

21.40

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
Facultad de Ciencias

MONOPOLOS MAGNETICOS EN TEORIAS DE YANG-MILLS

TESIS

que para obtener el título de

Físico

presenta

Myriam Mondragón Ceballos

México, D. F.

1987





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION

5

Capítulo I. TEORIAS DE YANG-MILLS

1.1	Invariancia de norma en electrodinámica	10
1.2	Teorías de norma no-abelianas: $SU(2)$	15
1.3	Teorías de norma no-abelianas: generalización	19
1.4	Ecuaciones clásicas de movimiento para el campo de Yang-Mills	22

Capítulo II. MONOPOLOS DE DIRAC

2.1	La simetría de las ecuaciones de Maxwell	27
2.2	El monopolo de Dirac	31
2.3	Ecuaciones de movimiento	33
2.4	Transformaciones de norma en la cuerda de Dirac	36
2.5	Derivación de la condición de cuantización de Dirac	38
2.6	Otras formulaciones	38

Capítulo III. SOLITONES Y TEORIA DE HOMOTOPIA

3.1	Solitones	40
3.2	Teoría de Homotopía	42
3.3	El <i>kink</i>	47
3.4	La carga topológica	52

Capítulo IV. MONOPOLOS MAGNETICOS EN TEORIAS DE YANG-MILLS

4.1	Teorías de Yang-Mills y rompimiento espontáneo de la simetría	54
4.2	Vacío de Higgs y monopolos magnéticos	57
4.3	Solución de 't Hooft-Polyakov	59
4.4	La condición de cuantización de Dirac	61
4.5	Estructura del monopolo	63
4.6	Solución de 't Hooft-Polyakov en el vacío de Higgs	64
4.7	Carga magnética y topología	65
4.8	Monopolo de Bogomolny-Prasad-Sommerfield	68
4.9	Relación entre el monopolo de 't Hooft-Polyakov y el de Dirac	72
4.10	Diones	72
4.11	Resumen	73

Capítulo V. MONOPOLOS NO ABELIANOS EN
MOVIMIENTO ARBITRARIO

5.1	Monopolos en movimiento con velocidad constante	74
5.2	Los campos eléctrico y magnético no-abelianos	78
5.3	Los campos eléctrico y magnético	79
5.4	Energía del monopolo cuando la velocidad es constante	82
5.5	Teorema del Virial	83
5.6	Generalización del ansatz de 't Hooft-Polyakov a un monopolo en movimiento arbitrario	88
5.7	Campos eléctrico y magnético de un monopolo en movimiento arbitrario	96
5.8	Tensor de energía-momento	101
5.9	Energía y vector de Poynting	102
5.10	Cálculo del vector de Poynting	105
5.11	Radiación y estabilidad de un monopolo magnético en movimiento arbitrario	106

Capítulo VI.	CONCLUSIONES	108
--------------	--------------	-----

APENDICES

Apéndice A	112
Apéndice B	118

Apéndice C

120

Apéndice D

125

BIBLIOGRAFIA

131

INTRODUCCION

La idea de los monopolos magnéticos, partículas estables que llevan carga magnética, surgió de la asimetría de las ecuaciones de Maxwell.

En caso de existir monopolos magnéticos, las ecuaciones de Maxwell serían invariantes ante la transformación de dualidad

$$\begin{array}{lcl} E & \text{-----}\rightarrow & B \\ B & \text{-----}\rightarrow & -E \\ j^\mu & \text{-----}\rightarrow & k^\mu \\ k^\mu & \text{-----}\rightarrow & -j^\mu \end{array}$$

donde E y B son los campos eléctrico y magnético, y j^μ y k^μ las corrientes eléctrica y magnética respectivamente.

Un argumento muy interesante que apoya la existencia de monopolos magnéticos lo dió Dirac. Dirac demostró (Dirac, 1931) que la existencia de monopolos magnéticos combinada con la mecánica cuántica implica la cuantización de la carga eléctrica. Hasta entonces no se sabía de ningún otro mecanismo que explique la cuantización de la carga eléctrica, que es un fenómeno que se observa en la naturaleza.

Otro argumento igualmente interesante lo dieron 't Hooft y Polyakov tiempo después. Ellos descubrieron que la existencia de monopolos magnéticos surge de ideas muy generales de la unificación de interaccio-

nes fundamentales. Polyakov y 't Hooft demostraron que las teorías de "gran unificación" con rompimiento espontáneo de la simetría necesariamente contienen soluciones de monopolo magnético.

Mientras Dirac demostró la consistencia de monopolos magnéticos con la mecánica cuántica, 't Hooft y Polakov demostraron la necesidad de monopolos magnéticos en teorías de gran unificación.

Todas las teorías de gran unificación poseen un grupo grande de simetrías de norma exactas, que mezclan las interacciones fuertes y electrodébiles. Pero estas simetrías tienen una escala de masa de rompimiento espontáneo de la simetría (M_x) muy grande. Las propiedades del monopolo magnético, como su masa y tamaño, están determinadas por esta escala. Por ejemplo, para la teoría de gran unificación basada en el grupo $SU(5)$ se encuentra que:

$$M_x \approx 10^{17} \text{ GeV}$$

La carga magnética del monopolo es generalmente la carga de Dirac

$$g_D = 1/2 e.$$

Esta carga magnética está distribuida en una coraza con radio del orden M_x^{-1} , la escala de distancia de unificación y la masa del monopolo es comparable con la energía potencial magnetostática de la coraza.

La existencia de monopolos magnéticos es una consecuencia muy general de la unificación de interacciones fundamentales. Pero una cosa es decir que los monopolos deben existir y otra muy diferente que

tengamos una probabilidad razonable de observar uno. Si la masa del monopolio es tan grande como la esperamos, no hay ninguna probabilidad de producir un monopolio en un acelerador. La mejor esperanza de observar un monopolio es en la radiación de rayos cósmicos. Pero como ningún proceso que ocurre en el presente universo es suficientemente energético, los monopolos que haya por ahí debieron haber sido producidos al principio del universo, cuando había energías muy altas. Esto significa que la abundancia de monopolos magnéticos es un fenómeno cosmológico.

Hay argumentos astrofísicos que ponen un límite al flujo de monopolos en la radiación de rayos cósmicos. Uno de estos límites es el límite de Parker. El argumento es el siguiente (Parker, 1970): Los monopolos magnéticos deben ser acelerados por el campo magnético de nuestra galaxia. En ese caso la densidad de energía del campo magnético es la siguiente:

$$U = B^2/8\pi$$

con B del orden de

$$B \approx 3 \times 10^{-6} \text{ Gauss}$$

y la velocidad de disipación de la energía está dada por

$$dU/dt = \langle g_{nv} \cdot B \rangle$$

donde n es la densidad de monopolos. Para que la energía del campo no se agote en un tiempo τ de aproximadamente 10^8 años (que es el tiempo de regeneración del campo) llegamos al límite de Parker:

$$F = nv < F_0 = \frac{B}{8\pi\tau g}$$

que, al evaluarlo en los valores mencionados anteriormente, nos dá:

$$F \leq 10^{-16} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

Este límite es independiente de la masa del monopolo si la masa es menor que 10^{17} GeV. Si la masa del monopolo está entre 10^{17} y 10^{20} GeV, entonces hay que tomar en cuenta efectos gravitacionales, y el límite que se obtiene es el siguiente (Turner et al, 1982)

$$F \leq 10^{-13} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

Existen dos eventos experimentales no confirmados que podrían corresponder a monopolos magnéticos (Cabrera, 1982; Caplin et al, 1986). Estos experimentos ponen el siguiente límite al flujo de monopolos:

$$F \leq 10^{-13} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

Estos límites indican que el flujo es muy pequeño. Además, si los monopolos son muy pesados, los que bombardearan la tierra probablemente se moverían con velocidades del orden de 10^{-3} c. La detección

de estos monopolos lentos y escasos es un reto para los experimentadores.

Incluso si nunca nadie detecta un monopolo magnético, ciertamente hay mucho que ganar del estudio de la teoría de monopolos. Hasta ahora, el estudio de la teoría de monopolos magnéticos ha contribuido mucho a entender las propiedades no lineales de las teorías de norma. En este tema surge una aplicación interesante de los conceptos de solitón y de teorías de homotopía a las teorías de campo no-abelianas.

El propósito de esta tesis es la descripción teórica de un monopolo magnético en movimiento arbitrario mediante una generalización del ansatz de 't Hooft y Polyakov y a partir de este resultado encontrar la expresión para la radiación del monopolo y estudiar la estabilidad del sistema.

En el capítulo I hacemos una introducción a lo que son las teorías de Yang-Mills. En el capítulo II explicamos brevemente el concepto de monopolo de Dirac. En el capítulo III explicamos lo que son las soluciones de solitón de las ecuaciones de movimiento clásicas del campo y las teorías de homotopía. El ansatz de 't Hooft y Polyakov para un monopolo en movimiento arbitrario y sus propiedades se estudia en el capítulo IV. En el capítulo V se hace una generalización del ansatz de 't Hooft-Polyakov a un monopolo con velocidad constante y se estudian algunas de sus propiedades. A partir de este resultado se encuentra la generalización del ansatz a un monopolo en movimiento arbitrario y se calculan los campos eléctrico y magnético en la aproximación de baja velocidad. Finalmente, se encuentra la expresión para

el flujo de energía del sistema. En el capítulo VI se hace un resumen de los resultados y se obtienen algunas conclusiones que se derivan de estos.

CAPITULO I

TEORIAS DE YANG-MILLS

1.1 Invariancia de norma en electrodinámica

Consideremos la densidad Lagrangiana para un electrón libre:

$$1.1 \quad \mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)$$

donde x representa el cuadrivector de posición $x = (t, r)$ y usamos unidades naturales: $c = \hbar = 1$. Además de ser invariante ante las transformaciones del grupo de Lorentz, el lagrangiano \mathcal{L}_0 es invariante ante la transformación de fase o transformación global

$$1.2 \quad \psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha} \psi(x)$$

donde α es una constante. De acuerdo al teorema de Noether la invariancia de \mathcal{L}_0 ante la transformación 1.2 da lugar a la siguiente corriente conservada

$$1.3 \quad j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

Supongamos que ahora queremos construir una teoría en la cual \mathcal{L}_0 sea

invariante ante una transformación de fase dependiente del espacio y del tiempo, es decir, una transformación local:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \psi(x)$$

L_0 no es directamente invariante ante transformaciones locales, debido al término de la derivada ∂^μ , ya que al hacer una transformación local, este término se transforma como:

$$\begin{aligned} \text{I.4 a} \quad \bar{\psi}(x) \partial^\mu \psi(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) \partial^\mu \psi'(x) = \\ &= \bar{\psi}(x) \partial^\mu \psi(x) - i \bar{\psi}(x) [\partial^\mu \alpha(x)] \psi(x) = \\ &= \bar{\psi}(x) [\partial^\mu - i \partial^\mu \alpha(x)] \psi(x) \end{aligned}$$

Necesitamos formar una derivada covariante D^μ , que tome el lugar de ∂^μ y que se transforme como:

$$\text{I.4 b} \quad D_\mu \psi(x) \longrightarrow [D_\mu \psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)} D_\mu \psi(x)$$

de manera que $\bar{\psi}(x) D_\mu \psi(x)$ sea invariante ante la transformación local de fase. Lo anterior se puede lograr si escribimos la derivada covariante como:

$$\text{I.5} \quad D^\mu = (\partial^\mu + i e A^\mu)$$

donde a $A^\mu(x)$ se le llama campo de norma. Para que la ley de transformación I.4 b se cumpla A^μ debe transformarse de la siguiente manera:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{i}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

Al introducir la derivada covariante D^μ y el campo de norma A^μ , el lagrangiano transformado queda como:

$$\mathcal{L}'_0 = \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + i e A_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi$$

y es invariante ante las transformaciones locales simultáneas:

$$\begin{aligned} \text{I.6} \quad \psi &\longrightarrow e^{-i\alpha(x)} \psi \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A_\mu(x) + \frac{i}{e} \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

Esto significa que para generalizar la simetría global a una simetría local se tiene que introducir un campo vectorial $A_\mu(x)$ que interactúa con la corriente conservada dada por I.3.

Para que el campo de norma sea una variable dinámica hay que añadir al Lagrangiano un término que contenga sus derivadas. En electrodinámica es bien sabido que lo anterior se logra introduciendo el tensor electromagnético

$$\text{I.7} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Es interesante notar que $F_{\mu\nu}$ se puede obtener a partir de la derivada covariante, ya que:

$$1.8 \quad [D_\mu, D_\nu] \psi = ie F_{\mu\nu} \psi$$

A partir de la regla de transformación para D_μ tenemos

$$([D_\mu, D_\nu] \psi)' = e^{-i\alpha} [D_\mu, D_\nu] \psi$$

$$F'_{\mu\nu} \psi' = (F_{\mu\nu} \psi) e^{-i\alpha}$$

$$\therefore F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$$

es decir, $F_{\mu\nu}$ es invariante ante la transformación 1.6. El Lagrangiano libre para A_μ que es invariante de Lorentz e invariante de norma se puede escribir como

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Ahora, sumando este nuevo Lagrangiano que contiene los términos dinámicos del campo de norma al Lagrangiano transformado \mathcal{L}'_0 llegamos a:

$$1.8 \quad \mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + ie A_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

que es el Lagrangiano para la electrodinámica cuántica (QED); si A_μ se identifica con el fotón, ψ con el electrón y e con la carga eléctrica.

Entonces, L_{qed} es invariante ante las transformaciones locales dadas por I.6, lo cual se conoce como invariancia de norma para L_{qed} . Con lo anterior hemos visto que el tratar de imponer una invariancia de fase local a un Lagrangiano de un campo de materia libre nos lleva necesariamente a la introducción de campos vectoriales de norma además de fijar el tipo de interacción entre los campos.

El Lagrangiano I.8 tiene las siguientes características:

El fotón no tiene masa debido a que no contiene el término $A_\mu A^\mu$ ya que no es un invariante de norma. El acoplamiento del fotón a cualquier campo de materia esta determinado por su propiedad de transformación ante el grupo de simetría. El Lagrangiano L no tiene un autoacoplamiento de los campos de norma debido a que el fotón no lleva carga.

1.2 Teorías de norma no-abelianas: SU(2)

Ilustraremos como extender el método de invariancias locales a teorías no abelianas tomando como ejemplo el caso de SU(2), que es el más simple.

Si el campo de fermiones es un doblete del isospín:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} .$$

Al hacer una transformación global del grupo SU(2), ψ cambia como

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = u \psi(x)$$

donde

$$U = \exp\left\{-i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}}{2}\right\}$$

y τ_i son las matrices de Pauli (los generadores del grupo), que cumplen con la relación

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}\right] = i \epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2}$$

y donde además tenemos que $\theta(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ son los parámetros de las transformaciones del grupo SU(2). El Lagrangiano libre:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x)$$

permanece invariante ante la transformación global, es decir, cuando θ es independiente de x . Al hacer una transformación de norma local tenemos:

$$1.9 \quad \psi(x) \rightarrow U(x) \psi(x)$$

$$\text{donde ahora} \quad \bar{\theta}_x = \bar{\theta}(x)$$

$$U(\theta(x)) = \exp\left(-i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}(x)}{2}\right)$$

Nuevamente, el Lagrangiano libre no es invariante debido a que el término de la derivada se transforma como:

$$\bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) \partial_\mu \psi'(x) =$$

$$= \bar{\psi}(x) \partial_{\mu} \psi(x) + \psi(x) u^{-1}(\theta_{\nu}) [\partial_{\mu} u(\theta)] \psi(x)$$

De manera similar que para el caso abeliano, definimos una derivada covariante D^{μ} e introducimos campos de norma vectoriales A_{μ}^j ($j=1,2,3$ uno por cada generador del grupo) que formen la derivada covariante a través del acoplamiento mínimo:

$$I.10 \quad D_{\mu} \psi = \left(\partial_{\mu} - ig \frac{\bar{c} \cdot \bar{A}_{\mu}}{2} \right) \psi$$

donde g es la constante de acoplamiento. La transformación de la derivada covariante I.10 se supone igual a la de ψ , es decir

$$D_{\mu} \psi \rightarrow (D_{\mu} \psi)' = u(\theta) D_{\mu} \psi$$

De la relación anterior obtenemos la regla de transformación de A_{μ}^j , a partir de

$$\left(\partial_{\mu} - ig \frac{\bar{c} \cdot \bar{A}_{\mu}'}{2} \right) u(\theta) \psi = u(\theta) \left(\partial_{\mu} - ig \frac{\bar{c} \cdot \bar{A}_{\mu}}{2} \right) \psi$$

que se reduce a

$$\frac{\bar{c} \cdot \bar{A}_{\mu}'}{2} = u(\theta) \frac{\bar{c} \cdot \bar{A}_{\mu}}{2} u^{\dagger}(\theta) - \frac{i}{g} [\partial_{\mu} u(\theta)] u^{\dagger}(\theta)$$

relación que define la ley de transformación para los campos no-abelianos de norma. Si la transformación es infinitesimal, es decir, si $\theta \ll 1$, I.9 se convierte en:

$$U(\theta) \approx 1 - i \frac{\bar{c} \cdot \bar{\theta}(x)}{2}$$

con lo cual

$$\frac{\bar{c} \cdot \bar{A}'_\mu}{2} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{A}_\mu}{2} - i \theta_j A_\mu^k \left[\frac{\tau_j}{2}, \frac{\tau_k}{2} \right] - \frac{1}{g} \left[\frac{\tau}{2}, -\partial_\mu \theta \right]$$

es decir, la variación de los campos de norma es:

$$I.11 \quad A_\mu^i{}' = A_\mu^i + \epsilon_{ijk} \theta^j A_\mu^k - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^i$$

El segundo término de I.11 muestra que A_μ^i se transforma en parte como un triplete (representación adjunta) de $SU(2)$.

Para obtener los términos cinéticos construimos un tensor de segundo rango $F_{\mu\nu}$ utilizando una relación similar a I.8:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = ig \left(\frac{\tau^i}{2} F_{\mu\nu}^i \right) \psi \equiv ig F_{\mu\nu}$$

después de un poco de álgebra se obtiene

$$I.12 \quad F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \epsilon_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k$$

que es la generalización del tensor $F_{\mu\nu}$ al caso no-abeliano y muestra claramente que los campos de norma se acoplan entre sí, es decir tienen carga. La regla de transformación de $F_{\mu\nu}$ la obtenemos a partir de

$$([D_\mu, D_\nu] \psi)' = U(\theta) [D_\mu, D_\nu] \psi$$

lo que nos lleva a (ver apéndice C):

$$I.13 \quad \bar{\psi} \cdot \bar{F}'_{\mu\nu} = u(\theta) (\bar{\psi} \cdot \bar{F}_{\mu\nu}) u^{-1}(\theta)$$

En el caso de transformaciones infinitesimales, $\theta_i \ll 1$, I.13 se convierte en:

$$F_{\mu\nu}^{a'} = F_{\mu\nu}^a + \epsilon^{abc} \theta^b F_{\mu\nu}^c$$

y como vemos, en este caso $F_{\mu\nu}$ se transforma como un triplete de SU(2). Para construir el término cinético notamos que

$$F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} = 2 \operatorname{tr} \left\{ (\tau^i F_{\mu\nu}) (\tau^i F^{\mu\nu}) \right\}$$

sí es un invariante, de manera que el Lagrangiano L_3 que corresponde al término cinético es:

$$I.14 \quad L_{3M} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ (\tau^i F_{\mu\nu}) (\tau^i F^{\mu\nu}) \right\} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

El Lagrangiano completo, que representa la interacción entre campos de norma A_{μ}^i y un doblete de campos espinoriales ψ es:

$$I.15 \quad L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} + \bar{\psi} i \gamma^{\mu} D_{\mu} \psi - m \bar{\psi} \psi$$

donde $F_{\mu\nu}$ y $D_{\mu} \psi$ están dados por I.12 y I.10 respectivamente. Hay que hacer notar que este Lagrangiano permanece invariante ante la transformación de norma donde ψ y A_{μ}^i se transforman simultáneamente de

acuerdo a:

$$I.16 \quad \psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = U(\theta) \psi(x)$$

y

$$\frac{\bar{\psi} \cdot \bar{A}_\mu}{2} \longrightarrow \frac{\bar{\psi} \cdot \bar{A}'_\mu}{2} = U(\theta) \frac{\bar{\psi} \cdot \bar{A}_\mu}{2} U^\dagger(\theta) - i g (\partial_\mu U(\theta)) U^\dagger(\theta)$$

1.3 Teorías de norma no-abelianas: generalización

Si queremos generalizar el método anterior a grupos diferentes de $SU(2)$ tenemos que hacer los siguientes cambios:

Consideramos un grupo simple de Lie G cuyos generadores satisfacen el álgebra:

$$[F_a, F_b] = i C_{abc} F_c$$

donde C^{abc} son las constantes de estructura. Suponemos que ψ pertenece a una representación de dimensión N del grupo con matrices T^a de dimensión $N \times N$, que cumplen con:

$$I.17 \quad [T^a, T^b] = i C^{abc} T^c$$

donde T^a y T^b son matrices hermitianas de traza nula que satisfacen el álgebra de Lie y están normalizadas de manera que:

$$I.18 \quad \text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$$

Es conveniente representar a $F_{\mu\nu}^i$, A_μ^i , etc. como matrices $N \times N$ gene-

radas por las matrices T^a , es decir

$$F_{\mu\nu}^a T^a = F_{\mu\nu}$$

$$\theta^a T^a = \theta$$

$$A_\mu^a T^a = A_\mu$$

En este caso la derivada covariante es

$$1.19 \quad D_\mu \psi = (\partial_\mu - iq T^a A_\mu^a) \psi = (\partial_\mu - iq A_\mu) \psi$$

La derivada covariante se tiene que transformar de igual manera que ψ :

$$1.20 \quad (D_\mu \psi)' = U(\theta) D_\mu \psi$$

lo que nos lleva a que la transformación de los campos es:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = U(\bar{T} \cdot \bar{\theta}(x)) \psi(x) \equiv U(\theta_x) \psi(x)$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu'(x) = U(\theta_x) A_\mu U^{-1}(\theta_x) -$$

$$- \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\theta_x)] U^{-1}(\theta_x)$$

En el caso de transformaciones infinitesimales ($\theta_x \ll 1$)

$$U(\theta_x) \simeq 1 - i T^a \theta^a(x)$$

si usamos las propiedades de las T s (1.17 y 18) y recordamos que A_μ es ahora una matriz de dimensión $N \times N$, llegamos a:

$$1.21 \quad A_{\mu}^a(x) \rightarrow A_{\mu}^{\prime a}(x) = A_{\mu}^a(x) + C^{abc} \theta_x^b A_{\mu}^c(x) - \frac{1}{g} \partial_{\mu} \theta^a(x)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) - i T^a \theta_x^a \psi_x$$

Para obtener el término cinético definimos $F_{\mu\nu}$ como:

$$F_{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{g} [D_{\mu}, D_{\nu}]$$

Debido a que D_{μ} se transforma covariantemente (I.20) se ve claramente que $F_{\mu\nu}$ también se transforma de manera covariante:

$$1.22 \quad F_{\mu\nu}(\theta_x) \rightarrow U(\theta_x) F_{\mu\nu}(\theta_x) U^{\dagger}(\theta_x)$$

Utilizando la definición de D_{μ} (I.19) llegamos a (ver apéndice C):

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} - ig [A_{\mu}, A_{\nu}]$$

$$6 \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g C^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c$$

Estas $F_{\mu\nu}$ no son independientes entre sí, ya que cumplen con la identidad de Bianchi:

$$D_{\mu} F_{\rho\sigma} + D_{\rho} F_{\sigma\mu} + D_{\sigma} F_{\mu\rho} = 0$$

El término cinético se obtiene de:

$$L_{YM} = -\frac{1}{2} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

El Lagrangiano completo queda como:

$$1.23 \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi$$

Este Lagrangiano no depende de una representación específica, basta tomar las constantes de estructura correspondientes al grupo de Lie que se quiere representar y se tiene la teoría de Yang-Mills para ese grupo.

A diferencia del caso Abeliano, sí hay restricción en la constante de acoplamiento g . Mientras que en el caso Abeliano podemos tener g_1 para una partícula y g_2 para otra, en el caso no-Abeliano al tratar de acoplar un campo de norma con otro campo que tenga diferente constante de acoplamiento, las relaciones de conmutación no se cumplen (ver apéndice C). Si el grupo se puede escribir como un producto simple (directo) de subgrupos, cada subgrupo tendrá una constante de acoplamiento distinta.

1.4 Ecuaciones clásicas de movimiento para el campo de Yang-Mills

En esta sección estudiaremos las propiedades clásicas de la acción de Yang-Mills y derivaremos las ecuaciones de movimiento. La acción de Yang-Mills está dada por:

$$1.24 \quad S_{YM} = -\frac{1}{2} \int d^4x \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

donde

$$I.25 \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu]$$

lo que nos lleva a

$$S^{YM} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu^a \partial^\mu A^{\nu a} + \partial_\mu A_\nu^a \partial^\nu A^{\mu a} - \right. \\ \left. - g C^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{\nu b} - \frac{g^2}{4} C^{abc} C^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e} \right]$$

que contiene términos cuárticos y cúbicos en A_μ^a . Estos términos corresponden a un autoacoplamiento de los campos no-abelianos. Usamos el principio de mínima acción para derivar las ecuaciones de movimiento. Si partimos de I.24 llegamos a

$$0 = \delta S = - \int d^4x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu})$$

donde de acuerdo a I.25

$$\delta F^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta A^\nu - ig A^\mu \delta A^\nu - ig \delta A^\mu A^\nu + \\ + \partial^\nu \delta A^\mu - ig A^\nu \delta A^\mu - ig \delta A^\nu A^\mu$$

utilizando el hecho de que $F_{\mu\nu}$ es antisimétrico tenemos que

$$0 = \delta S = -2 \int d^4x \operatorname{tr} \{ F_{\mu\nu} (\partial^\mu \delta A^\nu - ig A^\mu \delta A^\nu - \\ - ig \delta A^\mu A^\nu) \}$$

que nos da la ecuación de movimiento

$$I.26 \quad \partial^\mu F_{\mu\nu} - g [A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0$$

I.26 también se puede escribir como:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g C^{abc} A_\mu^b F_{\mu\nu}^c = 0$$

A partir de las ecuaciones de movimiento es fácil construir una corriente conservada (que es la corriente de Noether). Si definimos j^ν como

$$j_\nu = i [A^\mu, F_{\mu\nu}] = \frac{1}{g} \partial^\mu F_{\mu\nu}$$

donde para la última igualdad usamos la ecuación de movimiento I.26. La antisimetría del conmutador nos asegura que j_μ se conserva, es decir

$$\partial^\mu j_\mu = 0$$

Esta corriente nos lleva a una carga conservada de la forma

$$Q = \int d^3x j_0$$

$$Q = - \int d^3x \partial^i F_{i0} = - \oint d^2\sigma^i F_{i0}$$

donde la integral se hace sobre la superficie que rodea al espacio en infinito. Al utilizar la regla de transformación para $F_{\mu\nu}$ (I.22) obtenemos que ante una transformación de norma, Q cambia de acuerdo a

$$Q \longrightarrow Q' = \oint d^2\sigma^i u F_{i0} u^\dagger$$

Solamente si imponemos la condición de que U tome valores constantes en la superficie del espacio en ∞ , Q se transformara de manera covariante.

La ecuación de movimiento I.26 se puede escribir en términos de la derivada covariante como:

$$I.27 \quad D^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

En el caso en que tengamos fuentes externas, la ecuación de movimiento queda como

$$I.28 \quad D^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu$$

que equivale a aumentar un término al Lagrangiano I.22 de la forma:

$$I.29 \quad 2 \operatorname{tr} (A^\mu J_\mu)$$

(ya que J_μ es una fuente externa escrita en forma matricial, i. e. $J^\mu = T^a j^\mu_a$).

Para que las ecuaciones de movimiento sigan siendo covariantes se debe cumplir que

$$I.30 \quad J^\mu \longrightarrow u J^\mu u^\nu$$

es decir, que J^μ se transforma covariantemente. A partir de la ecuación de movimiento y utilizando la antisimetría de $F_{\mu\nu}$ podemos comprobar que J^μ se conserva covariantemente:

$$D^\nu J_\nu = D^\mu D^\nu F_{\nu\mu} = -D^\mu D^\nu F_{\mu\nu} = 0$$

La corriente de Noether en este caso es:

$$j_\mu = -\partial^\nu F_{\nu\mu} + J_\mu$$

y se conserva localmente, i. e., $\partial^\mu J_\mu = 0$.

El término extra I.29 añadido al Lagrangiano no es, en general, invariante ante transformaciones de norma. A partir de I.29 podemos ver que

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \operatorname{tr}(A_\mu J^\mu) &= - \int d^4x \operatorname{tr}(J^\mu \partial_\mu u) \\ &= \int d^4x \operatorname{tr}(u \partial^\mu J_\mu) \end{aligned}$$

lo que significa que para que el Lagrangiano permanezca invariante la fuente externa se debe conservar localmente. En la teoría de Maxwell no hay problema, pero en teorías de Yang-Mills $\partial^\mu J_\mu = 0$ no es una condición covariante, de manera que este término rompe la invariancia de norma del Lagrangiano, a menos que J_μ este producida por campos dinámicos.

$$D^\nu J_\nu = D^\mu D^\nu F_{\nu\mu} = -D^\mu D^\nu F_{\mu\nu} = 0$$

La corriente de Noether en este caso es:

$$j_\mu = -\partial^\nu F_{\nu\mu} + J_\mu$$

y se conserva localmente, i. e., $\partial^\mu J_\mu = 0$.

El término extra I.29 añadido al Lagrangiano no es, en general, invariante ante transformaciones de norma. A partir de I.29 podemos ver que

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \operatorname{tr}(A_\mu J^\mu) &= - \int d^4x \operatorname{tr}(J^\mu \partial_\mu u) \\ &= \int d^4x \operatorname{tr}(u \partial^\mu J_\mu) \end{aligned}$$

lo que significa que para que el Lagrangiano permanezca invariante la fuente externa se debe conservar localmente. En la teoría de Maxwell no hay problema, pero en teorías de Yang-Mills $\partial^\mu J_\mu = 0$ no es una condición covariante, de manera que este término rompe la invariancia de norma del Lagrangiano, a menos que J_μ este producida por campos dinámicos.

CAPITULO II

MONOPOLOS DE DIRAC

2.1 La simetría de las ecuaciones de Maxwell

La idea de los monopolos magnéticos surgió de la simetría de las ecuaciones del campo en la teoría electromagnética. Esta simetría se hace evidente al hacer la transformación de dualidad a las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \text{II.1} \quad \nabla \cdot \vec{E} &= \rho & \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j} \end{aligned}$$

que puestas en forma covariante (ver apéndice A) quedan de la forma:

$$\text{II.2 a} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

$$\text{II.2 b} \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

$$\text{donde} \quad j^\mu = (\rho, \vec{j})$$

$$F^{i0} = -E_i$$

$$F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$$

El tensor $F_{\mu\nu}$ se puede definir en función del potencial vectorial $A^\mu = (\phi, A^i)$ como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

y el tensor de campo dual se define como:

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

Las ecuaciones de Maxwell son simétricas ante la transformación de dualidad:

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow F^{\mu\nu}$$

cuando $J^\mu = 0$, es decir, en el vacío. Esto corresponde a hacer el intercambio de $E \longrightarrow B$ y de $B \longrightarrow -E$. Sin embargo, en el caso en que la corriente eléctrica es diferente de cero esta simetría no se cumple. Para hacer que esta simetría se cumpla en general se introduce una corriente magnética k^μ , es decir II.2 b queda de la forma:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = -k^\nu$$

Si ahora se hace la transformación de dualidad, se cumple la simetría en todos los casos, siempre que se haga la substitución:

$$j^\mu \longrightarrow k^\mu$$

$$k^\mu \longrightarrow -j^\mu$$

El hecho de introducir una corriente magnética k^μ implica la existencia de partículas con carga magnética, es decir, monopolos magnéticos. Sin

embargo, esta extensión a cargas magnéticas no resulta trivial debido a que II.2 b es una identidad para tensores $F_{\mu\nu}$ antisimétricos (ver apéndice A).

Un aspecto muy interesante de la teoría de los monopolos magnéticos es que su existencia lleva a la cuantización de las cargas eléctricas y magnéticas. Consideremos primero un argumento semiclásico que da lugar a dicha cuantización. Si suponemos la existencia de monopolos magnéticos, uno de ellos en reposo en el origen produciría un campo magnético de la forma:

$$\text{II.4} \quad \vec{B} = \frac{g}{4\pi r^2} \hat{r}$$

donde g es la carga magnética.

El movimiento de una partícula de masa m y carga eléctrica q en este campo está dado por la siguiente ecuación:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$$

La razón de cambio del movimiento angular de esta partícula es:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \frac{qg}{4\pi r^3} \vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{qg}{4\pi} \hat{r} \right)$$

Este resultado obtenido por Poincaré (Poincaré, 1896) sugiere que para que el momento angular total se conserve lo definamos de la siguiente manera:

$$\vec{J} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} - \frac{qg}{4\pi} \hat{r}$$

El primer término de esta ecuación es el momento angular orbital de la partícula. El segundo término de esta ecuación puede ser interpretado como el momento angular debido al campo electromagnético, puesto que si usamos la ecuación:

$$\vec{L}_{em} = \int d^3\vec{r}' \times \vec{r}' (\vec{E} \times \vec{B})$$

sustituyendo la expresión II.4 para B llegamos a:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{em} &= \frac{q}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \vec{r}' \times (\vec{E} \times \vec{r}') = \frac{q}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{1}{r'} [\vec{E} - \vec{r}'(\vec{E} \cdot \hat{r}')] \\ &= \frac{q}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \vec{E} \cdot \nabla(\hat{r}') = -\frac{q}{4\pi} \int d^3\vec{r}' (\nabla \cdot \vec{E}) \hat{r}' = * \end{aligned}$$

como

$$\nabla \cdot \vec{E} = q \delta(\vec{r}' - \vec{r})$$

→

$$* = -\frac{qq}{4\pi} \hat{r}'$$

Al hacer la cuantización de la teoría, se espera que las reglas de conmutación comunes entre las componentes de J se cumplan. Esto implicaría que los eigenvalores de J_i son semienteros. Sin embargo, se espera que el momento angular orbital tenga eigenvalores enteros, de manera que

II.5

$$\frac{qq}{4\pi} = \frac{1}{2} n$$

lo cual implica la cuantización de las cargas eléctricas y magnéticas.

2.2 El monopolo de Dirac

La teoría moderna de los monopolos magnéticos fue iniciada por el trabajo de Dirac en 1931 (Dirac, 1931), donde estudió el movimiento de una partícula en el campo producido por un monopolo magnético. La teoría completa para el movimiento arbitrario de cargas eléctricas y magnéticas en movimiento lo presentó en 1948 (Dirac, 1948).

El campo magnético producido por un polo magnético implica que para cualquier superficie cerrada que encierre al monopolo se cumpla:

$$\text{II.6} \quad q = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

pero entonces no se puede cumplir la relación

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Esta ecuación debe fallar por lo menos en un punto sobre cada superficie cerrada que encierre al polo magnético. Esta serie de singularidades forman lo que Dirac llamó una cuerda. Para un monopolo en reposo en el origen, la cuerda se puede orientar a lo largo de la dirección negativa del eje z , con lo que se tiene:

$$\text{II.7} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} - q \theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{z}$$

donde $\theta(z)$ es la función escalón y B está dado por II.4. Podemos comprobar que:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} - q \delta(x) \delta(y) \frac{\partial}{\partial z} \theta(-z) = q \delta^3(\vec{r})$$

lo cual corresponde a la densidad de carga de un monopolo magnético en el origen. La expresión para A que dá lugar a la ecuación II.7 es:

$$\text{II.8} \quad \bar{A} = \frac{g}{4\pi r} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \hat{\phi}$$

donde θ y ϕ son los ángulos polares y azimutales respectivamente. El segundo término de II.7 corresponde a la singularidad producida por la cuerda. En la ecuación II.8 observamos que A es singular sobre todo el eje $-z$. Esta singularidad es necesaria para cancelar la correspondiente a la cuerda y dar lugar a una expresión para el campo magnético que sólo es singular en la posición del polo magnético (ec II.4). Lo dicho anteriormente se puede comprobar fácilmente:

i) Cuando $\theta \neq \pi$ un cálculo directo demuestra que para A dado por II.8 cumple $\nabla \times \bar{A} = g \hat{r} / 4\pi r^2$

ii) Si consideramos una pequeña superficie de radio $r \sin(\pi - \theta)$ perpendicular a la cuerda tenemos

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \int \nabla \times \bar{A} \cdot d\bar{\sigma} = \int_c A \cdot dl = 4\pi r \sin \theta \frac{g}{4\pi r} \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta}$$

que cancela a la contribución de la cuerda

$$\text{II.9} \quad - \int g \theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{z} \cdot d\bar{\sigma} = -g$$

Para el caso general de monopolos magnéticos en movimiento cada monopolo lleva asociada una cuerda. Cada una de estas cuerdas traza una hoja bidimensional en el espacio-tiempo conforme el monopolo se va

moviendo. Estas hojas pueden ser descritas como función de dos parámetros t_0 y t_1 . (Podemos fijar t_1 para que vaya de 0 a ∞ conforme se sigue a una cuerda desde la posición del monopolo hacia infinito, y t_0 que vaya de $-\infty$ a ∞ conforme se viaja desde infinito pasado hacia infinito futuro).

Sobre cada una de estas hojas la ecuación para el tensor electromagnético:

$$\text{II.10} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

debe fallar. Esto se debe a que la ec. II.3 con el tensor definido por II.10 es idénticamente cero (ver apéndice A) y la condición que se puso para que haya monopolos magnéticos es que II.2 b sea modificada como II.3. Para evitar este problema Dirac definió el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$ con un término adicional (de manera similar a lo que se hizo en II.7 para B) que corresponde a la cuerda. El nuevo tensor electromagnético queda como:

$$\text{II.11} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + 4\pi \sum_g (G^g)_{\mu\nu}$$

donde $G^g_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico que es idénticamente cero en todos lados excepto sobre cada una de las hojas. La suma se toma sobre todos los polos magnéticos.

2.3 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento de la electrodinámica (con inclusión de los monopolos magnéticos) pueden ser obtenidas a partir del principio

variacional aplicado a la acción S , que en este caso se puede expresar como la suma de tres términos:

$$\text{II.12} \quad S = S_1 + S_2 + S_3$$

S_1 representa la acción que corresponde solamente a las partículas eléctricas y magnéticas. Para el caso relativista está dada por

$$\text{II.13} \quad S_1 = \sum_{q,q} \int m ds$$

que para el caso no relativista se reduce a

$$\text{II.14} \quad S_1 = \sum_{q,q} m \int \frac{v^2}{2} dt$$

La dinámica de los campos electromagnéticos está incluida en la acción S_2 que esta dada por

$$\text{II.15} \quad S_2 = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x$$

La interacción de las cargas eléctricas con el campo electromagnético está dada por

$$\text{II.16} \quad S_3 = \sum_q q \int A^\mu(z) \frac{dz_\mu}{ds} ds$$

que para el caso no relativista se reduce a

$$\text{II.17} \quad S_3 = \sum_q q \int \vec{A} \cdot \vec{v} dt$$

La presencia de cargas magnéticas requiere la inclusión del término cinématico en S_1 (ec II.14) que es idéntico al de las cargas eléctricas. Se podría pensar que la interacción de los monopolos magnéticos con el campo electromagnético requeriría la modificación de S_3 (ec II.16), sin embargo dicha interacción queda incluida en la acción S_2 ya que contiene al término correspondiente a la cuerda.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen al tomar la variación de S con respecto a las variables dinámicas, que son: la posición de las cargas eléctricas y magnéticas, el potencial vectorial A y los parámetros que caracterizan al movimiento de la cuerda en el espacio-tiempo (t_0 y t_1). El resultado es (ver apéndice A):

$$\text{II.18} \quad m_q (d^2 z_\mu / ds^2) = q (dz^\nu / ds) F_{\mu\nu}(z)$$

$$m_g (d^2 z_\mu / ds^2) = g (dz^\nu / ds) \tilde{F}_{\mu\nu}(z)$$

y

$$\text{II.19} \quad \partial F_{\mu\nu} / \partial x_\nu = - \sum_q q \int (dz_\mu / ds) \delta^4(x-z) ds$$

$$\partial \tilde{F}_{\mu\nu} / \partial x_\nu = - \sum_g g \int (dz_\mu / ds) \delta^4(x-z) ds$$

donde el término adentro de la integral en II.19 es la densidad de corriente.

Podemos observar que a nivel de la acción (ec. II.12) las cargas eléctricas y magnéticas aparecen de una forma asimétrica; sin embargo, las ecuaciones de movimiento resultantes (II.18 y 19) son invariantes ante la transformación de dualidad:

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{F}_{\mu\nu}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \longrightarrow -F_{\mu\nu}$$

$$q \longrightarrow q$$

$$q \longrightarrow -q$$

2.4 Transformaciones de norma en la cuerda de Dirac

Aunque las variables usadas para fijar la cuerda son dinámicas, su valor es arbitrario y no corresponden a ninguna cantidad observable físicamente. Esto se puede demostrar haciendo ver que las transformaciones de norma se pueden generalizar para que sean acompañadas de un movimiento de la cuerda (cuando se permiten transformaciones que son multivaluadas sobre la cuerda). Como el potencial vectorial A no es único podemos aplicar una transformación de norma $\dot{A} \longrightarrow A + \nabla\chi$ (χ es una función que depende de la posición). B es de la forma $B = \nabla \times A + h$, donde $h(c,r)$ es el término de la cuerda, la cual da una contribución diferente de cero solo a lo largo de la trayectoria C . Consideremos otra cuerda $h'(c',r)$ que sigue una trayectoria C' distinta. Podemos suponer que las cuerdas son iguales excepto en un intervalo (ver figura 2.1)

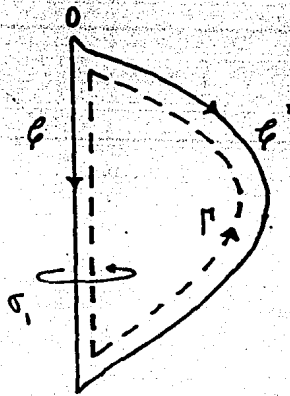


figura 2.1

Tomemos $\Gamma = C + -C'$ como una trayectoria cerrada que recorre primero la trayectoria C y posteriormente la curva C' . Sea $\Omega(r)$ el ángulo sólido subtendido en r por alguna superficie que cubre Γ . Diferentes superficies daran valores de $\Omega(r)$ que difieren entre sí por multiples de 4π , pero que dan el mismo valor para $\nabla\Omega$.

Hagamos ahora la transformación de norma $\bar{A} \rightarrow \bar{A}'$, donde

$$\text{II.20} \quad \bar{A}' = \bar{A} - \frac{g}{4\pi} \nabla\Omega$$

Entonces, $\nabla \times \bar{A} = \bar{B}$ se cumple en todos lados excepto sobre Γ (ya que $\Omega(r)$ es multivaluada para r en Γ). Para encontrar el flujo de $\nabla \times (\bar{A} - \bar{A}')$ a lo largo de Γ aplicamos el teorema de Stokes a un pequeño círculo que encierra algún punto de Γ :

$$\int_{\sigma_i} \nabla \times (\bar{A}' - \bar{A}) \cdot d\bar{\sigma} = \oint_{C'} (\bar{A}' - \bar{A}) \cdot d\bar{l}$$

De manera similar a II.9 tenemos que:

$$\text{II.21} \quad \int_{\sigma_i} [\bar{h}(\ell, \bar{\pi}) - \bar{h}(\ell', \bar{\pi})] \cdot d\sigma_i = g$$

de donde podemos ver que

$$\text{II.22} \quad \bar{B} = \nabla \times \bar{A} + \bar{h}(\ell, \bar{\pi}) = \nabla \times \bar{A}' + \bar{h}(\ell', \bar{\pi})$$

con lo que se muestra que la posición de la cuerda es arbitraria, ya que es movida por las transformaciones de norma. Esto demuestra que la cuerda es no observable.

2.5 Derivación de la condición de cuantización de Dirac

La ecuación de Schroedinger para una partícula moviéndose en un campo electromagnético es

$$\text{II.23} \quad \left[\frac{1}{2m} (\bar{p} - q\bar{A})^2 + q\phi \right] \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

la cual es invariante ante transformaciones de norma de la forma:

$$\text{II.24} \quad \bar{A} \rightarrow \bar{A}' = \bar{A} - \frac{q}{4\pi} \nabla \Omega(x)$$

$$\psi \rightarrow \psi'(\vec{r}) = \exp\left(-\frac{iqq}{4\pi} \Omega(\vec{r})\right) \psi(\vec{r})$$

donde $\Omega(\vec{r})$ es una función arbitraria y A es el potencial descrito por II.8. Una derivación de la regla de cuantización de Dirac proviene del hecho de que la transformación de norma II.24 actuando en la función de ondas de la partícula no debe producir un resultado multivaluado. Como los valores de Ω difieren entre sí por múltiplos de 4π , debemos tener que

$$qq = 2n\pi$$

que es la condición de cuantización de Dirac.

2.6 Otras formulaciones

Hay otras formulaciones para los monopolos magnéticos. Una de ellas es la de Wu y Yang (Wu y Yang, 1964, 1976). Para evitar los

potenciales singulares definen diferentes potenciales A_1 y A_2 en diferentes regiones del espacio (la parte positiva y la negativa del eje z , por ejemplo). La condición de cuantización de Dirac proviene del hecho de que en la región donde los dos dominios se traslapan, A_1 y A_2 deben estar conectados por una transformación de norma univaluada. Sin embargo para cálculos prácticos sigue siendo mas conveniente utilizar el modelo de la cuerda propuesto por Dirac.

CAPITULO III

SOLITONES Y TEORIA DE HOMOTOPIA

3.1 Solitones

Los solitones son soluciones estables, de energía finita y no disipativa a las ecuaciones clásicas del campo. Debido a estas propiedades únicamente las teorías de campo no lineales tienen estas soluciones.

Los solitones deben ser soluciones de la ecuación que se obtiene del principio de mínima acción $\delta S = 0$ y para su estabilidad deben cumplir con la condición $\delta^2 S > 0$. Existen solitones llamados no topológicos que generalmente dependen del tiempo, y adquieren la estabilidad por medio de un mecanismo dinámico.

Por otro lado, para que los solitones topológicos existan debe haber una simetría interna de los campos. La estabilidad de los solitones topológicos se obtiene siempre que sea posible establecer un mapeo no trivial entre el grupo de simetría del campo y el espacio físico. (Ver más adelante para una explicación mas detallada de los mapeos). Los mapeos no triviales estan caracterizados por un número entero que se conserva y al cual se le llama carga topológica.

La carga topológica representa el número de veces que es cubierta la variedad del espacio interno al completar el mapeo. La estabilidad de las soluciones con una carga topológica dada se puede entender si se

observa que la transformación para pasar a una configuración con una carga topológica diferente requiere de un cambio discontinuo, el cual no puede ser generado por la dinámica del problema, ya que las ecuaciones de movimiento generan transformaciones continuas en los campos.

Debido a la no linealidad de las soluciones, el problema de encontrar soluciones tipo solitón no es sencillo. Existen, sin embargo, métodos auxiliares como el teorema de Derrick y la teoría de Homotopía que nos indican en que condiciones podemos esperar que existan estas soluciones.

Teorema de Derrick:

No hay solitones estáticos y no singulares para una teoría de campo escalar descrita por la densidad Lagrangiana:

$$\text{III.1} \quad \mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - U(\phi)$$

con $U(\phi) > 0$ ($U(\phi) = 0$ para el vacío), excepto cuando el número de dimensiones (D) es igual a 1.

Demostración:

Una solución de solitón $\phi_s(x)$ para el caso estático III.1 da lugar a una energía $H = V_1 + V_2$, donde

$$V_1 = \int d^D x (\nabla \phi_s(x))^2 \quad V_2 = \int d^D x U(\phi_s)$$

entonces, la configuración de campo $\phi_s(x/a)$ tiene energía:

$$H(a) = a^{D-2} V_1 + a^D V_2$$

Pero H debe ser estable ante variaciones arbitrarias de $\phi_S(x)$. En particular, para un cambio de escala tendremos:

$$\left. \frac{\delta H(a)}{\delta a} \right|_{a=1} = (D-2)V_1 + DV_2 = 0$$

Sin embargo, V_1 y V_2 son ambos positivos, de manera que esta ecuación solamente tiene soluciones para $D = 1$. Este resultado se generaliza a más de un campo escalar.

Una variante de este teorema dice que en un espacio de D dimensiones, las únicas soluciones estáticas de energía finita para las ecuaciones de campo puras son transformadas de $A_\mu = 0$, excepto para $D = 4$ (Coleman, 1977). Han sido construidas soluciones en el espacio Euclideo ($D = 4$), se les conoce como instantones y resultan de gran importancia en Cromodinámica Cuántica.

3.2 Teoría de Homotopia

Sean dos espacios X y Y junto con el conjunto de mapeos f de X a Y :

$$f: X \rightarrow Y \quad x \in X$$

$$f(x) = y \quad y \in Y$$

Definición: Se dice que dos mapeos f_0 y f_1 son homotópicos si pueden ser deformados continuamente el uno en el otro. Una homotopía es una familia intermedia de mapeos $F(x,t)$ parametrizada por t , ($0 < t < 1$)

que es continua tanto en x como en t , y es tal que

$$F(x, 0) = f_0(x)$$

$$F(x, 1) = f_1(x)$$

La notación para indicar que un grupo f_0 es homotópico a otro grupo f_1 es: $f_0 \sim f_1$. ~~La homotopía es una relación de equivalencia, es decir si~~
 $F: f_0 \sim f_1$ y $G: f_1 \sim f_2$, entonces existe $H: f_0 \sim f_2$; donde H es de la forma:

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Los mapeos que son topologicamente equivalentes forman una clase que se denota por $\{f\}$.

El siguiente ejemplo ilustra como las clases de homotopía pueden adquirir una estructura de grupo:

Consideremos el espacio X que se toma en el intervalo cerrado $I = (0, 1)$, donde el 0 y el 1 coinciden, es decir, estan identificados. Este espacio es topologicamente equivalente a un círculo S_1 , en el cual un punto de referencia x_0 en su perímetro representa a 0 y a 1. Si nos limitamos a tomar mapeos que satisfagan la condicion $f(0) = f(1) = y_0$, entonces las clases equivalentes de mapeos $\{f\}$, $\{g\}$, de $S_1 \dashrightarrow Y$ forman un grupo. El elemento de identidad $\{e\}$ es la clase de mapeos topologicamente equivalentes al mapeo constante C :

$$C(x) = y_0$$

$$\forall x$$

El inverso de $\{f\}$ es $\{f^{-1}\}$, donde

$$f^{-1}(x) = f(1-x)$$

Debido a la posibilidad de multiplicación de mapeos aparece la multiplicación de grupos:

$$\{f\} * \{g\} = \{f \cdot g\}$$

$$f \cdot g(x) = \begin{cases} f(2x) & 0 \leq x \leq 1/2 \\ g(2x-1) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Esta multiplicación es independiente de los mapeos que se escogan de $\{f\}$ a $\{g\}$ ya que:

$$f_1 \sim f_2 \quad \text{y} \quad g_1 \sim g_2 \Rightarrow f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2$$

Este ejemplo representa al primer grupo de homotopía de Y y se designa por $\Pi_1(Y)$.

Los mapeos de S_1 en Y se pueden representar como una curva cerrada (rizo) que empieza y termina en y_0 . Una visualización clara de estos conceptos se puede obtener si consideramos un ejemplo en el cual escogemos como espacio Y al plano bidimensional \mathbb{R}^2 con el origen excluido, i. e.

$$Y = \{\mathbb{R}^2 - (0,0)\}$$

Si la curva no encierra al origen, se puede deformar continuamente hasta y_0 . Las curvas que no encierran al origen pertenecen a la clase de mapeos $\{e\} = \{0\}$. Las que encierran al origen una vez (en el sentido de las manecillas del reloj) pertenecen a la clase $\{1\}$, los que encierran al origen dos veces a la clase $\{2\}$, etc. Si las curvas van en dirección contraria a las manecillas del reloj, los mapeos pertenecen a las clases $\{-1\}$, $\{-2\}$, $\{-3\}$, etc. (ver figura 3.1)

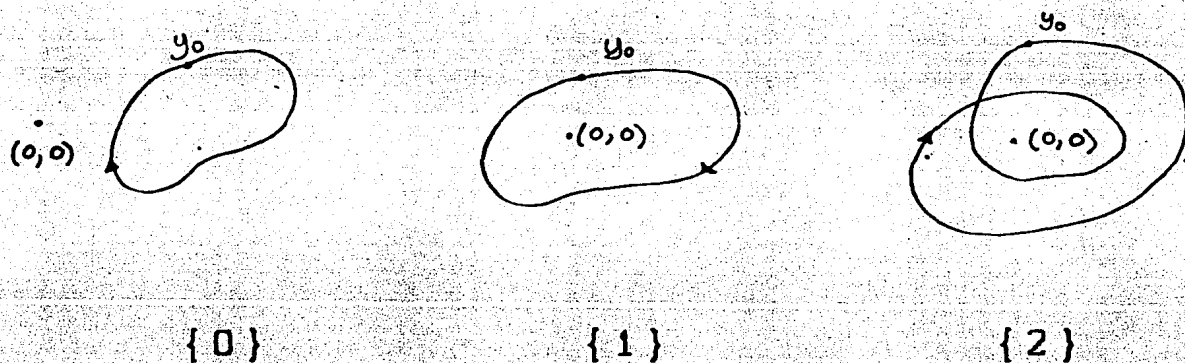


figura 3.1

Diferentes clases de mapeos de $S_1 \dashrightarrow Y$

Podemos concluir que para el espacio $Y = \{ \mathbb{R}^2 - (0,0) \}$, el primer grupo de homotopía da lugar a \mathbb{Z} (\mathbb{Z} = conjunto de los enteros) clases de homotopía $\{n\}$; podemos escribir este resultado como

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - (0,0)) = \mathbb{Z}$$

Al número entero n asociado con la clase de mapeo se le llama número de revolución (winding number).

Si hacemos el mapeo de $X = S^n$ (superficie de una esfera en $n + 1$ dimensiones), las clases de mapeos con un punto fijo $f(x_0) = y_0$ forman un grupo llamado n -ésimo grupo de Homotopía y se representa por $\Pi_n(Y)$. En algunos casos resulta evidente cuales son los grupos de homotopía para ciertos espacios Y . Por ejemplo:

$$\Pi_1(S^2) = 0$$

ya que cualquier círculo dibujado sobre la superficie de una esfera puede ser deformado continuamente a un punto. También tenemos que

$$\Pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

puesto que toda superficie cerrada puede mapearse n veces sobre sí misma.

El primer grupo de homotopía $\Pi_1(G)$, que clasifica mapeos de S_1 al conjunto de elementos del grupo G , es una medida de la conectividad del grupo. Una vez que los grupos compactos han sido clasificados de acuerdo a sus álgebras de Lie, $\Pi_1(G)$ es la única invariante que se necesita para completar la clasificación.

Otros resultados son:

$$\Pi_1(SU(2)) = 0$$

$$\Pi_2(O(3)) = \Pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \quad (\mathbb{Z}_2 = \text{conjunto de enteros modulo } 2).$$

De estos ejemplos vemos que $SU(2)$ es simplemente conexo, mientras que $O(3)$ es doblemente conexo.

El siguiente resultado de Homotopía nos permite saber cuando una

teoría de norma no abeliana con rompimiento espontáneo de la simetría puede tener monopolos magnéticos y cuando no:

Sea G un grupo de Lie compacto y simplemente conexo, y H es un subgrupo de G , entonces

$$\Pi_2(G/H) = \Pi_1(H)$$

donde H es el subgrupo que permanece invariante. Por ejemplo:

En el modelo de 't Hooft-Polyakov $G = SU(2)$ y $H = U(1)$ es el subgrupo que deja invariante al vacío:

$$\Pi_2(SU(2)/U(1)) = \Pi_1(U(1)) = \mathbb{Z} \quad (\mathbb{Z} = \text{conjunto de enteros})$$

que permite un número infinito de solitones para esta teoría. La solución con número de revolución igual a uno corresponde a un monopolo magnético (ver capítulo IV).

3.3 El kink

El kink es un ejemplo clásico de soluciones de solitón. Esta solución aparece en una teoría escalar del tipo $\lambda\phi^4$ con término de masa negativa ($-\mu^2$) y que por lo tanto da lugar al rompimiento espontáneo de la simetría. Como la teoría es puramente escalar el teorema de Derrick nos dice que sólo podemos tener soluciones tipo solitón para $D = 1$. El Lagrangiano está dado por

$$\text{III.2} \quad L = \int \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 - V(\phi) \right] dx$$

donde

III.3

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - a^2)^2$$

El Hamiltoniano es:

$$\text{III.4 } H = \int \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right] dx$$

En esta teoría la simetría interna corresponde a la invariancia de III.2 ante la transformación

$$\phi(x, t) \longrightarrow -\phi(x, t)$$

Las soluciones clásicas se pueden obtener resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange, que resultan de aplicar el principio variacional al Lagrangiano L (ec III.2), y son:

III.5

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + V'(\phi) = 0$$

donde la prima representa la derivada del potencial respecto a ϕ . En este problema

$$V'(\phi) = \lambda \phi^3 - \mu^2 \phi$$

Para el caso estático esta ecuación de movimiento es

III.6

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} - V'(\phi) = 0$$

El problema de resolver III.6 es equivalente al problema del movimiento de una partícula de masa unitaria en un potencial $U(x) = -V(x)$, cuya ecuación de movimiento es

$$\text{III.7} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \partial_x u = 0$$

si se hacen las siguientes identificaciones

campo escalar		partícula
ϕ	----->	x
x	----->	t
$V(\phi)$	----->	$-V(x)$

Una solución a la ecuación III.6 está dada por la configuración del estado base que minimiza el potencial, es decir

$$\text{III.8} \quad \phi_0 = \pm a = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

que tiene energía $E = H(\phi) = 0$, lo cual demuestra que corresponde a la solución del vacío.

Ahora consideremos la posibilidad de encontrar soluciones a III.6 de energía finita pero diferentes a la solución III.8. Para encontrar soluciones de energía finita (ver ec. III.4) se requiere que el campo tome los valores del estado base (vacío) conforme $x \rightarrow \pm\infty$. Como tenemos más de un valor para el estado base, la solución puede tomar diferentes valores en $+\infty$ y en $-\infty$. Esto correspondería a la situación en que la partícula se mueve de uno de los máximos al otro con energía

cero (ver fig. 3.3). Como la energía se conserva, para el caso en que la energía es cero tenemos:

$$\text{III.9} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) = 0$$

que para el caso de teoría de campo equivale a:

$$\text{III.10} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = V(\phi)$$

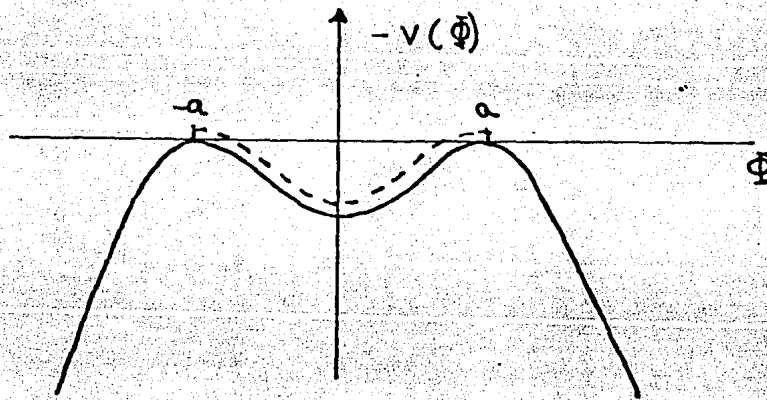


figura 3.3

Situación en que la partícula se mueve de uno de los máximos al otro con energía cero.

Resolviendo III.10 llegamos a:

$$\text{III.11} \quad x - x_0 = \pm \int_0^{\phi} d\phi' [2V(\phi')]^{-1/2}$$

Donde x es el punto en el que $\phi = 0$. Este parámetro x aparece en la

solución debido a que la ecuación III.11 es invariante ante traslaciones. En el caso en que $V(\phi)$ sea el dado por III.3, las soluciones de energía finita están dadas por:

$$\text{III.12} \quad \phi_+(x) = a \tanh \left[\mu \frac{(x-x_0)}{2} \right]$$

$$\text{III.13} \quad \phi_-(x) = -a \tanh \left[\mu \frac{(x-x_0)}{2} \right]$$

A la solución III.12 se le llama *kink*, mientras que a la solución III.13 se le llama *antikink*. La energía de estas soluciones se obtiene substituyendo las soluciones III.12 o III.13 en III.4 y en ambos casos es:

$$E = 8\mu^3/3\lambda$$

En la figura 3.4 se muestra como conforme $x \rightarrow \pm\infty$, $\phi(x) \rightarrow \pm a$.

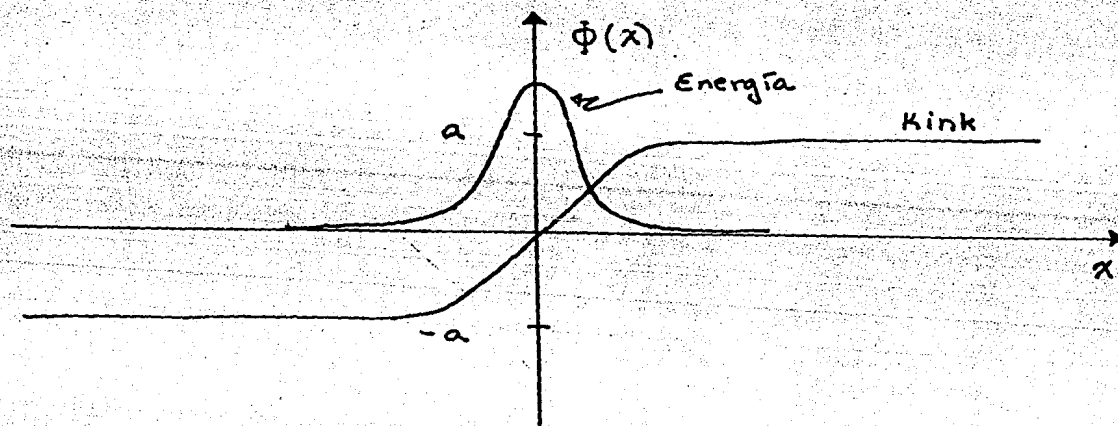


figura 3.4
El kink y su energía

Estas soluciones son estables ante perturbaciones pequeñas, aunque no corresponden al mínimo absoluto de la energía. Su estabilidad es consecuencia de la degeneración del vacío, es decir, del rompimiento espontáneo de la simetría. Esta solución interpola entre los dos valores del vacío en $x = \pm\infty$ y está en contacto con ellos en una extensión infinita, solamente en la vecindad de $x = x_0$ difiere apreciablemente de ellos. En este caso, el mapeo homotópico es el que asocia los valores de $\phi = \pm 1$ a los puntos $x = \pm\infty$.

3.4 La carga topológica

Las soluciones estudiadas anteriormente cumplen con la relación

$$\text{III.14} \quad \phi(+\infty) - \phi(-\infty) = n(2a)$$

Para la solución de vacío $n = 0$, mientras que para la solución de *kink* y *antikink* tenemos que $n = +1$ y $n = -1$ respectivamente. La ecuación III.14 se puede escribir como

$$\text{III.15} \quad \phi(+\infty) - \phi(-\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x \phi) dx = n(2a)$$

Esta relación se puede identificar como la ecuación correspondiente a una conservación de carga. Si definimos la densidad de corriente j_μ como:

$$j_\mu(x) = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi$$

esta corriente estará automáticamente conservada

debido a que el tensor $\epsilon_{\mu\nu}$ es antisimétrico. La carga conservada ($dQ/dt = 0$) es

$$\text{III.16} \quad Q = \int_{-\infty}^{\infty} j_0(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \phi(x) dx = n(2a)$$

que coincide con III.14.

A la carga definida en III.15 se le llama topológica ya que depende del mapeo que se establece entre los puntos $\pm\infty$ y los posibles valores de ϕ en el mínimo del potencial $V(\phi)$. Es importante notar que esta carga topológica no es una carga que se derive del teorema de Noether. En particular, observamos de III.15 que al cuantizar la teoría, Q no genera ninguna simetría del problema, ya que no depende del momento canónico conjugado ($\hat{\pi} = \partial_0\phi$). Es también muy interesante notar que Q está cuantizada aun a nivel clásico, debido a su interpretación como número de revolución del mapeo.

El interés físico de las soluciones III.12 y 13 es que simulan una partícula en los siguientes aspectos:

Su energía está concentrada en una pequeña parte del espacio. Eso se debe a que las soluciones ϕ_+ y ϕ_- se desvían de los valores del vacío solamente en una región pequeña del espacio. Además se pueden mover con cualquier velocidad menor que la unidad (la de la luz).

CAPITULO IV

MONOPOLOS MAGNETICOS EN TEORIAS DE YANG-MILLS

4.1 Teorías de Yang-Mills y rompimiento espontáneo de la simetría

Cuando se consideran teorías de norma en las cuales el grupo de simetría G se rompe espontáneamente por el vacío a un subgrupo H , se espera encontrar soluciones de solitón, es decir soluciones topológicamente no triviales, de energía finita, que se comporten en algunos casos como monopolos magnéticos. Lo anterior fue demostrado por 't Hooft y Polyakov ('t Hooft, 1974; Polyakov, 1974).

El ejemplo más sencillo es el encontrado originalmente por 't Hooft y Polyakov y que esta basado en el Lagrangiano que anteriormente habían propuesto Georgi y Glashow (Georgi y Glashow, 1972) como modelo de las interacciones débiles. Este modelo consiste en campos de norma del grupo $SU(2)$ acoplados a un campo escalar que se encuentra en la representación adjunta del grupo.

La teoría de Georgi-Glashow no es aceptable como modelo de las interacciones electrodébiles debido a que no predice las corrientes neutras. Sin embargo, es interesante estudiar los monopolos magnéticos en estas teorías ya que tienen propiedades similares a los que aparecen en teorías de gran unificación, que son las que podrían ofrecer una

unificación de las interacciones electrodébiles con las fuertes.

El Lagrangiano de Georgi-Glashow está dado por:

$$\text{IV.1} \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{a\mu\nu} + \frac{1}{2} D^\mu \Phi \cdot D_\mu \Phi - V(\Phi)$$

donde

$$\text{IV.2} \quad G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu W_a^\nu - \partial^\nu W_a^\mu - e \varepsilon_{abc} W_b^\mu W_c^\nu$$

y W_μ^a es el campo de norma. La derivada covariante está definida como:

$$\text{IV.3} \quad (D^\mu \phi)_a = \partial^\mu \phi_a - e \varepsilon_{abc} W_b^\mu \phi_c$$

y el potencial para el campo escalar es

$$\text{IV.4} \quad V(\Phi) = \frac{1}{4} \lambda (\phi^a \phi^a - a^2)^2$$

con $a^2 = \mu^2/\lambda$.

Las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\text{IV.5 a} \quad (D_\nu G^{\mu\nu})_a = -e \varepsilon_{abc} \phi_b (D^\mu \phi)_c$$

$$\text{IV.5 b} \quad (D_\mu D^\mu \phi)_a = -\lambda \phi_a (\phi \cdot \phi - a^2)$$

(ver apéndice D) y además se cumple la identidad de Bianchi:

$$\text{IV.6} \quad D_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = 0$$

Si definimos el campo eléctrico y magnético no-Abeliano como:

$$\text{IV.7} \quad \mathcal{L}_i^a = -G_a^{0i} \qquad \mathcal{B}_a^i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} G_{jk}^a$$

la densidad de energía se puede escribir como: (ver apéndice D)

$$\text{IV.8} \quad \theta_{00} = \frac{1}{2} \left\{ (\mathcal{L}_a^i)^2 + (\mathcal{B}_a^i)^2 + (D^i \phi^a)^2 + (D^0 \phi^a)^2 \right\} + V(\Phi)$$

Como la energía es siempre mayor o igual que cero, la configuración de vacío es aquella para la cual la energía se hace cero. La densidad de energía definida por IV.8 se hace cero si:

$$\text{IV.9} \quad G_a^{\mu\nu} = 0$$

$$\text{IV.10} \quad (D^\mu \phi)_a = 0$$

$$\text{IV.11} \quad V(\Phi) = \frac{1}{4} \lambda (\phi^2 - a^2)^2 = 0$$

Estas tres relaciones definen el vacío

Un ejemplo de configuración de vacío es:

$$\text{IV.12} \quad W_\mu^a = 0 \qquad \phi = (0, 0, a)$$

Al substituir IV.12 en el Lagrangiano IV.1 llegamos a:

$$\text{IV.13} \quad \frac{1}{2} D_\mu \phi^a D^\mu \phi_a = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_a)^2 + \frac{1}{2} e^2 (a^2 + \dots) [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2]^2$$

$$U(\phi) = \frac{1}{2} \lambda a^2 \phi^2 + \dots$$

de donde vemos que hay un bosón vectorial sin masa W_μ^3 que se acopla a la corriente sin romper la invariancia del grupo $U(1)$ y bosones vectoriales con masa W_μ^\pm , donde $Mw = ea = e\sqrt{\mu/\lambda}$, y un escalar neutro con masa $Mh = \sqrt{\lambda a} = \mu$. El campo escalar dado por IV.12 permanece invariante ante rotaciones alrededor del eje z. Podemos identificar la simetría que no se rompió ($U(1)$) con la interacción electromagnética y el bosón vectorial sin masa con el fotón.

La descripción anterior corresponde al mecanismo usual del rompimiento espontáneo de la simetría, por medio del cual adquieren masa los campos de norma.

4.2 Vacío de Higgs y monopolos magnéticos

Un concepto importante es el de vacío de Higgs. Cuando una solución satisface IV.10 y IV.11, pero no necesariamente IV.9 se dice que esta en el vacío de Higgs. Aparte de las soluciones de vacío es posible encontrar soluciones a las ecuaciones de movimiento que corresponden a configuraciones de energía finita.

La condición de que la energía sea finita nos dice que a distancias muy grandes el potencial tiene que tomar su valor mínimo. La ecuación IV.11 implica que $\phi \rightarrow a$, esto nos da un conjunto M de valores de ϕ que minimizan a $V(\phi)$ y representan una esfera de radio a en el espacio de simetría interna. El subgrupo H que deja invariante a las ϕ s es el grupo de rotaciones alrededor del eje Φ .

La configuración resultante en infinito puede diferir de la del vacío descrita en la sección anterior en el sentido de que el campo ϕ puede

apuntar en diferentes direcciones para diferentes puntos del espacio. Lo anterior nos dá un mapeo entre la superficie de una esfera que limita al espacio real ($r \rightarrow \infty$) y la superficie de una esfera de radio a en el espacio isotópico. El número de veces que una superficie es mapeada en la otra es el número de revolución que resulta ser igual a la carga magnética de la configuración. Una configuración de monopolo magnético se obtendrá con un campo ϕ que cumpla con

$$\text{IV.14} \quad \bar{\phi}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} a \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \phi^2 = a^2$$

ya que esta solución tiene un número de revolución igual a 1. (ver figura 4.1). El mapeo dado por IV.14 no puede ser deformado continuamente al mapeo del vacío (ec. IV.12), por lo tanto es topológicamente estable.

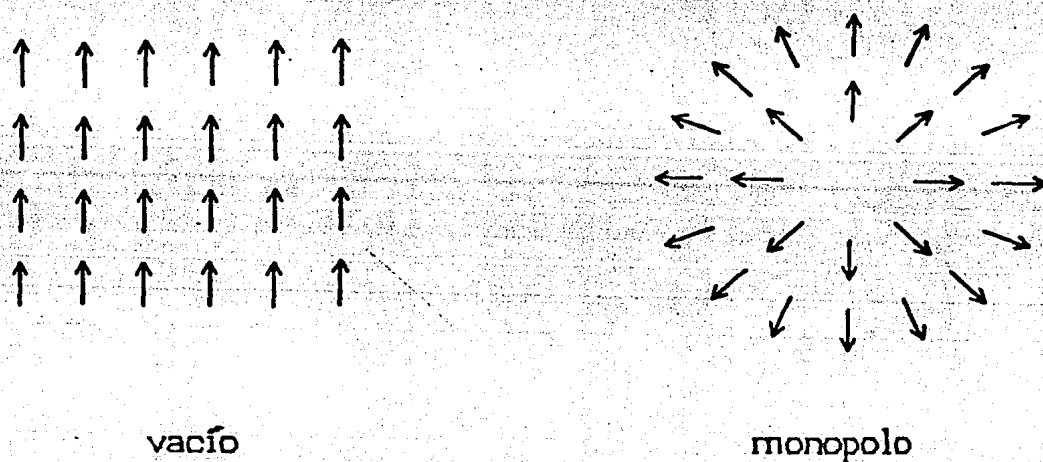


figura 4.1

Configuración de vacío y configuración de monopolo magnético

Otra condición para que la energía sea finita es que las derivadas covariantes $D_i \phi_a$ y $D_0 \phi_a$ tiendan a cero cuando r tiende a ∞ ; de las ecuaciones IV.3 y IV.14 vemos que para la solución de monopolo magnético esto se puede cumplir si

$$\text{IV.15} \quad D_0 \phi^a = 0$$

y

$$\text{IV.16} \quad W_i^a \rightarrow \frac{\epsilon_{iak} r^k}{er^2} \Rightarrow D_i \phi^a = 0$$

4.3 Solución de 't Hooft-Polyakov

La solución a las ecuaciones de movimiento que incorporan las condiciones IV.14-16 se pueden construir utilizando argumentos de simetría ('t Hooft y Polyakov, 1974; Wu y Yang, 1969; Carrigan et al, 1976) que permitan proponer un ansatz que simplifique las ecuaciones. Para describir un monopolo magnético en reposo en el origen, 't Hooft y Polyakov propusieron la siguiente solución:

$$\text{IV.17 a} \quad \phi_a(\vec{r}) = H(aer) \frac{r^a}{er^2}$$

$$\text{IV.17 b} \quad W_a^i(\vec{r}) = \epsilon_{aij} \frac{r^j}{er^2} (1 - K(aer)) \quad W_a^0 = 0$$

Si sustituimos la solución IV.17 en la ecuación para la energía (IV.8) llegamos a:

$$\text{IV.18} \quad H = \int d^3r \theta_{00} = \frac{4\pi a}{e} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \left[\xi^2 \left(\frac{dK}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\xi \frac{dH}{d\xi} - H \right)^2 + \frac{1}{2} (K^2 - 1)^2 + K^2 H^2 + \frac{\lambda}{4e^2} (H^2 - \xi^2)^2 \right]$$

(ver apéndice D), donde $\zeta = \text{aer}$. Las condiciones para que E sea estacionaria ante variaciones de H y K son:

$$\text{IV.19 a} \quad \zeta^2 \frac{d^2 K}{d\zeta^2} = K^2 H^2 + K(K^2 - 1)$$

$$\text{IV.19 b} \quad \zeta^2 \frac{d^2 H}{d\zeta^2} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} H(H^2 - \zeta^2)$$

que son ecuaciones de movimiento para H y K. Estas ecuaciones también pudieron ser obtenidas substituyendo IV.17 en las ecuaciones de movimiento IV.3 y IV.4.

Para que la condición de energía finita se cumpla (ecs. IV.14-16) el comportamiento asintótico de H y K debe ser:

$$\text{IV.20} \quad \begin{array}{ll} H(\zeta) \longrightarrow \zeta & \zeta \longrightarrow \infty \\ K(\zeta) \longrightarrow \zeta & \zeta \longrightarrow \infty \\ \text{y } K - 1 \leq O(\zeta); \quad H \leq O(\zeta) & \zeta \longrightarrow 0 \end{array}$$

Las funciones H y K que satisfacen IV.19 y 20 se encuentran por métodos numéricos y tienen la forma: (figura 4.2)

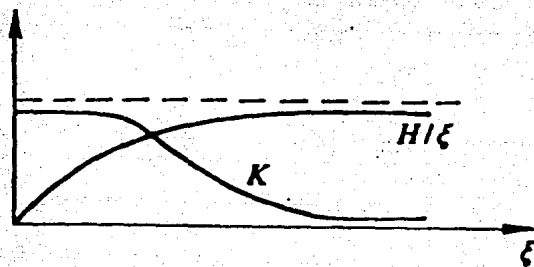


figura 4.2

La energía total de la solución se interpreta como la masa clásica del monopolo y se puede escribir como:

$$\text{IV.21 a} \quad M = \frac{4\pi a}{e} f(\lambda/e^2)$$

donde f es una función que resulta de evaluar la integral en IV.18 y cuyos valores han sido calculados como (para mayores detalles del cálculo numérico ver Bais y Primack (1976):

$f(0) = 1$	(Prasad y Sommerfield, 1975)
$f(0.1) = 1.1$	('t Hooft, 1974)
$f(0.5) = 1.42$	(Julia y Zee, 1975)
$f(10) = 1.44$	('t Hooft, 1974)

Es interesante ver que IV.26 puede ser escrito como

$$\text{IV.21 b} \quad M = \frac{4\pi M_w}{e^2} f(\lambda/e^2)$$

que demuestra que la masa del monopolo es proporcional a la masa de los bosones de norma e inversamente proporcional a la constante de acoplamiento, y es, por lo tanto, un resultado no perturbativo.

4.4 La condición de cuantización de Dirac

Al usar las condiciones IV.20 para los valores asintóticos de H y K y utilizando IV.2 y IV.17, obtenemos que asintóticamente $G_{\mu\nu}^a$ está dado por

$$IV.22 \quad G_a^{ij} \sim \frac{1}{er^4} \epsilon_{ijk} r^a r^k \sim \frac{1}{ae r^2} \epsilon_{ijk} r^k \phi^a$$

El tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$ se define como la proyección de $G_{\mu\nu}^a$ sobre la dirección de Φ , es decir (ver sección 4.6):

$$IV.23 \quad F^{\mu\nu} = \hat{\Phi} \cdot G^{\mu\nu} = \frac{\phi^a}{|\Phi|} G_a^{\mu\nu}.$$

Esta ecuación nos dice (ver la definición de E y B en la sección 2.1) que el campo magnético en este caso es:

$$IV.24 \quad B^i = -\frac{1}{e} \frac{r^i}{r^3}$$

que corresponde al campo magnético creado por un monopolo con carga magnética:

$$IV.25 \quad g = -\frac{4\pi}{e}$$

En este caso e es la constante de acoplamiento electromagnética y esta relacionada con el operador de carga Q por:

$$IV.26 \quad Q = e T_3$$

(T_3 es la tercera componente del isospín). La carga más pequeña diferente de cero que podemos tener es $q_0 = e/2$, que es la que corresponde a $T_3 = 1/2$. Esto nos dá

$$IV.27 \quad \frac{q_0 q_0}{4\pi} = -\frac{1}{2}$$

que es la condición de cuantización de Dirac.

4.5 Estructura del monopolio

Cuando $r \rightarrow \infty$ las ecuaciones de movimiento IV.24 se pueden aproximar como

$$\text{IV.28} \quad \frac{d^2 K}{d\xi^2} = K ; \quad \frac{d^2 h}{d\xi^2} - \frac{2\lambda}{e^2} h = 0$$

donde $H = h + \xi$. Las ecuaciones IV.28 nos llevan a una mejor aproximación para los valores asintóticos de K y H :

$$\text{IV.29} \quad K \sim e^{-\xi} \simeq e^{-M_w r}$$

$$H - \xi \sim e^{-\mu \xi / M_w} \simeq e^{-\mu r}$$

donde $\mu = (2\lambda)^{\frac{1}{2}} a$ y $M_w \sim ea$ son las masas de los bosones de Higgs y de norma respectivamente. Esto significa que la aproximación a la forma asintótica la determina la longitud de onda de Compton de la partícula masiva asociada con cada campo.

Los campos de norma W_i^a dados por IV.17 toman su valor asintótico mas allá de un cierto valor R_c . Este radio R_c nos da un tamaño definido del monopolio de 't Hooft-Polyakov. De acuerdo a IV.29

$$\text{IV.30} \quad R_c \simeq \frac{1}{M_w}$$

mientras que de acuerdo a IV.21 b la longitud onda de Compton del monopolio es aproximadamente

IV.31

$$\lambda \approx \frac{\alpha}{M_w}$$

donde $\alpha = 4\pi/e^2$.

La estabilidad del monopolo magnético se puede entender como el resultado de minimizar la suma de la energía magnética almacenada fuera del radio R_c más la energía debida al gradiente del campo escalar dentro de R_c . En ordenes de magnitud:

$$E_{\text{mag}} = 4\pi g^2 \frac{1}{R_c} \sim \frac{4\pi}{e^2} \frac{1}{R_c}$$

$$E_{\phi} = 4\pi R_c a^2 \sim \frac{4\pi}{e^2} M_w^2 R_c$$

minimizando la suma de estas dos cantidades se obtiene IV.30 nuevamente.

4.6 Solución de 't Hooft-Polyakov en el vacío de Higgs

Cuando $r \gg R_c$ la configuración de campo se encuentra exponencialmente cerca del vacío de Higgs, es decir:

$$\text{IV.32} \quad D^{\mu} \phi = \partial^{\mu} \phi - e \bar{W}^{\mu} \times \phi = 0 \quad \phi^2 = a^2$$

con un error del orden $\exp(-r/R_c)$.

Si conocemos Φ fuera de los monopolos, la forma general de W_{μ} que satisface IV.32 es:

$$\text{IV.33} \quad \bar{W}^{\mu} = \frac{1}{a^2 e} \bar{\Phi} \times \partial^{\mu} \Phi + \frac{1}{a} \bar{\Phi} A^{\mu}$$

donde A es un campo arbitrario. De la ec. IV.2 llegamos a que

$$\text{IV.34 a} \quad G_a^{\mu\nu} = \frac{1}{a} \phi_a F^{\mu\nu}$$

donde

$$\text{IV.34 b} \quad F^{\mu\nu} = \frac{1}{a^3 e} \Phi \cdot (\partial^\mu \Phi \times \partial^\nu \Phi) + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

En la ecuación anterior notamos que $F_{\mu\nu}$ coincide con la definición que se dió anteriormente del tensor electromagnético (ec. IV.23). De las ecuaciones IV.32 y 33 se sigue que

$$\text{IV.35} \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \qquad \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

que son las ecuaciones de Maxwell.

Podemos concluir que en el vacío de Higgs (IV.32) la única componente del tensor $G_{\mu\nu}^a$ que es diferente de cero apunta en la dirección de Φ (ec. IV.34), y está dada por un tensor $F_{\mu\nu}$ que cumple con las ecuaciones de Maxwell (IV.35). Esta componente está asociada con el grupo $U(1)$ de rotaciones alrededor de Φ .

4.7 Carga magnética y topología

A continuación discutimos el origen topológico de la carga magnética.

La corriente magnética se define como (ver ec. II.3)

$$\text{IV.36} \quad k^\mu = \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}$$

En ausencia de singularidades podemos calcular k_μ utilizando IV.34 b para obtener

$$\text{IV.37} \quad k_\mu = \frac{1}{2ea^3} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{abc} \partial^\nu [\phi^a \partial^\rho \phi^b \partial^\sigma \phi^c]$$

Es interesante ver que la corriente magnética queda determinada completamente en función de los campos escalares. Debido a que la corriente k_μ es la divergencia de un tensor antisimétrico, se conserva localmente, es decir

$$\partial^\mu k_\mu = 0$$

que dá lugar a que la carga magnética

$$g = \int d^3x k_0$$

se conserve ($dg/dt = 0$). Usando IV.37 se obtiene

$$\text{IV.38} \quad g = \frac{1}{2ea^3} \oint_\Sigma \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} \phi^a \partial_j \phi^b \partial_k \phi^c d^2 \Sigma_i$$

Para llegar a este resultado se utilizó la ley de Gauss para convertir la integral de volúmen a una integral de superficie en la que Σ es la superficie de una esfera en el límite en que el radio $R \rightarrow \infty$.

Es importante notar que la carga magnética no es una carga de Noether. De la ec. IV.38 vemos que g no depende de ningún momento conjugado $(\partial^0 \phi)$ y por lo tanto no puede generar simetría alguna.

La superficie Σ se puede parametrizar en términos de dos pará-

metros ξ_α ($\alpha = 1, 2$), de manera que tenemos:

$$x^i = x^i(\xi_\alpha)$$

Utilizando los siguientes resultados:

$$\text{IV.39} \quad d^2 \xi_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^n}{\partial \xi^b} \varepsilon_{ab} d^2 \xi$$

$$\text{y} \quad \partial_j \phi^b = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^j} \frac{\partial \phi^b}{\partial \xi^a}$$

se encuentra que

$$\text{IV.40} \quad q = \frac{1}{e} \oint_{\Sigma} \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \left[\hat{\phi}^a \frac{\partial \hat{\phi}^b}{\partial \xi^a} \frac{\partial \hat{\phi}^c}{\partial \xi^b} \right] \varepsilon_{ab} d^2 \xi$$

donde
$$\hat{\phi}^a = \frac{\phi^a}{a}$$

De acuerdo a IV.39 la integral que aparece en IV.40 representa una integral sobre la superficie de una esfera de radio 1 en el espacio de las ϕ . Cuando el punto (ξ_1, ξ_2) cubre la esfera Σ una vez, el vector $\hat{\phi}$ puede cubrir la esfera unitaria en el espacio de ϕ N veces. N debe ser entero para que ϕ_a sea univalente. Entonces, a partir de IV.40 obtenemos

$$\text{IV.41} \quad q = N \frac{4\pi}{e}$$

Esta relación confirma el origen topológico de la carga magnética y muestra que además del monopolo magnético (ec. IV.25) podemos esperar la existencia de configuraciones con cualquier carga magnética entera. Cabe mencionar que a la fecha no se han podido encontrar

soluciones con $N > 1$.

4.8 Monopolo de Bogomolny-Prasad-Sommerfield

Otra diferencia importante entre el monopolo de Dirac y el de 't Hooft-Polyakov, es que la masa de este último es calculable, mientras que en el monopolo de Dirac la masa es arbitraria debido a que la fuente magnética externa k_μ se agrega "a mano".

Es posible encontrar un límite inferior para la masa de los monopolos magnéticos. Este cálculo da lugar al límite llamado de Bogomolny Prasad y Sommerfeld (BPS) (Bogomolny, 1976; Coleman et al, 1977). A partir de la densidad de energía IV.8 podemos calcular la masa del monopolo como:

$$IV.42 \quad M = \int dE = \int d^3r \frac{1}{2} \left\{ \left[(\mathcal{E}_a^i)^2 + (\mathcal{B}_a^i)^2 + (D_0 \phi_a)^2 + (D^i \phi_a)^2 \right] + V(\Phi) \right\}$$

Como $V(\phi)$ dado por IV.4 es una cantidad positiva definida, la masa M del monopolo debe cumplir con:

$$IV.43 \quad M \geq \int d^3r \frac{1}{2} \left\{ (\mathcal{E}_a^i)^2 + (\mathcal{B}_a^i)^2 + (D^i \phi_a)^2 \right\}$$

En el vacío de Higgs $F_{\mu\nu} = \Phi \cdot G_{\mu\nu}$, lo que permite escribir las cargas eléctricas y magnéticas como:

$$IV.44 \quad q = \int d\bar{s} \cdot \vec{B} = \frac{1}{a} \int \mathcal{B}_a^i \phi_a d s^i \\ = \int \mathcal{B}_a^i (D^i \phi)_a d^3r$$

y

$$\text{IV.45} \quad q = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{a} \int G_a^k (D^k \phi)_a d^3r$$

donde para llegar a las expresiones finales se utilizó la identidad de Bianchi (ec. IV.6). Al substituir IV.44 y IV.45 en IV.43 llegamos a que:

$$\begin{aligned} \text{IV.46} \quad M &\geq \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ G_a^i - (D^i \phi)_a \sin \theta \right\}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ B_a^i - (D^i \phi)_a \cos \theta \right\}^2 + a (q \sin \theta + g \cos \theta) \geq \\ &\geq a (q \sin \theta + g \cos \theta) \end{aligned}$$

Si calculamos el mínimo de esta relación para θ llegamos a

$$\text{IV.47} \quad M \geq a (q^2 + g^2)^{1/2}$$

En el caso de 't Hooft-Polyakov el monopolo magnético no lleva carga eléctrica, lo que nos dá el límite inferior para la masa como:

$$\text{IV.48} \quad M \geq a |g| = a \frac{4\pi}{e}$$

En términos de la masa del bosón pesado $M_w = ae$, la masa del monopolo sería:

$$\text{IV.49} \quad M \geq 4\pi \frac{M_w}{e^2}$$

Al comparar con IV.23 vemos que el límite de BPS corresponde a

$$f(\lambda/c^2) = 1$$

La densidad de energía dada por IV.46 da una solución para la masa del monopolo que está exactamente en el límite inferior, es decir:

$$\text{IV.50} \quad M = a|g|$$

cuando las siguientes relaciones se cumplen en todo el espacio:

$$\text{IV.51} \quad D^0 \phi = 0 \quad G_a^i = 0$$

$$B_a^i = \pm (D^i \phi)_a \quad V(\phi) = 0 \quad g \leq 0$$

El hecho de que $V(\phi)$ sea cero implica necesariamente que $\lambda = 0$, pero para que las cargas estén definidas y cuantizadas se toman las ecuaciones en el límite en que $\lambda \rightarrow 0$ y se supone que IV.14 es todavía válido. Las ecuaciones IV.51 junto con las identidades de Bianchi llevan a las ecuaciones de movimiento IV.3 y IV.4 con $\lambda = 0$:

$$\text{IV.52} \quad \partial_\nu G^{\mu\nu} = e \phi \times D^\mu \phi$$

$$\text{IV.53} \quad D_\mu D^\mu \phi = 0$$

Al substituir en las ecuaciones de movimiento IV.52 y 53 el ansatz dado por IV.17 llegamos a (Bogomolny, 1976; Coleman et al, 1977):

$$\text{IV.54} \quad f \frac{dK}{df} = -KH; \quad f \frac{dH}{df} = H - (K^2 - 1)$$

La solución a estas ecuaciones fue encontrada por Prasad y Sommerfeld (1975), quienes al aplicar el método variacional al monopolo de 't Hooft-Polyakov encontraron accidentalmente soluciones exactas para el límite $\lambda \rightarrow 0$. Si hacemos el cambio de variables $H = 1 + \zeta h$, $K = \zeta h$ llegamos a que $k' = kh$ y $h' = k^2$. Al recordar las formas que toman H y K en el límite en que $\zeta \rightarrow \infty$, llegamos a que $h^2 - k^2 = 1$, lo cual nos lleva a la solución:

$$\text{IV.55} \quad H = H_0(\zeta) = \zeta \coth \zeta - 1$$

$$K = K_0(\zeta) = \zeta \operatorname{senh} \zeta$$

La forma asintótica de H es:

$$\text{IV.56} \quad H - \zeta = 1 + O(\exp(-\zeta))$$

y para $\zeta \ll 1$ tenemos que

$$\text{IV.57} \quad H(\zeta) = \frac{1}{6} \zeta^2 + O(\zeta^4)$$

Este monopolo es llamado de Bogomolny-Prasad-Sommerfeld.

El monopolo de BPS difiere en aspectos básicos de los de 't Hooft-Polyakov y Dirac. En el monopolo de BPS el campo de Higgs no tiene masa y es de largo alcance, como el del fotón. La contribución de estos dos campos a la densidad de masa son iguales y hacen que tenga una densidad de masa dos veces más grande que la de los de Dirac y 't Hooft-Polyakov. Además, la fuerza que ejerce este monopolo es atractiva y su

magnitud es igual que la de la fuerza magnética. Esto hace que para monopolos con carga opuesta el efecto se refuerce, mientras que para monopolos con cargas iguales se cancela exactamente.

4.9 Relación entre el monopolo de 't Hooft-Polyakov y el de Dirac

Como ya dijimos, la diferencia entre el monopolo de Dirac y el de 't Hooft-Polyakov es que el de Dirac es puntual y lleva una singularidad (la cuerda) sobre la cual el campo magnético es infinito, mientras que el de 't Hooft-Polyakov tiene una estructura interna suave y un tamaño definido. Sin embargo, lejos del monopolo el campo electromagnético es prácticamente el mismo (el de Maxwell), la única diferencia reside en la definición del tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$. Se ha demostrado (Boulware et al, 1976) que mediante una transformación de norma singular, es posible, en el límite que $r \rightarrow \infty$, pasar de la expresión de 't Hooft-Polyakov para $F_{\mu\nu}$ a una forma de $F_{\mu\nu}$ que contiene la cuerda de Dirac. Esto significa que en las regiones alejadas del monopolo, en el vacío de Higgs, se puede pasar del monopolo de 't Hooft-Polyakov al de Dirac con una transformación de norma, lo que nos dice que en esta región las dos descripciones son equivalentes.

4.10 Diones

Otro aspecto muy interesante de esta teoría es que al definir $W_0^a \neq 0$ se pueden obtener soluciones que además de carga magnética lleven carga eléctrica (Julia y Zee, 1975). A estas partículas se les conoce como diones. Se demostró (Prasad y Sommerfeld, 1975; Bogomolny, 1976) que los diones pueden llevar carga eléctrica anómala, es decir, la carga eléctrica puede no ser un múltiplo entero de una

carga fundamental.

4.11 Resumen

El monopoló de 't Hooft-Polyakov tiene una estructura (tamaño) definida. Adentro del monopoló los campos masivos le dan una estructura suave y afuera del monopoló estos campos desaparecen rápidamente, de manera que a distancias muy grandes la configuración del campo del monopoló es igual a la de un monopoló de Dirac. La masa de este monopoló es proporcional al valor esperado del vacío; i. e. del orden de la escala del rompimiento espontáneo de la simetría (ver ec. IV.21). Además, en este monopoló no hay necesidad de la cuerda de Dirac, ya que al tener un tamaño definido la singularidad de la cuerda desaparece.

Como el tamaño del monopoló es más grande que su longitud de onda de Compton por el factor $\alpha = 4\pi/e$, si α es pequeña las correcciones cuánticas a la estructura del monopoló son pequeñas. En cambio, en el monopoló puntual de Dirac, la constante de acoplamiento g es una constante de acoplamiento fuerte y no podemos calcular nada.

Un aspecto interesante del monopoló de 't Hooft-Polyakov y de la cuantización de las cargas es que es consecuencia directa del rompimiento espontáneo de la simetría de un grupo no-Abeliano simple al grupo electromagnético $U(1)$.

CAPITULO V

MONOPOLOS NO-ABELIANOS EN MOVIMIENTO

5.1 Monopolos en movimiento con velocidad constante

Usando las transformaciones de Lorentz podemos obtener a partir del ansatz de 't Hooft-Polyakov una solución que represente a un monopolo magnético moviéndose con velocidad constante.

Supongamos que el monopolo se encuentra en reposo en el origen en el sistema S' . En este sistema la solución es independiente del tiempo y está dada por IV.17. En un sistema en el cual el monopolo se mueve a lo largo del eje z con velocidad constante se tiene que las coordenadas y los campos se relacionan con los del sistema S' de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{V.1 a} \quad \eta^i &\equiv x'^i = \begin{cases} x^i & i = 1, 2 \\ \gamma(x^i - vt) & i = 3 \end{cases} \\
 \text{b} \quad A_a^i(\vec{\eta}) &\equiv W_a^i(\vec{\eta}') = \begin{cases} W_a^i(\vec{\eta}, t) & i = 1, 2 \\ \gamma(W_a^3(\vec{\eta}, t) - v W_a^0(\vec{\eta}, t)) & i = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$c \quad A_a^0(\bar{\eta}) \equiv W_a^{10}(\bar{\tau}) = \gamma (W_a^0(\bar{\tau}, t) - v W_a^3(\bar{\tau}, t))$$

$$d \quad \phi_a'(\bar{\eta}) = \phi_a(\bar{\tau}, t)$$

donde, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. En las ecuaciones V.1 introducimos variables η y $A^\mu(\eta)$ en lugar de r' y W^μ_a para simplificar la notación. Como $A^\mu_a(\eta)$ y $\phi_a'(\eta)$ representan la solución en el sistema en reposo, tenemos de IV.17 que:

$$V.2 \quad A_a^i(\bar{\eta}) = \epsilon_{aij} \frac{\eta^j}{e\eta^2} (1 - K(ae\eta))$$

$$\phi_a'(\eta) = \frac{\eta^a}{e\eta^2} H(ae\eta)$$

$$A_a^0(\eta) = 0$$

Como en el sistema S' se cumple $A_a^0 \equiv W_a^{10} = 0$, V.1c nos da la relación

$$V.3 \quad W_a^0 = v W_a^3$$

de lo que se sigue que $W_a^3 = \gamma A_a^3$.

Para simplificar la notación definimos:

$$V.4 \quad \gamma^{(i)} = \begin{cases} 1 & i = 1, 2 \\ \gamma & i = 3 \end{cases}$$

De manera que ahora la solución que representa un monopolo magnético con velocidad constante es:

$$V.5 \quad W_a^i(\bar{r}, t) = \gamma^{(i)} A_a^i(\bar{\eta}); \quad W_a^0(\bar{r}, t) = \gamma v A_a^3(\bar{\eta})$$

$$\phi_a(\bar{r}, t) = \phi'_a(\bar{\eta}); \quad \eta^i = \gamma^{(i)} (\tau^i - v^i t)$$

donde A_a^i y ϕ'_a están dados por el ansatz V.2.

Otra manera de llegar a las transformaciones anteriores es proponiendo una solución del tipo $W_a^i(r - vt)$, $\phi_a(r - vt)$. Al substituir en las ecuaciones de movimiento IV.5 se obtienen, después de un largo cálculo, las relaciones V.3 y V.5. Aquí, tomamos como punto de partida V.3 y V.5 y comprobaremos a continuación que son soluciones de las ecuaciones de movimiento IV.5

El tensor antisimétrico $G_{\mu\nu}$ está dado por IV.2. Al substituir en este tensor los campos dados por V.5 tenemos que:

$$\begin{aligned} G_a^{13} &= \partial_x^2 W_a^3 - \partial_x^3 W_a^2 - e \epsilon_{abc} W_b^2 W_c^3 \\ &= (\partial_\eta^3 A_a^3) \gamma - (\partial_\eta^2 A_a^2) \gamma - e \epsilon_{abc} \gamma A_b^2 A_c^3 = \tilde{G}_a^{23} \gamma \end{aligned}$$

donde definimos un nuevo tensor antisimétrico $\tilde{G}_{\mu\nu}$ en términos de los campos en reposo como:

$$V.6 \quad \tilde{G}_a^{ij} = \partial^i A_a^j - \partial^j A_a^i - e \epsilon_{abc} A_b^i A_c^j$$

(Las derivadas en V.6 se hacen con respecto a la variable η).

La componente G_a^{23} queda de manera similar y G_a^{33} es igual a cero. Las componentes de G_a^{ij} que no tienen índice 3 no se transforman, ya que

$$G_a^{i2} = \partial^i W_a^2 - \partial^2 W_a^i - e \varepsilon_{abc} W_b^i W_c^2 = \tilde{G}_a^{i2}$$

Podemos escribir las componentes espaciales del tensor anisimétrico IV.2 en términos del nuevo tensor antisimétrico V.6 .

$$V.7 \quad G_a^{ij} = \gamma^{(i)} \gamma^{(j)} \tilde{G}_a^{ij}$$

Para las componentes temporales tenemos que:

$$G_a^{i0} = \partial^i W_a^0 - \partial^0 W_a^i - e \varepsilon_{abc} W_b^i W_c^0$$

Substituyendo V.5, llegamos a que:

$$V.8 \quad G_a^{i0} = \nu G_a^{i3} = \gamma \gamma^{(i)} \nu \tilde{G}_a^{i3}$$

Siguiendo el mismo método podemos encontrar una relación entre $D^i \phi_a$, $D^0 \phi_a$ y $\tilde{D}^i \phi_a$ donde:

$$V.9 \quad \tilde{D}^i \phi_a' = \partial^i \phi_a' - e \varepsilon_{abc} A_b^i \phi_a'$$

(de nuevo, las derivadas se toman con respecto a la variable η).

Usando V.5 llegamos a:

$$V.10 \quad D^i \phi_a = \gamma^{(i)} \tilde{D}^i \phi_a'$$

$$V.11 \quad D^0 \phi_a = \gamma \nu \tilde{D}^3 \phi_a'$$

Con estas relaciones es fácil ver que las ecuaciones de movimiento dadas por IV.5 se transforman como sigue:

$$D_\mu G_a^{\mu\nu} = -e \epsilon_{abc} \phi_b \gamma^\nu (D^\nu \phi)_c$$

$$\nu = 0 \quad \tilde{D}_i \tilde{G}_a^{3i} = -e \epsilon_{abc} \phi_b (\tilde{D}^3 \phi')_c$$

V.12

$$\nu = j \quad \tilde{D}_i \tilde{G}_a^{1j} = -e \epsilon_{abc} \phi_b (\tilde{D}^i \phi')_c$$

Notamos que la componente $\nu = 0$ es igual a $\nu = 3$ y por lo tanto no da ninguna condición extra.

Si hacemos algo similar con IV.5 b

$$(D_\mu D^\mu \phi)_a = -V^3(\phi)$$

V.13

$$(\tilde{D}_i \tilde{D}^i \phi')_a = -V^3(\phi')$$

Tanto en V.12 como en V.13 las derivadas se están tomando ahora con respecto a las coordenadas η . Las nuevas ecuaciones de movimiento se reducen a V.12 y V.13, que son de la misma forma que las del caso estático. Con esto comprobamos que V.5 cumple con las ecuaciones de movimiento, ya que $A^i(\eta)$ y $\phi(\eta)$ son soluciones de las ecuaciones para el caso estático, es decir están dadas por V.2.

5.2 Los campos eléctrico y magnético no abelianos

Los campos eléctrico y magnético no abelianos se definieron como (ver ec. IV.2):

V.14

$$\mathcal{G}_a^i = -G_a^{0i}$$

V.15

$$\mathcal{B}_a^i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} G_a^{jk}$$

Usando las relaciones V.6-8, podemos encontrar E_a^i y B_a^i en términos del tensor V.6:

V.16

$$\mathcal{G}_a^i = \gamma v \gamma^{(i)} \tilde{G}_a^{i3}$$

V.17

$$\mathcal{B}_a^i = -\frac{\gamma}{\gamma^{(i)}} \epsilon_{ijk} G_a^{jk}$$

De V.16 y 17 podemos ver que:

V.18

$$\mathcal{G}_a^i = -(\vec{v} \times \mathcal{B}_a)^i$$

que es una relación análoga a la que se obtiene en electromagnetismo.

5.3 Los campos eléctrico y magnético

Los campos eléctrico y magnético están dados por la proyección de E_a^i y de B_a^i en la dirección de Φ , es decir por las ecs. IV.34:

$$V.19 \quad E^k = \frac{\Phi^a}{|\Phi|} \mathcal{G}_a^k \quad B^k = \frac{\Phi^a}{|\Phi|} \mathcal{B}_a^k$$

Usando V.5 y V.16 calculamos E_a^i :

$$\mathcal{G}_a^i = \gamma^{(i)} \gamma v \tilde{G}_a^{i3}$$

$$\tilde{G}_a^{ij} = \frac{\epsilon_{ijk}}{\eta^2} \left[2\delta_a^k - e \eta^k \eta^a \frac{f^2}{\eta^2} \right] - \frac{1}{\eta^3} \left(\delta_a^i - \frac{2}{\eta} \delta^i \right) \eta^k \left(\eta^i \epsilon_{ajk} - \eta^j \epsilon_{aik} \right)$$

donde

$$f = \frac{1}{e} (1-K)$$

Al proyectar sobre Φ :

$$E^i = \frac{\phi^a}{|\phi|} \tilde{G}_a^{is} \gamma^{(s)} \gamma^v$$

$$V.20 \quad E^i = \gamma^v \epsilon_{isk} \frac{\eta^k}{e \eta^4} (1-K^2) \frac{H}{|\phi|}$$

Para calcular B usamos V.4 y V.17:

$$B_a^k = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left\{ -\frac{\partial K}{\partial \eta^i} \frac{\partial \eta^m}{\eta^3} (\epsilon_{ajm} \eta_i - \epsilon_{aim} \eta_j) - \frac{2 \epsilon_{aji}}{e} (1-K) - 2 \eta^m \frac{(1-K)}{e \eta^4} - e \epsilon_{ijs} \eta^a \eta^s \frac{(1-K)^2}{e^2 \eta^4} \right\}$$

usando IV.17

$$V.21 \quad B^k = (1-K^2) \frac{\eta^k}{e^2 \eta^4} H \frac{\gamma}{\gamma^{(i)}} \frac{1}{|\phi|}$$

Utilizando los valores asintóticos de las funciones H y K cuando $r \rightarrow \infty$ (IV.20) tenemos que:

$$V.22 \quad B^k \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma^{(i)}} \frac{\eta^k}{e \eta^3} = \frac{\gamma (r^k - v^k t)}{e (x^2 + y^2 + \gamma^2 (z - vt)^2)^{3/2}}$$

V.23

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

que corresponden a los campos eléctrico y magnético de un monopolo magnético en movimiento con velocidad constante y satisfacen las ecuaciones de Maxwell (IV.35).

5.4 Energía del monopolo cuando la velocidad es constante

La densidad de energía está dada por IV.8, donde $V(\Phi)$ es el dado por IV.4. Si usamos los resultados de las secciones anteriores llegamos a:

$$V.24 \quad (\mathcal{E}_a^i)^2 = \left[2 \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}} \right)^2 \frac{a^2}{\eta^2} + \frac{(K^2 - 1)^2}{e^2 \eta^4} \right]$$

Utilizando V.18 tenemos que

$$V.25 \quad (\mathcal{E}_a^i)^2 + (\mathcal{B}_a^i)^2 = (1 + v^2)(\mathcal{B}_a^i)^2 - v^2 (\mathcal{B}_a^i)^2$$

Utilizando V.16, V.6 y V.2 obtenemos:

$$V.26 \quad (\mathcal{E}_a^i)^2 + (\mathcal{B}_a^i)^2 = 2\gamma^2 \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}} \right)^2 \frac{a^2}{\eta^2} \left(1 + v^2 \frac{\eta^i \eta^i}{\eta^2} \right) + \frac{(K^2 - 1)^2}{e^2 \eta^4} \gamma^2 \left(1 + v^2 - 2v^2 \frac{\eta^i \eta^i}{\eta^2} \right)$$

Por un procedimiento similar calculamos $(D^0 \phi_a)^2$ y $(D^i \phi_a)^2$:

$$V.27 \quad (D^0 \phi_a)^2 + (D^i \phi_a)^2 = (D^i \phi_a)^2 + 2\gamma^2 v^2 (\tilde{D}^3 \phi_a)^2$$

$$V.28 \quad (D^0 \phi_a)^2 + (D^i \phi_a)^2 = \left(1 + \gamma^2 v^2 2 \frac{\eta^3 \eta^3}{\eta^2}\right) \left[a^2 \left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)^2 \frac{1}{\eta^2} - \frac{a}{e} H \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{2}{\eta^3} + \frac{H^2}{e^2 \eta^4} \right] + \frac{2K^2 H^2}{c^2 \eta^4} \left(1 + v^2 \gamma^2 - v^2 \gamma^2 \frac{\eta^2 \eta^2}{\eta^2}\right)$$

Si llamamos:

$$V.29 \quad \Theta_{YM} = \frac{1}{2} \left\{ (\mathcal{E}_a^i)^2 + (\mathcal{B}_a^i)^2 \right\}$$

$$V.30 \quad \Theta_\phi = \frac{1}{2} \left\{ (D^i \phi_a)^2 + (D^0 \phi_a)^2 \right\}$$

la energía está dada por:

$$V.31 \quad \int d^3 r \Theta_{00} = \int \Theta_{YM} d^3 r + \int \Theta_\phi d^3 r + \int V(\phi) d^3 r$$

Usando V.24-28 llegamos a que la integral de H es:

$$V.32 \quad \int d^3 r \Theta_{YM} = \frac{2\pi}{a^3 e^2} \gamma \int \frac{d\xi}{\xi^2} d(\cos \theta) \left\{ \left(\xi^2 \left(\frac{\partial K}{\partial \xi}\right)^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 + v^2 \frac{\xi^2 \xi^2}{\xi^2}\right) + \frac{(K^2 - 1)^2}{2} \left[1 + v^2 - 2v^2 \frac{\xi^2 \xi^2}{\xi^2} \right] \right\}$$

como $\xi^z = \xi \cos \theta$, al hacer la integración sobre θ :

$$V.33 \quad \int d^3 r \Theta_{YM} = \frac{a^4 \pi}{e \gamma} \int \frac{d\xi}{\xi^2} \left[\xi^2 \left(\frac{\partial K}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{(K^2 - 1)^2}{2} \right] \left(\frac{3 + v^2}{3}\right) \gamma^2$$

Haciendo algo similar con H_2 llegamos a que:

$$V.34 \quad \int d^3r \Theta_\phi = \frac{a4\pi}{e\gamma} \int \frac{d\xi}{\xi^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \xi - H \right)^2 + K^2 H^2 \right] \left(\frac{3-v^2}{3} \right) \gamma^2$$

y la integral de $V(\Phi)$ es:

$$V.35 \quad \int V(\Phi) d^3r = \frac{a4\pi}{e\gamma} \int \frac{\lambda}{4e^2} (H^2 - \xi^2)^2 \frac{d\xi}{\xi^2}$$

Al juntar todo, la energía para el monopolo en movimiento queda como:

$$V.36 \quad H = \frac{a4\pi}{e\gamma} \int \frac{d\xi}{\xi^2} \left\{ \left[\xi^2 \left(\frac{\partial K}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{(K^2 - 1)^2}{2} \right] \frac{(3+v^2)}{3} \gamma^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \xi - H \right)^2 + K^2 H^2 \right] \frac{(3-v^2)}{3} \gamma^2 + \frac{\lambda}{4e^2} (H^2 - \xi^2)^2 \right\}$$

que, como vemos, se reduce al caso de un monopolo estático (IV.18) cuando la velocidad se hace cero.

Sin embargo, la expresión V.36 para la energía no parece tener la dependencia correcta en v , ya que esperaríamos que $H = \gamma H^0$ donde H^0 es la masa o energía del monopolo dada por IV.18.

5.5 Teorema del Virial

A continuación emplearemos un método similar al utilizado en la demostración del teorema de Derrick (ver capítulo III) para deducir un teorema del Virial válido para toda solución de energía finita del lagrangiano dado por IV.1

Hagamos la siguiente separación del Hamiltoniano:

$$V.37 \quad H = H_{YM} + H_\phi + U$$

donde los tres términos son positivos y están dados por

$$\begin{aligned}
 \text{V.38} \quad H_{\text{ym}} &= \int d^D \bar{\tau} \Theta_{\text{ym}} \\
 H_{\phi} &= \int d^D \bar{\tau} \Theta_{\phi} \\
 u &= \int d^D \bar{\tau} V(\bar{\phi})
 \end{aligned}$$

con Θ_{ym} y Θ_{ϕ} definidos en V.29 y V.30. D es el número de dimensiones espaciales, que en nuestro caso es tres. En V.38 separamos H en contribuciones provenientes del campo de Yang-Mills, de la energía cinética del campo escalar y de la energía potencial de ϕ , respectivamente. Para la solución en reposo tenemos la separación correspondiente:

$$\text{V.39} \quad H^{\circ} = H_{\text{ym}}^{\circ} + H_{\phi}^{\circ} + u^{\circ}$$

Consideremos las configuraciones que se obtienen por un cambio de escala en la variable \bar{x}

$$\bar{x} \longrightarrow \lambda \bar{x}$$

Supongamos que los campos se transforman ante este cambio de escala como

$$\text{V.40} \quad \phi(\bar{x}) \longrightarrow \phi(\bar{x}; \lambda) = \phi(\lambda \bar{x})$$

$$W_a^\mu(\bar{x}) \longrightarrow W_a^\mu(\bar{x}; \lambda) = \lambda W_a^\mu(\lambda \bar{x})$$

Nótese que la forma en que se escalan ϕ y W_μ^a es consistente con el ansatz V.2. A partir de V.40 encontramos

$$V.41 \quad G_a^{\mu\nu}(\bar{x}) \longrightarrow G_a^{\mu\nu}(\bar{x}; \lambda) = \lambda^2 G_a^{\mu\nu}(\lambda \bar{x})$$

$$D_\mu \Phi \longrightarrow D_\mu \Phi(\bar{x}; \lambda) = \lambda D_\mu \Phi(\lambda \bar{x})$$

Al usar las relaciones V.41 encontramos que las contribuciones a la energía de las configuraciones escaladas cumplen con

$$H_{YM}^\circ(\lambda) = \lambda^{2-D} H_{YM}^\circ$$

$$V.42 \quad H_\phi^\circ(\lambda) = \lambda^{4-D} H_\phi^\circ$$

$$U^\circ(\lambda) = \lambda^{-D} U^\circ$$

dónde los términos de la derecha corresponden a las configuraciones reales que se obtienen para $\lambda = 1$.

La condición para que una configuración de energía finita sea estacionaria ante un cambio de escala es

$$V.43 \quad \left. \frac{\delta H^\circ(\lambda)}{\delta \lambda} \right|_{\lambda=1} = 0$$

Usando V.43 a y V.42 tenemos que

$$\left. \frac{\delta H_{ym}^0}{\delta \lambda} \right|_{\lambda=1} = \int (D-4) \Theta_{ym}^0 d^D \tau$$

$$\left. \frac{\delta H_{\phi}^0}{\delta \lambda} \right|_{\lambda=1} = \int (D-2) \Theta_{\phi}^0 d^D \tau$$

$$\left. \frac{\delta U(\phi)}{\delta \lambda} \right|_{\lambda=1} = \int D V(\phi) d^D \tau$$

entonces

$$V.44 \quad \left. \frac{\delta H^0}{\delta \lambda} \right|_{\lambda=1} = 0 = (D-4) H_{ym}^0 + (D-2) H_{\phi}^0 + D U(\phi)$$

pero H_{ym}^0 , H_{ϕ}^0 y V^0 son cantidades positivas definidas, así que V.44 tiene solución solamente si $D < 4$. En nuestro caso $D = 3$ y despejando de V.44 llegamos a:

$$V.45 \quad U^0 = \frac{H_{ym}^0 - H_{\phi}^0}{3}$$

La relación V.45 constituye el teorema del Virial para soluciones estáticas de energía finita de las ecuaciones de movimiento IV.5. Por consiguiente es válido para la solución del monopolo.

Al substituir V.45 en V.39 vemos que la energía en reposo se puede escribir en términos solamente de H_{ym}^0 y H_{ϕ}^0

$$V.46 \quad H^0 = \frac{4}{3} H_{ym}^0 + \frac{2}{3} H_{\phi}^0$$

De la relación V.36 y de IV.18 podemos ver que las diferentes

contribuciones a la energía del monopolo en movimiento estan relacionadas con sus equivalentes en reposo por:

$$u = \frac{u^{\circ}}{\gamma}$$

V.47

$$H_{YM} = \frac{(3+v^2)}{3} H_{YM}^{\circ} \gamma$$

$$H_{\phi} = \frac{(3-v^2)}{3} H_{\phi}^{\circ} \gamma$$

Usando estas relaciones podemos encontrar una forma para la energía del monopolo en movimiento dada en términos de la energía en reposo:

$$\begin{aligned} \text{V.48 } H = H_{YM} + H_{\phi} + u = \int d^3r \left\{ \gamma^2 \frac{(3+v^2)}{3} \Theta_{YM} + \right. \\ \left. + \frac{(3-v^2)}{3} \gamma^2 \Theta_{\phi}^{\circ} + \frac{\Theta_{YM}^{\circ} - \Theta_{\phi}^{\circ}}{3} \right\} \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

finalmente

V.49

$$H = \gamma H^{\circ}$$

Esto quiere decir que la energía del monopolo en movimiento aumentó respecto a la energía en reposo por un factor de γ , que era un resultado de esperarse ya que se hizo una transformación de Lorentz. Esto a su vez implica que la masa aumentó por el factor γ , lo que concuerda con lo que se espera de una partícula en movimiento relativista.

5.6 Generalización del ansatz de 't Hooft-Polyakov a un monopolo en movimiento arbitrario

La estabilidad de las soluciones de monopolo magnético han sido ampliamente estudiadas (Christ y Lee, 1975; Tomboulis, 1975; Goldstone y Jackiw, 1975) utilizando métodos semiclásicos de cuantización, en los cuales los campos se expresan como la suma de la solución clásica más términos de fluctuación (que se suponen pequeños). Este método requiere que, además del término de fluctuación, la posición del solitón y un factor de fase sean tratados como operadores. A este método de cuantización se le conoce como método de coordenadas colectivo.

Otro problema de interés es el de estudiar un monopolo no-abeliano en presencia de un campo externo. Por ejemplo, en un campo magnético el monopolo será acelerado y radiará energía. Este fenómeno será de relevancia para una determinación más precisa del límite de Parker (ver Introducción), es decir, del flujo máximo de monopolos magnéticos que es consistente con la existencia de campos magnéticos galácticos. Lo anterior requiere encontrar la prescripción para introducir en el Lagrangiano IV.1 un acoplamiento a un campo magnético externo y posteriormente resolver las ecuaciones de movimiento resultantes. Esta es una tarea que dejaremos para un trabajo posterior, en lo que resta veremos que es posible encontrar una generalización al monopolo

* El problema de campos puros de Yang-Mills en presencia de una fuente externa no dinámica ha sido estudiado por Jackiw, Jacobs y Rebbi (Jackiw et al, 1979) y por Sikivie y Weiss (Sikivie y Weiss, 1978, 1979) entre otros.

de 't Hooft-Polyakov que representa a un monopolo en movimiento arbitrario.

Una generalización del ansatz de 't Hooft-Polyakov a velocidad arbitraria, -es decir, con aceleración distinta de cero- debe ser covariante y debe reducirse a los casos en que la velocidad del monopolo es constante y en particular cero. Además, esta generalización debe incluir el hecho de que los campos no se propagan a una velocidad infinita, y por lo tanto la posición de la partícula se debe evaluar al tiempo retardado. Lo que tenemos que encontrar es una generalización de los potenciales de Lienard-Wiechart a nuestro caso.

Si al construir un diagrama espacio-tiempo ponemos el punto de observación de coordenadas (x,y,z,t) como origen del espacio de Minkowski, la superficie inferior del cono representa el pasado absoluto, los puntos en los cuales las señales luminosas pueden alcanzar el punto O. Como el monopolo siempre viaja a velocidad menor que la de la luz la pendiente de su línea de universo es siempre menor que la del cono de luz, de manera que esta línea solo interseca al cono de luz en un punto del pasado absoluto (ver figura 5.1). Este punto es el que corresponde al tiempo retardado t' y esta dado por:

$$V.50 \quad t' = t - \frac{R'}{c}$$

$$\text{con} \quad R' \equiv R(t') = |\bar{x} - \bar{r}(t')|$$

donde x es el punto de observación y $r(t')$ es la posición de la partícula

evaluada al tiempo retardado t' .

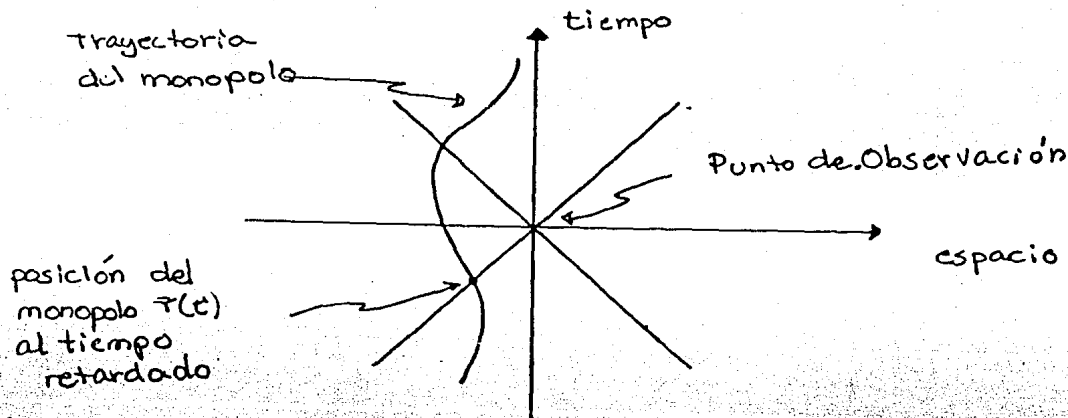


figura 5.1.

Trayectoria del monopolio en el cono del espacio-tiempo.

El método que seguimos para generalizar el ansatz de 't Hooft-Polyakov está inspirado en el utilizado por Landau y Lifshitz en la deducción que hacen de los potenciales de Lienard-Wiechert.

Consideremos el sistema instantáneo en reposo de la partícula al tiempo t' . Es decir, al tiempo t' el monopolio tiene velocidad cero y los campos estarán dados por la expresión IV.17 pero evaluada al tiempo retardado:

$$W_a^i(\bar{r}, t) = \epsilon_{aij} \frac{R'^j}{eR'^2} (1 - K(aeR'))$$

V.53

$$W_a^0 = 0$$

$$\phi_a(\bar{r}, t) = \frac{R'^a}{eR'^2} H(aeR')$$

Con ayuda del cuadrivector de velocidad u^μ y el cuadrivector R^μ dados por

$$u^\mu = \gamma (c, \bar{v})$$

V.54

$$R^\mu \equiv R^\mu(t) = (c(t-t'), \bar{x} - \bar{r}(t')); \quad R^\mu R_\mu = 0$$

podemos escribir el ansatz para los campos en una forma covariante que se reduce a V.53 cuando $v = 0$, dicha forma es:

V.55

$$W_a^\mu = \frac{u^\nu \epsilon_{\nu a \mu \rho} R^{\rho} [1 - K(ae R \cdot u)]}{c \gamma e |\bar{r}' \cdot \bar{u}|^2 / c^2}$$

$$\phi_a = \frac{R^{\prime a}}{e |\bar{r}' \cdot \bar{u}|^2 / c^2} H(ae R \cdot u)$$

Ahora pasamos de nuevo a la notación tridimensional e introducimos los factores extra Θ_{ij} que toman en cuenta la transformación de Lorentz y que son esenciales para que el resultado se pueda reducir correctamente al caso de velocidad constante. Haciendo esto llegamos a:

$$V.56 a \quad W_a^i(\bar{x}, t) = \frac{(\Theta^{im} \Theta^{jl} \epsilon_{amj} [R^{\prime l} - |\bar{R}'| \rho^{\prime l}]) F(ae S |\bar{r}'| \gamma')}{e \gamma'^2 [\bar{R}(t') - \bar{R}(t') \cdot \bar{\beta}']^2}$$

V.56 b

$$W_a^0 = \beta'^i W_a^i$$

V.56 c

$$\phi^a(\bar{x}, t) = \frac{\Theta_{ab} (R^{\prime b} - |\bar{R}'| \rho^{\prime b}) H(ae S |\bar{r}'| \gamma')}{e \gamma'^2 [\bar{R}(t') - \bar{R}(t') \cdot \bar{\beta}']^2}$$

donde

$$F = (1 - K(aeS/R|y'|))$$

V.56 c

$$\theta_{im} = \delta_{im} + (\gamma - 1) \frac{\beta_i \beta_m}{\beta^2}$$

$$S = (1 - \hat{n} \cdot \bar{\beta})$$

$$\hat{n} = \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|}$$

t es el tiempo de observación, $R(t')$ es la distancia de la carga al punto de observación, $P(x)$ es la posición de observación y $r(t')$ es la trayectoria de la partícula. La posición y velocidad de la partícula están evaluadas al tiempo retardado t' .

Proponemos V.56 como la solución que representa un monopolo de 't Hooft-Polyakov en movimiento arbitrario.

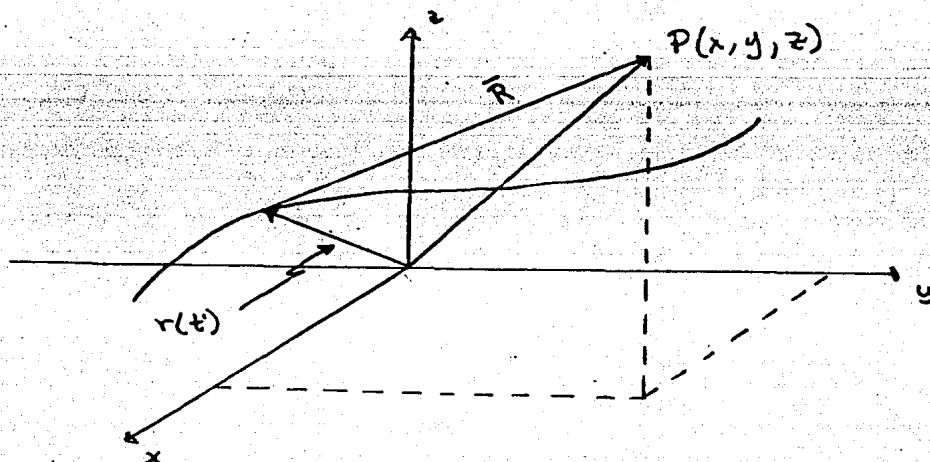


figura 5.1

Trayectoria del monopolo en el espacio físico

Podemos comprobar que las soluciones V.48 se reducen a los casos conocidos.

Cuando $v = 0$, $\theta_{im} = \delta_{im}$ y $R = x$, para un monopolo en el origen. Entonces V.48 se convierte en:

$$\begin{aligned} \text{V.57} \quad W_a^i &= \frac{\epsilon_{aie} x^e (1 - \kappa(aex))}{ex^2} \\ W_a^0 &= 0 \\ \phi^a &= \frac{x_a}{ex^2} H(aex) \end{aligned}$$

que es el ansatz de 't Hooft-Polyakov dado por IV.17.

En el caso en que la velocidad es constante podemos hacer que el eje z coincida con la trayectoria de la partícula (que es una línea recta), entonces:

$$\beta^i = \beta \delta_{i3} \quad \theta_{im} = \delta_{im} + (\gamma - 1) \delta_{i3} \delta_{m3}$$

que se puede ver que lleva a:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{1m} &= \delta_{1m} \\ \theta_{2m} &= \delta_{2m} \\ \theta_{3m} &= \delta_{3m} \end{aligned} \right\} \theta_{im} = \gamma^{(i)} \delta_{im} \quad \text{y} \quad \theta^{im} A_m = \gamma^{(i)} A^i$$

donde $\gamma^{(i)}$ está definida como en V.3. La solución V.48 se reduce a:

$$\text{V.58} \quad W_a^i = \frac{\gamma^{(i)} \gamma^{(e)} \epsilon_{aie} (R'^e - |R'| \rho^e) F(aeS|R|\gamma)}{e \gamma^2 (\bar{R}(t') - \bar{R}(t') \cdot \bar{\beta})^2}$$

$$W_a^0 = \beta^i W_a^i$$

$$\phi^a = \frac{y^{(a)} (R_a' - |R'| \beta_a) H(ac SIR' \gamma)}{e \gamma^2 (\bar{R}(t') - \bar{R}(t) \cdot \bar{\beta})^2}$$

Al tiempo $t=0$ el monopolo esta en el origen, como la velocidad sigue el eje z , al tiempo t la posición de la partícula es:

$$V.59 \quad z = vt \quad y = x = 0$$

Según la figura 5.3 podemos ver que:

$$V.60 \quad r' = \sqrt{(z - vt')^2 + y^2 + x^2}$$

despejando t'

$$V.61 \quad t' = \gamma^2 \left[- \left(\frac{zv}{c^2} - t \right) - \frac{1}{c} \sqrt{(z - vt)^2 + y^2 + x^2} \right]$$

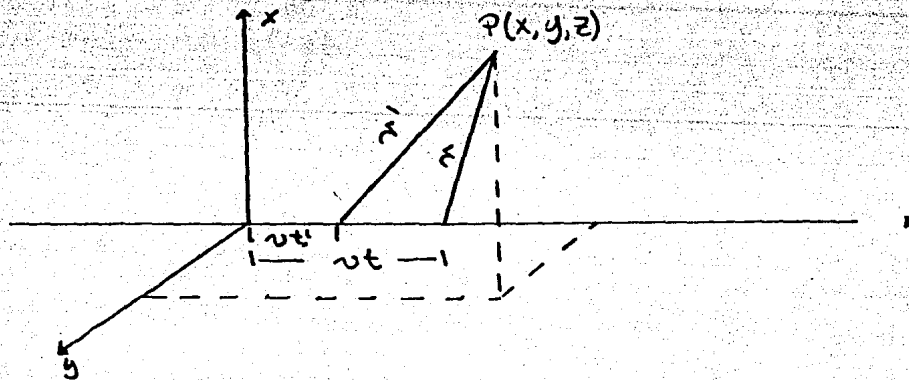


figura 5.3

Trayectoria del monopolo a velocidad constante

De la figura 5.3 y utilizando V.56 y V.61 tenemos que para el denominador de V.58

$$\begin{aligned} \gamma^2 (R' - \beta' \cdot \bar{R}')^2 &= \gamma^2 (c(t-t') - \beta(z-vt'))^2 \\ &= x^2 + y^2 + \gamma^2(z-vt)^2 = |\bar{\eta}|^2 \end{aligned}$$

donde η esta definido por V.5

Por otro lado, en el numerador tenemos que si $j=1,2$

$$R^j = x^j \Rightarrow \epsilon_{ail} R^l y^{(i)} \Big|_{t'} = \epsilon_{ail} x^j$$

$$\text{si } j=3 \quad (R^j - \beta^j R)_{t'} = x^3 - \beta R = z - vt' - c\beta(t-t')$$

$$= (z-vt) \Rightarrow \epsilon_{ail} R^l y^{(i)} \Big|_{t'} = (z-vt)\gamma = \eta^3$$

La solución V.56 se reduce a:

$$\text{V.62} \quad W_a^i = y^{(i)} \epsilon_{ail} \frac{n^l}{e\eta^2} (1 - K(ae\eta))$$

$$W_a^0 = \beta^i W_a^i$$

$$\phi^a = \frac{n^a}{e\eta^2} H(ae\eta)$$

que son las mismas que las encontradas en la sección 5.1 (V.4), es decir V.56 se reduce correctamente al caso de un monopolo con velocidad constante.

5.7 Campos eléctrico y magnético de un monopolo en movimiento arbitrario

Como vimos en la sección anterior la solución V.48 para un monopolo en movimiento arbitrario se reducen correctamente a los casos de un monopolo estático y uno con velocidad constante.

Podemos calcular ahora los campos eléctrico y magnético que produciría un monopolo en movimiento arbitrario.

Para hacer este cálculo supondremos que la velocidad del monopolo es pequeña comparada con la de la luz. En este caso podemos dejar de tomar en cuenta los términos de orden β^2 y mayores, por lo tanto

$$\theta_{im} \approx \delta_{im}$$

V.56 se reduce a

$$V.63 \quad W_a^i = \frac{\epsilon_{aij} (R'^j - |R'| \beta'^j)}{e^2 S^2 R'^2} F(acSR')$$

$$W_a^0 = \beta^i W_a^i$$

$$\phi^a = \frac{(R'_a - |R'| \beta'_a)}{e^2 S^2 R'^2} H(acSR')$$

Todos los términos del lado derecho están evaluados al tiempo retardado t' . Esta solución la podemos reescribir de la forma:

$$V.64 \quad W_a^j = \frac{\tilde{W}_a^j(y)}{S} - \epsilon_{ajl} \frac{\beta^l (1 - K(t))}{eS y}$$

$$\phi^a = \frac{\tilde{\phi}^a(y)}{S} - \beta_a \frac{H(\xi)}{eSy}$$

y

$$W_a^0 = v^i W_a^3$$

donde $y = SR^i$; $y^i = SR^{i1}$; $\xi = acy$

V.65

$$\tilde{\phi}_a(y) = y^a \frac{H(\xi)}{ey^2}$$

$$\tilde{W}_a^j = \epsilon_{ajl} \frac{y^l}{ey^2} (1 - K(\xi))$$

Como vemos estas soluciones se pueden separar en dos partes: una que es de la misma forma que la solución con velocidad constante multiplicada por un factor S^{-1} y la otra que es proporcional a la velocidad.

Para hacer los cálculos de E y B procedemos de la misma manera que en las secciones 5.2 y 5.3, usamos V.14, 15 y 19 y la definición de $G_{\mu\nu}^a$ (ec. IV.2).

Al hacer el cálculo de E_a^i llegamos a:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_a^i &= v^k \frac{\partial W_a^k}{\partial x_i} + W_a^3 c \beta^3 \frac{\partial t^i}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} W_a^i - \\ &\quad - e \epsilon_{abc} v^3 W_b^i W_c^3 \end{aligned}$$

que al usar las relaciones que se encuentran en el apéndice E se convierte en:

$$\mathcal{E}_a^i = v^k \frac{\partial \tilde{W}_a^k}{\partial y_i} + \beta^k R_k R^i \alpha \frac{\partial \tilde{W}_a^k}{\partial y_i} - \eta^i \beta^k \alpha \tilde{W}_a^k +$$

$$+ \varepsilon_{ahl} \dot{\beta}^l (1-K) \eta^i \rho^k - \tilde{W}_a^k \frac{\dot{\beta}^k \eta^i}{S^2} + \varepsilon_{ake} \beta^e \dot{\beta}^k \frac{\eta^i}{S} +$$

$$+ \frac{1}{S^2} \frac{\partial \tilde{W}_a^i}{\partial y_e} R_e a - \frac{1}{S^3} \tilde{W}_a^i a$$

donde $\alpha = (\eta \cdot \dot{\beta})$

Podemos ahora evaluar este resultado en el marco de referencia propio de la partícula, en el cual $\beta = 0$. Así, los resultados quedan únicamente en términos de la aceleración.

$$\text{V.66} \quad \mathcal{E}_a^i = - \tilde{W}_a^k \dot{\beta}^k \eta^i + a R_e \frac{\partial \tilde{W}_a^i}{\partial y_e} -$$

$$- \tilde{W}_a^i a - \varepsilon_{ail} (1-K) \frac{\dot{\beta}^l}{cy}$$

Definimos el tensor antisimétrico \tilde{G}_a^{ij} como

$$\tilde{G}_a^{ij} = \partial^i \tilde{W}_a^j - \partial^j \tilde{W}_a^i - e \varepsilon_{abc} \tilde{W}_b^i \tilde{W}_c^j$$

donde las derivadas se hacen respecto a las variables y .

Si usamos V.15 llegamos a que B_a^i es:

$$\text{V.67} \quad B_a^k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \left\{ G_a^{ij} + a (\tilde{W}_a^i \eta^j - \tilde{W}_a^j \eta^i) + \right.$$

$$+ \frac{R^l a}{c} \left(\frac{\partial \tilde{W}_a^i}{\partial y_l} \eta^j - \frac{\partial \tilde{W}_a^j}{\partial y_l} \eta^i \right) +$$

$$\left. + \frac{\dot{\beta} F}{e c} (\varepsilon_{ajl} \eta^i - \varepsilon_{ail} \eta^j) \right\}$$

El comportamiento de E_a^i y B_a^i en el vacío de Higgs, es decir,

cuando $\zeta \rightarrow \infty$, depende de como se comportan W_a^i y $\partial^j W_a^i$ cuando $\zeta \rightarrow \infty$: (recordando V.22)

$$V.68 \quad \tilde{W}_a^i \longrightarrow \epsilon_{aim} \frac{R^m}{eR^2} \quad \zeta \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial \tilde{W}_a^i}{\partial y_e} \longrightarrow -\epsilon_{aim} \frac{1}{R^2} (\delta_{em} - 2\eta^m \eta^e)$$

Al substituir V.64 en V.62 y 63 llegamos a:

$$V.69 \quad \mathcal{E}_a^i = (\eta \times \dot{\beta})_a \frac{\eta^i}{eR} - 2\epsilon_{aim} \frac{\eta^m \dot{\alpha}}{eR} + \epsilon_{aie} \frac{\dot{\beta}^e}{eR}$$

$$V.70 \quad \mathcal{B}_a^k = -\frac{\eta^a \eta^k}{eR^2} + \frac{1}{eR} \left\{ \alpha (2\eta^a \eta^k - \delta_a^k) - \eta^a \dot{\beta}^k \right\}$$

El primer término del lado derecho de V.70 corresponde al de un monopolo estático (ya que proviene de G_a^{ij} que es la forma del tensor antisimétrico en reposo) y no contiene términos de aceleración. Los demás términos de V.69 y V.70 corresponden a campos de radiación, ya que todos incluyen términos de aceleración.

Los campos magnético y eléctrico están dados por la proyección de V.69 y V.70 en la dirección de Φ . En este caso, como estamos en el marco propio de la partícula, tenemos que usar la forma de Φ en este marco. De V.64 podemos ver que Φ se reduce a:

$$V.71 \quad \zeta \rightarrow \infty \quad \phi^a(y) \rightarrow \frac{y^a}{y}$$

finalmente, si recordamos V.19:

$$V.72 \quad B^k = -\frac{1}{c} \frac{\dot{\hat{n}}^k}{R^2} - \frac{1}{cR} (\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\beta}))^k$$

$$V.73 \quad E^i = \frac{(\hat{n} \times \dot{\beta})^i}{cR}$$

Los campos de radiación en esta aproximación son:

$$V.74 \quad \bar{B}_{\text{rad}} = \frac{-1}{cR} (\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\beta}))$$

$$\bar{E}_{\text{rad}} = -\frac{(\hat{n} \times \dot{\beta})}{cR}$$

y además, podemos observar que, como era de esperarse:

$$V.75 \quad \bar{E}_{\text{rad}} = -(\hat{n} \times \bar{B}_{\text{rad}})$$

Es interesante notar que la relación V.75 solo se cumple para los campos eléctrico y magnético, es decir, después de proyectar E_a^i y B_a^i sobre la dirección $\hat{\phi}^a$ ya que de V.69 y V.70 tenemos

$$\bar{E}_a \neq -\hat{n} \times \bar{B}_a$$

Como vemos, en el vacío de Higgs, en la aproximación de baja velocidad, los campos de radiación E y B se reducen a los resultados esperados, ya que de acuerdo a la simetría de dualidad son iguales a los campos producidos por una carga eléctrica en la misma aproximación si se hace el cambio $E \rightarrow B$ y $B \rightarrow -E$.

El resultado anterior sugiere que nuestra elección del ansatz V.56 para describir un monopolo magnético en movimiento arbitrario es

correcta, ya que lejos de la posición de la partícula produce los campos Coulombianos y de radiación que debíamos esperar.

5.8 Tensor de energía-momento

La invariancia de cualquier Lagrangiano ante la transformación:

$$V.76 \quad x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$$

asegura la ley de conservación

$$V.77 \quad \partial^\mu J_{\mu\nu} = 0$$

donde $J^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento y está definido como

$$V.78 \quad J_{\mu\nu} = -L g_{\mu\nu} + \sum_r \frac{\delta L}{\delta \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial x^\mu} \right)} \frac{\partial \psi_r}{\partial x^\nu}$$

Al integrar V.73 en un volumen V llegamos a

$$\partial^\nu \int_V d^3x J_{0\nu} = - \int_V d^3x \partial^i J_{i\nu} = - \oint_S da^i J_{i\nu}$$

donde a es una superficie que cubre a V . De V.75 tenemos que

$$V.79 \quad \frac{d}{dt} \int_V d^3x J_{00} = - \oint_S da^i J_{i0}$$

Cuando $\nu = 0$ V.79 se convierte en:

$$V.80 \quad \frac{d}{dt} \int_V d^3x J_{00} = - \oint_S da^i J_{i0}$$

donde $J_{00} = h$ representa la densidad de energía del campo y J_{i0} es el vector de Poynting \vec{S} que representa el flujo de energía a través del campo. En el caso en que $\nu = j$ V.79 es:

$$V.81 \quad \frac{d}{dt} \int_V d^3x J_{0i} = - \oint_S da^i J_{ij}$$

donde J_{ij} es el flujo de momento lineal y $J_{0j} = P_j$ representa la densidad de momento lineal del campo. En el caso que $J_{\mu\nu}$ sea simétrico se cumplirá que

$$V.82 \quad \bar{P} = \bar{S}$$

La energía total del campo está dada por

$$V.83 \quad H = \int d^3x J_{00} = \int d^3x h$$

y el momento lineal total está dado por

$$V.84 \quad \bar{P}_i = \int P_i d^3x = \int d^3x J_{0i}$$

5.8 Energía y vector de Poynting

En nuestro caso, el Lagrangiano L es: (recordando IV.1)

$$V.85 \quad L = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} D^\mu \phi_a D_\mu \phi_a - V(\Phi)$$

De acuerdo con lo visto en la sección anterior, calculamos $J_{\mu\nu}$ usando

V.78 y llegamos a

$$V.86 \quad J_{\mu\nu} = -\mathcal{L} g_{\mu\nu} + (D_\mu \phi^a) \partial_\nu \phi^a - G_{\mu\rho}^a \partial_\nu W_\rho^a$$

donde $G_{\mu\nu}$ y $D_\mu \phi^a$ están dados por las expresiones IV.2 y IV.3. Al despejar de IV.5 a y b y substituir en V.86 tenemos que

$$J_{\mu\nu} = -\mathcal{L} g_{\mu\nu} + D_\mu \phi_a D_\nu \phi_a + (D_\mu \phi^a) e \varepsilon_{abc} W_\nu^b \phi_c - G_{\mu\rho}^a (G_{\nu a}^\rho + \partial^\rho W_\nu^a + e \varepsilon_{abc} W_\nu^b W_c^\rho)$$

$$V.87 \quad J_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \tilde{J}_{\mu\nu}$$

donde

$$V.88 a \quad \Theta_{\mu\nu} = -\mathcal{L} g_{\mu\nu} + D_\mu \phi_a D_\nu \phi_a - G_{\mu\rho}^c G_{\nu}^{a\rho}$$

$$V.88 b \quad \tilde{J}_{\mu\nu} = e \varepsilon_{abc} (D_\mu \phi^a) W_\nu^b \phi^c - G_{\mu\rho}^a (\partial^\rho W_\nu^a + e \varepsilon_{abc} W_\nu^b W_c^\rho)$$

De la ecuación de movimiento IV.5a, substituímos $\partial^\rho G_{\mu\rho}^a$ en V.88 b y llegamos a que

$$V.89 \quad \tilde{J}_{\mu\nu} = -\partial^\rho (G_{\mu\rho}^a W_\nu^a)$$

Podemos verificar que $\tilde{J}^{\mu\nu}$ se conserva localmente

$$\partial^\mu \tilde{J}_{\mu\nu} = -\partial^\mu \partial^\rho (G_{\mu\rho}^a W_\nu^a) = -\partial^\mu \partial^\rho (G_{\rho\mu}^a W_\nu^a) = -\partial^\mu \tilde{J}_{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \partial^\mu \tilde{J}_{\mu\nu} = -\partial^\mu \tilde{J}_{\nu\mu} = 0$$

Debido a que tanto $\tilde{J}^{\mu\nu}$ como $J^{\mu\nu}$ se conservan localmente podemos redefinir el tensor de energía-momento como

$$V.90 \quad J_{\mu\nu} \longrightarrow \theta_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} - \tilde{J}_{\mu\nu}$$

Finalmente, al substituir las expresiones V.86 y V.85 b en V.90 el tensor de energía-momento queda como

$$V.91 \quad \theta_{\mu\nu} = -\mathcal{L} g_{\mu\nu} + D_\mu \phi^a D_\nu \phi^a - G_{\mu\rho}^a G_{\nu}^{a\rho}$$

y tiene una forma simétrica e invariante de norma.

Al substituir la definición para los campos E_a^i y B_a^i así como \mathcal{L} en V.91 llegamos a la expresión para la densidad de energía (que como vemos es la misma que IV.18)

$$V.92 \quad \mathcal{h} = \frac{1}{2} \left\{ (E_a^i)^2 + (B_a^i)^2 + (D_0 \phi^a)^2 + (D_i \phi^a)^2 \right\} + V(\Phi)$$

y a la expresión para la densidad de momento lineal (o para el vector de Poynting) que es:

$$V.93 \quad P_i = \epsilon_{ijk} E_a^j B_a^k + D_0 \phi^a D_i \phi^a$$

5.10 Cálculo del vector de Poynting

La forma explícita del vector de Poynting en términos de las soluciones V.64 (i. e. para el caso de un monopolo con aceleración distinta de cero y a baja velocidad, etc.) se puede calcular usando las expresiones para S encontradas en 5.7 y 5.8. Para hacer este cálculo también necesitamos los resultados encontrados en 5.6 para E_a^i y B_a^i además de que tenemos que calcular las expresiones para $D^0\phi_a$ y $D^i\phi_a$.

Al substituir V.64 en IV.12 llegamos a la expresión para $D^0\phi_a$ que es:

$$V.94 \quad D^0\phi_a = -R_e \alpha \frac{\partial \tilde{\phi}_a(y)}{\partial y_e} + \tilde{\phi}_a(y) \alpha - \frac{H(\xi) \dot{\beta}^a}{ey}$$

Evaluado en el marco de referencia propio de la partícula.

Hacemos algo similar para $D^i\phi_a$ y llegamos a

$$V.95 \quad D^i\phi_a = \frac{\partial \tilde{\phi}_a}{\partial y_i} + \frac{\partial \tilde{\phi}_a}{\partial y_e} \frac{R_e \eta^i \alpha}{c} - \tilde{\phi}_a \frac{\eta^i \alpha}{c} + \\ + H(\xi) \frac{\dot{\beta}^a \eta^i}{eyc} - e \epsilon_{abc} \tilde{W}^b \tilde{\phi}_c$$

Si usamos estos resultados y las expresiones para $\tilde{\phi}_a$ y \tilde{W}_a^i llegamos a que asintóticamente

$$V.96 a \quad D^0\phi_a = \alpha (\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\beta}))^a$$

$$V.96 b \quad D^i\phi_a = -\frac{\alpha \eta^i}{c} (\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\beta}))^a$$

La multiplicación de las ecuaciones V.96 da la contribución de $D^0\phi_a D^i\phi_a$ al vector de Poynting:

$$V.97 \quad D^0\phi_a D^i\phi_a = -\frac{a^2\eta^i}{c} \left| (\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\rho})) \right|^2$$

Utilizando las expresiones calculadas para E_a^i y B_a^i podemos calcular $\epsilon_{ijk} E_a^j B_a^k$ (ecs V.69 y V.70):

$$V.98 \quad \epsilon_{ijk} E_a^j B_a^k = -\frac{1}{ce^2R^3} (\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\rho})) + \\ + \frac{1}{ce^2R^2} [2(\eta \cdot \dot{\rho})\dot{\rho}^i - 3\eta^i(\eta \cdot \dot{\rho})^2 - \eta^i\dot{\rho}^2]$$

El primer término de V.98 corresponde a la parte estática de B^k (tiene diferente denominador que el segundo término). El segundo término corresponde a la parte de radiación de B_a^k .

La expresión para el vector de Poynting cuando $\zeta \rightarrow \infty$, evaluado en el marco de referencia propio de la partícula es:

$$V.99 \quad S^i = -\frac{a^2\eta^i}{c} \left| (\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\rho})) \right|^2 - \frac{1}{ce^2R^3} (\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\rho})) + \\ + \frac{1}{ce^2R^2} (2\alpha\dot{\rho}^i - 3\eta^i\alpha^2 - \eta^i\dot{\rho}^2)$$

5.9 Radiación y estabilidad de un monopolo en movimiento arbitrario

Mediante el vector de Poynting se puede expresar la conservación de la energía de un sistema de la siguiente manera:

V.100

$$\frac{dH}{dt} = - \oint_S \hat{n} \cdot \bar{S} da$$

En nuestro caso, la contribución al vector de Poynting proveniente de E^a y B^a (ec. V.98) es similar a la de un electrón ya que asintóticamente va como $1/r^2$. Al integrar esta expresión sobre una superficie para obtener la energía radiada nos dará una constante.

Sin embargo, la contribución a la energía radiada proveniente del campo de Higgs (ec. V.97) tiende asintóticamente a una constante, la cual al ser integrada sobre una superficie que tiende a infinito nos dará un valor infinito.

Este resultado nos dice que la energía instantánea radiada (o la potencia radiada) del monopolos será infinita, debida a la contribución del bosón de Higgs.

En este caso, el sistema formado por un monopolos acelerado en un campo magnético sería inestable, ya que el monopolos radiaría una energía infinita instantáneamente.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

Es importante hacer un resumen de los aspectos mas relevantes de este trabajo, derivar de ellos algunas conclusiones y hacer algunas sugerencias.

El resumen de los aspectos mas importantes de la parte de revisión de la tesis es el siguiente:

i) La existencia de monopolos magnéticos va acompañada siempre de la cuantización de la carga eléctrica, que es un fenómeno observado en la naturaleza. La cuantización puede salir de pedir la existencia de monopolos magnéticos (como en el caso de Dirac), o bien, el imponer la cuantización de la carga eléctrica al utilizar un grupo semisimple, lleva a soluciones de monopolo magnético (como en el caso de 't Hooft-Polyakov).

ii) Es posible encontrar soluciones no triviales de energía finita a las ecuaciones de movimiento clásicas de ciertas teorías de norma con rompimiento espontáneo de la simetría. En una teoría de norma en la cual el grupo de simetría G se rompe espontáneamente a un subgrupo H (en este caso es $U(1)$ electromagnético) se obtienen soluciones de solitón

con campos de largo alcance. En este caso necesariamente aparecen soluciones que representan monopolos magnéticos.

iii) Algunos resultados de teoría de Homotopia nos dicen cuando esperar soluciones de monopolo magnético en una teoría de campo y cuando no. Además, mediante la teoría de Homotopía se estudian las características topológicas de los monopolos (p. ej., en el modelo de 't Hooft-Polyakov la carga se conserva topológicamente).

iv) Entre las principales diferencias entre el monopolo de 't Hooft-Polyakov y el de Dirac estan:

El monopolo de Dirac es puntual y tiene una línea de singularidades (la cuerda), mientras que el de 't Hooft-Polyakov tiene una estructura suave y un tamaño definido. La masa del monopolo de Dirac no se puede calcular, y la del monopolo de 't Hooft-Polyakov es del orden del rompimiento espontáneo de la simetría. En el monopolo de 't Hooft-Polyakov la cuantización de la carga surge de argumentos topológicos.

v) Es importante estudiar la estabilidad y radiación de monopolos no abelianos ya que esto puede llevar a una determinación más precisa del límite de Parker (ver Introducción).

De los resultados de esta tesis podemos sacar las siguientes conclusiones:

i) Es posible generalizar el ansatz de 't Hooft-Polyakov que representa un monopolo estático, a una solución que representa a un monopolo en

movimiento arbitrario.

La solución que encontramos es covariante y se reduce correctamente a los casos en que la velocidad del monopolo es constante, y en particular al caso en que la velocidad es cero. Además, lejos del monopolo esta solución da los campos Coulombianos y de radiación que se esperan, ya que son simétricos a los de una carga eléctrica en la misma aproximación al hacer la transformación de dualidad $E \rightarrow B$ y $B \rightarrow -E$.

ii) En el caso de la generalización del ansatz a velocidad constante fue necesario derivar un teorema equivalente al del Virial para demostrar que la energía del monopolo en movimiento es mayor que la energía en reposo por un factor γ . Este resultado es importante, ya que siempre que se hace una transformación de Lorentz se espera que la energía, y por lo tanto la masa, de la partícula aumenten, como en efecto resultó en este caso.

iii) La solución que encontramos para un monopolo en movimiento arbitrario nos lleva a que el sistema formado por un monopolo acelerado en un campo magnético es inestable. Esto se debe a que la contribución al flujo instantáneo de energía proveniente del campo de Higgs es infinita. La contribución a la energía radiada debida a los campos eléctrico y magnético no-abelianos da un resultado consistente con la simetría esperada, y es un valor constante.

De acuerdo con las conclusiones obtenidas hacemos las siguientes sugerencias para la continuación del problema:

i) Para un monopolo físico acelerado en un campo magnético, debemos agregar al Lagrangiano el término responsable de la aceleración del monopolo, -es decir, se deben generalizar el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para que incluyan el campo debido al cual el monopolo es acelerado. Hecho esto se debe ver si nuestro ansatz para un monopolo en movimiento arbitrario es solución del problema.

ii) Finalmente, habría que ampliar el resultado al tratamiento cuántico. Los tratamientos clásico y cuántico de un problema no son iguales, y muchas veces el tratamiento clásico no resulta adecuado para describir correctamente la radiación de una partícula. En este caso podría suceder que los resultados obtenidos para la radiación del monopolo clásico fueran diferentes al ampliar al tratamiento cuántico.

APENDICE A

El tensor electromagnético está definido como

$$A.1 \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

donde $F_{i0} = -E_i$ $F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k$

Las ecuaciones de Maxwell en forma covariante son:

$$A.2 \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

J^μ y el tensor de campo dual $\tilde{F}_{\mu\nu}$ están definidos como:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad J^\mu = (\rho, \vec{j})$$

La forma explícita de los tensores es:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si partimos de A.2 podemos llegar a las formas usuales de las ecuaciones de Maxwell:

De A.2 a, cuando $\nu = 0$

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = -J^{\nu} = -\rho = \partial^0 F^{00} + \partial^i F^{i0}$$

$$\partial^i (-E_i) = -\rho$$

de donde vemos que

$$(\nabla \cdot \bar{E}) = \rho$$

Cuando $\nu = j$:

$$\partial_{\mu} F^{\mu j} = -J^j \Rightarrow \partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} = -J^j$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_j + \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} B_k = J^j$$

y llegamos a:

$$\nabla \times \bar{B} - \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \bar{J}$$

Hacemos algo similar con A.2 b. Cuando $\nu = 0$:

$$\partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_0 \tilde{F}^{00} + \partial_i \tilde{F}^{i0} = \partial_i (-B^i) = 0$$

y esta ecuación es:

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

Cuando $\nu = j$:

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \partial^0 \tilde{F}^{0i} + \partial_i \tilde{F}^{ij} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_i} = 0$$

que es la ecuación de Maxwell:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \nabla \times \bar{E} = 0$$

A.2 b es una identidad, esto se puede demostrar de la siguiente manera:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

substituyendo A.1

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu \partial_\rho A_\sigma - \partial_\mu \partial_\sigma A_\rho)$$

$$\text{pero } \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\sigma A_\rho = -\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu \partial_\rho A_\sigma - \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma)) = 0$$

Las ecuaciones de movimiento para el monopolo de Dirac se pueden obtener aplicando el principio variacional a las acciones S_1 , S_2 y S_3 (ecs. II.13, II.15 y II.16). Al hacerlo llegamos a que

$$S_1 = \sum_{qq} m \int \left(\frac{dz_\mu}{ds} \right) \left(\frac{dz^\mu}{ds} \right) ds$$

ya que

$$\left(\frac{dz_\mu}{ds} \right)^2 = c^2 = 1$$

$$\delta S_1 = \sum_{qq} 2m \int \delta \left(\frac{dz_\mu}{ds} \right) \left(\frac{dz^\mu}{ds} \right) ds = \sum_{qq} 2m \int \frac{d}{ds} \delta z_\mu \frac{dz^\mu}{ds} ds$$

Integrando por partes llegamos a que δS_1 es:

$$\delta S_1 = - \int \delta z_\mu \frac{d^2 z^\mu}{ds^2} ds$$

Sabemos que:

$$S_2 = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x$$

$$\delta S_2 = -\frac{1}{2} \int \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x$$

y δS_2 es:

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu + 4\pi \frac{c}{q} \delta (G^+)_{\mu\nu}$$

$$\delta S_2 = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - \pi \int \frac{c}{q} \delta (G^+)_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Para S_3 :

$$S_3 = \frac{c}{q} \int A^\mu(z) \frac{dz_\mu}{ds} ds$$

$$\delta S_3 = \frac{c}{q} \int \left(\delta A^\mu(z) \frac{dz_\mu}{ds} ds + A^\mu(z) d \frac{\delta z_\mu}{ds} ds \right)$$

la segunda integral se hace por partes

$$\delta S_3 = \frac{c}{q} \int \left[\delta A^\mu(z) \frac{dz_\mu}{ds} ds + \frac{\partial A_\mu}{\partial z^\nu} \delta z^\nu dz^\mu - \frac{\partial A_\mu}{\partial z^\nu} dz^\nu dz^\mu \right]$$

$$\Rightarrow = \frac{c}{q} \int \left(\delta A^\mu \frac{dz_\mu}{ds} + (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) \frac{dz^\mu}{ds} \delta z^\nu \right) ds$$

Juntando las partes que corresponden a cargas eléctricas llegamos a:

$$\delta S = \int \left[-m \left(\delta z_\mu \frac{d^2 z^\mu}{ds^2} ds + \frac{1}{4\pi} \right) \partial^\mu F_{\mu\nu} \delta A^\nu d^4x + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int q \delta A_\mu \frac{dz^\mu}{ds} ds + (F_{\mu\nu}) \frac{dz^\nu}{ds} \delta z^\mu ds \right] = 0$$

de donde vemos que las ecuaciones de movimiento son:

$$A.3 \quad -m q \frac{d^2 z_\nu}{ds^2} + F_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{ds} q = 0$$

$$A.4 \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} + q \frac{dz^\mu}{ds} = 0$$

Para la parte de cargas magnéticas tenemos que

$$A.5 \quad \frac{1}{2} \int \frac{\delta G^{\mu\nu}}{q} F_{\mu\nu} d^4x - \int m \left(dz_\mu \frac{d^2 z^\mu}{ds} ds \right) = 0$$

Dirac encontró que $G_{\mu\nu}(x)$ cumple con

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = q \int \left(\frac{dz_\mu}{ds} \right) \delta^4(x-z) ds$$

cuya solución es

$$G_{\mu\nu}(x) = q \iint \left(\frac{dy_\mu}{dz_0} \frac{dy_\nu}{dz_1} - \frac{dy_\mu}{dz_1} \frac{dy_\nu}{dz_0} \right) \delta^4(x-z) dz_0 dz_1$$

Al substituir esto en A.5 se llega a que (Dirac, 1948)

$$\int \frac{q}{q} \int \tilde{F}_{\mu\nu}(z) \delta z^\mu \frac{dz^\nu}{ds} ds -$$

$$-\frac{\Sigma}{g} g \int \left(\frac{\partial \tilde{F}_{\mu\nu}}{\partial y^\rho} + \frac{\partial \tilde{F}_{\rho\mu}}{\partial y^\nu} + \frac{\partial \tilde{F}_{\rho\nu}}{\partial y^\mu} \right) \frac{\partial y^\rho}{\partial z^0} \frac{\partial y^\nu}{\partial z^1} \delta y_\mu dz_0 dz_1$$

En el caso en que se está sobre el polo, igualando a cero la primera parte de la integral anterior mas la suma sobre g de δS_1 , llegamos a:

$$A.6 \quad m(d^2 z_\mu / ds^2) = g (dz^\nu / ds) \tilde{F}_{\mu\nu}$$

Igualando a cero el coeficiente de la variación δy_μ sobre la cuerda llegamos a la última ecuación de movimiento:

$$A.7 \quad \frac{\partial \tilde{F}_{\mu\nu}}{\partial y^\rho} + \frac{\partial \tilde{F}_{\nu\rho}}{\partial y^\mu} + \frac{\partial \tilde{F}_{\rho\mu}}{\partial y^\nu} = 0$$

A.4 - 7 son las ecuaciones de movimiento para un monopolo de Dirac.

APENDICE B

Para hacer los cálculos del capítulo V se necesitó derivar ciertas relaciones. Los resultados se encuentran a continuación:

Si tenemos que

$$\bar{R} = \bar{x} - \bar{\pi}(t)$$

$$R = |R|$$

$$\hat{\eta} = \frac{\bar{R}}{|R|}$$

$$t' = t - \frac{1}{c} |\bar{x} - \bar{\pi}(t')|$$

$$K = (1 - \hat{\eta} \cdot \dot{\bar{\pi}})$$

entonces,

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = -\frac{c\dot{\bar{\pi}}}{K}$$

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{c\dot{\bar{\pi}} \cdot \hat{\eta}}{K}$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} = \frac{c}{KR} \hat{\eta} \times (\hat{\eta} \times \dot{\bar{\pi}})$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = \frac{\partial (K\bar{R})}{\partial t} = -c\dot{\bar{\pi}} + \frac{c\hat{\eta}}{K} [(\dot{\bar{\pi}} \times \hat{\eta})^2 - \frac{\bar{R} \cdot \ddot{\bar{\pi}}}{c}]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial (KR)}{\partial t} = \frac{c}{K} [\dot{\bar{\pi}} \cdot (\dot{\bar{\pi}} - \hat{\eta}) - \frac{\bar{R} \cdot \ddot{\bar{\pi}}}{c}]$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{c}{KR} [(\dot{\bar{\pi}} \times \hat{\eta})^2 - \frac{\bar{R} \cdot \ddot{\bar{\pi}}}{c}]$$

$$\frac{\partial \bar{R}^i}{\partial x^j} = (\delta_j^i + \frac{\beta^i \eta_j}{K})$$

$$\frac{\partial R}{\partial x^i} = \frac{\hat{\eta}_i}{K}$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}_i}{\partial x^i} = \frac{1}{KR} [(1 - \bar{\rho} \cdot \hat{\eta}) \delta_j^i + \rho^i \eta_j - \eta^i \eta_j]$$

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^i} = \frac{\partial (KR)^i}{\partial x^i} = K \delta_j^i + (\rho^i \eta_j - \eta^i \rho_j) + \frac{\eta^i \eta_j}{K} \left\{ \bar{\rho} \cdot (\hat{\eta} - \bar{\rho}) + \frac{\bar{R} \cdot \dot{\bar{A}}}{c} \right\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x^i} = \frac{\partial (KR)}{\partial x^i} = -\rho_j + \frac{\eta_j}{K} (1 - \rho^2 + \frac{\bar{R} \cdot \dot{\bar{A}}}{c})$$

$$\frac{\partial K}{\partial x^i} = -\frac{\rho_j}{R} + \frac{\hat{\eta}_j}{KR} \left\{ \bar{\rho} \cdot (\hat{\eta} - \bar{\rho}) + \frac{\bar{R} \cdot \dot{\bar{A}}}{c} \right\}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x_i} = -\frac{\eta^i(t')}{Kc}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{K(t')}$$

APENDICE C

Si trabajamos en unidades en las cuales $\hbar = c = 1$, las dimensiones de energía masa y momento son iguales:

$$[E] = [M] = [P]$$

y las dimensiones de longitud son iguales a las de tiempo:

$$[L] = [T]$$

Las dimensiones de masa son:

$$[M] = [L^{-1}]$$

$$[E] = [L^{-1}]$$

En este sistema de unidades las dimensiones del Lagrangiano I.1 son:

$$[L] = \frac{[\phi]^2}{[L]^2} = \frac{[E]}{[L]^3} = \text{seg}^{-4}$$

de aquí

$$[\phi]^2 = [L]^{-2}$$

$$[\phi] = [L]^{-1}$$

El término cinético del Lagrangiano I.15 es

$$C.1 \quad L_{YM} = \frac{-1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} = \frac{-1}{2g^2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

donde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - e \epsilon_{abc} A^{\mu b} A^{\nu c}$.

y $F^{\mu\nu} = T^a F^{a\mu\nu}$ $A^\nu = T^a A^{a\nu}$

Al aplicar el principio variacional a el Lagrangiano C.1 llegamos a las ecuaciones de movimiento correspondientes:

$$\delta S = 0 = \delta \int d^4x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 2 \int d^4x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu})$$

$$= 4 \int d^4x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu}) \quad R^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + i A^\mu A^\nu$$

$$= 4 \operatorname{tr} \int d^4x [\partial^\mu (\delta A^\nu) + i (\delta A^\mu) A^\nu + i A^\mu \delta A^\nu]$$

$$F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu = \partial_\mu (F^{\mu\nu} \delta A_\nu) \Big|_0 - (\partial^\mu F_{\mu\nu}) \delta A^\nu$$

$$= 4 \operatorname{tr} \int d^4x [-(\partial^\mu F_{\mu\nu}) \delta A^\nu + i F_{\mu\nu} \delta A^\mu A^\nu + i F_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu]$$

$$= 4 \operatorname{tr} \int d^4x \{ [-\partial^\mu F_{\mu\nu} + i F_{\mu\nu} A^\mu - i A^\mu F_{\mu\nu}] \delta A^\nu \}$$

y las ecuaciones de movimiento son:

C.2 $\partial^\mu F_{\mu\nu} + i [A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0$

6 $\partial^\mu F_{\mu\nu}^a - f^{abc} A^{\mu b} F_{\mu\nu}^c = 0$

Las ecuaciones de movimiento C.2 definen una cantidad conservada de la siguiente forma:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a = J_\nu^a \Rightarrow \partial^\nu J_\nu^a = \partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu}^a$$

$$\partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu}^a = \partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu}^a = \partial^\nu \partial^\mu F_{\nu\mu}^a = -\partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu}^a = 0$$

De acuerdo al apéndice A, el tensor de energía-momento es en este caso:

$$\theta^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} + \frac{\delta L}{\delta(\partial^\mu A^{\sigma a})} (\partial^\nu A^{\sigma a})$$

$$\frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu A_\sigma^a)} = -\frac{1}{2} F_{\lambda\eta}^b \frac{\delta}{\delta(\partial^\mu A^{\sigma a})} [\partial^\lambda A_\eta^b - \partial^\eta A_\lambda^b - e \epsilon_{abcd} A_c^\lambda A_d^\eta] = -F_{\mu\nu}^a$$

$$\Rightarrow \theta^{\mu\nu} = \left[g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4g^2} F_{\sigma\rho}^a F^{\sigma\rho a} \right) - F_{\mu\sigma}^a \partial^\nu A^{\sigma a} \right]$$

En el caso de campos no-abelianos la carga debe ser única, ya que las reglas de conmutación no se cumplen. La demostración de esto es la siguiente:

$$C.5 \quad \delta W^\mu(x) = \partial^\mu \bar{\theta}_x + g \bar{\theta}_x \times \bar{W}^\mu(x)$$

$$\delta \phi = -ig' \theta^a t^a \phi$$

$$D^\mu \phi = \partial^\mu \phi + ig' t^a W^{\mu a} \phi$$

$$\Rightarrow \delta(D^\mu \phi) = -ig' \frac{1}{2} \bar{c} \cdot \bar{\theta} (\partial^\mu \phi + ig' \frac{1}{2} \bar{c} \cdot \bar{W}) \phi +$$

$$+ \frac{1}{2} ig' \bar{c} \cdot (\partial W^\mu - \delta^\mu \theta) \phi + g'^2 \frac{1}{4} [(\bar{c} \cdot W^\mu), (\bar{c} \cdot \theta)] \phi$$

Para que haya invariancia:

$$\delta(D^\mu \phi(x)) = -ig \frac{1}{2} \bar{z} \cdot \bar{\theta} D^\mu$$

$$C.6 \quad \frac{i}{2} g' z \cdot (\delta W^\mu - \delta^\mu \theta) \phi + g'^2 \frac{1}{4} [(\bar{z} \cdot \bar{W}^\mu), (\bar{z} \cdot \bar{\theta})] \phi = 0$$

Substituyendo C.5 en C.6 llegamos a:

$$= \frac{1}{2} ig'g \bar{z} \cdot (\bar{\theta}_\nu \times \bar{W}^\mu(x)) \phi + g'^2 \frac{1}{4} [(\bar{z} \cdot \bar{W}^\mu), (\bar{z} \cdot \bar{\theta})] \phi = 0$$

pero

$$[\bar{z} \cdot \bar{W}^\mu, \bar{z} \cdot \bar{\theta}] = 2i \bar{z} \cdot (\bar{W}^\mu \times \bar{\theta})$$

substituyendo esto

$$\frac{1}{2} ig'g \bar{z} \cdot (\bar{\theta}_\nu \times \bar{W}^\mu(x)) + g'^2 \frac{1}{2} i \bar{z} \cdot (\bar{W}^\mu \times \bar{\theta}) = 0$$

$$\frac{1}{2} ig'g \bar{z} \cdot (\bar{\theta}_\nu \times \bar{W}^\mu) - g'^2 \frac{1}{2} \bar{z} \cdot (\bar{\theta}_\nu \times \bar{W}^\mu) = 0$$

Esta relación es válida únicamente si $g' = g$, de lo que se ve que la carga es única.

APENDICE D

En la teoría de 't Hooft-Polyakov el Lagrangiano es:

$$D.1 \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\omega}^{\mu\nu} G_{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2} D^{\mu} \Phi \cdot D_{\mu} \Phi - V(\Phi)$$

donde
$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - a^2)^2$$

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange podemos encontrar las ecuaciones de movimiento correspondientes:

$$D.2 \quad \sum_r \frac{\partial_{\mu} \delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_{\mu} \psi_r)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_r} = 0$$

Para W_{μ}^a :

$$\frac{\partial_{\mu} \delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_{\mu} W_{\nu}^a)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta W_{\nu}^a} = 0$$

D.3

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta W_{\nu}^a} = -\frac{1}{2} \frac{\delta G_e^{\sigma\rho}}{\delta W_{\nu}^a} G_{e\sigma\rho} + \frac{\delta D^{\sigma} \phi_e}{\delta W_{\nu}^a} D_{\sigma} \phi_e$$

D.4

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial^{\mu} W_{\nu}^a)} = -\frac{1}{2} \frac{\delta G_e}{\delta (\partial^{\mu} W_{\nu}^a)} G_{e\sigma\rho} + \frac{\delta D^{\sigma} \phi_e}{\delta (\partial^{\mu} W_{\nu}^a)} D_{\sigma} \phi_e$$

al calcular:

$$\frac{\delta G_e^{\sigma\rho}}{\delta W_{\nu}^a} = -e \epsilon_{efg} (W_b^{\sigma} \delta_{\nu\rho} \delta_{ga} + W_g^{\rho} \delta_{\nu\sigma} \delta_{pa})$$

$$\frac{\delta G_e^{\sigma\rho}}{\delta W_{\nu}^a} G_{e\sigma\rho} = 2e \epsilon_{abc} W_b^{\mu} G_{c\mu\nu}$$

$$\frac{\delta D^\sigma \phi_c}{\delta W_\nu^\sigma} = -e \epsilon_{cfa} \phi_a \delta_{\nu\sigma} \delta_b$$

$$\frac{\delta D^\sigma \phi_c}{\delta W_\nu^\sigma} D_\sigma \phi_c = e \epsilon_{abc} \phi_c D_\nu \phi_b$$

$$\frac{\delta G_{\mu\nu}^{\rho\sigma}}{\delta (\partial^\mu W_\alpha^\nu)} = \delta_{\sigma\mu} \delta_{\rho\nu} \delta_{\alpha\epsilon} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\sigma\nu} \delta_{\alpha\epsilon}$$

$$\frac{\delta D^\sigma \phi_c}{\delta (\partial_\mu W_\alpha^\nu)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^\mu \delta \mathcal{L}}{\delta (\partial^\mu W_\alpha^\nu)} = \partial^\mu [-G_{\alpha\mu\nu}]$$

Substituyendo estos resultados en D.2 llegamos a que la ecuación de movimiento es:

$$-\partial^\mu G_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = -e \epsilon_{abc} W_b^\mu G_{\mu\nu} + e \epsilon_{abc} \phi_c D_\nu \phi_b$$

$$D.4 \quad (D_\mu G^{\mu\nu})_a = -e \epsilon_{abc} \phi_c (D^\nu \phi)_b$$

Para el campo ϕ_a hacemos lo mismo:

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a} (D^\sigma \phi_c) = \frac{\delta}{\delta \phi_a} [\partial^\sigma \phi_c - e \epsilon_{cmn} W_m^\sigma \phi^n] = -e \epsilon_{cmn} W_m^\sigma \phi_n$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a} (\phi^2 - a^2)^2 = 4(\phi^2 - a^2) \phi^a$$

al hacer los cálculos

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_a} = -\epsilon_{sma} e W_m^\sigma D_\sigma \phi_c - \lambda \phi_c (\phi^2 - a^2)$$

$$\frac{\delta(D^\sigma \phi_a)}{\delta(\partial_\mu \phi^a)} D_\sigma \phi_a = \delta_{\sigma\mu} \delta_{la} D^\sigma \phi_a = D^\mu \phi_a$$

$$\frac{\partial_\mu \delta L}{\delta(\partial_\mu \phi_a)} = \partial_\mu D^\mu \phi_a$$

$$\Rightarrow e \xi_{ama} W_m^\sigma D_\sigma \phi_a + \lambda \phi_a (\phi^2 - a^2) + \partial_\mu D^\mu \phi_a = 0$$

y la segunda ecuación de movimiento es:

$$D.7 \quad (D^\mu D_\mu \phi)_a = -\lambda \phi_a (\phi^2 - a^2)$$

Al hacer la transformación

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \epsilon_\mu$$

al Lagrangiano D.1 y aplicar el principio variacional, llegamos a una corriente conservada $J_{\mu\nu}$ (Teorema de Noether):

$$L(x_\mu + \epsilon_\mu) = L(x_\mu) + \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \epsilon_\mu + O^2$$

$$\delta L = \epsilon_\mu \frac{\delta L}{\delta x_\mu}$$

$$\Rightarrow \delta L = \sum_{r=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_r} \delta \psi_r + \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi_r / \partial x_\mu)} \delta (\partial \psi_r / \partial x_\mu) \right]$$

$$\delta (\partial \psi_r / \partial x_\mu) = \epsilon_\nu (\partial \psi_r / \partial x_\nu)$$

$$\delta (\psi_r) = \epsilon_\nu \partial \psi_r / \partial x_\nu$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange D.2 llegamos a que:

$$\epsilon_{\mu} \frac{\delta L}{\delta x^{\mu}} = \sum_{\nu} \left[\partial^{\nu} \left(\frac{\delta L}{\delta (\partial \psi_{\nu} / \partial x^{\mu})} \epsilon_{\nu} \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial x^{\nu}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \partial^{\nu} \left[g_{\mu\nu} \epsilon^{\nu} L - \sum_{\nu} \left[\frac{\delta L}{\delta (\partial \psi_{\nu} / \partial x^{\mu})} \epsilon^{\nu} \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial x^{\nu}} \right] \right]$$

y la corriente conservada es:

$$D.8 \quad J_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} L - \sum_{\nu} \left(\frac{\delta L}{\delta (\partial \psi_{\nu} / \partial x^{\mu})} \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial x^{\nu}} \right)$$

La densidad de energía está definida como la componente J_{00} del tensor de energía-momento $J_{\mu\nu}$:

$$D.9 \quad J_{00} = h = - \sum_{\nu} \left(\frac{\delta L}{\delta (\partial \psi_{\nu} / \partial t)} \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial t} \right)$$

redefiniendo este tensor según V.91 y substituyendo las expresiones A.1, llegamos a que la densidad de energía en el monopolo de 't H-P está dada por:

$$D.10 \quad h = \frac{1}{2} \left\{ (B_a^i)^2 + (E_a^i)^2 + (D^0 \phi_a)^2 + (D^i \phi_a)^2 \right\} + V(\Phi)$$

Al substituir el ansatz IV.17 llegamos a que

$$G_a^{ij} = \left[- \frac{\partial K}{\partial f} \frac{a r^m}{r^3} - \frac{2 T^m}{e r^4} (1-K) \right] \left\{ \epsilon_{ajm} r_i - \epsilon_{aim} r_j \right\} -$$

$$- 2 \epsilon_{ajc} \frac{(1-K)}{e r^2}$$

$$B_a^t = \left[\frac{\partial K}{\partial \xi} \frac{a r^t r_a}{r^3} + \frac{\partial K}{\partial \xi} \frac{a}{r} \delta_{ta} + 2(L-K) \frac{r^t r_a}{e^2 r^4} + (L-K)^2 \frac{r^t r_a}{e^2 r^4} \right]$$

$$\Rightarrow (B_a^t)^2 = \left[2 \left(\frac{\partial K}{\partial \xi} \right)^2 \frac{a^2}{r^2} + \frac{(K^2 - 1)^2}{e^2 r^4} \right]$$

Haciendo lo mismo para $D^i \phi_a$:

$$D^i \phi_a = -a \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{r^i r_a}{r^3} - \frac{1}{e} H \frac{\delta_{ia}}{r^2} + 2H \frac{r^i r_a}{e r^4} + (L-K) \frac{H \delta_{ia}}{e r^2} - (L-K) H \frac{r^i r_a}{e r^4}$$

$$\Rightarrow (D^i \phi_a)^2 = a^2 \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)^2 \frac{1}{r^2} - \frac{2a}{e} \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{H}{r^3} + \frac{H}{e^2 r^2} (1 + 2K^2)$$

Al substituir en $V(\phi)$ tenemos que:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4r^2} (H^2 - a^2 e^2 r^2)^2$$

En este caso las expresiones para E_a y $D^0 \phi_a$ se hacen cero ya que $W_a^0 = 0$ y los campos no dependen del tiempo. Substituyendo estos resultados en la ecuación de la energía llegamos a que:

$$E = \int d^3 \vec{r} \left[\left(\frac{\partial K}{\partial \xi} \right)^2 \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{(K^2 - 1)^2}{e^2 r^4} + \frac{a^2}{2r^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{a}{e} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right) \frac{H}{r^3} + \frac{H^2}{2e r^2} (1 + 2K^2) + \frac{\lambda}{4r^2 e^2} (H^2 - \xi^2) \right]$$

Al hacer el cambio de variable $\xi = a e r$ e integrar sobre los ángulos

tenemos que:

$$D.11 \quad E = \frac{a^4 \pi}{e} \int d^2 \xi \left\{ \frac{1}{\xi^2} \left\{ \left(\frac{\partial K}{\partial \xi} \right)^2 \frac{1}{\xi^2} + \frac{(K^2 - 1)^2}{2 \xi^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)^2 + H \right]^2 + H^2 K^2 + \frac{a}{4e^2} (H^2 - \xi^2) \right\} \right.$$

que es la expresión para la energía del monopolo de 't H-P en términos de las funciones H y K.

BIBLIOGRAFIA

- Aitchison I., *An Informal Introduction to Gauge Field Theories*, 1984, Cambridge University Press, Gran Bretaña, pp1-72
- Bais F. A., Primack J. R., 1976, *Phys. Rev. D*, 13, 819-29
- Bjorken J., Sidney D., *Relativistic Quantum Mechanics*, 1964, Mc Graw Hill Book Co., USA, pp 183-192
- Bjorken J., Sidney D., *Relativistic Quantum Fields*, 1965, Mc Graw-Hill Book Co, USA, pp 1-80
- Bogomolny E. B., 1976, *Sov. J. Nucl. Phys.*, 24 449-54
- Boulware D. G., Brown L. S., Cahn R. N., Ellis S. D., Lee C., 1976, *Phys. Rev. D*, 15, 1175-7
- Cabrera B., 1982, *Phys. Rev. Lett.*, 18, 1378
- Caplin A. D., Hardiman M., Koratzinos M., Schouten J. C., 1986, *Nature*, 321, 402
- Christ N. H., Lee T. D., 1975, *Phys. Rev. D*, 12, 1606
- Coleman S., Parke S., Neveu A, Sommerfield C. M., 1977, *Phys. Rev. D*, 15, 554
- Corrigan E., Olive D., Fairlie D. B., Nuyts J., 1976, *Nucl. Phys. B*, 106, 475-92
- Dirac P. A. M., 1931, *Proc. R. Soc. A*, 133, 60-72
- Dirac P. A. M., 1948, *Phys. Rev.*, 74, 817-30
- Feynman R., *The Feynman Lectures on Physics. Electromagnetismo y*

y *Materia*. Vol II., 1972, Fondo Educativo Interamericano, USA, pp 21-1, 21-17

Georgi H., Glashow S. L., 1972, *Phys. Rev. D*, 6, 2977-82

Goddard P., Olive D., 1978, *Rep. Prog. Phys*, 41, 1357

Goldstone J., Jackiw R., 1975, *Phys. Rev D*, 11, 1480

't Hooft G., 1974, *Nucl. Phys. B*; 79, 276-84

't Hooft G., 1976, *Nucl. Phys. B*, 105, 538

Jackiw R., Jacobs L., Rebbi C., 1979, *Phys Rev. D*, 20, 474

Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, 1975, John Wiley and Sons Inc., USA, pp 654-665

Julia B., Zee A., 1975, *Phys. Rev. D*, 11, 2227-32

Landau L., Lifshitz E., *The Classical Theory of Fields*, 1951, Addison Wesley Press Inc, USA, pp 41-91, 171-180

Marciano W., Pagels H., Febrero 1978, *Phys. Rep. Quantum Chromodynamics*, Vol 36C, No. 3, North Holland Publishing Co., Amsterdam, pp 230-255

Parker E. n., 1970, *Astrophys. J.*, 160, 383

Poincare H., 1896, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 123, 530

Polyakov A. M., 1974, *JETP Lett.*, 20, 194-5

Prasad M. K., Sommerfield C. M., 1975, *Phys. Rev. Lett.*, 35, 760-2

Preskill J., 1984, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 34, 461-530

Ramond P., *Field Theory. A Modern Primer*, 1981, The Benjamin/Cummings Publishing Co., USA, pp 244-279

Sikivie P., Weiss N., 1978, *Phys. Rev. D*, 18, 3809

Sikivie P., Weiss N., 1979, *Phys. Rev. D*, 20, 487

Tomboulis E., 1975, *Phys. Rev. D.*, 12, 1678

Turner M. S., Parker E. N., Bogdan T. J., 1982, *Phys. Rev. D*,

26, 1296

Wu T. T., Yang C. N., 1964, *Phys. Rev. Lett.*, 13, 380

Wu T. T., Yang C. N., 1969, *Properties of Matter under Unusual Conditions*, ed H. Mark y S. Fernbach (New York: Interscience), USA, pp344-54

Wu T. T., Yang C. N., 1976, *Nucl. Phys. B*, 107, 365