11
2g.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Estudios Superiores
CUAUTITLAN

LA TOMA DE DECISIONES MEDIANTE LA PROGRAMACION LINEAL A TRAVES DE UNA COMPUTADORA DIGITAL.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN ADMINISTRACION

P R E S E N T A :

Martha Guadalupe Enriquez Hernández

Director de Tesis: I. P. JUAN J. ZAMUDIO VAZQUEZ

Cuautitlan Izcalli, México **1987**

I N D I C E   G E N E R A L

J U R A D O

PRESIDENTE	I.Q.	ENRIQUE JIMENEZ RUIZ
VOCAL	I.P.	JUAN JOSE ZAMUDIO VAZQUEZ
SECRETARIO	LIC.	CECILIA BRITO BARBA
1er. SUPLENTE	LIC.	FRANCISCO RAMIREZ ORNELAS
2do. SUPLENTE	ING.	VICENTE MARTINEZ DOMINGUEZ

P R E F A C I O

El objetivo primordial de este trabajo es destacar los beneficios de utilizar la técnica de Programación Lineal para la Toma de Decisiones, que se ven aumentados en alto grado por el uso de la computadora digital.

En segundo término, se pretende que los estudiantes de la carrera de "Licenciado en Administración" de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlan, comprendan el papel tan importante que tienen dentro de las empresas actuales, la Programación Lineal y la computadora digital, y a la vez motivarlos a introducirse más en el estudio de las mismas.

P R O L O G O

Con el desarrollo de este tema, se pretende abundar en los conocimientos prácticos relativos al ejercicio de la carrera de "Licenciado en Administración". Se busca que el lector visualice perfectamente los beneficios que aportan para la Toma de Decisiones el uso de la Programación Lineal y la computadora digital.

Se llevó a cabo una investigación documental, puesto que, para cumplir con los objetivos de este trabajo es necesario incluir los antecedentes de la Programación Lineal y la computadora digital, así como su definición y la importancia de ambas para la Administración. Todo ésto con el objeto de poder establecer una comparación entre la solución analítica y la computarizada.

Hasta aquí la investigación se realizó en libros de consulta que contienen estos temas, cuya bibliografía se expone al final de este trabajo. La otra fase de la investigación realizada puede clasificarse dentro de la investigación de campo, porque ya se tiene una participación más activa en la creación o adaptación de los programas para computadora digital.

Este, es un trabajo que principia como investigación pura y concluye como investigación aplicada. Inicia como investigación pura porque sólo se pretende extender o verificar el conocimiento ya establecido, y concluye como investigación aplicada porque los programas que se presentan proporcionan el conocimiento para resolver problemas de cuya solución depende el beneficio de individuos o comunidades.

Este trabajo trata de apegarse al curso de Investigación de Operaciones impartido en la carrera de Administración. En el capítulo I se habla de los antecedentes de la Programación Lineal y la definición de la computadora digital. En el capítulo II en que consiste la Programación Lineal, sus aplicaciones y su importancia para la Administración. El capítulo III explica la representación gráfica de un problema de Programación Lineal y un programa - para computadora digital. En el capítulo IV se ejemplifica el Método Simplex y presenta un programa para computadora digital. El capítulo V trata el problema de transporte, transbordo y asignación, así como un programa que resuelve dichos problemas.

Se ha intentado que el desarrollo de este trabajo sea en una forma -- clara y comprensible, para que dado el momento pueda ser empleado como material de apoyo en los temas que se relacionen con él.

I N T R O D U C C I O N

"La Administración es el conjunto sitemático de reglas para llevar, - con la máxima eficiencia, un organismo social a la realización de sus objetivos"[1]. Esto se logra a través de sus seis funciones básicas: Previsión, Planeación, Organización, Integración, Dirección y Control.

El proceso administrativo contempla como primera etapa la Planeación- que es una de las funciones que reviste mayor importancia para llevar a cabo la Administración; así como la Toma de Decisiones es la parte clave de la -- Planeación. No se puede decir que exista un plan a menos que se haya tomado- una decisión, es por esto que se dice que la Toma de Decisiones es sólo una- etapa de la Planeación.

La Toma de Decisiones es el acto razonado y conciente de elegir una - opción de solución entre varias. Desde una perspectiva más amplia, la Toma - de Decisiones abarca todo el proceso que se debe seguir para llegar a una decisión, desde la identificación inicial del problema hasta la generación de- evaluación de las opciones y por último la elección de una de estas. La Toma de Decisiones siempre está relacionada a un problema, a una dificultad o a - un conflicto. Por medio de la decisión se espera obtener una respuesta a un problema o la solución a un conflicto.

Puede describirse la Toma de Decisiones como una sucesión de pasos: Definición del problema, generación de opciones, evaluación de las opciones- elección de un opción e implantación de la opción elegida, necesariamente debe seguirse en este órden, puesto que la forma en que se preceden tiene una- secuencia lógica.

En cualquier nivel jerárquico dentro de una organización se toman decisiones, sólo que el grado de certidumbre varía según el nivel en donde -- sean tomadas. Este análisis se refiere en especial a la Toma de Decisiones a nivel ejecutivo, por ser aquí donde se marca el camino a seguir de toda organización.

El proceso de la Toma de Decisiones a un nivel alto lo llevan a cabo- los gerentes, directores, consejo administrativo, etc... en áreas de: Producción.- Volúmenes de producción, ubicación de la fábrica, métodos de --

1) Riós Adalberto y Paniagua Andrés. *Orígenes y Perspectivas de la Administración*. Ed. Trillas, México 1977. p30

producción, manera de compra, control de inventario, ámbito de la investigación técnica , etc...

Mercadotécnia.- Determinación de mercados, ubicación de sucursales, empaques marcas, canales de distribución, precios, publicidad, comisiones a vendedores, esfuerzos de promoción y ventas, empleo de - la investigación de mercados, etc...

Finanzas.- Estructura del capital, condiciones de crédito, monto del capital de trabajo, producción de nuevos fondos, pagos de dividendos, planes de refinanciamiento, liquidación, fusiones, etc...

Recursos humanos.- Fuente de mano de obra, técnicas de selección, tipo de capacitación y adiestramiento, análisis y valuación de puesto, - negociaciones con sindicatos, ausentismo, planes para pensio-- nes, etc...

No se puede hablar de una técnica que sea mejor, para emplearse en todas las circunstancias de Toma de Decisiones. La selección de una opción es- individual y por lo general está limitada por los conocimientos y facultades de que disponga la persona o grupo encargado de tal función.

La base para evaluar las opciones para la Toma de Decisiones son de - dos tipos: Cualitativas y Cuantitativas. Las cualitativas son:

1.- Intuición	3.- Experiencia
2.- Hechos	4.- Opiniones consideradas

Las cuantitativas son:

1.- Investigación de Operaciones
2.- Análisis Marginal
3.- Análisis de efectividad de costos
4.- Experimentación
5.- Arbol de decisiones
6.- Análisis de Riesgo
7.- Teoría de la Preferencia

Dentro de la Investigación de Operaciones se haya la Programación Lineal, que consiste básicamente en una técnica para la asignación de recursos escasos en forma óptima; y siendo esta una parte tan importante para el desarrollo de este trabajo, se considera necesario hacer mención de su concepto- e historia en una forma breve.

La Investigación de Operaciones (IO) en un concepto generalizado puede describirse como un procedimiento científico para tomar decisiones que comprenden las operaciones de sistemas de organización. Desde un punto de vista administrativo; "La IO es la aplicación del método científico al estudio de opciones en una situación problemática, con vistas a obtener una base cuantitativa para llegar a la mejor solución".[1]

Es difícil precisar el inicio de la IO ya que todo parece indicar que fué en la Segunda Guerra Mundial cuando surgió, pero también se sabe que en la tarea encomendada a Edison en la Primera Guerra Mundial para averiguar las maniobras de los barcos mercantes, que fueran más eficaces para disminuir las pérdidas de embarques causadas por los submarinos enemigos, empleó un "tablero táctico" para encontrar la solución.

Fué en la Segunda Guerra Mundial cuando la organización militar de Gran Bretaña llamó a un grupo de científicos para que estudiaran los problemas estratégicos asociados a la defensa aerea y terrestre del país. Más tarde las tres fuerzas militares inglesas tuvieron un grupo de investigadores de operaciones que llevó a cabo investigaciones militares desde el principio de la guerra (1941), ese tipo de actividades científicas se conoció en Inglaterra como "Investigación Operacional".

Los buenos resultados logrados por los equipos de investigación de operaciones británicos, motivaron a la administración militar de los Estados Unidos a comenzar actividades similares. Los logros obtenidos por los equipos militares atrajeron la atención de los administradores industriales, comenzando una Segunda Revolución Industrial. Después de la Guerra muchos hombres que habían participado en los equipos de investigación de operaciones se sintieron motivados a investigar en este campo, como resultado de esto surgió el desarrollo de nuevas técnicas para la IO; un primer ejemplo es la Programación Lineal que fué formulada como un problema general por George B. Dantzing en el año de 1947. Posteriormente surgieron todas las demás técnicas que forman parte de la IO.

---

1) Koontz Harold O'Donell. *Elementos de la Administración.* México 1981 , p. 134

En la actualidad la Programación Lineal (PL) es una herramienta que ha ahorrado muchos recursos económicos a empresas o negocios que la han utilizado. "La PL típicamente trata de asignar recursos limitados entre actividades competidoras en la mejor forma posible es decir, óptima"[1]. Puede surgir este problema de asignación siempre que deba seleccionarse el nivel de ciertas actividades que compitan por recursos escasos necesarios para realizar esas actividades.

La PL proporciona un modelo matemático para describir el problema de interés. El adjetivo"lineal" significa que se requiere que todas las funciones matemáticas en este modelo sean lineales. La palabra "programación" no se refiere aquí a la programación de computadoras, más bien se emplea como un sinónimo de planificación por ser parte de ella. Por tanto, la PL comprende la planificación de actividades para un resultado "óptimo", es decir, un resultado que alcance la meta especificada en la mejor forma entre todas las opciones factibles.

La PL se ha aplicado con éxito a la solución de problemas referentes a la Toma de Decisiones con respecto a: Asignación de personal, combinación de materiales, distribución y transporte, cartera de inversiones, etc...

Es importante mencionar que los modelos lineales son siempre aproximaciones de los problemas reales, ya que en la realidad es casi imposible tener un problema lineal, por lo tanto, la PL nos vá a proporcionar resultados aceptables dentro de ciertos límites o rangos de operación de las variables.

Un factor muy relevante para el desarrollo que ha tenido la IO y en particular la PL fué el desarrollo de las computadoras digitales. Por lo general se requiere una gran cantidad de cálculos para tratar de un modo más efectivo los complejos problemas que típicamente son considerados por la IO así el desarrollo de las computadoras digitales, con su capacidad para realizar cálculos aritméticos, miles o incluso millones de veces más rápido que un ser humano y además de proporcionar un gran número de soluciones posibles por esto resulta la computadora digital una herramienta indispensable en la PL para el análisis de las opciones en la Toma de Decisiones.

---

1) Hillier Frederick y Lieberma Gerarld. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Ed. McGraw-Hill, México 1982. p 14.

Un ejemplo de un problema que puede resolverse aplicando la técnica de Programación Lineal podría ser:

Una compañía que fabrica bancos y sillas metálicas tiene disponible $10 000 000.00 para salarios, $18 000 000.00 para materia prima, el desgaste de la maquinaria no puede exceder de $4 000 000.00 , cada banco que fabrica requiere de $1 500.00 de salario, $1 000 de materia prima y el costo del desgaste de la maquinaria es de $500. Cada silla requiere de $1 000 de salario $2 000 de materia prima, el desgaste de la maquinaria es de $300. Determinar el número de bancos y sillas que deban fabricarse a fín de optimizar el uso de los recursos. Cada banco produce una utilidad de $2 000 y la silla de $1 500.

Así como este problema, las empresas pueden encontrarse con casos similares en donde una BUENA decisión se puede tomar apoyándose en la Programación Lineal.

C A P I T U L O   I

A N T E C E D E N T E S

1.1 Concepto de Investigación de Operaciones.

"La Investigación de Operaciones (IO) enmarca la utilización de un conjunto de procedimientos cuantitativos que permiten especificar cómo deben combinarse recursos humanos y materiales limitados, con el objeto de alcanzar un propósito preestablecido"[1].

Las características esenciales de la IO se pueden resumir para su aplicación a la Toma de Decisiones en :

1.- Plantea modelos que son representaciones físicas y lógicas de una realidad o programa. Estos modelos pueden ser simples o complejos.
2.- Hace incapié en un área problemática y en el desarrollo de medidas de efectividad (modos de evaluar la calidad de lo ecfectivo), para determinar si una solución puede lograr las metas.
3.- Incluye en el modelo las variables de un problema o cuando menos aquellas que puedan ser importantes para la solución.
4.- Impone al modelo y a sus variables restricciones y metas en términos matemáticos de manera que se puedan identificar con claridad, someterlas a una simplificación matemática y utilizarlas con facilidad, para efectuar cálculos sustituyendo cantidades por símbolos.

---

1) Dinkel John, Kochenberger Gary y Plane Donald. *Administración Científica.* México: Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A., 1978. 3p.

5.- Cuantifica las variables del problema, en la medida de lo posible, puesto que sólo pueden incertarse datos cuantificables en un modelo para obtener un resultado conmensurable.
6.- Proporciona muchos datos no disponibles a través de dispositivos matemáticos y estadísticos, haciendo posible trabajar el problema matemático y de cálculo dentro de un márgen de error reducido, a pesar de la falta de datos cuantificables y precisos.

La metodología de la IO se puede resumir en seis pasos:

1.- Formulación del problema. En cualquier problema de planeación el investigador debe analizar las metas a alcanzar y el sistema en que se encuentra la solución, este conjunto de componentes interrelacionados en un área problemática denominada "Sistema" por los investigadores de operaciones, es el medio ambiente que envuelve a una decisión. El propósito de formular un problema es determinar el mejor curso de acción entre diversas opciones, por eso es necesario valorar las medidas de efectividad y las metas (realización de los objetivos preestablecidos).
2.- Construcción de un modelo matemático. Es la representación de un fenómeno del mundo real en una estructura más simple que la original del fenómeno.
3.- Obtención de una solución a partir del modelo. Existen dos procedimientos básicos para llegar a la solución. En el procedimiento analítico* se usa la deducción matemática para obtener tan aproximada como sea posible una solución matemática, antes de incertar cantidades para obtener una solución numérica. En el procedimiento numérico el analista sólo intenta diferentes valores para las variables controlables, con el objeto de ver como serían los resultados a partir de los cuales obtiene un conjunto de valores que proporcionan una mejor solución.
4.- Prueba del modelo. Se puede comprobar el modelo utilizándolo para resolver un problema y comparando los resultados con lo que en realidad sucede. Estas pruebas pueden ser tomando datos anteriores o aplicándolo en la práctica para ver como se comporta comparándolo con la realidad. (gra-

---

* Consiste en la suposición de que se conoce las incógnitas buscadas, lo cual permite desarrollar las consecuencias de estas hipótesis hasta llegar a un hecho matemático.

do de confiabilidad del modelo).

5.- Obtención de controles para el modelo y la solución. En éste punto se deben hacer predicciones para controlar el modelo y la solución, porque aunque un modelo haya sido muy preciso puede dejar de serlo, esto se debe a que las variables que están fuera de control pueden cambiar las relaciones entre las mismas, en estos modelos es necesario ponderar (acción de equilibrar o pesar una situación) los efectos de la desviaciones en comparación con el costo de realizar la corrección o en relación con el costo (que casi siempre es mayor) de corregir el programa completo.

6.- Puesta en práctica de la solución. Consiste en poner en operación al modelo y el suministro de los insumos.

Dentro de la IO existen varias técnicas en las que se apoya para lograr sus objetivos. Entre las más utilizadas se encuentran: Análisis de Regresión, Programación Lineal, Simulación, Modelos de Redes, Teoría de Colas, Programación Dinámica y Teoría de Juegos.

Análisis de Regresión: Muchos problemas de asignación de recursos utilizan modelos lineales para representar las relaciones entre las diversas variables que intervienen. "Cuando un par de variables no son independientes (y por lo tanto están correlacionadas), a menudo se busca una relación funcional entre ambas, por técnicas estadísticas conocidas como regresión".[1]

Programación Lineal: Trata de problemas de asignación de recursos limitados entre actividades competidoras en la mejor forma posible (óptima). Es un tipo de programación matemática cuyo objetivo es lograr las metas deseadas; su característica distintiva es que los modelos matemáticos y las restricciones son lineales. Ejemplo:

Tres productos se procesan a través de tres operaciones diferentes. Los tiempos requeridos por unidad de cada producto, la capacidad diaria de las operaciones y el beneficio por unidad vendida de cada producto son como sigue:

1) Murray Marco y Chicurel Enrique. *Aplicaciones de Computación a la Ingeniería*. México;Ed. Limusa. 1975. 133 p.

OPERACION	TIEMPO POR UNIDAD (MINUTOS) PRODUCTO 1	PRODUCTO 2	PRODUCTO 3	CAPACIDAD DE OPERACION (MIN. POR DIA)
1	1	2	1	430
2	3	0	2	460
3	1	4	0	420
GANANCIA POR UNIDAD ($)	3	2	5	

Para asegurar que el tiempo de procesamiento requerido por todas las unidades producidas, no exceda la capacidad diaria de cada operación, se establecen las siguientes restricciones:

Operación 1 $\quad 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 430$

Operación 2 $\quad 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 \leq 460$

Operación 3 $\quad 1x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leq 420$

Debido a que no pueden producirse cantidades negativas, el modelo de Programación Lineal se resume así:

$$\text{maximizar} \quad z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 430$$
$$3x_1 + 2x_3 \leq 460$$
$$1x_1 + 4x_2 \leq 420$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Estableciendo el modelo matemático, la solución a éste problema se encuentra aplicando el método Simplex que se explicará en el capítulo IV.

Simulación : "Tiene utilidad para las situaciones en donde llega a ser muy complicado modelar un problema matemáticamente"[1], o aún si pueden construirse modelos matemáticos, las técnicas disponibles pueden no ser adecuadas para resolver los problemas resultantes. La Simulación trata con el -

1) Taha, Hamdy A. . *Investigación de Operaciones*. México: Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A., 1980. 511 p.

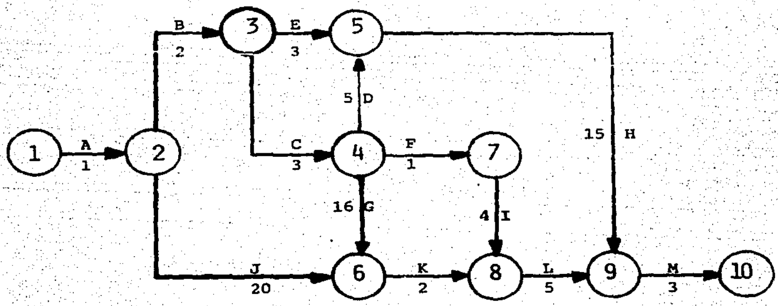
estudio de sistemas (dinámicos) en el tiempo. Inventarios, Programación, Colas y Pronósticos, sirven como buenos ejemplos. Los modelos de Simulación se diseñan para muestrear las características del sistema que representan. Esto es posible "observando" el sistema en el tiempo y recolectando información - pertinente, es la rama experimental de la IO; se refiere a la construcción - de una representación simplificada de un proceso o sistema físico con el fin de facilitar su análisis, además se caracteriza por no incluir todas las propiedades del sistema real, es decir, que el propósito de la Simulación es -- mostrar el efecto de ciertos factores particulares que se están investigando. Las principales razones por las que Simulación es una de las técnicas - más utilizadas son:

1.- La Simulación puede ser empleada para solucionar problemas complejos, -- por medio de un modelo que representa el proceso real.
2.- Con la Simulación, es relativamente facil modificar las características- del modelo e intentar explicar y comprender un problema. Como consecuencia se incrementa la confianza en la Dirección, y consecuentemente la -- aceptación de la técnica es más facilmente obtenida.
3.- La Simulación es una técnica muy flexible la cual puede ser aplicada a - diferentes situaciones. Por ejemplo: Esta técnica puede ser usada para - describir el comportamiento de sistemas de producción, sistemas financieros, sistemas de inventarios, sistemas de líneas de espera, etc... sin - tener que alterar el proceso real.

Modelos de Redes: Trata de elegir un conjunto de conexiones que proporcionen una ruta entre dos puntos cualesquiera de una red, de tal manera-- que se minimice la longitud total de estas conexiones. Un problema básico de la modelación de redes es encontrar la ruta más corta a través de una red. Es una combinación de actividades interrelacionadas que deben ejecutarse con un cierto orden antes de que el trabajo completo se pueda terminar. Las actividades estan interrelacionadas por una secuencia lógica, en el sentido de - que algunas de ellas no pueden comenzar hasta que otras se hayan terminado.
Ejemplo:

Lista y relación de actividades para construir una planta embotelladora de aceite comestible.

Actividad:	Actividades que la preceden:
A- Orden de inicio	Ninguna
B- Estudios previos	A
C- Diseño de la botella	B
D- Diseño de la etiqueta	C
E- Elegir imprenta	B
F- Diseñar el mecanismo de cierre	C
G- Fabricación de la botella	C
H- Imprimir la etiqueta	E,D
I- Fabricar el mecanismo de cierre	F
J- Elaboración del aceite	A
K- Esterilizado de la botella	G,J
L- Llenado y cerrado de la botella	I,K
M- Empaque	H,L

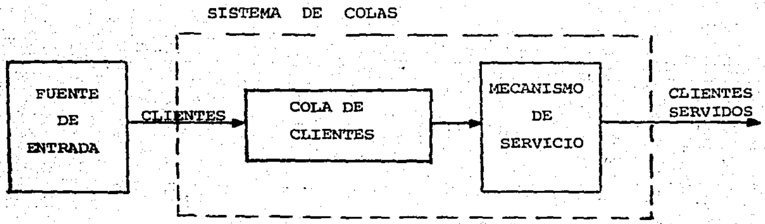


- Se asigna un número entero positivo diferente a cada evento. Las actividades se designan con la letra i del evento-origen y con j del evento-destino.
- Para toda pareja (i,j) asociada a una actividad, el número j debe ser mayor que el número i.

- El número que se encuentra junto de la letra que identifica a cada actividad indica el tiempo que requiere llevar a cabo dicha actividad.

Para hallar la ruta crítica (las actividades que no tienen excedente de tiempo para su realización) se determina el tiempo de iniciación más próximo, el tiempo más remoto de terminiación y el cálculo de la holgura total de todas las actividades.

Teoría de Colas: "Comprende el estudio matemático de las líneas de espera. La formación de líneas de espera es un fenómeno común que se presenta siempre que la demanda actual de un producto o servicio es mayor que la capacidad actual para proporcionarlo".[1] La Teoría de Colas por sí misma no resuelve directamente este problema, sin embargo, contribuye con la información vital requerida para tomar una decisión de este tipo, prediciendo diversas características de la línea de espera como lo es el tiempo promedio de espera. Ejemplo:



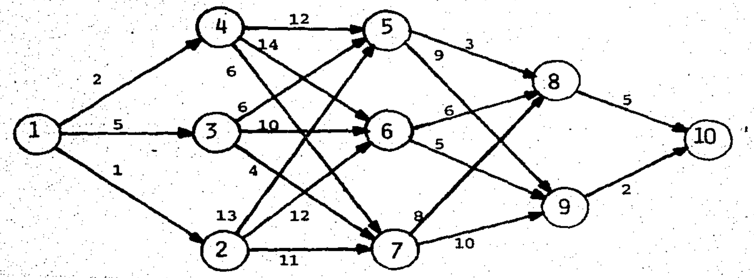
Una información importante que proporciona la Teoría de Colas es el promedio de espera hasta que se termina el servicio de un cliente o el porcentaje de tiempo inactivo del servidor.

Programación Dinámica: "Es igualmente otro tipo de programación matemática que frecuentemente resulta útil para tomar una sucesión de decisiones interrelacionadas".[2] Proporciona un procedimiento sistemático para determinar

1) Hillier Frederick y Lieberman Gerarld. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. México: McGraw-Hill, 1982. 397 p.

2) Ibid, p. 261

la combinación de decisiones. A diferencia de la Programación Lineal no existe un planteamiento matemático estándar del problema de Programación Dinámica. Este es un tipo general de enfoque para resolver problemas y las ecuaciones particulares empleadas deben desarrollarse para que se ajusten a cada situación individual. La Programación Dinámica es una técnica principalmente - para mejorar la "eficiencia de cómputo" en ciertos problemas de optimización La idea básica es descomponer el problema es subproblemas los cuales son computacionalmente más manejables. Ejemplo :



Esta red es un ejemplo de problemas resueltos mediante la Programación Dinámica, representa las posibles rutas que podría seguir un agente de ventas para llegar a su destino final. El agente de ventas desea saber cual es la ruta más corta.

Los números que están sobre cada línea representan la distancia en kilometros entre dos nodos. La Programación Dinámica se encarga de descomponer el problema original en problemas más pequeños los cuales son más faciles de resolver.

Teoría de Juegos: Es una teoría matemática que trata de las características generales de las situaciones de competencia de una manera formal, - abstracta. Hace incapié en los procesos de Toma de Decisiones por los adversarios . El objetivo primordial de la Teoría de Juegos es desarrollar "criterios racionales" para seleccionar una estrategia. Además analiza situaciones competitivas en las que intervienen intereses en conflicto. Supone un tipo--

particular de problema en el que interviene la maximización del valor esperado de una decisión hecha con incertidumbre. Las aplicaciones no recreativas de la Teoría de Juegos corresponden a situaciones competitivas en Economía, Administración, y el comportamiento social. Ejemplo:

Para mostrar las características básicas del modelo de Teoría de Juegos, considérese la versión del juego "morra de dos dedos". Cada jugador muestra simultaneamente uno o dos dedos, si los dos jugadores muestran el mismo número de dedos entonces el jugador 1 le gana $1 al jugador 2, si el número no es el mismo el jugador 1 le pagaría $1 al jugador 2. Cada jugador tiene dos estrategias, mostrar uno o dos dedos. Los resultados para el jugador 1 se muestran en la tabla siguiente:

		II	
		1	2
I	1	1	-1
	2	-1	1

Sólo se dá la tabla del jugador 1 porque la tabla del jugador 2 es la negativa de ésta.

Para mejor comprénsión del tema de esta tesis se hace necesario explicar en que consiste la linealidad de un problema.

1.2 Concepto de Linealidad.

En general, un modelo de Programación Lineal es una representación lineal de algunos procesos de decisión en los que el decisor busca escoger, dentro de todas las opciones posibles, la que es mejor de acuerdo a algún criterio predeterminado. El conjunto de todas las opciones posibles (conjunto de soluciones factibles) se determina por un conjunto de relaciones lineales que describen la realidad del proceso que se está modelando.

Se puede definir una relación lineal como: Dos conjuntos de elementos, sean X y Y, tal que los elementos del conjunto X sean todos los números reales, y los elementos del conjunto Y sean también todos los números-reales, esto es:

$$X = \left\{ x \mid x \in R \right\}$$
$$Y = \left\{ y \mid y \in R \right\}$$

Deberá existir una relación biunuvoca entre X y Y, o sea, a cada elemento -- del conjunto X le corresponderá un solo elemento de Y. Si se cumple esto se- dice que es una relación lineal.

Ahora bien, una función lineal se establece como una correspondencia entre un conjunto de valores que representan a la variable dependiente y --- otro(s) conjunto(s) para las variables independientes. Y en cuya expresión-- el exponente más grande es 1 . Ejemplos:

$$y = x + z$$
$$y = r + s + t$$
$$y = aS + bW + uR$$

En las ecuaciones anteriores se observa que el mayor exponente de -- cada una de las variables independientes es igual a 1; existiendo la posibilidad de que estas mismas variables estén elevadas a un exponente de 0.

Una ecuación de la forma :

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1.1)$$

se le puede llamar polinomio de primer grado, en donde A,B, y C son constantes, y por lo menos una de las constantes (A,B) es distinta de cero, se dice convencionalmente que es lineal en "x" y "y", puesto que los exponentes de - las variables son 1 y en tal caso el lugar en plano geométrico es una recta. La ecuación (1.1) también se conoce como la ecuación general de primer grado en dos variables.

Uno de los problemas más frecuentes en la Programación Lineal es la- solución a un sistema de ecuaciones lineales. Donde la solución, gráficamente representa las coordenadas del punto de intersección de las rectas que intervienen en dicho sistema y satisfacen cada una de las ecuaciones. Por lo - tanto, el punto de intersección de dos rectas (por ejemplo) no paralelas pueden hallarse resolviendo simultaneamente sus ecuaciones.

La condición geométrica para que dos rectas se corten, corresponde a la condición algebráica de que sus ecuaciones formen un sistema independiente y compatible y que, por lo tanto, tengan una solución simultanea.

Considérense dos ecuaciones lineales expresadas en la forma general:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Donde A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, y C_2 son constantes reales positivas o negativas.

Estas son ecuaciones independientes si no se puede obtener una a partir de la otra mediante la multiplicación de una constante distinta de cero; es decir, son independientes si no se cumplen las igualdades:

$$A_1 = m\,A_2 = B_1 = m\,B_2 = C_1 = m\,C_2$$

Si las igualdades se cumplen son dependientes. Dos ecuaciones que son dependientes son también equivalentes, es decir, representan la misma recta y -- tienen así la misma gráfica, ya que cualquier punto que corresponda a una de las ecuaciones, también corresponderá a la otra.

Se dice que dos ecuaciones son compatibles (consistentes) si se verifican simultaneamente (han de tener un punto en común), es decir son compatibles sí :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad \text{ó si} \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

En el primer caso las rectas coinciden y las ecuaciones son compatibles y dependientes. En el segundo caso, las rectas son de distinta pendiente, y por lo tanto se cortan en un punto, tales líneas son compatibles e independientes. Dos ecuaciones lineales se llaman incompatibles si tienen rectas paralelas como gráficas. En este caso:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

Por lo tanto, cuando las líneas son incompatibles e independientes serán representadas por dos líneas paralelas sin solución, si son compatibles dependientes se representan por una línea sobrepuesta a la otra, y se tiene una infinidad de soluciones. Y por último si son compatibles e independientes tienen una solución única.

Los diferentes métodos que contempla la Programación Lineal (PL) sólo tienen aplicación para la solución de problemas, si existe la posibilidad de crear modelos matemáticos basados en relaciones lineales. Con esto se busca resaltar la importancia del concepto de linealidad como base fundamental de la Programación Lineal. Así como el concepto de linealidad es indispensable para la aplicación de los distintos métodos de Programación Lineal, también resulta ser importante el conocimiento de la capacidad de solución de una computadora digital. De no ser empleada la computadora digital en la solución de problemas reales, todos los beneficios que tiene la PL por sí misma se verián limitados al grado de ser reducida al ámbito de lo impráctico. Por esto es conveniente exponer en una forma simple en que consiste la computadora digital.

1.3 Definición de la Computadora Digital.

La aparición de la computadora digital a finales de la Segunda Guerra Mundial marca el inicio de la "Segunda Revolución Industrial" en la cual se automatiza, no sólo la fuerza muscular del hombre, como sucedió en la Primera Revolución Industrial, sino también su capacidad intelectual.

El rápido desarrollo de la computadora electrónica ha dado orígen a una serie de disciplinas tales como: Ciencias de la Computación, Análisis de Sistemas, Programación, Desarrollo de Lenguajes, etc... Y también ha impulsado en forma sin presedentes a otras existentes tales como: Análisis y Métodos Numéricos, Teoría y Sistemas de Información, IO, Cibernética, etc...

La computadora puede ser de tres tipos: Digital, Analógica e Híbrida. La computadora digital es una máquina capáz de hacer operaciones aritméticas y lógicas, utilizando representaciones discretas (valor aislado de una magnitud, discontinuo) de los valores numéricos o lógicos de las variables. Esta realiza las operaciones basándose en el concepto aritmético de contar. El segundo tipo de computadoras realiza las operaciones basándose en el concepto geométrico de la medida. O sea, miden una cantidad física y convierten el resultado en un número análogo; de ahí el nombre de computadora - analógica.

Y por último las computadoras híbridas están formadas por una combinación de ambas (digital y analógica).

La computadora es una herramienta útil en la solución de problemas,- aunque es necesario mencionar que solamente ejecuta una serie de instrucciones y no resuelve problemas por sí sola.

Las características de la computadora digital son las siguientes: Operación completamente automática y a muy alta velocidad, gran capacidad de memoria para almacenar información, ejecutar las instrucciones especificadas programación sencilla para la recuperación de la información, resolución numérica de variables obteniendo la precisión deseada, y la capacidad de tomar decisiones lógicas.

En general las computadoras digitales se pueden considerar constituidas por cinco unidades: 1) Unidad de entrada, es para introducir información (datos y programas); 2) Unidad de memoria, es el dispositivo para almacenar- información interna; 3) Unidad aritmética y lógica, realiza todas las operaciones aritméticas y lógicas; 4) Unidad de control, tiene el papel de supervisor para toda la máquina; 5) Unidad de salida, es para transmitir información de la computadora al usuario y/o al operador.

Las unidades de procesamiento y control constituyen lo que se denomina la Unidad Central de Proceso (CPU).

Sin la computadora digital como un apoyo la IO nunca hubiera podido- llegar a ser lo que es hoy. Porque gracias a la computadora los cálculos que involucra la IO, con el manejo de quizás hasta cientos de variables, sería- un poco menos que imposible resolverlos en forma manual, por la cantidad de- cálculos que contienen y el tiempo que se lleva a cabo realizarlos.

1.4 Método Computacional.

En el proceso de solución de un problema por medio de una computadora digital se requieren los pasos siguientes:

1.- Especificación del problema. Se debe definir perfectamente el problema y sus limitaciones, las variables que intervienen y los resultados deseados.

2.- Análisis o algorítmo. Es la formulación de la solución del problema, de manera que se tengan una serie de pasos aritméticos que resuelvan el problema y que sean susceptibles de ejecutarse en la computadora.

3.- Programación. Este paso consiste en traducir el método de análisis o algorítmo de solución, expresándolo como una serie detallada de instrucciones. La programación se considera dividida en dos partes: En la primera la sucesión de operaciones se presenta en forma gráfica en un diagrama de flujo, y en la segunda parte, que se denomina codificación, el diagrama anterior se traduce a un lenguaje de programación accesible a la máquina.

4.- Verificación. Es la prueba exhaustiva del programa para eliminar todos los errores que tenga.

5.- Documentación. Consiste en preparar un instructivo del programa, de manera que cualquier otra persona pueda conocer y utilizar el programa.

6.- Producción. Es la última etapa en la que solo se proporciona datos de entrada del programa obteniendo las soluciones correspondientes.

De lo anterior se puede concluir que para poder utilizar una computadora, es necesario un conocimiento completo del problema y de los campos de las matemáticas relacionadas con él.

Hasta aquí se han mencionado las diferentes técnicas (las más importantes) que integran la IO, así como en forma generalizada se ha definido la computadora digital, pero también es importante conocer las limitaciones más sobresalientes de la IO.

1.5 Limitaciones de la IO.

Las limitaciones principales de la IO son:

-- Debido a la notable magnitud de los aspectos matemáticos y de cálculo, algunos Administradores, como muchos otros profesionistas, no se encuentran lo suficientemente capacitados como para emplear las matemáticas que ac--

tualmente estan a su disposición.

-- Aunque el método matemático puede asignar valores a determinados factores que nunca antes se pudieron medir, gran parte de las decisiones administrativas implican aún factores cualitativos. Hasta que sea posible medirestos, la IO tendrá una utilidad limitada en éstas áreas y las decisiones continuarán basándose en juicios cualitativos

-- Otra limitación consiste en las diferencias entre administradores e investigadores capacitados. En general, la formación matemática de unos no permite comprender la formación administrativa de los otros y viceversa.

Para que estas limitaciones se disminuyan es necesario que el Administrador cuente con ciertos conocimientos.

1.- Un entrenamiento básico en los fundamentos de la IO. Esto incluye la metodología básica de las matemáticas y la ciencia, así como temas de álgebra lineal y teoría de matrices, teoría de la probabilidad, inferencia estadística, ciencia de la computación, microeconomía, contabilidad, administración de negocios, teoría de la organización y las ciencias del comportamiento.

2.- Otro requisito importante se encuentra en la IO incluyendo técnicas especiales del campo, como la PL y la no lineal, Programación Dinámica, Teoría del Inventario, Teoría de Redes, Teoría de Colas, Teoría de Juegos y Simulación.

3.- También es conveniente tener entrenamiento especializado en algún campo diferente al de IO, por ejemplo Estadística, Ingeniería Industrial, Comercio, Administración y Economía. Este entrenamiento proporciona al individuo un área de competencia especial para aplicar la IO.

C A P I T U L O I I

APLICACION DE LA PROGRAMACION LINEAL

2.1 Definición de la Programación Lineal (PL).

En el concepto de PL se habla de una asignación de recursos limitados; esta asignación está orientada a maximizar beneficios o alguna medida de funcionamiento, o minimizar una cierta medida de costos. Las técnicas matemáticas que sirven para determinar tales asignaciones pertenecen a la programación matemática. En el caso en que la medida de funcionamiento o costo es una función lineal y las restricciones para la disponibilidad o utilización de recursos se expresan como ecuaciones lineales o desigualdades es ahí donde tiene su campo la PL.

El modelo de PL debe incluir tres conjuntos básicos de elementos:

1) Variables de decisión y parámetros. Las variables de decisión son las incógnitas que deben determinarse con la solución del modelo. Los parámetros son las variables que se pueden controlar en el sistema.
2) Restricciones. El modelo debe incluir restricciones que limitan las variables de decisión a sus valores factibles (permisibles), que representan las limitaciones físicas del sistema, esto usualmente se expresa en forma de funciones matemáticas restrictivas.
3) Función objetivo. Define la medida de efectividad del sistema como una función matemática de sus variables de decisión. Por ejemplo si el objetivo del sistema es maximizar el beneficio total, la función objetivo debe-

especificar el beneficio en función de las variables de decisión.

Los ejemplos de la vida real muestran que un programa lineal puede-- ser del tipo de maximización o de minimización. Las restricciones pueden ser ($\geq$), ($\leq$), ó (=) y las variables deben ser no negativas. Un modelo de- PL general, se define matemáticamente como a continuación se muestra:

$$\text{maximizar o minimizar} \quad z_o = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n \quad & (\leq, = \text{ ó } \geq)\ b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots + a_{2n} x_n \quad & (\leq, = \text{ ó } \geq)\ b_2 \\ \vdots \quad & \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots + a_{mn} x_n \quad & (\leq, = \text{ ó } \geq)\ b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 & \end{aligned}$$

En donde las constantes c_j , a_{ij} , y b_j son datos. De lo anterior se puede establecer que dadas "n" variables x_1, x_2 , . . . , x_n llamadas "variables de decisión", se determina que valor de cada una de ellas hace máxima - o mínima una función objetivo.

$$z_o = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

La función z_o es una medida de eficiencia que producen las actividades, y los coeficientes c_j son el incremento en la función objetivo que - resulta de aumentar una unidad en la variable x_j, es decir si x aumenta - una unidad, z_o aumenta c_j unidades.

Por otra parte, el número de recursos diferentes es "m" y cada una - de las ecuaciones de desigualdad representa la restricción en la disponibilidad de este recurso. Los términos b_j representan la cantidad de recursos -- "i" disponible para cada una de las "m" actividades y los coeficientes a_{ij} - corresponden a la cantidad de recurso "i" consumido por cada unidad de la -- actividad "j".

La parte derecha de las ecuaciones de desigualdad o sea los términos

b_i, representan los recursos disponibles y la parte izquierda o sea la suma sobre los términos $a_{ij}\, x_j$ representan los recursos consumidos. Finalmente las desigualdades :

$$x_1 \,,\, x_2 \,,\, \ldots\ldots\ldots \,,\, x_n \geq 0$$

Representan el carácter de no negatividad de las variables.

Después de formular un modelo de PL el siguiente paso es resolver el modelo. Debido a que los modelos de PL se representan en una variedad de formas [maximización o minimización para la función objetivo y ($\leq$, $\geq$, y/o =) para las restricciones] es necesario modificar estas formas para que se ajusten a un procedimiento de solución.

Para esto existen dos formas. La forma canónica y la forma estándar. La forma canónica quedará representada como:

$$\text{maximizar} \qquad z_o = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

$$x_j \geq 0$$

las características de esta forma son:

1) Todas las variables de decisión son no negativas.
2) Todas las restricciones son del tipo (menor o igual que).
3) La función objetivo es del tipo de maximización.

Las características de la forma estándar son:

1) Todas las restricciones son ecuaciones excepto para las restricciones de no negatividad que permanecen como desigualdades (≥ 0).
2) Los elementos del lado derecho de cada ecuación son no negativos.
3) Todas las variables son no negativas.
4) La función objetivo es del tipo de maximización o de minimización.

En la PL existen diferentes tipos de soluciones, cualquier especificación de valores para las variables de decisión ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) se llama "solución", sin importar el tipo de solución o sea, si es una elección deseable, o incluso admisible. Una "solución factible" es una solución para la --

que se satisfacen todas las restricciones.

En forma general, se define la solución factible como un punto (x_1, x_2, . . . , x_n) que cumple con todas las restricciones y la "solución óptima" como aquella solución factible que hace que la función objetivo adquiera un-- valor extremo, que puede ser máximo o mínimo.

2.2 Método de análisis para la PL.

En Programación Lineal se aplican diferentes métodos, dependiendo del problema que se trate y de la solución que se pretenda obtener. Los métodos-- de PL que abarca este trabajo son los siguientes: Representación gráfica, Método Simplex y Método Simplex de Transporte.

Representación gráfica para dos variables. El propósito de esta, no - es el de proveer un método práctico para resolver problemas lineales ya que-- estos problemas prácticos incluyen un gran número de variables. Lo que intenta es visualizar y demostrar los conceptos básicos para el problema en dos variables y desarrollar la técnica algegráica para problemas lineales con más - de dos variables.

El Método Simplex resuelve problemas de PL obteniendo una solución -- factible y por un procedimiento iterativo mejora esta solución hasta obtenerla óptima. El Método Simplex suministra un algorítmo eficiente y confiable -- para resolver problemas que tengan gran número de restricciones (quizás cientos o miles), en una computadora.

El Método de transporte busca la minimización del costo de trasladar- recursos de uno o varios orígenes a uno o varios destinos.Este problema puede resolverse por el Método Simplex regular pero sus características especiales- ofrecen un procedimiento más conveniente.

2.3 Importancia de la PL para la Administración.

Dentro de toda organización existen personas que han de decidir el -- camino a seguir para solucionar los problemas cotidianos y extraordinarios de la empresa. Es necesario para llegar a la mejor solución del problema al que-se enfrenta, que el tomador de decisiones cuente con experiencia y conoci--- mientos técnicos así como capacidad de investigación y análisis.

Se dice que la experiencia es el mejor maestro. Frecuentemente los-- Administradores experimientados consideran, que los tropiezos tenidos y los- logros alcanzados les proporcionan guías casi infalibles para su desarrollo- en el futuro. Tal parece esta actitud es más pronunciada a medida que es mayor la experiencia del Administrador y más alto es su puesto en la organización.

El hecho de que los Administradores hayan logrado cierta posición, - es precisamente lo que les sirve de justificación para asignarle la mayor importancia a la experiencia, aún ante las técnicas cuantitativas para la Toma de Decisiones.

Es innegable la importancia de la experiencia para los Administradores, pero también es verdad que puede ser muy peligroso confiar en la expe-- riencia pasada como guía de acciones futuras. En un medio tan cambiante como el que estamos viviendo, es difícil que una experiencia pasada pueda ajustarse a la solución de un problema actual. La actitud que haya tomado el Admi-- nistrador para resolver un problema en el pasado puede ser totalmente inaplicable a problemas nuevos, se deben evaluar las buenas decisiones en términos de sucesos futuros, y la experiencia pertenece al pasado, la experiencia -- sólo se debe ver como un punto de apoyo sujeto a modificaciones para solucionar un problema.

Una gran desventaja de la persona que posee la experiencia, es que - en el momento que falte no puede ser sustituida. Esto es, que la experiencia de una persona es dificil de ser transmitida y de ser asimilada por otra persona. El Administrador actual debe estar preparado cada día más, puesto que- así lo exige su campo de acción, cada vez existen más posibilidades de fracaso si se toman decisiones por tanteo. Para mejorar la calidad de las deci-- siones hay una considerable cantidad de técnicas que se basan en la programación matemática; una de estas es la PL que no es una sustituta de los Admi-- nistradores ni pretende serlo, pero si es un herramienta muy útil para intentar obtener una mejor solución de un problema.

A diferencia de las bases cualitativas, (experiencia, hechos, intuición, y opiniones consideradas), la PL no solamente proporciona una buena so lución o una solución satisfactoria, sino que ofrece la mejor solución (óptima). La PL es una de las técnicas de la IO que tiene mayor utilización en la actualidad dentro de las organizaciones. Su aplicación no sólo se limita a ciertas áreas de la organización, sino que su campo es tan extenso como extensas sean las áreas en donde existan recursos escasos para actividades competidoras.

En cualquier campo en donde se dé esta situación tendrá aplicación la PL. Unos ejemplos de su aplicación son: En la planeación de la producción mezcla de alimentos, corte y ajuste de materiales, balance en ensamble, control de calidad, inventarios, mezcla de materiales, presupuesto de publicidad, distribución de materiales, asignación de personal, problemas de desempleo, redes de comunicación, generación y distribución de energía eléctrica-modelos financieros y económicos, administración pública, mantenimiento correctivo, etc...

2.4 Ventajas y desventajas de la PL.

La PL en su aplicación posee una serie de ventajas las cuales la hacen ser una de las técnicas de IO más utilizadas actualmente. Sus ventajas más marcadas son:

-- La utilización óptima de los factores productivos dentro de la empresa. Indica la forma en que un Administrador puede emplear más eficazmente esos elementos.

-- La mejor calidad de las decisiones. Se hace que el Administrador sea más objetivo (mediante el proceso de PL), y no subjetivo (como piensa en virtud de las condiciones existentes).

-- Ayuda a que el Administrador comprenda que las reglas de tanteo o las corazonadas ya no son los medios apropiados para la Toma de Decisiones. Actualmente los Administradores les interesa prepararse tanto a sí mismos como a sus sucesores, con un método sistemático para la solución de problemas que lo requieren.

-- Si los jóvenes Administradores analizan los problemas de los negocios describiéndolos con un modelo requerido por la PL tendrán que obtener los he chos asociados al problema, y por consiguiente una cuarta ventaja de la PL es que ofrece un medio sustancial para mejorar los conocimientos y pericias de los Administradores del mañana.

-- Hay que considerar el hecho de que la PL dá soluciones posibles y prácticas, aunque pueda haber otras restricciones que funcionen fuera del problema y que sea necesario tener en cuenta, por ejemplo las demandas de ventas. El hecho de que el método de PL pueda modificar su solución matemática en favor de la conveniencia, puede considerarse por sí mismo como una quinta ventaja.

-- El señalamiento de los cuellos de botella en las operaciones actuales, lo que puede dar por resultado la promoción de productos indebidos.

Por ser la PL una técnica de programación matemática representa ciertas desventajas para los Administradores. Estas pueden ser:

-- El grupo de investigadores de operaciones debe definir la función objetivo y las restricciones, que pueden cambiar de la noche a la mañana, debido tanto a factores internos como externos.

-- Deben conocer exactamente la cantidad de recursos productivos de la empresa (mano de obra, materia prima y maquinaria) expresados en medidas que puedan utilizarse.

-- Los gerentes que pretendan utilizar esta técnica deben cerciorarse de que existe una aplicación práctica para el modelo de PL que escojan, aunque el problema se exprese correctamente y se formule matemáticamente, puede haber algunos factores limitativos desde un punto de vista práctico.

-- Cuando la función objetivo y las restricciones no son lineales, hay que ser extremadamente precavidos cuando se aplique la programación lineal, porque su aplicación incorrecta en las condiciones no lineales, ordinariamente dá por resultado una solución incorrecta.

En resúmen, la PL es una técnica cuyo orígen es relativamente reciente, ha tenido una influencia favorable y de gran importancia en muchos problemas periódicos de negocios. Los problemas que antes se creían insolubles se formulan fácilmente en términos de restricciones y de una función objetivo. Se considera que la PL está en su infancia y que todavía quedan -

muchas variaciones por descubrir. El uso más riguroso de las computadoras - pondrá en primera línea esos nuevos perfeccionamientos, por consiguiente la PL es un instrumento de la Administración y un proceso analítico que ofrece grandes ventajas, a pesar de tener limitaciones, para determinar las solu-- ciones óptimas de los interminables problemas de la empresa.

C A P I T U L O I I I

REPRESENTACION GRAFICA PARA DOS VARIABLES.

3.1 Problema de Maximización.

La empresa "D'Vestir S.A." tiene como giro la elaboración de bolsas de vestir, y como cualquier otra empresa, desea saber como obtener un beneficio mayor del producto de sus ventas. Para maximizar las utilidades, se encuentra con el problema de determinar el número de unidades (bolsas) que debe producir para conseguir su objetivo.

"D'Vestir S.A." cuenta con un distribuidor que asegura que existe mercado para bolsas que pueden ser colocadas a un precio mediano y a un precio alto. Este distribuidor se compromete a comprar toda la producción de bolsas de la empresa, que pueda lograr en los siguientes tres meses, siempre y cuando las bolsas tengan un precio competitivo en el mercado.

Después de hacer un análisis de todos los pasos que envuelven a la producción de las bolsas, se puede resumir de la siguiente forma:

1.- Corte y Teñido del material
2.- Cosido del material
3.- Acabados
4.- Inspección y Empacado

El gerente de producción analizó cada uno de los pasos del proceso productivo y concluyó que para producir bolsas a un precio medio (modelo estándar) cada bolsa producida requiere 7/10 de hora en el departamento de cor te y teñido, 1/2 hora en el departamento de costura, 1 hora en el departamento de acabados, y 1/10 de hora en el departamento de inspección y empacado. Las bolsas de precio alto (modelo de lujo) requieren de 1 hora en el departamento de corte y teñido, 5/6 de hora en el departamento de cosido, 2/3 de hora en los acabados, y 1/4 de hora en el de inspección y empacado. Esta información se resume en la tabla 3.1 .

	Tiempos de producción (horas)			
PRODUCTO	CORTE Y TEÑIDO	COSIDO	ACABADOS	INSPECCION Y EMPACADO
BOLSA ESTANDAR	7/10	1/2	1	1/10
BOLSA DE LUJO	1	5/6	2/3	1/4

tabla 3.1

El departamento de mercadotécnia analizó esta tabla de producción,-- asignó los costos a las variables relevantes, y logró un precio para ambas-- bolsas que representan una ganancia de $5000 para la bolsa estándar y $4500 para la bolsa de lujo producida.

El gerente de producción estimó que 630 horas de corte y teñido, 600 horas de cosido, 708 de tiempo de acabado y 135 horas de inspección y empacado, es el total de tiempo disponible para la producción de bolsas estándar y de lujo para los siguientes tres meses. El problema de "D'Vestir S.A." es determinar cuantas bolsas estándar y de lujo debe producir para maximizar su-- ganancia.

3.1.1 La función objetivo.

Para la empresa "D'Vestir" el objetivo es maximizar sus ganancias. Se puede escribir este objetivo en una forma más específica con la introducción de una simple notación. Sea:

x_1 = No. de bolsas estándar producidas

x_2 = No. de bolsas de lujo producidas

Las utilidades de D'Vestir provienen de dos fuentes:

1) La utilidad obtenida de la producción de x_1 bolsas estándar y

2) La utilidad obtenida de la producción de x_2 bolsas de lujo.

La empresa espera obtener una ganancia de \$5000 por bolsa estándar-- producida y \$4500 por bolsa de lujo producida, por consiguiente la compañía- hará $5000x_1$ bolsas estándar y $4500x_2$ bolsas de lujo. La Cía. hará $4500x_2$ sí x_2 bolsas de lujo son producidas. Denotando la ganancia total por "z", se tiene:

$$\text{ganancia total} = z = \$5000x_1 + \$4500x_2 \qquad (3.1)$$

La solución al problema de la empresa es la decisión que hará maximi zar la ganancia total, que deberá determinar el valor de las variables x_1 y- x_2 que producirá el mayor valor posible de "z". En la terminología de la - PL se refiere x_1 y x_2 como las variables de decisión. Desde el objetivo -- maximizar la ganancia total, es una función de estas variables de decisión,- se refiere a $5000x_1 + 4500x_2$ como la función objetivo.

$$\max \ z = 5000x_1 + 4500x_2$$

Suponiendo que D'Vestir decida hacer 400 bolsas estándar y 200 de lu jo, según la ecuación anterior se tiene lo siguiente:

$$z = 5000(400) + 4500(200)$$
$$z = 2\ 900\ 000$$

Que sería la ganancia que se obtuviera.

Podría tomarse la decisión de hacer otra combinación por ejemplo pro duciendo 800 bolsas estándar y ninguna de lujo en este caso la utilidad de- la Cía. sería:

$$z = 5000(800) + 4500(0)$$
$$z = 4\ 000\ 000$$

Ciertamente la segunda combinación de producción es mejor para D'Ves tir, en términos de lo dicho del objetivo, que es maximizar la ganancia. Esto es a simple vista, pero no es posible para D'Vestir producir esta combi nación porque si se recuerda la tabla 3.1 se comprende que no hay tiempo su ficiente de producción para esta combinación. Se requiere de 560 hrs. de -- corte y teñido, 400 hrs. de cosido, 800 hrs. de acabado, y 80 hrs. de ins-- pección y empacado. Es en el departamento de acabado donde no se cuenta con- las horas suficientes para alcanzar esta producción. D'Vestir no está lista-para aceptar 800 bolsas estándar y ninguna bolsa de lujo como una buena alternativa de producción. Esto quiere decir que la empresa sólo puede aceptar una combinación cuyo tiempo requerido de producción sea igual o menor que el total de horas disponibles para cada uno de los cuatro departamentos.

En el problema de la empresa D'Vestir alguna combinación de la producción en particular de bolsas estándar y bolsas de lujo es referida como una solución al problema. Sólo las soluciones que satisfacen a todas las restricciones serán referidas como SOLUCIONES FACTIBLES. La solución factible particular que resulta ser la que proporciona la mayor ganancia, es referida como la combinación de la producción óptima o SOLUCION OPTIMA.

3.1.2 Las restricciones.

Toda la producción de bolsas estándar y de lujo tienen que haber pasado directamente por las cuatro operaciones de manufacturación. Entonces es una limitante a alcanzar, el tiempo de producción disponible para cada una de esas operaciones. Se pueden considerar esas cuatro restricciones como límite del número total de bolsas que se pueden producir. En lo sucesivo estarán claramente especificadas todas las restricciones asociadas con el problema de D'Vestir.

De la información del tiempo de producción, se conoce que para producir las bolsas estándar se requiere de 7/10 de hora para corte y teñido. De aquí que el número total de horas de corte y teñido usadas en la elaboración de una bolsa estándar (x_1) será de $7/10\ x_1$. Todas las bolsas de lujo que se produzcan requieren de 1 hora de corte y teñido por cada una, de esta manera las bolsas de lujo (x_2) usarán $1x_2$ horas de tiempo de corte y teñido. El tiempo total de corte y teñido requerido para la producción de x_1 bolsas estándar y x_2 bolsas de lujo es dado por :

tiempo total requerido de corte y teñido es = $7/10x_1 + 1x_2$

El gerente de producción ha dicho que se cuenta con 630 hrs. de tiempo disponible para corte y teñido. En seguida se muestra la combinación que satisface los requerimientos:

$$7/10\ x_1 + 1\ x_2 \leq 630 \qquad (3.2)$$

La relación (3.2) es referida como una desigualdad, denota el hecho de que el total de horas usadas para la operación de corte y teñido en la -- producción de x_1 bolsas estándar y x_2 bolsas de lujo, debe ser menor o igual que el máximo tiempo disponible de D'Vestir para el corte y teñido. Entonces la desigualdad (3.2) representa la restricción de corte y teñido.

Así también en la tabla 3.1 se puede ver que para la elaboración de- una bolsa estándar se requiere de 1/2 hora de cosido y para una bolsa de lujo se necesita 5/6 de hora de cosido. D'Vestir cuenta con 600 horas de cosido disponibles, esto es lo siguiente:

$$1/2\ x_1 + 5/6\ x_2 \leq 600 \qquad (3.3)$$

La desigualdad (3.3) es la representación matemática de la restricción de cosido. Siguiendo este mismo razonamiento la restricción para la capacidad de tiempo de acabados es:

$$1\ x_1 + 2/3\ x_2 \leq 708 \qquad (3.4)$$

Y la restricción para la capacidad de tiempo de inspección y empacado es:

$$1/10\ x_1 + 1/4\ x_2 \leq 135 \qquad (3.5)$$

Ahora, se tienen especificadas las restricciones matemáticas para las restricciones asociadas con las cuatro operaciones productivas, pero existe- aún una restricción muy importante para el problema. Como no es posible que- D'Vestir produzca un número negativo de bolsas se tienen las siguientes dos- restricciones:

$$x_1 \geq 0 \qquad y \qquad x_2 \geq 0 \qquad (3.6)$$

El signo mayor o igual que (=), que indica que no es posible producir "menos una bolsa"; a esto se refiere la NO NEGATIVIDAD de las variables.

La no negatividad de las variables es una característica general de- los problemas de PL y se escribirá de la siguiente forma:

$$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$$

3.1.3 Formulación matemática del problema.

El informe de la formulación matemática del problema está ahora completo. Se tiene éxito si se logra traducir el objetivo y las restricciones- del caso real a una relación matemática que se referirá a un MODELO MATEMA-

TICO. El modelo matemático completo para el problema de D'Vestir es:

$$\max\ 5000x_1 + 4500x_2$$

sujeto a (s.a)

$$\begin{array}{rcrcll} 7/10\, x_1 & + & 1\, x_2 & \leq & 630 & \text{corte y teñido} \\ 1/2\, x_1 & + & 5/6 x_2 & \leq & 600 & \text{cosido} \\ 1\, x_1 & + & 2/3 x_2 & \leq & 708 & \text{acabado} \\ 1/10\, x_1 & + & 1/4 x_2 & \leq & 135 & \text{inspección y empacado} \\ & & x_1 , x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Ahora el trabajo es encontrar la mezcla de productos (la combinación de x_1 y x_2) que satisfagan todas las restricciones y al mismo tiempo produzcan un valor de la función objetivo, esto es tan grande o igual al valor dado por alguna otra solución factible. Una vez hecho esto, se habrá encontrado la solución óptima del problema.

El modelo matemático del problema de la empresa es un problema lineal. El problema contiene el objetivo y las restricciones, lo anterior es una característica común en todos los problemas lineales. La característica especial de la PL es que la función objetivo y todas las restricciones (el lado izquierdo de las desigualdades) son funciones lineales de las variables de decisión.

Hablando matemáticamente, a cada una de las funciones en donde aparecen las variables de decisión elevadas a la primera potencia se les llamará funciones lineales.

La función objetivo $5000x_1 + 4500x_2$ es lineal, porque cada una de las variables de decisión que aparecen, están elevadas a un exponente de 1. Si la función objetivo apareciera como: $5000x_1^2 + 4500\sqrt{x_2}$, no sería una función lineal. Lo mismo ocurre con las desigualdades de las restricciones, sus variables de decisión están elevadas a la primera potencia y por consiguiente son lineales.

3.1.4 Representación Gráfica.

Un camino rápido para solucionar un problema de PL teniendo solo dos variables de decisión es la representación gráfica. Aunque la representación gráfica es difícil para la solución de problemas de tres variables, y no pue de usarse para problemas grandes, la explicación que se dá de este método será invaluable como un auxilio para la comprensión misma de conceptos más avanzados que se estudiarán posteriormente en este trabajo. En suma, la representación gráfica provee una base intutiva para métodos de solución más prácticos como el Método Simplex, que se explicará en el capítulo siguiente.

Se comienza la solución gráfica procediendo a desarrollar una gráfica que podrá usarse para mostrar las posibles soluciones (valores de x_1 y x_2) para el problema de D'Vestir. La gráfica tiene los valores de x_1 en el eje horizontal y los valores de x_2 en el eje vertical. Se puede identificar cualquier punto sobre la gráfica por los valores de x_1 y x_2, que indican la posición del punto a lo largo de los ejes x_1 y x_2 respectivamente. Por lo tanto todo punto (x_1,x_2) corresponde a una posible solución. El punto de solución donde $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ se encuentra en el orígen.

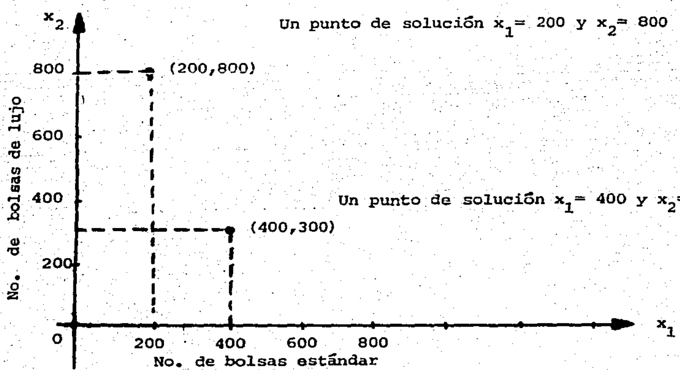


figura 3.1

Se procederá a mostrar que las posibles combinaciones de x_1 y x_2, esto es, los puntos de solución, corresponderán a las soluciones factibles para el problema lineal. Ambos x_1 y x_2 deben ser no negativos, se necesita considerar únicamente los puntos donde $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Esto se indica en la figura 3.2 por flechas en la dirección de las combinaciones de producción que satisfacen la restricción de no negatividad.

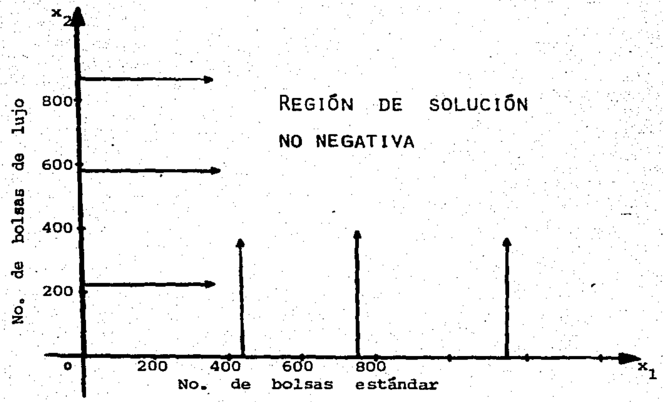


figura 3.2

Anteriormente se vió que la representación de la desigualdad de la-- restricción de corte y teñido estaba en la forma:

$$7/10\ x_1 + 1x_2 \leq 630$$

Al mostrar todos los puntos que satisfacen esta relación, se inicia- graficando la línea correspondiente a la ecuación:

$$7/10\ x_1 + 1x_2 = 630$$

La gráfica de esta ecuación encuentra e identifica dos puntos que se sitúan sobre los ejes x_1 y x_2, y dibuja una línea recta entre los puntos. Colocando a $x_1 = 0$ y determinando el valor de x_2, se tiene el punto ($x_1 = 0$, $x_2 = 630$) que satisface la ecuación anterior. Para encontrar un segundo punto que satisfaga esta ecuación se coloca a $x_2 = 0$ y se determina el valor de x_1. Haciendo esto, se tiene $7/10\ x_1 + 1\ (0) = 630$ lo que dá $x_1 = 900$. Por - lo tanto un segundo punto que satisface esta ecuación es $(x_1=900, x_2= 0)$, teniendo estos dos puntos se puede ahora gráficar la línea correspondiente a-- la ecuación:

$$7/10\ x_1 + 1\ x_2 = 630$$

Esta línea se llamará, línea de restricción de corte y teñido. Para identificarla en la gráfica se abreviará "C-T".

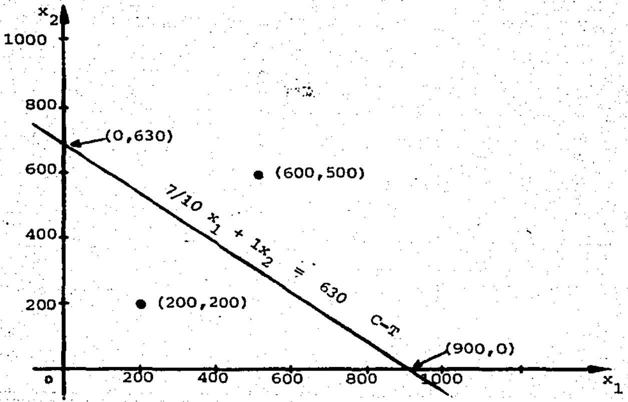


figura 3.3

Se vuelve a presentar la desigualdad que representa la restricción - de corte y teñido:

$$7/10 \; x_1 + 1 \; x_2 \leq 630$$

Bien, entonces se tiene la línea en donde $7/10 \; x_1 + 1x_2 = 630$, se conoce-- algún punto sobre la línea que debe satisfacer la restricción. Pero hay que- determinar en donde están los puntos de solución que satisfacen $7/10 \; x_1 + 1 \; x_2 \leq 630$. Se consideran dos puntos de solución ($x_1 = 200$, $x_2 = 200$) y --- ($x_1 = 600$, $x_2 = 500$) se puede ver en la figura 3.3 que el primer punto de solución está debajo de la línea de restricción y el segundo punto está arriba de la restricción. Para saber cual de los dos puntos de solución satisface- la restricción de corte y teñido, se tiene que $7/10 \; x_1 + 1x_2 = 7/10 \; (200) + 1(200) = 340$. Esto es las 340 hrs. son menos que las 630hrs. disponibles,-- la combinación de producción $x_1 = 200$, $x_2 = 200$ o punto de solución, si satisface la restricción. Para $x_1 = 600$, $x_2 = 500$ se tiene:

$$7/10 \; x_1 + 1 \; x_2 = 7/10 \; (600) + 1(500) = 920$$

Esto es, las 920 hrs. son más que las 630 hrs. de que se dispone. El punto de solución $x_1 = 600$, $x_2 = 500$ no satisface la restricción, y por eso es una alternativa de producción inaceptable. Para asegurarse se pueden tomar otros puntos de solución que estén bajo la restricción y todos deberán cumplir con esta.

En la figura 3.4 se indica una parte sombreada de la gráfica, que contiene una serie de puntos, esta región de la gráfica corresponde a todos los puntos que satisfacen la restricción de corte y teñido.

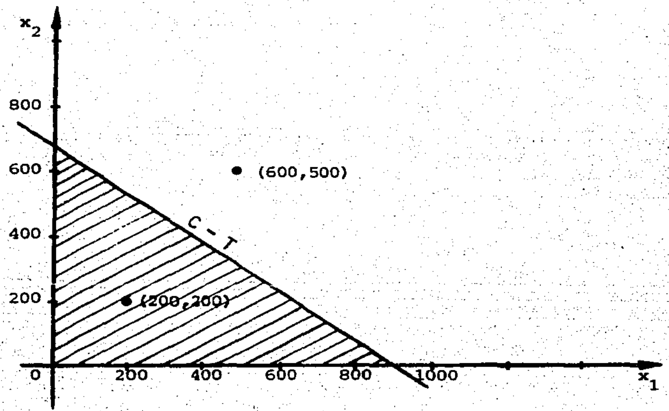


figura 3.4

Se continuará con la identificación de los puntos que satisfacen la restricción de cosido.

$$1/2\ x_1 + 5/6\ x_2 \leq 600$$

Se principia dibujando la línea de restricción correspondiente a la ecuación:

$$1/2\ x_1 + 5/6\ x_2 = 600$$

Para poder gráficar esta restricción es necesario primero tener dos puntos. Por lo tanto se dá a x_1 el valor de cero y se determina el valor de x_2, lo cual produce el punto ($x_1 = 0$, $x_2 = 720$) el segundo punto ($x_1 = 1200$,--

$x_2 = 0$). En la figura 3.5 está dibujada la línea correspondiente a la restricción de cosido. Para identificar la línea de esta restricción será llamada "C". Usando el mismo camino que para la restricción de corte y teñido, de esta manera la región sombreada en la gráfica 3.5 corresponde a todas las combinaciones de producción factibles o los puntos de solución factibles para la operación de cosido.

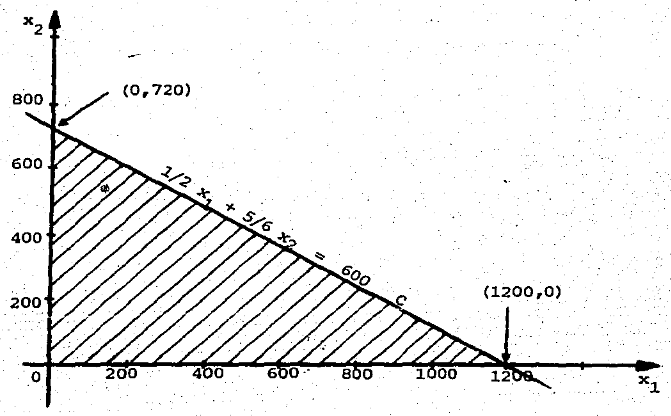


figura 3.5

En una forma similar, se puede determinar todas las combinaciones de producción factibles para cada una de las restricciones restantes. Los resultados se muestran en las figuras 3.6 y 3.7 . A la restricción de acabados se le identificará como "A" y la de inspección y empacado será "I-E".

Ahora se tienen cuatro gráficas separadas, mostrando los puntos de solución factible para cada una de las cuatro restricciones. En un problema de PL es necesario identificar todos los puntos de solución que satisfacen todas las restricciones simultaneamente. Para hallar esos puntos de solución se pueden dibujar las cuatro restricciones en una gráfica y observar la región que contiene los puntos que satisfacen todas las restricciones.

Las gráficas de las figuras 3.4 a 3.7 se pueden sobreponer para obtener una gráfica con las cuatro restricciones. Esta gráfica se muestra en la

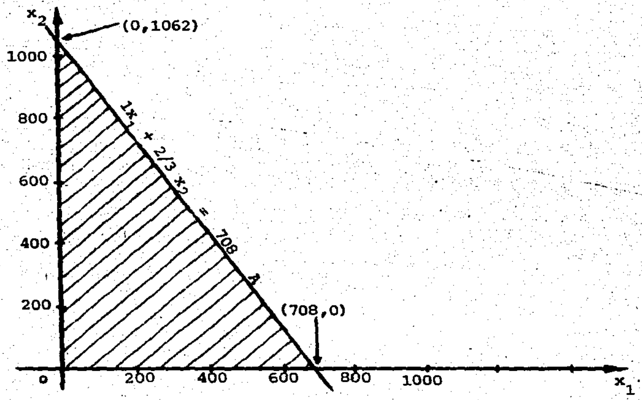


figura 3.6

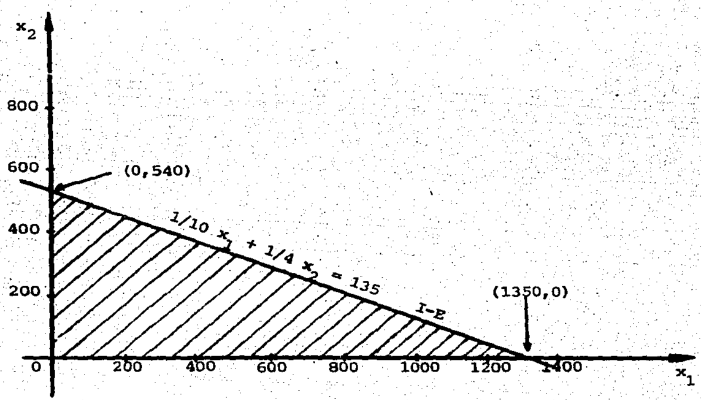


figura 3.7

figura 3.8 . La región sombreada en esta gráfica incluye todos los puntos de solución que satisfacen todas las restricciones. Por lo tanto, "las soluciones que satisfacen todas las restricciones son llamadas SOLUCIONES FACTIBLES" La región sombreada es llamada región de solución factible, o simplemente REGION FACTIBLE. Algún punto sobre los límites de la región factible o dentro de la región factible es un punto factible de solución, todos los puntos que quedan fuera de la región factible no cumplen con una o más restricciones y son de esta forma infactibles o inaceptables.

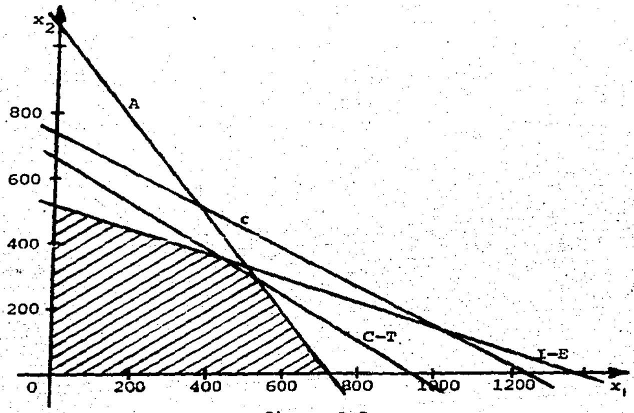


figura 3.8

Ahora se tiene identificada la región factible, ya se puede continuar con el procedimiento de solución gráfica y encontrar la solución óptima para el problema de D'Vestir. La solución óptima para un problema de PL es la solución factible que provee el mejor valor posible de la función objetivo.

Se pueden seleccionar arbitrariamente puntos de solución factible -- (x_1, x_2) y calcular la ganancia $5000x_1 + 4500x_2$ pero este es un camino muy difícil porque hay muchas soluciones factibles, y de esta manera no sería posible evaluar todas las soluciones factibles. De aquí que este procedimiento de prueba-error no garantiza que la solución óptima pueda obtenerse. Hay un mejor camino para encontrar la solución óptima.

Se comienza dibujando la región factible en una gráfica por separado Esto se muestra en la figura 3.9 .

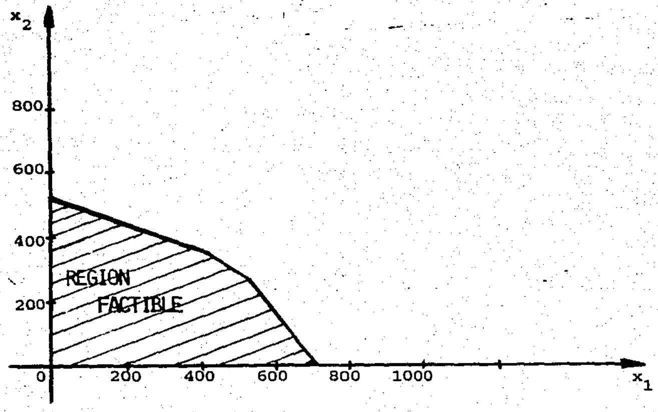


figura 3.9

En lugar de elegir una solución factible arbitrariamente y calcularla en la función objetivo, se seleccionará una utilidad al azar y se definirán-- los puntos de la solución factible (x_1,x_2) que produce la utilidad (ganancia) seleccionada. Por ejemplo, determinar los puntos de solución factible que pro vee una ganancia de $900 000. Esto es, se quieren encontrar los valores de x_1 y x_2 en la región factible, lo cual se hará en la función objetivo.

$$5000\ x_1 \quad + \quad 4500\ x_2 \quad = \quad 900\ 000$$

La ecuación anterior es simplemente la ecuación de una línea. De esta manera todos los puntos de solución factible (x_1,x_2) producen una ganancia de $900 000 deben estar sobre la línea. Anteriormente se explicó como graficar - la línea de una restricción, el procedimineto para graficar la línea de ganan cia de la función objetivo es la misma, teniendo $x_1= 0$ se vé que $x_2= 200$ de - esta manera que el punto $(x_1= 0,x_2= 200)$ está sobre la línea. Igualmente te-- niendo $x_2= 0$ el punto de solución es $(x_1= 180,x_2= 0)$ está también sobre la lí nea. Dibujando una línea recta entre los dos puntos se tienen identificadas - todas las soluciones que tienen una ganancia de $900 000. Una gráfica de esta línea de ganancia es presentada en la figura 3.10 . En esta gráfica se pue-- de ver que hay un número infinito de combinaciones de producción factibles-- que proporcionarán una ganancia de \$900 000.

Desde el principio el objetivo es encontrar el punto de solución factible que proporcione la ganancia más alta, se procederá a seleccionar valores altos de ganancia y a encontrar los puntos de solución que produzcan dicha ganancia. Por ejemplo: Determinar los puntos de solución factible que -- proveen una ganacia de \$1 800 000 y los puntos de solución que proporcionan- \$2 700 000. Para esto, se deberá encontrar los valores de x_1 y x_2 que están- en las siguientes líneas:

$$5000\ x_1 + 4500\ x_2 = 1\ 800\ 000$$
$$5000\ x_1 + 4500\ x_2 = 2\ 700\ 000$$

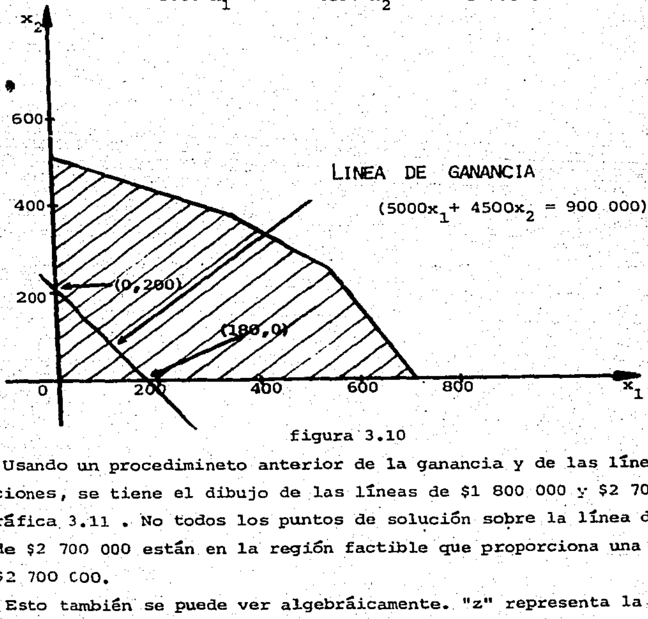


figura 3.10

Usando un procedimineto anterior de la ganancia y de las líneas de - restricciones, se tiene el dibujo de las líneas de \$1 800 000 y \$2 700 000 - en la gráfica 3.11 . No todos los puntos de solución sobre la línea de la ganancia de \$2 700 000 están en la región factible que proporciona una ganan-- cia de \$2 700 000.

Esto también se puede ver algebráicamente. "z" representa la ganan--

cia total. La función objetivo es :

$$z = 5000x_1 + 4500x_2$$

Resolviendo para los términos de x_1 y x_2 se obtiene:

$$4500x_2 = -5000x_1 + z$$

$$x_2 = (-5000/4500)x_1 + (1/4500)z \qquad (3.7)$$

La ecuación (3.7) es una ecuación lineal relacionando x_1 y x_2. El coeficiente de x_1, -5000/4500 es la pendiente de la línea y el término z/4500 es la intersección con x_2 (esto es, el valor de x_2 donde la gráfica de la ecuación (3.7) cruza el eje x_2). Sustituyendo el valor de las ganancias de z = 900 000 , z = 1 800 000 y z = 2 700 000 en la ecuación (3.7) produce las siguientes ecuaciones de pendiente-intersección para las líneas de ganancia que se muestran en la figura 3.11 .

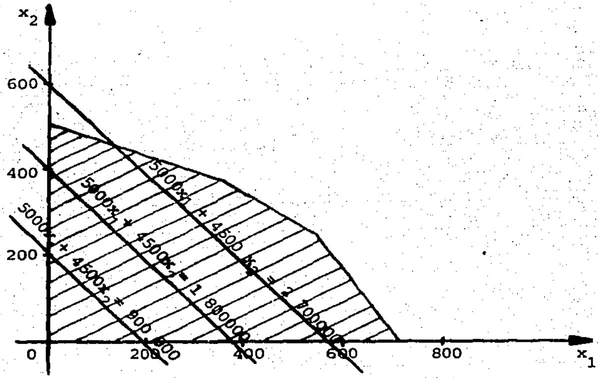


figura 3.11

Para la ganacia $z = 900\ 000$

$$x_2 = (-5000/4500)x_1 + 200$$

Para la ganancia $z = 1\ 800\ 000$

$$x_2 = (-5000/4500)x_1 + 400$$

Para la ganancia $z = 2\ 700\ 000$

$$x_2 = (-5000/4500)x_1 + 600$$

La pendiente (-5000/4500) es la misma para cada una de las líneas de ganancia, las líneas de ganancia son paralelas. Se vé que la intersección de x_2 se incrementa en cuanto más grande es el valor de la ganancia. De esta manera las líneas de ganancia más altas están más alejadas del origen.

Porque las líneas de ganancia son paralelas y las líneas de ganancia alta están más alejadas del origen, se podrá obtener puntos de solución que produzcan los valores más altos para la función objetivo, se procederá a cambiar la línea de ganancia más alejada del origen de modo tal que permanezca paralela a las otras líneas de ganancia. Sin embargo en algún punto se encontrará que algún movimiento externo más allá, situará a la línea de ganancia fuera de la región factible. Los puntos que quedan fuera de la región factible no se aceptan. "El punto de la región factible que tiene el valor más favorable de la función objetivo es la solución óptima del programa lineal"[1].

Para identificar el punto de solución óptima se puede hacer de esta forma: Usando una regla, hay que mover la línea de ganancia tan lejos como sea posible del origen. El último punto que se toca con la regla en la región factible es el de solución óptima, esto está representado gráficamente en la figura 3.12 .

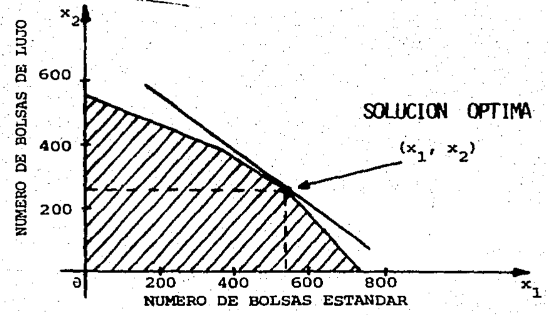


figura 3.12

1) Hillier Frederick y Lieberman Gerarld. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. México: Ed. McGraw-Hill, 1982. p. 22

Los valores óptimos de las variables de decisión son x_1 y x_2 en la solución óptima. Dependiendo de la complejidad del problema y de la exactitud de la gráfica, a veces resulta posible pero otras no, determinar con exactitud los valores de x_1 y x_2. Refiriéndose a la gráfica 3.12 lo mejor que se puede hacer es concluir que la combinación de la producción óptima consiste aproximadamente de 550 bolsas estándar (x_1) y 250 bolsas de lujo (x_2). Aunque las figuras 3.8 y 3.12 muestran que el punto de solución óptima está en la intersección de la línea de corte y teñido y la de acabado. Esto es, el punto de solución óptima está en ambas líneas de restricción:

$$7/10\ x_1 + 1\ x_2 = 630 \qquad (3.8)$$

y

$$1\ x_1 + 2/3\ x_2 = 708 \qquad (3.9)$$

De esta manera los valores de las variables de decisión x_1 y x_2 deben satisfacer ambas ecuaciones (3.8) y (3.9) simultaneamente. Usando la ecuación (3.8) y resolviendo para x_1 se tiene

$$7/10\ x_1 = 630 - 1\ x_2$$

ó

$$x_1 = 900 - 10/7\ x_2$$

Sustituyendo esta expresión para x_1 en la ecuación (3.9) y resolviendo para x_2 se tiene lo siguiente:

$$1(900 - 10/7\ x_2) + 2/3\ x_2 = 708$$

$$900 - 10/7\ x_2 + 2/3\ x_2 = 708$$

$$900 - 30/21\ x_2 + 14/21\ x_2 = 708$$

$$-16/21\ x_2 = -192$$

$$-x_2 = -192(21)/16$$

$$x_2 = 252$$

Usando x_2 igual a 252 en la ecuación (3.8) y resolviendo para x_1 se tiene:

$$x_1 = 900 - 10/7[252]$$

$$x_1 = 900 - 360 = 540$$

De esta manera la localización exacta del punto de solución óptima es $x_1 = 540$ y $x_2 = 252$.

De aquí que la cantidad óptima de producción para D'Vestir es 540 -- bolsas estándar y 252 bolsas de lujo, que dá como resultado una ganancia de- 5000(540) + 4500(252) = $3 834 000.

3.1.5 Resúmen del procedimiento de solución gráfica.

El procedimiento de solución gráfica es un método de solución para - problemas de PL con dos variables, como es el problema de D'Vestir. Los pa-- sos de la representación gráfica para problemas de maximización son:

1.- Hacer una gráfica de los puntos de solución factible para cada una de--- las restricciones.
2.- Determinar la región factible identificando los puntos de solución que - satisfagan simultaneamente todas las restricciones.
3.- Dibujar una línea de ganancia mostrando todos los valores de x_1 y x_2 que producen un valor específico de la función objetivo.
4.- Mover paralelamente las líneas de ganancia hacia las ganancias más altas (usualmente en sentido opuesto al orígen). Tan altas como se pueda, que- otro nuevo movimiento pondrá a la línea de ganancia completamente fuera- de la región factible.
5.- El punto factible que se sitúe en la línea de ganancia más alta es el -- punto de solución óptima.

3.2 Problema de minimización.

Muchos problemas de PL se formulan como problemas de minimización. Por ejemplo el caso de una manufacturera que se comprometió a vender cierto- número de unidades de un producto a varios compradores. La manufacturera no- está preocupada por las unidades a producir,el problema es uno, minimizar el costo total para la demanda actual de producción. Como ilustración de como - un problema de minimización puede ocurrir, se considera el problema con que- se encontró la Fuji-Film.

La Fuji-Film produce dos clases de fluídos para revelado fotográfico El costo de ambos productos es de 500 por galón. Basándose en un análisis de niveles corrientes de inventarios y en las órdenes pendientes para el próximo mes, el director de la Fuji-Film (FF) tiene especificado como mínimo 30 galones del producto 1 y 20 galones del producto 2, esto será durante las dos siguientes semanas. También dijo el director que tiene en existencia un material crudo altamente perecedero que se requiere en la producción de ambos fluídos, por lo tanto deberán ser usados en las dos próximas semanas. El inventario del material crudo perecedero es de 80 kilogramos. Después se ordenará más de este material si es necesario, el material que no sea usado en las dos próximas semanas ya no podrá ser usado en alguna producción futura. De aquí que el director requirió un mínimo de 80 kg que se usarán en las dos semanas siguientes. Se sabe que el producto 1 requiere 1 kg de material crudo perecedero por galón, y el producto 2 requiere de 2 kg de este mismo material por galón. El objetivo de la FF es mantener el nivel de costos de producción lo más reducido posible, el director planea para disminuir el costo de producción, usar el total de los 80 kg de material crudo perecedero y suministrar un mínimo de 30 galones del producto 1 y 20 galones del producto 2.

Para resolver este problema hay que expresarlo como un problema lineal, siguiendo un procedimiento similar al problema de D'Vestir, primero se definirán las variables de decisión y la función objetivo del problema. Esto es:

x_1 = No. de galones producidos del producto 1

x_2 = No. de galones producidos del producto 2

La función objetivo que representa el costo total es:

$$\min z = 500\,x_1 + 500\,x_2$$

Para la restricción del material crudo perecedero, el producto 1 emplea 1 kg por galón y el producto 2 utiliza 2 kg por galón. El número total de kilogramos de material crudo perecedero requerido para producir x_1 unidades del producto 1 y x_2 unidades del producto 2 es :

$$1\,x_1 + 2\,x_2$$

Esta restricción tiene como mínimo el uso de 80 kg de material crudo p., la restricción es:

$$1\,x_1 + 2\,x_2 \geq 80$$

Con las restricciones de producir un mínimo de 30 galones para el -- producto 1 (x_1= 30) , y 20 galones del producto 2 (x_2= 20) y la restricción- de no negatividad (x_1,x_2 = 0) se tiene la siguiente formulación de PL del -- problema de la FF:

$$\min \quad z = 500x_1 + 500x_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{array}{rrl} 1x_1 + 2x_2 & \geq 80 & \text{material crudo p.} \\ 1x_1 & \geq 30 & \text{producto 1} \\ 1x_2 & \geq 20 & \text{producto 2} \\ x_1 , x_2 & \geq 0 & \end{array}$$

Este modelo de PL tiene sólo dos variables de decisión, exactamente- como el problema de D'Vestir, el método gráfico se usará para hallar la cuantificación de la producción óptima. El método gráfico para este problema, requiere de graficar todas las líneas de restricción en órden para encontrar-- todos los puntos de solución factible. En el problema de la FF el "mayor o - igual que" de las restricciones causará que los puntos de solución factible- estén arriba de las líneas de restricción. Las líneas de restricción y la región factible están representadas en la figura 3.13 .

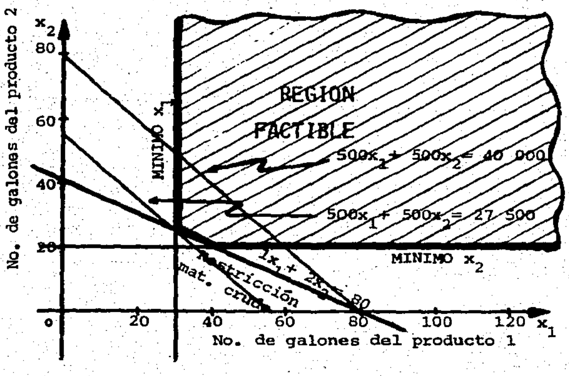


figura 3.13

Para determinar el valor mínimo del costo ($500x_1 + 500x_2$) primero se dibuja la línea de costo correspondiente al valor particular de $z = 500x_1 + 500x_2$. Por ejemplo: Se puede comenzar dibujando la línea $500x_1 + 500x_2 = 40000$ La figura 3.13 muestra la gráfica de esta línea. Claramente se vé, que hay muchos puntos en la región factible produciendo este valor de costo (por ejemplo $x_1 = x_2 = 40$).

Para encontrar los valores de x_1 y x_2 que producen la solución de costo mínimo se mueve la línea de costo en una dirección hacia abajo y a la izquierda, si se desplaza todavía más, quedará totalmente fuera de la región factible. Nótese que la línea $500x_1 + 500x_2 = 27\,500$ intersecta la región factible en el punto ($x_1 = 30$, $x_2 = 25$). De esta manera la solución óptima del problema es $x_1 = 30$ y $x_2 = 25$ con el correspondiente valor de la función objetivo de 27 500. También en la figura 3.13 se puede ver que la restricción del material crudo p. y la restricción de mínimo x_1 se cruzan y que, exactamente como el problema de D'Vestir la solución óptima se encuentra en un punto extremo de la región factible.

3.2.1 Resúmen del procedimiento de solución gráfica (Minimización)

Los pasos del procedimiento de solución gráfica para un problema de minimización son:

1.- Hacer una gráfica de los puntos de solución factible para cada una de las restricciones.

2.- Determinar la región factible identificando los puntos de solución que satisfagan simultaneamente todas las restricciones.

3.- Dibujar una línea de costo mostrando todos los valores de las variables x_1 y x_2 que produzcan un valor específico de la función objetivo.

4.- Mover paralelamente las líneas de costos hacia los costos más bajos (usualmente hacia el orígen). Tan bajos como se pueda, que otro nuevo movimiento pondrá a la línea de costos fuera de la región factible.

5.- El punto extremo factible que es tocado por la línea de costo más bajo es la solución óptima.

3.3 Algunas consideraciones sobre la región factible.

Un aspecto importante en la región factible, es que el área sombreada está formado por un conjunto de puntos, los cuales son posibles de conectar por medio de una línea recta que permanezca dentro del mismo conjunto. "Esta propiedad es la que define a los conjuntos convexos, por esto es que se puede afirmar que el espacio de soluciones obtenido por un conjunto de restricciones lineales es un conjunto CONVEXO, o bien que el espacio de soluciones factibles establece un conjunto convexo"[1].

La propiedad característica de los conjuntos convexos, implica que estos no pueden tener agujeros ni ser reentrantes como se vé en la figura 3.14 .

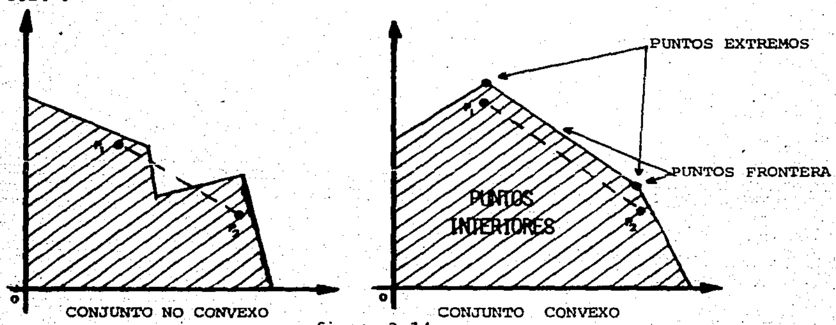


figura 3.14

Dentro de la región factible o conjunto convexo se establecen tres tipos de puntos diferentes que son : Puntos interiores, puntos de frontera, y puntos extremos o vértices. En la figura 3.14 se muestran cada uno de estos tipos de puntos.

El conjunto de puntos interiores es diferente a el conjunto de puntos frontera y puntos extremos, pero no sucede lo mismo con los últimos conjuntos de puntos, donde se tiene que todo punto extremo es un punto frontera

---

1) Luthe Rodolfo, Olivera Antonio y Schutz Fernando. *Métodos Numéricos*. México: Ed. Limusa. 1980. 254p.

y que sólo un cierto número de puntos frontera son puntos extremos.

El punto que vá a representar la solución óptima de un problema de-- PL será siempre un punto extremo. Por lo que no es necesario buscar la solución en las aristas o en los puntos frontera (que no son puntos extremos) de la región factible.

3.3.1 Puntos extremos y solución óptima.

Supóngase que la ganancia de D'Vestir para las bolsas estándar se reduce de $5000 a $2500 por bolsa. La ganancia para las bolsas de lujo y todas las restricciones permanecen igual. El modelo de PL completo de este nuevo - problema es idéntico al modelo matemático del problema de D'Vestir con la -- ganancia anterior, con excepción de la función objetivo:

$$\max z = 2500x_1 + 4500x_2$$

La figura 3.15 muestra la solución gráfica del problema con la fun-- ción objetivo modificada. Nótese que las restricciones no cambian, la región factible no tiene ningún cambio, sin embargo las líneas de ganancia fueron-- modificadas para reflejar la nueva función objetivo. Moviendo la línea de ganancia en una forma paralela alejándola del orígen, se encuentra la solución óptima como se muestra en la figura 3.15. Los valores de las variables de decisión para este punto son $x_1 = 300$ y $x_2 = 420$. La reducción de la ganancia -- para las bolsas estándar causó un cambio en la solución óptima.

Una observación importante es que la solución óptima siempre se localizará en uno de los vértices o "esquinas" de la región factible. En terminología de PL estos vértices son referidos como PUNTOS EXTREMOS de la región - factible. El problema de D'Vestir tiene cinco puntos extremos, de hecho solamente se tienen que considerar los puntos extremos para obtener la solución- óptima. Esto es, evitar el trabajo de calcular otros puntos factibles que no son puntos extremos.

Al resolver un problema de PL por el procedimiento gráfico se puede- llegar a cualquiera de las cuatro situaciones siguientes:

1.- Solución única. Es cuando sólo existe una solución óptima.

2.- Soluciones alternativas óptimas. Hay problemas de PL en los cuales puede ocurrir que la línea de ganancia más alta coincida con una de las líneas de-restricción del límite de la región factible. Este caso se muestra en la figura 3.16. Para una función objetivo de $3150x_1 + 4500x_2$ de hecho, en este caso una solución óptima ocurre en el punto extremo (3), punto extremo (4),- y algún punto del segmento de línea que une a estos dos puntos. Este es un - caso especial de soluciones alternativas óptimas, o alternativas óptimas. Como se puede ver, cuando ocurren alternativas óptimas, habrá un número infinito de soluciones óptimas que se encuentran sobre el segmento que une a los dos puntos extremos. Un problema de PL que tenga alternativas óptimas de solución es una buena oportunidad para que el gerente tome la decisión que --- crea conveniente.

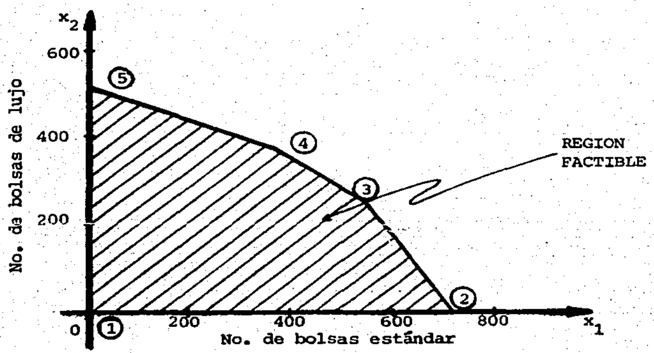


figura 3.15

3.- Solución ilimitada (No acotada). Una solución para un problema de PL es ilimitada si el valor de la solución puede ser infinitamente grande sin violar alguna de las restricciones. Esta de seguro, resulta de una formulación- incorrecta del problema y no puede producir una solución óptima. Un ejemplo- de esto resulta del problema que se muestra en la gráfica de la figura 3.17.

4.- Infactibilidad (Sin solución). Es cuando en un problema de PL no hay solución que satisfaga todas las restricciones. Incluyendo las restricciones-- de no negatividad (x_1 , $x_2 \geq 0$). Gráficamente, no existe una región factible donde no hay un punto que satisfaga todas las restricciones simultaneamente Para ilustrar este punto se muestra en la gráfica 3.18 .

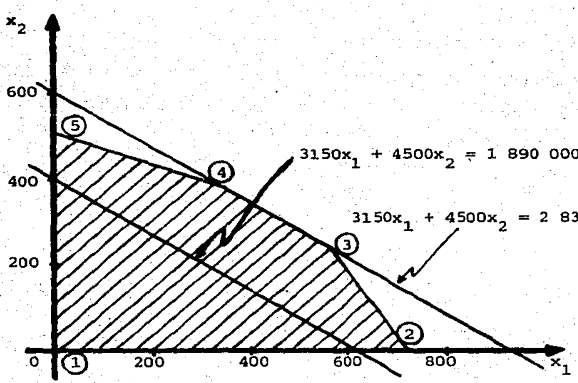


figura 3.16

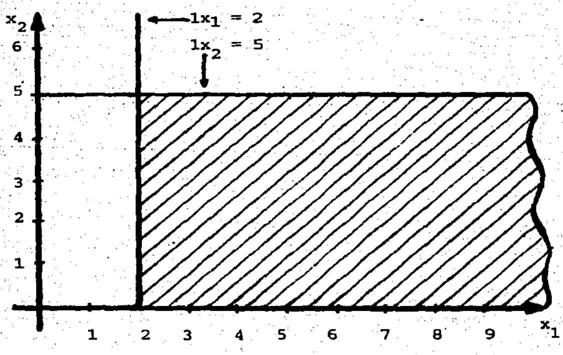


figura 3.17

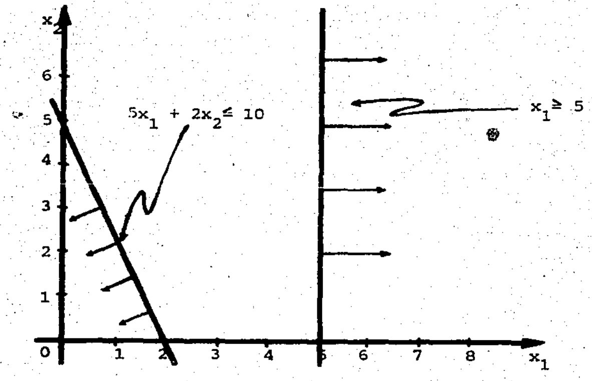


figura 3.18

3.4 Programa para resolver problemas de PL por el procedimiento gráfico.

Los problemas de PL que anteriormente fueron resueltos por medio del procedimiento gráfico, y de una forma analítica, ahora se presenta su solución a través de un programa para una computadora digital.

Talvés el hecho de que este programa aparezca materialmente como una serie de instrucciones seguidas de sus resultados, puede parecer al lector como algo ordinario, pero desafortunadamente no hay otra forma escrita de presentarlo. Como ya se mencionó con anterioridad, para que la persona que consulte esta tesis pueda comprender realmente la importancia del uso de la computadora digital en la solución de problemas, es necesario que tenga cierta relación con conocimientos de técnicas de programación.

Si se piensa en el tiempo empleado por una persona para resolver estos problemas de PL mediante el método gráfico, (aunque son pequeños) y el tiempo que pueda tardar la computadora en tener listos los resultados una vez introducidos los datos, no existe comparación alguna entre los tiempos utilizados. Si se toma en cuenta que este programa para computadora digital, esta listo para resolver cualquier problema de programación lineal por medio del procedimiento gráfico, con "n" número de restricciones, se tendrá una idea más clara de la importancia de la computadora digital.

Mediante este programa* es posible dar solución a todo problema de PL en dos variables, y "n" número de restricciones, solamente cambiando, cada vez que se introduzca un problema nuevo, dos líneas de datos del programa que a continuación se listará.

En la primera línea de datos del programa deberá ser :

DATA 1 , 1 , 1 , 1

Los elementos de esta línea corresponden al tipo de signo que tiene cada una de las restricciones del problema. Si la restricción es del tipo (≤), entonces se coloca un 1 en la línea de datos para mostrar esto, si es del tipo (≥), le corresponde un 2, y si es del tipo (=), es un 3 el que se incluye. Los elementos de esta línea deberán aparecer en el mismo órden en que se encuentran las restricciones.

En la segunda y última línea de datos se pondrá:

DATA 0.7,1,630,0.5,0.833,600,1,0.666,708,0,1,0.25,135

Esta línea contiene los coeficientes de cada restricción con el término independiente que le corresponde. Se introduce primero los elementos de la primera restricción, seguidos de los de la segunda y así sucesivamente.

Al correr el programa, los datos que no se incluyen en estas líneas (coeficientes de la función objetivo y si se trata de maximizar o minimizar) se introduciran a él por medio de la proposición INPUT.

---

* Todos los programas que aparecen en este trabajo de tesis estan codifica-- en lenguaje BASIC, esto es con el fin de poder emplear microcomputadoras y facilitar su comprensión y manejo.

```
10 REM PROGRAMA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACION
20 REM LINEAL POR MEDIO DE LA REPRESENTACION GRAFICA
30 REM (UNICAMENTE CON DOS VARIABLES)
40 INPUT "No. DE RESTRICCIONES ";N
50 PRINT"EL PROBLEMA ES DE DE ":PRINT"MAXIMIZAR MX=1":PRIN
T"MINIMIZAR MX=0"
60 INPUT "MX=";MX
70 INPUT "FUNCION OBJETIVO";Z1,Z2
80 CLS
90 IF MX=1 THEN PRINT  "MAX Z= ";Z1;"X1 + ";Z2;"X2"
100 PRINT"MIN Z= ";Z1;"X1 + ";Z2;"X2
110 DIM A(N,N+1),G(N,N),P(N,N),B(N),O(N),D(N,N),R(N)
120 DIM M(N,N),L(N,N),K(2,N)
130 PRINT"s.a":PRINT
140 FOR I=1 TO N
150 READ R(I)
160 NEXT I
170 FOR I=1 TO N
180 FOR J=1 TO 3
190 READ A(I,J)
200 A(I,J)=INT(A(I,J)*10000)/10000
210 PRINTA(I,J),
220 NEXT J
230 NEXT I
240 FOR I=1 TO N
250 IF A(I,1)=0 GOTO 300
260 IF A(I,2)=0 GOTO 270
270 B(I)= A(I,3)/A(I,1)
280 B(I)=INT(B(I)*10000)/10000
290 IF A(I,2)=0 GOTO 320
300 O(I)=A(I,3)/A(I,2)
310 O(I)=INT(O(I)*10000)/10000
320 PRINT
330 PRINT"COORDENADAS AL ORIGEN DE "
340 PRINT"RESTRICCION No. ";I:PRINT"(";B(I);",0)";"(0,";O(
I);")"
350 PRINT
360 NEXT I
370 FOR J=1 TO N
380 FOR I=1 TO N
390 IF I<=J GOTO 460
400 DG=A(J,1)*A(I,2)-A(J,2)*A(I,1)
410 IF DG=0 GOTO 460
420 D(J,I)=(A(J,3)*A(I,2)-A(J,2)*A(I,3))/DG
430 D(J,I)=INT(D(J,I)*10000)/10000
440 G(J,I)=(A(J,1)*A(I,3)-A(J,3)*A(I,1))/DG
450 G(J,I)=INT(G(J,I)*10000)/10000
460 NEXT I
```

```
460 NEXT I
470 NEXT J
480 PRINT:PRINT"                    PUNTOS EXTREMOS":PRINT
490 FOR I=1 TO N
500 FOR W=1 TO N
510 FOR J=1 TO N
520 P(I,J)=D(I,W)*A(J,1)+G(I,W)*A(J,2)
530 P(I,J)=INT(P(I,J)*10000)/10000
540 IF D(I,W)=0 AND G(I,W)=0 GOTO 630
550 IF R(J)=1 GOTO 580
560 IF R(J)=2 GOTO 600
570 IF R(J)=3 GOTO 620
580 IF P(I,J)<= A(J,3) THEN NEXT J:PRINTD(I,W),G(I,W):L(I,
W)=D(I,W):M(I,W)=G(I,W)
590 GOTO 630
600 IF P(I,J)>= A(J,3) THEN NEXT J:PRINTD(I,W),G(I,W):L(I,
W)=D(I,W):M(I,W)=G(I,W)
610 GOTO 630
620 IF P(I,J)=A(J,3) THEN NEXT J:PRINTD(I,W),G(I,W):L(I,W)
=D(I,W):M(I,W)=G(I,W)
630 NEXT W
640 NEXT I
650 FOR I=1 TO N: FOR J=1 TO N
660 Q=B(I)*A(J,1)
670 IF R(J)=1 GOTO 730
680 IF R(J)= 2 GOTO 710
690 IF Q=A(J,3) THEN NEXT J:K(1,I)=B(I)
700 GOTO 740
710 IF Q>=A(J,3) THEN NEXT J: K(1,I)=B(I)
720 GOTO 740
730 IF Q<=A(J,3) THEN NEXT J: K(1,I)=B(I)
740 NEXT I
750 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N
760 Q1=O(I)*A(J,2)
770 IF R(J)=1 GOTO830
780 IF R(J)=2 GOTO 810
790 IF Q1=A(J,3) THEN NEXT J: K(2,I)=O(I)
800 GOTO 840
810 IF Q1>=A(J,3) THEN NEXT J:K(2,I)=O(I)
820 GOTO 840
830 IF Q1<=A(J,3)THEN NEXT J: K(2,I)=O(I)
840 NEXT I
850 PRINT
860 FOR I=1 TO 2: FOR J=1 TO N
870 IF K(I,J)=0 GOTO 1030
880 Z=K(1,J)*Z1
890 Z=INT(Z*10000)/10000
```

```
900 IF K(1,J)=0 GOTO 940
910 PRINT"X1 = ";K(1,J),"X2 = 0"
920 PRINT"EL VALOR DE F.O. EN ESTE PUNTO Z = ";Z
930 PRINT
940 Z4=K(2,J)*Z2
950 Z4=INT(Z4*10000)/10000
960 IF K(2,J)=0 GOTO 1000
970 PRINT"X1 = 0","X2 = ";K(2,J):PRINT"EL VALOR DE F.O. EN
 ESTE PUNTO Z = ";Z4
980 PRINT
990 IF MX=0 GOTO 1230
1000 IF Z>Z4 THEN LET ZO=Z
1010 IF Z<=Z4 THEN LET ZO=Z4
1020  GOTO 1040
1030 ZO=0
1040 NEXT J:NEXT I
1050 Z6=0
1060 P=0
1070 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N
1080 IF L(I,J)=0 OR M(I,J)=0 GOTO 1160
1090 Z5=Z1*L(I,J)+Z2*M(I,J)
1100 Z5=INT(Z5*10000)/10000
1110 PRINT"X1 = ";L(I,J),"X2 = ";M(I,J):PRINT"EL VALOR DE
LA F.O. EN ESTE PUNTO Z = ";Z5
1120 PRINT
1130 P=P+1
1140 IF MX=0 GOTO 1260
1150 IF Z5>=Z6 THEN LET Z6=Z5
1160 NEXT J :NEXT I
1170 IF MX=0 GOTO 1290
1180 IF  ZO=0 GOTO 1210
1190 IF ZO>=Z6 THEN LET Z6=ZO
1200 IF Z6=0 THEN LET Z6=Z5
1210 PRINT"VALOR OPTIMO DE LA F.O. Z = ";Z6
1220 END
1230 IF Z<Z4 THEN LET ZO=Z
1240 IF Z>=Z4 THEN LET ZO=Z4
1250 GOTO 1020
1260 IF P=1 THEN LET Z6=Z5
1270 IF Z5<=Z6 THEN LET Z6=Z5
1280 GOTO 1160
1290 IF ZO=0 GOTO 1310
1300 IF ZO<=Z6 THEN LET Z6=ZO
1310 GOTO 1210
1320 DATA 1,1,1,1
1330 DATA 0.7,1,630,.5,.833333,600,1,.66666,708,0.1,0.25,1
35
1340 ,1,1
```

```
%Ready
%RUN
No. DE RESTRICCIONES ? 4
EL PROBLEMA ES DE DE
MAXIMIZAR MX=1
MINIMIZAR MX=0
MX=? 1
FUNCION OBJETIVO? 5000
?? 4500
AX Z=  5000 X1 +  4500 X2
MIN Z=  5000 X1 +  4500 X2
s.a

 .7                  1                     630              .5
       .8333
 600                 1                     .6666            708
       .1
 .25                 135
COORDENADAS AL ORIGEN DE
RESTRICCION No.  1
( 900 ,0)(0, 630 )


COORDENADAS AL ORIGEN DE
RESTRICCION No.  2
( 1200 ,0)(0, 720.029 )


COORDENADAS AL ORIGEN DE
RESTRICCION No.  3
( 708 ,0)(0, 1062.11 )


COORDENADAS AL ORIGEN DE
RESTRICCION No.  4
( 1350 ,0)(0, 540 )


            PUNTOS EXTREMOS

 540.031           251.978
 300               420

X1 =  708          X2 = 0
EL VALOR DE F.O. EN ESTE PUNTO Z =  3.54E+06

X1 = 0             X2 =  540
```

```
EL VALOR DE F.O. EN ESTE PUNTO Z =  2.*3E+06

X1 =  540.031    X2 =  251.978
EL VALOR DE LA F.O. EN ESTE PUNTO Z =  3.83406E+06

X1 =  300          X2 =  410
EL VALOR DE LA F.O. EN ESTE PUNTO Z =  3.39E+06

VALOR OPTIMO DE LA F.O. Z =  3.83406E+06
%Ready
>
No. DE RESTRICCIONES ? 3
EL PROBLEMA ES DE DE
MAXIMIZAR MX=1
MINIMIZAR MX=0
MX=? 0
FUNCION OBJETIVO? 500
?? 500
MIN Z=  500 X1 +  500 X2
s.a

 1              2              80             1              0
 30             0              1              20
COORDENADAS AL ORIGEN DE
RESTRICCION No.  1
( 80 ,0)(0, 40 )


COORDENADAS AL ORIGEN DE
RESTRICCION No.  2
( 30 ,0)(0, 0 )


COORDENADAS AL ORIGEN DE
RESTRICCION No.  3
( 0 ,0)(0, 20 )


        PUNTOS EXTREMOS

 30             25
 40             20

X1 =  30        X2 =  25
EL VALOR DE LA F.O. EN ESTE PUNTO Z =  27500

X1 =  40        X2 =  20
EL VALOR DE LA F.O. EN ESTE PUNTO Z =  30000

VALOR OPTIMO DE LA F.O. Z =  27500 _
```

C A P I T U L O I V

METODO SIMPLEX.

4.1 Solución algebráica del método simplex

En el capítulo anterior se expuso la forma para encontrar la solución óptima a problemas de PL con dos variables usando el procedimiento gráfico. Sin embargo, la mayoría de los problemas reales contienen más de dos variables de decisión y son así muy largos para encontrar la solución por esta técnica.

En éste capítulo se mostrará primeramente el método simplex, en una descripción paso por paso usando el problema de maximización de D'Vestir del capítulo anterior, y se utilizará el problema de la Fuji-Film para ejemplificar el método simplex en problemas de minimización.

Volviendo al problema de D'Vestir y escribiéndolo en su forma estándar:

$$\max \quad 5000\,x_1 + 4500\,x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 \qquad (4.1)$$

s.a

$$7/10\,x_1 + 1\,x_2 + 1S_1 = 630 \qquad (4.2)$$

$$1/2\,x_1 + 5/6\,x_2 + 1S_2 = 600 \qquad (4.3)$$

$$1\,x_1 + 2/3\,x_2 + 1S_3 = 708 \qquad (4.4)$$

$$1/10\,x_1 + 1/4\,x_2 + 1S_4 = 135 \qquad (4.5)$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0 \qquad (4.6)$$

Las ecuaciones (4.2) a (4.5) son las ecuaciones de restricción y forman un sistema de cuatro ecuaciones simultaneas con seis variables. Cualquier procedimiento algebráico para resolver problemas debe ser capáz de encontrar soluciones a sistemas de ecuaciones simultaneas que envuelvan a más variables que ecuaciones.

Un procedimiento algebráico debe ser capáz de elegir una de las soluciones factibles como una que maximice la función objetivo. El método simplex es un procedimiento algebráico con todas las características señaladas anteriormente.

Desde el momento que las ecuaciones (4.2) a (4.5) del problema de D'Vestir tiene más variables que ecuaciones, el Método Simplex (MS) encuentra la solución asignando el valor de cero a dos de las variables y resolviendo para las cuatro restantes.

Un problema de PL en forma estándar consiste en "n" variables y "m" ecuaciones donde n es más grande que m, una solución básica puede ser obtenida estableciendo n-m variables iguales a cero y despejando el sistema de ecuaciones de restricción para las restantes m variables. En términos del problema D'Vestir una solución básica puede ser obtenida estableciendo dos variables cualquiera iguales a cero y despejando el sistema para las cuatro ecuaciones de las restantes cuatro variables. Las variables n-m serán llamadas variables no básicas, y las restantes m variables (usualmente ninguna es cero) como las variables básicas. Suponiendo que se elige hacer x_1 y x_2 igual a cero, estas serán las variables no básicas y las cuatro restantes serán las básicas. Así se tiene:

$$
\begin{aligned}
S_1 \qquad\qquad\qquad &= 630 \\
S_2 \qquad\qquad &= 600 \\
S_3 \qquad &= 708 \\
S_4 &= 135
\end{aligned}
$$

Esta solución es una solución básica, desde el momento que fué obtenida por el establecimiento de dos variables iguales a cero y resolviendo para las otras cuatro. Más aún, es una solución básica factible porque cada una de las variables es mayor o igual a cero. Refiriéndose a la figura 4.1 se vé que esta solución básica factible corresponde al punto extremo 1 de la región factible (x_1=.0 y x_2=0). Esto es una propiedad muy importante de todas las soluciones básicas factibles (sbf). Esto quiere decir que una solución básica factible y un punto extremo de solución son lo mismo.

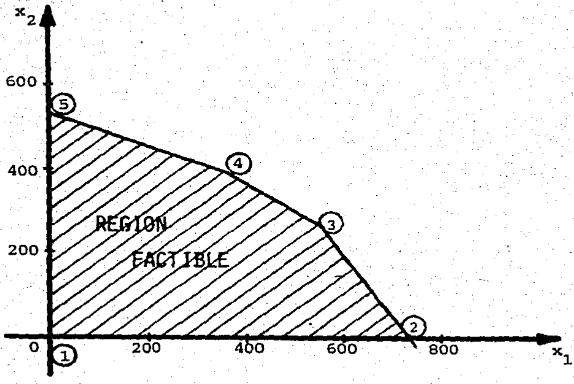


figura 4.1

Una sbf al sistema de m ecuaciones de restricción y n variables será necesaria como punto de partida para el MS. Cuando todas las restricciones son del tipo menor o igual que ($\leq$), cada una de las soluciones pueden ser facilmente encontradas estableciendo todas las variables de decisión igual a cero. Así corresponde elegir el origen (punto extremo 1 en el problema de D'Vestir) como la sbf inicial para el procedimiento simplex.

Desde este punto de comienzo, el MS genera soluciones básicas factibles al sistema de ecuaciones, asegurando que la función objetivo se incremente para cada nueva solución. Así el MS puede ser descrito como un método iterativo, que se mueve desde una solución básica factible (punto extremo) a otra, hasta que la solución óptima es alcanzada.

4.2 Forma tabular.

Como se planteó en la sección anterior 4.1 el Método Simplex siempre comienza con una sbf y se mueve hacia otra sbf, hasta encontrar la solución óptima. Si se estudia al sistema de ecuaciones (4.1) a (4.6) se pueden identificar dos propiedades que hacen posible y a la vez fácil encontrar una sbf

La primera propiedad facilita la manera de encontrar una solución básica. Esta propiedad establece que m de las variables (m=4 en este caso) deben poseer dos características; "cada variable debe poseer un coeficiente de 1 exactamente en una ecuación, y aparecer con un coeficiente de cero en todas las otras ecuaciones"[1]. Entonces si estas m variables son hechas básicas se establecen las otras n-m variables iguales a cero, los valores de las variables básicas pueden ser leídos facilmente del lado derecho de la ecuación. En el ejemplo, las variables S_1, S_2, S_3, y S_4 satisfacen la primera propiedad.

La segunda propiedad requiere que los valores del lado derecho de las ecuaciones de restricción sean NO NEGATIVOS. En este ejemplo se vé que esta propiedad también se cumple.

Si un problema de PL satisface ambas propiedades mencionadas antes, se está hablando de una forma tabular. Nótese que la forma estándar del problema D'Vestir ya está en la forma tabular. De hecho la forma estándar y la forma tabular de PL tienen todas las restricciones menor o igual que ($\leq$) y los valores del lado derecho no negativos son los mismos. Sin embargo, se verá posteriormente que hay muchos problemas de PL para los cuales la forma estándar y la forma tabular no son la misma.

Los siguientes tres pasos son necesarios para preparar un problema de PL para su solución usando el MS:

1) Formulación del problema
2) Establecimiento de la forma estándar del problema, sumando o restando las variables de holgura a las ecuaciones de restricción.
3) Establecimiento de la forma tabular del problema.

1) Taha Hamdy A. . *Investigación de Operaciones*. México: Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1981 . p. 48

4.3 Establecimiento de la tabla simplex inicial.

Después de que el problema de PL ha sido convertido a la forma tabular se tiene una sbf, la cual es usada para comenzar el MS. El paso siguiente es establecer la tabla simplex inicial, la cual provee un medio conveniente para llevar a cabo los cálculos necesarios durante el procedimiento de la solución simplex.

Parte de la tabla simplex inicial es simplemente una tabla que contiene todos los coeficientes mostrados en la forma tabular de un programa lineal. Si se adopta la notación general:

c_j = coeficientes de la función objetivo para la variable j

b_i = valores del lado derecho para la restricción i

a_{ij} = coeficientes asociados con la variable j en la restricción i

Se puede mostrar esta parte de la tabla simplex inicial como sigue:

$$
\begin{array}{cccc|c}
c_1 & c_2 & \cdots & c_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & & \cdots\cdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \\
\hline
\end{array}
$$

En la tabla anterior, las líneas horizontales y vertical se usan -- para separar las diferentes partes de la forma tabular de un programa lineal La línea superior horizontal separa a los coeficientes de las variables de-- la función objetivo de los coeficientes de las variables de las ecuaciones-- de restricción. La línea vertical puede ser interpretada como una línea de-- igualdad, los valores del lado izquierdo de esta línea son los coeficientes- de las variables de las ecuaciones de restricción, y los que están del lado- derecho son los valores para las ecuaciones de restricción. Para hacer más-- claro esto se hará uso de las siguientes notaciones generales:

renglón c = renglón de coeficientes de la función objetivo.

columna b = columna de valores del lado derecho de las ecuaciones-- de restricción.

matriz A = coeficientes de las variables de los renglones m y de-- las columnas n de las ecuaciones de restricción.

Usando esta notación se puede mostrar la parte anterior de la tabla-simplex como sigue:

renglón c	
matriz A	columna b

Antes de que se pueda aplicar el MS, dos o más renglones o dos o más columnas tendrán que ser incluidas. Sin embargo, antes de definir estos nuevos renglones y columnas, hay que establecer la tabla simplex parcial para - el problema de D'Vestir.

La forma tabular (la misma que la forma estándar en este caso) para-el problema D'Vestir es:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 5000x_1 + 4500x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 \\
\text{s.a} & \\
& 7/10\, x_1 + 1x_2 + 1S_1 = 630 \\
& 1/2\, x_1 + 5/6\, x_2 + 1S_2 = 600 \\
& 1x_1 + 2/3\, x_2 + 1S_3 = 708 \\
& 1/10\, x_1 + 1/4\, x_2 + 1S_4 = 135 \\
& x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0
\end{array}
$$

Puede ser más fácil recordar que cada uno de los renglones contiene-los coeficientes de una restricción, si se cae en la cuenta de que cada una-de las columnas está asociada con una de las variables. Por ejemplo, x_1 co-- rresponde a la primera columna, x_2 a la segunda y así sucesivamente. De aquí que se tiene:

x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
5000	4500	0	0	0	0	
7/10	1	1	0	0	0	630
1/2	5/6	0	1	0	0	600
1	2/3	0	0	1	0	708
1/10	1/4	0	0	0	1	135

Se dijo anteriormente que el MS debe comenzar por una sbf, la sbf -- para este problema se halló estableciendo $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ en la forma tabu-- lar. Esta solución corresponde a una combinación de producción de 0 bolsas-- estándar y 0 bolsas de lujo y esta representada por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 630 \\ 600 \\ 708 \\ 135 \end{bmatrix}$$

La tabla simplex inicial contiene la forma tabular del problema. Como se puede ver, una columna de la tabla simplex que tiene solamente un 1 es asociada con cada variable básica, este renglón puede ser identificado -- por el hecho de que contiene el 1 en la columna unitaria. El valor de cada-- variable básica es dado por b_i en el renglón asociado con la variable básica. El procedimiento para encontrar el valor de las variables básicas se --- ilustra en la tabla 4.1.

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
	5000	4500	0	0	0	0		
	7/10	1	1	0	0	0	630	
	1/2	5/6	0	1	0	0	600	
renglón asociado con S_3 →	1	2/3	0	0	1	0	708	← valor de S_3
	1/10	1/4	0	0	0	1	135	
					↑ columna asociada con S_3			

tabla 4.1

Por conveniencia se añaden dos columnas a la tabla simplex, con el-- objeto de tener presentes a las variables básicas y a la ganancia asociada-- con estas variables. Una columna tendrá el nombre de "básicas" y la otra c_j

bajo la columna "básicas" se listarán las variables básicas actuales, y bajo la columna c_j se listarán las ganancias correspondientes a cada una de estas variables básicas. Para el problema D'Vestir se tiene la siguiente tabla simplex inicial:

		x	x	S	S	S	S	
básicas	c_j	5000	4500	0	0	0	0	
S_1	0	7/10	1	1	0	0	0	630
S_2	0	1/2	5/6	0	1	0	0	600
S_3	0	1	2/3	0	0	1	0	708
S_4	0	1/10	1/4	0	0	0	1	135

A partir de ahora el MS iterará de una sbf a otra hasta encontrar la solución óptima.

Para mejorar la solución, es necesario incluir dos renglones nuevos, el primer renglón etiquetado z_j, representará la disminución de la función-objetivo que resulta si una unidad de la variable correspondiente a la "j-ava" columna de la matriz A es traída a la solución.

Por ejemplo z_1 representa la disminución en la ganancia que resulta si una unidad de x_1 es traída a la solución. Se verá porque hay una disminución en las ganancias al traer a x_1 en la solución. Si una unidad de x_1 es producida se tendrá que cambiar algunos de los valores de las variables básicas actuales con el objeto de satisfacer las ecuaciones de restricción. En la primera ecuación de restricción se tiene:

$$7/10 \ x_1 \ + \ 1 \ x_2 \ + \ 1 \ S_1 \ = \ 630$$

Si se considera hacer a x_1 como un valor positivo, se tendrá que reducir a x_2 y/o S_1 para satisfacer esta restricción. Ya que x_2 es cero (x_2 es una variable no básica), no puede reducirse más. Así el valor para S_1 será reducido si x_1 es hecha positiva. Esta reducción en el valor de la variable básica dará como resultado una disminución en el valor de la función objetivo. La cantidad de la reducción depende del coeficiente de S_1 en la función objetivo, en este caso ya que S_1 es una variable de holgura su coeficiente es cero, así reduciendo el valor de S_1 no decrecerá la función objeti vo. Por otro lado, cada unidad de x_1 introducida mejorará el valor de la función objetivo para la cantidad c_1, la cual en el problema de D'Vestir es la ganancia de $5000 asociada con cada bolsa estándar producida. El valor de la función objetivo decrecerá por z_1 para cada unidad de x_1 Producida, el cambio neto en el valor de la función objetivo que resulta debido a una unidad de x_1 introducida, es dado por $c_1 - z_1$. El siguiente renglón que se introducirá en la tabla,que será referido como "renglón de evaluación neta" contendrá el valor de $c_j - z_j$ para cada variable (columna). En términos de posición en la tabla, los renglones z_j y $c_j - z_j$ serán colocados directamente debajo de la matriz A en la tabla existente.

Para calcular cuanto disminuirá la función objetivo (f.o.) cuando una unidad de una variable no básica es traída a la solución, se debe saber el valor de los coeficientes de las variables básicas. Estos valores están dados en la columna c_j de la tabla. De aquí que los valores en el renglón z_j pueden ser calculados multiplicando los elementos en la columna c_j por los elementos correspondientes de la matriz A y sumándolos. De esto se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 0(7/10) + 0(1/2) + 0(1) + 0(1/10) = 0 \\
z_2 &= 0(1) + 0(5/6) + 0(2/3) + 0(1/4) = 0 \\
z_3 &= 0(1) + 0(0) + 0(0) + 0(0) = 0 \\
z_4 &= 0(0) + 0(1) + 0(0) + 0(0) = 0 \\
z_5 &= 0(0) + 0(0) + 0(1) + 0(0) = 0 \\
z_6 &= 0(0) + 0(0) + 0(0) + 0(1) = 0
\end{aligned}
$$

Entonces la solución básica factible inicial, consiste enteramente de variables de holgura, y de esta manera los valores de c_j para estas variables son todos cero, reduciendo el valor de estas variables de holgura cuando es introducida a la solución una variable no básica no disminuirá la ganancia.

El coeficiente de la f.o. para x_1 es 5000, así el valor de $c_1 - z_1$ es $5000 - 0 = 5000$. Esto indica que el resultado neto de llevar una unidad de x_1 a la actual solución será un incremento de $5000 en la ganancia. De aquí que en el renglón de evaluación neta corresponde a x_1 el valor de 5000.

En la misma forma se calculan los correspondientes z_j y $c_j - z_j$ para las restantes variables. El resultado completo de la tabla simplex inicial - se muestra a continuación:

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
básicas	c_j	5000	4500	0	0	0	0	
S_1	0	7/10	1	1	0	0	0	630
S_2	0	1/2	5/6	0	1	0	0	600
S_3	0	1	2/3	0	0	1	0	708
S_4	0	1/10	1/4	0	0	0	1	135
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	c_j-z_j	5000	4500	0	0	0	0	

ganancia

En esta tabla se vé un cero en el renglón z_j de la última columna, - este cero representa a la ganancia asociada con la actual solución básica. - Este valor fué obtenido multiplicando los valores de las variables básicas,- los cuales son dados en la última columna, por su contribución correspondiente a la ganancia dada a la columna c_j.

Observando el renglón de evaluación neta, se vé que cada bolsa estándar producida incrementará el valor de la f.o. en \$5000, y cada bolsa de lujo incrementará la f.o. en \$4500. Dada esta información, únicamente se puede suponer que se producirán tantas bolsas estándar como sea posible. Se sabe - que cada bolsa estándar producida usa 7/10 de hora para corte y teñido, por lo tanto, si se produce x_1 bolsas estándar se usará 7/10 x_1 horas de corte y teñido. Dado que sólo se tienen 630 horas disponibles; el valor máximo posible de x_1, considerando la restricción de corte y teñido, puede ser calculado resolviendo la siguiente ecuación:

$$7/10 \; x_1 = 630 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 900$$

De esta manera encontramos que sólo hay tiempo disponible en el de-- partamento de corte y teñido, para manufacturar un máximo de 900 bolsas es-- tándar. De una manera similar, cada bolsa estándar producida usa 1/2 de hora de las 600 horas disponibles para cosido; por lo tanto el número máximo de -

bolsas estándar que se puede producir y a la vez satisfacer la restricción de cosido, está dado por:

$$1/2\ x_1 = 600 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1200$$

De esta manera $x_1 = 1200$. Se sabe que es imposible producir 1200 bolsas estándar dado que sólo la capacidad del departamento de corte y teñido - es para hacer 900 bolsas estándar. Considerando estas restricciones simultaneamente, la de corte y teñido es más restrictiva. De la restricción de acabados, x_1 bolsas estándar usarán $1x_1$ de 708 horas disponibles para el -- tiempo de acabados. Resolviendo la ecuación:

$$1x_1 = 708 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 708$$

Esto muestra que en términos de las tres restricciones consideradas cuando - mucho se podrán producir 708 bolsas estándar. En el departamento de inspec-- ción y acabados cada bolsa estándar producida usa 1/10 de hora del tiempo -- disponible, dado que sólo se dispone de 135 horas, se puede resolver:

$$1/10\ x_1 = 135 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1350$$

Encontrando que el número mayor de bolsas estándar que puede proce-- sar el departamento de acabado es de 1350. Cuando se consideran simultanea-- mente todas las restricciones se vé que la restricción más restrictiva en -- términos del número máximo de bolsas estándar que puede ser producido, es la restricción de acabados. Esto es, haciendo 708 bolsas estándar se usará toda la capacidad para acabado. De aquí que si x_1 es introducida a la solución -- con su máximo valor, se producirán 708 bolsas estándar ($x_1 = 708$) y no habrá tiempo sin usar en el departamento de acabado ($S_3 = 0$).

Tomando la decisión de producir cuantas bolsas estándar sea posible, se cambia el establecimiento de variables de solución básica factible. La variable previa no básica x_1 es ahora una variable básica con $x_1 = 708$, mien--- tras que la variable básica previa S_3 es ahora no básica con $S_3 = 0$. Esto es, el Método Simplex se mueve desde una sbf a otra, seleccionando una variable no básica para reemplazar a una básica actual. Este procedimiento de moverse desde una solución básica factible a otra es llamado iteración.

4.3.1 Criterio para introducir una nueva variable a la base.

Observando el renglón de evaluación neta, se selecciona la variable que vá a entrar a la base, que será la que cause por unidad un incremento mayor en la función objetivo. Esta variable, se supone, corresponde a la columna j en la parte A de la tabla.

El criterio para remover una variable de la base actual para cada renglón i es : Calcular el cociente b_i/a_{ij} para cada a_{ij} mayor que cero. Este cociente dice que la cantidad máxima de la variable x_j puede ser llevada a la solución y aún satisfacer la ecuación de restricción representada por este renglón. El menor de los cocientes indicará que restricción resulta ser la más restrictiva, si x_j es introducida a la solución. Así se obtiene la siguiente regla para seleccionar la variable que se removerá de las básicas actuales. Para todos los cocientes b_i/a_{ij} donde $a_{ij} > 0$, se selecciona la variable básica que corresponde al menor de los cocientes, como la variable que será removida.

Ahora se ilustrará el procedimiento aplicado al problema D' Vestir. Para propósitos de este ejemplo se ha añadido una columna que contiene los cocientes b_i/a_{ij} para la tabla simplex inicial del problema D'Vestir:

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4		b_i/a_{ij}
básicas	c_j	5000	4500	0	0	0	0		
S_1	0	7/10	1	1	0	0	0	630	$\frac{630}{7/10} = 900$
S_2	0	1/2	5/6	0	1	0	0	600	$\frac{600}{1/2} = 1200$
S_3	0	1	2/3	0	0	1	0	708	$\frac{708}{1} = 708$
S_4	0	1/10	1/4	0	0	0	1	135	$\frac{135}{1/10} = 1350$
	z_j	0	0	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	5000	4500	0	0	0	0		

Nótese que $c_1 - z_1$ es igual a 5000, que es el valor más grande positivo en el renglón $c_j - z_j$, así x_1 es seleccionada como la nueva variable básica. Checándo los cocientes b_i/a_{ij} para $a_{ij} > 0$ se vé que $b_3/a_{31} = 708$ es el mínimo de estos cocientes. En la tabla se tiene el valor de a_{31} encerrado en un círculo, 1 , esto indica que la variable correspondiente a la primera columna (x_1), es la variable entrante, y la variable correspondiente al tercer renglón (S_3), es la variable saliente. Adoptando la usual terminología de PL, se dice que el elemento encerrado en un círculo es el "elemento pivote".

Con el objeto de improvisar la solución actual de $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $S_1 = 630$, $S_2 = 600$, $S_3 = 708$, y $S_4 = 135$, se deberá incrementar x_1 a 708. Esto indica que para la producción de 708 bolsas estándar, le corresponde una ganancia de 5000(708) = \$3 540 000. Haciendo esto, se usará toda la capacidad disponible y así S_3 se reduce a cero. Entonces x_1 será la nueva variable básica que reemplazará a S_3 en la base.

4.3.2 Cálculo de la siguiente tabla.

Anteriormente, se determinó que la solución básica factible inicial, se mejorará introduciendo x_1 a la base reemplazando a S_3, para esto es necesario desarrollar la correspondiente tabla simplex.

Se elaborará una nueva tabla de tal modo que todas las columnas asociadas con la nueva variable básica sean columnas unitarias, tal que el valor de la variable básica en el renglón i, es dado por b_i. Se pretende hacer en la matriz A que la columna correspondiente aparezca como :

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Esto es, que el valor del elemento pivote debe ser 1 y todos los demás valores, ya sea arriba o abajo de la misma columna del elemento pivote, sean cero. Para lograr esto, es necesario emplear operaciones elementales de renglón. Las operaciones elementales que pueden ser usadas son:

1.- Multiplicación de algún renglón (ecuación) por un número diferente de cero (esto es para convertir el valor del elemento pivote a 1)

2.- La eliminación de x_1 de todos los renglones, con excepción del elemento pivote, se logra sumando un múltiplo adecuado del renglón que contiene el elemento pivote (elemento pivote = 1) a cada uno de los otros renglones.

Estas operaciones elementales no cambian la solución del sistema de-ecuaciones, aunque si cambian los coeficientes de las variables y los valo--res del lado derecho de las restricciones. Al aplicar estas operaciones, es-posible transformar el actual sistema de ecuaciones para identificar la nueva solución básica factible.

Volviendo al problema D'Vestir, se tenía el objetivo de transformar-la columna correspondiente a x_1 de la parte A de la tabla como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ya se tiene $a_{31} = 1$ en la tabla simplex inicial, no es necesario realizar ninguna operación en este renglón. Con el objeto de establecer $a_{11} = 0$-primero se realiza la multiplicación del renglón pivote (el renglón corres--pondiente a la restricción de acabados) por -7/10 obteniendo la ecuación ---equivalente:

$$-7/10\ (x_1 + 2/3\ x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 + 0S_4) = -7/10(708)$$

$$-7/10x_1 - 14/30x_2 - 0S_1 - 0S_2 - 7/10S_3 - 0S_4 = -495.6 \qquad (4.7)$$

La ecuación de restricción de corte y teñido es:

$$7/10x_1 + 1x_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 = 630 \qquad (4.8)$$

Ahora se suma la ecuación (4.7) a la ecuación de corte y teñido (4.8) se obtiene:

$$0\ x_1 + 16/30\ x_2 + 1S_1 - 7/10\ S_3 = 134.4 \qquad (4.9)$$

Se tendrá un sistema equivalente de ecuaciones si la ecuación (4.8)-es reeplazada por la ecuacuión (4.9). Haciendo esta sustitución en la tabla--original, se vé que esta operación permite obtener un cero en la primera posición de la columna x_1 (esto es $a_{11} = 0$).

Es necesario todavía, establecer los elementos del segundo y cuarto -renglón de la columna x_1 igual a cero. Para lograr que el elemento de la se--

gunda restricción correspondiente a la columna x_1 sea igual a cero, es necesario multiplicar el renglón pivote por -1/2 y sumar este resultado a la segunda restricción. De esto resulta:

$$(1/2\ x_1 + 5/6\ x_2 + 1S_2) + (-1/2\ x_1 - 1/3\ x_2 - 1/2\ S_3) \;=\; 600-354$$

Lo que equivale a:

$$0x_1 + 1/2\ x_2 + 0S_1 + 1S_2 - 1/2\ S_3 + 0S_4 \;=\; 246$$

Esto es la nueva representación de la segunda ecuación de restricción en la tabla simplex.

Para obtener un cero en la posición a_{41}, se multiplica el renglón pivote por-1/10 y se suma al cuarto renglón. La ec. de restricción resultante - es:

$$0x_1 + 22/120\ x_2 + 0S_1 + 0S_2 - 1/10\ S_3 + 1S_4 = 64.2$$

Colocando estas tres últimas ecuaciones de restricción en la nueva tabla simplex:

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
básicas	c_j	5000	4500	0	0	0	0	
S_1	0	0	16/30	1	0	-7/10	0	134.4
S_2	0	0	1/2	0	1	-1/2	0	246
x_1	5000	1	2/3	0	0	1	0	708
S_4	0	0	22/120	0	0	-1/10	1	64.2
	z_j							3 540 000
	c_j-z_j							

El sistema de ecuaciones correspondiente es (los términos que tienen coeficientes de cero son omitidos):

$$\begin{aligned}
16/30\ x_2 + 1S_1 \quad\quad & - 7/10\ S_3 &= 134.4\\
1/2\ x_2 + \quad 1S_2 \quad & - 1/2\ S_3 &= 246\\
1\ x_1 + 2/3\ x_2 \quad\quad & + 1\ S_3 &= 708\\
22/120\ x_2 \quad\quad & - 1/10\ S_3 + 1S_4 &= 64.2
\end{aligned}$$

Asignándo valores de cero a las variables no básicas x_2 y S_3, permite una fácil identificación de la nueva solución básica factible.

$$S_1 = 134.4$$
$$S_2 = 246$$
$$x_1 = 708$$
$$S_4 = 64.2$$

Esta solución también puede ser identificada rápidamente refiriéndose a la última columna de la nueva tabla simplex. La ganancia correspondiente a esta solución es $3 540 000. Nótese que este valor de la ganancia fué obtenido de multiplicar los valores de las variables básicas de la columna b por sus correspondientes coeficientes de la f.o., dados en la columna c_j, que es 0(134.4)+ 0(246)+ 5000(708)+ 0(64.2) = 3 540 000. Aún no se han calculado los renglones z_j y $c_j - z_j$ para completar una iteración, antes de hacerlo, se analizarán los resultados que arroja la tabla hasta aquí.

Gráficamente esta iteración se mueve desde un punto extremo a otro a lo largo del límite de la región factible, en la figura 4.1 se vé que la solución básica factible inicial corresponde al punto extremo 1 . Esta primera iteración cambia hacia un mayor incremento por unidad en la ganancia, que es, a lo largo del eje x_1. Se desplaza sobre el eje x_1 alejándose del punto extremo 1 Hasta el punto en que no puede desplazarse sin violar alguna restricción. La solución básica correspondiente, después de haber calculado la primera iteración, es representada por el punto extremo 2 .

Se sabe que las variables de holgura representan la capacidad asociada a cada restricción. Observando el valor de S_1 en la tabla simplex, se vé que la capacidad sin usar de corte y teñido es de 134 horas, entonces la solución indica hacer 708 bolsas estándar, y sabiendo que cada bolsa estándar requiere 7/10 de hora de corte y teñido, el total del número de horas en producir 708 bolsas estándar es 7/10 (708) = 495.6. Se dispone de 630 horas; así se tienen 134.4 horas de tiempo disponible sin usar. Semejantemente, cada bolsa estándar producida requiere de 1/2 hora de tiempo de cosido, la cantidad de tiempo usado en producir 708 bolsas estándar es 354 horas. Se dispone de 600 horas de tiempo de cosido, por lo tanto restan 246 horas. Cada bolsa estándar requiere de 1 hora de tiempo de acabado, así el tiempo disponible para acabados es de 708 horas, entonces se usará todo el tiempo de acaba dos para producir 708 bolsas estándar. Esta es la razón por la que la res--- tricción de acabados se encuentra en el punto extremo (2) . Produciendo 708- bolsas estándar se usará. 1/10 (708) = 70.8 horas de inspección y empacado,- restando 64.2 horas en este departamento.

Para saber si es posible hallar una nueva solución básica factible-- (punto extremo) que mejore el valor de la f.o., es necesario calcular los - renglones z_j y $c_j - z_j$ para la tabla simplex actual. Recuérdese que los ele- mentos del renglón z_j pueden ser calculados multiplicando los elementos de - la columna c_j de la tabla simplex por los elementos correspondientes en las- columnas de la matriz A y sumándolos. Así se obtiene:

$$z_1 = 0(0) + 0(0) + 5000(1) + 0(0) = 5000$$

$$z_2 = 0(16/30) + 0(1/2) + 5000(2/3) + 0(22/120) = 20/3$$

$$z_3 = 0(1) + 0(0) + 5000(0) + 0(0) = 0$$

$$z_4 = 0(0) + 0(1) + 5000(0) + 0(0) = 0$$

$$z_5 = 0(-7/10) + 0(-1/2) + 5000(1) + 0(-1/10) = 5000$$

$$z_6 = 0(0) + 0(0) + 5000(0) + 0(1) = 0$$

Restando z_j de c_j se obtiene el renglón de evaluación neta y esto dá la tabla simplex completa.

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
básicas	c_j	5000	4500	0	0	0	0	
S_1	0	0	16/30	1	0	-7/10	0	134.4
S_2	0	0	1/2	0	1	-1/2	0	246
x_1	5000	1	2/3	0	0	1	0	708
S_4	0	0	22/120	0	0	-1/10	1	64.2
	z_j	5000	10000/3	0	0	5000	0	3 540 000
	c_j-z_j	0	3500/3	0	0	-5000	0	

Anteriormente se consideró el asunto de cambiar la base hasta alcanzar una solución básica factible. Se verá si pueden ser interpretados algu-- nos de los valores numéricos que aparecen en la tabla simplex anterior en -- términos del problema original.D'Vestir.

Se sabe que los elementos de la columna x_2 indican cuanto tendrá que cambiar cada una de las cuatro variables básicas con el objeto de producir - una unidad de x_2 y seguir satisfaciendo todas las restricciones. Usando la - columna, básicas, para identificar la variable básica correspondiente a cada elemento de la columna, se puede ver que introduciendo una unidad de x_2, se- obligará a disminuir S_1 por 16/30 de unidad, S_2 por 1/2 de unidad, x_2 por -- 2/3 de unidad, y S_4 por 22/120 de unidad.

Ahora se verá, que para producir una bolsa de lujo se requiere de -- disminuir la producción de bolsas estándar por 2/3 de unidad. Nótese que --- cuando se decidió producir 708 bolsas estándar, se dispuso de todo el tiempo de acabados. Entonces cada unidad de x_2 producida requerirá 2/3 de hora de - tiempo de acabado (a_{32}= 2/3), en cada unidad de x_1 requerirá de 1 hora con - el objeto de producir una unidad de x_2, se tendrá que disminuir 2/3 de uni-- dad de x_1 con el fin de obtener tiempo de acabado sin usar. Así a_{32}= 2/3 in- dica efectivamente, cuantas unidades de x_1 deberán ser producidas si se in-- troduce una unidad de x_2.

En la tabla original se vió que cada bolsa de lujo requiere de 1 ho- ra de corte y teñido. Cada bolsa de lujo producida sacará 2/3 de bolsa están dar de la solución y por lo tanto liberará 2/3 del tiempo de corte y teñido- requerido para una bolsa estándar. Se recuerda, que cada bolsa estándar re-- quiere de 7/10 de hora, así 2/3 (7/10) = 14/30 de hora que se harán disponi- bles, porque 2/3 de una bolsa estándar dejarán la solución. Cada bolsa de lu jo requiere de 1 hora de corte y teñido, el efecto neto de producir una bol- sa de lujo es realmente sólo una adición, 1 - 14/30 = 16/30 de hora de corte y teñido. Los coeficientes restantes de la columna x_2 pueden ser interpreta- dos de la misma manera.

Se observa porque $c_2 - z_2 = 7/3$, nótese que las variables básicas S_1 S_2, y S_4, son variables de holgura y tienen coeficientes de cero en la fun-- ción objetivo, su reducción cuando una unidad de x_2 es llevada a la solución no disminuye la ganancia total. Sin embargo, la ganancia asociada por cada - unidad de x_1 es $ 5000, la reducción de 2/3 costará $ 10000/3. Por otro lado cada unidad de x_2 llevada a la solución incrementará la ganancia por $ 4500-

o 13500/3. Así el incremento neto en el valor de la f.o. que resulta de aumentar una unidad de x_2 será dado por: 13500/3 - 10000/3 = 3500/3.

Nótese que para todas las variables básicas S_1, S_2, x_1, y x_4 el valor de $c_j - z_j$ es igual a cero. Ya que cada una de estas variables es asociada con una columna unitaria en la tabla simplex, se puede interpretar esto como la intención de llevar una unidad de una variable básica a la solución obligando a remover una unidad de la misma variable básica. El resultado evidentemente es, no cambiar el valor neto en la f.o.

"En resúmen, nótese que en cada iteración del MS:

1.- El valor de la actual sbf puede hallarse en la columna b de la tabla simplex.
2.- El valor de $c_j - z_j$ para cada variable básica es igual a cero
3.- Los coeficientes en una columna particular de la parte A de la tabla simplex, indican cuanto la solución básica actual cambiará si una unidad de la variable asociada con esta es introducida".[1]

Ahora se verá en el renglón de evaluación neta, si es posible introducir una nueva variable a la base y continuar mejorando la f.o.. Usando la regla para determinar cual será la variable que debe entrar a la base, se selecciona x_2, ya que tiene el mayor coeficiente positivo en el renglón de evaluación neta.

Con el objeto de determinar cual variable será removida de la base cuando entre x_2, se calculará para cada renglón i el cociente b_i/a_{i2} (esto es sólo para $a_{i2} > 0$) y entonces se selecciona la variable correspondiente al mayor cociente como la variable a salir de la base. Anteriormente se mostraron estos cocientes en una columna extra de la tabla simplex. De la misma forma se mostrará la siguiente tabla simplex.

Ya que S_1 es el cociente menor, será esta la variable que salga de la base. El elemento pivote será a_{12}= 16/30, que está encerrado en un círculo.

---

1) Anderson David, Sweeney Dennis, y Williams Thomas. *Management Science*. Minnesota, E.U.A. Ed. International: 1985.82p.

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
básicas	c_j	5000	4500	0	0	0	0		
S_1	0	0	16/30	1	0	-7/10	0	134.4	$\frac{134.4}{16/30} = 252$
S_2	0	0	1/2	0	1	-1/2	0	246	$\frac{246}{1/2} = 492$
x_1	5000	1	2/3	0	0	1	0	708	$\frac{708}{2/3} = 1062$
S_4	0	0	22/120	0	0	-1/10	1	64.2	$\frac{64.2}{22/120} = 350.1$
	z_j	5000	10000/3	0	0	5000	0	3 540 000	
	$c_j - z_j$	0	3500/3	0	0	-5000	0		

La variable x_2 será ahora una variable básica. Realizándo las operaciones necesarias, se encontrará una nueva sbf, esto es, transformar la segunda columna de la tabla a la forma:

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Esto se logra realizándo las siguientes operaciones:

1.- Multiplicar cada elemento del renglón 1 por 30/16, así se logra $a_{12} = 1$.
2.- Multiplicar el nuevo renglón 1 por (-1/2) y sumar el resultado al renglón 2, de esto resulta $a_{22} = 0$.
3.- Multiplicar el nuevo renglón 1 por (-2/3) y el resultado sumarlo al renglón 3, de esto se obtiene $a_{32} = 0$.
4.- Multiplicar el nuevo renglón 1 por (-22/120) y el resultado sumarlo al renglón 4, de esto resulta $a_{42} = 0$.

De las operaciones anteriores, cambia otra vez la apariencia de la tabla simplex pero no altera las soluciones a el sistema de ecuaciones, la diferencia es que ahora se tiene x_2, S_2, x_1, y S_4 como variables básicas en la nueva tabla que resulta de estas operaciones, esta solución básica factible corresponde al punto extremo 3 de la figura 4.2 . Recordando el capítulo anterior, este punto extremo corresponde a la solución óptima para el proble ma D'Vestir.

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
básicas	c_j	5000	4500	0	0	0	0	
x_2	4500	0	1	30/16	0	-21/16	0	252
S_2	0	0	0	-15/16	1	5/32	0	120
x_1	5000	1	0	-20/16	0	30/16	0	540
S_4	0	0	0	-11/32	0	9/64	1	18
	z_j							3 834 000
	c_j-z_j							

Sin embargo, el MS no ha identificado esta solución como óptima. Por lo tanto, se debe continuar investigando si es o no necesario llevar otra variable a la base o cambiar a otra solución básica factible. Como se vió antes, esto requiere de calcular los renglones z_j y $c_j - z_j$ para seleccionar la variable entrante, que corresponda al valor más positivo en el renglón de evaluación neta.

Después de realizar los cálculos de z_j y $c_j - z_j$ para la actual solución, se obtiene la siguiente tabla simplex completa:

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
básicas	c_j	5000	4500	0	0	0	0	
x_2	4500	0	1	30/16	0	-21/16	0	252
S_2	0	0	0	-15/16	1	5/32	0	120
x_1	5000	1	0	-20/16	0	30/16	0	540
S_4	0	0	0	-11/32	0	9/64	1	18
	z_j	5000	4500	35000/16	0	55500/16	0	3 834 000
	c_j-z_j	0	0	-35000/16	0	-55500/16	0	

Si se observa el renglón de evaluación neta se vé que cada elemento es cero o negativo. Ya que $c_j - z_j$ es menor que cero en las variables no básicas S_1 y S_3, un intento de llevar una variable no básica a la base, dará--

como resultado la disminución del valor actual de la f.o. .Por lo tanto la tabla anterior representa la solución óptima al problema D'Vestir.

El momento en que se obtiene la solución óptima a un problema de PL, es cuando los valores del renglón de evaluación neta son iguales a cero o negativos. Lo siguiente es la interpretación de la solución óptima.

El valor de las variables de decisión y de holgura, al encontrar la solución óptima, es para $x_1 = 540$, $x_2 = 252$, $S_1 = 0$, $S_2 = 120$, $S_3 = 0$, y $S_4 = 18$.- Esto se muestra en la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 540 \\ 252 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix}$$

El valor de f.o. es de $3 540 000. Esto quiere decir que si el director de D'Vestir desea llevar al máximo sus ganancias, deberá producir 540 -- bolsas estándar y 252 bolsas de lujo, y tendrá tiempo sin usar en los departamentos de cosido y de inspección y empacado, 120 y 18 horas respectivamente.

También se vé que $S_1 = 0$ y $S_3 = 0$ lo que significa que no hay tiempo - sin usar en los departamentos de corte y teñido y acabados. Las restricciones de estas dos operaciones son las que encuentran el punto óptimo.

4.3.3 Forma tabular: Caso general.

En el caso particular de la formulación del modelo del problema de - D'Vestir, se cumple con las dos propiedades que debe poseer la forma tabular de los problemas lineales: 1) Los valores de la columna b (valores del lado derecho) son no negativos, y 2) Con "m" restricciones, "m" columnas de la matriz A son columnas unitarias en renglones diferentes. De esta manera la forma estándar del problema D'Vestir fué también la forma tabular. Sin embargo cuando un problema de PL contenga valores del lado derecho negativos, restricciones mayor o igual que (≥), y/o restricciones de igualdad, se tendrá que aplicar pasos adicionales con el objeto de convertir un programa lineal en esta forma tabular. Primero se mostrará como convertir alguna restricción con un valor del lado derecho negativo, a una restricción equivalente con un valor del lado derecho no negativo.

Con el objeto de explicar esto, supóngase que el director de D'Vestir tiene especificado que el número de bolsas estándar a producir tiene que ser menor o igual que el número de bolsas de lujo, entonces 25 bolsas de lujo tienen que ser desechadas para mostrar este propósito. Se formulará la restricción como:

$$1\ x_1 \leq 1\ x_2 - 25 \qquad (4.10)$$

Se resta x_2 de ambos lados de la desigualdad, esto permitirá colocar todas las variables del lado izquierdo de la restricción y las constantes del lado derecho. Así se tiene:

$$1\ x_1 - 1\ x_2 \leq -25 \qquad (4.11)$$

Hay tres casos separados a considerar, dependiendo de si la restricción en cuestión es menor o igual que, mayor o igual que e igual que. Se comenzará con la ecuación menor o igual que, como la desigualdad (4.11).

1.- Restricción menor o igual que. Si se multiplican ambos lados de la desigualdad por (-1) el signo de la desigualdad cambia, pero también se debe cambiar el sentido de la desigualdad con el objeto de mantener la relación correcta. Esto es:

$$-1\ x_1 + 1\ x_2 \geq 25 \qquad (4.12)$$

2.- Restricción de igualdad. Por ejemplo: $6x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -20$. En este caso sólo es necesario multiplicar ambos lados por (-1) con el objeto de tener: $-6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20$

3.- Restricción mayor o igual que. Por ejemplo: $6x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq -20$. Se multiplican ambos lados de la desigualdad por (-1) con el objeto de tener $-6x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 20$.

4.3.4 Restricciones mayor o igual que.

Ahora se supondrá que el director de D'Vestir quiso asegurarse de que un mínimo de 100 bolsas de cada modelo sean producidas. Se incorporará esta nueva limitante incluyendo las dos restricciones nuevas:

$$1x_1 \geq 100 \tag{4.13}$$

$$1x_2 \geq 100 \tag{4.14}$$

Con estas dos restricciones adicionales, el problema modificado puede ser escrito como:

$$\max \quad 5000\,x_1 + 4500\,x_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} 7/10\,x_1 &+ 1\,x_2 \leq 630 \\ 1/2\,x_1 &+ 5/6\,x_2 \leq 600 \\ 1\,x_1 &+ 2/3\,x_2 \leq 708 \\ 1/10\,x_1 &+ 1/4\,x_2 \leq 135 \\ 1\,x_1 & \qquad \geq 100 \\ & \quad 1\,x_2 \geq 100 \\ x_1\,, & \; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución gráfica de este problema se muestra en la figura (4.3). Es igual al problema original D'Vestir, sin embargo es necesario saber como poner las restricciones mayor o igual que en la forma tabular.

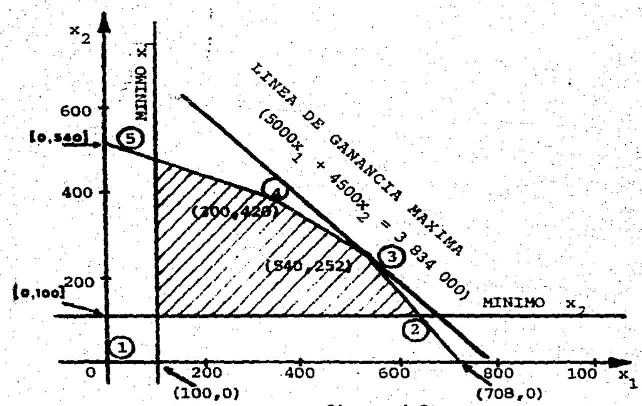


figura 4.3

Para escribir este problema en la forma tabular se introducen variables de holgura.

$$\begin{array}{lrl}
\max & 5000\,x_1 + 4500\,x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 + 0S_6 & \\
\text{s.a} & 7/10\,x_1 + 1\,x_2 + 1S_1 = 630 & (4.15) \\
 & 1/2\,x_1 + 5/6\,x_2 + 1S_2 = 600 & (4.16) \\
 & 1\,x_1 + 2/3\,x_2 + 1S_3 = 708 & (4.17) \\
 & 1/10\,x_1 + 1/4\,x_2 + 1S_4 = 135 & (4.18) \\
 & 1\,x_1 - 1S_5 = 100 & (4.19) \\
 & 1\,x_2 - 1S_6 = 100 & (4.20)
\end{array}$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 \geq 0$$

Se establece $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ y se selecciona las variables de holgura como variables básicas iniciales, sin embargo, si se observa la gráfica de la figura 4.3 se vé que la solución correspondiente al origen ya no es factible. La inclusión de las dos restricciones hizo que la solución con $x_1 = x_2 = 0$ sea infactible.

Observando las ecuaciones (4.19) y (4.20) de la forma estándar de este problema, para $x_1 = x_2 = 0$, se reducen a $-1S_5 = 100$ y $-1S_6 = 100$. Esta es una solución básica, pero no se puede decir que sea una sbf, ya que S_5 y S_6 violan los requerimientos de no negatividad.

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 630 \\ 600 \\ 708 \\ 135 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que el método anterior de crear una sbf, no funciona para este problema. La forma estándar y la forma tabular sólo son equivalentes para problemas con restricciones de menor o igual que (≤).

Para establecer la forma tabular para estos casos, se recurrirá a un truco matemático que consiste en la adición al problema de dos nuevas variables a_5 y a_6; realmente estas no tienen nada que hacer en el problema, solamente ayudarán a encontrar una sbf inicial. Ya que estas variables tienen que ser creadas artificialmente, se les llamará "variables artificiales". Para evitar confuciones, obsérvese que los elementos de la matriz A siempre tendrán dos subíndices mientras que las variables artificiales sólo tienen uno. Se incluye la variable artificial a_5 a la ecuación (4.19) y la variable a_6 a la ecuación (4.20), para obtener la siguiente forma tabular:

$$
\begin{array}{rcrcccccccl}
7/10\ x_1 & + & 1\ x_2 & + 1S_1 & & & & & & & = 630 \\
1/2\ x_1 & + & 5/6\ x_2 & & + 1S_2 & & & & & & = 600 \\
1\ x_1 & + & 2/3\ x_2 & & & + 1S_3 & & & & & = 708 \\
1/10\ x_1 & + & 1/4\ x_2 & & & & + 1S_4 & & & & = 135 \\
1\ x_1 & & & & & & & - 1S_5 & + 1a_5 & & = 100 \\
 & & 1\ x_2 & & & & & - 1S_6 & & + 1a_6 & = 100
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, a_5, a_6 \geq 0$$

Ya que cada una de las variables $S_1, S_2, S_3, S_4, a_5, a_6$ aparecen solamente con un coeficiente de 1, y los valores del lado derecho son no negativos, ambos requerimientos satisfacen la forma tabular.

Ahora se puede obtener una solución básica factible inicial para el sistema de ecuaciones en la forma tabular, estableciendo $x_1 = x_2 = S_5 = S_6 = 0$ esta solución completa es:

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 630 \\ 600 \\ 708 \\ 135 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}
$$

La solución presentada anteriormente, no satisface los requerimientos de producir un mínimo de 100 bolsas estándar y 100 bolsas de lujo. Así se hace una importante distinción entre una sbf para la forma tabular del problema y una sbf para el problema real, que no siempre vá a ser la misma; esto es por la aparición de las variables artificiales en la solución.

Anteriormente se mencionó que la razón para crear la forma tabular, es para obtener una sbf inicial que dá el comienzo al MS. Así se vé que cuando es necesario introducir variables artificiales a la solución simplex inicial no será factible en general para un problema real.

Existe una forma de garantizar que estas variables artificiales salgan de la tabla antes de alcanzar la solución, esta es asignando un valor muy alto a cada una de ellas en la función objetivo. El valor que se asigna a las variables artificiales es muy alto y además negativo, lo que indica que disminuirá considerablemente las ganancias, para evitar esto, serán eliminadas de la base tan pronto como sea posible. Se debe seleccionar un número negativo muy grande (cualquiera), sea -100 000 para el coeficiente de las variables artificiales en la f.o., que se denotará por $-M$. La f.o. para la forma tabular del problema D'Vestir es:

$$\max z_o = 5000x_1 + 4500x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 + 0S_6 - Ma_5 - Ma_6$$

En términos de las nuevas variables artificiales a_5 y a_6 se puede escribir la siguiente tabla simplex inicial:

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	a_5	a_6	
básicas	c_j	5000	4500	0	0	0	0	0	0	-M	-M	
S_1	0	7/10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	630
S_2	0	1/2	5/6	0	1	0	0	0	0	0	0	600
S_3	0	1	2/3	0	0	1	0	0	0	0	0	708
S_4	0	1/10	1/4	0	0	0	1	0	0	0	0	135
a_5	-M	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	100
a_6	-M	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	100
	z_j	-M	-M	0	0	0	0	M	M	-M	-M	-200M
	c_j-z_j	5000+M	4500+M	0	0	0	0	-M	-M	0	0	

En términos de esta tabla, esta es una sbf, ya que todas las variables son mayores o iguales a cero. Sin embargo, en términos del problema modificado, $x_1 = x_2 = 0$ es infactible. Esto se debe al hecho de que las variables artificiales tienen valores positivos en la solución básica actual.

Después de que x_1 entre a la base y a_5 salga de ella, esta iteración se muestra así:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	a_5	a_6	
básicas	c_j	5000	4500	0	0	0	0	0	0	-M	-M	
s_1	0	0	1	1	0	0	0	7/10	0	-7/10	0	560
s_2	0	0	5/6	0	1	0	0	1/2	0	-1/2	0	550
s_3	0	0	2/3	0	0	1	0	1	0	-1	0	608
s_4	0	0	1/4	0	0	0	1	1/10	0	-1/10	0	125
x_1	5000	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	100
a_6	-M	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	100
	z_j	5000	-M	0	0	0	0	-5000	M	5000	-M	500000-100M
	c_j-z_j	0	4500+M	0	0	0	0	-5000	-M	-M-5000	0	

La solución actual aún no es factible, ya que la variable artificial a_6 está en la base con un valor positivo; por no satisfacer el requerimiento $x_2 = 100$. Gráficamente se vé en la figura 4.4 que esta iteración se mueve del origen (A) al punto (B), el cual no está en la región factible.

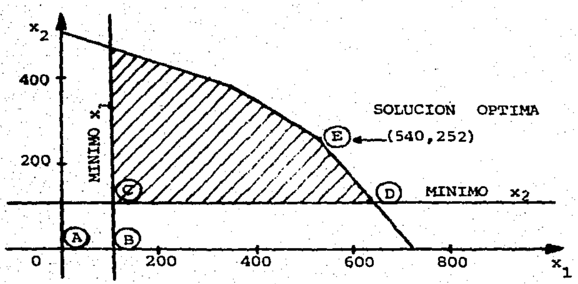


figura 4.4

En la siguiente iteración x_2 será introducida a la base y ... de ella. Después de esta iteración la tabla simplex es la siguiente:

básicas	c_j	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	a_5	a_6	
		5000	4500	0	0	0	0	0	0	-M	-M	
S_1	0	0	0	1	0	0	0	7/10	1	-7/10	-1	
S_2	0	0	0	0	1	0	0	1/2	5/6	-1/2	-5/6	4...
S_3	0	0	0	0	0	1	0	1	2/3	-1	-2/3	54...
S_4	0	0	0	0	0	0	1	1/10	1/4	-1/10	-1/4	100
x_1	5000	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	10
x_2	4500	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	1
	z_j	5000	4500	0	0	0	0	-5000	-4500	5000	4500	9
	c_j-z_j	0	0	0	0	0	0	5000	4500	-5000	-4500	

Ahora esta solución es factible, ya que todas las variables art... ciales salieron de la solución. Esta sbf de la tabla simplex es también sbf para el problema real. La actual solución corresponde al punto C ... fig. 4.4. Las siguientes dos iteraciones cambiarán del punto C al D ... punto D al E de la gráfica, las tablas simplex resultantes son:

Resultados de la 3a. iteración.

básicas	c_j	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	a_5	a_6	
		5000	4500	0	0	0	0	0	0	-M	-M	
S_1	0	0	0	1	0	-7/10	0	0	16/30	0	-16/30	243...
S_2	0	0	0	0	1	-1/2	0	0	3/6	0	-3/6	58...
S_5	0	0	0	0	0	1	0	1	2/3	1	-2/3	1624
S_4	0	0	0	0	0	-1/10	1	0	11/60	0	-11/60	1376
x_1	5000	1	0	0	0	1	0	0	2/3	0	-2/3	192...
x_2	4500	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	10...
	z_j	5000	4500	0	0	5000	0	0	-3500/3	0	3500/3	3 65...
	c_j-z_j	0	0	0	0	-5000	0	0	3500/3	-M	-M-3500/3	

Resultados de la 4a. iteración.

básicas	c_j	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	a_5	a_6	
		5000	4500	0	0	0	0	0	0	-M	-M	
s_6	0	0	0	30/16	0	-210/160	0	0	1	0	-1	152
s_2	0	0	0	-15/16	1	25/160	0	0	0	0	0	120
s_5	0	0	0	-20/16	0	300/160	0	1	0	-1	0	440
s_4	0	0	0	-11/32	0	45/320	1	0	0	0	0	18
x_1	5000	1	0	-20/16	0	300/160	0	0	0	0	0	540
x_2	4500	0	1	30/16	0	-210/160	0	0	0	0	0	252
	z_j	5000	4500	35000/16	0	55500/16	0	0	0	0	0	3 834 000
	c_j-z_j	0	0	-35000/16	0	-55500/16	0	0	0	-M	-M	

Igual que como el método gráfico, la adición de las dos restricciones mayor o igual que , no cambió la solución óptima. Sin embargo, se hicieron más iteraciones para llegar a este punto. Esto es, para eliminar las variables artificiales y así obtener una sbf para el problema real.

En este ejemplo, se alcanzó la solución óptima sin que en ella aparezca ninguna variable artificial, de otra manera si se obtiene la solución óptima y una o más variables artificiales permanecen con un valor positivo en la solución, entonces no hay una solución factible a este problema real. Este caso especial se tratará posteriormente.

Para las restricciones de igualdad en problema de PL sólo se necesita añadir una variable artificial para obtener una sbf inicial para la tabla simplex. Por ejemplo, si se tiene:

$$10x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 15$$

Sólo se le suma una variable artificial llamada a_1 que permite crear una sbf inicial en la tabla. La ecuación anterior será:

$$10x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 1a_1 = 15$$

Después de obtener esta ecuación se procede aplicar el método simplex como previamente fué descritó.

4.4 Solución de un problema de minimización usando el MS.

Existen dos formas para resolver un problema de minimización usando el MS., el primer camino consiste en cambiar las reglas usadas para introducir una variable a la solución. Para el caso de maximización, se selecciona el mayor valor positivo $c_j - z_j$ como la variable a entrar a la base, para resolver un problema de minimización simplemente se invierte esta regla. Esto es, se selecciona la variable con mayor valor negativo $c_j - z_j$ como la primera en introducirse. También se cambia el criterio de detención, en el caso de minimizar se parará cuando cada valor en el renglón de evaluación neta sea no negativo, cuando esto ocurra se tendrá una solución óptima para el problema de minimización.

La segunda forma de resolver un problema de minimización usando el MS, consiste en usar un truco matemático frecuentemente usado en problemas de optimización. Un equivalente a minimizar z es maximizar $-z$ sujeta a las mismas restricciones. Estos problemas, son equivalentes en el sentido de que la solución es la misma cuando se minimice z y cuando se maximice $-z$. La única diferencia es que el valor de la solución de uno es el negativo del valor del otro. Esto es:

$$\min z = -\max(-z)$$

Considerando los datos mostrados en la tabla 4.2, que contiene los valores de la f.o. z y $-z$ para seleccionar las soluciones factibles al problema de la Fuji Film mencionado en el capítulo anterior. Como se puede ver, los valores de x_1 y x_2 que minimizan z son también los valores de x_1 y x_2 que maximizan $-z$. Por otro lado, el valor de la solución que minimiza $z = 500x_1 + 500x_2$, que es, $z = 27\ 500$, es el negativo del valor de la solución que maximiza $-z = -500x_1 - 500x_2$. Así se vé, que si se quiere resolver min $(500x_1 + 500x_2)$, sólo es necesario resolver el problema maximizar $(-500x_1 - 500x_2)$ y multiplicar el valor de la solución por (-1).

Empleando el camino de max (-z) para resolver problemas de minimización, se sigue exactamente el mismo procedimiento de solución simplex que fué trazado para el problema de maximización. Sólo es necesario un cambio, multiplicar la función objetivo por (-1).

Soluciones factibles	$z = 500x_1 + 500x_2$	$-z = -500x_1 - 500x_2$
$x_1 = 40,\ x_2 = 40$	40 000	- 40 000
$x_1 = 40,\ x_2 = 30$	35 000	- 35 000
$x_1 = 40,\ x_2 = 20$	20 000	- 20 000
$x_1 = 30,\ x_2 = 40$	35 000	- 35 000
$x_1 = 30,\ x_2 = 30$	30 000	- 30 000
$x_1 = 30,\ x_2 = 25$	27 500 (valor min z) (valor mínimo de z)	- 27 500 (valor máximo de -z)

tabla 4.2

Por medio del MS se resolverá el problema de minimización de la FF-- resuelto gráficamente en el capítulo anterior.

El problema de la FF se formula:

$$
\begin{array}{lrcrl}
 & \min\ 500x_1 & + & 500x_2 & \\
\text{s.a} & 1x_1 & & & \geq 30 \\
 & & & 1x_2 & \geq 20 \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & \geq 80 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Para resolver el problema usando el MS de maximización, primero se - multiplica la f.o. por (-1) con el objeto de convertir el problema de minimización a el siguiente problema de maximización equivalente:

$$
\begin{array}{lrcrl}
 & \max\ -500x_1 & - & 500x_2 & \\
\text{s.a} & 1x_1 & & & \geq 30 \\
 & & & 1x_2 & \geq 20 \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & \geq 80 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Después de restar las variables de holgura, se obtiene la siguiente- representación de la forma estándar para este problema:

$$\max \; -500x_1 - 500x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} 1x_1 \quad - 1S_1 \quad &= 30 \\ 1x_2 \quad - 1S_2 \quad &= 20 \\ 1x_1 + 2x_2 \quad - 1S_3 &= 80 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ya que el problema involucra las restricciones (=) hay que añadir- variables artificiales para obtener la forma tabular. Después de añadir las- variables artificiales a cada una de las restricciones, se obtiene la siguien te forma tabular para el problema de la FF :

$$\max \; -500x_1 - 500x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - Ma_1 - Ma_2 - Ma_3$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} 1x_1 \quad - 1S_1 \quad + 1a_1 \quad &= 30 \\ 1x_2 \quad - 1S_2 \quad + 1a_2 \quad &= 20 \\ 1x_1 + 2x_2 \quad - 1S_3 \quad + 1a_3 &= 80 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, a_1, a_2, a_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

La tabla simplex inicial es :

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	a_1	a_2	a_3	
básicas	c_j	-500	-500	0	0	0	-M	-M	-M	
a_1	-M	1	0	-1	0	0	1	0	0	30
a_2	-M	0	1	0	-1	0	0	1	0	20
a_3	-M	1	2	0	0	-1	0	0	1	80
	z_j	-2M	-3M	M	M	M	-M	-M	-M	-130M
	c_j-z_j	-500+2M	-500+3M	-M	-M	-M	0	0	0	

Son necesarias tres iteraciones más para encontrar la solución ópti- ma a este problema. El resultado de cada iteración se muestra a continuación:

Tabla 1

básicas	c_j	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	a_1	a_2	a_3	
		-500	-500	0	0	0	-M	-M	-M	
a_1	-M	1	0	-1	0	0	1	0	0	30
x_2	-500	0	1	0	-1	0	0	1	0	20
a_3	-M	1	0	0	2	-1	0	-2	1	40
	z_j	-2M	-500	M	-2M+500	M	-M	-500+2M	-M	-70M-10 000
	c_j-z_j	-500+2M	0	-M	-500+2M	-M	0	-3M+500	0	

Tabla 2

básicas	c_j	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	a_1	a_2	a_3	
		-500	-500	0	0	0	-M	-M	-M	
x_1	-500	1	0	-1	0	0	1	0	0	30
x_2	-500	0	1	0	-1	0	0	1	0	20
a_3	-M	0	0	1	2	-1	-1	-2	1	10
	z_j	-500	-500	-M+500	-2M+500	M	-500+M	-500+2M	-M	-10M-25000
	c_j-z_j	0	0	-500+M	2M-500	-M	-2M+500	-3M+500	0	

Tabla 3

básicas	c_j	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	a_1	a_2	a_3	
		-500	-500	0	0	0	-M	-M	-M	
x_1	-500	1	0	-1	0	0	1	0	0	30
x_2	-500	0	1	1/2	0	-1/2	-1/2	0	1/2	25
S_2	0	0	0	1/2	1	-1/2	-1/2	-1	1/2	5
	z_j	-500	-500	500/2	0	500/2	500/2	0	-500/2	-27 500
	c_j-z_j	0	0	-500/2	0	-500/2	-M-500/2	-M	-M+500/2	

Observese que en la tercera iteración se obtiene la solución óptima-(todos los valores de $c_j - z_j$ son igual a cero). Nótese que es la misma solu-- ción que la obtenida por el procedimiento gráfico.

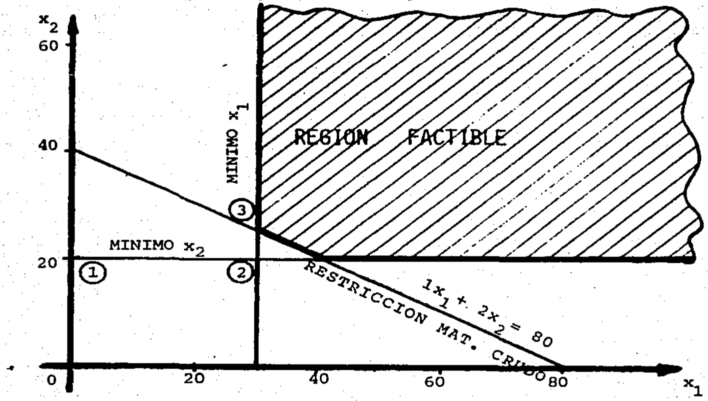


figura 4.5

Refiriéndose a la figura 4.5 se observa que la tabla simplex ini--- cial comenzó en el origen (x_1= 0, x_2= 0), la primera iteración cambia desde el origen al punto (x_1= 0, x_2= 20), nótese que este punto está fuera de la - región factible. La segunda iteración, lleva al punto (x_1= 30, x_2= 20), x_1 - fué introducida a la solución. Sin embargo aún no se tiene una solución fac- tible para el problema real. Finalmente la última iteración lleva al punto-- (x_1= 30, x_2= 25), esta es una solución factible lo cual se puede verificar-- por el procedimiento gráfico. Efectivamente, es la solución óptima al pro--- blema. Nótese que la solución óptima mostrada en la tabla, produce 30 unida- des del producto 1 y 25 unidades del producto 2 que con S_2= 5 se tendrá un - sobrante del producto 2 si fuera requerido.

4.5 Casos especiales.

En el capítulo previo se explicaron los casos de infactibilidad, de- solución ilimitada, y soluciones alternativas óptimas, que ocurren en los --

problemas de PL usando el procedimiento gráfico. Estos casos especiales, también pueden resolverse usando el MS. Un caso adicional, degeneración, puede teóricamente causar dificultades cuando se emplea el MS. En esta sección se mostrará este caso especial.

4.5.1 Infactibilidad.

La infactibilidad ocurre cuando no hay solución al problema lineal que satisfaga todas las restricciones, incluyendo las de no negatividad. Ahora se verá cómo la infactibilidad se reconoce en la tabla simplex.

En la sección correspondiente se mencionó lo referente a las variables artificiales, la infactibilidad se reconocerá cuando el criterio de detención indique una solución óptima y una o más variables artificiales permanezcan en la solución. Como una ilustración a este caso especial, se considerará la modificación al problema D'Vestir, la cual producirá un mínimo de 500 bolsas estándar y 360 bolsas de lujo. También se vió que esta no es una solución factible. La formulación de este nuevo problema modificado se muestra a continuación:

$$\max \quad 5000x_1 + 4500x_2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a} \quad 7/10\, x_1 + 1x_2 &\leq 630 \\
1/2\, x_1 + 5/6\, x_2 &\leq 600 \\
1x_1 + 2/3\, x_2 &\leq 708 \\
1/10\, x_1 + 1/4\, x_2 &\leq 135 \\
1x_1 &\geq 500 \\
1x_2 &\geq 360 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

La siguiente tabla simplex plantea el problema. (Nótese que las dos variables artificiales son incluidas con el objeto de obtener una solución básica factible en la tabla simplex inicial).

Tabla inicial:

básicas	c_j	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	a_5	a_6	
		5000	4500	0	0	0	0	0	0	-M	-M	
s_1	0	7/10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	630
s_2	0	1/2	5/6	0	1	0	0	0	0	0	0	600
s_3	0	1	2/3	0	0	1	0	0	0	0	0	708
s_4	0	1/10	1/4	0	0	0	1	0	0	0	0	135
a_5	-M	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	500
a_6	-M	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	360
	z_j	-M	-M	0	0	0	0	M	M	-M	-M	-860M
	c_j-z_j	M+5000	M+4500	0	0	0	0	-M	-M	0	0	

Tabla 2.

básicas	c_j	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	a_5	a_6	
		5000	4500	0	0	0	0	0	0	-M	-M	
s_1	0	0	1	1	0	0	0	7/10	0	-7/10	0	280
s_2	0	0	5/6	0	1	0	0	1/2	0	-1/2	0	350
s_3	0	0	2/3	0	0	1	0	1	0	-1	0	208
s_4	0	0	1/4	0	0	0	1	1/10	0	-1/10	0	85
x_1	5000	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	500
a_6	-M	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	360
	z_j	5000	-M	0	0	0	0	-5000	M	5000	-M	2500000-360M
	c_j-z_j	0	M+4500	0	0	0	0	5000	-M	-M-5000	0	

Tabla final.

básicas	c_j	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	a_5	a_6	
		5000	4500	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	
x_2	4500	0	1	1	0	0	0	7/10	0	-7/10	0	280
S_2	0	0	0	-5/6	1	0	0	-1/12	0	1/12	0	116.66
S_3	0	0	0	-2/3	0	1	0	16/30	0	-16/30	0	21.33
S_4	0	0	0	1/4	0	0	1	-9/120	0	9/120	0	15
x_1	5000	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	500
a_6	$-M$	0	0	-1	0	0	0	-7/10	-1	7/10	1	80
	z_j	5000	4500	4500+M	0	0	0	$\frac{-18500+7M}{10}$	M	$\frac{18500-7M}{10}$	$-M$	3760000-80M
	c_j-z_j	0	0	-4500-M	0	0	0	$\frac{18500-7M}{10}$	$-M$	$\frac{-18500-8M}{10}$	0	

Como se puede observar, una de las variables artificiales, a_6, está- en la solución final. Nótese que $c_j-z_j \leq 0$ para todas las variables; por lo- tanto según las reglas establecidas anteriormente esta es la solución óptima Pero esta solución no es factible para el problema real, ya que es $x_1 = 500$ y $x_2 = 280$. (Recuérdese que se tiene que hacer un mínimo de 360 bolsas de lu-- jo), el hecho de que la variable artificial a_6 esté en la solución con un valor de 80 está violando la sexta restricción ($x_2 \geq 360$) por 80 unidades.

Nótese que $S_2 = 116.66$, $S_3 = 21.33$ y $S_4 = 15$, ya que S_1 no está en la - solución, porque tenía un valor de cero, esto indica que la solución actual- usa todo el tiempo disponible de corte y teñido pero no usa 116.66 de tiempo de cosido, 21.33 de tiempo de acabados, y 15 horas de tiempo de inspec--- ción y empacados. Así lo que pasó es que la operación de corte y teñido está causando un obstáculo, ya que no hay tiempo disponible suficiente de corte y teñido, no se puede obtener los volúmenes de x_1 y x_2. Esto ocurre aunque --- exista tiempo ocioso en otros departamentos.

El director debe interceder para lograr que haya tiempo disponible - en el departamento de corte y teñido con el objeto de eliminar el problema - de corte y teñido, aún no es posible obtener una solución factible. (Esto,--

obviamente es para el caso D'Vestir ya que no existe tiempo suficiente dis-- ponible para acabados e inspección y empacados, para hacer el número requeri do de bolsas). A no ser que el director decida disminuir el requerimiento de 500 bolsas estándar y 360 bolsas de lujo, se tendrá que continuar asignando- recursos a los departamentos que crean obstáculos hasta que el problema de - PL tenga una solución factible.

En resúmen un programa lineal es infactible si no hay una solución-- que satisfaga todas las restricciones y las condiciones de no negatividad--- simultaneamente. Gráficamente esta situación se puede reconocer como el caso en donde no hay región factible.

4.5.2 Solución ilimitada.

Para problemas de maximización, se dice que un problema lineal es ili mitado si el valor de la solución es infinitamente grande, sin violar ninguna restricción. En el capítulo anterior se discutió la solución ilimitada en la forma gráfica, en problemas de maximización la ganancia ilimitada no ocurre- en la práctica. Así, este caso ocurre generalmente cuando hay un error en la formulación del programa lineal.

El MS inmediatamente descubrirá si existe una ilimitación antes de - que la tabla final sea alcanzada. Lo que sucederá es que la regla para deter minar la variable a remover de la solución no funcionará.

Los coeficientes de una columna de A en particular, indican que tan- to cada una de las variables básicas actuales disminuirá si una unidad de -- las variables asociadas con la columna en particular es llevada a la solu--- ción. Supóngase, entonces, que para un problema lineal en particular se en-- cuentra que $c_2 - z_2 = 5 > 0$, y que todas las a_{i2} en la columna 2 son ≤ 0. Esto propiciará que cada unidad de x_2 llevada a la solución incrementará la- función por 5 unidades. Además ya que $a_{i2} \leq 0$ para toda i, esto propiciará - que ninguna de las variables básicas actuales sean tomadas como cero, no im- porta cuantas unidades de x_2 sean introducidas. Así se puede introducir una- cantidad infinita de x_2 a la solución y todavía mantenerse factible. Ya que- cada unidad de x_2 incrementa a la f.o. por 5, se puede ver que se tiene una- solución ilimitada en este caso. Por lo tanto, la forma para reconocer una-- situación ilimitada es que todas las a_{ij} sean iguales o menores que cero en- la columna j, y el MS indicará que variables x_j serán introducidas a la solu ción. Para ilustrar este concepto considérese el ejemplo de un problema ilimitado que se menciona en el capítulo anterior, y que a continuación se describe:

$$\begin{array}{llcl} & \max \; 6x_1 + 3x_2 & & \\ \text{s.a} & & & \\ & 3x_1 & \geq & 6 \\ & 3x_2 & \leq & 15 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Primero se resta una variable de holgura, S_1, a la primera ecuación de restricción, y se añade otra de holgura a la segunda, S_2, para obtener la forma estándar. Se tiene que añadir una variable artificial, a_1 a la primera restricción, para obtener la forma tabular y establecer la tabla simplex inicial en términos de las variables básicas a_1 y S_2. Después de llevar x_1 a la primera iteración, la tabla simplex es la siguiente:

		x_1	x_2	S_1	a_1	S_2	
básicas	c_j	6	3	0	-M	0	
x_1	6	3	0	-1	1	0	6
S_2	0	0	3	0	0	1	15
	z_j	6	0	-6	6	0	36
	c_j-z_j	0	3	6	-M-6	0	

Ya que se tiene el mayor valor positivo $c_j - z_j$, se conoce que se puede incrementar el valor de la f.o. más rápidamente si se lleva S_1 a la base, pero $a_{13} = -1$ y $a_{23} = 0$, por lo tanto no se puede formar el cociente b_i/a_{i3} ya que no hay valores positivos de a_{i3}. Esto indica que la solución al problema es ilimitada.

Cada unidad de S_1 que sea llevada a la base, maneja 0 unidades de S_2 fuera de la solución y dá una unidad extra de x_1, ya que $a_{13} = -1$. Esto es porque S_1 es una variable de holgura y puede ser interpretado como la cantidad del producto 1 producida sobre la cantidad mínima requerida; que es,

$x_1 = 2$. Ya que la tabla simplex indicó que se puede introducir tanto de S_1 -- como se quiera, sin violar ninguna restricción, esto dice que se puede hacer tanto como se quiera por encima de la cantidad mínima requerida de x_1. Así no será alto el valor destinado a la f.o., ya que el coeficiente de la f.o. asociado con x_1 es positivo.

4.5.3 Soluciones alternativas óptimas.

Un programa lineal con dos o más soluciones óptimas se dice que tiene soluciones óptimas alternativas. En el capítulo anterior se vió que una - alternativa óptima se puede reconocer cuando la línea de la f.o. era paralela a una de las restricciones.

Usando el MS de solución, probablemente no se reconozca en un programa lineal si se tienen alternativas óptimas hasta el final de la tabla simplex. Entonces si el programa tiene alternativas óptimas, $c_j - z_j$ será --- igual a cero para una o más de las variables que no estén incluídas en la solución.

Para ilustrar este caso con el MS se considerará la siguiente modificación del problema D'Vestir (la f.o. se cambiará de $5000x_1 + 4500x_2$ a la -- f.o. de $3500x_1 + 5000x_2$):

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3500x_1 + 5000x_2 \\
\text{s.a} \quad & \\
& 7/10\ x_1 + 1x_2 \leq 630 \\
& 1/2\ x_2 + 5/6\ x_2 \leq 600 \\
& 1x_1 + 2/3\ x_2 \leq 708 \\
& 1/10\ x_1 + 1/4\ x_2 \leq 135 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

La solución gráfica a este problema se muestra en la figura 4.6 . La tabla simplex final muestra que todos los valores en el renglón de evaluación neta son menores o iguales a cero, esto indica que se tiene una solución óptima. Esta solución produce $x_1 = 300$, $x_2 = 420$, $S_2 = 100$, $S_3 = 128$, nótese que la entrada en el renglón de evaluación neta para la variable no básica S_4, es igual a cero. Esto indica que el problema lineal tiene alternativas óptimas. Ya que el correspondiente valor de $c_j - z_j$ de S_4 es igual a cero,-

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
básicas	c_j	3500	5000	0	0	0	0	
x_1	3500	1	0	10/3	0	0	-40/3	300
S_2	0	0	0	-10/18	1	0	-20/18	100
S_3	0	0	0	-22/9	0	1	64/9	128
x_2	5000	0	1	-4/3	0	0	28/3	420
	z_j	3500	5000	5000	0	0	0	3 150 000
	c_j-z_j	0	0	-5000	0	0	0	

se puede introducir S_4 a la solución sin cambiar el valor de la solución óptima. Después de introducir S_4, la tabla que muestra esto, aparece en la siguiente página.

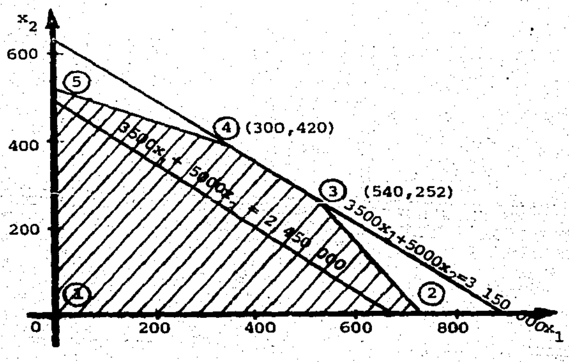


figura 4.6

Después introducir S_4 se tiene una solución diferente: x_1= 540, ---- x_2= 252, S_2= 120, y S_4= 18. Sin embargo, esta solución todavía es óptima---- (c_j-z_j= 0 para toda j). Otro camino para confirmar que esta solución aún es óptima, es verificando que el valor de la f.o. permanece en 3 150 000.

En resúmen, se puede reconocer que un problema lineal tiene soluciones alternativas óptimas, si $c_j-z_j \leq 0$ para una de las variables que no están en la solución.

básicas	c_j	x_1 3500	x_2 5000	S_1 0	S_2 0	S_3 0	S_4 0	
x_1	3500	1	0	-5/4	0	120/64	0	540
S_2*	0	0	0	-30/32	1	10/64	0	120
S_4	0	0	0	-22/64	0	9/64	1	18
x_2	5000	0	1	15/8	0	-84/64	0	252
	z_j	3500	5000	5000	0	0	0	3 150 000
	c_j-z_j	0	0	-5000	0	0	0	

4.5.4 Degeneración.

Un programa lineal se dice que está degenerado, si una o más variables básicas tienen valor de cero. La degeneración no causará alguna dificultad en particular para la representación gráfica; sin embargo, la degeneración puede causar algunas dificultades empleando el MS.

Ahora se verá un problema lineal que contenga ese caso, considerando las siguientes modificaciones en el problema D'Vestir:

$$\max \quad 5000x_1 + 4500x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} 7/10\ x_1 &+ 1x_2 \leq 630 \\ 1/2\ x_1 &+ 5/6\ x_2 \leq 480 \\ 1\ x_1 &+ 2/3\ x_2 \leq 708 \\ 1/10\ x_1 &+ 1/4\ x_2 \leq 135 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este nuevo problema, usando el MS, la tabla después de la primera iteración es la que encabeza la siguiente página.

básicas	c_j	x_1 5000	x_2 4500	S_1 0	S_2 0	S_3 0	S_4 0	
S_1	0	0	16/30	1	0	-7/10	0	134.4
S_2	0	0	1/2	0	1	-1/2	0	126
x_1	5000	1	2/3	0	0	1	0	708
S_4	0	0	22/120	0	0	-1/10	1	64.2
	z_j	5000	10000/3	0	0	5000	0	3 540 000
	c_j-z_j	0	3500/3	0	0	-5000	0	

Los valores en el renglón de evaluación neta indican que se puede -- introducir la variable x_2 a la solución. Calculando los cocientes apropiados para determinar el elemento pivote, se obtiene:

$$b_1/a_{12} = \frac{134.4}{16/30} = 252$$

$$b_2/a_{22} = \frac{126}{1/2} = 252$$

$$b_3/a_{32} = \frac{708}{2/3} = 1062$$

$$b_4/a_{42} = \frac{64.2}{22/120} = 350.2$$

Se observa que el cociente menor se encuentra entre el primero y el- segundo renglón. Esto es una indicación, de que el problema lineal tendrá -- una degeneración en la siguiente iteración. Se selecciona arbitrariamente -- cualquier renglón. La tabla simplex después de esta iteración se mostrará - enseguida.

En esta tabla se muestra algo inusual, cuando se realizó esta iteración y se introducieron 252 unidades de x_2 a la base, no solamente se sacó a S_1 de la solución, se estableció a $S_1 = 0$ y también a $S_2 = 0$. Se tiene una solución básica donde una de las variables básicas es igual a cero.

Cuando se tiene un empate en los cocientes b_i/a_{ij} se tendrá siempre- una de las variables básicas igual a cero. Ya que en este caso se llegó a la solución óptima, no hay problema porque S_2 tenga un valor de cero en la so-

básicas	c_j	x_1 5000	x_2 4500	s_1 0	s_2 0	s_3 0	s_4 0	
x_2	4500	0	1	30/16	0	-210/160	0	252
s_2	0	0	0	-15/16	1	25/160	0	0
x_1	5000	1	0	-20/16	0	300/160	0	540
s_4	0	0	0	-11/32	0	45/320	1	18
	z_j	5000	4500	35000/16	0	55500/16	0	3 834 000
	c_j-z_j	0	0	-35000/16	0	-55500/16	0	

lución. Sin embargo, si esta condición ocurre en alguna iteración antes de - encontrar la solución óptima, esto teóricamente es posible para el algorítmo simplex que entrará en un ciclo. Que es, alternar entre algunos puntos no óptimos establecidos en cada iteración y nunca alcanzar la solución óptima. Este ciclo no representa ninguna dificultad significativa en la práctica. Por lo tanto no se recomienda introducir algún paso especial en el algorítmo simplex para eliminar la posibilidad de que ocurra alguna degeneración. Si - después de realizar la iteración del algorítmo simplex ocurre un empate entre los cocientes menores b_i/a_{ij}, se recomienda simplemente seleccionar el - renglón más alto como elemento pivote.

4.6 Programa para resolver problemas de PL por medio del MS.

Al igual que en el procedimiento gráfico, en el MS también se hace-- necesario el uso de la computadora digital. Puesto que los problemas que se- presentan en la realidad (usualmente)contienen un gran número de variables-- por lo que es indispensable el uso de una computadora digital para resolverlos.

El programa que se presenta es capáz de resolver sistemas de ecuaciones lineales con "n" número de variables y "m" número de restricciones me--- diante el método simplex. Una de las ventajas que presenta este programa es- que sólo requiere de determinado tiempo para su elaboración (como cualquier-otro programa), una vez terminado sólo es necesario correrlo para que en -- cuestión de segundos proporcione el resultado del problema que se le intro-- duzca, tantas veces como sea necesario.

Para hacer uso del programa que se listará a continuación, únicamente es necesario modificar las líneas de datos (D A T A) que aparecen al - final del mismo. En seguida se explica a que se refieren los datos que con-- tienen estas líneas:

En la primera línea de datos deberá ser:

D A T A 4, 2, 4, 0, 0, 1

El primer elemento corresponde al número de restricciones del problema, el-- segundo elemento indica el número de variables, el tercero es el número de- desigualdades del tipo ($\leq$), el cuarto es el número de igualdades, el quin- to es el número de desigualdades del tipo ($\geq$), y el sexto número indica si el problema es maximizar (1) o es de minimizar (-1).

En la segunda :

D A T A 0.7, 1

Los elementos de esta línea corresponden a los coeficientes de la primera -- restricción. Se introduce una línea de datos (D A T A) por cada restricción, comenzando con las del tipo ($\leq$), se continua con las igualdades (=), y- por último con las del tipo ($\geq$).

Después de haber introducido una línea de datos por cada restricción (coeficientes), la siguiente línea de datos es:

D A T A 630, 600, 708, 135

Las cantidades que aparecen en esta línea son los términos independientes, y se introducen en la forma en que se suceden las restricciones.

La última línea de datos será:

D A T A 5000, 4500

Esta línea únicamente contiene los coeficientes de la función objetivo.

```
10 REM PROGRAMA PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE PROGRAMACION
LINEAL
20 REM POR MEDIO DEL METODO SIMPLEX (CON "N" NUMERO DE VAR
IABLES
30 REM Y "M" NUMERO DE RESTRICCIONES)
40 CLS
50 READ M,N,L,E,G,Z
60 IF Z = 1 THEN LET M$="MAX":GOTO 90
70 M$ = "MIN"
80 DIM A(M+2,N+M+G+1),B(M+2)
90 Z=-Z
100 C=N+M+G
110 C1=C+1
120 C2=N+L+G
130 M1=M+1
140 M2=M+2
150 PRINT
160 FOR I=1 TO M2
170 FOR J=1 TO C1
180 A(I,J)=0
190 NEXT J
200 NEXT I
210 FOR I=1 TO M
220 B(I)=0
230 NEXT I
240 FOR I=1 TO M
250 FOR J=1 TO N
260 READ A(I,J)
270 IF I<= L GOTO 290
280 A(M1,J)= A(M1,J)-A(I,J)
290 NEXTJ
300 IF I>L GOTO 340
310 B(I)= N+I
320 A(I,N+I)=1
330 GOTO 400
340 B(I)=N+G+I
350 A(I,N+G+I)=1
360 IF I>L+E GOTO 380
370 GOTO 400
380 A(I,N+I-E)=-1
390 A(M1,N+I-E)=1
400 NEXT I
410 FOR I=1 TO M
420 READ A(I,C1)
430 NEXT I
440 PRINT "f.o.":PRINT M$ ;" Z= "
450 FOR J=1 TO N
```

```
460 READ A(M2,J)
470 Y=J*12
480 IF N=J GOTO 510
490 PRINT @(2,Y),A(M2,J);"X";J;" +"
500 GOTO 520
510 PRINT@(2,Y),A(M2,J);"X";J
520 A(M2,J)=Z*A(M2,J)
530 NEXT J
540 PRINT"s.a"
550 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO N
560 PRINT@(I+3,J*14),A(I,J)
570 NEXT J: NEXT I
580 FOR I= 1 TO M
590 PRINT @(I+3,40),A(I,C1)
600 NEXT I
610 PRINT
620 IF L=0 GOTO 640
630 PRINT
640 IF G=0 GOTO 660
650 PRINT
660 IF L=M GOTO 680
670 PRINT
680 M3=M1
690 GOSUB 1060
700 PRINT
710 FOR K=1 TO M
720 IF B(K)<= C2 GOTO 830
730 IF A(K,C1)<=0.00001 GOTO 760
740 PRINT"PROBLEMA SIN SOL. FACTIBLE"
750 GOTO 1550
760 FOR H=1 TO C2
770 IF ABS(A(K,H))<=0.00001 GOTO 820
780 R=K
790 S=H
800 GOSUB 1290
810 H=C2
820 NEXT H
830 NEXT K
840 M3=M2
850 GOSUB 1060
860 PRINT
870 PRINT"RESPUESTAS"
880 PRINT
890 PRINT"VARIABLES            VALOR"
900 FOR J=1 TO C2
910 FOR I=1 TO M
920 IF B(I)<>J GOTO950
```

```
930 PRINT" X";J,A(I,C1)
940 I=M
950 NEXT I
960 NEXT J
970 PRINT
980 PRINT
990 IF L=0 GOTO 1020
1000 FOR I=1 TO L
1010 NEXT I
1020 PRINT"VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO    Z = ";-Z*A(M2,C1
)
1030 PRINT
1040 PRINT
1050 GOTO 1550
1060 P=-0.00001
1070 FOR J=1 TO C2
1080 IF A(M3,J)>= P GOTO 1110
1090 S=J
1100 P=A(M3,J)
1110 NEXT J
1120 IF P=-0.00001 GOTO 1470
1130 GOSUB 1160
1140 GOSUB 1240
1150 GOTO 1060
1160 Q=1E38
1170 FOR I=1 TO M
1180 IF A(I,S)<= 0.00001 GOTO 1220
1190 IF A(I,C1)/A(I,S)>=Q GOTO 1220
1200 R=1
1210 Q=A(I,C1)/A(I,S)
1220 NEXT I
1230 RETURN
1240 IF Q=1E38 GOTO 1270
1250 GOSUB 1290
1260 RETURN
1270 PRINT"SOLUCION ILIMITADA"
1280 GOTO 1550
1290 P=A(R,S)
1300 FOR I=1 TO M2
1310 IF I=R GOTO 1380
1320 FOR J=1 TO C1
1330 IF J=S GOTO 1370
1340 A(I,J)=A(I,J)-A(I,S)*A(R,J)/P
1350 IF ABS(A(I,J))>=0.00001 GOTO 1370
1360 A(I,J)=0
1370 NEXT J
1380 NEXT I
1390 FOR J=1 TO C1
```

```
1400 A(R,J) [illegible]
1410 NEXT J
1420 FOR I=1 TO M2
1430 A(I,S)=0
1440 NEXT I
1450 A(R,S)=1
1460 B(R)=S
1470 RETURN
1480 DATA 4,2,4,0,0,1
1490 DATA 0.7,1
1500 DATA .5,0.8333
1510 DATA 1,.666
1520 DATA -1,0.25
1530 DATA 630,600,706,135
1540 DATA 3000,4500
1550 END
ΣReady
```

MAX Z = 5,000 x 1 + 4,500 x 2

s.a.

.7	1	630
.5	.8333	600
1	.666	708
.1	.25	135

RESPUESTAS

VARIABLES	VALOR
X 1	540.315
X 2	251.78
X 4	120.035
X 6	18.0236

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO Z = 458E + 06

RESPUESTAS

VARIABLES	VALOR
X 1	540.315
X 2	251.78
X 4	120.035
X 6	18.0236

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO Z = 3.834583 + 06

.16.50.27

f.o

MAX Z =	5,000 x 1 +	4,500 x 2	
s.a.	.7	1	630
	.5	.8333	600
	1	.666	708
	.1	.25	135
	1	0	100
	0	1	100

RESPUESTAS

VARIABLES	VALOR
X 1	540.315
X 2	251.78
X 4	120.035
X 6	18.0236
X 7	440.315
X 8	151.78

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

Z = 3.83458E+06

```
.17.06.11.
f.o.
MIN Z=        500 X 1 +   500 X 2
s.a
              1              0             30
              0              1             20
              1              2             80


^C
Break in 1350
Ready
>SYSTEM"SCREEN
```

RESPUESTAS

```
VARIABLES                      VALOR
  X  1                         30
  X  2                         25
  X  4                         5
```

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

Z = 27500

C A P I T U L O V

EL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

5.1 El modelo de transporte.

El problema de transporte se origina frecuentemente en la planeación de la distribución de productos y servicios, de varias fuentes de suministro a varios destinos.

Usualmente, la cantidad de productos o servicios disponible de cada fuente de suministro (origen) es limitada, y hay una cantidad específica como pedido de cada uno de los destinos. Con una variedad de rutas de transporte y diferentes costos de las rutas, el objetivo es determinar cuantas unidades serán distribuidas de cada origen a cada destino, para que así todas las demandas sean satisfechas, y los costos totales de transporte sean minimizados.

Para ilustrar el problema de transporte, se considerará el problema de la empresa "Bici-Mex. S.A.", que tiene como giro la producción de bicicletas de carreras; y su problema consiste en transportar un producto de tres plantas a cuatro centros de distribución.

"Bici-Mex. S.A." es una firma que tiene sus plantas productivas en la ciudad de México, San Luis Potosí, y León Guanajuato. Las capacidades de producción para estas plantas para el período de los próximos seis meses, de un tipo de bicicleta son las siguientes: México tiene capacidad para producir 25 000 bicicletas, Sn. Luis Potosí producirá 30 000 unidades, y la planta de León Guanajuato tiene capacidad para 12 500 bicicleta sumando la producción de las tres plantas se tiene un total de 67 500 bicicletas.

Supóngase que la firma distribuye las bicicletas a cuatro centros de distribución regional, localizados en Monterrey Nuevo León, Guadalajara Jal.- Torreón y Chihuahua. La demanda para los próximos seis meses de los cen-- tros de distribución es como sigue:

DESTINO	CENTRO DE DISTRIBUCION	DEMANDA ESTIMADA (Unidades)
1	Monterrey	30 000
2	Guadalajara	20 000
3	Chihuahua	10 000
4	Torreón	7 500
	TOTAL:	67 500

La figura 5.1 muestra gráficamente las doce rutas de distribución -- que pueden ser usadas. En esta figura, los ovalos serán referidos como NODOS- y las líneas RUTAS, la figura o gráfica es llamada RED. Así se vé que el problema de transporte puede ser representado gráficamente como una red.

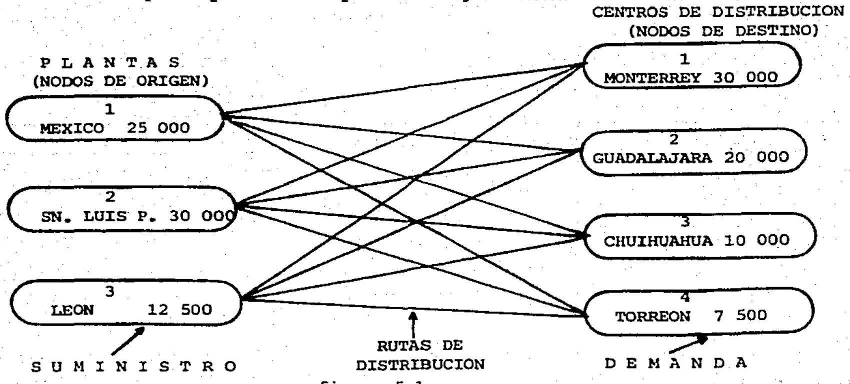


figura 5.1

Los costos de producción son idénticos para las tres plantas, la única variable de costos es el costo de transporte. De esta manera el problema es tomar una decisión acerca de las rutas de distribución que serán empleadas-y la cantidad que será transportada por cada ruta. de tal manera que toda la demanda de los centros de distribución pueda ser satisfecha, con un costo total de transporte mínimo. El costo por unidad transportada en cada ruta es dado en la tabla 5.1 .

	DESTINOS			
ORIGEN	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON
MEXICO	\$1 500	\$1 000	\$3 500	\$3 000
SN. LUIS P.	\$3 500	\$2 500	\$1 000	\$1 500
LEON	\$1 000	\$2 500	\$2 000	\$2 500

tabla 5.1

Un modelo de PL puede ser usado para resolver el problema de transporte de "Bici-Mex". Se usará doble subíndice para las variables de decisión con x_{11} se denotará el número de unidades transportadas del origen 1 (MEXICO) al destino 1 (MONTERREY), x_{12} denotará el número de unidades transportadas del origen 1 (MEXICO) al destino 2 (GUADALAJARA), y así sucesivamente hasta abarcar las doce rutas. En general, las variables de decisión para un problema de transporte tienen "m" origenes y "n" destinos, están escritos como sigue:

x_{ij} = No. de unidades transportadas del origen i al destino j .

donde $i = 1,2,\ldots,m$
$j = 1,2,\ldots,n$

Usando esta notación, $x_{24} = 5000$ corresponderá a transportar 5000 unidades de SN. LUIS P. (origen 2) a TORREON (destino 4).

Ya que el objetivo del problema de transporte es minimizar los costos, se usarán los costos mencionados anteriormente para desarrollar las siguientes expresiones de costos de transporte:

Costo de transporte por
Unidad distribuida de MEXICO $= 1500x_{11} + 1000x_{12} + 3500x_{13} + 3000x_{14}$

Costo de transporte por
Unidad distribuida de SLP $= 3500x_{21} + 2500x_{22} + 1000x_{23} + 1500x_{24}$

Costo de transporte por

Unidad distribuida de LEON = $1000x_{31} + 2500x_{32} + 2000x_{33} + 2500x_{34}$

El total de las expresiones anteriores, proveerá la f.o. mostrando los costos totales de transporte para la "Bici-Mex".

Las restricciones para un problema de transporte surgen porque cada origen tiene una oferta de unidades limitada y cada destino tiene una demanda específica. Considerando la primera restricción de la oferta, nótese que la capacidad de la planta de MEXICO es de 25 000 unidades. El número total de unidades transportadas de la planta de MEXICO se expresan como $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$, por lo tanto la restricción para esta planta se escribe:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 25\ 000 \quad \text{(oferta de MEXICO)}$$

Con tres plantas u origenes, este problema de transporte tendrá tres restricciones de oferta. Teniendo una capacidad de 30 000 unidades para la planta de SLP y 12 500 unidades para la de LEON, las dos restricciones de oferta adicionales son:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 30\ 000 \quad \text{(oferta de SLP)}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 12\ 500 \quad \text{(oferta de LEON)}$$

Con los cuatro centros de distribución, se necesitarán las siguientes cuatro restricciones de demanda para asegurar que las solicitudes de los destinos serán satisfechas:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30\ 000 \quad \text{(demanda de MONTERREY)}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20\ 000 \quad \text{(demanda de GUADALAJARA)}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10\ 000 \quad \text{(demanda de CHIHUAHUA)}$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 7\ 500 \quad \text{(demanda de TORREON)}$$

Relacionando la función objetivo y las restricciones en un modelo, se obtienen las siguientes doce variables y siete restricciones, del problema de transporte de "Bici-Mex":

$$\min\ 1500x_{11}+1000x_{12}+3500x_{13}+3000x_{14}+3500x_{21}+2500x_{22}+1000x_{23}+1500x_{24}+1000x_{31}+2500x_{32}+2000x_{33}+2500x_{34}$$

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccccccccccc}
\text{s.a} & x_{11}+ & x_{12}+ & x_{13}+ & x_{14} & & & & & & & & & \leq & 25\,000 \\
 & & & & & x_{21}+ & x_{22}+ & x_{23}+ & x_{24} & & & & & \leq & 30\,000 \\
 & & & & & & & & & x_{31}+ & x_{32}+ & x_{33}+ & x_{34} & \leq & 12\,500 \\
 & x_{11} & & & & +\ x_{21} & & & & +\ x_{31} & & & & = & 30\,000 \\
 & & x_{12} & & & & +\ x_{22} & & & & +\ x_{32} & & & = & 20\,000 \\
 & & & x_{13} & & & & +\ x_{23} & & & & +\ x_{33} & & = & 10\,000 \\
 & & & & x_{14} & & & & +\ x_{24} & & & & +\ x_{34} & = & 7\,500
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{para } i = 1,2,3 \ \text{ y } j = 1,2,3,4$$

Moddelo mtemático para el problema de transporte de "Bici-Mex"

$$\min\ 1500x_{11}+1000x_{12}+3500x_{13}+3000x_{14}+3500x_{21}+2500x_{22}+1000x_{23}+1500x_{24}+1000x_{31}+2500x_{32}+2000x_{33}+2500x_{34}$$

s.a

$$
\begin{array}{rl}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & \leq 25\,000 \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & \leq 30\,000 \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & \leq 12\,500 \\
x_{11}+x_{21}+x_{31} & = 30\,000 \\
x_{12}+x_{22}+x_{32} & = 20\,000 \\
x_{13}+x_{23}+x_{33} & = 10\,000 \\
x_{14}+x_{24}+x_{34} & = 7\,500
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{para } i = 1,2,3 \ \text{ y } \ j = 1,2,3,4$$

Moddelo mtemático para el problema de transporte de "Bici-Mex"

5.1.1 Consideraciones especiales.

El problema de transporte puede involucrar una o más de las siguientes situaciones:

1.- La oferta total no es igual a la demanda total.
2.- Maximización de la f.o., en lugar de minimización.
3.- Restricciones adicionales sobre rutas específicas.
4.- Rutas inaceptables.

Se verá que con ciertas modificaciones en el problema de transporte (modelo de PL), estas situaciones se pueden tomar en consideración para llegar a la solución óptima de transporte.

Una situación que se presenta a menudo es el caso donde el total de la oferta es diferente al total de la demanda. Si la oferta total excede la demanda total, no es necesario modificar la formulación del problema. Una oferta excesiva aparecerá como una holgura en la solución de PL. Una holgura para un origen en particular puede ser interpretada como la cantidad de oferta no transportada del origen. Si la oferta total es menor que la demanda total, el modelo de PL no tendrá una solución factible, porque las restricciones de demanda no podrán ser satisfechas. En este caso, una modificación en la formulación del problema es necesaria para desarrollar una solución al problema de transporte.

Específicamente se introducirá un origen ficticio, (planta) o capacidad de oferta igual al exceso de la demanda total sobre la oferta total. Se asignará un costo por unidad a cada ruta de la planta ficticia de cero, de esta manera el valor de la f.o. aún representará los costos totales de transporte para este problema (ninguna distribución se hará del origen ficticio). Con la adición de la planta ficticia, la oferta total se hace igual a la demanda total y un modelo de PL se usará para generar una solución. Así con la inclución de la planta ficticia al problema de transporte, proveerá un programa de transporte al menor costo, para la oferta disponible; también indicará cuales destinos tendrán demanda insatisfecha.

En algunas formulaciones de problemas puede ser conveniente considerar la ganancia o ingreso por unidad transportada en lugar del costo por uni dad. Usando los valores de la ganancia o ingreso por unidad, como coeficientes de la función objetivo, simplemente se resolverá una maximización en lugar de una minimización del programa lineal. Las restricciones no son afectadas por este cambio.

La formulación del problema de transporte puede ser modificada tomando en consideración capacidades en una o más de las rutas de distribución. Por ejemplo, supóngase que la ruta LEON a MONTERREY (origen 3 a destino 1) se halló que tiene una capacidad de 1000 unidades a causa de que tiene como limitante la falta de espacio, para esta forma de transporte. Esta limitante en la capacidad de la ruta puede ser tomada en consideración incluyendo una restricción especificando un límite superior para la variable de decisión correspondiente. Con x_{31} denotando la cantidad transportada de LEON a MONTERREY en el problema de "Bici-Mex", la restricción de la capacidad de la ruta LEON a MONTERREY aparecerá como:

$$x_{31} \leq 1000$$

Similarmente, la distribución mínima de una ruta puede garantizarce. Por ejemplo:

$$x_{22} \geq 2000$$

Esto garantiza que un mínimo de 2000 unidades serán mantenidas en la solución para la ruta de SLP a GUADALAJARA.

Como una situación especial, nótese que en problemas de transporte no será posible el establecimiento de una ruta de cada origen a cada destino. Esto es, algunas rutas serán inaceptables. Esta situación será tratada asignando un costo muy alto arbitrariamente, a alguna ruta inaceptable. La solución de costo mínimo al problema de transporte evitará la ruta de transporte inaceptable, a causa de este costo unitario alto. Un camino alternativo para tratar rutas inaceptables es simplemente, remover la correspondiente variable de decisión de la formulación de PL del problema. Por ejemplo, si la ruta MEXICO a CHIHUAHUA fuera inaceptable o inutilizable, x_{13} sería removida de la formulación de PL. Resolviendo el modelo de once variables, y siete restricciones proveerá la solución óptima que garantizará que la ruta MEXICO a CHIHUAHUA no será usada.

5.1.2 Formulación general de PL del problema de transporte.

Con el objeto de mostrar la formulación general del problema de transporte, se usarán las siguientes notaciones:

i = Indice para origenes, $i = 1,2,\ldots,m$
j = Indice para destinos, $j = 1,2,\ldots,n$
x_{ij} = No. de unidades transportadas del origen i al destino j
c_{ij} = Costo de transporte por unidad, del origen i al destino j
S_i = Oferta o capacidad de unidades del origen i
D_j = Demanda de unidades del destino j

La formulación general del problema de transporte de m origenes y n destinos es:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

s.a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq S_i \qquad i = 1,2,\ldots,m \quad \text{(oferta)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j \qquad j = 1,2,\ldots,n \quad \text{(demanda)}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para toda i y j}$$

Si el problema de transporte tenía una oferta total $(\sum S_i)$ menor que la demanda total $(\sum D_j)$, un origen ficticio con una oferta exactamente igual a la diferencia entre la demanda total y la oferta total deberá incluirse. Si se establece S_{m+1} indica la oferta ficticia, entonces $S_{m+1} = \sum D_j - \sum S_i$

Como se indicó previamente,"Para asegurar que el valor de la solución óptima aún representará los costos totales de transporte para este problema, todos los coeficientes de la f.o. para este origen será igual a cero".[1]

En casos donde tienen capacidad algunas rutas específicas, se suman restricciones de la forma $x_{ij} \leq L_{ij}$, donde L_{ij} corresponde a un límite supe-

1) Taha Hamdy A.. *Investigación de Operaciones* . México, Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A., 1981. p. 120

rior de capacidad para la ruta del origen i al destino j. Similarmente, si hay rutas específicas con niveles mínimos de transporte que deban ser mantenidos, se sumarán restricciones de la forma $x_{ij} \geq L_{ij}$. En este caso L_{ij} representa el nivel mínimo de transporte del origen i al destino j.

Con el objeto de resumir los datos convenientemente y para guardar los cálculos del algorítmo, usualmente se emplea una "tabla de transporte" (TT). Para el problema "Bici-Mex" la TT se muestra así:

		D E S T I N O S				
		MONTERREY	GUADALAJARA	CHIH.	TORREON	SUMINISTRO
ORIGEN	MEXICO	1500	1000	3500	3000	25 000
	SLP	3500	2500	1000	1500	30 000
	LEON	1000	2500	2000	2500	12 500
DEMANDA		30 000	20 000	10 000	7 500	67 500

Nótese que las doce celdas de la tabla, corresponden a las doce rutas de distribución mostradas en la figura 5.1 ; cada celda corresponde a la ruta de una planta a un centro de distribuación. Los valores del lado derecho de la tabla, representan el suministro disponible de cada planta, y los valores que están debajo de la tabla indican la demanda de cada centro de distribución. Los valores del ángulo superior derecho de cada celda, representan el costo por unidad de distribución de cada ruta específica.

Una vez completa la TT, se procederá con los cálculos necesarios para determinar el costo mínimo. Para empezar hay que establecer una solución factible inicial.

5.1.3 Solución factible inicial: Método del costo mínimo.

El método del costo mínimo para identificar una solución factible inicial, comienza asignando tantas unidades como sea posible a la ruta del costo mínimo. En la tabla 5.2 se vé que cada una de las rutas, MEXICO-GUADALAJARA, SLP-CHIHUAHUA, y LEON-MONTERREY, son las que tienen el costo mínimo. Ya-que cada una de ellas tiene un costo de transporte de $1000 por unidad. Cuando esto ocurre se procede a seleccionar la ruta sobre la cual se puede transportar el número máximo de unidades. Esto es, transportar 20 000 unidades de MEXICO a GUADALAJARA, se escribe 20 000 en la celda MEXICO-GUADALAJARA de la tabla de transporte. Esto reduce el suministro de MEXICO de 25 000 a 5 000 - unidades; de aquí que se tacha el valor de 25 000 y se reemplaza por 5 000. En suma, ya que 20 000 unidades distribuidas por esta ruta satisfacen la demanda de GUADALAJARA, se tacha el valor de 20 000 unidades de GUADALAJARA y - se reemplaza por un cero. La demanda de GUADALAJARA ahora es cero, de esta - manera se elimina esta columna tachándola también, quedando fuera de consideración. La tabla de transporte ahora se muestra como sigue:

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
MEXICO	1500	1000 20 000	3500	3000	~~25 000~~ 5 000
SLP	3500	2500	1000	1500	30 000
LEON	1000	2500	2000	2500	12 500
DEMANDA	30 000	~~20 000~~ 0	10 000	7 500	

Ahora sólc se tomarán en cuenta las celdas sin rayar, con el objeto - de identificar la nueva ruta de costo mínimo. Existe un empate entre las rutas de SLP- CHIHUAHUA y LEON-MONTERREY, pero ya que pueden ser distribuidas- más unidades por la ruta LEON-MONTERREY, se elige esta para la siguiente --- asignación. Esto dá como resultado la distribución de 12 500 unidades por la ruta LEON-MONTERREY. De esta manera el suministro de LEON se reduce a cero, y se elimina este renglón de toda consideración, tachándolo. Continuando con - este proceso se asignan 10 000 unidades a la ruta SLP-CHIHUAHUA y queda sa-- tisfecha la columna de CHIHUAHUA, y se tacha para quedar fuera de considera- ción. El suministro de SLP se cambia de 30 000 a 20 000 unidades por las que fueron asignadas a CHIHUAHUA. La TT que se obtiene después de hacer la segunda y tercera asignación se muestra así:

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
MEXICO	$\boxed{1500}$	$\boxed{1000}$ 20 000	$\boxed{3500}$	$\boxed{3000}$	5 000 ~~25 000~~
SLP	$\boxed{3500}$	$\boxed{2500}$	$\boxed{1000}$ 10 000	$\boxed{1500}$	20 000 ~~30 000~~
~~LEON~~	$\boxed{1000}$ 12 500	$\boxed{2500}$	$\boxed{2000}$	$\boxed{2500}$	0 ~~12 500~~
DEMANDA	17 500 ~~30 000~~	0 ~~20 000~~	0 ~~10 000~~	7 500	

Ahora se tienen dos rutas que poseen el costo menor con un valor de- \$1 500 : MEXICO-MONTERREY y SLP-TORREON. Ya que un máximo de 5000 unidades - pueden ser distribuidas por la ruta SLP-TORREON, la siguiente asignación se- rá de 7 500 unidades por la ruta SLP-TORREON. Dando así un resultado de cero en la demanda de TORREON, y de aquí que esta columna se elimina. La siguien- te asignación es de 5 000 unidades por la ruta MEXICO-MONTERREY. La tabla de transporte ahora aparece como se muestra en la siguiente página:

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
MEXICO	1500 5 000	1000 20 000	3500	3000	0 ~~5 000~~ ~~25 000~~
SLP	3500	2500	1000 10 000	1500 7 500	12 500 ~~20 000~~ ~~30 000~~
LEON	1000 12 500	2500	2000	2500	0 ~~12 500~~
DEMANDA	12 500 ~~17 500~~ ~~30 000~~	0 ~~20 000~~	0 ~~10 000~~	0 ~~7 500~~	

La única celda restante sin tachar es SLP-MONTERREY. Después de hacer esta asignación la tabla resultante es :

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
MEXICO	1500 5 000	1000 20 000	3500	3000	0 ~~5 000~~ ~~25 000~~
SLP	3500 12 500	2500	1000 10 000	1500 7 500	0 ~~12 500~~ ~~20 000~~ ~~30 000~~
LEON	1000 12 500	2500	2000	2500	0 ~~12 500~~
DEMANDA	0 ~~12 500~~ ~~17 500~~ ~~30 000~~	0 ~~20 000~~	0 ~~10 000~~	0 ~~7 500~~	

Esta solución es factible, ya que toda la demanda está satisfecha y toda la-oferta se distribuyó. El resultado total del costo de transporte de esta solución es calculado en la tabla 5.3 .

RUTA				
ORIGEN	DESTINO	UNIDADES DISTRIBUIDAS	COSTO UNITARIO	COSTO TOTAL
MEXICO	MONTERREY	5 000	$1 500	$7 500 000
MEXICO	GUADALAJARA	20 000	$1 000	$20 000 000
SLP	MONTERREY	12 500	$3 500	$43 750 000
SLP	CHIHUAHUA	10 000	$1 000	$10 000 000
SLP	TORREON	7 500	$1 500	$11 250 000
LEON	MONTERREY	12 500	$1 000	$12 500 000
			COSTO TOTAL	$105 000 000

tabla 5.3

El método que se planteará a continuación, proveerá un procedimiento iterativo para cambiar una solución factible inicial (lograda por el método de costo mínimo) a una solución óptima. Este método puede ser aplicado solamente si la solución factible inicial de un problema de transporte de m orígenes y n destinos, utilice m+n-1 rutas de transporte. De aquí que el problema de transporte "Bici-Mex" debe tener 3+4-1 = 6 rutas de transporte en la solución factible inicial. Para este problema la solución factible inicial satisface esta condición. Para garantizar que el método de costo mínimo siempre generará soluciones factibles iniciales con m+n-1 rutas después de hechas las asignaciones, se deberá modificar un poco.

Nótese que cuando se hizo la asignación pasada de 12 500 unidades por la ruta SLP-MONTERREY, se agotaron simultaneamente el suministro de SLP y la demanda de MONTERREY. Si esta solución ocurriera en alguna iteración anterior se obtendría una solución factible inicial con menos rutas de transporte de m+n-1 . Para prevenir esta situación, cuando se alcance una iteración en donde el suministro del origen y la demanda de el destino se reduzcan a cero simultaneamente, se debe proceder como sigue:

1.- Eliminar el renglón y la columna tachándolos.

2.- En adición a la asignación de la celda de la intersección del renglón y la columna tachada, se asigna una distribución de cero unidades a cual--

quier celda desocupada, ya sea en el renglón o columna tachada. Se trata -- esta celda de la misma forma que las otras celdas en que se hicieron asignaciones.

Ahora se verá como se aplica el procedimiento anterior consistente en tres origenes y cuatro destinos; la TT se muestra en seguida:

		DESTINO				
		D_1	D_2	D_3	D_4	SUMINISTRO
	O_1	[6]	[8]	[3]	[10]	30
ORIGEN	O_2	[2]	[9]	[5]	[7]	15
	O_3	[7]	[8]	[6]	[4]	15
DEMANDA		10	25	10	15	

Utilizando los pasos del método del costo mínimo, primero se asigna-- 10 unidades a la ruta O_2-D_1 seguida de una asignación de 10 unidades a la ruta O_1-D_3. La tabla de transporte resultante aparece como sigue:

	D_1	D_2	D_3	D_4	SUMINISTRO
O_1	[6]	[8]	[3] 10	[10]	20 ~~30~~
O_2	[2] 10	[9]	[5]	[7]	5 ~~15~~
O_3	[7]	[8]	[6]	[4]	15
DEMANDA	~~10~~ 0	25	~~10~~ 0	15	

De acuerdo al método de costo mínimo la siguiente asignación deberá - ser 15 unidades a la ruta O_3-D_4 sin embargo, se vé que haciendo esta asignación, simultaneamente se reducirán a cero la oferta de O_3 y la demanda de D_4 Cuando se hace esta asignación, con el objeto de garantizar que habrá dos asignaciones cuando el renglón y la columna sean tachados, se debe asignar también cero unidades a una de las celdas desocupadas del renglón O_3 o la columna D_4.

	D_1	D_2	D_3	D_4	SUMINISTRO
O_1	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{10}$	20 ~~30~~
O_2	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{9}$	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	5 ~~15~~
~~O_3~~	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 15	0 ~~15~~
DEMANDA	~~10~~ 0	25	~~10~~ 0	~~15~~ 0	

Esta tabla sirve de ejemplo para mostrar que el continuar con la aplicación del método del costo mínimo, dará como resultado una solución factible inicial consistente de 3+4-1 = 6 rutas de transporte. Una de las cuales tendrá una asignación de cero.

Existen otros métodos disponibles para encontrar soluciones factibles iniciales a un problema de transporte. Dos de los caminos más comunmente usados son: La regla de la "esquina noroeste" y el método de aproximación de Vogel. Estos dos métodos son diferentes, la diferencia estriba en que las asignaciones hechas usando el método de aproximación de Vogel toma en consideración los costos de distribución (como se emplea el método de costo mínimo), mientras que la regla de la esquina noroeste ignora los costos para obtener una solución factible inicial. La regla del costo mínimo que se introdujo, es fácil de aplicar y toma en cuenta los costos para proveer una buena solución factible inicial. De esta manera, este es el camino que se utilizará para encontrar soluciones factibles iniciales.

Antes de cambiar a la segunda fase del procedimiento de solución y de intentar mejorar la solución factible inicial, se volverán a plantear los --

pasos del método del costo mínimo para obtener una solución inicial de transporte.

1.- Identificar en la TT la celda con el costo más bajo, y asignar tantas unidades como sea posible a esta celda o ruta de transporte. En caso de que exista un empate en celdas con igual costo, se eligirá aquella por la que más unidades puedan ser distribuidas.

2.- Reducir el renglón de suministro y la columna de demanda por la cantidad asignada a la celda elegida en el paso (1).

3.- Si todos los renglones de oferta están satisfechos, entonces parar; las asignaciones hechas proveerán una solución factible inicial. De otra manera se continuará con el paso (4).

4.- Si el renglón de la oferta es ahora cero, eliminar el renglón de toda consideración, tachándolo. Si la columna de demanda es ahora cero, se eliminará tachándola también. Si ambos un renglón y una columna son tachados, hacer otra asignación de cero unidades a alguna celda sin ocupar en el renglón o la columna.

5.- Continuar con el paso (1) para todos los renglones y columnas sin tachar.

5.1.4 Método del banquillo (Stepping-Stone)

El método de banquillo provee un procedimiento iterativo para cambiar de una solución factible inicial a una solución óptima. Este método, se usará para calcular la costeabilidad de distribución de las rutas de transporte que actualmente no forman parte de la solución de transporte.

Para mostrar como se aplica el método de banquillo se volverá a la solución factible inicial del problema "Bici-Mex" encontrada por el método de costo mínimo.

Supóngase que se asigna una unidad a la celda o ruta del renglón dos, columna dos, esto es, transportar una unidad por la ruta de SLP-GUADALAJARA, actualmente sin utilizar. Con el objeto de satisfacer completamente la demanda de GUADALAJARA, se tendrá que reducir el número de unidades de la celda MEXICO-GUADALAJARA a 19 999. Pero se hará un incremento en la celda MEXICO-MONTERREY de 5000 a 5001 porque hay que cumplir con el suministro de MEXICO de 25 000 unidades.

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
	1500	1000	3500	3000	
MEXICO	5 000	20 000			25 000
	3500	2500	1000	1500	
SLP	12 500		10 000	7 500	30 000
	1000	2500	2000	2500	
LEON	12 500				12 500
DEMANDA	30 000	20 000	10 000	7 500	

Finalmente, se deberá reducir la celda SLP-MONTERREY por una unidad con motivo de satisfacer completamente la demanda de MONTERREY. La tabla siguiente resume esta serie de ajustes descritos:

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
	1500	1000	3500	3000	
MEXICO	5001 5000	19999 20000			25 000
	3500	2500	1000	1500	
SLP	12499 12500	+ 1	10 000	7 500	30 000
	1000	2500	2000	2500	
LEON	12500				12 500
DEMANDA	30 000	20 000	10 000	7 500	

Se calculará el costo por unidad, que resulta de la adición de una -- unidad a la ruta SLP-GUADALAJARA. Los costos modificados son ahora:

	CAMBIOS	EFECTO SOBRE EL COSTO
Adición de una unidad	SLP-GUADALAJARA	+ 2 500
Reducción de una unidad	MEXICO-GUADALAJARA	- 1 000
Adición de una unidad	MEXICO-MONTERREY	+ 1 500
Reducción de una unidad	SLP-MONTERREY	- 3 500
	Efecto neto:	- 500

Este análisis explica que los costos de transporte pueden ser reducidos por $ 500 por cada unidad transportada por la ruta SLP-GUADALAJARA, si - se hacen los cambios correspondientes a las otras rutas como se indica.

Antes de hacer adiciones a esta nueva ruta, se considerará el procedimiento general para evaluar los costos asociados con una nueva ruta, y entonces checar todas las rutas sin usar actualmente, para encontrar la mejor ruta para incluirla a la solución de transporte actual. Nótese que para considerar la adición de esta nueva ruta, se evaluará este efecto en otras rutas- que actualmente están en la solución de transporte, refiriéndose a estas como celdas ocupadas.

En total se harán cuatro cambios en celdas o rutas, la celda nueva y- tres celdas ocupadas o soluciones actuales. En efecto, se puede ver como estas cuatro celdas forman una ruta en la tabla, en donde las esquinas de las- rutas son celdas de solución actual o celdas ocupadas. Para identificar la - ruta para una celda nueva, se cambiará de celda en dirección vertical u horizontal usando celdas de solución actual, únicamente de las esquinas de la- ruta, y se deberá volver a la celda desocupada por la que se inició.

Cuando se evalúa la ruta SLP-GUADALAJARA, usando el método del banquillo, la tabla de transporte representa la secuencia de modificaciones que parten de SLP-GUADALAJARA, a la celda de MEXICO-GUADALAJARA, y cierra la ruta -- con la celda SLP-GUADALAJARA; esto es, las modificaciones fueron hechas en un sentido opuesto a las manecillas del reloj. Pero se obtiene el mismo resultado si se hacen las modificaciones en el mismo sentido de las manecillas del - reloj. De hecho, en el próximo ejemplo se harán las modificaciones necesarias

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
MEXICO	$\boxed{1500}$ 5000	$\boxed{1000}$ 20000	$\boxed{3500}$	$\boxed{3000}$	25 000
SLP	$\boxed{3500}$ 12500	$\boxed{2500}$	$\boxed{1000}$ 10000	$\boxed{1500}$ 7500	30 000
LEON	$\boxed{1000}$ 12500	$\boxed{2500}$	$\boxed{2000}$	$\boxed{2500}$	12 500
DEMANDA	30 000	20 000	10 000	7 500	

CELDA OCUPADA

CELDA DESOCUPADA

procediendo en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

Por ejemplo, ahora se vá a determinar el efecto neto para la ruta MEXICO-CHIHUAHUA. En términos de una TT, la ruta de banquillo representa la secuencia de modificaciones que son necesarias para mantener una solución factible, dado que una unidad es distribuida asignándola a una celda nueva o actualmente desocupada.

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
MEXICO	$\boxed{1500}$ 5000	$\boxed{1000}$ 20000	$\boxed{3500}$	$\boxed{3000}$	25 000
SLP	$\boxed{3500}$ 12500	$\boxed{2500}$	$\boxed{1000}$ 10000	$\boxed{1500}$ 7500	30 000
LEON	$\boxed{1000}$ 12500	$\boxed{2500}$	$\boxed{2000}$	$\boxed{2500}$	12 500
DEMANDA	30 000	20 000	10 000	7 500	

Nótese que con el objeto de hacer las modificaciones necesarias para incrementar el "flujo" de la ruta MEXICO-CHIHUAHUA, las esquinas de la ruta del banquillo son las únicas que se modifican, en esta ruta se pasará por encima de la celda ocupada MEXICO-CHIHUAHUA. Este tipo de situaciones frecuentemente se originan cuando se determina una ruta de banquillo.

Usando el método del banquillo para una nueva celda, se pueden evaluar los costos asociados con la adición de una unidad a la nueva celda. Por ejemplo, la celda MEXICO-CHIHUAHUA resultará de los siguientes cambios:

	CAMBIOS	EFECTO SOBRE EL COSTO
Adición de una unidad	MEXICO-CHIHUAHUA	+ 3 500
Reducción de una unidad	SLP-CHIHUAHUA	- 1 000
Adición de una unidad	SLP-MONTERREY	+ 3 500
Reducción de una unidad	MEXICO-MONTERREY	- 1 500
	efecto neto:	+ 4 500

Así se vé que la ruta MEXICO-CHIHUAHUA no es atractiva, el añadir una unidad por esta ruta dará como resultado un incremento de $4 500 en el costo de transporte.

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
MEXICO	$\boxed{1500}$ 5000	$\boxed{1000}$ 20000	$\boxed{3500}$ +4500	$\boxed{3000}$ +3500	25 000
SLP	$\boxed{3500}$ 12500	$\boxed{2500}$ -500	$\boxed{1000}$ 10000	$\boxed{1500}$ 7500	30 000
LEON	$\boxed{1000}$ 12500	$\boxed{2500}$ +2000	$\boxed{2000}$ +3500	$\boxed{2500}$ +3500	12 500
DEMANDA	30 000	20 000	10 000	7 500	

El evaluar el efecto neto para todas las posibles celdas dió como resultado la tabla anterior. El efecto del costo por unidad para cada nueva celda posible está encerrado en un círculo en la celda.

Basándose en los cálculos por unidad, se vé que la mejor celda en términos de reducción de costos es la celda SLP-GUADALAJARA, con un decremento de $500 por unidad distribuida por esta ruta. La cuestión ahora es, cuánto se transportará por esta nueva ruta. Ya que el costo total decrece $500 por unidad transportada, lo más lógico es que se piense transportar el máximo número de unidades. Se sabe que cada unidad distribuida por la ruta SLP-GUADALAJARA, basándose en los cálculos previos, ocacionará un incremento de una unidad distribuida por la ruta MEXICO-MONTERREY y un decremento de una unidad distribuida en ambas cantidades de las rutas SLP-MONTERREY (actualmente 12 500), y la ruta MEXICO-GUADALAJARA (actualmente 20 000). Esto es, que el máximo que puede ser transportado por la ruta SLP-GUADALAJARA es 12 500. Esto dá como resultado una disminución de 12 500 unidades en la ruta MEXICO-GUADALAJARA, y un incremento de 12 500 en la ruta MEXICO-MONTERREY, y un decremento de 12 500 unidades en la ruta SLP-MONTERREY. La tabla correspondiente a esta nueva solución se presenta a continuación:

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
MEXICO	[1500] 17500	[1000] 7500	[3500]	[3000]	25 000
SLP	[3500]	[2500] 12500	[1000] 10000	[1500] 7500	30 000
LEON	[1000] 12500	[2500]	[2000]	[2500]	12 500
DEMANDA	30 000	20 000	10 000	7 500	

Nótese que los únicos cambios de la tabla previa están localizados en la ruta de banquillo, originándose en la celda SLP-GUADALAJARA. Ahora se pue de usar el método de banquillo para calcular los cambios por unidad, que son resultado de tratar de incluir una nueva celda o ruta a esta nueva solución. Haciendo esto se obtiene la siguiente tabla, en donde se observa que la ruta de banquillo de la celda LEON-CHIHUAHUA está indicada por la línea punteada en la tabla.

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
MEXICO	1500 17500	1000 7500	3500 +4000	3000 +3000	25 000
SLP	3500 +500	2500 12500	1000 10000	1500 7500	30 000
LEON	1000 12500	2500 +2000	2000 +3000	2500 +3000	12 500
DEMANDA	30 000	20 000	10 000	7 500	

El cambio por unidad para cada nueva celda ahora es mayor o igual que cero. Así entonces, no hay una nueva ruta que disminuya el costo total, ya-- que la solución óptima se ha alcanzado. La solución óptima junto con el costo total están resumidos en la tabla 5.4

RUTAS Origen	Destino	UNIDADES DISTRIBUIDAS	COSTO UNITARIO	COSTO TOTAL
MEXICO	MONTERREY	17 500	$1 500	$26 250 000
MEXICO	GUADALAJARA	7 500	1 000	7 500 000
SLP	GUADALAJARA	12 500	2 500	31 250 000
SLP	CHIHUAHUA	10 000	1 000	10 000 000
SLP	TORREON	7 500	1 500	11 250 000
LEON	MONTERREY	12 500	1 000	12 500 000
			TOTAL	$98 750 000

tabla 5.4

En la explicación del método del costo mínimo, se dijo que un requerimiento del proceso iterativo para hallar la solución óptima es, que la solución factible inicial debe utilizar m+n-1 rutas de transporte. Este requerimiento también debe ser mantenido para cada iteración del procedimiento de solución de banquillo.

A pesar de que no hubo dificultad con el problema de "Bici-Mex", hay situaciones que pueden originarse donde como resultado de hacer una asignación a una nueva celda, la asignación a más de una celda desocupada se reduce a cero. Esto causará que se tenga menos que m+n-1 rutas de transporte en la actual solución. Para proveer una ilustración de tal situación se considerará la siguiente modificación al problema de transporte de "Bici-Mex".

Supóngase que el suministro original de MEXICO fué de 17 500 en lugar de 25 000 y que la demanda de GUADALAJARA fué de 12 500 en lugar de 20 000, la solución factible inicial que se obtendrá usando el método del costo mínimo, se presenta a continuación:

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
MEXICO	[1500] 5000	[1000] 12500	[3500]	[3000]	17 500
SLP	[3500] 12500	[2500]	[1000] 10000	[1500] 7500	30 000
LEON	[1000] 12500	[2500]	[2000]	[2500]	12 500
DEMANDA	30 000	12 500	10 000	7 500	

Ahora, si se consideran 12 500 unidades distribuidas por la ruta SLP-GUADALAJARA como se hizo previamente, la cantidad en la celda MEXICO-GUADALAJARA se deberá reducir a cero, la cantidad de la ruta MEXICO-MONTERREY se deberá incrementar a 17 500 y la ruta SLP-MONTERREY se deberá reducir a cero,--

y de aquí que en la nueva solución se tendrán únicamente cinco rutas de ---- transporte siendo utilizadas en lugar de las seis requeridas. Para mantener- una solución con seis rutas de transporte, se seleccionan arbitrariamente -- entre las rutas MEXICO-GUADALAJARA o SLP-MONTERREY para reducirlas a un va-- lor de cero unidades. Al seleccionar la ruta SLP-MONTERREY para recibir esta asignación de cero, dá como resultado la próxima tabla de transporte:

	MONTERREY	GUADALAJARA	CHIHUAHUA	TORREON	SUMINISTRO
MEXICO	1500 / 17500	1000	3500	3000	17 500
SLP	3500 / 0	2500 / 12500	1000 / 10000	1500 / 7500	30 000
LEON	1000 / 12500	2500	2000	2500	12 500
DEMANDA	30 000	12 500	10 000	7 500	

En otros cálculos la celda SLP-MONTERREY es tratada igual que cual--- quier otra celda ocupada. La asignación de cero unidades en casos tales como estos, garantizan que siempre se utilizarán m+n-1 rutas para cualquier itera ción del procedimiento de solución.

La parte más difícil del procedimiento de solución es la identifica-- ción de la ruta de banquillo, para que así sea calculado el cambio de costo- por unidad de cada nueva celda. Hay un camino fácil para hacer estos cálcu-- los de los costos por unidad, este es llamado método de los "multiplicado--- res". Se mostrará como se puede aplicar este método para calcular los cam--- bios por unidad para las nuevas celdas o celdas desocupadas.

5.1.5 Método de multiplicadores.

"Este método requiere que se definan un multiplicador u_i para cada ren- glón de la tabla y un multiplicador v_j para cada columna de la tabla. Los va-

Ahora se define $e_{ij} = c_{ij}-u_i-v_j$, donde el valor de e_{ij} representa el cambio por unidad del costo total, como resultado de asignar una unidad a la celda desocupada en el renglón i y la columna j. Volviendo a escribir la tabla final para el problema "Bici-Mex.", reemplazando la información de los márgenes con los valores de u_i y v_j se obtiene:

u_i \ v_j	1500	1000	-500	0
0	$\boxed{1500}$ 17 500	$\boxed{1000}$ 7 500	$\boxed{3500}$ 4000	$\boxed{3000}$ 3000
1500	$\boxed{3500}$ 500	$\boxed{2500}$ 12 500	$\boxed{1000}$ 10 000	$\boxed{1500}$ 7 500
-500	$\boxed{1000}$ 12 500	$\boxed{2500}$ 2000	$\boxed{2000}$ 3000	$\boxed{2500}$ 3000

El efecto del costo por unidad para cada celda nueva (e_{ij}) está encerrado en un círculo.

Obsérvese que tan fácil es el cambio de los efectos netos usando el método de los multiplicadores. Por ejemplo, $e_{13}=c_{13}-u_1-v_3 = 7-0-(-1) = 8$ representa el cambio neto en el costo total que resultaría de asignar una unidad a la celda en el renglón 1 columna 3. También se observa que esas e_{ij} calculadas por el método de multiplicadores son exactamente las mismas que los efectos netos calculados por el método de banquillo. Aún es necesario determinar que ruta es la que cierra, y a la vez la mejor ruta que abre se identificará. Sin embargo, esto no es necesario para generar una ruta de banquillo para cualquiera de las otras celdas desocupadas. De esta manera un ahorro de trabjo considerable se puede obtener empleando el método de multiplicadores para el cálculo de las e_{ij} de las celdas desocupadas.

Dada la tabla de transporte con una solución inicial y m+n-1 celdas ocupadas, el método de banquillo en forma resumida es como sigue:

lores de esos multiplicadores se hayan requiriendo que el coeficiente del costo para cada solución actual (celda ocupada) sea igual a $u_i + v_j$. Si se define que c_{ij} es el costo por unidad de transportar de la planta i al centro de distribución j, entonces se requiere que $u_i + v_j = c_{ij}$ para cada celda ocupada"[1].

Teniendo que $u_i + v_j = c_{ij}$ para todas las celdas ocupadas de la tabla final del problema "Bici-Mex", se obtiene un sistema de seis ecuaciones y siete variables.

Celda ocupada:

MEXICO-MONTERREY	$u_1 + v_1 = 1500$
MEXICO-GUADALAJARA	$u_1 + v_2 = 1000$
SLP-GUADALAJARA	$u_2 + v_2 = 2500$
SLP-CHIHUAHUA	$u_2 + v_3 = 1000$
SLP-TORREON	$u_2 + v_4 = 1500$
LEON-MONTERREY	$u_3 + v_1 = 1000$

Ya que hay una variable más que el número de ecuaciones en el sistema anterior, se puede escoger libremente un valor para una de las variables, y entonces resolver para las otras. Así siempre se escoge $u_1 = 0$, y se resuelve para los valores de las otras variables. Estableciendo $u_1 = 0$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 + v_1 &= 1500 \\ 0 + v_2 &= 1000 \\ u_2 + v_2 &= 2500 \\ u_2 + v_3 &= 1000 \\ u_2 + v_4 &= 1500 \\ u_3 + v_1 &= 1000 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones, se tienen los siguientes valores para $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$:

$u_1 = 0$	$v_1 = 1500$
$u_2 = 1500$	$v_2 = 1000$
$u_3 = -500$	$v_3 = -500$
	$v_4 = 0$

1) Ibid,p.131

1.- Para cada celda desocupada, identificar esta ruta de banquillo mediante la TT.

2.- Calcular el cambio por unidad (e_{ij}), de incluir una unidad para cada celda desocupada como sigue:

a) Identificar el punto de arranque o celda desocupada bajo consideración como celda 1, y numerar secuencialmente 2,3,4,... a las celdas ocupadas en las esquinas de esta ruta de banquillo.

b) El cambio por unidad de incluir una unidad a la celda desocupada, es hallado sumando los costos por unidad distribuida de todas las celdas identificadas con números pares.

3.- En un problema de minimización, si los cambios por unidad para todas las celdas desocupadas son no negativos, la solución es óptima. Sin embargo, si existen cambios por unidad negativos, identificar la mejor celda (cambio por unidad más negativo) y continuar.

4.- Para la mejor celda, identificar las celdas ocupadas secuencialmente numeradas en las esquinas de esta ruta de banquillo, como lo describe el paso (2). Determinar la celda identificada con un número par sobre la cual está siendo distribuida la cantidad más pequeña. Sumar esta cantidad a la nueva celda, y a todas las celdas identificadas con números impares. Restar esta cantidad de todas las celdas identificadas con números pares. Si más de una de las celdas ocupadas actualmente en la ruta de banquillo es forzada a cero, se mantiene el requerimiento de m+n-1 celdas ocupadas introduciendo una asignación de cero unidades en una o más de las celdas que fueron forzadas a cero. Volver al paso (1).

Dada la TT con una solución inicial y m+n-1 celdas ocupadas, el método de multiplicadores es como sigue:

1.- Suponiendo $u_1 = 0$, usar las celdas ocupadas de la TT para calcular los multiplicadores u_2, u_3,... y los multiplicadores de las columnas v_1, v_2, ... tal que

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

para todas las celdas ocupadas.

2.- Calcular el costo e_{ij}, de incluir una unidad a cada celda desocupada por

$$e_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

3.- Continuar con el paso (3) del método de banquillo.
4.- Continuar con el paso (4) del método de banquillo.

5.1.6 Situaciones especiales.

Las siguientes situaciones especiales de problema de transporte, ocurren frecuentemente:

1.- El suministro total no es igual a la demanda total.
2.- El objetivo es maximizar.
3.- Rutas de transporte inaceptables.

El caso en donde el suministro total no es igual a la demanda total, puede ser tratado fácilmente por este procedimiento de solución si primero se introduce un destino ficticio (centro de distribución) con demanda exactamente igual al excedente del suministro sobre la demanda. Igualmente, si la demanda total es mayor que la oferta total (suministro), se introduce un origen ficticio (planta), con suministro exactamente igual al excedente de la demanda sobre el suministro. En cualquier caso, exceso de demanda o exceso de suministro, se asignan coeficientes de costo de cero a cada ruta de un centro de distribución ficticio y a cada ruta de una planta ficticia. Esto es porque no se harán distribuiciones de la planta ficticia o el destino ficticio, cuando la solución se realiza.

El modelo de transporte también puede ser usado para resolver problemas que envuelven la maximización de un objetivo. La única modificación necesaria en el procedimiento de solución, para procedimientos de este tipo, es en la selección de una celda desocupada para asignarle unidades. En vez de escoger la celda con el valor e_{ij} más negativo, se escoge la celda para la cual e_{ij} es el mayor. Esto es, se escoge la celda que causará el mayor incremento por unidad en la f.o.

Para tratar rutas de transporte inaceptables, se requiere que las asignaciones inaceptables lleven un costo extremadamente alto, denotado M, con el objeto de mantenerlos fuera de la solución. De esta manera, si se tiene una ruta de transporte de un origen a un destino que por alguna razón no puede ser usada, simplemente se asigna a esta ruta un valor de M, y así no entrará en la solución. A las rutas inaceptables se les deberá asignar un va lor de -M en un problema de maximización.

Ahora se ilustrará con otro ejemplo como se resuelven las dificulta-- des anteriores. Supóngase que se tienen tres plantas (origenes) con capaci-- dad de producción como sigue:

PLANTAS		CAPACIDAD PRODUCTIVA
P_1		50
P_2		40
P_3		30
	TOTAL	120

También se tiene demanda para el producto, de tres detallistas. La demanda-- pronosticada para el periódo actual se presenta enseguida:

DETALLISTA		DEMANDA PRONOSTICADA
D_1		45
D_2		15
D_3		30
	TOTAL	90

El costo de producción es diferente para cada planta, y los precios de venta para los detallistas varían. Tomando en consideración precios, costos de producción, y costos de transporte, las ganancias para producir una unidad en - la planta i, transportarla hasta el detallista j, y venderla al detallista j son presentadas en la tabla 5.5.

		D E T A L L I S T A S		
		D_1	D_2	D_3
	P_1	2	8	10
PLANTAS :	P_2	6	11	6
	P_3	12	7	9

tabla 5.5

Se nota que la capacidad de producción total excede a la demanda total de los detallistas. De esta manera, se debe introducir un detallista ficticio con una demanda exactamente igual al exceso de la capacidad de producción. Por lo tanto, se incluye al detallista D_4 con una demanda de 30 unidades. La ganancia por unidad de distribuir de la planta al detallista D_4 es igual a cero, ya que en realidad no se hará ninguna distribución de unidades al detallista D_4. Para obtener una solución factible inicial, se aplica el método de costo mínimo. Sin embargo, ya que este es un problema de maximización, el método de costo mínimo se deberá cambiar por un correspondiente método de ganancia máxima. Esto es, en general se selecciona la ruta de distribución que maximizará la ganancia en lugar de minimizar costos. La solución factible inicial obtenida usando este camino, se muestra en la siguiente tabla:

	D_1	D_2	D_3	D_4	SUMINISTRO
P_1	[2]	[8]	[10] 30	[0] 20	50
P_2	[6] 15	[11] 15	[6]	[0] 10	40
P_3	[12] 30	[7]	[9]	[0]	30
DEMANDA	45	15	30	30	

Ahora se calcula el valor de $e_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ en donde el valor de e_{ij}, representa el cambio por unidad de asignar una unidad a la celda desocupada en el renglón i y la columna j.

La siguiente tabla muestra los valores obtenidos para u_i, v_j, y e_{ij}.

u_i \ v_j	6	11	10	0	SUMINISTRO
0	$\boxed{2}$ −4	$\boxed{8}$ −3	$\boxed{10}$ 30	$\boxed{0}$ 20	50
0	$\boxed{6}$ 15	$\boxed{11}$ 15	$\boxed{6}$ −4	$\boxed{0}$ 10	40
6	$\boxed{12}$ 30	$\boxed{7}$ −10	$\boxed{9}$ −7	$\boxed{0}$ −6	30
DEMANDA	45	15	30	30	

Ya que este es un problema de maximización, la atención se orientará hacia la celda con el valor positivo e_{ij} más grande. Sin embargo, ya que cada valor e_{ij} es negativo, introducir alguna nueva asignación únicamente reducirá la ganancia. Así, se ha alcanzado la solución óptima. Cuando se logra esta solución, se podrán distribuir 30 unidades de la planta P_1 al detallista D_3, 15 unidades de la planta P_2 a D_1, 15 unidades de P_2 a D_2, y 30 unidades de P_3 a D_1, así se tiene un exceso de suministro de 20 unidades de P_1 y 10 unidades de P_2.

5.2 El problema de transbordo.

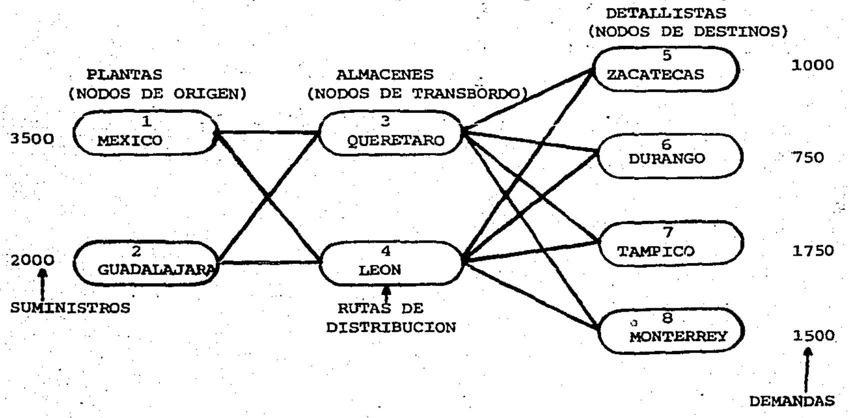
El problema de transporte contempla únicamente casos en los cuales se transporta directamente de origenes a destinos. "El problema de transbordo incluye puntos intermedios, que son a la vez origenes y destinos, por los cuales debe pasar la mercancia antes de llegar a su destino final".[1] Este pro

1) Hillier Frederick y Lieberman Gerarld. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. México: Ed. McGraw-Hill, 1982. 144 p.

blema es una extensión del problema de transporte, pero para resolverlo me-- diante la técnica del modelo de transporte se requiere de hacer una pequeña-- modificación.

Para ilustrar el problema de transbordo, se considerará el problema - de la empresa "Componentes Eléctricos S.A.". Esta empresa tiene sus plantas- de producción en México y Guadalajara. La distribución de la producción de - ambas plantas podrá ser facilitada si se utilizan unos almacenes situados en Querétaro y León Gto. . Desde los almacenes regionales la firma provee a los detallitas de mercancia, para que a su vez la distribuyan en Zacatecas, Du-- rango, Tampico y en la ciudad de Monterrey.

Las características de este problema se presentan en la figura 5.2.



En la parte izquierda de la gráfica aparece la cantidad de suministro disponible, y del lado derecho las cantidades de demanda. Nótese también que el - total de nodos es ocho. El 1 y 2 son nodos de origen 3 y 4 son de transbordo y los nodos 5,6,7,y 8 son los nodos de destinos. En la tabla 5.6 aparecen -- los costos por unidad para cada ruta de distribución en la red.

La formulación del problema de PL, establece x_{ij} como el número de -- unidades distribuidas desde el nodo i al nodo j. Por ejemplo, x_{13} denota el- número de unidades distribuidas desde la planta de México al almacen de Querétaro. Ya que la oferta de la planta de México es de 3000 unidades, la cantidad que se podrá distribuir de esta planta es menor o igual a 3000 unidades. Matemáticamente esta restricción de oferta se escribe:

$$x_{13} + x_{14} \leq 3000$$

Similarmente, para la planta de Guadalajara se tiene:

$$x_{23} + x_{24} \leq 2000$$

Para el nodo 3 (almacén Querétaro) se debe garantizar que el número de unidades enviadas al almacén, debe ser igual al número de unidades que salgan de él. Entonces:

El número de unidades distribuidas fuera del nodo 3 es: $= x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38}$

y

El número de unidades distribuidas que llegan al nodo 3 es: $= x_{13} + x_{23}$

Por lo tanto:

$$x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} = x_{13} + x_{23}$$

Situando todas las variables del lado izquierdo de la expresión, esta restricción queda:

$$-x_{13} - x_{23} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} = 0$$

En una forma similar, la restricción correspondiente al nodo 4 es:

$$-x_{14} - x_{24} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} = 0$$

Para desarrollar las restricciones asociadas con los nodos de destinos, se reconoce que para cada nodo la cantidad distribuida al destino deberá ser igual a la demanda. Por ejemplo, para satisfacer la demanda de 1000 unidades del nodo 5 (Zacatecas), se puede escribir:

$$x_{35} + x_{45} = 4000$$

Similarmente, para los nodos 6,7, y 8, se tienen las siguientes restricciones:

$$x_{36} + x_{46} = 750$$

$$x_{37} + x_{47} = 1750$$
$$x_{38} + x_{48} = 1500$$

La f.o. refleja el costo de distribución de las doce rutas. Relacionando la f.o. y las restricciones, se tienen doce variables con ocho restricciones del modelo de PL del problema de transbordo de la "Componentes Eléctricos S.A."

PLANTAS \ ALMACEN	QUERETARO	LEON
MEXICO	100	150
GUADALAJARA	150	50

COSTO POR UNIDAD DE DISTRIBUCION DE GUADALAJARA A QUERETARO.

ALMACEN \ DETALLISTAS	ZACATECAS	DURANGO	TAMPICO	MONTERREY
QUERETARO	100	300	150	300
LEON	200	200	300	250

tabla 5.6

A continuación se muestra el modelo matemático de PL para el problema de transbordo de la empresa "Componentes Eléctricos S.A.", que involucra las doce variables con ocho restricciones , y la función objetivo:

$$\min\ 100x_{13}+150x_{14}+150x_{23}+50x_{24}+100x_{35}+300x_{36}+150x_{37}+300x_{38}+200x_{45}+200x_{46}+300x_{47}+250x_{48}$$

s.a

$$\left.\begin{array}{l}
x_{13}+x_{14} \le 3000 \\
x_{23}+x_{24} \le 2000
\end{array}\right\}\ \text{RESTRICCIONES DE ORIGENES}$$

$$\left.\begin{array}{l}
-x_{13}-x_{23}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38} = 0 \\
-x_{14}-x_{24}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48} = 0
\end{array}\right\}\ \text{RESTRICCIONES DE TRANSBORDOS}$$

$$\left.\begin{array}{l}
x_{35}+x_{45} = 1000 \\
x_{36}+x_{46} = 750 \\
x_{37}+x_{47} = 1750 \\
x_{38}+x_{48} = 1500
\end{array}\right\}\ \text{RESTRICCIONES DE DESTINOS}$$

$x_{ij} \ge 0$ Para toda i y j

Modelo matemático de PL para el problema de transbordo de la empresa "Componentes Eléctricos S.A."

La tabla 5.7 provee un resúmen de las rutas de costo mínimo de cada - planta a cada detallista.

PLANTA	DETALLISTA	ALMACEN USADO	COSTO POR UNIDAD
P_1	D_1	A_1	$200
P_1	D_2	A_2	350
P_1	D_3	A_1	250
P_1	D_4	A_1 o A_2	400
P_2	D_1	A_1 o A_2	250
P_2	D_2	A_2	250
P_2	D_3	A_1	300
P_2	D_4	A_2	300

tabla 5.7

La formulación de PL de el problema de transbordo muestra una variable para cada ruta posible y una restricción para cada nodo. Para resolver - este problema usando el algorítmo de transporte descrito anteriormente, se-- debe establecer la TT inicial como se muestra a continuación:

		DESTINOS				
		D_1	D_2	D_3	D_4	SUMINISTRO
ORIGEN	P_1	200	350	250	400	3000
	P_2	250	250	300	300	2000
DEMANDA		1000	750	1750	1500	5000

Para llegar a la solución óptima para el problema de transbordo, se - deben hallar las correspondientes rutas de costo mínimo utilizando la tabla-

5.7 . Por ejemplo, la solución de transporte óptima para 1000 unidades es -- distribuyéndolas de P_1 a D_1. Ya que la ruta de costo mínimo de P_1 a D_1 incluye un transbordo mínimo A_1, se sabe que en la solución óptima de transbordo- se deben distribuir 1000 de P_1 a A_1 y entonces 1000 unidades de A_1 a D_1. Siguiendo este proceso para los valores restantes de la solución óptima para - el problema de transporte, se tiene como resultado la siguiente solución óptima para el problema de transbordo:

ORIGEN	DESTINO	CANTIDAD
P_1	A_1	3000
P_2	A_2	2000
A_1	D_1	1000
A_1	D_3	1750
A_1	D_4	250
A_2	D_2	750
A_2	D_4	1250

Algunos problemas extendidos, también pueden ser adaptados al procedimiento de solución que se ha resumido. Pueden permitirse distribuciones en-- tre cualquier par de nodos. Por ejemplo, en algunas situaciones en donde las distribuciones más económicas se hacen entre plantas (origenes) y de ahí a - un destino o directamente de planta a destino. También las distribuciones entre almacenes y detallistas son económicas. Todas estas situaciones se pue-- den tratar de la misma forma en que se trató el problema "Componentes Eléc-- tricos S.A.", la única diferencia es que se tienen que considerar más rutas- alternativas, para identificar las rutas de costo mínimo.

La dificultad más grande de resolver problemas de transbordo convir-- tiéndolos a problemas de transporte, es identificar todas las rutas origen-- destino del costo mínimo. Con problemas grandes esto puede ser un trabajo arduo, y de aquí que los algorítmos específicamente diseñados para el problema de transbordo son mucho más eficientes.

5.3 El problema de asignación

Los problemas típicos de asignación involucran trabajos a máquinas, -

asignación de trabajadores a tareas o proyectos, asignación de ventas personales a ventas territoriales, etc... Una característica distintiva del problema de asignación es que "un" trabajo, trabajador, etc. es asignado a "una y solamente una" máquina, proyecto, etc... Específicamente, para tomar la decisión de asignar, se podrá optimizar un objetivo establecido, tal como minimizar costos, minimizar tiempo, o maximizar ganancias.

Para ilustrar el problema de asignación, se considerará el caso de la empresa "Estudios de Mercado S.A.", que tiene solicitudes para realizar estudios de investigación de mercados de tres nuevos clientes. Esta compañía se encuentra con la tarea de asignar proyectos guía a cada uno de estos tres nuevos estudios de investigación. El gerente general de la Cía. asegura que el tiempo requerido para completar cada estudio dependerá de la experiencia y habilidad del investigador de mercados asignado al estudio. La Cía. desea asignar a los investigadores a los estudios, tal que el número total de días requerido para terminar los tres proyectos se minimice .

El gerente general primero debe considerar todas las posibles asignaciones investigador-cliente, y entonces estimar los correspondientes tiempos de terminación del proyecto. Con tres investigadores y tres clientes, hay un total de nueve alternativas posibles de asignación. Las alternativas y los tiempos de terminación del proyecto, estimados en días, son resumidos en la tabla 5.8

	CLIENTE		
TITULAR DEL PROYECTO	1	2	3
1.- LOPEZ	10	15	9
2.- PEREZ	9	18	5
3.- RUIZ	6	14	3

Las variables de decisión para el problema de asignación se definirán como sigue :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el investigador } i \text{ es asignado al cliente } j \\ 0 & \text{si no se cumple lo anterior} \end{cases}$$

donde $i = 1,2,3$ y $j = 1,2,3$

Usando esta notación x_{21} es igual a 1 y x_{31} es igual a 0 , se dice que el investigador 2 (PEREZ) es asignado al cliente 1 y el investigador 3 (RUIZ) no es asignado al cliente 1 . Basándose en la tabla 5.8 se desarrollan las siguientes expresiones de tiempos de terminación:

Días requeridos para la asignación de LOPEZ $= 10x_{11}+ 15x_{12}+ 9x_{13}$
Días requeridos para la asignación de PEREZ $= 9x_{21}+ 18x_{22}+ 5x_{23}$
Días requeridos para la asignación de RUIZ $= 6x_{31}+ 14x_{32}+ 3x_{33}$

Combinando la f.o. y las restricciones provee la formulación del programa lineal con las siguientes nueve variables y seis restricciones del problema de asignación:

$$\min \; 10x_{11}+15x_{12}+ 9x_{13}+ 9x_{21}+18x_{22}+ 5x_{23}+ 6x_{31}+14x_{32}+ 3x_{33}$$

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\text{s.a} & x_{11}+ & x_{12}+ & x_{13} & & & & & & & \leq 1 \\
 & & & & x_{21}+ & x_{22}+ & x_{23} & & & & \leq 1 \\
 & & & & & & & x_{31}+ & x_{32}+ & x_{33} & \leq 1 \\
 & x_{11} & & & +\ x_{21} & & & +\ x_{31} & & & = 1 \\
 & & x_{12} & & & +\ x_{22} & & & +\ x_{32} & & = 1 \\
 & & & x_{13} & & & +\ x_{23} & & & +\ x_{33} & = 1
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{para } i= 1,2,3 \quad \text{y} \quad j= 1,2,3$$

Uno de los procedimientos utilizados para resolver un problema de asignación es el algorítmo húngaro. El procedimiento de solución húngaro, involucra la llamada reducción de matriz, restando y sumando valores apropiados en la matriz, el algorítmo determina la solución óptima al problema de asignación. Existen tres pasos para obtener la solución. El paso 1 provee la reducción de la matriz inicial.

Paso 1) reducir la matriz inicial restando el elemento más pequeño de cada renglón a cada elemento de ese renglón. Después, restar el elemento más pequeño de cada columna a cada elemento de esta columna.

	A	B	C
LOPEZ	1	6	0
PEREZ	4	13	0
RUIZ	3	11	0

La tabla anterior es equivalente a la tabla original. A todos los elementos de los renglones ya se les ha restado el elemento más pequeño de estos.

	A	B	C
LOPEZ	0	0	0
PEREZ	3	7	0
RUIZ	2	5	0

Así queda la tabla o matriz reducida. El objetivo del método húngaro es continuar reduciendo la matriz hasta que el valor de una de las soluciones sea cero, esto es, hasta que una asignación de investigadores a clientes pueda hacer que en términos de la matriz reducida requiera un gasto total de tiempo de cero días.

La forma de realizar otra reducción y reconocer cuando se ha alcanzado una solución óptima, es descrita en el siguiente paso 2.

Paso 2) Hallar el número de líneas que deben ser dibujadas sobre los renglones y columnas de la matriz actual, todos los ceros de la matriz deberán estar bajo las líneas. Si el número mínimo de líneas es el mismo que el número de renglones (o columnas) en la matriz, una asignación óptima con valor cero se puede hacer. Si el número mínimo de líneas es menor que el número de renglones continuar con el paso 3.

Aplicando el paso 2 a la tabla anterior, el número mínimo de líneas es 2. De esta manera se debe continuar el paso 3.

	A	B	C
LOPEZ	0	0	0
PEREZ	3	7	0
RUIZ	2	5	0

Dos líneas rectas cubren todos los ceros.
PASO 2

Paso 3) Restar el valor del elemento más pequeño sin rayar, de cada elemento sin rayar, y sumar este mismo valor a cada elemento de la intersección de las dos líneas. Los otros elementos restantes permanecen sin cambio. Volver al paso 2 y continuar hasta que el número mínimo de las líneas necesarias para cubrir todos los ceros de la matriz es igual al número de renglones.

El elemento sin rayar más pequeño es 2 . En la matriz anterior este elemento está encerrado en un círculo. Aplicando el paso 3 la matriz es la siguiente:

	A	B	C
LOPEZ	0	0	2
PEREZ	1	5	0
RUIZ	0	3	0

Volviendo al paso 2, el número mínimo de líneas requeridas para cubrir todos los ceros de la matriz actual es 3. La siguiente matriz ilustra los cálculos del paso 2.

	A	B	C
LOPEZ	~~0~~	~~0~~	~~0~~
PEREZ	1	5	0
RUIZ	~~0~~	~~3~~	~~0~~

Ahora tres líneas cubren todos los ceros, por lo tanto la solución óptima se ha alcanzado.

De acuerdo al paso 2, esto posibilita para hallar una asignación con un valor de cero. Esta asignación se puede hallar localizando algún renglón o columna que contenga únicamente un cero. Se dibuja un cuadrado alrededor del cero, indicando una asignación para eliminar ese renglón y esa columna de toda consideración. La tabla final es:

	A	B	C
LOPEZ	0	$\boxed{0}$	2
PEREZ	1	5	$\boxed{0}$
RUIZ	$\boxed{0}$	3	0

El valor de la asignación óptima, se encuentra refiriéndose al problema de asignación original y sumando los tiempos de solución asociados con la asignación óptima, en este caso se obtiene el tiempo de solución de 15+5+6 = 26 días.

5.3.1 Casos especiales del problema de asignación.

Existen tres situaciones especiales para los problemas de asignación:

1.- El número de objetos no es el mismo que el número de tareas.

2.- El objetivo es maximizar.
3.- Asignaciones imposibles o inaceptables.

Ocurren casos en los que existe un número mayor o menor de "asignatarios" con respecto a las "asignaciones", o viceversa. Supóngase que el ejemplo anterior en lugar de tener tres investigadores fueran cuatro, se tendría un faltante de un cliente. La tabla siguiente muestra esta situación:

	C L I E N T E S		
	A	B	C
LOPEZ	20	30	18
PEREZ	18	36	10
RUIZ	12	28	6
OCHOA	16	32	12

Para poder aplicar el mismo procedimiento es necesario añadir una columna más (cliente). Este es un cliente ficticio, por lo tanto el tiempo requerido para la terminación del proyecto es cero. Esto se muestra en la tabla siguiente:

	A	B	C	D
LOPEZ	20	30	18	0
PEREZ	18	36	10	0
RUIZ	12	28	6	0
OCHOA	16	32	12	0

Cliente ficticio

En el caso contrario (tres investigadores y cuatro clientes) solo se incluye un investigador ficticio, y en ambos casos se puede aplicar el mismo procedimiento para alcanzar la solución óptima.

Con el objeto de ilustrar como el problema de asignación de maximización puede ser tratado, se considerará el problema de la tienda de autoservicio "Comercial del Hogar" que quiere saber como situar los diferentes departamentos dentro de la nueva tienda. Esta tienda tiene cuatro localidades que no han sido ocupadas y el gerente ha considerado cinco departamentos que pueden ocupar ese sitio. Los departamentos bajo consideración son: Zapatería, juguetería, autopartes, utensilios domésticos, y departamento de discos. El gerente desea maximizar ganancias, basándose en su experiencia con las otras tiendas, el gerente hizo estimaciones de las ganancias anuales esperadas para cada departamento en cada posición, esta se presenta en la tabla siguiente:

DEPARTAMENTO	LOCALIDAD 1	2	3	4
ZAPATERIA	20	12	24	16
JUGUETERIA	30	36	10	22
AUTOPARTES	34	20	26	32
UTENSILIOS D.	28	24	26	20
DISCOS	28	32	12	24

Ahora se tiene un problema de asignación que requiere maximizar un objetivo, pero a la vez se tiene un número diferente entre renglones y columnas Lo primero que se debe hacer es añadir una columna ficticia, que corresponde a una posición ficticia, con el objeto de aplicar el procedimiento de solución húngaro. Después de incluir la columna el problema se muestra así:

DEPARTAMENTO	LOCALIDAD 1	2	3	4	5
ZAPATERIA	20	12	24	16	0
JUGUETERIA	30	36	10	22	0
AUTOPARTES	34	20	26	32	0
UTENSILIOS D.	28	24	26	20	0
DISCOS	28	32	12	24	0

Se puede obtener un problema de asignación de minimización equivalente. Esta conversión es posible, restando cada elemento de cada columna del elemento más grande de esa columna, así cualquier problema de asignación de maximización puede ser convertido a un problema de minimización cambiando la matriz de asignación a una en la cual los elementos representen las pérdidas de oportunidad de no hacer la "mejor" asignación. Estas pérdidas de oportunidad son mostradas en la siguiente tabla.

La pérdida de oportunidad de colocar el departamento de zapatos en la localidad 1 es $14 000.Esto es, si se situa el departamento de zapatos en lugar del mejor departamento (autopartes), en esta localidad, se desperdicia la oportunidad de hacer una ganancia adicional de $14 000. La pérdida de oportunidad asociada con situar el departamento de juguetes en la localidad-2 es cero, ya que produce la ganancia más alta en esta localidad.

	L O C A L I D A D				
D E P A R T A M E N T O	1	2	3	4	5
ZAPATERIA	14	24	2	16	0
JUGUETERIA	4	0	16	10	0
AUTOPARTES	0	16	0	0	0
UTENSILIOS D.	6	12	0	12	0
DISCOS	6	4	14	8	0

Localidad ficticia

Siguiendo los pasos 1 , 2 , y 3 del algorítmo de solución se puede -proceder a determinar la ganancia máxima óptima.

A manera de ilustración de como pueden tratarse las asignaciones inaceptables, supóngase que en el problema de asignación de la tienda de auto--servicio el gerente piensa que el departamento de juguetería podría no ser -considerado para la localidad 2 y el departamento de autopartes no se considerará para la localidad 4. Esencialmente el gerente se basa en su experiencia para suponer que estas dos asignaciones son alternativas inaceptables.

Usando el mismo camino para el problema de asignación, se establece -un valor de M para las asignaciones de minimización inaceptables y un valor-de -M para las asignaciones de maximización inaceptables, donde M es un va--lor muy grande. Así una celda valuada -M nunca puede ser cero; así jamás podrá hacer una asignación en la solución final. Esto es:

	L O C A L I D A D				
D E P A R T A M E N T O	1	2	3	4	5
ZAPATERIA	30	12	24	16	0
JUGUETERIA	30	-M	10	22	0
AUTOPARTES	34	20	26	-M	0
UTENSILIOS D.	28	24	26	20	0
DISCOS	28	32	12	24	0

El procedimiento para resolver un problema de asignación consta de dos etapas: 1) Preparación del problema para su solución por el método húngaro y-

2) Usar el método húngaro para resolver el problema.

5.4 Programa para computadora digital que resuelve problemas de PL de transporte, transbordo y asignación, utilizando el algorítmo del MS.

Los ejemplos desarrollados en este capítulo para explicar en que consisten los problemas de transporte, transbordo, y asignación se resuelven fácilmente mediante este programa que utiliza el algorítmo del MS para lograrlo.

Este programa al igual que los anteriores, es capáz de resolver problemas que involucran hasta "n" número de variables. Este programa contiene las mismas líneas de datos con la única diferencia de que se introduce una línea de datos más que contienen variables "string" que identifican la rutas o a las asignaciones en su caso.

Cada una de las variables string, corresponde a una variable de decisión, de esta manera en el ejemplo de transporte la ruta MEXICO-MONTERREY corresponde a la variable X1, la ruta LEON-TORREON se identifica con la variable X2, etc...De la misma forma en el problema de asignación la variable X1 pertenece a la asignación LOPEZ-CLIENTE 1, la variable X2 corresponde a la asignación LOPEZ-CLIENTE 2.

La única línea de datos que se introduce de más al programa es:

```
DATA MEX A MON, MEX A GDA, MEX A CHI, MEX A TOR, SLP A MON, SLP A GDA, -
     SLP A CHI, SLP A TOR, LEO A MON, LEO A GDA, LEO A CHI, LEO A TOR
```

Las variables string corresponden a cada una de las posibles rutas del problema de transporte. De esta misma forma se pueden introducir los datos de los problemas de transbordo y de asignación.

```
10 REM PROGRAMA PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE PROGRAMACION
LINEAL
20 REM DE TRANSPORTE, TRANSBORDO, Y ASIGNACION , UTILIZAND
O EL ALGORITMO
30 DEL METODO SIMPLEX
40 CLS
50 READ M,N,L,E,G,Z
60 IF Z = 1 THEN LET M$="MAX":GOTO 80
70 M$ = "MIN"
80 DIM A(M+2,N+M+G+1),B(M+2)
90 DIM R$(N,19)
100 Z=-Z
110 C=N+M+G
120 C1=C+1
130 C2=N+L+G
140 M1=M+1
150 M2=M+2
160 PRINT
170 FOR I=1 TO M2
180 FOR J=1 TO C1
190 A(I,J)=0
200 NEXT J
210 NEXT I
220 FOR I=1 TO M
230 B(I)=0
240 NEXT I
250 FOR I=1 TO M
260 FOR J=1 TO N
270 READ A(I,J)
280 IF I<= L GOTO 300
290 A(M1,J)= A(M1,J)-A(I,J)
300 NEXTJ
310 IF I>L GOTO 350
320 B(I)= N+I
330 A(I,N+I)=1
340 GOTO 410
350 B(I)=N+G+I
360 A(I,N+G+I)=1
370 IF I>L+E GOTO 390
380 GOTO 410
390 A(I,N+I-E)=-1
400 A(M1,N+I-E)=1
410 NEXT I
420 FOR I=1 TO M
430 READ A(I,C1)
440 NEXT I
450 PRINT "f.o.":PRINT M$ ;" Z= "
460 FOR J=1 TO N
```

```
470 READ A(M2,J)
480 Y=J*10
490 PRINT [illegible]
500 [illegible]
510 NEXT J
520 PRINT"[illegible]"
530 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO [illegible]
540 PRINT[illegible]
550 NEXT J: NEXT I
560 FOR I=1 TO M
570 PRINT [illegible]
580 NEXT I
590 PRINT
600 FOR J=1 TO N
610 READ R$(J,J)
620 NEXT J
630 IF L=0 GOTO 650
640 PRINT
650 IF G=0 GOTO 670
660 PRINT
670 IF L=M GOTO
680 PRINT
690 M3=M1
700 GOSUB 1090
710 PRINT
720 FOR K=1 TO M
730 IF B(K)<= C2 GOTO 840
740 IF A(K,C1)<=0.00001 GOTO 770
750 PRINT"PROBLEMA SIN SOL. FACTIBLE"
760 GOTO 1620
770 FOR H=1 TO C2
780 IF ABS(A(K,H))<=0.00001 GOTO 830
790 R=K
800 S=H
810 GOSUB 1320
820 H=C2
830 NEXT H
840 NEXT K
850 M3=M2
860 GOSUB 1090
870 PRINT
880 PRINT"RESPUESTAS"
890 PRINT
900 PRINT "   RUTAS              UNIDADES"
910 PRINT
920 FOR J=1 TO C2
930 FOR I=1 TO M
```

```
940 IF B(I)<>J GOTO 980
950 IF J>N GOTO 970
960 PRINT R$(J,J),A(I,C1)
970 I=M
980 NEXT I
990 NEXT J
1000 PRINT
1010 PRINT
1020 IF L=0 GOTO 1050
1030 FOR I=1 TO L
1040 NEXT I
1050 PRINT"VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO";Z*A(M2,C1)
1060 PRINT
1070 PRINT
1080 GOTO 1620
1090 P=-0.00001
1100 FOR J=1 TO C2
1110 IF A(M3,J)>= P GOTO 1140
1120 S=J
1130 P=A(M3,J)
1140 NEXT J
1150 IF P=-0.00001 GOTO 1500
1160 GOSUB 1190
1170 GOSUB 1270
1180 GOTO 1090
1190 Q=1E38
1200 FOR I=1 TO M
1210 IF A(I,S)<= 0.00001 GOTO 1250
1220 IF A(I,C1)/A(I,S)>=Q GOTO 1250
1230 R=I
1240 Q=A(I,C1)/A(I,S)
1250 NEXT I
1260 RETURN
1270 IF Q=1E38 GOTO 1300
1280 GOSUB 1320
1290 RETURN
1300 PRINT"SOLUCION ILIMITADA"
1310 GOTO 1620
1320 P=A(R,S)
1330 FOR I=1 TO M2
1340 IF I=R GOTO 1410
1350 FOR J=1 TO C1
1360 IF J=S GOTO 1400
1370 A(I,J)=A(I,J)-A(I,S)*A(R,J)/P
1380 IF ABS(A(I,J))>=0.00001 GOTO 1400
1390 A(I,J)=0
1400 NEXT J
```

```
1410 NEXT I
1420 FOR J=1 TO C1
1430 A(R,J)=A(R,J)/P
1440 NEXT J
1450 FOR I=1 TO M2
1460 A(I,S)=0
1470 NEXT I
1480 A(R,S)=1
1490 B(R)=S
1500 RETURN
1510 DATA 7,12,3,4,0,-1
1520 DATA 1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0
1530 DATA 0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0
1540 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1
1550 DATA 1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0
1560 DATA 0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0
1570 DATA 0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0
1580 DATA 0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1
1590 DATA 25000,30000,12500,30000,20000,10000,7500
1600 DATA 1500,1000.3500,2000,3500,2500,1000,1500,1000,250
0,2000,2500
1610 DATA MEX A MON,MEX A GDA,MEX A CHI,MEX A TOR,SLP A MON
,SLP A GDA,SLP A CHI,SLP A TOR,LEO A MON,LEO A GDA,LEO A C
HI,LEO A TOR
1620 END
```

RESPUESTAS

RUTAS	UNIDADES
MEX A MON	17500
MEX A GDA	7500
SLP A GDA	12500
SLP A CHI	10000
SLP A TOR	7500
LEO A MON	12500

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

Z = 9.875E+07

RESPUESTAS

RUTAS	UNIDADES
MEX A QRO	30000
GDA A LEO	20000
QRO A ZAC	10000
QRO A TAM	17500
QRO A MON	2500
LEO A DGO	7500
LEO A MON	12500

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

Z = 1.3E+07

RESPUESTAS

ASIGNACION	UNIDADES
LOPEZ A C2	1
PEREZ A C1	0
PEREZ A C3	1
RUIZ A C1	1

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

Z = 26

C O N C L U S I O N E S

La Programación Lineal es una técnica matemática importante, no sólo para la Administración sino también para muchos ámbitos en los que se aplica. En este trabajo se ha intentado hacer notar la importancia de su aplicación en diversas áreas. El objetivo de este trabajo no es el de reducir la aplicación de la Programación Lineal a una sóla área; la idea es resaltar el campo tan amplio que abarca.

La Toma de Decisiones es una actividad que se realiza tanto a nivel individual como a nivel colectivo, siempre que se tenga que elegir entre varias opciones. La Programación Lineal es una técnica que se puede emplear en todos los casos en que sea necesario Tomar una Decisión sobre un problema que cumpla con el requerimiento de linealidad. En cualquier actividad productiva constantemente surge la necesidad de Tomar una Decisión, desde el nivel más bajo de la jerarquización hasta el nivel más alto.

En este trabajo se hace referencia a la Toma de Decisiones que se lleva a cabo a nivel ejecutivo por ser ahí donde se marca el camino a seguir de todo conjunto empresarial. La Toma de Decisiones que se realiza en niveles inferiores al nivel ejecutivo, es también importante para el logro de los objetivos de la empresa, sólo que esta Toma de Decisiones debe estar supeditada a las decisiones del nivel ejecutivo. De lo anterior se desprende la importancia de la Toma de Decisiones a nivel ejecutivo, de la efectividad de las decisiones emanadas de este nivel, dependerá el éxito o fracaso de toda organización. Por la importancia que reviste la Toma de Decisiones, cada día se hace necesario aumentar el grado de confiabilidad de los medios utilizados para la Toma de Decisiones, siendo deseable en este caso contar con una capacitación técnica y científica aparte de la experiencia que se posea.

En un ambiente de cambios continuos como el actual en que cada día hay mayor competencia, la situación financiera es crítica y en general existe limitación de recursos, no se permiten errores porque una mala decisión puede ocacionar la quiebra de una empresa.

Los cursos de I.O. impartidos en la FES-C en las carreras de Contaduría y Administración, despiertan el interés de los estudiantes al comprender el valor de la utilización de la Programación Lineal en la solución de problemas reales. También así, se incluyen cursos de informática en donde se pone en contacto al estudiante con la computación. Estos dos cursos de los que se habla se imparten en una forma aislada, en materias diferentes. A manera de opinión solamente, sería conveniente que se tratará de introducir ambas materias (I.O. e Introducción a la Informática) en una sola, con el fin de lograr que el alumno comprenda en forma más clara la utilidad tan valiosa que tiene en la práctica la técnica de Programación Lineal para solucionar problemas mediante una computadora digital.

El medio por el cual se pretende lograr que los lectores de esta tesis se interesen por conocer más sobre el campo de la P.L. y computación, es el de comparar la solución analítica de un problema de P.L. contra la solución que ofrece una computadora digital. Los casos que se ejemplificaron, expusieron situaciones sencillas en donde el modelo matemático sólo contenía unas cuantas variables en la función objetivo y muy escasas restricciones. En la realidad no es muy frecuente encontrarse con problemas lineales pero es posible adaptar los problemas no lineales a un modelo lineal y así obtener una aproximación lo suficientemente buena. Estos modelos lineales en la realidad, pueden contener hasta cientos de variables en la función objetivo y gran cantidad de restricciones.

Hay que recalcar que en cuestión económica el gasto que absorvería una empresa por horas-hombre, si se designara a un investigador de operaciones la tarea de resolver un problema de P.L. en forma analítica representaría un enorme desgaste de recursos económicos y humanos; si se compara con el costo que representa un equipo de computo. El hecho de que el mismo problema pueda ser resuelto por el investigador de operaciones en varios días o incluso semanas, y por medio de una computadora digital se obtenga la solución en unos cuantos segundos, muestra la idea de como esto se refleja --

en una gran diferencia en dinero para la empresa. Esto se debe a que es posible adquirir equipos de computo relativamente económicos si se toma en cuenta las grandes ventajas que ofrece. En la actualidad es factible el uso de microcomputadoras para abordar problemas que anteriormente solo con equipo muy sofisticado se podía resolver.

Representar problemas simples es con el fin de hacerlo en una forma didáctica, pensando en que este trabajo de tesis en algún momento pudiera servir como material de consulta. Aún así es posible distinguir la ventaja de emplear una computadora digital.

En resumen, se puede concluir que la técnica de Programación Lineal es una herramienta que presenta muchas ventajas para el responsable de la Toma de Decisiones, pero gran parte de su importancia se la debe a la existencia de la computadora digital, ya que no sólo proporciona una gran rapidez en la solución de un problema, sino que a la vez ofrece una amplia variedad de alternativas de solución para el mismo; por lo tanto se puede afirmar que si no existiera la computadora digital talvés la Programación Lineal sólo hubiera quedado en una buena técnica matemática casi sin aplicación.

En un medio en donde han de tomarse decisiones rápidamente y muchas veces bajo presión, la P.L. junto con la computadora digital proporcionan al tomador de decisiones resultados rápidos y eficaces, los cuales contribuyen a agilizar la Toma de Decisiones.

B I B L I O G R A F I A

- Dinkel John J., Kochenberger Gary A. y Plane Donald R.." Administración -- Científica". México: Representaciones y Servicios de Ingeniería S.-A., 1978.

- Dunn Robert y D. Ramsing Kenneth. "Management Science". New York E.U.: Mac millan Publishing Co., Inc. , 1981.

- Gray A. Williams y Ulm Otis M.. "Matemáticas Superiores Aplicadas a el Comercio, Industria y Finanzas". México: CECSA, 1974.

- Harold Koontz, Cyril O'Donell y Heinz Weihrich. "Elementos de Administra-- ción". México: McGraw-Hill, 1982.

- Hillier Frederick y Lieberman Gerarld J.. "Introducción a la Investigación de Operaciones". México: McGraw-Hill, 1982.

- Luthe Rodolfo, Olivera Antonio y Schutz Fernando. "Métodos Numéricos". México: Limusa, 1980.

- Rios Szalay Adalberto y Paniagua Aduna Andrés. "Orígenes y Perspectivas de la Administración". México: Trillas, 1977.

- Sweeney Dennis J. , Anderson David R. y William Thomas A.."An Introduction to Management Science". Minnesota, E.U. : West Publishing Co., 1976

- Schroeder Roger G.."Administración de Operaciones". México: McGraw-Hill -- 1981.

- Taha Hamdy A. "Investigación de Operaciones". México :Representaciones y - Servicios de Ingeniería S. A. , 1981.

- Terry George R. ."Principios de Administración". México. CECSA, 1982.

- Uziel C. Enrique y Murray Lasso Marco A."Aplicaciones de la Computación - la Ingeniería". México: Limusa, 1975.