2 ej
13

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

INTRODUCCION AL ANALISIS LOGICO: DEL LENGUAJE NATURAL AL LENGUAJE ANALITICO.

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

Víctor Manuel Martínez Gallardo

México, D. F. 1987

I N D I C E

II LOGICA DE PREDICADOS

III DEMOSTRACIONES

INTRODUCCION

ES BIEN SABIDO QUE LA MAYORIA DE LOS ALUMNOS QUE SE ENFRENTAN POR PRIMERA VEZ A UN CURSO, YA SEA DE LOGICA O DE MATEMATICAS, SE ENCUENTRAN EN SERIAS DIFICULTADES POR LA GRAN VARIEDAD DE EXPRESIONES EMPLEADAS, TALES COMO "PARA TODO X", "EXISTE UN X TAL QUE...", "TAL COSA ES CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE PARA TAL OTRA", ETC., Y SU SIMBOLOGIA $\forall x$, $\exists x$, $\longleftrightarrow$, RESPECTIVAMENTE. INMEDIATAMENTE, EL ALUMNO SE DA CUENTA QUE EL LENGUAJE COMUN DIFIERE EN GRAN MEDIDA DEL LENGUAJE MATEMATICO, EN EL SENTIDO DE TENER EXPRESIONES MUY ESPECIFICAS Y UNA SIMBOLOGIA MUY PARTICULAR PARA ELLAS.

EN REALIDAD, EL LENGUAJE DE LAS MATEMATICAS ES UN LENGUAJE PRECISO, DONDE NO APARECEN AMBIGUEDADES E IMPRECISIONES COMO EN EL LENGUAJE USUAL, Y SUS SIMBOLOS SON BIEN DETERMINADOS.

ESTE TRABAJO PRETENDE PRESENTAR EL PROBLEMA QUE MUCHOS ESTUDIANTES TIENEN AL ENFRENTARSE A UN LENGUAJE FORMAL; ESTE PROBLEMA PROVOCA UN RECHAZO AL ANALISIS DE CONCEPTOS, PRINCIPIOS Y METODOS BASICOS EN MATEMATICAS; ENFRENTARLO CON UN LENGUAJE FORMAL Y CON SU SIMBOLOGIA, TOCANDO ALGUNOS TEMAS FUNDAMENTALES PARA EL ESTUDIO DE LA LOGICA MATEMATICA Y LA MATEMATICA MISMA.

EL MATERIAL ESTA ESTRUCTURADO DE TAL MANERA QUE CUMPLE CON LOS TEMAS FUNDAMENTALES QUE SE ABORDAN EN LOS CURSOS DE LOGICA MATEMATICA I y II DEL PLAN DE ESTUDIOS DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, PLANTEL NAUCALPAN (SE ANEXAN TEMARIOS).

ASI MISMO, SE INCLUYEN OTROS TEMAS (ARBOLES DE VERDAD, DEMOSTRACION POR CASOS, DEMOSTRACION POR CONTRAPOSITIVA, HEURISTICA Y FORMULAS UNIVERSALMENTE VALIDAS EN LOGICA DE PRIMER ORDEN), QUE SERVIRAN DE APOYO PARA UNA VISION MAS AMPLIA DEL CONOCIMIENTO LOGICO-MATEMATICO.

POR OTRO LADO, EL MATERIAL AQUI INCLUIDO PUEDE SER CONSIDERADO COMO AUXILIAR EN UN CURSO PROPEDEUTICO PARA LOS ESTUDIANTES DE PRIMER INGRESO A LA FACULTAD DE CIENCIAS, EN LAS CARRERAS DE MATEMATICAS, ACTUARIA, FISICA; COMO MATERIAL DE APOYO PARA LOS CURSOS DE LOGICA MATEMATICA QUE SE IMPARTEN EN EL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, Y EN GENERAL, EN CUALQUIER CARRERA DONDE LAS MATEMATICAS JUEGUEN UN PAPEL MUY IMPORTANTE, CON EL FIN DE MOSTRAR AL ALUMNO LOS ELEMENTOS MINIMOS REQUERIDOS PARA ENTRAR AL BASTO MUNDO DE LA MATEMATICA (DEMOSTRACIONES, VALIDEZ, HEURISTICA, LEYES DE LA NEGACION, ETC.).

LOS PRINCIPALES OBJETIVOS CON LOS QUE SE ELABORO EL MATERIAL SON QUE EL ALUMNO:

1° MANEJE EL LENGUAJE FORMAL Y SEPA EXPRESARSE CON EL. TRADUCIR ENUNCIADOS DEL LENGUAJE NATURAL AL FORMAL E INVERSAMENTE.

2° CONOZCA LA VERDAD O FALSEDAD DE UN ENUNCIADO CON UNA INTERPRETACION DADA. CASO PARTICULAR SON LOS ENUNCIADOS UNIVERSALMENTE VALIDOS QUE SON MUY UTILES EN LAS DEMOSTRACIONES.

3° SEPA NEGAR CORRECTAMENTE CUALQUIER PROPOSICION, EN PARTICULAR LA CONDICIONAL Y LAS CUANTIFICACIONES. ADEMAS, CONOCER ALGUNAS EQUIVALENCIAS LOGICAS.

4° ANALICE ARGUMENTOS, PARA SABER SI SON CORRECTOS O NO, INDEPENDIENTEMENTE DE LA VERDAD O FALSEDAD DE LAS PREMISAS Y DE LA CONCLUSION.

5° CONOZCA DIFERENTES METODOS DE DEMOSTRACION. ADEMAS, CONOCER LA DIFERENCIA ENTRE EL PROCESO DE DESCUBRIMIENTO DE UNA DEMOSTRACION (HEURISTICA), Y LA FORMALIZACION Y ORGANIZACION DEDUCTIVA DE ELLA, LO CUAL CONSTITUYE LA DEMOSTRACION PROPIAMENTE DICHA.

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
P L A N T E L   N A U C A L P A N
AREA DE MATEMATICAS TURNOS 01-02

TEMARIO DE LOGICA MATEMATICA I

I) PROPOSICIONES:

- Proposición simple
- Proposición compuesta y términos de enlace (Disyunción, Conjunción, Condicional, Bicondicional y Negación).
- Simbolización de proposiciones.

II) VALORES DE VERDAD:

- Tablas elementales (Conj., Disy., Cond., Bicond., Neg.)
- Proposiciones Tautológicas
- Proposiciones Equivalentes
- Proposiciones Contradictorias

III) INFERENCIA LOGICA.

- Argumento (Premisas, Conclusiones)
- Reglas de Inferencia y Demostración

  Modus Ponendo Ponens, Modus Tollendo Tollens, Doble Negación, Modus Tollendo Ponens, Simplificación, Adjunción, Silogismo Hipotético, Ley de Adición, Leyes de Morgan.

IV) DEMOSTRACIONES

- Demostración directa
- Demostración Condicional
- Demostración por reducción al absurdo.

TEMARIO DE LOGICA MATEMATICA II

I) CUANTIFICADORES

- EL Silogismo
- Término, Predicado (simple y doble)
- Nombre común
- Proposiciones simples y compuestas, variables.
- Cuantificador Universal y Cuantificador Existencial
- Simbolizaciones
- Relaciones entre proposiciones particulares y universales.

II) ARGUMENTOS:

- Ley de Generalización y Ejemplificación Universales.
- Ley de Generalización y Ejemplificación Existenciales.

III) APLICACION. Demostracioón formal de argumentos y aplicación de leyes.

I LOGICA PROPOSICIONAL

LOGICA PROPOSICIONAL

1.1 LENGUAJE Y METALENGUAJE

SIEMPRE QUE HABLEMOS ACERCA DE UN LENGUAJE USANDO OTRO, LLAMAREMOS AL PRIMERO EL LENGUAJE OBJETO (RELATIVAMENTE A ESA SITUACION) Y AL ULTIMO, EL METALENGUAJE. ASI, EN EL CASO DE UNA GRAMATICA GRIEGA ESCRITA EN CASTELLANO, EL GRIEGO ES EL LENGUAJE OBJETO Y EL CASTELLANO EL METALENGUAJE.

LA DISTINCION ENTRE LENGUAJE Y METALENGUAJE ES SUTIL Y USUALMENTE NO ES IMPORTANTE, SALVO EN LA LOGICA, LA MATEMATICA Y EN FILOSOFIA DONDE SE REQUIERE MAYOR PRECISION DE LOS ELEMENTOS QUE INTERVIENEN EN LAS ORACIONES. POR EJEMPLO, SI HACEMOS CASO OMISO DE TAL DISTINCION, LOS SIGUIENTES RAZONAMIENTOS SERIAN VALIDOS:

1) ROMEO AMA A JULIETA (USO)
   JULIETA ES UNA PALABRA (MENCION)
   POR TANTO, ROMEO AMA A UNA PALABRA

2) EL NUMERO 2 ES UN DIVISOR DEL DENOMINADOR DE $\frac{20}{22}$ (MENCION)

   $\frac{20}{22} = \frac{10}{11}$ (USO)

   POR TANTO, EL NUMERO 2 ES UN DIVISOR DEL DENOMINADOR DE $\frac{10}{11}$

NOTAMOS QUE ALGO ANDA MAL EN ESTOS RAZONAMIENTOS, POSIBLEMENTE SEAN LAS PREMISAS O LAS CONCLUSIONES. EL PROBLEMA RADICA EFECTIVAMENTE EN LAS PREMISAS.

EN EL PRIMER EJEMPLO, EN LA SEGUNDA PREMISA, JULIETA NO ES UNA PALABRA, SINO UNA PERSONA QUE ES AMADA POR ROMEO. SI DESEAMOS HABLAR DEL NOMBRE DE JULIETA, NECESITAMOS EL NOMBRE DE SU NOMBRE. UNA MANERA DE DARLO,

ES EL DE USAR COMILLAS. ASI, "JULIETA" ES EL NOMBRE DE JULIETA, Y "JULIETA" SI ES UNA PALABRA.

EN EL SEGUNDO EJEMPLO, LA FRACCION $\frac{10}{11}$ ES EQUIVALENTE A $\frac{20}{22}$; ES DECIR, SE LE ESTA DANDO OTRO SIGNIFICADO. LA IGUALDAD DE LA SEGUNDA PREMISA SE REFIERE A LOS NUMEROS RACIONALES CUYOS NOMBRES (DISTINTOS), SON RESPECTIVAMENTE $\frac{10}{11}$ Y $\frac{20}{22}$.

SE PUEDEN ACLARAR ESTAS SITUACIONES, NOTANDO LA DIFERENCIA ENTRE USO Y MENCION DE UN TERMINO. ES DECIR, USAR UN TERMINO: REFIRIENDOSE A ALGO DISTINTO DE SI MISMO, Y MENCIONAR ESE TERMINO: HABLAR ACERCA DE EL. ESTO ES, DISTINGUIR ENTRE LOS NOMBRES Y LO QUE ESTOS NOMBRAN: DISTINGUIR LOS OBJETOS Y LOS NOMBRES DE LOS OBJETOS.

EJEMPLO: SOCRATES ES MORTAL

FORMULAMOS UNA PROPOSICION EN EL CUAL SE ATRIBUYE UNA PROPIEDAD A UNA ENTIDAD; LA ENTIDAD CUYO NOMBRE ES "SOCRATES". DECIMOS EN TAL CASO QUE -- "SOCRATES" ES USADO. EN CAMBIO, SI ESCRIBIMOS "SOCRATES" ES UN VOCABLO DE TRES SILABAS, FORMULAMOS UNA PROPOSICION EN EL CUAL SE ATRIBUYE UNA PRO-- PIEDAD A UN NOMBRE: EL NOMBRE "SOCRATES". DECIMOS EN TAL CASO QUE "SOCRATES" ES MENCIONADO.

RESUMIENDO, EN EL LENGUAJE OBJETO, USAMOS LOS SIMBOLOS, PALABRAS, ORACIONES, ETC. PERO NO LOS MENCIONAMOS; EN EL METALENGUAJE USAMOS LOS SIMBOLOS, PALABRAS, ORACIONES, ETC. DEL METALENGUAJE PARA MENCIONAR LAS EXPRESIONES DEL LENGUAJE OBJETO, PERO NO HACEMOS USO DE LAS EXPRESIONES DEL -- LENGUAJE OBJETO; EN LUGAR DE ESO, USAMOS LOS NOMBRES DE LOS SIMBOLOS DEL LENGUAJE OBJETO.

1.2 PROPOSICIONES Y CONECTIVOS

AL HACER USO DEL LENGUAJE MEDIANTE ORACIONES, LO EMPLEAMOS DE MUY DIVERSAS FORMAS, A SABER: PARA DAR ORDENES, PARA HACER PREGUNTAS, PARA EXPRESAR DESEOS Y SENTIMIENTOS, PARA DESCRIBIR SITUACIONES Y/O OBJETOS,ETC.

LAS ORACIONES SE CLASIFICAN EN DECLARATIVAS, INTERROGATIVAS, IMPERATIVAS Y EXCLAMATIVAS.

DE UNA PREGUNTA, UNA EXCLAMACION O UNA SUPLICA, NO TIENE SENTIDO EL PREGUNTARSE SI SON O NO VERDADERAS. SIN EMBARGO, EN LAS AFIRMACIONES QUE SE HACEN ACERCA DEL MUNDO SI ES CONVENIENTE PREGUNTARSE SI SON VERDADERAS O FALSAS. DE ESTAS ORACIONES, LAS QUE INTERESAN PARTICULARMENTE A LA LOGICA SON LAS DECLARATIVAS, YA QUE SU CARACTERISTICA ES EL DE SER VERDADERAS O FALSAS. LOS TERMINOS "ORACION DECLARATIVA" Y "PROPOSICION", SE USAN INDISTINTAMENTE EN LA LOGICA EN EL MISMO SENTIDO.

EJEMPLOS DE ORACIONES:

1) LA TIERRA ES UN PLANETA
2) EL NUMERO 20 ES DIVISIBLE POR 3
3) ¡ EUREKA !
4) EL NUMERO DOS ES EL UNICO PRIMO PAR
5) ¿QUIEN VIENE A CENAR?

EN LOS EJEMPLOS ANTERIORES, SON PROPOSICIONES VERDADERAS 1) Y 4), ES PROPOSICION FALSA 2) Y, 3) Y 5) NO SE PUEDEN CALIFICAR; POR TANTO, ESTAS QUE NO SE PUEDEN CALIFICAR NO INTERESAN PARTICULARMENTE A LA LOGICA.

DEFINICION.- UNA PROPOSICION ES UNA ORACION DECLARATIVA QUE PUEDE -- SER CALIFICADA CON UN VALOR DE VERDAD; A SABER: VERDADERO (V) O FALSO (F), PERO NO AMBOS.

HAY DOS CLASES DE PROPOSICIONES, LAS SIMPLES O ATOMICAS Y LAS COMPUESTAS O MOLECULARES.

LAS ATOMICAS SON LAS PROPOSICIONES DE FORMA MAS SIMPLE (BASICA). LAS MOLECULARES SON AQUELLAS QUE ESTAN FORMADAS POR DOS O MAS PROPOSICIONES ATOMICAS Y VAN UNIDAS POR MEDIO DE UN TERMINO DE ENLACE O CONECTIVO LOGICO. LOS CONECTIVOS LOGICOS (BINARIOS) MAS USUALES SON: "Y", "O", "SI ... ENTONCES ... ", "... SI Y SOLO SI ...", LLAMADOS CONJUNCION, DISYUNCION, CONDICIONAL Y BICONDICIONAL, RESPECTIVAMENTE. EL CONECTIVO "NO", LLAMADO NEGACION, ES EL UNICO CONECTIVO UNARIO (MONADICO).

EN SEGUIDA SE TRATARA CADA UNO DE ESTOS CONECTIVOS, SIN LLEGAR A PROFUNDIZAR MUCHO EN EL TRATAMIENTO, SALVO EN LA DISYUNCION Y EN LA CONDICIONAL, POR TRATARSE DE CASOS QUE REQUIEREN MAYOR ATENCION.

1.2.1 LA NEGACION

DEFINICION.- CUANDO A UNA PROPOSICION SE LE ANTEPONE EL CONECTIVO "NO", SE FORMA LA NEGACION DE LA PROPOSICION.

EN OCASIONES, LA NEGACION VA "DENTRO" DE LA PROPOSICION.

LAS LOCUCIONES MAS EMPLEADAS PARA LA NEGACION SON: "NO", "NO ES CIERTO QUE", "NO OCURRE QUE", "NO ES EL CASO QUE". LOS SIMBOLOS MAS USUALES PARA LA NEGACION DE UNA PROPOSICION P SON: $\neg P$, $-P$, $\sim P$.

EJEMPLOS: A) P= "HAY UN NUMERO PRIMO MAXIMO"
NEGACION DE P= "NO HAY UN NUMERO PRIMO MAXIMO"
NEGACION DE P= "NO ES CIERTO QUE HAY UN NUMERO PRIMO MAXIMO"

B) Q= "SOCRATES ESTA MUERTO"
NEGACION DE Q= "SOCRATES NO ESTA MUERTO"
NEGACION DE Q= "NO ES EL CASO QUE SOCRATES ESTA MUERTO"

C) R= "LAS REFORMAS DEL RECTOR BENEFICIAN A LA UNAM"
NEGACION DE R= "LAS REFORMAS DEL RECTOR NO BENEFICIAN A LA UNAM"
NEGACION DE R= "NO ES CIERTO QUE LAS REFORMAS DEL RECTOR BENEFICIAN A LA UNAM"

1.2.2 LA CONJUNCION

DEFINICION.- UNA CONJUNCION ES AQUELLA PROPOSICION COMPUESTA CUYAS -- COMPONENTES VAN UNIDAS POR MEDIO DEL CONECTIVO LOGICO "Y".

EJEMPLO: "EL NUMERO 5 ES PRIMO Y EL NUMERO 15 ES MULTIPLO DE 3"
SI LLAMAMOS P= "EL NUMERO 5 ES PRIMO"
Y Q= "EL NUMERO 15 ES MULTIPLO DE 3"

ENTONCES, SE TIENE: P Y Q, QUE PODEMOS SIMBOLIZAR COMO $P \wedge Q$, $P \,\&\, Q$, $P \cdot Q$

LAS COMPONENTES QUE FORMAN LA CONJUNCION, SE LLAMAN CONYUNTOS.

EXISTE OTRO TIPO DE PROPOSICION QUE PUEDE SER CONSIDERADA COMO EQUIVALENTE A LA CONJUNCION, TIENE LA SIGUIENTE FORMA: ..... PERO .....

EJEMPLOS: A) "TE REGALO MIS DULCES PERO ME COMPRAS UN HELADO"
ES EQUIVALENTE A: "TE REGALO MIS DULCES Y ME COMPRAS UN HELADO"

B) "LAS MATEMATICAS SON INTERESANTES PERO DIFICILES"
ES EQUIVALENTE A: "LAS MATEMATICAS SON INTERESANTES Y DIFICILES"

C) "EL NUMERO 21 ES IMPAR PERO NO ES PRIMO"
ES EQUIVALENTE A: "EL NUMERO 21 ES IMPAR Y NO ES PRIMO"

1.2.3 LA DISYUNCION

DEFINICION.- UNA DISYUNCION ES AQUELLA PROPOSICION COMPUESTA CUYAS - COMPONENTES VAN UNIDAS POR MEDIO DEL CONECTIVO LOGICO "O".

EJEMPLO: "ENTREGO EL TRABAJO FINAL O REPRUEBO EL CURSO.
SI LLAMAMOS P= "ENTREGO EL TRABAJO FINAL"
Y Q= " REPRUEBO EL CURSO"

ENTONCES SE TIENE P O Q, QUE PODEMOS SIMBOLIZAR COMO $P \vee Q$. LOS COMPONENTES QUE FORMAN LA DISYUNCION SE LES LLAMA DISYUNTOS.

UNA DISYUNCION PUEDE INTERPRETARSE EN DOS SENTIDOS: EN SENTIDO INCLUYENTE Y EN SENTIDO EXCLUYENTE.

EN SENTIDO INCLUYENTE, LA DISYUNCION P O Q TIENE EL SIGUIENTE SIGNIFICADO: SE PRESENTA POR LO MENOS UNA COMPONENTE Y QUIZA AMBAS

$$(P \vee Q)$$

EN EL SENTIDO EXCLUYENTE, P O Q TIENE EL SIGUIENTE SIGNIFICADO: SE PRESENTA UNA U OTRA COMPONENTE, PERO NO AMBAS A LA VEZ

$$(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$$

EJEMPLOS: A)"APRUEBO O REPRUEBO EL CURSO DE LOGICA"
EXPRESA QUE UNA DE LAS DOS PROPOSICIONES ATOMICAS ES CIERTA Y LA OTRA NECESARIAMENTE ES FALSA. ESTO ES, O SE APRUEBA O SE REPRUEBA EL CURSO DE LOGICA, PERO NO OCURREN AMBAS A LA VEZ.

B)"SE BUSCA AL ASESINO X VIVO O MUERTO"
EN ESTE CASO, TAMBIEN SE DA SOLO UNA DE LAS POSIBILIDADES.

ESTOS EJEMPLOS NOS MOSTRARON EL SENTIDO EXCLUYENTE DE LA DISYUNCION.

C) "PROHIBIDA LA ENTRADA A ESTUDIANTES O UNIFORMADOS"
EXPRESA QUE SE LES PROHIBE LA ENTRADA A ESTUDIANTES, A UNIFORMADOS Y TAMBIEN A LOS QUE SEAN A LA VEZ ESTUDIANTES Y UNIFORMADOS.

D) "EL NUMERO 17 ES PRIMO O IMPAR"
EXPRESA QUE EL NUMERO 17 ES PRIMO, EL NUMERO 17 ES IMPAR O TAMBIEN QUE EL NUMERO 17 ES PRIMO E IMPAR A LA VEZ.

ESTOS DOS ULTIMOS EJEMPLOS MUESTRAN EL SENTIDO INCLUYENTE DE LA DISYUNCION.

EN LOGICA, SE EMPLEA EL SENTIDO INCLUYENTE DE LA DISYUNCION, POR CUESTIONES PRACTICAS.

1.2.4 LA CONDICIONAL

DEFINICION.- UNA PROPOSICION DE LA FORMA "SI ... ENTONCES...", SE LLAMA UNA CONDICIONAL. LA PROPOSICION QUE VA ENTRE "SI" Y "ENTONCES" SE LE LLAMA ANTECEDENTE Y LA QUE VA DESPUES DE "ENTONCES", SE LLAMA CONSE-CUENTE.

EJEMPLOS: A) SI ESTUDIO MUCHO ENTONCES APROBARE EL EXAMEN

B) SI VOY AL CINE ENTONCES ME DIVERTIRE MUCHO

C) SI P^2 ES UN NUMERO PAR ENTONCES P ES UN NUMERO PAR

D) SI $X^2 - 4 = 0$ ENTONCES $X= 2$ O $X= -2$

PARA LA CONDICIONAL "SI ... ENTONCES ..." SE EMPLEAN VARIAS LOCUCIONES, A SABER: "SI P ENTONCES Q", "P IMPLICA Q", "P SOLO SI Q", "P ES CONDICION SUFICIENTE PARA Q", "Q ES CONDICION NECESARIA PARA P", "NO P O Q".

EJEMPLOS: A) SI ESTUDIO ENTONCES APRUEBO MATEMATICAS

B) ESTUDIO IMPLICA QUE APRUEBO MATEMATICAS

C) ESTUDIO SOLO SI APRUEBO MATEMATICAS

D) APRUEBO MATEMATICAS SI ESTUDIO

E) ESTUDIAR ES CONDICION SUFICIENTE PARA APROBAR MATEMATICAS

F) APROBAR MATEMATICAS ES CONDICION NECESARIA PARA ESTUDIAR

G) NO ESTUDIO O APRUEBO MATEMATICAS

UNA CONDICIONAL "SI P ENTONCES Q", SE PUEDE SIMBOLIZAR DE LA SIGUIENTE MANERA: $P \rightarrow Q$ o $P \supset Q$

POR OTRO LADO, EXISTEN ENUNCIADOS DE LA FORMA "P A MENOS QUE Q". ESTOS SE CONSIDERARAN DE LA FORMA DE UNA CONDICIONAL, ASI: "SI NO Q ENTONCES P".

EJEMPLOS: A) "NO SE PUEDE PASAR AUTOMATICAMENTE A FACULTAD A MENOS QUE SE HAYA TERMINADO EL BACHILLERATO EN 3 AÑOS Y CON PROMEDIO MINIMO DE 8".

ES EQUIVALENTE A DECIR:

A') "NO SE PUEDE PASAR AUTOMATICAMENTE A FACULTAD SI NO SE HA TERMINADO EL BACHILLERATO EN 3 AÑOS Y CON PROMEDIO MINIMO DE 8".

SIMBOLIZANDO A), SE TIENE: P A MENOS QUE Q, DONDE P="NO SE PUEDE PASAR AUTOMATICAMENTE A FACULTAD" Y Q="SE HA TERMINADO EL BACHILLERATO EN 3 AÑOS Y CON PROMEDIO MINIMO DE 8".

ANALOGAMENTE, SIMBOLIZANDO A') SE TIENE: P SI NO Q

POR SER EQUIVALENTES A) Y A'), SE TIENE:

P A MENOS QUE Q ES EQUIVALENTE A P SI NO Q, PERO ESTO ULTIMO LO PODEMOS SIMBOLIZAR COMO $\sim Q \longrightarrow P$, QUE A SU VEZ ES EQUIVALENTE A : (NO NO Q)O P Y POR TANTO, Q O P.

POR CONSIGUIENTE, "P A MENOS QUE Q" ES EQUIVALENTE A: "P O Q".

POR OTRO LADO, EXISTE UN TIPO DE PROPOSICION DE LA FORMA:

"P AUNQUE Q"

VEAMOS ALGUNOS EJEMPLOS PARA TRATAR DE DAR ALGUNA EQUIVALENCIA A LOS CONECTIVOS QUE HEMOS VISTO EN LAS PAGINAS ANTERIORES.

EJEMPLOS: A) "DOY CLASES AUNQUE HAYA PARO" (C AUNQUE P)

ES EQUIVALENTE A: "SI HAY PARO ENTONCES DOY CLASES", SIMBOLIZANDO, RESULTA: $P \longrightarrow C$, POR TANTO, ES EQUIVALENTE A: $\sim P \vee C$, QUE ES EQUIVALENTE A: $C \vee \sim P$

B) "ME HE DE COMER ESA TUNA AUNQUE ME ESPINE LA MANO"

ES EQUIVALENTE A: "SI ME ESPINO LA MANO ENTONCES ME HE DE COMER ESA TUNA"

SIMBOLIZANDO: $E \longrightarrow T$ ES EQUIVALENTE A: $\sim E \vee T$, EQUIVALENTE A: $T \vee \sim E$

RESUMIENDO, UNA PROPOSICION DE LA FORMA: "P AUNQUE Q" ES EQUIVALENTE A: "$P \vee \sim Q$"

1.2.5 LA BICONDICIONAL

DEFINICION.- LA PROPOSICION BICONDICIONAL "P SI Y SOLO SI Q", ES -- EQUIVALENTE A LA CONJUNCION DE LAS DOS CONDICIONALES SIGUIENTES: "P SI Q" Y "P SOLO SI Q"; LO QUE SIGNIFICA QUE P ES UNA CONDICION NECESARIA Y SU-- FICIENTE PARA Q.

ES DECIR, $P \longleftrightarrow Q$ ES EQUIVALENTE A $(Q \longrightarrow P) \wedge (P \longrightarrow Q)$

EL SIMBOLO $\longleftrightarrow$ SE LEE "SI Y SOLO SI"

EJEMPLOS: A) "UN LIQUIDO ES UN ACIDO SI Y SOLO SI COLOREA DE AZUL EL PAPEL DE TORNASOL ROJO" $(A \longleftrightarrow R)$

QUE ES EQUIVALENTE A LA CONJUNCION DE:

A') "SI UN LIQUIDO ES UN ACIDO ENTONCES COLOREA DE AZUL EL PAPEL DE TORNASOL ROJO" $(A \longrightarrow R)$

Y A'') "SI UN LIQUIDO COLOREA DE AZUL EL PAPEL DE TORNASOL ROJO, ENTONCES ES UN ACIDO" $(R \longrightarrow A)$

B) "UN TRIANGULO ES EQUILATERO SI Y SOLO SI TIENE SUS TRES LADOS IGUALES" $(E \longleftrightarrow T)$

QUE ES EQUIVALENTE A LA CONJUNCION DE:

B') "SI UN TRIANGULO ES EQUILATERO, ENTONCES TIENE SUS TRES LADOS IGUALES" $(E \longrightarrow T)$

Y B'') "SI UN TRIANGULO TIENE SUS TRES LADOS IGUALES, ENTONCES ES EQUILATERO" $(T \longrightarrow E)$

C) "$X = 7$ O $X = -4$ ES CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE $X^2 - 3X = 28$"

ES DECIR, "$X=7$ O $X=-4 \longleftrightarrow X^2 - 3X = 28$",

LO QUE EQUIVALE A LA CONJUNCION DE:

C') "SI $X = 7$ O $X = -4$ ENTONCES $X^2 - 3X = 28$"

Y C'') "SI $X^2 - 3X = 28$ ENTONCES $X= 7$ O $X= -4$"

TERMINOLOGIA SINTACTICA

A) $\sim P$ RECIBE EL NOMBRE DE NEGACION DE P;

B) $P \wedge Q$ RECIBE EL NOMBRE DE CONJUNCION, CON P Y Q COMO CONYUNTOS;

C) $P \vee Q$ RECIBE EL NOMBRE DE DISYUNCION, CON P Y Q COMO DISYUNTOS;

D) $P \rightarrow Q$ RECIBE EL NOMBRE DE CONDICIONAL, CON P COMO ANTECEDENTE Y Q COMO CONSECUENTE;

E) $P \leftrightarrow Q$ RECIBE EL NOMBRE DE BICONDICIONAL.

E J E R C I C I O S

1.- EXPRESE COMO CONJUNCION DE DOS PROPOSICIONES CADA UNA DE LAS PROPOSICIONES SIGUIENTES:

A) X *y* Y SON FACTORES DE Z.

B) X ES PAR PERO NO ES MULTIPLO DE 4.

C) PEDRO Y JUAN TRABAJAN EN LA UNAM.

D) 5 ES UN NUMERO PRIMO E IMPAR.

E) 3 NO ES PAR PERO ES DIVISOR DE 12.

F) $X < Y < Z$.

2.- EXPRESE COMO DISYUNCION DE DOS PROPOSICIONES CADA UNA DE LAS PROPOSICIONES SIGUIENTES:

A) $X \leq Y$

B) $X = \pm 5$

C) JUAN TRABAJA O ESTUDIA.

D) A o B SON NUMEROS PARES

E) X ES PAR O MULTIPLO DE 13

F) PEDRO ES ESTUDIANTE DEL C.C.H. O DE LA PREPA

3.- FORME LA NEGACION DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

A) 12 ES UN NUMERO PRIMO
B) 0.5 ESTA COMPRENDIDO ENTRE 0 Y 1
C) SI $X > 4$ ENTONCES $X > 3$
D) SIEMPRE HAY CONTINUIDAD
E) TODO LO QUE BRILLA ES ORO
F) NO ESTA LLOVIENDO EN EL CAMPO

4.- SUBRAYE EL ANTECEDENTE Y EL CONSECUENTE, EN LAS SIGUIENTES CONDICIONALES:

A) X ES PAR SI $X= 8$
B) X ES PAR SOLO SI $X= 8$
C) SI X ES PRIMO ENTONCES X TIENE DOS DIVISORES
D) $X = Y$ ES SUFICIENTE PARA QUE $X - Y = 0$
E) X ES IMPAR IMPLICA X NO ES PRIMO
F) $X = Y$ ES NECESARIO PARA QUE $X - Y = 0$

5.- EXPRESE COMO DOS CONDICIONALES LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

A) $X < 4 \longleftrightarrow X \leq 3$
B) X ES ORO SI Y SOLO SI BRILLA
C) N ES IMPAR ES CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE $(-1)^N$ SEA IGUAL A -1
D) $X = Y \longleftrightarrow X - Y = 0$
E) $X^3 + X = 0 \longleftrightarrow X = 0$
F) HOY ES DIA DE DESCANSO SI Y SOLO SI ES SABADO O DOMINGO

1.3 VALIDEZ

DEFINICION.- UNA PROPOSICION ES VALIDA EN UNA INTERPRETACION* CON DOMINIO D, SI RESULTA VERDADERA, CUALESQUIERA QUE SEAN LOS VALORES DE D ASIGNADOS A LAS VARIABLES.

POR LO TANTO, ES CONVENIENTE ACLARAR DE ANTEMANO CUAL ES EL DOMINIO D PARA CADA UNA DE LAS VARIABLES QUE APARECEN EN LA PROPOSICION.

EJEMPLOS: A) X ES UN NUMERO PRIMO (D= $\mathbb{N}$)

B) $X^2 + 3 = 4X$ (D= $\mathbb{Z}$)

C) $X + Y \geqslant 0$ (D= $\mathbb{Z}$)

ASIGNANDO VALORES A LAS VARIABLES, SE TIENE:

PARA "X ES UN NUMERO PRIMO", SI X = 4, LA PROPOSICION NO ES VERDADERA. EN GENERAL, PARA TODO NUMERO PAR MAYOR QUE 2, LA PROPOSICION NO RESULTA VERDADERA. EXISTEN ADEMAS, ALGUNOS OTROS NUMEROS IMPARES QUE NO LA HACEN VERDADERA, POR EJEMPLO: 9, 15, 21, 35, 45, 51, 81, ...

PARA " $X^2 + 3 = 4X$ ", POR SER UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO, SE TIENE:

$X^2 - 4X + 3 = 0$, FACTORIZANDO

$(X - 1)(X - 3) = 0$, POR TANTO,

$X - 1 = 0$ IMPLICA QUE $X = 1$

O

$X - 3 = 0$ IMPLICA QUE $X = 3$

---

*UNA INTERPRETACION CONSTA DE UN DOMINIO O UNIVERSO DE OBJETOS Y UN SIGNIFICADO PARA LOS PREDICADOS, LAS OPERACIONES Y LAS CONSTANTES. UN PREDICADO ES LA PARTE DE LA ORACION QUE EXPRESA LO QUE SE DICE DEL SUJETO.

POR CONSIGUIENTE SOLO LOS VALORES $X = 1$ y $X = 3$ HACEN VERDADERA LA PROPOSICION. ES DECIR, CUALQUIER OTRO NUMERO DISTINTO DE LOS OBTENIDOS AL RESOLVER LA ECUACION, NO SATISFACE LA ECUACION.

PARA "$X + Y \geq 0$", IMPLICA QUE $X \geq -Y$, POR TANTO SOLO LOS NUMEROS ENTEROS X MAYORES O IGUALES QUE $-Y$, LA HACEN VERDADERA.

RESUMIENDO, ESTAS TRES PROPOSICIONES RESULTAN VERDADERAS SOLAMENTE PARA ALGUNOS VALORES DE LAS VARIABLES; POR TANTO, NO SON VALIDAS.

EN CAMBIO, SI CONSIDERAMOS EL SIGUIENTE EJEMPLO, VEAMOS LO QUE OCURRE:

EJEMPLO: D) $X^2 \geq X$ $\quad (D = \mathbb{Z})$

CONSIDERANDO ALGUNOS VALORES, PARA VER QUE COMPORTAMIENTO TIENE, SE OBTIENE:

SI $X = +5$, $(+5)^2 = +25 \geq +5$
SI $X = +12$, $(+12)^2 = +144 \geq +12$
SI $X = 0$, $(0)^2 = 0 \geq 0$
SI $X = -4$, $(-4)^2 = +16 \geq -4$
SI $X = -1$, $(-1)^2 = +1 \geq -1$

COMO SE HABRA OBSERVADO, SE INCLUYERON VALORES POSITIVOS, NEGATIVOS Y EL CERO. POR TANTO, LA DESIGUALDAD SE CUMPLE EN PARTICULAR PARA ESOS NUMEROS ENTEROS, PERO NO ES SUFICIENTE COMO PARA ASEVERAR QUE LA PROPOSICION ES VALIDA; PARA ELLO,¿SE PODRIA MOSTRAR DIRECTAMENTE QUE SE CUMPLE PARA TODOS LOS VALORES. ES DECIR, ELABORAR UNA LISTA CON TODOS LOS NUMEROS ENTEROS Y VER QUE LA DESIGUALDAD SE CUMPLE? NO, PUES SABEMOS QUE ES IMPOSIBLE TAL PROCEDIMIENTO YA QUE EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS ES INFINITO. POR TANTO, SE REQUIERE UNA DEMOSTRACION EN DONDE SE CONCLUYA INDIRECTAMENTE QUE LA DESIGUALDAD SE CUMPE PARA TODOS LOS VALORES.

SI $X^2 \geqslant X$ ENTONCES $X^2 - X \geqslant 0$, FACTORIZANDO SE TIENE:

$X(X - 1) \geqslant 0$, POR TANTO:

$X \geqslant 0$ Y $X - 1 \geqslant 0$, ES DECIR $X \in [1, \infty)$

O

$X \leq 0$ Y $X - 1 \leq 0$, ES DECIR $X \in (-\infty, 0]$

POR CONSIGUIENTE, $X \in \left\{(-\infty, 0] \cup [1, \infty)\right\}$

ES DECIR, $X \in \mathbb{Z}$ (LA DESIGUALDAD SE CUMPLE PARA CUALQUIER NUMERO ENTERO X)

SIN EMBARGO, SI CONSIDERAMOS QUE AHORA EL DOMINIO SEA EL CONJUNTO - DE LOS NUMEROS REALES $\mathbb{R}$, ENTONCES LA PROPOSICION NO ES VALIDA, PARA ELLO BASTA OBTENER UN SOLO VALOR DE LA VARIABLE QUE NO SATISFAGA LA DESIGUALDAD, POR EJEMPLO SI $X = \frac{1}{4}$, ENTONCES

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \not\geqslant \frac{1}{4} \quad \text{(CONTRADICCION)}$$

ASI, $X^2 \geqslant X$ NO ES VALIDA, SI $D = \mathbb{R}$.

EN EL ESTUDIO DE LA MATEMATICA, APARECEN CONSTANTEMENTE PROPOSICIONES CONDICIONALES, POR LO QUE CABE HACERSE LA SIGUIENTE PREGUNTA:

¿ CUANDO UNA CONDICIONAL SERA VALIDA ?

UNA CONDICIONAL SERA VALIDA SI NO "CONDUCE" DE LO VERDADERO A LO FALSO, ES DECIR, SI NO ES POSIBLE QUE EL ANTECEDENTE SEA VERDADERO Y EL CONSECUENTE FALSO.

EJEMPLOS: A) SI $X > 10$ ENTONCES $X > 5$ $(D = \mathbb{N})$

VEAMOS SI ES POSIBLE QUE EL ANTECEDENTE SEA VERDADERO Y EL CONSECUENTE FALSO.

PARA QUE EL ANTECEDENTE SEA VERDADERO, SE REQUIERE QUE X SEA MAYOR QUE 10.

SUPONGAMOS QUE X ES CUALQUIER NUMERO NATURAL MAYOR QUE 10. POR OTRO LADO, SE SABE QUE 10 ES MAYOR QUE 5 ($10 > 5$). POR TANTO, SE TIENE $X > 10$ y $10 > 5$, ENTONCES POR TRANSITIVIDAD, $X > 5$, QUE RESULTA VERDADERO.

COMO NO EXISTE TAL POSIBILIDAD, LA CONDICIONAL ES VALIDA.

B) SI $X = 5$ ENTONCES $X > 2$

SEA X CUALQUIERA. NUEVAMENTE VEAMOS SI ES POSIBLE QUE EL ANTECEDENTE SEA VERDADERO Y EL CONSECUENTE FALSO.

PARA QUE EL ANTECEDENTE SEA VERDADERO SE REQUIERE QUE X SEA IGUAL A 5 ($X = 5$). POR OTRO LADO, SE SABE QUE $5 > 2$

POR TANTO, SE TIENE: $X = 5$ Y $5 > 2$

POR CONSIGUIENTE, $X > 2$, QUE ES VERDADERO.

COMO NO EXISTE TAL POSIBILIDAD, LA CONDICIONAL ES VALIDA.

C) SI $X > 3$ ENTONCES $X = 5$

¿ EXISTIRA LA POSIBILIDAD QUE EL ANTECEDENTE SEA VERDADERO Y EL CONSECUENTE FALSO ?.

SI $X = 8$, SE TIENE:

SI $8 > 3$ ENTONCES $8 = 5$ ($V \longrightarrow F$)

POR TANTO, LA CONDICIONAL ES NO-VALIDA, YA QUE CONDUCE DE LO VERDADERO A LA FALSO.

COMO SE VIO EN ESTE EJEMPLO, BASTA ENCONTRAR UNA INSTANCIA PARA DEMOSTRAR QUE LA CONDICIONAL NO FUE VALIDA, ES LO QUE SE CONOCE COMO "DAR UN CONTRAEJEMPLO". LAS INSTANCIAS SON LOS VALORES PARTICULARES QUE SE DAN A LAS VARIABLES.

CABE PREGUNTARSE AHORA ¿ EN QUE CIRCUNSTANCIA SERA FALSA UNA CONDICIONAL ?

POR EJEMPLO: "SI EL ORO SE SUMERGE EN AGUA REGIA, ENTONCES EL ORO SE DISUELVE", ¿ CUANDO SERA FALSA ?, CLARAMENTE SERA FALSA CUANDO SE SUMERJA EL ORO EN EL AGUA REGIA Y EL ORO NO SE DISUELVA. ES DECIR, CUANDO EL ANTECEDENTE ES VERDADERO Y EL CONSECUENTE ES FALSO.

POR TANTO, CUALQUIER CONDICIONAL "SI P ENTONCES Q" SE SABE QUE ES FALSA EN EL CASO DE QUE EL ANTECEDENTE SEA VERDADERO Y EL CONSECUENTE FALSO, i.e., QUE LA CONJUNCION $P \wedge \sim Q$ ES VERDADERA. EN OTRAS PALABRAS, PARA QUE "SI P ENTONCES Q" SEA VERDADERA, $\sim (P \wedge \sim Q)$ TAMBIEN TIENE QUE SER VERDADERA.

RESUMIENDO, AL AFIRMAR UNA CONDICIONAL $P \longrightarrow Q$, SE AFIRMA QUE <u>NO PUEDE OCURRIR</u> QUE EL ANTECEDENTE P SEA VERDADERO Y EL CONSECUENTE Q FALSO. POR LO TANTO, LA CONDICIONAL ES VERDADERA EN LOS TRES CASOS SIGUIENTES:

1) P VERDADERA Y Q VERDADERA
2) P FALSA Y Q VERDADERA
3) P FALSA Y Q FALSA

HAY TRES DIFERENTES CLASES DE OBJECIONES PARA ESTE CRITERIO DE VERDAD DE LA CONDICIONAL:

1a. NO SE REQUIERE QUE HAYA CONEXION LOGICA ENTRE EL ANTECEDENTE Y EL CONSECUENTE. LA VERDAD O FALSEDAD DE LA CONDICIONAL DEPENDERA DE LA VERDAD O FALSEDAD DEL ANTECEDENTE Y DEL CONSECUENTE. POR EJEMPLO: "SI SOCRATES ESTA MUERTO ENTONCES NO EXISTE UN NUMERO PRIMO MAXIMO", ES UNA CONDICIONAL VERDADERA. ADEMAS, "SI SOCRATES NO ESTA MUERTO, ENTONCES EXISTE UN NUMERO PRIMO MAXIMO", TAMBIEN ES VERDADERA, LO QUE PARECE QUE NUESTRO ANALISIS LOGICO ESTA YENDO CONTRA EL USO COMUN.

IMAGINEMOS QUE UN AMIGO SE ENCUENTRA EN UN GRAN PROBLEMA Y NOSOTROS CREEMOS QUE NO LO PODRA RESOLVER. BURLONAMENTE PODEMOS DECIRLE: "SI RESUELVES EL PROBLEMA, ME COMERE MIS TENIS". AFIRMAMOS QUE EL CONSECUENTE ES FALSO INDUDABLEMENTE Y COMO ACEPTAMOS LA CONDICIONAL EN SU TOTALIDAD, CON ELLO AFIRMAMOS AL MISMO TIEMPO LA FALSEDAD DEL ANTECEDENTE. POR OTRO LADO, SI SE TIENE QUE: "SI EL SOL BRILLA MAÑANA, ENTONCES "LOS PUMAS" GANARAN". EN ESTE CASO, EL ANTECEDENTE ES INDUDABLEMENTE VERDADERO Y COMO ACEPTAMOS TODA LA CONDICIONAL, CON ELLO AFIRMAMOS AL MISMO TIEMPO LA VERDAD DEL CONSECUENTE.

UN MECANISMO SIMILAR SE USA EN LOGICA MATEMATICA, SI SUPONEMOS QUE "F" REPRESENTE ALGUNA PROPOSICION FALSA, POR TANTO P PUEDE NEGARSE COMO $P \longrightarrow$ "F" (FALSEDAD DEL ANTECEDENTE). ANALOGAMENTE, SI SUPONEMOS QUE "V" REPRESENTE UNA PROPOSICION VERDADERA, POR TANTO "V" $\longrightarrow Q$, ES UNA MANERA DE AFIRMAR Q (VERDAD DEL CONSECUENTE).

2a. SI PERMITIMOS UNA FALTA DE PERTINENCIA ENTRE EL ANTECEDENTE Y EL CONSECUENTE, ENTONCES LA CONDICIONAL "SI ... ENTONCES ..." SE CONVIERTE EN VERDADERA SI TIENE UN ANTECEDENTE FALSO O UN CONSECUENTE VERDADERO. PERO USUALMENTE NO AFIRMAMOS UNA CONDICIONAL SI YA SABEMOS LA VERDAD DEL CONSECUENTE O LA FALSEDAD DEL ANTECEDENTE". ES DECIR, DE ESTO EL LENGUAJE USUAL NO DICE NADA, PERO EL LENGUAJE FORMAL SI, ¡ LO EXPLICITA !. EJEMPLO: "SI SE COLOCA ACERO EN ESTA AGUA, ENTONCES EL ACERO SE DISUELVE". ¡ SI NO SE COLOCA, ES VERDADERO !. ESTO SEGURAMENTE RESULTA PARADOJICO EN EL SENTIDO DE SER CONTRARIO A LO QUE SE ESPERABA Y NO EN EL DE SER UNA ANTINOMIA.

3a. LA INTERPRETACION FUNCIONAL DE VERDAD DE "SI ... ENTONCES ..." NO TOMA CONOCIMIENTO DEL MODO SUBJUNTIVO. POR EJEMPLO: "NINGUN CUBO DE AZUCAR FUE PUESTO EN ESTE VASO DE AGUA PURA

EN LA ULTIMA HORA". SUPONGAMOS QUE ESTO ES VERDADERO. NO OBSTANTE, NO SERIA FALSO QUE "SI UN CUBO DE AZUCAR HUBIERA SIDO PUESTO EN ESTE VASO DE AGUA PURA, ENTONCES EL AZUCAR NO SE DISOLVERIA". LA UNICA RESPUESTA ADECUADA A ESTA OBJECION ES ADMITIR EL PUNTO Y REDUCIR LAS PRETENCIONES HECHAS PARA "$\longrightarrow$" DEL SIGUIENTE MODO: "... $\longrightarrow$ ..." SERA TOMADO COMO UNA APROXIMACION SUFICIENTEMENTE BUENA DEL MODO INDICATIVO DE "SI ... ENTONCES ..." POR SER MUY UTIL PARA PROPOSITOS LOGICOS.
ESTA ULTIMA JUSTIFICACION, HA PROBADO SER MUY EFECTIVA EN EL ANALISIS LOGICO PARA FINES PRACTICOS.

E J E R C I C I O S

DEMUESTRE LA VALIDEZ O MUESTRE LA INVALIDEZ DE LAS PROPOSICIONES SIGUIENTES, DONDE EL DOMINIO $D = \mathbb{Z}$ (EXCEPTO EN 2) Y 3) DONDE $D = \mathbb{R}$).

1) $X + Y > X$
2) $X^2 + Y^2 > 2XY$
3) $X + (Y - X) = Y$
4) SI $X + Y = 8$ ENTONCES 2 ES PAR
5) SI 2 ES PAR ENTONCES $X + Y = 8$
6) SI $X + Y = 8$ ENTONCES 3 ES PAR
7) SI X ES PAR ENTONCES 2X ES PAR
8) SI 3 ES PAR ENTONCES $X + Y = 8$
9) SI 2X ES PAR ENTONCES X ES PAR
10) SI X^2 ES PAR ENTONCES X ES PAR
11) SI $X = Y$ ENTONCES $X \neq Y$
12) SI $XY = Z$ *y* Z ES PAR ENTONCES Z ES PAR
13) SI $X \neq Y$ ENTONCES $X=Y$

1.4 PROPOSICIONES EQUIVALENTES

DEFINICION.- DOS PROPOSICIONES P, Q SE LLAMAN EQUIVALENTES ($P \equiv Q$) EN UNA INTERPRETACION CON DOMINIO D, SI SON VALIDAS, EN ESA INTERPRETACION CON DOMINIO D, LAS CONDICIONALES SIGUIENTES:

(SI P ENTONCES Q) *y* (SI Q ENTONCES P)

ES DECIR, ($P \equiv Q$) SI SON VALIDAS ($P \longrightarrow Q$) *y* ($Q \longrightarrow P$) (D)

EJEMPLOS: A) LAS PROPOSICIONES

$X = -5$ *y* $X + 7 = 2$ ($D = \mathbb{Z}$)

SON EQUIVALENTES ENTRE SI, YA QUE SON VALIDAS LAS CONDICIONALES:

SI $X = -5$ ENTONCES $X + 7 = 2$
y SI $X + 7 = 2$ ENTONCES $X = -5$

POR TANTO, $X = -5 \equiv X + 7 = 2$ ($D = \mathbb{Z}$)

B) LAS PROPOSICIONES

$X = Y$ *y* $MX = MY$ ($M \in \mathbb{Z}$), ($D = \mathbb{Z}$)

NO SON EQUIVALENTES ENTRE SI, YA QUE SI $0 \times 3 = 0 \times 2$ ENTONCES $3 = 2$ (ES UNA INSTANCIA QUE CONDUCE DE LO VERDADERO A LO FALSO), PARA EL CASO DE LA CONDICIONAL SI $MX = MY$ ENTONCES $X = Y$ (NO-VALIDA).

1.4.1 RECIPROCA DE UNA CONDICIONAL

DEFINICION.- LA RECIPROCA (INVERSA) DE UNA CONDICIONAL, ES LA CONDICIONAL RESULTANTE DE ELLA AL INTERCAMBIAR EL ANTECEDENTE Y EL CONSECUENTE.

1.4.2 CONTRAPUESTA DE UNA CONDICIONAL

DEFINICION.- LA CONTRAPUESTA (CONTRAPOSITIVA) DE UNA CONDICIONAL ES LA CONDICIONAL QUE RESULTA DE NEGAR EL ANTECEDENTE Y EL CONSECUENTE DE LA RECIPROCA DE LA CONDICIONAL DADA.

EJEMPLOS:

A)

SI $X = 10$ ENTONCES X ES PAR (CONDICIONAL DADA)
SI X ES PAR ENTONCES $X = 10$ (RECIPROCA)
SI X NO ES PAR ENTONCES $X \neq 10$ (CONTRAPUESTA)

B)

SI $X = 5$ ENTONCES $3X + 2 = 17$ (CONDICIONAL DADA)
SI $3X + 2 = 17$ ENTONCES $X = 5$ (RECIPROCA)
SI $3X + 2 \neq 17$ ENTONCES $X \neq 5$ (CONTRAPUESTA)

C)

SI HOY ES DOMINGO ENTONCES NO HAY CLASES (CONDICIONAL DADA)
SI NO HAY CLASES ENTONCES HOY ES DOMINGO (RECIPROCA)
SI HAY CLASES ENTONCES HOY NO ES DOMINGO (CONTRAPUESTA)

DE ESTOS EJEMPLOS SE INFIERE QUE LA CONDICIONAL DADA PUEDE SER VALIDA Y NO SERLO SU RECIPROCA, LO QUE NO SUCEDE CON LA CONTRAPUESTA.

ES DECIR, TODA CONDICIONAL ES EQUIVALENTE A SU CONTRAPUESTA.

SIMBOLICAMENTE: $P \longrightarrow Q$ (CONDICIONAL DADA)
$Q \longrightarrow P$ (RECIPROCA)
$\sim Q \longrightarrow \sim P$ (CONTRAPUESTA)

POR LO ANTERIOR, ENTONCES $P \longrightarrow Q \equiv \sim Q \longrightarrow \sim P$, NOTESE QUE ESTA EQUIVALENCIA NO DEPENDE DE LA INTERPRETACION.

VEAMOS, YA QUE $P \longrightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$

POR TANTO, $\sim Q \longrightarrow \sim P \equiv [\sim(\sim Q)] \vee [\sim P]$

$\equiv Q \vee \sim P$ (DOBLE NEGACION)

$\equiv \sim P \vee Q$ (CONMUTATIVIDAD)

ES DECIR, $P \longrightarrow Q \equiv \sim P \vee Q \equiv \sim Q \longrightarrow \sim P$

E J E R C I C I O S

1.- ESCRIBA LA RECIPROCA DE CADA CONDICIONAL Y VEA SI LA CONDICIONAL DADA Y SU RECIPROCA SON VALIDAS.

A) SI $XY = XY$ ENTONCES $X + Y = X + Y$

B) $X + Y = X + Y$ SI $X = Y$

C) $X = Y$ SOLO SI $X + Y = 10$

D) $X = 2$ ES UNA CONDICION NECESARIA PARA QUE $X^2 = 4$

2.- DEBAJO DE CADA CONDICIONAL ESCRIBA SU CONTRAPUESTA Y ORALMENTE PRUEBE QUE SON EQUIVALENTES.

A) SI HOY ES MARTES ENTONCES MAÑANA HAY EXAMEN

B) SI $X = 11$ ENTONCES X NO ES PAR

C) SI X NO VIENE ENTONCES Y ESTA ENFERMA

D) SI X ES ORO ENTONCES X BRILLA

3.- DECIR SI LAS PROPOSICIONES SON EQUIVALENTES EN SU RESPECTIVA INTERPRETACION.

A) $X = 7 \equiv$ X ES PAR ($D = \mathbb{N}$)

B) "HOY ES LUNES" $\equiv$ "MAÑANA ES MARTES" (D= DIAS DE LA SEMANA)

C) "X ES PADRE DE Y" $\equiv$ "Y ES HIJO DE X" (D= SERES HUMANOS)

1.5 ARGUMENTOS

HEMOS VISTO CUANDO UNA PROPOSICION ES VALIDA, FALTA AHORA DETERMINAR UN CRITERIO PARA CUANDO SE TENGA UN CONJUNTO DE PROPOSICIONES, PARA ELLO, DEBEMOS DEFINIR ALGUNOS TERMINOS.

DEFINICION.- UN ARGUMENTO ES UN CONJUNTO DE PROPOSICIONES DE LOS CUALES SE AFIRMA QUE HAY UNA (CONCLUSION), QUE SE SIGUE DE LAS DEMAS (PREMISAS).

SE EMPLEARA INDISTINTAMENTE EL TERMINO ARGUMENTO O RAZONAMIENTO.

UN RAZONAMIENTO ES CORRECTO CUANDO PARA CUALQUIER INTERPRETACION, SI SUS PREMISAS SON VERDADERAS, ENTONCES NECESARIAMENTE LO ES TAMBIEN LA CONCLUSION.

EN NINGUN MOMENTO SE MENCIONA QUE DEBEN SER LAS PREMISAS VERDADERAS, SINO QUE, SI LO SON, LO SERA TAMBIEN LA CONCLUSION, SI NO LO SON, EL VALOR DE VERDAD DE LA CONCLUSION PUEDE SER CUALQUIERA. ES DECIR, NO IMPORTA EL CONTENIDO SINO LA FORMA.

EJEMPLOS DE ARGUMENTOS CORRECTOS O VALIDOS:

MODUS PONENS

SI P ENTONCES Q

$\underline{\quad P \quad}$

$\therefore$ Q

MODUS TOLLENS

SI P ENTONCES Q

$\underline{\sim Q \quad}$

$\therefore \sim P$

MODUS TOLLENDO PONENS

P v Q

$\underline{\sim P \quad}$

$\therefore$ Q

EJEMPLOS DE ARGUMENTOS VALIDOS E INVALIDOS:

VALIDO CON CONCLUSION FALSA	VALIDO CON CONCLUSION VERDADERA
TODAS LAS AVES PUEDEN VOLAR	TODAS LAS AVES PUEDEN VOLAR
LOS AVESTRUCES SON AVES	LOS PAJAROS SON AVES
∴ LOS AVESTRUCES PUEDEN VOLAR	∴ LOS PAJAROS PUEDEN VOLAR

INVALIDO CON CONCLUSION VERDADERA	INVALIDO CON CONCLUSION FALSA
TODAS LAS AVES PUEDEN VOLAR	TODAS LAS AVES PUEDEN VOLAR
TODOS LOS PAJAROS PUEDEN VOLAR	ALGUNOS MAMIFEROS PUEDEN VOLAR
∴ TODOS LOS PAJAROS SON AVES	∴ ALGUNOS MAMIFEROS SON AVES

VALIDO CON CONCLUSION FALSA	VALIDO CON CONCLUSION VERDADERA
SI 2 ES PAR ENTONCES 4 ES IMPAR	4 ES PRIMO O 4 ES PAR
2 ES PAR	4 NO ES PRIMO
∴ 4 ES IMPAR	∴ 4 ES PAR

UNA IDEA INTUITIVA DE VALIDEZ DE ARGUMENTOS SERIA LA SIGUIENTE:

"QUE CONSIDERANDO VERDADERAS A TODAS LAS PREMISAS, LA CONCLUSION TENGA QUE SER NECESARIAMENTE VERDADERA". ASI, EN UN ARGUMENTO VALIDO, SI LAS PREMISAS SON TODAS VERDADERAS, TENDREMOS LA CERTEZA DE QUE LA CONCLUSION ES VERDADERA.

E J E R C I C I O S

DECIR SI SON CORRECTOS LOS SIGUIENTES ARGUMENTOS:

A) EL DIJO QUE VENDRIA SI NO LLOVIA
ESTA LLOVIENDO
EL NO VENDRA

B) $F(X) = |X|$ ES CONTINUA EN CERO SI ES DERIVABLE EN CERO
$F(X) = |X|$ NO ES DERIVABLE EN CERO
$F(X) = |X|$ NO ES CONTINUA EN CERO.

(TEOREMA: SI $F(X)$ ES DERIVABLE EN X_0 ENTONCES $F(X)$ ES CONTINUA EN X_0)

C) 4 ES PRIMO SI NO TIENE DIVISORES DISTINTOS DE 1 Y DE EL MISMO
4 SI TIENE DIVISORES DISTINTOS DE 1 Y DE EL MISMO (A SABER: 2)
4 NO ES PRIMO.

D) 2 ES PRIMO SI NO TIENE DIVISORES DISTINTOS DE 1 Y DE EL MISMO
2 NO TIENE DIVISORES DISTINTOS DE 1 Y DE EL MISMO
2 ES PRIMO

E) 1 ES PRIMO SI NO TIENE DIVISORES DISTINTOS DE 1 Y DE EL MISMO
1 NO TIENE DIVISORES DISTINTOS DE 1 Y DE EL MISMO
1 ES PRIMO.

F) SI 4 ES PAR ENTONCES 16 ES PAR
SI 16 NO ES PAR ENTONCES 18 ES PAR
SI 4 ES PAR ENTONCES 18 ES PAR

1.6 TABLAS DE VERDAD

UN METODO QUE SE EMPLEA PARA PROBAR SI UN ARGUMENTO ES CORRECTO, ES EL DE "HACER" SU TABLA DE VERDAD.

POR LO QUE ANTES DE ABOCARNOS A LA VALIDEZ DE ARGUMENTOS, ES NECESARIO ELABORAR LAS TABLAS DE VERDAD DE LOS DIFERENTES CONECTIVOS LOGICOS.

1.6.1 TABLA DE VERDAD DE LA NEGACION

SI UNA PROPOSICION P ES VERDADERA, SU NEGACION SERA FALSA. ANALOGAMENTE, SI UNA PROPOSICION P ES FALSA, SU NEGACION SERA VERDADERA.

POR CONSIGUIENTE, LA TABLA DE VERDAD DE LA NEGACION ES:

P	$\sim$ P
V	F
F	V

CONVIENE EN ESTE MOMENTO HACER LA SIGUIENTE OBSERVACION:

UNA PROPOSICION CUALQUIERA TIENE DOS POSIBLES VALORES DE VERDAD; A SABER: VERDADERO (V) o FALSO (F).

DOS PROPOSICIONES TENDRAN 4 POSIBLES COMBINACIONES DE VALORES DE VERDAD: VV, VF, FV, FF.

EN EL CASO DE TRES PROPOSICIONES, HABRA 8 POSIBLES COMBINACIONES DE VALORES DE VERDAD: VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF.

EN GENERAL, SI SE TIENEN n PROPOSICIONES, EL NUMERO DE COMBINACIONES SERA IGUAL A 2^n.

1.6.2 TABLA DE VERDAD DE LA CONJUNCION

SUPONGASE QUE UNA SEÑORITA ACABA DE CONCLUIR SUS ESTUDIOS DE SECRETARIA Y DESEA PONER EN PRACTICA LOS CONOCIMIENTOS ADQUIRIDOS, POR LO QUE DESEA TRABAJAR EN UNA FABRICA, OFICINA, COMPAÑIA, EMPRESA, ETC.

AL EMPEZAR A BUSCAR TRABAJO, RECURRE A LOS PERIODICOS Y EN LA SECCION DEL "AVISO OPORTUNO", LEE EL SIGUIENTE AVISO.

EMPRESA IMPORTANTE

"SOLICITA MUCHACHA JOVEN, ATRACTIVA, QUE TENGA DESEOS DE SUPERARSE, QUE SEPA TAQUIGRAFIA Y MECANOGRAFIA. PRESTACIONES LAS DE LA LEY, SEGURO, SEMANA INGLESA, ... "

AQUI LO QUE SE REQUIERE PARA QUEDARSE CON EL EMPLEO, ES CUMPLIR CON CIERTAS CUALIDADES, ENTRE LAS QUE DESTACAN QUE SEPA TAQUIGRAFIA Y MECANOGRAFIA; ES DECIR, QUE SEPA AMBAS. SI POR ALGUNA RAZON, NO SABE UNA DE ELLAS, NO SE LE ACEPTARA EN EL PUESTO.

POR TANTO, SE TIENEN 4 TIPOS POSIBLES DE CANDIDATAS AL PUESTO, A SABER:

SABE TAQUIGRAFIA, SABE MECANOGRAFIA
SABE TAQUIGRAFIA, NO SABE MECANOGRAFIA
NO SABE TAQUIGRAFIA, SABE MECANOGRAFIA
NO SABE TAQUIGRAFIA, NO SABE MECANOGRAFIA

POR CONSIGUIENTE, SOLO EN EL PRIMER CASO SE ACEPTARA A LA CANDIDATA.

SI CONSIDERAMOS "SABER" COMO VERDADERO, "NO SABER" COMO FALSO, SE TIENE LA SIGUIENTE TABLA DE VERDAD DE LA CONJUNCION.

SI CONSIDERAMOS T= "TAQUIGRAFIA" y M= "MECANOGRAFIA" Y, ADEMAS EL RESULTADO DE LA CONJUNCION "V" COMO ACEPTADA Y "F" COMO NO ACEPTADA.

T	M	$T \wedge M$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

POR LO QUE SE OBSERVA, QUE UNA CONJUNCION SOLO ES VERDADERA, CUANDO AMBOS VALORES DE SUS COMPONENTES SON VERDADEROS. O DE OTRA FORMA, ES FALSA CUANDO AL MENOS UNA DE SUS COMPONENTES ES FALSA.

1.6.3 TABLA DE VERDAD DE LA DISYUNCION

UN EJEMPLO PARECIDO NOS PUEDE SERVIR PARA ILUSTRAR LA DISYUNCION, SOLO QUE EN ESTA EMPRESA SE PIDEN MENOS REQUISITOS.

VEAMOS EL ANUNCIO:

EMPRESA IMPORTANTE

"SOLICITA MUCHACHA JOVEN, ATRACTIVA, QUE TENGA DESEOS DE SUPERARSE, QUE SEPA TAQUIGRAFIA O MECANOGRAFIA. PRESTACIONES LAS DE LA LEY, SEGURO, SEMANA INGLESA, ... "

AQUI LO QUE SE REQUIERE PARA QUEDARSE CON EL EMPLEO, ES SABER CUALQUIERA DE LAS DOS COSAS; ES DECIR, TAQUIGRAFIA O MECANOGRAFIA. SI SABE AMBAS, TENDRA MAS POSIBILIDADES DE QUE SEA CONTRATADA.

HACIENDO LAS MISMAS CONSIDERACIONES QUE SE HICIERON PARA LA CONJUNCION, SE TIENE ENTONCES LA SIGUIENTE TABLA DE VERDAD DE LA DISYUNCION:

T	M	T v M
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

SE OBSERVA, QUE PARA QUE UNA DISYUNCION SEA VERDADERA, BASTA CON QUE AL MENOS UNA DE SUS COMPONENTES SEA VERDADERA.

1.6.4 TABLA DE VERDAD DE LA CONDICIONAL

COMO YA SE HABIA MENCIONADO ANTERIORMENTE, UNA CONDICIONAL ES VALIDA SI NO CONDUCE DE LA VERDADERO A LO FALSO. ES DECIR, UNA CONDICIONAL ES VERDADERA EN LOS TRES CASOS RESTANTES, A SABER:

VERDADERO - VERDADERO
FALSO - VERDADERO
FALSO - FALSO

ALGUNOS AUTORES DEFINEN LA TABLA DE VERDAD DE LA CONDICIONAL DE LA SIGUIENTE MANERA: "UNA CONDICIONAL ES FALSA, CUANDO EL ANTECEDENTE ES VERDADERO Y EL CONSECUENTE ES FALSO; EN LOS DEMAS CASOS ES VERDADERA".

POR TANTO, SE TIENE LA SIGUIENTE TABLA PARA LA CONDICIONAL:

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.6.5 TABLA DE VERDAD DE LA BICONDICIONAL

ANTERIORMENTE SE HABIA VISTO QUE UNA BICONDICIONAL $P \longleftrightarrow Q$ ES EQUIVALENTE A LA CONJUNCION DE LAS CONDICIONALES $P \longrightarrow Q$ *y* $Q \longrightarrow P$, ENTONCES RESULTA SENCILLO ELABORAR SU TABLA DE VERDAD, YA QUE CONOCEMOS LOS VALORES PARA UNA CONDICIONAL Y PARA LA CONJUNCION.

P	Q	$(P \longleftrightarrow Q)$	$(P \longrightarrow Q)$	$\wedge$	$(Q \longrightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

1.7 PRIORIDAD ENTRE LOS CONECTIVOS

ASI COMO EN LA ARITMETICA ELEMENTAL HAY NECESIDAD DE DAR PRIORIDAD O DE DAR MAYOR POTENCIA A UNOS SIGNOS ARITMETICOS SOBRE OTROS, EN LA -- LOGICA MATEMATICA EXISTE TAMBIEN ESTA NECESIDAD SOBRE LOS CONECTIVOS LOGICOS. ASI MISMO, ES IMPORTANTE TENER CUIDADO EN SEGUIR LAS INSTRUCCIONES DE LOS PARENTESIS, PUES SI ESTOS SE OMITEN, LOS RESULTADOS SERAN DIFERENTES, COMO LO MUESTRA EL SIGUIENTE EJEMPLO DE LA ARITMETICA:

$$(3 + 5) \times 4 + 8 = 40$$

$$3 + (5 \times 4) + 8 = 31$$

$$(3 + 5) \times (4+8) = 96$$

$$3 + 5 \times (4 + 8) = 63$$

LAS REGLAS DE LOS SIGNOS EN LA ARITMETICA SON LAS SIGUIENTES:

1° SE EFECTUAN LAS OPERACIONES INDICADAS DENTRO DE LOS PARENTESIS

2° SE EFECTUAN LAS MULTIPLICACIONES

3° SE EFECTUAN LAS SUMAS

SUPONIENDO QUE EN LOGICA SE TUVIERA UNA PROPOSICION COMPUESTA COMO $P \vee Q \wedge R$, NO SABRIAMOS DETERMINAR SI SE TRATA DE UNA DISYUNCION O DE UNA CONJUNCION.

EN CAMBIO, SI SE TUVIERA $(P \vee Q) \wedge R$, DIRIAMOS QUE SE TRATA DE UNA CONJUNCION. ANALOGAMENTE, SI TUVIERAMOS $P \vee (Q \wedge R)$, DIRIAMOS QUE SE TRATA DE UNA DISYUNCION.

POR OTRO LADO, SI SE TUVIERA $\sim P \rightarrow Q \vee R$ ¿ SERA NEGACION, CONDICIONAL O DISYUNCION ?

SI COLOCAMOS PARENTESIS EN DISTINTOS LUGARES, SE TIENE:

$\sim (P \rightarrow Q \vee R)$, QUE ES UNA NEGACION;

$(\sim P) \rightarrow (Q \vee R)$, QUE ES UNA CONDICIONAL;

$(\sim P \rightarrow Q) \vee R$, QUE ES UNA DISYUNCION.

POR TANTO, SE OBSERVA QUE LOS PARENTESIS JUEGAN TAMBIEN UN PAPEL IMPORTANTE EN LA LOGICA MATEMATICA.

EN EL CASO QUE NO SE TENGAN PARENTESIS EN UNA PROPOSICION COMPUESTA COMO POR EJEMPLO: $\sim P \wedge Q \rightarrow R \vee S$, NO SABRIAMOS A QUE TIPO DE PROPOSICION SE TRATA; PARA EVITAR TALES DESCONCIERTOS, MENCIONAREMOS LAS -- PRIORIDADES ENTRE LOS CONECTIVOS.

EL CONECTIVO MAS FUERTE ES EL DE LA CONDICIONAL. EL MAS DEBIL ES EL DE LA NEGACION. LOS CONECTIVOS DE LA CONJUNCION Y DISYUNCION TIENEN IGUAL FUERZA ENTRE SI, PERO RESPECTO A LOS DOS ANTERIORES, SE ENCUENTRAN EN UN TERRENO INTERMEDIO. ES DECIR, VIENDOLOS EN ORDEN DE MAYOR A MENOR FUERZA, SE TIENE:

PRIORIDAD ENTRE CONECTIVOS

CONDICIONAL ($\longrightarrow$)
CONJUNCION, DISYUNCION ($\wedge$, $\vee$)
NEGACION ($\sim$)

POSIBLEMENTE SURJA LA PREGUNTA: ¿ QUE PRIORIDAD TIENE EL CONECTIVO DE LA BICONDICIONAL ?

OBVIAMENTE, ES MAS POTENTE QUE CUALQUIER OTRO CONECTIVO (RECORDEMOS QUE ES LA CONJUNCION DE DOS CONDICIONALES).

AHORA SI ESTAMOS EN CONDICIONES DE DETERMINAR CUANDO UNA PROPOSICION ES UNA CONDICIONAL, DISYUNCION, CONJUNCION, NEGACION, BICONDICIONAL.

EJEMPLOS:

A) $P \wedge \sim Q$	CONJUNCION
B) $\sim P \longrightarrow Q$	CONDICIONAL
C) $\sim (P \vee Q)$	NEGACION
D) $P \longrightarrow (Q \longleftrightarrow R)$	CONDICIONAL
E) $(P \wedge Q) \vee R$	DISYUNCION
F) $P \vee (Q \longrightarrow \sim R)$	DISYUNCION

E J E R C I C I O S

1.- DECIR DE QUE TIPO DE PROPOSICION SE TRATA.

A) $\sim P \longrightarrow \sim Q$
B) $\sim (P \longrightarrow Q) \wedge R$
C) $P \vee (\sim Q \longrightarrow R)$
D) $P \longleftrightarrow Q \vee \sim R$
E) $P \longrightarrow Q \longleftrightarrow R$
F) $P \wedge (\sim Q \longrightarrow R)$
G) $(\sim P \vee Q) \wedge R$
H) $P \vee \sim Q$

2.- COLOCAR EL (LOS) PARENTESIS DONDE CORRESPONDA, PARA QUE LA PROPOSICION SEA LO QUE SE INDICA (EN CASO NECESARIO).

A) DISYUNCION	$\sim P \rightarrow Q \vee R$
B) CONJUNCION	$P \wedge \sim Q \vee R$
C) NEGACION	$\sim P \wedge \sim Q$
D) CONDICIONAL	$P \rightarrow Q \vee \sim R$
E) BICONDICIONAL	$P \rightarrow Q \leftrightarrow R$
F) NEGACION	$\sim P \rightarrow \sim Q$
G) DISYUNCION	$P \rightarrow Q \vee R$
H) CONJUNCION	$P \wedge \sim Q \rightarrow R$

ES IMPORTANTE, ANTES DE EMPEZAR A ELABORAR TABLAS DE VERDAD QUE INVOLUCREN VARIAS PROPOSICIONES, LAS PRIORIDADES DE LOS CONECTIVOS, PARA IR LLENANDO LA TABLA DE ACUERDO CON LAS REGLAS QUE SE MENCIONARON ANTERIORMENTE.

EJEMPLOS:

HACER LA TABLA DE VERDAD DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES

A) O $\underbrace{\text{YO ESTOY EQUIVOCADO}}_{E}$ Y $\underbrace{\text{TENGO LA RAZON}}_{R}$ O $\underbrace{\text{EL PROFESOR ES UN MENTIROSO}}_{P}$.

B) NO ES CIERTO QUE SI $\underbrace{\text{ESTUDIO MUCHO}}_{E}$ ENTONCES $\underbrace{\text{APRENDERE}}_{A}$.

C) SI $\underbrace{\text{CONCLUYO EL BACHILLERATO EN TRES AÑOS}}_{B}$ Y $\underbrace{\text{CON PROMEDIO MINIMO DE OCHO}}_{P}$, ENTONCES $\underbrace{\text{TENGO PASE AUTOMATICO A FACULTAD}}_{F}$.

SIMBOLIZANDO CADA UNA, SE TIENE:

A) $(E \wedge R) \vee P$

B) $\sim (E \rightarrow A)$

C) $B \wedge P \rightarrow F$

A)

E	R	P	(E ∧ R)	v	P
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F
				*	

B)

E	A	∼	(E ⟶ A)
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	F	V
F	F	F	V
		*	

C)

B	P	F	B ∧ P	⟶	F
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F
				*	

RESUMIENDO, LOS VALORES DE VERDAD DE LOS CONECTIVOS LOGICOS:

A) UNA NEGACION ES VERDADERA SI Y SOLO SI LO QUE NIEGA ES FALSO.

B) UNA CONJUNCION ES VERDADERA SI Y SOLO SI AMBOS CONYUNTOS SON VERDADEROS.

C) UNA DISYUNCION ES VERDADERA SI Y SOLO SI AL MENOS UNO DE LOS DISYUNTOS ES VERDADERO.

D) UNA CONDICIONAL ES VERDADERA SI Y SOLO SI O EL ANTECEDENTE ES FALSO O EL CONSECUENTE ES VERDADERO.

E) UNA BICONDICIONAL ES VERDADERA SI Y SOLO SI AMBAS PARTES TIENEN EL MISMO VALOR DE VERDAD.

E J E R C I C I O S

HACER LA TABLA DE VERDAD DE:

1. $P \wedge Q \rightarrow P$
2. $P \vee Q \rightarrow R$
3. $(P \wedge Q) \vee R$
4. $P \wedge (Q \vee R)$
5. $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
6. $P \wedge Q \rightarrow R$
7. $\sim (P \wedge Q)$
8. $\sim P \vee \sim Q$
9. $\sim P \wedge \sim Q$
10. $\sim (P \vee Q)$
11. $[(P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow Q$ MODUS PONENDO PONENS
12. $[(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q] \rightarrow \sim P$ MODUS TOLLENDO TOLLENS
13. $P \wedge \sim P$ LEY DE LA CONTRADICCION
14. $\sim (P \vee \sim P)$ CONTRADICCION
15. $P \rightarrow P \vee P$ TAUTOLOGIA
16. $P \vee \sim P$ LEY DEL TERCERO EXCLUIDO
17. $\sim (P \wedge \sim P)$ LEY DE NO CONTRADICCION
18. $P \leftrightarrow \sim (\sim P)$ LEY DE DOBLE NEGACION

AL REALIZAR LAS TABLAS DE VERDAD DE ALGUNOS EJERCICIOS, SE OBSERVA QUE LOS VALORES QUE SE OBTUVIERON AL FINAL O BIEN ERAN TODOS VERDADEROS, O TODOS FALSOS, O VERDADEROS Y FALSOS.

1.8 TAUTOLOGIA, CONTRADICCION Y CONTINGENCIA.

DEFINICION.- UNA PROPOSICION QUE ES VERDADERA EN TODOS LOS CASOS, CUALQUIERA QUE SEA EL VALOR DE VERDAD DE SUS COMPONENTES, SE LLAMA -- TAUTOLOGIA.

EJEMPLO: $P \rightarrow P \vee Q$

P	Q	P →	P v Q
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	F
		*	

DEFINICION.- UNA PROPOSICION QUE ES FALSA EN TODOS LOS CASOS, CUALQUIERA QUE SEA EL VALOR DE VERDAD DE SUS COMPONENETES, SE LLAMA -- CONTRADICCION.

EJEMPLO: $(P \wedge Q) \wedge \sim Q$

P	Q	(P ∧ Q)	∧	~Q
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	F	F	F
F	F	F	F	V
			*	

NOTA: LA NEGACION DE UNA TAUTOLOGIA ES UNA CONTRADICCION Y LA NEGACION DE UNA CONTRADICCION ES UNA TAUTOLOGIA.

DEFINICION.- UNA PROPOSICION QUE ES VERDADERA EN ALGUNOS CASOS Y FALSA EN OTROS, DEPENDIENDO DEL VALOR DE VERDAD DE SUS COMPONENTES, SE LLAMA CONTINGENCIA (MIXTA O INDETERMINADA).

EJEMPLO: $[(P \vee Q) \wedge \sim Q] \longrightarrow \sim P$

P	Q	$[(P$	$\vee$	$Q)$	$\wedge$	$\sim Q]$	$\longrightarrow$	$\sim P$
V	V		V		F	F	V	F
V	F		V		V	V	F	F
F	V		V		F	F	V	V
F	F		F		F	V	V	V

$*$ $**$

1.9 IMPLICACION TAUTOLOGICA

DEFINICION.- UN RAZONAMIENTO ES VALIDO SI Y SOLO SI LA CONDICIONAL CORRESPONDIENTE ES UNIVERSALMENTE VALIDA.

¿QUE ENTENDER POR CONDICIONAL CORREPONDIENTE Y UNIVERSALMENTE VALIDA?. LA "CONDICIONAL CORRESPONDIENTE" ES LA FORMADA POR LA CONJUNCION DE LAS PREMISAS DEL RAZONAMIENTO, QUE HARIAN EL ANTECEDENTE Y; LA CONCLUSION DEL RAZONAMIENTO QUE HARIA EL CONSECUENTE. LA EXPRESION "UNIVERSALMENTE VALIDA" SIGNIFICA QUE ES VALIDA EN CUALQUIER DOMINIO E INTERPRETACION.

POR OTRO LADO, CUALQUIER TAUTOLOGIA ES UNIVERSALMENTE VALIDA, YA QUE EL VALOR DE VERDAD DE LA TAUTOLOGIA ES INDEPENDIENTE DEL VALOR DE VERDAD DE SUS COMPONENTES. POR TANTO, UN RAZONAMIENTO ES VALIDO CUANDO LA CONDICIONAL CORRESPONDIENTE ES UNA TAUTOLOGIA (AUNQUE HAY OTROS CASOS DE RAZONAMIENTOS VALIDOS). POR EJEMPLO:

1) TODOS LOS HOMBRES SON MORTALES
2) SOCRATES ES UN HOMBRE

SOCRATES ES MORTAL

¡ES UN RAZONAMIENTO VALIDO Y SIN EMBARGO LA CONDICIONAL CORRESPONDIENTE NO ES UNA TAUTOLOGIA!.

EJEMPLOS:

A) ARGUMENTO DE SOCRATES Y PLATON.

1) SOCRATES NO DESEA VISITAR A PLATON, SI PLATON NO DESEA VISITARLO A EL.
2) PLATON NO DESEA VISITAR A SOCRATES SI SOCRATES DESEA VISITARLO A EL, PERO SI DESEA VISITAR A SOCRATES SI ESTE NO DESEA VISITARLO A EL.
3) ¿ DESEA SOCRATES VISITAR A PLATON, O NO ?

EN LA PRIMERA LECTURA QUE UNO HACE DE ESTE ARGUMENTO, RESULTA UN POCO EMBARAZOSO TRATAR DE SIMBOLIZARLO ADECUADAMENTE, POR LO QUE HAREMOS UNA REESCRITURA DEL MISMO.

1) SI PLATON NO DESEA VISITAR A SOCRATES, ENTONCES SOCRATES NO DESEA VISITAR A PLATON.
2) SI SOCRATES DESEA VISITAR A PLATON ENTONCES PLATON NO DESEA VISITAR A SOCRATES, Y SI SOCRATES NO DESEA VISITAR A PLATON ENTONCES PLATON SI DESEA VISITAR A SOCRATES.
3) ¿ DESEA SOCRATES VISITAR A PLATON, O NO ?

SIMBOLIZANO DE LA SIGUIENTE MANERA:

P = "PLATON DESEA VISITAR A SOCRATES"
S = "SOCRATES DESEA VISITAR A PLATON"

OBTENEMOS:

1) $\sim P \rightarrow \sim S$
2) $(S \rightarrow \sim P) \wedge (\sim S \rightarrow P)$
3) S
o 3') $\sim S$

VEAMOS LA IMPLICACION RESULTANTE Y SUPONGAMOS QUE LA CONCLUSION ES S.

$[(\sim P \longrightarrow \sim S) \wedge (S \longrightarrow \sim P) \wedge (\sim S \longrightarrow P)] \longrightarrow S$; HAGAMOS SU TABLA DE VERDAD.

P	S	[($\sim P$	$\longrightarrow$	$\sim S$)	$\wedge$	(S	$\longrightarrow$	$\sim P$)	$\wedge$	($\sim S$	$\longrightarrow$	P)]	$\longrightarrow$	S
V	V	F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V	F
			*				*					*		
					**				***				****	

SE OBSERVA QUE NO RESULTA TAUTOLOGIA, i.e., "SOCRATES DESEA VISITAR A PLATON", <u>NO</u> ES LA CONCLUSION DEL ARGUMENTO.

SUPONGAMOS AHORA QUE LA CONCLUSION ES $\sim S$, ENTONCES ELABORANDO LA TABLA DE VERDAD Y CONSIDERANDO QUE YA SE OBTUVIERON LOS VALORES DEL ANTECEDENTE, TENEMOS:

P	S	[($\sim P$	$\longrightarrow$	$\sim S$)	$\wedge$	(S	$\longrightarrow$	$\sim P$)	$\wedge$	($\sim S$	$\longrightarrow$	P)]	$\longrightarrow$	$\sim S$
V	V								F				V	F
V	F								V				V	V
F	V								F				V	F
F	F								F				V	V
													*	

QUE POR SER UNA TAUTOLOGIA, IMPLICA QUE LA CONCLUSION DEL ARGUMENTO ES: "SOCRATES NO DESEA VISITAR A PLATON".

POR LO TANTO, EL ARGUMENTO ES VALIDO (POR SER UNA TAUTOLOGIA LA CONDICIONAL CORRESPONDIENTE).

SI NINGUNA DE LAS DOS TABLAS TUVIERA SOLO V's, SIGNIFICARIA QUE LAS PREMISAS NO ERAN BASTANTE FUERTES O SUFICIENTES PARA DECIDIR EL ASUNTO*

POR OTRO LADO, SI EN AMBAS TABLAS HUBIERAN APARECIDO SOLO V's, SIGFICARIA QUE LAS PREMISAS ERAN CONTRADICTORIAS*

B) CRISIPO

1) O LO PRIMERO O LO SEGUNDO O LO TERCERO
2) NO LO PRIMERO
3) NO LO SEGUNDO
POR LO TANTO, LO TERCERO.

ESTA ES UNA FORMA DE ARGUMENTO QUE PUEDE SER REPRESENTADO COMO:

1) o A o B o C
2) NO A
3) NO B
POR TANTO, C

LA CUAL A SU VEZ SE PUEDE SUSTITUIR POR ORACIONES, COMO ENSEGUIDA SE MUESTRA:

1) O EL ANIMAL SE FUE POR <u>ESTE</u> CAMINO O POR <u>ESE</u> CAMINO O POR <u>EL OTRO</u> CAMINO.
2) NO POR <u>ESTE</u> CAMINO
3) NO POR <u>ESE</u> CAMINO
POR TANTO, POR <u>EL OTRO</u> CAMINO.

CRISIPO DIJO QUE INCLUSO LOS PERROS SON CAPACES DE ARGUMENTAR EN ESTA FORMA, PORQUE EL HABIA VISTO UN PERRO PERSIGUIENDO A UN ANIMAL, LLEGAR A UNA TRIPLE DIVISION EN EL CAMINO, HUZMEAR EN DOS DE ELLOS (QUE EL ANIMAL NO HABIA TOMADO) Y SIN HUZMEAR EL TERCERO, SE ECHÓ A CORRER POR ESTE.

*Cfr. DELONG,H. "A Profile of Mathematical Logic", pp 103-104

DEMOS LA FORMA DE IMPLICACION TAUTOLOGICA, PARA VER SI EL ARGUMENTO ES VALIDO O NO, Y HAGAMOS SU TABLA.

A	B	C	$[(A \vee B \vee C)$	$\wedge$	$(\sim A)$	$\wedge$	$(\sim B)]$	$\longrightarrow$	C
V	V	V	V	F	F	F	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	F	V	V	F

$*$ $**$ $***$

POR HABER RESULTADO LA TABLA UNA TAUTOLOGIA, EL ARGUMENTO ES VALIDO.

C) PROTAGORAS VS EUATHLO

LA SIGUIENTE ANTIGUA HISTORIA*, MUESTRA UN CASO EN EL CUAL LAS TABLAS DE VERDAD DE AMBOS ARGUMENTOS SON TAUTOLOGIAS.

"PROTAGORAS HABIA SIDO CONTRATADO PARA ENSEÑARLE A EUATHLO, RETORICA, DE MANERA QUE PUDIESE SER ABOGADO, EUATHLO INICIALMENTE PAGO SOLO LA MITAD DE UNA LARGA SUMA Y HABIAN ESTADO DE ACUERDO QUE EL EL SEGUNDO PAGO SERIA HECHO UNA VEZ QUE EUATHLO HUBIESE GANADO SU PRIMER CASO EN LA CORTE. EUATHLO SIN EMBARGO, DEMORO SU PRACTICA POR ALGUN TIEMPO. PROTAGORAS PREOCUPADO ACERCA DE SU REPUTACION, ASI COMO POR LA NECESIDAD DE DINERO, DECIDIO DEMANDARLO.

---

* TOMADA DE: AMOR MONTAÑO JOSE ALFREDO, "ANTOLOGIA DE LOGICA MATEMATICA", COMUNICACION INTERNA No. 30, 1978, 2a. EDICION, DPTO. DE MATEMATICAS, FACULTAD DE CIENCIAS, p 110, 119.

EN LA CORTE, PROTAGORAS ARGUYO AL JURADO:

> EUATHLO MANTIENE QUE NO DEBIA PAGARME, PERO ESTO ES ABSURDO, PUES SUPONGAMOS QUE GANA EL CASO; YA QUE ESTA ES SU PRIMERA APARICION EN LA CORTE, ENTONCES DEBERIA PAGARME PUESTO QUE GANO SU PRIMER CASO; POR LA OTRA PARTE, SUPONGAMOS QUE PERDIO EL CASO, ENTONCES DEBIA DE PAGARME POR EL JUICIO DE LA CORTE. YA QUE EL DEBE O GANAR O PERDER EL CASO, DEBE PAGARME.

EUATHLO HABIA SIDO UN BUEN ESTUDIANTE Y PUDO CONTESTAR AL ARGUMENTO DE PROTAGORAS CON UNO SIMILAR:

> PROTAGORAS SOSTIENE QUE YO DEBERIA PAGARLE, PERO ESTO ES LO QUE ES ABSURDO, PUES SUPONGAMOS QUE EL GANA EL CASO; PUESTO QUE NO HE GANADO MI PRIMER CASO, NO NECESITO PAGARLE, DE ACUERDO A NUESTRO ARREGLO. POR OTRO LADO, SUPONGAMOS QUE PIERDE EL CASO, ENTONCES NO TENGO QUE PAGARLE, POR EL JUICIO DE LA CORTE. YA QUE EL DEBE DE GANAR O PERDER EL CASO, NO TENGO QUE PAGARLE."

SIMBOLIZANDO, SE TIENE:

A = "EUATHLO GANA EL CASO"
B = "EUATHLO GANA SU PRIMER CASO"
C = "EUATHLO DEBE PAGAR A PROTAGORAS"

ENTONCES:

<u>ARGUMENTO DE PROTAGORAS</u>

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \sim A \rightarrow C \\ \underline{A \vee \sim A} \\ \therefore C \end{array}$$

<u>ARGUMENTO DE EUATHLO</u>

$$\begin{array}{l} \sim A \rightarrow \sim B \\ \sim B \rightarrow \sim C \\ A \rightarrow \sim C \\ \underline{A \vee \sim A} \\ \therefore \sim C \end{array}$$

REALIZANDO LAS TABLAS DE AMBOS ARGUMENTOS SE TIENE:

A	B	C	[(A →	B) ∧	(B →	C) ∧	(~A	→ C)	∧	(A v	~A)]	→	C
V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	F	V	F	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F	V	F	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	V	F

A	B	C	[(A →	~C) ∧	(~A	→	~B) ∧	(~B	→	~C) ∧	(A v~A)]	→	~C
V	V	V	F	F	F	F	V	F	F	F	V	F	F	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V	F	V	F	F	F	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F	F	F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F	F	V	V	F
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V

RESULTA QUE POR SER AMBOS ARGUMENTOS TAUTOLOGIAS, SON VALIDOS; POR TANTO, ESTO IMPLICA QUE LAS PREMISAS JUNTAS SON CONTRADICTORIAS*

*Cfr. Delong, H. "A Profile of Mathematical Logic", pp 103-104

1.10 PROPOSICIONES LOGICAMENTE EQUIVALENTES

DEFINICION.- DOS PROPOSICIONES SON LOGICAMENTE EQUIVALENTES SI PARA CUALQUIER DOMINIO E INTERPRETACION, LAS DOS SON VERDADERAS O LAS DOS SON FALSAS. ES DECIR, SI UNA ES VERDADERA, LA OTRA TAMBIEN LO ES.

DEFINICION.- DOS PROPOSICIONES SON TAUTOLOGICAMENTE EQUIVALENTES SI PARA CUALQUIER ASIGNACION DE VALORES DE VERDAD A SUS BLOQUES* LAS DOS TIENEN LOS MISMOS VALORES DE VERDAD. ES DECIR, SI AL ELABORAR LAS TABLAS DE VERDAD DE AMBAS PROPOSICIONES, ESTAS RESULTAN CON LOS MISMOS VALORES EN TODAS LAS LINEAS.

EJEMPLOS: A) P ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $\sim(\sim P)$

B) $P \wedge \sim Q$ ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $\sim(\sim P \vee Q)$

C) $P \rightarrow Q$ ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $\sim P \vee Q$

D) $P \rightarrow Q$ ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $\sim Q \rightarrow \sim P$

ELABORANDO LAS RESPECTIVAS TABLAS DE VERDAD, SE TIENE:

P	$\sim(\sim P)$	
V	V	F
F	F	V
*	*	

P	Q	$P \wedge \sim Q$		$\sim(\sim P \vee Q)$		
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V
		*		*		

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\sim P \vee Q$		$\sim Q \rightarrow \sim P$		
V	V	V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
		*		*		*	

* Un bloque puede ser una proposición simple o una compuesta, v.gr. $(\sim P \rightarrow Q) \wedge \sim R$, está formada por dos bloques: $\sim P \rightarrow Q$ y por $\sim R$. Incluso puede ser una expresión de este tipo: $\forall x\ (Hx \rightarrow Mx)$, (con cuantificadores, que se verán posteriormente).

EJERCICIOS

1. ¿ $\sim(P \rightarrow Q)$ ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $P \wedge \sim Q$?
2. ¿ $\sim(P \vee \sim Q)$ ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $\sim P \wedge \sim Q$?
3. ¿ $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $P \wedge Q \rightarrow R$?
4. ¿ $P \rightarrow Q$ ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $\sim Q \rightarrow \sim P$?
5. ¿ $P \vee (Q \wedge R)$ ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$?
6. ¿ $\sim(P \wedge Q)$ ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $\sim P \vee \sim Q$?
7. ¿ $\sim(\sim P \rightarrow Q \vee R)$ ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $\sim P \wedge \sim(Q \vee R)$?
8. ¿ $\sim(\sim Q \rightarrow \sim P)$ ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $Q \rightarrow P$?
9. ¿ P ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $P \vee Q$?
10. ¿ $\sim(\sim P \vee Q)$ ES LOGICAMENTE EQUIVALENTE A: $\sim Q \wedge P$?

SE HA VISTO QUE LAS TABLAS DE VERDAD PROPORCIONAN INFORMACION ACERCA DE CUANDO UN ARGUMENTO ES CORRECTO; ES DECIR, SON UN METODO DEL CUAL NOS PODEMOS VALER PARA DECIDIR SI UN ARGUMENTO ES O NO CORRECTO.

ESTE METODO NO ES MUY PRACTICO, YA QUE SI SE TUVIERAN CINCO O MAS PROPOSICIONES DIFERENTES EN UN ARGUMENTO, SE TENDRIA QUE ELABORAR UNA TABLA DE VERDAD DE AL MENOS $2^5 = 32$ RENGLONES ¡QUE YA RESULTA BASTANTE LABORIOSO!.

PARA EVITARNOS EL HACER ESAS TABLAS DE VERDAD TAN GRANDES, EXISTEN OTROS METODOS ALTERNATIVOS PARA DECIDIR CUANDO UN ARGUMENTO ES CORRECTO, A SABER:

- METODO DE "LAS REGLAS DE INFERENCIA"
- METODO DE "LOS ARBOLES DE VERDAD"

VEAMOS CADA UNO DE ESTOS METODOS A CONTINUACION.

1.11 REGLAS DE INFERENCIA

EL METODO DE LAS REGLAS DE INFERENCIA CONSISTE EN LO SIGUIENTE:

CON BASE EN LAS PREMISAS, SE VAN INFIRIENDO NUEVAS FORMULAS DE TAL MANERA QUE SE PUEDA LLEGAR A LA CONCLUSION DESEADA. CABE ACLARAR QUE CADA NUEVA FORMULA QUE SE VA OBTENIENDO PROVIENE DE LA APLICACION DE ALGUNA REGLA DE INFERENCIA, POR LO QUE HAY QUE ESPECIFICARLA; ASI MISMO, -- LAS PREMISAS QUE SE USARON. LAS REGLAS DE INFERENCIA SON PEQUEÑOS ARGUMENTOS VALIDOS YA CONOCIDOS.

EL PASO LOGICO DE LAS PREMISAS A LA CONCLUSION ES UNA DEDUCCION.

LA CONCLUSION QUE SE OBTIENE SE DICE QUE ES UNA CONSECUENCIA LOGICA DE LAS PREMISAS.

LAS PRINCIPALES REGLAS DE INFERENCIA SON:

MODUS PONENDO PONENS (PP)

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

MODUS TOLLENDO TOLLENS (TT)

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \sim Q \\ \hline \therefore \sim P \end{array}$$

MODUS TOLLENDO PONENS (TP)

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \sim P \\ \hline \therefore Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \vee Q \\ \sim Q \\ \hline \therefore P \end{array}$$

SIMPLIFICACION (S)

$$\begin{array}{l} P \wedge Q \\ \hline \therefore P \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \wedge Q \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

ADJUNCION (ADJ)

$$\begin{array}{l} P \\ Q \\ \hline \therefore P \wedge Q \end{array}$$

LEY DE LA ADICION (LA)

$$\begin{array}{l} P \\ \hline \therefore P \vee Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \\ \hline \therefore P \vee \text{(CUALQUIER OTRA PROPOSICION)} \end{array}$$

SILOGISMO HIPOTETICO (SH)*

$$\frac{\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow R \end{array}}{\therefore\ P \rightarrow R}$$

*TRANSITIVIDAD DE $\rightarrow$.

SILOGISMO DISYUNTIVO (SD)

$$\frac{\begin{array}{c} P \vee Q \\ P \rightarrow R \\ Q \rightarrow S \end{array}}{\therefore\ R \vee S}$$

SIMPLIFICACION DISYUNTIVA (SIM DIS)

$$\frac{P \vee P}{\therefore\ P}$$

LEYES CONMUTATIVAS (LC)

$$\frac{P \vee Q}{\therefore\ Q \vee P} \qquad \frac{P \wedge Q}{\therefore\ Q \wedge P}$$

LEYES DE D'MORGAN (LM)

$$\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$$

$$\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$$

PRUEBA CONDICIONAL (PC)

SI ES POSIBLE DEDUCIR UNA PROPOSICION Q DE OTRA PROPOSICION P y UN CONJUNTO DE PREMISAS, ENONCES SE PUEDE DEDUCIR SOLO DEL CONJUNTO DE PREMISAS LA PROPOSICION CONDICIONAL $P \rightarrow Q$.

LEYES BICONDICIONALES (LB)

$$\frac{P \leftrightarrow Q}{\therefore\ P \rightarrow Q} \qquad \frac{P \leftrightarrow Q}{\therefore\ Q \rightarrow P} \qquad \frac{P \leftrightarrow Q}{\therefore\ (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)}$$

ES CONVENIENTE ACLARAR QUE PARA LA APLICACION DE ESTAS REGLAS DE INFERENCIA, BASTA QUE LAS PREMISAS TENGAN LA MISMA FORMA, SIN CONSIDERAR PARA NADA EL CONTENIDO.

NOTACION: 1) $P \rightarrow Q$ ó 1) $P \rightarrow Q$

2) P 2) $P \ / \therefore\ Q$

$\therefore\ Q$

SE USARAN INDISTINTAMENTE, AUNQUE EN LA SEGUNDA FORMA (QUE ES LA MAS EMPLEADA EN ESTE TRABAJO), HAY QUE TENER CUIDADO EN CONSIDERAR QUE LA CONCLUSION NO FORMA PARTE DE LAS PREMISAS.

EJEMPLOS DE DEDUCCIONES:

1) $P \rightarrow Q$
2) $\sim R \vee P$
3) $\sim Q$
4) $\sim S \rightarrow R$ $/ \therefore$ $S \vee T$

5)	$\sim P$	TOLLENDO TOLLENS 1,2
6)	$\sim R$	TOLLENDO PONENS 2,5
7)	S	TOLLENDO TOLLENS 4,6
8)	$S \vee T$	LEY DE LA ADICION 7

1) $\sim (P \vee \sim R)$
2) $Q \vee P$
3) $R \rightarrow S$
4) $Q \wedge S \rightarrow T \wedge S$ $/ \therefore$ T

5)	$\sim P \wedge R$	LEYES DE MORGAN 1
6)	$\sim P$	SIMPLIFICACION 5
7)	Q	TOLLENDO PONENS 2,6
8)	R	SIMPLIFICACION 5
9)	S	PONENDO PONENS 3,8
10)	$Q \wedge S$	ADJUNCION 7,9
11)	$T \wedge S$	PONENDO PONENS 4, 10
12)	T	SIMPLIFICACION 11

NOTA: ESTE METODO DE LAS REGLAS DE INFERENCIA NO ES EFECTIVO, PUES DEPENDE EN GRAN MEDIDA DE LA SAGACIDAD DE LA PERSONA PARA PODER ENCONTRAR LAS FORMAS PARA EL EMPLEO ADECUADO DE LAS REGLAS.

POR OTRO LADO, EL METODO DE LAS TABLAS DE VERDAD, AUNQUE SI ES EFECTIVO, ADOLECE DE UNA OBJECION: EN EL CASO EN QUE INTERVENGAN VARIAS PROPOSICIONES, SE VUELVE MUY LARGO EL PROCESO.

E J E R C I C I O S

DEDUCIR A PARTIR DE LAS PREMISAS LA CONCLUSION DESEADA, HACIENDO USO DE LAS REGLAS DE INFERENCIA.

1) $P \rightarrow \sim Q$
2) Q
3) $P \vee \sim R \; / \therefore \sim R$

1) $\sim P \rightarrow \sim Q$
2) $\sim Q \rightarrow R$
3) $S \rightarrow \sim(\sim P \rightarrow R) \; / \therefore \sim S$

1) $P \leftrightarrow Q$
2) $\sim Q$
3) $P \vee R \; / \therefore R \vee S$

1) $\sim R$
2) $\sim P \vee Q$
3) $Q \rightarrow R$
4) $\sim P \rightarrow \sim S \; / \therefore \sim S$

1) $\sim(P \vee \sim R)$
2) $Q \vee P$
3) $R \rightarrow S$
4) $(Q \wedge S) \rightarrow T \wedge S \; / \therefore T \wedge S$

1) $R \rightarrow \sim P$
2) $(R \wedge S) \vee T$
3) $T \rightarrow (Q \vee U)$
4) $\sim Q \wedge \sim U \; / \therefore \sim P$

1) $P \leftrightarrow Q$
2) $R \leftrightarrow Q$
3) $\sim P \; / \therefore \sim R$

1) $P \rightarrow \sim Q$
2) $R \leftrightarrow \sim Q$
3) $S \vee T \rightarrow R$
4) $(P \rightarrow R) \rightarrow S$
$/ \therefore \sim (Q \wedge U)$

1) $P \leftrightarrow Q \; / \therefore Q \leftrightarrow P$

1) $Y \not> X \leftrightarrow X = Y \vee X < Y$
2) $\sim(Y < 1 \vee Y \not> X) \; / \therefore X \not< Y \wedge X \neq Y$

1.12 LOS ARBOLES DE VERDAD

UNO DE LOS METODOS MAS EFICACES PARA DEMOSTRAR QUE UN ARGUMENTO ES CORRECTO, ES SIN DUDA ALGUNA EL DE LOS ARBOLES DE VERDAD.

POR UN LADO, SABEMOS QUE UN ARGUMENTO ES CORRECTO SI Y SOLO SI LA IMPLICACION FORMADA POR LA CONJUNCION DE LAS PREMISAS COMO ANTECEDENTE, Y COMO CONSECUENTE LA CONCLUSION, ES UNA TAUTOLOGIA.

ANTES DE VER EN QUE CONSISTE EL METODO DE LOS ARBOLES DE VERDAD, PROBAREMOS LA SIGUIENTE PROPOSICION QUE NOS SERA DE UTILIDAD EN LA APLICACION DEL METODO.

<u>PROPOSICION</u>.- SI $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ES UN CONJUNTO DE PREMISAS Y SI C ES LA CONCLUSION DE UN ARGUMENTO, ENTONCES

$\Rightarrow)$ $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \longrightarrow C$ ES TAUTOLOGIA SI Y SOLO SI

$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim C$ ES UNA CONTRADICCION.

DEMOSTRACION:

SUPONGAMOS QUE $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \longrightarrow C$ ES TAUTOLOGIA.

a) SI A_i ES FALSA PARA ALGUNA $i = 1, 2, \ldots, n$ ENTONCES

$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim C$ SERA TAMBIEN FALSA.

b) SI A_i ES VERDADERA PARA TODA $i = 1, 2, \ldots, n$ ENTONCES POR SER $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \longrightarrow C$ TAUTOLOGIA, SIGNIFICA QUE C ES VERDADERA Y POR TANTO $\sim C$ ES FALSA.

i.e. $\underbrace{\underbrace{A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n}_{V} \wedge \underbrace{\sim C}_{F}}_{F}$ ES FALSA.

$\Leftarrow$) SUPONGAMOS QUE $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim C$ ES UNA CONTRADICCION.

a) SI A_i ES FALSA PARA ALGUNA $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ENTONCES $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots\ldots \wedge A_n$ ES FALSA. POR TANTO,

$$\underbrace{\underbrace{A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n}_{F} \longrightarrow \underset{(*)}{C}}_{V} \quad \text{ES VERDADERA}$$

b) SI A_i ES VERDADERA PARA TODA $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ENTONCES YA QUE $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim C$ ES CONTRADICCION, $\sim C$ DEBE SER FALSA Y POR TANTO, C ES VERDADERA.

ASI PUES, $\underbrace{\underbrace{A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n}_{V} \longrightarrow \underset{V}{C}}_{V}$ ES VERDADERA

POR CONSIGUIENTE, LA FORMULA ES TAUTOLOGIA.

(*) C PUEDE TENER CUALQUIER VALOR, DE TODOS MODOS LA CONDICIONAL ES VERDADERA, YA QUE EL ANTECEDENTE ES FALSO.

AHORA VEAMOS EN QUE CONSISTE EL METODO DE LOS ARBOLES DE VERDAD:

EL METODO CONSISTE EN PARTIR DE LA NEGACION* DE LA CONCLUSION E IR - ADJUNTANDO LAS PREMISAS, DE TAL MANERA QUE, A LO LARGO DEL CAMINO(RAMA), SE OBTENGAN CONTRADICCIONES, SI OCURRE TAL CASO, ENTONCES LA RAMA SERA CERRADA. EN CASO DE QUE NO HAYA CONTRADICCIONES, LA RAMA SERA ABIERTA Y POR LO TANTO, $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \longrightarrow C$ NO ES TAUTOLOGIA, APLICANDO LA PROPOSICION ANTERIOR.

BASTA OBTENER UNA RAMA ABIERTA PARA QUE ELLA MISMA NOS DE LOS VALORES DE VERDAD DE LAS PROPOSICIONES EN LAS CUALES LA IMPLICACION

$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \longrightarrow C$ NO ES TAUTOLOGIA.

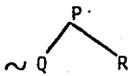
NOTACION: CUANDO SE TRATE DE CONJUNCIONES COMO PREMISAS, EMPLEAREMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA

PARA REPRESENTAR $P \wedge Q$

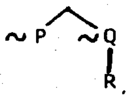
CUANDO SE TENGA UNA DISYUNCION, SE EMPLEARA EL SIGUIENTE DIAGRAMA

PARA REPRESENTAR $P \vee Q$

CUANDO HAYA NEGACIONES, ESTAS PASARAN DE IGUAL MANERA AL DIAGRAMA. EJEMPLO: $P \wedge (\sim Q \vee R)$



CUANDO HAYA CONDICIONALES, SE TRANSFORMARAN EN DISYUNCIONES. EJEMPLO: $P \longrightarrow \sim Q \wedge R \equiv \sim P \vee (\sim Q \wedge R)$



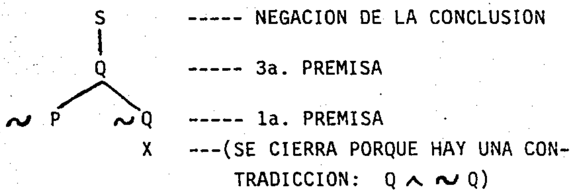
*Cfr. pag. 63

POR TANTO, ALGO IMPORTANTE QUE HAY QUE CONSIDERAR AL APLICAR ESTE -- METODO, ES TRANSFORMAR TODAS LAS PREMISAS A CONJUNCIONES O DISYUNCIONES.

EJEMPLO: CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE ARGUMENTO Y VEAMOS SI LA - CONCLUSION ES CONSECUENCIA LOGICA DE LAS PREMISAS.

1) $\sim P \vee \sim Q$
2) $\sim P \rightarrow R$
3) Q
4) $S \rightarrow \sim R \;/\therefore \sim S$

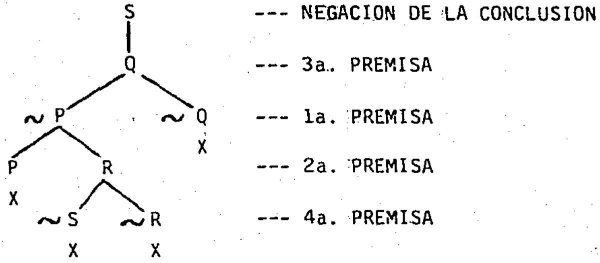
COMO OBSERVAMOS, EXISTEN EN ESTE ARGUMENTO LOS ATOMOS PROPOSICIONALES P, Q, R, S, ESO SIGNIFICA QUE SI NOSOTROS ELABORARAMOS LA TABLA DE VERDAD CORRESPONDIENTE PARA VER SI EL ARGUMENTO ES CORRECTO, TENDRIAMOS QUE HACER $2^4 = 16$ RENGLONES. PERO, EMPLEANDO EL METODO DE ARBOLES DE VERDAD, SE TIENE:



EN EL DIAGRAMA OBSERVAMOS QUE HA QUEDADO ABIERTA UNA RAMA, ES EN ESTA EN DONDE SE SEGUIRAN AGREGANDO LAS PREMISAS RESTANTES.

LA PREMISA $\sim P \rightarrow R$ ES EQUIVALENTE A: $P \vee R$, y
LA PREMISA $S \rightarrow \sim R$ ES EQUIVALENTE A: $\sim S \vee \sim R$

CONTINUANDO CON EL DIAGRAMA:



COMO TODAS LAS RAMAS SE CERRARON, ES DECIR, SE ENCONTRARON CONTRADICCIONES EN CADA UNA DE ELLAS, SIGNIFICA QUE:

$(\sim P \vee \sim Q) \wedge (\sim P \longrightarrow R) \wedge (Q) \wedge (S \longrightarrow \sim R) \wedge \sim(\sim S)$ NO ES POSIBLE,

POR TANTO, LA FORMA PROPOSICIONAL CORRESPONDIENTE AL ARGUMENTO ES TAUTOLOGIA, i.e., ES CORRECTO.

COMO SE PODRA OBSERVAR, EL METODO RESULTO MAS ECONOMICO Y MAS RAPIDO PARA DECIDIR SI EL ARGUMENTO ERA O NO CORRECTO.

CABE HACER AQUI LA ACLARACION QUE SE PUEDEN IR AGREGANDO LAS PREMISAS EN CUALQUIER ORDEN. PARA ASEGURAR QUE HAY RAMAS ABIERTAS, ES NECESARIO HABER INCLUIDO TODAS LAS PREMISAS, PERO ES POSIBLE QUE TODAS LAS RAMAS QUEDEN CERRADAS ANTES DE ACABAR DE INCLUIRLAS.

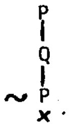
POR OTRO LADO, PARA VER SI UNA FORMULA ES TAUTOLOGIA, SE NIEGA LA FORMULA Y SE HACE EL ARBOL RESPECTIVO, SI SE CIERRAN TODAS LAS RAMAS, ENTONCES LO SERA.

EJEMPLO:

¿ ES $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$ TAUTOLOGIA ?

$P \longrightarrow (Q \longrightarrow P) = \sim P \vee (\sim Q \vee P)$, POR TANTO SU NEGACION *

SERA $P \wedge (Q \wedge \sim P)$, HACIENDO EL ARBOL RESPECTIVO:



SE CIERRA PORQUE
EXISTE LA CONTRADICCION DE $P \wedge \sim P$

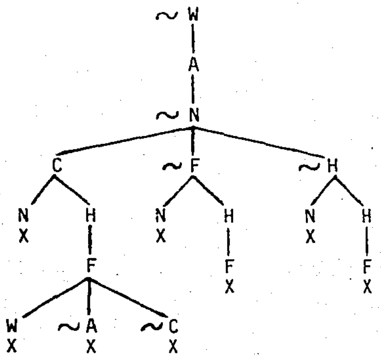
*Cfr. pag. 63

POR TANTO, LA FORMULA $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ ES TAUTOLOGIA.

EJEMPLO: ¿ ES CONSECUENCIA LOGICA DE LAS PREMISAS, LA CONCLUSION ?

1) $\sim C \wedge F \rightarrow \sim H$
2) $\sim N \rightarrow H \wedge F$
3) $\sim W \rightarrow (A \rightarrow \sim C)$ $/\therefore \sim W \wedge A \rightarrow N$

LA NEGACION DE LA CONCLUSION ES $\sim W \wedge A \wedge \sim N$



--NEG. CONCLUSION

-- 1a. PREMISA

-- 2a. PREMISA

-- 3a. PREMISA

COMO TODAS LAS RAMAS SE CERRARON, EL ARGUMENTO ES CORRECTO.

ELABORANDO LA TABLA DE VERDAD RESPECTIVA, SE NECESITARIAN $2^6 = 64$ RENGLONES. Y HACIENDOLO POR EL METODO DE LAS REGLAS DE INFERENCIA, SE TENDRIA LO SIGUIENTE:

1)	$\sim C \wedge F \rightarrow \sim H$	
2)	$\sim N \rightarrow H \wedge F$	
3)	$\sim W \rightarrow (A \rightarrow \sim C)$ $/\therefore \sim W \wedge A \rightarrow N$	
4)	$\sim W \wedge A$	P
5)	$\sim W$	S 4
6)	$A \rightarrow \sim C$	PP 3,5

7) A S 4
8) $\sim C$ PP 6,7
9) $\sim C \rightarrow (F \rightarrow \sim H)$ EXPORTACION* 1
10) $F \rightarrow \sim H$ PP 8,9
11) $\sim F \vee \sim H$ EQUIV. LOG.**10
12) $\sim (F \wedge H)$ LM 11
13) N TT 2,12
14) $\sim W \wedge A \rightarrow N$ P.C. 4, 13

NOTA: SE LLEGO A OBTENER LA CONCLUSION, PERO NO SIEMPRE ES FACIL, SE NECESITA MUCHA SUERTE Y PACIENCIA.

EJEMPLO: ¿LA CONCLUSION ES CONSECUENCIA LOGICA DE LAS PREMISAS?

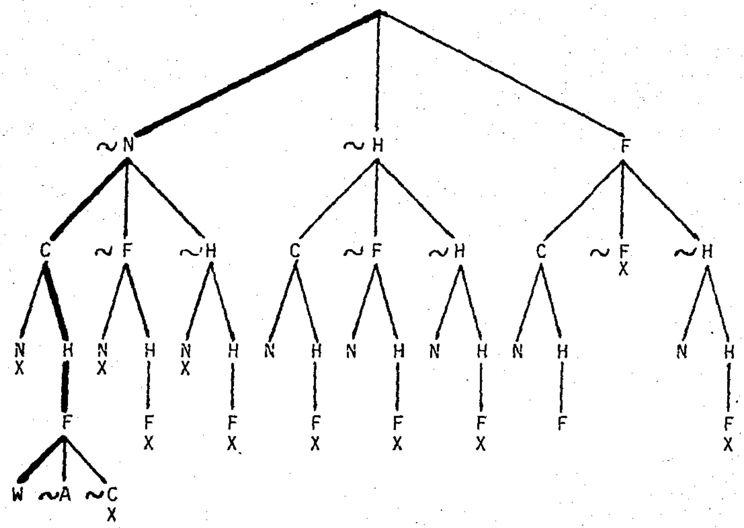
1) $\sim C \wedge F \rightarrow \sim H$
2) $\sim N \rightarrow H \wedge F$
3) $\sim W \rightarrow (A \rightarrow \sim C)$ $/\therefore \sim (N \rightarrow \sim H \vee F)$

LA NEGACION DE LA CONCLUSION ES $\sim N \vee (\sim H \vee F)$
Y TRANSFORMANDO LAS PREMISAS A DISYUNCIONES:

1) $(C \vee \sim F) \vee \sim H$
2) $N \vee (H \wedge F)$
3) $W \vee (\sim A \vee \sim C)$

ELABORANDO EL ARBOL, SE TIENE:

*Cfr. pag. 110
**Cfr. pag. 43



COMO SE PODRA OBSERVAR, QUEDARON RAMAS ABIERTAS; POR TANTO, NO ES CONSECUENCIA LOGICA YA QUE BASTA TENER UNA SOLA RAMA ABIERTA PARA MOSTRAR QUE LA CONCLUSION NO ES CONSECUENCIA LOGICA DE LAS PREMISAS.

ADEMAS, CUALQUIER RAMA ABIERTA PROPORCIONA UN CONTRAEJEMPLO. EN ESTE CASO, SE OBSERVA QUE LA RAMA ABIERTA NOS PROPORCIONA INFORMACION ACERCA DE LOS VALORES DE LOS ATOMOS, A SABER: SI CONSIDERAMOS LOS QUE NO TIENEN NEGACION COMO VERDADEROS Y LOS QUE LA TENGAN COMO FALSOS, ENTONCES:

ATOMO:	N	C	H	F	W	A
VALOR DE VERDAD:	F	V	V	V	V	

NOTESE QUE EL VALOR DE A PUEDE SER V o F.

CON ESOS VALORES SE TIENE EL CONTRAEJEMPLO, i.e., LAS PREMISAS RESULTAN VERDADERAS Y LA CONCLUSION FALSA.

1.13 DEMOSTRACION DE LA INVALIDEZ DE ARGUMENTOS

ASIGNACION DE VALORES.

PARA MOSTRAR LA INVALIDEZ DE UN ARGUMENTO, EN LUGAR DE EMPLEAR LOS METODOS USUALES (TABLAS DE VERDAD, REGLAS DE INFERENCIA, ARBOLES DE VERDAD), SE ASIGNAN VALORES DE VERDAD A LOS ATOMOS SIMPLES DE LAS PROPOSICIONES, DE TAL MANERA QUE LAS PREMISAS RESULTEN VERDADERAS Y LA CONCLUSION FALSA.

ESTE METODO DE ASIGNAR VALORES DE VERDAD TIENE INTIMA RELACION CON LAS TABLAS DE VERDAD, YA QUE VIENE A SER LA DESCRIPCION DE UN RENGLON DE LA TABLA -Y BASTA PARA ESTABLECER LA INVALIDEZ DEL ARGUMENTO-.

EJEMPLO: ¿ ES INVALIDO EL SIGUIENTE ARGUMENTO ?

1) SI 2 ES PAR ENTONES ES PRIMO
2) SI 8 ES UN NUMERO COMPUESTO ENTONCES ES PRIMO

POR TANTO, SI 2 ES PAR ENTONCES 8 ES UN NUMERO COMPUESTO.

SIMBOLIZANDO, RESULTA:

$$\begin{array}{l} 1)\ P \rightarrow Q \\ 2)\ R \rightarrow Q \\ \hline \therefore P \rightarrow R \end{array}$$

ASIGNANDO VALORES TAL QUE LAS PREMISAS SEAN VERDADERAS Y LA CONCLUSION FALSA.

LA CONCLUSION SE HACE FALSA AL ASIGNAR A $\underline{P}$ EL VALOR VERDADERO Y A $\underline{R}$ EL VALOR FALSO. LA PRIMERA PREMISA SE HACE VERDADERA AL ASIGNAR A $\underline{Q}$ EL VALOR VERDADERO.

COMO YA HAN SIDO ASIGNADOS LOS VALORES A LOS ATOMOS SIMPLES, SE OBSERVA QUE TAMBIEN LA SEGUNDA PREMISA RESULTA VERDADERA.

POR CONSIGUIENTE, EL RAZONAMIENTO ES INVALIDO.

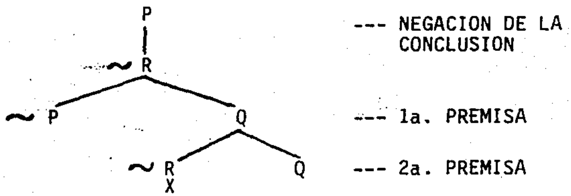
EN ESTE CASO, EN LA TABLA DE VERDAD CORRESPONDIENTE APARECERA UN VALOR FALSO EN EL RENGLON DONDE P *y* Q SEAN VERDADERAS Y R SEA FALSA.

P	Q	R	$[(P \rightarrow Q)$	$\wedge$	$(R \rightarrow Q)]$	$\rightarrow$	$(P \rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	$\boxed{F}$	F
V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V
				*		* *	*

ELABORANDO SU ARBOL DE VERDAD, TENEMOS:

LA PRIMERA PREMISA ES EQUIVALENTE A: $\sim P \vee Q$, LA SEGUNDA PREMISA ES EQUIVALENTE A: $\sim R \vee Q$, LA CONCLUSION A: $\sim P \vee R$.

LA NEGACION DE LA CONCLUSION ES : $P \wedge \sim R$



COMO QUEDO ABIERTA UNA RAMA, SIGNIFICA QUE EL RAZONAMIENTO NO ES CORRECTO Y

P	Q	R
V	V	F

, ES UN CONTRAEJEMPLO.

II LOGICA DE PREDICADOS

LOGICA DE PREDICADOS

2.1 TERMINOS Y PREDICADOS

POR DEFINICION UN TERMINO ES UNA EXPRESION QUE NOMBRA O DESIGNA ALGUN OBJETO. EN LA GRAMATICA TRADICIONAL EL SUJETO DE LA PROPOSICION ES EL TERMINO.

EJEMPLOS:

1) BRASIL ES EL MAYOR PRODUCTOR DE CAFE DEL MUNDO
2) 9 ES UN NUMERO COMPUESTO
3) X ESTA COMPRENDIDO ENTRE 0 y 1
4) X,Y,Z SON PRIMOS ENTRE SI
5) X+3 ES MAYOR O IGUAL QUE 2Y+4

EN ESTOS EJEMPLOS, LAS EXPRESIONES SUBRAYADAS SON LOS TERMINOS.

EN LA GRAMATICA TRADICIONAL UN PREDICADO ES LA PARTE DE LA ORACION QUE EXPRESA LO QUE SE DICE DEL SUJETO.

DE LOS EJEMPLOS ANTERIORES, LOS PREDICADOS SON "ES EL MAYOR PRODUCTOR DE CAFE DEL MUNDO", "ES UN NUMERO COMPUESTO", "SON PRIMOS ENTRE SI", "ES MAYOR O IGUAL QUE", RESPECTIVAMENTE.

PARA SIMBOLIZAR ESTE TIPO DE PROPOSICIONES SE EMPLEARAN LAS LETRAS MAYUSCULAS O PALABRAS PARA PREDICADOS Y CON MINUSCULAS LOS TERMINOS (EN EL CASO DE NOMBRES PROPIOS O CONSTANTES), O VARIABLES U OPERACIONES APLICADAS A TERMINOS.

POR TANTO, LA SIMBOLIZACION DE LOS EJEMPLOS ANTERIORES ES:

1) M (b), M SIGNIFICA "ES EL MAYOR PRODUCTOR DE CAFE DEL MUNDO. b SIGNIFICA "BRASIL".

SE PROCEDERA ANALOGAMENTE PARA LOS RESTANTES EJEMPLOS, ES DECIR, SIN ESPECIFICAR CADA SIMBOLIZACION, SE SOBREENTENDERA LAS LETRAS EMPLEADAS.

2) N (9)

3) C (x, 0, 1) C SIGNIFICA "...ESTA COMPRENDIDO ENTRE ... Y ..."

4) P (x, y, z)

5) M (x+3, 2y+4)

EJERCICIOS:

SIMBOLIZAR LAS SIGUIENTES EXPRESIONES.

1) X ES NUMERO PAR
2) JAIME ESTUDIA LOGICA
3) 15 ES UNA COTA SUPERIOR DEL CONJUNTO A
4) Y ES MAYOR QUE 10
5) ENRIQUE ES GUAPO
6) 12 ES MENOR O IGUAL QUE 15
7) 8 ES FACTOR COMUN DE 40 Y 96
8) JUAN ES MAS ALTO QUE PEDRO
9) $X - X_o$ ES MENOR O IGUAL QUE 12
10) JACOBO ES INTELIGENTE

2.2 CUANTIFICADORES

EXPRESIONES DE LA FORMA "TODO ES MORTAL", "ALGO ES BELLO", CONTIENEN PREDICADOS, PERO NO CONTIENEN NOMBRES DE INDIVIDUOS O COSAS.

EN REALIDAD, NO SE REFIEREN A NINGUN INDIVIDUO EN PARTICULAR, PUES SON PROPOSICIONES GENERALES.

ESTAS SE PUEDEN EXPRESAR DE VARIAS MANERAS QUE SON LOGICAMENTE EQUIVALENTES.

VEAMOS LA PRIMERA PROPOSICION " TODO ES MORTAL " ES EQUIVALENTE A: " TODAS LAS COSAS SON MORTALES ", ES EQUIVALENTE A: " DADA CUALQUIER COSA, ESTA ES MORTAL ".

SI ACORDAMOS EN PONER "X" EN LUGAR DE "COSA", TENEMOS:

"DADA CUALQUIER X, X ES MORTAL"

INTRODUCIENDO UNA NUEVA NOTACION PARA DENOTAR "DADA CUALQUIER X" POR $\forall x$, TENEMOS:

$\forall x \quad M(x)$, DONDE M SIGNIFICA "ES MORTAL".

LA EXPRESION "DADA CUALQUIER X", ES LLAMADA EL <u>CUANTIFICADOR UNIVERSAL</u>, TIENE VARIAS ACEPCIONES, A SABER:

"PARA TODO", "TODO", "CUALQUIERA", "PARA CADA", "CADA".

LA PARTE QUE APARECE EN SEGUIDA DEL CUANTIFICADOR SE LLAMA <u>CUANTIFICANDO</u>.

LA SEGUNDA PROPOSICION, " ALGO ES BELLO ", SE PUEDE EXPRESAR COMO: "EXISTE AL MENOS UNA COSA QUE ES BELLA", QUE ES EQUIVALENTE A:

"EXISTE AL MENOS UNA COSA TAL QUE ESA COSA ES BELLA".

NUEVAMENTE, SI EN LUGAR DE "COSA" PONEMOS "X", SE TIENE:

"EXISTE AL MENOS UNA X TAL QUE X ES BELLA".

INTRODUCIENDO UNA NOTACION PARA DENOTAR "EXISTE AL MENOS UNA X" POR $\exists x$, TENEMOS: $\exists x \; B(x)$, DONDE B SIGNIFICA "ES BELLA".

LA EXPRESION "EXISTE AL MENOS UNA X", ES LLAMADA EL <u>CUANTIFICADOR EXISTENCIAL</u>, TIENE VARIAS ACEPCIONES, A SABER:

"ALGO", "HAY", "EXISTE", "EXISTE ALGUN", "PARA ALGUN", "PARA CIERTO", "HAY AL MENOS UN ", "HAY ALGUN", "ALGUNOS", "ALGUN".

CABE SEÑALAR QUE LA CUANTIFICACION UNIVERSAL DE UNA PROPOSICION ES VERDADERA EN UNA INTERPRETACION SI Y SOLO SI TODAS SUS INSTANCIAS DE SUSTITUCION SON VERDADERAS.

UNA CUANTIFICACION EXISTENCIAL DE UNA PROPOSICION ES VERDADERA EN UNA INTERPRETACION SI Y SOLO SI HAY AL MENOS UNA INSTANCIA DE SUSTITUCION VERDADERA.

2.3 LEYES DE LA NEGACION

ES BIEN SABIDO QUE PARA NEGAR UNA PROPOSICION BASTA AGREGAR LA PALABRA "NO", O BIEN EN OCASIONES SE EMPLEAN LAS EXPRESIONES "NO OCURRE QUE" O "NO ES CIERTO QUE".

EJEMPLOS:

1) TODO ES RELATIVO
NEGACION 1) NO TODO ES RELATIVO

2) LAS MATEMATICAS SON EXACTAS
NEGACION 2) NO OCURRE QUE LAS MATEMATICAS SON EXACTAS
NEGACION 2) NO ES CIERTO QUE LAS MATEMATICAS SON EXACTAS
NEGACION 2) LAS MATEMATICAS NO SON EXACTAS

2.3.1 LEY DE LA DOBLE NEGACION

CABE PREGUNTARSE ¿QUE OCURRE CUANDO NEGAMOS DOBLEMENTE UNA PROPOSICION?. VEAMOS ALGUNOS EJEMPLOS:

1) NADA ES VARIABLE
NEGACION 1) NO ES CIERTO QUE NADA ES VARIABLE
NEG NEG 1) NO ES CIERTO QUE NO ES CIERTO QUE NADA ES VARIABLE

2) LOS INTERVALOS SON ACOTADOS
NEGACION 2) LOS INTERVALOS NO SON ACOTADOS
NEG NEG 2) NO ES CIERTO QUE LOS INTERVALOS NO SON ACOTADOS

3) LUCIA ES MI NOVIA
NEGACION 3) LUCIA NO ES MI NOVIA
NEG NEG 3) NO ES CIERTO QUE LUCIA NO ES MI NOVIA

COMO SE OBSERVA EN LOS EJEMPLOS ANTERIORES, LA NEGACION DE LA NEGACION DE UNA PROPOSICION TIENE EL MISMO SIGNIFICADO QUE LA MISMA PROPOSICION, i. e., SI P ES UNA PROPOSICION ENTONCES $\sim(\sim P)$ ES EQUIVALENTE A : P.

2.3.2 LEYES DE D'MORGAN

COMO SE PUDO OBSERVAR, NEGAR UNA PROPOSICION SIMPLE RESULTA MUY SENCILLO. SIN EMBARGO, CUANDO QUEREMOS DETERMINAR EL SIGNIFICADO DE LA NEGACION DE UNA PROPOSICION COMPUESTA (DISYUNCION, CONJUNCION), REQUIERE DE UN MAYOR CUIDADO.

POR EJEMPLO: NEGAR LA PROPOSICION " $a = 0$ o $b = 0$ "

POR TRATARSE DE UNA DISYUNCION, SIGNIFICA QUE AL MENOS UNA DE LAS PROPOSICIONES SIMPLES ES VERDADERA. NEGAR LA PROPOSICION SIGNIFICA QUE NINGUNA DE LAS PROPOSICIONES ES VERDADERA; ES DECIR, QUE AMBAS SON FALSAS.

POR CONSIGUIENTE, LA NEGACION ES " $a \neq 0$ y $b \neq 0$ "

EN GENERAL, SI P, Q SON PROPOSICIONES CUALESQUIERA, ENTONCES LA NEGACION DE "P o Q" ES "NO P y NO Q", i.e.,

$\sim (P \vee Q)$ ES EQUIVALENTE A: $\sim P \wedge \sim Q$

ANALOGAMENTE, SI SE TUVIERA UNA CONJUNCION, POR EJEMPLO: " 2 ES PRIMO Y 2 ES PAR ".

LA PROPOSICION DADA SIGNIFICA QUE AMBAS PROPOSICIONES SIMPLES SON VERDADERAS.

SU NEGACION NIEGA QUE AMBAS SON VERDADERAS, POR CONSIGUIENTE, ASEGURA QUE AL MENOS UNA ES FALSA. POR TANTO, LA NEGACION ES:

" 2 NO ES PRIMO o 2 NO ES PAR ".

EN GENERAL, SI P, Q SON PROPOSICIONES CUALESQUIERA, ENTONCES LA NEGACION DE "P y Q" ES "NO P o NO Q", i.e.,

$$\sim (P \wedge Q) \text{ } \underline{\text{ES EQUIVALENTE A}}: \sim P \vee \sim Q$$

2.3.3 NEGACION DE UNA CONDICIONAL

ESTABLECER LA NEGACION DE: "SI ES UN CIUDADANO, ENTONCES PUEDE VOTAR"

LA PROPOSICION AFIRMA QUE CUANDO "ES UN CIUDADANO" ES UNA PROPOSI-- CION VERDADERA, ENTONCES "PUEDE VOTAR" ES TAMBIEN VERDADERA.

LA NEGACION DE LA PROPOSICON DADA IMPLICA, POR CONSIGUIENTE, QUE - AUN CUANDO "ES UN CIUDADANO" SEA VERDADERA, "PUEDE VOTAR" ES FALSA.

POR LO TANTO, LA NEGACION ES : "ES UN CIUDADANO Y NO PUEDE VOTAR".

EN GENERAL, SI P, Q SON PROPOSICIONES CUALESQUIERA, LA NEGACION DE "SI P ENTONCES Q" ES "P y NO Q", i.e.,

$$\sim (P \rightarrow Q) \text{ } \underline{\text{ES EQUIVALENTE A}}: P \wedge \sim Q$$

2.3.4 NEGACIONES DE CUANTIFICADORES

VEAMOS ALGUNAS PROPOSICIONES USUALMENTE EMPLEADAS EN LA LOGICA DE PREDICADOS, Y SUS EQUIVALENCIAS RESPECTIVAS.

EJEMPLO:

1) "NADA ES ESTABLE" ES EQUIVALENTE A: "NO EXISTE X TAL QUE X ES ESTABLE" ($\sim \exists x \; E(x)$), EQUIVALE A: "PARA TODA X, X NO ES ESTABLE" ($\forall x \; \sim E(x)$).

2) "ALGO ES VARIABLE", EQUIVALE A: "EXISTE X TAL QUE X ES VARIABLE" ($\exists x \; V(x)$).

3) "TODO ES RELATIVO", EQUIVALE A: "PARA TODA X, X ES RELATIVO" ($\forall x \; R(x)$).

4) "NINGUNO ES REPRESIVO", EQUIVALE A: "NADIE ES REPRESIVO", EQUIVALE A: "NO EXISTE X TAL QUE X ES REPRESIVO" ($\sim \exists x \; R(x)$), EQUIVALE A: " PARA TODA X, X NO ES REPRESIVO" ($\forall x \sim R(x)$).

EN LOS EJEMPLOS 1 y 4 ANTERIORES, SE NOTA QUE HAY CIERTA CONEXION ENTRE EL CUANTIFICADOR UNIVERSAL Y EL CUANTIFICADOR EXISTENCIAL.

VEAMOS ALGUNOS EJEMPLOS PARA ILUSTRARLA:

LA PROPOSICION "TODO ES MORTAL" ($\forall x \; M(x)$), SU NEGACION SERA: "NO TODO ES MORTAL", LO QUE SIGNIFICA ENTONCES QUE "EXISTE ALGO QUE NO ES MORTAL" ($\exists x \sim M(x)$).

POR TANTO, SE TIENE: $\sim \forall x \; M(x)$ <u>ES EQUIVALENTE A</u>: $\exists x \sim M(x)$

ADEMAS, NEGANDO AMBAS Y APLICANDO LA LEY DE DOBLE NEGACION, OBTENEMOS: $\forall x \; M(x)$ <u>ES EQUIVALENTE A</u>: $\sim \exists x \sim M(x)$

(i.e. "TODO ES MORTAL" ES EQUIVALENTE A: "NO EXISTE ALGO TAL QUE NO ES MORTAL")

ANALOGAMENTE, SI LA PROPOSICION AHORA ES "NADA ES MORTAL" ($\forall x \sim M(x)$), SU NEGACION SERA: "NO ES CIERTO QUE NADA ES MORTAL", SIGNIFICA QUE: "EXISTE ALGO TAL QUE ES MORTAL" ($\exists x \; M(x)$)

POR TANTO, TENEMOS:

$\sim \forall x \sim M(x)$ <u>ES EQUIVALENTE A</u>: $\exists x \; M(x)$

ADEMAS, NEGANDO AMBAS Y APLICANDO LA LEY DE DOBLE NEGACION, SE TIENE:

$\forall x \sim M(x)$ ES EQUIVALENTE A: $\sim \exists x \sim M(x)$

EN GENERAL, SI EMPLEAMOS LA LETRA GRIEGA ϕ PARA REPRESENTAR CUALQUIER PREDICADO, SE TIENE:

$\forall x \ \phi(x)$ ES EQUIVALENTE A $\sim \exists x \sim \phi(x)$

$\exists x \ \phi(x)$ ES EQUIVALENTE A $\sim \forall x \sim \phi(x)$

$\forall x \sim \phi(x)$ ES EQUIVALENTE A $\sim \exists x \ \phi(x)$

$\exists x \sim \phi(x)$ ES EQUIVALENTE A $\sim \forall x \ \phi(x)$

VEAMOS AHORA ALGUNOS EJEMPLOS DE PROPOSICIONES Y SUS RESPECTIVAS NEGACIONES, CON SU SIMBOLIZACION ANALITICA:

1) PARA TODA X, X ES PRIMO ($\forall x \ Px$)

1') EXISTE X TAL QUE X NO ES PRIMO ($\exists x \sim Px$)

2) EXISTE X TAL QUE X ES UNA SUCESION ($\exists x \ Sx$)

2') PARA TODA X, X NO ES UNA SUCESION ($\forall x \sim Sx$)

3) PARA TODA X, X > 5 SOLO SI X ES PAR ($\forall x \ (x > 5 \rightarrow Px)$)

3') EXISTE X TAL QUE X > 5 y X NO ES PAR ($\exists x \ (x > 5 \wedge \sim Px)$)

4) PARA TODA X, SI X ES PAR ENTONCES X ES COMPUESTO ($\forall x \ (Px \rightarrow Cx)$)

4') EXISTE X TAL QUE X ES PAR y X NO ES COMPUESTO ($\exists x \ (Px \wedge \sim Cx)$)

5) EXISTE X TAL QUE X BRILLA y X NO ES ORO ($\exists x \ (Bx \wedge \sim Ox)$)

5') PARA TODA X, SI X BRILLA ENTONCES X ES ORO ($\forall x \ (Bx \rightarrow Ox)$)

6) PARA TODO X RACIONAL, EXISTE Y ENTERO TAL QUE XY= 1

$(\forall x \ (Rx \rightarrow \exists y \ (Ey \wedge xy = 1)))$

6') EXISTE X RACIONAL TAL QUE PARA TODO Y ENTERO XY $\neq$ 1

$(\exists x \ (Rx \wedge \forall y \ (Ey \rightarrow xy \neq 1)))$

7) PARA TODO X > 0, EXISTE Y < 0 TAL QUE PARA TODO Z, X+Y=Z

$$\forall x\ (x > 0 \rightarrow \exists y\ (y < 0 \wedge \forall z\ (x + y = z)))$$

7') EXISTE X > 0 TAL QUE PARA TODA Y < 0, EXISTE Z TAL QUE X+Y≠Z

$$\exists x\ (x > 0 \wedge \forall y\ (y < 0 \rightarrow \exists z\ (x + y \neq z)))$$

8) EXISTE X TAL QUE PARA TODA Y SI X = Y ENTONCES Y > 0

$$\exists x\ (\forall y\ (x = y \rightarrow y > 0))$$

8') PARA TODA X, EXISTE Y TAL QUE X = Y y Y $\ngtr$ 0

$$\forall x\ (\exists y\ (x = y \wedge y \ngtr 0))$$

9) PARA TODO $\varepsilon > 0$, EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE, PARA TODO X, SI $|X - A| < \delta$ ENTONCES $|X^2 - A^2| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ (\forall x\ (|x-a| < \delta \rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon))$$

9') EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE PARA TODO $\delta > 0$, EXISTE X TAL QUE $|X - A| < \delta$ y $|X^2 - A^2| \nless \varepsilon$

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ (\exists x\ (|x-a| < \delta \wedge |x^2 - a^2| \nless \varepsilon))$$

10) PARA TODA X, SI X=3 ENTONCES EXISTE Y, TAL QUE XY=18

$$\forall x\ (x = 3 \rightarrow \exists y\ (xy = 18))$$

10') EXISTE X TAL QUE X=3 y PARA TODA Y, XY≠18

$$\exists x\ (x = 3 \wedge \forall y\ (xy \neq 18))$$

E J E R C I C I O S

NEGAR LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES Y SIMBOLIZARLAS

1) 5 NO ES UN NUMERO PRIMO

2) TODO LO QUE BRILLA ES ORO

3) ALGUIEN VIENE A CENAR

4) NADA ES LEGAL

5) NINGUN ACIDO ES VOLATIL

6) TODOS LOS ELEMENTOS SON VISIBLES

7) NADIE ES PROFETA EN SU TIERRA

8) ALGUNOS ANIMALES SON CARNIVOROS

9) NINGUNA FUNCION ES RELACION

10) NO TODOS LOS PLANETAS GIRAN

11) HAY DAMAS PRESENTES

12) EXISTE X TAL QUE $0 < X < 1$

13) GANAREMOS EL CONCURSO SI ESTUDIAMOS MUCHO

14) PARA TODA X, EXISTE Y TAL $X < Y$

15) EXISTE X TAL QUE $X^2 + 1 = 0$

16) PARA TODA X, $X = 2$ o $X > 5$

17) PARA TODA X, SI $X > 2$ ENTONCES $X^2 + 2X = 3$

18) EXISTE X TAL QUE PARA TODA Y, $X > Y$

19) NO HAY UN NUMERO W TAL QUE PARA TODA Y, $Y = 5W$

20) NO ES CIERTO QUE HAYA VIDA EN MARTE

2.4 VACUIDAD

LA CUANTIFICACION UNIVERSAL DE UNA CONDICIONAL SE CUMPLE POR VACUIDAD, SI EL ANTECEDENTE DEL CUANTIFICANDO NUNCA SE VERIFICA.

EJEMPLOS:

1) PARA TODA X, SI X > X ENTONCES X > 3

$\forall x\ (x > x \longrightarrow x > 3)$ ES EQUIVALENTE A:

$\sim \exists x\ (x > x \wedge x \ngtr 3)$

2) TODO UNICORNIO ES AZUL

$\forall x\ (Ux \longrightarrow Ax)$ ES EQUIVALENTE A:

$\sim \exists x\ (Ux \wedge \sim Ax)$

LAS PROPOSICIONES CON CUANTIFICADOR EXISTENCIAL SON LAS NEGACIONES DE LAS PROPOSICIONES DADAS Y SON FALSAS, POR TANTO LAS PROPOSICIONES ORIGINALES SON VERDADERAS.

2.5 PROPOSICIONES CATEGORICAS

LAS PROPOSICIONES DE ESTE TIPO PUEDEN CONSIDERARSE COMO ASERCIONES ACERCA DE CLASES, QUE AFIRMAN O NIEGAN QUE UNA CLASE ESTE INCLUIDA EN -- OTRA, TOTAL O PARCIALMENTE.

UNA CLASE ES UNA COLECCION DE TODOS LOS OBJETOS QUE TIENEN UNA PROPIEDAD COMUN.

EJEMPLOS:

1) TODOS LOS POLITICOS SON MENTIROSOS
2) NINGUN NUMERO IRRACIONAL ES PRIMO
3) ALGUNOS NUMEROS RACIONALES SON ENTEROS
4) ALGUNOS ESTUDIANTES NO SON UNIVERSITARIOS

LOS EJEMPLOS ANTERIORES MUESTRAN LAS CUATRO FORMAS TIPICAS DE LAS PROPOSICIONES CATEGORICAS, QUE ESQUEMATICAMENTE SE PUEDEN ESCRIBIR COMO:

1) TODO S ES P
2) NINGUN S ES P
3) ALGUN S ES P
4) ALGUN S NO ES P

DONDE S y P REPRESENTAN PREDICADOS O CLASES.

TALES PROPOSICIONES SE LES CONOCE COMO UNIVERSAL AFIRMATIVA, UNIVERSAL NEGATIVA, PARTICULAR AFIRMATIVA Y PARTICULAR NEGATIVA, RESPECTIVAMENTE.

POR TANTO, LOS CUATRO TIPOS DE PROPOSICIONES CATEGORICAS QUE SE HAN DESTACADO EN LA LOGICA ARISTOTELICA SON EJEMPLIFICADOS DE LA SIGUIENTE FORMA:

1) TODAS LAS SUCESIONES SON CONVERGENTES (A)
2) NINGUNA SUCESION ES CONVERGENTE (E)
3) ALGUNAS SUCESIONES SON CONVERGENTES (I)
4) ALGUNAS SUCESIONES NO SON CONVERGENTES (O)

SE ACOSTUMBRA DENOTARLAS CON LAS LETRAS A, E, I, O y SE PRESUME QUE PROVIENEN DE LAS PALABRAS AffIrmo y nEgO, QUE SIGNIFICAN AFIRMAR Y NEGAR, RESPECTIVAMENTE.

AL SIMBOLIZAR ESTAS PROPOSICIONES POR MEDIO DE CUANTIFICADORES, SE TIENE LO SIGUIENTE:

A: "TODAS LAS SUCESIONES SON CONVERGENTES", ES EQUIVALENTE A:
"DADA CUALQUIER COSA, SI ELLA ES UNA SUCESION, ENTONCES ELLA ES CONVERGENTE". SI REEMPLAZAMOS LA PALABRA "COSA" Y "ELLA" POR "X", SE TIENE: "DADA CUALQUIER X, SI X ES UNA SUCESION, ENTONCES X ES CONVERGENTE"

USANDO LA NOTACION CORRESPONDIENTE:

$$\forall x \ (Sx \longrightarrow Cx)$$

E: "NINGUNA SUCESION ES CONVERGENTE", ES EQUIVALENTE A:
"DADA CUALQUIER COSA, SI ELLA ES UNA SUCESION, ENTONCES ELLA NO ES CONVERGENTE". HACIENDO LAS MISMAS CONSIDERACIONES, TENEMOS:
"DADA CUALQUIER X, SI X ES UNA SUCESION, ENTONCES X NO ES CONVERGENTE".

$$\forall x \ (Sx \longrightarrow \sim Cx)$$

I: "ALGUNAS SUCESIONES SON CONVERGENTES", ES EQUIVALENTE A:
"EXISTE AL MENOS UNA COSA TAL QUE ESA COSA ES UNA SUCESION Y ESA COSA ES CONVERGENTE", ES EQUIVALENTE A"
"EXISTE AL MENOS UNA X TAL QUE X ES UNA SUCESION y X ES CONVERGENTE".

$$\exists x \ (Sx \wedge Cx)$$

O: "ALGUNAS SUCESIONES NO SON CONVERGENTES", ES EQUIVALENTE A:
"EXISTE AL MENOS UNA COSA TAL QUE ESA COSA ES UNA SUCESION Y ESA COSA NO ES CONVERGENTE", EQUIVALENTE A:
"EXISTE AL MENOS UNA X TAL QUE X ES UNA SUCESION y X NO ES CONVERGENTE".

$$\exists x \ (Sx \wedge \sim Cx)$$

EN MUCHAS OCASIONES CAE UNO EN EL ERROR DE QUERER SIMBOLIZAR PROPOSICIONES DEL TIPO I *y* O, DE LA SIGUIENTE MANERA, INCORRECTA:

$\exists x\,(Sx \rightarrow Cx)$ *y* $\exists x\,(Sx \rightarrow \sim Cx)$, RESPECTIVAMENTE.

PARA DESPEJAR LAS DUDAS AL RESPECTO, VEAMOS UN EJEMPLO DE PROPOSICION DEL TIPO I (PARA EL TIPO O,ES ANALOGO)

SEA I: "ALGUNOS CENTAUROS SON INTELIGENTES"

SUPONGAMOS QUE LA SIMBOLIZACION (?), FUERA $\exists x\,(Cx \rightarrow Ix)$, ENTONCES:

SIGNIFICA QUE "EXISTE AL MENOS UNA COSA TAL QUE: SI ES UN CENTAURO ENTONCES ES INTELIGENTE", LO CUAL <u>NO AFIRMA QUE EXISTA UN CENTAURO</u> (TAMPOCO AFIRMA QUE NO EXISTA), LO QUE AFIRMA ES LA EXISTENCIA DE UNA <u>COSA</u> QUE CUMPLE UNA CONDICIONAL.

AHORA, ES POSIBLE QUE EXISTA UNA COSA TAL QUE NO ES CENTAURO; EN TAL CASO, $\exists x\,(Cx \rightarrow Ix)$ ES <u>VERDADERA</u> (YA QUE EL ANTECEDENTE ES FALSO).

POR OTRO LADO, SI EXISTE ALGUN CENTAURO QUE NO SEA INTELIGENTE, ENTONCES "ALGUNOS CENTAUROS SON INTELIGENTES", ES <u>FALSO</u>.

POR TANTO, $\exists x\,(Cx \rightarrow Ix)$ NO ES LA SIMBOLIZACION DE "ALGUNOS CENTAUROS SON INTELIGENTES", YA QUE ES POSIBLE QUE UNA SEA VERDADERA Y LA OTRA FALSA.

POR CONSIGUIENTE, "ALGUNOS CENTAUROS SON INTELIGENTES", SE SIMBOLIZA COMO:

$$\exists x\,(Cx \wedge Ix)$$

ANTES DE HACER ALGUNOS EJEMPLOS DE SIMBOLIZACION CON CUANTIFICADORES ES NECESARIO HACER UNA OBSERVACION:

UN ENUNCIADO DEL LENGUAJE FORMAL SIMBOLIZA UNA ORACION DEL LENGUAJE NATURAL SI Y SOLO SI SIGNIFICAN LO MISMO EN TODA INTERPRETACION; ES DECIR, PARA CUALQUIER INTERPRETACION EL ENUNCIADO DEL LENGUAJE FORMAL ES VERDADERO SI Y SOLO SI EL ENUNCIADO DEL LENGUAJE NATURAL ES VERDADERO.

2.6 TRADUCCIONES DEL LENGUAJE NATURAL AL LENGUAJE ANALITICO (FORMAL).

1) TODO PRIMO ES IMPAR $\forall x\ (Px \rightarrow Ix)$

2) ALGUNOS PRIMOS SON IMPARES $\exists x\ (Px \wedge Ix)$

3) NINGUN PRIMO ES IMPAR $\forall x\ (Px \rightarrow \sim Ix) \equiv \sim \exists x\ (Px \wedge Ix)$

EN LOS EJEMPLOS SIGUIENTES, "x", "y", "z", "a", "b", REPRESENTAN ENTEROS CUALESQUIERA.

4) 1 ES MENOR QUE TODO ENTERO $\forall x\ (1 < x)$

5) PARA TODO ENTERO EXISTE UN ENTERO MAYOR $\forall x\ (\exists y\ (x < y))$

6) EXISTE UN ENTERO QUE ES MAYOR QUE TODO ENTERO $\exists x\ (\forall y\ (x > y))$

7) EXISTE UN ENTERO QUE ES MAYOR QUE TODO ENTERO DISTINTO DE EL MISMO.

$$\exists x\ (\forall y\ (x \neq y \rightarrow x > y))$$

8) SI EL PRODUCTO DE DOS ENTEROS ES PAR, ENTONCES AL MENOS UNO DE - ELLOS ES PAR

$$\forall x\ \forall y\ (\exists z\ (xy = 2z) \rightarrow \exists a\ (x = 2a) \vee \exists b\ (y = 2b))$$

9) EL PRODUCTO DE DOS ENTEROS PARES ES SIEMPRE UN MULTIPLO DE 4

$$\forall x\ \forall y\ (\exists z\ (x = 2z) \wedge \exists w\ (y = 2w) \rightarrow \exists a\ (xy = 4a))$$

10) TODO ENTERO PAR MAYOR QUE 4 ES LA SUMA DE DOS PRIMOS

$$\forall x\ (\exists y\ (x = 2y) \wedge (x > 4) \longrightarrow \exists z,w\ (Pz \wedge Pw \wedge x = z+w))$$

HACIENDO AUN MAS EXPLICITAS ALGUNAS TRADUCCIONES, VEAMOS OTROS EJEMPLOS:

1)"TODO ES IGUAL A SI MISMO", SIGNIFICA QUE:
DADA CUALQUIER COSA, ESTA ES IGUAL A SI MISMA
PARA TODA X, X=X i.e., $\forall x\ (x = x)$

2) "HAY UNA LANZA QUE PERFORA A TODOS LOS ESCUDOS", SIGNIFICA:
EXISTE X TAL QUE X ES UNA LANZA *y* X PERFORA A TODOS LOS ESCUDOS.
EXISTE X TAL QUE X ES UNA LANZA *y* PARA TODA Y, SI Y ES UN ESCUDO, ENTONCES X PERFORA A Y.

$$\exists x\ (Lx \wedge \forall y\ (Ey \longrightarrow Pxy))$$

3) "HAY UN ESCUDO AL CUAL NINGUNA LANZA PERFORA", SIGNIFICA:
EXISTE X TAL QUE X ES UN ESCUDO *y* X NO ES PERFORADO POR NINGUNA LANZA.
EXISTE X TAL QUE X ES UN ESCUDO *y* NINGUNA LANZA PERFORA A X.
EXISTE X TAL QUE X ES UN ESCUDO *y* PARA TODA Y, SI Y ES UNA LANZA, ENTONCES Y NO PERFORA A X.

$$\exists x\ (Ex \wedge \forall y\ (Lx \longrightarrow \sim Pyx))$$

4) "SI UN PRODUCTO ES CERO, ENTONCES ALGUNO DE LOS FACTORES ES CERO"
-CONSIDEREMOS EL CASO CUANDO SON DOS LOS FACTORES-
PARA TODA X, PARA TODA Y, SI XY=0, ENTONCES X=0 o Y=0

$$\forall x\ \forall y\ (xy = 0 \longrightarrow x = 0 \vee y = 0)$$

5) "TODO LO QUE ES MENOR QUE TODO, ES MENOR QUE ALGO"

PARA TODA X, SI X ES MENOR QUE TODO, ENTONCES X ES MENOR QUE ALGO.

"X ES MENOR QUE TODO" SIGNIFICA QUE: PARA TODA Y, $X < Y$, i.e.,

$\forall y \, (x < y)$

"X ES MENOR QUE ALGO" SIGNIFICA QUE: EXISTE W TAL QUE $X < W$

i.e., $\exists w \, (x < w)$

POR TANTO,

$$\forall x \, (\forall y \, (x < y) \longrightarrow \exists w \, (x < w))$$

6) "TODO LO QUE ES MENOR QUE ALGO, ES MENOR QUE TODO"

PARA TODA X, SI X ES MENOR QUE ALGO, ENTONCES X ES MENOR QUE TODO.

"X ES MENOR QUE ALGO" SIGNIFICA QUE: EXISTE Y TAL QUE $X < Y$

i.e., $\exists y \, (x < y)$

"X ES MENOR QUE TODO" SIGNIFICA QUE: PARA TODA W, $X < W$, i.e.,

$\forall w \, (x < w)$

POR TANTO,

$$\forall x \, (\exists y \, (x < y) \longrightarrow \forall w \, (x < w))$$

7) "EL PAPA DE ROBERTO ES MAS FUERTE QUE EL PAPA DE CUALQUIER AMIGO DE ROBERTO"

PARA TODA X, Y, Z, SI X ES EL PAPA DE ROBERTO y Y ES EL AMIGO DE ROBERTO y Z ES EL PAPA DEL AMIGO DE ROBERTO, ENTONCES X ES MAS FUERTE QUE Z.

$$\forall x \; \forall y \; \forall z \, (Pxr \wedge Ayr \wedge Pzy \longrightarrow Fxz)$$

8) "EL NUMERO DE PRIMOS ES INFINITO (O NO HAY UN NUMERO PRIMO MAXIMO)

PRIMERO ANALICEMOS " HAY UN NUMERO PRIMO MAXIMO", SIGNIFICA QUE: EXISTE AL MENOS UN NUMERO TAL QUE ES PRIMO Y MAXIMO, i.e., EXISTE AL MENOS UNA X TAL QUE X ES PRIMO y X ES MAXIMO.

POR OTRO LADO, "X ES MAXIMO", SIGNIFICA QUE: DADO CUALQUIER OTRO NUMERO Y, SI Y ES PRIMO ENTONCES X ES MAYOR O IGUAL QUE Y. i.e.,

$$\forall y\ (Py \longrightarrow x \geqslant y)$$

POR TANTO, "HAY UN NUMERO PRIMO MAXIMO" SE SIMBOLIZA COMO:

$$\exists x\ (Px \wedge \forall y\ (Py \longrightarrow x \geqslant y))$$

PERO NUESTRA FRASE INICIAL INCLUYE UNA NEGACION: "NO HAY UN NUMERO PRIMO MAXIMO", POR TANTO, SE SIMBOLIZA COMO:

$\sim \exists x\ (Px \wedge \forall y\ (Py \longrightarrow x \geqslant y))$ QUE ES EQUIVALENTE A:

$\forall x\ (\sim Px \vee \exists y\ (Py \wedge \sim (x \geqslant y)))$ QUE ES EQUIVALENTE A:

$$\forall x\ [Px \longrightarrow \exists y\ (Py \wedge \sim (x \geqslant y))]$$

9) "TODO NUMERO PAR MAYOR QUE DOS, ES LA SUMA DE DOS PRIMOS" (CONJETURA DE GOLDBACH).

PARA TODA X, SI X ES UN NUMERO PAR MAYOR QUE DOS, ENTONCES X ES IGUAL A LA SUMA DE DOS PRIMOS.

PARA TODA X, SI X ES PAR y X ES MAYOR QUE DOS, ENTONCES X ES -- IGUAL A LA SUMA DE DOS PRIMOS.

"X ES PAR" SIGNIFICA QUE: EXISTE UN NUMERO W TAL QUE X = 2W i.e., $\exists w\ (x = 2w)$

"X ES IGUAL A LA SUMA DE DOS PRIMOS", SIGNIFICA QUE: EXISTEN Y, Z PRIMOS TALES QUE X = Y + Z, i.e.,

$\exists y \; \exists z \; (Py \wedge Pz \wedge x = y + z)$

POR TANTO,

$\forall x \; (\exists w \; (x=2w) \wedge x > 2 \longrightarrow \exists y \; \exists z \; (Py \wedge Pz \wedge x=y+z))$

10) "X ES NUMERO PRIMO"

POR DEFINICION, UN NUMERO PRIMO ES DIFERENTE DE 1 Y TIENE SOLO DOS DIVISORES: LA UNIDAD Y EL MISMO.

POR TANTO, "X ES NUMERO PRIMO", ES EQUIVALENTE A:

$X \neq 1$ y TODO DIVISOR DE X ES 1 o X

PERO "TODO DIVISOR DE X ES 1 o X", EQUIVALE A:

PARA TODA Y, SI Y ES DIVISOR DE X, ENTONCES Y ES IGUAL A 1 o Y ES IGUAL A X, i.e., $\forall y$ (y ES DIVISOR DE x $\longrightarrow y = 1 \vee y = x$)

POR OTRO LADO, "Y ES DIVISOR DE X", SIGNIFICA QUE: EXISTE UN NUMERO W TAL QUE $X = YW$ i.e., $\exists w \; (x = yw)$

POR TANTO,

$$x \neq 1 \wedge \forall y \; (\exists w \; (x = yw) \longrightarrow y = 1 \vee y = x)$$

11) "TODO PRIMO DISTINTO DE DOS ES IMPAR"

PARA TODA X, SI X ES PRIMO y X ES DISTINTO DE DOS, ENTONCES X ES IMPAR. YA SE CONOCE LA SIMBOLIZACION DE "X ES PRIMO" y DE "X ES DISTINTO DE DOS", SOLO RESTA SIMBOLIZAR "X ES IMPAR", QUE SIGNIFICA:

EXISTE UN NUMERO Z TAL QUE $X = 2Z + 1$, i.e.,

$$\exists z \; (x = 2z + 1)$$

POR TANTO,

$$\forall x \; [x\neq 1 \wedge \forall y \; (\exists w \; (x=yw) \longrightarrow y=1 \vee y=x) \wedge x\neq 2 \longrightarrow \exists z \; (x=2z+1)]$$

12) "TODO MULTIPLO DE TRES Y CINCO ES MAYOR QUE TODO NUMERO MENOR QUE DIEZ"

PARA TODA X, SI X ES MULTIPLO DE TRES Y CINCO, ENTONCES X ES MAYOR - QUE TODO NUMERO MENOR QUE DIEZ.

ANALIZANDO, "X ES MULTIPLO DE TRES Y CINCO", SIGNIFICA QUE: "X ES MULTIPLO DE TRES *y* X ES MULTIPLO DE CINCO", PERO "X ES MULTIPLO DE TRES", SIGNIFICA QUE: EXISTE Y TAL QUE X = 3Y , i.e., $\exists\, y\ (x = 3y)$

ANALOGAMENTE, "X ES MULTIPLO DE CINCO" $\exists\, z\ (x = 5z)$

AHORA, "X ES MAYOR QUE TODO NUMERO MENOR QUE DIEZ", SIGNIFICA QUE: PARA TODA W, SI W ES UN NUMERO MENOR QUE DIEZ, ENTONCES X ES MAYOR QUE W i.e., $\forall w\ (w > 10 \longrightarrow x > w)$

POR TANTO,

$$\forall x\ [\exists\, y\ (x=3y) \wedge \exists\, z\ (x=5z) \longrightarrow \forall w\ (w < 10 \longrightarrow x > w)]$$

13) "HAY UN UNICO NEUTRO MULTIPLICATIVO"

EXISTE X TAL QUE X ES NEUTRO MULTIPLICATIVO *y* PARA CUALQUIER OTRO NEUTRO MULTIPLICATIVO, ENTONCES SON IGUALES

EXISTE X TAL QUE X ES NEUTRO MULTIPLICATIVO *y* PARA TODA Y, SI Y ES NEUTRO MULTIPLICATIVO, ENTONCES Y = X

"X ES NEUTRO MULTIPLICATIVO", SIGNIFICA QUE: PARA TODA Z, ZX = Z i.e., $\forall z\ (zx = z)$

ANALOGAMENTE, "Y ES NEUTRO MULTIPLICATIVO" $\forall w\ (wy = w)$

POR TANTO,

$$\underbrace{\exists\, x\ [\forall z\ (zx = z)}_{\text{existencia}} \wedge \underbrace{\forall y\ (\forall w\ (wy = w \longrightarrow y = x)]}_{\text{unicidad}}$$

14) "HAY UN UNICO OBJETO CON LA PROPIEDAD P"

CONSIDERANDO EL EJEMPLO ANTERIOR, LA SIMBOLIZACION ES:

$\exists x\ (x \text{ es } P \wedge \forall y\ (y \text{ es } P \longrightarrow y = x))$

15) "HAY UN CUADRADO TAL QUE ES EL DOBLE DE ALGUN CUADRADO"

EXISTE X TAL QUE X ES UN CUADRADO y X ES EL DOBLE DE ALGUN CUADRADO.

"X ES UN CUADRADO", SIGNIFICA QUE: EXISTE UN NUMERO Y TAL QUE $X = Y^2$, i.e., $\exists y\ (x = y^2)$

"X ES EL DOBLE DE ALGUN CUADRADO", SIGNIFICA QUE: EXISTE OTRO CUADRADO Z TAL QUE $X = 2Z$, i.e., $\exists z\ (x = 2z)$

PERO, "OTRO CUADRADO Z", SIGNIFICA QUE: EXISTE W TAL QUE $Z = W^2$ i.e., $\exists w\ (z = w^2)$

POR TANTO,

$\exists x\ [\exists y\ (x = y^2) \wedge (\exists z\ (x = 2z))]$, PERO $Z = W^2$, ENTONCES:

$\exists x\ [\exists y\ (x = y^2) \wedge \exists z\ \exists w\ (x = 2z \wedge z = w^2)]$

16) "TODO ENTERO NO DIVISIBLE POR PRIMOS MENORES QUE SU RAIZ CUADRADA, ES PRIMO"

PARA TODA X, SI X ES ENTERO NO DIVISIBLE POR PRIMOS MENORES QUE SU RAIZ CUADRADA, ENTONCES X ES PRIMO.

PARA TODA X, SI X ES ENTERO y PARA TODA Y, SI Y ES PRIMO y Y ES MENOR QUE LA RAIZ CUADRADA DE X ENTÓNCES X NO ES DIVISIBLE POR Y; ENTONCES X ES PRIMO.

SOLO FALTA SIMBOLIZAR "X NO ES DIVISIBLE POR Y", QUE SIGNIFICA: NO EXISTE W TAL QUE $X = YW$, i.e., $\sim \exists w\ (x = yw)$

POR TANTO,

$\forall x\ [Ex \wedge \forall y\ (Py \wedge y < \sqrt{x} \longrightarrow \sim \exists w\ (x = yw)) \longrightarrow Px]$

NOTA: Esta afirmación es verdadera en la Aritmética y es conocida como "CRIBA DE ERATOSTENES".

17) "HAY UN UNICO INVERSO MULTIPLICATIVO"

EXISTE X TAL QUE X ES INVERSO MULTIPLICATIVO y PARA TODA Y, SI Y ES INVERSO MULTIPLICATIVO, ENTONCES X = Y

"X ES INVERSO MULTIPLICATIVO", SIGNIFICA QUE: PARA TODA Z, SI Z ES DIFERENTE DE CERO, ENTONCES ZX = 1, i.e., $\forall z\ (z \neq 0 \longrightarrow zx=1)$

ANALOGAMENTE, "Y ES INVERSO MULTIPLICATIVO", $\forall w\ (w \neq 0 \longrightarrow wy=1)$

POR TANTO,

$$\exists x\ [\underbrace{\forall z\ (z \neq 0 \longrightarrow zx=1)}_{\text{existencia}} \wedge \underbrace{\forall y\ (\forall w\ (w \neq 0 \longrightarrow wy=1) \longrightarrow x = y)}_{\text{unicidad}}]$$

18) "TODO ENTERO NO PRIMO ES DIVISIBLE POR ALGUN PRIMO MENOR QUE SU RAIZ CUADRADA"

PARA TODA X, SI X ES ENTERO NO PRIMO, ENTONCES X ES DIVISIBLE POR ALGUN PRIMO MENOR QUE LA RAIZ CUADRADA DE X

PARA TODA X, SI X ES ENTERO Y X ES NO PRIMO, ENTONCES EXISTE ALGUN Y TAL QUE Y ES PRIMO y Y ES MENOR QUE LA RAIZ CUADRADA DE X y ADEMAS X - ES DIVISIBLE POR Y.

FALTA SIMBOLIZAR "X ES DIVISIBLE POR Y", SIGNIFICA QUE:
EXISTE ALGUN W TAL QUE X = YW, i.e., $\exists w\ (x = yw)$

POR TANTO,

$$\forall x\ [Ex \wedge \sim Px \longrightarrow \exists y\ (Py \wedge y < \sqrt{x}\ ) \wedge \exists w\ (x = yw)]$$

19) "SI UN PRIMO DIVIDE A UN PRODUCTO, DIVIDE A UNO DE LOS FACTORES"

-CONSIDEREMOS QUE EL PRODUCTO ESTE FORMADO POR DOS FACTORES-

PARA TODA X, SI X ES PRIMO y X DIVIDE A UN PRODUCTO, ENTONCES X DIVIDE A UNO DE LOS FACTORES.

"X DIVIDE A UN PRODUCTO", SIGNIFICA QUE: EXISTEN Y, Z TAL QUE YZ ES UN PRODUCTO y EXISTE W TAL QUE YZ = XW , i.e.

$$\exists y \ \exists z \ (\exists w \ (yz = xw))$$

"X DIVIDE A UNO DE LOS FACTORES", SIGNIFICA QUE: X DIVIDE A Y o X DIVIDE A Z. PERO "X DIVIDE A Y", SIGNIFICA QUE: EXISTE R TAL QUE Y = XR, i.e., $\exists r \ (y = xr)$

ANALOGAMENTE, "X DIVIDE A Z", $\exists s \ (z = xs)$

POR TANTO,

$$\forall x \ [Px \wedge \exists y \ \exists z \ (\exists w \ (yz = xw)) \longrightarrow \exists r \ (y = xr) \vee \exists s \ (z = xs)]$$

20) "HAY EXACTAMENTE DOS ELEMENTOS CON LA PROPIEDAD P"

EXISTEN X, Y TAL QUE X y Y SON DOS ELEMENTOS DIFERENTES CON LA PROPIEDAD P y PARA TODO Z, SI Z ES ELEMENTO CON LA PROPIEDAD P, ENTONCES Z = X o Z = Y

POR TANTO,

$$\exists x \ \exists y \ [x \text{ es } P \wedge y \text{ es } P \wedge x \neq y \wedge \forall z \ (z \text{ es } P \longrightarrow z=x \ \vee \ z=y)]$$

21) "DOS COSAS IGUALES A UNA TERCERA, SON IGUALES ENTRE SI"

DADAS CUALESQUIERA DOS COSAS X, Y, SI ESTAS SON IGUALES A CUALQUIER OTRA COSA, ENTONCES LAS PRIMERAS DOS COSAS SON IGUALES.

$$\forall x \ \forall y \ \forall z \ \ (x = z \ \wedge \ y = z \longrightarrow x = y)$$

22) "SI DOS CONJUNTOS TIENEN LOS MISMOS ELEMENTOS, ENTONCES SON IGUALES"

PARA TODO CONJUNTOS X, Y, SI X, Y TIENEN LOS MISMOS ELEMENTOS, ENTONCES X, Y SON IGUALES

"X, Y TIENEN LOS MISMOS ELEMENTOS", SIGNIFICA QUE:

PARA TODO ELEMENTO z, SI z ESTA EN EL CONJUNTO X, ENTONCES z ESTA EN EL CONJUNTO Y, y SI z ESTA EN EL CONJUNTO Y, ENTONCES z ESTA EN EL CONJUNTO X, i.e., $\forall z\,[(z \in X \longrightarrow z \in Y) \wedge (z \in Y \longrightarrow z \in X)]$, LO QUE ES EQUIVALENTE A $\forall z\,(z \in X \longleftrightarrow z \in Y)$

POR TANTO,

$$\forall X \forall Y\ [\forall z\,(z \in X \longleftrightarrow z \in Y) \longrightarrow X = Y]$$

EN ESTE CASO, PUEDE HACERSE NOTAR QUE EL CUANTIFICADOR $\forall Z$ DEBE OCURRIR DENTRO DE LOS PARENTESIS RECTANGULARES, YA QUE DE OTRO MODO, LA EXPRESION: $\forall X \forall Y \forall Z\,[(Z \in X \longleftrightarrow Z \in Y) \longrightarrow X = Y]$
NO SIMBOLIZA QUE "SI DOS CONJUNTOS TIENEN LOS MISMOS ELEMENTOS, ENTONCES SON IGUALES"; UN CONTRAEJEMPLO ES:

$X = \{a, b\}$ $\qquad$ $Y = \{a, c\}$ $\qquad$ $Z = \{a\}$

CON EL CUAL, SI (*) FUESE VERDADERO PARA LOS CONJUNTOS, YA QUE $a \in X \longleftrightarrow a \in Y$, SE TENDRIA QUE $\{a, b\} = \{a, c\}$ ¡CONTRADICCION ! .

III DEMOSTRACIONES

D E M O S T R A C I O N E S

3. 1 DEMOSTRACIONES DIRECTAS

VAGAMENTE HABLANDO, UNA DEMOSTRACION ES CUALQUIER ARGUMENTO QUE SIRVA PARA CONVENCER A CUALQUIERA DE LA VALIDEZ DE UNA PROPOSICION,

HAY DOS TIPOS DE DEMOSTRACIONES: LAS DIRECTAS Y LAS INDIRECTAS.

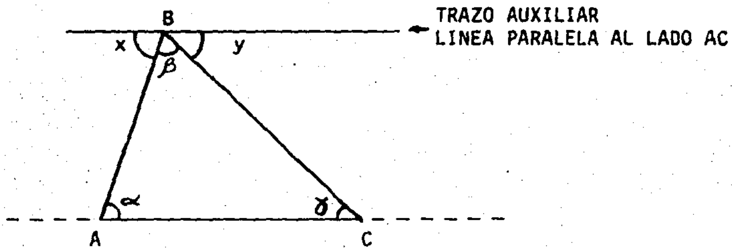
LA DEMOSTRACION DIRECTA O DEDUCCCION DE UNA PROPOSICION P, CONSISTE EN UNA SUCESION DE PASOS $P_1, P_2, \ldots, P_n$, DONDE P_n ES P Y PARA CADA $i = 1, 2, \ldots, n$, P_i ES UN RESULTADO CONOCIDO, i.e., CUYA VALIDEZ SE HA PROBADO ANTES O ES UNA CONSECUENCIA INMEDIATA DE UNA O VARIAS DE LAS PROPOSICIONES ANTERIORES. CADA PASO DE LA DEDUCCION DEBE IR ACOMPAÑADO DE UNA JUSTIFICACION.

EJEMPLOS:

A) $X^2 + Y^2 \geq 2XY$

1)	$(X - Y)^2 \geq 0$	(CUALQ. NUM. ELEVADO AL CUADRADO ES MAYOR O IGUAL QUE CERO)
2)	$(X - Y)^2 = X^2 + 2X(-Y) + (-Y)^2$	(TEOREMA CONOCIDO)
3)	$(X - Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$	(EFECTUANDO OPERACIONES EN 2)
4)	$X^2 - 2XY + Y^2 \geq 0$	(1 y 3)
5)	$X^2 + Y^2 \geq 2XY$	(SUMANDO 2XY A AMBOS MIEMBROS EN 4)

B) LA SUMA DE LOS ANGULOS INTERIORES DE UN TRIANGULO ES 180°



1)	$\hat{x} + \hat{\beta} + \hat{y} = 180°$	ANGULO LLANO
2)	$\hat{\alpha} = \hat{x}$	ALTERNOS INTERNOS
3)	$\hat{\gamma} = \hat{y}$	ALTERNOS INTERNOS
4)	$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180°$	(1, 2 y 3)

C) DEDUCIR $\sim R$ DE LAS PREMISAS DADAS

1) $\sim P \vee Q$
2) $\sim Q$
3) $R \rightarrow P \;/\therefore\; \sim R$
4) $\sim P$ TP 1,2
5) $\sim R$ TT 3,4

D) SI P ES UN NUMERO PAR, ENTONCES P^2 ES PAR.

1)	$P = 2n$	(DEFINICION DE NUMERO PAR, PARA ALGUNA n)
2)	$P^2 = (2n)^2$	(OBVIO)
3)	$(2n)^2 = 4n^2$	(ELEVANDO AL CUADRADO)
4)	$4n^2 = 2(2n^2)$	(FACTORIZANDO)
5)	$P^2 = 2m$	(2, 3, 4 DONDE $m = 2n^2$)

3.2 DEMOSTRACIONES INDIRECTAS

LAS DEMOSTRACIONES INDIRECTAS MAS EMPLEADAS EN MATEMATICAS SON: DEMOSTRACION POR CASOS, DEMOSTRACION POR CONTRAPOSITIVA Y DEMOSTRACION POR REDUCCION AL ABSURDO.

3.2.1 DEMOSTRACION POR CASOS

EL METODO DE DEMOSTRACION POR CASOS CONSISTE EN LO SIGUIENTE: SI SE DESEA DEMOSTRAR UNA PROPOSICION P, BASTA DEMOSTRAR n CONDICIONALES DE LAS FORMAS:

SI P_1 ENTONCES P

SI P_2 ENTONCES P

. . . .

. . . .

SI P_n ENTONCES P ,

TALES QUE LA DISYUNCION $P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$ SEA VALIDA.

EJEMPLOS:

A) DEMOSTRAR QUE $(-1)^n + 1 \geq 0$, n ENTERO.

POR SER n ENTERO, ENTONCES n PUEDE SER CERO, PAR o IMPAR.

POR TANTO, SI n ES CERO, ENTONCES $(-1)^n + 1 \geq 0$

SI n ES PAR, ENTONCES $(-1)^n + 1 \geq 0$

SI n ES IMPAR, ENTONCES $(-1)^n + 1 \geq 0$

SUPONGAMOS QUE n ES CERO, ENTONCES

$$(-1)^n + 1 = (-1)^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \geq 0$$

SUPONGAMOS QUE n ES PAR, ENTONCES $n = 2k$, PARA ALGUN ENTERO k

POR TANTO,

$$(-1)^n + 1 = (-1)^{2k} + 1 = \underbrace{(-1)(-1)\cdots\cdots(-1)}_{\substack{2k \text{ veces} \\ \text{(NUMERO PAR DE VECES)}}} + 1 = +1 + 1 = 2 \geq 0$$

SUPONGAMOS QUE n ES IMPAR, ENTONCES $n = 2k + 1$, PARA ALGUN ENTERO k

POR TANTO,

$$(-1)^n + 1 = (-1)^{2k+1} + 1 = \underbrace{(-1)(-1)\cdots\cdots(-1)}_{2k+1 \text{ veces}} + 1 = -1 + 1 = 0 \geq 0$$

B) DEMOSTRAR QUE $P \vee \sim P$ ES SIEMPRE VERDADERA, DONDE P ES UNA PROPOSICION CUALQUIERA.

POR SER P UNA PROPOSICION, TIENE DOS POSIBLES VALORES DE VERDAD, A SABER: VERDADERA o FALSA. ES DECIR, SE TIENEN DOS CASOS.

SI P ES VERDADERA, ENTONCES $\sim P$ ES FALSA Y POR LO TANTO LA DISYUNCION $P \vee \sim P$ ES VERDADERA.

SI P ES FALSA, ENTONCES $\sim P$ ES VERDADERA Y POR LO TANTO LA DISYUNCION $P \vee \sim P$ ES VERDADERA.

C) DAR VALORES DE VERDAD DE TAL MANERA QUE LA CONDICIONAL $\sim P \vee Q \longrightarrow R$ SEA VERDADERA, DONDE P, Q, R SON PROPOSICIONES CUALESQUIERA.

UNA CONDICIONAL ES VERDADERA EN TRES CASOS:

1°) CUANDO EL ANTECEDENTE Y EL CONSECUENTE SON VERDADEROS

2°) CUANDO EL ANTECEDENTE ES FALSO Y EL CONSECUENTE ES VERDADERO

3°) CUANDO EL ANTECEDENTE Y EL CONSECUENTE SON FALSOS

VEAMOS CASO POR CASO:

1°) SI EL ANTECEDENTE ES VERDADERO, SIGNIFIGA QUE $\sim P \vee Q$ ES VERDADERO. ESTE A SU VEZ CONSTA DE 3 CASOS, A SABER:

$\sim P$ ES VERDADERO Y Q ES VERDADERA, POR TANTO, P ES FALSO Y Q VERDADERA.

$\sim P$ ES FALSO Y Q ES VERDADERA, POR TANTO, P ES VERDADERA Y Q VERDADERA.

$\sim P$ ES VERDADERA Y Q ES FALSA, POR TANTO, P ES FALSA Y Q ES FALSA.

ADEMAS, EL CONSECUENTE R ES VERDADERO.

RESUMIENDO ESTOS VALORES EN UNA PEQUEÑAS TABLAS, SE TIENE:

V	F
Q	P
R	

V	F
P	
Q	
R	

V	F
R	P
	Q

2°) SI EL ANTECEDENTE ES FALSO, SIGNIFICA QUE $\sim P \vee Q$ ES FALSO, LO QUE IMPLICA QUE AMBAS COMPONENTES SON FALSAS.

ES DECIR, $\sim P$ ES FALSA Y Q ES FALSA, POR TANTO, P ES VERDADERA Y Q ES FALSA. ADEMAS, EL CONSECUENTE R ES VERDADERO.

RESUMIENDO EN UNA TABLA LOS VALORES OBTENIDOS, SE TIENE:

V	F
P	Q
R	

3°) CUANDO EL ANTECEDENTE ES FALSO, RESULTA POR EL 2° CASO QUE P ES VERDADERA Y Q ES FALSA. ADEMAS, EL CONSECUENTE R ES FALSO.

RESUMIENDO LOS VALORES EN UNA TABLA:

V	F
P	Q
	R

POR TANTO, TODAS ESAS ASIGNACIONES DE VALORES DADAS A LAS PROPOSICIONES P, Q, R HACEN VERDADERA A: $\sim P \vee Q \longrightarrow R$

3.2.2 DEMOSTRACION POR CONTRAPOSITIVA

LA DEMOSTRACION POR CONTRAPOSITIVA SE BASA EN EL HECHO DE QUE SI SE QUIERE DEMOSTRAR UNA PROPOSICION DE LA FORMA "SI P ENTONCES Q", DEMOSTREMOS "SI NO Q ENTONCES NO P ".

ES DECIR, SUPONEMOS LA NEGACION DEL CONSECUENTE Y LLEGUEMOS A LA NEGACION DEL ANTECEDENTE.

PARA ILUSTRAR ESTE METODO, DEMOSTREMOS LO QUE SE PIDE EN LOS SIGUIENTES EJEMPLOS:

A) SI P^2 ES UN NUMERO PAR, ENTONCES P ES PAR (D = Z)

SUPONGAMOS QUE P NO ES PAR, ENTONCES $P = 2k + 1$, PARA ALGUN ENTERO k. POR TANTO,

$P^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1,$

DONDE $m = 2k^2 + 2k$. POR LO TANTO,

P^2 NO ES PAR.

B) SI $X^2 + 7X + 12 = 0$ ENTONCES $X \neq 0$

SUPONGAMOS QUE $X = 0$, SUSTITUYENDO EL VALOR EN LA ECUACION, SE - TIENE:

$$X^2 + 7X + 12 = (0)^2 + 7(0) + 12 = 0 + 0 + 12 = 12 \neq 0$$

VEAMOS EL SIGUIENTE ARGUMENTO:

C) SI UNA FRACCION ES IRREDUCIBLE, ENTONCES NO TIENE DIVISORES
SI UNA FRACCION ES REDUCIBLE, ENTONCES TIENE DIVISORES
POR TANTO, SI UNA FRACCION ES REDUCIBLE, ENTONCES NO ES IRREDUCIBLE.

SIMBOLIZANDO, SE TIENE:

1) $I \rightarrow \sim D$

2) $R \rightarrow D$ / $\therefore$ $R \rightarrow \sim I$

3) I NEGACION DEL CONSECUENTE

4) $\sim D$ PP 1,3

5) $\sim R$ TT 2,4 (NEGACION DEL ANTECEDENTE)

D) SEAN A, B NUMEROS REALES CUALESQUIERA

SI $A \cdot B = 0$ ENTONCES $A = 0$ o $B = 0$

SUPONGAMOS LA NEGACION DEL CONSECUENTE, i.e., $\sim(A=0 \text{ o } B=0)$, ES EQUIVALENTE A: $A \neq 0$ y $B \neq 0$, POR TANTO, EL PRODUCTO DE DOS NUMEROS REALES DISTINTOS DE CERO, ES DISTINTO DE CERO.

ES DECIR, $A \cdot B \neq 0$

3.2.3 DEMOSTRACION POR REDUCCION AL ABSURDO (RAA)

EL METODO DE R.A.A. CONSISTE EN SUPONER LO CONTRARIO DE LO QUE SE QUIERE DEMOSTRAR Y DEDUCIR UNA CONTRADICCION, ESTO ES, UN PAR DE PROPOSICIONES CONTRADICTORIAS (Q y NO Q).

EJEMPLOS:

A) DEMOSTRAR QUE $\sqrt{2}$ ES UN NUMERO IRRACIONAL.

SUPONGAMOS LO CONTRARIO, ES DECIR, QUE $\sqrt{2}$ ES UN NUMERO RACIONAL, LO QUE SIGNIFICA QUE ES DE LA FORMA $\frac{m}{n}$, DONDE m y n SON NUMEROS ENTEROS Y ADEMAS NO TIENEN DIVISORES COMUNES; ES DECIR, LA FRACCION ES IRREDUCIBLE.

POR TANTO, $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, ELEVANDO AL CUADRADO AMBOS MIEMBROS, RESULTA:

$2 = \frac{m^2}{n^2}$, DESPEJANDO, $m^2 = 2\,n^2$, POR TANTO, m^2 ES PAR,

LO QUE IMPLICA QUE m ES PAR (ANTERIORMENTE DEMOSTRADO).

COMO m ES PAR, ENTONCES ES DE LA FORMA $m = 2k$, PARA ALGUN ENTERO k, POR TANTO, SUSTITUYENDO EL VALOR DE m EN $m^2 = 2\,n^2$, SE TIENE: $(2\,k\,)^2 = 2\,n^2$, EFECTUANDO OPERACIONES Y DESPEJANDO,

$$n^2 = \frac{4\,k^2}{2} = 2\,k^2 .$$

POR TANTO,

n^2 ES PAR, LO QUE IMPLICA QUE n ES PAR.

RESUMIENDO, m ES PAR y n ES PAR, IMPLICA QUE TIENEN AL NUMERO 2 COMO DIVISOR COMUN, LO QUE CONTRADICE EL HECHO DE QUE m y n NO TIENEN DIVISORES COMUNES. POR TANTO, LO QUE SE HABIA SUPUESTO NO ES CORRECTO Y DE AQUI QUE $\sqrt{2}$ ES UN NUMERO IRRACIONAL.

B) EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS PRIMOS ES INFINITO.

SUPONGAMOS QUE NO, ES DECIR, QUE HAY UN NUMERO FINITO DE NUMEROS -- PRIMOS Y SEA P EL MAYOR NUMERO PRIMO; ENTONCES EL PRODUCTO

$P_1 \cdot P_2 \cdots\cdots P$ DONDE CADA P_i ES PRIMO, ES DIVISIBLE POR CADA -- UNO DE LOS FACTORES $P_1, P_2, \ldots, P$

CONSIDEREMOS EL NUMERO FORMADO POR $Q = P_1 \cdot P_2 \cdot \cdot \cdot P + 1$

POR TANTO, Q NO ES DIVISIBLE POR NINGUNO DE LOS FACTORES P_i, NI POR P, YA QUE QUEDA SIEMPRE RESIDUO 1; POR TANTO,

Q ES UN NUMERO PRIMO O ES DIVISIBLE POR ALGUN NUMERO PRIMO MAYOR QUE P.

SI Q ES UN NUMERO PRIMO, ENTONCES POR SER $Q > P$, P NO ES EL MAYOR NUMERO PRIMO.

SI Q ES DIVISIBLE POR ALGUN NUMERO PRIMO MAYOR QUE P, ENTONCES P NO ES EL MAYOR NUMERO PRIMO.

LA CONTRADICCION ESTA EN EL HECHO DE QUE SE HABIA SUPUESTO QUE P ERA EL MAYOR NUMERO PRIMO Y SE MOSTRO QUE SE ENCONTRO OTRO PRIMO MAYOR QUE P.

VEAMOS EL SIGUIENTE ARGUMENTO:

C) SI EL ANGULO ALFA ES IGUAL AL ANGULO BETA, ENTONCES EL ANGULO BETA ES IGUAL A 45°
SI EL ANGULO BETA ES IGUAL A 45°, ENTONCES EL ANGULO THETA ES IGUAL A 90°
EL ANGULO THETA NO ES RECTO
POR TANTO, EL ANGULO ALFA NO ES IGUAL AL ANGULO BETA.

SIMBOLIZANDO, TENEMOS:

1)	$\alpha = \beta \longrightarrow \beta = 45°$	
2)	$\beta = 45° \longrightarrow \theta = 90°$	
3)	$\theta \neq 90° \quad / \therefore \quad \alpha \neq \beta$	
4)	$\alpha = \beta$	NEGACION DE LA CONCLUSION
5)	$\beta = 45°$	PP 1,4
6)	$\theta = 90°$	PP 2,5
7)	$\theta \neq 90° \wedge \theta = 90°$	ADJUNCION 3,6 (CONTRADICCION)
8)	$\alpha \neq \beta$	R.A.A. 4,...,7

D)

1) SI JUAN JUEGA COMO PRIMERA BASE Y PEDRO JUEGA COMO LANZADOR CONTRA NOSOTROS, ENTONCES EL "PUMAS" GANARA.
2) O EL "PUMAS NO GANARA O EL EQUIPO TERMINARA A LA CABEZA DE LA CLASIFICACION.
3) EL EQUIPO NO TERMINARA A LA CABEZA DE LA CLASIFICACION.
4) ADEMAS, JUAN JUGARA COMO PRIMERA BASE.
   POR TANTO, PEDRO NO LANZARA CONTRA NOSOTROS.

SIMBOLIZANDO:

1)	$J \wedge P \longrightarrow G$	
2)	$\sim G \vee T$	
3)	$\sim T$	
4)	$J \quad / \therefore \quad \sim P$	
5)	P	NEGACION DE LA CONCLUSION
6)	$\sim G$	TP 2,3
7)	$\sim (J \wedge P)$	TT 1,6
8)	$\sim J \vee \sim P$	LM 7
9)	$\sim P$	TP 4,8
10)	$P \wedge \sim P$	ADJ 5,9
11)	P	R.A.A. 5,...,10

OBSERVACION: BASTA ENCONTRAR UNA CONTRADICCION, YA QUE EN ALGUNOS CA-- COS HAY MAS DE UNA.

E J E R C I C I O S

DEMOSTRAR DIRECTA O INDIRECTAMENTE

1) SI $A = 0$ o $B = 0$ ENTONCES $A \cdot B = 0$ (D = R)

2) SI $X (X - 4) = 0$ ENTONCES $X = 0$ o $X = 4$

3) $(-1)^n = 1$ o -1 (n ES UN NUMERO ENTERO)

4) $X = 2$ o $X = -2$ SI $X^2 - 4 = 0$

5) SI $X > Y$ y Z ES CUALQUIER NUMERO REAL, ENTONCES

$X + Z > Y + Z$

6) SI JULIO ELIGE A TOMAS COMO DIRECTOR DE LA CAMPAÑA ELECTORAL ENTONCES GANARA LAS ELECCIONES.
SI JULIO NO GANA LAS ELECCIONES, ENTONCES CONTINUARA COMO -- EDITOR DEL PERIODICO.
SI CONTINUA COMO EDITOR DEL PERIODICO, ENTONCES PABLO SERA EL EDITOR ASOCIADO.
POR TANTO, O PABLO SERA EL EDITOR ASOCIADO O JULIO NO ELIGE A TOMAS COMO DIRECTOR DE SU CAMPAÑA ELECTORAL.

7) $\sim (P \wedge Q)$
$\sim R$ —— Q
$\sim P$ —— R $/ \therefore$ R

8) $\sim R \vee \sim B$
$T \vee S \rightarrow R$
$B \vee \sim S$
$\sim T$ $/ \therefore$ $\sim (T \vee S)$

APENDICES

APENDICE A: <u>H E U R I S T I C A</u>

LA HEURISTICA TENIA POR OBJETO EL ESTUDIO DE LAS REGLAS Y DE LOS METODOS DEL DESCUBRIMIENTO Y DE LA INVENCION.

LA HEURISTICA MODERNA TRATA DE COMPRENDER EL METODO QUE CONDUCE A LA SOLUCION DE PROBLEMAS, EN PARTICULAR LAS OPERACIONES MENTALES TIPICA-- MENTE UTILES EN ESTE PROCESO. LA BASE SOBRE LA CUAL SE CONSTRUYE LA HEU- RISTICA ES LA EXPERIENCIA QUE RESULTA A LA VEZ DE LA SOLUCION DE LOS PRO- BLEMAS Y DE LA OBSERVACION DE LOS METODOS QUE EMPLEA EL INDIVIDUO.

SEGUN PAPPUS*, LA HEURISTICA: "ENSEÑA LOS METODOS DE ANALISIS Y SINTESIS".

"EN ANALISIS, PARTIENDO DE LO QUE ES REQUERIDO, LO CONSIDERAMOS COMO ADMITIDO, SACAMOS LAS CONSECUENCIAS, DESPUES LAS CONSECUENCIAS DE - DICHAS CONSECUENCIAS, HASTA LLEGAR A UN PUNTO QUE PODAMOS UTILIZAR COMO PUNTO DE PARTIDA PARA UNA SINTESIS. PUES EN ANALISIS ADMITIMOS, COMO YA HECHO, LO QUE NOS PIDEN QUE HAGAMOS, COMO ENCONTRADO LO QUE BUSCAMOS, COMO VERDADERO LO QUE HAY QUE DEMOSTRAR. BUSCAMOS DE QUE ANTECEDENTE SE PODRIA DEDUCIR EL RESULTADO DESEADO; DESPUES BUSCAMOS CUAL PODRIA SER EL ANTECEDENTE DE ESTE ANTECEDENTE, Y ASI SUCESIVAMENTE, HASTA QUE PASANDO DE UN ANTECEDENTE A OTRO, ENCONTREMOS FINALMENTE ALGUNA COSA CONOCIDA O ADMITIDA COMO CIERTA. DICHO PROCESO LO LLAMAMOS ANALISIS, SOLUCION HACIA ATRAS O RAZONAMIENTO REGRESIVO.

EN LA SINTESIS, POR EL CONTRARIO, INVIRTIENDO EL PROCESO, PARTI- MOS DEL ULTIMO PUNTO ALCANZADO EN EL ANALISIS, DEL ELEMENTO YA CONOCIDO

---

* POLYA, G. "COMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS", EDIT. TRILLAS, MEX.1978 PP 133-134

O ADMITIDO COMO CIERTO. DEDUCIMOS LO QUE EN EL ANALISIS LE PRECEDIA Y - SEGUIMOS ASI HASTA QUE, VOLVIENDO SOBRE NUESTROS PASOS, LLEGAMOS FINALMENTE A LO QUE SE NOS PEDIA. DICHO PROCESO LO LLAMAMOS SINTESIS, SOLUCION CONSTRUCTIVA O RAZONAMIENTO PROGRESIVO.

HAY DOS TIPOS DE ANALISIS; EL PRIMERO ES ES EL ANALISIS DE LOS -PROBLEMAS DE DEMOSTRACION-, CUYO OBJETO ES ESTABLECER TEOREMAS VERDADEROS; EL OTRO ES EL ANALISIS DE LOS -PROBLEMAS POR RESOLVER-, CUYO OBJETO ES DETERMINAR LA INCOGNITA.

EN UN -PROBLEMA DE DEMOSTRACION-, SE NOS PIDE DEMOSTRAR O REFUTAR UN TEOREMA "A" CLARAMENTE ENUNCIADO. NO SABEMOS SI "A" ES VERDADERO O -- FALSO; PERO DE "A" DERIVAMOS OTRO TEOREMA "B", LUEGO DE "B" OTRO TEOREMA "C", Y ASI SUCESIVAMENTE HASTA LLEGAR A UN ULTIMO TEOREMA "L" YA CONOCIDO.

SI "L" ES VERDADERO, "A" LO SERA IGUALMENTE, CON TAL DE QUE TODAS LAS DERIVACIONES SEAN REVERSIBLES. A PARTIR DE "L", DEMOSTRAMOS "K" QUE PRECEDIA A "L" EN EL ANALISIS Y, ASI, REGRESANDO PASO A PASO, LLEGAMOS A DEMOSTRAR "B" PARTIENDO DE "C" Y, FINALMENTE, DEMOSTRAMOS "A" PARTIENDO DE "B", ALCANZANDO NUESTRA META. POR LO DEMAS, SI "L" ES FALSO DEMOSTRAMOS QUE "A" ERA IGUALMENTE FALSO.

EN UN -PROBLEMA POR RESOLVER-, SE NOS PIDE DETERMINAR UNA CIERTA INCOGNITA X QUE SATISFAGA UNA CONDICION CLARAMENTE ENUNCIADA. NO SABEMOS SI DICHA CONDICION PUEDE SER SATISFECHA, PERO ADMITIENDO QUE UNA INCOGNITA X SATISFACE LA CONDICION IMPUESTA, PODEMOS DERIVAR OTRA INCOGNITA <u>Y</u> QUE DEBE SATISFACER UNA CONDICION RELACIONADA CON LA PRIMERA, DESPUES RELACIONAMOS <u>Y</u> CON UNA TERCERA INCOGNITA Y ASI SUCESIVAMENTE HASTA LLEGAR A UNA ULTIMA INCOGNITA Z QUE PODEMOS DETERMINAR POR ALGUN METODO CONOCIDO. SI REALMENTE EXISTE UNA INCOGNITA Z QUE SATISFACE LA CONDICION IMPUESTA, IGUALMENTE EXISTIRA UNA INCOGNITA X QUE SATISFAGA LA CONDICION PRIMITIVA, CON TAL DE QUE TODAS LAS DERIVACIONES SEAN REVERSIBLES. DETERMINAMOS PRIMERO Z, DESPUES, CONOCIENDO Z, DETERMINAMOS LA INCOGNITA QUE PRECEDIA A Z EN EL ANALISIS; Y PROCEDIENDO ASI, PASO A PASO, LLEGAMOS A <u>Y</u>, DE DONDE FINALMENTE DETERMINAMOS X LOGRANDO ASI LO PROPUESTO.

SI POR EL CONTRARIO, NADA SATISFACE LA CONDICION IMPUESTA A Z, EL PROBLEMA RELATIVO A X NO TIENE SOLUCION".

LOS PROBLEMAS MATEMATICOS, SE PUEDEN CLASIFICAR EN:

- PROBLEMAS DE "PROBAR" EJEMPLO: PROBLEMAS DE RESPUESTA SI-NO
- PROBLEMAS DE "ENCONTRAR" EJEMPLO: HALLAR X TAL QUE $X(X+A)=B^2$

EN LOS PROBLEMAS DE "PROBAR", LOS ELEMENTOS QUE INTERVIENEN EN EL SON: HIPOTESIS (H), TESIS (T), CONDICION ($H \longrightarrow T$), INCOGNITA:PROBAR.

PARA EL PROCESO-SOLUCION DE ESTE TIPO DE PROBLEMAS, SE REQUIERE ENCONTRAR UN CAMINO (FORMAL), DE H HACIA T.

EN LOS PROBLEMAS DE "ENCONTRAR", LOS ELEMENTOS CON QUE SE CUENTA SON: DATOS ($d_1, d_2, \ldots, d_n$); INCOGNITAS ($x_1, x_2, \ldots, x_m$), CONDICIONES SOBRE INCOGNITAS ($C(x_1, \ldots x_m)$), SOLUCION: $x = f(d_1, d_2, \ldots, d_m)$

EL PROCESO-SOLUCION CONSISTE EN ENCONTRAR UN CAMINO DE LOS DATOS HACIA LA INCOGNITA, i.e., $\{d_i\} \longrightarrow x_j$

PROCEDIMIENTOS DE SOLUCION: A) POR PRODUCCION
B) POR REDUCCION

EJEMPLOS: A) POR PRODUCCION

1) $x(x + a) = b^2$ DATOS: a, b
INCOGNITA: x

SI $a = 0$ ENTONCES $x = \pm b$

SI $a \neq 0$ ENTONCES $x(x + a)$ TIENE LAS MAGNITUDES DE UN <u>RECTANGULO</u>, QUE ES DIFERENTE DE UN <u>CUADRADO</u> b^2.

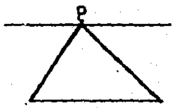
POR TANTO, LA IDEA HEURISTICA ES: "ENCONTRAR DIFERENCIAS Y DISMINUIRLAS O SUPRIMIRLAS".

2) $x^2 + ax = b^2$	DESARROLLANDO (1)
3) $x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	AGREGANDO $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ A AMBOS MIEMBROS (<u>PRODUCCION</u>)
4) $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	FACTORIZANDO (3)
5) $x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$	EXTRAYENDO RAIZ CUADRADA (4)
6) $x = -\frac{a}{2} \pm\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$	TRASPONIENDO TERMINOS (5)
7) $x = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$	DESARROLLANDO EL CUADRADO (6)
8) $x = \frac{-a \pm\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$	COMUN DENOMINADOR (7)

OTRO EJEMPLO POR PRODUCCION

LA SUMA DE LOS ANGULOS INTERIORES DE UN TRIANGULO ES IGUAL A 180°

1) 

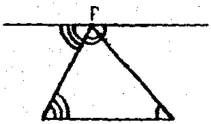
2) 

← NUEVO OBJETO

<u>PRODUCCION O</u>

<u>CONSTRUCCION</u>

<u>NUEVA</u>

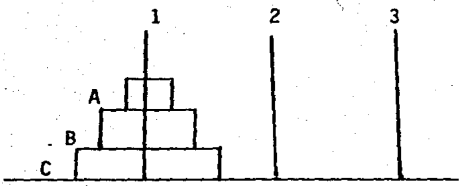
3) 

VISUALIZACION DE ANGULOS ALREDEDOR DE P Y ANGULOS DENTRO DEL TRIANGULO.

AHORA UN EJEMPLO POR REDUCCION

PROBLEMA DE LA TORRE DE HANOI

PASAR LOS DISCOS EN EL ORDEN EN QUE SE ENCUENTRAN EN 1, AL 3, PUDIENDO USAR EL 2, Y NUNCA UN DISCO MAYOR SOBRE UNO MENOR.



1) REDUCCION A TENER C HASTA ABAJO EN POSTE 3

A $\longrightarrow$ 3
B $\longrightarrow$ 2
A $\longrightarrow$ 2
C $\longrightarrow$ 3

2) REPETIR OPERACION PARA B, EN LUGAR DE C (TENERLO EN POSTE 3 ARRIBA DE C).

POR TANTO, SE TIENE:

A $\longrightarrow$ 1
B $\longrightarrow$ 3

POR ULTIMO, SE TIENE QUE A $\longrightarrow$ 3 Y SE TIENE LOS DISCOS COLOCADOS EN EL MISMO ORDEN QUE EN EL POSTE 1, PERO AHORA EN EL POSTE 3.

EN INNUMERABLES PROBLEMAS, SE TIENE INOBJETABLEMENTE QUE HACER LA PREGUNTA: ¿ CUAL ES LA INCOGNITA ?, O DE OTRA FORMA, ¿ QUE SE REQUIERE ?, ¿ QUE ES LO QUE SE PIDE QUE SE ENCUENTRE ?, ¿ QUE QUIERO DETERMINAR ?, ¿ QUE ES LO QUE HAY QUE DEMOSTRAR ?, ¿ QUE ES LO QUE HAY QUE MOSTRAR ?,

ESTE PROPOSITO ES CON EL FIN DE LOGRAR FIJAR EN LA MENTE LA IDEA DE LO QUE SE PIDE COMO RESULTADO. AL TRATAR DE RESOLVER PROBLEMAS, HAY QUE OBSERVAR E IMITAR LO QUE OTRAS PERSONAS HACEN EN CASOS SEMEJANTES. ES DECIR, LA HABILIDAD PRACTICA SE ADQUIERE MEDIANTE LA IMITACION Y LA PRACTICA. ¡ LA PRAGTICA HACE AL MAESTRO !.

LAS FASES POR LAS QUE ATRAVIEZA EL PROCESO DE "ATACAR" UN PROBLEMA SON: PRIMERO <u>COMPRENDER</u> EL PROBLEMA; ES DECIR, VER CLARAMENTE LO QUE SE PIDE. SEGUNDO, <u>CAPTAR LAS RELACIONES QUE EXISTEN ENTRE LOS DIVERSOS ELEMENTOS</u>, VER LO QUE LIGA LA INCOGNITA CON LOS DATOS A FIN DE ENCONTRAR LA IDEA DE LA SOLUCION Y <u>PODER TRAZAR UN PLAN</u>. TERCERO, <u>PONER EN EJECUCION EL PLAN</u>. Y POR ULTIMO, <u>VOLVER ATRAS</u> UNA VEZ ENCONTRADA LA SOLUCION, REVISARLA Y DISCUTIRLA.

ES TONTO EL CONTESTAR A UNA PREGUNTA QUE NO SE COMPRENDE. ES DEPLORABLE EL TRABAJAR PARA UN FIN QUE NO SE SABE CUAL ES. ANTE TODO, EL E--NUNCIADO VERBAL DEL PROBLEMA DEBE SER COMPRENDIDO; ES DECIR, SE DEBEN SEPARAR LAS PRINCIPALES PARTES DEL PROBLEMA.

LA HIPOTESIS Y LA CONCLUSION SON LAS PARTES PRINCIPALES DE UN ---PROBLEMA POR DEMOSTRAR-; LA INCOGNITA, LOS DATOS Y LAS CONDICIONES SON LAS PRINCIPALES PARTES DE UN -PROBLEMA POR RESOLVER-.

CONSIDERANDO EL PROBLEMA, SUBRAYEMOS LAS DIFERENTES PARTES, EXAMINEMOS LOS DIFERENTES DETALLES. DESCOMPONIENDO Y RECOMPONIENDO EL PROBLEMA SON DOS MANERAS DE CONSIDERAR EL PROBLEMA.

SI CONSIDERAMOS EL PROBLEMA COMO UN TODO, QUIZAS LA IMPRESION NO SEA MUY PRECISA. SI LO CONSIDERAMOS POR PARTES POSIBLEMENTE UN DETALLE NOS LLAME LA ATENCION, DESPUES NOS CONCENTRAMOS SOBRE OTRO DETALLE Y MAS TARDE SOBRE OTRO Y ASI SUCESIVAMENTE. DIVERSAS COMBINACIONES DE DETALLES SE PUEDEN PRESENTAR Y AL CABO DE UN MOMENTO, MIRAMOS EL OBJETO COMO UN TODO, PERO DE UNA MANERA DIFERENTE. POR TANTO, SE HA DESCOMPUESTO EL TODO EN SUS DIVERSAS PARTES Y SE HA RECOMPUESTO EL TODO EN DICHAS PARTES MAS O MENOS DIFERENTE.

ES IMPORTANTE CONSIDERAR EL ORDEN EN EL CUAL SE ABORDA EL PROBLEMA. NO DEBEMOS OMITIR NINGUN DETALLE, DEBEMOS COMPRENDER LA RELACION QUE UNE A CADA UNO DE ELLOS CON EL CONJUNTO DEL PROBLEMA. NO ES CONVENIENTE EXAMINAR LOS DETALLES SECUNDARIOS ANTES DE TENER LA SEGURIDAD EN CUANTO A LA EXACTITUD DEL RAZONAMIENTO GLOBAL. SI HAY ALGUNA FIGURA O "FORMA" RELACIONADA CON EL PROBLEMA, DEBE ESCRIBIRSE Y DESTACAR EN ELLA LOS ELEMENTOS. ES NECESARIO DAR NOMBRES A DICHOS ELEMENTOS, POR LO QUE ES CONVENIENTE INTRODUCIR UNA SIMBOLOGIA ADECUADA, PONIENDO CUIDADO EN LA APROPIADA ELECCION DE LOS SIGNOS. EL ORDEN DE LOS SIGNOS Y LAS RELACIONES ENTRE ELLOS DEBEN SUGERIR EL ORDEN Y LAS RELACIONES DE LOS OBJETOS A LOS QUE CORRESPONDEN. ANTE TODO, LOS SIMBOLOS NO DEBEN SER AMBIGUOS. ES INADMISIBLE QUE UN MISMO SIMBOLO DESIGNE DOS OBJETOS DIFERENTES A LA VEZ EN UN MISMO PROBLEMA. LOS SIGNOS DEBEN SER FACILES DE RECORDAR, CADA UNO DE ELLOS DEBE RECORDARNOS AL OBJETO CORRESPONDIENTE. LOS SIGNOS MAS FACILES DE RECORDAR SON LAS INICIALES DE LOS NOMBRES DE LOS OBJETOS.

AL ABORDAR UN PROBLEMA CON FRECUENCIA SE OBSERVA QUE ESTE TIENE CIERTA RELACION CON OTRO QUE YA HA SIDO RESUELTO ANTERIORMENTE, POR LO QUE CABE HACERSE LA SIGUIENTE PREGUNTA: ¿ EXISTE ALGUN PROBLEMA RELACIONADO ? O ¿ HE RESUELTO ALGUN OTRO PROBLEMA PARECIDO ?. POR LO GENERAL, EN MAS DE ALGUNA OCASION HEMOS TOPADO CON PROBLEMAS QUE ESTAN ESTRECHAMENTE RELACIONADOS CON EL NUESTRO, O AL MENOS DEBEN TERNER CIERTOS PUNTOS EN COMUN.

RESPECTO A LAS PREGUNTAS ANTERIORES, POSIBLEMENTE NO NOS LLEVEN A PROVOCAR EL ENCADENAMIENTO CORRECTO DE LAS IDEAS, POR TANTO NOS HACE FALTA BUSCAR OTRO PUNTO DE CONTACTO. DEBEMOS CAMBIAR, TRANSFORMAR O MODIFICAR EL PROBLEMA; ES DECIR, ¿ PUEDE ENUNCIARSE EL PROBLEMA DE MANERA DIFERENTE ?. CIERTAS CUESTIONES NOS PROPORCIONAN ELEMENTOS PARA VARIAR EL PROBLEMA, TALES COMO LA GENERALIZACION, LA PARTICULARIZACION, LA ANALOGIA, EL DESCARTAR UNA PARTE DE LA CONDICION, EL SEPARAR LAS PARTES QUE LO COMPONEN Y ANALIZAR CADA UNA, ETC.

POR ULTIMO, UNA VEZ QUE SE HA OBTENIDO LA SOLUCION Y EXPUESTO CLARAMENTE EL RAZONAMIENTO, ES CONVENIENTE HACER UNA VISION RETROSPECTIVA DE LOS PASOS QUE NOS HAN LLEVADO A LA SOLUCION. ES DECIR, REEXAMINEMOS EL RESULTADO Y EL CAMINO QUE NOS CONDUJO A EL CON EL FIN DE CONSOLIDAR LOS CONOCIMIENTOS Y DE SER POSIBLE ENCONTRAR UN PROCEDIMIENTO MAS CORTO QUE NOS CONDUZCA AL MISMO RESULTADO. POSIBLEMENTE,AL ESTAR VERIFICANDO CADA PASO NOS ENCONTREMOS CON ERRORES, SOBRE TODO SI EL RAZONAMIENTO ES LARGO Y ENREDADO; POR LO TANTO, ES RECOMENDABLE <u>VERIFICAR</u>.

RESUMIENDO, ALGUNAS DE LAS CUESTIONES QUE DEBEMOS TENER PRESENTE A LA HORA DE ABORDAR UN EJERCICIO O PROBLEMA SON:

¿ CUAL ES LA INCOGNITA ?, ¿ ES POSIBLE SATISFACER LA CONDICION ?, ¡ DIBUJE UNA FIGURA !, ¿ PUEDE UTILIZAR EL RESULTADO ? , ¿ PODRIA ENUNCIAR EL PROBLEMA EN FORMA DIFERENTE ?, ¿ PUEDO DESCOMPONER Y RECOMPONER SUS ELEMENTOS ? , ¿PUEDO UTILIZAR LA GENERALIZACION, PARTICULARIZACION Y ANALOGIA ?, ¿ CONOCE ALGUN PROBLEMA RELACIONADO CON EL SUYO ?, EMPLEAR UNA NOTACION APROPIADA, HAY QUE EXAMINAR LA HIPOTESIS, DISTINGUIR LAS DIVERSAS PARTES DE LA CONDICION, ¿ HA EMPLEADO USTED TODOS LOS DATOS ?, ¿ PUEDE COMPROBAR EL RESULTADO ? , REEXAMINE EL PROCESO Y EL RESULTADO.

VEAMOS ALGUNOS EJEMPLOS Y UTILICEMOS ALGUNAS CUESTIONES PLANTEADAS ANTERIORMENTE:

SIMBOLIZAR: "TODO NUMERO PAR MAYOR QUE DOS, ES LA SUMA DE DOS PRIMOS"

¿QUE ES LO QUE SE PIDE?, SIMBOLIZAR LA PROPOSICION.

¿TIENE ALGUNA FORMA?, SI, ES DE LA FORMA TODO S ES P, CUYA SIMBOLIZACION ES $\forall x$ (x es S $\longrightarrow$ x es P)

SUBRAYANDO LAS PARTES ESENCIALES, TENEMOS:

TODO $\underbrace{\text{NUMERO PAR MAYOR QUE DOS}}_{S}$, ES $\underbrace{\text{LA SUMA DE DOS PRIMOS}}_{P}$

¿PODEMOS ESCRIBIRLO DE OTRA FORMA?, VEAMOS:

PARA TODO NUMERO, SI ESE NUMERO ES PAR Y ESE NUMERO ES MAYOR QUE DOS, ENTONCES ESE NUMERO ES IGUAL A LA SUMA DE DOS PRIMOS.

DEBEMOS USAR UNA NOTACION ADECUADA. SI EN LUGAR DE "ESE NUMERO", EMPLEAMOS UNA "X", SE TIENE:

PARA TODO X, SI X ES PAR *y* X ES MAYOR QUE DOS, ENTONCES X ES IGUAL A LA SUMA DE DOS PRIMOS.

ANALIZANDO POR PARTES, SE TIENE:

EL ANTECEDENTE: "X ES PAR Y X ES MAYOR QUE DOS"

DE AQUI, SEPARAMOS "X ES PAR", QUE SIGNIFICA: "X ES DE LA FORMA 2k", ES DECIR, QUE EXISTE UN NUMERO k TAL QUE $X = 2k$, Y UTILIZANDO LA SIMBOLIZACION CONVENIENTE RESULTA $\exists k\ (X = 2k)$, POR OTRA PARTE "X ES MAYOR QUE DOS", LO SIMBOLIZAMOS COMO $X > 2$.

POR TANTO, "X ES PAR Y X ES MAYOR QUE DOS", SE SIMBOLIZA ASI:

$$\exists k\ (X = 2k) \wedge X > 2$$

ANALIZANDO AHORA EL CONSECUENTE: "X ES IGUAL A LA SUMA DE DOS PRIMOS"

RECOMPONIENDO, SE TIENE: DEBEMOS PRIMERO CONOCER LOS DOS PRIMOS, POR TANTO, SUPONGAMOS QUE EXISTEN DOS NUMEROS PRIMOS TALES QUE X ES IGUAL A LA SUMA DE AMBOS.

UTILIZANDO UNA SIMBOLIZACION ADECUADA: ES DECIR, EXISTEN Y y Z PRIMOS TALES QUE $X = Y + Z$

UNA FORMA DE DECIR QUE Z ES PRIMO SERIA $P(Z)$, O BIEN Pz

SIMBOLIZANDO, SE TIENE:

$$\exists Y\ (P(Y)) \wedge \exists Z\ (P(Z)) \wedge X = Y + Z$$

POR TANTO, ESA ES LA SIMBOLIZACION DE "X ES IGUAL A LA SUMA DE DOS PRIMOS".

Y VOLVIENDO A NUESTRO PROBLEMA INICIAL, RESULTA:

$$\forall x\ [\exists k\ (x = 2k) \wedge x > 2 \longrightarrow \exists y\ (Py) \wedge \exists z\ (Pz) \wedge x = y + z]$$

ANALICEMOS OTRO EJEMPLO:

SIMBOLIZAR "X ES NUMERO PRIMO"

¿PUEDO ENUNCIARLO DE MANERA DIFERENTE?. SI HACEMOS USO DE LA DEFINICION DE NUMERO PRIMO, TENDREMOS OTRA FORMA:

"X ES NUMERO PRIMO", SIGNIFICA QUE "X SOLO TIENE DOS DIVISORES, LA UNIDAD Y EL MISMO; ADEMAS, X ES DIFERENTE DE 1".

SEPARANDO LAS PARTES:

"X SOLO TIENE DOS DIVISORES, LA UNIDAD Y EL MISMO", SIGNIFICA QUE "TODO DIVISOR DE X ES 1 o X".

¿ QUE FORMA TIENE ?. ES DE LA FORMA "TODO S ES P", CUYA SIMBOLIZACION ES $\forall x\ (x \text{ es } S \rightarrow x \text{ es } P)$.

SUBRAYANDO LAS PARTES, SE TIENE:

TODO $\underbrace{\text{DIVISOR DE X}}_{S}$ ES $\underbrace{\text{1 o X}}_{P}$

ESCRIBIENDO DE OTRA MANERA:

PARA TODO NUMERO, SI ESE NUMERO ES DIVISOR DE X, ENTONCES ESE NUMERO ES IGUAL A 1 o ES IGUAL A X.

UTILIZANDO UNA SIMBOLIZACION ADECUADA (CAMBIANDO NUMERO POR Y)

PARA TODA Y, SI Y ES DIVISOR DE X, ENTONCES Y ES IGUAL A 1 o Y ES IGUAL A X. ------ (*)

SEPARANDO PARTES, EL ANTECEDENTE: "Y ES DIVISOR DE X", SIGNIFICA QUE EXISTE ALGUN NUMERO k TAL QUE $X = Yk$, i.e., $\exists\, k\ (X = Yk)$

SIMBOLIZANDO EL CONSECUENTE SE TIENE: $Y = 1$ o $Y = X$

POR LO TANTO, (*) SE SIMBOLIZA :

$$\forall y\ (\exists\, k\ (x = yk) \rightarrow y = 1 \lor y = x)$$

SOLO RESTA SIMBOLIZAR "X ES DIFERENTE DE 1", QUE SE SIMBOLIZA COMO $X \neq 1$.

POR TANTO, "X ES NUMERO PRIMO", SE SIMBOLIZA:

$$x \neq 1 \land \forall y\ [\exists\, k\ (x = yk) \rightarrow y = 1 \lor y = x]$$

VEAMOS UN ULTIMO EJEMPLO:

SIMBOLIZAR: "HAY EXACTAMENTE DOS ELEMENTOS CON LA PROPIEDAD P"

PODEMOS ENUNCIARLO DE ESTA OTRA FORMA:

EXISTEN DOS ELEMENTOS TALES QUE ESTOS SON DIFERENTES Y CON LA PROPIEDAD P Y PARA CUALQUIER ELEMENTO, SI ESTE TIENE LA PROPIEDAD P ENTONCES ESTE ES IGUAL A ALGUNO DE LOS DOS PRIMEROS ELEMENTOS.

¿QUE FORMA TIENE?, TIENE LA FORMA $\exists$ X, Y (X, Y son S y X, Y son P), QUE ES UNA VARIANTE DE $\exists$ X (X es S y X es P)

SUBRAYANDO SE TIENE:

EXISTEN DOS ELEMENTOS TALES QUE ESTOS SON DIFERENTES Y CON LA PRO-

S

PIEDAD P Y PARA CUALQUIER ELEMENTO, SI ESTE TIENE LA PROPIEDAD P ENTON

P

CES ESTE ES IGUAL A ALGUNO DE LOS DOS PRIMEROS ELEMENTOS.

USANDO UNA SIMBOLIZACION ADECUADA, POR EJEMPLO: X, Y, Z PARA LOS ELEMENTOS. ENTONCES, SE TIENE:

(**) ---- EXISTEN X, Y TALES QUE X y Y SON DIFERENTES y X TIENE LA PROPIEDAD P y Y TIENE LA PROPIEDAD P, y PARA CUALQUIER Z, SI Z TIENE LA PROPIEDAD P ENTONCES Z ES IGUAL A X o Z ES IGUAL A Y.

SEPARANDO LAS PARTES SE TIENE:

"X y Y SON DIFERENTES y X TIENE LA PROPIEDAD P y Y TIENE LA PROPIEDAD P", SE SIMBOLIZA: $X \neq Y \wedge X$ es $P \wedge Y$ es P.

POR OTRO LADO, LA OTRA PARTE ES:

"PARA CUALQUIER Z, SI Z TIENE LA PROPIEDAD P, ENTONCES Z ES IGUAL A X o Z ES IGUAL A Y"

QUE TIENE LA FORMA $\forall Z\ (Z \text{ es } S \rightarrow Z \text{ es } P)$

SUBRAYANDO LAS PARTES, TENEMOS:

PARA CUALQUIER Z, SI Z TIENE LA PROPIEDAD P, ENTONCES Z ES IGUAL A X o Z ES IGUAL A Y.

S P

SIMBOLIZANDO, $\forall Z\ (Z \text{ es } P \rightarrow Z = X \vee Z = Y)$

VOLVIENDO A NUESTRO PROBLEMA INICAL, ENTONCES (**) SE SIMBOLIZA:

$$\exists x\ \exists y\ [\, x \neq y \wedge x \text{ es } P \wedge y \text{ es } P \wedge \forall z\ (z \text{ es } P \rightarrow z = x \vee z = y)]$$

APENDICE B

FORMULAS UNIVERSALMENTE VALIDAS EN LOGICA DE 1er ORDEN (LENGUAJE DE PREDICADOS).

A (x), B (x) REPRESENTAN PREDICADOS O PROPOSICIONES ABIERTAS, D REPRESENTA UNA FORMULA EN LA CUAL x NO OCURRE LIBRE. (EN D NADA SE AFIRMA ACERCA DE x).

A. Relación entre $\forall x$ y $\exists x$

1) $\forall x\ A(x) \longleftrightarrow \sim\exists x \sim A(x)$

2) $\sim\forall x\ A(x) \longleftrightarrow \exists x \sim A(x)$

3) $\exists x\ A(x) \longleftrightarrow \sim\forall x \sim A(x)$

4) $\sim\exists x\ A(x) \longleftrightarrow \forall x \sim A(x)$

5) $\forall x\ A(x) \longrightarrow A(t)$, donde t es término libre para x en A(x).

B. Intercambio de cuantificadores

1) $\forall x\ A(x) \longleftrightarrow \forall y\ A(y)$ *

2) $\exists x\ A(x) \longleftrightarrow \exists y\ A(y)$ *

3) $\forall x \forall y\ A(x,y) \longleftrightarrow \forall y \forall x\ A(x,y)$

4) $\exists x \exists y\ A(x,y) \longleftrightarrow \exists y \exists x\ A(x,y)$

5) $\forall x\ A(x) \longrightarrow \exists x\ A(x)$ **

6) $\exists x \forall y\ A(x,y) \longrightarrow \forall y \exists x\ A(x,y)$

C. Relación de cuantificadores con conectivos

1) $\forall x\ [A(x) \wedge B(x)] \longleftrightarrow \forall x\ A(x) \wedge \forall x\ B(x)$

2) $\exists x\ [A(x) \wedge B(x)] \longrightarrow \exists x\ A(x) \wedge \exists x\ B(x)$ ***

3) $\forall x\ A(x) \vee \forall x\ B(x) \longrightarrow \forall x\ [A(x) \vee B(x)]$ ***

4) $\exists x\ [A(x) \vee B(x)] \longleftrightarrow \exists x\ A(x) \vee \exists x\ B(x)$

5) $\forall x\ [A(x) \longrightarrow B(x)] \longrightarrow [\forall x\ A(x) \longrightarrow \forall x\ B(x)]$ ***

6) $[\exists x\ A(x) \longrightarrow \exists x\ B(x)] \longrightarrow \exists x\ [A(x) \longrightarrow B(x)]$ ***

* "y" no debe ocurrir libre en A(x), ni "x" debe ocurrir libre en A(y).

** Es universalmente válida por nuestra suposición de que el dominio de variación o universo de interpretación es no-vacío.

*** En las implicaciones " $\longrightarrow$ ", el inverso es inválido.

D. Doble cuantificación

1) $\forall x\, [\forall x\, A(x) \rightarrow A(x)]$

2) $\exists x\, [\exists x\, A(x) \rightarrow A(x)]$

3) $\forall x\, [\, A(x) \rightarrow \exists x\, A(x)]$

4) $\exists x\, [\, A(x) \rightarrow \forall x\, A(x)]$

E. Igualdad

1) $\forall x\, (x \approx x)$

2) $\forall x\, \forall y\, [x \approx y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(x/y))]$

donde $A(x/y)$ denota el resultado de reemplazar x en $A(x)$, en cero o más lugares por y.

F. En estas formulas supondremos que D es una fórmula en la cual x no ocurre libre.

1) $\forall x\, D \leftrightarrow D$

2) $\exists x\, D \leftrightarrow D$

3) $\forall x\, [A(x) \wedge D] \leftrightarrow [\forall x\, A(x) \wedge D]$

4) $\exists x\, [A(x) \wedge D] \leftrightarrow [\exists x\, A(x) \wedge D]$

5) $\forall x\, [A(x) \vee D] \leftrightarrow [\forall x\, A(x) \vee D]$

6) $\exists x\, [A(x) \vee D] \leftrightarrow [\exists x\, A(x) \vee D]$

7) $\forall x\, (D \rightarrow A(x)) \leftrightarrow (D \rightarrow \forall x\, A(x))$

8) $\exists x\, (D \rightarrow A(x)) \leftrightarrow (D \rightarrow \exists x\, A(x))$

9) $\forall x\, (A(x) \rightarrow D) \leftrightarrow (\exists x\, A(x) \rightarrow D)$

10) $\exists x\, (A(x) \rightarrow D) \leftrightarrow (\forall x\, A(x) \rightarrow D)$

NOTA: UN LENGUAJE DE PRIMER ORDEN CONSTA DE CONECTIVOS, CUANTIFICADORES, IGUALDAD, Y SIMBOLOS AUXILIARES. ADEMAS, PREDICADOS, ORACIONES Y CONSTANTES.

LA EXPRESION "DE PRIMER ORDEN", SIGNIFICA QUE UNICAMENTE SE CUANTIFICA SOBRE INDIVIDUOS, NUNCA SOBRE OPERACIONES NI RELACIONES.

Algunas tautologías usuales y el nombre con el que se identifican. P, Q, R son proposiciones simples.

LEYES CLASICAS

1) $P \leftrightarrow P$ IDENTIDAD

2) $\sim (P \wedge \sim P)$ NO CONTRADICCION

3) $P \vee \sim P$ TERCERO EXCLUIDO

ASOCIATIVAS Y CONMUTATIVAS

1) $(P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

2) $(P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

3) $P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$

4) $P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$

LEYES DE LA NEGACION

1) $\sim \sim P \leftrightarrow P$ DOBLE NEGACION

2) $\sim (P \wedge Q) \leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$ DE MORGAN

3) $\sim (P \vee Q) \leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$ DE MORGAN

4) $\sim (P \rightarrow Q) \leftrightarrow P \wedge \sim Q$

5) $\sim (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)$

EXPORTACION - IMPORTACION

1) $[P \wedge Q \rightarrow R] \leftrightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow R)]$

2) $[P \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow [(P \wedge Q) \rightarrow R]$

3) $[P \wedge (P \wedge Q \rightarrow R)] \rightarrow (Q \rightarrow R)$

LEYES DE SIMPLIFICACION

1) $P \vee P \longleftrightarrow P$ — IDEMPOTENCIA
2) $P \wedge P \longleftrightarrow P$ — IDEMPOTENCIA
3) $P \wedge (P \vee Q) \longleftrightarrow P$ — ELIMINACION
4) $P \vee (P \wedge Q) \longleftrightarrow P$ — ELIMINACION
5) $P \wedge (Q \vee \sim Q) \longleftrightarrow P$ — ABSORCION
6) $P \vee (Q \wedge \sim Q) \longleftrightarrow P$ — ABSORCION
7) $(P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q) \longleftrightarrow P$ — SIMPLIFICACION
8) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \longleftrightarrow P$ — SIMPLIFICACION

LEYES DE LA IMPLICACION

1) $(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow \sim P \vee Q$
2) $(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow \sim (P \wedge \sim Q)$
3) $(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow (\sim Q \longrightarrow \sim P)$ CONTRAPOSITIVA
4) $[P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)] \longleftrightarrow [Q \longrightarrow (P \longrightarrow R)]$
INTERCAMBIO DE PREMISAS
5) $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$
6) $(\sim P \longrightarrow P) \longrightarrow P$
7) $\sim P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$

DISTRIBUTIVIDAD - FACTORIZACION

1) $P \wedge (Q \vee R) \longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

2) $P \vee (Q \wedge R) \longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

3) $(P \longrightarrow Q \wedge R) \longleftrightarrow [(P \longrightarrow Q) \wedge (P \longrightarrow R)]$

4) $(P \longrightarrow Q \vee R) \longleftrightarrow [(P \longrightarrow Q) \vee (P \longrightarrow R)]$

5) $(P \wedge (Q \longrightarrow R)) \longrightarrow [(P \wedge Q) \longrightarrow (P \wedge R)]$

6) $(P \vee (Q \longrightarrow R)) \longrightarrow [(P \vee Q \longrightarrow (P \vee R)]$

EN TODOS LOS CASOS DE IMPLICACIONES " $\longrightarrow$ ", EL INVERSO ES INVALIDO.

Algunas tautologías de la forma $A \to D$ o $A \wedge B \to D$ o bien $A \wedge B \wedge C \to D$ y que corresponden a reglas de inferencia usuales.

$P, Q, R, P_i, P_j, Q_i, Q_j$, son proposiciones simples.

1) $[(P \to Q) \wedge P] \to Q$ MODUS PONENS

2) $[(P \to Q) \wedge \sim Q] \to \sim P$ MODUS TOLLENS

3) $[(P \vee Q) \wedge \sim P] \to Q$
 $[(P \vee Q) \wedge \sim Q] \to P$ } MODUS TOLLENDO PONENS

4) $[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] \to (P \to R)$ SILOGISMO HIPOTETICO

5) $P \to P \vee Q$
 $Q \to Q \vee P$ } LEY DE LA ADICION

6) $P \wedge Q \to P$
 $P \wedge Q \to Q$ } SIMPLIFICACION

7) $[(P) \wedge (Q)] \to (P \wedge Q)$ ADJUNCION

8) $[(P \to Q) \wedge (P \to R)] \to [P \to Q \wedge R]$ COMPOSICION

9) $[(P \to R) \wedge (Q \to S) \wedge (P \vee Q)] \to R \vee S$ SILOGISMO DISYUNTIVO

10) $[(P \to R) \wedge (Q \to S) \wedge (\sim R \vee \sim S)] \to \sim P \vee \sim Q$ DILEMA DESTRUCTIVO.

11) $[(P \to R) \wedge (Q \to R) \wedge (P \vee Q)] \to R$ PRUEBA POR CASOS

12) $[(P \to R) \wedge (\sim P \to R)] \to R$ CASO ESPECIAL DE PRUEBA DE CASOS

13) $(P \wedge \sim P) \to Q$ DE UNA CONTRADICCION INFERIR CUALQUIER PROPOSICION

14) $[(P \to Q) \wedge (P \to \sim Q)] \to \sim P$ REDUCCION AL ABSURDO

15) $[(P \to R) \wedge (Q \to S) \wedge (P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q) \wedge (R \vee S) \wedge \sim (R \wedge S)] \to$

$(R \to P) \wedge (S \to Q)$ LEY DE HAUBER

16) $\left[\bigwedge_{i=1}^{n}(P_i \to Q_i)\right] \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{n}(P_i \wedge \bigwedge_{j\neq i} \sim P_j)\right] \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{n}(Q_i \wedge \bigwedge_{j\neq i} \sim Q_j)\right] \to$

$\bigwedge_{i=1}^{n}(Q_i \to P_i)$ LEY GENERAL DE HAUBER $(n \in \mathbb{N})$

17) $\left[\bigwedge_{i=1}^{n}(P_i \longrightarrow R) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} P_i\right)\right] \longrightarrow R$ PRUEBA GENERAL POR CASOS

18) $[\sim Q \longrightarrow \sim P] \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$ PRUEBA POR CONTRAPOSITIVA

C O N C L U S I O N E S

UNA INQUIETUD MUY NATURAL EN UN ALUMNO INTERESADO EN UN CURSO DE LOGICA MATEMATICA ES LA DE "APRENDER A DEMOSTRAR EN MATEMATICAS Y LA DE PENSAR CORRECTAMENTE". ESTA INQUIETUD PROVIENE DEL HECHO DE QUE EL ALUMNO NO SABE LO QUE ES DEMOSTRAR EN MATEMATICAS, NI TIENE CLARO EL CONCEPTO DE VERDAD EN MATEMATICAS, SOLO TIENE UNA REGULAR PREPARACION MECANICISTA DE ALGUNOS CONCEPTOS MATEMATICOS, PERO CARECE DE ESPIRITU ANALITICO, ES AFECTO A DESARROLLOS FORMALISTAS-MECANICISTAS Y A LA MEMORIZACION, PERO LA FALTA DE ESPIRITU ANALITICO LE PROVOCA UN RECHAZO AL ANALISIS DE CONCEPTOS, DE PRINCIPIOS Y METODOS BASICOS DE LA MATEMATICA.

LO QUE HAY QUE ACLARARLE AL ALUMNO ES QUE NO HAY RECETAS PARA ENSEÑAR A DEMOSTRAR EN MATEMATICAS, AUNQUE SE PUEDEN DAR ELEMENTOS NECESARIOS PARA ELLO Y LA PRACTICA MISMA HARA QUE EL TRABAJO SEA MAS SENCILLO. AL OBSERVAR DIFERENTES METODOS DE DEMOSTRACION Y ALGUNOS "TRUCOS" EMPLEADOS EN LAS DEMOSTRACIONES NOS DARAN LA PAUTA PARA ABORDAR LOS DIFERENTES PROBLEMAS A LOS QUE SE TENGA QUE ENFRENTAR UNO.

EL LENGUAJE FORMAL O ANALITICO TIENE CIERTAS VENTAJAS RESPECTO AL LENGUAJE NATURAL EN EL SENTIDO DE QUE:

1.- EL LENGUAJE ANALITICO EVITA LA AMBIGUEDAD DEL LENGUAJE NATURAL.
2.- EL LENGUAJE ANALITICO ES CONCISO, CON LO CUAL SE TIENE ECONOMIA DE PENSAMIENTO.
3.- EL LENGUAJE ANALITICO INDUCE A UNA CONCENTRACION SOBRE LO ESENCIAL EN UNA AFIRMACION.

4.- EN EL LENGUAJE ANALITICO HAY DOS FORMAS DE COMPOSICION, A SABER: CUANTIFICACION UNIVERSAL Y CUANTIFICACION EXISTENCIAL.

EL LENGUAJE ANALITICO TIENE TAMBIEN SUS LIMITACIONES YA QUE POR SU CARACTER RIGORISTA NO PUEDE EXPRESAR MUCHO DE LO QUE EL LENGUAJE NATURAL EXPRESA AMBIGUAMENTE. LOS TERMINOS GENERALES (NOMBRES COMUNES Y ADJETIVOS CALIFICATIVOS) NO SE PUEDEN EXPRESAR EN EL LENGUAJE ANALITICO, PERO SE PUEDEN PARAFRASEAR CON LOS CUANTIFICADORES, LA CONDICIONAL Y LA CONJUNCION.

AUN ASI, ESTE MATERIAL DA SUFICIENTES HERRAMIENTAS A AQUELLAS PERSONAS QUE ESTEN INTERESADAS EN EL ESTUDIO DE LAS MATEMATICAS Y TAMBIEN A AQUELLAS QUE TENGAN CIERTO INTERES EN EL USO ADECUADO DE NUESTRO LENGUAJE NATURAL.

POR TANTO, SI LOS OBJETIVOS QUE SE INCLUYERON EN LA INTRODUCCION SE LLEGARAN A REALIZAR EN EL ALUMNO, LO ENCAUZARIAN POR EL CAMINO ANALITICO-LOGICO Y LE DARIAN UNA DISCIPLINA Y SEGURIDAD MUY IMPORTANTE EN SU TRABAJO, QUE LE PERMITIRA A SU VEZ TENER UNA ACTITUD ANALITICA ANTE LAS MATEMATICAS.

POR LO QUE PROPONGO QUE AL MENOS TODOS LOS TEMAS TRATADOS EN ESTE MATERIAL CONFORMARAN LOS PROGRAMAS PARA LOS CURSOS DE LOGICA MATEMATICA I y II DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, Y QUE ESTOS CURSOS SEAN IMPARTIDOS A ALUMNOS QUE VAN A INGRESAR A CARRERAS EN LAS QUE LAS MATEMATICAS DESEMPEÑEN UN PAPEL IMPORTANTE.

B I B L I O G R A F I A

AMOR MONTAÑO, JOSE A., "Antología de Lógica Matemática", Comunicación Interna No. 30, Dpto. de Matemáticas, Fac. de Ciencias, México, 1978.

——————————, "Ponencia sobre un curso de Análisis Lógico", México, 1982.

ARNAZ, J. A., "Iniciación a la Lógica Simbólica", ANUIES, México, 1975.

BETH, E.W., "Implicación Semántica y Derivabilidad Formal", Cuadernos Fac. Filosofía y Letras, México, 1978.

CARROLL, LEWIS, "El juego de la Lógica", Alianza, Madrid, 1984.

COPI, IRVING M., "Introducción a la Lógica", EUDEBA, Argentina, 1976.

——————————, "Lógica Simbólica", C.E.C.S.A., México, 1979.

DEAÑO, A., "Introducción a la Lógica Formal", Alianza, Madrid, 1975.

DELONG, HOWARD, "A Profile of Mathematical Logic", Addison-Wesley, U.S.A. 1971.

FERRATER MORA, J., LEBLANC, H., "Lógica Matemática", F.C.E., México, 1983.

GORSKI, D.P., TABANTS, P.V., "Lógica", Grijalbo, México, 1968.

JASSO GUTIERREZ, P., "Lógica Matemática", Mc Graw-Hill, México, 1978.

KUDRIN, A.K., "La Lógica y la Verdad", Cartago, México, 1983.

MATES, BENSON, "Lógica Matemática Elemental", Tecnos, S.A., Madrid, 1971.

POLYA, G., "Como plantear y resolver problemas", Trillas, México, 1978.

QUINE, W.V.O., "Lógica Elemental", Grijalbo, México, 1983.

SUPPES, P., HILL, S., "Introducción a la Lógica Matemática", México, 1981.

SUPPES, PATRICK, "Introducción a la Lógica Simbólica", C.E.C.S.A., México, 1973.

TARSKI, ALFRED, "Introducción a la Lógica y a la Metodología de las Ciencias Deductivas", Espasa-Calpe, Madrid, 1968.

ZUBIETA RUSSI, GONZALO, "Manual de Lógica para estudiantes de Matemáticas", Trillas, México, 1975.

———————————, "Lógica Elemental", ANUIES, México, 1973.

———————————, "Notas sobre Método Analítico y Método Deductivo", México, 1985.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

BOOLE, GEORGE, "El Análisis Matemático de la Lógica", Catedra, Madrid, 1984.

COHEN, MORRIS R., "Introducción a la Lógica", F.C.E., México, 1981.

DE GORTARI, GORSKI, TAVANTS, "Principios de Lógica", Grijalbo, México, 1981.

HAACK, SUSAN, "Filosofía de las Lógicas", Catedra, Madrid, 1982.

KNEALE, W.C. y M., "El desarrollo de la Lógica", Tecnos, Madrid, 1972.

LEFEBVRE, HENRI, "Lógica Formal, Lógica Dialéctica", Siglo XXI, México, 1984.

NIDDITCH, P.H., "El desarrollo de la Lógica Matemática", Catedra, Madrid, 1983.

NOVACK, GEORGE, "Introducción a la Lógica. Lógica Formal y Lógica Dialéctica", Fontamara, México, 1984.

QUINE, W.V.O., "Filosofía de la Lógica", Alianza Universidad, Madrid, 1984.

SANABRIA, JOSE R., "Lógica", Porrúa S.A., México, 1985.