de la tecnología la función costo se puede expresar como sigue:

$$C(y,p) = \min \left\{ p_1 x_1 + p_2 x_2 \;\middle|\; y \leq A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \right\}$$

$$= \min_{s.a.} p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$y = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

lo cual es equivalente a:

$$\min \; p_1 x_1 + p_2 \left(A^{-1/\beta} y^{1/\beta} x_1^{-\alpha/\beta} \right)$$

Una de las condiciones de primer orden para este problema es:

$$p_1 - \frac{\alpha}{\beta} p_2 A^{-\frac{1}{\beta}} y^{\frac{1}{\beta}} x^{-\frac{\alpha+\beta}{\beta}} = 0$$

de aquí se obtiene,

$$x_1(y, p_1, p_2) = A^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

que no es más que la función de demanda condicionada al factor uno. De manera análoga se puede obtener esta función condicionada al factor dos, la cual toma la forma siguiente:

$$x_2(y, p_1, p_2) = A^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Sustituyendo las funciones de demanda en la función de costo se obtiene:

$$\begin{aligned} C(y,p) &= p_1 x_1(y, p_1, p_2) + p_2 x_2(y, p_1, p_2) \\ &= A^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}}\right] (p_1^{\alpha} p_2^{\beta})^{\frac{1}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \end{aligned}$$

Ahora bien, bajo la consideración de que las unidades de medida son tales que $A=1$ y del supuesto de rendimientos constantes a escala, se obtiene:

$$C(y,p) = \gamma p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} y$$

donde

$$\gamma = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}.$$

$C(y,p)$ así especificada representa la función de costos asociada a la tecnología Cobb-Douglas.
Otra forma de expresar la función de costos de la tecnología Cobb-Douglas generalizada es:

$$C(y, p) = \gamma' c(p)\, y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

donde $c(p) = (p_1^{\alpha} p_2^{\beta})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$. Esta forma funcional será de gran utilidad en la obtención de la función de beneficios.

Ahora bien, el problema de la maximización del valor neto de la producción dado que q es el precio del producto, es:

$$\pi(q, p) = \max \left\{ qy - px \;\middle|\; \binom{-x}{y} \in T \right\}$$

$$= \max \left\{ qy - px \;\middle|\; y \leq A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \right\}$$

y procediendo de manera similar al desarrollo de la seccion I.4 se obtiene,

$$\pi(q, p) = qy - \gamma' c(p)\, y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

La condición de primer orden para la maximización del valor neto es:

$$q - \frac{\gamma'}{\alpha+\beta} c(p)\, y^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} = 0$$

de donde se obtiene la función de oferta:

$$y = \left(q \, \frac{\alpha+\beta}{\gamma' c(p)} \right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

Finalmente, la forma funcional de la función de beneficios asociada a la tecnología Cobb-Douglas generalizada es:

$$\pi(q, p) = q \left[\frac{(\alpha+\beta)}{\gamma' c(p)} q \right]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} - \gamma' c(p) \left[\frac{(\alpha+\beta)}{\gamma' C(p)} q \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

De aquí es claro que la función de beneficios no esta acotada cuando la tecnología presenta rendimientos constantes a escala.

Ahora se introducirá la forma de medir la eficiencia en el contexto de la tecnología Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala, primero entre programas de producción y luego entre tecnologías.

En el capítulo anterior se estudiaron medidas de eficiencia que se desprenden de las expuestas por Farrell: la medida vía producto y la vía insumos, estableciendo además que ambos coinciden si la tecnología presenta rendimientos constantes a escala. Puesto que la tecnología sobre la que se está trabajando presenta rendimientos constantes, sólo será necesario analizar una de las medidas mencionadas. A continuación se verá a qué conduce la medida de eficiencia vía insumos cuando la función de producción es Cobb-Douglas.

Para $y > 0$ la tecnología Cobb-Douglas T tiene asociado el conjunto de requerimiento de insumos:

$$I(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle/\, \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \leq x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \right\}$$

Para analizar la eficiencia de los programas de producción interesará caracterizar los elementos de $I(y)$ que son eficientes, para lo cual es necesario resolver el problema que nos calcula la medida vía insumos asociada al programa $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ y que a continuación definimos:

Antes de continuar se verá que la función de producción Cobb-Douglas generalizada es un caso especial de la función de producción de elasticidad de sustitución constante (CES), cuya forma funcional es:

$$f(x) = (\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho)^\rho$$

o equivalentemente,

$$f^\rho(x) - \alpha x_1^\rho - \beta x_2^\rho = 0$$

De esta especificación se obtiene que para $\rho \neq 0$

$$\frac{f^\rho(x) - \alpha x_1^\rho - \beta x_2^\rho}{\rho} = 0$$

y por tanto,

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{f^\rho(x) - \alpha x_1^\rho - \beta x_2^\rho}{\rho} = 0$$

Por otro lado, como para $\rho = 0$ el cociente es indeterminado su límite puede calcularse aplicando la regla de L'Hopital, esto es,

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{f^\rho(x) - \alpha x_1^\rho - \beta x_2^\rho}{\rho} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f^\rho(x) \log f(x) - \alpha x_1^\rho \log x_1 - \beta x_2^\rho \log x_2}{\rho}$$

$$= \log f(x) - \alpha \log x_1 - \beta \log x_2$$

Usando el hecho de que el límite del cociente es cero, se tiene que

$$\log f(x) = \alpha \log x_1 + \beta \log x_2$$

es decir,

$$f(x) = x_1^\alpha x_2^\beta$$

que no es más que la función Cobb-Douglas generalizada obtenida de la CES cuando $\rho \to 0$

$$F(x,y) = \min \{\lambda \mid \lambda x \in I(y)\}$$
$$= \min_{s.a} \lambda \qquad \lambda x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \geq y$$
$$= \min_{s.a.} \lambda \qquad \lambda \geq \frac{y}{x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}}$$

Obviamente la solución de este problema es:

$$\lambda = \frac{y}{x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}} = \frac{y}{f(x)}$$

Con esto se tiene que los programas eficientes serán aquellos cuya $\lambda = 1$.

Ahora bien, para analizar la eficiencia entre tecnologías y más específicamente, decidir cual de dos tecnologías es mas eficiente, se pueden comparar sus funciones de costo o de producción asociadas a la tecnología en estudio. Dado el teorema 24 resulta indiferente comparar cualquiera de esas funciones. A continuación se verá cómo se puede realizar esta comparación en las funciones de producción.

Considérese que se tienen dos tecnologías Cobb-Douglas T_1 y T_2 con funciones de producción:

$$f_1(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{1-\alpha_1}$$

$$f_2(x) = x_1^{\alpha_2} x_2^{1-\alpha_2}$$

respectivamente. Ahora bien, T_1 es más eficiente para producir y, que T_2 sí para toda x $f_1(x) \geq f_2(x)$ o equivalentemente,

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{1-\alpha_1} \geq x_1^{\alpha_2} x_2^{1-\alpha_2}$$

esto es,

$$x_1^{\alpha_1-\alpha_2} \geq x_2^{\alpha_1-\alpha_2}$$

Con base en esta última relación se tiene que dependiendo de cómo es el insumo x_1 con respecto al x_2 y el parámetro α_1 con relación al α_2, T_1 será más eficiente que T_2 o viceversa. El cuadro 1 muestra las situaciones que se pueden presentar y en cada una de ellos la tecnología que es más eficiente.

Cuadro 1.

EFICIENCIA ENTRE TECNOLOGIAS.

Relación entre Parámetros	Relación entre Bienes	Tecnología Eficiente.
$\alpha_1 \leq \alpha_2$	$x_1 \leq x_2$	T_1
	$x_2 \leq x_1$	T_2
$\alpha_2 \leq \alpha_1$	$x_1 \leq x_2$	T_2
	$x_2 \leq x_1$	i.

Ahora ya se cuentan con formas específicas de medir la eficiencia y por tanto es necesario presentar la información que se va utilizar para ese fin, lo cual será tema a tratar en la siguiente sección.

IV.2 ESTIMACION DE LA TECNOLOGIA Y ANALISIS EMPIRICO DE LA EFICIENCIA.

Para realizar un análisis empírico de la eficiencia ya sea respecto de una tecnología o entre tecnologias es necesario contar con unidades productivas que tengan disponibilidad de recursos semejantes. Aquí se presentará el análisis empírico de ciertas unidades productivas de maíz por considerar la importancia que éste producto tiene en la economía mexicana como satisfactor de necesidades primarias e impulsor de otras actividades económicas.

En virtud de la heterogeneidad de las unidades productivas de maíz debida a los tipos de propiedad, calidad de tierra, clima y en general, a las diferencias existentes en la disponibilidad de recursos, no tiene sentido considerar una tecnología asociada a la producción nacional de maíz. Por ésto, es conveniente establecer algún criterio pará lograr cierta homogeneidad al menos al interior de las unidades productivas; el criterio aquí utilizado consiste en considerar la división territorial del país. En este contexto, se ha decidido analizar un estado representativo de "tecnología avanzada o capitalista": Coahuila, y otro de "tecnología campesina": Morelos; el análisis empírico hará elucidar más sobre estos terminos y en su momento poder decidir si tal calificativo es el correcto.

Se debe notar que aún dentro del mismo estado existe heterogeneidad principalmente respecto al tipo de propiedad de la tierra, lo cual condujo a considerar dos tipos de tecnología o unidades productivas dentro de cada estado: la asociada a los productores con propiedad privada y a los que conforman las comunidades ejidales. Aún podría pensarse que dentro de cada uno de estos grupos existen diferencias debidas quizas a las diferentes formas de producción, sin embargo en este trabajo se llegará solamente a este nivel debido a la imposibilidad de contar con encuestas que conduzcan a una clasificación mas adecuada.

Ahora bien, dado que el concepto de tecnología es estático los programas de producción con los que se estime deberán ser observaciones de corte transversal; por lo que cada programa de producción se identificará con los municipios de cada estado.

Cabe mencionar que el criterio que se ha adoptado para la ubicación de las unidades productivas y de los programas de producción responde a la clasificación presentada en el V Censo Agrícola, Ganadero y Ejidal [1970].

Dado lo anterior el análisis empírico estará enfocado por un lado, a determinar los municipios ineficientes dentro de las unidades productivas y por otro, a comparar esas unidades y poder decidir cual de ellas es la eficiente, esto último se llevará a cabo tanto entre los estados como dentro de ellos

A continuación se presenta la conformación de las variables que se van a utilizar para la estimación de la tecnología Cobb-Douglas.

Para cada municipio se contará con dos observaciones del tipo (Y, K, L) una, de los programas de producción con propiedad privada y la otra, de los que forman las comunidades ejidales. En cada observación K es un indicador del capital invertido en cada municipio ya sea el de propiedad privada o el de comunidades ejidales, L representa la mano de obra ocupada en los programas de producción y Yi es la cantidad cosechada de maíz en cada programa. De esta forma, cada programa de producción utiliza dos insumos K y L para producir un nivel de producto Y. [1]

Como K deberá reflejar el capital invertido en cada programa de producción se considero la superficie cosechada más una proporción de la superficie regada ambas medidas en hectáreas; esa proporción se incorporó para reflejar el efecto del uso de maquinaria y equipo, energía, fertilizantes, etc, ya que la información existente no esta desagregada a nivel de maíz y además esta dada en valor y no en unidades físicas, como lo presupone el concepto de tecnología.

En lo que respecta a la mano de obra la información contenida en el IX Censo General de Población y Vivienda [1970] incluye la cantidad de trabajadores agrícolas por municipio, como estos no se contabilizan por producto fue necesario considerar una proporción de esos trabajadores,

---

[1] La información que se menciona se concentra en el Apéndice.

dicha proporción es relativa a la participación que tiene la producción de maíz en cada programa de producción con respecto al total producido de ese producto en cada tecnología.

El nivel del producto Y se obtiene directamente del censo a partir de la cantidad cosechada de maíz.

Hasta aquí se ha expuesto la conformación de las variables que constituyen la función de producción Cobb Douglas y además, se ha mencionado el tipo de información que se utilizará para su estimación.

La función a estimar es:

$$F(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

con la restricción apriori $\alpha + \beta = 1$. Dada esta especificación se identificará al insumo x_1 con el indicador de capital K, a x_2 con la variable L que representa la mano de obra y $F(x)$ será el nivel de producto Y.

A continuación se analizan los resultados obtenidos al estimar la función Cobb-Douglas tanto para las unidades productivas con propiedad privada como para las comunidades ejidales del estado de Coahuila y del de Morelos. Después, basados en esos resultados se especifica la función de producción y de costo, para finalmente estudiar la eficiencia de los programas de producción y de las tecnologías.

Primeramente se estimó la función de producción Cobb-Douglas sin imponer la restricción de rendimientos constantes a escala (Cuadro 2.). Los resultados de de esta estimación para los distintas unidades productivas reflejan por un lado una utilización intensiva de capital y por el otro, que los parámetros asociados a la mano de obra no son significativamente diferentes de cero, pese a esto último la suma de los parámetros de cada tecnología es muy cercana a uno y por tanto "casi" se tienen rendimientos constantes a escala.

Cuadro 2.

ESTIMACION DE LA FUNCION DE PRODUCCION COBB-DOUGLAS GENERALIZADA.

Tecnología \ Bienes	K α	L β	$\alpha+\beta$	R^2
COAHUILA				
Propiedad Privada	0.9746 (47.6082)	0.0314 (0.9288)	1.0060	0.9931
Comunidades Ejidales	0.9224 (88.2227)	0.0456 (2.9577)	0.9680	0.9941
MORELOS				
Propiedad Privada	0.9880 (50.9031)	0.0108 (0.3781)	0.9988	0.9947
Comunidades Ejidales	0.9873 (126.9900)	0.0141 (1.3322)	1.1014	0.9950

Uno vez impuesta la restricción de rendimientos constantes a escala (Cuadro 3.), la situación con respecto a la utilización intensiva de capital no cambia, sin embargo todos los parámetros son significativamente diferentes de cero a excepción del de la mano de obra de la tecnología de la propiedad privada del estado de Morelos. Ahora bien, la imposición de la restricción $\alpha+\beta=1$ conduce a una prueba F si esa relación es cierta; puede observarse que en cada unidad productiva la F calculada conduce a no rechazar la restricción impuesta, lo cual era de esperarse ya que en el modelo sin restricciones la suma de los parámetros es muy cercana a uno.

Cuadro 3.

ESTIMACION DE LA FUNCION DE PRODUCCION COBB-DOUGLAS.

Insumos: / Tecnología	K α	L β	R^2	F
COAHUILA				
Propiedad Privada	0.9114 (66.1278)	0.0885 (6.4208)	0.9904	14.2278
Comunidades Ejidales	0.8812 (94.5319)	0.1187 (12.1287)	0.9894	29.0124
MORELOS				
Propiedad Privada	0.9950 (98.4416)	0.0049 (0.6555)	0.9947	0.0486
Comunidades Ejidales	0.9898 (204.6600)	0.0101 (3.0905)	0.9949	0.1838

Cabe mencionar que como se esta trabajando con información de corte transversal, se presentaron problemas de heterocedasticidad; sin embargo, las estimaciones que se detallaron son las finales, en el sentido de que son el resultado de corregir ese problema.

El cuadro 4 muestra la función de producción y de costo para cada unidad productiva, basadas en la estimación de la tecnología Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala; la especificación de la función de beneficio asociada a esa tecnología no se presenta ya que como se menciono en la sección anterior, dicha función no esta acotada cuando $\alpha + \beta = 1$

Ahora se pasará a estudiar la eficiencia en cada una de las unidades productivas. Antes es necesario observar que la medida de eficiencia vía insumos

$$\lambda = \frac{y}{f(x)}$$

basada en la estimación realizada, no esta entre 0 y uno como debería de ser, ésto se debe a que al estimar $f(x)$, para cada tecnología existen programas de producción que quedan por arriba y por abajo de la curva estimada y por tanto no se esta obteniendo la frontera de producción. Esta recapacitación trae como consecuencia un replanteamiento de la medida de eficiencia vía insumos, que considere la existencia de puntos por arriba de la función estimada; con ésto, sólo se tendrá una aproximación de la medida de Farrell respecto a la tecnología estimada.

Es evidente que los programas de producción que tienen asociada una $\lambda < 1$ son ineficientes independientemente de que $f(x)$ estimada sea o no la curva frontera; ahora, cuando $\lambda = 1$ quiere decir que

Cuadro 4.

FUNCIONES DE PRODUCCION Y DE COSTOS ASOCIADOS A LA TECNOLOGIA COBB-DOUGLAS.

Tecnología	Función de Producción	Función de Costo
COAHUILA		
Propiedad Privada	$K^{0.9114} L^{0.0885}$	$0.8779\ P_1^{0.9114} P_2^{0.0885}\ y$
Comunidades Ejidales	$K^{0.8812} L^{0.1187}$	$0.8679\ P_1^{0.8812} P_2^{0.1187}\ y$
MORELOS		
Propiedad Privada	$K^{0.9950} L^{0.0049}$	$0.9787\ P_1^{0.9950} P_2^{0.0049}\ y$
Comunidades Ejidales	$K^{0.9898} L^{0.0101}$	$0.9640\ P_1^{0.9898} P_2^{0.0101}\ y$

en esos programas el error de estimación es cero y por tanto diremos que ellos son "eficientes en promedio"; para $\lambda > 1$ se tiene que los programas estan por arriba de la curva estimada y por tanto se dirá que ellos son "más eficientes que el promedio".

Esta forma de medir la eficiencia no es más que estar analizando la diferencia entre lo estimado y lo observado, información que también puede obtenerse a partir de los residuales de la estimación. Aquí se calcularon los índices λ para cada programa de producción, por ser la medida de eficiencia estudiada anteriormente.

En el cuadro 5 se presentan los índices de eficiencia calculados para cada programa de producción de las tecnologías en estudio, en él se puede observar lo siguiente:

	Programas más Eficientes	Programas menos Eficientes
<u>COAHUILA</u>		
Propiedad Privada	Frontera	Fco. I. Madero
	Hidalgo	S. Pedro
	Nadadores	Sierra Mojada
Comunidades Ejidales	Candela	Ocampo
	Frontera	S. Pedro
	Gral. Cepeda	Sierra Mojada
<u>MORELOS</u>		
Propiedad Privada	Mazatepec	Huitzilac
	Tlaltizapán	Tepoztlan
Comunidades Ejidales	Amacuzac	Huitzilac
	E. Zapata	Coatlán del Río
	Ocuituco	

Cuadro 5.

EFICIENCIA DE LOS PROGRAMAS DE PRODUCCION.

Programas de Producción	Propiedad Privada	Comunidades Ejidales
COAHUILA		
Abasolo	1.0335	1.0209
Acuña	0.9426	0.9464
Allende	1.0110	0.9770
Arteaga	0.9054	0.4910
Candela	1.0381	1.3323
Castaños	0.8844	0.9178
Cuatrociénegas	0.8646	0.8630
Escobedo	0.9101	0.9933
Fco. I. Madero	0.6146	0.7709
Frontera	1.3553	1.2420
Gral. Cepeda	0.8997	0.8080
Guerrero	0.9596	1.1640
Hidalgo	1.6191	0.9841
Jiménez	1.0964	1.0403
Juárez	1.1269	0.9517
Lamadrid	0.9347	0.9088
Matamoros	—	0.8869
Monclova	0.9248	0.9976
Morelos	1.0597	0.9802
Múzquiz	0.9928	0.8728
Nadadores	1.2634	1.0496
Nava	1.1569	1.0584
Ocampo	0.8703	0.7233
Parras	0.7163	0.9495
Piedras Negras	0.9581	0.8471

Continua

Cuadro 5.
(Continuación)

Programas de Producción	Propiedad Privada	Comunidades Ejidales
Progreso	1.1607	0.9394
Ramos Arizpe	0.9563	1.0018
Sabinas	1.1513	0.9750
Sacramento	0.8630	1.0399
Saltillo	0.9187	0.9269
S. Buenaventura	1.016[illegible]	1.1723
S. Juan de Sabinas	0.8546	0.9564
S. Pedro	0.6164	0.7353
Sierra Mojada	0.6100	0.6977
Torreón	1.1076	0.9333
Viesca	1.0333	0.9262
Villa Unión	1.0346	1.0330
Zaragoza	1.0989	1.1232
MORELOS		
Amacuzac	1.0160	1.0968
Atlatlahuacan	1.0904	0.9759
Axochiapan	1.1057	0.9674
Ayala	1.0230	1.0366
Coatlán del Río	0.9494	0.9410
Cuautla	0.9117	1.0073
Cuernavaca	1.0512	0.9892
Emiliano Zapata	1.0703	1.1761
Huitzilac	0.8352	0.8757
Jantetelco	1.3483	0.9575
Jiutepec	0.8966	1.0296

Continua

Cuadro 5.
(Continuación)

Programas de Producción	Propiedad Privada	Comunidades Ejidales
Jojutla	0. 9267	0. 9848
Jonacatepec	0. 9179	0. 9426
Mazatepec	1. 3300	0. 9810
Miacatlán	1. 0513	0. 9550
Ocuituco	1. 0041	1. 1004
Puente de Ixtla	0. 9059	0. 9848
Temixco	—	—
Tepalcingo	0. 9387	0. 9890
Tepoztlán	0. 8639	1. 0170
Tetecala	1. 0278	1. 0827
Tetela del Volcán	1. 0246	1. 0402
Tlalnepantla	1. 0596	0. 9183
Tlaltizapán	1. 1651	0. 9772
Tlaquiltenango	0. 8963	0. 9849
Tlayacapan	1. 0844	1. 1169
Totolapan	0. 9985	1. 0192
Xochitepec	0. 9834	1. 0338
Yautepec	1. 0246	1. 0030
Yecapixtla	0. 9964	1. 0190
Zacatepec	1. 0293	1. 0158
Zacualpan	1. 0746	1. 0819

Se puede observar que el rango de variación de las medidas de eficiencia en las tecnologías de Morelos es menor que el correspondiente a las de Coahuila. Casi todos los índices de las comunidades ejidales de Morelos varían entre 0.96 y 1.03 mientras que los de Coahuila lo hacen entre 0.80 y 1.12. Por el lado de las propiedades privadas el rango de variación de la gran mayoría fluctua entre 0.86 y 1.15 en el estado de Coahuila, y entre 0.90 y 1.10 en el de Morelos.

Para finalizar se estudiará la eficiencia entre las distintas tecnologías tanto al interior de cada estado como entre los estados.

Anteriormente se ha estudiado que a través de las funciones costo o de las de producción se puede decidir cual de las dos tecnologias es más eficiente. Ahora bien, el uso de funciones costo supone que los precios de los insumos son iguales en las tecnologías que se están comparando, lo cual es poco factible en el análisis empírico que se esta haciendo ya que el precio de una hectárea de tierra laborable y los salarios agrícolas varian tanto a nivel de propiedad privada y comunidades ejidales, como a nivel estatal. 1/

Dado que el análisis de la eficiencia es equivalente tanto a nivel de costos como de producción (Teorema 24) se ha decidido analizar la eficiencia entre tecnologias vía la función de producción, lo cual conduce a examinar la relación existente entre los parámetros y entre la cantidad de insumos de las tecnologias que se desean comparar.

1/ Si se considerán las tecnologias como agentes productores de un modelo de equilibrio general, se puede completar el modelo para encontrar los precios de equilibrio del sistema.

En todas las tecnologías se tiene que $K > L$, con lo que sólo resta hacer la comparación entre los parametros.

En el cuadro 3 puede observarse que al interior de cada estado los parámetros estimados asociados a la propiedad privada son mayores que los correspondientes a las comunidades ejidales, por tanto en ambos estados los productores con propiedad privada son más eficientes que los de las comunidades ejidales. Este resultado era de esperarse ya que los productores privados cuentan con mayores facilidades de capital que las comunidades ejidales.

Al comparar las tecnologías entre los estados se tiene que en todos los casos los parámetros de las unidades productivas de Coahuila siempre son menores que las de Morelos, lo cual conduce a concluir que el estado de Morelos es mas eficiente que Coahuila, para la producción de maíz. (Véase cuadro 6)

Cuadro 6.

EFICIENCIA ENTRE TECNOLOGIAS.

MORELOS / COAHUILA	Propiedad Privada	Comunidades Ejidales
Propiedad Privada	Prop. Priv. Morelos	Com. Ej. Morelos
Comunidades Ejidales	Prop. Priv. Morelos	Com. Ej. Morelos

Al inicio de esta sección se dijo que se elegía el estado de Coahuila y el de Morelos por ser representantes el primero de la tecnología avanzada y el segundo de la campesina, sin embargo el hecho de que las dos unidades productivas de Morelos sean más eficientes implica que este estado es de tecnología más avanzada para la producción de maíz que la usada en el estado de Coahuila, sin embargo vale la pena mencionar que por lo general en los estados fronterizos se cultivan productos de exportación de los cuales el maíz no forma parte.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha establecido un marco teórico con base en el cual se ha realizado un análisis empírico; ésto es realmente importante debido a que la mayoría de los trabajos econométricos que conocemos no tienen suficiente sustento a nivel teórico y por otro lado, a partir de los desarrollos teóricos no siempre es posible elaborar un análisis empírico debido quizá al alto nivel de abstracción que desarrollos más teóricos presentan.

Otro punto a destacar es que se ha presentado una teoría con la cual se ha fundamentado y justificado la función Cobb-Douglas, desde el punto de vista económico de la Teoría de la Producción. Dicha función ha servido de puente entre lo teórico y lo empírico.

En lo que respecta al análisis empírico hay que señalar que el hecho de no contar con información más desagregada condujo a tomar la clasificación del Censo Agrícola Ganadero y Ejidal para determinar las unidades de producción. Sería deseable el tener acceso a las encuestas de la Dirección General de Estadística, para realizar una clasificación acorde a nuestros intereses.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Diewent, W.E., "Applications of Duality Theory", en: M. Intnilligaton y D.A. Kendnick (eds), _Fnontiers of Quantitative Economics_, vol. II, Amstendam, North-Holland.

[2] Fäne, R. y C.A.K. Lovell, 1978, "Measuning the Technical Efficiency of Pnoduction", _Journal of Economic Theony_, vol. 19, no. 1, Oct., 150-162.

[3] Fannel, H.J., 1957, "The Measurement of Pnoductive Efficiency", _Journal of the Royal Statistical Society_, Senie A (Genenal), vol. 120, part 3, 253-281.

[4] Fuss, M. y D. Mc Fadden, (eds.), 1978, '_Pnoduction Economics: A Dual Appnoach to Theony and Applications_, vol. 1, Nonth-Holland.

[5] Fuss, M., D. McFadden y Y. Mundalak, 1978, "A Sunvey of Functional Forms in the Economic Analysis of Pnoduction", en: Fuss, M. y Mc Fadden, D. (eds.), loc. cit.

[6] Fonsund, F., C.A.K. Lovel y P. Schmidt, 1980, "A Sunvey of Fnontiers Pnoduction Funtions and of their Relationship to Efficiency Meaurement", _Journal of Econometnics_, vol. 13, na 1, Mayo, 5-25.

[7] Judge, G.G. et al, 1980, _The Theony and Practice of Econometrics_, John Wiley and Sons, New York.

[8] Lau, L. J. y P.A. Yotopulus, 1971, "A Test For Relative Efficiency and Applications to Indian Agriculture", American Economics Review, 61, Marzo, 94-109.

[9] McFadden, D., 1978, "Cost, Revenue and Profit Functions" en Fuss, M y D. McFadden eds., loc. cit.

[10] Pasinetti, L. (ed), 1986, "Aportaciones a la Teoría de la Producción Conjunta, México, FCE.

[11] Sabau, H. 1984, Apuntes de Clase del Curso de Teoría Econométrica, CIDE.

[12] Shone, R. 1980, "Análisis Microeconómico Moderno", Hispano-Europea.

[13] Takayama, A. 1974, "Mathematical Economics", Ill: Hinsdale, The Dryden Press.

[14] Uribe, P. 1982, "Introducción a la Economía Matemática", vol. I, México: CIDE.

[15] Uribe, P. 1986, "Análisis de Actividades y Teoría del Capital", mimeo, México: CIDE.

[16] Uzawa, H. 1964, "Duality Principles in the Theory of Cost and Productions", International Economic Review, 5, 216-220.

[17] Varian, H. 1980, "Análisis Microeconómico", Barcelona: Antoni Bosch.

[18] Yotopulus, P.A. y L.J. Lau, 1973, "A Test for Relative Economic Efficiency Some Further Results", American Economics Review, 63, 214-223

[19] Yotopulus, P.A y J.B. Nuget, 1981, " Investigaciones sobre el Desarrollo Económico ", México, FCE.

[20] Zellner, A., J. Kmenta y J. Dreze, 1966, " Specification and Estimation of Cobb-Douglas Production Function Models ", Econometrica, 34, Oct, 784-795.

[21] V Censo Agrícola Ganadero y Ejidal 1970, 1975, vol. Coahuila y Morelos, México: Dirección General de Estadística.

[22] IX Censo de Vivienda y Población, vols. Coahuila y Morelos, México: Dirección General de Estadística.

APENDICE

INFORMACION UTILIZADA EN EL ANALISIS EMPIRICO.*

Municipios	Propiedad Privada			Comunidades Ejidales		
	Y	K	L	Y	K	L
COAHUILA						
Abasolo	4.00	4.66	0.58	15344	195.13	22.32
Acuña	531.35	672.53	97.43	196.73	264.40	36.07
Allende	91.00	111.63	11.15	391.93	536.67	48.04
Arteaga	483.31	709.57	30.11	4146.57	6133.40	258.29
Candela	382.94	484.46	23.47	80.28	84.66	4.92
Castaños	184.14	287.36	11.69	1391.80	2237.47	88.40
Cuatrociénegas	18.73	26.06	4.94	230.87	328.20	60.95
Escobedo	25.03	33.33	3.90	270.89	352.26	42.29
Fco. I. Madero	1.34	2.00	5.50	128.85	144.06	528.90
Frontera	122.75	117.33	6.53	562.13	662.70	30.26
Gral. Cepeda	601.67	832.90	73.20	1429.05	2433.00	174.09
Guerrero	241.64	317.86	24.02	119.29	137.63	11.87
Hidalgo	73.04	52.63	7.87	45.78	63.10	4.93
Jiménez	655.67	796.73	32.78	2362.32	3400.95	118.82
Juárez	178.60	197.53	17.16	182.47	265.70	17.53
Lamadrid	33.24	40.83	8.57	59.64	79.70	15.92
Matamoros	0.00	0.00	0.00	165.28	157.03	699.10
Monclova	98.55	125.36	20.90	226.67	281.46	48.09
Morelos	225.58	264.40	23.79	119.46	165.86	12.70
Múzquiz	150.22	181.60	24.32	686.28	1029.50	111.16
Nadadores	93.23	92.13	7.79	327.72	515.13	32.40
Nava	1069.47	1270.67	37.11	313.68	464.20	10.88
Ocampo	50.85	67.06	21.85	94.78	154.06	40.74
Parras	227.64	412.76	24.98	2472.85	3562.83	269.11
Piedras Negras	62.48	51.13	7.12	827.36	1346.13	94.37
Progreso	1.04	1.10	0.11	351.12	514.23	36.29

Continua

APENDICE
(Continuación).

Municipios	Propiedad Privada Y	K	L	Comunidades Y	K	Ejidales L
Ramos Arizpe	1567.38	2027.23	197.38	254.27	337.00	32.02
Sabinas	5.78	6.40	0.42	867.22	1279.50	62.38
Sacramento	31.50	47.33	2.58	200.28	269.43	16.42
Saltillo	1005.13	1408.13	86.85	5755.39	8793.83	497.39
S. Buenaventura	391.72	494.76	31.18	766.67	905.10	61.02
S. Juan de Sabinas	35.04	53.00	3.04	718.61	1056.47	62.36
S. Pedro	61.10	87.33	387.23	140.11	155.97	887.97
Sierra Mojada	20.62	35.00	25.34	2.73	4.00	3.36
Torreón	8.64	8.00	7.08	614.76	687.20	503.72
Viesca	1.86	2.00	0.66	761.46	962.53	267.95
Villa Unión	490.32	608.10	38.53	358.31	488.70	28.16
Zaragoza	622.86	730.23	44.27	567.49	713.80	40.33
MORELOS						
Amacuzac	56.34	56.00	8.08	836.56	782.33	120.11
Atlatlahucan	1132.51	1052.40	81.71	1513.25	1604.63	109.18
Axochiapan	719.17	657.30	86.64	2049.73	2182.00	246.95
Ayala	556.97	549.23	104.06	2753.98	2722.63	514.52
Coatlán del Río	57.11	60.63	12.96	547.29	594.53	174.23
Cuautla	116.96	129.20	33.29	1746.57	1769.03	498.70
Cuernavaca	131.18	125.46	45.42	806.43	827.70	279.27
Emiliano Zapata	114.66	107.66	42.03	362.71	312.83	132.96
Huitzilac	210.05	253.20	70.90	122.94	142.23	41.47
Jantetelco	342.18	256.10	44.44	975.07	1047.33	126.65
Jiutepec	14.49	16.20	10.25	210.07	207.20	148.74
Jojutla	79.28	85.90	40.13	450.45	463.46	228.06
Jonacatepec	66.65	73.53	6.01	1241.24	1359.83	111.98

APENDICE
(Continuación)

Municipios	Propiedad Privada			Comunidades Ejidales		
	Y	K	L	Y	K	L
Mazatepec	130.02	98.63	17.39	673.50	690.56	76.70
Miacatlán	173.52	166.53	29.37	1730.51	1859.70	292.92
Ocuituco	623.42	626.13	127.81	1156.87	1074.73	237.18
Puente de Ixtla	253.60	280.93	153.77	1438.84	1479.43	872.42
Temixco	0.00	0.00	0.0	359.23	368.63	0.00
Tepalcingo	505.06	544.80	55.57	2490.11	2595.27	274.02
Tepoztlan	736.83	861.13	140.93	801.81	807.00	152.36
Tetecala	202.13	298.13	36.49	343.03	325.36	41.20
Tetela del Volcán	103.18	101.53	22.93	1073.51	1054.77	238.57
Tlalnepantla	273.59	261.40	23.89	832.55	936.43	72.70
Tlaltizapán	391.48	337.33	130.79	711.50	741.26	237.70
Tlaquitenango	42.31	47.66	6.72	1732.21	1805.67	275.27
Tlayacapan	609.88	568.40	73.53	635.87	584.80	76.66
Totolapan	446.97	453.36	39.11	900.22	911.23	78.78
Xochitepec	134.24	137.46	28.26	580.70	572.40	165.53
Yautepec	149.50	147.50	19.62	2574.15	264037	327.97
Yecapixtla	1228.66	1248.83	108.11	1910.96	1966.70	170.78
Zacatepec	21.60	30.22	22.65	107.58	106.23	77.14
Zacualpan	25.06	23.66	1.31	2167.93	2078.60	113.79

* Y es la producción anual de maíz en toneladas
K indicador del capital en hectáreas
L indicador del trabajo en decenas de hombres