

1ej
30



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**LA TRANSFORMADA DE RADON, ASPECTOS PRACTICOS
Y TEORICOS DE UN PROBLEMA DE RECONSTRUCCION.**

T E S I S

Que para obtener el Título de

MATEMATICO

P R E S E N T A :

HERMINIO BLANCARTE SUAREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA - 1987.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E.

PRÓLOGO

CAPÍTULO CERO

0.1 Introducción	1
0.2 Un método de Reconstrucción	3
0.3 Algunas formulas simples	10
0.4 La determinación de un objeto por rayos X y su carencia	12
0.5 Resolución	20
0.6 Calibración	22
0.7 Ruido	23
0.8 Otros problemas	25

CAPÍTULO UNO

1.0 La transformada del X-rayo como un operador sobre L^2	29
1.1 La transformada general del K-plano	35
1.2 La transformada de Radon	37
1.3 La transformada de Radon como un opera- dor sobre L^2	42

CAPÍTULO DOS

2.0 El teorema de Ludwig sobre los soportes	52
2.1 Relaciones de algunas versiones del tea- rema de Paley-Weiner con el teorema de Ludwig.	57
2.2 Más sobre los polinomios P_m	61
2.3 Conclusiones	62

Apeúdice	63
----------	----

REFERENCIAS	67
-------------	----

PROLOGO

Al conocer que el premio Nóbel de Medicina 1979 había recaído en Godfrey N. Hounsfield dijo entre humilde y agradecido "El mejor premio es la marea de cartas de gente que ha sido curada gracias al sistema que permitió detectar tumores malignos a tiempo". Similarmente Allan McLeod Cormack con quien lo compartió, expresó: "Elimina toda confusión que se crea al obtener una fotografía de rayos X y permite a los médicos detectar la presencia de cualquier tumor en el cuerpo humano".

He querido comenzar este trabajo mencionado a los personajes reconocidos que culminaron todo un trabajo de carácter interdisciplinario llamado:

"COMPUTADOR TOMOGRAFICO ASISTIDO" o mejor conocido como: "CAT" (Scanner). Sin embargo, es justo hacer el reconocimiento a toda aquella dinámica que se generó en torno del CAT. Es por eso que al considerar el artículo: ASPECTOS PRÁCTICOS Y TEÓRICOS DE UN PROBLEMA DE RECONSTRUCCIÓN DE OBJETOS DE RADIOGRAFIAS, de Kennan T. Smith, Donald C. Solmon y Sheldon L. Wagner (aparecido en el boletín de la Sociedad Matemática Americana, Vol. 83, número 6, Noviembre 1977) a desarrollar y "enriquecer" (espero sinceramente no haberlo empobrecido) como tema de esta tesis, brindar un pequeño reconocimiento a estos matemáticos por su contribución al CAT y sin dejar de sentir admiración por la capacidad y audacia mostrada en este trabajo, al interactuar con las otras disciplinas involucradas y un digno ejemplo a seguir en nuestra comunidad.

Al mismo tiempo, que este trabajo represente un pequeño homenaje al septuagésimo aniversario de la aparición del trabajo original de Radon en 1917. Y es justo anunciarlo en su forma más elemental: Dado $\mathcal{R}CIR^M$ compacto y dada $f: \mathcal{R}CIR^M \rightarrow \mathbb{R}$ analítica; Radon se plantea la siguiente pregunta: ¿Si se conocen todos los integrales a lo largo de rectas de f sobre \mathcal{L} , es posible reconstruir a la f ? Al responder afirmativamente en ese trabajo, Radon estaba dando la respuesta al problema de inversión, el problema fundamental en el CAT.

Ahora explicaré brevemente el desarrollo de este trabajo:

En el capítulo I se hizo una síntesis de los aspectos prácticos del problema, tratando de resaltar lo que a mi juicio representaban los aspectos fundamentales, una disculpa anticipada para los especialistas sino lo logré. Teniendo como guía la Teoría de operadores no acotados desde que el operador del X-rayo y Transformada de Radon pertenecen a esa clase, y considerando los problemas propios que van desde los aspectos neuro fisiológicos hasta el software y hardware, se genera un "Dispositivo experimental" que se espera sea consistente, esto último en el lenguaje de Teoría de operadores no acotados es simplemente caracterizar el rango de nuestros operadores bajo ciertas restricciones.

En el capítulo Uno: Se hace un tratamiento más formal de nuestros operadores, se caracteriza el dominio y se encuentra su cerradura y auxiliándose del Laplaciano generalizado se encuentra una fórmula de inversión y finalmente se caracteriza el rango, excepto, esto último con la Transformada de Radon; Dicha caracterización se hará hasta el capítulo Dos. Cabe agregar que la Transformada de Radon ofrece dos ventajas básicas sobre el operador del X-rayo. La primera como se menciona en la sección 1.1, es sobre líneas, la Transformada del X-rayo, mientras que la Transformada de Radon es sobre hiperplanos y la segunda como se ve en la sección 1.2, se logra una factorización con la Transformada de Fourier en n -dimensiones seguida de la Transformada de Fourier inversa unidimensional.

En el capítulo Dos: El teorema de Ludwig sobre los soportes es la caracterización completa del Rango de la Transformada de Radon, el teorema fundamental que se utiliza es el Teorema de Paley-Weiner, se da una demostración de las versiones usadas en el apéndice. Finalmente la sección 2.2 es la integración de toda esta información con el "dispositivo experimental" y el último teorema de la sección nos da las condiciones de consistencia.

Quiero agradecer profundamente al Dr. Alberto Alonso y Coria el haber sugerido, dirigido y la formación necesaria para lograr este trabajo. Los aciertos que haya en él son ideas que le entendí correctamente; los errores son producto de mis limitaciones. Asimismo al Dr. Fernando Brambila Poz su gran predisposición, asistencia y formación que he recibido de él en estos últimos años y a mis otros maestros: Dr. José Luis Abreu León, Dr. Alejandro Illanes Mejía, Dra. Carola Andujo Rolón, Dr. Alberto León Kusner Schun, Dr. Fausto Ougay Lanios, Dr. José Alfredo Jiménez Murrieta, Dr. Juan Morales Rodríguez, Dr. Arturo Ramírez Flores, Dr. Alfinio Flores Peñaflor, M. en C. José Antonio Gómez Ortega y Dr. Carlos Gómez Mont Avalos.

Finalmente quiero agradecer a la Facultad de Ciencias y a DGAPA la ayuda económica recibida.

A la memoria de mis abuelos:
El Sr. Herminio Blancarte León.
y la Sra. Sabina Suárez

CAPITULO
CERO

Teniendo varios años en la investigación de Matemáticas puras, he estado interesado desde hace tres años en problemas prácticos en la Radiología Médica; específicamente en el problema de hallar tumores, hemorragias y otras lesiones del cerebro con el equipo ordinario del hospital y sin la introducción de material de contraste.

Esto es significativo y un problema médico no resuelto, la diferencia del tejido suave dentro del cerebro es tan insignificante comparada con lo pesado del cráneo, que es imposible hacerlo visible en radiografías ordinarias.

Los procedimientos tradicionales de radiología involucran la inyección de aire o una solución opaca. Ambas son dolorosas y peligrosas, y la información obtenida posteriormente es pobre. En realidad, cada paciente no siempre está dispuesto a soportar las pruebas.

Por otro lado, estamos viviendo avances importantes con el advenimiento del CAT (EMI scanner) y sus descendientes. El CAT toma un gran número de radiografías alrededor de un semicírculo y usa la computadora (en una forma descrita en § 0.2) y produce secciones transversales de la función densidad. La información obtenida de esta forma es más precisa y completa que la obtenida en procedimientos tradicionales y es obtenida sin material de contraste o con un uso relativamente no-invasivo. La desventaja del CAT es que es costoso y elaborado y queda fuera del presupuesto de los hospitales ordinarios. El objetivo de nuestro trabajo es producir resultados equivalentes, pero con equipo ordinario accesible y con flexibilidad de producir otro tipo de resultados.

El cerebro es un excelente punto particularmente en el estudio de la radiología médica, así como de gran significación médica. Con las pequeñas diferencias desvanecidas por el cráneo, ofrecen la máxima dificultad teórica, mientras que al mismo tiempo no teniendo partes; ofrece mínima dificultad técnica. Las lesiones estudiadas del cerebro pueden ser expectantes a usar en otras partes del cuerpo, y un problema médico bien lo grado. Ya que las lesiones son logradas, los experimentos nos alientan aquí también a describir el diagnóstico de: cálculos renales, cáncer cerebral y lesiones vasculares, todo esto por los métodos de reconstrucción de secciones transversales.

Estos problemas prácticos conducen a problemas matemáticos interesantes que requieren teneremos un poco sofisticados para su solución. Y las soluciones matemáticas, retornan a través de un aparato computacional utilizando fórmulas, acotamiento de errores, y la simulación para tener un efecto directo e importante. En realidad el problema es: el conjunto de direcciones para la cuales el problema práctico sería aproximado.

En estos momentos el trabajo es vasto en la reconstrucción de secciones transversales en otros campos: Biología Molecular, Radiografía de neutrones, y Radioastronomía. Este artículo no intenta ser un estudio en este campo. Es un informe personal de nuestro propio trabajo, y no hacemos mención de ningún otro, a parte de las comparaciones ocasionales que pudimos hacer (o pensamos poder hacer) con el CAT. Estas comparaciones serían reconocidas como opiniones de los autores. El lector que estuviera interesado en profundizar en este campo consultar la extensa bibliografía preparada por el Dr. Richard Gordon de la N.I.H. o bien particularmente en el aspecto médico referirse al trabajo original de G. N. Hounsfield el inventor del CAT [7], muchos reportes de la clínica Mayo y libros del Dr. P. F. J. Newand W. R. Scott [12].

En varios aspectos trabajamos con nuestros colegas: R. B. Guenther del departamento de Matemáticas estatal de Oregon, C. Hamaker del departamento de Matemáticas de la Universidad de Oregon, C. W. Kerber de la Escuela de Medicina de la Universidad de Oregon, y E. K. Killian de Hospital El Buen Samaritano en Corvallis.

2

Recibimos también ayuda y consejos provechosos de J. P. Kelley del departamento de rayos X del estado de Oregon y C. Klopfenstein del departamento de química de la Universidad de Oregon.

Desde que este artículo es un informe de mi lectura en Monterey. Yo me tomé la libertad de ofrecer ocasionalmente comentarios personales - para los cuales mis coautores pudieran juzgar precipitados.

Este artículo está dedicado a mi gran maestro, y amigo Nachman Aronsajn en ocasión de su setenta y ocho aniversario.

KENNAN T. SMITH

§ 0.2 UN METODO DE RECONSTRUCCION

El propósito de una radiografía de un objeto en \mathbb{R}^n , es de determinar su función densidad f . Siendo $f(x)$ la densidad en un punto x .

Un x-ray en la dirección θ , provee una función $P_\theta f$ en el plano ortogonal θ^\perp a θ , cuyo valor en un punto $x \in \theta^\perp$ es la masa total a lo largo de esta línea en la dirección θ :

$$(2.1) P_\theta f(\theta, x) = P_\theta f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f \circ \gamma) \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} f(x + \theta t) dt \quad \text{con } x \in \theta^\perp \text{ y}$$

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

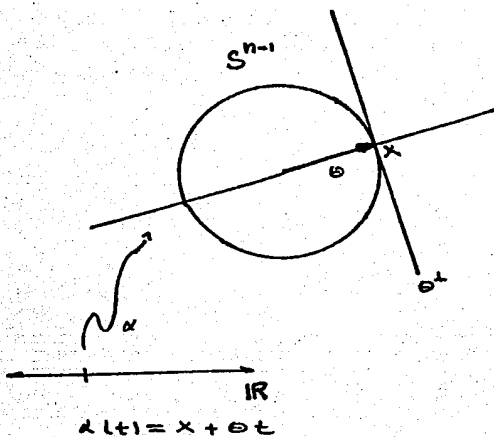
$$t \rightarrow x + \theta t.$$

"EL PROBLEMA DE RECONSTRUCCION". Es el problema de recobrar la densidad desconocida f de un promedio de ciertas radiografías: $P_{\theta_1} f, \dots, P_{\theta_m} f$. En el transcurso de este trabajo supondremos que un objeto está identificado con su función densidad y que esta función es cuadrado integrable de soporte compacto, a menos que explícitamente se indique otra cosa.

Con el objeto de tener una mejor información sobre el comportamiento de dicho operador, observemos lo siguiente:

Sea $\theta \in S^{n-1}$ y $x \in \theta^\perp$

Consideremos $T = \bigcup_{\theta \in S^{n-1}} \theta^\perp = \{(\theta, x) : \theta \in S^{n-1}, x \in \theta^\perp\}$
el haz tangente a S^{n-1} .



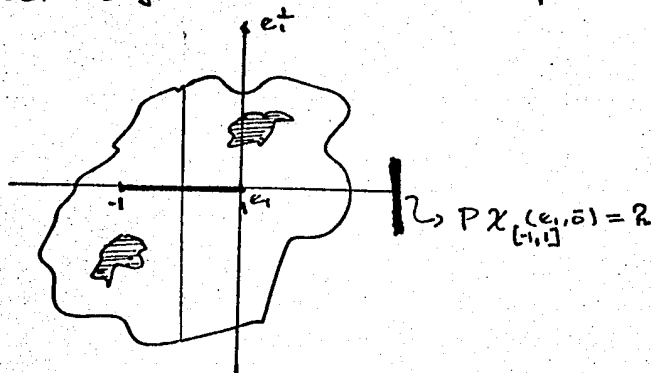
Y formalmente: $P: L^2_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(T)$

$$P_\theta f(\theta, x) = P_\theta f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x + \theta t) dt$$

Asimismo observemos el comportamiento del operador al ser aplicado a una función muy particular en la dirección $\theta = e_1$ y $x = \bar{0}$: $\chi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$P \chi_{[-1,1]}(e_1, \bar{0}) = P_{e_1} \chi_{[-1,1]}(\bar{0}) = \int_{\mathbb{R}} \chi(t e_1) dt = \int_{[-1,1]} dt = 2$$

El resultado anterior muestra lo que esperamos intuitivamente, es decir la longitud del segmento $[-1, 1]$ es medida por el operador P .



En el vocabulario de Radiografía el x-ray es el haz de luz y la radiografía es la impresión.

Aun cuando el objeto de estudio realmente vive en \mathbb{R}^3 ; es inmediato darse cuenta que la solución a dos dimensiones da información necesaria, para el problema original por la recuperación de todas las secciones bidimensionales ortogonales a una línea fija. En el presente trabajo todas las reconstrucciones tridimensionales son obtenidas en esta forma, por razones de simplicidad computacional. Aunque la situación práctica requiere del estudio de ambas.

Los métodos de Reconstrucción pueden ser fácilmente descritos; usaremos para ejemplificar uno característico, el cual es una modificación simple del esquema iterativo de Kaczmarz:

Supongamos que $N_j := \text{Ker } P_j$, f es la solución buscada
 $P_j := \text{proj}_{f+N_j}^{\perp} P_j$ (en $L^2(\mathbb{R}^m)$). y $P = P_M \dots P_1$. El método consiste en escoger una g inicial y consideremos $f_m = P^m g$; las P_j son calculables [1].
 si $N = \bigcap N_j$, entonces: $f_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{L^2(\mathbb{R}^m)} \text{proj}_{f+N}^{\perp} g$.

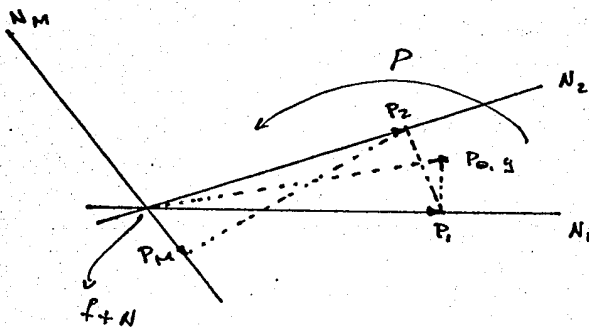
Ahora establezcamos la siguiente razón de convergencia:

teorema 2.2: Si cada N_j forma un ángulo mayor o igual que α_j con la intersección de cada uno de los siguientes y g_0 es la proyección de g sobre $f+N$, entonces:

$$\|f_m - g_0\|_2^2 \leq c^m \|g - g_0\|_2^2 \text{ con } c \leq 1 - \prod_{j=1}^{M-1} \sin^2 \alpha_j.$$

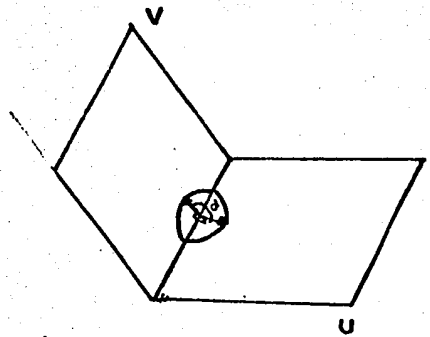
Antes de entrar a la demostración del teorema, hagamos las siguientes observaciones.

P_0, g es un elemento (vector) en L^2



Los N_j son subespacios cerrados sujetos a una condición de ángulo.

Decimos que el ángulo entre dos subespacios cerrados U y V de un espacio de Hilbert es $\geq \alpha$ si $|\langle u, v \rangle| \leq \cos \alpha \quad \forall u \in U, \forall v \in V; \|u\| = \|v\| = 1$
 y $u, v \perp U \cap V$



$$\alpha := \inf \{ \arccos | \langle u, v \rangle | : \|u\| = \|v\| = 1, u \perp U \cap V \}$$

observemos que tal ínfimo existe, ya que $U \cap V$ es un subespacio cerrado (teorema de la proyección).

Voyamos pues, a la demostración del teorema, sin pérdida de generalidad asumiremos que $f=0$, debido a que obviamente el teorema es invariante bajo traslaciones y las proyecciones son lineales.

Desde que $g_0 \in N$ y P es la identidad en N , la desigualdad a probar es: $\|P^m(g-g_0)\|_2^2 \leq (1 - \prod_{j=1}^{m-1} \text{sen}^2 \alpha_j)^m \|g-g_0\|_2^2$

haciendo $v=g-g_0$ y notando que N^\perp es invariante bajo P .

a saber: Sea $u \in PN^\perp \exists w \in N^\perp, Pw=u$ y sea $w \in N$ p.d. $\langle u, w \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle u, w \rangle = \langle Pw, w \rangle = \langle w, P^*w \rangle = \langle w, P^*Pw \rangle = \langle w, P^2w \rangle$$

$$= \langle w, Pw \rangle = \langle w, w \rangle = 0. \Rightarrow u \in N^\perp \therefore PN^\perp \subset N^\perp$$

observemos también que: $\|PN\|_2^2 = |\langle PN, PN \rangle| = |\langle u, P^*PN \rangle| = |\langle u, P^2u \rangle|$

$$= |\langle u, PN \rangle| \leq \|u\|_2 \|PN\|_2 \cos \theta \leq \|u\|_2 \|PN\|_2 = \|PN\|_2^2$$

desde que $PN \in N^\perp \Rightarrow \theta = \pi$ y por la continuidad de la proyección P y su caracterización $P^2=P$ y $P^*=P$ es decir P es la proyección ortogonal.

\therefore se es para pues que $\|PN\|_2 \leq 1 - \prod_{j=1}^{m-1} \text{sen}^2 \alpha_j$.

\therefore es suficiente mostrar que: $\|PN\|_2^2 \leq (1 - \prod_{j=1}^{m-1} \text{sen}^2 \alpha_j) \|u\|_2^2 \forall u \in N^\perp$.

Y será demostrado por inducción sobre m , el caso $m=1$ es evidente ya que ambos miembros son cero.

Sea $N' = N_1 \cap \dots \cap N_m$ y $P' = P_1 \dots P_m$. para cualesquiera $v \in N'$ escribimos $v = w + v_1$ con $w \in N_1$ y $v_1 \in N_1^\perp$. así que $Pv = P'w = P'_1 P_1(w + v_1)$

$= P'_1 P_1 w + P'_1 P_1 v_1 = P'_1 w$ y nuevamente escribimos $w = w' + w''$ con $w' \in N_1$ y $w'' \in N_1^\perp$
 $\Rightarrow P'_1 w = P'_1 w' + P'_1 w'' = w' + P'_1 w''$ y los sumandos son ortogonales: $\|P'_1 w\|_2^2 = \|w'\|_2^2 + \|P'_1 w''\|_2^2$. la hipótesis de inducción nos da: $\|P'_1 w''\|_2^2 \leq (1 - \prod_{j=2}^{m-1} \text{sen}^2 \alpha_j) \|w''\|_2^2$

Combinando estas fórmulas obtenemos:

$$\begin{aligned} \|P'W\|_2^2 &= \|W'\|_2^2 + \|P'W''\|_2^2 \leq \|W'\|_2^2 + \left(1 - \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j}\right) \|W''\|_2^2 = \|W'\|_2^2 + \|W''\|_2^2 \\ &- \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} \|W''\|_2^2 = \|W'\|_2^2 + \|W''\|_2^2 - \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} \|W''\|_2^2 = \|W''\|_2^2 - \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} [\|W''\|_2^2 - \|W'\|_2^2] \\ &= \|W''\|_2^2 - \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} \|W''\|_2^2 + \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} \|W'\|_2^2 = \left(1 - \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j}\right) \|W''\|_2^2 + \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} \|W'\|_2^2 \\ \therefore \|P'W\|_2^2 &\leq \left(1 - \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j}\right) \|W''\|_2^2 + \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} \|W'\|_2^2 \end{aligned}$$

Nuevamente $w \in N_i$ es ortogonal a $N = N_i \cap N'$, $w' \in N'$ y es ortogonal a N .

Desde que el ángulo entre N_i y N' es a lo más α_i , se sigue que:

$$\|w'\|_2^2 = \langle w', w' \rangle = \langle w - w'', w' \rangle = \langle w, w' \rangle - \langle w'', w' \rangle = \langle w, w' \rangle \leq \|w'\| \|w\| \cos \alpha_i$$

$\therefore \|w'\| \leq \|w\| \cos \alpha_i$. Ahora observemos: $PN = P'W$ y $\|w\| \leq \|v\|$

$$\text{(desde que } v = w + v_i) \Rightarrow \|PN\|_2^2 \leq \left(1 - \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j}\right) \|v\|_2^2 + \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} \cos^2 \alpha_i \|w\|_2^2$$

$$\leq \left(1 - \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j}\right) \|v\|_2^2 + \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} \cos^2 \alpha_i \|v\|_2^2 \leq \left[\left(1 - \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j}\right) + \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} \cos^2 \alpha_i \right] \|v\|_2^2$$

$$\|v\|_2^2 + \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} \cos^2 \alpha_i \|v\|_2^2 \leq \left[\left(1 - \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j}\right) + \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} \cos^2 \alpha_i \right] \|v\|_2^2$$

$$\leq \left[1 - \frac{M-1}{\prod_{j=2}^M \sec^2 \alpha_j} (1 - \cos^2 \alpha_i) \right] \|v\|_2^2 \leq \left(1 - \frac{M-1}{\prod_{j=1}^M \sec^2 \alpha_j}\right) \|v\|_2^2 \quad \blacksquare$$

OBSERVACIÓN: En esta Reconstrucción se utilizaron 18 direcciones de x-rayos ($M=18$) y 10 iteraciones ($m=10$); el tiempo de prueba sobre la CDC 3300 es cerca de 40 segundos. D.C. Salmon y C. Hamaker [6] tienen calculados los ángulos α_j y tienen establecido que: $\frac{17}{\prod_{j=1}^{17} \sec^2 \alpha_j} \approx 2.957 \times 10^{-5}$ (por un ordenamiento juicioso de las proyecciones P_i). No obstante, para la aplicación del teorema (2.2) a una sucesión de subespacios invariantes de dimensión finita bajo P . Ellos han mostrado que $c \leq 2/3$ (donde c es la constante en 2.3). Así la teoría afirma que 12 iteraciones son suficientes para obtener un error relativo del 10%, lo cual está de acuerdo con las 10 iteraciones que hemos usado en la práctica.

Los resultados significativos de nuestro experimento, uno sobre la cabeza de un cerdo y el otro sobre un tumor cerebral de un paciente en el hospital de la Universidad de Oregon son mostrados en las figuras 1 y 3 de la siguiente página.

OBJETOS RECONSTRUIDOS DE RADIOGRAFÍAS

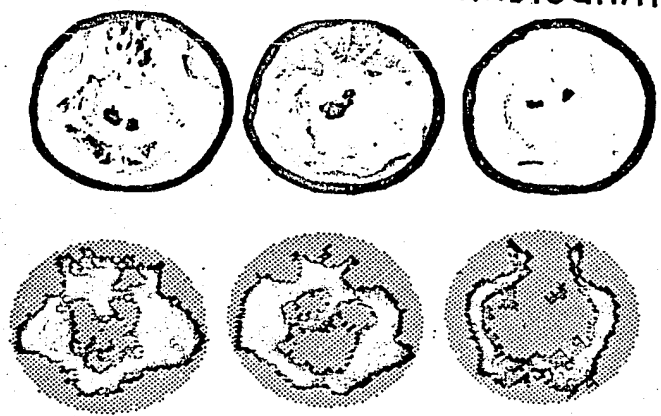


FIGURA 1. Reconstrucción de la cabeza de un cerdo, la cabeza del cerdo fue un espectro que consistió de un cráneo real de 10 cm. de diámetro con tejido encarnado (49% de tejido encarnado, 48% de parafina y 2% de resina). En el cual hubo dos orificios llenos con agua de 0.8 cm. de diámetro. En el renglón superior se muestran fotografías reales. En el renglón inferior las reconstrucciones de las mismas secciones transversales.

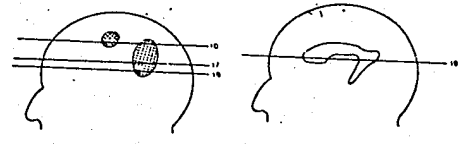


FIGURA 2. La localización de tumores cerebrales (como es demostrado por Angiografía) en un paciente. El esbozo del perfil de un paciente indica los niveles de las secciones transversales mostradas en la figura 3. En el perfil derecho son indicados los ventrículos. Los números corresponden a las secciones transversales mostradas en la figura 3.

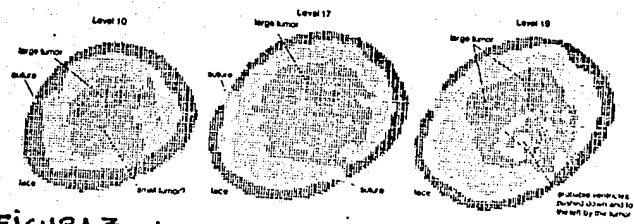
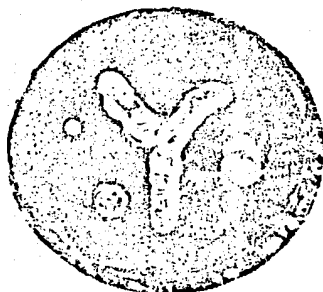


FIGURA 3. Las secciones transversales horizontales de un tumor cerebral son esbozadas en la figura 2. La metástasis tumoral es la masa sombreada en el interior. Los números corresponden a las secciones horizontales indicadas en la figura 2.

El resultado del experimento más reciente es mostrado en las figuras 4, 5 y 6. Este experimento involucra un espectro (o modelo) completamente conocido, similar al usado por la clínica Mayo, para comprobar la uniformidad de la exploración EMI. Consiste en un cilindro de vidrio de 3" de diámetro enrollado con una tapa de teflón de 1/8" de espesor. Interiormente se encuentran dos alfileres de Lexan de 1/4" y 1/8", un orificio lleno de agua de diámetro 3/16" y un canal en forma de Y lleno de agua de diámetro 3/16". Los alfileres de Lexan son suaves y redondeados, pero el orificio y el canal son deformes. En la Radiografía tradicional: el vidrio, el lexan y el agua son considerados completamente equivalentes (De acuerdo a T.F. Budinger las densidades físicas son como siguen: teflón 2.16, Lexan 1.2, vidrio 1.14 y agua 1.00). Una fotografía del espectro es mostrada en la figura 4, y una Reconstrucción EMI en la figura 5, y nuestra propia reconstrucción en las figuras 6a y 6b. Los números en la figura 6b, en realidad los que nos interesan, son aquellos que forman el contraste (los alineados) del programa de Reconstrucción sin ninguna modificación esencial salvo una secundaria. 468 fue sustraído de cada numeración en el espectro, así que la posición más interesante estaría fuera como números dígitos, y cualquier número menor que -9 fue reemplazado por -9 permaneciendo en el rango de dos dígitos. (Más tarde ocurriría en el teflón compacto y en las tirajas. Aunque el teflón es más denso que los otros materiales, en ambos en la reconstrucción EMI, y en la nuestra se mostró que debe ser menos denso. Cada tapa de teflón es diferente al teflón mismo, cabe la posibilidad de que el aire atrapado en el papel de envoltura reduzca la densidad).

1/8" pin

Water
hole

1/4" pin

Figure 4. Photo of phantom top view

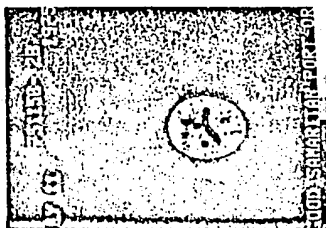


Figure 5. EMI Scan

RECONSTRUCTING OBJECTS FROM RADIOGRAPHS

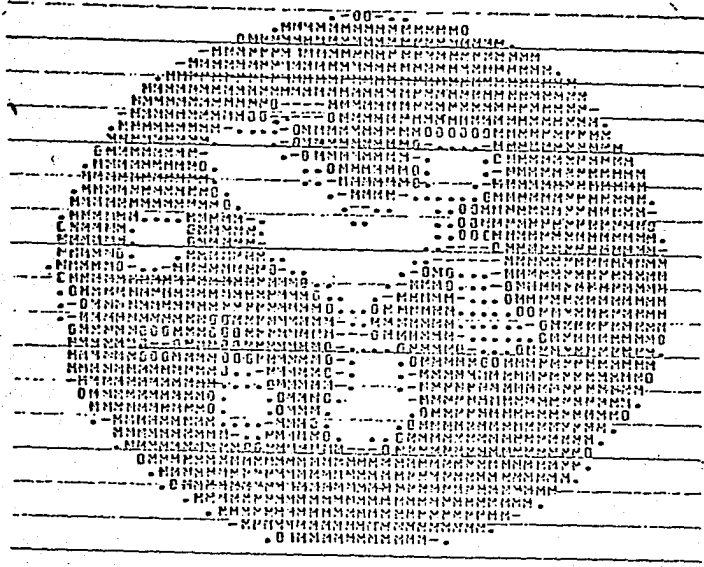


Figure 6a. Reconstruction of Phantom

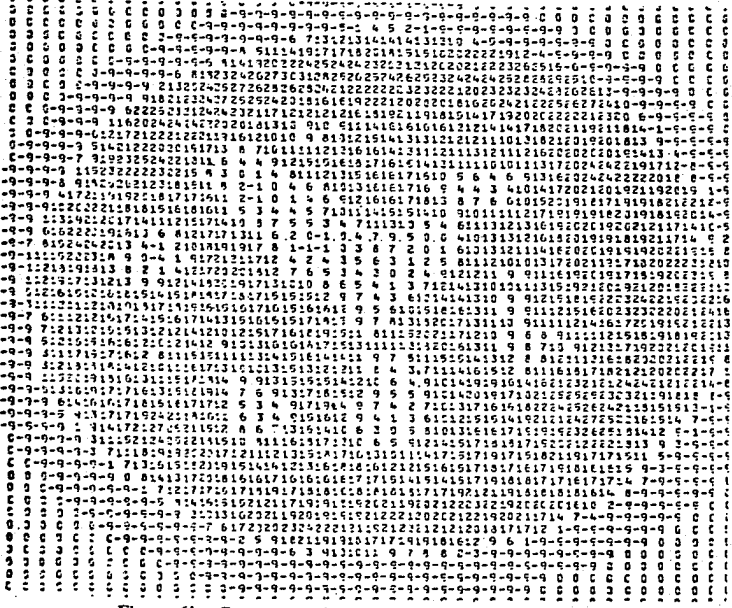


Figure 6b. Reconstruction of Phantom - density numbers

§ 0.3 ALGUNAS FORMULAS SIMPLES.

10

Es inmediato checar que si p es una función de una sola variable, entonces:

$$(3.1) \int_{\Theta^1} P_{\theta} f(x) p(\langle x, \xi \rangle) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) p(\langle y, \xi \rangle) dy \quad \text{para } \xi \in \Theta^1$$

a saber: $\Theta^1 = T_{\theta} S^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ (localmente).

$$\Rightarrow \int_{\Theta^1} P_{\theta} f(x) p(\langle x, \xi \rangle) dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+t\theta) dt \right) p(\langle x, \xi \rangle) dx \quad (\text{Fubini}).$$

Ahora $f p \in L^2_0(\mathbb{R}^n) \subset L^1_0(\mathbb{R}^n)$. $\therefore f p$ es medible sobre (\mathbb{R}^n, dy) donde

$$y = x + t\theta \Rightarrow dy = dx dt \quad \therefore \int_{\mathbb{R}^n} f(y) p(\langle y, \xi \rangle) dy < \infty \quad \text{y por Fubini:}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+t\theta) dt \right) p(\langle x, \xi \rangle) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) p(\langle y, \xi \rangle) dy \quad \text{para } \xi \in \Theta^1$$

$$\langle x, \xi \rangle = \langle y - t\theta, \xi \rangle = \langle y, \xi \rangle - t \langle \theta, \xi \rangle = \langle y, \xi \rangle \quad \blacksquare$$

Esta fórmula tiene dos consecuencias interesantes. La primera a parece tomar $\rho(\xi) = t^m$, el lado izquierdo es un polinomio homogéneo en ξ definido sobre Θ^1 y depende de f y θ , mientras, que el lado derecho es un polinomio homogéneo en ξ definido sobre \mathbb{R}^n y depende únicamente de f :

$$\int_{\Theta^1} P_{\theta} f(x) \langle x, \xi \rangle^m dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \langle y, \xi \rangle^m dy.$$

Esto significa que las funciones en el rango de la transformada del x-rayo debería satisfacer ciertas condiciones de Consistencia. D. Ludwig [9] (para $n=2$) y D.C. Solomon [15] (para $n \geq 2$) tienen probado el siguiente teorema. Ver § 2.0 para una afirmación más precisa y la prueba del Teorema Ludwig.

Teorema 3.2. Además de las condiciones obvias: Simetría, soporte y regularidad una función $g(\theta, x)$ definida para $\theta \in S^{n-1}$ y $x \in \Theta^1$ pertenezca al Rango de la Transformada del x-rayo sii para cada m los polinomios

$$(3.3) P_{m, \theta}(\xi) = \int g(\theta, x) \langle x, \xi \rangle^m dx \quad \text{para } \xi \in \Theta^1 \text{ conveniente}$$

mente juntos forman un polinomio sobre \mathbb{R}^n . i.e. $P_{m, \theta}(\xi) = P_m(\xi)$ para $\xi \in \Theta^1$

OBSERVACIÓN 3.4 En el caso de los rayos X se espera que el 80-90% de los fotones registrados el filme sean ruido y un ruido adicional por el desarrollo del proceso. Cuando se toma un número finito M de radiografías $g(\theta_1, x) \dots g(\theta_M, x)$ se presupone que cumplen las condiciones del teorema. En cualquier caso, no es de esperarse que radiografías reales de cualquier objeto y todas las iteraciones sean consistentes, sin embargo esto no es totalmente falso. Sin embargo como se verá en § 2.2 "Un número finito de radiografías con ruido en un número finito de puntos pueden no ser inconsistentes".

El Teorema 3.2 tiene dos consecuencias, una trivial pero que es importante en la práctica es como sigue: Es claro que bajo condiciones de Laboratorio que varias radiografías debey ser radiografías del mismo objeto, no así en el caso de un paciente bajo las condiciones de un hospital

Las precauciones tomadas en el varivén y movimientos rotativos de la cabeza II suprimen el grado, y el filma resultante suprime posiciones en las cintas.

El problema entonces es tomar un promedio de las radiografías resultantes. El teorema muestra ($m=0,1$) que esto puede ser archivado tomando los centros de gravedad.

Una segunda consecuencia útil de la fórmula (3.1) es la transformada de Fourier que resulta tomando $p(t) = e^{it}$. Módulo las potencias de $z\pi$, el lado izquierdo es la transformada de Fourier de Pof y al lado derecho es la transformada de Fourier de f . Cuando las potencias de $z\pi$ son consideradas, el resultado es como sigue:

$$(3.5) \quad (Pof)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\xi) \quad \text{para } \xi \in \mathcal{O}^t \quad \text{donde}$$

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathcal{O}^t} e^{i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx$$

OBSERVACION 3.6 : Otro método de reconstrucción comúnmente usado. Usualmente llamado el "Método de Fourier", es basado en la fórmula (3.5). Esta fórmula muestra que cuando las radiografías del objeto f son conocidas en las direcciones $\theta_1, \dots, \theta_m$, entonces la transformada de Fourier \hat{f} es conocida sobre las líneas $\theta_1^\perp, \dots, \theta_m^\perp$, entonces \hat{f} está definida casi dondequiera por una interpolación, y la reconstrucción es la transformada de Fourier inversa.

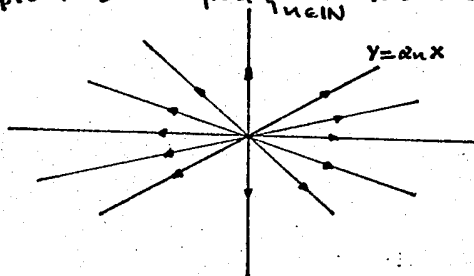
§0.4 LA DETERMINACIÓN DE UN OBJETO POR RAYOS X Y SU CARENCIA

Uno de los puntos importantes a discutir en este trabajo, es el de extender a cuales X-rayos determinan un objeto. Y esto se logrará primero al desechar las direcciones inútiles, donde se entenderá por una dirección inútil, aquello en donde se tiene la misma radiografía del objeto. Hagamos pues una caracterización de este punto:

De la transformada de Fourier de la fórmula (3.5) es claro que el objeto está determinado por su radiografía. Sabemos que el operador P_θ tiene como dominio $L^2_0(\mathbb{R}^n)$ y que la Transformada de Fourier viene de una clase especial de funciones analíticas sobre \mathbb{R}^n : $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (El espacio de funciones de Schwartz). Y es bien conocido que existen funciones analíticas que pueden anularse en un conjunto infinito de subespacios de dimensión $n-1$ sin anularse idénticamente. (Por ejemplo: sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ los racionales números

dos y $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x, y) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n x - y}{x_n x + y}$$



Y obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.1: Un objeto está determinado por un conjunto infinito de radiografías

Este resultado a pesar de todo, puede ser alentador ya que nos proporciona una infinidad de direcciones viables. No obstante obtenemos uno desalentador:

Teorema 4.2: Un conjunto finito de radiografías nunca determina un objeto.

Y en realidad obtenemos el siguiente resultado: Dado un número finito de direcciones $\theta_1, \dots, \theta_M$. Escogamos un polinomio g que se anule en θ_j^\perp , por ejemplo:

$$g(\xi) = \langle \xi, \theta_1 \rangle \dots \langle \xi, \theta_M \rangle \quad \text{donde } \xi_i = \langle \xi, \theta_i \rangle. \text{ y sea } \Omega = (-i \frac{\partial}{\partial x_1}) \dots (-i \frac{\partial}{\partial x_M})$$

Para cualesquiera $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $f = \Omega g$, y consideremos $P_\theta f$, por la fórmula (3.5) obtenemos:

$$(P_\theta f)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{1/2} (\Omega g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{1/2} \overbrace{(-i \frac{\partial}{\partial x_1})}(\xi) \dots \overbrace{(-i \frac{\partial}{\partial x_M})}(\xi)$$

$$\text{y } \overbrace{(-i \frac{\partial}{\partial x_j})}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \langle \xi, x \rangle} \overbrace{(-i \frac{\partial}{\partial x_j})} g(x) dx = \int_{\text{supp } g} e^{-i \langle \xi, x \rangle} \overbrace{(-i \frac{\partial}{\partial x_j})} g(x) dx$$

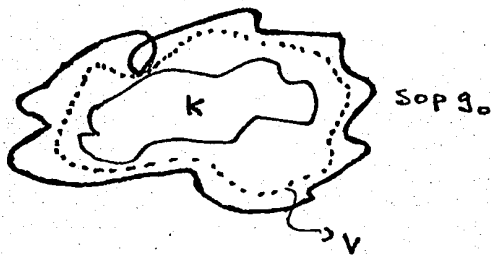
$$= -i e^{-i \langle \xi, x \rangle} g(x) \Big|_{\text{supp } g} - \int_{\text{supp } g} -i g(x) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-i \langle \xi, x \rangle} dx = 0 + i \int_{\text{supp } g} g(x) e^{-i \langle \xi, x \rangle} dx$$

$$= -i \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-i \langle \xi, x \rangle} dx = \xi_j \hat{g}(\xi) \quad \therefore (P_\theta f)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{1/2} g(\xi) \hat{g}(\xi) \text{ para } \xi \in \theta^\perp$$

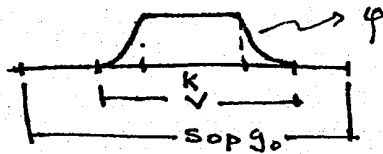
Y así: $(P_{\theta_j} f)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{1/2} \langle \xi, \theta_j \rangle \hat{g}(\xi) = 0 \quad \xi \in \theta_j^\perp \Rightarrow (P_{\theta_j} f)^\wedge(\xi) = P_{\theta_j} f = 0$

Por la inyectividad de la Transformada de Fourier, para $j=1, \dots, M$. Esto muestra que hay una plenitud de objetos con radiografías cero en las direcciones dadas.

En realidad, si g_0 es una función cualquiera en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, el teorema de B. Malgrangue [10] sobre la solubilidad de ecuaciones diferenciales parciales lineales con coeficientes constantes puede ser usado para resolver la ecuación: $\mathcal{Q}g_1 = g_0$. Nuevamente g_1 del soporte de g_0 , entonces si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es escogida de tal forma que para un abierto V suficientemente grande que contenga a un compacto arbitrario en el interior del soporte de g_0 , la existencia de tal función φ es en realidad consecuencia del lema de Urysohn versión C_0^∞ y basta para que ello ocurra que la topología sea Hausdorff localmente compacta que obviamente ocurre en este caso.



$$K \subset V \subset \text{SOP } g_0$$



Nuevamente tomemos $g = \varphi g_1$, es decir $f = \mathcal{Q}(\varphi g_1)$. Entonces:

a) $P_0 g_j = 0$ para $j=1 \dots M$ b) $\mathcal{Q}(\varphi g_1) = \mathcal{Q}(g_1) = g_0 = f$ en K .

En otras palabras, f tiene radiografía cero en las direcciones dadas, y así es igual a lo dado completamente arbitrario excepto en el anillo $V \setminus K$. Una simple modificación de este argumento da el siguiente resultado, el cual es la afirmación precisa del teorema 4.2.

teorema 4.3. Supongamos que damos un objeto infinitamente diferenciable f_0 y un número finito de direcciones, entonces existe un nuevo objeto infinitamente diferenciable f con exactamente la misma forma, exactamente las mismas radiografías en esas direcciones y completamente arbitrario sobre cualquier conjunto compacto en el interior del soporte de f_0 .

Antes de hacer algunas ilustraciones de este teorema y algunas de sus implicaciones, consideraremos otro teorema que trata de un punto en dirección puesta. Aunque un método de reconstrucción necesariamente usa únicamente un número finito de x-rayos, es también necesario producir únicamente un espacio de dimensión finita de posibles reconstrucciones. La cuestión es planteada de manera siguiente: obtener las radiografías suficientes que sirvan para distinguir los objetos interiores en este espacio de dimensión finita.

teorema 4.4. Para casi cualquier espacio de dimensión finita F los objetos en F pueden ser distinguidos por una simple radiografía de casi cualquier dirección.

La afirmación precisa es como sigue.

teorema 4.5. Sea F un espacio de dimensión finita de objetos con base f_1, \dots, f_N y sea V el conjunto de direcciones θ tales que al menos dos objetos en F tengan la misma radiografía en la dirección θ . entonces

a) V es una variedad algebraica en S^{n-1} ;

b) $V = S^{n-1}$ sii existen polinomios q_1, \dots, q_N tales que:

$$(4.6.) \quad \sum_{j=1}^N q_j(\theta) p_\theta f_j(\xi) = 0 \quad \forall \theta \text{ y } \forall \xi \in \theta^\perp.$$

La parte a) dice que casi en cualquier dirección sirve para distinguir entre los objetos de F , mientras que la parte b) dice que este es el caso usual. En nuestros reconstrucciones las f_j 's son funciones de prueba sobre una red fija en \mathbb{R}^2 . Este ejemplo es trabajado al final de la prueba del teorema 4.13.

A continuación se probará un teorema un poco más general.

teorema 4.7. Sean f_1, \dots, f_N funciones analíticas reales sobre \mathbb{R}^n , y sea V el conjunto de direcciones tales que sus restricciones al plano θ^\perp sean linealmente dependientes. Entonces

a) V es una variedad algebraica en S^{n-1} ;

b) $V = S^{n-1}$ sii existen polinomios q_1, \dots, q_N tales que

$$(4.8.) \quad \sum_{j=1}^N q_j(\theta) f_j(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta) = 0 \quad \forall \theta \text{ y } \forall \xi$$

Antes de hacer la prueba, conviene hacer la siguiente observación:

$\mathbb{R}[S^{n-1}] := \mathbb{R}[\theta_1, \dots, \theta_n] / \left(\sum_{i=1}^n \theta_i^2 - 1 \right)$
es decir $\mathbb{R}[S^{n-1}]$ es el anillo de polinomios en S^{n-1}

y Entonces V es una variedad algebraica en $S^{n-1} \Leftrightarrow \exists \{q_\alpha\} \in \mathbb{R}[S^{n-1}]$

tales que $V = \{(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n : q_\alpha(\theta_1, \dots, \theta_n) = 0\}$

Demostración:

a) Un punto $\theta \in V \Leftrightarrow$ existen números $q_j(\theta)$ satisfaciendo (4.8)

\Leftrightarrow cada coeficiente de la expansión de Taylor de (4.8) es cero. Nuevamente, si $g(\xi) = f(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta)$ y $A_\theta = D - \langle D, \theta \rangle \theta$ con $D = (D_1, \dots, D_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

Ahora observemos lo siguiente $h = \langle h, \theta \rangle \theta = (h_1 - \langle h, \theta \rangle \theta_1, \dots, h_n - \langle h, \theta \rangle \theta_n)$

Su derivada es: $\text{Id} - \begin{bmatrix} \theta_1^2 \theta_1 \theta_2 \dots \theta_1 \theta_n \\ \vdots \\ \theta_n \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow D(f(\cdot - \langle \cdot, \theta \rangle \theta))(\xi) = Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta) \cdot \left\{ \text{Id} - \begin{bmatrix} \theta_1^2 \theta_1 \theta_2 \dots \theta_1 \theta_n \\ \vdots \\ \theta_n \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n \end{bmatrix} \right\}$$

$$= Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta) - [\langle Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta), \theta \rangle \theta \dots \langle Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta), \theta \rangle \theta]$$

Desde que $Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &= Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta) - \sum_{i=1}^n \langle Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta), \theta \rangle \langle \theta, e_i \rangle = Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta) \\ &\quad - \langle Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta), \theta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \theta, e_i \rangle = Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta) - \langle Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta), \theta \rangle \theta \\ &= Dg(\xi). \end{aligned}$$

$$Y A_\theta(f)(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta) = Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta) - \langle Df(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta), \theta \rangle \theta$$

$$\therefore A_\theta(f)(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta) = Dg(\xi).$$

Notemos que: $\langle \xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta, \theta \rangle = 0$ (El subespacio generado por $\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta$)

$$\bullet A_\theta(f)(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot - \langle \cdot, \theta \rangle \theta), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\cdot - \langle \cdot, \theta \rangle \theta) \right)(\xi) *$$

Y $f_1|_{\theta^\perp}, \dots, f_n|_{\theta^\perp}$ son linealmente dependientes $\Leftrightarrow \exists q_1(\theta), \dots, q_n(\theta)$ no todos ceros tales que $\sum_{j=1}^n q_j(\theta) f_j|_{\theta^\perp} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n q_j(\theta) f_j(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta) = 0 \quad \forall \xi$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n q_j(\theta) \frac{\partial f_j(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = 0 \quad \forall \xi; \forall \theta \in \mathbb{R}^n$$

En particular para $\xi = 0$ podemos pensar a $A_\theta^k f_j(\theta)$ como una K -cada que depende de k y n . Entonces para cierta k $K(k) \geq n$ tenemos:

$$\sum_{j=1}^n q_j(\theta) f_j|_{\theta^\perp} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n q_j(\theta) A_\theta^k(f_j)(\theta) = 0 \quad \forall \theta$$



$$\begin{bmatrix} f_1(\theta) \\ \vdots \\ f_N(\theta) \end{bmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow (f_1(\theta) \dots f_N(\theta)) \neq 0 \in \text{Ker } M_{K \times N}$$

\Leftrightarrow todos los menores de $N \times N = 0$ ($K(K) \geq N$) \Leftrightarrow Son polinomios en $\theta \in V_K$

$\therefore V$ es una variedad algebraica ■

b) Hagamos la siguiente observación: si $|I| \leq K$ es el rango máximo en un punto de V y reorganizamos las entradas con índice j ; así que $\{A_{\theta}^{\alpha} f_j\}_{j=1 \dots r}$ tiene rango r en algún punto de V ; consecuentemente la matriz (en θ)

$$\begin{array}{cccc} A_{\theta}^{\alpha_1} f_1 & A_{\theta}^{\alpha_2} f_2 & \dots & A_{\theta}^{\alpha_r} f_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{\theta}^{\alpha_r} f_1 & A_{\theta}^{\alpha_r} f_2 & \dots & A_{\theta}^{\alpha_r} f_{r+1} \\ A_{\theta}^{\alpha} f_1 & A_{\theta}^{\alpha} f_2 & \dots & A_{\theta}^{\alpha} f_{r+1} \end{array}$$

o en otra notación:

$$\begin{array}{|c} r+1 \\ \hline \begin{array}{|c} II, I \\ \partial g_1(\theta) / \partial x^I \\ \dots \\ \partial g_r(\theta) / \partial x^I \\ \dots \\ \partial g_{r+1}(\theta) / \partial x^I \end{array} \\ \hline N \end{array}$$

De Rango $r < N$

Visto esto como una transformación lineal de $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}$

Por el teorema de la dimensión: $N = \dim \text{Ker } t + \dim \text{Im}$

$$= r.$$

$$\therefore N = r + \dim \Delta$$

A menos que el Ker tenga elementos distintos

Es decir $\text{Ker} \neq \emptyset \therefore \exists \begin{bmatrix} f_1(\theta) \\ \vdots \\ f_N(\theta) \end{bmatrix} \neq \vec{0} \in \text{Ker}$

Entonces $\sum_{j=1}^N f_j(\theta) \frac{\partial g_i(\theta)}{\partial x^{I_j}} = 0 \quad \forall j=1 \dots r$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r+1} \frac{\partial g_i(\theta)}{\partial x^I} M_i(\theta) = 0$ * . Los M_i son los menores y por lo tanto

polinomios en $\mathbb{R}[\theta_1, \dots, \theta_N] \Rightarrow M_{r+2} = M_{r+3} = \dots = M_N = 0$ en realidad

$r = \text{máximo de los rangos de todos los posibles } \theta \text{ y todos los } I$; Notemos

que * es cierto $\forall \theta$. Desde que si $\exists \theta_0$ tal que $\sum_{i=1}^{r+1} \frac{\partial g_i(\theta_0)}{\partial x^I} M_i(\theta_0) \neq 0$ ∇

\therefore * es cierto $\forall \theta \therefore f_j = M_j \in \mathbb{R}[\theta_1, \dots, \theta_N]$

Si $V = S^{n-1} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N g_i(\xi) M_i(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in S^{n-1}$

Si $\sum_{i=1}^N f_i(\xi - \langle \xi, \theta \rangle \theta) M_i(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in S^{n-1}$

$\theta \notin \langle M_1(\theta) = M_2(\theta) = \dots = M_N(\theta) = 0 \rangle \Rightarrow 2.4B \Rightarrow$ Dependencia lineal en $S^{n-1} \setminus W = V$; V es algebraico y $S^{n-1} = V \cup W$ (unión ajena)

$\Rightarrow V$ es abierto y cerrado $\therefore V = S^{n-1}$ \blacksquare

* La idea de la demostración fue del Dr. Kushner y el Dr. Gómez Mont

En este orden de ideas se dará un teorema similar que provee la información correspondiente en el caso de la Transformada de Radon, El cual es uno de los objetivos centrales en el capítulo Uno.

Teorema 4.12. Sean f_1, \dots, f_N funciones analíticas reales sobre \mathbb{R}^n , y sea V el conjunto de direcciones θ tales que sus restricciones a la línea que pasa a través del origen con dirección θ son linealmente dependientes. Entonces V es una variedad algebraica en S^{n-1} , y $V = S^{n-1}$ si existen polinomios homogéneos g_1, \dots, g_N del mismo grado tal que

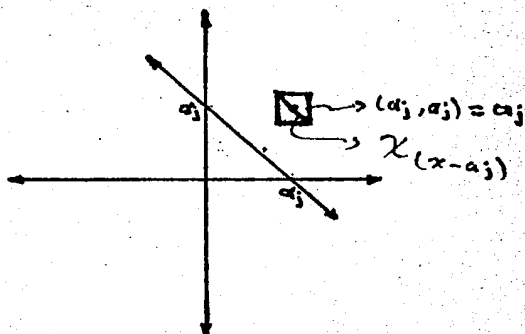
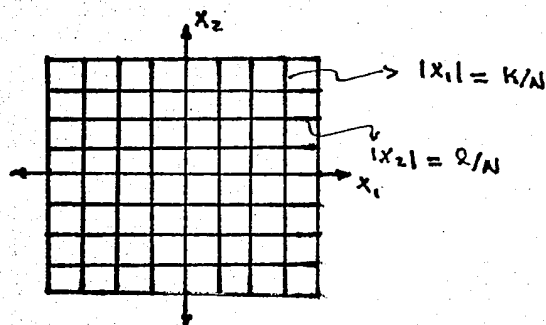
$$(4.13) \quad \sum_{j=1}^N g_j f_j = 0$$

La prueba es similar a la del teorema 4.7 excepto que en lugar de los coeficientes de Taylor de las f_j , las partes homogéneas de las expansiones de Taylor son usadas.

En la situación práctica la cuestión puede después ser resuelta sin recurrir al teorema general. En nuestro caso, por ejemplo, la situación es como sigue.

Supongamos que todos los objetos pueden considerarse que tienen soporte en el cuadrado unitario $|x_1| \leq 1$; $|x_2| \leq 1$. Un número N es escogido (en nuestro caso $N=25$), y objetos arbitrarios son aproximadas por funciones de prueba sobre los cuadrados determinados por las líneas $|x_1| = k/N$ y $|x_2| = l/N$. Así, una base del espacio F consiste de las traslaciones:

$\chi_j(x) = \chi(x - a_j)$, donde χ es la función característica del cuadrado $|x_1| \leq 1/2N$, $|x_2| \leq 1/2N$ y los a_j son los puntos en los centros de los cuadrados anteriores,



Las transformadas de Fourier, las f_j del teorema anterior, son por lo tanto las funciones $f_j(\xi) = \widehat{\chi}(a_j, \xi)$, y la variedad V consiste de estos θ para los cuales la matriz $d_{jk} = \langle a_j, \theta \rangle$ tiene menos que rango máximo. Estos son los θ para los cuales los números $\langle a_j, \theta \rangle$ no son distinguibles, aquí θ es el ángulo para el cual la línea correspondiente tiene pendiente k/l con k, l enteros a lo más $2N$ en valor absoluto. Este caso particular es dado por R. Mersereau y A. Oppenheim [1].

Nuevamente, la cuestión es, ¿Cuál es al resultado práctico, el obviamente no realizable teorema 4.3 en dimensión infinita o el teorema 4.4 en dimensión finita?

Veamos que aparece en la práctica considerando la figura 7, la cual muestra dos reconstrucciones de la misma sección transversal de la cabeza de otro paciente con tumor cerebral en el Hospital médico escolar, de la Universidad de Oregon. En el primero, el tumor (verificado por biopsia) es fácilmente visible como la masa oscura sobre el lado derecho. En el segundo, es fusionado con el cráneo (en concordancia con el teorema 4.3) en tal caso se hace un diagnóstico muy dudoso. Es realmente al teorema 4.3 al que es evidente aquí, no existe ruido, error experimental, o algo que tenga que ver.

Objetos viables médicamente con radiografías virtualmente idénticas. Así médicamente muy distintos, es decir una con tumor y otra si él. Son fácilmente producido artificialmente con la computadora sin ruido y sin error experimental.

Así el teorema de indeterminación expresa un hecho fundamental que debe ser considerado. Las consecuencias pueden ser reducidas por el uso de un número grande de direcciones de x-rayos, pero algunas pueden ser mejores direcciones. Una posibilidad es descrita en la próxima sección.

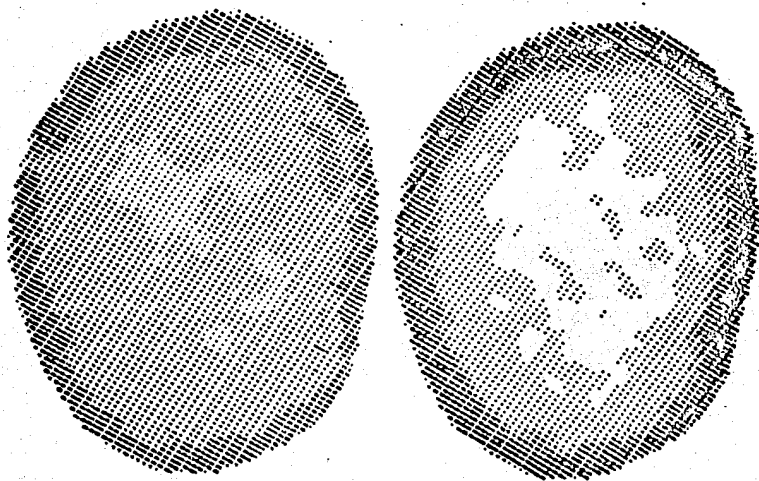


Figure 7

§ 0.5 RESOLUCIÓN

En forma imprecisa el término Resolución, se refiere a la forma mínima de los detalles que pueden ser esperados en la impresión.

Decimos que un procedimiento para el diagnóstico de lesión del tumor tiene resolución $1/8''$, significará que el procedimiento puede revelar tumores, hemorragias, etc. Los cuales tienen un diámetro de $1/8''$ o más preciso.

Tres factores gobiernan la resolución de Reconstrucción de rayos X. El primero es la indeterminación descrita en el teorema 4.3, el segundo es el tamaño de la matriz de reconstrucción relativa a la forma del objeto completo reconstruido y el tercero es el ruido. Los primeros dos serán discutidos en esta sección y el tercero posteriormente.

Cualquier método de Reconstrucción razonable debería hallar rápidamente una solución al problema de producir un objeto consistente con el correcto, o muy próximo al verdadero, de radiografías en las direcciones dadas. Es posible encontrar bastante bien uno de los factibles pero de objetos falsos del teorema 4.3. Ordinariamente los objetos falsos serán altamente oscilantes en un pequeño radio donde los errores de compensación son hechos, esta es una pequeña ayuda, sin embargo en la detección del error, el cráneo también es altamente oscilantes - algo parecido a un "panal" - Así que la Reconstrucción está encaminada a considerar las soluciones verdaderas en lugar de las falsas.

Una posibilidad es hacer uso de la información prioritaria acerca del objeto que no provenga de rayos X. Un ejemplo de esto es tomar un conjunto de gotas superiores e inferiores para la densidad del tejido cerebral y corregir cada estado de la interacción así que estas limitaciones son satisfechas, tales limitaciones fueron usadas en la reconstrucción errada mostrada en la figura 7.

Una segunda posibilidad, de hecho usada para la reconstrucción correcta en la figura 7, es hacer uso del conocimiento empírico del desarrollo del método. La idea es simplemente determinar experimentalmente que tipo de objetos, el procedimiento maneja bien. La experiencia muestra que el tipo de objetos que nuestro procedimiento maneja bien, son simplemente objetos con una densidad de contraste relativamente buena en los detalles deseados.

Nuevamente consideremos la cabeza, en realidad, ¿qué es lo que buscamos? es ciertamente un objeto simple - consistente de hueso, tejido normal y una o dos lesiones. sin embargo los detalles deseados, a saber las lesiones, ciertamente no tienen una buena densidad de contraste. Si las lesiones son olvidadas por un momento el objeto es simple, justamente hueso y tejido; y la densidad de contraste es hueso (grande) vs. tejido. Puede esperarse, por lo tanto, que en el inicio del procedimiento tendremos una buena posibilidad de hallar el cráneo, y realmente así sucede. En esta reconstrucción inicial la densidad de cada punto del tejido es reemplazada por una constante, usualmente la densidad promedio del tejido cerebral. La computadora entonces simula rayos X de este nuevo objeto y sustratos de los rayos X originales.

Si los resultados fuesen perfectos deberíamos ver radiografías de la cabeza sin cráneo y con densidad promedio cero, un objeto simple y en el cual la densidad de contraste de las lesiones es grande relativamente, brevemente un objeto cualquiera previene de otro teniendo un buen manejo del procedimiento de reconstrucción, la figura 7 muestra esto con y sin este "Removimiento de la cabeza". (al final el cráneo es reemplazado).

Tomaremos ahora el segundo factor que gobierna la resolución de reconstrucción - El tamaño de la matriz relativa a la forma del objeto que esta siendo reconstruido. Como se mencionó anteriormente, la función densidad reconstruida es una función de prueba sobre una rejilla. Así obtenemos una matriz, y obviamente no siempre podremos apreciar propiedades relevantes más pequeñas que el área representada por cuadrados simples de la rejilla es por ello que formaremos grupos de cuatro adyacentes a los lados utilizados.

Para ver esta consecuencia práctica, consideremos nuestro espectro de cerámica en la figura 4. El diámetro es de alrededor de 3" y la matriz de reconstrucción es de 50x50 y así cada cuadrado de la matriz representa un cuadrado en el espectro de lado $3/50$ ". De este modo en el espectro pudieron ser impresos objetos que tenían diámetro al menos $2 \times 3/50 \approx 1/8$ ". y realmente esto sucedió el alfiler de Laxan de $1/8$ " fue impreso por el explorador EMI mostrado en la figura 5, sin embargo en un experimento similar no sucedió así y es una ilustración de la desventaja de este aparato.

No obstante haciendo modificaciones a nuestro primer experimento, por ejemplo, fue realizado sobre una radiografía de un diente en el depto. de Odontología. Desde que el diente pudo llevarse con una matriz de reconstrucción de 50x50 (rejilla), fue posible imprimir los canales de las pequeñas raíces. Nuestro problema de no tener objetos redondos es explicado en la próxima sección.

§ 0.6 CALIBRACION

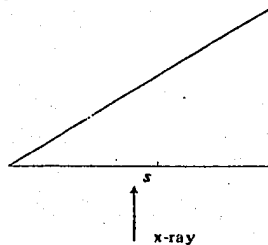
Uno de los puntos que estamos pretendiendo, es que el resultado de cualquier X-ray en la dirección θ sea la masa total $P_{\theta}(x)$ definida sobre el plano θ^{\perp} . Realmente el resultado directo no es esta función, pero una exposición fotográfica del filme en el cual los grandes niveles en un punto x , si depende sobre la masa total del objeto f a lo largo de la línea α través de x perpendicular al filme. Los grandes niveles sobre el filme son convertidos a números por un densitómetro, cualquier haz luminoso o pequeña mancha luminosa (En el caso del espectro de cerámica, la mancha fue un rectángulo efectivo de 0.1 mm. de base y 0.6 mm. de altura) y el promedio

$$(6.1) \quad D(x) = \log \frac{\text{No de fotones luminosos registrados}}{\text{No de fotones luminosos transmitidos}}$$

Llamada la densidad óptica del filme en el punto x .

Existe una fórmula simple que relaciona $D(x)$ con el número deseado $P_{\theta}(x)$, pero la simplicidad resulta algo ilusoria porque la fórmula contiene constantes que dependen del tipo de filme que está siendo usado sobre la exposición de rayos X. Aunque siempre se puede modificar el tipo de filme que nos convenga, sin embargo el equipo del hospital es incapaz de producir uniformes con la precisión que se desearían. El tipo de precisión que desea puede ser vista en el espectro de cerámica. Para los propósitos de rayos X la diferencia de densidades entre la cerámica y el lexan es de cerca de 1.5% y se necesitan 1000 niveles grises para resolver el problema. En otras palabras, suponiendo una exposición idéntica de rayos X del mismo objeto produce lecturas en el densitómetro que varía por centenares. Por esta razón hemos decidido por no empezar a atender esa relación "simple" de $D(x)$ y $P_{\theta}(x)$. Y basarnos en hechos empíricos, para calibrar cada filme individualmente; una placa de aluminio es incluida en cada exposición de rayos X.

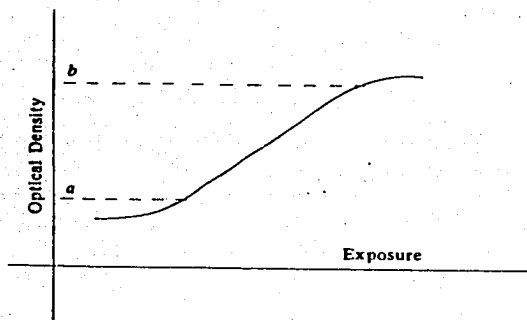
RECONSTRUCTING OBJECTS FROM RADIOGRAPHS



Si $w(s)$ denota la lectura del densitómetro en un punto sobre el filme a una distancia s del final de la placa. Si la densidad de la placa fue 1 y el ángulo de 45° , entonces s pudiera ser la masa total correspondiente a la lectura del densitómetro $w(s)$. Y de ahí que cualquier lectura del densitómetro D , $w^{-1}(D)$ sería la correspondiente masa total verdadera. Una densidad diferente y una placa distinta, el ángulo simplemente introduce un factor de proporcionalidad irrelevante. Así $w^{-1}(D)$ es una función que es proporcional a la deseada $P_{\theta}(x)$. La proporcionalidad del factor dependiente de la densidad de la placa y el ángulo, no altera el resultado.

Mientras la calibración en cada filme individual fue introducida inicialmente a una cierta precisión en una supuesta exposición idéntica de rayos X, la tomaremos fuera y haremos mucho más que eso, en particular, permite una variación intencional de la exposición de rayos X.

La curva característica del filme fotográfico, es la gráfica de la densidad óptica del filme como una función de la exposición recibida por el filme. La curva característica de un típico filme médico se muestra a continuación:



Dentro del rango de la densidad óptica de a a b (el cual depende del filme y de la intensidad de la pantalla que se usa) El filme es sensible a pequeños cambios en la exposición, y de ahí a pequeños cambios en la masa total en el objeto, fuera de este rango el filme será muy insensible. Consecuentemente es necesario al escoger la exposición que las áreas relevantes del filme queden dentro del rango sensible.

Veremos ahora la cabeza. Es mucho más ancha del frente a la parte posterior que de lado a lado. Una exposición que ponemos vista de frente interior al rango sensible hará el lado visto mucho más oscuro, que si ponemos el lado interior al rango sensible hará ver el frente con mucha más luz. La calibración individual de cada filme sigue el uso de las diferentes exposiciones de los distintas direcciones, así que el filme puede conservar interior el rango sensible. La placa tiene también otras funciones, tales como cancelar las variaciones en el desarrollo del proceso, pero las anteriores son las más importantes. Veremos en S.O.B que en algunos problemas la placa no es necesaria, pero en la reconstrucción sí.

OBSERVACIONES: En el scanners la atenuación del haz de rayos X, usualmente es medido por el efecto de descomposición en el cristal, más que por el efecto en el filme fotográfico. Así que la discusión de arriba no es directamente aplicable, aparece, no obstante, que la forma del cristal da algunas características del filme y que es la razón básica para el uso del baño de agua, y la razón fue producir una cabeza redonda para la cual la exposición pudiera conservarse en todas direcciones. Las variaciones accidentales no deseadas son canceladas por la división del rayo en dos partes en cada disparo - uno pasando a través de la cabeza y el otro justamente a través del baño de agua - y usando la diferencia entre los dos.

§ 0.7 R U I D O

Ruido es un término general que se refiere a cualquier cosa sobre el filme que no pertenece a éste. Existen muchas fuentes de ruido sobre los filmes de rayos X.

(1) **Dispensión**: Cuando un fotón del haz de rayos X pasa a través del objeto pueden aparecer dos cosas. Puede suceder que haya una dispersión completa, o puede interactuar con átomos del objeto. En el caso de una interacción el fotón puede ser frenado, lo cual atenúa el haz de rayos X. La cantidad de atenuación en un punto dado del filme, es medida por la densidad óptica en el punto, dando una medida del número de interacciones que tienen lugar a lo largo de la línea que pasa a través del punto y perpendicular al filme. de aquí el número de átomos a lo largo de esta línea, y por consiguiente, la masa total a lo largo de la línea.

Desgraciadamente, las interacciones no son tan simples, algunas de ellas involucradas, no en el frenado del fotón del rayo X, pero sí una carga en esa dirección. Otras veces involucra la liberación de fotones de los átomos del objeto. Y todavía otras cosas ocurren.

Estos nuevos fotones y algunos anteriores con direcciones desviadas son llamados dispersión. Ellos impresos y expuestas al filme en puntos donde no los deseamos.

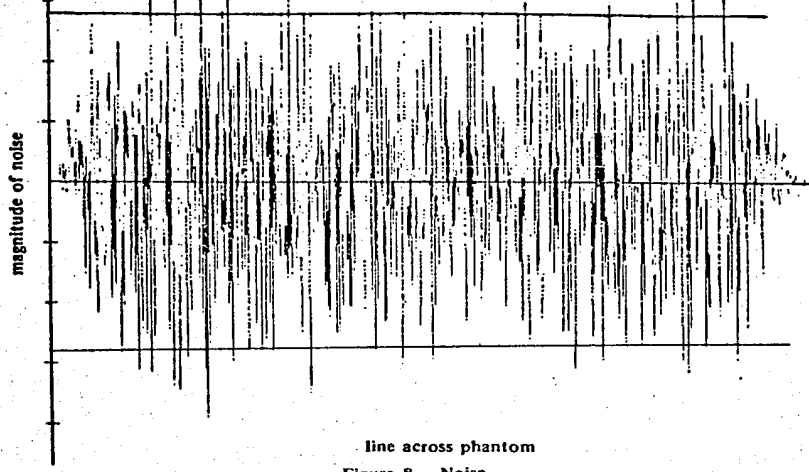
(2) **Abigarrado Cuántico**: Una dosis densa o apropiada de fotones es necesaria al exponer el filme. inaceptablemente denso en el caso de pacientes humanos. En la mayoría de rayos X en medicina, el filme no es expuesto directamente por el haz de rayos X; solamente por la luz de una lámpara fluorescente llamada pantalla intensificadora. La poca dispersión del haz de rayos X causa la pantalla intensificadora suficiente fluorescencia al exponer el filme. El resultado es una exposición al paciente que pudiera necesitar una fracción pequeña con exposición directa, no es mas que un filme abigarrado urgente sobre el cual es mas o menos el efecto individual de fotones de rayos X visibles.

(3) **Otros**: Hay muchas fuentes de ruido, de las cuales aquí nos ocuparemos; Las marcas manuales de los técnicos, las marcas dejadas por los pollos sucios en el desarrollo de la máquina, desarrollo incorrecto de la temperatura, la emulsión irregular del filme.

La figura 8 muestra una gráfica de ruido a lo largo de una línea sobre uno del filme del espectro de cerámica. El ruido es relativamente grande a las masas totales diferentes en este problema. Así algunas veces es agotador el tratar de deshacerse de él.

La inspección de la figura 8 muestra que, la naturaleza del ruido en principio ubica el problema y entonces proporciona su solución. Ordinariamente uno espera eliminar el ruido por el promedio de algún tipo. En este caso los enormes picos aislados proporcionan el problema: Si los promedios son tomados sobre pequeños intervalos, entonces cualquier intervalo contendrá únicamente uno o dos y el promedio será así, distorsionado en cosas que al final serán peores que al principio; mientras si son tomados sobre intervalos grandes aseguraremos la cancelación de los picos, entonces todas las posibilidades de preservar los detalles finos serán aseguradas.

La fuente del problema, lo aislado de los grandes picos, algo reduce el aislamiento de los próximos grandes, etc., provee también la respuesta: suavizar en estados, en cada estado corregir únicamente lo peor, y aprovechar el hecho de que este problema médico es nacido a priori que no hay oscilaciones grandes en la masa total.



line across phantom
Figure 8. - Noise

La primera etapa de la eliminación de ruido procede como sigue: Supongamos que $D(x)$ es la lectura del densitómetro en el punto x a lo largo de la línea sobre el fil me. Fijo un número L , suficientemente en la primera etapa, y sea $A(x)$ el promedio de $D(x)$ sobre el intervalo de longitud L centrado en x . El ruido en este estado es considerado como la diferencia:

$$N(x) = D(x) - A(x)$$

lo cual es razonablemente válido porque no existen oscilaciones locales grandes). Nue vamente fijemos un número OK . En este estado el punto x es considerado OK y la corrección es hecha si $|N(x)| \leq OK$. Finalmente, fijemos un número OK' . En el punto x que no sea OK , $D(x)$ es mas o menos reemplazado por $A(x)$, pero no completamente, pero muchos puntos malos contribuyen a $A(x)$. Por lo tanto, definamos $A'(x)$ ser el promedio de $D(x)$ sobre estos puntos y en el intervalo de longitud L centrado en x , el cual satisface $|N(x)| \leq OK'$ y en estos puntos correctos $D(x)$ debe ser $A'(x)$.

En cada etapa el procedimiento es el mismo, excepto que $D(x)$ es el resultado de las etapas previas en lugar de las lecturas originales del densitómetro.

Nuevamente, la cuestión es, que reglas principales son las que gobiernan las elecciones de los números L , OK y OK' . El primero de todos el número L se escogería proporcionan do un promedio bastante confiable - no indebidamente distorsionado por los grandes picos. Segundo, el número OK se escogería tal que las correlaciones hechas, se realizan en puntos relativamente buenos. El número de tales puntos estan dependiendo de L . En el primer estado, por ejemplo, L será el largo total por la gran altura y el aislamiento se vero de los picos peores. El reemplazamiento de $D(x)$ por un promedio sobre el gran intervalo de longitud L no causará los mejores detalles si estan en los mejores puntos,

cuando la causa de los mejores detalles es dada por muchos puntos buenos. En los estados posteriores L no será muy grande. En tales estados, cuando el promedio es dado sobre pequeños intervalos, puede ser dado en muchos puntos sin los mejores detalles. La base para escoger OK' queda un poco vaga, excepto que pudiera no ser distinta de OK . Pudiera no insistirse en que cosas son excluidas a la posibilidad de un promedio malo.

En la ejecución del experimento se usan cinco estados distanciados. Con lecturas del densitómetro tomadas cada .1 mm. sobre el filme los valores de L fueron: 18, 18, 10, 8. Los valores de OK variaron de un experimento a otro (pero no de una línea a otra o de un filme a otro dentro del experimento).

Fueron escogidos de tal forma que las correlaciones fueron hechas cerca del 2% de puntos en los primeros dos estados, cerca del 4% en el 3° y 4° y todos los demás en el quinto. Los valores de OK' fueron escogidos tales que cada intervalo pudiera ser expectante a tener quizás el 80% de puntos OK' . El punto a insistir aquí no es tomar estos números pequeños, no es verdadero en cualquier estado.

El procedimiento es uno de "Eliminación desastrosa", y, hasta el final, únicamente el desastre en un estado dado sería arrisgado. Los resultados de la eliminación del ruido son mostrados en la figura 9 para el caso del espectro de cerámica.

Es claro de las gráficas que mucho ruido fue eliminado, y de la calidad de la reconstrucción (Figura 6) que los detalles esenciales fueron preservados. Otro ejemplo algo distinto es presentado en SOB, figura 10.

La base matemática de la eliminación de este ruido no fue analizada.

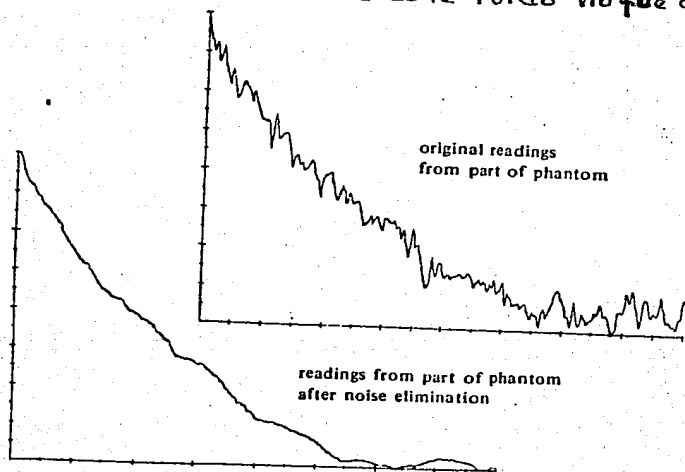


Figure 9

Es estar expectante al trabajar sobre muchos problemas delicados, tales como realizar distinciones de tejido blando oculto detrás de uno duro y el cráneo variable, y de haber proporcionado a lo largo del camino los medios para hacerlo. En esta sección se discutirá un poco sobre este trabajo que ya se trató anteriormente.

(1) ANGIOGRAMA NO-INVASIVO: Un problema fundamental es visualizar alguna parte de la estructura vascular de los tejidos. El angiograma, tiene el propósito de visualizar las arterias de la cabeza y en ciertos tumores. Una solución de Yodo con tintura de contraste es inyectado sobre la arteria Carótida en el cuello. La tintura va directamente a la cabeza, mientras los rayos X son tomados. En ésta, la tintura esta presente en concentraciones suficientes para hacerse visibles sobre el filme. Angiogramas de otras arterias siguen el mismo principio. La inyección directa a la arteria es dolorosa y peligrosa, y siempre requiere hospitalización y después (quizás el 10% de las veces) produce reacciones alérgicas.

Recientemente el Dr. Paul F. Encontró que concentraciones intravenosas (200-300 mg. de Yodo por 100 ml. de solución salina) son suficientes para ser detectables en el EMISCA. Y esto dio a bentura a la exitante posibilidad de angiogramas "no-invasivos".

En estas concentraciones son detectables secciones transversales reconstruidas, entonces puede ser que deje huella de su presencia en cada filme individual, aún si no pudiera ser vista. La razón puede no ser simple y se oculta en los variaciones del cráneo y el ruido. Tomando dos filmes, uno antes y el otro después de la tintura (inyección), se conseguirá en la primera eliminar el ruido y cancelar en la segunda, las variaciones del cráneo.

La prueba de esta idea se hizo para cuatro balones hechos de guante quirúrgico, el primero de diametro 8 mm. y el cuarto de 7 mm. fueron llenos de Yodo con el tinte de contraste en concentraciones de 84, 140, 196 y 280 mgr. de Yodo por 100 mlts. de solución salina. Los balones fueron envueltos con un cuadrado de plástico de 6" y el espacio entre la envoltura y el balón se lleno de agua, y un cráneo seco fuera de ellos, los rayos X fueron tomados, entonces los balones fueron removidos y el otro fue tomado fijo, los dos correspondientes a los rayos X tomados a un paciente antes y después de la inyección del tinte. La figura 10 muestra las graficas de las lecturas de los densitómetros antes y después de la eliminación del ruido, una línea a través de los balones fue trazada, la correspondiente en el segundo filme y la diferencia.

Los balones muestran claridad, excepto el primero con la concentración de Yodo mayor, la diferencias de alturas refleja la diferencia de concentraciones de Yodo. La altura de el menor una fue menos de lo que se esperaba; pero esto es debido a lo reducido del diametro que también aparece en la grafica.

El hecho de que los balones con 84 mgr. de Yodo / 100 ml. de solución salina aparece muy tenue, el de 140 mgr de Yodo / 100 ml. de solución salina es más claro, de 8 mm. en el balón de 100 mg./100 ml. y de 4 mm. en el de 200 mg. / 100 ml. Desde que las concentraciones anteriores estan todavía por debajo de las concentraciones reales en la sangre después de la inyección intravenosa de la solución, pudiera ser posible visualizar coagulos de sangre o tumores de diametro de alrededor de 4 mm. Cuando muchas líneas son teñidas y una pintura es impresa por medio de un densitómetro inventido (filme escrito) pudiera ser posible mejorarse mucho. Por ejemplo, defectos fílmicos que son bastantes grandes pueden ser preservados por la eliminación del ruido o no cancelados en la sustracción, y ello muestra profundidad bajo la magnificación y aislamiento venido de estar viendo una simple línea de lecturas.

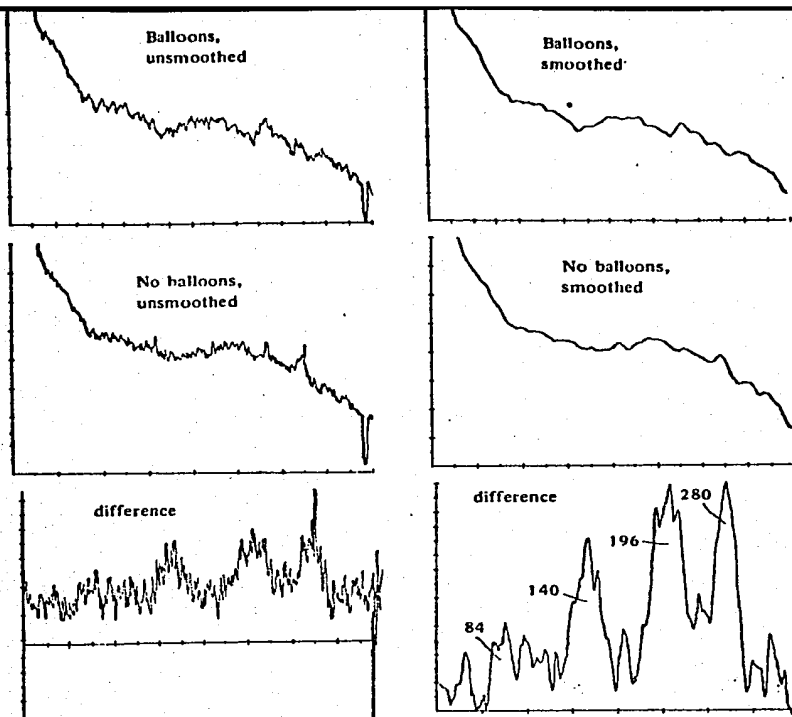


Figure 10

Nótese también que las oscilaciones grandes en el cráneo seco hacen la cuestión de igualar los dos filmes precisándolas más que otras partes.

Notemos que en la figura 10 la gráfica sin balones es altamente perceptible, más que una con estos, lo cual ilustra la carencia de uniformidad en la exposición supuestamente idéntica.

Ahora veamos el procedimiento modificado:

- a) Las líneas individuales pueden ser inspeccionadas, como se hizo con los balones, la presencia de un choque de tamaño suficiente, sobre tal línea indicará una acumulación de tinte y de ahí la presencia de una lesión y su localización a lo largo de la línea. Así el filme de dos direcciones localizará la lesión precisamente. La magnitud del choque indica la forma de la lesión, como es mostrado por la diferencia en la anchura de los choques correspondientes a los balones de 8mm. y 7mm. Si las líneas están teñidas, es decir, 2mm. intervalos, el procedimiento pudiera revelar la presencia de una lesión de 4mm. con justamente dos rayos y localizada completamente con el cuarto.

Una información adicional es necesaria, secciones transversales pueden ser reconstruidas en el nivel donde la lesión nuevamente existe.

- b) Un filme tipo sustracción-angiograma puede ser hecho por una preparación de un número grande de líneas y corriendo a través del densitómetro inventado (filme-escrito). Supongamos que un primer rayo X es tomado antes de la inyección del tinte, un segundo un poco después ha pasado la vena anticubital hacia la cabeza y fuera sobre las arterias, pero no ha alcanzado las venas, y el tercero cuando el filme se ha extendido. La sustracción del 1 con el 2 revelará las arterias y el filme producido por el "filme-escrito" será una sustracción-angiograma. La sustracción del 1 con el 3, revelará ambas arterias y venas en la misma forma. Mientras se preparaba para su publicación, este procedimiento fue usado con sucesos aparentes a visualizar la estructura vascular en el cuello de un paciente en el hospital del Buen Samaritano en Cornwallis.

(2) DISTINCIÓN ENTRE CÁNCER Y ENFERMEDADES QUISTE FIBROSAS EN EL CEREBRO.

Aún cuando la masa es conocida al estar presente en el cerebro (calculada por los físicos) permanece el problema de determinar si una biopsia, si la masa es cáncer o una lesión quiste fibrosa. Desde que la lesión quiste fibrosa es más densa que el tejido cerebral, mientras el cáncer es normalmente menos denso. Desde que no es oscurecido por altas oscilaciones del cráneo, parece que puede ser posible simplemente examinando las lecturas del densitómetro a lo largo de la línea a través de la lesión.

Si una lesión tiene densidad d y un radio r , entonces la función masa total a lo largo de la línea es:

$$y = M(x) = 2d\sqrt{r^2 - x^2}, \text{ o } x^2 + \frac{y^2}{4d^2} = r^2$$

Así la gráfica es una elipse en la cual de los ejes es $2d$. Y podemos esperar que si las unidades en los ejes coordenados son juiciosamente escogidas, los "cánceres" tendrán mayor el eje vertical y las lesiones quiste fibrosas mayor el eje horizontal, así que las dos podrán ser distinguidas a primera vista. La figura 11 muestra la gráfica de seis cánceres (scirrhous adenocarcinoma, el más común de los cánceres cerebrales), y la figura 12 muestra la gráfica de cinco lesiones quiste fibrosas.

Estos filmes cerebrales (mammogramas) se hicieron en serie en el hospital local, y en todos los casos no fue necesario hacer biopsia.

Hay un punto menor aquí, las lecturas del densitómetro no proveen la función masa total de la lesión, pero de la lesión más grande en el cerebro, en la cual la forma característica está completamente perdida, porque de las variaciones registradas en el cerebro, es claro que la misma lesión pudiera verse distinta en diferentes lugares. La función masa total debe de ser descompuesta en una parte normal y una abnormal, $M(x) = N(x) + A(x)$, donde $N(x)$ es la función masa total que pudiera ocurrir si la lesión no ocurrió allí y entonces la diferencia $A(x) = M(x) - N(x)$ es la abnormalidad. Esta función abnormalidad la que presenta la forma característica. Al obtener la función Abnormalidad la información clínica disponible con inspección del filme de rayos X y la inspección de la gráfica de la lectura del densitómetro. Usualmente es posible localizar los cortes de la lesión regularmente fácil. Dentro de la lesión, donde la función $N(x)$ es desconocida, es aproximada por un segmento recto. Esta aproximación es la que produce las gráficas en las figuras 11 y 12. No es necesario haber tenido suerte al tener una buena calibración, si D es la lectura del densitómetro correspondiente a la masa total M , puede ser verificado experimentalmente que, dentro del rango de masas y exposiciones ocurridas en los mammogramas, D es una función lineal de M :

$D = pM + q$ con p, q números que dependen del filme y la exposición, Así:

$D(x) = p(N(x) + A(x)) + q = pN(x) + q + pA(x) = D_N(x) + D_A(x)$. El término $D_N(x) = pN(x) + q$ es simplemente la lectura del densitómetro que pudiera ocurrir si el cerebro fue normal, mientras el término interesante $D_A(x) = pA(x)$, a parte la constante aditiva irrelevante q , es la lectura del densitómetro que pudiera ser producida por la abnormalidad. La pincelada de suerte que obviamente necesitamos para la calibración es que el número p sea independiente de la exposición de rayos X, así que la función D_A , la cual es producida sin calibración, es equivalente a la función deseada A .

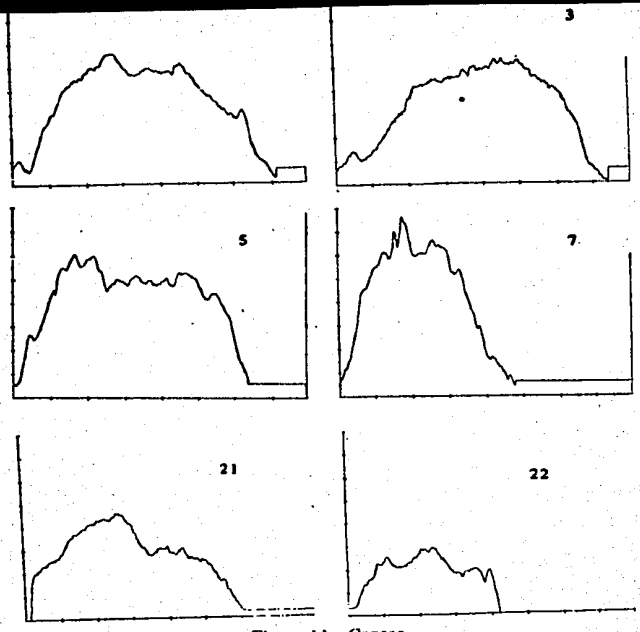


Figure 11. Cancer

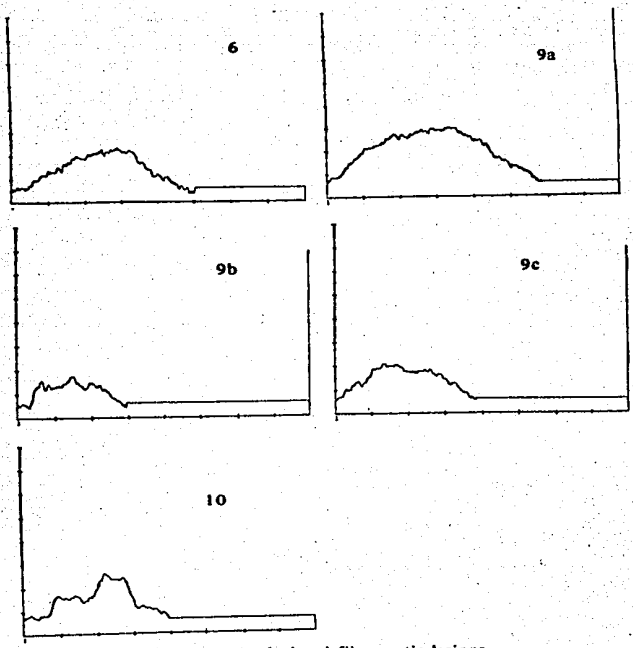


Figure 12. Isolated fibrocystic lesions

La figura 13 muestra seis casos de enfermedad quiste fibrosa en la cual la primera lesión no fue aislada pero circundada por lesiones secundarias. En tales casos los cortes de la lesión son naturalmente más difíciles de localizar y la forma característica es parcialmente oculta. Sin embargo, únicamente dos de estos, los números 24 y 25, presentan la masividad, excesivamente alargada, roca con apariencia de cancer, estos fueron al menos enteramente fibrosos, más que quiste fibrosos, en natural. Aparece pues, una dificultad al distinguir lesiones enteramente fibrosas de las cancerosas.

La eliminación del ruido no fue necesaria en este experimento. La razón es que los filmes mammográficos no hacen uso de la intensificación de la pantalla. Esto produce mejores resultados (no hay abigarramiento cuántico) pero a expensas de una densa exposición de rayos X: 175 mas. en la tapa o la vista de la cauda, donde el cerebro es aplanado considerablemente, y 350 mas. en las vistas laterales. Cuando el ruido es mucho pudiera ser posible hacer uso de la pantalla intensificadora y reducir la exposición a un insignificante 10-15 mas.

Mientras este artículo se preparaba fue descubierta entre el área bajo la gráfica de $y = Da(x)$ y el área del rectángulo circunscrito a esta gráfica es un parámetro significativo discriminativo entre scirrhous adenocarcinoma y el quiste fibroso. Mammogramas adicionales fueron obtenidos de la Universidad de Oregon (hospital escalar) y del Roswell Park Memorial Institute, Buffalo, New York, un total de 33. El radio discriminativo anterior fue correcto en cada caso. Este hecho arroja ambos luz y sombra bajo un número de vistas. Ver [14]

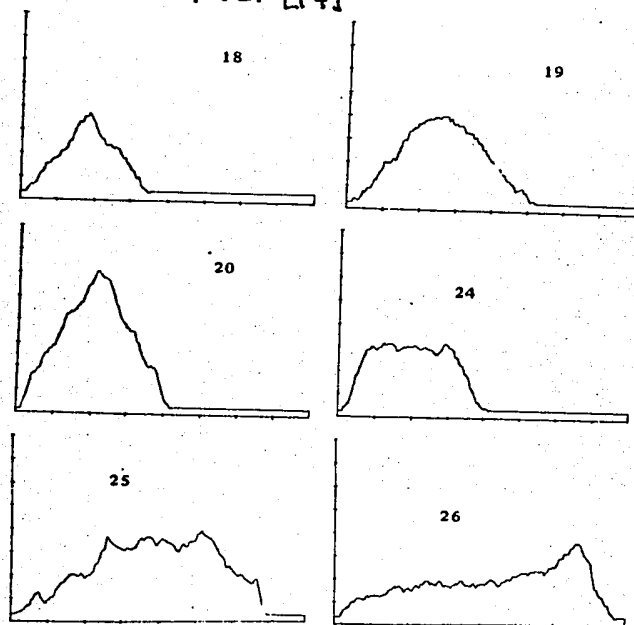


Figure 13. Non-Isolated fibrocystic lesions

(3) DISTINCIÓN ENTRE BURBUJAS DE AIRE Y CALCULOS RENALES

Si siguiendo el removimiento de piedras en la vejiga falsa, el cirujano puede determinar en todo caso cualquier piedra que haya escapado sobre el conducto biliar. Deada que las piedras son invisibles a radiografías, él inyecta Yodo con solución de contraste sobre el ducto, la cual aparece entonces como una trayectoria blanca circundada por un tejido normal oscurecido. Si una piedra esta presente aparece como una sombra en el ducto, como en la figura 14.

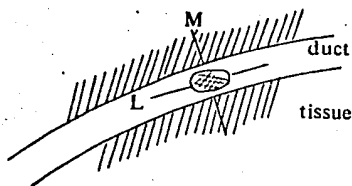


Figure 14

Ocasionalmente una burbuja de aire es inyectada con la solución de contraste, y esto hace aparecer una sombra que es difícil de distinguir de la sombra de la piedra. En el caso de una piedra o de un diagnóstico indeterminado, lo único que queda es la intervención quirúrgica.

Debe ser expectante que las lecturas del densitómetro a lo largo de la línea L pudieran producir algunos buenos resultados de esa sección. Que la densidad de piedras tuvieran alguna afinidad con el cancer y las menos densas burbujas de aire con las lesiones quiste fibrosas. La figura 15 ilustra esto con dos piedras y dos burbujas de aire. La figura 16 muestra una piedra irregular en la cual el diagnóstico sobre la base de la forma es impedida por la irregularidad.

En este caso una segunda línea M es marcada (teñida) al ducto así que la sombra puede ser comparada con tejido normal menos que solución de contraste la cual es mas densa que la burbuja o que la piedra. Nuevamente las protuberancias derivadas de la inmersión, indican que la sombra es mas densa que el tejido normal y que la sombra debe ser una piedra. Cuando la burbuja o la piedra, no saturan el ducto y que la sombra puede ser falso hallar tejido normal adyacente y usarlo en la comparación. Por consiguiente, un mejor procedimiento seria tomar rayos X antes y después de la inyección de la solución, usando éste únicamente al localizar la posición exacta de la burbuja o la piedra; En esta forma el tinte no interferiría en todo y las burbujas protuberancias en forma de contraste a la inmersión que viene de la piedra.

En este problema la sustracción usada al producir la función a anomalía no es necesaria, como al cuerpo cambia su densidad muy poco en la sección transversal de un lado de la sombra otro, no es necesaria la calibración. Sobre el otro lado, la eliminación del ruido es necesaria.

3 En la mayoría de nuestras figuras las densidades grandes o masas totales son representadas por números grandes, pero las lecturas reales del densitómetro producen al inverso, para las masas totales grandes permiten mejores exposiciones en filmes muy iluminados. Cuando los filmes son calibrados la placa automáticamente se endereza hacia afuera. No estan dados en tal forma que ello ocurra. En la figura 15 y 16 las lecturas del densitómetro son graficadas directamente, así las densidades grandes son representadas por pequeños números.

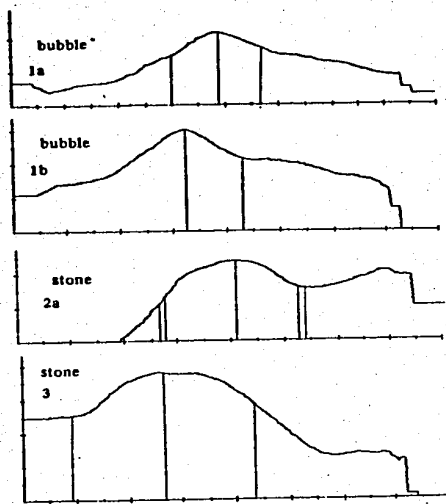


Figure 15

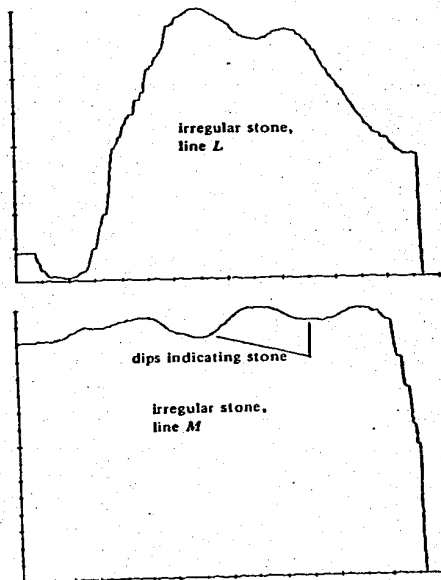


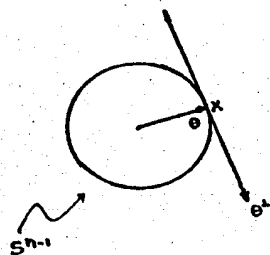
Figure 16

**CAPITULO
UNO**

§ 1.0 LA TRANSFORMADA DEL X-RAY COMO UN OPERADOR SOBRE L^2 34

Las funciones $g(\theta, x)$ en el rango de la Transformada del x-rayo (ver 2.1) son funciones en el espacio:

$$T = \{(x, \theta) : \theta \in S^{n-1}; x \in \theta^\perp\} \quad \text{El haz-tangente a la esfera } S^{n-1}$$



$$\begin{array}{ccc} TS^{n-1} & \rightarrow & T\mathbb{R}^{n-1} \\ s \parallel \downarrow & & \parallel \downarrow = \\ S^{n-1} & \xrightarrow{\mathbb{F}} & \mathbb{R}^{n-1} \end{array}$$

s son las secciones que son isomorfismos en las fibras. Siendo \mathbb{F} cualquier difeomorfismo (la proyección estereográfica, por ejemplo)

$$T := \cup_{\theta \in S^{n-1}} \theta^\perp \quad \therefore \dim TS^{n-1} = 2 \dim S^{n-1} = 2(n-1).$$

T tiene una medida natural μ tal que $\int_T g d\mu = \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} g(\theta, x) dx d\theta$ si $f \in L^2_b(\mathbb{R}^n)$ y tiene soporte en un conjunto compacto K , con diámetro $S(K)$

$$\text{Entonces obtenemos la siguiente desigualdad: } \|Pf\|_{L^2(T)}^2 = \langle Pf, Pf \rangle = \int |Pf|^2 d\mu \\ = \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} |Pf(x, \theta)|^2 dx d\theta = \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+\theta t) dt \right|^2 dx d\theta \leq \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+\theta t)|^2 dt \right) dx d\theta$$

Ahora: $\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+\theta t)|^2 dt \right) \leq S(K) \int_{\mathbb{R}} |f(x+\theta t)|^2 dt$. El factor $S(K)$ aparece porque se normaliza la medida, para poder aplicar la desigualdad de Jensen.

$$\Rightarrow \leq S(K) \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} \int_{\mathbb{R}} |f(x+\theta t)|^2 dt dx d\theta = S(K) \int_{S^{n-1}} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \\ = S(K) |S^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2 dy = S(K) |S^{n-1}| \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \quad \text{Por el tma de Fubini,}$$

en la próxima sección de hanán los detalles.

Esta sección contiene algunos resultados acerca de P como un operador no acotado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $L^2(T)$ con dominio $L^2_b(\mathbb{R}^n)$. El adjunto de P es fácil de calcular. Si $f \in L^2_b(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(T)$ (ambos no negativos primeramente el intercambio y combinación de integrales) y E_θ es la proyección ortogonal sobre θ^\perp . Entonces: $\langle Pf, g \rangle = \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(x+\theta t) \overline{g(\theta, x)} dt dx d\theta = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \overline{g(\theta, E_\theta y)} dy d\theta = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \overline{\int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta y) d\theta} dy$

$$= \langle f, \int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta y) d\theta \rangle = \langle f, P^*g \rangle$$

$$(1.1) \quad P^*g = \int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta y) d\theta$$

Definamos el operador Λ^s por:

$$(1.3) \quad (\Lambda^s f)^\wedge(\xi) = |\xi|^{-s} \hat{f}(\xi)$$

Por

$$(1.4) \quad \mathcal{D}_s = \{ f \in L^2 : |\xi|^{-s} \hat{f}(\xi) \in L^2 \}$$

Observemos que Λ^s es el Laplaciano Generalizado.

Estos operadores actúan sobre funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y también en $L^2(\mathbb{T})$. Y en casos posteriores actuaron con respecto a la variable $x \in \mathbb{R}^+$. Se puede verificar inmediatamente si consideramos el siguiente diagrama, que Λ^s es autoadjunto sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_s \subset L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\Lambda^s} & L^2(\mathbb{R}^n) \\ \Downarrow \mathcal{F} & & \Downarrow \mathcal{F} \\ \mathcal{D}_s^\wedge \subset L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{|\xi|^s} & L^2(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

$$\Lambda^s = \mathcal{F}^{-1} |\xi|^s \mathcal{F}$$

donde \mathcal{F} es la Transformada de Fourier; En realidad sabemos que \mathcal{F} es una isometría de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Además: para $s < -\frac{n}{2}$ es la cerradura de su restricción a $L^2_0(\mathbb{R}^n)$. es decir: $\overline{\Lambda^s} | L^2_0(\mathbb{R}^n) = \Lambda^s$ si $s < -\frac{n}{2}$.

Notemos que como Λ^s es autoadjunto: $\Lambda^s = \Lambda^{s*} = \overline{\Lambda^{s*}}$, $\overline{\Lambda^s}$ es la mínima extensión cerrada de Λ^s . $\therefore \overline{\Lambda^s} | L^2_0(\mathbb{R}^n) \supset \Lambda^{s*} = \Lambda^s$.

$$\text{Sea } f \in L^2_0(\mathbb{R}^n) \text{ p.d. } f \in \mathcal{D}_s \Leftrightarrow |\xi|^{-s} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

$$\text{Desde que } L^1_0(\mathbb{R}^n) \supset L^2_0(\mathbb{R}^n) \therefore |\xi|^{-s} \hat{f} \in L^1_0(\mathbb{R}^n)$$

$$\therefore |\xi|^{-2s} |\hat{f}(\xi)|^2 \text{ es Borel medible sobre } \mathbb{R}^n.$$

$$\therefore \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_{S^{n-1}} |r\omega|^{-2s} |\hat{f}(r\omega)|^2 dr d\omega \quad (\text{Coordenadas Polares})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} r^{n+2s-1} \int_{S^{n-1}} |\hat{f}(r\omega)|^2 dr d\omega = \int_{\mathbb{R}} r^{n+2s-1} \int_{S^{n-1}} |\hat{f}(r\omega)|^2 d\omega dr = \int_{\mathbb{R}} \|\hat{f}(r\omega)\|_{L^2(S^{n-1})}^2 r^{n+2s-1} dr$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \|\hat{f}(r\omega)\|_{L^2(S^{n-1})}^2 r^{n+2s-1} dr \leq M \int_{\mathbb{R}} r^{n+2s-1} dr \quad \text{con } M := \sup_{\xi \in \text{Sop}f \cap S^{n-1}} |f(\xi)| m_n(\text{Sop}f)$$

m_n es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

$$\therefore \int_{\mathbb{R}} r^{n+2s-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N r^{n+2s-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{n+2s}}{n+2s} (1 + (-1)^{n+2s+1}) = 0 \text{ si } s < -\frac{n}{2}.$$

$$\therefore \text{si esto sucede } f \in \mathcal{D}_s. \therefore \overline{\Lambda^s} | L^2_0(\mathbb{R}^n) = \Lambda^s \quad \blacksquare$$

La fórmula (3.5) muestra que: $|\Lambda^{s+1/2} Pf^\wedge(\xi)|^2 = |\xi|^{s+1/2} |Pf^\wedge(\xi)|^2$ (1.5)
 Integrando sobre Θ^1 y S^{n-1} ; y la fórmula de integración (1.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{s+1/2} Pf^\wedge(\xi)\|_{L^2(T)}^2 &= \int_{S^{n-1}} \int_{\Theta^1} |\Lambda^{s+1/2} Pf^\wedge(\xi)|^2 d\xi d\theta = \int_{S^{n-1}} \int_{\Theta^1} z\pi |\Lambda^s f^\wedge(\xi)|^2 |\xi| d\xi d\theta \\ &= z\pi |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} |\Lambda^s f^\wedge(\eta)|^2 d\eta = z\pi |S^{n-2}| \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = z\pi |S^{n-1}| \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ \therefore \|\Lambda^{s+1/2} Pf\|_{L^2(T)}^2 &= z\pi |S^{n-2}| \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \quad (1.6) \end{aligned}$$

Para $s = -1/2$ tenemos: $\|Pf\|_{L^2(T)}^2 = z\pi |S^{n-2}| \|\Lambda^{-1/2} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$

Que admite una cerradura cuyo dominio es el mismo que el de $\Lambda^{-1/2}$, i.e.

$\mathcal{D}_{\bar{P}} = \mathcal{D}_{-1/2}$. a saber: Definimos $\mathcal{D}_{\bar{P}} = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \exists \{f_n\}_n$

$\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_n \rightarrow f$ y $\{Pf_n\}_n$ sea Cauchy y $\bar{P}f = \lim_{n \rightarrow \infty} Pf_n$ p.d primero

ye \bar{P} está bien definido. Supongamos pues que si: $f_n \rightarrow f$ y $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$
 $Pf_n \rightarrow g$ y $P\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{g}$

$$\Rightarrow \|g - \tilde{g}\|_{L^2(T)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Pf_n - P\tilde{f}_n\|_{L^2(T)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P(f_n - \tilde{f}_n)\|_{L^2(T)} = z\pi |S^{n-2}| \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda^{-1/2}(f_n - \tilde{f}_n)\|_2^2$$

por (1.6) y $\Lambda^{-1/2}$ es autoadjunto $\therefore \Lambda^{-1/2}$ es cerrado $\Leftrightarrow f_n - \tilde{f}_n \rightarrow 0$
 $\Lambda^{-1/2}(f_n - \tilde{f}_n) \rightarrow h$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda^{-1/2}(f_n - \tilde{f}_n)\|_2 = 0 \Rightarrow g = \tilde{g}$ a.e. $\therefore \bar{P}$ está bien definida.

Ahora: sea $f \in \mathcal{D}_{\bar{P}} \Rightarrow \bar{P}f = \lim_{n \rightarrow \infty} Pf_n$ por (1.6) $\|Pf_n\|_{L^2(T)}^2 = z\pi |S^{n-2}| \|\Lambda^{-1/2} f_n\|_2^2$

$\therefore \Lambda^{-1/2} f_n$ es Cauchy y desde que $\Lambda^{-1/2}$ es cerrado.

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} f_n &\rightarrow f \\ \Lambda^{-1/2} f_n &\rightarrow g \quad \therefore f \in \mathcal{D}_{-1/2} \quad \therefore \mathcal{D}_{\bar{P}} = \mathcal{D}_{-1/2} \quad \blacksquare \\ \Lambda^{-1/2} f &= g \end{aligned}$$

En este dominio la fórmula (1.6) y la fórmula de la Transformada de Fourier (3.5) continúan siendo verdaderas. Es mostrado en [13]; [14] que si $n > 2$, entonces cada $f \in L^2$ es integrable sobre casi todas las direcciones y que $f \in \mathcal{D}_{\bar{P}}$ si y sólo si las integrales de línea producen una función en $L^2(T)$ y que en ese caso $\bar{P}f$ es dado por sus integrales de línea. Si $n = 2$, no obstante, existen $f \in \mathcal{D}_{\bar{P}}$ que no son integrables sobre cualquier línea.

Para $s \geq 0$, \mathcal{D}_s es simplemente el espacio de Sobolev H^s , efectivamente:

$(\wedge^s f)^\wedge(\xi) = |\xi|^s \hat{f}(\xi)$ es la derivada de la Transformada de Fourier de f , ya que: $(\wedge^s f)^\wedge(\xi) = \widehat{D^s (-ix)^\beta f(x)}$, para $s = \alpha$ y $\beta = 0$

$$\widehat{D^s (-ix)^\beta f(x)} = \widehat{D^s f(x)} = |\xi|^s \hat{f}(\xi) = |\xi|^s \hat{f}(\xi) = (\wedge^s f)^\wedge(\xi)$$

Asimismo: $s \geq 0$, $f \in H^s \Leftrightarrow D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ donde $|\alpha| \leq s$; pero para $s < 0$ no es así.

En general, las funciones en \mathcal{D}_s son estrictamente decrecientes de $|\xi|$. No nos interesa demasiado para $s < 0$, excepto en el caso $s = -\frac{1}{2}$ donde \mathcal{D}_s es el dominio de \bar{P} y en el caso $s = \frac{(1-n)}{2}$ cuando, como es mostrado en § 1.3, \mathcal{D}_s es el dominio de la cerradura de la Transformada de Radon.

La fórmula (1.6) con $s = 0$ muestra que el operador:

$$(1.7) \quad V_0 = (2\pi)^{-n/2} |S^{n-1}|^{-1/2} \wedge^{1/2} \bar{P}$$
 extiende a una isometría V

de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre $L^2(\mathbb{T})$ y $\langle Vf, Vg \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, V^*Vg \rangle \therefore V^*V = I$

Y tenemos la fórmula de inversión para Transformada del X-rayo.

$$(1.8) \quad \text{Si } \bar{P}f = g \Rightarrow \langle Pf, g \rangle = \langle f, P^\#g \rangle = \langle V^*Vf, P^\#g \rangle = \langle V^*(2\pi)^{-n/2} |S^{n-1}|^{-1/2} \wedge^{1/2} \bar{P}f, P^\#g \rangle \\ = \langle (2\pi)^{-n/2} |S^{n-1}|^{-1/2} \wedge^{1/2} \bar{P}f, V P^\#g \rangle = \langle (2\pi)^{-n/2} |S^{n-1}|^{-1/2} \wedge^{1/2} g, V P^\#g \rangle \\ = \langle (2\pi)^{-n/2} |S^{n-1}|^{-1/2} \wedge^{1/2} g, (2\pi)^{-n/2} |S^{n-1}|^{-1/2} \wedge^{1/2} \bar{P} P^\#g \rangle = \langle (2\pi)^{-1} |S^{n-1}|^{-1} \wedge^{1/2} \bar{P} \wedge^{1/2} g, P^\#g \rangle \\ \therefore f = (2\pi)^{-1} |S^{n-1}|^{-1} \wedge^{1/2} P^\# \wedge^{1/2} g \quad \text{y } P^\# = \bar{P} \quad \text{ya que } P \text{ es simétrico y cerrable, con } P^\# \text{ dado por la fórmula (1.1).}$$

OBSERVACIONES: Aunque V es una isometría, sus componentes $\wedge^{1/2}$ y P son no acotadas, así que la derivación anterior es poco formal. En particular aunque $\wedge^{1/2}$ y P conmutan formalmente. Ellos pueden no conmutar como operadores no acotados. No obstante, la fórmula (1.8) es correcta en el sentido de producto de operadores no acotados, como se puede ver en [15]. En el caso $n=2$, donde las Transformadas de Radon y la del X-rayo coinciden (ver la próxima sección). La fórmula (1.8) nos lleva a la fórmula clásica de inversión de Radon, excepto que más tarde los símbolos \wedge aparecerán a la derecha. De ahí que la fórmula clásica es: si $\bar{P}f = g \Rightarrow f = (4\pi)^{-1} P^\# \wedge g$ con $P^\#$ dada por (1.1). Se muestra en § 1.3 que esta fórmula es justificada si y solo si g es impar y pertenece a \mathcal{D}_1 , el dominio de \wedge . (Cuando $g = \bar{P}f$, esto es automáticamente verdadero, esto es g es impar y pertenece a $\mathcal{D}_{1/2}$).

§ 1.1 LA TRANSFORMADA GENERAL DEL K-PLANO.

La Transformada del X-rayo (involucra integrales de línea) y la Transformada Clásica de Radon (integración sobre $(n-1)$ planos). Son las dos casos extremos de la transformada general del K-plano. Si Π es un subespacio de \mathbb{R}^n de dimensión K, escribimos $x = (x', x'')$ con $x' \in \Pi$ y $x'' \in \Pi^\perp$ y definimos:

$$(1.1.0) \quad P_{\Pi} f(x'') = \int_{\Pi} f(x', x'') dx' \quad \text{para } x'' \in \Pi^\perp$$

La Transformada del X-rayo es el caso cuando $K=1$ y la línea que pasa a través del origen con dirección Θ es el subespacio Π . Mientras que la Transformada de Radon es el caso, donde $K=n-1$ y Π es el subespacio ortogonal a Θ . Independientemente de la notación coinciden el la crucial dimensión 2, y este fue el origen de nuestro interés en la Transformada de Radon.

Muchas similitudes interesantes, distinciones, y subtítulos aparecen cuando K y n varían. Un ejemplo es el siguiente resultado, el cual es falso en $K = \frac{n}{2}$.

Antes un pequeño recordatorio: $G_{K,n} :=$ Espacio Grassmanniano de K-planos que pasan por el origen en \mathbb{R}^n .
 $:=$ Conjunto de todos K-subespacios del n-espacio Euclideo.

Note que $G_{1,n} = \mathbb{P}^n :=$ n-espacio proyectivo real.

A $G_{K,n}$ daremos una descomposición de espacio topológico. Sea $W := \{P = (P_1 \dots P_K) : \text{de } K \text{ vectores linealmente independientes en } \mathbb{R}^n\}$. W es un subconjunto abierto de

$\underbrace{\mathbb{R}^n \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^n}_{K \text{ veces}}$. Definamos una relación de equivalencia \sim sobre W como sigue:

$P \sim Q$ si $\{P_1 \dots P_K\}$ y $\{Q_1 \dots Q_K\}$ generan el mismo K-subespacio de \mathbb{R}^n .

Claramente $G_{K,n}$ puede ser identificado con W/\sim como conjuntos. Así podemos dar a $G_{K,n}$ la topología inducida por esta identificación. Ahora daremos a $G_{K,n}$ una estructura analítica. Equipemos a \mathbb{R}^n con un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces dado un subespacio V de \mathbb{R}^n , existe una proyección ortogonal Π_V de \mathbb{R}^n sobre V . Supongamos que

V es un K-subespacio de \mathbb{R}^n . Sea $\Pi_{U,V} :=$ la restricción de Π_V a U . Sea $W_V = \{U \in G_{K,n} : \Pi_{U,V} \text{ es una biyección sobre } V\}$. Sea $V^\perp :=$ el complemento ortogonal de V en \mathbb{R}^n .

definamos: $\rho_V : W_V \rightarrow \text{Hom}(V, V^\perp)$. como sigue: Sea $U \in W_V$. entonces

$\rho_V(U) = \Pi_{U,V^\perp} \cdot \Pi_{U,V}^{-1} \in \text{Hom}(V, V^\perp)$. dejemos al lector checar que ρ_V es un

homomorfismo. Nuevamente hagamos la identificación: $\text{Hom}(V, V^\perp) \cong \mathbb{R}^{K(n-K)}$ conseguimos una carta $\phi_V : W_V \rightarrow \mathbb{R}^{K(n-K)}$ también se deja al lector checar que $\phi_V, \rho_V :$

$\mathbb{R}^{K(n-K)} \rightarrow \mathbb{R}^{K(n-K)}$ es analítica real. De ahí que $G_{K,n}$ es una variedad analítica real de dimensión $K(n-K)$. Nótese que para $K=1$ es el mismo Atlas que para \mathbb{P}^{n-1} .

Referencia: M. Golubitsky y V. Guillemin: Mapeos Estables y sus Singularidades.

Teorema 1.1.1: Si f es cuadrado integrable sobre \mathbb{R}^n , entonces al menos cada K -espacio Π , f es realmente integrable sobre al menos todos los K -planos paralelos a Π , provisto $K < \frac{n}{2}$. por lo tanto:

$$(1.1.2) \quad \int_{G_{n,K}} \|P_{\Pi} f\|_{L^2(\Pi^{\perp})}^2 d\mu \leq c^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \quad c = \frac{2(n-K)}{(n-2K)}$$

Aquí $G_{n,K}$ es la variedad Grassmanniana de K -espacios en \mathbb{R}^n y μ es la medida finita sobre $G_{n,K}$ (única salvo una constante) que es invariante bajo transformaciones ortogonales. La prueba puede ser encontrada en [13]. En el transcurso de este artículo, en este orden evitaremos tratar con variedades Grassmannianas.

Nos concentraremos sobre la Transformada de Radon y sus aplicaciones. Las ideas generales al tratar la Transformada General del K -plano están contenidas en los dos casos extremos. Así que nunca nos perderemos.

La Transformada de Radon de una función integrable f es la función:

$$(1.2.0) Rf(\theta, t) = R_{\theta} f(t) = \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1}$$

donde μ_{n-1} es la medida de Lebesgue en el plano $\langle x, \theta \rangle = t$, para θ fijo; R_{θ} está definido casi dondequiera y satisface:

$$\int_{\mathbb{R}} |R_{\theta} f(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1} \right| dt \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\langle x, \theta \rangle = t} |f(x)| d\mu_{n-1} \quad \text{si } f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

f es medible sobre $(\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = t\} \times \mathbb{R}, \mu_{n-1, x, t}) \times \int_{\langle x, \theta \rangle = t} |f(x)| d\mu_{n-1} < \infty$

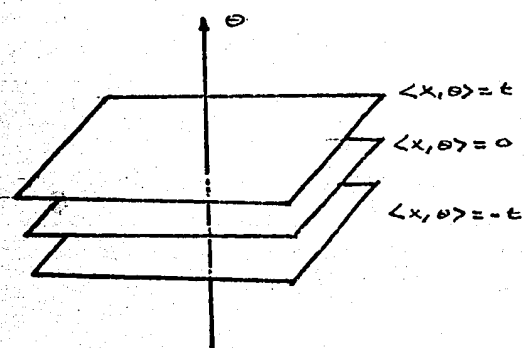
En realidad $f \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ donde $\Omega = \text{sop } f$.

Por el Teorema de Fubini obtenemos: $\int_{\mathbb{R}} \int_{\langle x, \theta \rangle = t} |f(x)| d\mu_{n-1} dt = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dy$ si $\gamma = \mu_{n-1} \times t$

es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

Si ρ es una función de una variable, de hecho un polinomio $\rho(t) = t^m$ tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} R_{\theta} f(t) \rho(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1} \right) \rho(t) dt$$



$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) \rho(\langle x, \theta \rangle) d\mu_{n-1} dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \langle x, \theta \rangle^m dx \quad \therefore \int_{\mathbb{R}} R_{\theta} f(t) \rho(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \langle x, \theta \rangle^m dx \quad (1.2.1)$$

Conseguimos las condiciones de consistencia:

$$(1.2.2) P_m(f; \theta) = \int_{\mathbb{R}} R_{\theta} f(t) \rho(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \langle x, \theta \rangle^m dx \quad \text{debe de ser un polinomio}$$

de grado m en $\mathbb{R}[\theta_1, \dots, \theta_n]$.

tomemos ahora $\rho(t) = e^{-izt} \Rightarrow (R_{\theta} f)^{\wedge}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} R_{\theta} f(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z, \theta, x \rangle} f(x) dx$

y $\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z, \theta, x \rangle} f(x) dx \Rightarrow (2\pi)^{n/2} \hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z, \theta, x \rangle} f(x) dx$

$$\Rightarrow (1.2.3) (R_{\theta} f)^{\wedge}(z) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \hat{f}(z)$$

o bien: $L^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{R} L^2(S^{n-1}; \mathbb{R})$

$\mathcal{F}_n \searrow$ $\swarrow \mathcal{F}_1$
 $L^2(\mathbb{R}^n)$

\mathcal{F}_n : La Transformada de Fourier n-dimensional
 \mathcal{F}_1 : La Transformada de Fourier 1-dimensional

$$R = c \mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_n \quad (1.2.4)$$

De lo que aparece en la (1.2.3)

$$P_m(f; \theta) = (2\pi)^{-n/2} \left(\langle x, \theta \rangle^m f(x) \right)_{\xi=0}^\wedge$$

Desde que $(\langle x, \theta \rangle^m f(x))_{\xi=0}^\wedge$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \theta, x \rangle} \langle x, \theta \rangle^m f(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^m f(x) dx \quad \text{y a su vez}$$

$$\left(\langle x, \theta \rangle^m f(x) \right)_{\xi=0}^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^m f(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} P_m(f; \theta)$$

Ahora: Para θ fijo $\langle x, \theta \rangle^m \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ es decir $\langle x, \theta \rangle^m = \sum_{i_1, \dots, i_n} \theta_{i_1} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$

$$\sum_{j=1}^n i_j = m. \quad \therefore \left(\langle x, \theta \rangle^m f(x) \right)_{\xi=0}^\wedge = \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} \theta_{i_1} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} f(x) \right)_{\xi=0}^\wedge$$

son las constantes dada la homogeneidad del polinomio $\langle x, \theta \rangle^m$. Recordemos también que: $((i\lambda)^d D^d \hat{f})(\lambda) = \mathcal{D}^d((-ix)^d f(x))(\lambda)$. En la notación que usamos:

$$\sum \theta_{i_j} i_j D^d \hat{f}(0) = \langle iD \hat{f}(0), \theta \rangle^m = \langle iD, \theta \rangle^m \hat{f}(0)$$

Y consecuentemente, P_m es la parte homogénea de la expansión de Taylor de \hat{f}

$$(1.2.5) \quad \hat{f}(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{-m} P_m(f, \zeta)}{m!}$$

La información necesaria acerca de la Transformada de Radon para determinar la función puede ser descrita como sigue:

Teorema 1.2.6: Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con soporte $V = \{ \theta \in S^{n-1} : R_\theta f = 0 \}$; entonces V es una variedad algebraica homogénea en S^{n-1} . Inversamente,

Para cualquier variedad homogénea propia V y dada cualquier función $g \in C_0^\infty$ existe $f \in C_0^\infty$ tal que $f = g_0$ excepto en un anillo arbitrario justo en el interior del soporte de g_0 y $R_\theta f = 0 \quad \forall \theta \in V$

La demostración en la próxima hoja.

Demostración: De la fórmula (1.2.2) se sigue que $\exists f \in \mathcal{O}$ si y sólo si para todo $P_m(f; \theta) = 0$ y de ahí que V es una variedad homogénea algebraica. Para el inverso, escogamos un polinomio homogéneo \hat{f} que se anule en V , del operador diferencial correspondiente \mathcal{O} , y repetir la prueba del teorema 4.3. (Cualquier variedad en S^{n-1} es homogénea, es decir, la intersección de S^n con una variedad homogénea, así que el término homogéneo puede ser despreciado si se desea).

La cuestión de cuando las funciones en un espacio de dimensión finita pueden ser distinguidas por la Transformada de Radon de una dirección simple es contestada por el teorema 4.12

Es útil conocer cuando sucesiones de polinomios vía (1.2.2) de alguna función f . Una simple caracterización es la siguiente:

Teorema 1.2.7: Para cada m , sea P_m un polinomio homogéneo de grado m $\exists f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ el soporte contenido en la bola unitaria tal que $P_m(\theta) = P_m(f; \theta) \forall m$

$$\Leftrightarrow a) |P_m(\zeta)| \leq c |\zeta|^m \quad \forall m, \forall \zeta \in \mathbb{C}^n$$

$$b) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{-m} P_m(\zeta)}{m!} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Demostración: La necesidad de las dos condiciones es obvia (por Cauchy-Schwarz en (1.2.2)) a saber:

$$a) |P_m(f, \zeta)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \langle x, \zeta \rangle^m dx \right| \leq \|f(x)\|_2 |\langle x, \zeta \rangle|^m \leq c' |x|^m |\zeta|^m$$

$$\leq c |\zeta|^m \quad c' = \sup_{x \in \Omega} f(x); \quad \Omega := \text{supp } f; \quad c'' = \sup_{x \in \Omega} |x|^m \text{ si } c = c' c''$$

$$b) \text{ Consideremos: } \sum_{m=0}^N \frac{i^{-m} P_m(\zeta)}{m!} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ y } \sum_{m=1}^N \frac{i^{-m} P_m(\zeta)}{m!} \text{ converge}$$

$$\text{uniformemente } \therefore \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{-m} P_m(\zeta)}{m!} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

La suficiencia: Recorramos a la condición a) la suma converge sobre \mathbb{C}^n y \hat{f} satisface: $|\hat{f}(\zeta)| \leq (2\pi)^{-n/2} c e^{|\zeta|^2} \leq c e^{|\zeta_1|^2 + \dots + |\zeta_n|^2}$
a saber: definamos \hat{f} por (1.2.5) con $P_m(\zeta)$ en lugar de $P_m(\hat{f}, \zeta)$

$$\therefore |\hat{f}(\zeta)| = \left| (2\pi)^{-n/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{-m} P_m(\hat{f}, \zeta)}{m!} \right| \text{ y}$$

$$(2\pi)^{-n/2} \left| \frac{i^{-m} P_m(\hat{f}, \zeta)}{m!} \right| \leq (2\pi)^{-n/2} c \frac{|\zeta|^m}{m!}$$

$$\therefore \hat{f}(z) \leftarrow \sum_{m=0}^N (2\pi)^{-m/2} \left| \frac{i^{-m} P_m(f, z)}{m!} \right| \leq (2\pi)^{-N/2} C \sum_{m=1}^N \frac{|z|^m}{m!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (2\pi)^{-N/2} C e^{|z|}$$

$$\therefore \hat{f}(z) \leq (2\pi)^{-N/2} C e^{|z|} \leq C_1 e^{|z_1| + \dots + |z_n|}$$

Por el Teorema de Paley-Wiener: Una función entera de n -variables complejas $g(z)$ es la Transformada de Fourier de una función $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ con soporte en la bola $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$. Si para cada N existe C_N tal que:

$$|g(z)| \leq \frac{C_N e^{R|Im z|}}{(1+|z|)^N} \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

\therefore La Transformada de Fourier inversa f tiene soporte en el cubo $Q = \{x : |x_i| \leq 1\}$ por una rotación, Q es la Transformada a cualquier cubo que esta circunscrito en la bola unitaria y así f tiene soporte en la bola ■

Al mismo tiempo el teorema 1.2.7 es un paso inicial útil, es indeseable requerir la condición a) sobre el espacio complejo. Cuando t es conocido hay control sobre P_m en \mathbb{C} por el significado de la segunda integral en 1.2.2, cuando únicamente Rf es conocida, sin embargo, existe control sobre el espacio real. Un poco sorprendentemente, la condición a) en el espacio real (junto con la condición b) en el recorrido) será suficiente como es mostrado en §2.2.

Si f es un polinomio, sea $f_\theta(z) = f(z\theta)$ y sean Q y Q_θ los operadores diferenciales correspondientes, entonces:

$$(1.2.7) \quad R_\theta Q f = Q_\theta R_\theta f.$$

Es inmediato de la Transformada de Fourier, a saber: $\widehat{R_\theta Q f}(z) = (2\pi)^{n/2} Q_\theta \widehat{f}(z\theta)$

$$= (2\pi)^{n/2} Q_\theta \widehat{f}(z) \quad \text{y} \quad \widehat{Q_\theta R_\theta f}(z) = Q \widehat{R_\theta f}(z) = (2\pi)^{n/2} Q \widehat{f}(z\theta) = (2\pi)^{n/2} Q_\theta \widehat{f}(z)$$

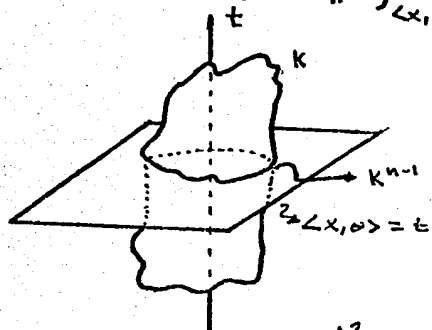
$$\therefore \widehat{R_\theta Q f}(z) = \widehat{Q_\theta R_\theta f}(z) \quad \therefore R_\theta Q f = Q_\theta R_\theta f \quad \blacksquare$$

§ 1.3 LA TRANSFORMADA DE RADON COMO UN OPERADOR SOBRE L^2 .

Si $f \in L^2_0(\mathbb{R}^n)$ tiene el soporte en un conjunto compacto K , y tenemos una estimación para la Transformada de Radon.

$$(1.3.0) \quad \|R\theta f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq c S(K)^{n-1} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \quad ; \quad \delta = \text{diámetro.}$$

a saber:
$$\|R\theta f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \left\| \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1} \right|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\langle x, \theta \rangle = t} |f(x)| d\mu_{n-1} \right)^2 dx$$



K^{n-1} es un compacto (Por Fubini) es la proyección de $K \cap \mathbb{R}^n$ sobre $\langle x, \theta \rangle = t$. Por la desigualdad de Jensen:

$$\left(\int_{\langle x, \theta \rangle = t} |f(x)| d\mu_{n-1} \right)^2 \leq \left(\int_{K^{n-1}} |f(x)| d\mu_{n-1} \right)^2 \leq c \int_{K^{n-1}} |f(x)|^2 d\mu_{n-1}$$

donde c es la constante de normalización de K^{n-1} .

$$\therefore \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\langle x, \theta \rangle = t} |f(x)| d\mu_{n-1} \right)^2 dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \int_{K^{n-1}} |f(x)|^2 d\mu_{n-1} dx = c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \int_{K^{n-1}} d\mu_{n-1} dx$$

$\leq c \mu_{n-1}(K^{n-1}) \|f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq c S(K)^{n-1} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$. La penúltima desigualdad se deriva de los siguientes hechos. f es medible sobre \mathbb{R}^n y no negativa. Por Fubini obtenemos el resultado deseado.

Así es natural considerar a R como un operador no-acotado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^n)$ con dominio $L^2_0(\mathbb{R}^n)$. Como $L^2_0(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ existe el adjunto R^* y se calcula fácilmente, si $f \in L^2_0(\mathbb{R}^n)$ con $g \in L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^n)$ entonces:

$$\langle Rf, g \rangle = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1} \overline{g(\theta, t)} dt d\theta. \quad \text{Desde que } f(x), \overline{g(\theta, t)} \text{ son funciones}$$

medibles no negativas sobre $(\mathbb{R} \times \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = t\}, \mu_{n-1} \otimes t)$ y $\int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1} < \infty$

ya que $f \in L^2_0(\mathbb{R}^n)$ por Fubini tenemos:
$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1} \overline{g(\theta, t)} dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(\theta, \langle x, \theta \rangle)} dx$$

$$\Rightarrow \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1} \overline{g(\theta, t)} dt d\theta = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(\theta, \langle x, \theta \rangle)} dx d\theta = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{S^{n-1}} \overline{g(\theta, \langle x, \theta \rangle)} d\theta dx$$

$$= \langle f, \int_{S^{n-1}} g(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta \rangle = \langle f, R^* g \rangle$$

$$\therefore (1.3.1) \quad R^* g = \int_{S^{n-1}} g(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta \quad ; \quad \text{Y así obtenemos el siguiente resultado:}$$

teorema 1.3.2: Para cada $g \in L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)$. R^*g está definido casi en todas partes por (1.3.1) y localmente cuadrado integrable, además, g está en el dominio de R^* si y sólo si R^*g es globalmente cuadrado integrable. En cualquier caso: $R^* = R^*$.

El dominio de R^* es algo peculiar, es fácilmente verificable; por ejemplo que para $0 \neq g \in L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)$ pertenece al dominio, para cada g impar.

La fórmula (1.2.3) muestra que: $|\left(\Lambda^{\frac{n-1}{2}+s} Rf\right)^\wedge(\tau)|^2 = (2\pi)^{n-1} |\tau|^{2s} |\hat{f}(\tau\theta)|^2 |\tau|^{n-1}$
 a saber: De 1.2.3: $(R\theta f)^\wedge(\tau) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \hat{f}(\tau\theta) \Rightarrow \left|\left(\Lambda^{\frac{n-1}{2}+s} Rf\right)^\wedge(\tau)\right|^2 = |\tau|^{n-1+2s} (R\theta f)^\wedge(\tau)$
 $= |\tau|^{n-1+2s} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \hat{f}(\tau\theta)|^2 = (2\pi)^{n-1} |\tau|^{2s} |\hat{f}(\tau\theta)|^2 |\tau|^{n-1}$ (1.3.3)

Integrando con respecto a τ y θ obtenemos:

$$(1.3.4) \quad \left\| \Lambda^{\frac{n-1}{2}+s} Rf \right\|_{L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)}^2 = 2(2\pi)^{n-1} \left\| \Lambda^s f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} \left| \left(\Lambda^{\frac{n-1}{2}+s} Rf\right)^\wedge(\tau) \right|^2 d\theta d\tau = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} (2\pi)^{n-1} |\tau|^{2s} |\hat{f}(\tau\theta)|^2 |\tau|^{n-1} d\theta d\tau$$

$$= \left\| \Lambda^{\frac{n-1}{2}+s} Rf \right\|_{L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)}^2 = (2\pi)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} |\tau|^{2s} |\hat{f}(\tau\theta)|^2 |\tau|^{n-1} d\theta d\tau = (2\pi)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\tau|^{2s} |\hat{f}(\tau)|^2 |\tau|^{n-1} d\tau = (2\pi)^{n-1} \left\| \Lambda^s f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tau|^{n-1} \int_{S^{n-1}} |\hat{f}(\tau\theta)|^2 |\tau|^{2s} d\theta d\tau = (2\pi)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\tau)|^2 |\tau|^{2s} d\tau = (2\pi)^{n-1} \left\| \Lambda^s f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

Es fácil verificar que para $s = \frac{1-n}{2}$ el operador R admite una cerradura \bar{R} cuyo dominio es el mismo que el dominio de $\Lambda^{\frac{1-n}{2}}$, es decir: $\mathcal{D}\bar{R} = \mathcal{D}\Lambda^{\frac{1-n}{2}}$ a saber: Definamos $\mathcal{D}\bar{R} = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \exists \{f_n\}_n \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ y $\{Rf_n\}_n$ es Cauchy $\}$ y $\bar{R}f = \lim_{n \rightarrow \infty} Rf_n$

P.d. \bar{R} está bien definido: Supongamos que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ $\hat{f}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{f}$
 $Rf_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ $R\hat{f}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{g} \Rightarrow \|g - \hat{g}\|_{L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \|Rf_n - R\tilde{f}_n\|_{L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|R(f - \tilde{f}_n)\|_{L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)} = (2\pi)^{n-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda^{\frac{1-n}{2}}(f - \tilde{f}_n)\|_2$$

por (1.3.4) Desde que: $\|\Lambda^0 Rf\|_2^2 = \|Rf\|_{L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)}^2 = (2\pi)^{n-1} \|\Lambda^{\frac{1-n}{2}} f\|_2^2$

Ahora $\Lambda^{\frac{1-n}{2}}$ es autoadjunto $\therefore \Lambda^{\frac{1-n}{2}}$ es cerrado $\Leftrightarrow f_n - \tilde{f}_n \rightarrow 0$
 $\Lambda^{\frac{1-n}{2}}(f_n - \tilde{f}_n) \rightarrow h$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda^{\frac{1-n}{2}}(f_n - \tilde{f}_n)\|_2^2 = 0 \Rightarrow g = \tilde{g}$ a.e. Nótese $0 \in L^2_0(\mathbb{R}^n)$ y $\Lambda^{\frac{1-n}{2}} 0 = h = 0$

$\therefore \bar{R}$ esta bien definida ■

Ahora. sea $f \in \mathcal{D}_{\bar{R}} \Leftrightarrow \bar{R}f = \lim_{n \rightarrow \infty} Rf_n$ para alguna $\{f_n\}_n \subset L^2_0(\mathbb{R}^n)$ por (1.3.4)

$\|Rf_n\|_{L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)}^2 = (2\pi)^{n-1} \|\Lambda^{\frac{1-n}{2}} f_n\|_2^2 \therefore \{\Lambda^{\frac{1-n}{2}} f_n\}_n$ es Cauchy y desde que $\Lambda^{\frac{1-n}{2}}$ es cerrado:

do $\Leftrightarrow f_n \rightarrow f$

$\Lambda^{\frac{1-n}{2}} f_n \rightarrow g \therefore f \in \mathcal{D}_{\frac{1-n}{2}} \therefore \mathcal{D}_{\bar{R}} = \mathcal{D}_{\frac{1-n}{2}}$

y $\Lambda^{\frac{1-n}{2}} f = g$

No debe esperarse que \bar{R} este bien definida para cualesquiera $n-1$ planos ver [13], [15].
 Lo mejor que puede decirse de la clasificación; De la desigualdad de Hausdorff-Young y [13] es que: $L^2 \cap L^p \subset \mathcal{D}_{\bar{R}}$ si $p \leq \frac{2n}{2n-1}$. A saber Hausdorff-Young afirma que:

$1 \leq p \leq 2$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \|f\|_q \leq (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|f\|_p$

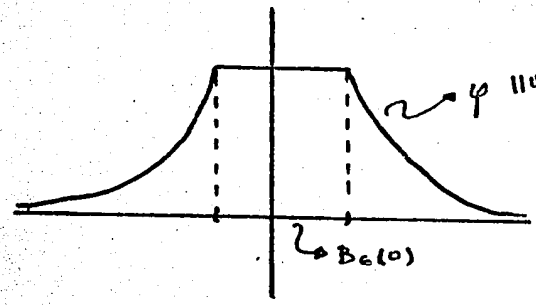
Sea $f \in L^2 \cap L^p$ p.d. $f \in \mathcal{D}_{\bar{R}} = \mathcal{D}_{\frac{1-n}{2}} \Leftrightarrow |\xi|^{\frac{1-n}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\| |\xi|^{\frac{1-n}{2}} \hat{f}(\xi) \|_2$
 $= \| (\Lambda^{\frac{1-n}{2}} f)^\wedge(\xi) \|_2 = \| \Lambda^{\frac{1-n}{2}} f \|_2 = \| (\eta^{1-n} |\xi|^{\frac{1-n}{2}} \psi) f(\eta) \|_2 \leq \| \eta^{1-n} \| \| |\xi|^{\frac{1-n}{2}} \psi f(\xi) \|_2 = (2\pi)^{-n/2}$

$\| |\xi|^{\frac{1-n}{2}} \psi f(\xi) \|_2 \leq (2\pi)^{-n/2} \| |\xi|^{\frac{1-n}{2}} \|_r \| \psi f(\xi) \|_q$ con $\frac{1}{2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ por Hölder. Ahora

$\psi: L^p \rightarrow L^q$ con $p \in [1, \frac{2n}{2n-1}]$ desde que $\frac{2n}{2n-1} \geq 1 \therefore$ Por Hausdorff-Young: $\| \psi f(\xi) \|_q$

$\leq (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|f\|_p$ y $|\xi|^{\frac{1-n}{2}} \notin L^r$ ($\frac{1}{r} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow r > 2$) Pero definamos:

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{\frac{1-n}{2}} & \xi \in \mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0) \\ 1 & \xi \in B_\epsilon(0) \end{cases} \therefore \varphi \in L^r \text{ y } \varphi = |\xi|^{\frac{1-n}{2}} \text{ a.e.}$$



$$\|\varphi\|_r = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(\xi)|^r d\xi = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} |\xi|^{(1-\frac{r}{2})r} d\xi + \int_{B_\epsilon(0)} d\xi$$

$$= \frac{|\xi|^{(\frac{r-1}{2})r+1}}{(\frac{r-1}{2})r+1} \Big|_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} + \mu(B_\epsilon(0)) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \infty} 0$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño

Con las consideraciones anteriores:

$$\| |\xi|^{\frac{n-\mu}{2}} \hat{f}(\xi) \|_2 \leq (2\pi)^{-n/2} (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \| \varphi(\xi) \|_r \| f \|_p = (2\pi)^{-n/p} \| \varphi \|_r \| f \|_p < \infty.$$

$\therefore f \in \mathcal{D}\bar{R}$

La fórmula (1.3.4) con $s=0$, muestra que: $\| \Lambda^{(\frac{n-\mu}{2})} R f \|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^1)}^2 = 2(2\pi)^{n-1} \| f \|_2^2$

si $V = 2^{-1/2} (2\pi)^{\frac{n-\mu}{2}} \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \bar{R} \Rightarrow \| V f \|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^1)}^2 = \| f \|_2^2$ es decir V es una isometría y hagamos las siguientes observaciones:

- a) $\text{Ran } \bar{R} = \text{Ran } \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}}$ si $g \in \text{Ran } \bar{R} \exists f \in \mathcal{D}\bar{R} = \mathcal{D}\Lambda^{\frac{n-\mu}{2}}$ tal que $\bar{R}f = g = \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}}f \Leftrightarrow g \in \text{Ran } \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}}$
- b) Desde que R es cerrable; $R^* = \bar{R}^* = R^{* * *} = \bar{R}^*$
- c) $\Lambda^{\frac{n-\mu}{2}}$ es autoadjunto, \bar{R} es cerrado y considerando a) y b) $\Rightarrow (\Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \bar{R})^* = \bar{R}^* \Lambda^{\frac{n-\mu}{2} *}$
 $= R^* \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}}$, a saber: $\langle \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \bar{R} \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, (\Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \bar{R})^* \psi \rangle \forall \varphi \in \mathcal{D}\bar{R}$. Desde que

$$\bar{R} \varphi \in \mathcal{D}\Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \text{ (ya que } \text{Ran } \bar{R} = \text{Ran } \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}}) \Rightarrow \langle \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \bar{R} \varphi, \psi \rangle = \langle \bar{R} \varphi, \Lambda^{\frac{n-\mu}{2} *} \psi \rangle$$

$$= \langle \bar{R} \varphi, \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \psi \rangle \text{ por ser } \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \text{ autoadjunto y por la misma razón anterior } \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \psi \in \mathcal{D}\bar{R}$$

$$\Rightarrow \langle \bar{R} \varphi, \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \psi \rangle = \langle \varphi, \bar{R}^* \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \psi \rangle = \langle \varphi, R^* \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \psi \rangle \text{ y así obtenemos:}$$

$$\langle \varphi, (\Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \bar{R})^* \psi \rangle = \langle \varphi, R^* \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \psi \rangle \forall \varphi \in \mathcal{D}\bar{R} \therefore (\Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \bar{R})^* = R^* \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}}$$

y entonces $V^* = 2^{-1/2} (2\pi)^{\frac{n-\mu}{2}} R^* \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}}$ y además: $\langle V^* V \varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, V^* V \varphi \rangle$

$$= \langle \varphi, V^* V \varphi \rangle = \langle V \varphi, V \varphi \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle \forall \varphi \in \mathcal{D}\bar{R} \therefore V^* V = 1 \text{ y formalmente}$$

obtenemos: $V^* V = (2^{-1/2} (2\pi)^{\frac{n-\mu}{2}} R^* \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}}) (2^{-1/2} (2\pi)^{\frac{n-\mu}{2}} \Lambda^{\frac{n-\mu}{2}} \bar{R}) = 2^{-1} (2\pi)^{n-\mu}$

$$R^* \Lambda^{n-1} \bar{R} = 1 \therefore \bar{R}^{-1} = 2^{-1} (2\pi)^{1-n} R^* \Lambda^{n-1} \text{ y de la expresión (1.3.1) para } R^*$$

obtenemos: $\bar{R}^{-1} g = 2^{-1} (2\pi)^{1-n} \int \Lambda^{n-1} g(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta$

La cual es la fórmula clásica de inversión para la Transformada de Radon, sin la fuerza de Λ que conmute formalmente con R y R^* como operadores no acotados no hubiese sido posible, como fue mostrado anteriormente.

teorema 1.3.5: El dominio de \bar{R} es $\mathcal{D}_{\frac{n-1}{2}}$, y el rango consiste de las funciones pares en $\mathcal{D}_{\frac{n-1}{2}}$; Mas generalmente, el rango de \bar{R} sobre $\mathcal{D}_s \cap \mathcal{D}_{\bar{R}}$ consiste de las funciones pares en $\mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})+s} \cap \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})}$ y en este dominio:

$$(1.3.6) \quad \bar{R}^{-1} = z^{-1} (z\pi)^{1-n} \wedge^{\frac{n-1}{2}-\sigma} R^* \wedge^{\frac{n-1}{2}+\sigma} \quad \text{si } 0 \leq \sigma \leq s$$

Demostración: La fórmula (1.3.4) muestra que el rango está contenido en:

$$\mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})+s} \cap \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})} \quad \text{a saber: Sea } g \in \text{Ran } \bar{R} \exists f \in \mathcal{D}_{\bar{R}} \text{ tal que } \bar{R}f = g$$

$$\Rightarrow \left\| \left(\wedge^{\frac{n-1}{2}+s} g \right) (\xi) \right\|_2^2 = \left\| \wedge^{\frac{n-1}{2}+s} \hat{g}(\xi) \right\|_2^2 = \left\| \wedge^{\frac{n-1}{2}+s} \bar{R}f \right\|_2^2 = z(z\pi)^{\frac{n-1}{2}} \|f\|_2^2 < \infty.$$

$\therefore g \in \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})+s}$. Análogamente para $\mathcal{D}_{\frac{n-1}{2}}$

$$\therefore g \in \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})+s} \cap \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})}$$

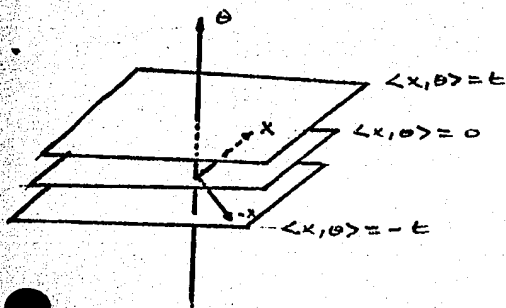
$$\therefore \text{Ran } \bar{R} \subseteq \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})+s} \cap \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})}$$

Y claramente cualquier función en el rango es par. a saber: sea $g(x) \in \text{Ran } \bar{R} \Rightarrow \exists f \in \mathcal{D}_{\bar{R}}$

$$\text{tal que } \bar{R}f(\theta, t) = \bar{R}_\theta f(t) = \int f(x) dx_{n-1} = g(x) \Rightarrow g(-x) = \int f(x) dx_{n-1} = \int f(x) dx_{n-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle x, \theta \rangle = t \\ \langle x, \theta \rangle = -t \end{array} \right\}$$

$$= \int f(x) dx_{n-1} = g(x) \quad \blacksquare$$



$$\text{Nótese que } \bar{R}f(\theta, t) = \bar{R}_\theta f(t) = \int f(x) dx_{n-1}$$

$$\text{Desde que } \bar{R}f(\theta, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_\theta f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx_{n-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle x, \theta \rangle = t \\ \langle x, \theta \rangle = -t \end{array} \right\}$$

$$= \int f(x) dx_{n-1} \quad \text{Por el teorema de la Convergencia Dominada. } \{f_n\}_n \subset L^2_0(\mathbb{R}^n) \subset L^1_0(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{y } \|f_n\| \leq \chi_{\text{sup}} \{ \text{sop } f_n \} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

$$\therefore \bar{R}f(\theta, t) = \int f(x) dx_{n-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle x, \theta \rangle = t \\ \langle x, \theta \rangle = -t \end{array} \right\}$$

Si g es cualquier función par en este espacio, entonces $\hat{f}(\tau, \theta) = (z\pi)^{\frac{1-n}{2}} \hat{g}(\theta, \tau)$ está bien definida, a saber: $g(\theta, \tau) = \bar{R}f(\theta, \tau) = (\bar{R}_\theta f)(\tau) = (z\pi)^{\frac{n-1}{2}} (\mathcal{F}_\theta^{-1} \mathcal{F}_n f)(\tau)$ por (1.2.3)

Nótese que efectivamente esta última igualdad es válida para \bar{R}

$$(\bar{R}_\theta f)(\tau) = (z\pi)^{\frac{n-1}{2}} \lim_{k \rightarrow \infty} (R_\theta f_k)(\tau) = (z\pi)^{\frac{n-1}{2}} \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{F}_\theta^{-1} \mathcal{F}_n f_k)(\tau) = (z\pi)^{\frac{n-1}{2}} (\mathcal{F}_\theta^{-1} \mathcal{F}_n f)(\tau)$$

Por la continuidad de la Transformada de Fourier como operador de $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$

$$\hat{f}(\tau, \theta) = (z\pi)^{\frac{1-n}{2}} \hat{g}(\theta, \tau)$$

teorema 1.3.5: El dominio de \bar{R} es $\mathcal{D}_{\frac{n-1}{2}}$, y el rango consiste de las funciones pares en $\mathcal{D}_{\frac{n-1}{2}}$; Mas generalmente, el rango de \bar{R} sobre $\mathcal{D}_s \cap \mathcal{D}_{\bar{R}}$ consiste de las funciones pares en $\mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})+s} \cap \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})}$ y en este dominio:

$$(1.3.6) \quad \bar{R}^{-1} = z^{-1} (2\pi i)^{1-n} \wedge^{(\frac{n-1}{2})-s} R^* \wedge^{(\frac{n-1}{2})+s} \quad \text{si } 0 \leq s \leq s$$

Demostración: La fórmula (1.3.4) muestra que el rango está contenido en:

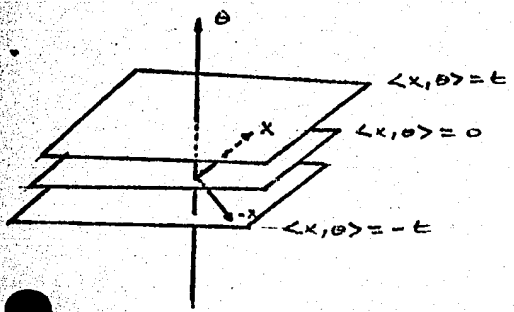
$\mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})+s} \cap \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})}$ a saber: Sea $g \in \text{Ran } \bar{R} \exists f \in \mathcal{D}_{\bar{R}}$ tal que $\bar{R}f = g$

P.d. $\| \wedge^{(\frac{n-1}{2})+s} \hat{g}(\xi) \|_2 = \| \wedge^{(\frac{n-1}{2})+s} \hat{g}(\xi) \|_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$
 $\Rightarrow \| \wedge^{(\frac{n-1}{2})+s} \hat{g}(\xi) \|_2 = \| \wedge^{(\frac{n-1}{2})+s} \hat{g}(\xi) \|_2 = \| \wedge^{(\frac{n-1}{2})+s} \bar{R}f \|_2 = z (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \| f \|_2 < \infty$

- $\therefore g \in \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})+s}$. Análogamente para $\mathcal{D}_{\frac{n-1}{2}}$
- $\therefore g \in \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})+s} \cap \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})}$
- $\therefore \text{Ran } \bar{R} \subseteq \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})+s} \cap \mathcal{D}_{(\frac{n-1}{2})}$

Y claramente cualquier función en el rango es par. a saber: sea $g(x) \in \text{Ran } \bar{R} \Rightarrow \exists f \in \mathcal{D}_{\bar{R}}$ tal que $\bar{R}f(\theta, t) = \bar{R}_0 f(t) = \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1} = g(x) \Rightarrow g(-x) = \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1} = \int_{\langle -x, \theta \rangle = -t} f(x) d\mu_{n-1}$

$$= \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1} = g(x)$$



Notese que $\bar{R}f(\theta, t) = \bar{R}_0 f(t) = \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1}$
 Desde que $\bar{R}f(\theta, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_0 f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f_n(x) d\mu_{n-1}$
 $= \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1}$. Por el teorema de la Convergencia Dominada. $\{f_n\}_n \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$
 y $\|f_n\| \leq \chi_{\text{sup}} \{ \text{sup } f_n \} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\therefore \bar{R}f(\theta, t) = \int_{\langle x, \theta \rangle = t} f(x) d\mu_{n-1}$$

Si g es cualquier función par en este espacio, entonces $\hat{f}(\tau, \omega) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \hat{g}(\omega, \tau)$ está bien definida, a saber: $g(\omega, \tau) = \bar{R}f(\omega, \tau) = (\bar{R}_0 f)(\tau) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} (\mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_n f)(\tau)$ por (1.2.5)

Notese que efectivamente esta última igualdad es válida para \bar{R}

$$(\bar{R}_0 f)(\tau) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \lim_{k \rightarrow \infty} (R_0 f_k)(\tau) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_n f_k)(\tau) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} (\mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_n f)(\tau)$$

Por la continuidad de la Transformada de Fourier como operador de $L^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)$
 $\hat{f}(\tau, \omega) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \hat{g}(\omega, \tau)$

Y para toda a :
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 |\xi|^{2a} d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{n-1} d\tau \int_{S^{n-1}} |\hat{f}(\tau\omega)|^2 |\tau\omega|^{2a} d\omega$$

$$= \int_{S^{n-1}} (\tau\pi)^{n-1} |\hat{g}(\omega, \tau)|^2 |\tau|^{n-1+2a} d\tau d\omega = (2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega, \tau)|^2 |\tau|^{n-1+2a} d\tau d\omega$$

tomando $a=0$, obtenemos :
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega, \tau)|^2 |\tau|^{n-1} d\tau d\omega$$

$\Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ por Plancherel $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\exists \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tomando $a = \frac{1-n}{2} \Leftrightarrow f \in \mathcal{D}_{\frac{1-n}{2}}$

$= \mathcal{D}_{\bar{R}}$ y $\bar{R}\hat{f} = g$, para $a=s \Leftrightarrow f \in \mathcal{D}_s$. Nuevamente para cualesquiera $u \in \mathcal{D}_{\bar{R}}$ y $0 \leq r \leq s$ tenemos :
$$\langle \bar{R}u, \wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{g} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{R}u(\xi) \wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{g}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{R}u(\xi) |\xi|^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \bar{R}u(\tau\omega) |\tau|^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \overline{\hat{g}(\tau\omega)} |\tau|^{n-1} d\tau d\omega = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\tau\omega) |\tau|^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \overline{\hat{g}(\tau\omega)} |\tau|^{n-1} d\tau d\omega$$

$$= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} 2 \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \hat{u}(\tau\omega) |\tau|^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \overline{\hat{g}(\tau\omega)} |\tau|^{n-1} d\tau d\omega = 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \langle u, \wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{f} \rangle$$

Desde que $u \in \mathcal{D}_s$ $\therefore \|\wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{f}\|_2 = \|\wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{f}\|_2 < \infty \therefore \wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

Desde que $f \in \mathcal{D}_s$ $\therefore \|\wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{f}\|_2 = \|\wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{f}\|_2 < \infty \therefore \wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

Y para $|\xi| < 1 \Rightarrow |\xi|^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} < |\xi|^{\frac{(n-1)}{2}} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\frac{(n-1)}{2}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty$

desde que $f \in \mathcal{D}_{\frac{1-n}{2}} \therefore$ En cualquier caso $\wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

Observemos que podríamos obtener las mismas conclusiones si $\frac{(n-1)}{2} + s \leq \sigma \leq 0$

\therefore Continuando con nuestro desarrollo:

$\wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y desde que $\langle \bar{R}u, \wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{g} \rangle = \langle u, R^* \wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{g} \rangle$

En realidad $R^* \wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{g} = 2(2\pi)^{\frac{(n-1)}{2}} \wedge^{\frac{(n-1)}{2}} \hat{f} \Rightarrow \wedge^{\frac{(n-1)}{2}} R^* \wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} \hat{g} =$

$$= 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \wedge^{\frac{(n-1)}{2}} \wedge^{\frac{(n-1)}{2}} \hat{f} = 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} I(\hat{f}) = 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \hat{f}$$

Observemos que dada $g \in \text{Ran } \bar{R}$ $\hat{g}(\omega, \tau) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \hat{f}(\tau\omega)$ esta bien definida es decir:

$\exists R^{-1} : \text{Ran } \bar{R} \subset L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1) \rightarrow \mathcal{D}_{\frac{n-1}{2}} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ $R^{-1} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \hat{f}_n^{-1} \hat{f}_n$

\therefore Aplicando \bar{R}^{-1} a nuestra última igualdad, obtenemos la fórmula de inversión deseada :
$$\bar{R}^{-1} = 2^{-1} (2\pi)^{1-n} \wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma} R^* \wedge^{\frac{(n-1)}{2}+\sigma}$$

**CAPITULO
D O S**

§ 2.0 EL TEOREMA DE LUDWIG SOBRE LOS SOPORTES

Esta sección contiene una prueba muy delicada de D. Ludwig [8], [9] que caracteriza las funciones $g \in L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}')$ tales que $g = Rf$ donde $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte en un conjunto compacto convexo. Esta prueba puede ser más simple que la existencia en la que no se hace uso de las propiedades de armónicos esféricos de la ecuación de onda. Consideremos primero el caso donde $g(\theta, t)$ es independiente de θ .

Lema 2.0.0 Si $\rho \in C_0^\infty[-1, 1]$ es par, entonces $\rho = R\psi$ con $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\psi(x) = 0$ para $|x| > 1$.

Demostración: primero supongamos que n es par, así que $\Lambda^{n-1} = (-i \frac{d}{dt})^{n-1}$

y saber: sea $W := \text{supp } \rho \subseteq [-1, 1]$ compacto y convexo, es decir $W = [a, b]$

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{d}{dt}\right)^{n-1} &= (-i)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \Rightarrow \left((-i)^{n-1} \frac{d^{n-1} \rho}{dt^{n-1}}\right)^\wedge = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_W e^{ist} (-i)^{n-1} \frac{d^{n-1} \rho(t)}{dt^{n-1}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-ist} (-i)^{n-1} \rho(t) \Big|_{\partial W} - \int_W (-i)^{n-1} \rho(t) \frac{d}{dt} e^{-ist} dt \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[0 - \int_W (-i)^{n-1} \rho(t) (-i)^{n-1} e^{-ist} dt \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_W (-i)^{2(n-1)} \rho(t) e^{-ist} dt = \frac{(-i)^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \int_W (-s)^{n-1} \rho(t) e^{-ist} dt \\ &= -\frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \int_{W=[a,b]} \rho(t) e^{-ist} dt = \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \int_{W'=[b,a]} \rho(t) e^{-ist} dt = \xi^{n-1} \hat{\rho}(\xi) = |\xi|^{n-1} \hat{\rho}(\xi) \\ &= \left(\Lambda^{n-1} \rho\right)^\wedge(\xi) \therefore \text{Aplicando la Transformada inversa de Fourier, obtenemos:} \\ &\quad \Lambda^{n-1} = \left(-i \frac{d}{dt}\right)^{n-1} \blacksquare \end{aligned}$$

REFERENCES

1. I. Amemiya and T. Ando, *Convergence of random products of contractions in Hilbert space*, Acta. Sci. Math. (Szeged) 26 (1965), 239-244. MR 32 =4570.
2. W. F. Donoghue, *Distributions and Fourier transforms*, Academic Press, New York and London, 1969.
3. E. Durand, *Solutions numériques des équations algébriques*. Tome II, Masson, Paris, 1960. p. 120. MR 24 =B1754.
4. R. Gordon, R. Bender and G. T. Herman, *Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography*, J. Theoret. Biol. 29 (1970), 471-481.
5. R. B. Guenther, C. W. Kerber, E. K. Killian, K. T. Smith and S. L. Wagner, *Reconstruction of objects from radiographs and the location of brain tumors*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974), 4884-4886. MR 50 =6547.
6. C. Hamaker and D. C. Solmon, *The angles between the null spaces of x-rays*, J. Math. Anal. Appl. (to appear).
7. G. N. Hounsfield, *Computerized transverse axial scanning (tomography). I: Description of system*, Brit. J. Radiol. 46 (1973), 1016-1022.
8. P. D. Lax and R. S. Phillips, *The Paley-Wiener theorem for the Radon transform*, Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 409-424. MR 42 =8189.
9. Donald Ludwig, *The Radon transform on euclidean space*, Comm. Pure Appl. Math. 69 (1966), 49-81. MR 32 =8064.
10. B. Malgrange, *Existence et approximation des solutions des equations aux derivees partielles et des equations de convolution*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 6 (1955-1956), 271-355. MR 19, 280.
11. R. M. Mersereau and A. V. Oppenheim, *Digital reconstruction of multidimensional signals from their projections*, Proc. IEEE 62 (1974), 1319-1338.
12. P. F. J. New and W. R. Scott, *Computed tomography of the brain and orbit*, Williams and Wilkins, Baltimore, Maryland, 1975.
13. K. T. Smith and D. C. Solmon, *Lower dimensional integrability of L^2 functions*, J. Math. Anal. Appl. 51 (1975), 539-549.
14. K. T. Smith, S. L. Wagner, R. B. Guenther and D. C. Solmon, *The diagnosis of breast cancer in mammograms by the evaluation of density patterns*, Radiology (to appear).
15. D. C. Solmon, *The x-ray transform*, J. Math. Anal. Appl. 56 (1976), 61-83.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, OREGON STATE UNIVERSITY, CORVALLIS, OREGON 97331

1. Análisis Funcional Vol I Reed y Simon
2. Análisis de Fourier y Autoadjuntos Vol II Reed y Simon.
3. Funciones Generalizadas Vol. V Gel'fand, Izrail, M.
4. La transformada de Radon y algunas de sus aplicaciones.
Sidney Road.
5. Análisis Real y Complejo. Walter Rudin.
6. Mecánica Cuántica Vol. II L. Landau, E. Lifshitz.
7. Conceptos de Física Moderna Arthur Beiser
8. Fundamentos Cuánticos y Estadísticos Vol. III
Marelo Alonso y Edward J. Finn
9. Tesis de Maestría (MIT_1982) Fernando Brambila Paz.