

29.6



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**“SISTEMA DE DISEÑO DE FILTROS DIGITALES”**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO EN COMPUTACION

P R E S E N T A :

**GABRIEL CASTILLO HERNANDEZ**

**DIR. M. I. RAFAEL B. CARMONA PAREDES**

**MEXICO, D. F.**

**AGOSTO DE 1987.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Capítulo I:

Fundamentos teóricos.

I.1	Teoría básica de sistemas.	... 2
I.1.1	Sistemas causales, lineales e invariantes en el tiempo.	... 2
I.1.2	Respuesta a impulso.	... 3
I.1.3	Función de transferencia, respuesta en frecuencia y atenuación.	... 6
I.2	Conceptos generales.	... 8
I.2.1	Definición de filtro.	... 8
I.2.2	Clasificación de filtro.	... 8
I.2.3	Especificación de las características de un filtro.	... 12
I.3	Filtros analógicos.	... 15
I.3.1	Aproximación Butterworth.	... 24
I.3.2	Aproximación Chebyshev.	... 35
I.3.3	Análisis comparativo.	... 47
I.4	Filtros digitales.	... 49
I.4.1	Filtro digital recursivo.	... 49
I.4.2	Filtro digital no recursivo.	... 50
I.4.3	Respuesta en frecuencia de sistemas discretos.	... 51
I.4.4	Métodos de diseño de filtros digitales.	... 54
I.4.5	Diseño de filtros digitales recursivos.	... 54
I.4.6	Diseño de filtros digitales no recursivos.	... 69
	Anexo al capítulo I.	... 77

## Capítulo II:

## Sistema de diseño de filtros digitales.

II.1	Descripción general del sistema de diseño de filtros digitales.	... 80
II.2	Módulo de diseño de la función de transferencia.	... 83
II.3	Módulo generador de programa.	... 89
II.4	Módulo de graficación.	... 94

## Capítulo III:

## Aplicaciones.

III.1	Descripción del S.A.D. del laboratorio de Hidromecánica del Instituto de Ingeniería.	... 99
III.2	Señales obtenidas a través del S.A.D	... 105
III.2.1	Primer experimento : descripción, resultados y observaciones.	... 106
III.2.2	Segundo experimento : descripción, resultados y observaciones.	... 113
III.3	Sistema de diseño de filtros digitales, su aplicación y resultados.	... 118
III.3.1	Filtro digital propuesto para el primer experimento.	... 118
III.3.2	Filtro digital propuesto para segundo experimento.	... 122
III.4	Conclusiones.	... 126
	Bibliografía.	... 127

Manual del sistema de graficación  
SWEET-P.

A1.1	Objetivo.	... 130
A1.2	Características.	... 130
A1.3	Descripción general.	... 131
A1.4	Formato del archivo de datos.	... 132
A1.5	Inicio de sesión.	... 134
A1.6	Opciones del sistema de graficación SWEET-P	... 135
A1.7	Valores iniciales del sistema.	... 142
A1.8	Archivo Sweet-p.sys	... 144
A1.9	Ejemplo tipo.	... 147

Pag.	Dice :	Debe decir :
v	Hidromecánica	Hidromecánica
5	... con $a_n = x(n\Delta t) t$	... con $a_n = x(n\Delta t)n t$
5	$x(z)h(t-\tau)d \dots(5.b)$	$x(t-z)h(z)d \dots ( 5.b )$
60	$s = \frac{2}{T} \frac{(Z + 1)}{(Z - 1)}$	$S = \frac{2}{T} \frac{(Z - 1)}{(Z + 1)}$
62	... el mapeo no lineal ...	... el mapeo ...
64	... un método fr ...	... un método de ...
85	... las ecuaciones ( 7 ),( 8 ) ( 9 ),(10),(14),...	... las ecuaciones ( 7 ),( 8 ), ( 9 ), ( 10 ),( 11 ),( 12 ),( 14 ),...
86	... Aplicando la transformada pasa banda ( 9 )	... Aplicando la transformada pasa banda ( 10 )
87	... ecuación (10) en (42) ...	... ecuación (12) en (46) ...
121	Figura ( 34 ) ....	Figura ( 33 ) ...

## Introducción.

La diferencia entre la respuesta en frecuencia de la función de transferencia teórica y la respuesta en frecuencia de la implementación del mismo filtro analógico es en algunos casos importante. Esta variación entre la teoría y la práctica es atribuible en muchos casos a los componentes empleados ya sea por la calidad del componente o por el tipo de componente comercial de que se dispone, además con el transcurso del tiempo los mismos componentes varían sus cualidades.

En contraposición a los filtros analógicos se encuentran los filtros digitales que por su naturaleza mantienen la misma respuesta en frecuencia teórica y práctica además no cambian con el tiempo.

Los filtros digitales actuales son ideales en el procesamiento de señales de baja frecuencia ( típicamente del orden de algunos kilohertz ) y cuyo filtrado no tenga que ser en tiempo real. El procesamiento de señales cuya manipulación pueda ser fuera de línea es ideal para el filtrado digital.

En el laboratorio de Hidromecánica del Instituto de Ingeniería es posible plantear el filtrado de señales como un proceso fuera de línea.

La presente tesis describe el desarrollo de un sistema de

diseño y filtrado digital. En el primer capítulo se exponen las bases teóricas para el filtrado digital. En el capítulo dos se describe el sistema de filtrado desarrollado. El capítulo tres presenta la aplicación del sistema de filtrado digital en el laboratorio de Hidromecánica del Instituto de Ingeniería. Como un apéndice se presenta el manual del sistema de graficación " Sweet-p" desarrollado para ser empleado como una herramienta auxiliar del sistema de diseño y filtrado digital.



## C A P I T U L O    I .

### FUNDAMENTOS TEORICOS.

## I.1.1 Sistemas causales lineales e invariantes en el tiempo.

Durante el modelado matemático de un sistema, se considera a éste en términos de la operación que realiza sobre una entrada para producir una salida. Simbólicamente :

$$y(t) = T[ x(t) ]$$

donde  $T[ ]$  es el operador matemático que transforma la entrada  $x(t)$  en la salida  $y(t)$ .

Suponiendo

$$y_1(t) = T[ x_1(t) ]$$

$$y_2(t) = T[ x_2(t) ]$$

y si al aplicar

$$y(t) = T[ a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) ]$$

( donde  $a_1$  y  $a_2$  son constantes ) se encuentra que :

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

entonces se dice que el sistema es lineal.

Si  $x(t)$  produce la salida  $y(t)$  y si al aplicar una entrada retardada en  $t_0$ ,  $x(t - t_0)$ , la respuesta que se obtiene a la salida es  $y(t - t_0)$  se dice que el sistema es invariante en el tiempo.

Un sistema que cumple con la propiedad

si  $x(t) = 0$  para toda  $t$  menor que cero

entonces  $y(t) = 0$  para toda  $t$  menor que cero

se dice que es un sistema causal.

### I.1.2

#### Respuesta a impulso .

La respuesta a impulso  $h(t)$ , de un sistema causal, lineal e invariante en el tiempo, se define como la respuesta del sistema al aplicar un impulso en  $t = 0$ , es decir :

$$h(t) = T[ \delta(t) ]$$

Como se muestra a continuación, para un sistema lineal e invariante en el tiempo se cumple que la respuesta a la entrada :

$$x(t) = \sum_{n=1}^N a_n \delta(t - t_n)$$

es

$$y(t) = \sum_{n=1}^N a_n h(t - t_n) \quad \dots (1)$$

Recordando , de las propiedades de la función impulso, que una señal cualquiera,  $x(t)$  , puede representarse como :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad \dots (2)$$

y aproximando ( 2 ) como una suma

$$x(t) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t) n\Delta t \quad \dots (3)$$

cuando  $\Delta t \rightarrow 0$

donde  $N_1 \Delta t \rightarrow -\infty$  y  $N_2 \Delta t \rightarrow +\infty$ , entonces la salida de un sistema a una entrada,  $x(t)$ , escrita como lo indica ( 3 ) es ( aplicando la ecuación ( 1 ) con  $a_n = x(n \Delta t) \Delta t$  y  $t_n = n \Delta t$  ) :

$$y(t) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n\Delta t)h(t-n\Delta t)n\Delta t \quad \dots ( 4 )$$

En el límite, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  entonces  $n \Delta t \rightarrow \tau$ , la suma de la ecuación ( 4 ) se transforma en :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \dots ( 5.a )$$

o, como puede mostrarse con un simple cambio de variable :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \dots ( 5.b )$$

Las ecuaciones ( 5 ) permiten establecer que todo sistema causal, lineal e invariante en el tiempo puede representarse o definirse a través de su respuesta a impulso.

### I.1.3 Función de transferencia, respuesta en frecuencia y atenuación.

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación ( 5 )  
se obtiene :

$$Y(f) = X(f) H(f)$$

y despejando  $H(f)$  :

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad \dots ( 6 )$$

A la función  $H(f)$  se le conoce como " función de transferencia " del sistema y ,de la misma manera que la respuesta a impulso, define en forma única las propiedades del sistema.

La función de transferencia es en general una función compleja, que puede escribirse en términos de su magnitud y argumento :

$$H(f) = | H(f) | e^{j \text{arc}( H(f) )}$$

donde  $| H(f) |$  se le denomina " respuesta en amplitud " y

a  $\text{arc}( H(f) )$  se le conoce como " respuesta de fase " del sistema. A estas dos funciones se les denomina en conjunto " Respuesta en frecuencia " del sistema.

La atenuación o pérdida, en decibeles, del sistema se define como :

$$A(f) = 20 \log \left( \frac{|X(f)|}{|Y(f)|} \right)$$

y sustituyendo la ecuación ( 6 ) en esta última ecuación se obtiene :

$$A(f) = 10 \log \left( \frac{1}{|H(f)|} \right) \quad \dots ( 7 )$$

Los conceptos hasta aquí presentados se usarán en la siguiente sección para definir el concepto de filtro, sus características principales y su relación con las funciones de transferencia y atenuación.

## I.2

CONCEPTOS GENERALES DE FILTROS.

## I.2.1

Definición de filtro.

Una señal que contiene información de un proceso dinámico puede ser expresada como una función del tiempo. Una segunda forma de representarla es mediante una única función de amplitud en las componentes de frecuencia que la constituyen; esta función se le denomina " Espectro en frecuencia " de la señal.

Un filtro es un sistema mediante el cual el espectro en frecuencia de una señal puede ser modificado, reconfigurado o alterado de acuerdo a un patrón deseado.

Considerando a un filtro como un sistema, este puede ser modelado a través de su función de transferencia.

## I.2.2

Clasificación de los filtros.

Los filtros por el tipo de componentes que los integran se clasifican en :

Filtros de parámetros concentrados :

Pasivos.

Activos.

Digitales.

De cristal.

Mecánicos.



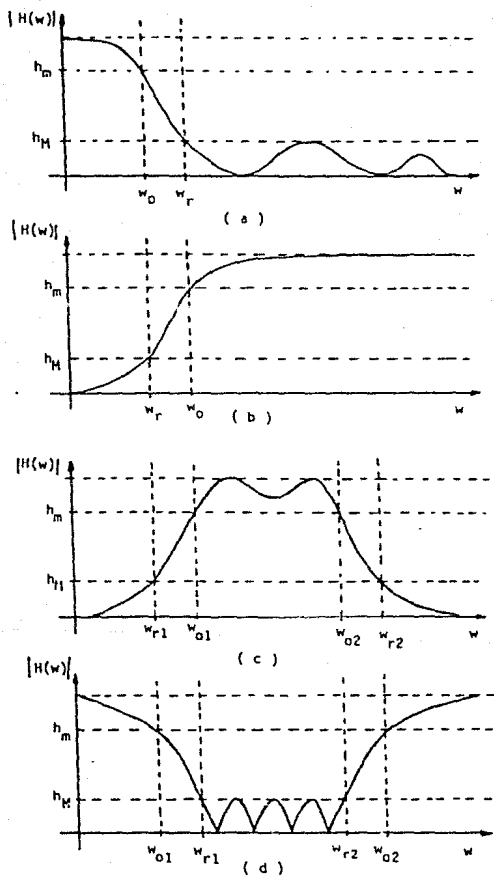


Figura ( 1 ) Respuesta en amplitud de los filtros:

- ( a ) Pasa bajas.
- ( b ) Pasa altas.
- ( c ) Pasa banda.
- ( d ) Supresor de banda.

Filtros de parámetros distribuidos :

Strip-line.

Guía de onda.

Por la forma de su respuesta en frecuencia se clasifican en :

Pasa Bajas.

Pasa Altas.

Pasa Banda.

Supresor de banda.

La figura ( 1 ) muestra los cuatro diferentes tipos de filtros según la forma de su respuesta en frecuencia. A partir de esa figura se definen los siguientes términos :

Banda de Paso : es el intervalo de frecuencia, en el cual, la respuesta en amplitud del filtro se aproxima a la unidad.

Banda de rechazo : es el intervalo de frecuencia, en el cual, la respuesta en amplitud del filtro se aproxima a cero. Esta banda también se le conoce como de supresión.

Banda de transición : es el intervalo de frecuencia, en el cual, la respuesta en amplitud del filtro transita de la banda de paso a la banda de rechazo.

Tipo de filtro	Banda(s) de paso.	Banda(s) de rechazo	Banda(s) de transición	Otros parámetros.
Pasa Bajas.	$w < w_0$	$w > w_r$	$w_0 \leq w \leq w_r$	Atenuación máxima en $w = w_0$ . Atenuación mínima en $w = w_r$
Pasa Altas.	$w > w_0$	$w < w_r$	$w_0 \geq w \geq w_r$	
Pasa Banda.	$w_{01} < w < w_{02}$	$w < w_{r1}$ y $w > w_{r2}$	$w_{r1} \leq w \leq w_{01}$ y $w_{02} \leq w \leq w_{r2}$	Atenuación máxima en $w = w_{01,z}$ Atenuación mínima en $w = w_{r1,z}$ Ancho de banda $AB = w_{02} - w_{01}$ frecuencia central
Supresor de banda.	$w < w_{01}$ y $w > w_{02}$	$w_{r1} < w < w_{r2}$	$w_{01} \leq w \leq w_{r1}$ y $w_{r2} \leq w \leq w_{02}$	$w_0 = w_{02} w_{01}$ factor de calidad $Q = w_0 / W$

Tabla 1. Principales características de los filtro según su respuesta en amplitud.

Frecuencia de Paso ( $\omega_0$ ) : es la frecuencia en la que empieza la banda de transición.

Frecuencia de rechazo ( $\omega_r$ ) : es la frecuencia en la que termina la banda de transición.

Esta frecuencia también es conocida como frecuencia de supresión.

Amplitud mínima ( $h_m$ ) : es el valor de la amplitud de la respuesta en frecuencia para una frecuencia igual a la de paso.

Amplitud máxima ( $h_M$ ) : es el valor de la amplitud de la respuesta en frecuencia para una frecuencia igual a la de rechazo.

Atenuación máxima ( $A_M$ ) : es el valor de la función de atenuación para  $\omega = \omega_0$ . Por lo tanto es la máxima atenuación que se puede tener en la banda de paso.

Atenuación mínima ( $A_m$ ) : es el valor de la función de atenuación para  $\omega = \omega_r$ . Por lo tanto es la mínima atenuación que se puede tener en la banda de rechazo.

### 1.2.3 Especificación de las características de un filtro.

Los filtros son especificados, normalmente, por una serie de parámetros que suministran información de la

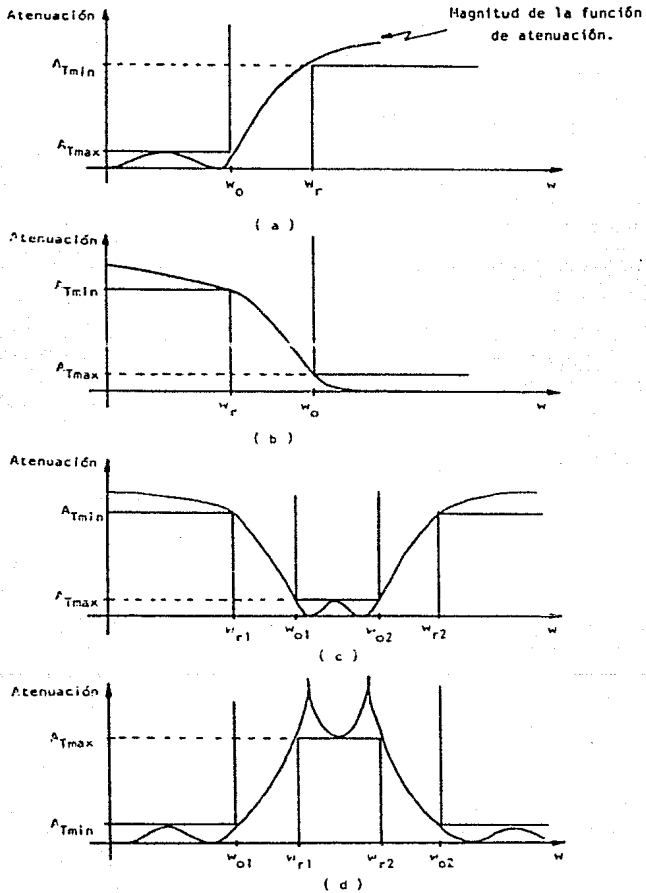


Figura ( 2 ) Plantilla de diseño para los

filtros :

( a ) Pasa bajas.

( b ) Pasa altas.

( c ) Pasa Banda.

( d ) supresor de banda.

respuesta en frecuencia del filtro que se requiere. Los parámetros más comunes son :

Tipo de filtro de acuerdo con su forma.

Frecuencias críticas en la banda de paso.

Frecuencias críticas en la banda de rechazo.

Atenuación máxima permitida en la banda de paso.

Atenuación mínima requerida en la banda de rechazo.

Es costumbre verter todas estas características en un esquema gráfico denominado plantilla de diseño. Las plantillas de diseño para varios tipos de filtros se muestran en la figura ( 2 ).

Es importante aclarar que la plantilla de diseño se da en términos de la magnitud de la función de atenuación y no en términos de la magnitud de la función de transferencia del filtro.

En esta tesis se analizan las características y la forma de construir la función de transferencia de los filtros analógicos y de los filtros digitales, con el propósito de desarrollar un sistema computarizado para el diseño de filtros digitales.

## I.3

FILTROS ANALOGICOS.

Los filtros analógicos pueden ser modelados, en general, como una función en el dominio complejo  $s$ . Su función de transferencia,  $H(s)$ , debe tener las siguientes propiedades :

( a ) Una función racional de  $S$  con coeficientes reales. Esta propiedad garantiza que el sistema sea realizable.

( b ) Los polos de la función deben localizarse en el semiplano izquierdo del plano complejo  $s$ ; lo que asegura la estabilidad del sistema.

( c ) El grado del polinomio del numerador debe ser menor o igual al grado del polinomio del denominador, condición que garantiza la causalidad del sistema.

En síntesis, se requiere de una función de transferencia de la forma :

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i s^i}{\sum_{j=0}^m b_j s^j}$$

m mayor o igual a n.

Existe una gran variedad de métodos de construcción de la función  $H(s)$ . En este trabajo, se revisan los métodos de aproximación Chebyshev y Butterworth con el propósito de desarrollar un paquete de diseño de filtros por computadora. Las ventajas y desventajas de estos métodos y algunos otros son analizados en la sección I.3.3.

Desarrollar un método para cada tipo de filtro de acuerdo con su forma de respuesta en amplitud y conforme a los diferentes tipos de aproximación es una tarea laboriosa y complicada, por lo que en lugar de esto se ha propuesto que diseño se integre con los siguientes pasos (ver por ejemplo [ 3 ] y [ 4 ] ) :

- ( a ) Aplicar a la plantilla de diseño del filtro una transformación para obtener una nueva plantilla, denominada plantilla normalizada,



cuyas características correspondan a las de un filtro pasa bajas con frecuencia de paso  $\omega_0 = 1$ .

- ( b ) Obtener la función de transferencia aplicando alguno de los métodos de aproximación, según las condiciones dadas en la plantilla normalizada.
- ( c ) Sobre la función de transferencia normalizada aplicar la transformación inversa a la utilizada en ( a ), para generar el filtro que satisfaga a la plantilla de diseño original.

La metodología anterior permite :

- ( 1 ) Desarrollar métodos de aproximación solo para filtros pasa bajas con frecuencia de paso igual a la unidad.
- ( 2 ) Independientemente del método de aproximación empleado , conociendo la función de transferencia normalizada, se pueden generar filtros de cualquier tipo.

A continuación se exponen las transformaciones que permiten obtener la plantilla de diseño normalizada a partir

de la plantilla original, así como la transformación inversa.

Dado que las plantillas de diseño son en esencia idealizaciones de la respuesta en frecuencia de las funciones de transferencia, las transformaciones a la plantilla pueden ser planteadas en términos de transformaciones a las funciones de transferencia. La figura ( 3 ) esquematiza las transformaciones requeridas.

### I .- Transformación Pasa bajas $\rightarrow$ Pasa bajas.

Supóngase una función de transferencia normalizada,  $H(S)$ , con frecuencia de paso  $\omega_0 = 1$ . La función de transferencia desnormalizada  $H(s)$  requerirá, ( Las letras mayúsculas representan las variables asociadas al sistema normalizado ) :

$$s = j0 \quad \text{si y solo si } S = j0$$

$$s = j\omega_0 \quad \text{si y solo si } S = j$$

$$s \rightarrow j\infty \quad \text{si y solo si } S \rightarrow j\infty$$

Una transformación que cumple con esta propiedad es :

$$S = s / \omega_0, \quad W = w / \omega_0 \quad \dots (7)$$

relación que establece la transformación Pasa bajas desnormalizado  $\rightarrow$  Pasa bajas normalizado.

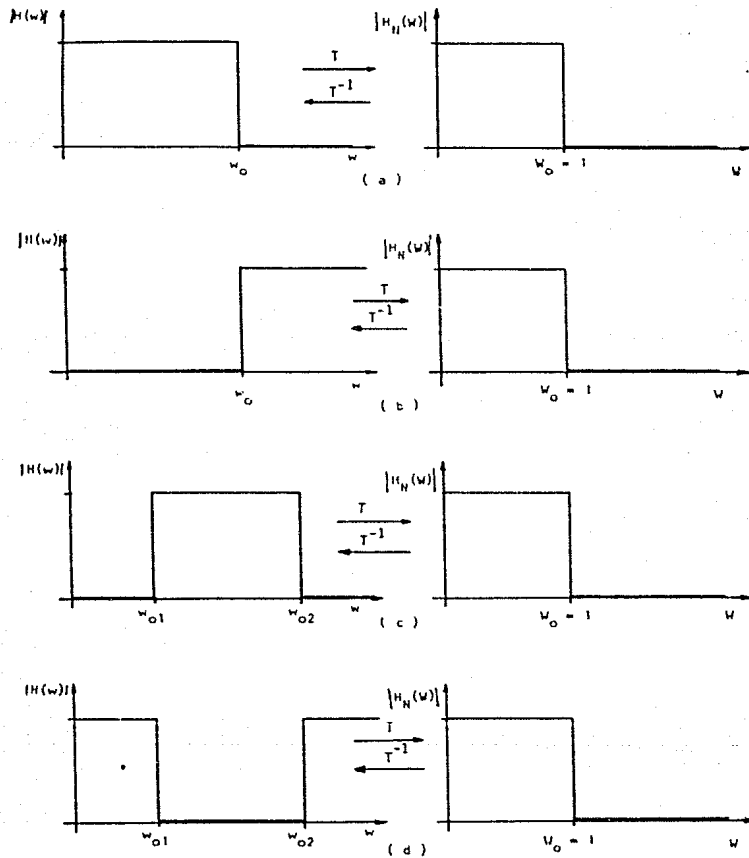


Figura ( 3 ) Esquema de las transformaciones aplicadas para obtener un filtro pasa bajas normalizado a partir de un filtro :  
 ( a ) Pasa bajas, ( b ) Pasa altas, ( c ) Pasa banda, ( d ) Supresor de de banda.

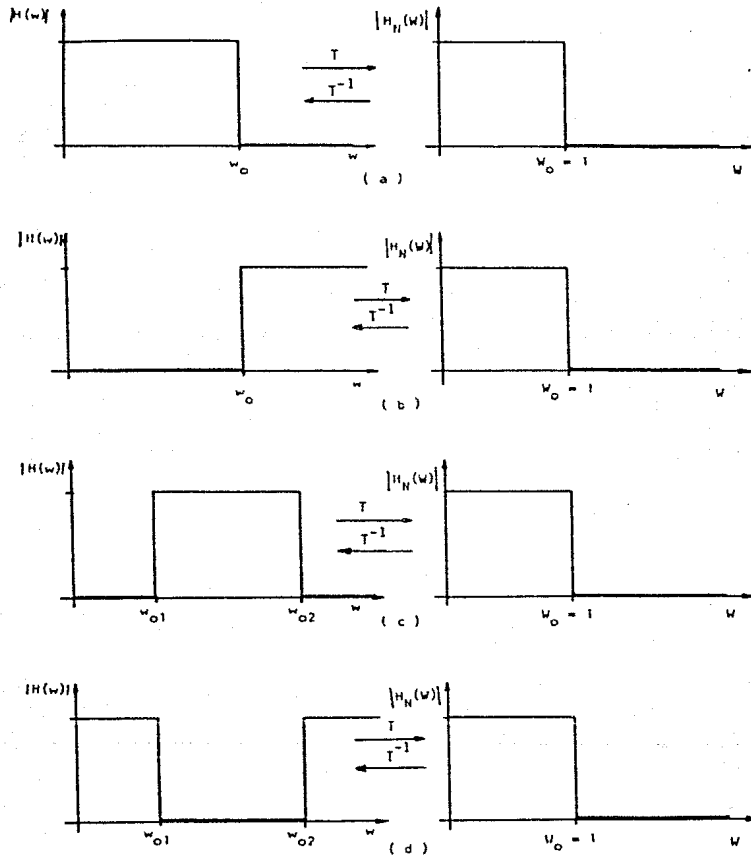


Figura ( 3 ) Esquema de las transformaciones aplicadas para obtener un filtro pasa bajas normalizado a partir de un filtro :  
 ( a ) Pasa bajas , ( b ) Pasa altas , ( c ) Pasa banda , ( d ) Supresor de de banda .

## II .- Transformación Pasa altas $\rightarrow$ Pasa bajas.

Esta transformación debe reunir los siguientes requisitos :

$$s = j\omega_0 \quad \text{si y solo si } S = j$$

$$s = j0 \quad \text{si y solo si } S \rightarrow j\infty$$

$$s \rightarrow j\infty \quad \text{si y solo si } S = j0$$

La transformación :

$$S = \omega_0 / s \quad , \quad W = \omega_0 / w \quad \dots ( 8 )$$

cumple con las necesidades anteriores, por lo tanto ( 8 ) define la transformación Pasa altas desnormalizado  $\rightarrow$  Paso bajas normalizado.

## III .- Transformación Pasa banda $\rightarrow$ Pasa Bajas.

Las propiedades de la transformación deben ser :

$$S = 0 \quad \text{si y solo si } s = j\omega_0$$

$$S = j \quad \text{si y solo si } s = j\omega_{02}$$

$$S = -j \quad \text{si y solo si } s = j\omega_{01}$$

La transformación :

$$W = [ w_0 / ( w_{02} - w_{01} ) ] [ w / w_0 - w_0 / w ]$$

cumple con las propiedades requeridas.

El termino  $w_0$  se denomina frecuencia central y se define como :

$$w_0 = ( w_{01} w_{02} )^{1/2}$$

el factor  $w_0 / ( w_{02} - w_{01} )$  se denomina factor de calidad y se denota por la letra Q.

Reescribiendo la transformación anterior, se obtiene :

$$W = Q ( w / w_0 - w_0 / w ) \quad \dots ( 9 )$$

por otra parte si :

$$S = jW \quad y \quad s = jw$$

entonces, sustituyendo en ( 9 ) :

$$S = Q( s/w_0 + w_0/s ) \quad \dots ( 10 )$$

las ecuaciones ( 9 ) y ( 10 ) definen la transformación

Pasa banda desnormalizada  $\rightarrow$  Pasa bajas normalizada.

## IV .- Transformación Supresor de banda → Pasa bajas.

En esta transformación se utilizan las dos anteriores, es decir, del filtro pasa bajas se pasa al filtro pasa altas y de aquí al filtro pasa banda, por lo que la transformación resulta ser :

$$W = w_0/Q [ w / ( w^2 - w_0^2 ) ] \quad \dots ( 11 )$$

en términos de S :

$$S = w_0/Q [ s / ( s^2 + w_0^2 ) ] \quad \dots ( 12 )$$

las ecuaciones ( 11 ) y ( 12 ) definen la transformación para los filtros supresores de banda.

La tabla 2 resume las ecuaciones de transformación para cada tipo de filtro de acuerdo con su forma.

En las siguientes secciones se exponen los métodos de aproximación de Butterworth y de Chebyshev a la función de transferencia normalizada. En primer término se expone la teoría para posteriormente presentar un ejemplo ilustrativo.

Forma del filtro Normalizado	Transformación para Normalizar.	Transformación para Desnormalizar
Pasa Bajas	$W = w / w_0$	$w = W \cdot w_0$
Pasa Altas	$W = w_0 / w$	$w = w_0 / W$
Pasa Banda.	$W = Q \left( \frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right)$	$w = \frac{w_0}{2Q} \left( W + \sqrt{W^2 + 4Q^2} \right)$
Supresor de banda	$W = \frac{w_0}{Q} \left( \frac{w}{w^2 - w_0^2} \right)$	$w = \frac{w_0}{2Q} \left( \frac{1}{W} + \sqrt{\frac{1}{W^2} + 4Q^2} \right)$

Tabla 2. Transformaciones utilizadas según la forma del filtro requerido.



## I.3.1

Aproximación Butterworth.

La función Butterworth de N-ésimo orden está dada por :

$$B_N(j\omega) = 1 + (j\omega / j\omega_c)^{2N} \quad N = 1, 2, \dots$$

la relación :

$$|H(j\omega)|^2 = 1 / [1 + (j\omega / j\omega_c)^{2N}] \dots (13)$$

cumple los requisitos de un filtro pasa bajas normalizado. Por lo tanto (13) define el cuadrado de la magnitud de la función de transferencia de un filtro Butterworth.

Las principales propiedades de las funciones Butterworth son :

- (1) La magnitud de las funciones de Butterworth es monótona decreciente para frecuencias mayores o iguales a cero. Esto implica que la respuesta en amplitud tenga su máximo valor en  $\omega = 0$ .
- (2) Las primeras  $2N-1$  derivadas de las funciones de Butterworth son cero en  $\omega = 0$ . Lo que

implica que las funciones son maximamente planas en  $W = 0$ , es decir, que la tangente en  $W = 0$  es cero.

La función de transferencia  $H(S)$  se obtiene a partir de la ecuación ( 13 ), la cual se puede escribir como :

$$H(S)H(-S) = \frac{\epsilon^{2N}}{\epsilon^{2N} + W^{2N}} \dots ( 13' )$$

para obtener las raíces del polinomio en el denominador de la ecuación anterior :

$$\epsilon^{2N} + W^{2N} = 0$$

dividiendo entre  $\epsilon^{2N}$  :

$$1 + ( jW / j\epsilon )^{2N} = 0$$

puede hacerse :

$$S = jW$$

entonces

$$1 + ( S / j\epsilon )^{2N} = 0$$

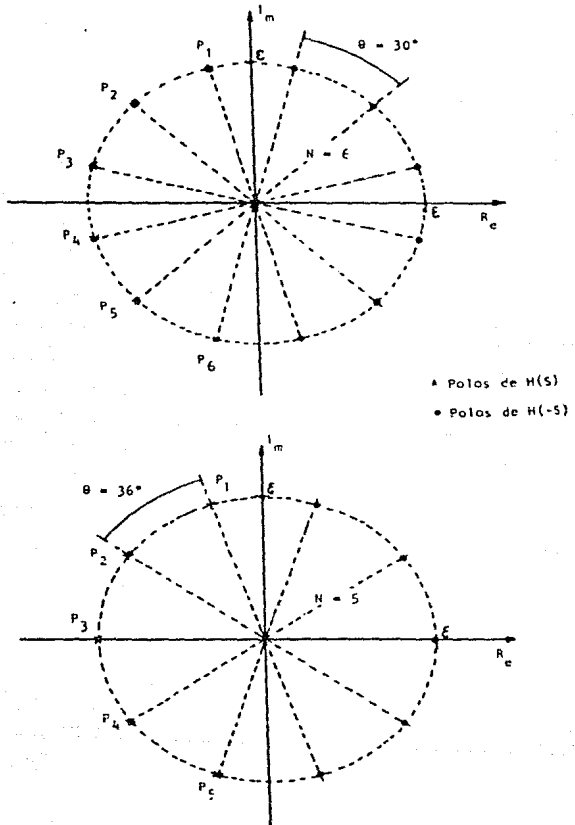


Figura ( 4 ) Localización de los polos de un filtro Butterworth Paso bajas normalizado ( para  $N = 6$  y  $N = 5$  ).

y las raíces son :

$$S_k = \epsilon e^{j \pi (2k + N + 1)/2} \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1$$

si se grafican las raíces  $S_k$  en el plano complejo, encontramos que todas ellas se localizan sobre un círculo de radio igual a  $\epsilon$ . Tal como se ilustra en la figura (4). Reescribiendo (13) :

$$H(S)H(-S) = \frac{\epsilon^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (S - P_k)} \cdot \frac{\epsilon^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (S + P_k)}$$

donde  $P_k$  son las raíces  $S_k$ , que se localizan en el semiplano izquierdo del plano complejo. Partiendo de la ecuación anterior, la función de transferencia es :

$$H(S) = \frac{\epsilon^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (S - P_k)}$$

donde

... (14)

$$P_k = \epsilon e^{j \pi (2k + N + 1)/2N}$$

De acuerdo a las especificaciones de la plantilla de diseño normalizada, en  $W_0 = 1$  se tiene una atenuación igual a

$A_M$ . Evaluando la ecuación ( 13 ) y expresándola como una atenuación se obtiene :

$$1 + ( 1 / \epsilon )^{2N} = 10^{0.1A_M}$$

evaluando nuevamente la ecuación ( 13 ) en  $W_r$  , punto para el cual se tiene una atenuación igual a  $A_m$  , se obtiene :

$$1 + [ ( W_r ) / \epsilon ]^{2N} = 10^{0.1A_m}$$

a partir de estas últimas dos ecuaciones se obtiene :

$$N = \frac{1}{2} \frac{\log \left[ \frac{10^{0.1A_M} - 1}{10^{0.1A_m} - 1} \right]}{\log \left[ \frac{1}{W_r} \right]} \quad \dots ( 16 )$$

y

$$\epsilon = ( 10^{0.1A_M} - 1 )^{-1/2N} \quad \dots ( 17 )$$

como el orden del filtro es un número entero, es recomendable tomar el entero inmediato superior del resultado obtenido por la ecuación ( 16 ) con el fin de asegurar que el orden tomado

cumpla las características de la plantilla de diseño.

Por lo anterior , el método de aproximación Butterworth se puede resumir como sigue :

Partiendo de la plantilla de diseño original :

- ( 1 ) Obtener la plantilla de diseño normalizada.
- ( 2 ) Calcular el orden del filtro.
- ( 3 ) Calcular el parámetro epsilon.
- ( 4 ) Obtener la función de transferencia normalizada.
- ( 5 ) Obtener la función de transferencia requerida desnormalizando la función de transferencia anterior.

Ejemplo 1 :

Se requiere un filtro pasa altas que cumpla con la plantilla de diseño ilustrada en la figura ( 5 ). Obtener la función de transferencia, cuando la aproximación empleada es Butterworth.

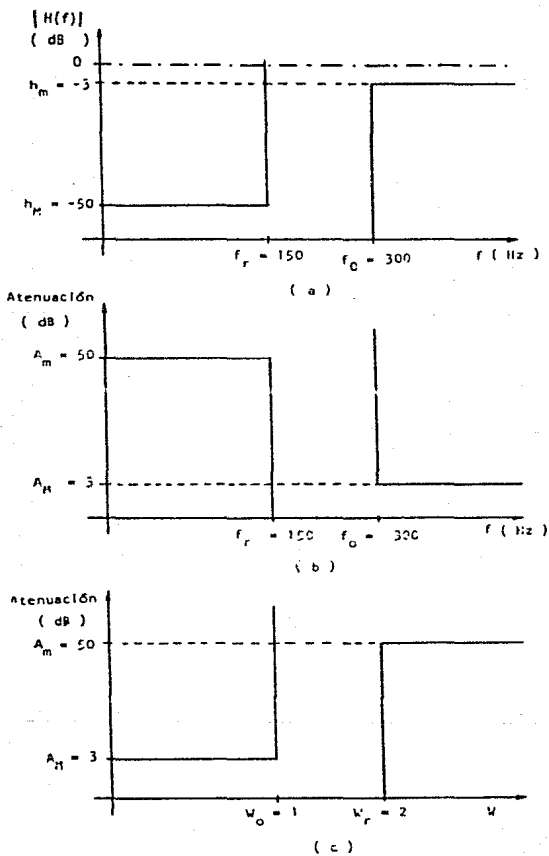


Figura ( 5 ) Ejemplo 1.

( a ) Patrón de la respuesta en amplitud deseada.

( b ) Plantilla de diseño original del filtro pasa alatas.

( c ) Plantilla de diseño normalizada ( Filtro pasa bajas ).

## ( 1 ) Plantilla de diseño normalizada.

Por la forma de la plantilla de diseño, se requiere un filtro pasa altas, por lo tanto la transformación que se usará será :

$$W = w_o / w$$

donde  $w_o = 300$  Hz., con esto  $W_o = 1$  ,  $W_r = 2$  .

## ( 2 ) Orden del filtro.

Evaluando la ecuación ( 16 ) para  $A_m = 50$ ,  $A_M = 3$ ,  $W_r = 2$  , obtenemos  $N = 8.31$  , por lo tanto el orden del filtro es  $N = 9$ .

## ( 3 ) Parámetro épsilon.

Evaluando la ecuación ( 17 ) para  $A_m = 3$  ,  $W_r = 2$ ,  $N = 9$ , obtenemos  $\epsilon = 1.0026$ .



## ( 4 ) Función de transferencia normalizada.

La función de transferencia normalizada se obtiene por medio de los polos del filtro.

Los polos quedan determinados por la ecuación ( 14 ), para  $N = 9$  y  $\epsilon = 1.0026$  se obtiene :

i	Pi
0	-0.173 + j 0.984
1	-0.499 + j 0.865
2	-0.765 + j 0.642
3	-0.939 + j 0.341
4	-0.999 + j 0.000
5	-0.939 - j 0.341
6	-0.765 - j 0.642
7	-0.499 - j 0.865
8	-0.173 - j 0.984

Como se observa en la tabla se tienen cuatro pares de polos complejos conjugados, cada par genera un factor de segundo orden, se tiene además un polo en el eje real, este polo genera un factor de primer orden.

La desnormalización de  $H_n(s)$  se genera mediante la transformación :

$$S = w_0/s$$

con  $w_0 = 2 \pi f_0$ ,  $w_0 = 600\pi$  . Aplicando la transformación y reduciendo obtenemos :

$$H(s) = \frac{s}{s + 188.5} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 188.54s + 35549.3} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 354.34s + 35549.3} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 65.48s + 35549.3} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 288.86s + 35549.3}$$

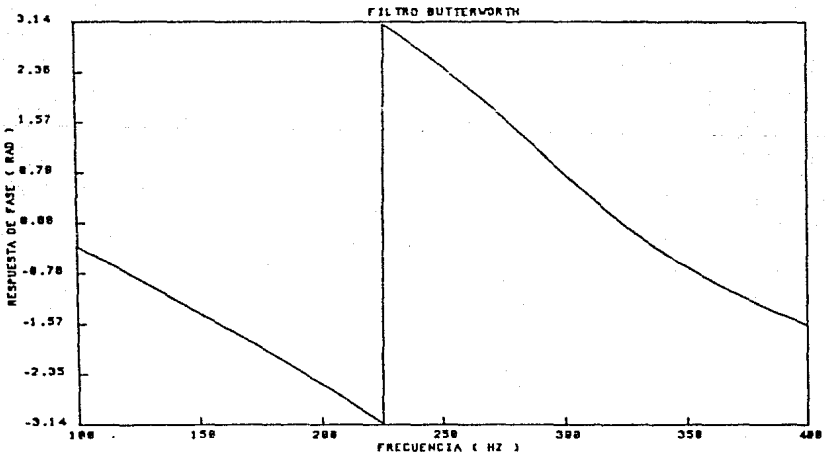
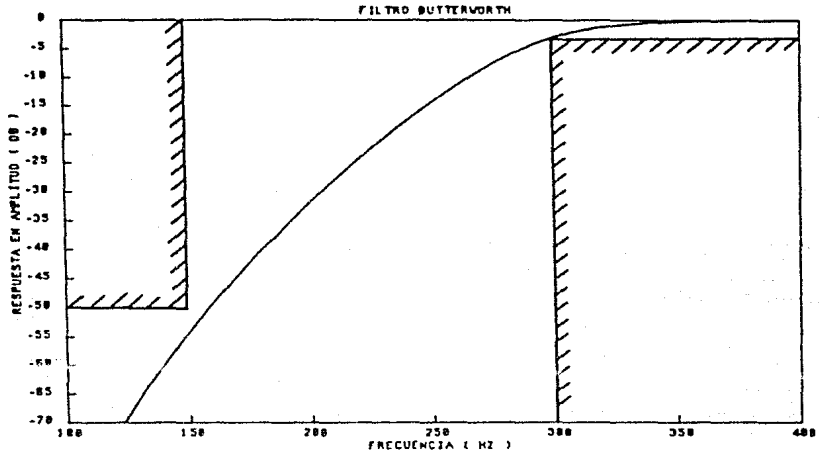


Figura ( 6 ) Componentes de amplitud y fase de la respuesta en frecuencia del filtro diseñado en el ejemplo 1.

La figura ( 6 ) muestra la gráfica de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia generada.

### 1.3.2 Aproximación Chebyshev.

Polinomios de Chebyshev.

El polinomio de Chebyshev de orden n se define como :

$$C_n(w) = \cos( n \cos^{-1} w ) \quad \dots ( 18 )$$

Para comprobar que  $C_n( w )$  es un polinomio de grado n, supóngase que :

$$x = \cos^{-1}( w )$$

entonces

$$C_n( w ) = \cos( n x )$$

Evaluando  $C_n( w )$  para algunos valores de n y utilizando algunas identidades trigonométricas :

$$C_0( w ) = \cos( 0 ) = 0$$

$$C_1( w ) = \cos( x ) = \cos( \cos^{-1} w ) = w$$

$$C_2( w ) = \cos( 2x ) = 2\cos^2(x) - 1 = 2w^2 - 1$$

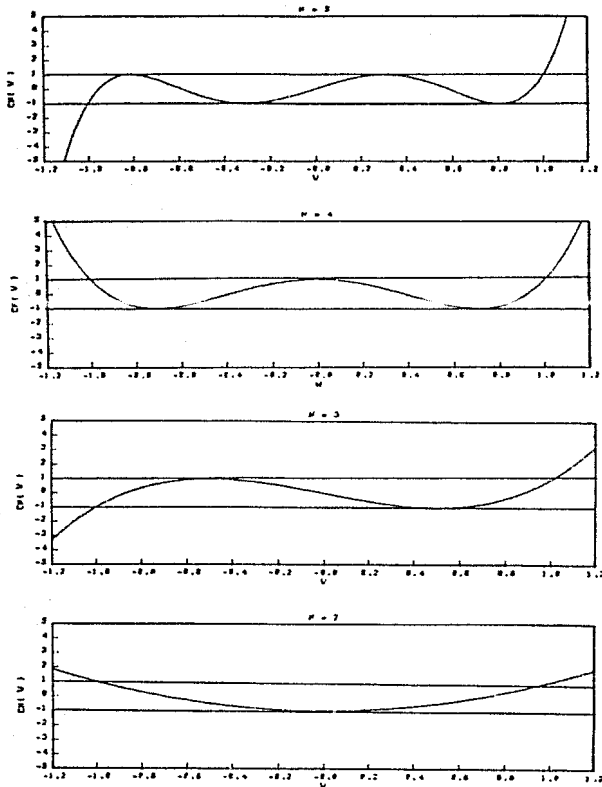


Figura ( 7 ) Gráfica de los polinomios de Chebyshev para diferentes valores de  $N$ ,

$$C_3(w) = \cos(3x) = -3\cos(x) + 4\cos^3(x) = -3w + 4w^3$$

Otra forma de expresar  $C_n(w)$  es mediante la fórmula recursiva que se obtiene de la siguiente manera :

$$C_{n+1}(w) = \cos[ (n+1) \cos^{-1}(w) ] \dots (19)$$

$$C_{n-1}(w) = \cos[ (n-1) \cos^{-1}(w) ] \dots (20)$$

sumando las ecuaciones (19) y (20) y despejando :

$$C_{n+1}(w) = 2w C_n(w) - C_{n-1}(w) \dots (21)$$

Recordando que :

$$C_0(w) = 1, C_1(w) = w$$

La ecuación 21 es la forma recursiva para obtener los polinomios de Chebyshev, la figura (7) muestra la gráfica del polinomio de Chebyshev para diferentes valores de N.

Los polinomios de Chebyshev presentan las siguientes propiedades :

1.- Para cualquier n :

$$C_n(w) \in [-1, 1] \quad \text{para} \quad w \in [-1, 1]$$

2.- Para cualquier valor de  $n$ ,  $C_n(w)$  es monótona creciente para  $w$  mayor que o igual a uno es decir, que para estos valores  $w$  crece constantemente.

3.-  $C_n(w)$  es un polinomio de orden par o impar según  $n$  sea par o impar.

Función de transferencia.

La función de transferencia que propone el método debe satisfacer la ecuación siguiente :

$$|H(S)|^2 = H_0^2 / (1 + \epsilon^2 C_n^2(W)) \dots (22)$$

De acuerdo con la ecuación (22), los polos de  $H(S)$  son las raíces de :

$$1 + \epsilon^2 C_n^2(W) = 0$$

substituyendo  $C_n(W)$  y despejando :

$$N \cos^{-1}(W) = \cos^{-1}(\pm j / \epsilon)$$

Esta ecuación puede resolverse directamente ( ver anexo 1 ) suponiendo que :

de donde :

$$\alpha = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$$

con lo que :

$$w = \cos\left(\frac{1}{n}\alpha\right) \cosh\left(\frac{1}{n}\beta\right) - j \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\alpha\right) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{n}\beta\right)$$

en términos de S :

$$S = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\alpha\right) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{n}\beta\right) + j \cos\left(\frac{1}{n}\alpha\right) \cosh\left(\frac{1}{n}\beta\right)$$

substituyendo  $\alpha$  , obtenemos finalmente :

$$S_k = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{n}\beta\right) + j \cos\left(\frac{\pi}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \cosh\left(\frac{1}{n}\beta\right)$$

con

... ( 23 )

$$\beta = \operatorname{senh}^{-1}\left(\pm \frac{1}{c}\right) \quad y \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$$

Si se grafican las raíces de  $S_k$  en el plano complejo, se observa que todas se localizan sobre una elipse de ecuación : ( suponiendo  $S_k = \phi_k + \theta_k j$  )

$$\phi_k / \operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{n}\beta\right) + \theta_k / \cosh^2\left(\frac{1}{n}\beta\right) = 1$$



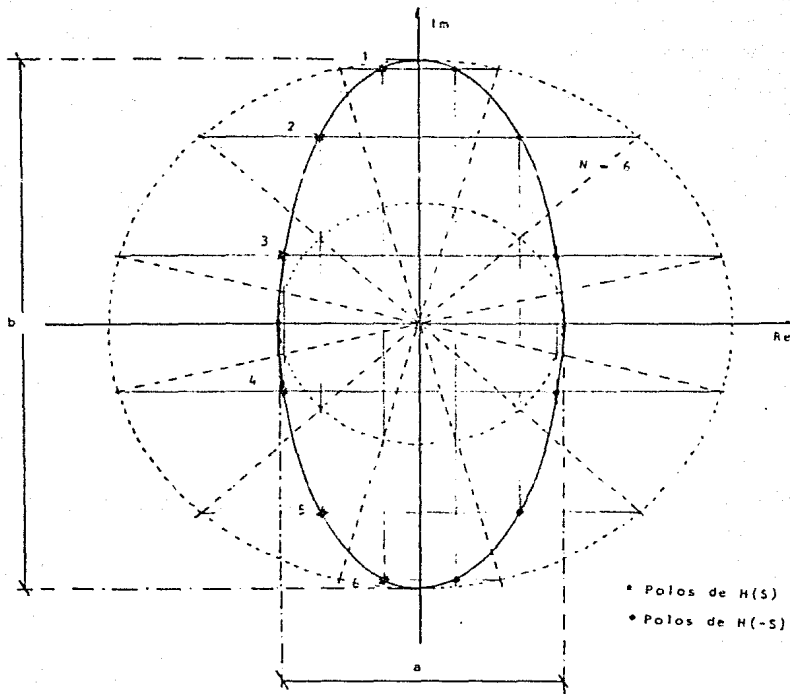


Figura ( 8 ) Localización de los polos de un filtro Chebyshev normalizado de 6<sup>º</sup> orden.

por lo tanto la elipse tendra

$$\text{Eje mayor : } b = \cosh\left(\frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon}\right)$$

$$\text{Eje menor : } a = \sinh\left(\frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon}\right)$$

La figura ( 8 ) ilustra un caso típico de la posición de los valores de  $S_k$ . Tomando los valores de  $S_k$  que se localizan en el semiplano izquierdo se obtiene la función de transferencia :

$$H(S) = \frac{H_0}{\prod_{i=1}^N (S - P_i)} \quad \dots ( 24 )$$

donde

$$P_i = \sin\left(\frac{\pi(i+n-1)}{2}\right) \sinh\left(\frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon}\right) + j \cos\left(\frac{\pi(i+n-1)}{2}\right) \cosh\left(\frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon}\right)$$

y  $H_0$  se escoge de manera que garantice que

$$20 \log \frac{1}{H_0} = A_M \quad \text{si } N \text{ es par.}$$

$$20 \log \frac{1}{H_0} = 0 \quad \text{si } N \text{ es impar.}$$

por lo tanto :

H<sub>o</sub>

$$10^{-0.05A_M} \prod_{i=1}^N (-P_i) \quad \text{si } N \text{ es par.}$$

... ( 24.c )

$$\prod_{i=1}^N (-P_i) \quad \text{si } N \text{ es impar.}$$

El parámetro  $\epsilon$  se obtiene al evaluar la ecuación ( 22 ) para  $W = 1$ , punto para el cual la plantilla de diseño normalizada presenta un valor de atenuación  $A_M$ . Expresando  $|H(jW)|$  en términos de la atenuación :

$$A_M = 10 \log( 1 + \epsilon^2 )$$

$$\epsilon = ( 10^{0.1A_M} - 1 )^{1/2} \quad \dots ( 25 )$$

El orden del filtro,  $n$ , se obtiene evaluando la función de atenuación en  $W = W_r/W_o$ , punto en el que se tiene una atenuación igual a  $A_m$  :

$$A_m = 10 \log ( 1 + \epsilon^2 C_n^2 ( \frac{W_r}{W_o} ) )$$

despejando  $n$ 

$$N = \frac{\cosh^{-1} ( ( 10^{0.1A_m} - 1 )^{1/2} / \epsilon )}{\cosh^{-1} ( \frac{W_r}{W_o} )} \quad \dots ( 26 )$$

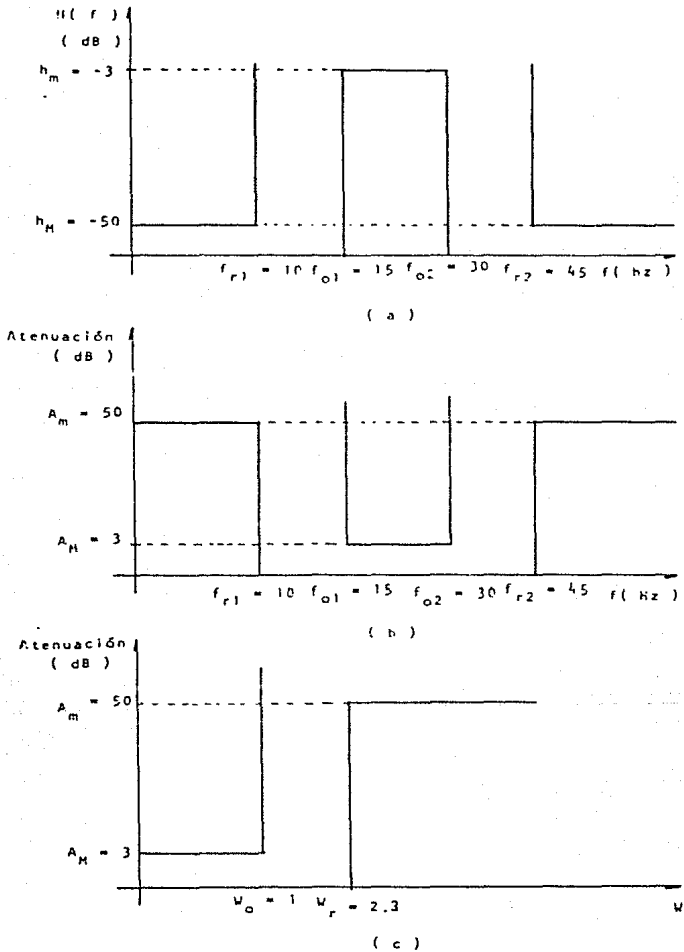


Figura ( 9 ) Ejemplo 2.

( a ) Patrón de la respuesta en amplitud deseada.

( b ) Plantilla de diseño original del filtro pasa banda.

( c ) Plantilla de diseño normalizada ( filtro pasa bajas ).

El algoritmo de aproximación a la función de transferencia  $H(S)$  para una plantilla cualquiera es el mismo que el seguido para un filtro Butterworth.

Ejemplo 2.

Diseñar el filtro pasa banda requerido por la plantilla de la figura ( 9 ).

( 1 ) Normalización de la plantilla de diseño.

Como el filtro requerido es un filtro pasa banda, la transformación a usar es :

$$W = Q \left( \frac{W}{W_0} - \frac{W_0}{W} \right)$$

donde

$$W_0 = (w_{01} w_{02})^{1/2}, AB = w_{02} - w_{01}, Q = W_0/AB$$

substituyendo valores :

$$W_0 = 133.28, AB = 94.24, Q = 1.414$$

con lo que :

$$W_0 = 1 \quad \text{y} \quad A_M = 3 \text{ dB}$$

$$W_r = 2.33 \quad \text{y} \quad A_m = 50 \text{ dB}$$

( 2 ) Cálculo de  $c$  .

Evaluando la ecuación ( 25 ) ,  $c = 0.998$  .

( 3 ) Cálculo del orden del filtro.

Al evaluar la ecuación ( 26 ) se obtiene  $N = 4.33$ , por lo tanto  $N = 5$ .

( 4 ) Cálculo de la función de transferencia normalizada.

$i$	$P_i$
1	$-0.0548 - j0.9659$
2	$-0.1436 - j0.5969$
3	$-0.1775$
4	$-0.1436 + j0.5969$
5	$-0.0548 - j0.9659$

$$H_o = 0.0626$$

( 5 ) Función de transferencia desnormalizada.

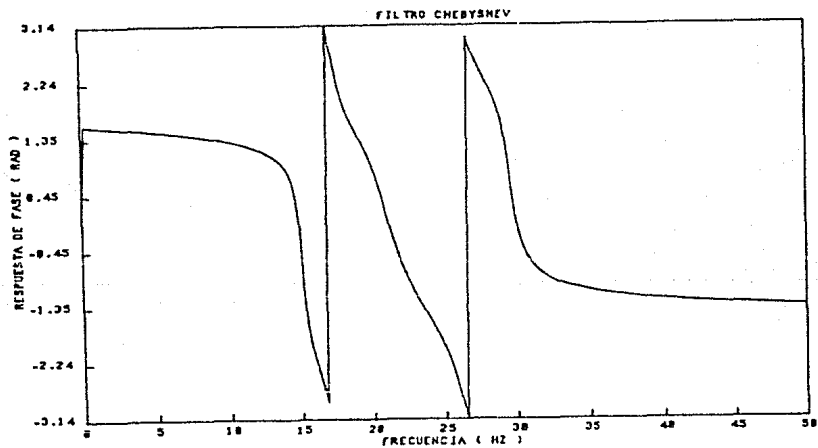
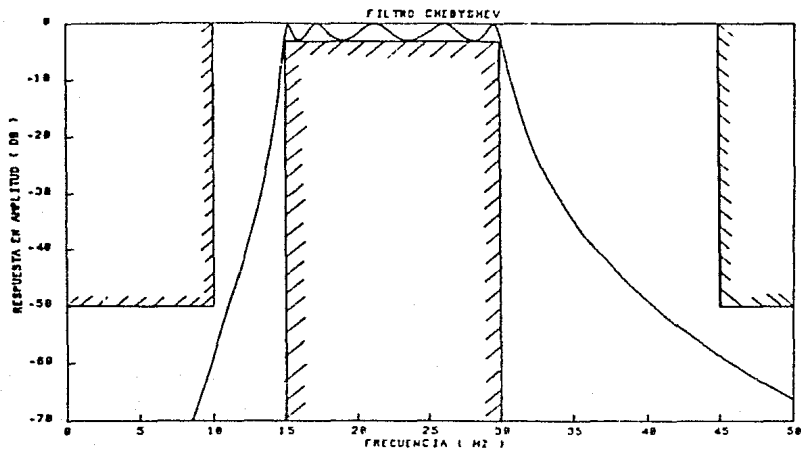


Figura ( 10 ) Componentes en amplitud y fase de la respuesta en frecuencia del filtro diseñado en el ejemplo 2.

La función de transferencia final se obtiene por medio de la transformación dada por la ecuación ( 10 ) :

$$H(s) = 4.65872 \times 10^8 \cdot \frac{s^2}{9086.12 + 3.499s + s^2} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 10.737s + 11677.7} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 16.731s + 17765.3} \cdot \frac{s^2 + 1.000}{s^2 + 16.535s + 27026.3} \cdot \frac{s^2 + 1}{s^2 + 6.841s + 34734.9}$$

La figura ( 10 ) muestra la gráfica de la función de transferencia generada y la gráfica de la plantilla de diseño del filtro deseado.

### I.3.3

#### Análisis comparativo.

Se analizan a continuación las ventajas y desventajas de los métodos de aproximación Chebyshev, Butterworth y de los filtros Elípticos.



( 1 ) Filtro Butterworth, se caracteriza porque su magnitud decrece monotonamente conforme  $w$  crece. Una ventaja de este filtro es que su amplitud en la banda de paso presenta un decrecimiento casi lineal. Una desventaja es que su orden se incrementa mucho conforme se reduce la banda de transición y crece la atenuación mínima requerida.

( 2 ) Filtro Chebyshev, presenta una oscilación en la banda de paso ( denominada rizo ), así como una disminución monótona en la banda de supresión. El orden del filtro en este diseño se reduce en comparación con el requerido para una aproximación Butterworth para una misma plantilla de diseño.

( 3 ) Filtros Elípticos, se caracterizan por tener rizados tanto en la banda de paso como en la banda de rechazo. El orden del filtro obtenido es el menor de los tres diseños.

La exposición anterior permite concluir que la aproximación más eficiente es la aproximación elíptica, presentando el menor orden para la función de transferencia, sin embargo presenta el inconveniente de los rizados en las bandas de paso y rechazo. Dado que el diseño, en este trabajo, se efectuará por computadora el orden del filtro no representa un factor determinante en la selección de los métodos de diseño, siendo más importante la forma de la respuesta del filtro diseñado. Bajo este criterio se seleccionaron los métodos de aproximación Butterworth y

Chebyshev.

A continuación se expone la teoría de diseño para filtros digitales con el objeto de sentar las bases teóricas para el sistema de cómputo desarrollado.

#### I.4

#### FILTROS DIGITALES.

Un filtro digital es un filtro dedicado al proceso de señales discretas. Por lo tanto, el modelado de un filtro digital se efectúa mediante el uso de la transformada Z y queda representado por una función de transferencia discreta.

##### I.4.1

##### Filtro Digital Recursivo.

Se denomina filtro digital recursivo a aquel filtro digital cuya salida depende de todas las entradas y salidas anteriores a un instante  $k$ , así como de la entrada en ese instante.

Si el filtro es causal, lineal e invariante en el tiempo, se puede expresar la salida como una ecuación en diferencias de la forma :

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i x_{k-i} - \sum_{i=1}^N b_i y_{k-i} \quad \dots (27)$$

Aplicando la transformada Z y despejando se puede escribir la función de transferencia como :

$$H(Z) = H_0 \frac{\sum_{j=1}^N a_j Z^{N-j}}{Z^N + \sum_{i=1}^N b_i Z^{N-i}} \quad \dots (28)$$

y al factorizar el numerador y el denominador de la ecuación (28), H(z) puede expresarse de manera general como :

$$H(Z) = H_0 \frac{\prod_{j=1}^M (Z - Z_j)}{\prod_{i=1}^N (Z - P_i)} \quad N > M \quad \dots (29)$$

Las ecuaciones (28) y (29) representan la función de transferencia, H(z), que define a un filtro digital recursivo.

#### I.4.2 Filtro Digital No Recursivo.

Si todos los términos  $P_i$  de la ecuación (29) son cero entonces :

$$H(Z) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (Z - Z_i)}{Z^N} \quad N > M \quad \dots (30)$$

y en el dominio del tiempo discreto :

$$y_k = \sum_{i=0}^{N-M} a_i x_{k-i} \quad \dots (31)$$

Las ecuaciones ( 30 ) y ( 31 ) definen a un filtro digital denominado " No recursivo " , nombre que se desprende del hecho de que la salida del filtro no depende de sus valores anteriores ( depende exclusivamente de la entrada actual y todas las entradas anteriores ).

#### 1.4.3 Respuesta en frecuencia de sistemas discretos.

Si  $h_k$  es la respuesta a impulso de un sistema causal lineal e invariante en el tiempo en el dominio del tiempo discreto entonces la salida del sistema,  $y_k$ , a una entrada,  $x_k$ , será :

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n x_{k-n} \quad \dots (32)$$

si  $x_k = e^{j\omega_0 k}$  ( una entrada senoidal ), substituyendo en ( 32 ) , obtenemos :

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{j\omega_0 (k-n)}$$

6

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{jW_0 k} e^{-jW_0 n}$$

por lo tanto

$$y_k = e^{jW_0 k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-jW_0 n} \quad \dots (33)$$

Haciendo

$$H(e^{jW_0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-jW_0 n} \quad \dots (34)$$

se puede escribir :

$$y_k = e^{jW_0 k} H(e^{jW_0}) \quad \dots (35)$$

De las ecuaciones ( 34 ) y ( 35 ) se concluye que :

- ( a ) Un sistema causal, lineal e invariante en el tiempo responde a una entrada senoidal, de frecuencia  $w_0$ , con otra senoidal de la misma frecuencia pero con una amplitud y fase determinada por el sistema.

( b )  $H(e^{j\omega_0})$  describe el cambio en amplitud y fase para una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_0$ . La función  $H(e^{j\omega_0})$  se denomina " Respuesta en frecuencia " de un sistema discreto.

( c ) Si  $n = kT_m$ , donde  $T_m$  es el periodo de muestreo, entonces :

$$e^{-j\omega_0 n} = e^{-j\omega_0 k T_m}$$

además  $\omega_0 = 2\pi f_0$  y  $f_m = \frac{1}{T_m}$ , por lo tanto :

$$e^{-j\omega_0 n} = e^{-2\pi k \left(\frac{f_0}{f_m}\right)} \quad \dots ( 36 )$$

esta última ecuación es periódica, con un periodo  $f_m$ ; al substituir ( 36 ) en ( 34 ) concluimos que :  
" la respuesta en frecuencia de un sistema discreto es periódica, con un periodo igual a la frecuencia de muestreo. "

( d ) Si  $H(Z)$  es la transformada Z de la respuesta a pulso, entonces :

$$H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n Z^{-n}$$

al evaluar la variable compleja Z sobre el círculo

unitario , es decir  $Z = e^{j\omega_0}$ , y sustituyendola en la ecuación anterior anterior :

$$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n(e^{j\omega_0})^{-n}$$

al comparar esta última ecuación con la ecuación ( 34 ) se concluye que : " la respuesta en frecuencia de un sistema discreto se puede obtener a partir de la función de transferencia del sistema evaluada en  $Z = e^{j\omega}$ . "

#### I.4.4 Métodos de diseño de filtros digitales.

Los métodos de diseño de filtros digitales dependen, en gran medida, de la clasificación del filtro digital que se desea ( Recursivo o No Recursivo ).

El diseño de un filtro digital recursivo, hace uso de la teoría de los filtros analógicos. El diseño de un filtro digital no recursivo requiere de técnicas totalmente nuevas, aplicables solo a señales discretas.

#### I.4.5 Diseño de filtros digitales recursivos.

La existencia de una serie de métodos analógicos de diseño de filtros sugiere su uso en el diseño de filtros digitales.

El mayor obstáculo estriba en la necesidad de definir una transformación, del dominio del tiempo continuo al dominio del tiempo discreto, que conserve las propiedades de la respuesta en frecuencia de una función de transferencia  $H(S)$ . Para ello se tienen las siguientes condiciones :

( a ) El eje imaginario del plano  $S$  debe mapearse sobre un círculo de radio unitario en el plano  $Z$ . Esta propiedad es necesaria para preservar las características de frecuencia del filtro analógico.

( b ) El semiplano izquierdo del plano  $S$  debe mapearse dentro de un círculo de radio unitario del plano  $Z$ . Esta propiedad es necesaria para preservar la propiedad de estabilidad del filtro analógico.

La condición ( b ) es necesaria, sin embargo la transformación puede cumplir o no la condición ( a ).

Se han propuesto una gran variedad de métodos de transformación, a continuación se analizan brevemente los métodos de aproximación de Euler y de Transformación de respuesta a impulso invariante y se presenta en forma detallada el método de la Transformación Bilineal que por sus características es de los más populares y eficientes.



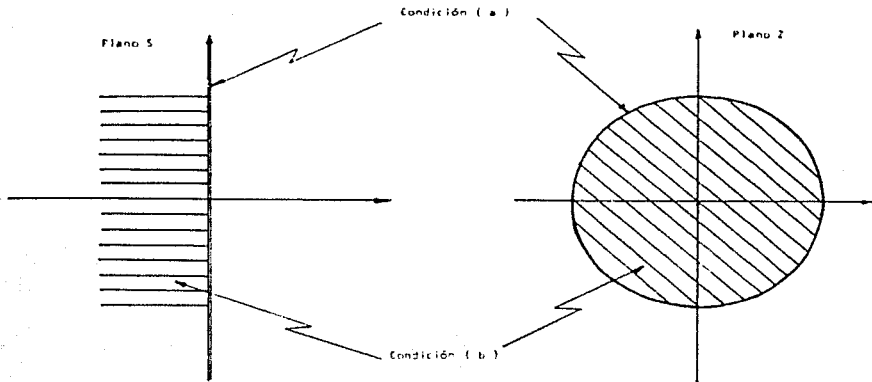


Figura ( 11 ) Condiciones deseables en transformaciones del plano 5.

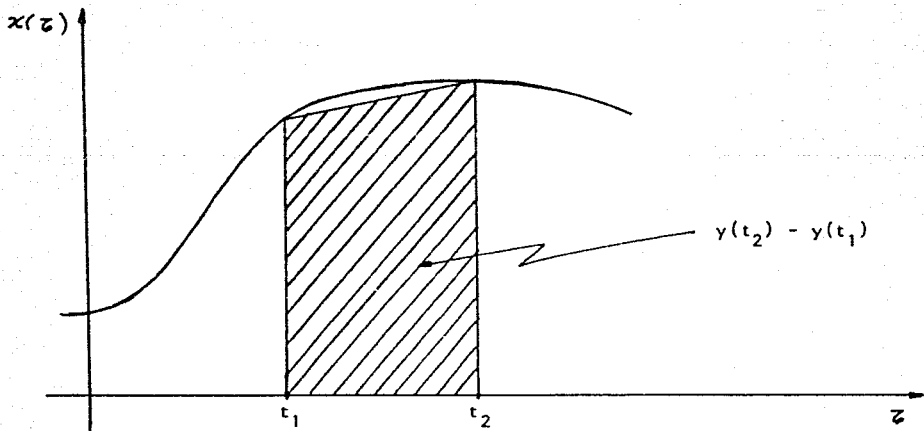


Figura ( 12 ) Aproximación trapecial del area bajo la curva.

## 1.- Aproximación de Euler.

Esta definida por la transformación :

$$Z = 1 / ( 1 - sT )$$

que cumple con la condición ( b ) pero no satisface completamente la condición ( a ). Sin embargo para ángulos muy pequeños ( cercanos al eje real positivo ) la transformación cumple con la condición ( a ). Por lo tanto la aproximación de Euler da resultados satisfactorios para operaciones de muy baja frecuencia y filtros pasa bajas.

## 2.- Transformación de respuesta a impulso invariante.

Está definida por los siguientes pasos :

- a ) Deducir la respuesta impulso del filtro analógico,  $h_A( t )$ .
- b ) Reemplazar  $t$  por  $nT$  en  $h_A( t )$ .
- c ) Obtener la transformada  $Z$  de  $h_A( nT )$ .

Este método presenta el inconveniente de tener que obtener  $h_A( t )$  y , posteriormente , la transformada  $Z$  de  $h_A( nT )$ .

## 3.- Transformación Bilineal.

## \* Obtención.

Considérese un integrador analógico modelado por la función de transferencia :

$$H(s) = 1/s \quad \dots ( 37 )$$

Como por otro lado , la función de transferencia es la transformada de Laplace de la respuesta a impulso, entonces la respuesta a una entrada impulso es :

$$L^{-1} [ H( s ) ] = L^{-1} [ 1/s ]$$

de donde

$$h(t) = u( t )$$

con  $u( t )$  la función escalón unitario.

Por otra parte, la respuesta del integrador a una excitación  $x(t)$  es :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Si  $0 < t_1 < t_2$  entonces

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_0^{t_2} x(\tau)h(t_2 - \tau)d\tau - \int_0^{t_1} x(\tau)h(t_1 - \tau)d\tau$$

suponiendo que  $0 < t_1 < \tau < t_2$  y recordando que  $h(\tau) = u(\tau)$ , entonces :

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x(\tau)d\tau$$

cuando  $t_2$  es cercano a  $t_1$  la integral anterior puede aproximarse por el área de un trapecio, como lo muestra la figura ( 12 ), de tal manera que :

$$y(t_2) - y(t_1) = \frac{t_2 - t_1}{2} ( x(t_1) + x(t_2) )$$

substituyendo  $t_2 = nT$ ,  $t_1 = (n-1)T$ ,  $T = t_2 - t_1$ , (  $T$  es el periodo de muestreo ):

$$y(nT) - y((n-1)T) = \frac{T}{2} ( x(nT) + x((n-1)T) )$$

aplicando la transformada Z a la última ecuación :

$$Y(Z) - Z^{-1}Y(Z) = \frac{T}{2} ( X(Z) + Z^{-1}X(Z) )$$

y resolviendo para  $H(Z) = Y(Z)/X(Z)$

$$H(Z) = \frac{T}{2} \left( \frac{1 + Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} \right)$$

Recordando que se partió de la ecuación ( 37 ), se concluye que :

$$\frac{T}{2} \left( \frac{1 + Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} \right) = \frac{1}{S}$$

ó

$$S = \frac{2}{T} \left( \frac{Z + 1}{Z - 1} \right) \quad \dots ( 38 )$$

La ecuación ( 38 ) es la ley que define a la transformación bilíneal y tiene las siguientes propiedades :

\* Propiedades de la transformación Bilineal.

Como en general  $s$  es un número complejo  $s = \alpha + \beta j$  , entonces  $z$  también lo es y puede expresarse como :

$$Z = r e^{j\phi}$$

donde

$$\phi = \tan^{-1} \left( \beta / \left( \frac{2}{T} - \alpha \right) \right) + \tan^{-1} \left( \beta / \left( \frac{2}{T} + \alpha \right) \right)$$

$$r^2 = \frac{\left(\frac{2}{T} - \alpha\right)^2 + \beta^2}{\left(\frac{2}{T} + \alpha\right)^2 - \beta^2}$$

De la expresión para  $r^2$  se deduce que

si  $\alpha > 0$  entonces  $|r| > 1$

si  $\alpha = 0$  entonces  $|r| = 1$

si  $\alpha < 0$  entonces  $|r| < 1$

y partiendo de la hipótesis

$\alpha = 0$  entonces  $|r| = 1$

con lo que :

si  $\psi = 0$  entonces  $\beta = 0$

si  $\phi \rightarrow \pi$  entonces  $\beta \rightarrow \infty$

si  $\phi \rightarrow -\pi$  entonces  $\beta \rightarrow -\infty$

De lo anterior se concluye que la transformación Bilineal cumple con las propiedades ( a ) y ( b ) expuestas al principio de esta sección.

La transformación Bilineal presenta el defecto de no ser lineal en la transformación de frecuencias continuas y discretas.

Supóngase que  $w$  y  $\Omega$  representan la variable frecuencia en el dominio continuo y discreto respectivamente. Efectuando las sustituciones :

$$s = jw \quad z = e^{j\Omega T}$$

en la ecuación ( 38 ) obtenemos :

$$jW = \frac{2}{T} \frac{e^{j\Omega T} - 1}{e^{j\Omega T} + 1}$$

finalmente

$$W = \frac{2}{T} \operatorname{Tan} \left( \frac{\Omega T}{2} \right) \quad \dots ( 39 )$$

La expresión ( 39 ) establece que el mapeo no lineal entre las frecuencias continuas y discretas es no lineal y, por lo tanto, la respuesta en frecuencia de una función de transferencia continua,  $H(s)$ , al ser mapeada al dominio discreto, conserva sus magnitudes

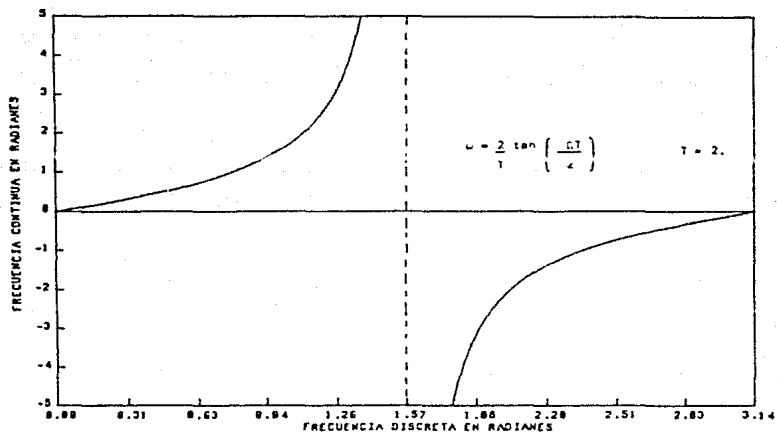


Figura ( 13 ) Gráfica de la transformación no lineal que sufre la frecuencia analógica bajo la transformación Bilineal.



pero no sus dimensiones en frecuencia; la figura ( 13 )  
fenómeno.

\* Conformación de la transformación bilineal.

Para evitar este problema, se ha propuesto ( ver  
por ejemplo [ 7 ] ) un método para compensar la  
transformación bilineal, el cual lleva el nombre de  
técnica de preconformación ( Prewarping ) y propopone  
que :

" Si  $\Omega_k$  (  $k = 1, 2, \dots$  ) son la frecuencias  
críticas deseadas al generar un filtro digital a partir  
de un filtro analógico las correspondientes frecuencias  
críticas en el dominio del continuo deberán corresponder  
con las establecidas por la ecuación ( 39 ). "

Con la transformación bilineal y la preconformación  
propuesta es posible elaborar un método fr diseño de filtros  
digitales recursivos utilizando el siguiente algoritmo :

Procedimiento de diseño de filtros digitales recursivos.

- 1 .- Obtener la plantilla de diseño del filtro digital  
deseado.
- 2 .- Mediante la técnica de preconformación obtener la  
plantilla del filtro analógico equivalente.

- 3 .- Aplicar algún método de diseño a la plantilla normalizada.
- 4 .- Desnormalizar la función de transferencia.
- 5 .- Aplicar la transformación Bilineal para obtener la función de transferencia del filtro digital deseado.

Ejemplo 3 :

Para el filtro pasa altas requerido por la plantilla de diseño de la figura ( 14 ), obtenga la función de transferencia discreta. Considere una aproximación por un filtro recursivo tipo Butterworth, y una frecuencia de muestreo de 1000 Hz.

a ) Preconformación.

Al aplicar la ecuación ( 39 ), con  $T = 10^{-3}$  s, se obtiene la tabla :

Frecuencia original ( Hz. )	Frecuencia preconformada ( Hz. )	Atenuación ( dB )
300	438.11	3
100	103.42	50

b ) Aproximación Butterworth.

El orden del filtro analógico preconformado es  $N = 4$ , el valor de  $\epsilon$  calculado es  $\epsilon = 1.00238$ . La función de transferencia analógica desnormalizada es :

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 1.052s + 1.89} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 2.541s + 1.892}$$

c ) Transformación Bilineal.

Aplicando la transformación Bilineal a la función de transferencia analógica obtenemos finalmente :

$$H(z) = 0.046 \cdot \frac{z^2 - 2.000z + 1.000}{z^2 + 0.452z + 0.064} \cdot \frac{z^2 - 2.000z + 1.000}{z^2 + 0.328z + 0.064}$$

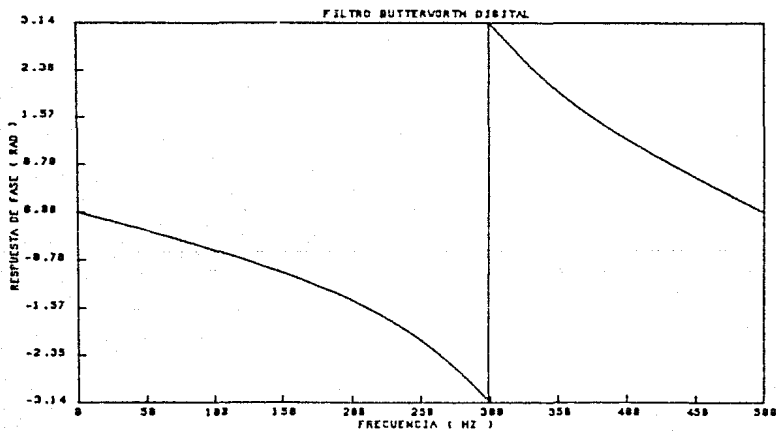
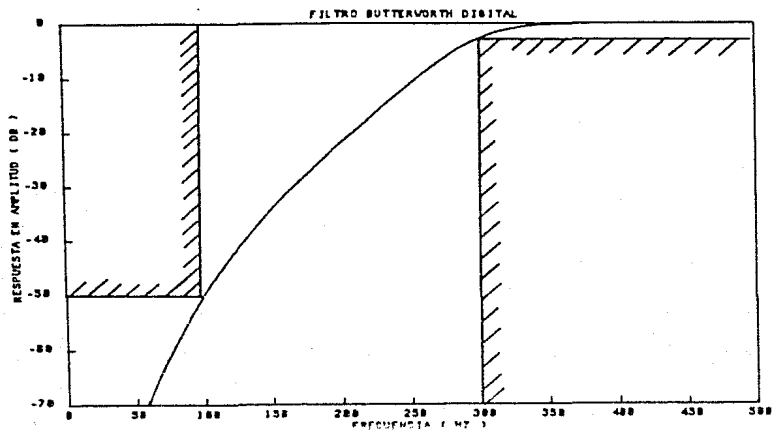


Figura ( 15.a ) Componentes en amplitud y fase de la respuesta en frecuencia del filtro analógico preconformado diseñado en el ejemplo 3.

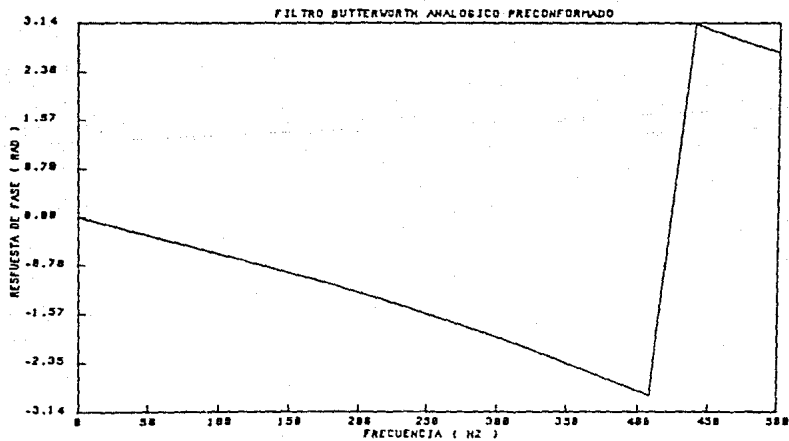
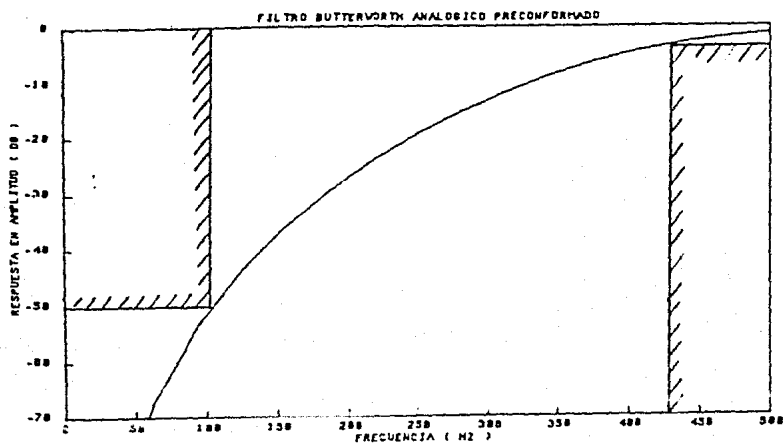


Figura ( 15. b ) Componentes en amplitud y fase de la respuesta en frecuencia del filtro digital diseñado en el ejemplo 3.

La grafica de la respuesta en frecuencia se muestra en la figura ( 15 ).

#### 1.4.6 Diseño de filtros digitales no recursivos.

En la sección 1.4.3 se demostró que la respuesta en frecuencia de una función de transferencia discreta es periódica, por lo tanto, la función de transferencia puede expresarse como una serie de Fourier. Este hecho, sugiere la idea de elaborar un método mediante el cual sea posible obtener la función de transferencia de un filtro digital a partir de la representación en series de Fourier de la respuesta en frecuencia deseada.

Con base en la idea anterior, se han elaborado ( ver por ejemplo [ 7 ] ) los métodos expuestos en los siguientes párrafos.

#### 1 .- Diseño de filtros digitales usando series de Fourier.

Sea  $f(w)$  la respuesta en frecuencia de un filtro digital.  $f(w)$  puede desarrollarse en series de Fourier de acuerdo con :

$$f(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jWkT} \quad \dots ( 40 )$$

$$a_k = \frac{1}{w_s} \int_{-\frac{w_s}{2}}^{\frac{w_s}{2}} f(w) e^{-jWkT} dw$$

siendo  $w_s$  es la frecuencia de muestreo y  $T$  es el periodo de muestreo ( $w_s T = 2\pi$ ).

La respuesta en frecuencia de un sistema, en el dominio del tiempo discreto, puede obtenerse a partir de su respuesta a impulso evaluando la función de transferencia  $H(z)$  en  $z = e^{jwT}$ :

$$f(w) = H(e^{jwT}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-jWkT}$$

donde

$h_k$  : respuesta a impulso.

y  $T$  : periodo de muestreo.

Al igualar las ecuaciones ( 40 ) y ( 34 )

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-jWnT} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jWkT}$$

de donde se obtiene que :

$$a_k = h_n$$

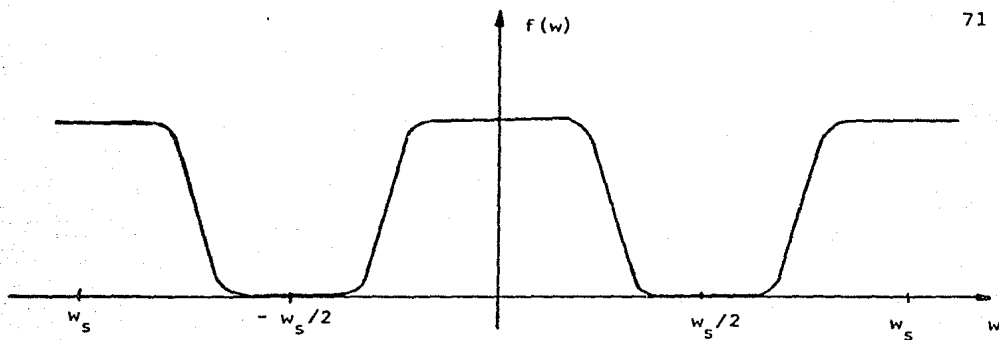


Figura ( 16 ) Respuesta en frecuencia típica de una función de transferencia  $H(z)$ . (  $\omega_s$  = frecuencia de muestreo. )



$$h_n = \frac{1}{w_s} \int_{-\frac{w_s}{2}}^{\frac{w_s}{2}} f(w) e^{jwkT} dw \quad \dots (41)$$

Esta expresión indica que los coeficientes de la serie de Fourier de la respuesta en frecuencia de un filtro forman su respuesta a impulso.

El método que se ha propuesto ( ver por ejemplo [ 9 ] ) para el diseño de filtros digitales no recursivos a partir de la respuesta en frecuencia deseada es el siguiente :

- ( a ) Obtener la ecuación de la respuesta en frecuencia,  $f(w)$ , del filtro deseado.
- ( b ) Aplicando la ecuación ( 41 ), obtener la respuesta a impulso del filtro,  $h_k$ .
- ( c ) Obtener la función de transferencia  $H(z)$  a partir de la respuesta a impulso.

Sin embargo, este método presenta los siguientes inconvenientes :

- ( a ) La integración para obtener  $h_k$  puede complicarse.
- ( b ) Los filtros obtenidos son en general no

causales y de orden infinito. Por lo que se recurre a truncar la serie  $h_k$ , obteniendo así, filtros causales de orden finito.

Truncar la serie de Fourier trae como consecuencia un porcentaje de sobretiro y un rizo ( similar al de los filtros Elípticos ) tanto en la banda de paso como en la banda de supresión del filtro, este fenómeno es conocido como " Oscilaciones de Gibbs".

Lo expuesto en los párrafos anteriores muestra que la técnica de aproximar directamente por series de Fourier es deficiente y poco satisfactoria en la mayoría de los casos.

El siguiente método compensa los defectos de la aproximación usando series de Fourier.

## 2 .- Método de las funciones de peso. ( Windowing )

Con el fin de atenuar el efecto de las oscilaciones de Gibbs, se usa una función de peso para modificar los coeficientes de la serie de Fourier.

Si  $w_k$  es una función de peso en el dominio del tiempo discreto, entonces :

$$h_w(k) = h(k) w(k)$$

donde  $h(k)$  se determina por la ecuación ( 41 ).

Las funciones de peso que más se han usado son las siguientes, ( ver por ejemplo [ 6 ], [ 7 ] ) :

( a ) Rectangular :

$$W_k = \begin{cases} 1 & |k| \leq \frac{N-2}{2} \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

( b ) Hann y Hamming :

$$W_k = \begin{cases} a + (1 - a) \cos\left(\frac{2\pi K}{N-1}\right) & |K| \leq \frac{N-2}{2} \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

en la función de Hann  $a = 0.5$  y en la función de Hamming  $a = 0.54$ .

( c ) Blackman :

$$W_k = \begin{cases} 0.42 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi k}{N-1}\right) & |k| \leq \frac{N-2}{2} \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

El método de las ventanas permite disminuir en forma notable el efecto de las oscilaciones de Gibbs, sin embargo su mayor inconveniente sigue siendo el alto orden obtenido

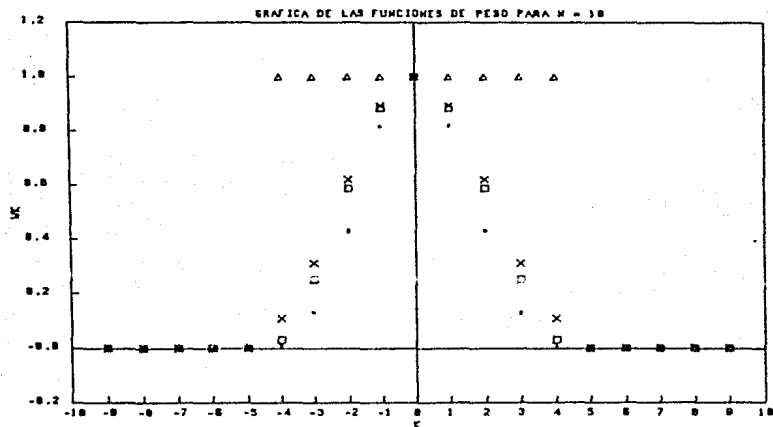


Figura ( 17 ) Gráfica de las funciones de peso.

Δ Rectangular.

x Hann.

◻ Hamming.

• Blackman.

En este trabajo se seleccionaron los filtros digitales recursivos en sus modalidades de Chebyshev y Butterworth para integrar un sistema de diseño y filtrado por computadora. En el siguiente capítulo se expone la teoría y el desarrollo de este sistema.

La ecuación :

$$N \cos^{-1}(w) = \cos^{-1}(\pm j/\epsilon) \quad \dots (A.1)$$

se puede resolver para  $w$  suponiendo que :

$$\cos^{-1}(\pm j/\epsilon) = a + bj \quad \dots (A.2)$$

reescribiendo ( A.2 )

$$\pm j/\epsilon = \cos ( a + bj )$$

δ

$$\pm j/\epsilon = \cos(a)\cos(bj) - \text{sen}(a)\text{sen}(bj)$$

utilizando algunas de las relaciones enlistadas al final de este anexo:

$$\pm j/\epsilon = \cos(a)\cosh(b) + j \text{sen}(a)\text{senh}(b)$$

con lo que, igualando término a término :

$$\cos(a)\cosh(b) = 0 \quad \dots (A.3)$$

y

$$\text{sen}(a)\text{senh}(b) = \pm j/\epsilon \quad \dots (A.4)$$

como  $\cosh(b) > 0$  para cualquier valor de  $b$  , entonces de ( A.3 ) :

$$\cos(a) = 0 \quad \rightarrow \quad a = \Pi ( 1/2 + k ) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

y de ( A.4 )

$$b = \text{senh}^{-1}(\pm 1/\epsilon)$$

Conocidos los valores de  $a$  y  $b$ , se puede sustituir la ecuación ( A.2 ) en ( A.1 ), con lo que :

$$N \cos^{-1}(w) = a + jb$$

despejando  $w$ :

$$w = \cos( a/N + b/Nj )$$

ó

$$w = \cos(a/N) \cosh(b/N) - j \sen(a/N) \sinh(b/N)$$

que es la ecuación buscada.

Algunas igualdades de utilidad son :

$$\sinh ( a ) = ( e^a - e^{-a} ) / 2$$

$$\cosh ( a ) = ( e^a + e^{-a} ) / 2$$

$$\sen ( ja ) = j \sinh ( a )$$

$$\cos ( ja ) = \cosh ( a )$$

donde  $j$  es el número imaginario.

C A P I T U L O    I I .

SISTEMA DE DISEÑO DE FILTROS DIGITALES.



11.1 Descripción general del sistema de diseño de filtros  
digitales

El sistema desarrollado está formado por tres grandes módulos, a saber :

( a ) Módulo de diseño de la función de transferencia.

( b ) Módulo generador de programa.

( c ) Módulo de graficación.

Los primeros dos módulos integran un solo paquete y el último módulo fue diseñado para ser un paquete independiente de los otros dos.

A grandes rasgos el sistema funciona de la siguiente manera :

( 1 ) El usuario introduce la información de la plantilla de diseño del filtro digital deseado.

( 2 ) A partir de la plantilla de diseño se genera la función de transferencia en el dominio del tiempo discreto.

( 3 ) Se desarrolla un programa de acuerdo con la función de transferencia generada. Paralelamente se

- Listado de las características del filtro digital.
- Un archivo que contiene puntos de la gráfica de la respuesta en frecuencia del filtro generado.
- Un archivo que contiene puntos de la gráfica de la respuesta a escalón del filtro generado.

( 4 ) El módulo de graficación puede usarse opcionalmente para obtener gráficas a partir de los archivos generados en el punto ( 3 ).

La figura ( 18 ) muestra el diagrama de bloques del sistema.

En las siguientes secciones se analiza el funcionamiento y la teoría de cada módulo.

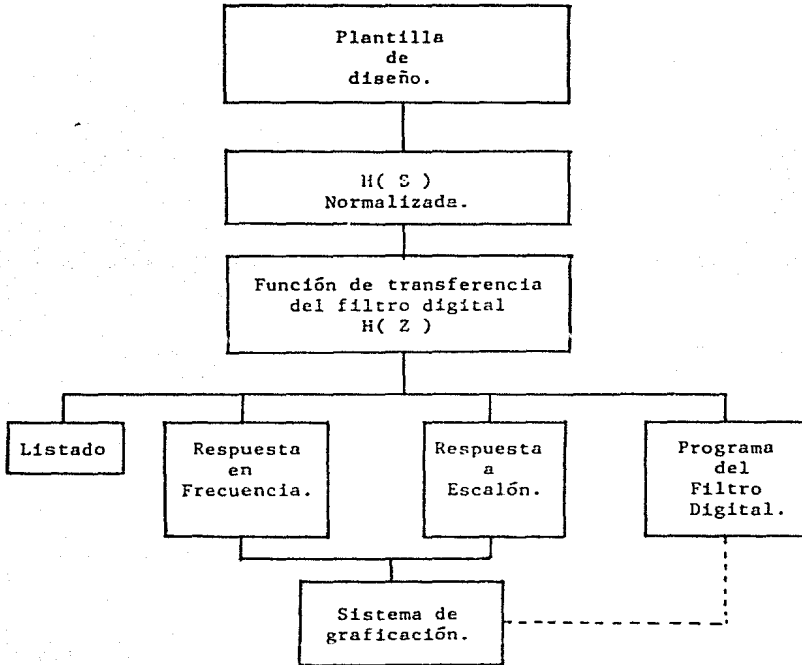


Figura ( 18 ) Diagrama de bloques del sistema de diseño de filtros digitales.

## II.2 Módulo de diseño de la función de transferencia.

Este módulo tiene como objetivo generar la función de transferencia,  $H(z)$ , a partir de la plantilla de diseño. El cálculo puede dividirse en tres fases principales :

- 1 ) Función de transferencia analógica normalizada.
- 2 ) Función de transferencia analógica desnormalizada.
- 3 ) Mapeo del dominio del tiempo continuo al dominio del tiempo discreto.

El algoritmo empleado se muestra en la figura ( 19 ) y a continuación se explica detalladamente cada uno de los pasos.

( 1 ) Recepción de la plantilla de diseño. En este punto se efectúa la captura de la información por medio de una pantalla de captura que solicita los datos pertinentes y efectúa la validación de los mismos.

( 2 ) Preconformación de frecuencias. Todas las frecuencias que intervienen en la plantilla son preconformadas de acuerdo con la ecuación ( 39 ), con el propósito de reducir cambios en las frecuencias de diseño debidas a la no linealidad de la transformación bilineal.

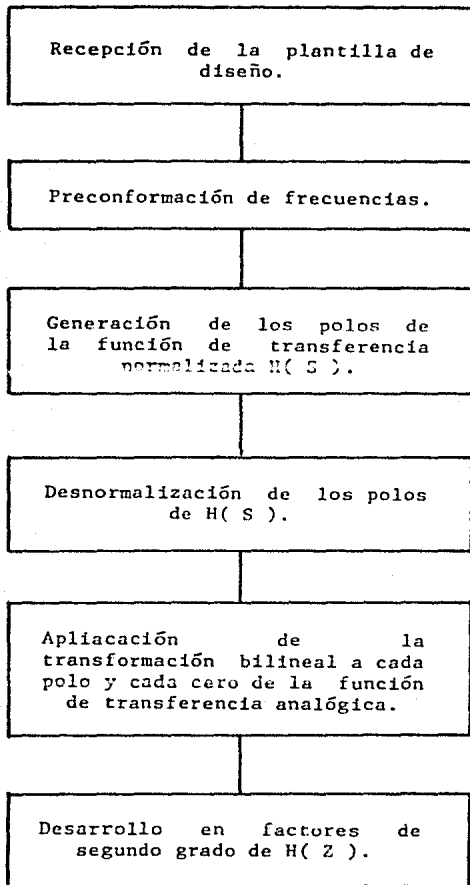


Figura ( 19 ) Algoritmo para la generación de  $H(z)$

( 3 ) Generación de los polos de la función de transferencia normalizada. Este proceso se lleva a cabo mediante la aplicación de las ecuaciones ( 7 ), ( 8 ), ( 9 ), ( 10 ), ( 14 ), ( 15 ), ( 16 ), ( 17 ), ( 24 ), ( 25 ) y ( 26 ).

( 4 ) Desnormalización de los polos de  $H_N(S)$ . Para este punto las ecuaciones que se emplean se deducen a continuación.

Supóngase que  $a = b + cj$  es un polo de la función de transferencia obtenida en el punto ( 3 ), por lo tanto :

$$1 / ( S - a ) \quad \dots ( 42 )$$

es un factor de  $H_N(S)$ ; se tienen cuatro casos de desnormalización :

a ) Desnormalización a Pasa Bajas.

Aplicando la transformación definida por la ecuación ( 7 ) al factor de primer orden de  $H_N(S)$  se obtiene :

$$\frac{1}{s - a} \Bigg|_{s = \frac{s}{w_0}} = \frac{w_0}{s - aw_0} \quad \dots ( 43 )$$

de la ecuación anterior se deduce la regla de transformación :

" Para desnormalizar ( bajo la transformación Pasa Bajas - Pasa Bajas ) un polo normalizado, se multiplica a este por la frecuencia de paso deseada, obteniéndose además un factor de amplificación igual a  $w_o$ . "

b ) Desnormalización a Pasa Altas.

Aplicando la transformación Pasa Altas definida por la ecuación ( 8 ) :

$$\frac{1}{s - a} \Bigg|_{s = \frac{s}{w_o}} = \frac{w_o}{s - w_o/a} \left( - \frac{1}{a} \right) \dots ( 44 )$$

la ecuación ( 44 ) establece que :

" Al desnormalizar ( bajo la transformación Pasa Bajas - Pasa Altas ) un polo normalizado, se genera un polo en  $w_o / a$ , un cero en el origen y un factor de amplificación igual a  $-1/a$ . "

c ) Desnormalización a Pasa Banda.

Aplicando la transformación Pasa Banda ( 9 )

$$\frac{1}{s - a} \left| \begin{array}{l} S = Q \left( \frac{s}{w_0} + \frac{w_0}{s} \right) \end{array} \right. = \frac{w_0}{Q} \cdot \frac{s}{s^2 - \frac{aw_0}{Q}s + w_0^2}$$

Las raíces del denominador de la función anterior son :

$$a' = \frac{w_0}{2Q} ( a \pm ( a^2 - 4Q^2 )^{1/2} ) \quad \dots ( 45 )$$

por lo que :

" Al desnormalizar ( bajo la transformación Pasa Bajas - Pasa Banda ) un polo normalizado, se generan : dos polos dados por la ecuación ( 45 ), un cero en el origen y un factor de amplificación igual a  $w_0 / Q$ . "

d ) Desnormalización a Supresor de Banda.

Aplicando la transformación para un filtro supresor de banda, ecuación ( 10 ), en ( 42 ) se tiene :

$$\frac{1}{s - a} \left| \begin{array}{l} S = \frac{w_0}{Q} \left( \frac{s}{s^2 + w_0^2} \right) \end{array} \right. = -\frac{1}{a} \cdot \frac{s^2 + w_0^2}{s^2 - \frac{w_0}{Qa}s + w_0^2}$$



Las raíces del denominador de la función anterior son :

88

$$a' = \frac{\omega_0}{2Q} \left( \frac{1}{a} \pm \left( \left( \frac{1}{a} \right)^2 - 4Q \right)^{1/2} \right) \dots (46)$$

por lo tanto :

" Al desnormalizar ( bajo la transformación Pasa Bajas - Supresor de banda ) un polo normalizado, se generan : dos polos dados por la ecuación ( 46 ), dos ceros en  $+j\omega_0$  y  $-j\omega_0$ , y un factor de amplificación igual a  $-1/a$  . "

Así pues, para desnormalizar los polos de la función  $H_N(s)$  se aplica, según sea el caso, alguno de los criterios deducidos en los puntos a, b, c y d.

#### ( 5 ) Aplicación de la transformación Bilineal.

A la función de transferencia obtenida en el punto anterior se aplica la transformación Bilineal definida por la ecuación ( 38 ). En este paso se generan los polos, ceros y el factor de amplificación,  $H_0$ , de la función de transferencia en el dominio del tiempo discreto correspondiente al filtro digital deseado.

## ( 6 ) Desarrollo en factores.

En este punto, se obtiene la función de transferencia en el dominio del tiempo discreto, desarrollada en factores de segundo grado, es decir, se genera una función,  $H(z)$ , de la forma :

$$H(z) = H_0 \prod_{j=0}^{n/2} \frac{a_{2j} z^2 + a_{1j} z + a_{0j}}{z^2 + b_{1j} z + b_{0j}}$$

donde los polos y ceros conjugados han sido agrupados para formar cada factor de segundo orden.

Una vez que se dispone de una función de transferencia en el dominio del tiempo discreto que cumple con las especificaciones de la plantilla de diseño, el paso siguiente es realizar el filtro. En la sección siguiente, se expone la teoría y la implementación de esta fase.

### II.3 Módulo generador de programa.

La implementación de una función de transferencia,  $H(z)$ , puede efectuarse de dos formas : por " Software " o por " Hardware ".

La implementación por " software " implica el desarrollo de un programa de computadora que efectue el manejo de la señal muestreada bajo los lineamientos de la función de transferencia  $H(z)$ . La principal ventaja de este método es el bajo costo de implementación; la principal desventaja es que independientemente del lenguaje usado las velocidades de ejecución son en general bajas lo que hace a este método poco poco eficiente en el filtrado de señales en tiempo real.

En la implementación por " hardware " se hace uso de dispositivos electrónicos capaces de efectuar operaciones aritméticas. La gran ventaja de este método es la alta velocidad de funcionamiento, hecho que los hace ideales para el filtrado de señales en tiempo real. La desventaja es el costo de los componentes.

En el laboratorio de Hidromecánica del Instituto de Ingeniería se ha implementado un sistema de adquisición de datos, para almacenar la información generada en los distintos dispositivos experimentales. Al disponer de los archivos de datos no es necesario efectuar filtrado en tiempo real, por lo que la implementación por " software " de los filtros digitales diseñados tienen ventaja sobre la construcción con componentes electrónicos.

El objetivo del módulo generador de programa es desarrollar en forma automática un programa de computadora que implemente la función de transferencia generada en el módulo anterior.

A continuación se desarrolla la teoría para filtrar una señal a partir de la función de transferencia del filtro digital.

Proceso de filtrado.

Supóngase que se dispone de una función de transferencia tal que :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2} \dots (47)$$

donde  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  son constantes, a partir de la ecuación (47) se obtiene :

$$Y(z)b_0 + Y(z)b_1 z + Y(z)b_2 z^2 = X(z)a_0 + X(z)a_1 z + X(z)a_2 z^2$$

dividiendo entre  $z^2$  :

$$Y(z)b_2 + Y(z)b_1 z^{-1} + Y(z)b_0 z^{-2} = X(z)a_0 z^{-2} + X(z)a_1 z^{-1} + X(z)a_2$$

antitransformando la ecuación anterior se obtiene para  $y_k$  una ecuación recurrente de la forma :

$$y_k = 1/b_2 ( a_0 x_{k-2} + a_1 x_{k-1} + a_0 x_k - b_1 y_{k-1} - b_0 y_{k-2} )$$

La ecuación anterior establece que :

" Para cada factor de la forma ( 47 ), la salida  $y_k$ , en el instante  $k$ , depende de las salidas  $y_{k-1}$ ,  $y_{k-2}$ , y de las entradas  $x_k$ ,  $x_{k-1}$ ,  $x_{k-2}$  según la ecuación ( 48 ). "

Si se dispone de una función de transferencia factorizada en polinomios de segundo grado de la forma :

$$H(z) = H_0 \prod_{i=1}^N H_i(z)$$

donde

$$H_i(z) = \frac{a_{0i} + a_{1i}z + a_{2i}z^2}{b_{0i} + b_{1i}z + b_{2i}z^2}$$

entonces es posible aplicar el siguiente algoritmo para obtener la salida  $y_k$  a partir de una entrada  $x_k$  en un instante  $k$  :

1o. La entrada para cada factor de  $H_i(z)$  es la salida del factor  $H_{i-1}(z)$ . La entrada para el factor  $H_1(z)$  es  $x_k$ .

2o. La salida de cada factor está determinada por la ecuación ( 48 ).

3o. La salida final  $y_k$  es la salida del factor  $H_N(z)$  multiplicada por el factor de amplificación  $H_0$ .

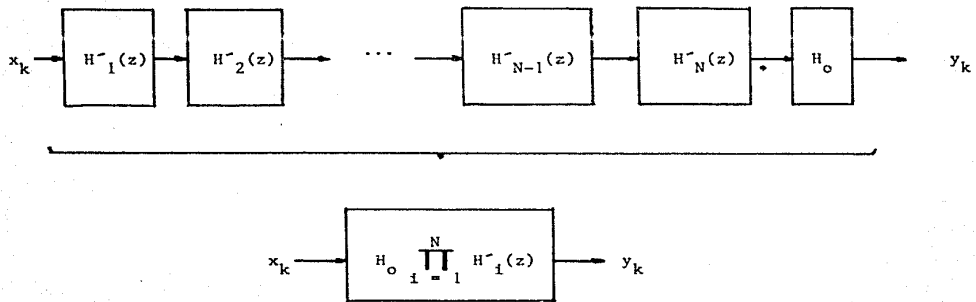


Figura ( 21 ) Esquema para el filtrado de la señal  $x_k$ .

El módulo generador de programas desarrolla en forma automática un programa en el lenguaje pascal, para implementar la función de transferencia  $H(z)$  generada en el módulo de diseño, siguiendo los lineamientos del algoritmo anterior y tratando de optimizar los cálculos requeridos.

El programa generado aplica la función de transferencia  $H(z)$  a un señal muestreada, almacenada en un archivo cuyo nombre proporciona el usuario, la señal resultante del proceso de filtrado se almacenará en otro archivo cuyo nombre también lo proporciona el usuario.

Una vez que se ha efectuado el proceso de filtrado es posible presentar gráficamente la señal resultante, a través del módulo de graficación.

#### II.4 Módulo de graficación.

Un sistema que permita presentar gráficamente resultados de un proceso es de importancia fundamental en toda tarea de investigación tecnológica y científica.

Poseer un sistema que permita obtener gráficas a partir de una serie de puntos almacenados en un archivo es el objetivo fundamental de el sistema de graficación

desarrollado, además de apoyar fundamentalmente la interpretación de los resultados obtenidos en el sistema de filtrado desarrollado.

El módulo de graficación reúne las siguientes características :

a ) Interactivo : El usuario puede definir una serie de parametros de graficación, ( escalas, número de gráficas, títulos, etc. ), así como visualizar los resultados en la pantalla para posteriormente, si se desea, obtener la gráfica en papel ( graficador digital ).

b ) Flexible : Los archivos de datos pueden ser generados desde un programa en cualquier lenguaje ( siempre que se respeten los formatos requeridos, ver instructivo anexo. ) desde editores de texto. Además, el número de gráficas contenidas en un archivo es variable.

c ) Sencillez de manejo : El manejo del sistema es por medio del método de menus, lo cual permite que usuarios no expertos en el manejo de computadoras puedan usarlo fácilmente.

El sistema de graficación " Sweet-p " ha sido desarrollado para funcionar en una microcomputadora del tipo



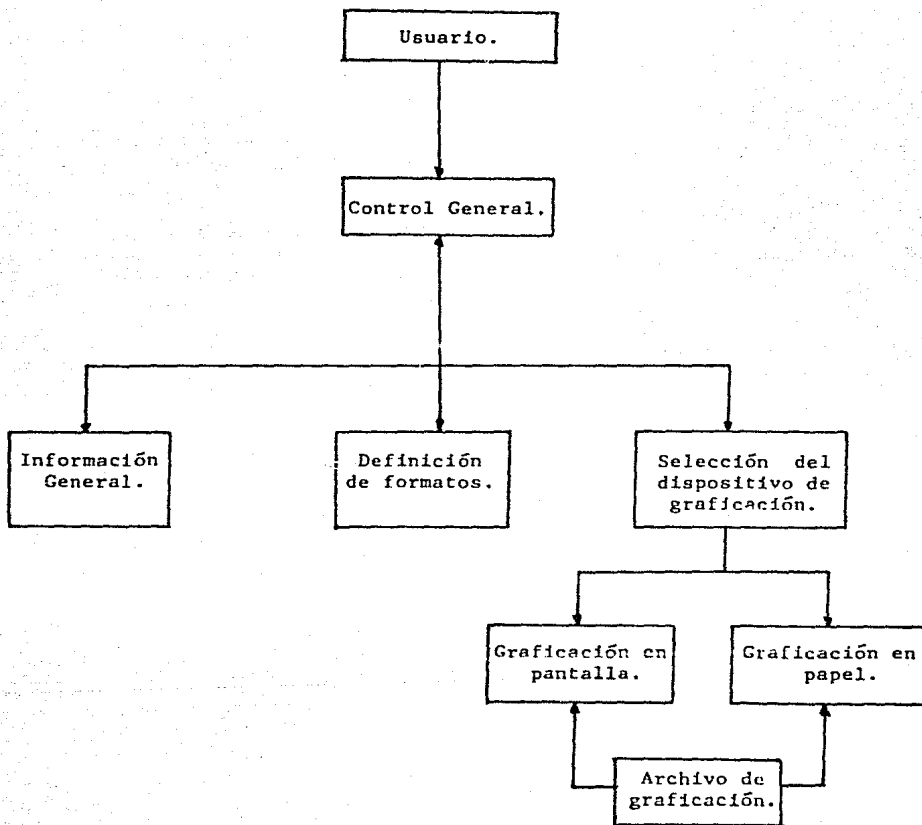


Figura ( 21 ) Esquema del sistema de graficación.

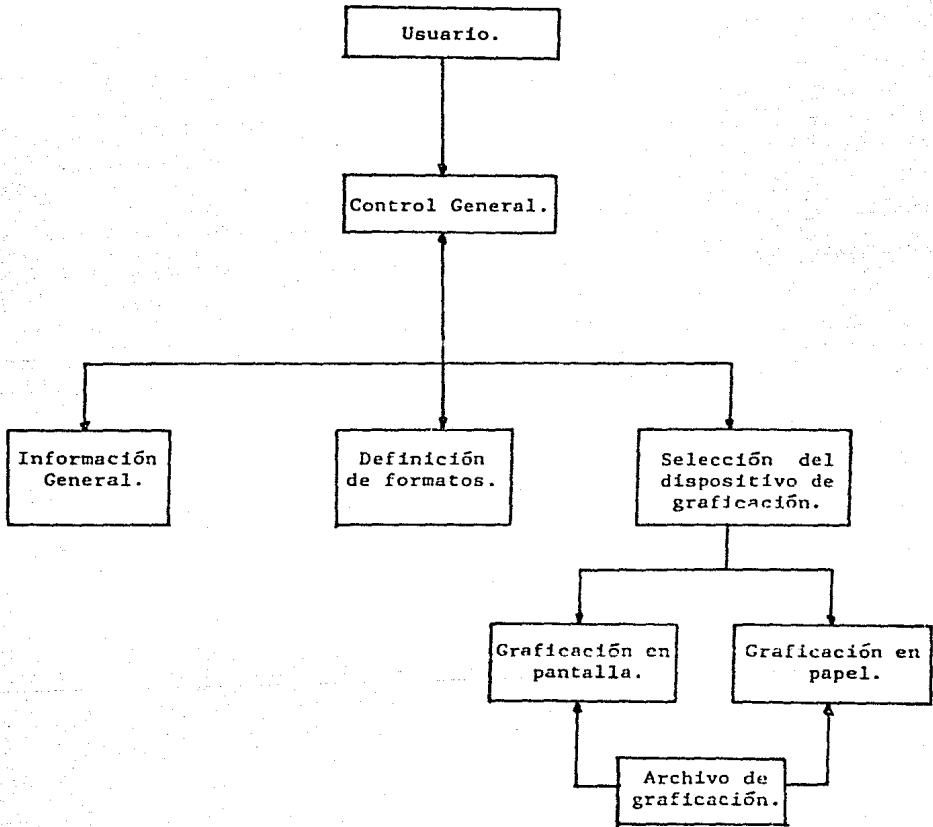


Figura ( 21 ) Esquema del sistema de graficación.

P. C. , para el despliegue de gráficas en papel se emplea un graficador " Sweet-p " de una sola pluma conectado en paralelo con la computadora.

Las opciones implementadas se pueden clasificar como :

( a ) De información general, las cuales definen o manipulan algunos parámetros que no inciden directamente en la presentación gráfica.

( b ) De definición de formatos, opciones que permiten introducir una serie de parámetros que influyen directamente en la presentación gráfica.

( c ) De selección de dispositivo, opciones que permiten seleccionar el medio de despliegue, así como también indicar que se lleve a cabo el proceso de graficación.

Para una descripción mas detallada de este sistema puede consultarse el apéndice A. La figura ( 21 ) esquematiza el sistema de graficación.

En el capítulo siguiente se muestran algunas aplicaciones, del sistema de filtros, para la manipulación de señales en el laboratorio de hidromecánica del Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M.

C A P I T U L O    I I I .

A P L I C A C I O N E S .

En este capítulo se presenta la aplicación del sistema desarrollado a problemas existentes en el laboratorio de hidromecánica del Instituto de Ingeniería.

En primer término se describe, de manera breve, el sistema de adquisición de datos ( S.A.D. ) disponible. Posteriormente se muestran algunas señales obtenidas con dicho sistema y se hacen algunas observaciones sobre ellas. Se aplica el sistema de diseño de filtros digitales con objeto de mejorar los resultados que se obtienen con los filtros analógicos y, finalmente, se hacen comparaciones y se presentan algunas conclusiones.

### III.1 Descripción del S.A.D. del laboratorio de Hidromecánica del Instituto de Ingeniería.

El sistema S.A.D. esta formado por cuatro grandes bloques, a saber :

- ( a ) Transductor.
- ( b ) Amplificador.
- ( c ) Banco de filtros.
- ( d ) Convertidor analógico digital y computadora.

La figura ( 22 ) esquematiza el S.A.D. compuesto por los

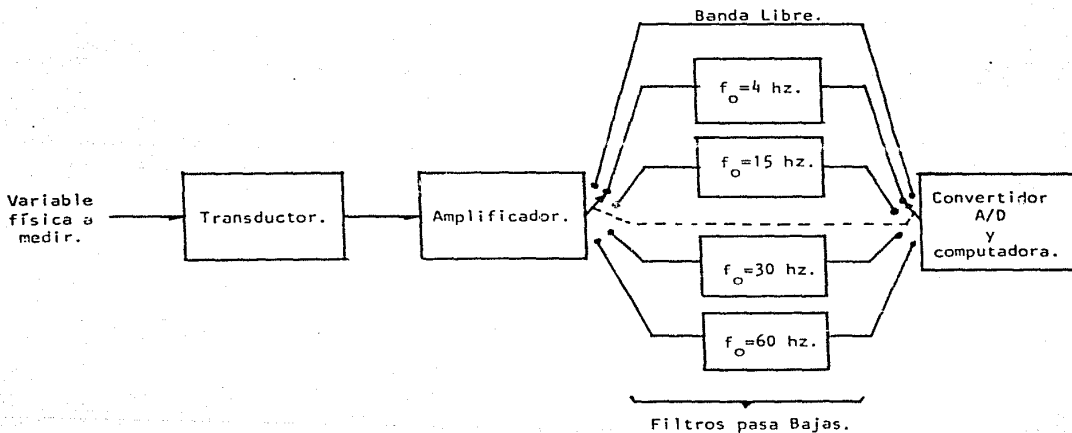


Figura ( 22 ) Esquema del sistema de adquisición de datos ( S.A.D. )

siguientes bloques :

**Transductor :** Este bloque es el encargado de transformar la variable física objeto de medición en una señal eléctrica proporcional.

En el laboratorio de hidromecánica del Instituto de Ingeniería una de las variables objeto de estudio es la presión, por lo cual se utiliza un transductor de presión para su estudio.

**Amplificador :** Su función principal es amplificar la señal eléctrica generada en el transductor ( la amplitud de la señal es típicamente de milivolts ). El objetivo de la amplificación es acondicionar la señal para que los bloques posteriores puedan manipularla . La figura ( 23 ) muestra la respuesta en frecuencia de los amplificadores utilizados en el laboratorio de hidromecánica. El factor de amplificación puede ser seleccionado de acuerdo a 5, 10, 50, 100, 500 ó 1000 veces la amplitud de la señal de entrada.

**Banco de filtros :** está formado por cuatro filtros pasa bajas cuya respuesta en frecuencia se ilustra en la figura ( 24 ). Es posible seleccionar cualquiera de los cuatro filtros o, simplemente, no filtrar la señal. ( Banda libre ).

**Convertidor analógico digital y computadora :** La función

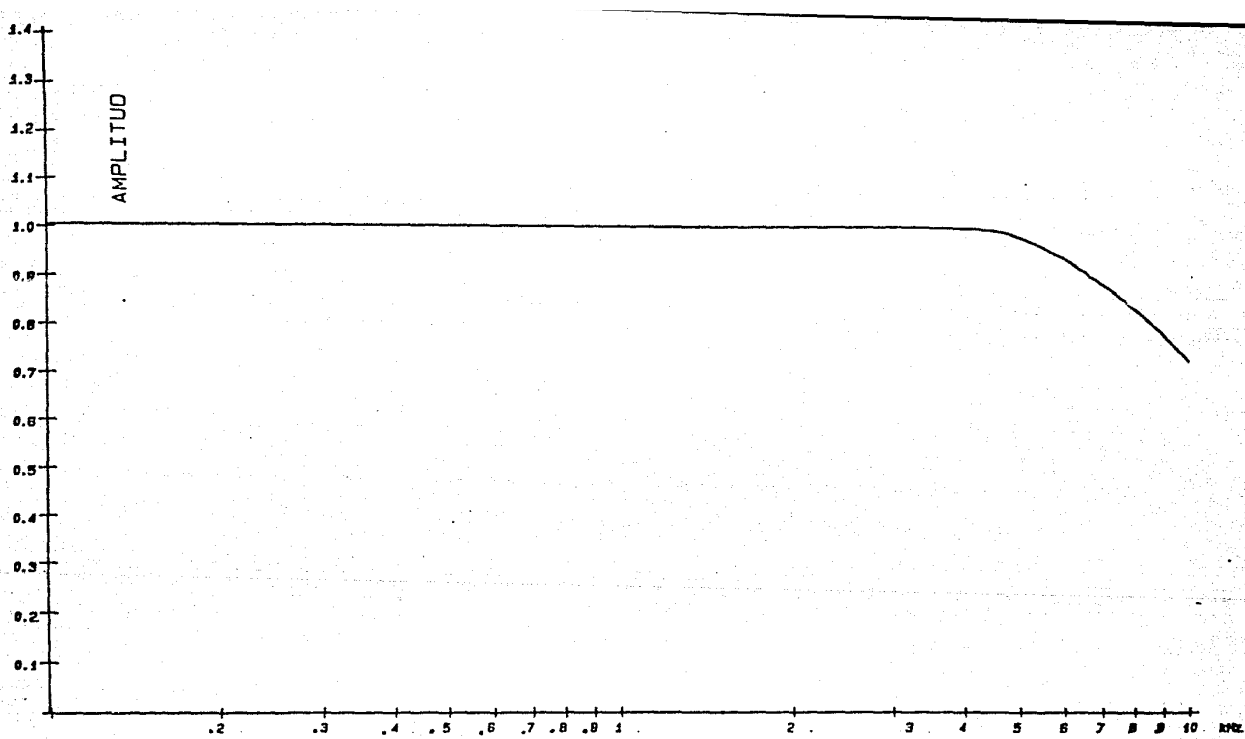


Figura ( 23 ) Respuesta en amplitud de los amplificadores usados en el S.A.D.



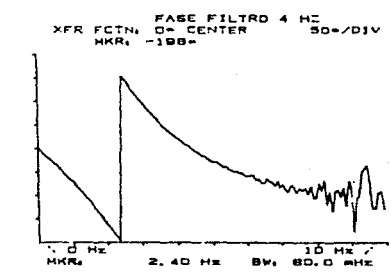
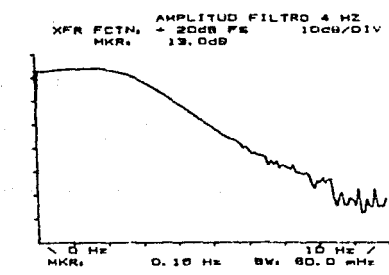
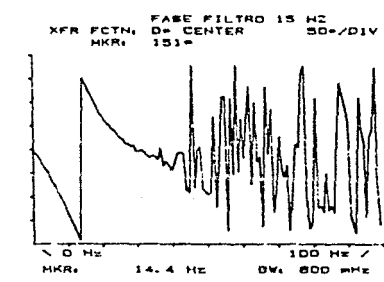
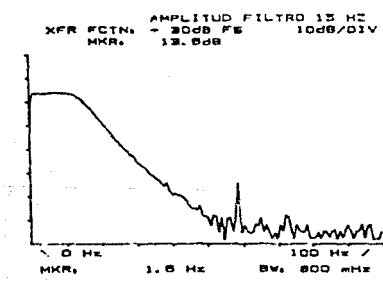
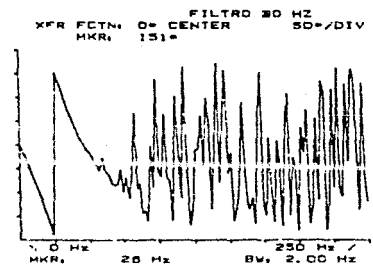
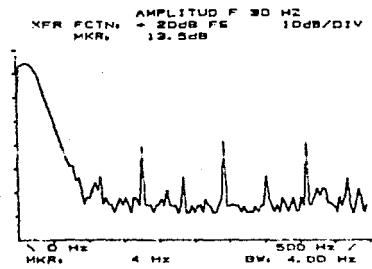
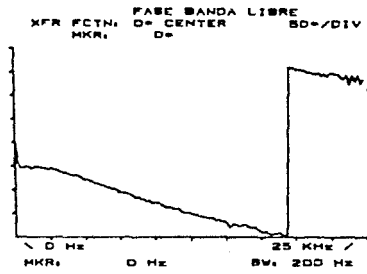
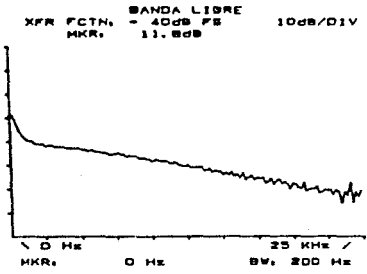


Figura ( 24 ) Filtros posibles en el S.A.D.

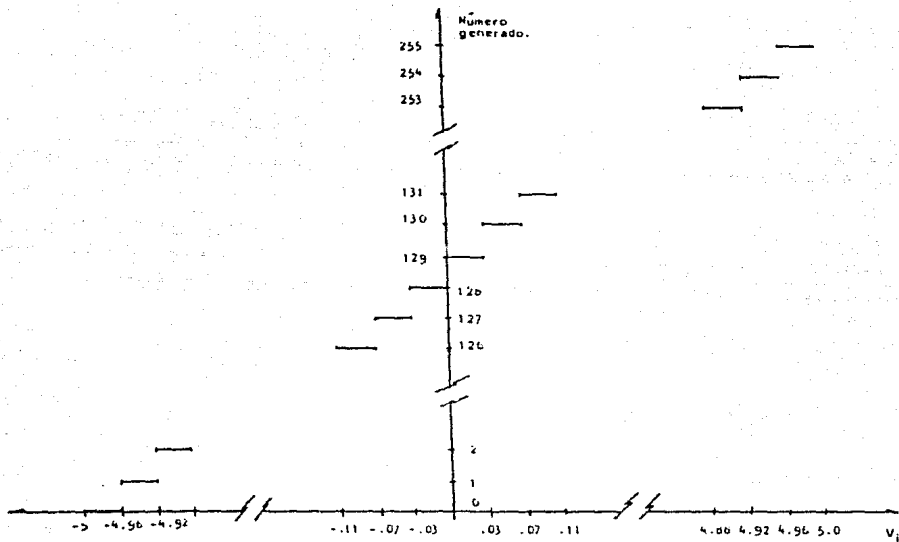


Figura ( 25 ) Relación entre el voltaje de entrada y el número generado por el convertidor.

de este bloque es muestrear y transformar el valor de la muestra en un número entero dentro del rango de 0 a 255 inclusive, este número es entregado a la computadora para ser almacenado dentro de un archivo. La relación que guarda cada número con respecto al voltaje muestreado se ilustra en la figura ( 25 ). El número de señales que pueden ser muestreadas simultáneamente ( mediante multiplexaje en tiempo ) es cinco.

En la siguiente sección se presentan algunas mediciones efectuadas con el S.A.D.

### III.2 Señales obtenidas a través del S.A.D.

En esta sección se exponen dos experimentos :

1o. Utilización de señales eléctricas, obtenidas mediante generadores de funciones, para alimentar el S.A.D. obteniendo un archivo de las señales resultantes.

2o. Utilización de S.A.D. para obtener la evolución en el tiempo de la presión de un fenómeno hidráulico, bajo condiciones controladas de carga y gasto, generado en la instalación del laboratorio de Hidromecánica del Instituto de Ingeniería.

III.2.1 Primer experimento: descripción , resultados y  
observaciones.

La señal utilizada para efectuar el primer experimento fue una señal cuadrada a la que se le sumó una señal de ruido.

Las pruebas efectuadas fueron cuatro, los parámetros seleccionados se sintetizan en la tabla 3, la figura ( 26 ) muestra las conexiones empleadas. Las figuras ( 27 ) y ( 28 ) muestran las gráficas de las señales obtenidas en cada prueba.

De los resultados obtenidos en las pruebas se observa que :

- a ) En banda libre, la amplitud del ruido se atenúa a pesar del factor de amplificación seleccionado.
- b ) Al utilizar el filtro de 4 hz, la señal cuadrada de 1 hz sufre deformaciones significativas.
- c ) Al utilizar el filtro de 4 hz, la señal cuadrada de 5 hz sufre una deformación total.

En la sección III.3 se muestran los resultados al utilizar el sistema de diseño de filtros digitales para obtener un filtro digital alternativo que mejore el proceso filtrado para este experimento. Las características del filtro digital así como los resultados obtenidos se analizan en dicha sección.

# de prueba.	Frecuencia de la señal cuadrada. (hz.)	Amplitud		Factor de amplificación	Filtro.
		de la señal cuadrada. $V_{pp}$	del ruido. $V_{pp}$		
1	1	1.2	0.2	5	banda libre.
2	1	1.2	0.2	5	Pasa bajas 4 hz.
3	5	1.2	0.2	5	banda libre.
4	5	1.2	0.2	5	Pasa bajas 4 hz.

Tabla 3 : Parámetros seleccionados en el experimento uno, para cada prueba.

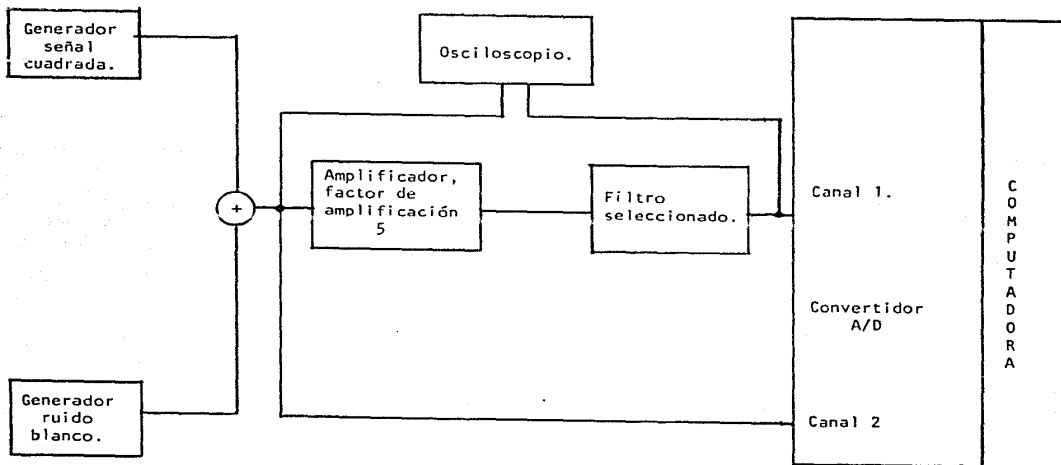


Figura ( 26 ) Esquema de conexiones empleadas en el experimento 1.

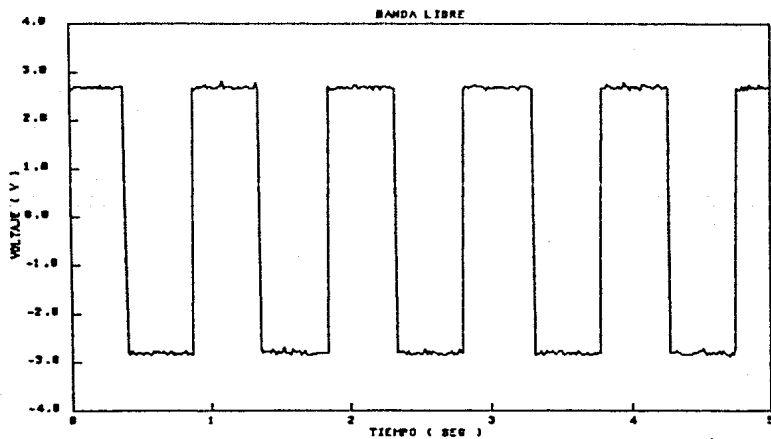
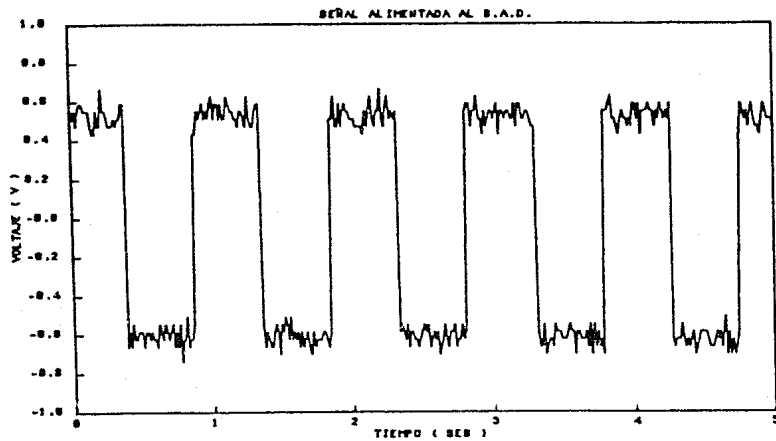
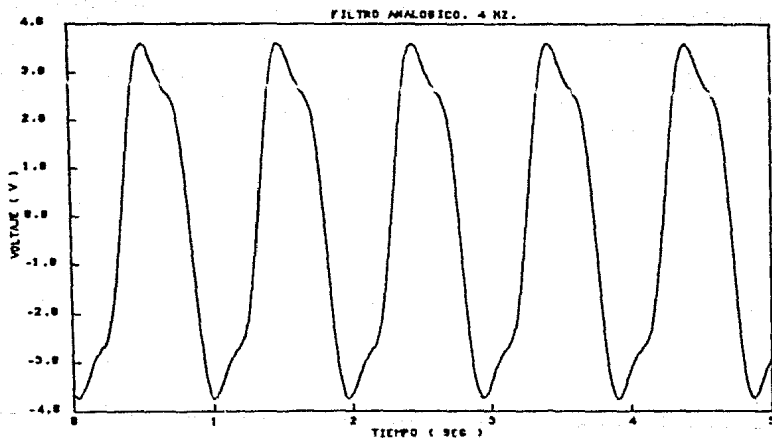


Figura ( 27 ) Señales obtenidas en el experimento 1.

- ( a ) Señal original.
- ( b ) Prueba 1.
- ( c ) Prueba 2.



( c )



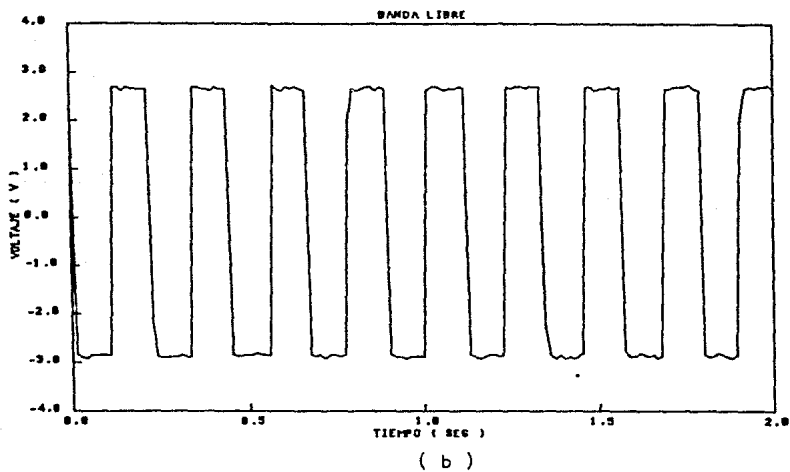
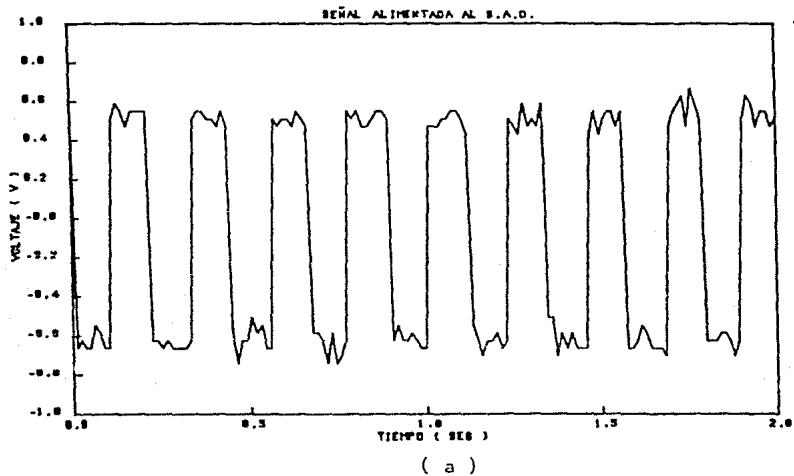
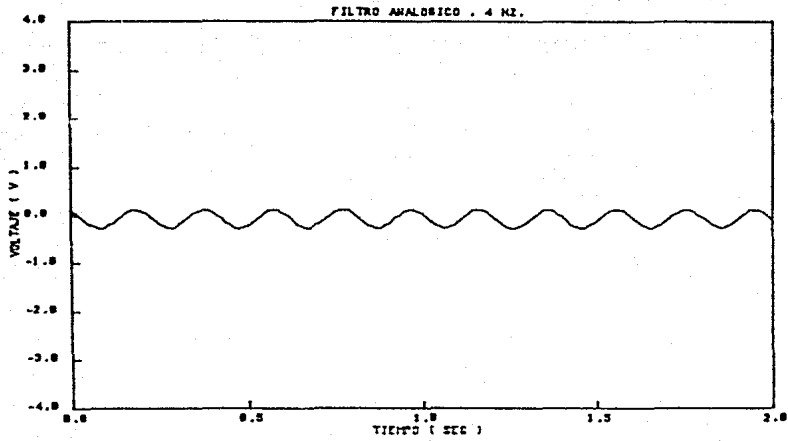


Figura ( 28 ) Señales obtenidas en el experimento 1.

( a ) Señal original.

( b ) Prueba 3.

( c ) Prueba 4.



( c )

### III.2.2 Segundo experimento: descripción , resultados y observaciones.

En este experimento se generó un transitorio hidráulico en la instalación del laboratorio. En un mismo punto de la instalación se colocaron cuatro transductores de presión para medir las variaciones de la presión en función del tiempo. El objetivo de colocar los cuatro transductores en un mismo punto es tener forma de compara los resultados entregados por el equipo S.A.D. bajo diferentes formas de operación y con una mismo fenómeno exactamente. Los transductores se conectaron por parejas a dos equipos de adquisición de datos, un equipo fue alimentado con corriente alterna y el otro con corriente directa, tal como lo muestra la figura ( 29 ). Los filtros elegidos para ambos equipos fueron banda libre para un transductor y filtro de 4 hz. para el otro transductor.

Las señales resultantes de este experimento se muestran en la figura ( 30 ), en esta figura se han graficado los resultados en volts. En las gráficas se observan los siguientes detalles :

- a ) La señal obtenida en banda libre y alimentación en corriente directa puede ser considerada la señal que idealmente debe ser obtenida como resultado de un proceso de filtrado. Sin embargo, para propósitos de interpretación física del fenómeno hidráulico estudiado, un proceso de filtrado deberá de mantener sin alteraciones las amplitudes pudiendo variar

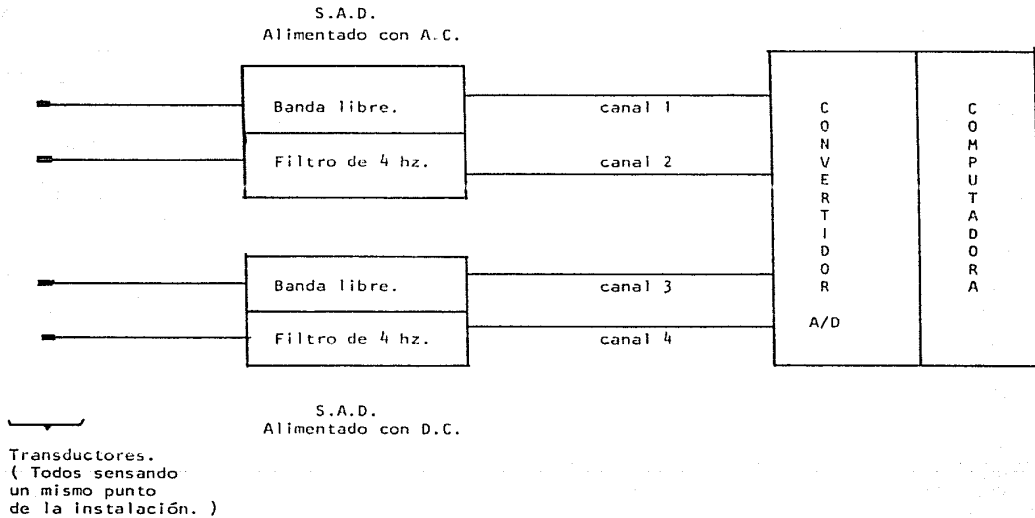
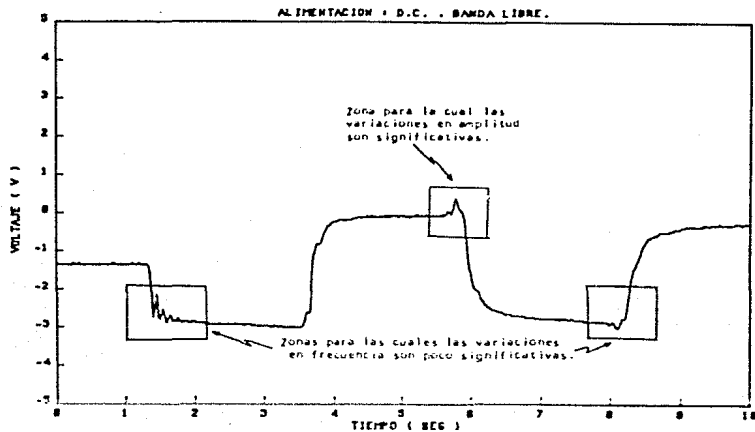
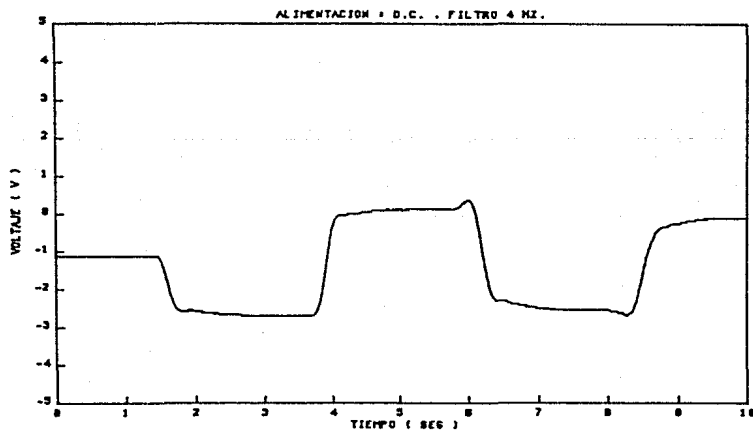


Figura ( 29 ) Esquema de conexiones empleadas en el segundo experimento.

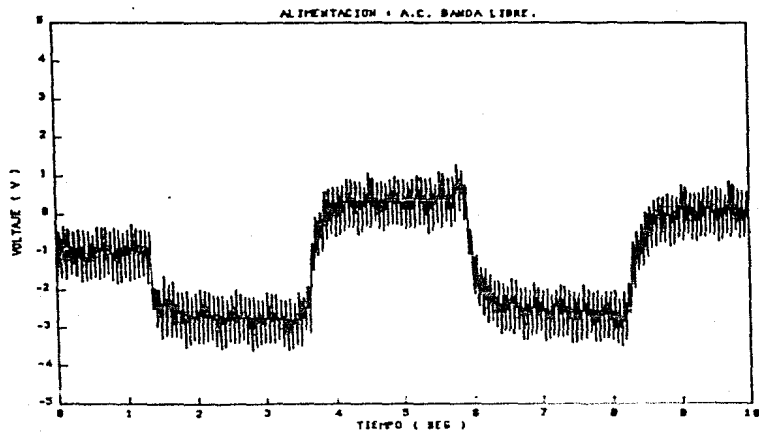


( a )

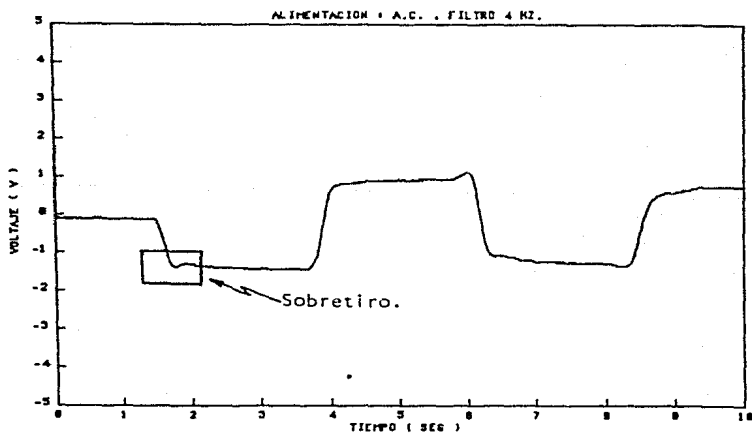


( b )

Figura ( 30 ) Señales obtenidas en el segundo experimento.  
 ( a ) y ( b ) alimentación con D.C.  
 ( c ) y ( d ) alimentación con A.C.



( c )



( d )

hasta cierto grado las frecuencias altas del fenómeno hidráulico. Bajo este punto de vista se ha marcado en la figura ( 30.a ) una zona cuya variación en las componentes en frecuencia puede ser considerada como no significativa ( esto no significa que la variación en la amplitud de la señal en esta zona pueda ser aleatoria, solo significa que las magnitudes de la señal pueden ser atenuadas ). Sin embargo, también se ha marcado un zona cuya variación en amplitud si modificaría la interpretación física del fenómeno. Estas dos zonas deberán ser cuidadas para cualquier proceso de filtrado que se proponga.

- b ) La alimentación del equipo por corriente alterna y sin efectuar ningún filtrado ( banda libre ) introduce una señal parásita de 60 hz. que distorsiona en alto grado la señal de interes.
- c ) Para el equipo alimentado con corriente directa, al filtrar la señal con un filtro de 4 hz. algunas zonas de la señal original se suavizan, sin embargo las restricciones señaladas en el el inciso ( a ) se respetan.
- d ) Para el equipo alimentado con corriente alterna, al filtrar la señal con un filtro de 4 hz. se observa que aparece un sobretiro , marcado en la

figura ( 30. d ), este sobretiro no es desable porque modifica la interpretación física del fenómeno.

De las observaciones anteriores se puede deducir que lo más recomendable es alimentar los equipos con corriente directa, sin embargo, en mediciones en prototipo no es sencillo hacerlo, porque normalmente se dispone de un planta generadora de energía, lo que obliga necesariamente a alimentar el equipo con corriente alterna.

En la siguiente sección se presenta un filtro digital diseñado para filtrar la señal obtenida de un equipo alimentado con corriente alterna que satisface los requerimientos del inciso ( a ).

### III.3 Sistema de diseño de filtros digitales, su aplicación y resultados.

En esta sección se muestra la aplicación del sistema de diseño de filtros digitales para mejorar los resultados obtenidos en los dos experimentos anteriormente descritos.

#### III.3.1 Filtro digital propuesto para el primer experimento.

Se diseñó un filtro digital cuya respuesta en frecuencia se ilustra en la figura ( 31 ) , el listado de las características del filtro y el programa generado se muestra



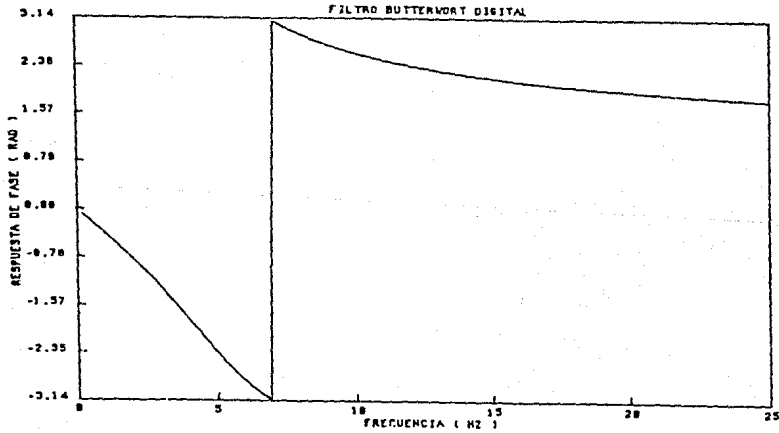
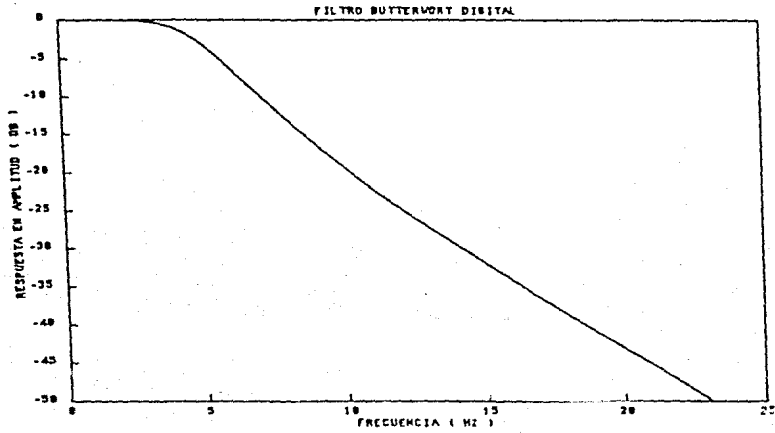


Figura ( 31 ) Respuesta en frecuencia del filtro digital diseñado para el ejemplo 1.

```

TIPO DE FILTRO : Butterworth.
FORMA DEL FILTRO : Paso Bajos.
FRECUENCIAS CRITICAS : 5.0000 Hz.
Frecuencia de rechazo ... : 20.0000 Hz.
Frecuencia de Supresion. : 20.0000 Hz.
FRECUENCIAS PRECONDICIONADAS :
Frecuencia de Paso ..... : 5.0764 Hz.
Frecuencia de Supresion. : 20.5139 Hz.
Frecuencia de rechazo normalizada ... : 1.0
Frecuencia de rechazo normalizada : 5.37702108
Periodo de Muestra ..... : 25.0000 Hz.
Atenuacion maxima en la banda de paso : 3.000000 dB.
Atenuacion minima en la banda de supresion : 40.000000 dB.
Factor de amplificacion : 1.000000
Orden del filtro : 3

Polos del Filtro :
1 0.758939867 + 0.729706453 j
2 0.649161150 + 0.000000000 j
3 0.730939867 - 0.729706453 j

Ceros del Filtro :
1 -1.000000000 + 0.000000000 j
2 -1.000000000 + 0.000000000 j
3 -1.000000000 + 0.000000000 j

Factores del filtro :
H0 = 6.31085952354791E-003
Seccion # : 1
1.00000000 + 1.00000000 * z + 0.00000000 * z^2
-0.64916115 + 1.00000000 * z + 0.00000000 * z^2

Seccion # : 2
1.00000000 + 2.00000000 * z + 0.00000000 * z^2
0.76176203 - 1.5178773373E-000 * z + 1.00000000 * z^2

```

```

SI KERNEL SYS*
VAR
+ Y0_1, Y0_2, Y1_1
+ Y0_2, Y1_2, Y2_2
: real;
BEGIN
  BEGIN
    Y0_1 := 0; Y1_1 := 0;
    Y0_2 := 0; Y1_2 := 0;
    Y2_2 := 0;
    while not eof(e) do
      BEGIN
        for i := 1 to Indice do
          BEGIN
            Y0_1 := s[i];
            Y0_2 := 6.49161150360895E-001 + Y1_1
              + Y0_1;
            Y1_1 := Y0_1;
            Y1_2 := 6.417282851405561E-001 * Y2_2
              + 1.5178773373729E-000 * Y1_2
              + 7.70000000000000E-000 * Y1_1;
            Y2_2 := Y1_2;
            Y1_1 := Y0_1;
            Y1_2 := Y0_2;
            Y2_2 := Y1_2;
            s[i] := Y0_2;
          END
        END
        IF Primera_vez then
          BEGIN
            for i := 7 to Indice do writeLn(s, t(i)) - 6 * t(i+1);
          END
        ELSE
          BEGIN
            writeLn(s, t(i)) - s(i);
          END
        END
        Primera_vez := false;
      END
    END;
  END.

```

Figura ( 32 ) Listado de datos y programa del filtro digital diseñado para el ejemplo 1.

en la figura ( 32 ). Este filtro es el resultado de una serie de pruebas de las cuales se seleccionó la que ofreció el mejor resultado y siendo el proceso de búsqueda el siguiente :

- 1 .- Proponer una plantilla de diseño.
- 2 .- Genera el filtro digital mediante el sistema de diseño de filtros digitales.
- 3 .- Aplicar el filtro diseñado al archivo que contiene la señal a filtrar.
- 4 .- Repetir los pasos 1 a 3 hasta que se obtenga una filtro que ofrezca resultados satisfactorios.

De la metodología anterior resalta el hecho de que al disponer de un archivo que contiene la señal original es posible filtrar exactamente la misma señal para diferentes filtros digitales. Esto es el resultado de hacer el proceso de filtrado fuera de línea, es decir el filtrado no se hace en tiempo real porque no es un requerimiento necesario.

Una vez que se obtuvo el filtro digital se procedió a filtrar los archivos de datos de las señales usadas para las pruebas 2 y 4 del experimento 1 descritas en la sección III.2.1 , los resultados se muestran en la figura ( 33 ).

Al comparar la señal original, figuras ( 27 ) y ( 28 ),

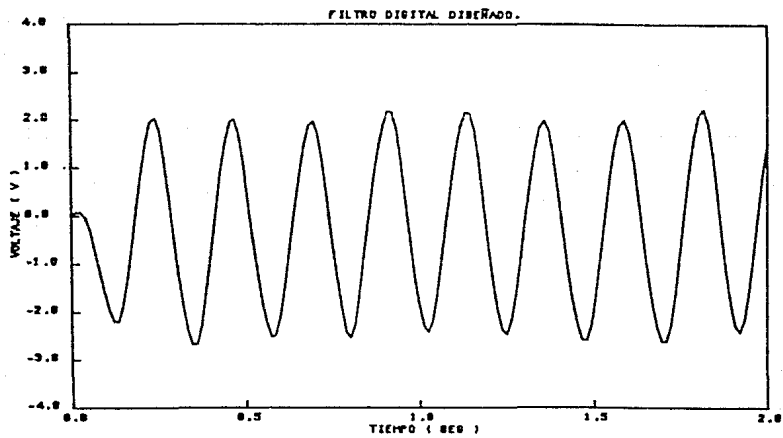
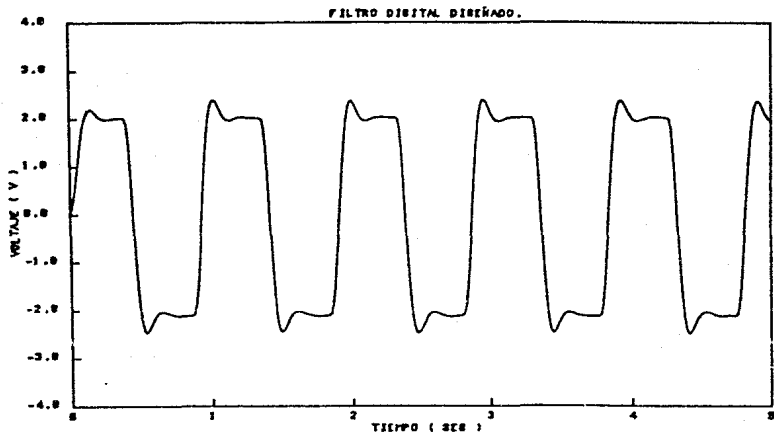


Figura ( 34 ) Señales filtradas digitalmente para el experimento 1.

con la señal filtrada en forma digital se observa que :

- a ) En la señal de 1 hz se ha suprimido el ruido y la deformación sufrida es mucho menor que en la señal filtrada analógicamente.
- b ) La señal de 5 hz sufre deformaciones severas, sin embargo la amplitud en el filtrado digital es mayor que la amplitud en el filtrado analógico.

### III.3.2 Filtro digital propuesto para el segundo experimento.

Para el diseño y selección de este filtro se siguió la metodología propuesta en la sección anterior.

La respuesta en frecuencia del filtro seleccionado se muestra en la figura ( 34 ), el listado de las características del filtro y el programa generado se muestra en la figura ( 35 ).

Los resultados obtenidos a aplicar este filtro a la señal muestreada con el equipo alimentado con corriente alterna se ilustra en la figura ( 36 ) y en esta figura se observa lo siguiente :

- a ) Las zonas señaladas en el inciso ( a ) de la sección III.2.2, referente a las zonas en las que se deberá tener especial cuidado en un proceso de filtrado,

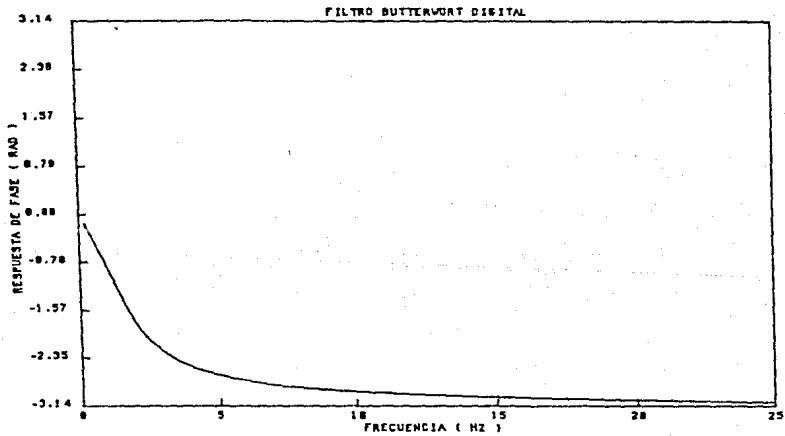
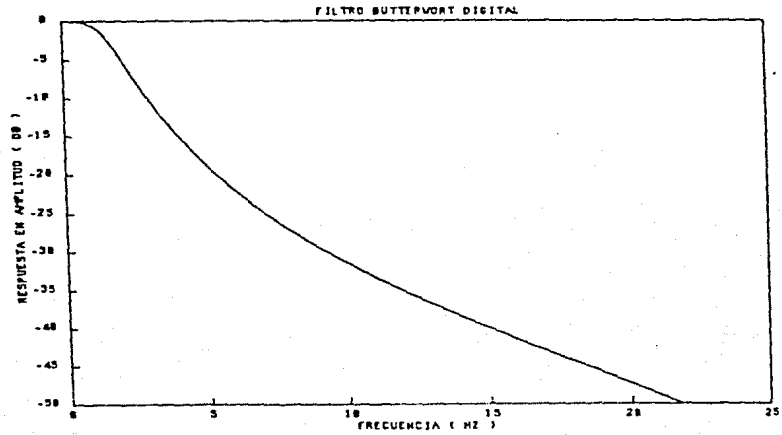


Figura ( 34 ) Respuesta en frecuencia del filtro digital diseñado para el experimento dos.

TIPO DE FILTRO : Butterworth.

FORMA DEL FILTRO : Paso Bajas.

FRECUENCIAS CRITICAS :  
Frecuencia de Paso .... : 1.0000 Hz.  
Frecuencia de Supresion. : 10.0000 Hz.  
  
FRECUENCIAS PRECIFORMADAS :  
Frecuencia de Paso .... : 1.0006 Hz.  
Frecuencia de Supresion. : 10.4291 Hz.  
  
Frecuencia de paso normalizada ... : 1.0  
Frecuencia de rechazo normalizada : 10.62283662

Frecuencia de Muestreo.. : 75.0000 Hz.  
Periodo de Muestreo .... : 0.013333333 Seg.

Atenuacion maxima en la banda de paso : 0.309066 db.  
Atenuacion minima en la banda de supresion : 30.000000 dB.

Factor de amplificacion : 1.000000

Orden del filtro : 2

-----  
Polos del Filtro :

1 0.897584158 + 0.092859862 j  
2 0.897584158 - 0.092859862 j

Ceros del Filtro :

1 -1.000000000 + 0.000000000 j  
2 -1.000000000 + 0.000000000 j

-----  
Factores del filtro :

H0 = 4.777989673976127E-003

Seccion # : 1

1.00000000 + 2.00000000\*Z +1.00\*Z/2  
0.81428028 -1.79516832\*Z +1.00\*Z/2

```
SI KERNEL.SYS*  
var  
x0_1, x1_1, x2_1, y0_1, y1_1, y2_1  
: Teal  
: BEGIN  
: apertura:  
x0_1 := 0; x1_1 := 0; x2_1 := 0;  
y0_1 := 0; y1_1 := 0; y2_1 := 0;  
while not eof(e) do  
: BEGIN  
: buffer:  
for i := 1 to indice do  
: BEGIN  
x2_1 := x1_1;  
x1_1 := x0_1;  
x0_1 := x[i];  
y2_1 := y1_1 + 4.777989673976127E-003;  
y0_1 :=  
- 4.14380275168320E-001 * y2_1  
+ 1.79516831645280E+000 * y1_1  
+ x0_1  
+ 2.0000000000000E+000 * x1_1  
+ x2_1;  
y2_1 := y1_1;  
y1_1 := y0_1;  
y0_1 := y[i];  
: END;  
if primera_vez then  
: BEGIN  
for i := 5 to indice do writeLn(s,t[i], " ", x[i]);  
primera_vez := false;  
: END  
else  
for i := 1 to indice do writeLn(s,t[i], " ", x[i]);  
: END;  
: cerrar;  
: END.
```

Figura ( 35 ) Listado de los datos y programa del filtro digital diseñado para el experimento 2.

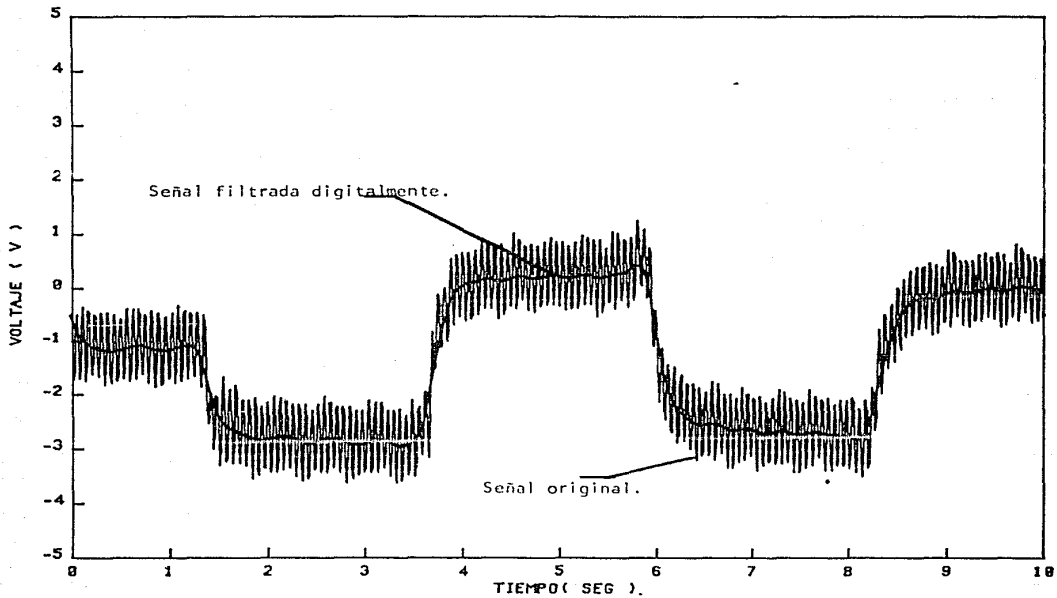


Figura ( 36 ) Señal filtrada digitalmente para el segundo experimento.



son filtradas en forma satisfactoria por el filtro digital.

- b ) Las oscilaciones que se observan en la señal filtrada digitalmente son a primera vista resultado de un filtrado deficiente y de mala calidad, sin embargo, una observación mas cuidadosa pone de manifiesto que las oscilaciones obtenidas son resultado de las variaciones de amplitud de la señal original, la señal filtrada digitalmente sigue a la las variaciones en amplitud y de baja frecuencia de la señal original.

#### III.4

#### Conclusiones.

Los filtros digitales obtenidos cumplen satisfactoriamente su objetivo, permitiendo una correcta interpretación física del fenómeno estudiado.

Puede decirse en general que, cuando los fenómenos estudiados generan señales cuya manipulación no requiere ser en línea, el sistema de diseño de filtros digitales desarrollado ofrece una grán versatilidad, permitiendo el diseño y aplicación de diversos tipos de filtros a una misma señal.

Bibliografía.

## a ) Filtros analógicos :

- [ 1 ] Daniels R.W.  
" Approximation methods for electronic filter design. "  
Mc. Graw Hill, N. Y. ( 1974 ).
- [ 2 ] Harry Y., F. Lam.  
" Analog and digital filter design and realization. "  
Prentice Hall. ( 1979 ).
- [ 3 ] Humphreys D. S.  
" The analysis, design and synthesis of electrical filters. "  
Englewood Cliffs, N. J. ( 1970 ).
- [ 4 ] Johnson D. E.  
" Introduction to filter theory. "  
Englewood Cliffs. N. J. ( 1976 ).

## b ) Filtros digitales :

- [ 6 ]      Antoniou, Andreas.  
            " Digital filters : analisis and design. "  
            Mc. Graw Hill. ( 1979 ).
- [ 7 ]      Fred J. Taylor.  
            " Digital filter design handbook "  
            Marcel Dekker, Inc. N. Y. ( 1983 ).
- [ 8 ]      Oppenheim.  
            " Digital signal processing. "
- [ 9 ]      Rabiner.  
            " Digital signal processing. "  
            IEEE Press. ( 1972 ).

## c ) Gráficación :

- [ 10 ]     David F. Rogers.  
            " Procedural elements for computer graphics. "  
            Mc. Graw Hill. ( 1985 ).
- [ 11 ]     Steven Harrington.  
            " Computer graphics a programming approach. "  
            Mc. Graw Hill. ( 1983 ).

A P E N D I C E .

MANUAL DEL USUARIO DEL SISTEMA DE GRAFICACION  
SWEET-P

A1.1

## OBJETIVO.

Un sistema que permita visualizar gráficamente resultados es de importancia fundamental en todo centro de investigación tecnológica y científica.

Obtener gráficas a partir de una serie de puntos almacenados en un archivo es el objetivo fundamental del sistema de graficación que aquí se presenta.

A1.2

## CARACTERISTICAS.

El sistema reúne las siguientes características :

a ) Interactivo. El usuario puede definir una serie de parámetros de graficación, ( escalas, número de gráficas, títulos, etc. ) , así como visualizar los resultados en la pantalla para posteriormente, si se desea, obtener la gráfica en papel.

b) Flexible. Los archivos de datos pueden ser generados desde un programa en cualquier lenguaje ( siempre que se respeten los formatos requeridos ) o desde editores de texto. Además el número de gráficas contenidas en un archivo es variable.

c ) Sencillo. El manejo del sistema es por medio del método de menús, lo cual permite que usuarios no expertos en

el manejo de computadoras no encuentren dificultades en su aplicación.

### Al.3 DESCRIPCION GENERAL.

El sistema de graficación " Sweet-p " ha sido desarrollado para funcionar en una microcomputadora del tipo P. C. . Para el despliegue de gráficas en papel se emplea un graficador capaz de interpretar comandos escritos en HP-GL.

Las opciones implementadas se pueden clasificar como :

( a ) De información general. Definen o manipulan algunos parámetros que no inciden directamente en la presentación gráfica, por ejemplo : número de gráficas en el archivo, nombre del archivo que contiene los datos a graficar, etc. ( opciones : 6, 10, 12, 17 ).

( b ) De definición de formatos. Permiten introducir una serie de parámetros que influyen directamente en la presentación de la gráfica, estos parámetros son válidos para gráficas tanto en pantalla como en papel, por ejemplo: rango en los ejes, localización de la gráfica en papel, etc. ( opciones : 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 18, 19, 20. )

( c ) De selección de dispositivos. Permiten seleccionar el medio de despliegue, pantalla o papel,

así como también inician el proceso de graficación.

( opciones : 3, 13, 14, 15, 16, 80 ).

El menú principal se muestra en la figura ( A1 ). En la siguiente sección se explica el formato que debe tener el archivo de los datos que se quieren graficar.

#### A1.4 FORMATO DEL ARCHIVO DE DATOS.

Los datos deben estar almacenados en un archivo tipo texto. El número de gráficas que pueden ser almacenadas en el archivo es ilimitado. El formato de los datos por cada abscisa debe ser :

abscisa     $\times$     ordenada<sub>1</sub>     $\times$     ordenada<sub>2</sub>     $\times$  ...  $\times$     ordenada<sub>n</sub>     $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \times \\ 0 \end{array} \right\}$

en este formato cada columna ( excepto la primera ) representa un juego de curvas que serán graficadas en una sola operación, la primera columna es la abscisa común a todos los juegos de curvas ( por lo tanto todas las curvas contenidas en un archivo deben ser muestreadas en los mismos puntos de las abscisas ). El símbolo  $\times$  representa uno o varios espacios ( ASCII 20 hex. ) o los caracteres de fin de línea ( CR    LF    ASCII OD    OA hex. ). El número 1 ó 0 al final de cada juego de datos indica el inicio o continuación de una curva, esto permite que en una sola operación se

## O P C I O N E S D E L G R A F I C A D O R

Valores límites de la grafica .....	[ 1 ]
Cotas relativas en la grafica .....	[ 2 ]
Posicion de la grafica en el papel..	[ 3 ]
Titulos para los ejes.....	[ 4 ]
Titulo de la grafica.....	[ 5 ]
Cambiar el archivo de datos .....	[ 6 ]
Divisiones en los ejes .....	[ 7 ]
Lineas horizontales y/o verticales .	[ 8 ]
Numero de decimales X, y .....	[ 9 ]
Seleccion de grafica .....	[ 10 ]
NO/SI Trazar recuadro y ejes' .....	[ 11 ]
Numero de graficas en PARALELO .....	[ 12 ]
GRAFICAR en pantalla .....	[ 13 ]
GRAFICAR en papel .....	[ 14 ]
Traza solamente los ejes en PANTALLA	[ 15 ]
Traza solamente los ejes en PAPEL...	[ 16 ]
Despliega un archivo en pantalla ...	[ 17 ]
Graficar puntos discretos .....	[ 18 ]
Graficar puntos continuos .....	[ 19 ]
Ejes logaritmicos o lineales .....	[ 20 ]
Seleccion de plumillas .....	[ 21 ]

seleccion: ( 0 termina la sesion ):

Figura ( A1.1 ) Menú principal del sistema de graficación  
SWEET-P.



grafiquen varias curvas, en este caso se dice que las curvas están en " serie ".

Una vez que se dispone de un archivo con el formato correcto es posible llevar a cabo una sesión de trabajo.

#### A1.5 INICIO DE SESION.

Una sesión de graficación se inicia al teclear el comando :

SWEET-P

seguido de la tecla " Return ".

Cada vez que se inicia una sesión de trabajo el sistema efectua los siguientes pasos:

- 1o. Se despliega una pantalla de información general donde se consigna la versión del sistema.
- 2o. Se intenta leer el archivo denominado SWEET-P.SYS, este archivo contiene información referente a los valores por default que tomará el sistema, de no existir dicho archivo se toman una serie de valores ya fijados con anterioridad.( para mayor información ver la sección " VALORES INICIALES " ).

3o. Se solicita al usuario el nombre del archivo de trabajo, es decir aquel archivo que contiene los puntos para graficar. No se hace ninguna averiguación sobre la existencia o inexistencia del archivo cuyo nombre se introdujo.

4o. Se solicitan los valores máximos y mínimos para cada uno de los ejes.

5o. Se despliega el menú principal y el control del sistema queda en manos del usuario.

El menú principal contiene todas las operaciones que normalmente son utilizadas en la sesión. La selección de alguna opción se lleva a cabo al introducir el número correspondiente a dicha opción ( el número correspondiente a cada opción se despliega en el menú principal ).

#### A1.6 OPCIONES DEL SISTEMA DE GRAFICACION SWEET-P.

A continuación se da una explicación de cada una de estas opciones de acuerdo a la clasificación anteriormente dada.

Opciones de información general.

Opción :

Función.

6

Cambiar el archivo de datos.

Esta opción permite que en una sola sesión se manejen varios archivos de datos. Al introducir esta opción el sistema solicita el nombre del nuevo archivo de datos. Si no se quiere cambiar de archivo basta con presionar la tecla " Return ".

12

Número de gráficas en paralelo.

En esta opción se define el número de gráficas contenidas en el archivo de datos. El número de gráficas inicial es 1. Si el número que se introduce en esta opción no concuerda con el número de gráficas que contiene el archivo, entonces, al graficar, el resultado obtenido será incorrecto.

10

Selección de la gráfica.

Si el número de gráficas que contiene el archivo es mayor que uno, esta opción permite seleccionar cual de todas ellas va a ser usada para graficarla. Su valor inicial es 1. Para poder hacer uso de esta opción primero es necesario haber utilizado la opción 12.

17

Despliegue de un archivo en pantalla.

Esta opción permite desplegar un archivo ,tipo texto, en la pantalla.

Opciones de definición de formatos.

Opción :

Función:

1

Valores límites de la gráfica.

Esta opción permite redefinir los límites para cada eje coordenado. En el caso de ejes aritméticos los valores que se deben introducir son los límites superior e inferior de cada eje. En el caso de ejes logarítmicos los valores que se deben introducir son el límite inferior del eje y el número de ciclos para el eje.

2

Cotas relativas en la gráfica.

Esta opción permite que las cotas que serán desplegadas en la gráfica sean escaladas.

4

Títulos para los ejes.

Al seleccionar esta opción se pueden definir títulos para cada uno de los ejes.

5 Título de la gráfica.

Esta opción permite colocar un título en la parte superior de la gráfica.

7 Divisiones en los ejes.

Esta opción define el número de secciones en que se dividirá el eje para colocar en cada una de las secciones una cota. El valor inicial es 1 ( coloca cotas al principio y al final de cada eje ). Esta opción solo es posible emplearla para ejes aritméticos. Los ejes logarítmicos siempre despliegan diez divisiones por ciclo, pero se coloca una cota por ciclo.

8 Líneas horizontales y/o verticales.

Se definen, en esta opción, el número de líneas horizontales y/o verticales que se trazarán, las líneas trazadas permiten crear una malla sobre la gráfica. En el caso de ejes aritméticos las líneas son trazadas en forma equidistante. En el caso de ejes logarítmicos siempre se trazan diez líneas por ciclo.

9 Número de decimales.

Esta opción fija el número de decimales que serán desplegados para cada cota. Su valor inicial es 2 para cada eje.

11

No/Si Trazar recuadro y ejes.

Al seleccionar esta opción se habilita o deshabilita el trazado de los ejes, recuadro, cotas y títulos durante la generación de las siguientes gráficas. Esta opción permite trazar varias curvas sobre la misma gráfica en papel evitando que el recuadro, los ejes, las cotas y los títulos se tracen innecesariamente.

18

Graficar puntos discretos.

Con esta opción los puntos de una gráfica no se unen con una línea, solamente es colocada una figura ( triángulo, cuadrado, punto o cruz ) en la posición exacta del punto a graficar.

19

Graficar puntos continuos.

La curva generada se une con una línea continua o con una línea punteada según se seleccione. Los tipos de líneas de que se dispone son los siguientes :

0 Línea continua.

1	.	.	.	.
2	—	—	—	—
3	—	—	—	—
4	—	.	.	.
5	—	-	-	-

Esta opción anula el efecto de la opción 18.

20

Ejes logarítmicos o lineales.

Al seleccionar esta opción, es posible transformar los ejes de aritméticos a logarítmicos o de logarítmicos a aritméticos según sea el tipo actual de eje. Si un eje es transformado también son afectados los parámetros dados por las opciones 1, 2, 7 y 8.

21

Selección de plumas.

Esta opción permite cambiar las plumas asignadas al recuadro, títulos y curva. Para salir de esta opción solo es necesario presionar la tecla " Return ".

Opciones de selección de dispositivos.

Opción:

Función:

3

Posición de la gráfica en papel.

Con esta opción se puede ajustar la posición que la gráfica ocupará en el papel. Esta opción permite hacer reducciones o ampliaciones de la misma gráfica.

13

Graficar en pantalla.

Esta opción genera los ejes, los títulos, las cotas, etc. así como también la gráfica seleccionada, desplegando el resultado en pantalla.

Si se desea obtener en pantalla la gráfica de varias curvas se debe proceder de la siguiente manera :

1o. Seleccionar la curva deseada.

( Opción 10 )

2o. Graficar en pantalla.

( Opción 13 )

3o. Una vez terminada la gráfica y sin regresar al menú principal presionar la tecla S. ( Si se presiona cualquier otra tecla la gráfica desplegada en pantalla no se salvará ).

4o. Repetir desde el paso 1 hasta que se hayan graficado todas las curvas deseadas.

14

Graficar en papel.

Esta opción es similar a la opción 13, solo que el despliegue se efectua en papel.

15

Traza solamente los eje en pantalla.

Esta opción es similar a la opción 13 solo que no despliega ninguna curva.



16           Traza solamente los ejes en papel.

Esta opción es similar a la 15 pero se despliega en papel.

80           Selección de conexión del graficador.

Esta opción no es desplegada en el menú principal por ser una opción muy especial. Esta opción permite redireccionar el flujo de la información al graficador. Las opciones posibles son : serie, paralelo o disco.

Al.7           Valores iniciales del sistema.

Al comenzar una sesión el sistema asigna una serie de valores iniciales a cada opción. Algunos de estos valores pueden ser introducidos por medio de un archivo, para satisfacer las necesidades de cada usuario.

Como ya se dijo, al iniciar una sesión el sistema trata de leer un archivo denominado "SWEET-P.SYS", de no existir este archivo los siguientes valores son asignados:

- Nombre del archivo para graficación múltiple en pantalla : " PANTALLA.SYS"
- Graficador conectado en SERIE.
  
- Tamaño de las letras y números , en puntos de graficador ( normalmente un punto mide 0.025 mm,

consulte el manual de usuario de graficador usado,  
para verificar este valor. ) :

	Ancho	Alto
eje x	: 80	80
eje y	: 80	80
título de la gráfica :	80	80

- Ancho del borde, ( es decir la distancia que existe  
entre las cotas y el título de los ejes ) : 80 puntos  
de graficador.

- Número de plumilla usada para trazar :

recuadro y cotas : 1.

títulos : 2.

curva : 3.

- Posición de la gráfica en papel :

Esquina inferior izquierda : x = 3 cm. y = 3 cm.

Longitud de la gráfica : x = 21 cm. y = 15 cm.

Si se desea cambiar alguno de estos valores es necesario  
crear el archivo " SWEET-P.SYS ". ( para mayor información  
consultar la sección " Archivo Sweet-p.sys " ).

Los siguientes valores son asignados independientemente  
de la existencia del archivo SWEET-P.SYS :

- Cotas relativas : Los mismos valores introducidos como valores límites de la gráfica.
- Títulos para los ejes y la gráfica : no existen.
- Divisiones en los ejes : una ( al principio y al final de cada eje. )
- Líneas horizontales y verticales : ninguna.
- Decimales desplegados en cada cota :
  - eje x : 2
  - eje y : 2
- Número de gráficas : 1
- Trazar recuadro y ejes.
- Graficar puntos continuos y unirlos con línea continua.

En la siguiente sección se describe el formato del archivo SWEET-P.SYS.

A1.8

Archivo SWEET-P.SYS.

El archivo SWEET-P.SYS puede ser creado con cualquier editor de texto. La información que debe contener el archivo

es la siguiente :

- | Renglón : | Información :   |
|-----------|---|
| 1         | Nombre del archivo para graficación múltiple.   |
| 2         | Tipo de conexión, debe ser la primera letra de una de las siguientes palabras :<br>Serie.<br>Paralelo.<br>según este conectado el graficador. |
| 3         | Tamaño de las letras y números para el título, eje x y eje y en este orden y dando los siguientes datos para cada eje : ancho, alto.          |
| 4         | Ancho del borde.  |
| 5         | Plumas usadas para recuadro y cotas, títulos y curva.   |
| 6         | Tamaño de la gráfica en papel :<br>esquina inferior dercha, longitud en x,<br>longitud en y.  |

A continuación se muestra como ejemplo de este archivo el que contiene los valores arriba descritos:

Pantalla.sys

P

80 100 80 100 200 200

70

1 2 3

1.0 1.5 10.0 15.0

Como se puede observar, en el ejemplo todos los parámetros deben ser introducidos de acuerdo al formato dado. De no seguirse el formato el sistema registrará un error, haciendo caso omiso del archivo. En el ejemplo anterior se dieron los siguientes parámetros :

- Nombre del archivo para graficación múltiple en pantalla : " PANTALLA.SYS"

- Graficador conectado en PARALELO.

- Tamaño de las letras y números :

	Ancho	Alto
eje x	: 80	100
eje y	: 80	100
título de la gráfica :	200	200

- Ancho del borde : 70 puntos.

- Número de plumilla usada para trazar :

recuadro y cotas : 1.

títulos : 2.

curva : 3.

- Posición de la gráfica en papel :

Esquina inferior izquierda :  $x = 1$  cm.  $y = 1.5$  cm.

Longitud de la gráfica :  $x = 10$  cm.  $y = 15$  cm.

En la siguiente sección se muestra un ejemplo típico de una sesión de graficación.

Al.9 Ejemplo tipo.

Supongase que se dispone de un archivo creado de alguna manera cuyo nombre es EJEMPLO.DAT el contenido de este archivo es el siguiente :

```
-2.0 1.5 0.135 1.2 1
-1.8 2.0 0.165 1.4 0
-1.6 2.5 0.202 1.6 0
-1.4 3.0 0.247 1.8 0
-1.2 2.5 0.301 2.0 0
-1.0 2.0 0.368 2.2 0
-0.8 1.5 0.449 2.4 0
-0.6 1.0 0.549 2.6 0
-0.4 0.5 0.670 2.8 0
-0.2 0.0 0.819 3.0 0
0.0 -0.5 1.000 0.0 1
```

0.2	-1.0	1.221	0.2	0
0.4	-1.5	1.492	0.4	0
0.6	-2.0	1.822	0.6	0
0.8	-2.5	2.226	0.8	0
1.0	-3.0	2.718	1.0	0
1.2	-2.5	3.320	1.2	0
1.4	-2.0	4.005	1.4	0
1.6	-1.5	4.953	1.6	0
1.8	-1.0	6.050	1.8	0
2.0	-0.5	7.389	2.0	0

Se observa que este archivo contiene 3 juegos de curvas en paralelo y cada juego de curvas está compuesto por dos curvas en serie.

Se desea obtener :

a ) La gráfica del primer juego de curvas, los límites en las abscisas deben ser  $-4.0$  y  $4.0$ , los límites en las ordenadas deben ser  $-5.0$  y  $5.0$  . El número de divisiones que se desean son 8 para las abscisas y 10 para las ordenadas.

b ) La gráfica semi-logarítmica del segundo juego de datos. El eje de las ordenadas debe ser logarítmico con 2 ciclos comenzando en  $0.1$  . El eje de las abscisas debe ser lineal con un intervalo de  $-4.0$  y  $4.0$ , con 8 líneas verticales cada una acotada con un solo decimal en cada cota.

c ) La gráfica del tercer juego de curvas, los límites del eje de las abscisas deben ser  $-1.0$  y  $1.0$  . El eje de las ordenadas debe estar en el intervalo de  $0.5$  a  $4.0$  . Los ejes

deben estar acotados solo en sus extremos.

A continuación se resumen en una tabla las acciones tomadas para obtener los resultados requeridos. Se parte de la suposición de que el sistema Sweet-p y el archivo de graficación se encuentran en el mismo directorio.

Acción teclada	Descripción :
o datos introducidos:	
Sweet-p	Inicia la sesión de graficación.
ejemplo.dat	Nombre del archivo de trabajo.
-4	Limite inferior en el eje x.
4	Limite superior en el eje x.
-5	Limite inferior en el eje y.
5	Limite superior en el eje y. Entrada al menú general.
12	Selección de la opción para introducir el número correcto de gráficas en paralelo.
3	Número de gráficas en paralelo.



- 7 Selección para variar el número de divisiones en cada eje.
- xy Se variarán las divisiones en los dos ejes.
- 8 Número de divisiones deseadas en el eje x.
- 10 Número de divisiones deseadas en el eje y.
- 13 Se lleva a cabo el proceso de graficación en pantalla. Un subido indica que se ha terminado el proceso de graficación.
- Cualquier tecla. Se regresa al menú principal.
- 10 Se selecciona la opción para cambiar el juego de curvas a usar.
- 2 Se selecciona el segundo juego de curvas.
- 20 Se selecciona la opción para definir ejes logarítmicos.
- y Se selecciona el eje y como logarítmico.

- 1 Se selecciona la opción para variar los límites de los ejes.
- y Se variaran los límites en el eje y.
- 0.1 Límite inferior del eje y.
- 2 Número de ciclos para el eje y.
- s Están correctos los valores.
- 8 Se selecciona la opción para trazar líneas verticales o/y horizontales.
- v Se trazarán líneas verticales.
- 8 Se trazarán 8 líneas verticales.
- 13 Se efectua el proceso de graficación en pantalla.
- Cualquier tecla. Se regresa al menú principal.
- 10 Se selecciona la opción para cambiar el juego de curvas a usar.
- 3 Se selecciona el tercer juego de curvas.

- 20 Se selecciona la opción para redefinir ejes logarítmicos.
- y Se redefine el eje y como eje lineal.
- 1 Se selecciona la opción para cambiar los límites de los ejes.
- xy Se cambiarán límites en ambos ejes.
- 1 Límite inferior en el eje x.
- 1 Límite superior para el eje x.
- 0.5 Límite inferior para el eje y.
- 4 Límite superior en el eje y.
- 7 Selección de la opción para modificar el número de divisiones en los ejes.
- xy Se modifican las divisiones en ambos ejes.
- 1 Se colocarán cotas al inicio y final del eje x.

- 1 Se colocarán cotas al inicio y final del eje y.
- 13 Se efectua el procesode graficación en pantalla.
- Cualquier tecla. Se regresa al menú principal.
- 0 Se termina la sesión.