99

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE ECONOMIA

PROGRAMACION LINEAL
E
INSUMO - PRODUCTO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN ECONOMIA

P R E S E N T A:

LEONEL ARMANDO ORNELAS RINCON

México, D. F. 1987

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

INTRODUCCION

En el presente trabajo se realiza un incursión en las aplicaciones más comunes de programación lineal e insumo-producto, considerando que éste último va adquiriendo una importancia cada vez mayor en el análisis económico y que es fundamental para que las personas involucradas en la toma de decisiones, en las empresas y en el gobierno, puedan desempeñar sus funciones contando con un instrumento analítico cuya riqueza aún no ha sido completamente explotada. Siendo la toma de decisiones una actividad que considera tanto las interrelaciones que se establecen entre los diversos departamentos de una empresa como las que se realizan entre ésta y su entorno económico. Se considera que las interdependencias al interior y al exterior de una unidad económica son determinantes para definir el curso de acción que ésta puede seguir; y el análisis de interdependencia es sustancial para cimentar la supervivencia y desarrollo de las distintas entidades económicas, así como para implantar planes y programas de desarrollo.

Se incluyen algunos aspectos teóricos, que se consideran básicos, varias aplicaciones e interpretaciones de los planteamientos y análisis de resultados de los modelos.

Las matemáticas son un intrumento fundamental en el análisis y la proyección o programación de los hechos económicos, ya que en la actualidad las principales variables económicas se presentan en forma de número, tal es el caso de la relación beneficio/costo, las mediciones del producto interno bruto o el ingreso nacional.

Una de las ventajas que presenta el análisis matemático es que permite la agregación, con lo cual se simplifica en gran medida el planteamiento y la solución de problemas. "La economía matemá tica debe considerarse como el proceso de obtención de las consecuencias de una serie de axiomas compatibles y con contenido -- económico" 1/

Con el uso de las computadoras es posible manejar sistemas de - ecuaciones con gran cantidad de variables que nos permiten una - aproximación cada vez mayor a la realidad. Las matemáticas son un instrumento, con la lógica, que pueden ser utilizadas por investigadores de cualquier disciplina. Tienen la ventaja sobre - la lógica de ser más precisas y sintéticas, en muchos casos sirven para demostrar teorías, que al ser tratadas numéricamente se hacen más comprensibles que aquellas que se basan en el discurso teórico puro.

"EL papel de las matemáticas en nuestros días es, y será, el de un instrumento de ayuda para aclarar la teoría económica y desarrollar el análisis económico, y en algunos casos servir para - dar lugar a nuevos conceptos e instrumentos matemáticos aptos - para la resolución de problemas económicos"2/

La teoría de equilibrio general tiene gran apoyo en el uso de - las matemáticas para su planteamiento y probablemente sin ellas éste hubiese sido demasiado embrollado en su exposición y sumamente díficil de ser entendido" (...) se debe decir que el uso de las matemáticas no tiene una función meramente expositiva, - en cuanto constituye un instrumento en cuya ausencia sería im-- posible alcanzar todas las conclusiones que comprende la teoría en cuestión". 3/

1/ Allen. Economía Matemática Ed. Aguilar. Madrid, 1960. pág. 5

2/ Huang, David S. Introducción al Uso de las Matemáticas en el Análisis Económico. Siglo XXI. Ed. México, 1976, pág. 7

3/ Napoleoni, Claudio. El. Pensameinto Económico del Siglo XX., pág. 23. Ed. Oikos Tau. Barcelona, 1968.

Lo único que podemos afirmar acerca de si puede o debe usar las técnicas matemáticas en economía, ya lo dijo Allen: "la manera de probar el pastel es comerlo". 1/

Cada investigador debe saber cuándo y qué tanto usarlas, ya que la interpretación y la calidad del análisis o pronóstico son -- responsabilidad de éste.

Ya en 1914 Schumpeter decía del análisis matemático de Cournot - que "es, sin duda, el instrumento que se impone,* sin tener en -- cuenta que las exposiciones de las relaciones económicas, bajo - la forma de sistemas de ecuaciones simultáneas, permite ya tener una visión general de conjunto de ellas, que no puede obtenerse de ninguna otra forma de un modo tan preciso" 2/

No usar las matemáticas en el análisis económico significa hacer a un lado una poderosa herramienta, sería tanto como si un campesino se empeñara en utilizar el arado cuando puede disponer - de un tractor mecánico, pues tanto el uso de las matemáticas -- como de las técnicas cuantitativas modernas como son la teoría - de sistemas y la cibernética permiten abordar los temas económicos con mayor riqueza analítica.

1/ Allen, R.G.D. Economía Matemática. Ed. Aguilar. Madrid. 1967

2/ Schumpeter, J. A. Sintesis y Evolución de la Ciencia Económica y sus -- Métodos. Ed. Oikos Tau. Barcelona 1967., pág. 178

C A P I T U L O   I.

EL ANALISIS ECONOMICO Y LA TOMA DE DECISIONES

EL ANALISIS ECONOMICO Y LA TOMA DE DECISIONES

Cuando se presentan alternativas de acción, se deben tomar decisiones. La decisión se define como el resultado de un proceso de análisis por parte del sujeto que decide.

LAS OBSERVACIONES ECONOMICAS Y LA TOMA DE DECISIONES

Cada empresa o institución persigue objetivos bien definidos - que pueden consistir en obtener el máximo beneficio, diversificar la producción, conquistar nuevos mercados con productos -- tradicionales, lanzar nuevos productos a los mercados ya existentes, mantener determinados niveles en los stocks, etc. Esto no significa que todas las empresas puedan tener objetivos distintos, en general, se puede decir que la empresa capitalista - busca el máximo beneficio independientemente de los medios de - que se valga para lograrlo. Sin embargo, también hay empresas - cuyo interés principal puede consistir en la prestación de servicios a la población, sin fines de lucro, o bien hacer llegar a toda la población bienes de consumo básico, sin que su precio cubra necesariamente los costos. Todas las decisiones que tomen las personas involucradas en estos tipos de empresas tendrán como criterio fundamental la persecución de sus fines, el - alcance de sus metas. Asimismo, las instituciones del Estado cuyos fines, en el ámbito de la política económica consisten en - alcanzar determinado nivel de empleo, o lograr un determinado - crecimiento en el producto interno bruto del país o de la entidad federativa que gobiernen, tenderán también a tomar decisiones que los aproximen a esos logros.

"El uso más frecuente de las observaciones económicas es para - propósitos prácticos, es decir, para las decisiones del gobierno y los negocios, la mayoría de las cuales son de grandes consecuencias para la comunidad tanto como para el individuo. Esta clase de decisiones están expuestas a varios tipos de incertidumbre: primera, existe la formulación del objetivo y la deci--

sión del oponente, que a veces es la naturaleza, a veces una -- persona o un grupo de personas; segunda, existe la incertidumbre de si se ha reunido toda la información necesaria y se ha valo-- rado correctamente su utilidad; y tercera, existe la incertidum-- bre de si se han sacado las conclusiones apropiadas y las partes dispersas, integrada la información en un cuadro satisfactorio"1/

TIPOS DE DECISIONES EN LOS NEGOCIOS

Ansoff distingue tres categorias de decisiones que denomina es-- tratégicas, administrativas y operativas referidas al tipo de re cursos; físicos (stocks y equipo), monetarios (dinero, crédito) y humanos, respectivamente.

"Las decisiones operativas generalmente obserben la mayor parte de la atención y energía de la empresa. El objeto es maximizar la eficiencia del proceso de conversión de recursos de la empre- sa o en lenguaje convencional, maximizar la rentabilidad de las operaciones corrientes. (...)

Las decisiones clave incluyen determinación de precios, estable- cimiento de una estrategia de comercialización, de programas de comercialización y de niveles de stocks, y las referentes a los gastos relativos para investigación y desarrollo, comercializa-- ción y operaciones.

Las decisiones estratégicas se refieren más a los problemas ex- ternos de la empresa que a los internos y especialmente con la ga ma de productos que la empresa producirá y los mercados a los -- que venderá (...).

1/ Morgestern, Oskar. Sobre la exactitud de las observaciones económicas". - Ed. Tecnos. Madrid, 1970. pags. 109 y 110.

Las decisiones administrativas se refieren a la estructura de los recursos de la empresa de un modo tal que crea el máximo potencial de realización. Una parte del problema administrativo concierne a la organización: la estructuración de las relaciones de autoridad y responsabilidad, flujo del trabajo, flujo de información, canales de distribución, y localización de medios.

La otra parte concierne a la adquisición y desarrollo de las fuentes de materia prima, instrucción y desarrollo del personal, y desarrollo, financiación y adquisición de medios y equipo. 1/

La teoría de las decisiones permite evaluar la eficiencia de una decisión al medir el grado en que sus resultados satisfacen el objetivo perseguido.

Son elementos esenciales para la toma de decisiones: 1) que haya diferentes maneras de solucionar el problema, es decir, que existen dos o más cursos de acción; 2) Establecer las metas u objetivos que se pretendan alcanzar; y 3) un proceso de análisis para evaluar las alternativas en función de sus metas.

LA UTILIZACION DE MODELOS EN LA TOMA DE DECISIONES

Uno de los conceptos que con mayor frecuencia se utiliza en la toma de decisiones es el de "modelo". Un modelo es una representación artificial de la realidad. Físicamente se construyen aviones a escala y se prueban en túneles de viento o se hacen presas de agua a escala, para medir su resistencia y si estos modelos físicos soportan las pruebas de calidad a que son sometidos se pueden construir en la realidad.

El tipo de modelos que especialmente nos interesa son los modelos matemáticos. Estos modelos simbólicos están constituidos por tres tipos de elementos: 1) Variable de decisión y parámetros. Las variables de decisión se determinan con la solución

1/ Ansoff, H.I. "La estrategia de la empresa". Ediciones Universidad de Navarra, S.A. Barcelona, 1976. pp. 34-36 del modelo, mientras los parámetros representan las variables - controladas del mismo; 2) Restricciones, están representadas por ecuaciones o inecuaciones que limitan las variables de decisión a sus valores factibles; y 3) Función Objetivo, es la función -- que se optimiza - se maximiza o minimiza - cuyo valor óptimo se alcanza cuando las variables de decisión han alcanzado su valor óptimo.

Las decisiones pueden ser tomadas con base en la intuición, en - la consideración de diversas opiniones; o bien en las técnicas - cuantitativas, como son la simulación, la investigación de operaciones, la teoría de juegos y teoría de probabilidades, entre otras.

"El analista no limita su análisis al de una sola decisión posible (...), por lo general el hombre de negocios tendrá ante sí - toda una serie de elecciones posible cualquiera de las que podrá permitirle seguir en el negocio o hasta prosperar. La manera de proceder del análisis de optimalidad es tomar en cuenta estas -- alternativas y preguntarse cual de estos posibles conjuntos de - decisiones se acercaría más a lograr los objetivos perseguidos - por el hombre de negocios, es decir, cuales serán los acuerdos - o decisiones mejores u óptimas".1/

1/ Baumol. W.J. "Teoría Económica y Análisis de Operaciones" Herrero Hermanos. México, 1970. pag. 4.

C A P I T U L O II.

LA PROGRAMACION LINEAL

LA PROGRAMACION LINEAL

GENERALIDADES.

En los últimos años, en el campo de la economía ha sido especialmente importante la aplicación de las matemáticas en la solución de diversos problemas. Con la creciente utilización que se hace de ellas se han favorecido tanto las matemáticas como la teoría económica, enriqueciéndose los conceptos y categorías de una y otra ciencia. Una de las técnicas matemáticas que mayor impacto ha logrado en los análisis económicos es, sin duda, la programación lineal, que es parte integrante de la llamada investigación de operaciones.

La programación lineal ha contribuido a que el análisis económico tenga alcances que en otra época no eran sino meras especulaciones teóricas en el campo de la economía del bienestar, ha allanado el camino para que la economía alcance grandes aplicaciones en la solución de problemas concretos, tanto micro como macroeconómicos.

El creciente desarrollo y expansión en el uso de las computadoras electrónicas, así como las investigaciones que se realizan en los modelos de insumo-producto permiten, por un lado, contar con información consistente de la producción y los insumos que la generan y, por otro, la utilización de las modernas técnicas de optimización aplicadas a problemas de gran magnitud tanto por su número de variables como de ecuaciones.

En la actualidad es obligado el uso de los ordenadores electrónicos para la investigación y el análisis económico, pues tienen la ventaja que día a día resultan más fáciles de utilizar debido a las constantes investigaciones que realizan las empresas productoras de ese tipo de máquinas en software.

Mediante la aplicación de la programación lineal se pretende encontrar una solución óptima (màxima o minima). Esto no significa que de los resultados derivados de un modelo se pretenda aplicar este tipo de solución al pie de la letra; deben tomarse en consideración las limitaciones inconmesurables, aquellas que no pueden expresarse mediante números y que en ocasiones representan una limitante mayor que las numéricas, como serían las limitaciones de tipo social y político que pueden alterar el curso de acción de un proyecto y no pueden preverse con exactitud.

La investigación de operaciones es un conjunto de técnicas que permite encontrar la solución óptima a problemas en que los recursos para llevar a cabo una actividad, es la aplicación del método científico a través del desarrollo de diversos modelos que constituyen un valioso instrumento para la toma de decisiones.

Los modelos que se emplean en investigación de operaciones representan el problema real que se quiere resolver, son matemáticos y toman la forma de ecuaciones e inecuaciones.

El origen de la investigación de operaciones se remonta al año de 1759 cuando Quesnay empieza a utilizar su Tableau Economique, que constituye un modelo primitivo de programación matemática.

Es hasta la Segunda Guerra Mundial cuando la investigación de operaciones empieza a tomar auge, cuando la administración militar en Gran Bretaña llamó a un equipo de científicos para que estudiaran los problemas tácticos y estratégicos asociados a la defensa de su país. Su objetivo consistía en determinar la utilización más efectiva de los recursos militares limitados.

Las aplicaciones incluían estudios de la forma de utilizar el radar, recientemente inventado, y los nuevos tipos de bombas.

El desarrollo de la investigación de operaciones se presenta en áreas distintas a las militares hasta que finaliza la guerra, contribuyendo a crear nuevos modelos y métodos en áreas industriales, hospitales, instituciones financieras, bibliotecas, planeación urbana, sistemas de transporte, planeación y programación económica, etc.

En el año de 1947 el Dr. George Dantzing, resumiendo el trabajo de muchos de sus precursores, inventa el método Simplex de Programación Lineal, que es la primera técnica matemática de investigación de operaciones ampliamente aceptada.

Con el progresivo desarrollo que han logrado las computadoras digitales, se empezó a extender la investigación de operaciones durante la década de los cincuentas en las áreas de programación dinámica, programación no lineal, programación entera, redes de optimización, simulación, inventarios y procesos markovianos de decisión.

LA PROGRAMACION LINEAL

Entre las técnicas de la investigación de operaciones destaca la Programación Lineal que permite la optimización de funciones lineales sujetas a restricciones representadas también por ecuaciones lineales, tiene amplia aplicación en problemas de producción, mezclas, asignación de recursos, etc.

Se llama programación lineal porque las ecuaciones que involucran siempre son lineales o de primer grado, no intervienen variables tales como x^3, (log Y) ó sen Z. La meta de la programación lineal es hacer un mejor uso de los recursos escasos, en la realización de actividades.

El modelo de programación lineal está constituido por una función objetivo que se va a optimizar - maximizar o minimizar - y varias funciones limitantes de ella, llamadas restricciones.

La función objetivo es un vector que contiene las variables de decisión del modelo - incógnitas que se van a resolver - y los coeficientes de costo o de utilidad.

Las restricciones del modelo son desigualdades que constan de - una matriz de coeficientes tecnológicos y un vector de disponibilidad de recursos.

Un tipo de restricciones que siempre debe tomarse en cuenta son las condiciones de no negatividad de las variables del modelo; no pueden existir ni precios ni cantidades de producción con -- signo negativo.

En resumen, los requisitos que debe llenar cualquier problema - para ser resuelto mediante programación lineal son los siguientes:

1) Tanto la función objetivo com las demás funciones son lineales.

2) Todas las restricciones son $\geq$, = ó $\leq$.

3) Todas las variables son no negativas

C_jX_j donde $(j = 1,2,...n)$

C_j.- representa las utilidad unitaria de cada X_j producto.

X_j.- es la variable de decisión del modelo, la incógnita que se va a despejar y representa, en un -- problema de producción la cantidad a producir - del j-ésimo producto, de manera tal que las utilidades sean las máximas.

$a_{ij}x_j$ donde $(i = 1,2,...m$ y $j = 1,2,...n)$

a_{ij}.- son los coeficientes tecnológicos de producción.

b_i = donde $(i=1,2,...m)$ es el vector de disponibilidad total de recursos.

$X_j \geq 0$.- es la restricción de no negatividad de las variables de decisión

4) Todas las variables se deben interrelacionar. La mayor dificultad que se presenta al aplicar la programación lineal consiste en realizar el planteamiento adecuado al problema e interpretar correctamente los resultados que se obtienen.

A continuación pasamos a analizar el modelo estandar de programación lineal:

MODELO ESTANDAR

Función objetivo:

Maximizar $Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$

Sujeto a:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n \leq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2n} X_n \leq b_2$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mn} X_n \leq b_m$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \ldots \quad X_n \geq 0$$

En la forma estandar se puede observar que se tiene un conjunto de m ecuaciones con m + n incógnitas, como el número de incóngnitas es mayor al número de ecuaciones el sistema proporciona una infinidad de soluciones. Mediante el uso del método simplex se localizarán un número finito de puntos de solución, entre los cuales se buscará la solución óptima.

Las restricciones de desigualdad se pueden convertir en ecuaciones añadiendo en el lado izquierdo de cada una de las restricciones una variable no negativa llamada variable de holgura, que se suma si las restricciones son $\leq$ y se resta si son $\geq$.

El mismo modelo estandar se pueden expesar en forma abreviada:

Función objetivo:

Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

Matriz de restricciones y disponibilidad

Sujeto a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j \leq b_i$

Condición de no negatividad

$$X_j \geq 0$$

Donde: $i = 1, 2, \ldots m$

$j = 1, 2, \ldots n$

Y en forma matricial:

Función objetivo:

Maximizar $Z = CX$

Matriz de restricciones y disponibilidad

Sujeto a: $AX \leq B$, $X \geq 0$, donde

$$C = (C_1, C_2, \ldots C_n)$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

Siendo X = Variables de decisión del modelo

C = Vector de costo o utilidad

A = Matriz de coeficientes tecnológicos.

B = Disponibilidad total de recursos.

EL METODO GRAFICO

El modelo de programación lineal puede ser resuelto mediante varios métodos de solución, entre ellos destaca el método gráfico, el método simplex, el simplex revisado y el simplex dual.

El método gráfico ilustra la forma en qué opera y cuál es la mecánica de la programación lineal. Pero, dada su gran simplicidad, no es posible aplicarlo en la solución de problemas que contengan un gran número de variables o de ecuaciones.

El método gráfico consiste en el trazo de las líneas que expresan las restricciones en el mapa de los ejes cartesianos y nos permiten tener a la vista un polígono de factibilidad o área de soluciones factibles, entre las cuales se encuentra la solución óptima.

Para resolver un problema de programación lineal mediante el método gráfico habrán de seguirse los siguientes pasos:

1) Expresar matemáticamente la función objetivo.

2) Expresar matemáticamente las ecuaciones de las -- restricciones.

3) Graficar las restricciones y la función objetivo .

4) Determinar la solución óptima y hacer la prueba de - las esquinas.

La prueba de las esquiñas consiste en revisar para cada esquina si el valor que adquiere la función objetivo es o no óptimo.

Esto se ilustra con un ejemplo: una fábrica constructora de muebles produce mesas y sillas mediante tres procesos que son construcción, acabado y pintura. Para la elaboración de una mesa -- son necesarias 4 horas de construcción, 3 de acabado y una de -- pintura, para producir una silla se requieren dos horas de construcción y una de pintura. Las sillas no requieren, practicamente acabado. En la venta de las mesas se obtienen beneficios de $ 9.00 por unidad y $3.00 por cada silla. El fabricante desea - saber qué cantidad de mesas y sillas debe producir, de manera -- que las utilidades que obtenga por la producción de estos muebles sean las máximas.

El problema se puede plantear mediante un cuadro, de modo que - sea más fácil distinguir la información con que se cuenta y tener precisión en la interpretación de los resultados.

REQUERIMIENTOS Y DISPINIBILIDAD DE RECURSOS PARA LA CONSTRUCCION DE MESAS Y SILLAS

PROCESO	PRODUCTO		DISPONIBILIDAD (Horas-Hombre)
	MESA	SILLA	
Construcción	4 hrs.	2 hrs.	36 hrs.
Acabado	3 hrs.	0 hrs.	21 hrs.
Pintura	1 hr.	1 hr.	12 hrs.
Utilidad	9 pesos	3 pesos	

Estando el problema en estos términos se procede a hacer su planteamiento matemático; optimizando la función objetivo que consiste en elevar al máximo las utilidades:

Función Objetivo:

Maximizar $Z = 9X_1 + 3X_2$

Sujeto a:

Utilización de Insumos		Disponibilidad de Insumos
$4X_1 + 2x_2$	$\leq$	36
$3X_1$	$\leq$	21
$X_1 + x_2$	$\leq$	12
$X_1 \geq 0, \; x_2$	$\geq$	0

X_1 y X_2 son las variables de decisión del problema y nos determinará el número de mesas y sillas que se deben producir para elevar los beneficios al máximo.

En el método gráfico se pueden romper las desigualdades convirtiéndolas arbitrariamente en igualdades, cuidando siempre la condición de la frontera. Es decir, al graficar las ecuaciones en el plano de ejes cartesianos debe definirse un polígono de factibilidad, determinado por el tipo de desigualdad de las inecuaciones.

Maximizar $Z = 9X_1 + 3x_2$

Sujeto a:

$$4x_1 + 2x_2 = 36$$

$$3x_1 = 21$$

$$x_1 + x_2 = 12$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

Primero se graficarán las restricciones en el mapa de ejes cartesianos, cuidando la desigualdad de las restricciones.

Para encontrar los dos puntos por donde pasa la recta que se -- graficará, se considera que una variable de la ecuación adquiere el valor de cero. En este caso empezaremos con x_1.

$$4x_1 + 2x_2 = 36$$
$$x_1 = 0$$
$$0 + 2x_2 = 36$$

Así, tenemos un sola incógnita que pueda ser resulta.

$$2x_2 = 36$$
$$x_2 = 36/2$$
$$x_2 = 18$$

Ahora, suponemos que

$$x_2 = 0$$

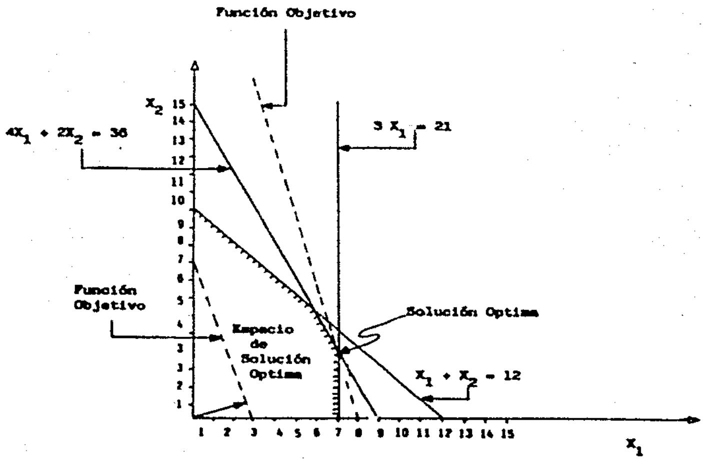
Y, con la otra incógnita de la ecuación, realizaremos el mismo procedimiento.

$$4x_1 + 0 = 36$$
$$4x_1 = 36$$
$$x_1 = 36/4$$
$$x_1 = 9$$

Así, tenemos el primer par ordenado que representa los puntos - por donde cruza la recta a los ejes cartesianos (9,18) cuando - $x_2 = 0$ y $x_1 = 0$, respectivamente. Estos puntos se localizan en el plano cartesiano y se traza la recta. Se procede igual -- manera con el resto de las restricciones.

Ecuación	x_1	x_2
$4x_1 + 2x_2 = 36$	9	18
$3x_1 = 21$	7	0
$x_1 + x_2 = 12$	12	12

A la función objetivo se le concede un valor arbitrario y se localiza en el plano cartesiano. El valor de la función objetivo será máximo cuando uno de los puntos de las restricciones corte con la recta, más alejada al origen, de la función objetivo.



Una vez hecha la gráfica, se puede encontrar la solución óptima haciendo la prueba de las esquinas o graficando la ecuación de la función objetivo.

La primer esquina es en el origen de los ejes cartesianos donde la función objetivo toma el valor de cero y la solución factible inicial nos indica que si no producimos nada, no tendremos utilidades.

Esta solución va mejorando en cada esquina hasta hacerse óptima y una vez que se ha encontrado la solución óptima factible, las demás soluciones serán factibles más no óptimas.

Realizando la prueba de las esquinas tenemos que si $x_2 = 0$, dentro del polígono de factibilidad, x_1 toma el valor de 7, $(x_1 = 7)$ y la función objetivo será la utilidad que se obtenga por la producción de cada unidad de x_1. En este caso $9(X_1) = 9\ (7) = 63$. Se obtendrán 63 pesos de beneficio si solo se producen mesas y no se producen sillas.

Esta solución es buena, sin embargo en la práctica resulta difícil la comercialización de mesas sin sillas. Siguiendo la siguiente esquina hacía arriba tenemos que se pueden producir 7 unidades de x_1 y 4 de x_2, siendo el valor de la función objetivo $9\ (7) + 3\ (4) = 75$.

Lo que significa que si producimos 7 mesas y cuatro sillas, obtendremos un beneficio de 75 pesos. La siguiente solución factible es produciendo 6 mesas y 6 sillas; el valor de la función será $9\ (6) + 3\ (6) = 72$ pesos, lo que significa que esta es una solución factible, pero no óptima, pues las utilidades que se obtienen son menores a las de la combinación anterior. La última esquina dice que se pueden producir 12 sillas sin producir ninguna mesa, tomando la función objetivo el valor de $3\ (12) = 36$, siendo ésta una solución factible pero no óptima.

De acuerdo al metódo gráfico hemos encontrado la siguiente tabla de soluciones factibles:

SOLUCIONES FACTIBLES

x_1	x_2	Valor de la función objetivo $Z = 9x_1 + 3x_2$
0	0	0
0	12	36
6	6	72
7	4	75
7	0	63

Donde x_1 indica el número de mesas que se deben producir; X_2, el número de sillas y Z, el valor de la función objetivo dadas las diferentes alternativas de solución.

La solución óptima al problema se encuentra en el cuarto renglón: produciéndose 7 mesas y cuatro sillas se obtendrán beneficios totales de 75 pesos y ninguna otra combinación es mejor para el productor, dadas las restricciones ya mencionadas en la utilización de los recursos.

Otra forma de encontrar la solución óptima mediante el método gráfico consiste en graficar la recta que representa a la función objetivo, asignándole a la ecuación valores arbitarios, trazar un vector perpendicular que se una con el origen de los ejes cartesianos y proyectar la recta que representa a la función. objetivo.

C A P I T U L O III.

EL METODO SIMPLEX

EL METODO SIMPLEX

Cuando un problema involucra tres o más variables el método gráfico resulta insuficiente para resolverlo, en estos casos es recomendable la utilización del método simplex. El Método Simplex permite resolver modelos que presentan muchas variables y restricciones.

Su funcionamiento consiste en encontrar el valor de las variables de decisión, evaluando los puntos extremos de tal forma que estos valores nos sirvan para calcular los subsiguientes.

El método parte de una solución básica factible inicial, que se va mejorando hasta encontrar la solución óptima.

Una solución factible es el conjunto de valores de las variables que satisfacen todas las restricciones del problema, incluyendo aquellas de no negatividad.

Se le llama solución óptima a la solución que optimiza el valor de la función objetivo.

Los problemas de Programación Lineal pueden ser resueltos utilizando el método simplex; obteniendo una solución factible y por un procedimiento iterativo (repetitivo) utilizar esta solución hasta obtener la solución óptima. El sistema iterativo del método simplex se basa en el álgebra de matrices y consiste, básicamente, en obtener una matriz inversa resolviendo un sistema de ecuaciones simultáneas.

Para resolver un problema mediante el método simplex se deberán seguir los siguientes pasos:

1) Plantear el problema en forma de ecuación
2) Romper las desigualdades de las restricciones.
   2.1 En caso de desigulddades $\leq$ se suma una variable de holgura en el lado izquierdo de la restricción.

2.2. En caso de desigualdades $\geq$ se resta una variable de holgura en el lado izquierdo de la restricción.

3) Colocar los datos en una tabla simplex

4) Determinar una solución factible de la tabla simplex.

5) Checar si la solución es óptima cuando en el renglón Z los coeficientes de las variables son no negativos.

6) Si la solución no es óptima, determinar en la tabla la variable de entrada para la siguiente solución.

   La variable de entrada será la que en el renglón Z presente el valor mayor negativo.

7) Determinar los valores de los cocientes de cada uno de los elementos de la columna de restricciones dividido por los coeficientes técnicos de la columna de la variable que entra en la solución básica factible y escoger aquel cuyo resultado sea el menor positivo.

8) Localizar el elemento pivote que es el cruce de la variable que entra (columna) y la variable que sale (renglón) de la solución factible.

9) Dividir todo el renglón de la variable que sale por el elemento pivote. El resultado será el renglón de variable que entra.

10) Mediante operaciones con este nuevo vector transformar en ceros el resto de los elementos de la columna que contenía el elemento que sale.

11) Regresar al paso 6, cuantas veces sea necesario.

12) Se ha encontrado la solución óptima del problema.

Para apreciar, en forma práctica, cómo funciona el método --- Simplex, resolveremos un problema:

PLANTEAMIENTO:

Para sembrar en el ciclo agrícola primavera-verano un productor cuenta con 25 ha. de riego en Pabellón, Aguascalientes. Tiene - además la disponibilidad de usar los recursos que a continuación se enumeran: 1) 800 jornadas de mano de obra, 2) 400 horas máquina, 3) 1 000 kgs. de semilla, 4) 1 000 kgs. de nitrato de - amonio , 5) 8 000 kgs. de sulfato de amonio, 6)4 500 kgs. de - superfosfato simple, 7) 2000 kgs. de insecticida y 8) 200 riegos.*/

En la región, para este ciclo agrícola se produce: maíz, frijol, sorgo y alfalfa.

Los requerimientos de insumos por hectárea para los cuatro -- cultivos, que él tiene considerados, son los siguientes:

REQUERIMIENTOS DE INSUMOS				
INSUMO/CULTIVO	**MAIZ**	**FRIJOL**	**SORGO**	**ALFALFA**
Mano de obra	30	33	10	28
Maquinaria	17	15	32	15
Semilla	22	47	80	30
Nitrato de Amonio	250		300	60
Sulfato de Amonio	350	500	400	
Superfosfato Simple	250	250	250	40
Insecticidas	0.5	20	24	
Riegos	5	5	4	9

*/ En este caso se considera "riego" a cada vez que se riega una hectárea.

Los rendimientos, costos, precios y beneficios por hectárea -- son los siguientes:

	MAIZ	FRIJOL	SORGO	ALFALFA
Rendimiento (tons)	3.105	1.560	5.254	28.850
Precio ($/ton)	3 562	8 670	2 490	512
Ingresos ($)	11 060	13 525	13 082	14 771
Costo ($)	6 260	7 225	7 682	6 071
Beneficios ($)	4 800	6 300	5 400	8 700

El productor desea saber cuántas hectáreas de cada producto debe cultivar para que sus utilidades sean máximas y cuál será el monto que éstas alcanzarán.

FUNCION OBJETIVO.

La función objetivo consiste en maximizar las utilidades que - obtendrá el productor y están representadas por:

$$\text{Max. } Z = 4800\ X_1 + 6300\ X_2 + 5400\ X_3 + 8700\ X_4$$

Donde, los coeficientes representan las utilidades por hectárea consechada de maíz, frijol, sorgo y alfalfa, respectivamente. - Y las variables X_i representan el número de hectáreas que se habrán de trabajar para cada uno de los cultivos.
Esto es:

X_1 = Número de hectáreas cultivadas de maíz

X_2 = Número de hectáreas cultivadas de frijol

X_3 = Número de hectáreas cultivadas de sorgo

X_4 = Número de hectáreas cultivadas de alfalfa

PLANTEAMIENTO MATEMATICO DEL PROBLEMA

Función Objetivo:

$$\text{Maximizar} \quad Z = 4800\,X_1 + 6300\,X_2 + 5400\,X_3 + 8700\,X_4$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
30\,X_1 & + & 33\,X_2 & + & 10\,X_3 & + & 28\,X_4 & \leq & 800 & \text{Mano de Obra} \\
17\,X_1 & + & 15\,X_2 & + & 32\,X_3 & + & 15\,X_4 & \leq & 400 & \text{Maquinaria} \\
22\,X_1 & + & 47\,X_2 & + & 80\,X_3 & + & 30\,X_4 & \leq & 1\,000 & \text{Semilla} \\
250\,X_1 & + & & & 300\,X_3 & + & 60\,X_4 & \leq & 1\,000 & \text{Nitrato de amonio} \\
350\,X_1 & + & 500\,X_2 & + & 400\,X_3 & & & \leq & 8\,000 & \text{Sulfato de amonio} \\
250\,X_1 & + & 250\,X_2 & + & 250\,X_3 & + & 40\,X_4 & \leq & 4\,500 & \text{Superfosfato simple} \\
 & & 20\,X_2 & + & 24\,X_3 & & & \leq & 200 & \text{Insecticidas} \\
5\,X_1 & + & 5\,X_2 & + & 4\,X_3 & + & 9\,X_4 & \leq & 200 & \text{Riego} \\
X_1 & + & X_2 & + & X_3 & + & X_4 & \leq & 25 & \text{Espacio} \\
X_1 & , & X_2 & , & X_3 & y & X_4 & \geq & 0 & \text{No negatividad}
\end{array}$$

PLANTEAMIENTO MATEMATICO DEL PROBLEMA

Función Objetivo:

$$\text{Maximizar} \quad Z = 4800\,X_1 + 6300\,X_2 + 5400\,X_3 + 8700\,X_4$$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
30\,X_1 & + & 33\,X_2 & + & 10\,X_3 & + & 28\,X_4 & \leq & 800 & \text{Mano de Obra} \\
17\,X_1 & + & 15\,X_2 & + & 32\,X_3 & + & 15\,X_4 & \leq & 400 & \text{Maquinaria} \\
22\,X_1 & + & 47\,X_2 & + & 80\,X_3 & + & 30\,X_4 & \leq & 1\,000 & \text{Semilla} \\
250\,X_1 & + & & & 300\,X_3 & + & 60\,X_4 & \leq & 1\,000 & \text{Nitrato de amonio} \\
350\,X_1 & + & 500\,X_2 & + & 400\,X_3 & & & \leq & 8\,000 & \text{Sulfato de amonio} \\
250\,X_1 & + & 250\,X_2 & + & 250\,X_3 & + & 40\,X_4 & \leq & 4\,500 & \text{Superfosfato simple} \\
 & & 20\,X_2 & + & 24\,X_3 & & & \leq & 200 & \text{Insecticidas} \\
5\,X_1 & + & 5\,X_2 & + & 4\,X_3 & + & 9\,X_4 & \leq & 200 & \text{Riego} \\
X_1 & + & X_2 & + & X_3 & + & X_4 & \leq & 25 & \text{Espacio} \\
X_1 & , & X_2 & , & X_3 & y & X_4 & \geq & 0 & \text{No negatividad}
\end{array}
$$

De esta manera, la función objetivo es la suma de los productos de multiplicar las utilidades obtenidas por la hectárea de un -cultivo por el número de hectáreas cultivadas del mismo.

RESTRICCIONES.

Las inecuaciones que representan las restricciones a las que se sujeta la solución del problema consisten en determinar que el uso de los recursos escasos, asociados a la producción de los cultivos en estudio, no exceda a la disponibilidad del productor.

La primera inecuación nos indica que hay un total de 800 jornadas/hombre disponibles, donde cada hectárea de cultivo de maíz necesita 30; de frijol, 33; de sorgo 10 y de alfalfa, 28 jornadas/hombre.

$$30X_1 + 33X_2 + 10X_3 + 28X_4 \leq 800$$

La segunda restricción nos indica que existen 400 horas/máquina disponibles para realizar la producción y que cada hectárea cultivada de maíz requiere de 17 horas/máquina, una de frijol, 15; de sorgo, 32; y de alfalfa, 15.

$$17X_1 + 15X_2 + 32X_3 + 15X_4 \leq 400$$

La siguiente restricción dice que se puede disponer de 1 000 kgs. de semilla y cada hectárea de maíz necesita 22 kgs; de frijol, -47; de sorgo, 80; y de alfalfa 30.

$$22X_1 + 47X_2 + 80X_3 + 30X_4 \leq 1000$$

De nitrato de amonio se requieren 250 kgs, para cada hectárea -donde se siembre maíz; 300 kgs, para el sorgo; y 60 kgs. para -la alfalfa. El frijol no necesita este insumo. Y, el total disponible es de 1 000 kgs.

$$250X_1 + 300X_3 + 60X_4 \leq 1\ 000$$

De sulfato de amonio se dispone de 8 tons. y los requerimientos por cada hectárea de maíz es de 350 kgs.; de frijol, 500 kgs.; de sorgo, 400 kgs.; la alfalfa no necesita.

$$350X_1 + 500X_2 + 400X_3 \leq 8\,000$$

De superfosfato simple se dispone de 4 500 kgs. y los requerimientos por hectárea son para maíz, frijol y sorgo de 250 kgs. por ha. y 40 kgs. por hectárea de alfalfa.

$$250X_1 + 250X_2 + 250X_3 + 40X_4 \leq 4\,500$$

De insecticidas se dispone de 200 kgs. y cada hectárea de frijol requiere de 20 kgs. y la de sorgo, 24 kgs. por hectárea ; el — maíz y la alfalfa no requieren.

$$20X_2 + 24X_3 \leq 200$$

Se dispone de 200 riegos en lo que dura el ciclo agrícola. Las necesidades de riego por hectárea de maíz y frijol son de 5 riegos; de sorgo, 4; y de alfalfa 9.

$$5X_1 + 5X_2 + 4X_3 + 9X_4 \leq 200$$

De espacio, se dispone de 25 hectáreas. Por lo que la suma de las hectáreas que se cultiven no pueden exceder a 25:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 25$$

Por último, ninguna de las variables de decisión pueden ser negativa, porque la solución carecería de sentido.

$$X_1,\ X_2,\ X_3 \text{ y } X_4 \geq 0$$

Partiendo de este sistema de desigualdades añadimos una variable de holgura en cada inecuación que tenga el signo $\leq$. Así, agregamos nueve variables de holgura $S_1 \ldots S_9$.

Estas variables de holgura van a representar la capacidad ociosa o disponibilidad de recursos que no es utilizada:

S_1 = Cantidad de jornadas/hombre no utilizadas

S_2 = Cantidad de horas/máquina no utilizadas

S_3 = Cantidad de kgs. de semilla no utilizada

S_4 = Cantidad de Kgs. de nitrato de amonio no utilizados.

S_5 = Cantidad de sulfato de amonio no utilizado

S_6 = Cantidad de superfosfato simple no utilizado

S_7 = Cantidad de kgs. de insecticida no utilizado

S_8 = Cantidad de riegos no utilizados

S_9 = Cantidad de hectáreas no sembradas.

Estas variables S_i las integramos en la tabla simplex inicial.

TABLA SIMPLEX INICIAL.

La primera tabla simplex es un sistema de ecuaciones donde se da una primera solución al sistema. La solución se lee en las columnas C_j y SBF, en la primera se enlistan las variables que tiene solución y en la última la solución básica factible. Por razones de cómputo se cambia de signo al renglón que representa las utilidades (-).

Este cuadro presenta las siguientes soluciones:

$Z = 0$ La función objetivo igual a cero nos indica que no se obtiene ninguna utilidad.

$S_1 = 800$ Significa que el total de mano de obra disponible no se ocupa.

$S_2 = 400$ Indica que las horas máquina disponibles no se utilizan.

TABLA SIMPLEX INCIAL

C_j	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S B F
Z	-4800	-63000	-5400	-8700	0	0	0	0	0	0	0	0	0	[illegible]
S_1	30	33	10	28	1	0	0	0	0	0	0	0	0	80[illegible]
S_2	17	15	32	15	0	1	0	0	0	0	0	0	0	40[illegible]
S_3	22	45	80	30	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1 00[illegible]
S_4	250	0	300	62	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1 0[illegible]
S_5	350	500	400	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	8 0[illegible]
S_6	250	250	250	40	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4[illegible]
S_7	0	20	24	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
S_8	5	5	4	9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
S_9	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	

TABLA SIMPLEX INCIAL

C_j	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S B F
Z	-4800	-63000	-5400	-8700	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_1	30	33	10	28	1	0	0	0	0	0	0	0	0	80
S_2	17	15	32	15	0	1	0	0	0	0	0	0	0	40
S_3	22	45	80	30	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1 00
S_4	250	0	300	62	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1 0
S_5	350	500	400	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	8 0
S_6	250	250	250	40	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4
S_7	0	20	24	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
S_8	5	5	4	9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
S_9	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	

S_3 = 1 000 Indica que no se siembra una sola semilla.

S_4 = 1 000, S_5 = 8 000 y S_6 = 4 500 Indican que no se utilizan fertilizantes.

S_7 = 200 No se usan insecticidas

S_8 = 200 No se hace un solo riego.

S_9 = 25 No se utiliza la tierra disponible.

En resumen, esta solución inicial dice que si no se utiliza ningún recurso tendremos utilidades con valor cero. Esta solución puede mejorarse mientras en el renglón Z existan valores negativos.

Para pasar a la siguiente tabla debemos elegir el elemento pivote en la columna que en el renglón Z presente el valor mayor negativo. En este caso en la columna X_4 cuyo valor es - 8 700.

Ya sabemos en cual columna se encuentra el elemento pivote para identificar la fila, es necesario dividir cada elemento de la columna SBF entre el correspondiente de la columna X_4 y será aquel cuyo coeficiente sea el menor positivo.

800/28	=	28
400/15	=	227
1000/30	=	33
1000/62	=	16
8000/0	=	Indeterminado
4500/40	=	112
200/0	=	Indeterminado
200/9	=	22
25/1	=	25

Como el cociente menor positivo es 16, el elemento pivote es 62 y la variable S_4 sale de la solución factible inicial para ceder su lugar a la variable X_4.

Con la localización del elemento pivote es posible pasar a formar una nueva tabla simplex.

La tabla se inicia determinando la fila de la variable que entra (X_4) en la soluciòn bàsica factible. Esto se hace dividiendo toda la fila de la variable que sale (S_4) por el elemento pivote (62).

	X_1	X_2	X_3	X_4	S_4	SBF
S_4	250	0	300	62	1	1 000
$X_4 = S_4/62$	4.03	0	4.84	1	.016	16.1

Después de calcular el renglón de la variable que entra se pueden calcular el resto de variables, multiplicando la fila X_4 por el elemento que se encuentra en la misma columna (X_4) multiplicando por -1 y sumando los resultados a la fila original.

	X_1	X_2	X_3	X_4	S_4	SBF
Z ant.	-4800	-6300	-5400	-8700		0
X_4 (8700)	35078	0	42099	8700	139	140 070
Z	30278	-6300	36699	0	139	140 070

	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_4	SBF
S_1 ant.	30	33	10	28	1	0	800
X_4 (-28)	-112.9	0	-135.5	-28	0	-.45	-451.6
S_1	- 82.9	33	-125.5	0	1	-.45	348.4

	X_1	X_2	X_3	X_4	S_2	S_4	SBF
S_2 ant.	17	15	32	15	1		400
X_4 (-15)	-60.5	0	-72.6	-15	0	-.24	-241.9
S_2	43.5	15	-40.6	0	1	-.24	158.1

TABLA SIMPLEX (2)

C_J	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S B F
Z	30 278	-6 300	36 699	0	0	0	0	139	0	0	0	0	0	140 070
X_4	4.032	0	4.839	1	0	0	0	0.016	0	0	0	0	0	16.1
S_1	-82.9	33	-125.5	0	1	0	0	- .448	0	0	0	0	0	348.4
S_2	-43.5	15	- 40.6	0	0	1		- .24	0	0	0	0	0	158.1
S_3	-99	45	- 65.2	0	0	0	1	- .48	0	0	0	0	0	516.1
S_5	350	500	400	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	8 000
S_6	88.7	250	56.4	0	0	0	0	- .64	0	1	0	0	0	3 855
S_7	0	20	24	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	200
S_8	-31.3	5	-39.6	0	0	0	0	- .144	0	0	0	1	0	55
S_9	- 3.032	1	- 3.8	0	0	0	0	- .016	0	0	0	0	1	8.9

De esta forma se van calculando los valores de las variables -- que integran la tabla siguiente (tabla 2).

Una vez que se ha calculado el valor de cada una de las variables que forman la solución básica factible, se inicia el procedimiento de buscar el valor de Z que sea el mayor negativo. Se vuelve a dividir toda la columna SBF por la columna que tuvo el elemento mayor negativo (en este caso X_2) y se encuentra el elemento pivote. Se siguen las reglas aplicadas hasta que en Z no exista ninguna variable de decisión con signo negativo, esto se consigue -- en el cuadro 3 o tabla simplex final.

En la tabla 3 tenemos los siguientes resultados: Z, la función - objetivo tendrá un valor de 196 140. Lo que significa que se -- obtendrá esa cantidad, en pesos, por concepto de utilidades, si se cultivan 8.9 hectáreas de frijol (X_2) y 16.1 hectáreas de alfalfa (X_4).

Dejando sin utilizar:

54.7 Jornadas/hombre (S_1)

24.6 Horas/máquina (S_2)

115.6 Kgs. de semilla (S_3)

3 550 Kgs. de sulfato de amonio (S_5)

1 630 Kgs. de superfosfato simple (S_6)

22 Kgs. de insecticida (S_7)

10.5 Riego (S_8)

Se agotan totalmente el nitrato de amonio (S_4) y la tierra disponible (S_9).

TABLA SIMPLEX 3 FINAL

C_j	X_1	X_2	X_3	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S B F
Z	11 176	0	12 759	0	0	0	0	38.64	0	0	0	0	6 300	196 140
X_2	- 3.032	1	- 3.8	0	0	0	0	- .016	0	0	0	0	1	8.9
X_4	4.032	0	4.839	1	0	0	0	0.016	0	0	0	0	0	16.1
S_1	17.1	0	0	0	1	0	0	.08	0	0	0	0	- 33	54.7
S_2	2	0	16.4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	- 15	24.6
S_3	37	0	236.2	0	0	0	1	0.24	0	0	0	0	- 45	115.6
S_5	1 866	0	2 300	0	0	0	0	8	1	0	0	0	- 500	3.550
S_6	847	0	1 006	0	0	0	0	3.4	0	1	0	0	- 250	1 630
S_7	60	0	-52	0	0	0	0	.32	0	0	1	0	- 20	22
S_8	16	0	21	0	0	0	0	0.064	0	0	0	1	- 5	10.5

C A P I T U L O   IV.

EL PROBLEMA DUAL Y ANALISIS DE SENSIBILIDAD

EL PROBLEMA DUAL Y ANALISIS DE SENSIBILIDAD
EL PROBLEMA DUAL

Todo problema de Programación Lineal (primal) tiene asociado un segundo problema (dual) y la solución óptima de uno será exactamente la misma del otro o no habrá solución.

En nuestro ejemplo que es un proceso de producción agrícola el – el problema es determinar la cantidad de hectáreas que hemos de asignar a los cultivos en cuestión de manera que nos permitan alcanzar el máximo de utilidades, limitados por las restricciones de capacidad de disponibilidad de materiales, mano de obra disponible , terreno, etc. Los costos de los insumos fijos pueden no entrar directamente en los cálculos contables para medir las utilidades, ésto es cierto si el terreno y el equipo han sido completamente amortizados. Estos insumos se han utilizado para obtener utilidades. Supóngase que el productor desea saber que proporción de las utilidades proviene de cada uno de los insumos; Para ésto, él imputará todas las utilidades de la cosecha a sus recursos escasos, los valores imputados deben elegirse en forma tal que la utilidad neta de la producción sea cero. En este -- análisis de imputar valores, el requerimiento de utilidades cero es meramente contable.

"Cuando se resuelve el problema de programación lineal para conseguir el programa más eficiente, nacen en el mismo curso del -- cálculo determinadas cantidades que son perfectamente interpretables como precios; tales cantidades, quiza porque se necesita en el curso de la solución y constituyen el aspecto que podría definirse del valor económico, o bien, se entiende este último valor, como valor de eficiencia".1/

1/ Napoleoni, Claudio. El pensamiento Económico del Siglo XX. Ed. Oikos Tau. Madrid , pág. 130

Las actividades utilizadas en la determinación de los precios tendrán una utilidad de cero. Si se supone que las actividades productivas operan a costos constantes, la programación lineal ofrece un método para calcular los precios sombra, en las que el precio de cada mercancía es igual a su costo de producción

El precio sombra representa la aportación que los factores escasos dan a la obtención de utilidades.

Cuando un precio sombra es igual a cero, tal factor no contribuye a la obtención de utilidades; cuando un precio sombra es positivo, por ejemplo 30, esto significa que por cada unidad que se aumente en la utilización de dicho factor se obtendrá una utilidad adicional de 30 pesos o aumentará el valor de la función objetivo en 30 pesos.

Un precio sombra cero significa que ese factor no representa ningún aumento adicional a los beneficios. El precio sombra es, pues, una contribución marginal a la obtención de utilidades.

"El precio sombra mide el valor marginal de un insumo para la empresa. Los precios sombra son equivalentes a las derivadas parciales de la función prima, tomadas con respecto a las diversas restricciones y, por ende, indican el cambio de esa función que será el resultado de la liberación de una de las restricciones. El precio sombra mide el valor marginal del insumo para la empresa". 1/

Problema dual, cuando el primal está en la forma canónica.

Considerando el problema de programación lineal en forma canónica.

1/ Briham, E. y Pappas. "Economía y Administración. México, 1978 pp. 231, 255

$$\text{Maximizar} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} C_j \quad X_j$$

$$\text{Sujeto a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad X_j \leq b_i \qquad i = 1,2, \ldots m$$

$$X_j \geq 0, \qquad j = 1,2, \ldots n$$

Si este problema se denomina primal, su dual estará dado por:

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot Y_i$$

$$\text{Sujeto a} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \quad Y_i \geq C_j \qquad j = 1,2, \ldots n$$

$$Y_i \geq 0 \qquad i = 1,2, \ldots m$$

Donde: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son variables duales.

El problema dual se obtiene a partir del primal (y viceversa) - en la siguiente forma:

1) Cada restricción del primal corresponde a una variable del dual.

2) Los elementos del lado derecho (SBF) del primal son - los coeficientes de la función objetivo del dual.

3) Si el primal busca maximizar, el dual minimizar.

4) El problema de maximización tiene restricciones ($\leq$) y el de minimización ($\geq$).

5) Las variables en ambos son no negativas.

Expondremos el planteamiento del problema que hemos trabajado - tanto en su forma primal como en su forma dual. Mientras en el problema primal estamos maximizando utilidades, en el dual se - están minimizando los costos.

Esta es una de las grandes ventajas que proporciona el planteamiento del dual, se puede reducir, para facilitar la solución, el número de restricciones que interviene en el problema. Es - computacionalmente más eficiente resolver el dual en este caso, porque la dificultad en el cómputo de programación lineal depende principalmente del número de ecuaciones y no del número de - variables.

Una interpretación económica importante de las variables duales está dada en términos de la contribución de los recursos escasos a la función objetivo. Así, en el planteamiento del problema (minimizar), tenemos que, en la función objetivo, los coeficientes son las cantidades de insumos totales disponibles para llevar a cabo el fenómeno de la producción. Y Las variables de decisión Y_i son los precios sombra asociados a cada actividad.

Como se puede apreciar, en la tabla simplex final, los precios sombra de las variables S_4 y S_9 se localizan en el cruce de estas columnas con el renglón Z, 38.64 y 6300 respectivamente. -- Esto sifnifica que un kilogramo de nitrato de amonio contribuye a obtener $ 38.64 de utilidades y el uso de una hectárea adicional de tierra $ 6300.00 . Al multiplicar estos precios imputados por la disponibilidad total de esos recursos, tenemos:

Función Objetivo:

$$\text{Minimizar } Z=800\ Y_1+400\ Y_2+1000\ Y_3+1000\ Y_4+8000\ Y_5+4500\ Y_6+200\ Y_7 + 200\ Y_8+ 25\ Y_9$$

Donde se obtuvieron las siguientes soluciones:

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_5 = Y_6 = Y_7 = Y_8 = 0$$

$$Y_4 = 38.64$$

$$Y_9 = 6300$$

Luego:

$$Z = 1000 \times 38.64 + 25 \times 6300 = 196\ 140$$

Que es el resultado obtenido al maximizar las utilidades, demostrándose que la solución del primal y el dual son convergentes o no existe solución.

El problema dual consiste en minimizar los costos, de manera que las variables de decisión duales nos representarán los precios de los recursos escasos utilizados en la producción; a diferencia del primal que nos representaba la cantidad de unidades que se deben producir, por tipo de producto. Mientras en el primal maximizamos beneficios, en el dual minimizamos costos.

En el primal las restricciones que el total de los insumos aplicados no puede ser mayor a la cantidad de insumos disponibles. En tanto, en el dual las restricciones indican que el valor de producir alguno de los cultivos en estudio ha de ser mayor a las utilidades que se obtienen por la venta del mismo. Se siguen observando las condiciones de no negatividad de las variables de decisión.

Para nuestro ejemplo no resolveremos el dual porque al utilizar el método simplex en la solución del primal se obtienen los precios sombra que encontraríamos al resolver el dual. Esto significa que resolviendo un solo problema se tienen dos soluciones que convergen en un resultado óptimo de la función objetivo.

Con la ayuda de la computadora resulta sumamente sencillo obtener el dual, pues muchos de los programas de paquete dan ambas soluciones y son fáciles de usar.

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad permite realizar pruebas que consisten en modificar el valor de los parámetros del problema para obtener en forma rápida la solución al problema planteado, conociendo el valor que asumen ante tales cambios las variables de decisión del problema.

Para realizar el análisis de sensibilidad en programación lineal necesitamos de la tabla simplex inicial y de la tabla simplex final.

Ya que contamos con ambas tablas; suponemos que se han podido obtener 5 hectáreas adicionales de terreno, es decir, en lugar de contar con 25 se tienen 30 hectáreas.

El análisis de sensibilidad consiste en multiplicar la matriz, que se forma en la tabla simplex final y abarca todas las filas, excepto Z, y las columnas que incluyen a las variables artificiales, por el nuevo vector de disponibilidad de recursos que incluye las modificaciones que se realicen.

Además del cambio en las hectáreas disponibles se desean hacer otros, dado que se ha conseguido un crédito y ha aumentado la disponibilidad de algunos insumos, tenemos, pues, un nuevo vector de disponibilidad (B').

DISPONIBILIDAD DE RECURSOS

CONCEPTO	B	B'	INCREMENTO %
Mano de obra	800	900	12.5
Maquinaria	400	450	12.5
Semilla	1 000	1 100	10.0
Nitrato de amonio	1 000	1 200	20.0
Sulfato de amonio	8 000	8 000	0.0
Superfosfato simple	4 500	5 500	22.2
Insecticidas	200	3 450	1 625.0
Riego	200	220	10
Espacio (ha.)	25	30	20

En lugar de resolver nuevamente el problema con las modificaciones en la columna de disponibilidad, tomaremos la matriz que se forma en la tabla óptima y multiplicamos por los nuevos valores.

Así, el valor de la función objetivo sería:

$$Z = 4800\ X_1 + 6300\ X_2 + 5400\ X_3 + 8700\ X_4$$

Sustituyendo

$$Z = 4800\ (0) + 6300\ (11) + 5400\ (0) + 8700\ (19) = 234\ 600$$

Lo que significa que si aumentamos la disponibilidad de recursos como se indica en el cuadro anterior de la función objetivo habrá aumentado de \$ 196 140.00 a \$ 234 600.00. Es decir, en 19.6 %. Y ha disminuido considerablemente la cantidad de recursos ociosos.

Así como hay formas para calcular la función objetivo con modificaciones en la disponibilidad, de recursos, también hay para cambios en los coeficientes de la función objetivo. Esto se puede revisar en la extensa bibliografía existente sobre el tema. Es importante el análisis de sensibilidad, en la medida en que permite realizar cambios, no se debe resolver nuevamente.

C A P I T U L O V.

ANALISIS INTERINDUSTRIAL

ANALISIS INTERINDUSTRIAL

El modelo de insumo-producto es la primera aplicación de la programación lineal en la economía, desde los años treinta Leontief pudo reunir los datos necesarios y escribir conjuntos de ecuaciones para una clasificación de 45 industrias para el período de 1919 a 1929.

Por medio del modelo de insumo-producto se pueden explicar las magnitudes de los flujos interindustriales en función de los niveles de producción de cada rama de actividad. Es un examen completo de las complejas relaciones recíprocas que se establecen en un sistema económico, se puede medir la evolución y grado de interdependencia entre las ramas.

Asimismo, se pueden analizar los cambios estructurales del sistema económico, cambios que se presentan a raíz del progreso técnico y de modificaciones en la demanda final.

Las aplicaciones del modelo de insumo-producto se realizan tanto para la predicción de ventas de una empresa individual, como para medir las implicaciones que conllevan los grandes programas económicos nacionales. Se han utilizado los análisis de insumo-producto para identificar mercados potenciales para nuevos productores, evaluar las perspectivas de ventas de productos establecidos y evaluar las perspectivas de inversiones en varias industrias. También se puede utilizar para medir los efectos que una modificación en el monto de importaciones o exportaciones tendría sobre el nivel de empleo en varias industrias o regiones, se pueden evaluar los efectos de distintas trayectorias sobre el desarrollo económico y los efectos que sobre la producción industrial puedan tener programas fiscales alternos.

En nuestro país se elaboró el primer cuadro de insumo-producto para el año de 1950 y el más reciente se realizó con datos de 1980, constituido este último por 72 ramas de actividad económica.

La mayor aplicación del análisis de insumo-producto es como instrumento de planeación, ya que permite reflejar el conjunto de relaciones entre todos los sectores económicos en su articulación con la demanda final y el consumo no productivo; nos permite tener una visión globalizante que facilita la toma de decisiones de carácter macroeconómico.

GENERALIDADES:

Antes de pasar al aspecto empírico del análisis de insumo-producto, vale la pena replantear algunos conceptos de la contabilidad nacional que resultan útiles en el desarrollo del modelo.

La matriz de insumo-producto es parte básica en las elaboración de un sistema de cuentas nacionales debido a que en su construcción debe existir un alto grado de consistencia entre las estructuras de insumos y el destino de la producción de cada sector.

Se entiende por producción bruta de las industrias el valor bruto de las mercancías producidas durante cierto período por los sectores o industrias residentes en el país. Se compone de productos típicos y atípicos. La producción bruta de las mercancias se debe registrar en el momento en que se concluye el proceso de producción.

Los servicios son producidos en el momento en que son prestados. La producción bruta de las industrias debe valorarse a precios de mercado, de productor, subdividiendo los impuestos netos sobre las mercancías y los valores básicos.

La producción obtenida en un período dado puede tener como destino su venta en el mercado interno o en el exterior; también se puede utilizar como materia prima por sus propios productores o por otro sector industrial; o bién, como bienes de capital, sin ser vendida; o formar parte de las existencias de inventarios en manos de productores.

Los servicios solo forman parte de los productos cuando se venden; se evaluan por el ingreso del productor en el lugar en que se realizan. La maquinaria y el equipo generalmente incluye ciertos gastos de instalación.

La mejor valuación que se pude realizar es la que se hace a valores básicos, que está constituida por el precio del productor menos impuestos indirectos más subsidios.

Las cuentas de producción incluyen todos los bienes producidos y consumidos en el mismo lugar de producción; los alquileres de terreno, que se imputan por el uso de sus propios dueños; los sueldos y salarios con que se remunera a la fuerza de trabajo, se incluyen no solo los pagos de dinero, sino una imputación por los pagos que se hacen en especie.

La matriz de insumo-producto establece una clasificación sectorial reuniendo unidades homogeneas de producción.

El producto interno bruto puede considerarse como integrado por marcancías y otros bienes y servicios, que a su vez pueden considerarse en términos de las industrias que los producen o en términos de los usuarios a quienes irán a parar. El valor agregado es la diferencia entre la producción bruta y los insumos comprados a otros productores, generalmente se calcula como diferencia.

SISTEMA ABIERTO Y SISTEMA CERRADO.

Leontief afirma que un sistema es "abierto con respecto a la demanda del consumidor proque no contiene ecuaciones que describan las características estructurales del sector doméstico, o se considera abierto respecto a la demanda de inversión, lo cual implica que las relaciones estructurales que determinan los requisitos de inversión de todos los sectores estructurales de la economía no están incluidos en el sistema".1/

"El motivo por el que se denomina "esquema cerrado de Leontief" reside en que en dicho planteamiento el sector de la demanda final recibe idéntico tratamiento que una industria cualquiera. La columna n-ésima, que contiene la demanda final, viene representada como cualquier otra columna, es decir, representativa de los insumos necesarios para la industria que representa. -- En la n-ésima fila, que contine el valor agregado de las distintas industrias, se considera como cualquier otra fila, es decir, representativa de los insumos entregados a otras industrias.

Este planteamiento adquiere un sentido especial en el caso de un sistema estacionario en el que la fuerza de trabajo permanece constante año tras año y no hay inversión neta (sólo se realiza inversiones para reemplazar a los medios de producción consumidos en el proceso productivo)" 2/

Cabe añadir que en el sistema cerrado la columna de la demanda final es solamente una y la matriz de coeficientes contiene dos partes-coeficientes técnicos y coeficientes de consumo final que no son homogeneas y que deben estudiarse con métodos distintos.

1/ Leontief, W. "El análisis de insumo-producto y la teoría del equilibrio general" en Modelo Insumo-Producto, 2 Bases Teóricas y aplicaciones Especiales. S.P.P. México 1981. pág. 16.

2/ Pasinetti, Luigi Lecciones de Teoría de la Producción, FCE. México, 1984 pág. 76.

PRUEBAS EMPIRICAS

Hasta ahora, hemos señalado algunos aspectos teóricos que son fundamentales en el manejo del modelo de insumo-producto. Sin embargo, en la aplicación práctica del modelo señalaremos -- algunos otros que por algún motivo fueron olvidados.

En primer término se realizó una agregación de las matrices de Insumo-producto de 1970 y 1975; ambas matrices siendo orignalmente de 72 ramas de actividad económica se redujeron a 6 sectores económicos, más adelante se señalarán algunos aspectos - que atañen a la reducción.

Una vez que se contó con las matrices señaladas, ya reducidas, se procedió a probar la bondad del Método RAS para la actualización de los coeficientes técnicos en el período de 5 años.

Por último, con la matriz de insumo producto de 1975 se realizaron algunos ejercicios que se analizan en su planteamiento y en sus resultados.

INTERPRETACION ECONOMICA DE LA MATRIZ INVERSA

La actividad económica de un sector supone la generación de -- efectos directos e indirectos hacía trás, origen, y hacia adelante,el destino.

Sea la matriz inversa$(I-A)^{-1}$, siendo I la matriz identidad o la matriz unidad y A, la matriz de coeficientes técnicos de producción, "cada elemento a_{ij} representa la cantidad de mercan-- cía i necesaria para obtener una unidad de j como mercancia final. Las a_{ij} $(i,j = 1,2, \ldots, n-1)$ representan las necesidades totales de mercancías (necesidades directas e indirectas) para obtener las mercancías que integran los usos finales (consumo e inversión).

En la matriz inversa $(I-A)^{-1}$ podemos también estudiar el significado económico de sus filas o columnas. Así, cada columna j-ésima de $(I-A)^{-1}$ representa una serie heterogenea de mercancías 1,2, ... , n-1, que es necesario emplear para poder obtener una unidad final de la mercancía j-ésima. De igual modo, cada fila i-ésima de $(I-A)^{-1}$ representa la cantidad total de la mercancía i-ésima necesaria para obtener una unidad final de cada una de las mercancías 1,2, ... , n-1."1/

La primera columna de la matriz de insumo-producto de 1975 nos dice que para producir una unidad de un bien agropecuario (vamos a pensar que se trata de un kilogramo de carne) con destino a la demanda final, el sistema económico en su conjunto deberá producir 1.1168 kilogramos de carne, de las cuales un kg. va al sector de consumo final y .1168 kg. se destinan a reponer lo consumido en el proceso productivo; .0119 unidades producidas por la minería, que se consumen en el proceso productivo; .2247 unidades de la producción manufacturera, que también son consumidas en el proceso productivo; .0056 unidades de energía eléctrica, que se consumen en el proceso productivo, y; .0942 unidades de servicios, que también se cosumen en el proceso productivo para la generación de una unidad adicional de bienes agropecuarios (carne) destinada a la demanda final.

En tanto, las filas, nos indican las cantidades totales que deben producir cada una de las industrias para poder disponer de una unidad adicional del bien que producen.

1/ **Pasinetti, Luigi. "Lecciones de Teoría de la Producción" F.C.E. México, 1984. pág. 88.**

MATRIZ DE INSUMO PRODUCTO DE MEXICO, 1975.

MATRIZ DE COEFICIENTES TECNICOS $\underline{A}$

$$
\begin{bmatrix}
.079277 & .000007 & .125520 & .000000 & .000165 & .000744 \\
.001638 & .108019 & .037931 & .012318 & .036481 & .000318 \\
.141147 & .071930 & .265965 & .327722 & .107925 & .062014 \\
.000000 & .000000 & .000000 & .000000 & .000000 & .000000 \\
.003152 & .006792 & .007201 & .002900 & .000602 & .004368 \\
.048433 & .071464 & .119459 & .138993 & .077947 & .127583
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ DE INSUMO PRODUCTO DE MEXICO, 1975.

MATRIZ DE LEONTIEF <u>I-A</u>

.920723	(-).000007	(-).125520	.000000	(-) .000165	(-) .000744
(-).001638	.891981	(-).037931	(-).012318	(-) .036481	(-) .000318
(-).141147	(-).071930	.734035	(-).327722	(-) .107925	(-) .062014
.000000	.000000	.000000	1.000000	.000000	.000000
(-).003152	(-).006792	(-).007201	(-).002900	.999398	(-) .004368
(-).048433	(-).071464	(-).119459	(-).138993	(-) .077947	.872417

MATRIZ DE INSUMO PRODUCTO DE MEXICO, 1975.
MATRIZ DE REQUERIMIENTOS TOTALES
(DIRECTOS E INDIRECTOS) $(\underline{I-A})^{-1}$

1.116814	.017063	.194507	.066092	.022974	.014900
.011870	1.126834	.061551	.034892	.048175	.005037
.224705	.124426	1.425485	.483411	.166504	.102398
.000000	.000000	.000000	1.000000	.000000	.000000
.005634	.009094	.012230	.007848	1.002716	.005897
.094245	.111102	.212123	.232741	.117609	1.162029

Fila 1

1.1168	.0171	.1945	.0661	.0230	.0149

Columna 1

$$\begin{vmatrix} 1.1168 \\ .0119 \\ .2247 \\ .0000 \\ .0056 \\ .0942 \end{vmatrix}$$

La suma de los elementos de la fila es igual a 1.4324, lo que significa que para poder disponer de una unidad adicional -- (1 kg. de carne) para la demanda final es necesario producir 1.4324 kgs. de dicho producto, destinándose 0.4324 kgs. para reponer lo consumido en el proceso de producción.

"La posibilidad de utilizar la matriz inversa $(I-A)^{-1}$ permite calcular inmediantamente la producción total necesaria para - atender a distintas configuraciones de demanda final"1/

APLICACIONES

Una de las aplicaciones más usuales del modelo de insumo-producto consiste en que, una vez que se cuenta con la Matriz inversa $(I-A)^{-1}$ se proceda a calcular la producción total necesaria para atender los incrementos en la demanda final que se establezcan.

1/ Pasinetti, Luigi, Op. cit., pág. 89.

El procedimiento consiste en multiplicar la matriz $(I-A)^{-1}$ por el vector modificado de demanda final. Por ejemplo, vamos a - investigar que niveles debe alcanzar la producción para poder satisfacer los incrementos de un 20% en la formación bruta de capital fijo y en la variación de stocks.

Para esto, tenemos el vector original de demanda final, al cual le afectaremos incrementando un 20% la inversión, o sea, las - columnas correspondientes a la formación Bruta de Capital Fijo y a la variación de existencias.

Una vez que hemos incrementado el vector de demanda final, al incrementar el valor de la inversión, multiplicaremos la Matriz Inversa $(I-A)^{-1}$ por el nuevo vector de demanda final para saber cuales son los niveles que debe alcanzar la producción para - poder satisfacer el incremento señalado en la inversión. (La - multiplicación se realizó con 6 dígitos decimales, pero por -- razones de espacio, aquí se señalan cuatro solamente).

$$\begin{bmatrix} 1.1168 & .0171 & .1945 & .0661 & .0230 & .0149 \\ .0119 & 1.1268 & .0616 & .0349 & .0482 & .0050 \\ .2247 & .1244 & 1.4255 & .4834 & .1665 & .1024 \\ .0000 & .0000 & .0000 & 1.0000 & .0000 & .0000 \\ .0056 & .0091 & .0122 & .0078 & 1.0027 & .0059 \\ .0942 & .1111 & .2121 & .2327 & .1176 & 1.1620 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 75\ 833.8 \\ 12\ 051.7 \\ 383\ 507.8 \\ 158\ 230.7 \\ 4\ 137.6 \\ 547\ 780.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 178\ 207.6 \\ 51\ 873.6 \\ 689\ 624.8 \\ 158\ 230.7 \\ 13\ 838.0 \\ 763\ 686.9 \end{bmatrix}$$

Esto significa que si se desea incrementar la inversión en 20% para toda la economía habrá necesidad de incrementar la producción bruta de cada uno de los sectores productivos como a con-- tinuación se señala:

DEMANDA FINAL

1 9 7 5

(MILLONES DE PESOS CORRIENTES)

	CONSUMO PRIVADO	CONSUMO GOBIERNO	FORMACION BRUTA DE CAPITAL FIJO	VARIACION EXISTENCIAS	EXPORTACIONES	T O T A L
1) AGROPECUARIO Y PESCA	59 152.0	136.9	2 689.0	8 432.9	3 198.6	73 609.4
2) MINERIA	182.8	48.8	152.0	566.6	10 957.8	11 908.0
3) MANUFACTURAS	292 502.5	6 310.1	41 246.8	12 694.8	19 962.8	372 717.0
4) CONSTRUCCION		-	131 858.9	-	-	131 858.9
5) ELECTRICIDAD	3 462.0	675.6	-	-	-	4 137.6
6) OTROS SERVICIOS	408 908.5	65 353.9	35 687.1	21 694.3	4 660.3	514 579.8

DEMANDA FINAL 1/

1 9 7 5

(MILLONES DE PESOS CORRIENTES)

		CONSUMO PRIVADO	CONSUMO GOBIERNO	FORMACION BRUTA DE CAPITAL FIJO	VARIACION EXISTENCIAS	EXPORTACIONES	
1)	AGROPECUARIO Y PESCA	59 152.0	136.9	3 226.8	10 119.5	3 198.6	75 833.8
2)	MINERIA	182.8	48.8	182.4	679.9	10 957.8	12 051.7
3)	MANUFACTURAS	292 502.5	6 310.1	49 498.6	15 233.8	19 962.8	383 507.8
4)	CONSTRUCCION	-	-	158 230.7	-	-	158 230.7
5)	ELECTRICIDAD	3 462.0	675.6	-	-	-	4 137.6
6)	OTROS SERVICIOS	408 908.5	65 353.9	42 824.5	26 033.2	4 660.3	547 780.4

1/ Contiene los incrementos de 20% en la formación bruta de capital fijo y en la variación de existencias.

VALOR BRUTO DE LA PRODUCCION 1975

(Millones de Pesos Corrientes)

Sector Industrial	Original (a)	Calculada (con Δ 20% en Inversión) (b)	Variación (b/a %)
Agropecuario	171 384.6	178 207.6	4.0
Minería	44 625.4	51 873.6	16.2
Manufacturas	666 451.1	689 624.8	3.5
Construcción	131 858.9	158 230.7	20.0
Electricidad	13 300.0	13 838.0	4.0
O. Servicios	716 489.4	763 686.9	6.6
Total CI	1 744 109.4	1 855 461.6	6.4

De aquí se desprende que si se desea aumentar la inversión en cada uno de los sectores productivos en 20% se debe incrementar la producción del Sector Agropecuario y Pesquero en 4.8%; del Minero, en 16.2%; del Manufacturero, en 3.5.% de la Construcción, en 20.0%; de la Electricidad en 4.0% y de otros Servicios en 6.6%; aumentando el valor bruto de la producción de todos los sectores productivos en 6.4% respecto al anterior.

Este tipo de análisis se puede realizar para cada una de las columnas que integran al sector de la demanda final de mercancías y servicios producidos en el interior: Consumo Privado, Consumo del Gobierno, Formación Bruta de Capital Fijo, Variación de las Existencias y Exportaciones; en ocasiones se llega a dar este tratamiento la columna agregada de demanda final. Y, también se puede realizar para una sola rama de actividad económica, en este caso sector, en que se prentende invertir, no es necesario que el incremento se aplique a todos los sectores. Se les puede dar incremento, mantener en la misma situación o, incluso, dar decrementos en la demanda final.

ANALISIS DE FILAS DE INSUMOS PRIMARIOS

Otro tipo de investigación es el que se realiza para saber cual será el impacto en el nivel general de precios como consecuencia de un incremento (o decremento) en la renumeración a uno o varios de los factores primarios. Para ello necesitamos una matriz de los coeficientes técnicos de producción.

MATRIZ TRANSPUESTA DE LOS COEFICIENTES DE INSUMOS PRIMARIOS E INPORTANTES

SECTOR INDUSTRIAL	IMPORTACIONES	REMUNERACION SALARIAL	SUPERAVIT B. EXPLOT.	IMPUESTOS IND. NETOS	TOTAL B
Agropecuario	.007776	.182854	.532066	.003657	.726353
Minería	.030769	.218990	.415246	.076783	.741788
Manufacturas	.058748	.146113	.202115	.036948	.443924
Construcción	.018968	.320490	.173911	.004698	.518067
Electricidad	.040556	.462526	.310602	(-).036804	.776880
O. Servicios	.006036	.267821	.483732	.047384	.804973

La columna B representa el valor agregado.

Partiendo de este cuadro se puede medir el impacto que tendría en los precios un aumento en las importaciones, en los salarios o en los impuestos, o bien, en las utilidades. Sobre el concepto de superavit bruto de explotación, éste no puede identificarse plenamente con las utilidades de los propietarios de los medios de producción; especialmente en el Sector Agropecuario y Pesquero en el cual el propietario o usufructuario de la tierra es en muchos casos quien la trabaja, o bien en las cooperativas pesqueras los socios tembién son quienes laboran y, en estos casos el salario que debían percibir como trabajadores no se registra como tal en las Cuentas Nacionales y pasa a formar parte del superavit bruto de explotación, que también incluye los gastos de capital fijo o depreciación. Mientras las remuneraciones salariales incluyen única y exclusivamente los pagos en dinero o en especie que se hacen al trabajo subordinado.

En este caso vamos a suponer que el Estado se encuentra ante - una fuerte crisis financiera, que la elevación de las tasas de interés no son suficientes para alentar el ahorro interno, que las empresas industriales no presentan utilidades en sus esta dos financieros, debido al incesante incremento en los costos; que la venta de bonos del Gobierno, para su financiamiento interno no es suficiente para solventar los gastos que debe realizar el Estado en servicios de educación, salud, creación de - infraestructura, etc. Dada esta situación, el Gobierno desea - saber cual sería el impacto que se registraría en los precios - de cada sector y en el nivel general de precios si se aumentan los impuestos en un 50 %.

Para la solución de este problema se debe alterar la columna de impuestos indirectos netos de subsidios en 50 % y volver a su-- mar todos los coeficientes de insumos primarios en la columna B^1.

MATRIZ TRANSPUESTA DE LOS COEFICIENTES DE INSUMOS PRIMARIOS E IMPORTADOS

SECTOR INDUSTRIAL	IMPORTACIONES	REMUNERACION SALARIAL	SUPERAVIT B. EXPLOT.	IMPUESTOS IND. NETOS	TOTAL B^1
Agropecuario	.007776	.182854	.532066	.005486	.728182
Minería	.030769	.218990	.415246	.115175	.780180
Manufacturas	.058748	.146113	.202115	.055422	.462398
Construcción	.018968	.320490	.173911	.007047	.520416
Electricidad	.040556	.462526	.310602	(-).018402	.795282
O. Servicios	.006036	.267821	.483732	.071076	.828665

B^1 representa el valor agregado modificado.

Una vez que se ha incrementado el vector que contiene los coeficientes del valor agregado de cada sector, se procede a multi- plicar la matriz transpuesta de requerimientos directos e indirectos por el vector modificado del valor agregado.

Esto es: $(I-A)^{-1} \cdot B'$. Al igual que en el caso anterior se usarán los 6 dígitos decimales en la multiplicación, aún cuando -- aquí se señalen cuatro por razones de espacio.

Se realiza la multiplicación matricial $((I-A)^{-1})' \cdot B'$ y el resultado nos dará las afectaciones que provoca en el precio de los productos terminados en aumento del 50 % en los impuestos indirectos.

$$\begin{bmatrix} 1.1168 & .0819 & .2247 & .0 & .0056 & .0942 \\ .0171 & 1.1268 & .1244 & .0 & .0091 & .1111 \\ .1945 & .0616 & 1.4455 & .0 & .0122 & .2121 \\ .0661 & .0349 & .4834 & 1.0 & .0078 & .2327 \\ .0230 & .0482 & .1665 & .0 & 1.0027 & .1178 \\ .0149 & .0050 & .1024 & .0 & .0059 & 1.1620 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .7282 \\ .7802 \\ .4624 \\ .5204 \\ .7953 \\ .8287 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0635 \\ 1.0484 \\ 1.0343 \\ 1.0184 \\ 1.0262 \\ 1.0298 \end{bmatrix}$$

Esto significa que los precios de los productos generados en - el Sector Agropecuario se habrán de incrementar en 6.4 % para - cubrir el incremento en los impuestos indirectos del 50 %. -- Asimismo, los productos mineros se deberán incrementar en 4.8%, los bienes manufactureros, en 3.4%; la electricidad, 2.6 % y - los otros servicios 3.0%. Ahora veremos como, dados esos in-- crementos en los precios de cada sector, se modifica el nivel - general de precios.

MODIFICACONES EN EL NIVEL GENERAL DE PRECIOS AL INCREMENTARSE LOS IMPUESTOS NETOS EN 50 %

	VALOR BRUTO DE LA PRODUCCION	FACTOR DE INCREMENTO DE PRECIOS	VALOR BRUTO DE LA PRODUCCION MODIFICADO
Agropecuario	181 384.3	1.0635	192 902.2
Minería	44 625.4	1.0484	46 735.3
Manufacturas	666 451.1	1.0343	689 310.4
Construcción	131 858.9	1.0184	134 285.1
Electricidad	13.300.0	1.0262	13 684.5
O. Servicios	716 498.9	1.0298	737 850.6
Total	1 744 109.4	1.0405 1/	1 814 818.1

1/ Se obtuvo por división.

De esta forma se deduce que un incremento del 50% en los impuestos indirectos traerá como consecuencia un aumento del 4.1% en el nivel general de precios.

Debemos aclarar que esto sucede en la teoría, porque en nuestro país un incremento del 10% en los impuestos o en los salarios mínimos o en el precio de la gasolina o del azúcar u otro bien estrátegico trae como consecuencia un aumento casi de su misma magnitud en el nivel general de precios. Esta es una de las pruebas más difíciles a que se someten los planeadores o programadores en la economía.

Pues la realidad se presenta tan hostil a todo estudio econométrico que resulta más fácil y atinado usar el sentido común y la experiencia para preveer las repercusiones que un aumento en el pago a los factores de la producción provoca en el nivel general de precios. Por desgracia esta técnica parece no tener utilidad en nuestra realidad concreta, en buena medida porque la entidad gubernamental encargada del control de precios admite con facilidad casi todo análisis de costo que justifique alzas en precios que se traducen simultáneamente en mayores utilidades para las empresas, pues en la fijación de precios se presentan conflictos entre intereses que corresponden a posiciones de clase.

SOBRE LA AGREGACION

La matriz de Insumo-Producto del año 1975 de 72 ramas de actividad económica se agregó a 6 sectores industriales: 1) el primer sector comprende las actividades agropecuarias, la silvicultura y la pesca; 2) el segundo sector comprende todas las actividades de extracción de minas y canteras, incluyendo la extracción de petróleo y gas natural; 3) el tercer sector comprende todas las actividades que realizan las industrias manufactureras, o de transformación; 4) la siguiente división abarca únicamente a la industria de la construcción; 5) esta división comprende únicamente a la generación, transmisión y distribución de energía eléctrica; y 6) por último se agrupan los -- demás servicios, que incluyen transporte, comercio, restaurantes y hoteles y servicios financieros, entre otros.

La agregación se realizó manualmente y se revisó por suma de - columnas y suma de filas, aprovechando la ventaja que ofrece - un cuadro de doble entrada.

La agregación se puede realizar en forma mecánica, mediante -- computadora electrónica en unos cuantos minutos.

C A P I T U L O VI.

ACTUALIZACION DE MATRICES DE INSUMO-PRODUCTO

ACTUALIZACION DE MATRICES DE INSUMO - PRODUCTO

La matriz de Insumo-Producto es un instrumento fundamental en la elaboración de programas y planes de desarrollo económico de corto y largo plazo. Siendo la actualización y proyección de matrices de gran utilidad para utilizarlas en forma más efeciente, ya que "una gran desventaja inherente al análisis de Insumo -Producto es que las matrices ya son extemporáneas cuando llega el momento de su estructuración. Esto es más o menos inevitable puesto que la mayoría de los datos básicos necesarios se pueden obtener muy lentamente, en especial las cifras del Censo de Producción que pueden tener varios años de atraso cuando finalmente son publicados" 1/

La actualización consiste en determinar un modelo de comportamiento en el tiempo para los coeficientes técnicos totales; cuando hay evidencia empírica de cambios estructurales ocurridos en algunas ramas de actividad económica, se debe integrar la información correspondiente a la matriz modificada del año base, con la finalidad de tener presentes, en el procesamiento de actualización, dichos cambios.

EL METODO RAS

El método es de aproximaciones sucesivas y consiste en realizar ajustes de filas y columnas en forma alternativa a los totales dados, aprovechando que existe una relación biproporcional que liga a las matrices de Insumo-Producto de dos años dados. Recordemos la estructura de la matriz.

1/ O' connor R. y E. W. Henry. Actualización de Coeficientes. En "Modelo de Insumo - Producto". pág. 120, S.P.P.

MATRIZ DE INSUMO - PRODUCTO

	Sector 1	Sector 2	Demanda Intermedia	Demanda Final	Valor Bruto de Produc.
Sector 1	X_{11}	X_{12}	U_1	DF_1	X_1
Sector 2	X_{21}	X_{22}	U_2	DF_2	X_2
Consumo I.	V_1	V_2	Σ	DF	X
V. Agregado	VA_1	VA_2	VA		
V. Bruto de la produc.	X_1	X_2	X		

Aquí se registran todos los flujos económicos intersectoriales, donde X_{ij}; es el valor de la producción del sector i demandado por el sector j. Los dos primeros renglones registran el dèstino de la producción tanto a otras ramas productivas como al consumo final. En tanto, las columnas correspondientes los costos necesarios para lograr esa producción, tanto en consumos intermedios como el pago a los factores productivos.

Sea A_{ij} y A'_{ij} los coeficientes técnicos de Insumo —Producto para los años 0 y 1 respectivamente, se debe cumplir que;

$$A'_{ij} = r_i \, a_{ij} \, S_j \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Se cumplen las siguientes relaciones contables:

$$V + VA = VBP$$

$$U + DF = VBP$$

El consumo intermedio (V) más el valor agregado (VA), es igual al valor bruto de producción (VBP); y la demanda intermedia (U) más la demanda final (DF) es igual al VBP. Existe, pues, una - biproporcionalidad en las matrices de Insumo-Producto del valor bruto de la producción.

La suma de los elementos del i-ésimo renglón es igual a U_i, es- to es,

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = U_i$$

Y la suma de los componentes de la j-ésima columna es igual a - V_j, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = V_j$$

Mediante pre y postmultiplicación de X por matrices diagonales se converge a X', siendo, X' la submatriz de relaciones inter-- sectoriales en el período proyectado.

EL PROCESO ITERATIVO RAS

Conocidos X, U y V se puede definir el proceso iterativo RAS - de la siguiente forma:

Primera etapa:

$$X_1 = r_1 \quad X$$

donde,

$$r_j = \frac{U_i}{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}}$$

Siendo X_1 la matriz que representa los valores abasolutos del - consumo o demanda intermedia en el año base, ajustamos los renglones para que su suma coincida con los componentes del vector U_1.

segunda etapa

Se procede al ajuste de columnas para que su suma coincida con - los componentes del vectos V_1 partiendo de los resultados obtenidos en la etapa anterior.

$$X_2 = X_1 \quad S_1$$

donde $$S_i = \frac{V_j}{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}}$$

Siguientes etapas

El proceso continúa en forma alternada multiplicándose r_j o S_i - por la matriz X, resultado de la etapa que lo antecede, hasta que las sumas de las filas y columnas de X coincidan con los valores previamente determinados.

Actualización de la matriz de Insumo-Producto de 1975 a 1985.

1) Se contó con información del producto interno bruto generado por cada uno de los seis sectores, a precios corrientes, para el año de 1985. Lo que equivale al vector fila del valor agregado.

2) Se obtuvieron los coeficientes de este vector fila, respecto del valor bruto de la producción de 1975.

3) Se multiplicó la matriz inversa $(I - A)^{-1}$ de 1975 por el vector del inciso anterior, para obtener por multiplicación el valor bruto de la producción de cada sector para 1985.

4) Se multiplicó la matriz (I - A) de 1975 por el vector del valor bruto de la producción de 1985. Esto es, $(I - A)X = B$, dando por resultado el vector columna de demanda final (B) a precios de 1985. Obteniéndose por diferencia el valor de la demanda intermedia total (DI).

5) Por último, se actualizó la matriz de demanda intermedia mediante la aplicación del método RAS.

Con ésto, tenemos ya un vector de demanda intermedia y uno de consumo intermedio para 1975 y 1985. Empezamos con la demanda intermedia. Obtenemos los coeficientes que va a premultiplicar por la matriz del año de 1975:

Coeficientes de r_i

	1985		1975		
Agricultura	4 218 517.8	/	97 775.2	=	43.145170
Minería	1 896 255.0	/	32 717.4	=	57.958609
Manufacturas	13 078 573.7	/	293 734.1	=	34.525214
Construcción	-		-		-
Electricidad	409 927.1	/	9 162.7	=	44.740145
Otros servicios	9 575 424.2	/	201 879.6	=	47.431361

Estos coeficientes pasan a formar la siguente matriz:

$$
\begin{matrix}
43.145170 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 57.958609 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 34.525214 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 44.740145 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 47.431361
\end{matrix}
$$

COMO RESULTADO DE ESA MULTIPLICACION TENEMOS:

	AGRICULTURA	MINERIA	MANUFACTURAS	CONSTRUCCION	ELECTRICIDA.	OTROS SERVS.
Agricultura	586 207.7	12.9	3 609 214.6	-	94.9	22 987.7
Minería	16 274.8	297 383.7	1 465 135.7	94 142.2	20.121.5	13 197.1
Manufacturas	1 077 082.7	142 921.5	7 892.223.4	1 924 072.5	63 911.5	1 978 362.1
Construcción	-	-	-	-	-	-
Electrididad	24 168.6	13 560.7	214 712.5	17 108.6	357.9	140 018.8
Otros Servicios	393 708.8	151 263.4	3 776 181.3	869 293.5	49 172.1	4 335 805.1
SUMA	2 097 442.6	587 142.2	16 957 467.5	2 904 616.8	141 657.9	6 490 370.8

Se obtiene nuevamente coeficientes que serán:

Coeficientes de S_j

3 032 411.6	/	2 097 442.6	=	1.479627
835 053.3	/	587 142.2	=	1.422234
16 625 489.2	/	16 957 467.5	=	0.980423
2 749 651.6	/	2 904 616.8	=	0.946649
185 199.7	/	141 657.9	=	1.307373
5 750 892.2	/	6 490 370.8	=	0.886065

Se vuelve a formar otra matriz diagonal que va a ser posmultiplicada por la matriz producto del ejercicio anterior. Este procedimiento de sumar, obtener coeficientes, premultiplicar y/o posmultiplicar se sigue hasta que coincidan tanto las sumas por columna como las sumas por fila. Este método es también llamado de aproximaciones sucesivas, porque a cada iteración se está más cerca de la solución final. Por fin, después de varias iteraciones llegamos a la solución del problema.

El método RAS se utilizó para realizar las siguientes actualizaciones: de 1970 a 1975, de 1975 a 1978 de 1978 a 1980, de 1975 a 1985 y de 1980 a 1985. Habiendo grandes diferencias entre las actualizaciones que se lograron a 1985 debido a que la estructura productiva de 1975 se ve modificada en 1980 y ambas sirven de base para tal actualización. Mientras más corto es el período de la proyección mayor confiabilidad se tiene de que los coeficientes técnicos se aproximen a la realidad.

CONSUMO Y DEMANDA INTERMEDIA DE 1975
millones de pesos

	ASROPECUARIO Y PESCA	MINERIA Y EXT. DE PETROLEO	MANUFACTURAS	CONSTRICION	ELECTRICIDAD	OTROS SERV.	TOTAL DEMANDA INTERMEDIA
AGROPECUARIO Y PESCA	13587	0	83653	0	2	533	97775
MINERIA Y EXT. PETR.	281	4820	25260	1624	485	247	32717
MANUFACTURAS	24190	3210	177272	43213	1435	44413	293734
CONSTRUCCION	0	0	0	0	0	0	0
ELECTRICIDAD	540	303	4799	382	8	3130	9162
OTROS SERVICIOS	8301	3189	79614	18327	1037	91412	201880
TOTAL CONS. INTERMEDIO	46899	11523	370598	63547	2968	139735	635269

CONSUMO Y DEMANDA INTERMEDIA DE 1978 ACTUALIZADA CON BASE EN 1975
millones de pesos

	AGROPECUARIO Y PESCA	MINERIA EXT. DE PETROLEO	MANUFACTURAS	CONSTRICION	ELECTRICIDAD	OTROS SERV.	TOTAL DEMANDA INTERMEDIA
AGROPECUARIO Y PESCA	27692.6	0.8	168124.6	0.0	3.2	1114.6	196935.8
MINERIA Y EXT. PETR.	504.3	11424.6	44730.8	3011.7	617.7	454.7	60743.7
MANUFACTURAS	45879.3	8034.5	331528.7	84618.1	1929.8	86460.4	558450.9
CONSTRUCCION	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ELECTRICIDAD	1326.3	982.1	11618.4	969.3	13.9	7886.8	22796.9
OTROS SERVICIOS	17470.1	8858.2	165226.4	39825.4	1546.7	197478.7	430405.5
TOTAL CONS. INTERMEDIO	92872.6	29300.2	721228.9	128424.4	4111.3	293395.4	1269332.8

CONSUMO Y DEMANDA INTERMEDIA DE 1978
millones de pesos

	AGROPECUARIO Y PESCA	MINERIA Y EXT. DE PETROLEO	MANUFACTURAS	CONSTRICION	ELECTRICIDAD	OTROS SERV.	TOTAL DEMANDA INTERMEDIA
AGROPECUARIO Y PESCA	28907	1	166488	0	13	1528	196936
MINERIA Y EXT. PETR.	623	10630	43433	3587	776	1695	60744
MANUFACTURAS	45236	9369	331963	83978	2517	85388	558451
CONSTRUCCION	0	0	0	0	0	0	0
ELECTRICIDAD	1261	784	11820	874	26	8032	22797
OTROS SERVICIOS	16846	8517	167525	39985	780	196753	430406
TOTAL CONS. INTERMEDIO	92873	29300	721229	128424	4111	293395	1269333

CONSUMO Y DEMANDA INTERMEDIA DE 1980 ACTUALIZADA CON BASE EN 1978
millones de pesos

	AGROPECUARIO Y PESCA	MINERIA Y EXT. DE PETROLEO	MANUFACTURAS	CONSTRICION	ELECTRICIDAD	OTROS SERV.	TOTAL DEMANDA INTERMEDIA
AGROPECUARIO Y PESCA	39638	1	245514	0	86	2818	288057
MINERIA Y EXT. PETR.	1256	18151	94218	10993	7820	4598	137036
MANUFACTURAS	69327	12155	547124	195541	19271	175988	1019405
CONSTRUCCION	0	0	0	0	0	0	0
ELECTRICIDAD	2815	1480	28370	2964	294	24107	60031
OTROS SERVICIOS	25247	10805	270004	91047	5837	396555	799495
TOTAL CONS. INTERMEDIO	138283	42592	1185230	300545	33308	604066	2304024

CONSUMO Y DEMANDA INTERMEDIA DE 1980.

millones de pesos

	AGROPECUARIO Y PESCA	MINERIA Y EXT. DE PETROLEO	MANUFACTURAS	CONSTRICION	ELECTRICIDAD	OTROS SERV.	TOTAL DEMANDA INTERMEDIA
AGROPECUARIO Y PESCA	45070	1	241242	0	8	1736	288057
MINERIA Y EXT. PETR.	423	21734	80378	15012	19325	164	137036
MANUFACTURAS	66990	5582	553837	201445	2618	188933	1019405
CONSTRUCCION	0	0	0	0	0	0	0
ELECTRICIDAD	2441	2283	31522	2229	3617	17939	60031
OTROS SERVICIOS	23359	12992	278251	81859	7740	395294	799495
TOTAL CONS. INTERMEDIO	138283	42592	1185230	300545	33308	604066	2304024

MATRIZ DE INSUMO-PRODUCTO DE MEXICO 1985
ACTUALIZADA CON BASE EN LA MIP DE 1980
millones de pesos

	AGROPECUARIO Y PESCA	MINERIA Y EXT. DE PETROLEO	MANUFACTURAS	CONSTRICION	ELECTRICIDAD	OTROS SERV.	TOTAL DEMANDA INTERMEDIA	DEMANDA FINAL	VALOR BRUTO PRODUCCION
AGROPECUARIO Y PESCA	955559	13	3247383	0	43	15521	4218518	2827130	7045649
MINERIA Y EXT. PETR.	9851	440478	1188488	141943	113884	1611	1896255	3274439	5170694
MANUFACTURAS	1496121	108489	7853245	1826588	14795	1779336	13078574	14662461	27741035
CONSTRUCCION	0	0	0	0	0	0	0	5037212	5037212
ELECTRICIDAD	29582	24077	242537	10967	11092	91674	409927	189085	599012
OTROS SERVICIOS	541299	261997	4093836	770153	45386	3862752	9575424	19598135	29173558
TOTAL CONS. INTERMEDIO	3032412	835054	16625489	2749652	185200	5750892			29178698
VALOR AGREGADO BR.	4013237	4335640	11115546	2287560	413812	23422667			45588462
VALOR BRUTO DE PRODUCCION	7045648	5170694	27741035	5037212	599012	29173559	29178698	45588462	74767159

MATRIZ DE INSUMO-PRODUCTO DE MEXICO 1985
ACTUALIZADA CON BASE EN LA MIP DE 1975
millones de pesos

	AGROPECUARIO Y PESCA	MINERIA Y EXT. DE PETROLEO	MANUFACTURAS	CONSTRICION	ELECTRICIDAD	OTROS SERV.	TOTAL DEMANDA INTERMEDIA	DEMANDA FINAL	VALOR BRUTO PRODUCCION
AGROPECUARIO Y PESCA	812335	18	3386685	0	117	19362	4218518	2827130	7045648
MINERIA Y EXT. PETR.	22386	380258	1364740	83321	34520	11035	1896260	3274439	5170699
MANUFACTURAS	1554681	204125	7714542	1787020	82358	1735848	13078574	14662461	27741035
CONSTRUCCION	0	0	0	0	0	0	0	5037212	5037212
ELECTRICIDAD	35456	19685	213307	16149	469	124862	409927	189085	599012
OTROS SERVICIOS	607554	230973	3946215	863161	67735	3859786	9575424	19598135	29173559
TOTAL CONS. INTERMEDIO	3032412	835059	16625489	2749652	185200	5750892			29178703
VALOR AGREGADO BR.	4013237	4335640	11115546	2287560	413812	23422667			45588462
VALOR BRUTO DE PRODUCCION	7045648	5170699	27741035	5037212	599012	29173559	29178703	45588462	74767165

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

El uso de las matemáticas en el análisis económico es de gran - importancia en el planteamiento de problemas que no son de fa-- cíl solución utilizando unicamente la lógica.

La optimización mediante el uso de la programación lineal es - cada vez más frecuente en economía de la producción

El análisis de sensibilidad o postoptimización, que nos permite medir las distintas magnitudes que puede adquirir el valor de - la función objetivo debido a la manipulación que se hace de al- gunos parámetros o variables independientes del problema, no -- es exclusivo de este tipo de modelos pero permite evadir el desa rrollo de un segundo ejercicio una vez que se ha resuelto un -- primero.

El modelo de insumo-producto contiene información confiable, - coherente y consistente, generalmente basada en censos y regis- tros administrativos, registra las transacciones que realizan - los agentes económicos del país en un período dado, permite el análisis de su estructura económica y sirve de base en la ela- boración de programas y planes de desarrollo.

La programación económica debe realizarse en forma tal que las espectativas sean óptimas, es decir, al hacer uso del análisis de insumo-producto es deseable que este no sirva solo para ex- presar como una fotografía, un momento dado en la vida econó- mica del país o bien para observar una situación futura dada - una tendencia histórica; por el contrario, debe servir de base para la elaboración de programas que mediante la aplicación de la política económica coadyuven al logro de metas como abatir - el desempleo, alcanzar una más progresiva distribución del in-- greso, y mejorar la calidad de vida de la población, en los -- aspectos de nutrición, educación y salud; que son variables no meramente económicas que reflejan un determinado nivel de de-- sarrollo.

Queda, pués, planteada la inquietud para que se continúe la investigación de problemas que en estas páginas solo son someramente esbozados. Existe un sinnúmero de problemas que se pueden plántear y resolver mediante el uso de las matemáticas, en general, y de la programación lineal, en particular.

El buen uso o el abuso que se haga de las matemáticas en su aplicación a la economía depende del criterio y la formación del analista. En la medida en que sepamos ponderar la información que puede expresar mediante números y aquella que no, estaremos en posibilidades de realizar mejores investigaciones, porque, definitivamente, en las ciencias sociales no todo es susceptible de ser medido y, por lo mismo, en la mejor estimación siempre habrá un sesgo atribuible a las variables no expresadas en términos matemáticos.

Este es un trabajo que queda abierto a posteriores aplicaciones e investigaciones que se puedan hacer de las técnicas aquí estudiadas. Pues el campo de la programación lineal es bastante amplio y ofrece la posibilidad de rendir grandes frutos tanto al análisis económico como a la previsión económica óptima.

A N E X O S

TABLA SIMPLEX INICIAL

	MAIZ	FRIJOL	SORGO	ALFALFA	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	SBF
Z	-4800	-6300	-5400	-8700										
MANO DE OBRA	30	33	10	28	1									800
MAQUINARIA	17	15	32	15		1								400
SEMILLA	22	45	80	30			1							1000
NIT. DE AMONIO	250		300	62				1						1000
SULF. DE AMONIO	350	500	400						1					8000
SUP. FOST. TRIPLE	250	250	250	40						1				4500
INSECTICIDAS		20	24								1			200
RIEGO	5	5	4	9								1		200
ESPACIO	1	1	1	1									1	25

SEGUNDA TABLA SIMPLEX

	MAIZ	FRIJOL	SORGO	ALFALFA	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	SBF
Z	30281.0	-6300.0	36697.0	0.0	0.00	0.00	0.00	140.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	140323.0
MANO DE OBRA	-82.9	33.0	-125.5	0.0	1.00	0.00	0.00	-0.45	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	348.4
MAQUINARIA	-43.5	15.0	-40.6	0.0	0.00	1.00	0.00	-0.24	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	158.1
SEMILLA	-99.0	45.0	-65.2	0.0	0.00	0.00	1.00	-0.48	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	516.1
ALFALFA	4.0	0.0	4.8	1.0	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	16.1
SULF. DE AMONIO	350.0	500.0	400.0						1.00					8000.0
SUP. FOST. TRIPLE	88.7	250.0	56.5	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.65	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	3854.8
INSECTICIDAS		20.0	24.0								1.00			200.0
RIEGO	-31.3	5.0	-39.5	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.15	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	54.8
ESPACIO	-3.0	1.0	-3.8	0.0	0.00	0.00	0.00	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	8.9

TABLA SIMPLEX FINAL

	MAIZ	FRIJOL	SORGO	ALFALFA	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	SBF
Z	11177.8	0.0	12513.1	0.0	0.000	0.000	0.000	38.400	0.000	0.000	0.000	0.000	6300.000	196210.1
MANO DE OBRA	17.2	0.0	1.2	0.0	1.000	0.000	0.000	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	-33.000	55.6
MAQUINARIA	2.0	0.0	17.0	0.0	0.000	1.000	0.000	.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-15.000	25.0
SEMILLA	37.5	0.0	107.6	0.0	0.000	0.000	1.000	0.242	0.000	0.000	0.000	0.000	-45.000	116.9
ALFALFA	4.0	0.0	4.8	1.0	0.000	0.000	0.000	0.016	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	16.1
SULF. DE AMONIO	1866.1	0.0	2319.4	0.0	0.000	0.000	0.000	8.065	1.000	0.000	0.000	0.000	-500.000	3564.5
SUP. FOST. TRIPLE	846.8	0.0	1016.1	0.0	0.000	0.000	0.000	3.387	0.000	1.000	0.000	0.000	-250.000	1637.1
INSECTICIDAS	60.6	0.0	100.8	0.0	0.000	0.000	0.000	0.323	0.000	0.000	1.000	0.000	-20.000	22.6
RIEGO	-16.1	0.0	-20.4	0.0	0.000	0.000	0.000	-0.065	0.000	0.000	0.000	1.000	-5.000	10.5
FRIJOL	-3.0	1.0	-3.8	0.0	0.000	0.000	0.000	-0.016	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	8.9

MATRIZ DE INSUMO PRODUCTO DE MEXICO
DE 1975 I-A.

	AGROPECUARIO	MINERIA	MANUFACTURAS	CONSTRUCCION	ELECTRICIDAD	OTROS SERVICIOS
AGROPECUARIO	0.9207230	-0.0000070	-0.1255200	0.0000000	-0.0001650	-0.0007440
MINERIA	0.0016380	0.8919010	-0.0379310	-0.0123180	-0.0364810	0.0003180
MANUFACTURAS	0.1411470	-0.0719300	0.7340350	0.3277220	-0.1079250	-0.0620140
CONSTRUCCION	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000	0.0000000	0.0000000
ELECTRICIDAD	-0.0031520	-0.0067920	-0.0072010	-0.0029000	0.9993980	-0.0043680
OTROS SERVICIO	-0.0484330	0.0714640	-0.1194590	-0.1332930	-0.0779420	0.8724170

MATRIZ DE REQUERIMIENTOS DIRECTOS E INDIRECTOS

$(I-A)^{-1}$

							DEMANDA FINAL
AGROPECUARIO	1.1168137	0.0170626	0.1945071	0.0660920	0.0229741	0.0148998	75033.800
MINERIA	0.0118704	1.1268341	0.0615510	0.0348918	0.0481745	0.0050373	12051.700
MANUFACTURAS	0.2247050	0.1244258	1.4254851	0.4834110	0.1665036	0.1023984	383507.800
CONSTRUCCION	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000	0.0000000	0.0000000	158230.700
ELECTRICIDAD	0.0056340	0.0090940	0.0122300	0.0078477	1.0027160	0.0058978	4137.600
OTROS SERVICIO	0.0742452	0.1111018	0.2121228	0.232740	0.1176095	1.1620289	547700.400

VALOR DE LA PRODUCCION
MILLONES DE PESOS

AGROPECUARIO	178207.5
MINERIA	46565.3
MANUFACTURAS	698495.6
CONSTRUCCION	158230.7
ELECTRICIDAD	13848.4
OTROS SERVICIO	765686.7

MATRIZ DE INSUMO-PRODUCTO DE MEXICO 1975

MATRIZ DE TRANSACCIONES

EN MILLONES DE PESOS A PRECIOS PRODUCTOR

	Agropecuario y Pesca	Minería	Manufacturas	Construcción	Electricidad	Otros Servicios	Total Demanda Intermedia	Consumo Privado	Consumo Gobierno	Formación Capital	Variación Existencias	Expo. - taciones	Total Demanda Final	Valor Bruto de la Producción
Agropecuario y Pesca	13 586.9	0.3	83 653.0		2.2	537.8	97 775.2	59 152.2	136.9	2 689.0	8 437.9	3 198.6	73 609.4	171 384.6
Minería	280.8	4 820.4	25 779.9	1 674.3	485.2	277.7	32 717.4	182.8	48.8	152.0	566.6	10 957.8	11 908.0	44 625.4
Manufacturas	24 190.4	3 209.9	177 252.9	43 213.1	1 435.4	44 432.4	293 734.1	292 502.5	6 310.1	41 246.8	12 694.8	19 962.8	372 717.0	666 451.1
Construcción										131 858.9			131 858.9	131 858.9
Electricidad	540.2	303.1	4 799.1	382.4	8.0	3 129.6	9 162.4	3 462.0	675.6				4 137.6	13 300.0
Otros Servicios	8 300.6	3 189.1	79 613.6	18 327.4	1 036.7	91 412.2	201 879.6	408 908.5	65 353.9	35 687.1		4.660.3	514 579.8	716 489.4
Total Consumo Intermedio	46 898.9	11 572.8	370 597.6	63 547.2	2 967.5	139 734.7	635 268.7	764 207.8	72 525.3	211 633.8	21 694.3	38 779.5	1108 840.7	1 744 109.4
Valor Agregado Bruto	124 485.7	33 102.6	295 853.5	68 311.7	10 332.5	576 754.7	1 108 840.7	(-)8 284.3	40 987.8	23 973.3	3 313.8	16 259.5	76 230.1	1 185 070.8
Remuneración Asalariados	31 338.3	9 772.5	97 377.5	42 759.4	6 151.6	191 890.8	378 790.1		40 108.9				40 108.9	418 899.0
Importaciones	1 332.7	1 373.1	39 152.5	2 501.1	539.4	4 324.4	49 223.2	(-)8 284.3	535.5	23 973.3	3 313.8	16 259.5	35 797.8	85 021.0
Superavit Bruto de Explotación	91 188.0	18 530.5	134 699.9	22 931.7	4 131.0	346 588.8	618 089.9		155.5				155.5	618 225.4
Impuestos Ind. Subsidios	626.7	3 426.5	24 623.6	819.5	(-)489.5	33 950.7	62 757.5		167.9				167.9	62 925.4
Valor Bruto de Producción	171 384.6	44 625.4	668 451.1	131 858.9	13 300.0	718 489.4	1 744 109.4	755 923.5	113 483.1	235 607.1	25 008.1	55 039.0	1189 070.8	2 929 180.2

FUENTE: Sistema de Cuentas Nacionales de México
Matriz de Insumo-Producto
Secretaría de Programación y Presupuesto, México, 1981/

MATRIZ DE INSUMO-PRODUCTO DE MEXICO, 1975

COEFICIENTES TECNICOS

	Agropecuario y Pesca	Minería	Manufactura	Construcción	Electricidad	Otros Servicios	Total Demanda Intermed.	Consumo Privado	Consumo Gobierno	Formación de Capital	Variación Existencias	Exportaciones	Total Demanda Final	Valor Bruto de la Producción
Agropecuario Y Pesca	0.079277	0.000007	0.125520		0.000165	0.000744	0.056060	0.078251	0.001206	0.011413	0.337207	0.058115	0.067114	0.058509
Minería	0.001638	0.108019	0.037931	0.012318	0.036481	0.000318	0.018759	0.000242	0.111430	0.000645	0.022657	0.199092	0.010048	0.015235
Manufacturas	0.141147	0.071030	0.265965	0.327722	0.107925	0.067014	0.168415	0.386947	0.055599	0.175066	0.507627	0.362703	0.314510	0.227521
Construcción										0.559656			0.111267	0.045016
Electricidad	0.003152	0.006792	0.007201	0.007900	0.000602	0.004368	0.005254	0.004580	0.005953				0.003491	0.004541
Otros Servicos	0.048433	0.071464	0.119459	0.138993	0.077947	0.127583	0.115749	0.540939	0.575840	0.151469		0.0846773	0.434219	0.244604
Total Consumo Intermedio	0.273647	0.258212	0.556076	0.481933	0.223120	0.195027	0.364237	1.010959	0.639028	0.898249	0.867491	0.704582	0.935675	0.595426
Valor Agregado Bruto	0.726353	0.741788	0.443924	0.518067	0.776880	0.804973	0.635763	(-)0.010959	0.360972	0.101751	0.132509	0.295418	0.064325	0.404574
Remuneración Asalariados	0.182854	0.218990	0.146113	0.320490	0.462526	0.267821	0.217183		0.353404				0.033845	0.143009
Importaciones	0.007776	0.030769	0.058748	0.018968	0.040556	0.006036	0.028223	(-)0.010959	0.004718	0.101751	0.132509	0.295418	0.030207	0.029026
Superavit Bruto de Explotación	0.532066	0.415246	0.202115	0.173911	0.310602	0.483732	0.354374		0.001370				0.000131	0.211057
Impustos Indirectos Netos	0.003657	0.076783	0.036948	0.004698	(-)0.036804	0.047384	0.035983		0.001479				0.000142	0.021482
Valor Bruto de Producción	1.000000	1.00000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

B I B L I O G R A F I A

B I B L I O G R A F I A

1. Ansoff, H. I. — La Estrategía de la Empresa. Ediciones Universidad Navarra, S.A, Barcelona, 1976

2. Allen, R. G. D. — Economía Matemática. Ed. Aguilar. Madrid, 1967.

3. Baumol, William J. — Teoría Económica y Análisis de Operaciones, Ed. Herrero Hermanos, México, 1977.

4.- Bertalanffy, Ludwing Von — La Teoría General de los Sistemas. Ed. Fondo de Cultura Económica. México,1978.

5. Briham, Eugene; Pappas, James — Economía y Administración. Ed. Interamericana. México, 1976.

6. Chenery, Hollis B.; Clark, Paul G. — Economía Interindustrial, Insumo-Producto y Programación Lineal. Fondo de Cultura Económica. México, 1980.

7. Dagún, Camilo — Metodología y Crítica Económica. Fondo de Cultura Económica, México, 1978.

8. Dinkel, John; Kokenberger, Gary; Plane, Donald — Administración Científica. Ed. Representación y Servicios de Ingeniería. México, 1980.

9. Dorfman, Robert — Programación Lineal; su aplicación a la teoría de la Empresa. Ed. Aguilar, Madrid 1967.

10. Espinosa Berríel, Héctor — Programación Lineal. Ed. Pax-México, México, 1980.

11. Hopeman, Richard — Producción; Conceptos, Análisis y Control. Compañía Ed. Continental, México 1981.

12. Huang, David S. — Introducción al uso de las Matemáticas, en el Análisis Económico. Siglo XXI. Ed. México, 1975.

13. Gass, Saúl — Programación Lineal; Métodos y Aplicaciones. Compañía Ed. Continental, S.A. México, 1981.

14. Greene, James H. — Planeamiento y Control de Producción. Ed. Ateneo, Buenos Aires, 1974

15. Hillier Frederick, Lieberman, Gerald — Introducción a la Investigación de Operaciones. Mc. Graw-Hill, México, 1982.

16. Leontief, Wassly — Análisis Económico Input-Out Put Ed. Orbis. Barcelona, 1985.

17. Morgestern, Oskar — Sobre la exactitud de las Observaciones Económicas. Ed. Tecnos. Madrid, 1970.

18. Pasinetti, Luigi — Lecciones de Teoría de la Producción. Fondo de Cultura Económica. México, 1984

19. Prawda, Juan — Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Ed. Limusa, México, 1976.

20. Secretaría de Programación y Presupuesto. — Modelo de Insumo-Producto. Serie Lecturas I, SPP, México 1981. Vol. I, II y III.

21. Secretaría de Programación y Presupuesto — Seminario Latinoamericano de Insumo-Producto. SPP-PNUD, México, 1981.

22. Secretaría de Programación y Presupuesto — Revista de Estadística y Geografía Vol. 1, No. 4, SPP, México, 1980.