UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

"A C A T L A N"

PRINCIPIOS BASICOS DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES. UN ENFOQUE HACIA LA APLICACION DE ALGUNOS METODOS DE OPTIMIZACION.

T E S I S P R O F E S I O N A L

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A

LUIS GERARDO SANCHEZ GONZALEZ

ASESOR: ACTUARIO LUZ MARIA RANGEL NAFAILE

SANTA CRUZ ACATLAN, MEX. 1986

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

INTRODUCCION.

CAPITULO I: ANALISIS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO ACTUAL, Y EN SU CASO MODIFICACIONES PROPUESTAS PARA LA ASIGNATURA DE INVESTIGACION DE OPERACIONES (1).

CAPITULO II: DESARROLLO E IMPLANTACION DEL PROGRAMA DE ESTUDIO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES (23).

TEMA 1: LA INVESTIGACION DE OPERACIONES UN ENFOQUE MATEMATICO EN LA ADMINISTRACION DE LOS RECURSOS (25).
TEMA 2: MODELOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES (45).
TEMA 3: FORMULACION DE MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL (55).
TEMA 4: SOLUCION E INTERPRETACION DE LOS MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL (105).
TEMA 5: MODELOS DE TRANSPORTE Y ASIGNACION (169).
TEMA 6: TECNICAS DE REVISION Y EVALUACION DE PROYECTOS Y RUTA CRITICA PERT Y CPM (195).
TEMA 7: MODELOS DE INVENTARIO (243).

CAPITULO III: USO DEL PAQUETE DE PROGRAMACION LINEAL (305).

CONCLUSIONES (339).

APENDICE A: METODO SIMPLEX (341).
APENDICE B: ALGORITMO DE TRANSPORTE (357).
APENDICE C: ALGORITMO DE ASIGNACION (373).
APENDICE D: RUTA CRIT.CA (379).
APENDICE E: INVENTARIOS (389).

BIBLIOGRAFIA (397).

CAPITULO I: ANALISIS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO ACTUAL Y EN SU CASO MODIFICACIONES PROPUESTAS PARA LA ASIGNATURA DE INVESTIGACION DE OPERACIONES.

No hay algo más difícil de emprender, más peligroso de dirigir, o más incierto en su éxito, que tomar la iniciativa en la presentación de un orden nuevo en las cosas, ya que el innovador tiene por enemigos a todos aquellos que bajo las condiciones originales han triunfado, y por tibios defensores a los que pueden hacerlo en las nuevas.

NICOLAS MAQUIAVELO. EL PRINCIPE

I N T R O D U C C I O N

Ser consciente
de la propia ignorancia es un gran paso
hacia el saber.

BENJAMIN DISRAELI

El hombre para poder estudiar a la realidad que le rodea, ha buscado representarla en forma simplificada. Este proceso de abstracción no solo le ha ayudado a comprenderla más, sino también a resolver problemas complejos, mediante el uso de modelos de diversos grados de complejidad que pretenden imitar el medio en el que se encuentra.

Dentro de este contexto los Modelos Cuantitativos de la Investigación de Operaciones, buscan plantear cursos de acción íntimamente relacionados con la administración de los recursos materiales y humanos. Ante tal instancia, resulta aparente la utilidad, que para el alumno de la carrera de Ciencias Políticas y Administración Pública, representa contar con los elementos básicos que le permitan aplicar las diferentes técnicas que componen a la Ciencia de la Administración.

Con la asignatura Investigación de Operaciones, que se imparte en el sexto semestre de la carrera, se busca motivar al profesional, a aplicar una metodología científica en la resolución de problemas que surjan en su campo de trabajo. Es por ello importante que, en la etapa de ense&anza, se introduzca al alumno dentro del contexto en el que se desenvuelve su estudio, procurando evitar al máximo, desarrollos que desvían el objetivo terminal de la materia.

El presente trabajo de tesis propone, tanto al profesor como al alumno, una alternativa bajo la cual la asignatura puede ser estructurada e impartida. Esta obedece a dos razones básicas: motivar al profesor a planear más los cursos que imparte, procurando dar al máximo, el enfoque adecuado que los alumnos requieren y, hacer énfasis en la importancia que guarda la actualización constante de los programas de estudio. Lo primero, puede lograrse a través de una retroalimentación constante con los estudiantes; lo segundo, demandará un esfuerzo de búsqueda contínua del material bibliográfico que necesita emplear.

La tesis esta integrada por tres capítulos y cinco apéndices:

En el Capítulo I, se presenta el análisis del actual programa de estudio de la asignatura Investigación de Operaciones, acompa&ado de la propuesta que se consideró más adecuada para cubrir las necesidades del estudiante de la carrera de Ciencias Políticas y Administración Pública.

En el Capítulo II, se expone el desarrollo e implantación del programa sugerido. Este debe ser considerado como un curso meramente introductorio de algunos

Métodos Cuantitativos de Investigación de Operaciones; de ninguna forma se busca asegurar que el tratamiento sea exhaustivo o formal. La exposición evita el empleo de matemáticas complejas, optando por el uso de justificaciones intuitivas para argumentos rigurosos, cuando tal camino se considera pedagógicamente efectivo. Sin embargo, no se pretende preparar al alumno sobre una base teórica elemental ínfimá; por el contrario, se espera motivarlo en la incursión de aspectos cada vez más profundos, que el simple entendimiento de la técnica. Para evaluar la ejecución del lector, se presenta una serie de ejercicios al término de cada tema, cuya solución se anexa al final del capítulo.

En el desarrollo del programa, se propone el uso de una computadora como instrumento auxiliar en la obtención de los resultados que se requieren. Es por ello que en el Capítulo III, se presenta el empleo de dos paquetes de cómputo, utilizados en los cinco primeros temas del programa de estudios. Asimismo, se enlistan dos programas codificados en Basic, para cubrir el aspecto computacional del material de los dos últimos temas. Es importante remarcar que el recurso cómputo no es escencial para el entendimiento del trabajo expuesto, ya que el lector puede remitirse a los listados de salida, imaginando su fuente de procedencia.

Los apéndices son auxiliares en la exposición del programa propuesto, y deben ser considerados como material optativo a discreción del profesor. En estos, se muestra el funcionamiento de los métodos de optimización utilizados en el curso, acompañados por ejercicios prácticos y problemas propuestos.

Cada tema, así como los apéndices, presenta una lista de referencias, en la que el lector puede profundizar sobre cada aspecto que desee. Se hace mención a ellas a través de una clave cuya equivalencia se encuentra en la bibliografía de la tesis.

Es importante aclarar, que aunque el programa de estudio esta enfocado a estudiantes de la carrera de Ciencias Políticas y Administración Pública, este puede ser empleado en otras licenciaturas en las que el objetivo de la asignatura se avoque a la formulación de problemas e interpretación de sus resultados más que al tratamiento matemático y formal del tema.

TESIS CON
FALLAS DE ORIGEN

Introducción.

Realizar programas de estudio para las diferentes asignaturas que se imparten en cada una de las carreras a nivel licenciatura es, sin duda alguna, una ardua labor que requiere un gran esfuerzo por parte del profesor. Ello presupone una disponibilidad de tiempo casi ilimitada que, en la mayoría de los casos, no posee un catedrático; si se a&ade el volumen numeroso de alumnos con un nivel heterogeneo de conocimientos, puede hablarse de la razón de su bajo aprovechamiento.

En el presente capítulo se exponen el análisis y la propuesta para la asignatura de Investigación de Operaciones, que se imparte en la carrera de Ciencias Políticas y Administración Pública. El programa de estudio se ha enfocado básicamente en el aspecto interpretativo, por ser esta una actividad intimamente relacionada con el administrador. Con ello se busca motivar al alumno a "aplicar" lo que aprende en el aula de clases, dentro de su campo profesional, al mostrarle un aspecto más analítico de la materia.

Plan de Estudios del Programa Político.

La Licenciatura en Ciencias Políticas y Administración Pública, está orientada a calificar la actividad que se realiza en la esfera de lo público, en los niveles de dirección político-administrativa, de la institución central y descentralizada del Estado; sea como analista, formulador, ejecutor y evaluador de las políticas públicas. Por tal motivo, el plan de estudios enfatiza el conocimiento científico y técnico de los fenómenos políticos, administrativos públicos, económicos, jurídicos e histórico-sociales que determinan la sociedad de nuestro tiempo.

La licenciatura está destinada a preparar profesionales que, teniendo formación en el área de las ciencias políticas, sean capaces de analizar el funcionamiento de lo político, considerando este como el marco en el que se realiza y adquiere su sentido la actividad administrativa pública.

En el plan de estudios, pueden identificarse dos sesgos diferenciales que tienden a satisfacer las orientaciones vocacionales de los estudiantes, y que tiene el propósito adicional de resolver más eficientemente su incorporación a la actividad profesional futura.

El sesgo de "Economía y Finanzas", contiene cinco asignaturas que profundizan el estudio de variables de alto grado de agregación, como son economía y finanzas públicas.

El otro, con las mismas características, se inclina a profundizar la preparación del alumno, en áreas que le permitan asumir directamente la ejecución de la función administrativa pública, en los servicios de la administración central y descentralizada del Estado; para diseñar y desarrollar organizaciones, y en el manejo de los recursos institucionales en que pueda valerse del instrumental técnico, estadístico, matemático y cibernético moderno.

La carrera de Ciencias Políticas y Administración Pública, está integrada por cuarenta y dos asignaturas de cuatro horas semanarias con ocho créditos cada una, salvo "Elementos de Matemáticas" que posee seis horas y doce créditos. Las materias se cursan en nueve semestres lectivos, seis de los cuales llevan cinco asignaturas y los tres restantes solo cuatro. El décimo semestre se destina a brindar asesoría a los alumnos en la preparación de sus tesis de recepción de grado.

La composición de áreas de conocimiento que puede configurarse con las asignaturas que se imparten para la licenciatura, es la siguiente:

<u>Area Política</u>:	<u>Semestre</u>:
1. Sociedad y Política del México Actual	1ero.
2. Introducción a la Ciencia Política	2do.
3. Ciencia Política I	3ero.
4. Ciencia Política II	4to.
5. Instituciones Políticas	5to.
6. Doctrinas Políticas (Semioptativa)	8vo.
7. Política Mundial Contemporánea (Semioptativa)	8vo.
8. Seminario de Análisis Político de la Coyuntura	9no.
<u>Area Derecho</u>:	
1. Introducción al Derecho	2do.
2. Derecho Constitucional	3ero.
3. Derecho Administrativo I	4to.
4. Derecho Administrativo II	5to.
5. Derecho de Trabajo (Semioptativa)	7mo.
<u>Area Administración Pública</u>:	
1. Teoría de la Administración Pública I	3ero.
2. Teoría de la Administración Pública II	4to.
3. Proceso Administrativo Público	5to.
4. Administración de Recursos Humanos	6to.
5. Diseño y Desarrollo de las Organizaciones	6to.
6. La Administración Pública en México	7mo.
7. Administración para el Desarrollo	9no.
<u>Area Economía</u>:	
1. Teoría Económica I	1ero.
2. Teoría Económica II	2do.
3. Política Económica	5to.
4. Contabilidad y Presupuestos Públicos	6to.
5. Teorías del Desarrollo Económico y Social	6to.
6. Planificación Económica y Social	7mo.
7. Planificación Regional	8vo.

Area Economía:	**Semestre:**
8. Evaluación de Proyectos	9no.
9. Finanzas Públicas I (Optativa)	7mo.
10. Finanzas Públicas II (Optativa)	8vo.
11. Moneda y Crédito (Optativa)	7mo.
12. Cuentas Nacionales y Balanza de Pago (Optativa)	7mo.
13. Análisis Financiero (Optativa)	9no.
14. Contabilidad General (Optativa)	7mo.
15. Presupuestos por Programas (Optativa)	8vo.

Area Matemáticas:

1. Elementos de Matemáticas	1ero.
2. Elementos de Estadística	2do.
3. Introducción a la Probabilidad	3ero.
4. Técnicas de Muestreo	4to.
5. Matemáticas Aplicadas	5to.
6. Investigación de Operaciones	6to.
7. Sistemas de Información	8vo.
8. Teoría de las Decisiones (Optativa)	9no.

Area Metodología y Sociología:

1. Introducción a la Sociología	1ero.
2. Interpretaciones de la Historia	1ero.
3. Introducción a la Epistemologia	2do.
4. Metodología de las Ciencias Sociales	3ero.
5. Psicología Social	4to.
6. Sociología de la Administración Pública (Semioptativa)	7mo.

Función de las Matemáticas en el Plan.

Dentro de la licenciatura, la ense&anza de las Matemáticas se ha estimado como una variable dependiente que cumple las siguientes funciones:

1.- Suple las deficiencias con que ingresan los alumnos a la ense&anza superior y uniforma los distintos niveles de adiestramiento en el pensar que, desde el punto de vista de la lógica matemática, poseen y colma las carencias que manifiestan en el uso instrumental de operaciones matemáticas.

2.- Correlaciona los conocimientos matemáticos con la utilidad que prestan a las otras ciencias en el aspecto metodológico y técnico, proporcionando los elementos indispensables que el ejercicio de la profesión reclama.

Programa de Estudio Actual de la Asignatura Investigación de Operaciones.

Si bien es cierto que el soporte teórico dá al profesional los elementos necesarios para realizar aplicaciones más acertadas; resulta alarmante advertir la evasión de los alumnos de las carreras del tronco sociopolítico, hacia las asignaturas de caracter teórico-matemático. Entendiendo por teórico-matemático, aquel conocimiento que requiere por parte del alumno desarrollos algorítmicos o matemáticos de cierta complejidad.

Lo anterior puede aludirse, en parte, a las grandes lagunas existentes en sus conocimientos matemáticos y, en mayor grado, al enfoque que se les da a dichas asignaturas dentro de su contexto en el plan global de estudios.

Ubicar una asignatura dentro de cualquier Licenciatura requiere de una actividad conjunta, tanto por parte del profesor como del alumno. La del primero, al tratar de compenetrarse más con la carrera en la cual la imparte, y la del segundo dando indicadores que permitan tener una visión más amplia de sus puntos de interés.

Concentrar la atención del alumno de Ciencias Políticas y Administración Pública en el campo de las aplicaciones, más que en aspectos teórico-matemáticos, le permitirá utilizar con mayor efectividad lo que aprende en el aula de clases.

Dentro del Area Matemática de la carrera, la Investigación de Operaciones puede considerarse como una asignatura enfocada al campo de las aplicaciones; no obstante, las materias antecedentes (Elementos de Matemáticas y Matemáticas Aplicadas), juegan una papel preponderante, ya que representan el soporte teórico que permitirá al alumno obtener un mejor aprovechamiento académico.

El actual programa de estudios de la asignatura esta integrado como se muestra en el cuadro 1, en el que pueden identificarse tres bloques temáticos básicos:

1. Integrado por los temas I y II, con el que introduce al alumno en el estudio de la Investigación de Operaciones, dándole un contexto general de los principales aspectos que la caracterizan y de su utilidad dentro del campo profesional, enmarcando su evolución histórica.

2. Compuesto por los temas III al V, en el que se exponen modelos elementales de la Investigación de Operaciones, dándole al alumno los elementos necesarios para que pueda aplicar diferentes algoritmos de resolución en la optimización de problemas.

3. Constituido por los temas VI y VII, en el que se aportan al alumno herramientas valiosas que todo administrador aplica en su desempeño profesional, tanto para la planeación de proyectos como para el manejo óptimo de inventarios.

En la estructura del programa antes descrito, puede identificarse una marcada tendencia a dirigir la atención del alumno, hacia tratamientos matemáticos mecánicos

CUADRO 1: Programa de Estudio Actual.

DIVISION DE: Ciencias Básicas
DEPARTAMENTO DE: Matemáticas Aplicadas.

CARRERA: Ciencias Políticas y Administración Pública
MATERIA: Investigación de Operaciones
CARACTER: Obligatorio **SEMESTRE:** 6to. **CREDITOS:** 8

HORAS SEMANALES: 4 Teóricas
HORAS SEMESTRALES: 64 Teóricas

MATERIA ANTECEDENTE: Matemáticas Aplicadas
MATERIA CONSECUENTE: Ninguna

OBJETIVO GENERAL: El participante identificará y analizará elementos y sistemas propios de la estructura de sistemas complejos, modelará aspectos específicos de los mismos y optimizará sistemas sujetos a restricciones lineales.

UNIDAD TEMATICA

TEMA I: **GENERALIDADES SOBRE INVESTIGACION DE OPERACIONES.**
(6 horas)

OBJETIVO ESPECIFICO. Identificará los aspectos generales de formulación de problemas.

SUBTEMAS. Marco histórico de su inicio. Desarrollo y definición de Investigación de Operaciones. Areas de aplicación.

COMENTARIOS. Describir el desarrollo de la Investigación de Operaciones antes y después de la 2da. guerra mundial.

TEMA II: **METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.**
(8 horas)

OBJETIVO ESPECIFICO. Identificará los aspectos generales de formulación de problemas.

SUBTEMAS. Método de la Investigación de Operaciones. El arte de modelar. Tipos de modelos. Estructura de un modelo matemático. Formulación de modelos.

COMENTARIOS. Proponer ejemplos, enlistando los pasos del método de Investigación de Operaciones para obtener el modelo correspondiente.

CUADRO 1: Programa de Estudio Actual (Continuación).

TEMA III: TECNICAS DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.
(12 horas)

OBJETIVO ESPECIFICO. Comprenderá modelos de Programación Lineal y los aplicará para derivar la solución óptima.

SUBTEMAS. El Problema de Programación Lineal. Interpretación y solución gráfica. Método Simplex. Aplicaciones.

COMENTARIOS. Resolver problemas de interés en Administración, utilizando las técnicas de la Investigación de Operaciones.

TEMA IV: EL METODO DE TRANSPORTE.
(10 horas)

OBJETIVO ESPECIFICO. Comprenderá y aplicará el método de transporte a diferentes casos específicos.

SUBTEMAS. Problema de Transporte. Representación como programa lineal. Método de la esquina nor-oeste. Algoritmo solución.

COMENTARIOS. Hacer énfasis en la aplicación a casos concretos de administración del método de transporte.

TEMA V: PROBLEMA DE ASIGNACION.
(6 horas)

OBJETIVO ESPECIFICO. Aplicará el algoritmo de asignación para una distribución óptima de recursos.

SUBTEMAS. Definición y características del problema de asignación. Estructura y algoritmo solución.

COMENTARIOS. Explicar ampliamente los conceptos y el algoritmo solución. Representar este problema como un programa lineal.

TEMA VI: PLANEACION Y CONTROL DE PROCESOS.
(10 horas)

OBJETIVO ESPECIFICO. Comprenderá y aplicará el método de la ruta crítica para la planeación y control de procesos.

SUBTEMAS. Redes de actividad. Método de la ruta crítica (CPM). Aplicación del método (CPM) en la planeación y control de procesos.

COMENTARIOS. Representar proyectos mediante redes de actividad. Explicar ampliamente la aplicaciones del método (CPM).

CUADRO 1: Programa de Estudio Actual (Continuación).

TEMA VII: INVENTARIOS.
(12 horas)

OBJETIVO ESPECIFICO. Identificará y comprenderá problemas de inventarios.

SUBTEMAS. Definición. Tipos de inventarios. Modelos estáticos y dinámicos, de uno o varios productos.

COMENTARIOS. Explicar las características y diferencias entre los modelos.

---

relacionados con el proceso de obtención de resultados, más que a su interpretación. No obstante, se enfatiza la importancia de las representaciones y estructuras matemáticas de los modelos, para que el estudiante sea capáz de identificarlas y de aplicar el algoritmo adecuado en su resolución.

El presente esquema, parcialmente completo en lo que respecta al contenido temático, carece del enfoque o contexto que dentro del campo de la administración se requiere. Asimismo, se omiten conceptos fundamentales relacionados íntimamente con la interpretación de resultados, tales como los relativos a la dualidad y precios sombra, que podrían ubicarse dentro del Tema III.

Bajo este plan, puede caerse en el riesgo de hacer que el alumno conciba a la asignatura, como un proceso complejo de operaciones matemáticas con el fin de resolver problemas reales. No hay que olvidar el elevado grado de dificultad que representa, para los estudiantes de esta carrera, el manejo engorroso de problemas meramente numéricos, que inclusive llegan a provocar que caigan en la apatía sobre una materia, haciendo que esta se convierta en un trámite obligatorio adicional a cubrir para concluir la carrera.

Un punto adicional que se omite y que resulta importante remarcar en los programas de estudio de este tipo de carreras, es el relativo a la existencia de las computadoras, como valiosos auxiliares en el proceso de obtención de resultados, los cuales permiten concentrar la atención en aspectos más trascendentes que el mero proceso mecánico de obtención de resultados.

Programa de Estudio Propuesto para la Asignatura Investigación de Operaciones.

A continuación se presenta el esquema del programa propuesto, se ha procurado preservar la estructura general de la asignatura, para evitar cambios drásticos en la secuencia lógica originalmente concebida, sin embargo, existen ligeras modificaciones en cuanto a la división temática y cambios significativos en su contenido.

Estos últimos se fundamentan en el contexto que guarda la asignatura, dentro de la carrera de Ciencias Políticas y Adminsitración Pública, y a la aplicación que el profesional encuentra para las diferentes técnicas que integran a la Investigación de Operaciones dentro de su campo de trabajo.

Para conformar el contenido de la materia, se analizó el programa de estudios vigente, con el objeto de determinar el enfoque que esta debe poseer dentro de toda la carrera. Como se indicó anteriormente, en la licenciatura se identifican dos sesgos que permiten al alumno especializarse en diferentes áreas de conocimiento: en "Economía y Finanzas" y, el que podría catalogarse como el "Administrativo"; en este último, la administración de los recursos, tanto humanos como materiales, juega un papel preponderante en el campo de la Ciencia de la Administración.

Dentro del contexto público, la labor del profesional en Ciencias Políticas y Administración Pública, no se identifica como la del técnico responsable del tratamiento de resolución de un problema determinado, sino como la del analista a cargo de la interpretación de los resultados y como servidor auxiliar en la toma de decisiones.

Es por ello que la asignatura, más que enfocarse al tratamiento mecánico de resolución, debe dirigirse a destacar la utilidad de la técnica dentro del campo de la administración, proporcionando los elementos necesarios que permitan al profesional de esta carrera, comprender los conceptos mínimos que se requieren para realizar la labor de interpretación y análisis.

Asimismo, resulta importante enfatizar al alumno la necesidad de profundizar en los conocimientos que aplica. Sin duda alguna, esta labor no sera tan difícil, pues poseerá la idea intuitiva de cada uno de los conceptos que estudia, sabiendo de antemano su utilidad y aplicación.

Los conocimientos matemáticos necesarios para poder llevar el curso son bastante elementales; dentro del area estadística, se requieren los relativos al manejo de conceptos tales como: distribución normal estandarizada, media, varianza y desviación estándar, así como los probabilísticos básicos. Se recomienda al profesor que en caso de duda, remita al estudiante a la bibliografía correspondiente. Situaciones extremas requerirán algún repaso extra-clase, para que el concepto sea asimilable.

DIVISION DE: Ciencias Básicas
DEPARTAMENTO DE: Matemáticas Aplicadas

CARRERA: Ciencias Políticas y Administración Pública
METERIA: Investigación de Operaciones
CARACTER: Obligatorio **SEMESTRE:** 6to. **CREDITOS:** 8

HORAS SEMANALES: 4 Teóricas
HORAS SEMESTRALES: 64 Teóricas

MATERIA ANTECEDENTE: Metemáticas Aplicadas
MATERIA CONSECUENTE: Ninguna

OBJETIVO GENERAL: El alumno formulará y optimizará modelos lineales, de planeación de proyectos e inventarios, propios de la estructura de sistemas relacionados con la administración de recursos, e interpretará los resultados que de estos se deriven.

El programa esta estructurado en cuatro bloques básicos:

1. La Investigación de Operaciones y los Métodos Cuantitativos.

2. Programación Lineal.

3. Otros Modelos de Programación Lineal.

4. Otros Modelos de Investigación de Operaciones.

1. La Investigación de Operaciones y los Métodos Cuantitativos.

OBJETIVO GENERAL. El alumno indicará la ventaja del uso de la Investigación de Operaciones y de los Métodos Cuantitativos dentro de la Administración Pública.

Este bloque se encuentra integrado por dos unidades temáticas:

TEMA 1: La Investigación de Operaciones, un Enfoque Matemático en la Administración de los Recursos.

PERFIL DEL TEMA:

1.1 Introducción.
1.2 Desarrollo Histórico de la Investigación de Operaciones.
1.3 Características Fundamentales de la Investigación de Operaciones
1.4 El Concepto de Investigación de Operaciones.
1.5 La Investigación de Operaciones en la Administración.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

- Redactará un resumen que presente la evolución de las principales escuelas administrativas que dieron origen a los Métodos Cuantitativos, enmarcando su importancia dentro del contexto de la carrera.
- Identificará las características fundamentales de la Investigación de Operaciones.
- Analizará el concepto Investigación de Operaciones, con base en los aspectos que la particularizan.
- Indicará la función de la Investigación de Operaciones dentro del campo de la Administración.
- Explicará con claridad el significado de cada uno de los siguientes términos:

Actividades de Línea	Actividades de Staff
Ciencia de la Administración	Comunicación
Información	Interdisciplinario
Método Científico	Modelo
Optimización	Organización
Problema Real	Sistema
Sobreoptimización	Suboptimización
Validación	

EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDAS:

- Dinámica grupal (opcional).
- Exposición de caracter introductorio a cargo del profesor.
- Investigación bibliográfica a cargo de los alumnos (subtemas 1.2 y 1.3).
- Interrogatorio sobre lo investigado.
- Foro (subtema 1.4). Se recomienda dirigir la discusión sobre diversas definiciones, indicando problemas de concepto dejando al alumno la formulación de una.
- Debate y conclusiones a cargo de los alumnos (subtema 1.5).

MEDIOS DE EVALUACION:

- Consultar preguntas sugeridas al final del tema.
- Trabajo de investigación, resumen del origen de la Investigacion de Operaciones (2 cuartillas máximo).

DURACION ESTIMADA: 4 horas.

TEMA 2: Modelos de Investigación de Operaciones.

PERFIL DEL TEMA:

2.1 Introducción.
2.2 La Importancia de la Toma de Decisiones.
2.3 El Uso de los Modelos.
2.4 Una Clasificación Particular de los Modelos.
    2.4.1 Tipos de Modelos a Estudiar.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

- Clasificará los modelos que se utilizan con frecuencia en la Ciencia de la Administración.
- Indicará las características de cada uno de los modelos estudiados.
- Propondrá diversos problemas indicando el tipo de modelo más adecuado para su representación.
- Explicará con claridad el significado de los siguientes términos:

Decisión Bajo Certeza	
Decisión Bajo Incertidumbre	Decisión Bajo Riesgo
Modelo de Asignación	Modelo de Distribución
Modelo de Inventario	Modelo de Secuenciación
Modelo Determinístico	Modelo Estático
Modelo Matemático	Modelo Normativo
Objetivo Cualitativo	Objetivo Cuantitativo
Parámetro	Toma de Decisiones
Variable	

EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDAS:

- Dinámica grupal (opcional).
- Exposición dirigida a cargo del profesor (subtema 2.2).
- Se recomienda proporcionar información inicial sobre los casos ejemplificados en el subtema 2.3 (o algunos similares), y aplicar la técnica phillips 66 para obtener conclusiones.
- Exposición a cargo del profesor (subtema 2.4). Se sugiere que el alumno proporcione diversos ejemplos de modelos.

MEDIOS DE EVALUACION:

- Consultar preguntas sugeridas al final del tema.

DURACION ESTIMADA: 4 horas.

2. Programación Lineal.

OBJETIVO GENERAL. El alumno analizará, mediante modelos lineales, diversos problemas relacionados con la administración de recursos.

El presente bloque está integrado por dos unidades temáticas:

TEMA 3: Formulación de Modelos de Programación Lineal.

PERFIL DEL TEMA:

3.1 Introducción.
3.2 Casos de Estudio.
3.3 Supuestos Básicos en los Modelos de Programación Lineal.
3.4 El Arte de Modelar.
    3.4.1 Características de un Buen Modelo.

3.4.2 Elementos Básicos de un Modelo de Programación Lineal.
3.4.3 El Proceso de Construcción de un Buen Modelo.
3.4.4 Manipulaciones Algebraicas.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

- Formulará modelos de Programación Lineal.
- Indicará las ventajas y limitaciones de los modelos lineales con base en los supuestos que se aplican sobre estos.
- Identificará los elementos que todo Modelo de Programación Lineal debe poseer.
- Aplicará las diferentes manipulaciones algebraicas estudiadas para transformar la estructura matemática de los modelos formulados (opcional).
- Explicará con claridad el significado de los siguientes términos:

Aditividad	Coeficiente Tecnológico
Condición de no Negatividad	Costo
Desigualdad	Divisibilidad
Función Objetivo	Ganancia
Independencia	Maximizar
Minimizar	Programación Lineal
Proporcionalidad	Recurso
Restricción	Variable Artificial
Variable de Decisión	Variable de Exceso
Variable de Holgura	

EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDAS:

- Exposición de al menos un caso en el que se enfatice la relevancia del proceso de construcción del modelo (subtema 3.2).
- Ejemplificación de las características de los modelos lineales y transformaciones a través de la construcción de diversos modelos (subtemas 3.3 y 3.4).
- Planteamiento de modelos lineales en clase, phillips 66.

METODOS DE EVALUACION:

- Consultar preguntas y problemas al final del tema.
- Tratamiento de algun caso de estudio (opcional).
  Bibliografía sugerida: [6], [8], [22], [33], [69], [83] y [85].

DURACION ESTIMADA: 8 horas.

Tema 4: Solución e Interpretación de los Modelos de Programación Lineal.

PERFIL DEL TEMA:

4.1 Introducción.
4.2 Mecanismos de Resolución.
4.3 El Método Gráfico. Resolución e Interpretación de un Caso Sencillo.

4.4 El Método Simplex.
 4.4.1 El Tableau Simplex.
 4.4.2 Tipos de Soluciones.
4.5 Dualidad y Precios Sombra.
4.6 Casos de Estudio.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

- Resolverá gráficamente Modelos de Programación Lineal.
- Explicará el funcionamiento del Método Simplex.
- Interpretará la solución de los problemas lineales.
- Indicará el significado de la dualidad y precios sombra.
- Identificará las características que particularizan a los diferentes tipos de soluciones que pueden presentarse en los Modelos de Programación Lineal.
- Expondrá las ventajas que representa el uso de un paquete de cómputo en la obtención de resultados.
- Explicará con claridad el significado de los siguientes términos:

Algoritmo	Análisis de Sensibilidad
Costo Básico	Costo no Básico
Costo Reducido	Factibilidad
Iteración	Método Gráfico
Método Simplex	Optimalidad
Paquete de Cómputo	Plano Cartesiano
Precio Sombra	Región Factible
Restricciones Básicas	Solución Básica
Solución Degenerada	Solución Entera
Solución Factible	Solución Infactible
Solución no Acotada	Solución Optima
Solución Optima Múltiple	Tableau Simplex
Variable Básica	Variable no Básica
Vértice	

EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDAS:

- Exposición introductoria por parte del profesor.
- Lectura del subtema 4.3 e interrogatorio, se recomienda que el profesor intervenga en forma expositiva en la explicación inicial del Método Gráfico.
- Descripción a cargo del profesor (subtema 4.4 - 4.4.1).
- Formulación de Modelos "Problemáticos", se sugiere guiar al alumno para identificar la fuente de los problemas en la formulación errónea de los modelos. Phillips 66 (subtema 4.4 - 4.4.2).
- Exposición por equipos de la interpretación de los problemas duales, sociodrama (subtema 4.5). Se recomienda retomar las conclusiones obtenidas en el subtema 4.3 para el establecimiento de relaciones.
- Interpretación de Resultados, foro. Se sugiere proporcionar a los alumnos copias fotostáticas de la salida de un paquete de cómputo y realizar comentarios sobre este.

METODOS DE EVALUACION:

- Consultar problemas al final del tema.
- Interpretación de algún caso de estudio seleccionado (opcional).

DURACION ESTIMADA: 8 horas.

3. Otros Modelos de Programacion Lineal.

OBJETIVO GENERAL. El alumno identificará la estructura particular de otros Modelos de Programación Lineal.

Este bloque se encuentra integrado por una unidad temática.

TEMA 5: Modelos de Transporte y Asignación.

PERFIL DEL TEMA:

5.1 Introducción.
5.2 Modelos de Transporte.
5.3 El Tableau de un Modelo de Transporte.
5.4 Interpretación de Soluciones.
5.5 Modelos de Asignación.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

- Indicará las características de los Modelos de Transporte y Asignación.
- Representará con ayuda del Tableau de Transporte modelos lineales que presenten dicha estructura.
- Identificará problemas no balanceados.
- Interpretará las soluciones que se deriven de los Modelos de Transporte y Asignación.
- Explicará con claridad el significado de los siguientes términos:

Matríz de Asignación	Modelo de Asignación
Modelo de Transporte	Restricción de Demanda
Restricción de Oferta	Tableau de Transporte

EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDAS:

- Ejercicios de identificación introductorios propuestos por el profesor.
- Exposición grupal por equipos del tema, máximo 5 personas. Se sugiere el apoyo del profesor en la conducción de la cátedra.

METODOS DE EVALUACION:

- Consultar problemas al final del tema.
- Tratamiento de algún caso de estudio (opcional).

DURACION ESTIMADA: 8 horas.

4. Otros Modelos de Investigación de Operaciones.

OBJETIVO GENERAL. El alumno aplicará las técnicas de control de proyectos e inventarios a diversos problemas de administración.

En este último bloque, integrado por dos temas, se busca presentar al alumno otras técnicas importantes de la Investigación de Operaciones:

TEMA 6: Técnicas de Previsión y Evaluación de Proyectos y Rúta Crítica (PERT y CPM).

PERFIL DEL TEMA:

6.1 Introducción.
6.2 Gráficas de Gantt.
6.3 Construcción de Redes.
6.4 La Determinación de Tiempos y Costos en un Modelo de Planeación.
6.5 PERT.
6.6 PERT/Costo (Opcional).
6.7 Las Redes y su Utilidad.
6.8 Temas Selectos de Redes (Opcional).
  6.8.1 Redes de Actividad en el Nodo (Opcional).
  6.8.2 Coordinacion de Recursos (Opcional).
  6.8.3 Otras Técnicas de Proyecto (Opcional).

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

- Representará gráficamente diversos proyectos.
- Realizará secuenciaciones de las diferentes actividades que componen a un proyecto.
- Interpretará los diferentes resultados que se obtienen mediente la aplicación de las técnicas de planeación de proyectos: PERT y PERT/Costo (opcional).
- Identificará la ruta tiempo mínimo-costo mínimo para redes de peque&as dimensiones, 10-15 actividades máximo (opcional).
- Indicará la utilidad que representa la aplicación de las técnicas de planeación de proyectos en la administración.
- Aplicará el método de la ruta crítica para determinar manualmente los tiempos más relevantes en la planeación de los proyectos (opcional).
- Explicará con claridad el significado de los términos siguientes:

Actividad	Actividad Ficticia
Costo de Compresión (Opcional)	Costo Directo (Opcional)
Costo Indirecto (Opcional)	Costo Normal (Opcional)
Desviación Estándar	Evento
Gráfica de Gantt	Holgura
Holgura Interferente	Holgura Libre
Loop	Proyecto
Red	
Red de Actividad en el Nodo (Opcional)	
Red de Actividad en Flechas	
Ruta	Ruta Crítica
Ruta Tiempo Mínimo-Costo Mínimo (Opcional)	

Sucesión
Tiempo Esperado
Tiempo Normal (Opcional)
Tiempo Pesimista
Tiempo Remoto de Terminación
Tiempo Temprano de Terminación
Tiempo de Compresión (Opcional)
Tiempo mas Probable
Tiempo Optimista
Tiempo Remoto de Inicio
Tiempo Temprano de Inicio

EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDAS:

- Exposición introductoria por parte del profesor.
- Ejercicios introductorios por parte del profesor para ejemplificar la utilidad de las redes. Se recomienda auxiliarse de representaciones gráficas en el pizarrón (subtemas 6.3 y 6.4).
- Trabajo de investigación. Se sugiere motivar al alumno, para que encuentre campos en los que sea posible aplicar la técnica. Proposición de algun problema real. Ejemplificacion grupal de la organización del trabajo involucrado en la construcción de una red.
- Exposición grupal por equipos, máximo 5 personas de los subtemas 6.5 y 6.6 (Opcional).
- Debate y conclusiones (subtema 6.7).
- Investigación bibliográfica del subtema 6.8 (Opcional).
  Bibliografía sugerida: [12] y [15].

METODOS DE EVALUACION:

- Consultar problemas al final del tema.
- Trabajo de Investigación (problema de aplicación o caso práctico).
- Exposición grupal.
- Investigación Bibliográfica (trabajo de una cuartilla máximo).

DURACION ESTIMADA: 14 horas.

TEMA 7: Modelos de Inventario.

PERFIL DEL TEMA:

7.1 Introducción.
7.2 Naturaleza de los Sistemas de Inventario.
7.3 Características de los Sistemas de Inventario.
    7.3.1 Elementos de un Sistema de Inventario.
    7.3.2 Control de Inventarios: El Sistema ABC.
    7.3.3 Objetivos de un Sistema de Inventario.
7.4 Modelos Determinísticos de Inventario.
    7.4.1 Modelo del Lote Económico (EOQ).
    7.4.2 Casos Especiales del EOQ.
    7.4.3 Modelos con Período Fijo de Reorden (EOI).
7.5 Modelos Probabilísticos de Inventario.
7.6 Aspectos Relevantes de los Inventarios.
    7.6.1 Otros Modelos de Inventario.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

- Indicará la relevancia de los inventarios dentro del contexto de la administración de los recursos.
- Identificará a los diferentes elementos que componen a un Sistema de Inventario.
- Realizará la categorización ABC para inventarios de productos numerosos.
- Identificará las características que particularizan a los diferentes modelos determinísticos de inventarios.
- Indicará las características de los Sistemas de Inventario Probabilísticos.
- Explicará con claridad el significado de los términos siguientes:

Artículos Tipo A, B y C	Ciclo de Reorden
Costo de Compra	Costo de Ordenar
Costo de Mantenimiento	Demanda
EOI	EOQ
EOQ con Descuentos	EOQ con Faltantes
EOQ con Reabastecimiento Uniforme	Inventario
Inventario de Recursos Humanos	
Inventario de Recursos Materiales	Inventario de Seguridad
Inventario Determinístico	Inventario Probabilistico
Tama&o del Lote	Tasa de Abastecimiento

Tiempo de Reorden

EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE:

- Exposición introductoria a cargo del profesor.
- Exposición grupal por equipos, máximo 5 personas (subtemas 7.3 y 7.4).
- Lectura previa a cargo de los alumnos, exposición e interrogatorio a cargo del profesor (subtema 7.5).
- Debate y conclusiones (subtema 7.6).
- Tratamiento de algún caso afin (opcional).
  Bibliografía sugerida: [6], [22], [37], [44], [50], [57] y [83].

METODOS DE EVALUACION:

- Consultar problemas al final del tema.
- Exposición grupal.
- Problema de aplicación o caso práctico (opcional).

DURACION ESTIMADA: 14 horas.

EVALUACION: Se recomienda realizar cuatro evaluaciones parciales, de acuerdo a la estructura modular que presenta el programa de estudio. Con base en el contenido de los temas, estas pueden estructurarse de la siguiente manera:

1era. 10 reactivos conceptuales.
Es importante que en estos se pida al alumno proponer ejemplos y, en su caso, establecer juicios.

2da. 3 reactivos conceptuales, un problema de formulación y uno de interpretación de resultados.

3era. 3 reactivos conceptuales, un problema de transporte y uno de asignación.
Se recomienda cuestionar interpretaciones sobre estos modelos, remarcando situaciones de infactibilidad e inconsistencia, frente a excesivas demandas.

4ta. 5 reactivos conceptuales, un problema de PERT y otro sobre algún modelo determinístico de inventarios.

Como evaluación complementaria, se sugiere considerar los diferentes trabajos realizados al final de cada tema, así como la participación grupal de los alumnos. La ponderación recomendada es la siguiente:

Exámenes:	70%
Trabajos:	20%
Participación:	10%
Total:	100%

Es importante indicar que las duraciones de cada tema, son solo tiempos estimados que, en algunos casos, no cubrirán o excederán a los planeados por algunos profesores. No obstante, se proporcionan a manera de parámetro de ejecución para cubrir con el programa dentro del calendario escolar.

Los temas con caracter opcional, se presentan con el objeto de que el profesor tenga la libertad de incluirlos en su cátedra, siempre que los considere como ayuda adicional.

En el Capítulo II se presenta una guía, para auxiliar al profesor a desarrollar e implantar el programa de estudio de la asignatura de Investigación de Operaciones. Los ejemplos sugeridos pueden ser modificados a su criterio, sin embargo, se recomienda que el contenido de fondo no se afecte.

Se recomienda que los temas sean impartidos en la secuencia presentada, no obstante, el profesor puede alterar a su criterio, el orden de los dos últimos con relación a los temas 3 al 5.

OBRAS CONSULTADAS:

[21]
[28]
[30]
[31]
[43]
[65]
Programa de Estudios de la Carrera Ciencias Políticas y Administración Pública (1975).

Didactica General. ENEP-Acatlan, Secretaria del Personal Academico, Seccion de Formacion Docente, 1982.

CAPITULO II: DESARROLLO E IMPLANTACION DEL PROGRAMA DE ESTUDIO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

"La Investigación de Operaciones es el arte de ganar las guerras sin pelearlas".

ARTHUR CLARKE.

TEMA 1: LA INVESTIGACION DE OPERACIONES, UN ENFOQUE MATEMATICO EN LA ADMINISTRACION DE LOS RECURSOS.

1.1 Introducción

Comunmente se dice que: "administrar, es hacer algo a través de otros". Aunque la definición antes expuesta resume en forma clara la esencia de lo que es en si la "administración", resulta necesario contar con una que presente una mayor especificidad dentro del marco conceptual del tema que nos ocupa. A continuación se exponen tres definiciones que nos ubicarán en nuestro punto de interés:

HENRY FAYOL: "Administrar es conducir a la empresa hacia su objetivo tratando de sacar el mejor provecho de todos los recursos de que se dispone".

ISAAC GUZMAN VALDIVIA: "Es la dirección eficáz de las actividades y la colaboración de otras personas para obtener determinados resultados".

AMERICAN MANAGEMENT ASSOCIATION: "La administración es la actividad por la cual se obtienen determinados resultados a través del esfuerzo y la cooperación de otros".

Con base en lo anterior, puede apreciarse que la administración es por naturaleza una actividad inherente a cualquier grupo social. Si esta se relaciona con la utilización de los recursos de que se dispone para lograr un determinado objetivo, resultará bastante clara su importancia en la toma de decisiones.

El hombre, desde su aparición en la tierra, ha trabajado para subsistir, tratando de lograr en sus actividades la mayor satisfacción posible; para lo que ha utilizado, en cierto grado, la administración. Aunque puede situarse a esta como una de las primeras herramientas utilizadas por la humanidad desde la prehistoria, como disciplina, tiene un origen muy reciente. En particular, como punto de partida, puede situarse su estudio formal en el período de la Revolución Industrial que es cuando se le comienza a dar el carácter científico.

1.2 Desarrollo Histórico de la Investigación de Operaciones

Al igual que toda "ciencia", "técnica" o "arte", la administración ha experimentado un asombroso desarrollo en un período de tiempo relativamente corto. Las diversas escuelas del pensamiento que han surgido en torno a esta "ciencia", como la denominaremos de ahora en adelante, se han caracterizado por tratar de dar respuesta, en lo posible, a las inquietudes del hombre en su momento.

Las Escuelas de la Teoría Administrativa, como comunmente se les conoce, son las diversas corrientes o enfoques a través de los cuales se concibe la administración; algunas son de ámbito relativamente amplio y otras tienden a la especialización. Naturalmente, en un campo de estudio tan nuevo y dinámico como este, resulta prácticamente imposible analizar a todas y cada una de ellas, por lo que en primer término, en forma sinóptica se proporcionará una visión general de algunas de ellas enmarcando las características fundamentales que las particularizan; y en segundo término, concentraremos nuestra atención en aquella en la que se fundamenta la Investigación de Operaciones.

Escuela de la Administración Científica:

A esta corriente se le llama administración científica, por la racionalización que hace de los métodos de ingeniería aplicados a la administración y debido a que desarrolla investigaciones experimentales orientadas hacia el rendimiento del obrero.

Técnicas: Técnicas de Producción.
Tiempos y Movimientos.
Sistemas de Incentivos.

Representantes: Henry Robinson Towne.
Frederick W. Taylor.
Henry L. Gantt.
Frank B Gilberth.
Charles Babbage.
Henry Metcalf.

Escuela del Comportamiento Humano:

Las reacciones negativas frente al taylorismo y los resultados mediocres en su aplicación, así como los principios para la selección científica de los trabajadores, generaron el desarrollo de la psicología industrial. Nació así la escuela del comportamiento humano, conocida también como la escuela de las relaciones humanas, misma que otorga mayor importancia al hombre, al hacer de la conducta de este el punto focal de la acción administrativa.

Técnicas: Psicológicas.
Sociológicas.

Representantes: George Elton Mayo.
Robert Oven.

Escuela Ecléctica:

Esta escuela reune a autores de todas la épocas, por lo que representa una conjunción de ideas de varias corrientes para el uso de la administración, es decir, toma los diversos conocimientos de cada escuela, tratando de agruparlos en un pensamiento universal a través de la aplicación del proceso administrativo.

Técnicas:	Empíricas.
	Decisionales.
	Modelos Matemáticos.
	Psicológicas.
	Sociológicas.
	Humanísticas.
	Económicas, etc.
Representantes:	Henry Fayol.
	Mary Parker Follet.
	George Terry, etc.

Escuela de la Administración de Sistemas:

Según esta corriente los sistemas son el punto fundamental en que se basa la administración. El sistema es un conjunto formado por partes, de tal modo asociadas, que forman un todo coherente o unidad. En otras palabras, es la concepcion de multitudinarias actividades con las cuales se maneja cualquier organización.

Desarrolla un marco sistemático para la descripción del mundo empírico del que se ocupa la administración: la empresa es un sistema hecho por el hombre; sus partes internas trabajan juntas para alcanzar objetivos establecidos, y sus partes externas trabajan para lograr el interfuncionamiento con su ambiente.

Técnicas:	De Computación Electrónica.
Representantes:	March y Simon.
	West Churchman.

Escuela de la Teoría de las Decisiones:

Se le llama también escuela racional; postula que el hombre no es algo que pueda manipularse, sino que es un ente capáz de adaptarse y evaluar diferentes grupos de circunstancias. En esta escuela los factores económicos, sociales, técnicos, etc., influyen grandemente en la conducta y productividad del hombre. De ahí la importancia de desarrollar modelos experimentales que permitan simular la conducta potencial del ser humano ante diversas situaciones, ya que el proceso de decidir es la esencia de la administración.

Técnicas:	Decisionales.
	Matemáticas.
	Modelos de Simulación de Conducta.

Representantes: Herbert A. Simon.
Von Neumann.
Hutchinson.

Escuela de la Medición Cuantitativa o de la Investigación de Operaciones:

Sumamente relacionada con la escuela de decisiones, el enfoque matemático postula que la administración es una entidad lógica cuyas acciones pueden expresarse en términos de símbolos matemáticos, como relaciones y datos que se pueden medir. Su aplicación es básica en el proceso decisional.

El uso de la Investigación de Operaciones es fundamental dentro del campo de la administración, ya que fomenta el pensamiento ordenado, la metodología lógica y el reconocimiento de restricciones efectivas. Proporciona herramientas poderosas en la solución de modelos complejos. Es de gran utilidad cuando se aplica a problemas físicos de la administración tales como inventarios, control de producción, y otros, más que a los relacionados con el comportamiento humano.

Técnicas: Matemáticas.
Programación Lineal.
Teoría de Juegos, etc.

Representantes: George Dantzig.
Richard Bellman.
A. Kauffman.
Russell Ackoff.

Todas las escuelas postulan la existencia de dos aspectos fundamentales:

1ero. El Operativo o Funcional.

2do. El Psicológico o Conductual.

En el primero se encuentran concentradas las técnicas que tratan de determinar los procedimientos basados en elementos teóricos sofisticados, que indicarán la forma en la que pueden optimizarse los recursos humanos y materiales sin considerar los factores psicológicos o sociológicos asociados con el comportamiento humano. En el segundo se enfatiza la importancia de los factores motivacionales para la productividad bajo el supuesto no probado, de que un trabajador feliz es siempre un trabajador productivo. Ambos aspectos toman como base el uso del método científico para su aplicación a problemas reales. Lo anterior puede condensarse en el esquema mostrado en la figura 1.1.

La disponibilidad de mejores métodos de administración provocó profundos cambios durante las primeras cuatro décadas del siglo XX dentro del campo de los negocios. La especialización funcional tanto en las áreas técnicas como administrativas, proporcionó los medios y oportunidades para la realización de más

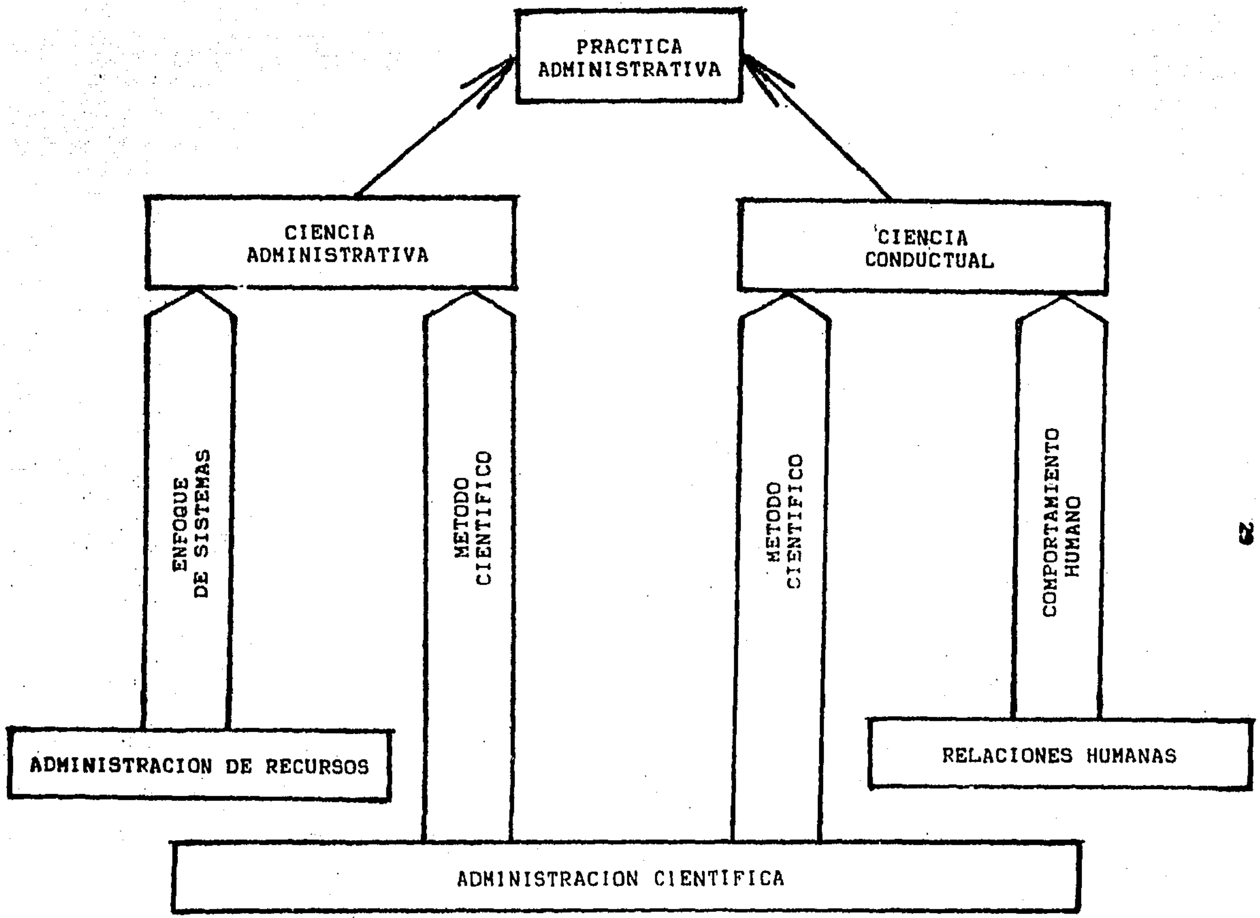

PRACTICA ADMINISTRATIVA
CIENCIA ADMINISTRATIVA
CIENCIA CONDUCTUAL
ENFOQUE DE SISTEMAS
METODO CIENTIFICO
METODO CIENTIFICO
COMPORTAMIENTO HUMANO
ADMINISTRACION DE RECURSOS
RELACIONES HUMANAS
ADMINISTRACION CIENTIFICA

Figura 1.1.

economías de escala en el proceso de producción, ocasionando un crecimiento fenomenal en el campo de los negocios, ya que las empresas estaban organizadas en componentes separados, es decir, cada una con objetivos específicos. Así, la labor del empresario se concentró en problemas de tipo ejecutivo, en los que se persigue conseguir la conjugación óptima de los intereses de cada uno de los departamentos o secciones que componen a una organización.

Por ejemplo, los niveles de inventario es un problema típico del ejecutivo, en el que los diferentes departamentos de una empresa manufacturera tienen objetivos en contraposición. El departamento de ventas, en general, desearía por ejemplo, tener grandes inventarios de diferentes productos para lograr un servicio ininterrumpido y satisfactorio para el cliente, lo cual esta en contraposición con el departamento de finanzas, que quisiera tener una inversión baja en estos. El departamento de producción trataría de manufacturar grandes lotes de artículos a costos de producción reducidos, con lo que se generarían grandes inventarios con requerimientos elevados de capital. De esta forma, el problema a resolver, es el desarrollar una política de inventario que minimice los costos asociados con los diferentes requerimientos conflictivos en los departamentos funcionales.

La Ciencia de la Administración o de la Investigación de Operaciones, como comunmente se le conoce en la actualidad, tuvo su comienzo formal en el Reino Unido durante la 2da. Guerra Mundial, cuando a un grupo de 11 científicos se le encomendo la resolución de diferentes problemas militares de cierta complejidad como: el estudio del funcionamiento del armamento en el campo, la determinación del tama&o óptimo de un convoy, profundidades para la detonación de cargas submarinas y planes de defensa civil óptimos. Los pioneros de la Investigación de Operaciones utilizaron una metodología que combinaba la aproximación inductiva con el uso de la analogía. Es decir, dondequiera que fuera posible establecer una analogía con las estructuras lógicas previamente desarrolladas y probadas tenía que ser utilizada en el proceso de construcción de modelos. Este grupo estaba formado por dos psicólogos, dos físico matemáticos, un astrofísico, un oficial del ejército y ún inspector, el equipo fue completado posteriormente con un psiocólogo, dos físicos y dos matemáticos. Este tipo de actividad científica llego a ser conocida en Inglaterra como "Investigación Operacional", ya que los primeros estudios estaban dedicados al uso operativo del radar a cargo de un grupo de científicos expertos en tal campo de investigación.

En la fuerza aérea de los Estados Unidos, se llego a denominar como "Análisis Operacional" y en la armada y marina americanas como "Investigación y Evaluación de Operaciones". Este tipo de actividad no solo se desarrolló en la Gran Breta&a y los Estados Unidos sino también en Canadá y Francia, también durante la 2da. Guerra Mundial.

Cuando la guerra terminó, nuevos tipos de problemas administrativos creados por la nacionalización de la industria, así como la necesidad de reconstruir grandes segmentos de los bienes industriales de las naciones, hicieron que los empresarios clamaran por la solución a los mismos. La respuesta no se hizo esperar por el grupo de trabajadores de la Investigación Operacional quienes cambiaron sus horizontes a los campos industriales y gubernamentales. El conocimiento ganado en los experimentos durante la guerra tuvo que refinarse y enfocarse a problemas de asignación de recursos limitados, controles de inventario, colas de espera, remplazos, etc.. El objetivo fue desarrollar una variedad de modelos, con propiedades conocidas y en forma deductiva derivar soluciones que pudieran ser aplicables en situaciones determinadas.

Algunos a&os después, la mayoría de las industrias en las que la Investigación Operacional habia sido adoptada, tenía solo unos cuantos hombres dedicados a este tipo de actividades. Sin embargo, a patir de los a&os 50 estos grupos crecieron en número y muchas otras industrias requirieron de su presencia. Los Estados Unidos comenzaron a vivir una segunda Revolución Industrial con la automatización alcanzada con el advenimiento de las computadoras en los campos industrial y gubernamental. Estas junto con el desarrollo de técnicas de resolución proporcionaron al empresario y a su grupo interdisciplinario las oportunidades de alcanzar un rápido desarrollo que antes parecía dificilmente alcanzable.

Las computadoras han facilitado el análisis y la predicción del comportamiento futuro de sistemas complejos de producción, mercadotecnia, finanzas y otros, mediante el uso de técnicas analíticas, así como modelos de simulación que son bastante económicos. Hay que notar aqui que las computadoras hacen en minutos lo que un hombre tardaría semanas, meses y algunos a&os. Es por ello importante que el grupo interdisciplinario de investigación deba estar conciente de su existencia y utilidad.

La Ciencia de la Administración, ha sido muy efectiva bajo dos aspectos:

1ero. El enfoque científico, que ha proporcionado dividendos en el perfeccionamiento del ente administrativo.

2do. El uso de técnicas operacionales, que han ayudado a resolver diversos cuellos de botella.

En la actualidad ha surgido la necesidad de contar con un complejo administrativo, más extenso y especializado, que permita desarrollar de manera eficiente el conjunto de multitudinarias actividades que se dan en cualquier empresa moderna. La Investigación de Operaciones, es una de las herramientas científicas de la Administracion que a través de los a&os ha mostrado su efectividad, en la resolución de diversos problemas en una amplia gama de campos. Sin embargo, no hay que olvidar que esta no es la panacea para resolver cualquier situación, pues al fin de cuentas el criterio de la persona que la aplica es el factor fundamental para la culminación de los objetivos cifrados.

1.3 Características Fundamentales de la Investigación de Operaciones

Cuando por primera vez durante la 2da. guerra, en el ejército surgió la necesidad de determinar lo que serían sus estrategias óptimas de ataque, este integró, como ya se mencionó anteriormente, a un grupo de personas de diferentes disciplinas, con el objeto de que estudiaran los sistemas en cuestión para que basándose en el método científico, formularan abstracciones de la realidad que les permitieran simular situaciones de diversa índole y de esta forma pudieran sugerir el curso de acción óptimo. Así:

- El Enfoque de Sistemas,

- El Enfoque Interdisciplinario,
- La Aplicación del Método Científico,
- El Uso de los Modelos, y
- La Deducción de Nuevos Problemas para su Estudio,

llegaron a convertirse en factores característicos de la Investigación de Operaciones.

El Enfoque de Sistemas:

Un sistema es una primera abstraccion de una organizacion o estructura real. El hecho de buscar tal representación se basa fundamentalmente en su "sencillez" en comparación con las situaciones reales. El investigador tiene que identificar los componentes del sistema, para establecer las relaciones que existen entre ellos, algunas de las cuales serán controlables (es decir, podrá determinarse con cierta exactitud lo que ocurrirá entre ellas, por ejemplo, parámetros, niveles de producción, de distribución, etc.) y otras no controlables (en donde no se puede saber lo que ocurrirá, por ejemplo huelgas, lluvia, etc.). Antes de que un problema sea resuelto en algún área funcional, nivel organizacional, o algún sector específico, el investigador debe comprender completamente cómo funcionará el sistema ante posibles cambios en sus componentes, es por ello imprescindible que establezca asimismo, los canales de comunicación, entre los que fluirá la información que provocará interacciones entre cada uno de tales elementos. Lo anterior indica que la actividad de cualquier area o parte de una empresa tiene algún efecto sobre la actividad de cada una de las otras. Debido a que estas pueden ser muy numerosas y no todas relevantes, debe establecerse la significancia y el efecto de cada una de ellas, considerando en primer término a aquellas que se piense son las más importantes. Es muy posible que en esta tarea ciertos efectos sean imposibles de detectar.

El Enfoque Interdisciplinario:

La idea de un equipo interdisciplinario se fundamenta en la necesidad de resolver problemas de gran complejidad, para lo que es necesario contar con diferentes puntos de vista que requieren de personal especializado. El conocimiento en diferentes áreas ha llegado a tal magnitud que es imposible para un individuo concentrarse en más de un área de investigación de la ciencia, aun más, si se aprecia que las situaciones a las que se enfrenta son multidimensionales. Así, contar con elementos de diferentes disciplinas podra asegurar un mayor grado de efectividad en los resultados que se obtengan. De esta forma, la Investigación de Operaciones hace uso de este simple principio: gente de diferentes disciplinas puede producir más que soluciones únicas, con mayor probabilidad de éxito, que lo esperado por un mismo grupo de personas de una sola disciplina.

Problemas grandes y complejos requieren del análisis de un grupo de especialistas con un amplio rango de habilidades, un enfoque multidisciplinario producirá ideas más maduras, debido a que estos han sido estudiados bajo diferentes puntos de vista. La mente científica de cada disciplina intenta abstraer la esencia del problema y referirlo estructuralmente a situaciones similares de su propio campo. Si se presenta alguna similitud entre este y alguno otro familiar, entonces existirá la posibilidad de aplicar métodos de solución ya probados, para su resolución. Cuando un equipo completo intenta desarrollar este tipo de analogías, la posibilidad de encontrar una solución se incrementa marcadamente.

La Aplicación del Método Científico:

El método científico involucra un proceso sistemático de una serie de etapas a través de las cuales se pretende estudiar un determinado hecho. En particular, pueden identificarse siete etapas:

1. Observación.

2. Definición del Problema Real.

3. Desarrollo de Soluciones Alternativas.

4. Determinación de la Solución Optima.

5. Validación de la Solución Optima.

6. Implantación de la Solución.

7. Establecimiento de los Controles Adecuados.

esquematizados en la figura 1.2.

1. Observación.

Esta primera etapa se centra en la identificación de los hechos y opiniones concernientes a un determinado problema. El investigador capáz debe estar seguro de haber identificado el problema básico o verdadero y no solo un síntoma de este. Una vez detectado tendrá que contemplar las condiciones que lo rodean, preguntando: los qué, dónde, cómo, cuándo y quién relacionados con los recursos de la empresa (hombres, materiales, maquinaria, dinero, etc.). Básicamente las respuestas que obtenga ante tales preguntas le ayudarán a comprender los porqué, para poder proceder a la aplicación de la siguiente etapa (como se muestra en la figura 1.3).

2. Definición del Problema Real.

Un problema se presenta cuando existen por lo menos dos alternativas o cursos de acción que provocan diferentes resultados. Para definirlo es necesario establecer, con base en lo indicado en la etapa anterior lo siguiente:

- Su marco de referencia.

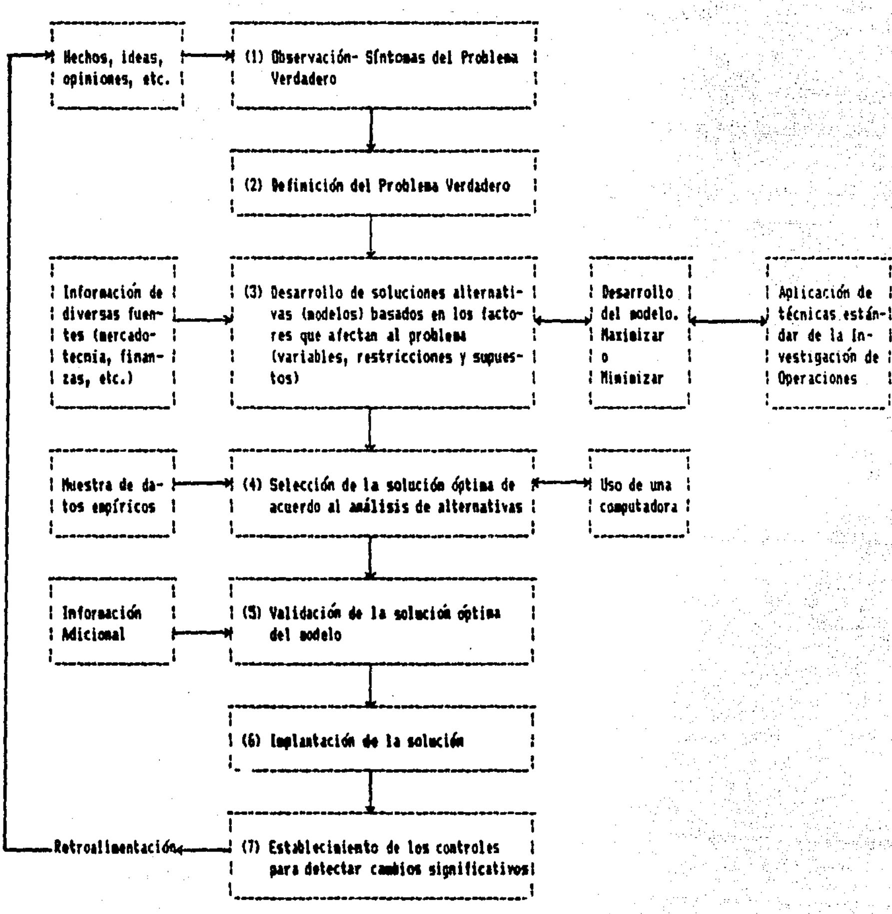

Hechos, ideas, opiniones, etc.
(1) Observación- Síntomas del Problema Verdadero
(2) Definición del Problema Verdadero
Información de diversas fuentes (mercadotecnia, finanzas, etc.)
(3) Desarrollo de soluciones alternativas (modelos) basados en los factores que afectan al problema (variables, restricciones y supuestos)
Desarrollo del modelo. Maximizar o Minimizar
Aplicación de técnicas estándar de la Investigación de Operaciones
Muestra de datos empíricos
(4) Selección de la solución óptima de acuerdo al análisis de alternativas
Uso de una computadora
Información Adicional
(5) Validación de la solución óptima del modelo
(6) Implantación de la solución
Retroalimentación
(7) Establecimiento de los controles para detectar cambios significativos

Figura 1.2.

Conocimiento

Hechos-incluyendo opiniones y síntomas concernientes al problema real.

Qué	Administrador
Dónde	Hombres
Cuándo	Materiales
Quién	Maquinaria
Cómo	Dinero

Entendimiento

Las razones detrás de los hechos, surgen preguntando los "porqué."

Porqué?

Problema

La interacción del conocimiento y el entendimiento.

Definición del PROBLEMA VERDADERO para el proyecto

Figura 1.3.

- Los objetivos específicos del usuario, es decir, del ente que enfrenta un problema.

- Sus parámetros.

- Los componentes del sistema (tanto los controlables como los que no lo son) y las interrelaciones más importantes entre estos.

- Una estimación de los costos del proyecto.

Lo anterior permitirá inicializar el proceso de resolución dentro del contexto adecuado.

3. Desarrollo de Soluciones Alternativas.

En esta etapa, la tarea fundamental se concentra en desarrollar cursos de acción alternativos o soluciones tentativas a los problemas reales, para lo cual será necesario establecer varias hipótesis. Dichos cursos de acción toman la forma de modelos, que pueden ser resueltos a través de técnicas ya generadas (en contadas ocasiones será necesario crearlas).

La tarea consistirá, de esta forma, en tratar de determinar el curso de acción más efectivo en relación a un conjunto de objetivos pertinentes. Por consiguiente, será necesario que en la formulación se establezca una medida de efectividad en términos de los objetivos específicos, lo cual puede no resultar tan sencillo, debido a la existencia de objetivos múltiples que inclusive se encuentran en contraposición.

4. Determinación de la Solución Optima.

Una vez que el conjunto de soluciones ha sido determinado, lo siguiente será evaluar cada uno de sus elementos para encontrar al mejor. Si es posible utilizar alguna técnica de la Investigación de Operaciones entonces la solución podrá obtenerse a partir de ésta, en caso contrario será necesario buscar alguna en particular que se ajuste a las necesidades. Con lo anterior, se resalta la presencia de ciertos procedimientos en la determinación de una solución óptima: el heurístico, el analítico y el numérico.

El heurístico, se basa en el uso de la experiencia y en suposiciones empíricas de la realidad. El analítico en los procedimientos matemáticos clásicos que ayudan a llegar a una solución del problema (en ocasiones la óptima). El numérico se fundamenta en procesos iterativos que a través de diferentes etapas permiten llegar a la solución óptima, aplicando un mismo procedimiento un número finito de veces.

5. Validación de la Solución Optima.

Este paso es necesario pues la validación va más allá que la experimentación. Los aspectos o resultados que se deriven de implantar la solución óptima pueden ser de diversa índole; con el objeto de verificar la optimalidad de una solución, es necesario que ésta sea trasladada a un conjunto de procedimientos de operación capaces de ser entendidos y aplicados por el personal que se responsabilice de su uso. Este es un verdadero proceso de prueba, pues una variable o factor que en un principio se consideró como irrelevante puede resultar crítico.

En esta etapa, es necesario medir el grado de estabilidad de los resultados, lo cual se conoce comunmente como análisis de sensibilidad. Su importancia se debe a la existencia de cambios constantes, que en la vida real presentan los parámetros usados en el experimento, el no considerar este hecho puede provocar consecuencias imprevistas.

Es importante remarcar la importancia que representa llevar a cabo un proceso de validación contínuo en cada etapa del método científico, esta constante evaluación permitirá contar con un proyecto depurado, asegurando con ello un mayor nivel de confiabilidad de los resultados que de este se obtengan.

6. Implantación de la Solución.

El análisis de sensibilidad que se practique sobre la solución permitirá tener un mayor nivel de comprensión del problema que se esta estudiando. Esto ayudará a llevar a cabo un proceso inverso a la abstracción, para que el decisor implante en la vida real el curso de acción que haya resultado óptimo. Sin embargo, en algunas ocasiones, lo anterior puede conducir a contradicciones en relación con la formulación original, por lo que es importante evaluar la posibilidad de recomenzar, en caso de que resulte necesario.

Aunque el usuario o decisor, es al fin de cuentas el responsable de la toma de decisiones, el investigador debe tener conciencia de su relevancia en la intervención tanto en la selección del curso de acción óptimo como en su implantación.

7. Establecimiento de los Controles Apropiados.

Una vez que una decisión haya sido tomada, es necesario tener en cuenta los controles que deben establecerse, pues una solución derivada de un modelo, seguirá siendo óptima mientras las variables conserven sus relaciones originales, cuando cambien significativamente, el sistema puede irse fuera de control, lo cual afectará principalmente al aspecto financiero debido al costo que ocasionará una adecuación de último momento sobre el modelo. Para establecer este control, es necesario contar con un sistema de información que permita una retroalimentación hacia los niveles responsables de los cambios o cursos de accion en la empresa. Si los cambios son necesarios y relevantes, el estudio deberá ser sujeto nuevamente al tratamiento del método científico. En general los proyectos de Investigación de Operaciones son multietápicos, ya que las empresas operan en una economía dinámica y no en una de tipo estático.

<u>El Uso de los Modelos:</u>

Un modelo es una representación particular de la realidad. Lo particular radica en el hecho de que diferentes personas pueden concebir un problema de maneras diferentes, dependiendo de sus interéses y focos de atención. Los Modelos Cuantitativos o de Investigación de Operaciones tienen la ventaja de que bajo las mismas suposiciones, personas diferentes convergerán a uno común, sin importar el método que se siga para solucionarlo, es decir, un modelo bajo una estructura y suposiciones bien específicas tendrá la misma solución óptima.

Los conceptos de modelo, construcción de modelos e implantación, son de suma importancia en la toma de decisiones, por lo que dada su extensión se discutirán con mayor detalle en el tema 2.

La Deducción de Nuevos Problemas para su Estudio:

Cuando un problema es resuelto, por lo general, la solución encontrada afecta o provoca ciertos cambios en las políticas de una empresa, generando así otros que al principio no fueron considerados Es por ello de vital importancia, que el grupo de Investigadores de Operaciones establezca al máximo nivel de la realidad tales derivaciones, para que vayan siendo resueltas en su momento oportuno. Las técnicas de Investigación de Operaciones no deben usarse para resolver un solo problema a la véz sino también aquellos que se deriven de la implantación de una solución, para obtener los máximos beneficios. Lo anterior puede provocar que en cierto aspecto no se logre la optimización de un determinado departamento a costa de la suboptimización de toda una empresa.

1.4 El Concepto de Investigación de Operaciones

La amplia gama de aplicaciones que, dentro de las diferentes disciplinas científicas, tiene la Investigación de Operaciones para la resolución de problemas de diversa índole, ha provocado que esta no sea un concepto facil de definir. Tal situación es una consecuencia de uso del lenguaje, pues este es un proceso de clasificación en el que mientras más complejo se vuelve un término, hace que resulte más difícil definirlo en términos que sean fácilmente asimilables por cualquier persona.

Paralelamente al transcurso del tiempo, esta disciplina, ha alcanzado niveles de definición más complejos, conforme las técnicas que la componen han sido creadas y desarrolladas.

La Sociedad de Investigación de Operaciones de América establece que "...es una ciencia experimental y aplicada dedicada a observar, entender y predecir la conducta o el comportamiento de los sistemas hombre-máquina bajo algún propósito; en la que los investigadores están comprometidos para que en forma activa apliquen su conocimiento a problemas prácticos de negocios, gobierno y sociedad".

Thierauff y Klekampt con base en sus características, indican que "utiliza el método científico y un equipo interdisciplinario con el objeto de representar relaciones complejas funcionales mediante modelos matemáticos para proporcionar una base cuantitativa en la toma de decisiones para de esta forma deducir nuevos problemas a resolver a partir de la implantación de la solución".

Si bien es cierto que ambas definiciones resumen en gran medida los aspectos generales que de la Investigación de Operaciones se han venido tratando; no dejan de ser, en cierto grado, incompletas y en otro complementarias. La primera adolece del uso tanto del método científico como del grupo interdisciplinario de trabajo; mientras que la segunda es poco clara en cuanto a la aplicación de los sistemas y a la administración de los recursos materiales de una empresa.

En resumen, puede establecerse que:

La Investigación de Operaciones es una ciencia experimental auxiliar en la toma de decisiones que basada principalmente en:

- el uso del método científico,

- la colaboración de profesionales de distintas áreas o grupo interdisciplinario, y

- el uso de los modelos matemáticos,

permitirá estudiar, resolver y predecir el comportamiento de los diversos problemas involucrados con los sitemas hombre-máquina a fin de que se implante la mejor alternativa obtenida y de esta forma se logren los objetivos cuantitativos específicos en la administración óptima de los recursos materiales disponibles para una empresa.

Es importante comprender que esta disciplina de ninguna manera usurpa el lugar de un empresario por el simple hecho de proporcionar soluciones tentativas, más bien es una herramienta de apoyo en la toma de decisiones, su objetivo se concentra en la optimización de los sistemas administrativos.

Algunos de los problemas que pueden ser analizados por los investigadores dentro de este campo son:

Finanzas, Presupuesto, e Inversiones

1. Análisis de flujo de efectivos, requerimientos de capital, pólizas de dividendos, inversiones en portafolios.

2. Políticas de crédito.

Adquisición de Bienes

1. Adquisición de recursos con precios estables o dinámicos.

2. Determinación del volumen de compras y tiempos de las mismas.

3. Políticas de reemplazo.

Distribución

1. Ubicación y tamaño de almacenes, y centros de distribución.

2. Políticas de distribución.

Planeación

1. Número de fábricas, almacenes, hospitales.

2. Número de obreros, productos, maquinaria.

Manufactura

1. Niveles de producción.

2. Estabilización de la producción y empleo.

Construcción

1. Políticas de mantenimiento, mantenimiento preventivo.

2. Planificación de proyectos, asignación de recursos.

Mercadotecnia

1. Selección de producción, tiempos y acciones competitivas.

2. Número de vendedores.

3. Estrategias de publicidad.

Personal

1. Selección de personal.

2. Políticas de reclutamiento y de asignación de trabajos.

1.5 La Investigación de Operaciones en la Administración

En toda empresa se practica la administración de recursos materiales, en algunas (muy probablemente la mayoría), en forma empírica, y en otras bajo la conceptualización científica expuesta. Esta última opción, dada su fundamentación, permitirá el logro de objetivos de una manera más efectiva, que en general suelen ser:

- Obtener el máximo beneficio posible,
- Trazar una ruta de expansión a seguir,
- Lograr una posición envidiable en su departamento de ventas,
- Conservar niveles de inventario adecuados a un costo reducido, etc.

Para poder lograr todo lo anterior, es necesario contar con elementos constituidos dentro de la empresa que permitan trazar una línea de acción a materializar en las políticas a seguir. Desde un punto de vista conceptual, debe existir un desdoblamiento de funciones o actividades denominadas:

- Actividades de Línea y

- Actividades de Staff.

como comunmente se les conoce.

La actividad de línea es aquella que se relaciona con las labores diarias en los procesos de producción y distribución de una empresa. Por su parte, la de staff es aquella que lleva a cabo la planeación del desarrollo de la actividad de línea, es decir, es la que facilita la información mediante la cual se tomarán las políticas a seguir.

La misión del staff puede considerarse con un doble objetivo, pues debe resolver los problemas que le plantee la línea a corto plazo y planear e investigar sobre el futuro de la empresa; la idea básica es que el personal de staff atienda las necesidades que el de línea le exponga, pues nadie mejor que él conoce la situacion verdadera de una empresa. Así, el staff funcionará como un grupo de técnicos cuya actividad puede situarse dentro del área de la Investigación de Operaciones, constituyendo una fuente constante de asesoría para la toma adecuada de decisiones; este puede concebirse de dos formas: en un departamento interno de técnicos o como consultores del exterior. Naturalmente, lo mas deseable es que pertenezca y este imbuido completamente con la problemática de la empresa, lo cual es más factible que se logre bajo la primera opción.

Si se supone al grupo de técnicos como un elemento más dentro de la organización, puede surgir una pregunta al respecto: de quién debe depender?. Considerando que a cargo de este se encuentran las herramientas que permitirán al gerente establecer un curso de acción determinado, puede pensarse que debe depender directamente de la dirección general, pues solo de esta forma podrán, sin duda alguna, ser consideradas sus sugerencias. Sin embargo, bajo esta conceptualización, el aspecto jerárquico rompe con los canones establecidos en lo referente a los niveles de responsabilidad. Análogamente, si se consideran diferentes grupos bajo cada departamento, ocurrirá con frecuencia tanto una duplicidad de actividades como una optimización aislada de interéses que probablemente se encuentren en contraposición, es decir, una suboptimización del sistema. Si dentro de la empresa existe un departamento de cómputo, entonces la mejor opción será ubicarlo dentro de este; lo cual se debe a la intensa relación que tal grupo tendrá con las computadoras. Algunos autores se inclinan favorablemente en relación a este último aspecto pues indican que ha dado buenos resultados, otra idea podría ser el consolidar una subgerencia técnica.

Un equipo de Investigación de Operaciones, de acuerdo a su trabajo, debe estar formado por:

- Al menos un investigador con experiencia y conocimiento profundo de las técnicas de la Investigación de Operaciones y su aplicación en la toma de decisiones.

- Uno o más ingenieros o licenciados en computación, para que puedan implantarse o manipularse diferentes técnicas en una computadora.

- Al menos una persona no técnica bien capacitada en los aspectos administrativos de la empresa y con un conocimiento profundo de su problemática.

- Al menos una persona involucrada con el área de trabajo sobre la que se está realizando el proyecto y que este en posibilidad de transmitir la situación real de esta.

Este departamento puede constituirse: con personal interno capacitado, personal reclutado del exterior o una combinación de ambos.

El Departamento de Investigación de Operaciones en una empresa, deberá establecer los lapsos de operación de los estudios que practique ya sean a corto, mediano y largo plazos, así como los objetivos que perseguirá de acuerdo a los particulares de la empresa. Una vez que domine el panorama, deberá comenzar con el estudio de las mejoras que se requieren cuidando los efectos a futuro. Asimismo y bajo un orden disciplinado, deberán programarse las actividades, concentrándose en primer término, en aquellas que se relacionen con los problemas en los que es necesaria una solución inmediata y para los que en algunos casos la suboptimización es la mejor respuesta.

Cuando la empresa haya asimilado los beneficios que le proporciona este departamento, y una vez que la metodología utilizada haya sido comprendida, será cuando posiblemente se le permita la responsabilidad de programar acciones futuras, con un mayor sentido de responsabilidad, pues estas por lo regular tenderán a ser aceptadas de antemano. Es importante notar que el staff es un organismo sin poder alguno, es decir, no posee otra manera de manifestarse que el de la vía de la persuasión, aunque su voz es importante, carece de voto.

En el desempeño de sus actividades, el Departamento de Investigación de Operaciones debe concientizarse de ciertas consideraciones adicionales, que le permitirán asegurar, en gran parte, el éxito que se espera obtener mediante una elección adecuada de los cursos de acción que recomiende.

Solucionar un Problema más que Aplicar Técnicas:

Es muy usual que antes de formular un modelo, se trate de determinar la técnica a emplear en su resolución. Esto conduce a "cocinar" los datos para que se ajusten a la técnica que se va a emplear, olvidándose si es o no la más apropiada. Hay que tener presente que el primer paso consiste en formular el modelo, hecho lo cual, se procederá a encontrar alguna técnica adecuada para determinar la solución; en situaciones extremas, habrá que recurrir a la construcción de alguna, más que el camino opuesto. De aquí que los métodos sean considerados como factores secundarios.

Adecuada Selección de Proyectos:

Los proyectos de Investigación de Operaciones son relativamente costosos, por lo que resulta importante priorizar las necesidades de una empresa para satisfacer a las consideradas como más importantes, ya sea por la ganancia que producen o la trascendencia que tienen en el tiempo. Los proyectos que se seleccionen, deben ser aquellos en los que sea posible aplicar un estudio cuantitativo, con un gran número de variables controlables y uno reducido de no controlables. Otros candidatos, serán aquellos para los que la solución que se obtenga, a partir de la aplicación de alguna técnica, sea más real y económica.

Organización y Comunicación:

El éxito de un proyecto depende, en gran medida, de la organización y comunicación que tanto la empresa como su equipo asesor logren establecer y de la eficiencia profesional de ambos. El grupo de Investigación de Operaciones debe "vender" sus ideas a los empresarios, para que lleven a cabo la implantación de sus propuestas. Esta labor requiere familiarizar a los decisores con el uso de modelos y sus técnicas de resolución.

Una inadecuada organización puede conducir a fracasos, al ocasionar que los canales de comunicación en el sistema funcionen muy por debajo del nivel deseable, un flujo irregular de información provocará un entendimiento muy pobre en las instrucciones y por ende un desempeño dudoso en estas. Comunmente los empresarios que no llegan a comprender un modelo perjudican el trabajo, al obstruir los canales de comunicación pues, por lo general, se oponen a los cambios surgidos y, sin embargo, confían en gran medida en su intuición.

Obtención de Información Confiable:

Uno de los factores que más costo y tiempo consumen es la obtención de información confiable. Todo estudio requiere ser alimentado por al menos una fuente externa (libros, testimonios, escritos, crónicas, tabulados, etc.). En particular, los modelos a estudiar requieren de datos numéricos denominados parámetros, por ejemplo: el número de obreros que se requieren para producir un determinado bien, o el tiempo que emplean en la elaboración de una pieza. Por lo regular, los parámetros empleados en los modelos varían con bastante frecuencia, aun más, en la mayoría de los casos son desconocidos por lo que resulta necesario estimarlos. Esto puede llevarse a cabo de diversas formas: con base en experiencias pasadas, mediante la aplicación de algún método estadístico, etc.. Todos aquellos que se consideren "irrelevantes" deberán excluirse a fin de disminuir los costos, por ejemplo, si se trata de estimar la composición de un bien, resulta inecesario obtener información relativa a la de otro tipo de bienes que no sean objeto de estudio.

REFERENCIAS:

[1], [22], [44], [49], [50], [56], [73], [80] y [83] Capitulo 1.
[10] Parte 1.
[15] Pags. 1-15.
[20] Capítulo 9.
[36]
[39] Pags. 8-18.
[52] Capítulos 3 al 6.
[58] Pags. 19-37.
[60] Capítulos 1, 2 y 12.
[78] Capítulos 1, 2 y 18.

PREGUNTAS:

1. Defina con sus propias palabras los siguientes términos:
   a) Optimización.
   b) Suboptimización.
   c) Sobreoptimización.

2. Cuáles son las características esenciales de la Investigación de Operaciones? Explique.

3. Indique diferentes areas en el sector público, donde crea que la Investigación de Operaciones puede ser aplicada.

4. Mencione ventajas del metodo científico. Tiene alguna desventaja este método?.

5. Describa brevemente el desarrollo de las diferentes corrientes del pensamiento administrativo.

6. Explique brevemente lo que entiende por los siguientes conceptos:
   a) Problema Real.
   b) Sistema.
   c) Modelo.

7. Indique algunas ventajas y desventajas del uso de la Investigación de Operaciones en la resolución de problemas.

8. Cree que en la realidad exista un verdadero nivel de operación óptimo? Explique.

9. Bajo que condiciones la Investigación de Operaciones puede no dar cursos de acción óptimos.

10. Investigue e indique lugares o referencias de problemas que han sido resueltos a través de alguna técnica de Investigación de Operaciones en México.

11. Dé sus conclusiones sobre el tema.

TEMA 2: MODELOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES.

"Cuando puedas medir lo que hables y lo expreses con números sabrás lo que estás platicando. Pero cuando no puedas hacerlo, tu conocimiento será muy pobre e insatisfactorio."

LORD KELVIN.

2.1 Introducción

La Investigación de Operaciones es una de las herramientas de la ciencia administrativa, compuesta de técnicas flexibles y poderosas diseñadas para ayudar al tomador de decisiones. Su complejidad matemática, ha provocado que el inexperto no la aplique correctamente. Es recomendable que el profesional carente de los conocimientos matemáticos, dirija su atención a la aplicación de modelos más que a la teoría. Por lo que en vez de enfocarse al desarrollo teórico de algoritmos, puede resultar más relevante concentrarse en aspectos relacionados con la formulación de modelos apropiados, así como el subsecuente análisis de implicaciones económicas y administrativas de sus resultados.

En general, los problemas a los que el tomador de decisiones tiene que enfrentarse van más allá de la simple búsqueda de respuestas a preguntas concretas, ya que casi nunca existe una sola acertada; la habilidad para determinar el curso de acción adecuado solo puede ser obtenida a partir de la experiencia profesional.

La formulación del modelo es una etapa fundamental, preliminar a la aplicación de una técnica de resolución, que conducirá a la elección de una decisión. En el presente tema, se exponen los conceptos más relevantes de los modelos, haciendo énfasis en los que serán objeto de un estudio subsecuente más profundo.

2.2 La Importancia de la Toma de Decisiones

Es imposible concebir a un individuo que en su vida no haya tomado alguna determinación o camino a seguir, frente a una serie de opciones que haya tenido, es decir, la toma de alguna decisión. Lo anterior, de igual forma, puede aplicarse al gerente de una empresa, en relación con la toma de alguno de los diferentes cursos de acción que se le presentan con respecto a esta.

"Muchos individuos piensan que la toma de decisiones es la esencia de la administración", apunta Robert M. Fulmer [20], "pues dejar de decidir, es dirigir en ausencia".

Suponga que el gerente de una empresa solicita asesoria, para emprender la construcción de una nueva planta de producción en un estado del país. En este caso, sería un gran error considerar como objetivo único el construir o no, ya que detrás de un proyecto existe, por lo regular, una gran variedad de alternativas por descubrir. Es imprescidible hacer particular el problema que se plantea y contestar a posibles preguntas como:

1. Qué es lo correcto?,

2. Qué es lo que puede ir mal?,

3. Qué aspectos se encuentran bajo el control del decisor?,

4. Qué factores caen fuera de su control?,

5. Qué acciones preventivas pueden tomarse ante cualquier contingencia?,

6. Qué alternativas pueden resultar de interes?, etc.

Las respuestas a estas y otras preguntas pueden permitir obtener sistematicamente los hechos para tomar una determinación, la búsqueda de una serie de cuestionamientos concretos, es básico para la solución de problemas o situaciones en los que es necesario tomar algún curso de acción. Es recomendable llevar a cabo la aplicación del método científico con la finalidad de facilitar el análisis de las decisiones.

Existen diversas formas bajo las que puede clasificarse la toma de decisiones; en particular, se presenta la siguiente:

- Decisiones Bajo Certeza: En algunas ocasiones resulta conveniente suponer que se dispone de información completa y veráz para el análisis de las decisiones. En términos del modelo, esto implica la ocurrencia de un solo resultado (con probabilidad de ocurrencia igual a uno).

- Decisiones Bajo Riesgo: Un problema en el que se puedan considerar diversos resultados bajo una determinada probabilidad, puede catalogarse como "decisión bajo riesgo". La ruleta es un ejemplo típico.

- Decisiones Bajo Incertidumbre: Una situación para la que existen diversos resultados, todos y cada uno con probabilidades de ocurrencia desconocidos, puede denominarse como "decisión bajo incertidumbre".

En el desarrollo subsecuente, se concentrará la atención sobre las del primer tipo. Muchas de las decisiones que se toman en áreas como: Economía, Ingeniería, Psicología e Investigación de Operaciones, se han basado en supuestos bajo certeza. Morris [48] propone las siguientes justificaciones al respecto:

1. El riesgo involucrado en una decisión puede ser considerado tan peque&o, que el investigador no debe preocuparse al omitirlo.

2. El riesgo puede estar involucrado de una manera significativa en la toma de alguna decisión, sin embargo, la dificultad o el costo que representa su inclusión en el análisis puede provocar su omisión durante dicho proceso, incluyendolo una vez que este concluya.

3. La decisión puede ser tal que, aún incluyendo el riesgo en forma explícita, el resultado dependa exclusivamente de otros factores. Por ejemplo, si el costo estimado de una máquina después de algunos a&os se desconoce, puede determinarse mediante el uso de promedios de venta anteriores.

Naturalmente, estas deben tomarse con precaución, siempre que sean utilizadas por alguna razón en un proyecto.

2.3 El Uso de los Modelos

Existen diversas formas en las que una decisión puede ser tomada bajo determinadas circunstancias (después de haber analizado un problema), una de ellas consiste en el uso o aplicación de un **MODELO**.

Como ya fue indicado, un modelo es una abstracción o simplificación de la realidad. Para comprender más claramente el objetivo que se persigue mediante su aplicación, se discutirán los siguientes casos:

Caso 1. Imagine a una ama de casa tratando de determinar una dieta alimenticia bien balanceada para su familia.

Caso 2. Suponga a un grupo de ingenieros en aviación tratando de fijar las dimensiones y forma apropiadas para las alas de un nuevo aeroplano que han dise&ado.

Caso 3. Piense en un empresario tratando de encontrar un lugar viable, económicamente hablando, para la construcción de una nueva fábrica.

Para cada uno de los casos antes expuestos, una vez identificado el problema, puede fijarse la dinámica mas apropiada a seguir en la toma de una decisión.

En primer término, será necesario establecer las metas que se persiguen así como su categorización, por ejemplo: el ama de casa puede lograr su objetivo a través de la apariencia saludable con la que su familia luzca despues de haber estado bajo una dieta propuesta durante algún tiempo; el grupo de ingenieros al comprobar que el avión puede volar sin mayor problema; y en el caso del empresario al recibir los reportes financieros de su nueva sucursal indicando buenos niveles de producción; es decir, es necesario establecer una medida que permita comprobar el logro de los objetivos fijados, esta puede ser de tipo cualitativo -como por ejemplo, el aspecto saludable- o cuantitativo -como el monto de los ingresos monetarios recibidos- por citar algunos. Lo recomendable en la mayoría de los casos, es contar con medidas del segundo tipo, ya que eliminan en cierto grado la subjetividad. Casi siempre es posible cuantificar o establecer medidas de cuantificación a partir de cualidades; para el ama de casa el aspecto saludable puede medirse en relación al nivel vitáminico y proteínico de los alimentos. Para el grupo de ingenieros, qué medida podría adoptarse?.

En segundo término, se procederá a enumerar aquellos factores o variables que, de alguna manera, intervienen en el problema y cuyos niveles de operación se requiere determinar. Esta actividad aunque debiera ser siempre exhaustiva, no lo es, debido a la infinita gama de posibilidades que en un momento se presentan. Por consiguiente, lo deseable es contar con una lista con los factores "más relevantes", y de estos, identificar aquellos que bajo ciertas circunstancias pueden ser controlables, de los que no lo son, especificando sus características, es decir, si son de tipo cualitativo o cuantitativo.

Es importante apreciar la serie de simplificaciones realizadas hasta este punto, derivadas del establecimiento de objetivos probablemente restringidos en número así como la omisión involuntaria de ciertos factores.

Enseguida deberán identificarse y representarse las relaciones existentes entre cada uno de los factores enlistados, mediante la elección de al menos una de las siguientes alternativas:

- A través de la experimentación física. La cual consiste en simular a escala una determinada situación. Por ejemplo, para el caso de los ingenieros construyendo modelos de aviones a escala con las mismas características de uno real, y con los diferentes tipos de alas, para sujetarlos a pruebas en túneles de viento, comprobando su efectividad en cada caso. Esta aplicación tiene grandes ventajas como: su reducido grado de abstracción y su fácil comprensibilidad. Sin embargo, entre las desventajas, pueden mencionarse las correspondientes: a su elevado costo, a cierta perdida de exactitud con respecto a la realidad, y al reducido campo de posibilidades que puede evaluarse.

- A partir de la experimentación analógica. En la que se busca establecer comparaciones entre el sistema que se desea estudiar y otro muy similar más simplificado. Como ejemplo, imagine la analogía que existe entre las relaciones internas, para el caso de la empresa, y aquellas que en una computadora se manejan. Así, los microcircuitos de esta podrían ser paralelos a las instalaciones y a los procesos del Departamento de Mercadotecnia, de tal forma que mediante la variación de las entradas y salidas eléctricas esta se asemeje a la actividad de un sistema de mercadotecnia. Con base en lo anterior, puede apreciarse una reducción en lo referente al costo de esta opción, así como un mayor nivel en el control del proyecto; su principal limitante, sin embargo, consiste en la dificultad que representa el establecimiento de analogías así como el incremento en el grado de abstracción. Asimismo, no hay que olvidar que el experimento se lleva a cabo bajo situaciones idealizadas.

- Mediante la aplicación de la experimentación simbólica. Esta consiste en llevar a cabo una representación a través de símbolos de algunas de las relaciones existentes en un sistema. Para el empresario podrían simularse matemáticamente ciertas interrelaciones existentes en su nueva sucursal, por ejemplo: niveles de inventario, de producción, de mano de obra, etc. Esta alternativa es rápida y barata en su realización (gracias en gran parte al uso de una computadora), además es concisa, precisa, y permite evaluar una infinidad de alternativas; desafortunadamente sus símbolos no son tan sencillos de manipular ni de comprender además de que presentan un alto grado de simplificación y abstracción.

Una vez que una ruta de acción ha sido trazada, lo siguiente será eliminar aquellos factores que, aunque relevantes, no sean posibles de caracterizar bajo el camino seleccionado, en su caso, lo más recomendable será captar su efecto a través de otros elementos cuantificables. La actividad anterior, como podrá imaginarse, constituirá una lista de supuestos y simplificaciones que habrá que indicar; esto representa un aspecto de gran importancia pues en la implantación de los resultados obtenidos será necesario considerar tales puntos, que en última instancia pueden hacer cambiar radicalmente los niveles de respuesta. Así, el problema del ama de casa puede resolverse a través de una dieta fija o una que cambie constantemente durante el tiempo; por su parte, en el caso del empresario, considerando aspectos competitivos de acuerdo a la presencia de otras compañías rivales; o en el de los ingenieros incluyendo o no aspectos azarosos. Todo esto ayudará, en gran medida, a configurar las características del método a emplear en la resolución del modelo; cualquier consideración relevante que sea pasada por alto puede provocar resultados no previstos o incongruentes.

Para obtener una solución a partir del modelo, es necesario configurar los parámetros y constantes que servirán para alimentarlo. Esto requiere recolectar información, que en la mayoría de los casos no se dispone, en algunas circunstancias, habrá que realizar estimaciones. Por ejemplo, el ama de casa tratará de determinar el contenido de cada uno de los productos que pueden integrar la dieta alimenticia de su familia, mediante la consulta de un doctor; el empresario buscará analizar su propuesta, con base en un estudio de mercado; y los ingenieros a través de experiencias pasadas. El costo en el que se incurra deberá añadirse al del proyecto.

La selección de un procedimiento para la generación de resultados requiere, por parte del grupo a cargo del proyecto, de un dominio general de los ya existentes para que de esta forma, este en posibilidad de decidir si es factible la aplicación de alguna técnica o en caso extremo generarla.

Una vez obtenidos los resultados, deberá evaluarse su calidad, para lo cual se requiere un alto conocimiento del problema en cuestión, es decir, hay que procurar contrastarlos con situaciones análogas ya probadas, para determinar la "congruencia" o no de los mismos. Este proceso evaluativo aunque se avoca en gran parte a los resultados, pretende calificar la efectividad de la formulación del problema. En este punto, es recomendable "jugar" con la solución, simulando diferentes situaciones que permitiran comprobar la versatilidad de la representación del problema real. En ocasiones puede resultar necesario regresar al principio, pues con cierta frecuencia ocurre que los objetivos no han sido correctamente formulados, o se ha incurrido en algunas omisiones.

Finalmente, las soluciones deberán presentarse junto con un análisis, para que una decisión sea tomada. La implantación de esta requerirá de un amplio sentido común por parte de la persona que lo haga, pues hay que recordar que los resultados no son más que una abstracción idealizada de la realidad.

Todo lo expuesto hasta este punto, se conoce como proceso de modelaje, ya que todo gira en torno a un modelo. En este proceso pueden identificarse nueve etapas fundamentales:

1era. Detectar y formular por escrito el objetivo del usuario.

2da. Seleccionar las variables más significativas, de tal forma que el modelo sea lo más simple. Asimismo, distinguir a aquellas que son controlables por el usuario.

3era. Determinar las constantes, parámetros y variables relacionados. Definirlos por escrito y posteriormente introducir elementos que representen a cada uno de ellos.

4ta. Establecer las relaciones entre las variables, basándose en principios conocidos, intuición y reflexión. Realizar suposiciones o predicciones relativas al comportamiento de las variables no controlables.

5ta. Construir el modelo mediante la combinación de todas las relaciones que se presentan en el sistema.

6ta. Recolectar información.

7ma. Derivar soluciones.

8va. Validar la formulación, mediante el uso de predicciones y verificando los niveles de respuesta en comparación con experiencias pasadas.

9na. Revisar el modelo tantas veces como sea necesario.

El modelo, como puede apreciarse, juega un papel determinante en la solución de un problema, pues este es el nivel de simplificación de la realidad que se puede estudiar.

Una reflexión del esquema antes expuesto, puede conducir a la conclusión de que este no es más que un modelo del proceso de modelaje, ya que el verdadero no necesariamente tiene que ser idéntico al sugerido. A pesar de esto, lo anterior ha resultado tener gran utilidad en la mayoría de los casos, pues es de esperarse que el verdadero proceso, siga una secuencia como la descrita, esto es, todos los pasos de hecho se dan.

2.4 Una Clasificación Particular de los Modelos

Con el objeto de determinar la solución de diferentes tipos de modelos, se ha desarrollado un conjunto de técnicas con diversas aplicaciones. La Investigación de Operaciones está comprendida en el grupo del tipo matemático, fuente del presente estudio.

Los modelos han sido divididos en diferentes categorías, dependiendo de su configuración. Al respecto, cabe mencionar que existe una gran variedad de clasificaciones, en particular, se cita la siguiente:

Clase I. Según su función:

- Descriptivo. Los modelos descriptivos proporcionan un panorama de la situación y no permiten predecir, o recomendar cursos de acción.

- Predictivo. Los modelos predictivos involucran variables tanto dependientes como independientes, y permiten responder a preguntas del tipo: "qué pasaría si".

- Normativo. Los modelos normativos son aquellos que proporcionan la "mejor" respuesta a un problema. Sugieren cursos de acción.

Clase II. Según su estructura:

- Icónico o Físico. Los modelos icónicos presentan ciertas características físicas de los objetos que representan.

- Analógico. Los modelos analógicos son aquellos para los que existe una sustitución de componentes o procesos paralelos a lo que esta siendo representado.

- Simbólico o Matemático. Los modelos simbólicos utilizan representaciones abstractas para describir la realidad.

Clase III. Según su referencia con respecto al tiempo:

- Estático. Los modelos estáticos no consideran cambios en el tiempo.

- Dinámico. Los modelos dinámicos son aquellos en los que el tiempo es una variable independiente.

Clase IV. Según su referencia con respecto a la incertidumbre:

- Determinístico. Los modelos determinísticos son aquellos para los que dada una serie de valores, existe un resultado único.

- Probabilístico. Los modelos probabilísticos involucran distribuciones de probabilidad, en los que dada una serie de valores existen diferentes resultados con probabilidades conocidas.

- Con Riesgo. Los modelos con riesgo a diferencia de los probabilísticos involucran probabilidades desconocidas.

- De Juego. Los modelos de juego involucran estrategias o cursos de acción a seguir por una serie de elementos denominados participantes.

2.4.1 Tipos de Modelos a Estudiar:

Los modelos de Investigación de Operaciones pueden clasificarse de acuerdo a sus características y a su estructura o forma. Cada clase representa una categoría a la que los investigadores ha hecho importantes contribuciones en las últimas décadas. En particular, en el subsecuente desarrollo se expondrán los siguientes tipos de modelos:

Modelos de Distribución

En los problemas reales existe una disponibilidad limitada en lo que respecta a los recursos materiales a utilizar. Ante esto, surge la necesidad de planear la mejor manera de emplearlos, combinando las actividades y los recursos, de tal forma que su eficiencia sea optimizada. Este tipo de modelos se conoce bajo el nombre de "Programación Matemática", en particular, cuando son expresados a través de ecuaciones lineales, se conoce como "Programación Lineal".

Modelos de Asignación

Casos especiales de los modelos anteriores son los de asignación y de transporte; los primeros tienen la finalidad de determinar la mejor asignación de una serie de recursos (hombres) a una serie de trabajos (máquinas); en el segundo, se busca encontrar la mejor opción en la distribución de recursos que provienen de lugares fuente y son enviados a destinos fijos. La razón de una clasificación extra, radica en la estructura matemática que poseen estos modelos.

Modelos de Secuenciación

Estos modelos estan relacionados con la determinación óptima de la ocurrencia de una serie de eventos o trabajos en un orden determinado. Algunos de los procedimientos que la integran son: Flujo de Redes, PERT (Técnica de Evaluación y Revisión de Proyectos), CPM (Ruta Crítica). Estas técnicas han sido aplicadas y desarrolladas en proyectos de construcción, planeación de nuevos productos y otras áreas similares.

Modelos de Inventario

Estos modelos buscan responder a dos preguntas básicas en la toma de decisiones de una empresa: que cantidad de determinado material se debe ordenar en un período y cuándo debe llevarse a cabo esto con el fin de minimizar el costo total. Dentro de este campo, existen diferentes tecnicas que proporcionan respuesta a estas y otras preguntas, dependiendo de la sofisticación que se emplee.

REFERENCIAS:

[1] Capítulos 2 y 3.
[6] y [69] Capítulo 1.
[8] Pags. 1-18.
[14] Pags. 7-11.
[22] y [39] Capítulo 2.
[24]
[42]
[47] Capitulos 13 al 15.
[58] Pags. 37-54.

PREGUNTAS:

1. Dé una clasificación de los diferentes tipos de modelos que conozca.

2. Mencione y describa brevemente los modelos matemáticos básicos.

3. a) Cuáles son los pasos básicos en la construcción de un modelo?.
   b) Cuál es su relación con el mundo real?.
   c) Cómo puede distinguirse el objetivo de un modelo?.

4. Cuáles son las ventajas y desventajas del uso de modelos matemáticos?.

5. Clasifique de acuerdo a su categoría a los siguientes modelos:
   a) Un globo terráqueo.
   b) La descripción de un trabajo.
   c) Un simulador de manejo.
   d) Una ecuación.
   e) Un organigrama.

6. Proponga situaciones familiares o cotidianas e indique una manera en la que podrían ser representadas a través de algún modelo. Desarrolle supuestos simplificadores y vaya eliminándolos, establezca hasta que punto cree que su modelo representa a la realidad.

TEMA 3: FORMULACION DE MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL.

> "Cómo puede ser que las matemáticas, que son después de todo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapten tan admirablemente a los objetos de la realidad?."
>
> **ALBERT EINSTEIN.**

3.1 Introducción

La finalidad del presente tema es mostrar al lector los múltiples campos en los que la Programación Lineal es aplicable. El uso o no de los modelos lineales depende en gran medida de la visión que el investigador desee establecer de una situación real, es decir, de su manera subjetiva de interpretar los problemas.

La Programación Lineal tuvo sus orígenes en los modelos de insumo-producto desarrollados por el economista W. W. Leontief. A partir de esto, diversas aplicaciones fueron hechas sobre problemas que hoy se consideran como clásicos, entre los que pueden citarse: el de la "dieta", desarrollado por Stigler, el de "transporte" estudiado por Hitchcock y Koopmans, la "teoría de juegos" investigada por von Neumann y Morgenstern entre otras. En el año de 1947 el Dr. George D. Dantzig, introduce el "método simplex" que es una de las herramientas más poderosas en la resolución eficiente de modelos lineales, dando origen así a la técnica que ahora nos ocupa.

Aunque el método simplex ha demostrado ser bastante eficiente en la resolución de sistemas lineales, existen otras técnicas que, dependiendo de la estructura particular del modelo, pueden emplearse más eficientemente en su resolución.

A pesar de que las aplicaciones iniciales de la Programación Lineal se enfocaron a la resolución de situaciones intimamente involucradas con estrategias de guerra, Dantzig indicó que esta podría ser extensamente aplicada en los negocios, como es evidente hoy en día.

Desde un punto de vista abstracto, es una técnica matemática que permite obtener una solución óptima de un sistema de ecuaciones. Tal aproximación no proporciona una idea clara de cómo puede ser aplicada en los negocios. Imagine a una empresa integrada por los siguientes recursos escasos: dinero, hombres, máquinas y materia prima. Con base en estos, es lógico pensar que el empresario a su cargo buscará asignarlos de manera que obtenga la máxima ganancia. Si este pudiera llegar a establecer un modelo matemático que involucrara a los recursos (disponibilidades) antes mencionados, así como a los factores controlables (variables), cuyo nivel quisiera determinar y para los que ciertas relaciones lineales (restricciones) tuvieran que cumplirse para lograr el objetivo deseado (función objetivo), estaría en posibilidad de aplicar el método simplex en la resolución del problema.

En este tema, se presentan los aspectos y consideraciones esenciales en la formulación de los Modelos de Programación Lineal, con lo cual se pretende mostrar al lector tanto sus ventajas como sus limitaciones.

3.2 Casos de Estudio

Los casos que se presentan a continuación, persiguen básicamente dos objetivos de gran importancia hasta este punto: primero, mostrar la gran versatilidad de la Programación Lineal en la formulación de problemas a través de modelos lineales; y segundo, desarrollar la capacidad creativa del lector en la formulación de diversos tipos de problemas. Se recomienda intentar dar una formulación al problema antes de consultar la que se propone, hecho lo cual procederá a comparar ambas tratando de dar explicaciones adecuadas a cada una de las discrepancias que se detecten. La técnica de resolución así como la obtención e interpretación de los resultados serán discutidos en el siguiente tema.

3.2.1 CASO 1: Planeación de la Producción en la Compa&ía Ahedo.

La Compa&ía Ahedo fabrica diferentes artículos de piel que van desde cinturones hasta chamarras de varios tipos y calidades. Recientemente el director de la empresa acordó con su mesa de ejecutivos, la aprobación de dos modelos de cinturones que saldrán al mercado durante la próxima temporada de verano.

El ejecutivo de mercadotecnia comentó durante la reunión, que los modelos que actualmente se producen no habían registrado la demanda que se había planeado originalmente, debido a que el dise&o era demasiado conservador, por lo que el mercado de los nuevos modelos debería estar dirigido básicamente a la gente joven.

Las propuestas que se hicieron para el dise&o de los dos modelos comprendieron los siguientes requisitos:

Ambos tipos de cinturon deben poseer modelos diferentes de hebillas:

- El más caro tendrá una que pueda ser girada sobre un eje, debido a que el cinturón será reversible.

- El económico tendrá una hebilla sencilla.

Asimismo, se apuntó que el cinturón de lujo consumirá el doble de tiempo en comparación con el económico, debido a que los detalles para su fabricación son más elaborados. El ejecutivo de producción comentó al respecto, que este último era muy similar a uno en la línea de producción actual, por lo que estimaba que si todo el tiempo planeado para la elaboración de ambos tipos de cinturones se concentraba en la fabricación de este, podría tenerse un nivel hasta de 1,000 cinturones económicos diarios. Además indicó que la compañía proveedora de piel está en posibilidades de proporcionarle únicamente una cantidad suficiente para que puedan producirse a lo más 800 cinturones de ambos tipos.

Las hebillas están restringidas en número a un nivel diario de 400 para el cinturón de lujo y 700 para el económico. Los costos de producción para cada uno de los modelos de cinturones son: $1,300 y $1,000 respectivamente.

Una vez bosquejado el panorama de la compañía el empresario preguntó: cuántos cinturones de cada tipo deben fabricarse con el objeto de que la compañía haga un uso óptimo de sus recursos?.

Formulación del Problema:

Como podrá advertirse, el problema anterior puede ser facilmente expresado en términos de un Modelo de Programación Lineal, ya que las relaciones guardan características del tipo lineal lo cual, en general, no siempre se cumple (basta analizar más a detalle el proceso productivo). Aun más, pueden existir aspectos relevantes que serán omitidos implícitamente, tales como:

1. Habilidad de los obreros en el proceso de producción,
2. Número de obreros a utilizar,
3. Niveles de inventario,
4. Uso de la maquinaria, etc.

La exclusión de estos factores, deberá considerarse en la conformación del marco de referencia del problema. De igual forma, otra simplificación adicional necesaria, es el suponer que los niveles de los parámetros se mantendrán constantes en el proceso productivo, aunque este vaya a ser proyectado sobre un cierto período de tiempo. Naturalmente esto no ocurre en la realidad, ya que existe una infinidad de contingencias que pueden llegar a provocar severos cambios en los parámetros, ocasionando inclusive importantes desviaciones en relación a las estrategias que se proyecten, por ejemplo: huelgas, fallo de las máquinas, deserción de trabajadores, etc.

Generalmente los costos no son lineales, sin embargo, en la mayoría de los casos pueden ser usadas aproximaciones lineales en forma satisfactoria. No obstante, se han desarrollado métodos para mejorar la exactitud de un modelo lineal frente a comportamientos curvilineos, lo cual se conoce como "Programación Separable" ("Separable Programming" o "Piecewise Linear Approximations").

En caso de que se dispusiera de una nueva planta de empleados, habría que considerar su habilidad en comparación con la de los obreros experimentados, aun más, si a estos se les sujetara a un proceso de capacitación, sería necesario considerar "curvas de aprendizaje" para estimar la capacidad y los tiempos de producción de una manera más efectiva.

En las formulaciones estándar de los Modelos de Programación Lineal, los efectos de las decisiones tomadas por otras compañías no son reconocidos. No es difícil encontrar una justificación para este tipo de simplificación, pues basta pensar en las dimensiones que tendría el modelo tan solo al considerar algunos de los posibles cursos de acción que una compañía rival pudiera tomar.

Con base en el marco de referencia bosquejado, pueden establecerse los supuestos primordiales a los que el modelo estará sujeto:

1ero. Será normativo, pues perseguirá un fin específico.

2do. Será determinístico, es decir, no considerará factores aleatorios.

3ero. Será estático, ya que no considerará al factor tiempo.

4to. Será lineal, es decir sus restricciones tendrán variables elevadas a un exponente no superior al unitario.

Obtención de Información:

Hay que destacar que para este problema, se cuenta con la información relativa a los parámetros, por lo que su formulación irá íntisamente ligada a la construcción del modelo. No obstante, esta tarea es una de las que más tiempo, dinero y esfuerzo consumen, por lo que únicamente deben considerarse los parámetros a emplear, esto ayudará a no incurrir en gastos adicionales para la obtención de datos que pueden no tener valor alguno para el estudio.

En el proceso de búsqueda, deben consultarse siempre las fuentes responsables, por ejemplo:

1. La demanda esperada puede estimarse con base en experiencias anteriores del Departamento de Ventas.

2. La capacidad de producción puede obtenerse por el Jefe del Departamento de Manufactura, mediante el cálculo estimado de horas de producción por cada pieza del equipo.

3. Los tiempos de producción pueden ser proporcionados por el Jefe del Departamento de Producción, con base en estudios de tiempos y movimientos que se hayan practicado con anterioridad.

4. Los costos de producción pueden ser aportados por el Departamento de Contabilidad en colaboración con el de Manufactura, de acuerdo al uso de los recursos.

Hecho lo anterior podrá procederse a construir el Modelo de Programación Lineal.

Construcción del Modelo:

Factores Controlables o Variables de Decisión:

Debido a que se desean determinar los niveles de producción para cada uno de los tipos de cinturones, los factores controlables del modelo se definirán como:

CLUJO que representa el número de cinturones de lujo a producir.

CECON que representa el número de cinturones económicos a producir.

Función Objetivo:

La formulación de la función objetivo está íntimamente ligada con los interéses que persigue el usuario, ya sea la maximización de las ganancias o la minimización de los costos de producción. Se seleccionará la última opción con el objeto de apreciar más adelante sus implicaciones.

Cada unidad de los cinturones de lujo y económico involucran un egreso de $1,300 y $1,000 respectivamente. Si se elaboran CLUJO y CECON unidades de cada uno de ellos el costo total en el que se incurre con tal nivel de producción es:

$$1,300\ CLUJO + 1,000\ CECON \quad \text{(unidades pesos)}$$

que la empresa buscará minimizar:

$$\text{Minimizar } z = 1,300CLUJO + 1,000CECON$$

donde:

z es el monto del costo total.

Restricciones:

Las restricciones están en función de las disponibilidades de los recursos, de esta forma se tendrán las siguientes:

Restricción de Limitación de Tiempo:

Por cada cinturón de lujo la compañía puede fabricar dos del tipo económico, es decir, la producción de CLUJO cinturones es equivalente en tiempo a 2CLUJO unidades de la del tipo CECON. Por lo que:

$$2CLUJO + CECON$$

representará la capacidad de producción empleada con respecto al tiempo. Este valor no deberá exceder a la actual disponibilidad de producción, estimada en 1,000 cinturones de lujo, es decir:

$$2CLUJO + CECON <= 1,000 \quad \text{(unidades cinturones)}$$

donde el símbolo "<=" representa el concepto: menor o igual.

Restricción de Disponibilidad de Piel:

Debido a que la capacidad de producción disponible para los nuevos tipos de cinturones es de 800 unidades, el número total que se fabrique de ambos no deberá exceder a la cifra antes indicada. Así, se tendrá que:

CLUJO + CECON <= 800 (unidades cinturones)

representará la disponibilidad del recurso piel.

Restricciones de Hebillas:

El número de cinturones a fabricar de cada tipo no debe sobrepasar al de hebillas disponibles:

Cinturón de Lujo: CLUJO <= 400 (unidades hebillas)

Cinturón Económico: CECON <= 700 (unidades hebillas)

Condiciones de No Negatividad:

Es claro que CLUJO y CECON no podrán ser operadas a niveles negativos por carecer de sentido, es decir, nunca será posible tener una producción de menos veinte cinturones de lujo o menos cinco cinturones económicos, por lo que es necesario agregar ciertas condiciones que reciben el nombre de no negatividad, para cada una de las variables en el modelo.

Cinturón de Lujo: CLUJO => 0 (unidades cinturones)

Cinturón Económico: CECON => 0 (unidades cinturones)

el símbolo "=>" representa el concepto: mayor o igual que.

Condiciones de Integralidad:

Este problema debe contar además con restricciones denominadas de "integralidad", las cuales deberán restringir a las variables para que asuman valores enteros.

CLUJO y CECON variables de tipo entero.

El problema antes formulado se muestra en el cuadro 1, por sencillez, se han omitido las condiciones de integralidad.

CUADRO 1: Formulación del Problema de Producción de la Compañía Ahedo.

RESTRICCION	NUMERO DE CINTURONES DE LUJO CLUJO	NUMERO DE CINTURONES ECONOMICOS CECON		DISPONIBILIDAD
Objetivo	1,300	1,000		Minimizar
Tiempo	2	1	<=	1,000
Piel	1	1	<=	800
Hebilla Lujo	1		<=	400
Hebilla Econ		1	<=	700
No Negativ.	1		=>	0
No Negativ.		1	=>	0

La fase de formulación de un problema es crucial para la obtención de buenos criterios de selección en la toma de decisiones. Aunque el investigador realiza una buena parte del trabajo, el estudio debe ser producto de un esfuerzo conjunto entre este (o un grupo interdisciplinario) y el ususario. Si el problema es difícil de definir, o si el investigador no pudiera expresarlo en términos cuantitativos, esta tarea puede convertirse en una actividad más tardada. Una vez que ambas partes hayan llegado a un acuerdo en relación con alguna formulación, podrá proseguirse con el siguiente paso. Desafortunadamente, en este punto es muy factible cometer equivocaciones que pueden llevar a la obtención de resultados incorrectos, los cuales deberán identificarse al momento de la validación del modelo.

3.2.2 CASO 2: El Problema de la Dieta. El Colegio "Nuevo México", un Caso Particular.

En 1985 el Departamento Administrativo del Colegio "Nuevo México", decidió proporcionar un servicio diario de desayunos para los alumnos de esta escuela primaria. La idea original surgió durante la reunión de la mesa directiva, efectuada el 18 de noviembre del a&o pasado, cuando los padres de los ni&os decidieron pagar una colegiatura más elevada, a fin de tener derecho a tal servicio. La propuesta fue planteada al Director, con el objeto de obtener su autorización y el monto del incremento al que se sujetaría la cuota escolar, indicando que aceptarían siempre y cuando el gasto no excedierá al que les representa alimentar a sus hijos, que asciende en promedio a $450.00 diarios por cada uno.

Ante tal situación, el Director solicitó a la Secretaría de Educación Pública, los requerimientos mínimos a cubrir en el desayuno de los educandos, obteniendo los siguientes parámetros:

CUADRO 1: Requerimientos Mínimos de una Dieta Balanceada.

CONCEPTO	REQUERIMIENTO MINIMO
Calorías	2,000.0
Proteínas	50.0 grms.
Calcio	800.0 mgrms.
Hierro	10.0 mgrms.
Vitamina A	2,500.0 Unidades Internacionales
Vitamina B1	0.6 mgrms.
Vitamina B2	1.0 mgrms.
Niacina	11.0 mgrms.
Vitamina C	50.0 mgrms.

Para prevenir el colesterol, se recomendó tener la precaución de que las grasas no excedieran a los 100 grms.

Paralelamente, el Director obtuvo la información concerniente a una descripción de las calorías, carbohidratos, grasas, minerales y vitaminas de diversos productos fáciles de conseguir en cualquier epoca del año, y cuyo bajo costo, hace que se conviertan en candidatos para formar parte de la dieta diaria de los alumnos. De esta forma, los desayunos podrán consistir ya sea de huevos, leche, pan, chocolate y plátanos; en una combinación que alcance a cubrir en conjunto una dieta sana y balanceada para los niños. En los cuadros siguientes se muestra la composición de los productos antes indicados:

CUADRO 2: Contenido Nutricional.

Alimento	Peso grms.	Calorías	Proteínas grms.	Carbohidratos	Grasas grms.
1 huevo	100	150	12	-	12
1 vaso de leche	984	660	32	48	40
1 pan bolillo	23	60	2	12	1
1 barra de chocolate	56	290	2	44	6
1 plátano	150	85	1	23	-

CUADRO 3: Contenido Mineral.

	M I N E R A L E S				
Alimento	Hierro mgrms.	Calcio mgrms.	Fósforo mgrms.	Potasio mgrms.	Sodio mgrms.
1 huevo	2.3	54	205	129	122
1 vaso de leche	0.4	1,140	930	210	75
1 pan bolillo	0.4	16	25	50	125
1 barra de chocolate	0.6	72	115	192	47
1 plátano	0.7	8	44	390	1

CUADRO 4: Contenido Vitamínico.

	V I T A M I N A S				
Alimento	A mgrms.	B1 mgrms.	B2 mgrms.	Niacina mgrms.	C mgrms.
1 huevo	1,180	-	0.3	-	-
1 vaso de leche	1,560	0.32	1.7	0.8	6
1 pan bolillo	-	-	-	0.3	-
1 barra de chocolate	100	-	-	-	-
1 plátano	190	-	-	0.7	10

El Departamento Administrativo del colegio ha contratado a una distribuidora de productos básicos, que le asegura el abasto necesario para cubrir la demanda de desayunos a un costo constante durante el próximo semestre escolar (los costos incluyen el gasto del transporte de los productos a la escuela) siendo estos los siguientes:

CUADRO 5:

Alimento	Precio Unitario
1 huevo	$ 50.00
1 vaso de leche	$ 35.00
1 pan bolillo	$ 7.00
1 barra de chocolate	$ 28.00
1 plátano	$ 12.00

El servicio de desayunos, representa un egreso diario adicional de $150.00 por alumno, el cual incluye los servicios de preparación de alimentos, meseros, roturas de la losa, etc.

Formulación del Problema:

Al igual que para el caso anterior, la información ha sido completamente determinada, lo que hace que las fases de formulación y de construcción del modelo caminen en paralelo.

Se aplicará la suposición de linealidad sobre el problema, ya que resulta bastante razonable, por ejemplo, pensar que un aumento en la ración de los alimentos provocará uno en la misma proporción en los niveles nutricionales. Sin embargo, en relación con los costos, este nuevamente tendrá que abstraerse más "fuertemente", si se eliminan las tasas de descuento que es posible conseguir a partir de ciertos niveles en la demanda de los alimentos. A pesar de esto, lo anterior no será demasiado grave, si se piensa que dichas tasas, en principio, descienden muy lentamente, por lo que la suposición de linealidad puede considerarse como una buena aproximación, en caso contrario, habría que considerar una reformulación del problema.

Los contenidos nutricionales se tomarán como fijos y confiables (dada su fuente de procedencia).

Con base en lo anterior, puede decirse que el modelo sera normativo, determinístico, estático y lineal.

Construcción del Modelo:

Factores Controlables o Variables de Decisión:

Las variables de decisión se formularán con base en la información, que el Director del Colegio "Nuevo México" necesita conocer, con el objeto de programar el servicio de desayunos, es decir:

1. El número de huevos a incluir en cada desayuno (que se denotará como HUEVO).

2. El número de vasos con leche a incluir en cada desayuno (denotada por LECHE).

3. El número de bolillos a incluir en cada desayuno (BOLLO).

4. El número de barras de chocolate a incluir en cada desayuno (CHOCO).

5. El número de plátanos a incluir en cada desayuno (PLATA).

Función Objetivo:

Qué es lo que el Director del colegio persigue con la implantación del sistema de desayunos?:

Satisfacer los requerimientos alimenticios del alumnado a un costo mínimo.

Matemáticamente lo anterior puede expresarse notando que cada: huevo, vaso con leche, bolillo, barra de chocolate y plátano cuestan $50.00, $35.00, $7.00, $28.00 y $12.00 respectivamente, de esta forma:

$$50HUEVO + 35LECHE + 7BOLLO + 28CHOCO + 12PLATA$$

representará el costo variable total de cada desayuno. El cual deberá ser el mínimo posible, para asegurar una ganancia costeable al implantar el plan de deayunos, es decir:

$$\text{Minimizar } z = 50HUEVO + 35LECHE + 7BOLLO + 28CHOCO + 12PLATA$$

donde z denotará el costo total en el que se incurre por cada desayuno.

Los Modelos de Programación Lineal, tienen la característica de optimizar un solo objetivo a la vez, es decir, maximizar ganancias, minimizar costos, minimizar niveles de calorías, minimizar el uso de algun recurso, etc.

Restricciones:

Para establecer algebraicamente cada restricción, a través de las variables de decisión antes descritas, será necesario identificar aquellos recursos que se consideran como escasos. Esto permitirá fijar las relaciones que tienen que guardar entre si tanto los recursos como los niveles de actividad.

Restricción de Limitación de Grasa:

Con base en el cuadro 2, puede observarse que cada huevo produce 12 grms. de grasa, por lo tanto, un volumen equivalente al valor de la variable HUEVO aportará 12HUEVO grms. de grasa. De esta forma, considerando a cada uno de los productos candidatos a formar parte del desayuno se tendrá que en conjunto producirán:

12HUEVO + 40LECHE + BOLLO + 6CHOCO + 0PLATA grms. de grasa.

cifra que no debe exceder el nivel máximo recomendado; matemáticamente, equivale a establecer que:

12HUEVO + 40LECHE + BOLLO + 6CHOCO + 0PLATA <= 100

Restricción de Disponibilidad de Incremento en la Cuota:

Debido a que los padres no estan dispuestos a pagar más de $450.00 diarios por el servicio de desayuno, habrá que agregar una restricción que establezca que el monto de todo el servicio, no exceda al máximo permitido, es decir:

50HUEVO + 35LECHE + 7BOLLO + 28CHOCO + 12PLATA + 150 <= 450

o también:

50HUEVO + 35LECHE + 7BOLLO + 28CHOCO + 12PLATA <= 300

Restricción de Requerimiento Mínimo de Calorías:

Siguiendo el criterio antes expuesto puede observarse que:

150HUEVO + 660LECHE + 60BOLLO + 290CHOCO + 85PLATA => 2,000

indica que la cantidad de calorías que produzca el desayuno tiene que ser al menos igual a la mínima requerida, o sea 2,000.

Restricción de Requerimiento Mínimo de Proteínas:

12HUEVO + 32LECHE + 2BOLLO + 2CHOCO + PLATA => 50

Restricción de Requerimiento Mínimo de Calcio:

54HUEVO + 1,140LECHE + 16BOLLO + 72CHOCO + 8PLATA => 800

Restricción de Requerimiento Mínimo de Hierro:

2.3HUEVO + 0.42LECHE + 0.4BOLLO + 0.6CHOCO + 0.7PLATA => 10

Restricción de Requerimiento Mínimo de Vitamina A:

En esta restricción es necesario establecer primeramente la equivalencia entre las Unidades Internacionales (UI) y los mgrms.:

4,000 U.I. de Vitamina A equivalen a 2.4 mgrms. de esta

por lo que:

2,000 U.I. equivalen a : (2,000)(2.4/4,000) = 1.5 mgrms.

la restricción quedará como:

1,180HUEVO + 1,560LECHE + 0BOLLO + 100CHOCO + 190PLATA => 1.5

Restricción de Requerimiento Mínimo de Vitamina B1:

0HUEVO + 0.32LECHE + 0BOLLO + 0CHOCO + 0PLATA => 0.6

Restricción de Requerimiento Mínimo de Vitamina B2:

0.3HUEVO + 1.7LECHE + 0BOLLO + 0CHOCO + 0PLATA => 1

Restricción de Requerimiento Mínimo de Niacina:

0HUEVO + 0.8LECHE + 0.3BOLLO + 0CHOCO + 0.7PLATA => 11

Restricción de Requerimiento Mínimo de Vitamina C:

0HUEVO + 6LECHE + 0BOLLO + 0CHOCO + 10PLATA => 50

Condiciones de No Negatividad:

HUEVO => 0, LECHE => 0, BOLLO => 0, CHOCO => 0 y PLATA => 0

Las variables no podrán tomar valores negativos -razón por la que este tipo de restricciones se le denomina de no negatividad.

Condiciones de Integralidad:

En este caso nuevamente todas las variables necesitan ser enteras, sin embargo, por sencillez esto se omitirá en el desarrollo subsecuente.

El problema antes expuesto se muestra en el cuadro 6.

CUADRO 6: Modelo de Programación Lineal, para la Determinación de la Dieta Optima, para el Colegio "Nuevo México".

RESTRIC.	HUEVO	LECHE	BOLLO	CHOCO	PLATA		DISP.
Objetivo	50	35	7	28	12		Min.
Exgras.	12	40	1	6	0	<=	100
Presup.	50	35	7	28	12	<=	300
Mincal.	150	660	60	290	85	=>	2,000
Minprot.	12	32	2	2	1	=>	50
Mincalc.	54	1,140	16	72	8	=>	800
Minhie.	2.3	0.4	0.4	0.6	0.7	=>	10
MinvitA.	1,180	1,560	0	100	190	=>	1.5
MinvitB1	0	0.32	0	0	0	=>	0.6
MinvitB2	0.3	1.70	0	0	0	=>	1
Minniac.	0	0.80	0.3	0	0.7	=>	11
MinvitC.	0	6	0	0	10	=>	50
No Neg.	1					=>	0
No Neg.		1				=>	0
No Neg.			1			=>	0
No Neg.				1		=>	0
No Neg.					1	=>	0

3.2.3 CASO 3: Una Campa&a de Publicidad para la Compa&ía Edivisión.

En la junta realizada en el mes de abril de 1985, el Presidente de Edivisión y su mesa de ejecutivos acordaron, para el a&o de 1986, poner a la venta una edición enfocada básicamente a determinados sectores de la población de la Ciudad de México. Por lo general, las publicaciones anteriores han tenido una aceptación regular, no solamente en los círculos que se han tratado de captar, sino también en otros grupos de personas que -a partir de un cuestionario incluido en cada libro- han proyectado sus preferencias en lo que a material literario concierne. Al respecto, el Ejecutivo de Ventas se mostró bastante inconforme con las campa&as publicitarias, indicando que la pobre difusión es la que provoca que el producto no tenga una mejor acogida, por lo que se concluyó que, antes de poner a la venta los productos de la editorial, habrá que llevar a cabo una activa campa&a de publicidad a través de los principales medios de comunicación, considerando una categorización entre estos, ya que existen diferentes niveles de captación de consumidores.

Con base en esto, el Presidente de la editorial comisionó a una de las agencias más solidamente establecidas, en lo que respecta al ramo estadístico, para que llevara a cabo una investigación de los sectores a los que tiene que estar enfocada la intensa campa&a publicitaria.

El estudio permitio a la empresa conocer las preferencias de los lectores, y tomar la determinación de complacer sus peticiones, asegurando con ello la demanda de la próxima edición, que asciende a 150,000 ejemplares.

Según el estudio estadístico, los sectores de interés se encuentran compuestos de la siguiente manera:

CUADRO 1: Composición de los Sectores de Interés.

SECTOR DEL MERCADO	MINIMO A CUBRIR
Jovenes entre 14 y 22 a&os	15%*
Mujeres entre 35 y 45 a&os	30%*
Profesionistas	25%*
No especificado	30%*

* Cifras obtenidas de una encuesta de 100,000 cuestionarios.

Existe un nivel máximo de cobertura (25%), para el grupo de jovenes entre 14 y 22 a&os, proyectado con el fin de restringir la captación de este sector, por considerarse como el menos propenso al consumo en comparación con los demás. Dicha propuesta fue hecha por la agencia, fundamentandose en otras investigaciones de empresas del ramo.

De acuerdo con los estudios de mercado practicados, se estimó que en general la tasa de exposición, que se define como el número de personas que perciben un anuncio por cada $5,000.00 invertidos, es:

Televisión	22
Radio	12
Revistas	15
Periódicos	10
Anuncios Públicos	5

Esta ha demostrado ser bastante regular a lo largo de un período de 6 a&os, por lo que se espera no cambie para el próximo.

Debido a que la editorial está particularmente interesada en un determinado sector de lectores, fué necesario obtener la siguiente información adicional, que es la tasa de exposición por cada $5,000.00 invertidos, tabulada por categoría y medio de publicidad:

CUADRO 2: Tasa de Captación (por $5,000 invertidos en cada medio de comunicación).

Medio de Comunicación	Jovenes entre 14 y 22 a&os	Mujeres entre 35 y 45 a&os	Profesionistas
Televisión	10	6	3
Radio	5	4	1
Revistas	1	7	4
Periódicos	0	2	5
Anuncios Públicos	1	2	1

Se ha proyectado un presupuesto de $4,000,000.00 para la campa&a publicitaria; debido a políticas de cobertura se ha planeado invertir no más del 30% del presupuesto en cada uno de los medios, así como no más de un 50% en la Televisión y el Radio conjuntamente.

En principio, el consejo pareció algo confundido en lo que respecta al objetivo primordial que debía alcanzarse. Después de algún tiempo de deliberación, llegaron al acuerdo de que lo escencial era que el producto tuviera una buena venta en el próximo a&o, lo cual es factible alcanzar, mediante la maximización de la tasa de exposición del público a la campa&a publicitaria.

Formulación del Problema:

En la consolidación del marco de referencia del presente problema pueden apreciarse las siguientes características inherentes:

1. La captación puede suponerse lineal.

2. Los costos aumentan en la misma proporción que la captación de lectores que se desee lograr.

3. La demanda del producto puede considerarse asegurada, dado que la edición se colocará de acuerdo a las preferencias de los lectores, asimismo, se espera que la campa&a publicitaria sensibilice en gran medida a estos.

4. La seriedad del estudio estadístico, realizado por una de las agencias más prestigiadas en el ramo, asegura la confiabilidad de los parámetros obtenidos.

5. La efectividad de la campa&a publicitaria, es decir, la existencia de una completa seguridad en el nivel de captación de los lectores.

Las suposiciones antes indicadas, en general, tienden a ser muy idealizadas, pues es muy difícil que en la realidad: el volumen de captación tienda a crecer linealmente en función con los niveles de inversión, la campa&a sea en realidad efectiva, o los parametros se mantengan constantes en el período de tiempo considerado.

Pese a esto, el modelo se supondrá normativo, determinístico, estático y lineal.

<u>Construcción del Modelo:</u>

<u>Factores Controlables o Variables de Decisión:</u>

Debido a que se busca maximizar la tasa de exposición del público a los anuncios, las variables deben expresarse en términos de los factores asociados a incrementos en la captación de posibles consumidores, ya que el volumen de cobertura está directamente asociado a la cantidad de dinero invertida en anuncios (una mayor inversión producirá un mayor número de futuros lectores).

Como el nivel de inversión está dado en unidades de $5,000.00, será necesario llevar a cabo una conversión para trabajar en unidades estandarizadas.

$5,000.00 equivaldran a una unidad estandarizada

$4,000,000.00 equivaldran a 4,000,000.00/5,000 = 800 unidades estandarizadas

así, se tendrán las siguientes variables controlables:

$TV que representa el número de unidades estandarizadas invertidas en anuncios de televisión para la próxima campa&a publicitaria.

$RA que representa el número de unidades estandarizadas invertidas en anuncios de radio para la próxima campa&a publicitaria.

$RE que representa el número de unidades estandarizadas invertidas en anuncios de revistas para la próxima campaña publicitaria.

$PE que representa el número de unidades estandarizadas invertidas en anuncios de períodicos para la próxima campaña publicitaria.

$AP que representa el número de unidades estandarizadas invertidas en anuncios públicos para la próxima campaña publicitaria.

Objetivo o Función Objetivo:

La presencia de objetivos confusos, puede ser una de las principales causas por las que un modelo fracase. Es muy importante enlistar la serie de objetivos que se persigue; si la Programación Lineal va a ser empleada, entonces tendrá que llevarse a cabo una priorización de estos así como una selección del más importante (debido a que esta técnica optimiza un solo objetivo a la vez), y fijar niveles mínimos de satisfacción para los restantes, en caso de que resulte necesario. Para este caso, solo habrá que considerar la maximización de la tasa de exposición, que fue el factor más relevante para la mesa de ejecutivos. De esta manera se tendrá que:

- Una unidad invertida en televisión, asegura la captación de 22 personas, por lo que $TV unidades invertidas aseguraran la captación de 22$TV personas.

- De igual forma $RA, $RE, $PE, $AP unidades invertidas asegurarán la captación de: 12$RA, 15$RE, 10$PE, 5$AP personas en cada uno de los medios respectivos.

Debido a que la compañía busca maximizar la tasa de exposición se tendrá que la siguiente función objetivo:

Maximizar z = 22$TV + 12$RA + 15$RE + 10$PE + 5$AP

que es el número total de personas que se piensa captar a través de los medios publicitarios indicados.

Restricciones:

Los tipos de restricciones a considerar son:

Restricción de Presupuesto.

Restricciones de Cobertura Mínima y Máxima.

Restricciones de Políticas de Publicidad.

Condiciones de No Negatividad.

Condiciones de Integralidad.

Restricción de Presupuesto:

La cantidad de unidades estandarizadas a utilizar, no debe exceder a la disponible:

$TV + $RA + $RE + $PE + $AP <= 800 (unidades estandarizadas)

Restricciones de Cobertura Mínima y Máxima:

El cuadro 2 indica el volumen de personas que se captan mediante la inversión de una unidad estandarizada ($5,000.00), por cada medio de comunicación, el cuadro 1 muestra el porcentaje mínimo a cubrir para cada sector. Combinando la información de estas dos fuentes, pueden establecerse las restricciones de cobertura mínima:

Mínimo de Jovenes entre 14 y 22 a&os	10$TV + 5$RA + $RE + 0$PE + $AP => 22,500
Mujeres entre 35 y 45 a&os	6$TV + 4$RA + 7$RE + 2$PE + 2$AP => 45,000
Profesionistas	3$TV + $RA + 4$RE + 5$PE + $AP => 37,500

En particular existe una restricción de cobertura máxima, para el primer sector, la cual puede ser expresada como:

Máximo de Jovenes entre 14 y 22 a&os	10$TV + 5$RA + $RE + 0$PE + $AP <= 37,500

Restricciones de Políticas de Publicidad:

Televisión	$TV					<= 240 unidades est.
Radio		$RA				<= 240 unidades est.
Revistas			$RE			<= 240 unidades est.
Periódicos				$PE		<= 240 unidades est.
Anuncios Públicos					$AP	<= 240 unidades est.
Televisión y Radio	$TV + $RA					<= 400 unidades est.

Condiciones de No Negatividad:

El número de unidades invertido en cada medio no puede ser inferior a cero. Esto se asegura en el modelo incluyendo las condiciones de no negatividad para cada variable, es decir:

$TV , $RA , $RE , $PE , $AP => 0

Condiciones de Integralidad:

Una suposición implícita en el problema, es que para conseguir un anuncio en cada medio deben invertirse exactamente $5,000.00, una inversión inferior es improcedente, por lo que:

$TV , $RA , $RE , $PE , $AP deben ser variables enteras.

El problema anterior se presenta en el cuadro 3:

CUADRO 3: Modelo de Programación Lineal para la Planeación de una Campaña Publicitaria.

RESTRICCION	$TV	$RA	$RE	$PE	$AP		DISP.
Objetivo	22	12	15	10	5		Maximizar
Mínimo de							
Jovenes	10	5	1	0	1	=>	250,000
Mujeres	6	4	7	2	2	=>	400,000
Profesionistas	3	1	4	5	1	=>	350,000
Máximo de							
Jovenes	10	5	1	0	1	<=	250,000
Televisión	1					<=	240
Radio		1				<=	240
Revistas			1			<=	240
Periódicos				1		<=	240
Anuncios Públicos					1	<=	240
Televisión y Radio	1	1				=>	400
Televisión	1					=>	0
Radio		1				=>	0
Revistas			1			=>	0
Periódico				1		=>	0
Anuncios Públicos					1	=>	0

El cual es un Modelo de Programación Lineal con 10 restricciones (sin incluir las condiciones de no negatividad) y 5 variables de decisión.

3.2.4 CASO 4: Programación de Personal en el Servicio de Recoleccion de Basura.

La programación de personal tiene dos objetivos principales:

- Proporcionar una fuerza de trabajo que permita cubrir los requerimientos diarios, y

- Dar a los empleados días de descanso adecuados.

Por ejemplo, los obreros a cargo de la recolección de basura en el Distrito Federal, en a&os anteriores, tenían libres el domingo y un día entre semana, por lo que el volumen de basura recolectada los lunes era mayor que el de los demás días. Las cuadrillas se dividian uniformemente entre las seis diferentes opciones a elegir, para los días de descanso que se muestran en el cuadro 1. Las asignaciones eran rotadas semanalmente, de tal forma que cada flotilla tenía libres los días domingo-lunes una semana, domingo-martes otra y asi sucesivamente. De esta forma el ciclo se repetía cada seis semanas, balanceando la situación para cada una de los grupos de trabajo.

CUADRO 1: Calendarización de Días Libres.

Semana	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
1	X						X
2		X					X
3			X				X
4				X			X
5					X		X
6						X	X

Se pensó solucionar el problema de los lunes mediante la contratación de un número suficiente de obreros en cada uno de los seis grupos, dejando a los demás días como "fáciles". Esta idea se consideró como poco eficiente, debido al presupuesto limitado con que se cuenta.

Como consecuencia de nuevas políticas laborales, se llegó a un acuerdo con el sindicato para modificar el plan de distribución de los días libres. Las propuestas se vieron condensadas en la programación que se muestra en el cuadro 2. La ventaja de esta propuesta es que los trabajadores podrán llegar a tener dos días libres consecutivos, aunque estos no coincidan con el tradicional fin de semana. Sin embargo, esto será posible siempre y cuando la demanda de trabajo no sea tal que haga necesario romper algunas calendarizaciones.

CUADRO 2: Recalendarización de Días Libres.

Semana	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
1	X	X					
2		X	X				
3			X	X			
4				X	X		
5					X	X	
6						X	X
7	X						X

Se quiere determinar mediante el uso de la Programación Lineal, el número óptimo de grupos a formar, y la asignación de días libres de trabajo. Para ello es necesario establecer algunos supuestos:

- Se supondrá que el número de trabajadores de tiempo completo (TTC) es conocido.

- Se asumirá (de acuerdo a proyecciones estimadas) que los requerimientos de personal para cada día ascienden a DDP_k trabajadores, donde k representa uno de los siete días.

La diferencia TTC − DDP_k representa el número de trabajadores que tiene el k-ésimo día libre a la semana. La programación diaria, en lo que respecta a los requerimientos establecidos, debe suponerse constante para todo un ciclo, para lo cual este último se definirá como una secuencia completa de siete semanas. Esto se hace con la finalidad de no complicar al modelo en su estructura, sin embargo, una vez que una solución sea obtenida puede practicarse un análisis para medir la estabilidad de este. En caso de que existan cambios notables en la demanda diaria de personal, será necesario considerar alguno de los siguientes cursos de acción:

- Reprogramar la calendarización, obteniendo así una nueva solución, lo cual puede romper la secuencia del ciclo.

- Conformar flotillas de personal, incurriendo con ello en costos adicionales para el caso de trabajos que requieren de cierta especialización.

- Dejar zonas pendientes de servicio, con sus respectivas implicaciones y problemas con Salubridad.

En resumen, se tendrán los siguientes parámetros:

TTC que representa el número de obreros de tiempo completo disponibles.

DDP_k que indica el número de personal que se requiere el día k.

TL_k = TTC - DDP_k que es el número de obreros que tienen el día k libre.

Si TL_k toma valores negativos, podrá concluirse que el número de trabajadores (TTC) es insuficiente para cubrir los requerimientos diarios, por lo que habrá que incrementarlo, o decrementar DDP_k al trasladar la carga de trabajo extra del día k a otro.

Con base en el marco de referencia establecido, puede formularse el modelo de Programación Lineal que permita determinar la asignación óptima. Para ello se definirá:

PER_k como el número de obreros al que se le ha asignado los días k y k + 1 libres.

De esta forma si se numeran los días de la semana de la siguiente forma:

Lunes --> 1 Martes --> 2 Miércoles --> 3 Jueves --> 4

Viernes --> 5 Sábado --> 6 Domingo --> 7

se tendrá que:

PER_1 será el número de trabajadores que tienen el lunes y el martes libres.

PER_2 es el número de trabajadores que tienen el martes y el miércoles libres.

. .
. .
. .

PER_7 es el número de trabajadores que tienen el domingo y el lunes libres.

Sin embargo, como se mencionó, puede existir la posibilidad de que, dada la demanda de un determinado día, sea necesario recurrir a la asignación de días no consecutivos para un determinado número de obreros, lo cual provoca que se definan variables adicionales para cubrir tales circunstancias, así:

NC_k será el número de trabajadores que tienen asignado el k-ésimo día no consecutivo como libre.

Las restricciones pueden definirse de acuerdo a sus características:

- Restricciones de Oferta, establecerán matematicamente que no podrán asignarse más días libres que los necesarios.

- Restricciones de Demanda, indicarán que debe cubrirse el requisito mínimo de días libres para los obreros, en una semana determinada.

- Restricciones de "Control", buscarán acotar el número de días no consecutivos que se asignen.

- Condiciones de No Negatividad.

- Condiciones de Integralidad.

Las del primer tipo, pueden establecerse matemáticamente como:

$PER_7 + PER_1 + NC_1 <= TL_1$

$PER_1 + PER_2 + NC_2 <= TL_2$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$PER_6 + PER_7 + NC_7 <= TL_7$

En cada semana debe cubrirse un número suficiente de días libres, de tal forma que cada obrero, tenga al menos dos. Así, para una semana en particular, la suma del número de obreros para el que se ha asignado una determinada combinación de días libres consecutivos o no, debe ser mayor o igual a dos veces el volumen total de obreros (porqué?), en caso de que ocurra lo contrario deberá aumentarse o disminuirse su oferta o demanda.

$$\sum_{k=1}^{7} (2PER_k + NC_k) => 2TTC$$

El tercer tipo de restricciones es el más complejo, y puede establecerse como:

$NC_1 <= NC_2 + NC_3 + NC_4 + NC_5 + NC_6 + NC_7$

$NC_2 <= NC_1 + NC_3 + NC_4 + NC_5 + NC_6 + NC_7$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$NC_7 <= NC_1 + NC_2 + NC_3 + NC_4 + NC_5 + NC_6$

y garantiza que los días libres no consecutivos no sean excesivos, asimismo, asegura un balance entre estos, pues basa pensar que al no incluirlas podría resultar, por ejemplo, que un día pudiera tener tantas asignaciones que un obrero tuviera dos días libres el mismo día, lo cual es inadmisible.

Las condiciones de no negatividad aseguran que las variables no tomen valores negativos, mientras que las de integralidad demandan que las soluciones que proporcione el modelo sean del tipo entero, dado que en general su estructura no asegura que lo anterior se cumpla en su resolución.

La función objetivo puede ser constituida de diversas formas según los objetivos que se persigan, por ejemplo:

- Maximizar los días libres consecutivos:

$$\text{Maximizar } z = \sum_{k=1}^{7} PER_k$$

- Maximizar los días libres consecutivos de los sábados y domingos:

$$\text{Maximizar } z = PER_5 + PER_6 + PER_7$$

- Minimizar el número de días no consecutivos que se empleen:

$$\text{Minimizar } z = NC_1 + NC_2 + NC_3 + NC_4 + NC_5 + NC_6 + NC_7$$

Con el objeto de utilizar el Modelo de Programación Lineal antes esquematizado, necesita determinarse la siguiente información:

- Una calendarización de días libres similar a la mostrada en el cuadro 2.

- El número de grupos de trabajo requeridos diariamente.

- El objetivo que se persigue.

3.2.5 CASO 5: Proyecto de Alfabetización en una Zona Rural.

En 1980 comenzó una activa campaña para combatir la analfabetización en diferentes zonas del Estado de Chiapas. Estas se encuentran pobladas por diversos grupos étnicos cuyo número se desconoce, pero que puede ser determinado a partir de algun estudio. Al respecto se supone que estos habitan en diferentes áreas de residencia o regiones (cuyo número también se desconoce). Aun más, se cree que cada comunidad podría llegar a contener diversos grupos étnicos.

El Gobernador del estado ha mostrado cierta preocupación en relación a experiencias anteriores pues, en las escuelas construidas, se han presentado altos índices de deserción de alumnos. Con base en una encuesta, se encontró que una de las principales causas de dicho problema fué la oposición que los padres ejercían con los menores, pues preferían que laboraran las tierras en lugar de enviarlos a estudiar.

En segundo término, se encontró que las distancias que recorrían los indígenas eran sumamente extensas; los padres tomaban esto como pretexto para encubrirse frente a las trabajadoras sociales, indicando que ellos querían escuelas más cercanas para que sus hijos no desatendieran por completo las obligaciones que tenían.

Al momento el Gobierno del Estado de Chiapas carece de los medios necesarios para la construcción de una infraestructura escolar deseable, sin embargo, tiene el plan de establecer escuelas temporales que tengan la finalidad de cubrir las deficiencias que padece la entidad. Para ello, dispone de ciertos locales ubicados en poblados rodeados por las zonas étnicas de interés, y que pueden ser adecuados para funcionar como aulas de clase durante la mañana; en relación a este punto, el Gobierno quiere determinar la mejor forma de asignar los diferentes grupos étnicos a las escuelas provisionales.

Para que tenga sentido operar una escuela es necesario un número mínimo de alumnos, más abajo del cual resulta inoperante abrirla, de igual forma existen márgenes máximos. Dadas las capacidades heterogéneas de cada región, tales cotas varían de poblado en poblado. Como política adicional se consideró que de cada grupo étnico debería asistir, por lo menos, un cierto número de indígenas, lo cual asegurará la homogeneidad de la campaña. Finalmente se consideró que de acuerdo al número de alumnos que lograran captarse, el Gobierno podría asignar los profesores que se requirieran, siempre que estos no excedan un límite, para cada una de las escuelas. Cada grupo se estructura en número, en base a la cantidad mínima de alumnos a cubrir para cada poblado, por lo tanto, deberán tenerse tantos grupos como maestros disponibles.

Este interesante problema puede ser formulado en términos de un Modelo de Programación Lineal. En términos generales, será necesario determinar los parámetros que se requieren para conformarlo, sin embargo, en su formulación podrán manejarse nemónicas; y una vez construido, podrán realizarse los estudios que permitan conocer sus niveles de operación. En este ejemplo se requiere establecer lo siguiente:

- Indices que identifiquen los factores de interés:

  i, que representará a una escuela en particular;
  e, que denotara a alguno de los grupos étnicos; y
  c, que se asociará a alguna de las comunidades.

- El número máximo de escuelas que es posible abrir y que se denotará por TOT.

- La capacidad máxima de cada una de las escuelas, parámetro que puede ser expresado como: $CMAX_i$, donde i podrá variar desde 1 hasta el valor asociado a TOT.

- La capacidad mínima de cada una de las escuelas, representada por $CMIN_i$, i podrá variar de 1 a TOT.

- El número máximo de profesores que puede ser asignado a cada una de las escuelas, el cual será denotado por $PROF_i$.

- El volumen total de profesores disponibles, denotado por TPROF.

- El número de comunidades, denotado por COM.

- El número de grupos étnicos por comunidad. Por simplicidad se supondrá que el número de grupos étnicos es constante para cada una de las comunidades, e igual a TE. Si este no fuera el caso se tendría que manejar una clasificación para cada una de las comunidades como la que se muestra en el cuadro 1.

- El número de indígenas por grupo étnico (e) que vive en una determinada comunidad (c), denotado por: I_{ec}.

- El número mínimo de indígenas que del grupo étnico e debe asignarse a la escuela i, denotado por MIN_{ei}.

- Los coeficientes de la función objetivo.

La obtención de los parámetros anteriores no debe representar una tarea muy compleja, pues los datos pueden conseguirse de fuentes como: censos, encuestas y registros. Si se tuviera acceso a cada fuente, sería posible inclusive contrastar la información estableciendo ponderaciones de confiabilidad para cada uno de los casos y llegar al establecimiento de buenos parámetros.

Las variables pueden ser definidas con base en el plan que se desea establecer, por ejemplo:

A_{cei} representará al número de indígenas a asignar de la comunidad c y del grupo étnico e a la escuela i.

CUADRO 1: Número de Grupos Etnicos por Comunidad.

	C O M U N I D A D					
	1	2	.	.	.	COM
	1	1	.	.	.	1
NUMERO						
DE	2	2	.	.	.	2
GRUPOS	.	.	.	.	.	.
ETNICOS	.	.	.	.	.	.
	e_1	e_2	.	.	.	e_{COM}

Dependiendo del valor que asuma cada uno de los subíndices, podrá obtenerse el número de variables a utilizar, por ejemplo, para los valores:

$c = 3$, $e = 2$, $i = 5$

se tendrá un total de: (3)(2)(5) = 30 variables.

Las restricciones pueden ser clasificadas de acuerdo a los siguientes aspectos:

- Restricciones de Demanda, mediante las que se establecerán las políticas que exigen el cubrimiento de un margen mínimo de cobertura en la campaña.

- Restricciones de Oferta, que representarán las disponibilidades de cada uno de los recursos, maestros, indígenas, escuelas.

- Condiciones de No Negatividad.

- Condiciones de Integralidad.

Las restricciones de demanda son:

- El número de indígenas, de un grupo étnico en una comunidad, asignado a una cada una de las escuelas, debe superar al mínimo requerido; naturalmente este número mínimo debe ser congruente con la capacidad real de cada población, lo cual expresado matemáticamente se convierte en:

$\bar{\sum_{i}} A_{cei} => MIN_{ei}$ para cada comunidad y grupo étnico

$c = 1,\ldots, COM$
$e = 1,\ldots, TE$

- El número de indígenas asignado a una escuela en particular debe ser lo suficientemente grande para que resulte conveniente abrirla. Es decir:

$$\sum_{c} \sum_{e} A_{cei} => CMIN_{i} \qquad \text{para cada una de las escuelas}$$

$i = 1, \ldots, TOT$

Las restricciones de oferta son:

- El número de indígenas asignado a cada escuela no debe sobrepasar a su cupo máximo. Matemáticamente:

$$\sum_{c} \sum_{e} A_{cei} <= CMAX_{i} \qquad \text{para cada una de las escuelas}$$

$i = 1, \ldots, TOT$

- El número de indígenas que sea enviado de cada grupo étnico, no debe sobrepasar al número máximo que habita en cada comunidad. Es decir:

$$\sum_{i} A_{cei} <= I_{ce} \qquad \text{para cada comunidad y grupo étnico}$$

$c = 1, \ldots, COM$
$e = 1, \ldots, TE$

- El número máximo de grupos que se conforme para cada una de las escuelas, no debe exceder al máximo permitido que puede asignarse, lo cual se expresa como:

$$\frac{\sum_{c} \sum_{e} A_{cei}}{CMIN_{i}} <= PROF_{i} \qquad \text{para cada una de las escuelas}$$

$i = 1, \ldots, TOT$

- El total de profesores a emplear no debe exceder al número máximo disponible:

$$\sum_{i} PROF_{i} <= TPROF$$

Las condiciones de no negatividad y de integralidad, se establecen de la misma forma como se ha venido haciendo.

La función objetivo puede formularse de diversas formas, por ejemplo:

- Maximizar el número de estudiantes que puedan captarse:

$$\text{Maximizar } z = \sum_{c} \sum_{e} \sum_{i} A_{cei}$$

- Minimizar los niveles de deserción.
  Para ello podría construirse un índice de deserción (con base en experiencias pasadas o en estimaciones empíricas) de la siguiente manera:

Determinando la distancia en kilómetros de cada grupo étnico, a cada una de las escuelas.

Estimando el número de estudiantes que desertan a causa de la distancia, para cada grupo étnico.

Calculando el número de estudiantes que desertan por kilómetro recorrido en cada grupo étnico, para lo cual debe suponerse linealidad. Sean estos valores denotados por D_{emi}.

De esta forma, cada uno de los valores que se obtengan seran índices de ponderanción que podrán incluirse en la función objetivo, para que con base en ellos la asignación se haga con el fin de minimizar la deserción, en cuyo caso la función objetivo será:

$$\text{Minimizar } z = \bar{\sum_{e}} \bar{\sum_{m}} \bar{\sum_{i}} D_{emi} A_{emi}$$

- Minimizar el número de grupos que se conformen, ya que puede resultar bastante costoso asignar a un profesor a las regiones:

$$\text{Minimizar } z = \bar{\sum_{i}} \frac{\bar{\sum}_{e} \bar{\sum}_{m} A_{emi}}{CMIN_i}$$

En este punto, se estará en posibilidad de llevar a cabo estudios que permitan recolectar la información necesaria para la conformación del modelo.

Como podrá observarse, aun para números relativamente pequeños como los indicados para cada subíndice, el problema puede asumir dimensiones de gran consideración, lo cual hace necesario contar con la ayuda de una computadora.

Las políticas de implantación tienen que involucrar aspectos que el modelo no haya considerado, lo cual requiere sin lugar a dudas, gran intuición por parte del usuario.

3.3 Supuestos Básicos en los Modelos de Programación Lineal

Después de haber presentado una serie de aplicaciones de la Programación Lineal, se concentrará la atención sobre los supuestos básicos que sustenta todo modelo lineal:

1. **Proporcionalidad:** Para cada actividad, el consumo de recursos aumenta en la misma medida que el valor de la variable de decisión. Por ejemplo, si un productor requiere 3 kilos de acero para un determinado producto, requerirá 6 para dos, y así sucesivamente. Lo mismo ocurre con los costos o ganancias.

2. **Aditividad:** El consumo total de los recursos, debe corresponder a la suma de los utilizados por cada una de las actividades, de igual forma, su efectividad es idéntica a la de otra unidad del mismo, no importa de que manera sea usado.

3. **Divisibilidad:** Toda variable de decisión podrá asumir valores fraccionales.

4. **Independencia:** Existe independencia entre los parámetros asociados a las variables en cada restricción. Por ejemplo, el volumen disponible de un recurso no altera (aumenta o disminuye) al de otro diferente.

En la realidad estas suposiciones por lo general son violadas. Por ejemplo, el proceso de manufactura rara vez presenta una verdadera propiedad de aditividad o proporcionalidad. No obstante, en ocasiones un modelo lineal puede reflejar en cierta medida lo que en la realidad ocurre.

Existen otros modelos que libran las deficiencias antes mencionadas, pero su costo, en general, es más elevado; en el sentido de que además de complejos en su formulación, requieren de algoritmos de resolución difíciles de implantar.

3.4 El Arte de Modelar

La formulación de un modelo es un arte más que una ciencia; sin duda alguna expresar matemáticamente las relaciones que en la vida real se presentan no es una tarea sencilla. Este "arte" requiere, en gran parte, la "intuición" de la persona que se encuentra al frente del proyecto, tanto en la interpretación del problema como en la implantación de los resultados obtenidos. Este don en algunos casos es innato, y en la mayoría adquirido por experiencia. Sea cual fuere su procedencia conviene recordar que "la práctica hace al maestro".

3.4.1 <u>Características de un Buen Modelo:</u>

Todo modelo debe representar, lo mejor posible, a la realidad que se desea estudiar, para lo cual tiene que reunir ciertos aspectos que permitan su análisis:

1. Tener una estructura matemática sencilla. El modelo deberá contar con un nivel de simplificación, tanto en las expresiones matemáticas que involucre, como en su número. Sin embargo, no deberá entenderse por esto que los compactos son los más deseables, ya que pueden provocar problemas de interpretación de resultados. El "justo medio" sera la meta más recomendable a alcanzar.

2. Que sea fácil de validar. Con frecuencia se cometen errores tanto en la formulación como en la resolución de modelos matemáticos. Los primeros debidos a interpretaciones confusas de la realidad bajo estudio, los segundos, en la mayoría de los casos, ocasionados por errores de codificación de la información o por la incorrecta aplicación de alguna técnica. Es importante por ello, que un modelo sea sencillo de validar, para que pueda detectarse con facilidad la fuente del problema.

3. Que sea fácil de resolver. Los modelos que requieren algoritmos complejos de resolución, presentan grandes dificultades tanto en el mecanismo de obtención de resultados como en su interpretación, por lo que resultan más costosos. Un costo excesivo puede provocar la omisión del uso de un modelo.

3.4.2 Elementos Básicos de un Modelo de Programación Lineal:

Todo Modelo de Programación Lineal consta de tres componentes básicos:

1. Variables de Decisión,

2. Función Objetivo, y

3. Restricciones.

1. Variables de Decisión.

Las variables de decisión representan los niveles de actividad que se desean determinar, para operar en forma efectiva los componentes de un sistema. En particular, se asumirá que son contínuas, controlables y finitas (en número) para los modelos que se formulen.

2. Función Objetivo.

La función objetivo es una expresión matemática que refleja el impacto de los niveles de operación de las variables de decisión. Este puede ser medido en términos de la efectividad que se desee obtener, por ejemplo: ganancias, costos, utilidades, empleados, probabilidad de supervivencia, etc. Por lo general, en la vida real el objetivo a conseguir no es único, y puede resultar que entre los existentes lleguen a presentarse contradicciones. Sin embargo, en la Programación Lineal, por sencillez se emplean objetivos únicos o unificados; este consistirá, por ejemplo, en maximizar las ganancias o minimizar los costos. En caso de que existan múltiples, podrá ponderarse la importancia de cada uno mediante una suma. En otras circunstancias los objetivos no son susceptibles a alguna optimización.

3. Restricciones.

Tanto la maximización de las ganancias como la minimización de los costos en un problema, siempre estan sujetas a la existencia de recursos escasos o a condiciones que deben preservarse en un sistema. Estos elementos reciben el nombre de restricciones, y dadas sus características, involucran a las variables definidas. De acuerdo a su estructura matemática, las restricciones serán del tipo:

<= "menor o igual"

=> "mayor o igual"

= "igual"

El significado de cada una de ellas puede ser explicado dividiendo a los elementos que se encuentran en una restricción de la siguiente manera:

lado izquierdo,

lado derecho

tomando como punto de referencia a la relación que guarden (de acuerdo a los símbolos definidos).

En cada restricción, se acostumbra escribir en el lado izquierdo la suma algebraica de las variables multiplicadas por sus parámetros respectivos, y en el derecho los recursos mínimos o disponibles.

Los parámetros asociados a cada una de las variables reciben el nombre de coeficientes tecnológicos e indican el número de unidades que se requieren de un recurso por unidad de producción de una actividad. Por ejemplo, para el caso de los cinturones, en la restricción:

2CLUJO + CECON <= 1,000,

2 representa el número de unidades-tiempo que consume la fabricación de un cinturón de lujo.

En general, el signo <= se empleará para especificar que el volumen de recursos disponibles nunca deberá ser superado por la cantidad que se emplee en la fabricación de bienes. El signo => se utilizará para indicar que la producción debe cubrir un requerimiento mínimo fijo. La igualdad (=), representará las relaciones de equivalencia que tengan que conservarse entre las actividades y los recursos, por ejemplo, entre la oferta y la demanda. Para los dos primeros puede ocurrir que las restricciones se cumplan en sentido estricto de desigualdad, es decir:

< "menor que",

> "mayor que".

en el primer caso se dirá que un recurso no esta siendo utilizado al máximo, es decir, existe una "holgura", mientras que en el segundo, podrá concluirse que la producción supera la demanda mínima (posiblemente para cubrir imprevistos), por lo que existe un "exceso". Cabe aclarar que, para alcanzar un nivel óptimo de operación, no se necesitan utilizar al máximo todos los recursos disponibles o cubrir una demanda fija mínima. La optimización, en suma, puede ir más allá de estos puntos. Tanto las holguras como los excesos son cantidades variables positivas, inherentes a cualquier problema que involucre restricciones del tipo: <= o =>.

Las ecuaciones (=) tendrán holguras y excesos nulos, pues el símbolo "=", indica exhaustividad o productividad estrictas de los recursos o demandas.

De acuerdo a su significado, las restricciones pueden catalogarse de acuerdo a la siguiente clasificación:

Restricciones de Capacidad de Producción y Materia Prima:

Si se definen por X_1, $X_2,\ldots,$ X_n a las actividades cuyos niveles de actividad se buscan determinar, y que consumen respectivamente a_1, $a_2,\ldots,$ a_n unidades de un determinado recurso limitado denotado por b, deberá cumplirse que:

La cantidad total usada de un recurso <= La cantidad total disponible de dicho recurso

matemáticamente, lo anterior puede expresarse de la siguiente manera:

$$\sum_i a_i X_i <= b$$

donde:

el símbolo $\sum$ es la suma de los términos sobre la variación del subíndice i de 1 a n.

En algunas ocasiones, es posible "comprar" de fuentes externas materia prima o recursos de producción. Por lo que en esta circunstancia debera establecerse que:

La cantidad total usada de un recu so <= La cantidad total disponible de dicho recurso + La cantidad comprada del mismo recurso

Restricciones de Demanda:

Con frecuencia, los niveles de producción tienen que ser fijados de acuerdo a los niveles de demanda que se establezcan en el mercado, por lo que en ocasiones la oferta tendrá que cubrir exactamente una demanda ocasionando que:

La cantidad fabricada de un producto = La cantidad solicitada del mismo producto

o que se espere que un producto no tenga demanda más allá de un cierto límite, provocando que:

La cantidad fabricada La cantidad solicitada
de un producto <= del mismo producto

o a la inversa, en la que se espere la posibilidad de vender un producto más allá de una cantidad especificada, teniéndose que:

La cantidad fabricada La cantidad comprometida
de un producto => del mismo producto

Lo anterior puede expresarse matemáticamente de la siguiente manera:

$$\sum_i a_i X_i = d$$

o $$\sum_i a_i X_i <= d$$

o $$\sum_i a_i X_i => d$$

donde:

d en este caso representa la demanda.

Restricciones de Balance:

En algunos casos es necesario indicar que las cantidades que entran en un proceso deben ser las mismas que salen de este. Así, se tendrá que:

La cantidad de recursos La cantidad de productos
que entran a un proceso = que salen del proceso

Si X_1, $X_2, \ldots$, X_n y Y_1, $Y_2, \ldots$, Y_n representan, respectivamente, las cantidades de recursos y productos que entran y salen de un proceso, puede establecerse matemáticamente que:

$$\sum_i X_i = \sum_i Y_i$$

En caso de que los coeficientes de cada variable no sean unitarios, debido a la pérdida o ganancia de volumen durante el proceso de transformación, habrá que modificar la expresión.

Restricciones de Mezclado:

Cuando ciertos productos intermedios son mezclados para la conformación de uno final, puede resultar necesario restringir sus volúmenes, para que sea posible obtener el producto final. Tal es el caso de la conformación de la gasolina en relación con su octanaje. Así, se tendrá que:

$$\frac{\text{La combinación porcentual de los recursos}}{\text{La cantidad total de recursos usados}} = \text{\% de combinación}$$

en el caso de que la relación sea estricta, o

$$\frac{\text{La combinación porcentual de los recursos}}{\text{La cantidad total de recursos usados}} <= \%\ \text{de combinación}$$

cuando esta tenga un límite superior máximo a alcanzar, o

$$\frac{\text{La combinación porcentual de los recursos}}{\text{La cantidad total de recursos usados}} => \%\ \text{de combinación}$$

cuando dicho límite sea un mínimo por cubrir.

Restricciones de Políticas Administrativas:

Por cuestiones de políticas prefijadas, puede presentarse el caso en el que la fabricación debe guardar ciertos márgenes, es decir, la producción de bienes debe hacerse de acuerdo a proporciones entre los productos. Por ejemplo, podría establecerse que el producir 2 cinturones de lujo asegurara la producción de al menos uno económico. Las restricciones de demanda son un subconjunto de estas.

Restricciones Multietápicas:

Este tipo de restricciones es aplicable cuando, en el proceso de manufactura, se requiere la elaboración de productos intermedios que deben ser empleados para la obtención de un producto final, pero pueden tambien ser utilizados para otro fin, como el de su venta. Por ejemplo:

La cantidad que se utilice en un proceso intermedio de un producto <= La cantidad que se manufacture de dicho producto en esa etapa

En el caso de que se disponga de existencias en el inventario, lo anterior se convertirá en:

La cantidad que se utilice de un producto en un proceso intermedio − La cantidad que se manufacture de dicho producto en esa etapa <= La cantidad disponible en inventario

Otros Tipos de Restricciones:

Pueden identificarse los siguientes:

- Cotas Superiores, el cual es un caso particular del primer tipo de restricciones, con la salvedad de que cuando la restricción involucre una variable para la que se haya fijado un límite superior a esta se le denominará como acotada superiormente, es decir:

  $X_1 <= b$

- Cotas Inferiores, es el caso opuesto de las anteriores, por ejemplo:

$X_1 => b$

- Condiciones de No Negatividad, que son un caso particular de las anteriores.

3.4.3 El Proceso de Construcción de un Buen Modelo:

Antes de construir un modelo, deben tomarse en cuenta las siguientes consideraciones:

- El proceso de desarrollo de un modelo puede ser visto como uno de enriquecimiento o elaboración. Se comienza con esquemas sencillos, completamente diferentes de la realidad, y se intenta evolucionar hasta los más elaborados para reflejar la complejidad de las situaciones que en ella se presentan.

Cuando un problema no puede ser formulado de inmediato bajo las suposiciones hechas, es necesario comenzar a realizar en forma deliberada mayores simplificaciones, hasta que se llegue a un punto en el que la situación sea controlable. Hecho lo cual deberá comenzarse a ir en el sentido inverso, es decir, hasta el nivel de complejidad que se considere como el más adecuado.

Genéricamente hablando, uno puede simplificar al:

- Convertir variables en constantes.

- Eliminar variables.

- Usar relaciones lineales.

- A&adir supuestos y restricciones más fuertes.

- Eliminar la aleatoriedad.

El proceso de enriquecimiento es el camino opuesto al indicado.

- La analogía o asociación con estructuras lógicas desarrolladas acertadamente con anterioridad, juegan un papel importante en la determinación del punto de partida de este proceso de elaboración o enrequecimiento.

En algunas ocasiones resulta difícil comenzar con el planteamiento de un modelo. En estos casos deberan analizarse otras formulaciones que hayan sido instrumentadas exitosamente con anterioridad, para determinar la presencia de posibles analogías con la situación actual; si estas existen, podrán tomarse como punto de partida, en caso contrario deberá continuarse la búsqueda.

- El proceso de elaboración o enrequecimiento, involucra al menos dos tipos de procedimientos alternativos:

  1. Modificación del modelo a partir de la confrontación de la información, hasta que su nivel de veracidad sea satisfactorio.

  2. Estudio del modelo a partir de los supuestos que lo caracterizan. Si puede seguirse enriqueciendo, sin por ello afectar en gran medida su comprensibilidad, deberán irse eliminando los supuestos simplificadores. Esta labor deberá detenerse cuando el modelo no pueda ser manejable o solucionable, en cuyo caso deberá recurrirse al proceso inverso..

El primer punto establece la relevancia que guarda el hecho de no concebir una gran prueba, sino más bien un proceso que procure ser exhaustivo. El segundo, por su parte, resume la discusión expuesta al principio.

- Establecer el objetivo que se persigue con el modelo y el que este persigue.

Con frecuencia el objetivo que se desea alcanzar no es el mismo que el formulado, esto provoca que los resultados que se obtengan resulten diferentes a los esperados, sin que ello indique un error de formulación sino de concepto, por lo que siempre es importante fijar claramente la meta que se persigue.

- Establecer símbolos y definir su significado.

Por alguna razón desconocida, frecuentemente esto representa un paso difícil de librar. Uno debe tratar de elegir símbolos que sugieran la interpretación o significado que guardan dentro del problema las variables de decisión. En otras ocasiones, sin embargo, puede resultar insalvable el manejo de notación abstracta.

- Escribir lo obvio.

Por lo general, en la etapa de formulación, se tratan de expresar funciones matemáticas complejas de las relaciones, limitaciones, condiciones, políticas y demás que se dan en la vida real. Pese a esto, existen ciertas restricciones inherentes que debido a su simplicidad llegan a ser transparentes. Ello requiere que se comienze a formular un problema con las relaciones más sencillas y por ende las más obvias, y se finalece con las más complejas.

- Una evaluación numérica sencilla puede ayudar a comprobar la correcta formulación de un modelo.

En la mayoría de los casos es posible verificar si una restricción esta correctamente formulada, al sustituir en ella valores cuyo resultado se conozca. En ocasiones lo anterior puede aplicarse a un conjunto de restricciones.

3.4.4 Manipulaciones Algebraicas:

Una vez que el modelo ha sido formulado, puede resultar necesario realizar cierto trabajo algebraico que permita simplificar la estructura de sus expresiones matemáticas, de tal forma que una computadora pueda ser utilizada en su resolución.

En esta labor, una computadora generalmente se auxilia de programas desarrollados para un fin específico. Un "paquete" es un conjunto de subprogramas de computación unidos a uno básico (denominado principal) que, a partir de ciertas instrucciones y de la alimentación de la información de un problema en particular, tiene la capacidad de producir resultados según la técnica que se emplee. Para ello, en algunos casos, es necesario que los datos posean un determinado formato de entrada entendible por una máquina. Existen paquetes que pueden realizar este trabajo por el usuario, pero no siempre es el caso, por lo que resulta conveniente tener en mente las siguientes transformaciones básicas a las que puede sujetarse un Problema de Programación Lineal.

1era. Transformación:
La función objetivo puede cambiarse al invertir los signos de los coeficientes involucrados en esta, por ejemplo:

Minimizar $z = 3X_1 - 2X_2 + 7X_3$ es EQUIVALENTE a

Maximizar $(-z) = -3X_1 + 2X_2 - 7X_3$.

2da. Transformación:
Cuando la función objetivo este afectada por una cantidad constante, esta podrá suprimirse para efectos de la aplicación del paquete de computación y agregarse a la solución óptima que se obtenga. Dicha cantidad representa un costo o ganancia independiente del nivel de las operaciones que se realicen.

3era. Transformación:
El sentido de las desigualdades: <= o =>, puede invertirse al multiplicar ambos lados de una restricción por un (-1), esto es:

$3X_1 - 5X_2 + X_3 <= -2$ es EQUIVALENTE a

$-3X_1 + 5X_2 - X_3 => 2$ y viceversa.

4ta. Transformación:
Una variable irrestricta es aquella que puede asumir valores tanto positivos como negativos incluyendo al cero. Existen dos formas posibles a las que estas pueden sujetarse, antes de que un paquete de computación sea usado:

(a) Sustituirla por la diferencia de dos variables positivas, tales que no hayan sido empleadas anteriormente en el modelo, es decir:

Si X es una variable irrestricta, haga:

$X = Y - Z$

donde Y y Z son variables positivas. Así, dondequiera que aparezca X deberá colocarse en su lugar la diferencia antes indicada. Una vez que el modelo sea resuelto podrá calcularse el valor de X al sustituir los valores obtenidos para las otras variables.

(b) Esta alternativa, consiste en eliminar tantas restricciones como variables irrestrictas existan. Suponga un modelo en el que hay una variable del tipo irrestrito, seleccione cualesquiera de las ECUACIONES donde aparezca esta, despeje y sustituya su expresión en todas y cada una de las demas restricciones, así como en la función objetivo. Elimine a la utilizada en el despeje. El nuevo problema tendrá tanto una restricción como una variable menos. Por ejemplo, en el siguiente modelo:

$$\text{Minimizar } z = X_1 + 3X_2 + 4X_3$$

sa

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 5$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 6$$
$$X_2 => 0,\ X_3 => 0$$

X_1 es una variable irrestricta, por lo tanto se despejará de la primer restricción:

$$X_1 = 5 - 2X_2 - X_3$$

y se sustituira tanto en la función objetivo como en la segunda restricción, obteniéndose el siguiente problema modificado:

$$\text{Minimizar } z = X_2 + 3X_3$$

sa

$$X_2 + X_3 = 4$$
$$X_2 => 0,\ X_3 => 0$$

tanto la variable irrestricta como la restricción usadas en el despeje quedan eliminadas. Una vez que el resultado sea obtenido en términos de las variables X_2 y X_3, el valor de la variable X_1 podrá obtenerse sustituyendo en la primer restricción los valores de X_2 y X_3.

De los dos métodos indicados, el primero es el más recomendable, dada su sencillez. La manipulación anterior obedece a que los paquetes de computadora única y exclusivamente resuelven modelos que involucran variables de tipo positivo.

5ta. Transformación:

Si una variable X tiene una cota inferior, X => L, más que incluir a esta como una restricción, puede ganarse cierta eficiencia computacional al sustituir (X' + L) por X, dondequiera que aparezca en la formulación. Observe que la variable X' no necesita estar restringida por otra condición aparte de la de no negatividad, ya que X => L es equivalente a X' => 0. Por ejemplo, en el siguiente problema:

$$
\begin{array}{l}
\text{Minimizar } z = 6X_1 + 2X_2 \\
\quad \text{sa} \\
\qquad \begin{array}{rcrcl}
X_1 & + & 3X_2 & => & 3 \\
5X_1 & + & X_2 & => & 4 \\
X_1 & & & => & 2 \\
 & & X_2 & => & 1
\end{array}
\end{array}
$$

las variables X_1 y X_2 estan acotadas inferiormente por 2 y 1 respectivamente. Si se quiere conseguir eficiencia computacional reduciendo el tama&o del problema, defina a:

$$
\begin{array}{l}
Y_1 = X_1 - 2 => 0 \\
Y_2 = X_2 - 1 => 0
\end{array}
$$

con:

$$
\begin{array}{l}
X_1 = Y_1 + 2 \\
X_2 = Y_2 + 1
\end{array}
$$

y sustituya estas expresiones en el original obteniendo el siguiente:

$$
\begin{array}{l}
\text{Minimizar } z = 6(Y_1 + 2) + 2(Y_2 + 1) \\
\quad \text{sa} \\
\qquad \begin{array}{rcrcl}
(Y_1 + 2) & + & 3(Y_2 + 1) & => & 3 \\
5(Y_1 + 2) & + & (Y_2 + 1) & => & 4 \\
Y_1 + 2 & & & => & 2 \\
 & & Y_2 + 1 & => & 1
\end{array}
\end{array}
$$

que puede expresarse como:

$$
\begin{array}{l}
\text{Minimizar } z = 6Y_1 + 2Y_2 + 14 \\
\quad \text{sa} \\
\qquad \begin{array}{rcrcl}
Y_1 & + & 3Y_2 & => & -2 \\
5Y_1 & + & Y_2 & => & -7 \\
Y_1 & & & => & 0 \\
 & & Y_2 & => & 0
\end{array}
\end{array}
$$

una vez que el problema se resuelva, se podrán determinar los valores de las variables originales, con solo sustituir los de $Y1$ y Y_2 en las expresiones correspondientes. La reformulación anterior constituye un ahorro, pues en el problema modificado sólo se utilizan dos restricciones, mientras que en el original se emplean cuatro (las condiciones de no negatividad no se cuentan). Esta ganancia resulta evidente cuando se manejan modelos de grandes dimensiones.

6ta. Transformación:

Una desigualdad del tipo <= puede ser transformada en igualdad, a&adiendo una nueva variable positiva denominada holgura, es decir:

$X_1 + X_2 + 3X_3 <= 4$ puede convertirse en:

$X_1 + X_2 + 3X_3 + H = 4$

donde:

H representa a la variable de holgura.

7ma. Transformación:

Una desigualdad del tipo => puede ser transformada en igualdad, a&adiendo una nueva variable positiva denominada exceso, es decir:

$X_1 + X_2 + 3X_3 \Rightarrow 4$ puede convertirse en:

$X_1 + X_2 + 3X_3 - E = 4$

donde:

E representa a la variable de exceso.

Cabe aclarar que las variables de holgura o exceso que se agregan a un Modelo de Programación Lineal, no afectan al valor óptimo que la función objetivo pudiera alcanzar, si estas no hubieran sido incluidas. Esto se debe a que en el punto de operación óptimo, los recursos de que se dispone no necesitan utilizarse a su nivel máximo para que se alcance una meta determinada (maximización o minimización). Así, en la solución óptima podrán existir recursos cuyo empleo se fije alrededor de algún punto específico, esto provocará la existencia ya sea de holguras o excesos inherentes al problema. Debido a que estos recursos no estan siendo empleados, se les asigna una contribución nula en la función objetivo, sin embargo, puede imputárseles, en algunos casos, costos penales que contabilicen su efecto.

Existen algunos problemas en los que es necesario agregar condiciones adicionales para que un paquete de computación pueda comenzar a resolverlos, sin embargo, la mayoría están provistos de tal "utilería", por lo que son capaces de generarlas, sin por ello dejar de mencionarlas en el proceso de solución. Dichas condiciones reciben el nombre de variables "artificiales", y su finalidad es la de "facilitar" el trabajo de la computadora en la determinación de la solución óptima. Dadas sus características, debe cumplirse siempre que su valor en el punto óptimo sea nulo, es decir cero, ya que su uso fue meramente auxiliar; en caso de que esto no ocurra puede estarse seguro de que la formulación es incorrecta, por lo que será necesario revisar la estructura del modelo. Como regla puede establecerse que las variables artificiales solo serán agregadas en ecuaciones e irán acompa&adas de un coeficiente unitario. Por ejemplo, a la restricción:

$3X_1 + 5X_2 = 6$

puede agregársele una variable artificial (A), quedando de esta forma expresada como:

$3X_1 + 5X_2 + A = 6$

Siempre que se agregue una variable artificial a una restricción debe tenerse el cuidado de revisar que no haya sido utilizada anteriormente. En general, siempre se les asocia costos penales muy elevados en la función objetivo, para que el método simplex tienda a eliminarlas, así, si se esta maximizando, se les asignará un valor negativo muy elevado (M = -10,000,000, por ejemplo), en el caso de minimización deberá ser una cifra positiva (M = 10,000,000, por ejemplo). El lector puede referirse al Apéndice A para un tratamiento más detallado del tema.

REFERENCIAS:

[5]
[6] Capítulo 3.
[8] Capítulo 7 y lecturas 8-1 a 8-4.
[14] Capítulos 1 al 3.
[19] [23] y [45] Capítulo 1.
[22] Capítulo 7.
[24]
[48]
[64] y [69] Capítulo 2.
[78] Capítulo 6.
[85] Capítulos 1 al 5.

PREGUNTAS:

1. Dentro del contexto presentado, que entiende por el término: Programación.

2. a) Cuáles son los supuestos básicos de un Modelo de Programación Lineal?.
   b) Dé ejemplos en los que los supuestos no se cumplan.
   c) Cómo afectan los supuestos en la interpretación de los resultados?.

3. Indique áreas en las que usted cree que la Programación Lineal pueda ser aplicada dentro del sector público, si es posible, de ejemplos.

4. a) Qué entiende por maximización y por minimización?.
   b) Dé ejemplos de aspectos susceptibles a maximizar y a minimizar.

5. Indique ventajas y desventajas del uso de la Programación Lineal en la resolución de problemas.

PROBLEMAS:

1. Campbell's de México tiene a la venta dos tipos de sopas, los ingredientes por litro son los siguientes:
   Sopa Tipo 1: 2 papas, una almeja, 0.85 litros de agua, 0.05 litros de salsa de jitomate.
   Sopa Tipo 2: 0.5 papas, una almeja, 0.65 litros de agua, 0.25 litros de salsa de jitomate.
   Las almejas cuestan $50 cada una, el jitomate $300 el litro, las papas $15 cada una, y el consumo del agua se considera una cifra despreciable, monetariamente hablando. En Campbell's, los inventarios de los ingredientes son los siguientes: 200,000 papas, 200,000 almejas, 20,000 litros de salsa de jitomate, y cantidades ilimitadas de agua. Las dos variedades de sopas se venden al mismo precio ($500), y se supone que su inventario no saturará al mercado actual.

a) Defina símbolos que representen a cada uno de los ingredientes que se utilizan en el proceso de producción de las sopas, asimismo, literalmente descríbalos en forma breve.
b) Indique las restricciones que afectan el uso de los ingredientes.
c) Pruebe las restricciones formuladas en el inciso b), usando las cantidades que se necesitan para producir un litro de cada una de las sopas.
d) Si Campbell's planeara comenzar la producción de la sopa del tipo 1 únicamente, cuántos litros podría producir utilizando el nivel de inventario que posee?. Qué ingredientes quedarían como sobrantes?.
e) Responda el inciso d), para la sopa del tipo 2, suponiendo que la del tipo 1 no será producida.
f) Suponiendo que los ingredientes que no se utilicen en el proceso productivo, serán descartados, indique la manera en la que Campbell's podría obtener la máxima ganancia con el nivel de inventarios que posee, sin necesidad de comprar materia prima del exterior. (Formule un Problema de Programación Lineal).

2. Los ejecutivos de Campbell's encontraron bastante interesante el uso de un Modelo de Programación Lineal, sin embargo, este no resuelve el verdadero problema. Estos planean la producción en términos de una base trimestral. Al fin de cada período, cualquier sobrante en la sopa se deduce de la demanda programada para el siguiente trimestre. Así, los planes de producción y decisiones de compras, son hechos basándose en el principio de no permitir que la oferta exceda la demanda modificada. Los precios vigentes así como los inventarios de los ingredientes del período anterior entrarán en la decisión. Sin embargo, las programaciones nunca son precisas, ya que Campbell's adquiere los ingredientes a través de contratos con diferentes fuentes, cuyos servicios varían. Aun más, los planes de producción son modificados siempre que la demanda se desvíe en forma significativa de lo planeado. Como consecuencia, no es raro que existan sobrantes de los ingredientes y/o de sopa para períodos subsecuentes. Los ingredientes sobrantes se consideran como recursos a costos nulos en su plan trimestral.
La demanda programada para el próximo trimestre asciende a 500,000 litros de la sopa tipo 1 y 450,000 litros de la tipo 2, y seran vendidas a $525 y $500 respectivamente. Información concerniente a los ingredientes se dá en el problema 1. Al momento existen 50,000 litros sobrantes de la sopa tipo 2.
a) En la formulación del Modelo de Programación Lineal, porqué es importante usar variables diferentes para los recursos a ser usados por parte del inventario o a ser comprados del exterior?.
b) Defina las variables para este problema, auxiliándose de símbolos apropiados.
c) Escriba las restricciones y defínalas con palabras.
d) Qué función objetivo debe ser usada?. Porqué?. Formúlela y explique.
e) Categorice a cada una de las restricciones, de acuerdo a su tipo.
f) Existe una respuesta obvia a este problema, puede detrminarla? Explique.
g) Suponga que el departamento de ventas ha informado que las papas pueden ser adquiridas a partir de un proveedor externo bajo las condiciones siguientes: Para el siguiente trimestre, se estima que hasta 150,000 papas pueden ser adquiridas a un precio de $15 cada una, 300,000 papas adicionales estaran a la venta a un precio de $25 cada una. Como incluiría estas condiciones en el modelo?.

3. Una compañía de transportes tiene tres plantas y cuatro distribuidoras. La siguiente información ha sido obtenida para la planeación agregada para el próximo trimestre; todas las cifras se dan en miles de unidades.

Planta	Costo de Producción Unitario	Capacidad de la Planta	Distribuidora	Demanda
A	$500	1,200	1	700
B	$600	1,200	2	400
C	$450	500	3	600
			4	500

COSTOS DE TRANSPORTE POR MIL UNIDADES

A: / DE:	1	2	3	4
A	50	75	200	150
B	250	100	125	100
C	125	225	150	125

Precio promedio de ventas = $750 el millar en todas las distribuidoras

a) Suponga que la función objetivo es minimizar los costos, con límites superiores en la producción debido a las capacidades de las plantas, y límites superiores en las cantidades a ser enviadas, de tal forma que cada distribuidora recibe no más que la demanda esperada. Explique porqué la solución óptima a este problema es cero. Cómo deben establecerse las restricciones de demanda para prevenir este hecho?.

b) Suponga que el objetivo es maximizar la ganancia. Qué clase de restricción debe ser usada para relacionar a la demanda con la producción: igualdad, límite superior, límite inferior?. Explique.

c) Formule este problema mediante un Modelo de Programación Lineal que maximice las ganancias, defina previamente a las variables de decisión.

d) La compañía desea gastar no más de $200,000,000 en el transporte. Refleje esta restricción en el modelo.

e) Suponga que existe una oferta de 50,000 unidades adicionales de la planta C a un costo adicional de $25 por unidad en miles transportada. Modifique el modelo para permitir el uso o no de esta disponibilidad adicional.

4. Una compañía elabora dos tipos de cemento. Cada uno tiene una demanda mínima que debe ser cubierta para satisfacer a los contratos fijos. Los mínimos son 5,000 toneladas del cemento A y 4,000 del B. Cada tonelada del primero se compone de 0.5 toneladas del ingrediente 1, 0.3 toneladas del ingrediente 2, y 0.2 toneladas del ingrediente 3. La composición del B es 0.4, 0.2, y 0.4 toneladas de los ingredientes 1, 2 y 3. Cada tonelada del cemento A se vende a $100,000 y cuesta $10,000 manufacturarlo. El B también cuesta $10,000, pero se vende a $85,000 la tonelada. Los ingredientes 1 y 3 se consideran como recursos ilimitados, pero el 2 puede ser adquirido en un volumen no superior a las 15,000 toneladas.

a) Formule un Modelo de Programación Lineal para el problema expuesto.

b) La formulación del modelo es incompleta. Qué información se necesita para completarla?.

c) Utilizando letras complete la formulación.

5. Considere a una empresa que se encuentra a cargo de la seguridad en un aeropuerto. Debido a las necesidades, el volumen de personal varía a lo largo del día. El patron de horarios y requerimientos se presenta a continuación:

	#1	#2	#3	#4	#5	#6
Período:	(2 A.M.- 6 A.M.)	(6 A.M.- 10 A.M.)	(10 A.M.- 2 P.M.)	(2 P.M.- 6 P.M.)	(6 P.M.- 10 P.M.)	(10 P.M.- 2 A.M.)
Personal Mínimo:	20	50	60	75	60	30

El personal de seguridad trabaja 8 horas, su horario debe ser programado de tal forma que sea ininterrumpido (2 horarios de 4 horas seguidas) de acuerdo al programa indicado. La empresa desea minimizar la flotilla de trabajo que utiliza. Formule un Modelo de Programación Lineal.

6. Suponga que una compañía cafetalera tiene las siguientes disponibilidades (en grano) cada semana:

Brasileiro	3,000 kilos
Colombiano	1,500 kilos
Mexicano	1,000 kilos

Cada tipo tiene diferentes características, que deben combinarse con la finalidad de obtener la mezcla que se requiere en lo que respecta a acidez, cafeina y consistencia. La tabla siguiente indica esas propiedades:

Ingrediente:	Brasileiro	Colombiano	Mexicano
Acidez	4	5	3
Cafeina (%)	0.03	0.02	0.05
Consistencia	9	7	8
Costo ($/kilo)	625	800	500

La acidez y consistencia se miden en una escala estándar de 1 a 10, y el contenido en cafeina es expresado en porcentaje. Suponga que la compañía desea manufacturar dos productos, uno regular y uno especial, con los siguientes requerimientos:

	Regular:	Especial:
Acidez (máximo)	4.5	4.0
Acidez (mínimo)	3.5	-
Cafeina (máximo)	0.04	-
Consistencia (mínimo)	-	8.6

El regular se venderá a $1,375 el kilo, y el especial a $1,750. Formule un Modelo de Programación Lineal que permita a la empresa maximizar sus ganancias.

7. Suponga que una empresa manufactura dos productos, los recursos escasos son: horas-máquina y horas-hombre. La tabla siguiente describe el uso de estos por unidad de producción:

	Producto 1	Producto 2
Horas-Hombre/unidad	5	3
Horas-Máquina/unidad	4	6

Suponga que existen 100 horas-hombre y 200 horas-máquina disponibles, además asuma que los productos 1 y 2 generan ganancias de $2,200 y $2,600 por unidad respectivamente.

a) Formule un Modelo de Programación Lineal.

b) Suponga 2 períodos en los que se han comprometido los siguientes volúmenes de unidades:

	Producto 1	Producto 2
Período 1	5	10
Período 2	12	15

en cada uno se disponen de 100 horas-hombre y 200 horas-máquina. Observe que los recursos son insuficientes para cumplir con los compromisos en el segundo período. Formule un Modelo de Programación Lineal que incluya la posibilidad de generar un inventario al final de cada período con el objeto de cubrir la demanda indicada. Suponga que los cargos por inventario en cualesquier período son $200.

c) Suponga que en el período 2 no se quiere contar con un nivel de inventario para subsecuentes compromisos, de qué manera se modifica el modelo formulado en el inciso 2?.

d) Suponga que se permiten ordenes rechazadas a un costo de $300 en cualquier período, de tal forma que puede existir tanto un inventario positivo como uno negativo (al costo indicado). Modifique el Problema de Programación Lineal.

8. Una compañía manufactura dos modelos de trituradoras de piedra. Las ventas de estos dos productos así como de las cuchillas (la empresa no vende otras partes en forma individual) son promovidos por el departamento de ventas. Las proyecciones de la demanda para el próximo trimestre son las siguientes:

Producto	Descripción	Precio de Venta	Demanda Prevista (Prox. Trimestre)
BS1	Trituradora Ligera	$ 7,000,000	250
BS2	Trituradora Pesada	$23,000,000	150
P2	Cuchilla de Repuesto	$ 1,700,000	5,000

En el proceso de fabricación, la materia prima es procesada en partes que van al área de ensamble, donde son almacenados hasta que vayan a ser empleados. Además de las partes fabricadas, el ensamble de una trituradora requiere de dos elementos que son comprados de un proveedor externo. Otro proveedor vende la parte P4, pero por el momento la compañía elabora las piezas que necesita. La decisión de, hacer o comprar este bien esta siendo considerada. Los requerimientos de fabricación y ensamble, así como una lista de los materiales que se necesitan para cada producto y para cada una de sus partes se muestra a continuación:

	MATERIA PRIMA REQUERIDA POR PARTE		
Parte	MP1	MP2	Horas de Trabajo por Parte
P1	25	0	0.1
P2	37	700	2.0
P3	0	12	2.0
P4	0	170	25.0

	PARTES REQUERIDAS POR TRITURADORA				SUBENSAMBLES		
Modelo	P1	P2	P3	P4	SE1	SE2	Trabajo
BS1	3	2	4	2	1	0	0.3
BS2	6	5	4	1	2	1	1.0

Los precios de los productos que pueden ser comprados en el exterior así como sus disponibilidades son:

Producto	Precio	Límite de Compra
P4	\$ 517,500	Sin limite
SE1	\$1,575,000	450
SE2	\$9,000,000	Sin limite
MP1	\$ 2,500	750,000
MP2	\$ 2,500	Sin limite
Trabajo	\$ 4,250/hr.	Sin limite

Aunque la información indica que las ventas máximas ascienden a 250 + 150 = 400 trituradoras, existe cierta sustituibilidad entre ambos modelos. Las ventas máximas han sido estimadas en 360. La empresa desea fijar una producción mínima de 300 máquinas. El ejecutivo de compras ha indicado un presupueto máximo de \$3,600 millones, destinados a la compra de subensambles y materia prima. La restricción de pesupuesto no se aplica a las partes del tipo 4 (P4), aun si la empresa deseara comprarlas del exterior. Formule un Modelo de Programación Lineal que le permita a la empresa lograr su objetivo.

10. Un Modelo de Programación Lineal se dice que esta en forma canónica cuando presenta cualesquiera de las siguientes estructuras matemáticas:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar } z = & c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n \\
\text{sa} & \\
& a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1 \\
& a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m \\
& X_1,\ X_2,\ \dots\ X_n \geq 0
\end{array}
$$

o:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar } z = & c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n \\
\text{sa} & \\
& a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \geq b_1 \\
& a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \geq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \geq b_m \\
& X_1,\ X_2,\ \dots\ X_n \geq 0
\end{array}
$$

donde:

Existen m restricciones, $i = 1, 2, \dots, m$.
Existen n variables de decisión $j = 1, 2, \dots, n$.
a_{ij} es el coeficiente tecnológico del recurso i por unidad de actividad j.
X_j es la j-ésima variable de decisión.
c_j es el costo, contribución o ganancia de la j-ésima variable de decisión.
b_i es el volumen del i-ésimo recurso.

con base en lo anterior, exprese en forma canónica a cada uno de los modelos formulados en los problemas 2 al 7.

11. Un Modelo de Programación Lineal se dice que esta en forma estándar cuando presenta la siguiente estructura matemática:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar } z = & c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n \\
\text{sa} & \\
& a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\
& a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m \\
& X_1,\ X_2,\ \dots\ X_n \geq 0
\end{array}
$$

o:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar } z = & c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n \\
\text{sa} & \\
& a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\
& a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2 \\
& \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
& a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m \\
& \quad X_1 , \quad X_2 , \dots \quad X_n => 0
\end{array}
$$

con base en lo anterior, exprese en forma estándar a cada uno de los modelos formulados en los problemas 1 al 7.

TEMA 4: SOLUCION E INTERPRETACION DE LOS MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL.

'Defendit numerus,' [hay salvación en los números] es la máxima del tonto;
'Deperdit numerus,' [hay ruina en los números] la del sabio.

C. C. COLTON

4.1 Introducción

Una vez formulado el modelo, es necesario determinar la técnica a emplear para su resolución. Tener una noción de su funcionamiento ayudará a que su aplicación se realice de manera más efectiva; como se indicó en el tema anterior, dada la complejidad de los problemas reales, resulta imprescindible el uso de una computadora para el desarrollo de esta actividad.

La interpretación de los resultados es una de las partes medulares en el proceso de resolución que auxiliará, en primer término, a validar la correcta formulación del modelo, y en segundo, a realizar una interpretación más profunda de la realidad bajo estudio, utilizando la "intuición". Ambos aspectos son explicados en el transcurso del presente tema, dando una mayor relevancia al interpretativo, con el objeto de desarrollar en el lector la capacidad de obtener elementos que le permitan estudiar el medio que le rodea.

4.2 Mecanismos de Resolución

La determinación de los resultados es una etapa en la que es necesaria la aplicación de diversos procedimientos que, en ocasiones, tienen que seguirse en un orden fijo. La finalidad de la Programación Lineal como se indicó anteriormente, es determinar los valores de las variables controlables de tal forma que se optimice el objetivo deseado, satisfaciendo al mismo tiempo cada una de las restricciones a las que están sujetos los modelos. Para ello se han creado diferentes mecanismos de resolución, de estos, los que se considerarán en el subsecuente desarrollo son:

1. El Método Gráfico.

2. El Método Simplex.

4.3 El Método Gráfico.

Para ejemplificar este método, se retomará el problema de los cinturones, cuya formulación fué la siguiente:

Ejemplo 4.1:

	Minimizar z = 1,300CLUJO +	1,000CECON	
	sa		
Tiempo	2CLUJO +	CECON <=	1,000
Piel	CLUJO +	CECON <=	800
Hebillas-Lujo	CLUJO	<=	400
Hebillas-Económico		CECON <=	700
No Negatividad	CLUJO,	CECON =>	0

El ejecutivo de mercadotecnia comentó, una vez que llegaron a la formulación del modelo, que dada su sencillez, podría ser resuelto en términos del Método Gráfico, explicandolo así:

EJECUTIVO: El Método Gráfico permite resolver un problema a través de un plano cartesiano (dos dimensiones) o un espacio (tres), según el número de variables que se esté empleando; que en este caso es dos, por lo que resulta bastante sencillo solucionarlo. Para graficarlo se considerará, en primer término, a la restricción concerniente al tiempo como ecuación, ya que esto facilita la tarea. Hay que recordar que para trazar una recta solo se necesitan conocer dos de sus puntos, para ello, puede fijarse un valor para la variable CLUJO, y calcular el correspondiente a CECON. Sea:

CLUJO = 0 entonces: CECON = 1,000,

así, el primer punto de la recta será el (0,1,000). Para el segundo se hace:

CLUJO = 0 entonces: CECON = 500,

es decir, (500,0). La recta correspondiente se muestra en la figura 4.1.1, y servirá para determinar el conjunto de puntos que satisfacen a la restricción:

2CLUJO + CECON <= 1000

Una manera sencilla de localizarlo, es sustituyendo en ella al origen (0,0), y tomar cualesquiera de los siguientes criterios, según sea el caso:

- Si el origen la satisface, todos los puntos del mismo lado del origen también la satisfacen.

- En caso contrario, se encontrará en el otro lado.

Con base en lo anterior, puede observarse que:

2(0) + 0 < 1000

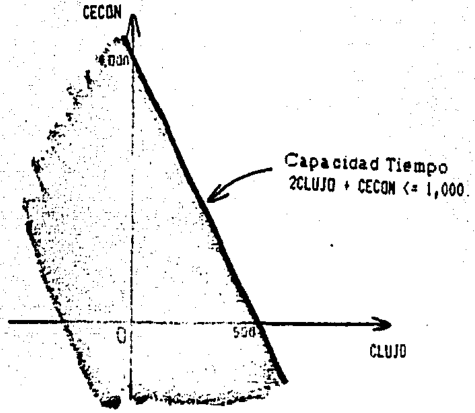


Figura 4.1.1

por lo que se aplica el primer criterio. La región sombreada que se muestra en la figura 4.1.1. corresponde al conjunto de puntos que satisfacen a la restricción. Siguiendo un procedimiento análogo para cada una de las restantes, se obtienen las gráficas mostradas en las figuras 4.1.2 a la 4.1.6, donde las zonas sombreadas indican la disponibilidad que se tiene por separado de cada uno de los recursos, cualquier punto externo será infactible. Dado que en el proceso productivo los recursos son empleados conjuntamente, habrá que determinar la región común a todas las restricciones, para ello, será necesario graficarlas en un mismo plano cartesiano y hallar la intersección de los puntos que las satisfacen, obteniéndose con ello el conjunto sobre el que puede operarse.

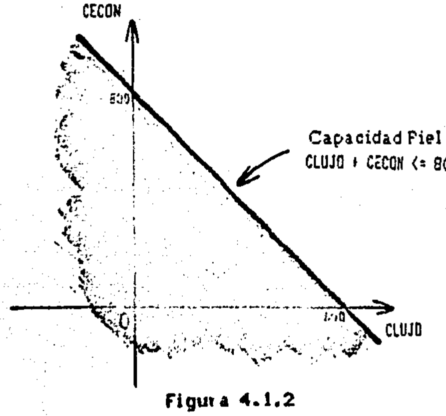


Figura 4.1.2

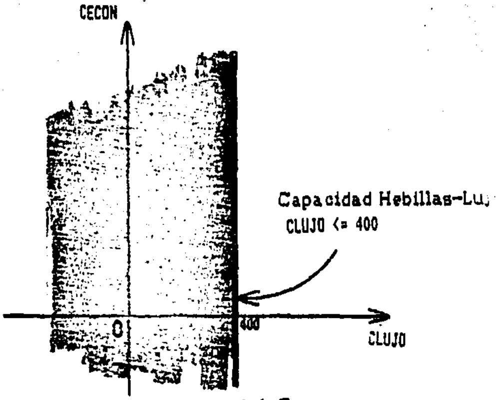


Figura 4.1.3

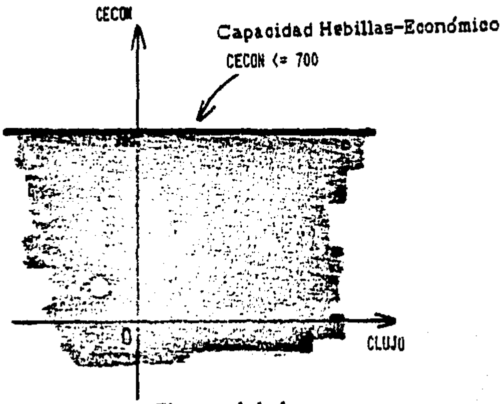


Figura 4.1.4

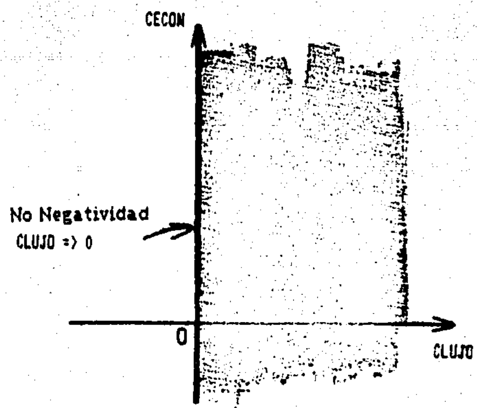


Figura 4.1.5.

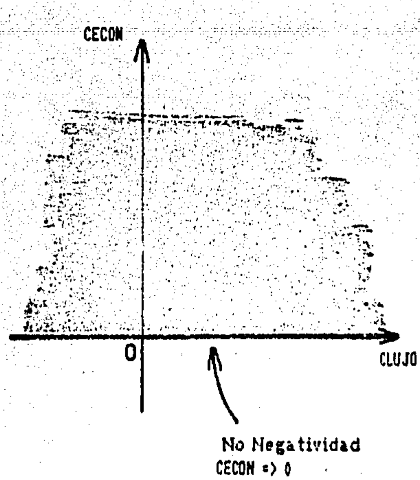


Figura 4.1.6.

Dicho conjunto recibe el nombre de Región Factible; la región factible del problema se muestra en la porción sombreada de la figura 4.1.7. Como puede observarse, existe una infinidad de valores, o puntos, sobre los cuales es posible operar. De todos al menos uno es el óptimo, es decir, uno es el que minimiza el costo de producción.

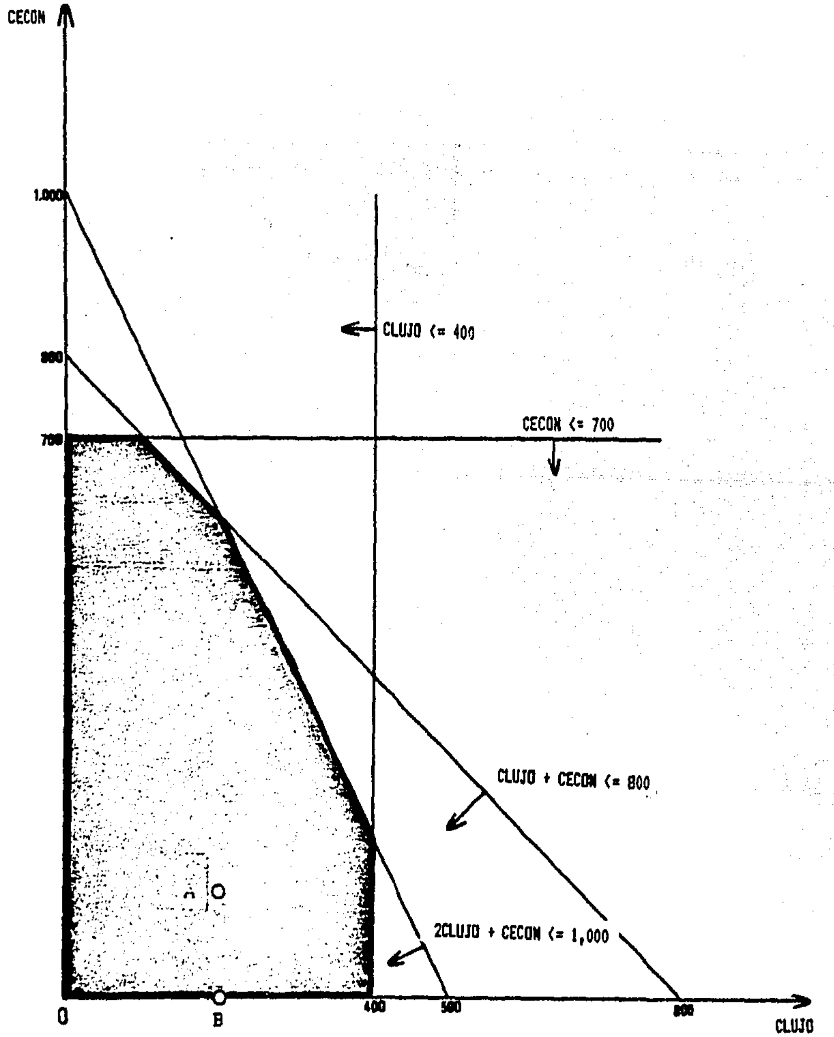


Figura 4.1.7.

EMPRESARIO: Pero, cómo es posible encontrar la solución óptima?.

EJECUTIVO: Primero, observe que en la figura 4.1.7 ningún punto interior, como A, puede ser óptimo, ya que es factible disminuir el valor de la función objetivo, con solo reducir el nivel de producción hasta algún punto que se encuentre en una de las restricciones, por ejemplo en el punto B. De igual forma, B puede moverse hacia la izquierda disminuyendo aun más el valor de la función objetivo. Esto demuestra que la solución óptima, si existe, tiene que estar localizada en algún extremo de la Región Factible.

EMPRESARIO: Pero esto implicaría que la mejor opción es no producir!.

EJECUTIVO: Sí, ya que al considerar únicamente costos y ninguna restricción mínima de producción, se esta buscando un nivel de operación que cueste lo menos posible, lo cual se consigue produciendo absolutamente nada. Por lo que puede deducirse que el objetivo más adecuado es: determinar el número de cinturones que, de cada tipo, deben producirse con el objeto de obtener la mayor ganancia. Para ello, será necesario calcular la ganancia bruta de cada cinturón a partir de sus precios de venta.

EMPRESARIO: De acuerdo a la información proporcionada por el Departamento de Ventas, los precios son:

	Precio de Venta:
Cinturón de Lujo:	$ 1700
Cinturón Económico:	$ 1300

EJECUTIVO: La ganancia bruta se determina restando al precio de venta los costos de operación:

Cinturón:	Precio de Venta	-	Costos de Operación	=	Ganancia Bruta
Lujo	1700	-	1300	=	400
Económico	1300	-	1000	=	300

Por lo que la función objetivo será:

Maximizar z = 400CLUJO + 300CECON.

EMPRESARIO: Siguiendo el razonamiento anterior, para hallar al punto óptimo solo tendrán que evaluarse única y exclusivamente los vértices de la Región Factible?.

EJECUTIVO: Sí. Para comprender de una manera más intuitiva esto, observe lo siguiente: la situación actual, en la que por el momento no se tiene ningún nivel de producción, está determinada por el origen, es decir:

CLUJO = CECON = 0 punto (0,0)

el cual pertenece a la Región Factible. Dado que la finalidad es desplazarse a lo largo de su contorno, se esta ante dos posibles caminos:

- Ir en dirección del punto que en la figura 4.1.8, se ha denotado como A, es decir, producir únicamente cinturones económicos, o

- Dirigirse al punto E, produciendo únicamente cinturones de lujo.

La primera opción proporciona una ganancia de $300 por unidad y de acuerdo a la Región Factible, pueden producirse hasta 700 a lo más, la segunda, por su parte, aporta $400 por unidad y su nivel máximo de producción es 400 unidades.

Una producción de 700 cinturones económicos proporciona una ganancia bruta de:

(300)(700) = $210,000

mientras que una de 400 cinturones de lujo aporta:

(400)(400) = $160,000

La mejor opción es producir 700 cinturones económicos, implicando con ello un desplazamiento al punto A, en el que se tendrán nuevamente dos opciones:

- Ir al origen.

- Dirigirse al punto B, que implica producir cinturones de lujo.

Obviamente, la primer opción no conviene. La segunda, por su parte, indica que es posible manufacturar cinturones de lujo, sin por ello disminuir la de los económicos. Por lo tanto, el desplazarse hacia B, donde la máxima fabricación factible de cinturones de lujo es 100, producirá una ganancia adicional de:

(400)(100) = $ 40,000

que sumada a la ya obtenida proporciona una ganancia total de:

210,000 + 40,000 = $250,000.

EMPRESARIO: La siguiente opción será tomar la dirección al punto C, lo cual implica una disminución en la producción de los cinturones de lujo, que aparentemente resultó bastante efectiva. Hablando en términos de la ganancia, será conveniente?.

EJECUTIVO: Para medir las implicaciones que produce el dirigirse hacia C habrá que evaluar la ganancia que es posible obtener al desplazarse a lo largo de la restricción de Piel (porqué?):

CLUJO + CECON = 800

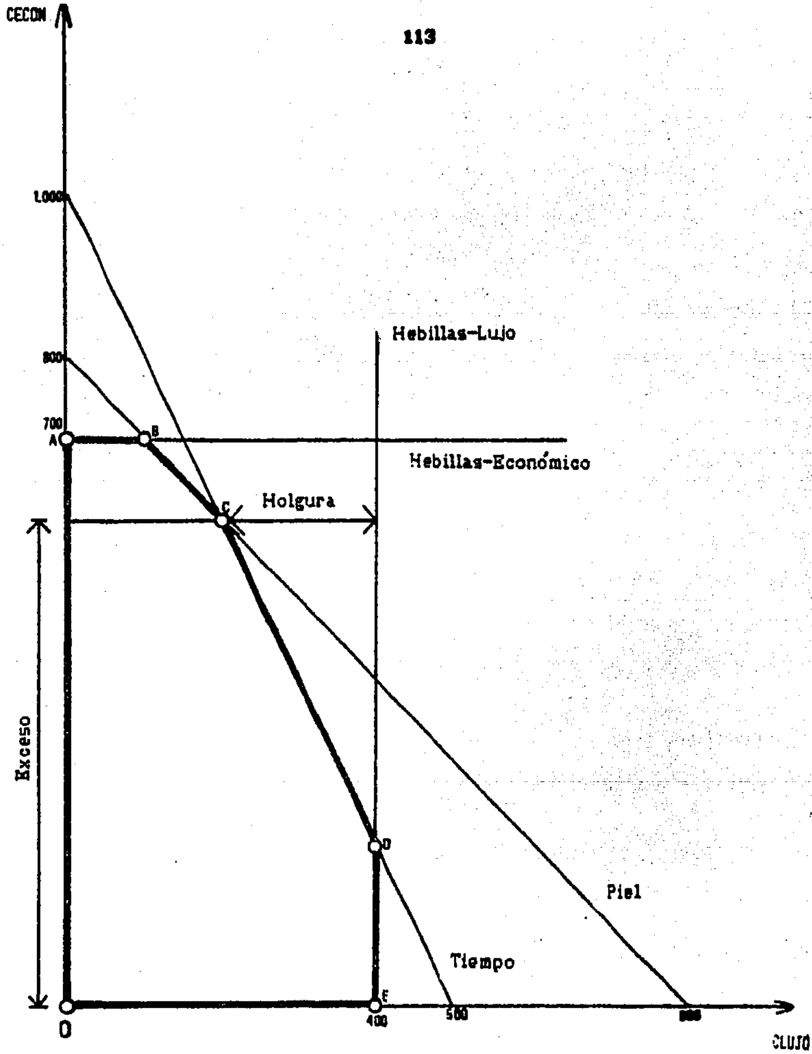


Figura 4.1.8.

Esta indica que por cada cinturón de lujo adicional que se quiera fabricar será necesario dejar de producir uno económico. En términos monetarios un aumento unitario en los cinturones de lujo produce una ganancia de:

(400)(1) = $400

una reducción en los económicos, disminuye la ganancia en:

(300)(1) = $300

por lo que, la ganancia neta ante el cambio es:

400 - 300 = $100

como es positiva, puede concluirse que esta opción es económicamente viable. Es decir, convendrá dirigirse al punto C, aumentando la producción de cinturones de lujo de 100 a 200 y disminuyendo la de los económicos de 700 a 600, obteniendo con ello una ganancia total de:

Ganancia Anterior:		= $250,000
Ganancia ante el cambio	(100)(100)	= $ 10,000
Ganancia Total		$260,000

la cual es superior a la anterior.

EMPRESARIO: El siguiente camino es dirigirse a D, que implica una reducción aun mayor en la fabricación de los cinturones del tipo económico, y un incremento en los de lujo. Dicho movimiento tendrá que hacerse ahora a lo largo de la restricción Tiempo:

2CLUJO + CECON = 1000

Esta indica que un cinturón de lujo cuesta en tiempo-producción lo mismo que dos económicos. Con base en lo anterior el cambio en la ganancia es:

400 - (2)(300) = - $600

el cual es negativo!.

EJECUTIVO: Y por lo tanto incosteable. Por lo tanto, el punto C es el Optimo de la Región Factible, ya que en el se alcanza la máxima ganancia posible. La solución óptima será producir:

200 cinturones del tipo 1, y

600 cinturones del tipo 2,

con una ganancia de $260,000.

EMPRESARIO: Cómo podría explicarse el cambio relativo entre ambos tipos de cinturones?.

EJECUTIVO: Muy sencillo, el primer cambio resultó conveniente, pues un aumento en la producción de los cinturones de lujo provocó un efecto en la función objetivo que superó a la disminución en la producción de los económicos, esto se debe a que la cantidad de piel que consume cada uno es la misma. En el segundo cambio, la reducción de cinturones económicos provocó un mayor impacto que los de lujo, debido a que estos últimos consumen el doble de tiempo de los primeros, siendo por ello más caros en comparación con la ganancia que proporcionan.

EMPRESARIO: El Jefe del Departamento de Ventas informó que la producción mínima de cinturones de lujo debe ser 450, para que resulte atractivo su proyecto de manufactura. De qué manera afecta esto al modelo?.

EJECUTIVO: Para reflejar esta condición, bastará incluir una restricción adicional: así, el problema a solucionar será:

Maximizar z =	400CLUJO +	300CECON		
sa				
Tiempo	2CLUJO +	CECON	<=	1000
Piel	CLUJO +	CECON	<=	800
Hebillas-Lujo	CLUJO		<=	400
Hebillas-Económico		CECON	<=	700
Demanda	CLUJO		=>	450
No Negatividad	CLUJO,	CECON	=>	0

que se muestra en la figura 4.1.9. Observe que los puntos factibles para la nueva restricción deben localizarse a su derecha.

EMPRESARIO: Pero de acuerdo a la definición de Región Factible, aquí no hay algún punto que satisfaga a todo el conjunto de restricciones, pues la de demanda no es congruente con la de las hebillas de lujo.

EJECUTIVO: En efecto, cuando esto ocurre se dice que el problema no admite solución factible, es decir, esta es infactible o inconsistente. Por lo tanto, lo sugerido por el Jefe del Departamento de Ventas es practicamente imposible, a menos que se decida comprar recursos en el exterior, en particular, más hebillas.

EMPRESARIO: Que pasaría con el punto óptimo, si por recuperar la ganancia que se hubiera obtenido al producir 450 cinturones de lujo, se aumentaran los precios de venta, y con ello las ganancias de cada tipo (como se muestra en el cuadro 4.1), sin que esto deje de asegurar la venta de toda la producción?.

CUADRO 4.1: Propuesta de Cambios.

Cinturón:	Precio de Venta	-	Costos de Operacion	=	Ganancia Bruta
Lujo	2100	-	1300	=	800
Económico	1400	-	1000	=	400

EJECUTIVO: Para ello habrá que analizar nuevamente las implicaciones involucradas en cada movimiento. Las opciones a seguir, de acuerdo a la figura 4.1.8, son:

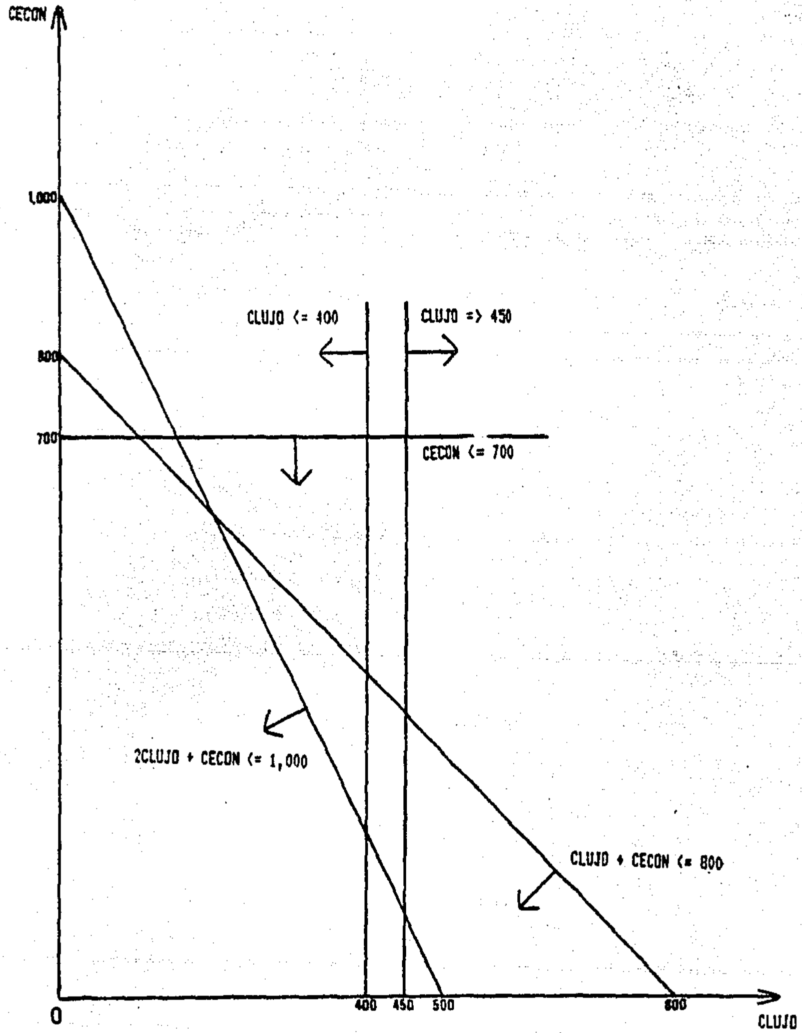


Figura 4.1.9.

- Dirigirse a B, pues no se sabe si el cambio en los precios convirtió a este punto como el mejor.

- Ir a D.

La primer opción resulta inconveniente, pues si con las ganancias anteriores, en las que la asociada al cinturón de lujo superaba por $100 a la del económico, se prefería al punto C sobre el D, ahora con mayor razón estará justificada tal preferencia, pues la diferencia se duplica a favor del cinturón de lujo.

Considerando al punto D, se tendrá la siguiente ganancia bruta al tomarlo como opción:

(800)(1) - (2)(400) = 0

es decir, aumentar la producción de los cinturones de lujo en una unidad, provocando una disminución de dos en los económicos, no aportará ningún aumento o perdida en las ganancias; por lo que desplazarse al punto D implicará el mismo nivel de ganancias. De esta forma, el volumen de producción podrá ser:

200 cinturones de lujo, y

600 cinturones económicos.

o 400 cinturones de lujo, y

200 cinturones económicos.

con una ganancia de $400,000 para cualquier caso.

EMPRESARIO: Sigue siendo óptima esta solución?.

EJECUTIVO: Para asegurar la optimalidad de la solución, bastará evaluar el punto E; que implica tanto una reducción en la producción de los cinturones económicos, como en las ganancias que aportan. Por lo tanto, cualquier punto en el segmento de recta delimitado por los puntos C y D es óptimo (porqué?). Cuando esto ocurre se dice que el problema tiene Solución Optima Múltiple. Como este y el discutido anteriormente, existen otros casos interesantes por su significado. La semana pasada se llegó a la formulación del siguiente modelo para determinar el nivel de producción óptimo de los nuevos tipos de chamarras:

Maximizar z = 1,000CHLUJ + 2,000CHECO
sa

Piel	-CHLUJ +	CHECO =>	400
Demanda	-2CHLUJ +	CHECO =>	200
Pedido Fijo	CHLUJ	=>	100
No negatividad	CHLUJ ,	CHECO =>	0

donde:

CHLUJ representa el número de chamaras de lujo a producir.
CHECO representa el número de chamarras económicas a producir.

cuya gráfica se muestra en la figura 4.2. En esta, la Región Factible se extiende al infinito. Cuando se efectuó el análisis de los puntos se comprobó que el valor de la función objetivo podía crecer tanto como se aumentara la producción de chamarras, lo

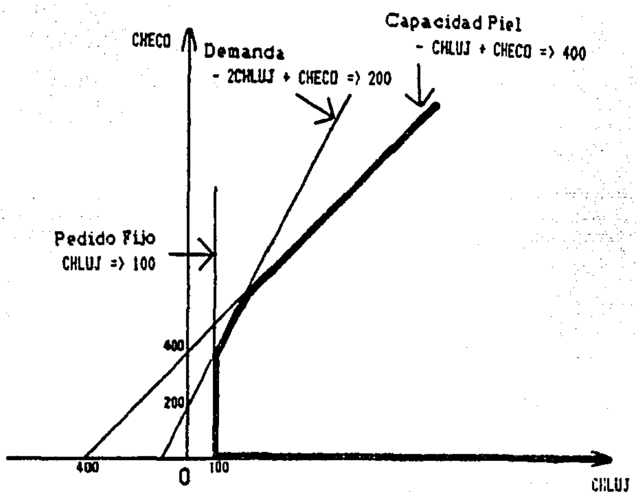


Figura 4.2.

cual es imposible. Al analizar nuevamente la formulación se observó que se habían omitido las restricciones referentes a la disponibilidad de piel y horas-hombre para las chamarras. En este caso se encontró lo que se denomina una Solución No Acotada.

EMPRESARIO: Una solución no acotada requiere que ambas variables crezcan indefinidamente?.

EJECUTIVO: No necesariamente, por ejemplo, otro modelo formulado para determinar la producción de las carteras, fue el siguiente:

Maximizar z = 500CAFIN + 200CAECO
sa

Piel Fina	CAFIN		<= 700
Razon de Produccion	CAFIN -	CAECO	<= 0
No Negatividad	CAFIN ,	CAECO	=> 0

donde:

CAFIN representa el número de carteras fir s a producir.
CAECO representa el número de carteras económicas a producir.

que se encuentra graficado en la figura 4.3, aquí pudo observarse que tanto CAECO como el valor de la función objetivo, crecían indefinidamente. Al analizarlo se detecto una omisión en la restricción asociada a la disponibilidad de piel estándar.

EMPRESARIO: Ambos modelos poseían una Región Factible no acotada. Puede concluirse que para que un problema tenga solución su región debe estar acotada siempre?.

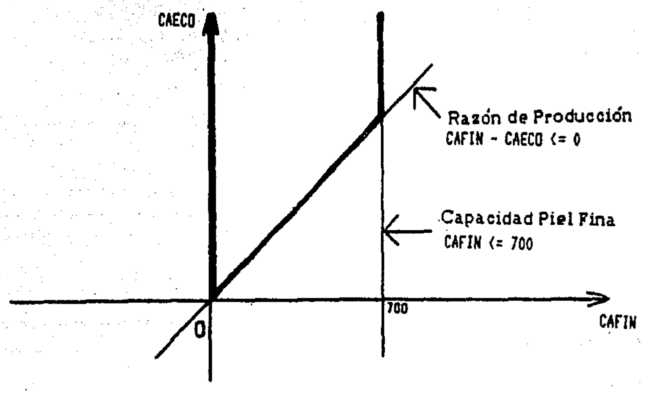


Figura 4.3.

EJECUTIVO: Sí. Aunque podría tenerse una no acotada con una solución acotada y óptima. Por ejemplo, si la función objetivo anterior se cambiara por:

Maximizar z = 500CAFIN

la solución sería acotada, pues el máximo valor que puede alcanzar es $350,000, ya que la variable CAFIN puede desplazarse hasta el punto (700,0). Sin embargo, CAECO no esta restringida y el aumentar esta en un valor superior a 700 no incrementa la ganancia.

EMPRESARIO: Que interpretación puede dársele a este fenómeno.

EJECUTIVO: Uno bastante sencillo: en principio, el enfoque bajo el que se esta trabajando ha sido denominado por los economistas clásicos como "racional", y supone que la satisfacción puede incrementarse tanto como uno disponga de los medios que la causan; que aplicado a este caso significa que mientras más elevada sea la producción más ganancias podrán obtenerse, pues en teoría uno de los supuestos del modelo es que siempre es posible vender todo lo que se produzca. Entonces, desde el punto de vista económico, una analogía con el problema en cuestión podría ser el de poseer, por ejemplo, dos guantes para la mano derecha y cien para la mano izquierda.

EMPRESARIO: Es decir, tener mas guantes izquierdos no implica una mayor satisfacción pues en principio estos bienes solo la producen si son consumidos en proporciones fijas.

EJECUTIVO: Exacto.

EMPRESARIO: De acuerdo a la figura 4.1.8, el punto C es el óptimo del problema original, pese a esto, existen recursos que no estan siendo utilizandos a su nivel máximo. Por ejemplo, se poseen 400 hebillas para la fabricación del cinturón de lujo y sin embargo están empleándose únicamente 200, la mitad!.

EJECUTIVO: Lo anterior es inherente a la mayoría de 'os Modelos de Programación Lineal, es decir, para alcanzar el punto óptimo, no es necesario agotar al máximo los bienes disponibles, y este problema es la mejor muestra. La cantidad de recurso no utilizada se denomina holgura, analogamente puede encontrarse lo que se conoce como exceso, este por ejemplo podría ser la cantidad de más que se esta produciendo del cinturón económico en relación con la mínima que es cero.

EMPRESARIO: De qué forma podrían eliminarse o reducirse las holguras?.

EJECUTIVO: Ya sea considerando una disminución tal en los recursos que haga nula a toda holgura posible, o aumentando su volumen.

EMPRESARIO: Cuáles son los que deben incrementarse, y cuál es el mejor precio que debe pagarse por ellos?.

EJECUTIVO: El modelo proporciona la información suficiente para ontestar dichas preguntas. Para ello se determinarán, en primer término, las holguras de los recursos en la solución óptima. Estas se obtienen sustituyendo los valores de las variables en cada una de las restricciones:

Restricción:			Holgura:
Tiempo	1,000 - ((2)(200) + 600)	=	0
Piel	800 - (200 + 600)	=	0
Hebillas-Lujo	400 - 200	=	200
Hebillas-Económico	700 - 600	=	100

Las que tienen holguras iguales a cero se les denomina Básicas o de Recursos Saturados, pues agotan el uso de cada uno de los bienes a que hacen referencia, aun más, estas determinan la solución óptima. El recurso a incrementar tiene que elegirse de aquellos para los que su holgura haya sido nula, ya que aumentar a los que tienen una diferente de cero en nada ayudara a mejorar la solución (porqué?). En este caso se tendrán tres posibilidades:

- Incrementar la cantidad de Piel.

- Incrementar el Tiempo de Producción.

- Incrementar ambos.

EMPRESARIO: De hecho existe un provedor que puede surtir la cantidad de Piel que se desee a $180 por cada unidad de cinturón adicional a producir.

EJECUTIVO: Para analizar si conviene pagar ese precio, se supondrá que es posible aumentar la cantidad de piel hasta 820 unidades, provocando que la restricción Piel se convierta en:

CLUJO + CECON <= 820

Ante el cambio, la nueva Región Factible será idéntica a la mostrada en la figura 4.4. Este incremento implica un cambio en el nivel de operación, el punto óptimo se ha desplazado a lo largo de la restricción Tiempo a una tasa constante de dos a uno hasta C', que indica que la mejor opción es:

Producir: 180 cinturones de lujo, y

640 cinturones económicos,

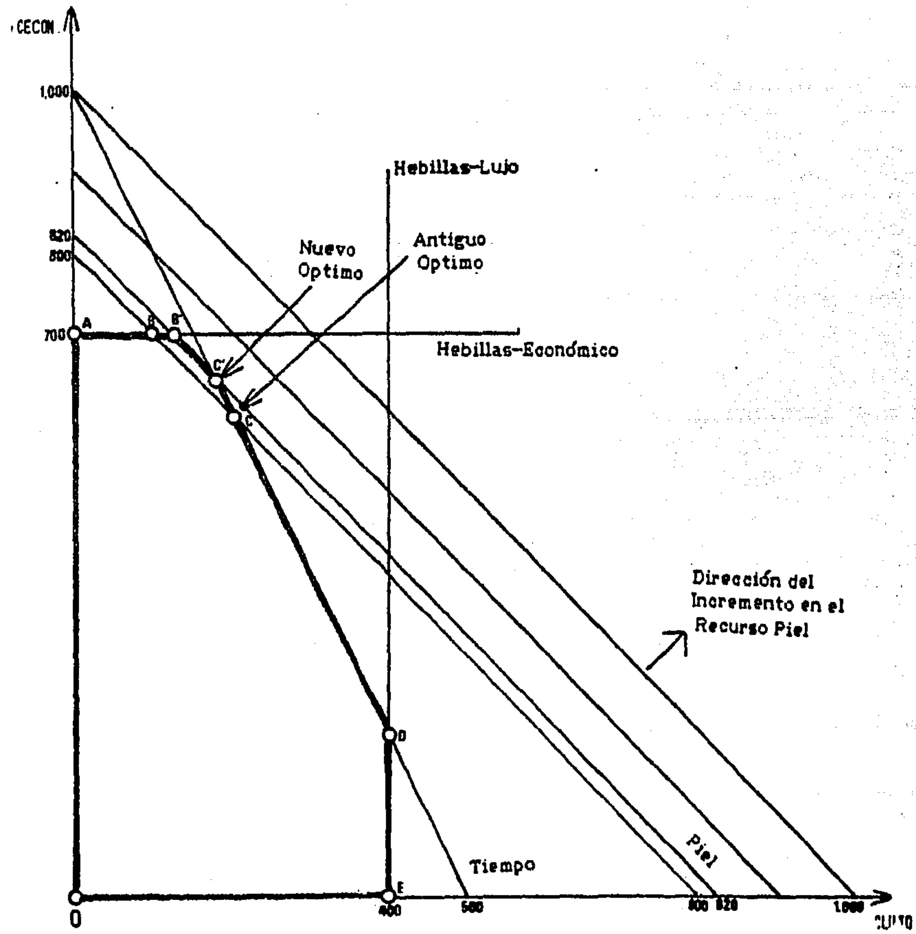


Figura 4.4.

con una contribución de:

(400)(180) + (300)(640) = \$264,000

Es decir, un aumento en 20 unidades en el recurso Piel, provocó un incremento proporcional en la producción de cinturones. La ganancia presentó un cambio de:

264,000 - 260,000 = \$4,000

para determinar el precio máximo a pagar por cada unidad, tendrá que dividirse el incremento en la función objetivo entre el aumento de las unidades que lo provocó:

4,000/20 = \$200

Por lo tanto, tendrá que pagarse \$200 a lo más por cada unidad de Piel que se desee comprar en el exterior. Un precio mayor implicará una pérdida, y dado que el actual es de \$180 debe aceptarse la oferta por resultar costeable. Los \$200, reciben el nombre de Precio Sombra, y operativamente este es el valor de una unidad adicional de un recurso específico. De igual forma pueden calcularse los precios sombra de cada uno de los restantes, obteniéndose la siguiente tabla:

Recurso:	Incremento en el Recurso	Incremento en la Función Objetivo	Precio Sombra:
Tiempo	unitario	100	100
Piel	unitario	200	200
Hebillas-Lujo	unitario	0	0
Hebillas-Económico	unitario	0	0

Los Precios Sombra nulos para los recursos donde existen holguras, se explican con base en la existencia de estas, pues adquirir unidades adicionales no provocará ningún incremento en la función objetivo y por ende no deben comprarse.

EMPRESARIO: Los Precios Sombra son constantes?.

EJECUTIVO: Sí, pero en ciertos intervalos. Para apreciarlo mejor, observe el problema con el aumento correspondiente en el recurso Piel:

Maximizar z = 400CLUJO + 300CECON

sa

Tiempo	2CLUJO +	CECON	<=	1,000
Piel	CLUJO +	CECON	<=	820
Hebillas-Lujo	CLUJO		<=	400
Hebillas-Económico		CECON	<=	700
No Negatividad	CLUJO ,	CECON	=>	0

las holguras ante el cambio son:

Restricción:			Holgura:
Tiempo	1,000 - ((2)(180) + 640)	=	0
Piel	820 - (180 + 640)	=	0
Hebillas-Lujo	400 - 180	=	220
Hebillas-Económico	700 - 640	=	60

estas indican, al igual que para el caso anterior, que los recursos susceptibles a ser incrementados son tanto el Tiempo como la cantidad de Piel, puesto que tienen holguras nulas. Si quisiera comprarse, por ejemplo, tiempo adicional para la producción de cinturones, debe calcularse el aumento necesario para ocupar todas las hebillas de lujo.

El incremento en la cantidad de cinturones de lujo a fabricar debe ser en 220 unidades (400 - 180 = 220), para anular la holgura existente de hebillas. Ante el cambio, habra que determinar el correspondiente a CECON, para ello, observe en la figura 4.5 que aumentar el Tiempo provoca, en su restricción, un desplazamiento hacia la derecha, haciendo que el punto óptimo se mueva en el mismo sentido a lo largo de la asociada a la Piel, para la que cada incremento unitario en la producción de alguno de los cinturones provoca una disminución idéntica en la del otro. Así, un aumento de 220 unidades del cinturón de lujo, producirá una reducción de 220 en la manufactura del económico, es decir:

CECON = 640 - 220 = 420

que será el nuevo nivel de producción de los cinturones económicos. La cantidad de Tiempo que consume una producción de 400 y 420 cinturones de lujo y económicos respectivamente, es de:

(2)(400) + 420 = 1220 horas

Así, el incremento en las unidades de Tiempo debe ser el suficiente para producir 220 cinturones adicionales del tipo económico.

EMPRESARIO: Un aumento superior a las 220 unidades, provocará que su Precio Sombra sea $0?.

EJECUTIVO: Si, debido a la generación de holguras. Por lo que puede concluirse que este será igual a $100 mientras que el Tiempo no aumente en más de 1220 unidades, más allá su valor será nulo.

EMPRESARIO: Cuánto puede reducirse este recurso conservando el mismo Precio Sombra?.

EJECUTIVO: Nuevamente considere la figura 4.5 y observe que una disminución en el Tiempo, provocará un desplazamiento del punto óptimo hacia la izquierda de la restricción Piel, a una tasa de sustitución "uno a uno" en la producción de las unidades de cinturones. De tal forma que más allá del punto B', el Precio Sombra para este presentará un cambio.

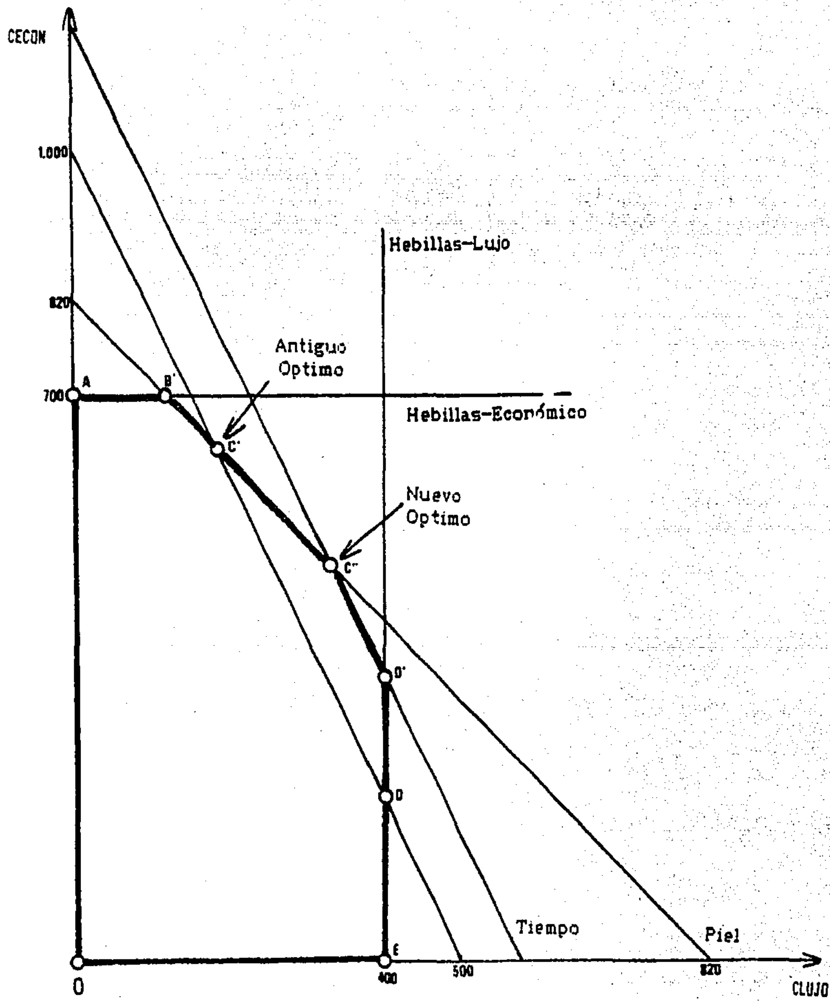


Figura 4.5.

EMPRESARIO: Es decir, la disminución del recurso debe hacerse al menos igual al uso que se obtiene en el punto B' con:

CLUJO = 120 unidades del cinturón de lujo

CECON = 700 unidades del cinturón económico

que es de:

(2)(120) + 700 = 940 horas

y una ganancia de:

(400)(120) + (300)(700) = $258,000

EJECUTIVO: Esto indica que el intervalo 940 a 1220 es en el que puede variarse el Tiempo, conservando un Precio Sombra de $100, fuera del cual se modificará. Cabe aclarar que este se mantendrá igual ante cualquier cambio, siempre que el punto óptimo se encuentre sobre una restricción, una vez que el punto se desplace a otra, y por lo tanto a otro recurso, el precio cambiará para el anterior.

EMPRESARIO: En resumen, porqué son importantes los Precios Sombra?.

EJECUTIVO: Porque proporcionan la información relativa a lo que se puede ganar o perder ante el cambio de un recurso; y dan un parámetro de medición del valor que estos tienen en el mercado, de acuerdo a la situación de una empresa en particular.

EMPRESARIO: Puede variarse más de un recurso y suponer que el Precio Sombra obtenido para cada uno de ellos se aplica ante tal cambio?.

EJECUTIVO: Desafortunadamente esto no es posible. Dado que estan asociados a cambios independientes, los múltiples podrían provocar un desplazamiento en el punto óptimo no contemplado por los calculados.

4.4 El Método Simplex

Los problemas que se presentan en la vida real distan de ser semejantes al expuesto en el subtema anterior, sin embargo, este proporcionó de una manera sencilla los criterios que se aplican a los de grandes dimensiones, es decir, todos lo conceptos pueden ser generalizados para aquellos que involucren por ejemplo, diez mil variables y tres mil restricciones.

Los Modelos de Programación Lineal son definidos a partir de sistemas de ecuaciones lineales; el método simplex es un algoritmo que, de manera eficiente, tiene la finalidad de determinar la solución óptima de un problema de maximización o minimización; el apelativo simplex de ninguna forma hace referencia a alguna propiedad en particular.

En general, los Modelos de Programación Lineal poseen infinitas soluciones, es decir, un inmesurable conjunto de puntos que los satisfacen. Esto puede apreciarse al imaginar el número posible de puntos que existen dentro de una Región Factible; el objetivo del método simplex radica en encontrar, entre todos estos, al que se definió como óptimo; la forma en que lo lleva a cabo, es realizando movimientos a lo largo de su contorno, en particular de los puntos denominados extremos, que se encuentran precisamente en los extremos de la región.

En este punto se recomi-nda al lector consultar el siguiente capítulo, en el que se proporciona la explicación del uso de un Paquete de Programación Lineal; para continuar con el desarrollo que a continuación se expone, y cuyo principal objetivo es establecer las bases que permitirán interpretar y analizar las soluciones.

El método simplex se fundamenta en dos aspectos de suma importancia:

1. Factibilidad, es decir, la no violación de las restricciones para cada una de las soluciones que este determine.

2. Optimalidad, en la que se busca encontrar la mejor solución de un conjunto factible.

Asimismo, se basa en la propiedad de que siempre que exista una solución óptima para un Problema de Programación Lineal esta podrá ser determinada por una definida como básica.

El algoritmo funciona comenzando con una solución, que probablemente es no óptima. Mediante cambios algebraicos y criterios de selección preestablecidos busca alcanzar la consecución del segundo aspecto. El método simplex es un algoritmo iterativo, que va cambiando de solución en solución siguiendo una serie de pasos estructurados bien definidos (denominada iteración). Sus criterios determinan si la óptima ha sido encontrada, si es necesario realizar alguna iteración adicional, o en su caso, si se trata de una solución infactible o no acotada. Su funcionamiento puede resumirse de la siguiente manera:

PASO 1: Estandarizar el problema (tal que contenga una matriz identidad implícita).

PASO 2: Determinar una solución básica factible inicial.

PASO 3: Investigar si existe alguna variable que al operarla (hacerla mayor que cero) aporte una mayor ganancia que alguna de las variables mayores o iguales que cero (recuerde como se evalua este aspecto en el método gráfico). Si no existe: deténgase. La solución que se ha determinado es la óptima. En caso contrario, ir al siguiente paso.

PASO 4: Hacer cero a la variable básica que aporta la menor ganancia (o en su caso la que provoque las mayores pérdidas), aumentar tanto como se pueda el valor de la variable nula. Efectuar las operaciones algebraicas necesarias para determinar la nueva solución. Ir al paso 3.

4.4.1 El Tableau Simplex

(Cualquier aspecto en el que el lector desee profundizar, puede ser consultado en el Apéndice A o en cualesquiera de las referencias indicadas al final del tema)

Por razones de computo y convencionalismos, el método simplex se presenta siempre en forma tabular. Esto proporciona ventajas en su comprensión, uniformidad y universalidad, así como en la estructuración lógica que aporta durante los cálculos necesarios.

Existen diversas formas en las que el tableau simplex puede presentarse, en particular se adoptará la que se muestra en la figura 4.6.

TABLEAU SIMPLEX

X(1)	X(2)	...	X(j)	...	X(n)	LD.
z(1) - c(1)	z(2) - c(2)	...	z(j) - c(j)	...	z(n) - c(n)	z
y(1,1)	y(1,2)	...	y(1,j)	...	y(1,n)	b'(1)
y(2,1)	y(2,2)	...	y(2,j)	...	y(2,n)	b'(2)
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
y(i,1)	y(i,2)	...	y(i,j)	...	y(i,n)	b'(i)
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
y(m,1)	y(m,2)	...	y(m,j)	...	y(m,n)	b'(m)

Figura 4.6: Tableau del Método Simplex.

El método simplex determina soluciones básicas; estas se encuentran asociadas a ciertas variables del Modelo de Programación Lineal que se denotarán como variables básicas; las restantes se denominarán no básicas y su valor siempre será cero. Analogamente, los costos asociados a las variables básicas recibirán el nombre de básicos, y los restantes, de no básicos.

El método simplex, en general, se aplica una vez que un modelo ha sido estandarizado y tiene implícitamente una matriz identidad, lo cual puede conseguirse mediante el uso de cualesquiera de las manipulaciones algebraicas indicadas en el apartado 3.4.4. Por lo regular, la mayoría de los paquetes comerciales de Programación Lineal realizan automaticamente este trabajo, en caso contrario tendrá que hacerse manualmente antes de comenzar a utilizar el algoritmo; especificando en su oportunidad cuáles son las variables de holgura, de exceso y las artificiales, para que el programa de cómputo pueda manipularlas correctamente.

Con base en lo anterior, en el tableau se tendrán los siguientes elementos:

- El tableau tendrá tantos renglones del tipo b'(i) como restricciones posea el problema.

- El tableau tendrá tantas columnas del tipo X(i) como variables tenga el Modelo de Programación Lineal ya estandarizado.

- Las columnas X(1), X(2), ..., X(n) en el tableau inicial, contendrán los coeficientes tecnológicos asociados a cada una de las variables del problema estandarizado (el cual deberá contener a una matriz identidad implícita). Por ejemplo, el Problema de Programación Lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2X_1 + 3X_2 - 5X_3$$

$$\text{sa}$$

$$\begin{aligned} 3X_1 + 6X_2 + X_3 + X_4 \quad &= 24 \\ 2X_1 + X_2 - 3X_3 \quad + X_5 &= 10 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 &\Rightarrow 0 \end{aligned}$$

ya está estandarizado y posee una matriz identidad, por lo que resulta innecesario realizar alguna manipulación algebraica. Vaciando la información en las columnas correspondientes se tendrá lo siguiente:

X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)
3	6	1	1	0
2	1	-3	0	1

cabe aclarar que las condiciones de no negatividad no se incluyen en el tableau.

- Las Variables Básicas se encuentran asociadas a la matriz identidad, en cada uno de los tableaus. En el ejemplo anterior X_4 y X_5 son las variables básicas. Conviene especificar que solo estas podrán ser mayores o iguales que cero, las no básicas siempre seran iguales a cero.

- La columna LD. (Lado Derecho): presentará la solución asociada a las variables que se encuentran en la base. Esto se determina haciendo cero a las variables no básicas, y encontrando los valores de las otras en el sistema de ecuaciones correspondiente. En este caso, al hacer cero a las variables no básicas:

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0$$

el sistema de restricciones se convierte en:

$$\begin{aligned} X_4 \quad &= 24 \\ X_5 &= 10 \end{aligned}$$

Por lo que la columna de soluciones será:

LD.

24
10

obviamente, esta es factible ya que también satisface a las condiciones de no negatividad.

- El segundo renglón (Z(j) - C(j)): contendrá a los "costos de oportunidad" para cada una de las variables bajo las que se encuentren indicados y, en especial, el valor bajo la columna b, corresponderá al de la función objetivo para la solución básica indicada.

Los costos de oportunidad representan la pérdida o ganancia (según sea el signo del número) que ocasiona incrementar en una unidad a la variable correspondiente, mientras que las restantes se modifican para compensar el cambio. Los costos de oportunidad del ejemplo son:

	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)
Z(j) - C(j)	-2	-3	5	0	0

Para el caso de Maximización los números negativos representan ganancias, los positivos pérdidas. Para el de Minimización se aplica lo contrario. Dado que el problema es de maximización se tendrá que:

El incrementar una unidad a la variable X(1), afectando los niveles de las demás, provocará una ganancia de 2 unidades.

Las variables X(4) y X(5) debido a que son básicas tienen costos de oportunidad nulos, ya que los niveles bajo los que operan son los máximos permitidos, por lo tanto no puede llevarse a cabo ninguna modificación o incremento en estas.

Incrementar una unidad a la variable X(3) producirá una pérdida de 5 unidades, por lo tanto, lo mejor será mantenerla a nivel de cero.

La variable X(2) es la que proporciona el más alto incremento (3 unidades por unidad de incremento en la variable).

En la solución óptima todos los costos de oportunidad deberán ser:

- mayores o iguales que cero, para el caso de Maximización y
- menores o iguales a cero para el de Minimización,

lo que implica que en el punto óptimo, incrementar el valor de una variable no básica solo empeora la solución en vez de mejorarla. Un caso especial amerita particular atención: cuando en la solución óptima se encuentre una variable no básica con un costo de oportunidad nulo, podrá concluirse que el incrementarla no representará pérdidas, por lo tanto existirá una solución óptima múltiple, ya que es posible determinar una nueva solución que incluya a esta variable en lugar de alguna otra, con el mismo valor óptimo (porqué?).

Esto permite dar una segunda interpretación a los costos de oportunidad: dado que en la solución óptima solo representan pérdidas en la función objetivo, considerando como caso el de Maximización de Ganancias (el de Minimización resulta análogo, tomando el criterio opuesto), puede observarse que también indican la cantidad mínima en la que debe aumentarse el precio de una variable para que esta sea candidata a ser incrementada, o mejor dicho, a ser operada a un nivel positivo. Es decir, el método simplex fija valores positivos para aquellas variables que bajo ciertos niveles aportan ganancias mayores a sus costos, las restantes las hace nulas ya que operarlas a un nivel positivo solo provocaría una suboptimización del sistema, de esta manera, si se quisiera compensarlas sería necesario elevar su contribución a una cantidad al menos igual a sus correspondientes pérdidas, cualquier incremento superior significará una ganancia, haciendo que resulte conveniente operarla.

Suponga que se tienen los siguientes costos de oportunidad asociados a una solución óptima de un Problema de Programación Lineal de maximización:

	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	b
Z(j) - C(j)	0	0	5	2	3

donde:

X(1) y X(2) son las variables básicas,
X(3) y X(4) son las variables no básicas, y
el valor de z (función objetivo) es 3.

observe que el incrementar una unidad a X(3) producirá una pérdida de 5 unidades, una interpretación semejante se aplica para X(4). Si se quisiera que X(3) fuera diferente de cero, es decir, que dejara de ser variable no básica, para no incurrir en pérdidas, tendría que incrementarse la ganancia que aporta en a lo menos 5 unidades. Si su contribución se aumenta exactamente en 5 se tendrá que un aumento unitario en la variable X(3) (es decir, hacer X(3) = 1) provocará tanto un incremento como un decremento de 5 unidades (las 5 que produce menos las 5 de su perdida), obteniéndose un costo de oportunidad nulo (solución óptima múltiple); si se quisiera tener un incremento en la ganancia total, el aumento tendría que ser superior a las 5 unidades para que así: la ganancia en más de 5 por cada unidad de incremento menos la perdida (5 unidades) por unidad de incremento, sea mayor que cero. Por otro lado, si la ganancia de este bien se reduce, resultará menos atractivo producirlo.

Ejemplo 4.2:

El problema originalmente propuesto presenta la siguiente estructura tabular:

TABLEAU SIMPLEX

X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)	LD.
-2	-3	5	0	0	0
3	6	1	1	0	24
2	1	-3	0	1	10

Para reafirmar las ideas expuestas se resolverá aplicando el paquete de computación CAAM MASTER, obteniéndose con ello el siguiente tableau óptimo:

TABLEAU OPTIMO

X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)	LD.
0	0	4.444	.444	.333	14
0	1	1.222	.222	-.333	2
1	0	-2.111	-.111	.667	4

Nota: La interpretación de los coeficientes que se encuentran bajo cada una de las variables va más allá del alcance de la presente sección, se sugiere al lector interesado la consulta del Apéndice A.

La posición del elemento unitario para las variables básicas, indicará el renglón al cual están asociadas, así X(2) y X(1) estarán en el primero y segundo renglones respectivamente, sus valores se encuentran localizados bajo la columna b, las no básicas: X(3), X(4) y X(5) serán iguales a cero. Por lo tanto, en la solución óptima:

X(2) = 2 y X(1) = 4

con una ganancia tota. de:

z = 14 unidades.

Los costos de oportunidad para cada una de las variables (segundo renglón) son positivos; aun más, los asociados a las variables básicas: X(2) y X(1) son nulos. El de X(3) es 4.444, e indica que cada incremento unitario en esta producirá una pérdida en la función objetivo en 4.444 unidades, por lo que resulta inconveniente operarla.

Suponga que se desea que X(3) sea positiva, esto se logrará siempre y cuando la variable deje de ser no básica, para ello tendrá que aumentarse lo suficiente su contribución (de -5 unidades), para que resulte conveniente operarla a un nivel positivo de tal forma que la pérdida que provoca (4.444 unidades) se compence y se convierta en ganancia. Sea este en 5, así:

El Costo Nuevo de la Variable	=	El Costo Anterior de la Variable	+	El Incremento Propuesto	
C(3)	=	-5	+	5	= 0

Al efectuar la modificación correspondiente en el modelo y realizar otra corrida en la computadora, se obtiene el siguiente tableau óptimo:

TABLEAU OPTIMO

X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)	LD.
0	.455	0	.545	.182	14.909
0	.818	1	.182	-.273	1.636
1	1.727	0	.273	.091	7.455

Observe que una variable no básica (X(3)) se convirtió en básica y viceversa (con X(2)), esto se debe a que X(3) produce una ganancia de:

$$4.444 - 5 = -.556$$

por cada unidad que se incremente, por lo tanto resulta conveniente operarla (recuerde que en el caso de maximización, el signo negativo representa ganancia), así, el método simplex fija el nivel de operación óptimo de X(3) en 1.636. Si la ganancia unitaria de la variable se multiplica por su nuevo valor, se obtendrá la ganancia total ante el cambio, observe que X(2) dejo la base para ser sustituida por X(3), por lo tanto:

$$(.556)(1.636) = .909$$

es el incremento en el valor de la función objetivo. Como el valor óptimo antes de la modificación era de 14 unidades una vez que este se realice, el nuevo se calculará observando que:

Nueva Ganancia = Ganancia Anterior + Ganancia Provocada por el Cambio

$$z = 14 + .909 = 14.909$$

que es precisamente el valor inscrito en la solución óptima del tableau. Por fortuna el lector no necesita realizar este cálculo pues la computadora lo realiza automáticamente.

En el nuevo tableau óptimo el costo de oportunidad de la variable X(2) cambio de 0 a .455, es decir por cada incremento unitario de ella producirá una pérdida de .455 unidades en la función objetivo. Nuevamente si quisiera operarse X(2) a un nivel positivo, tendría que seguirse cualesquiera de los siguientes cursos de acción:

- Decrementar en 5 unidades la aportación de X(3), con lo que se regresaría al tableau óptimo original.

- Aumentar en más de .455 unidades la contribución de X(2), para que resulte conveniente incrementarla. Esto se deja como ejercicio para el lector.

4.4.2 Tipos de Soluciones:

En la aplicación del método simplex, podrá presentarse alguno de los siguientes resultados:

CASO 1: Solución Infactible.

CASO 2: Solución No Acotada.

CASO 3: Solución Optima (Múltiple o Unica).

los cuales serán ilustrados mediante la aplicacion de un Modelo de Programación Lineal a un problema determinado, para el que se ha omitido un tratamiento detallado en su formulación, por considerarse irrelevante para los fines de la presente discusión.

CASO 1: Solución Infactible.

Ejemplo 4.3:

El Director de la Compañía Mexicana de Aviación ha pensado incluir, dentro de sus planes, la prestación de servicios en forma directa a tres rutas diferentes en las que anteriormente utilizaba intermediarios:

Puerto Escondido (Oaxaca).

Bahia Kino (Sonora).

Ciudad del Carmen (Campeche).

Su decisión se fundamenta en el incremento notable que se ha experimentado recientemente en la demanda semanal para tales lugares. Esta situación ha provocado que la aerolínea decida poner a prueba la idea de prestar un servicio semanal regular que, dependiendo de la aceptación que los viajeros muestren, podrá verse mejorado en lo que respecta a la frecuencia de los vuelos. Al momento la compañía ha decidido utilizar únicamente 19 aviones (de diferentes tipos). Según el tipo de avión que se emplee podrá cubrirse una determinada capacidad, que se verá modificada por ruta de acuerdo al cuadro 4.2, debido a que la empresa presta también servicios de transporte de carga para los lugares.

Los costos de operación estimados en los que se incurre tanto por ruta como por tipo de avión, se muestran en el cuadro 4.3.

La demanda de pasajeros, proyectada con base en experiencias anteriores, es de 1,000 pasajeros a la semana rumbo a Puerto Escondido, 1,500 con dirección a Bahía Kino y 1,000 para Ciudad del Carmen.

CUADRO 4.2: Capacidad de Pasajeros por Ruta y Tipo de Avión.

TIPO DE AVION	CAPACIDAD DE PASAJEROS EN CADA RUTA Puerto Escondido	Bahía Kino	Ciudad del Carmen	NUMERO DE AVIONES
1	100	100	100	10
2	250	250	200	5
3	250	100	100	4

CUADRO 4.3: Costos de Operación por Ruta y Tipo de Avión (en miles de pesos).

TIPO DE AVION	CAPACIDAD DE PASAJEROS EN CADA RUTA Puerto Escondido	Bahía Kino	Ciudad del Carmen
1	800	1,000	1,100
2	900	1,200	900
3	1,000	1,500	1,500

Con base en los recursos de que se dipone al momento, se desea determinar la asignación que provoque el mínimo costo, satisfaciendo la demanda semanal.

Formulación del Problema:

Ciertas consideraciones tienen que ser realizadas antes de comenzar con el planteamiento del modelo, con el fin de establecer los supuestos de congruencia.

- Los costos de operación incluyen aquellos en los que se incurre por vuelo redondo (ida y vuelta).
- La demanda se mantendrá constante a lo largo del tiempo.
- La compañía tendrá que asignar cada vuelo una vez que se cuente con el número mínimo de pasajeros que se requiera.

- La disponibilidad semanal de los aviones se mantendrá constante en el período de prueba en cuestión.

Hecho lo anterior, podrá formularse el siguiente Modelo de Programación Lineal:

Las variables se definirán en términos del número de aviones que se requiere enviar a cada ruta con el objeto de cubrir la demanda semanal, es decir:

A1PE, A2PE, A3PE, A1BK, A2BK, A3BK, A1CC, A2CC y A3CC representarán los números de aviones del tipo: 1, 2 o 3 enviados a Puerto Escondido (PE), Bahía Kino (BK) y Ciudad del Carmen (CC), en una semana determinada respectivamente. Por ejemplo:

A1PE representará al número de aviones del tipo 1 enviados en una semana determinada a Puerto Escondido.

Dado que se busca determinar la asignación que optimice los costos de operación, tendrá que formularse la función objetivo en términos de su minimización:

$$\text{Minimizar } z = 800A1PE + 1{,}000A1BK + 1{,}100A1CC + 900A2PE + 1{,}200A2BK + 900A2CC + 1{,}000A3PE + 1{,}500A3BK + 1{,}500A3CC$$

Las restricciones, estarán en función de la oferta y la demanda que se registran para cada una de las semanas. Las de oferta son:

$$A1PE + A1BK + A1CC <= 10$$
$$A2PE + A2BK + A2CC <= 5$$
$$A3PE + A3BK + A3CC <= 4$$

las de demanda son:

$$100A1PE + 250A2PE + 250A3PE = 1000$$
$$100A1BK + 250A2BK + 200A3BK = 1500$$
$$100A1CC + 200A2CC + 100A3CC = 1000$$

finalmente las condiciones de no negatividad y de integralidad:

A1PE, A2PE, A3PE, A1BK, A2BK, A3BK, A1CC, A2CC y A3CC => 0 y enteras.

El anterior es un Modelo de Programación Lineal con 9 variables y 6 restricciones.

Solución del Modelo:

El resultado que se obtiene al aplicar el paquete de computación CAAM MASTER es:

*** SOLUCION INFACTIBLE

La presencia de una solución de este tipo es el más claro indicio de una formulación erronea, y puede deberse a:

- La omisión involuntaria de algún factor.

- Una demanda superior a la oferta disponible.

- El establecimiento de restricciones inconsistentes.

Es necesario revisar nuevamente el sistema para identificar heurísticamente la fuente de error. Sin duda alguna, este proceso puede resultar demasiado lento y difícil, es por ello importante que el investigador tenga una visión amplia del proyecto para que pueda ponderar el valor de sus consideraciones en la etapa de formulación.

La obtención de una solución infactible, dadas las características del mismo, sin duda alguna está en relación con la oferta y la demanda que se presentan. De acuerdo al cuadro 4.2 e ignorando los costos de operación observe que:

- La asignación de aviones del tipo 1 para cualesquiera de las rutas es indiferente, es decir, siempre se podrán transportar hasta 1,000 pasajeros independientemente de cual sea esta. Advierta que para las rutas: Puerto Escondido o Ciudad del Carmen, la demanda existente puede cubrirse si se asignan los 10 aviones a cualesquiera de ambas, mientras que para Bahía Kino habrá una insuficiencia de 500 pasajeros que en su caso habrá que cubrir con alguna otra asignación.

- El menor número de pasajeros que puede transportarse con los aviones del tipo 2 es 1,000 (ruta Ciudad del Carmen) y el máximo 1,250 en las rutas de Puerto Escondido, Bahía Kino o cualquier combinación de estas. Naturalmente no costeará realizar una asignación de 5 aviones a Puerto Escondido puesto que para ese lugar solo existe una demanda de 1,000 pasajeros a la semana. Para Bahía Kino existirá una insuficiencia de 250 pasajeros que habra que cubrir con otro tipo de avión, finalmente, para Ciudad del Carmen la demanda se cubrirá exactamente si se le asignan todos los aviones.

- Los aviones del tipo 3 pueden transportar hasta 1,000 pasajeros en la ruta Puerto Escondido, que es el máximo sobre cualesquiera de las 3, o 400 que es el mínimo para Bahía Kino, Ciudad del Carmen, o cualquier combinación de las anteriores.

Si se asignarán los aviones a las rutas en las que más capacidad ofrecen, considerando los requerimientos de oferta para cada caso, se tendrá la siguiente distribución:

- Asignar los cuatro aviones del tipo 3 a Puerto Escondido, con lo cual se logra cubrir la demanda de 1,000 pasajeros en dicha ruta.

- Asignar los cinco aviones del tipo 2 a Bahía Kino, consiguiendo un nivel de 1,250 pasajeros contra una demanda de 1,500 lo cual implica un déficit de 250 pasajeros.

- Asignar los diez aviones del tipo 1 a Ciudad del Carmen, con lo que se logra transportar a los 1,000 pasajeros que demandan dicho servicio.

Observe que existe un déficit de 250 pasajeros que no puede ser cubierto de ninguna forma con los recursos disponibles. Así, la inconsistencia matemática en el modelo es ocasionada por la restricción de satisfacción de una demanda superior a la oferta. Este problema puede solucionarse aumentando el número disponible de aviones o considerando como "irrelevante" al exceso en la demanda, admitiendo con ello una reducción de 250 pasajeros para alguna de las rutas (la más cara, por ejemplo).

Suponga que se opta por la primera acción, pues la compañía considera de vital importancia no perder clientela, y decide poner 6 aviones del tipo 2 a disposición. En este caso solo una de las restricciones cambia (la segunda restricción de oferta):

A2PE + A2BK + A2CC <= 6

Con esta modificación, se procede nuevamente a la aplicación del paquete CAAM MASTER obteniendo el siguiente resultado factible óptimo:

Asignar los 10 aviones del tipo 1 a Ciudad del Carmen

Asignar los 6 aviones del tipo 2 a Bahía Kino.

Asignar los 4 aviones del tipo 3 a Puerto Escondido.

El costo mínimo es de $22,200,000. Advierta que la solución es entera, que es uno de los requisitos impuestos sobre el modelo, hecho que se deriva de su particular estructura matemática.

CASO 2: Solución No Acotada.

Ejemplo 4.4:

El Banco de Crédito Campesino ha establecido dos planes de inversión para los próximos tres años:

- Primer Plan, que consiste en un programa de tierras de riego.

- Segundo Plan, que consiste en un programa de tierras de temporal.

El primero otorga dividendos pagaderos al final de cada año que ascienden a: 27%, 29% y 35% para el primero, segundo y tercer años respectivamente, sobre el monto de la inversión realizada. Por su parte en el segundo los dividendos son pagaderos cada dos años, y ascienden a 55%, 56% y 57% para cada uno de los tres años. Asimismo, existe una política de préstamos en la que el Banco puede incurrir a un interés del 50% anual, bajo la condición de que el monto del préstamo se reembolse al final del año en el que se efectue.

Las políticas establecen una inversion mínima para ambos planes en cada uno de los tres años de $400, $550 y $650 millones de pesos respectivamente.

El Banco desea maximizar la inversión total en los siguientes tres a&os, bajo la idea de que esto aportará el máximo beneficio a la institución.

Formulación del Problema:

Los niveles de operación que se requieren conocer, corresponden a los montos de inversión para cada uno de los planes en los siguientes tres a&os, con base en esto, las variables controlables cuyos valores se desean determinar serán:

INV_{11}, INV_{12}, INV_{21}, INV_{22}, INV_{31} e INV_{32}, que corresponden a los montos de las inversiones (en millones de pesos) en cada uno de los a&os tanto para el plan 1 como para el 2 respectivamente. Por ejemplo:

INV_{12} es el monto de la inversión a realizar en el a&o 1 para el plan 2 (tierras de temporal).

y así sucesivamente.

Adicionalmente se necesita contar con variables que representen a los préstamos realizados en cada uno de los a&os. De esta forma:

P_1, P_2 y P_3 representarán los montos de los préstamos en los a&os 1, 2 y 3 respectivamente.

El objetivo se canaliza en función de la inversión que se realice en el período de tiempo indicado, por lo tanto esta tiene que ser maximizada acorde a la política del Banco. Matemáticamente, se tendrá:

$$\text{Maximizar } z = INV_{11} + INV_{12} + INV_{21} + INV_{22} + INV_{31} + INV_{32}$$

Las restricciones, están en función de la demanda mínima de inversión para cada uno de los a&os:

$$INV_{11} + INV_{12} \Rightarrow 4 \text{ (en cientos de millones)}$$
$$INV_{21} + INV_{22} \Rightarrow 5.5 \text{ (en cientos de millones)}$$
$$INV_{31} + INV_{32} \Rightarrow 6.5 \text{ (en cientos de millones)}$$

Es decir, la cantidad invertida en cada a&o debe ser igual o exceder a la mínima estipulada. Finalmente tienen que incluirse las condiciones de no negatividad.

$$INV_{11},\ INV_{12},\ INV_{21},\ INV_{22},\ INV_{31} \text{ e } INV_{32} \Rightarrow 0$$

Solución del Modelo:

Al aplicar el paquete CAAM MASTER, se obtuvo el siguiente resultado:

*** SOLUCION NO ACOTADA

que con un poco de imaginación, era aparente desde la formulación del modelo, aun más desde el planteamiento original. La obtención de una solución no acotada, es el producto de una omisión involuntaria en alguna restricción concerniente a un recurso limitado, el no incluirla presupone una disponibilidad ilimitada del mismo, lo cual no necesariamente es cierto. En este caso, las omisiones pueden ser detectadas de una manera bastante sencilla, sin embargo en problemas reales, dado su volumen, resultará bastante complicado, aun más la ocurrencia de una solución no acotada o inclusive infactible puede ser ocasionada por errores en la captura de la información. En cualesquier circunstancia, lo recomendable es revisar tanto la formulación como un reporte de la captura del modelo.

En el ejemplo, puede identificarse la omisión de dos aspectos de suma importancia:

- Montos máximos disponibles de inversión para cada a&o.

- Montos máximos de los préstamos para cada a&o,

Suponga que los primeros ascienden a $500 millones de pesos mientras que los segundos a $300 millones de pesos para cada a&o. Estos factores considerados en el modelo se convierten en restricciones de oferta, que conservaran el siguiente principio:

- En un a&o determinado la inversión no deberá exceder: al monto disponible, más los intereses devengados por inversiones, más el valor del préstamo solicitado en dicho a&o, menos el monto del solicitado en el a&o anterior con sus respectivos intereses.

Para cada a&o se tendrá una restricción. En resumen, estas son:

$$
\begin{aligned}
INV_{11} + INV_{21} &<= 5 + P_1 \\
INV_{21} + INV_{22} &<= 5 + .27INV_{11} + P_2 - 1.5P_1 \\
INV_{31} + INV_{32} &<= 5 + .55INV_{12} + .29INV_{21} + P_3 - 1.5P_2
\end{aligned}
$$

Por su parte, el monto de los préstamos no deberá exceder a la oferta de los mismos en cada a&o:

$$
\begin{aligned}
P_1 &<= 3 \\
P_2 &<= 3 \\
P_3 &<= 3
\end{aligned}
$$

Cada restricción está expresada en unidades en millones de pesos.

Al reescribir el problema se obtiene el siguiente Modelo de Programación Lineal:

$$\text{Maximizar } z = INV_{11} + INV_{12} + INV_{21} + INV_{22} + INV_{31} + INV_{32}$$

$$\begin{array}{lr}
INV_{11}+INV_{12} & => 4 \\
INV_{21} + INV_{22} & => 5.5 \\
INV_{31}+INV_{32} & => 6.5 \\
INV_{11} + INV_{21} - P_1 & <= 5 \\
-.27INV_{11} + INV_{21}+INV_{22} + 1.5P_1 - P_2 & <= 5 \\
-.55INV_{12} -.29INV_{21} + INV_{31}+INV_{32} + 1.5P_2 - P_3 & <= 5 \\
P_1 & <= 3 \\
P_2 & <= 3 \\
P_3 & <= 3
\end{array}$$

$$INV_{11},\ INV_{12},\ INV_{21},\ INV_{22},\ INV_{31},\ INV_{32},\ P_1,\ P_2 \text{ y } P_3 => 0$$

donde cada una de las restricciones esta dada en cientos de millones de pesos.

El problema presenta 9 variables y 9 restricciones, al resolverlo por el paquete CAAM MASTER, se obtiene la siguiente solución óptima:

- Invertir en el primer a&o $500 millones de pesos en el plan 2.

- Invertir en el segundo a&o $550 millones de pesos en el plan 1.

- Invertir en el tercer a&o $1,159.5 millones de pesos en el plan 1.

- Pedir un préstamo de $50 millones en el segundo a&o.

- Pedir un préstamo de $300 millones el tercer a&o.

Este plan produce una inversión máxima de $2,209.5 millones de pesos en total para los tres a&os. Sin embargo, el monto antes indicado corresponde a sus respectivos períodos de utilización, de tal forma que si quisiera tenerse el valor verdadero en este momento, tendría que trasladarse a valor presente (a una tasa bancaria), cada uno de los montos de las inversiones.

CASO 3: Solución Optima (Múltiple o Unica).

Este es, de los tres casos, el que indudablemente se busca conseguir. Aunque la solución básica final sea óptima, en algunos casos ocurre la existencia de más de una (solución óptima múltiple). Como se recordará, esto se comprueba ya sea a través del renglón de los Z(j) - C(j) para cada una de las variables no básicas, cuando al menos uno sea igual a cero, o por el paquete de computación, en algún reporte. En particular, el paquete CAAM MASTER, solo indica la ocurrencia de este fenómeno, más no identifica a todas las soluciones que aportan el mismo valor óptimo, en caso de que ocurran. Sin embargo conviene tener presente los siguientes aspectos relativos a este hecho:

- Si cualesquiera (una o más) de las variables no básicas tiene su Z(j) - C(j) asociado igual a cero, entonces la solución reportada por el paquete de Programación Lineal es una de las soluciones óptimas.

- Todas las soluciones óptimas tendran la característica de proporcionar el mismo valor de la función objetivo.

- Las soluciones alternativas se obtendrán convirtiendo a la variable no básica con su $Z(j) - C(j) = 0$, en básica.

Existen ciertas consideraciones finales que deben realizarse una vez que se obtenga una solución óptima. Hasta el momento, se han formulado problemas para los que se requieren soluciones de tipo entero, sin embargo, durante su resolución (mediante el uso del método simplex), las condiciones de integralidad han sido ignoradas, conviene preguntarse aquí: qué debe hacerse si la solución obtenida no es entera?. Una primera idea, sería llevar a cabo un redondeo en los valores de las variables, pero desafortunadamente esto puede acarrear dificultades de otro tipo, como por ejemplo: la obtención de soluciones infactibles, o la suboptimización del problema original. Para apreciar más claramente estos hechos se analizará el siguiente caso:

Ejemplo 4.5:

Suponga que una peque&a fabrica lleva a cabo el ensamble de dos tipos de microcomputadoras, por experiencia ha comprobado que en este proceso una computadora del primer tipo consume el tiempo completo de dos personas, mientras que una del segundo utiliza 9, debido a que su estructura es más compleja. Diariamente se dispone de 40 personas capacitadas que pueden ser asignadas indistintamente para cada uno de los dos tipos. Cada computadora empacada es enviada al final del día, en un camión que tiene la capacidad de transportar hasta 30 micros de las dimensiones del tipo 2. Las del tipo 1 son más grandes en tama&o (pues es un modelo antiguo) y se ha observado que ocupan el volumen de tres del tipo 2. Las ganancias por cada máquina son de \$300,000.00 y \$1,300,000.00 respectivamente para los tipos 1 y 2. El due&o de la fabrica desea planear su producción con base en un volumen de ensamble que le asegure las maximas ganancias.

Formulación y Solución:

Este es un problema que puede formularse mediante el uso del siguiente Modelo de Programación Lineal:

$$\text{Maximizar } z = 3COMP_1 + 13COMP_2 \quad \text{(en cientos de miles)}$$

sa

Disponibilidad Personas	$2COMP_1 + 9COMP_2 <= 40$
Volumen de Transporte	$3COMP_1 + COMP_2 <= 30$
	$COMP_1 , COMP_2 => 0$ y enteras.

donde:

$COMP_1$ es el número de computadoras del tipo 1 ensambladas en un determinado día.

$COMP_2$ es el número de computadoras del tipo 2 ensambladas en un determinado día.

Al resolverlo mediante el uso del paquete CAAM MASTER, y por ende ignorando las condiciones de integralidad, se obtiene el siguiente resultado óptimo:

- Ensamblar 9.2 microcomputadoras del tipo 1.

- Ensamblar 2.4 microcomputadoras del tipo 2.

La ganancia total máxima es de $5,880,000.00. Observe que el resultado es fraccional, lo que implica que no es la verdadera solucion óptima al problema original. Una primera aproximación podría consistir en "redondear" los resultados, para ello se estudiaran las implicaciones que esto provoca:

a) Ensamblar 9 y 3 micros de los tipos 1 y 2 respectivamente.

b) Ensamblar 9 y 2 micros de los tipos 1 y 2 respectivamente.

c) Ensamblar 10 y 3 micros de los tipos 1 y 2 respectivamente.

d) Ensamblar 10 y 2 micros de los tipos 1 y 2 respectivamente.

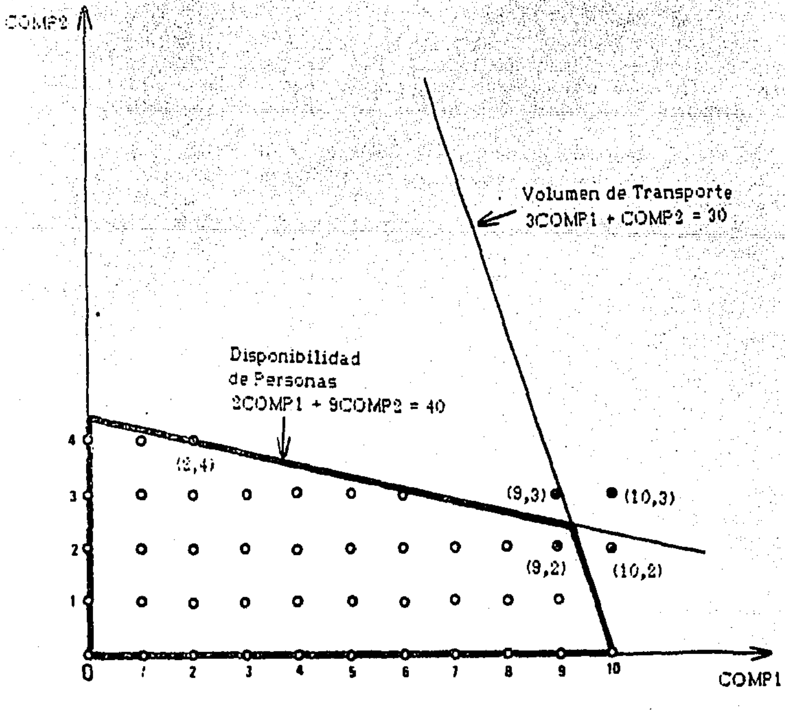


Figura 4.7.

Como el lector podrá comprobar, las opciones a), c) y d) son infactibles debido a que no satisfacen a las restricciones del Problema de Programación Lineal. La opción b) es la única que si las satisface, pues:

Disponibilidad Personas	(2)(9) + (9)(2) = 36 < 40
Volumen de Transporte	(3)(9) + 2 = 29 < 30
	9 , 2 > 0 y enteras

$$z = (300,000)(9) + (1,300,000)(2) = \$5,300,000.$$

Sin embargo, no es una solución óptima para el problema original. Para evaluar esta aseveración observe la figura 4.7, que presenta la gráfica del modelo; los puntos inscritos en la Región Factible, muestran los valores enteros que pueden conseguirse dentro de esta. El lector interesado podra evaluar cada uno de estos, para encontrar el que proporciona la máxima ganancia, obteniendo el (2,4) es decir: ensamblar 2 y 4 micros de los tipos 1 y 2 respectivamente con una ganancia de:

$$(3)(2) + (13)(4) = \$5,800,000.$$

El cual es un punto que está muy apartado del óptimo obtenido. Pese a ello, se considerará al redondeo como la mejor alternativa en la resolución de los modelos lineales formulados.

Cabe aclarar que existen técnicas más sofisticadas, algunas de ellas muy costosas, diseñadas específicamente para la resolución de este tipo de problemas, sin embargo, dada su complejidad caen fuera del alcance del presente texto.

Un último caso queda por ser analizado: el de las soluciones "degeneradas". Una solución se denomina degenerada cuando al menos alguna variable básica asume el valor de cero. La importancia de esta característica radica más en aspectos computacionales que interpretativos, por lo que se omitirá su tratamiento.

4.4.3 <u>Interpretación de los Resultados:</u>

Hasta el momento se ha venido empleando el paquete de computación CAAM MASTER, sin embargo, no se ha dado una explicación de la información que proporciona ni de su funcionamiento.

Aunque en el Capítulo III se tratan estos aspectos, conviene tener en mente los siguientes puntos adicionales. La "salida" como se denominará de ahora en adelante, contiene la información mínima indispensable que todo paquete comercial de Programación Lineal proporciona; a continuación se indican las características de cada uno de los apartados que la componen:

***1* Valores Optimos de las Variables de Decisión y de la Función Objetivo:**

En esta sección se presentan los valores de las variables básicas en el tableau óptimo, las que no aparezcan indicadas seran no básicas y se encontrarán a un nivel de operación nulo.

El valor de la función objetivo, es el que se obtiene al evaluar la solución óptima.

Casos especiales como: soluciones no acotadas o infactibles, carecerán de la información anterior, no obstante, un mensaje de la ocurrencia de tal fenómeno será presentado.

***2* Precios Sombra de los Recursos:**

Como se recordará, los precios sombra son los que el usuario estaría dispuesto a pagar por la adquisición adicional de cada unidad de los recursos; de igual forma, representan el valor del cambio en la función objetivo que vendrá acompañado con el incremento o decremento en alguno de los recursos.

Cada restricción está en función de ciertos recursos que se consideran como limitados, si el usuario estuviera en posibilidad de aumentarlos, su interés se concentrará en determinar las cantidades a pagar por la adquisición de unidades adicionales de estos, los precios sombra proporcionan precisamente dicha información. Esta aseveración resultará más aparente en la próxima sección. Cabe mencionar que los precios sombra se mantienen fijos bajo los intervalos en los recursos, tal información no es proporcionada por el paquete CAAM MASTER.

***3* Costos Reducidos para las Variables de Decisión:**

Para cada variable de decisión no indicada en el primer apartado, y por lo tanto a nivel de cero en la solución óptima, existe un costo penal en el que se incurre por incrementar su valor. Esta penalización, recibe el nombre de costo reducido; de igual forma, representa la cantidad en la que tendría que aumentarse o disminuirse la contribución de una variable de decisión para que se considere como candidata a ser operada, probablemente a un nivel diferente de cero.

Existe información adicional que puede resultar de suma importancia en la realización del análisis de sensibilidad, y que proporciona un mayor grado de comprensibilidad sobre la situación que se estudia. El paquete de Programación Lineal denominado MILP88, es un valioso auxiliar que permite al usuario obtener la información antes indicada así como la que se presenta a continuación, una breve explicación de su funcionamiento se proporciona en el Capítulo III.

Rangos en los Coeficientes de la Función Objetivo:

Generalmente, en los problemas reales ocurren cambios que afectan los valores de los parametros, tener en mente la realización de corridas múltiples representa un trabajo costoso, si estos son de una dimensión considerable. Existe cierta información adicional que es de gran ayuda para contestar a preguntas del tipo: qué pasaría si?, conocida bajo el nombre de Análisis de Sensibilidad. En este apartado se proporcionan los rangos de variación para cada uno de los costos asociados a las variables en la función objetivo, bajo los que la solución sigue manteniendose óptima, es decir, hasta dónde es posible cambiar el costo de una variable sin que ello afecte a la solución óptima, cabe aclarar (en caso de algún cambio), que el valor numérico de la función objetivo puede verse modificado, por lo que algún cálculo manual tendrá que realizarse. Tales rangos corresponden a variaciones independientes, es decir, un solo cambio a la vez, por lo tanto, si se desea variar más de uno, lo anterior no se aplica.

Rangos de Variación para los Recursos:

Siguiendo la filosofía anterior, es posible pensar en la implantación de nuevos niveles en la disponibilidad de los recursos, y en el cuestionamiento sobre la optimalidad de la solución frente a tales cambios. En este apartado se proporcionan sus rangos de variación "permitidos", para los que la solución sigue siendo óptima, es decir, hasta dónde se puede ver modificada la disponibilidad de un bien para mantener a una solución como óptima. Al igual que los anteriores rangos, estos se aplican para cambios independientes, en caso de que más de uno sea realizado habrá que correr de nueva cuenta el modelo.

4.5 Dualidad y Precios Sombra

En las secciones anteriores se ha venido trabajando con un concepto sumamente poderoso: el de los precios sombra. En la seccion 3.2.1, se proporcionó un mecanismo que explica de manera intuitiva su origen, sin embargo, existe todo un marco teórico que ha sido desarrollado y en el que se sustentan todas las aseveraciones hechas al respecto. La Dualidad es uno de los conceptos más importantes dentro de la Programación Lineal, y se fundamenta en la idea de que para cada modelo existe otro que se denomina su dual, con una interpretación diferente al original (denominado primal).

Ejemplo 4.6:

CASO 6: Un Problema de Horticultura.

Suponga que un horticultor está tratando de determinar su mejor opción en la compra de fertilizantes para su cultivo. En el mercado existen productos con diferentes especificaciones en relación a sus componentes, mostrados en el cuadro 4.4.

CUADRO 4.4: Especificaciones de Contenido por Producto (contenido en gramos y costo en pesos por cada kilo).

Producto	Nitrógeno	Acido Fosfórico	Potasio	Costo
A	18	12	0	50
B	28	5	5	115
C	0	6	18	50
D	30	7	8	150
E	16	3	2	75

Por ejemplo, cada kilc del producto A está compuesto por 18 gramos de nitrógeno, 12 de ácido fosfórico y 0 de potasio y tiene un costo en el mercado de $50. Una interpretación semejante se aplica para cada uno de los productos restantes. El horticultor ha determinado que requiere contar para sus cultivos de al menos 230 gramos de nitrógeno, 70 de acido fosfórico y 70 de potasio soluble, lo cual le asegurará un crecimiento adecuado. Sin embargo dadas las características de cada uno de los productos el desea determinar la combinación menos costosa con la que pueda satisfacer sus requerimientos a un costo mínimo.

Para que el horticultor logre alcanzar su objetivo, es necesario que formule un Modelo de Programación Lineal con la siguiente estructura:

```
  Minimizar z = 50PA + 115PB + 50PC + 150PD + 75PE
        sa
Nitrógeno       18PA +  28PB        +  30PD + 16PE => 230
Acido           12PA +   5PB +  6PC +   7PD +  3PE =>  70
Potasio                  5PB + 18PC +   8PD +  2PE =>  70
                  PA ,    PB ,   PC ,    PD ,   PE =>   0
```

donde: PA, PB, PC, PD, PE son las cantidades a adquirir, en kilos, de cada uno de los productos. Resolver este problema, es equivalente a encontrar la información que se desea obtener. Suponga que un vendedor de tabletas (de un gramo) de nitrógeno, ácido fosfórico y potasio, se entera de la situación del horticultor y espera convencerlo de que al utilizar sus productos obtendrá más provecho en el crecimiento de sus plantas que si utilizara cualquier combinación de los productos anteriores. De esta forma, el agente intenta fijar precios para cada tableta, con el objeto de obtener la máxima ganancia con su venta, surtiendo los requerimientos mínimos de su cliente sin que tenga que pagar más de lo "justo" por el producto, de otra forma resultaría más conveniente para el horticultor comprar alguna combinación de los productos A, B, C, D y E. El agente define: IN, IA y IP como los precios de cada una de las tabletas de nitrógeno, ácido y potasio.

Cada kilo del producto A proporciona 18 gramos de nitrógeno y 12 de ácido y cuesta $50. Con el objeto de reemplazar un kilo de este, el horticultor necesitará 18 tabletas de nitrógeno y 12 de ácido; el costo en el que se incurre con esta combinación es 18IN + 12IA. Con el objeto de que el agente pueda competir con respecto a los precios en el mercado, debe cuidar que esta cifra no exceda al precio del producto A, ya que de lo contrario resultará más conveniente no comprar las tabletas; matemáticamente se tendrá que:

Con respecto al producto A: 18IN + 12IA <= 50

De igual forma, un kilo del producto B proporciona 28, 5 y 5 gramos de nitrógeno, ácido y potasio respectivamente y cuesta $115. Por lo tanto, para cubrir la oferta de dicho producto el agente debe vender 28, 5 y 5 tabletas de cada uno de los componentes en estado puro, el precio de la combinación (28IN + 5IA + 5IP) no deberá exceder al del producto en el mercado, es decir:

Con respecto al producto B: 28IN + 5IA + 5IP <= 115

Aplicando el mismo criterio para cada uno de los restantes se obtiene el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Con respecto al producto C:} & & 6IA + 18IP & \leq 50 \\
\text{Con respecto al producto D:} & 30IN + & 7IA + 8IP & \leq 150 \\
\text{Con respecto al producto E:} & 16IN + & 7IA + 8IP & \leq 75
\end{array}$$

El agente, por su parte, desea obtener la máxima ganancia posible por la venta de sus productos, por lo que la función objetivo será:

$$\text{Maximizar } z = 230IN + 70IA + 70IP$$

en este caso: 230, 70 y 70 corresponden a la demanda que el espera tener por parte del horticultor. Por lo tanto, el modelo dual, es:

$$\text{Maximizar } z = 230IN + 70IA + 70IP$$

$$\begin{array}{lrrrl}
\text{Con respecto al producto A:} & 18IN + & 12IA & & \leq 50 \\
\text{Con respecto al producto B:} & 28IN + & 5IA + & 5IP & \leq 115 \\
\text{Con respecto al producto C:} & & 6IA + & 18IP & \leq 50 \\
\text{Con respecto al producto D:} & 30IN + & 7IA + & 8IP & \leq 150 \\
\text{Con respecto al producto E:} & 16IN + & 7IA + & 8IP & \leq 75 \\
 & IN, & IA, & IP & \geq 0
\end{array}$$

Cada uno de los precios debe ser positivo (porqué?). El vendedor esperará, con los precios que cargue a sus productos, convencer al horticultor.

En los cuadros 4.5 y 4.6, se presentan las soluciones para ambos problemas. Como podrá apreciar el lector, el valor alcanzado por la función objetivo en ambos casos es exactamente el mismo, lo cual será justificado empíricamente más adelante. Aun más, los valores de los precios sombra desplegados para el primal, son exactamente los valores de cada una de las variables en el dual.

Ejemplo 4.7:

CASO 7: El Empresario Ingenioso.

Considere una planta de operaciones gubernamental, en la que se ha decidido ensamblar tres tipos de componentes electrónicos necesarios para la realización de un proyecto de gran importancia. Con el objeto de llevar a cabo la tarea, se requiere contar con trabajadores especializados que presten sus servicios para el gobierno. Un staff formado por investigadores dentro de este sector, fue apuntado para coordinar semejante proyecto, para ello ha realizado estudios referentes a tiempos y movimientos de obreros obteniendo la información condensada en el cuadro 4.7, que indica las tasas promedio en las que diferentes trabajadores llevan a cabo el ensamble de diversos tipos de componentes; asimismo se presenta su demanda mínima mensual y los costos de operación. Los componentes estan fuertemente interrelacionados, de tal forma que dada una cantidad de materia prima, es posible utilizar ciertos productos intermedios para el ensamble de otros más elaborados. Por ejemplo, un ingeniero puede producir 2.2 unidades por hora del componente Z-1, y simultaneamente 2.7 y 3.2 unidades de los componentes Z-2 y Z-3 respectivamente.

CUADRO 4.5: Solución para el Problema del Horticultor.

FUNCION OBJETIVO: MINIMIZAR

SOLUCION OPTIMA

INDICE	VARIABLE	VALOR
1	PA	12.778
3	PC	3.889
7		106.667

COSTO = 833.333

INDICE	RESTRICCION	PRECIO SOMBRA
1	NITRO	2.778
2	ACIDO	0.
3	POTAS	2.778

INDICE	VARIABLE	COSTO REDUCIDO
2	PB	23.333
4	PD	44.444
5	PE	25.

RANGOS DE VARIACION EN LOS COSTOS DE LA FUNCION OBJETIVO:

VARIABLE	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
PA	0.0	50.	64.995
PB	91.667	115.	INFINITO
PC	.393	50.	133.93
PD	105.556	150.	INFINITO
PE	50.	75.	INFINITO

RANGOS DE VARIACION EN LOS RECURSOS:

RECURSO	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
NITRO	70.08	230	INFINITO
ACIDO	INFINITO	70	176.667
POTAS	.553	70	INFINITO

Nota: No presenta el formato de salida.

CUADRO 4.6: Solución para el Problema del Vendedor.

FUNCION OBJETIVO: MAXIMIZAR

SOLUCION OPTIMA

INDICE	VARIABLE	VALOR
1	PNITRO	2.778
3	PPOTAS	2.788
5		23.333
7		44.444
8		8.333

GANANC = 833.333

INDICE	RESTRICCION	PRECIO SOMBRA
1	PA	12.778
2	PB	0.
3	PC	106.667
4	PD	0.
5	PE	0.

INDICE	VARIABLE	COSTO REDUCIDO
2	PACIDO	-106.667

RANGOS DE VARIACION EN LOS COSTOS DE LA FUNCION OBJETIVO:

VARIABLE	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
PNITRO	70.08	230	INFINITO
PACIDO	INFINITO	70	176.667
PPOTAS	.553	70	INFINITO

RANGOS DE VARIACION EN LOS RECURSOS:

RECURSO	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
PA	.393	50.	64.995
PB	91.667	115.	INFINITO
PC	.393	50.	133.93
PD	105.556	150.	INFINITO
PE	50.	75.	INFINITO

Nota: No presenta el formato de salida.

Algo confundidos en relación con la forma en la que deben utilizar la información, el staff decide consultar a un empresario para que les ayude a tomar algún curso de acción adecuado en cuanto a políticas de reclutamiento. Curiosamente, este cuenta con los recursos suficientes para satisfacer la demanda de los componentes, por lo que decide proponer la opción operar una de sus plantas por una contribución mensual, independiente del pago de sus honorarios por la asesoría, y la provisión mensual de la materia prima por cuenta del gobierno para el ensamblado. Con base en esto, acuerdan que si el los convence de que bajo su plan los costos van a resultar iguales o inferiores a los que para ellos representa operar el proyecto, estarán en posibilidades de aceptar la propuesta.

CUADRO 4.7: Tasa de Producción por Tipo de Mano de Obra.

	COMPONENTES			
	Z-1	Z-2	Z-3	COSTOS DE OPERACION
INGENIERO	2.2	2.7	3.2	$6.30
TECNICO	0.0	4.2	4.1	5.80
APRENDIZ	2.1	5.8	0.0	5.20
DEMANDA MENSUAL	12,000	15,000	8,000	

El empresario regresa a su oficina y formula un Modelo de Programación Lineal que cubra las exigencias del gobierno, mediante el cual se busca minimizar los costos de operación, cubriendo la demanda mensual para cada uno de los componentes.

Minimizar z = 6.3HING + 5.8HTEC + 5.2HAPR

sa

2.2HING		+ 2.1HAPR	=>	12,000
2.7HING	+ 4.2HTEC	+ 5.8HAPR	=>	15,000
3.2HING	+ 4.1HTEC		=>	8,000
HING ,	HTEC ,	HAPR	=>	0

donde HING, HTEC y HAPR representan los números de horas de trabajo que se requieren de los ingenieros, técnicos, y aprendices respectivamente.

Después de resolver el modelo con el paquete MILP88, (cuadro 4.8), determina que se requieren 2,500 horas de trabajo de los ingenieros, ninguna de los técnicos, y 3,095 de los aprendices a un costo total de trabajo de $31,845.2. Con lo que se alegra, pues tie· los recursos exactos para cubrir tal requerimiento de mano de obra. Sin embargo, piensa que mostrar la formulación junto con sus resultados al staff, hará que este únicamente le page sus honorarios y decida operar la planta por cuenta propia. En su lugar, decide inventar un ingenioso sistema de precios para los diferentes componentes y en vez de cargar una renta mensual por la operación de su planta impone precios que debe pagar el gobierno para obtener las cantidades que demande de los mismos. Para conseguir esto, formula un Problema de Programación Lineal que es el "dual" del primero, con la finalidad de maximizar la ganancia total sujeta a la restricción de que la cantidad cargada a cada uno de los productos producidos por los obreros, no exceda al pago de los mismos, pues de otra forma el plan resultaría inconveniente para el gobierno y por lo tanto no lo aceptaría. Por ejemplo, considere a un ingeniero, este obrero produce en una hora 2.2, 2.7 y 3.2 unidades de los componentes Z-1, Z-2 y Z-3 respectivamente. Así, su ingreso por hora de trabajo es: $2.2P_1 + 2.7P_2 + 3.2P_3$ donde P_i, con $i = 1, 2, 3$, es el precio unitario cargado al componente Z-i. Esta cantidad no debe exceder a los $6.30 fijados por el gobierno, ya que de hacerlo resultaría inoperante aceptarlo y por ende utilizaría su grupo de trabajo incurriendo con ello en un costo inferior. Al igual que esta restricción, existen otras dos relativas a los demás obreros bajo el mismo principio. De esta forma, el empresario desea:

$$\text{Maximizar } z = 12{,}000P_1 + 15{,}000P_2 + 8{,}000P_3$$

sa

$$\begin{array}{rrrl}
2.2P_1 + & 2.7P_2 + & 3.2P_3 & <= 6.3 \\
 & 4.2P_2 + & 4.1P_3 & <= 5.8 \\
2.1P_1 + & 5.8P_2 & & <= 5.2 \\
P_1 , & P_2 , & P_3 & => 0
\end{array}$$

Con esta base, resuelve su problema y observa con agrado que a los precios óptimos, su ingreso mensual es exactamente igual al que el gobierno hubiera incurrido con el otro plan (ver cuadro 4.9).

Por lo que en su próxima reunión con el staff, el empresario presentará su oferta en términos de los precios de los productos. Ellos pueden verificar, por supuesto, que esta no produce costos más elevados que los especificados, y como no pueden determinar la manera en la que la planta debe ser operada a un menor costo, acordaran firmar el contrato.

Si el staff hubiera conocido los detalles de la Programación Lineal, sin duda alguna habrían determinado el origen de los precios fijados por el empresario (precios sombra), así como la mezcla óptima de obreros a emplear.

Estas interesantes interpretaciones económicas, pueden ayudar en gran medida a obtener información adicional sobre el sistema en general, permitiendo elaborar juicios más fundamentados sobre los resultados que se obtengan. Pese a esto, existen suposiciones implícitas que no se han mecionado para que se justifique completamente, no hay que olvidar que se esta trabajando con abstracciones de la realidad.

Al formular un problema bajo ambas estructuras (primal y dual), uno se encuentra en ambas partes de un tablero de ajedrez, es decir, una situación en la que se presenta una competencia "perfecta", ambas partes conocen exactamente las alternativas a seguir, aun más el sistema no est afectado por situaciones externas.

Imagine a un productor que pretende poner a la venta una serie de productos, este buscará maximizar sus ganancias atrayendo al mayor volumen de compradores mediante los precios que logre fijar, por su parte, los consumidores para satisfacer sus necesidades tendran que buscar en el mercado una serie de productos que minimicen su gasto pero que sin embargo satisfagan sus necesidades. El empresario

CUADRO 4.8: Solución para el Problema Gubernamental.

FUNCION OBJETIVO: MINIMIZAR

SOLUCION OPTIMA

INDICE	VARIABLE	VALOR
1	HING	2500.
3	HAPR	3095.24
5		9702.38
	COSTO =	31645.2

INDICE	RESTRICCION	PRECIO SOMBRA
1	Z-1	2.476
2	Z-2	0.
3	Z-3	0.266

INDICE	RESTRICCION	COSTO REDUCIDO
2	HTEC	4.707

RANGOS DE VARIACION EN LOS COSTOS DE LA FUNCION OBJETIVO:

VARIABLE	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
HING	5.447	6.3	9.974
HTEC	1.092	5.8	INFINITO
HAPR	1.692	5.2	6.013

RANGOS DE VARIACION EN LOS RECURSOS:

RECURSO	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
Z-1	8487.1	12000	INFINITO
Z-2	INFINITO	15000	24702.
Z-3	0.0	8000	17196

Nota: No presenta el formato de salida.

sabe que el cliente conoce los precios que se manejan en el mercado, por lo tanto buscará fijar los suyos de tal forma que no excedan lo más que el consumidor este dispuesto a pagar por ellos. Analogamente, dado que el comprador conoce los precios de los productos en el mercado él se sujetará a los que le representen el mínimo egreso, de esta forma lo que uno paga el otro lo absorbe (por eso el hecho de que la función objetivo asuma el mismo valor en las soluciones óptimas tanto del primal como del dual). En este caso se estará hablando de una situación donde se manejan niveles de información "perfectos".

CUADRO 4.9: Solución para el Problema del Empresario.

FUNCION OBJETIVO: MAXIMIZAR

SOLUCION OPTIMA

INDICE	VARIABLE	VALOR
1	P(1)	2.476
3	P(3)	.266
5		4.707

GANAN = 31845.2

INDICE	RESTRICCION	PRECIO SOMBRA
1	HING	2500.
2	HTEC	0.
3	HAPR	3095.24

INDICE	VARIABLE	COSTO REDUCIDO
2	P(2)	-9702.38

RANGOS DE VARIACION EN LOS COSTOS DE LA FUNCION OBJETIVO:

VARIABLE	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
P(1)	8487.1	12000	INFINITO
P(2)	INFINITO	15000	24702.
P(3)	0.	8000	17196.

RANGOS DE VARIACION EN LOS RECURSOS:

RECURSO	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
HING	5.447	6.3	9.974
HTEC	1.092	5.8	INFINITO
HAPR	1.692	5.2	6.013

Nota: No presenta el formato de salida.

Como puede apreciarse, muchas ventajas se derivan del uso de la teoría de la dualidad. Por fortuna, la mayoría de los paquetes comerciales de computación presentan en sus salidas la solución del problema dual, tarea que no requiere de trabajo extra, ya que el metodo simplex la genera mientras esta en operación. El aspecto más importante de los problemas duales, es el establecimiento de los precios sombra. A continuación se presentanalgunos principios básicos sobre su interpretación.

Principio 1: Restricciones que presenten holguras diferentes de cero en la solución óptima, deben tener precios sombra iguales a cero. Restricciones con precios sombra diferentes de cero deben tener holguras nulas.

Este principio se conoce en la teoría de la dualidad como "Holguras Complementarias", y su interpretación económica resulta bastante interesante: Si un recurso posee excesos (holguras) en niveles de operación óptimos existe propiamente un "desperdicio" en su utilización. Por ejemplo, si se poseen tres máquinas y solo pueden operarse dos, se esta desperdiciando de alguna forma la tercera. Bajo esta idea, el adquirir otra de ninguna forma provocará un aumento en las ganancias, esto hace que no resulte operativamente atractivo adquirir más recursos de los que se tienen en exceso, y por lo tanto carecen de valor (pues no producirían nada) es decir, poseen precios sombra nulos. A la inversa, si un recurso se esta utilizando al máximo (es decir, su holgura es nula), es factible que un incremento en este genere una ganancia y por ende llegue a resultar atractivo incrementarlo, en este caso su precio sombra puede llegar a ser diferente de cero.

Principio 2: Los costos reducidos son los precios sombra para las condiciones de no negatividad, ya que ellos representan el cambio en la función objetivo por unidad de incremento en la variable, y por ende ir de 0 a algun valor positivo.

Principio 3: Por convención, los precios sombra positivos representan aumentos en la función objetivo cuando se incrementan los niveles de los recursos (esto no se aplica a los costos reducidos, por la razón explicada en el principio anterior).

Aunque los principios han sido establecidos de una manera empírica, conviene aclarar que existe una serie de desarrollos matemáticos complejos que soportan el peso de las aseveraciones antes indicadas.

4.6 Campos de Aplicación de la Programación Lineal

La Programación Lineal ha sido exitosamente aplicada en diversos campos, entre los que pueden mencionarse:

La Industria:

Es aquí en donde ha sido utilizada en mayor escala, pues ha ayudado a realizar exitosamente la toma de decisiones concernientes a la determinación de planes de distribución, asignación de recursos, de mezcla de producción y de mercado. Cabe mencionar que dentro de este aspecto los modelos más grandes corresponden a la Industria del Petróleo (aproximadamente 10,000 restricciones y otras tantas variables).

Las Finanzas:

Una de las primeras aplicaciones en este sector se debe a Markowitz (1959), quien formuló el problema de selección de portafolio; que busca determinar la mejor manera en la que pueda invertirse una suma de dinero en valores de tal forma que se maximice el monto de los intereses devengados.

La Agricultura:

Para la que se han formulado modelos lineales que ayudan a determinar niveles óptimos en la cría de animales así como de siembra de productos agrícolas, asignación de horas-hombre, distribución de agua, etc.

El Sector Salud:

Para la determinación óptima de los niveles de personal, medicinas, camas, etc.

La Minería:

En la determinación de aleaciones óptimas de diversos materiales.

La Alimentación:

Para encontrar dietas balanceadas así como económicas.

La Planeación de Proyectos:

En donde ha ayudado a programar actividades que dentro de un proyecto son determinantes para su consecución.

Cabe aclarar que la lista antes presentada de ninguna manera es exhaustiva, ni tampoco asegura que en todo sector la aplicación de la Programación Lineal deba realizarse, como ya fue indicado, existen otros modelos más sofisticados cuyo uso puede ser más conveniente.

4.7 Casos de Estudio

A continuación se presenta el desarrollo del primer caso expuesto en el Tema 3, así como del ejemplo 4.6. Adicionalmente, se expone una serie de interpretaciones en términos del contexto que establece cada uno. Esta etapa es una de las más cruciales en el desarrollo de un problema, una respuesta resulta "inútil" a menos de que venga acompañada de un razonable conjunto de recomendaciones que permitan en un momento transformarla a un nivel operativo de la realidad.

4.7.1 CASO 1: Planeación de la Producción en la Compañía Ahedo.

MILP88, en el cuadro 4.11, proporciona la solución al problema original, formulado en el Tema 3. Para comprender más ampliamente la información que contiene se analizará cada uno de los apartados que lo componen.

Solución Optima:

Como fue apuntado, los valores de las variables de decisión son: producir 200 cinturones de lujo y 600 del tipo económico, con una ganancia total de $260,000. Sin embargo, existen holguras en los recursos correspondientes a las hebillas para ambos modelos (HLUJO y HECON), 200 y 100 unidades respectivamente. Esta situación puede corregirse, solicitando un pedido inferior al proveedor de hebillas o aumentando los niveles de producción.

Precios Sombra:

Los recursos: Tiempo y Piel, son los que se consideran como los más escasos, pues en la solución óptima se utilizan a su máximo nivel (carecen de holgura), por lo que seran susceptibles a incrementarse. Cada unidad de Tiempo adicional que se desee comprar en el exterior no debe pagarse a un precio superior a los $100 (que es el precio sombra de este recurso), pues esta es la máxima ganancia que puede producir en la solución, en caso de que se adquiera; una cifra superior representará pérdidas para la empresa. El recurso Piel tiene un valor de $200, hay que advertir que un aumento en este, provocará una ganancia mayor en relación al primero. Los recursos restantes, HLUJO y HECON, tienen un valor nulo, ya que incrementarlos no representa ganancia alguna para la compañía; esto puede observarse más claramente, al notar que la presencia de holguras mayores a las existentes, en nada ayudará a cambiar el nivel de operación óptimo actual.

Costos Reducidos:

Debido a que las variables de decisión se encuentran en la solución básica óptima, este apartado carece de información.

Rangos de Variación en los Costos de la Función Objetivo:

Generalmente en el proceso productivo ocurren cambios de última hora que pueden provocar que los niveles de operación óptimos se vean modificados. El Análisis de Sensibilidad, permite tener una visión más amplia sobre la estabilidad del modelo ante modificaciones impre·istas. En este apartado,

CUADRO 4.11: Solución Optima del Problema de la Compañía Ahedo.

FUNCION OBJETIVO: MAXIMIZAR

SOLUCION OPTIMA

INDICE	VARIABLE	VALOR
1	CLUJO	200
2	CECON	600
5		200
6		100

GANANC = 260000

INDICE	RESTRICCION	PRECIO SOMBRA
1	TIEMPO	100
2	PIEL	200
3	HLUJO	0.
4	HECON	0.

INDICE	VARIABLE	COSTO REDUCIDO
—	—	—

RANGOS DE VARIACION EN LOS COSTOS DE LA FUNCION OBJETIVO:

VARIABLE	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
CLUJO	200	400	500
CECON	200	300	400

RANGOS DE VARIACION EN LOS RECURSOS:

RECURSO	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
TIEMPO	900	1000	1200
PIEL	600	800	850
HLUJO	200	400	INFINITO
HECON	600	700	INFINITO

Nota: No presenta el formato de salida.

pueden apreciarse los rangos de variación en las ganancias de los cinturones, siempre y cuando se efectúe un cambio a la vez. Por ejemplo, reducir la contribución del modelo de lujo a un nivel inferior a los $200 hará incosteable su producción, pues resultará más caro en comparación con las ganancias que aporta. Un incremento superior a los $500, lo convertirá en el principal de los productos a manufacturar. Por su parte, el rango de validez de los cinturones económicos va de $200 a $400. Hay que notar que cualquier cambio que se efectúe, tenderá a afectar el valor de la función objetivo, para actualizarlo, solo habrá que multiplicar las ganancias de cada una de las variables, por sus valores correspondientes y obtener el total. En relación al modelo, puede apreciarse que este es relativamente insensitivo ante cambios en el vector de costos, pues presenta un rango de error en la estimación de 300 unidades para el cinturón de lujo y 200 en el económico.

Cualquier contingencia puede provocar que los precios sombra cambien, en esta instancia, hay que remarcar que la escasez de un recurso tiende a incrementar su precio, este principio se conoce como la "Ley de los Rendimientos Marginales Físicos Decrecientes", la cual establece que mientras la cantidad de un bien aumente, manteniéndose la de los demás constante, existirá un punto más allá del cual su producto marginal disminuye. Cabe aclarar que esta es una aseveración empírica de la realidad, pues presenta un resultado observable dentro del campo de la teoría económica.

Rangos de Variación en los Recursos:

En este apartado se indican los rangos dentro de los que pueden cambiar el volumen de los recursos, sin que ello haga que alguna de las variables que se encuentran en la base opere en niveles negativos. Cualquier cambio afectará tanto los valores de las mismas como el de la función objetivo. En el cuadro 4.11 puede apreciarse que el recurso Tiempo tiene un rango de 900 a 1200 unidades, dentro del cual el precio sombra de $100 se mantendrá vigente, es decir, pueden comprarse hasta 200 unidades adicionales de Tiempo a $100 (ya sea adquiriendo maquinaria nueva, contratando más obreros, etc.), o reducir el Tiempo de la producción en 100 unidades, a sabiendas de que esto reducirá la ganancia en $100 por unidad decrementada. La Piel tiene un rango de 600 a 850 unidades, a un precio de $200 por cada una. Si existiera un proveedor externo que ofreciera tal recurso, habría que comprarle hasta 50 unidades adicionales, ya que una adquisición mayor provoca holguras en este, incurriendo por ello en desperdicios. Si se quisiera emplear este en la producción de otro bien, hay que considerar que una sustracción en más de 200 unidades puede provocar un cambio drástico en los niveles de la solución óptima. Debido a que las hebillas para ambos tipos de cinturones presentan holguras en el punto óptimo, un incremento en estas, en nada ayudará mejorar la ganancia actual, por lo tanto, un ımento indefinido es permitido sin que ello afecte a la solución, por su parte, el rango mínimo esta en función del nivel de operación óptimo, indudablemente un cambio que afecte a este, provocará modificaciones en la producción.

Existen otros tipos de cambios que permiten un Análisis de Sensibilidad más completo, sin embargo, debido a su diversidad, estos caen fuera del presente estudio, y entre los pueden mencionarse a los relativos a cambios en los coeficientes tecnológicos, incremento de nuevas variables de decisión e imposición de nuevas restricciones. Cada uno, puede ser considerado, realizando corridas múltiples en los paquetes CAAM MASTER y MILP88, efectuando el análisis correspondiente según sea el caso.

4.7.2 CASO 6: Un Problema de Horticultura.

En el cuadro 4.5 se condensa la solución del modelo, proporcionada por el paquete MILP88. En este puede advertirse lo siguiente:

Solución Optima:

Para satisfacer los requerimientos mínimos para el cultivo es necesario comprar 12.779 kilos del producto A y 3.889 del C. Tal adquisición provocara un exceso de 106.667 gramos en el recurso ácido; los demás se satisfacerán exactamente. El costo óptimo es de \$833.333.

Precios Sombra:

Dado que existe un exceso en el recurso Acido, no deberán adquirirse más unidades de este; en términos económicos el metodo simplex le fija un valor nulo, para indicar que no representa ganancia alguna en caso de que se incremente. Hay que remarcar que esto no indica que en realidad deba tener un precio nulo. El Nitrogeno y el Potasio tienen precios positivos, ya que un aumento en su requerimiento demandará la compra de una mayor cantidad en los productos A al D, teniendo en cuenta que el precio que se pague por estos no debe ser superior a 2.778 por unidad de recurso.

Costos Reducidos:

Los productos que no se consumen son: B, D y E. Esto se debe al alto precio que tienen en comparación con los rendimientos que producen. Suponga que en el mercado se ha agotado el producto A, frente a esta circunstancia será necesario adquirir unidades adicionales de otros recursos. Así por ejemplo, el producto B aumentará el costo en \$23.333 por cada kilo que se adquiera, mientras que los D y E lo aumentaran en \$44.444 y \$25 respectivamente; como puede advertirse, el que menos egreso representa es el B, sin embargo ello no asegura que en total sea el más económico; para comprobarlo puede correrse el

SOLUCION OPTIMA

INDICE	VARIABLE	VALOR
1	PB	8.214
2	PC	4.821
7		57.857

COSTO = 1185.714

modelo, excluyendo a este último, obteniendose la siguiente solución: lo anterior asegura que en defecto del producto A, la mejor opción es el B, no obstante los niveles de las variables restantes (C y exceso de Acido), se ven modificadas para compensar el cambio sufrido. Observe que el exceso de Acido, ante el cambio, se redujo considerablemente. Advierta que en las restricciones los productos A y B se estan empleando para producir la cantidad necesaria del recurso Nitrógeno. Así, si se hubiera querido evitar la corrida, en forma empírica la elección podría haberse efectuado con base en el producto que tuviera el mínimo costo marginal para este recurso. Con base en la función objetivo:

$$\text{Minimizar } z = 50PA + 115PB + 50PC + 150PD + 75PE$$

tendrían que realizarse los siguientes cocientes:

115/28 = 4.107

150/30 = 5

75/16 = 4.687

comprobando que en efecto, el producto B es el más económico de los que no se utilizan.

Rangos de Variación en los Costos de la Función Objetivo:

Los precios de los productos B, D y E, pueden incrementarse sin que ello haga más atractiva su compra, por lo tanto, virtualmente un aumento cualquiera en estos no reducirá de manera alguna el costo actual. Sin embargo, si se reducen en una cifra equivalente a sus costos reducidos serán susceptibles a ser adquiridos. Observe que las cotas mínimas estan en función de tal diferencia, es decir:

Producto:	Valor Actual	-	Costo Reducido	=	Cota Mínima:
PB	115	-	23.333	=	91.667
PD	150	-	44.444	=	105.556
PE	75	-	25	=	50

Por su parte, si los costos del producto A se reducen más alla de $.393, practicamente se estará hablando de una verdadera oferta que sin duda hara que todo el consumo se concentre en este; si su precio aumenta en más de $64.995, habrá que sustituirlo por otro (porqué?). El producto C tiene un rango más amplio, $.393 a $133.93, es decir, es menos sensitivo a cambios inesperados, en comparación con el A.

Rangos de Variación en los Recursos:

Cualquier incremento que se haga sobre los recursos Nitrógeno y Potasio, no hará cambiar la preferencia en el consumo de los productos A y C, debido a que estos son más económicos que los restantes. Sin embargo, no ocurre lo mismo con el Acido, su requerimiento puede reducirse al mínimo sin que ello tampoco afecte la solución y su cota máxima es 176.667 gramos.

El lector podrá advertir que el modelo, en general, es insensitivo ante cambios inesperados en los requerimientos o costos (a excepción del producto A). Ya que sus rangos de variación son muy grandes (ver cuadro 4.5).

REFERENCIAS:

[6] Capítulos 3 y 4.
[8] y [83] Capítulo 3.
[13]
[15] Capítulo 7.
[18] Capítulos 1 al 8, en particular capítulos 1 y 5.
[19] Capítulos 2 y 3.
[22] Capítulo 8.
[39] Capítulos 4, 7 y 8.
[44] Capítulo 3, sección 3-2, capítulo 7, sección 7-5, capítulo 9, sección 9-4, capítulo 14, secciones 14-1 y 14-3, apéndice C.
[60] Capítulo 5.
[69] Capítulos 3 y 4, apéndices C y D.
[85] Capítulos 6 al 11.
[87] Capítulo 6.

PROBLEMAS:

1. Considere el siguiente Problema de Programación Lineal:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar } z = \; & 10X_1 + 9X_2 \\
\text{sa} \; & \\
& 0.7X_1 + X_2 <= 630 \\
& 3X_1 + 5X_2 <= 3{,}600 \\
& 3X_1 + 2X_2 <= 2{,}124 \\
& X_1 + 2.5X_2 <= 1{,}350 \\
& X_1 , \; X_2 => 0
\end{aligned}
$$

a) Resuélvalo gráficamente.

b) Incluya la restricción $X_1 + X_2 => 1{,}000$ y grafíquela. Indique lo que ocurre.

2. A continuación se muestra la solución del siguiente Problema de Programación Lineal:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } z = \; & X + 4Y \\
\text{sa} \; & \\
& 2X + Y => 3 \\
& 4X + 5Y => 10 \\
& X , \; Y => 0
\end{aligned}
$$

a) Soluciónelo graficamente y compruebe sus resultados con la salida del paquete.
b) El valor óptimo de la función objetivo es 2.5. Grafique la recta X + 4Y = 2.5. Para qué valores de X y Y se consigue esto.
c) La cota máxima del costo asociado a X es 3.2, cual es el incremento en el costo ante tal cambio?. Grafique la nueva funcion: 3.2X + 4Y = 8. Que valores de X y Y son los que la optimizan?. Qué ocurre si el coeficiente de X se incrementa a 3.21?. Explique que significado tiene la cota máxima.
d) En lugar de cambiar los costos de la función objetivo, de que manera podría forzarse a que la solución óptima sea X = 5/6 agregando únicamente una restricción del tipo <=?.
e) Ignorando los cambios propuestos en los incisos c) y d), considere un decremento en el lado derecho de la segunda restricción. De acuerdo a la

---

FUNCION OJETIVO: MINIMIZAR

SOLUCION OPTIMA

INDICE	VARIABLE	VALOR
1	X	2.5
3		2.0

COSTO = 2.5

INDICE	RESTRICCION	PRECIO SOMBRA
1		0.
2		0.25

INDICE	VARIABLE	COSTO REDUCIDO
2	Y	2.75

RANGOS DE VARIACION EN LOS COSTOS DE LA FUNCION OBJETIVO:

VARIABLE	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
X	0.	1.0	3.2
Y	1.25	4.0	INFINITO

RANGOS E VARIACION EN LOS RECURSOS:

RECURSO	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
1	INFINITO	3.0	5.0
2	6.0	10.0	INFINITO

---

salida qué efecto tendrá esto?.

f) Cambie la segunda restricción por: 4X + 5Y => 9, y grafíquela, determine la nueva solución óptima. Cuánto fué el cambio por unidad reducida?. Compare sus resultados con su aseveración en el inciso anterior.

g) Repita lo anterior para un valor de 4 en el lado derecho.

h) Sin ningún cálculo, e ignorando los cambios propuestos, explique qué pasaría si se impone la restricción Y => 1. Qué efectos tiene esto en el costo?. Qué ocurre con X de acuerdo a la gráfica.

i) Qué pasaría si para la segunda restricción el lado derecho se incrementa.

3. En el siguiente cuadro se muestra la solución para el problema de la Compañía Campbell's. Donde:

NLS1 = miles de litros producidos de la sopa tipo 1.
NLS2 = miles de litros producidos de la sopa tipo 2.

y cuyo modelo matemático es:

$$\text{Maximizar } z = 500NLS1 + 500NLS2$$

sa

$$\begin{aligned} 2NLS1 + 0.50NLS2 &\le 200 \text{ (papas)} \\ NLS1 + NLS2 &\le 200 \text{ (almeja)} \\ 0.05NLS1 + 0.25NLS2 &\le 20 \text{ (salsa de jitomate)} \\ NLS1 , \quad NLS2 &\ge 0 \end{aligned}$$

FUNCION OJETIVO: MAXIMIZAR

SOLUCION OPTIMA

INDICE	VARIABLE	VALOR
1	NLS1	84.21
2	NLS2	63.16
5		52.63

GANANCIA = 73685

INDICE	RESTRICCION	PRECIO SOMBRA
1		210.5
2		0.
3		1579

INDICE	VARIABLE	COSTO REDUCIDO
--	--	--

RANGOS DE VARIACION EN LOS COSTOS DE LA FUNCION OBJETIVO:

VARIABLE	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
NLS1	100	500	2000
NLS2	125	500	2500

RANGOS DE VARIACION EN LOS RECURSOS:

RECURSO	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
1	40	200	325
2	147.37	200	INFINITO
3	5	20	36.67

a) Cuál es la solución óptima?. Cuál es la holgura para cada uno de los recursos? (observe que las variables estan expresadas en miles).
b) Suponga que 20,000 o más papas estan a su disposición a ningún costo. Qué cantidad adicional de sopa puede ser producida?.
c) Repita el inciso anterior para 20,000 almejas, así como para 20,000 litros de salsa de jitomate, asumiendo un incremento a la vez en cada caso.
d) Ignorando los cambios propuestos en los incisos b) y c), suponga que una revisión en el inventario reportó 180,000 unidades de papas. De que manera afecta esto en la solución?.
e) Ignorando el inciso b), suponga que el precio de venta de la sopa tipo 1 se incrementa a $525. Sigue siendo la solución óptima?. Explique.
f) Formule el problema dual en términos del primal, de una interpretación apropiada para cada una de sus variables.

4. Una fábrica de muebles para oficina ha recibido recientemente una serie de pedidos en lo que respecta a escritorios, libreros, y gabinetes por parte de un grupo de clientes nuevos. El proceso de producción, requiere escencialmente de tres etapas: fabricación, pintura y ensamble, con diversos procedimientos intermedios. En el contrato la fábrica se compromete a entregar 250 gabinetes. La información de interés se resume en el siguiente cuadro:

Descripción	Escritorios	Libreros	Gabinetes
Demanda máxima	1,000	600	700
Demanda mínima	---	---	250
Ganacia	$37,500	$40,000	$18,000

Etapa	Escritorios	Libreros	Gabinetes	Horas Disponibles
Fabricación	0.1 hrs.	0.2	0.5	450
Pintura	0.5	0.4	0.2	400
Ensamble	0.3	0.2	0.3	600

Con el objeto de determinar el mejor uso de los insumos el analista de la empresa ha formulado el siguiente Modelo de Programación Lineal:

Maximizar $z = 37{,}500X_1 + 40{,}000X_2 + 18{,}000X_3$

sa

$$
\begin{array}{lllll}
0.1X_1 + & 0.2X_2 + & 0.5X_3 & <= & 450 \\
0.5X_1 + & 0.4X_2 + & 0.2X_3 & <= & 400 \\
0.3X_1 + & 0.2X_2 + & 0.3X_3 & <= & 600 \\
X_1 & & & <= & 1{,}000 \\
 & X_2 & & <= & 600 \\
 & & X_3 & <= & 700 \\
 & & X_3 & => & 250 \\
X_1\ , & X_2\ , & X_3 & => & 0
\end{array}
$$

donde:

X_i es el número de unidades de escritorios, libreros y gabinetes a producir. $i = 1, 2, 3.$

cuya solución se muestra en el siguiente apartado.

a) Identifique a las restricciones que carecen de holguras y excesos.

b) Suponga que 30 horas extra pueden ser planeadas en la planta, con el objeto de incrementar la disponibilidad de horas en una o más etapas.

FUNCION OJETIVO: MAXIMIZAR

SOLUCION OPTIMA

INDICE	VARIABLE	VALOR
1	X(1)	60.869
2	X(2)	600
3	X(3)	647.826
4		397.826
7		267.391
8		939.826
10		52.173

GANANCIA = 37943478

INDICE	RESTRICCION	PRECIO SOMBRA
1		6521.5
2		73695.5
3		0.
4		0.
5		9217
6		0.
7		0.

INDICE	VARIABLE	COSTO REDUCIDO
--	--	--

RANGOS DE VARIACION EN LOS COSTOS DE LA FUNCION OBJETIVO:

VARIABLE	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
X(1)	3600	37500	45000
X(2)	30783	40000	INFINITO
X(3)	15000	18000	53333.33

RANGOS DE VARIACION EN LOS RECURSOS:

RECURSO	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
1	267	450	474
2	372	400	832
3	332.608	600	INFINITO
4	60.869	1000	INFINITO
5	400	600	687.5
6	647.826	700	INFINITO
7	INFINITO	250	647.826

De qué manera podría emplearse más productivamente ese tiempo?.

c) Cuál es el incremento total que se experimentaría en la ganancia si la demanda de libreros se incrementara en 50 unidades adicionales?.

d) Suponga que el precio de los libreros debe reducirse con el objeto de hacer frente a la competencia. Hasta qué grado podría reducirse sin que ello altere a la producción actual?.

5. Una compañía manufacturera de madera laminada está desarrollando un producto que pondrá a la venta el próximo mes. La empresa tiene una línea de producción compuesta por cinco productos, y espera vender todo lo que produzca. La producción, sin embargo, está limitada a los niveles de inventario disponibles en madera (12,000 unidades de abetos, 15,000 de pinos y 6,000 de cedros), la capacidad de secado se estima en 60,000 minutos, la disponibilidad de espacio para almacenar los productos terminados es de 10,000 unidades. La compañía puede manufacturar hasta cinco clases de paneles diferentes, esta ha usado un Modelo de Programación Lineal con el objeto de planear su producción. A continuación se muestran los tableaus inicial y final (óptimo) para este problema. Donde las variables de decisión X(j) se definen como las cantidades en miles de unidades de repisas a producir el próximo mes (j = 1 a 5), y la función objetivo consiste en maximizar las ganancias (en miles de pesos) para los paneles producidos. Responda a cada una de las siguientes preguntas de acuerdo a la información contenida en los tableaus.

a) Cuál es la ganancia máxima que espera obtener la compañía?.

b) Cuál es el volumen óptimo de operación para cada una de las variables de decisión?.

c) Existen soluciones óptimas múltiples?. Explique.

d) Indique porque ciertas repisas no se encuentran en la línea de producción.
e) De que manera podría obligar a que las repisas del tipo 1 fueran producidas.
f) Suponga los siguientes niveles de ganancia por variable:

$c(1) = 7$; $c(2) = 10$; $c(3) = 12$; $c(4) = 12$; $c(5) = 8$

formule el Modelo de Programación Lineal original.

TABLEAU INICIAL

X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)	X(6)	X(7)	X(8)	X(9)	X(10)	b'
2	0	2	1	1	1	0	0	0	0	12
0	2	1	2	1	0	1	0	0	0	15
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	6
5	7	4	5	6	0	0	0	1	0	60
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	10
-7	-10	-12	-12	-8	0	0	0	0	0	0

TABLEAU OPTIMO

X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)	X(6)	X(7)	X(8)	X(9)	X(10)	b'
2	0	1	0	1	0	-1	0	0	2	5
-2	0	0	1	-1	1	2	0	0	-4	2
0	0	0	0	0	1	1	1	0	-3	3
0	0	0	0	0	2	1	0	1	-9	9
1	1	0	0	1	-1	-1	0	0	3	3
3	0	0	0	2	2	2	0	0	6	114

TEMA 5: MODELOS DE TRANSPORTE Y ASIGNACION.

To every man there openeth
A way, and ways, and a way,
And the high soul climbs the high way,
And the low soul gropes the low;
And in between on the misty flats,
The rest drift to and fro;
But to every man there openeth
A high way and a low,
And every man decideth
The way his soul shall go.

JOHN OXENHAM, A HIGH WAY AND A LOW.

5.1 Introducción

El tratamiento de los métodos de transporte se remonta hacia 1941, cuando F. L. Hitchcock presentó un estudio entitulado "The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities", que se considera como la primer contribución importante dentro de este campo. En 1947 T. C. Koopmans publicó un estudio bajo un enfoque diferente al anterior con el título de: "Optimum Utilization of the Transportation System". Un problema de transporte involucra un número de fuentes (fábricas) y otro de destinos (centros de redistribución), se supone que en un determinado tiempo, cada fuente tiene una cierta capacidad u oferta y cada destino a su vez una demanda, por cada unidad que se envie de un origen a un destino deberá pagarse un costo que generalmente diferirá de fuente en fuente y naturalmente de destino a destino. A su vez, cada fuente podrá realizar envíos a cada uno de los destinos, de esta forma, el problema consistirá en minimizar los costos de manera que se satisfaga la demanda dada. Dentro de este marco conceptual, otros modelos como los de asignación (con una estructura matemática similar), pueden ser resueltos por cualesquiera de los algoritmos que han sido desarrollados para los de transporte.

5.2 Modelos de Transporte

Dada la estructura particular de los problemas de transporte, es posible desarrollar mecanismos de solución más eficientes que el método simplex para determinar su solución óptima (si existe). Entre los que pueden citarse:

- Método Stepping-Stone (piedra de paso).

- Método MODI o de las variables duales.

Dado que la finalidad de esta sección no radica en explicar su funcionamiento se recomienda, al lector interesado, consultar el Apéndice B o, en su defecto, cualesquiera de las referencias indicadas al final del tema.

Ejemplo 5.1:

Una compañía manufacturera produce ciertos componentes químicos en diferentes plantas ubicadas en la República Mexicana:

- Monterrey.
- Guadalajara.
- Distrito Federal.
- Puebla.

Sus costos de producción y capacidades se proporcionan en el cuadro 5.1.

CUADRO 5.1: Costos de Producción y Capacidades por Centro Manufacturero.

Centro de Manufactura	Costos de Producción (por unidad)	Capacidad (unidades por mes)
Puebla	\$730	25
Distrito Federal	\$680	125
Guadalajara	\$660	100
Monterrey	\$690	125

Para el siguiente mes, se tienen que surtir ordenes de las siguientes ciudades:

Veracruz	110 unidades de producción.
Toluca	150 unidades de producción.
Chihuahua	115 unidades de producción.

Debido a problemas de comunicación, el centro ubicado en Veracruz no aceptará unidades de la planta en el Distrito Federal.

Formule un Modelo de Programación Lineal, que permita determinar el plan de distribución para el próximo mes a un costo mínimo. Las tarifas de transporte por unidad se muestran en el cuadro 5.2.

Con el objeto de formular el presente Problema de Programación Lineal, se supondrá que resulta inoperante para la compañía trasladar unidades entre los centros de oferta, y entre los de demanda.

Dado que la empresa desea conocer los niveles de transporte, es decir, el número de unidades a transportar, las variables se definirán como: UEPV, UEPT, UEPC, UEDV, UEDT, UEDC, UEGV, UEGT, UEGC, UEMV, UEMT y UEMT que serán los números de unidades que se envíen de cada fuente de oferta a cada centro de demanda, por ejemplo:

UEDV representará el número de unidades enviadas de la planta en el Distrito Federal al centro de demanda ubicado en Veracruz.

CUADRO 5.2: Costos de Transporte de Centros de Producción a Centros de Distribución (por unidad transportada).

De/A	Veracruz	Toluca	Chihuahua
Puebla	22	15	28
Distrito Federal	X	18	26
Guadalajara	18	22	14
Monterrey	19	23	20

Note que aunque se especifica que no puede existir comunicación entre ambos, se ha incluido una variable que define la posibilidad de transporta unidades entre estos, la justificación a este hecho se apreciará más adelante.

Antes de plantear la función objetivo, es necesario calcular el costo total por unidad transportada (costo de producción más costo de transporte) para cada una de las posibles rutas a seguir. La información anterior se muestra condensada en el cuadro 5.3.

CUADRO 5.3: Costos Totales de Transporte.

De/A	Veracruz	Toluca	Chihuahua
Puebla	730 + 22 = 752	730 + 15 = 745	730 + 28 = 758
Distrito Federal	M*	680 + 18 = 698	680 + 26 = 698
Guadalajara	660 + 18 = 678	660 + 22 = 682	660 + 14 = 674
Monterrey	690 + 19 = 709	690 + 23 = 713	690 + 20 = 710

* Plantear la política de no existencia de comunicación entre el Distrito Federal y Veracruz, es equivalente a atribuir un costo muy elevado M (por ejemplo 10,000) entre dichos centros. Teniendo así un Costo Total = M.

Debido a que la empresa busca minimizar sus costos la función objetivo será:

Minimizar z = 752UEPV + 745UEPT + 758UEPC + MUEDV + 706UEDT + 698UEDC + 678UEGV + 682UEGT + 674UEGC + 709UEMV + 713UEMT + 710UEMC

Por otra parte, las restricciones deben estar formuladas en función de la oferta y la demanda existentes entre cada uno de los centros de producción y distribución. Las restricciones de oferta son:

$$
\begin{array}{lllll}
\mathrm{UEPV+UEPT+UEPC} & & & & = \ 25 \\
 & \mathrm{UEDV+UEDT+UEDC} & & & = 125 \\
 & & \mathrm{UEGV+UEGT+UEGC} & & = 100 \\
 & & & \mathrm{UEMV+UEMT+UEMC} & = 125
\end{array}
$$

y las de demanda:

$$
\begin{array}{lllll}
\mathrm{UEPV} & \mathrm{+UEDV} & \mathrm{+UEGV} & \mathrm{UEMV} & = 110 \\
\quad \mathrm{UEPT} & \quad \mathrm{+UEDT} & \quad \mathrm{+UEGT} & \quad \mathrm{+UEMT} & = 150 \\
\qquad \mathrm{UEPC} & \qquad \mathrm{+UEDC} & \qquad \mathrm{+UEGC} & \qquad \mathrm{+UEMC} & = 115
\end{array}
$$

Todas se formulan en sentido estricto de igualdad, pues la oferta y la demanda totales son iguales (375 unidades), ocasionando que no existan holguras.

En todo problema de transporte debe cumplirse una igualdad entre la oferta y la demanda; si la oferta es superior a la demanda, habrá que considerar la generación de un inventario, que podrá reflejarse en el modelo, a&adiendo un destino ficticio que demande exactamente la cantidad excedente de oferta, ocasionando que el costo de envio a dicho destino sea nulo (ya que en realidad ninguna unidad esta siendo enviada). Si la demanda es superior a la oferta deberá modificarse: aumentando la producción (con la generación de un centro productor ficticio con costos nulos) o disminuyendo la demanda.

Las condiciones de no negatividad del modelo son:

UEPV, UEPT, UEPC, UEDV, UEDT, UEDC, UEGV, UEGT, UEGC, UEMV, UEMT y UEMC => 0

El problema original, presenta la siguiente estructura matemática:

$$
\begin{array}{l}
\text{Minimizar } z = 752\mathrm{UEPV} + 745\mathrm{UEPT} + 758\mathrm{UEPC} + \mathrm{MUEDV} + 706\mathrm{UEDT} + 698\mathrm{UEDC} \\
\qquad 678\mathrm{UEGV} + 682\mathrm{UEGT} + 674\mathrm{UEGC} + 709\mathrm{UEMV} + 713\mathrm{UEMT} + 710\mathrm{UEMC}
\end{array}
$$

sa

$$
\begin{array}{lllll}
\mathrm{UEPV+UEPT+UEPC} & & & & = \ 25 \\
 & \mathrm{UEDV+UEDT+UEDC} & & & = 125 \\
 & & \mathrm{UEGV+UEGT+UEGC} & & = 100 \\
 & & & \mathrm{UEMV+UEMT+UEMC} & = 125 \\
\mathrm{UEPV} & \mathrm{+UEDV} & \mathrm{+UEGV} & \mathrm{UEMV} & = 110 \\
\quad \mathrm{UEPT} & \quad \mathrm{+UEDT} & \quad \mathrm{+UEGT} & \quad \mathrm{+UEMT} & = 150 \\
\qquad \mathrm{UEPC} & \qquad \mathrm{+UEDC} & \qquad \mathrm{+UEGC} & \qquad \mathrm{+UEMC} & = 115
\end{array}
$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

Varias características de importancia tienen que ser resaltadas del modelo anterior:

- El proble ı incluye restricciones de oferta y demanda.
- Cada variable tiene asociado un coeficiente unitario en las restricciones en las que aparece.
- Cada variable aparece a lo más en dos restricciones.

- El problema es de tipo lineal.

Todo problema que las posea se clasificará como: "Modelo de Transporte", aunque no necesariamente tenga que ver propiamente con el envío de recursos, y en su resolución podrá emplearse cualquiera de los algoritmos antes indicados. Lo anterior no implica que el método simplex no pueda ser aplicado, la justificación que fundamenta el uso de otro tipo de algoritmos radica en su eficiencia en la búsqueda de soluciones. Sin embargo, si no se dispone de algún paquete de computación que tenga implantado algún método de transporte, podrá utilizarse el simplex, no obstante lo contrario no se aplica.

Ejemplo 5.2:

Una peque&a empresa tiene una oferta de 3 empleos, que requieren de diferentes habilidades y cualidades por parte del obrero que deba desempe&arlas. Al momento se dispone de tres candidatos que, bajo un mismo salario, pueden ocupar cualesquiera de los puestos. Cada uno posee diferentes capacidades, habilidades y experiencia, y representan para la empresa una determinada ganancia que esta en función del puesto que ocupen. El valor estimado que la compa&ía ha fijado para los candidatos y puestos se muestra en el cuadro 5.4.

CUADRO 5.4: Valor Estimado de la Contribución por Obrero y Puesto Desempe&ado (en miles de pesos).

	TRABAJO		
CANDIDATO	1	2	3
1	5	4	7
2	6	7	3
3	8	11	2

La empresa desea llevar a cabo sus asignaciones de tal forma que se maximice el valor estimado fijado para cada obrero.

Este problema, dada su sencillez, puede resolverse evaluando cada una de las opciones factibles, y seleccionando aquella que proporcione la máxima ganancia, bajo el principio de que uno y solo un obrero debe estar a cargo de un trabajo; para este caso existen 6 realizaciones o combinaciones, entre las que:

Asignar al obrero 1 al trabajo 3 con una ganancia de: \$ 7000
Asignar al obrero 2 al trabajo 1 con una ganancia de: \$ 6000
Asignar al obrero 3 al trabajo 2 con una ganancia de: \$11000
Ganancia Total = \$24000

proporciona la mayor ganancia.

Sin embargo, este tratamiento resulta demasiado laborioso, por ejemplo, el número de opciones a evaluar para determinar el óptimo de un problema que involucra 10 obreros y 10 empleos es 3,628,800, ante esta circunstancia, el lector se cuestionará la existencia de algún método más eficiente para resolverlo.

En general, puede formularse un Modelo de Programación Lineal que tenga la finalidad de determinar la asignación óptima. Para ello, es necesario definir a las variables de decisión de la siguiente manera (suponiendo la existencia de M individuos y N trabajos):

A_{ij} será la variable que represente la asignación del empleo i al obrero j,

los únicos valores que puede asumir esta son: 0,1. La variable tomará el valor de 1 cuando se lleve a cabo una asignación y 0 en otro caso.

Si a la ganancia que se obtiene mediante la asignación del empleo i al obrero j se denota por c_{ij}, se tendrá la siguiente expresión matemática de la función objetivo:

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i} \sum_{j} c_{ij} A_{ij}$$

Si se tratara de costos, tendría que minimizarse el valor de la función.

Las restricciones dependen de la oferta (empleos) y demanda (obreros). Las de oferta se expresan como:

$$\sum_{j=1} A_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, \ldots, N$$

Este conjunto indica que el empleo i puede ser ocupado por uno de los individuos j (j = 1, ..., M), por lo que una de las variables A_{ij} debe tomar el valor de 1 y las demas de cero.

Las restricciones de demanda son:

$$\sum_{i=1} A_{ij} = 1 \text{ para } j = 1, \ldots, M$$

que establecen que un obrero puede ocupar uno de los empleos. Para cualquier valor de M y N solo podrá ocurrir uno de los siguientes casos:

- M > N existe exceso de demanda, por lo tanto ciertos obreros quedarán desempleados.

- M = N la oferta y la demanda se satisfacen exactamente.

- M < N existe exceso de oferta, por lo tanto ciertos puestos quedarán sin ser ocupados.

En este problema es posible que la empresa desee contar con un gran número de candidatos, para efectuar una mejor selección entre estos. Por lo tanto, dado que una condición es mantener la oferta y demanda equivalentes, en el primer caso, puede optarse por generar empleos ficticios que indiquen "no contratación", con calificaciones o ganancias nulas. Para el tercero habra que generar obreros "ficticios", es decir, candidatos a ocupar las plazas que al fin de cuentas deban quedar vacías, con costos o ganancias nulas.

Con frecuencia existen trabajos que, aunque no idénticos, requieren de las mismas aptitudes y producen el mismo beneficio para la empresa (representadas por las c_{ij}). Bajo esta filosofía, suponga que para cada uno de los n trabajos se requieren: N_1 personas para el primero, N_2 para el segundo, y así sucesivamente hasta el N_n. Por lo tanto:

$N_1 + N_2 + \ldots + N_n$ = al número de personas que se requieren

Por simplicidad se supondrá que:

$$N_1 + N_2 + \ldots + N_n = M$$

es decir, la oferta es igual a la demanda. Con base en esto, el modelo matemático tiene la siguiente estructura:

$$\sum_j A_{ij} = N_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_i A_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$A_{ij} => 0$$

donde:

El primer conjunto de restricciones es el de oferta de empleos e indican la necesidad de cubrir N_i plazas vacantes.
El segundo, representa la demanda por parte de los obreros.
Las últimas expresiones corresponden a las condiciones de no negatividad.

La función objetivo es:

$$\text{Maximizar } z = \sum_i \sum_j c_{ij}A_{ij}$$

En otras ocasiones existen individuos que proporcionan la misma ganancia o poseen discrepancias consideradas como despreciables, de tal forma que es factible agruparlos, sin por ello incurrir en graves errores en la formulación del modelo. Ante esa instancia, suponga que se forman m grupos cada uno con: $M_1, M_2, \ldots, M_m$ individuos, y

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_m = N$$

suponiendo N empleos (solo pueden ser ocupados por una persona). El modelo matemático correspondiente es:

$$\text{Maximizar } z = \sum_i \sum_j c_{ij} A_{ij}$$
sa

$$\sum_j A_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_i A_{ij} = M_j \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$A_{ij} => 0$$

Una situación muy común es cuando existen niveles de agrupamiento tanto por empleos como por obreros, es decir, una combinación de los dos últimos casos. De esta forma las variables de decisión se definen como:

A_{ij} que representa el número de trabajos del tipo i asignados a obreros de tipo j (i = 1, ...,N y j = 1, ..., M)

cuyo modelo matemático correspondiente es:

$$\text{Maximizar } z = \sum_i \sum_j c_{ij} A_{ij}$$
sa

$$\sum_j A_{ij} = N_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_i A_{ij} = M_j \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$A_{ij} => 0$$

que es el más general de los casos anteriores.

Cualesquiera de los problemas estudiados puede ser resuelto a partir de la aplicación de algún algoritmo de transporte, pues presentan las características indicadas para este tipo de modelos.

Aunque las condiciones de integralidad deberían ser agregadas para las formulaciones anteriores, estas han sido omitidas, ya que los modelos con la estructura matemática descrita proporcionan valores enteros, siempre que los requerimientos sean enteros.

Ejemplo 5.3:

Suponga un taller de manufactura en el que tres diferentes tornos son empleados para la producción de cuatro piezas metálicas distintas. Estos difieren en cuanto al tipo y grado de automatización, pues han sido adquiridos en diversos periodos, y con base en niveles de calidad heterogeneos. De esta forma, el tiempo que se requiere para la producción varía de máquina en máquina, según el producto que se este manufacturando.

Las disponibili'ıdes en tiempo máquina para el próximo mes son:

- 320 horas para el torno 1,
- 390 horas para el torno 2, y
- 375 horas para el torno 3.

El número de unidades a manufacturar de cada pieza es:

- 1,500 piezas del tipo 1,
- 1,800 piezas del tipo 2,
- 2,100 piezas del tipo 3, y
- 2,250 piezas del tipo 4.

Algunas máquinas no tienen la capacidad de producir ciertas piezas, debido a sus características técnicas, en el cuadro 5.5 se muestra el número de unidades que puede ser manufacturado en una hora por cada máquina.

CUADRO 5.5: Tasa de Producción por Hora por Máquina.

MAQUINA	1	2	3
PRODUCTO:			
1	7.5	10.0	8.0
2	9.0	12.0	9.6
3		6.0	
4		9.0	7.2

Los precios unitarios de venta son:

- $245 para el producto 1,
- $240 para el producto 2,
- $225 para el producto 3, y
- $210 para el producto 4.

Los costos ıriables de producción son:

- Para el producto 1: $83, $91 y $87 para los tornos 1, 2 y 3.
- Para el producto 2: $79, $93 y $91 para los tornos 1, 2 y 3.
- Para el producto 3: $60 para el torno 2.
- Para el producto 4: $81 y $82 para los tornos 2 y 3.

El objetivo es maximizar la contribución total, mediante la programación óptima de la producción.

Debido a las diferentes capacidades en cada uno de los tornos, es necesario considerar su eficiencia en términos de una máquina estándar. Como se aprecia en el cuadro 5.5, en el torno 1 no pueden elaborarse piezas de los tipos 3 y 4, y es más lento en la producción de los tipos 1 y 2 en comparación al torno 2; un razonamiento análogo se aplica al 3.

En términos productivos el torno 2 es el mejor, por lo que puede ser considerado como base para medir la eficiencia de los restantes, y su rendimiento será considerado del 100%. Con base en el cuadro 5.5 se tendrán las siguientes eficiencias:

- El torno 1 tiene una eficiencia del 75% (7.5/10) con respecto al 2.

- El torno 3 tiene una eficiencia del 80% (8/10) con respecto al 2.

El número de horas que el torno 2 emplea en la fabricación de las diferentes piezas se considerará como el estándar de producción, para calcularlo bastará con dividir entre este, al numero total de piezas que se requieren de cada tipo. Los resultados son:

- Pieza 1: 1500 piezas/10 piezas producidas por hora
  = 150 horas estándar necesarias para fabricar 1500 piezas del tipo 1.

- Pieza 2: 1800 piezas/12 piezas producidas por hora
  = 150 horas estándar necesarias para fabricar 1800 piezas del tipo 2.

- Pieza 3: 2100 piezas/6 piezas producidas por hora
  = 350 horas estándar necesarias para fabricar 2100 piezas del tipo 3.

- Pieza 4: 2250 piezas/9 piezas producidas por hora
  = 250 horas estándar necesarias para fabricar 2250 piezas del tipo 4.

La demanda de piezas en horas estándar es:

Tipo de Pieza:	Horas Estándar Demandadas
1	150
2	150
3	350
4	250

900 horas estándar en total.

La capacidad de cada torno puede obtenerse multiplicando su disponibilidad en horas por la eficiencia medida en términos del estándar. Así:

- Torno 1: (320 horas disponibles)(75% de eficiencia)
  = 240 horas estandar.

- Torno 2: (390 horas disponibles)(100% de eficiencia)
  = 390 horas estandar.

- Torno 3: (375 horas disponibles)(80% de eficiencia)
  = 300 horas estandar.

Por lo tanto la oferta en términos de horas estándar es:

Torno:	Horas Estándar Disponibles:
1	240
2	390
3	300

o 930 horas estándar en total.

como hay un exceso de 30 horas en la oferta, existirá una holgura implícita que tendrá un costo nulo asociado.

Los costos estandarizados se muestran en el cuadro 5.6.

CUADRO 5.6: Contribución por Unidad Estándar.

MAQUINA	1	2	3
PRODUCTO:			
1	(162)(10) = $1620	(154)(10) = $1540	(158)(10) = $1580
2	(161)(12) = $1932	(147)(12) = $1764	(149)(12) = $1788
3	No existe	(165)(6) = $ 390	No existe
4	No existe	(129)(9) = $1161	(128)(9) = $1152

Con base en lo anterior, es posible formular el modelo deseado. Para ello se definirá a:

EST_{ij} como el número le horas estándar dedicadas para la elaboración del producto i en el torno j. i = 1, 2, 3, 4. j = 1, 2, 3. Salvo las combinaciones para las que no es posible fabricar un producto en un torno.

Obteniendo el siguiente modelo matemático:

$$\begin{aligned}\text{Maximizar } z = {} & 1{,}620EST_{11} + 1{,}540EST_{12} + 1{,}580EST_{13} + 1{,}932EST_{21} \\ & + 1{,}764EST_{22} + 1{,}788EST_{23} + 990EST_{32} + 1{,}161EST_{42} \\ & + 1{,}152EST_{43}\end{aligned}$$

sa

$$\begin{aligned} EST_{11} + EST_{12} + EST_{13} &= 150 \\ EST_{21} + EST_{22} + EST_{23} &= 150 \\ EST_{32} &= 350 \\ EST_{42} + EST_{43} &= 250 \\ EST_{11} + EST_{21} &<= 240 \\ EST_{12} + EST_{22} + EST_{32} + EST_{42} &<= 390 \\ EST_{13} + EST_{23} + EST_{43} &<= 300 \end{aligned}$$

Todas las variables mayores o iguales que cero.

que corresponde a un modelo de transporte.

5.3 El Tableau de un Modelo de Transporte

Dada la estructura tan peculiar de los modelos de transporte, resulta necesario concebir una representación más compacta de los mismos. Al igual que el método simplex, el de transporte usa un tableau que condensa la información más importante que se requiere conocer del modelo.

Ejemplo 5.4:

Suponga que tres tipos de sistemas de carga estan siendo utilizados en un puerto de Michoacán, para movilizar los volúmenes de cuatro grupos de cargamento:

Productos Perecederos	1800 tons.
Productos Químicos	1500 tons.
Productos Minerales	2000 tons.
Productos Manufacturados	2100 tons.

En el cuadro 5.7 se muestra la información relativa a los niveles de operación en lo que respecta a capacidad, disponibilidad y costos de operación. El objetivo es minimizar los costos en los que se incurra.

De nueva cuenta se trata de un problema que involucra diferentes niveles de eficiencia. Como podrá apreciarse, el sistema de carga 1 es el mejor de los tres, por lo tanto, para considerar un nivel estándar de operación es necesario definirlo como medida de ejecución ideal.

CUADRO 5.7: Capacida' Disponibilidad y Costos de Operación por Sistema de Carga y Producto.

Sistema de Carga	Grupo de Carga ton/hr Perece-deros	Quími-cos	Mine-rales	Manufac-turados	Disponibilidad de horas	Costo en miles $/hr
1	50	100	50	60	70	500
2	25	-	25	30	50	300
3	20	40	20	24	100	600

Bajo este principio y siguiendo un procedimiento similar al expuesto en el subtema anterior, se obtiene el siguiente modelo matemático (se recomienda al lector que realice el desarrollo):

Minimizar z = 500C1PE + 500C1QI + 500C1MI + 500C1MA +
150C2PE + MC2QI + 150C2MI + 150C2MA +
240C3PE + 240C3QI + 240C3MI + 240C3MA

sa

C1PE+C2PE+C3PE = 36
C1QI+C2QI+C3QI = 15
C1MI+C2MI+C3MI = 40
C1MA+C2MA+C3MA = 35
C1PE +C1QI +C1MI +C1MA <= 70
C2PE +C2QI +C2MI +C2MA <= 25
C3PE +C3QI +C3MI +C3MA <= 40
Todas las variables mayores o iguales que cero

donde:

C1PE, C2PE y C3PE son las variables que representan el número de horas estándar de los sistemas de carga 1, 2 y 3 asignadas para movilizar a los productos perecederos respectivamente.

C1QI, C2QI y C3QI son las variables que representan el número de horas estándar de los sistemas de carga 1, 2 y 3 asignadas para movilizar a los productos químicos respectivamente.

C1MI, C2MI y C3MI son las variables que representan el número de horas estándar de los sistemas de carga 1, 2 y 3 asignadas para movilizar a los productos minerales respectivamente.

C1MA, C2M/ y C3MA son las variables que representan el número de horas estándar de los sistemas de carga 1, 2 y 3 asignadas para movilizar a los productos manufacturados respectivamente.

En la gráfica que se muestra en la figura 5.1 puede apreciarse la estructura esquemática del problema, observe que de cada origen siempre es posible ir a cada uno de los destinos, es decir, asignar un sistema de carga al transporte de un producto determinado, aún inclusive en el sistema de carga 2 para con los productos químicos (para el que se especifica que esto no puede ocurrir), pero a un costo sumamente elevado por lo que no será una candidata a considerar en la solución óptima.

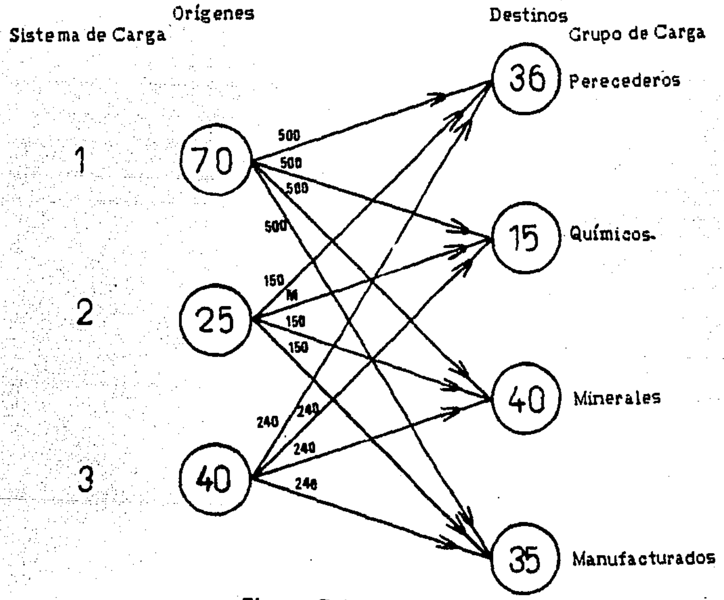


Figura 5.1.

Cada uno de los números que aparecen escritos sobre los arcos que unen cada origen con su destino son los costos de operación, las cantidades asociadas a cada origen son las horas estándar disponibles, analogamente, las cantidades en los destinos son las horas estándar que se requieren para cubrir la demanda de un producto específico.

El cuadro 5.8 muestra la representación matricial del problema. En este las disponibilidades se encuentran en la última columna y los requerimientos en el último renglón. Si se suman las ofertas (última columna), se tendrá el tiempo disponible total estándar, para cubrir una demanda. Si se suman los tiempos requeridos (último renglón), se obtendrá el tiempo estandar total que se demanda, si ambos son iguales, la oferta cubrirá perfectamente la demanda, en otro caso existirá exceso en alguna de estas, por lo que tendrá que seguirse alguno de los cursos de acción sugeridos en el subtema anterior. Los costos han sido encerrados en cuadros más pequeños ya que en los de mayor dimensión irán los valores de las variables, es decir, las asignaciones de horas de un sistema de carga determinado (representado por alguno de los tres renglones), al transporte de algún o algunos productos (representados por cada una de las columnas).

En toda asignación factible, la suma de las horas por renglón tiene que ser igual al valor ubicado en la última columna, analogamente la suma de las horas por columna tiene que ser igual al valor ubicado en el último renglón. Si esto no se cumple, puede concluirse que durante el proceso de solución algún error fue cometido en la asignación, por lo que habra que corregirla. Afortunadamente, este trabajo es desarrollado eficientemente por una computadora.

CUADRO 5.8: Tableau de un Modelo de Transporte.

FUENTE	DESTINO GRUPO DE CARGA (TON/HORA) PERECEDEROS	QUIMICOS	MINERALES	MANUFACTURADOS	FICTICIO	OFERTA
SISTEMA DE CARGA 1	$500	$500	$500	$500	$0	70
SISTEMA DE CARGA 2	$150	$M	$150	$150	$0	25
SISTEMA DE CARGA 3	$240	$240	$240	$240	$0	40
DEMANDA	36	15	40	35	9	135

5.4 Interpretación de Soluciones

Los Modelos de Transporte son un caso particular de los de Programación Lineal, por lo que en general las mismas especificaciones indicadas en las secciones anteriores se aplican para estos, sin embargo, en la interpretación de sus soluciones tienen que considerarse otros aspectos.

Para ello, se analizarán los resultados obtenidos para el problema 5.1. y que aparecen desplegados en el cuadro 5.9, en el que se presentan también los precios sombra correspondientes para cada uno de los recursos (estos se obtuvieron al realizar la corrida utilizando el paquete CAAM MASTER).

El cuadro 5.10 muestra el tableau de transporte con la solución óptima, advierta que las casillas han sido ocupadas con los valores de las variables correspondientes, las cantidades que aparecen inscritas en los cuadros más pequeños representan el costo unitario al que se incurre por enviar una unidad del origen i al destino j.

CUADRO 5.9: Solución Optima.

SOLUCION OPTIMA

VARIABLE DE DECISION:	VALOR OPTIMO:	RECURSO:	PRECIO SOMBRA:
UEPT	25	OFERTA PUEBLA	$ 0
UEDT	10	OFERTA D.F.	-$ 39
UEDC	115	OFERTA GUAD.	-$ 63
UEGT	100	OFERTA MONTERREY	-$ 32
UEMV	110	DEMANDA VERACRUZ	$741
UEMT	15	DEMANDA TOLUCA	$745
HOLGURA	0	DEMANDA CHIHUAHUA	$737

COSTO MINIMO: $262,840.00

Nota: El modelo fue corrido con un valor de M = 10,000.

CUADRO 5.10: Tableau de Transporte para la Asignación Optima.

FUENTE	DESTINOS VERACRUZ		TOLUCA		CHIHUAHUA		OFERTA
		costo		costo		costo	
PUEBLA		$752	25	$745		$758	25
D.F.		$ M	10	$706	115	$698	125
GUAD.		$678	100	$682		$674	100
MONTERREY	110	$709	15	$713		$710	125
DEMANDA	110		150		115		375

Observe que la oferta es igual a la demanda, por lo que no existen holguras, es decir, todas las restricciones en el punto óptimo se cumplen en sentido estricto de igualdad (compruebelo).

Un aumento en la demanda, dado que se encuentra en equilibrio con la oferta, solo puede provocar una solución infactible pues, al no existir holguras en la oferta, la primera no va a poder ser cubierta; como consecuencia, los precios sombra en terminos de estas restricciones carecen de interpretación. No obstante, para los de oferta es posible encontrar alguna: si se pudiera aumentar la disponibilidad de algún centro, lo más deseable sería hacerlo para aquel que presente los costos más pequeños, los precios sombra indican cuáles son los que permiten obtener la máxima reducción en el costo. El aumentar la disponibilidad de algún centro económico, ocasionará que las ofertas de las fuentes más caras no sean utilizadas, provocando con ello holguras positivas en estas, mientras que los más económicos serán utilizados al máximo.

Note que el asociado a Puebla es nulo, esto tiene sentido, pues es el más caro de todos los centros. Tener un aumento en la disponibilidad de recursos para esta fuente no va a provocar alguna desviación de la solución óptima ya que esto la empeoraría, por lo tanto, el no disminuir su costo, hace que su cotización sea nula. El precio sombra más pequeño, es el asociado al centro de oferta Guadalajara, lo cual parece ser bastante razonable, pues es el más económico de todos, por lo que si se aumenta su oferta, la solución tenderá a desviarse en favor de un uso más elevado de ese en comparación con los restantes.

Se analizarán dos cambios:

1ero. Suponga que el centro de oferta ubicado en el D.F. reportó un incremento en la disponibilidad de su servicio de 125 a 130 unidades.

Al correr el modelo se obtiene la información mostrada en el cuadro 5.11. En este puede apreciarse una modificacion en la asignación de carga: disminuyó la de Puebla a Toluca y aumentó la del D.F. a Toluca, lo cual es bastante lógico en el sentido de que resulta más económico usar al D.F. que a Puebla.

CUADRO 5.11: Solución Optima.

SOLUCION OPTIMA

VARIABLE DE DECISION:	VALOR OPTIMO:	RECURSO:	PRECIO SOMBRA:
UEPT	20	OFERTA PUEBLA	$ 0
UEDT	15	OFERTA D.F.	-$ 39
UEDC	115	OFERTA GUAD.	-$ 63
UEGT	100	OFERTA MONTERREY	-$ 32
UEMV	110	DEMANDA VERACRUZ	$741
UEMT	15	DEMANDA TOLUCA	$745
HOLGURA	0	DEMANDA CHIHUAHUA	$737

COSTO MINIMO: $262,645.00

2do. Suponga que la demanda en Chihuahua aumenta en 15 unidades.

Al correr el modelo en computadora se obtiene una solución infactible (porqué?).

Se recomienda al lector, a manera de ejercicio, el desarrollo de un tratamiento similar al presentado para cada uno de los ejemplos anteriores.

5.5 Modelos de Asignación

En el problema 5.2 se presentó un ejemplo de asignación de obreros para diferentes tipos de trabajo, en el primer modelo tanto las ofertas como las demandas fueron de tipo unitario, es decir, solo un trabajo podía ser desarrollado por un candidato y viceversa. Dependiendo del número de trabajos diferentes se busca tener una variedad suficiente de obreros para cubrir cada plaza vacante. Cuando un Modelo de Transporte presenta estas características, se esta hablando de una estructura particular denominada Modelo de Asignación. Al igual que con los Algoritmos de Transporte desarrollados, se han encontrado métodos de cómputo más adecuados, capaces de resolver en un menor tiempo problemas de asignación. El Método Húngaro, propuesto por dos matemáticos húngaros: Konig y Egrevary, puede ser aplicado para determinar su solución, no obstante, en su defecto podrá usarse algún algoritmo de transporte o en última instancia el método simplex. Bajo cualesquiera de los métodos que se emplee, siempre se llegará a la misma solución óptima.

Ejemplo 5.5:

Considere una línea de multiproducción que es capáz de manufacturar una familia de productos diferentes. Cada elemento posee ciertas especificaciones en cuanto tamaño, forma, peso y composición de materia prima. Un producto terminado puede estar constituido por una o varias piezas. El proceso de producción, para cualesquiera, utiliza la misma maquinaria, pero debido a sus características, existen diversos factores que cambian considerablemente. Estos han sido ponderados de tal forma que se han establecido costos que involucran: costos de conversión de un producto a otro y de ajuste de maquinaria.

Suponga que existen diferentes compromisos por cubrir, por lo que se ha establecido una política de producción semanal en el Departamento de Producción, asimismo, esta ha sido adecuada físicamente de acuerdo a un cierto número de etapas y máquinas que se requieren en cada una. La conformación de las etapas ha sido propuesta con base en experiencias pasadas. Para establecer una política de inicialización que ayude a comprobar la efectividad de la estrategia sugerida, han sido seleccionados una serie de productos para arrancar con la línea de producción durante un período de prueba de un mes. Los productos se programaran de acuerdo a lotes económicos, y estarán limitados por la demanda en cada período. Es decir, no se permitirán excesos, ya que pueden ocasionar costos de inventario.

Se desea determinar una secuencia de producción, que minimice los costos en los que se incurre frente a cada cambio en la línea dentro de un período de demanda. Con el objeto de proponer un plan óptimo se han obtenido los costos de conversión que se muestran en el cuadro 5.12.

Este problema puede ser formulado a traves de un Modelo de Programación Lineal, con:

SEC_{ij} como la variable que representa la secuencia sugerida en el proceso de producción, entre los productos i y j. i = 1, 2, , 4, 5. j = 1, 2, 3, 4, 5

CUADRO 5.12: Matríz de Costos de Cambios de Operación.

		Producto Consecuente (Destino)					
		1	2	3	4	5	Oferta
	1	-	60	100	70	50	1
Producto	2	90	-	110	80	30	1
Antece-	3	100	65	-	80	40	1
dente	4	80	70	120	-	50	1
(Origen)	5	20	75	90	90	-	1
Demanda		1	1	1	1	1	5

Dado que en la línea de producción es ilógico considerar la secuencia entre un mismo producto, es decir, para SEC_{ii} debe establecerse un costo penal muy elevado para que el modelo considere tal opción como inoperante, sea este M (M = 1000 por ejemplo). Así, la estructura matemática del modelo es:

$$\begin{aligned}\text{Minimizar } z = {} & MSEC_{11} + 60SEC_{12} + 100SEC_{13} + 70SEC_{14} + 50SEC_{15} + 90SEC_{21} + MSEC_{22} + \\ & 110SEC_{23} + 80SEC_{24} + 30SEC_{25} + 100SEC_{31} + 65SEC_{32} + MSEC_{33} + 80SEC_{34} \\ & + 40SEC_{35} + 80SEC_{41} + 70SEC_{42} + 120SEC_{43} + MSEC_{44} + 50SEC_{45} + 20SEC_{51} \\ & + 75SEC_{52} + 90SEC_{53} + 90SEC_{54} + MSEC_{55}\end{aligned}$$

sa

$$\begin{aligned}
SEC_{11} + SEC_{12} + SEC_{13} + SEC_{14} + SEC_{15} &= 1 \\
SEC_{21} + SEC_{22} + SEC_{23} + SEC_{24} + SEC_{25} &= 1 \\
SEC_{31} + SEC_{32} + SEC_{33} + SEC_{34} + SEC_{35} &= 1 \\
SEC_{41} + SEC_{42} + SEC_{43} + SEC_{44} + SEC_{45} &= 1 \\
SEC_{51} + SEC_{52} + SEC_{53} + SEC_{54} + SEC_{55} &= 1 \\
SEC_{11} + SEC_{21} + SEC_{31} + SEC_{41} + SEC_{51} &= 1 \\
SEC_{12} + SEC_{22} + SEC_{32} + SEC_{42} + SEC_{52} &= 1 \\
SEC_{13} + SEC_{23} + SEC_{33} + SEC_{43} + SEC_{53} &= 1 \\
SEC_{14} + SEC_{24} + SEC_{34} + SEC_{44} + SEC_{54} &= 1 \\
SEC_{15} + SEC_{25} + SEC_{35} + SEC_{45} + SEC_{55} &= 1
\end{aligned}$$

Todas las variables del tipo 0, 1

que posee 25 variables y 10 restricciones, las primeras cinco establecen que cada producto debe tener uno consecuente, y las restantes que cada producto debe tener uno antecedente. Puede apreciarse, sin embargo, que el modelo no contempla la actividad que debe inicializar el proceso de producción ni asegura una completa secuenciación entre todos y cada uno de los procesos en forma cíclica. Para incluir los costos de inicialización, será necesario recolectar información adicional del Departamento de Producción, es decir, los costos de arranque en la producción para cada uno de los productos. Suponga que dicha información es:

Producto:	Costo de Inicialización:
1	40
2	50
3	30
4	70
5	60

Por lo que será necesario considerar un renglón y una columna adicionales en el cuadro 5.12. El renglón deberá contemplar los costos de inicialización, mientras que la columna los de finalización (que se supondrán nulos, lo cual no necesariamente tiene que ocurrir). El cuadro 5.13 muestra las modificaciones indicadas.

CUADRO 5.13: Matríz de Costos de Cambios de Operación y de Inicialización.

		Producto Consecuente (Destino)						
		1	2	3	4	5	I	Oferta
	I	40	50	30	70	60	M	1
	1	M	60	100	70	50	0	1
Producto	2	90	M	110	80	30	0	1
Antece-	3	100	65	M	80	40	0	1
dente	4	80	70	120	M	50	0	1
(Origen)	5	20	75	90	90	M	0	1
Demanda		1	1	1	1	1	1	6

Para adecuar el modelo matemático es necesario agregar dos restricciones, con las variables de inicialización de los procesos:

$$SEC_{I1} + SEC_{I2} + SEC_{I3} + SEC_{I4} + SEC_{I5} + SEC_{II} = 1$$
$$SEC_{1I} + SEC_{2I} + SEC_{3I} + SEC_{4I} + SEC_{5I} + SEC_{II} = 1$$

así como incluir en la función objetivo las variables adicionales con sus costos correspondientes, además habrá que agregar a cada restricción su correspondiente variable aumentada. En suma el modelo final es:

Minimizar $z = 40SEC_{I1} + 50SEC_{I2} + 30SEC_{I3} + 70SEC_{I4} + 60SEC_{I5} + MSEC_{II} + MSEC_{11} + 60SEC_{12} + 100SEC_{13} + 70SEC_{14} + 50SEC_{15} + 0SEC_{1I} + 90SEC_{21} + MSEC_{22} + 110SEC_{23} + 80SEC_{24} + 30SEC_{25} + 0SEC_{2I} + 100SEC_{31} + 65SEC_{32} + MSEC_{33} + 80SEC_{34} + 40SEC_{35} + 0SEC_{3I} + 80SEC_{41} + 70SEC_{42} + 120SEC_{43} + MSEC_{44} + 50SEC_{45} + 0SEC_{4I} + 20SEC_{51} + 75SEC_{52} + 90SEC_{53} + 90SEC_{54} + MSEC_{55} + 0SEC_{5I}$

sa

$$SEC_{I1} + SEC_{I2} + SEC_{I3} + SEC_{I4} + SEC_{I5} + SEC_{II} = 1$$
$$SEC_{1I} + SEC_{2I} + SEC_{3I} + SEC_{4I} + SEC_{5I} + SEC_{II} = 1$$
$$SEC_{11} + SEC_{12} + SEC_{13} + SEC_{14} + SEC_{15} + SEC_{1I} = 1$$
$$SEC_{21} + SEC_{22} + SEC_{23} + SEC_{24} + SEC_{25} + SEC_{2I} = 1$$
$$SEC_{31} + SEC_{32} + SEC_{33} + SEC_{34} + SEC_{35} + SEC_{3I} = 1$$
$$SEC_{41} + SEC_{42} + SEC_{43} + SEC_{44} + SEC_{45} + SEC_{4I} = 1$$
$$SEC_{51} + SEC_{52} + SEC_{53} + SEC_{54} + SEC_{55} + SEC_{5I} = 1$$
$$SEC_{11} + SEC_{21} + SEC_{31} + SEC_{41} + SEC_{51} + SEC_{I1} = 1$$
$$SEC_{12} + SEC_{22} + SEC_{32} + SEC_{42} + SEC_{52} + SEC_{I2} = 1$$
$$SEC_{13} + SEC_{23} + SEC_{33} + SEC_{43} + SEC_{53} + SEC_{I3} = 1$$
$$SEC_{14} + SEC_{24} + SEC_{34} + SEC_{44} + SEC_{54} + SEC_{I4} = 1$$
$$SEC_{15} + SEC_{25} + SEC_{35} + SEC_{45} + SEC_{55} + SEC_{I5} = 1$$

Todas las variables del tipo 0, 1

Para representarlo de una manera más compacta se utiliza una matríz de asignación, la cual contiene únicamente a los costos. Esta sigue el mismo principio que el tableau de Transporte, a defecto de que en este caso, dado que los dos únicos valores que puede tomar cada variable son 0 y 1 (porqué?), se omite la casilla donde se anotan sus niveles de operación, asimismo se eliminan tanto la columna como el renglón de oferta y demanda. Para identificar una asignación, se tacha el cruce del renglón con la columna correspondiente, esto indicará que el recurso identificado por el renglón ha sido asignado a la demanda especificada por la columna. La matríz de asignación para este problema particular es:

Producto Consecuente (Destino)

		1	2	3	4	5	I
	I	40	50	30	70	60	M
	1	M	60	100	70	50	0
Producto	2	90	M	110	80	30	0
Antece-	3	100	65	M	80	40	0
dente	4	80	70	120	M	50	0
(Orígen)	5	20	75	90	90	M	0

Una característica muy importante en estas matrices, es que deben ser cuadradas, es decir, el número de renglones tiene que ser igual al de columnas. Cuando este no sea el caso, pueden identificarse las situaciones siguientes:

- Exceso de oferta.

- Exceso de demanda.

cuyos tratamientos han sido detallados en el subtema 5.2.

En particular el modelo posee 36 variables y 12 restricciones. Para fines computacionales, resulta más eficiente emplear en su resolución el algoritmo de asignación antes indicado. Sin embargo, en este caso se ha empleado el paquete MILP88, obteniendose la siguiente solución: $SEC_{23} = 1$, $SEC_{32} = 1$, $SEC_{25} = 1$, $SEC_{51} = 1$, $SEC_{14} = 1$ y $SEC_{42} = 1$, con un costo total de $215. Es decir, para garantizar un secuenciación a costo mínimo, debe inicializarse el ciclo productivo con los artículos del tipo 3, ajustar el equipo a los del tipo 2, para después hacerlo con los del tipo 5, seguidos por el 1 y finalmente con los del 4.

Las modificaciones que se presenten, deberán considerarse al comienzo de cada ciclo para llevar a cabo las adecuaciones en el modelo, y de esta forma determinar si algún cambio de última hora resulta más conveniente.

REFERENCIAS:

[1] Capítulo 5.
[6] Capítulo 2.
[9] Capítulo 9.
[19] Capítulos 6 y 7.
[22] Capítulo 10.
[39] Capítulos 9 y 10.
[51] Pags. 354-356.
[60] Capítulo 5, secciones 5.4-5.9.
[69] Capítulo 5 y apéndice B.
[72] Pags. 343-346.
[78] Capítulo 7.
[83] Capítulo 4.

PROBLEMAS:

1. (El problema 3 del Tema 2 debe haber sido resuelto antes que este, aunque no es absolutamente necesario.) En el siguiente apartado se muestra el modelo y la solución al problema de producción y distribución de una compañía productora de cemento, este no considera la posibilidad de capacidad adicional para la planta C.
   a) Cuál es el patrón de distribución óptimo?.
   b) Cuál es la contribución neta para el trimestre?.
   c) Puede un presupuesto mayor permitir un incremento en las ganancias?. Sería una buena inversión?. Cuánto recomendaría incrementar o decrementar el actual presupuesto de transporte?.

d) En cuanto se incrementarían las ganancias de la compa&ía si se decidiera incrementar la capacidad de la planta C a 50 mil unidades?. Sería una buena oportunidad si cada unidad de capacidad costara $25 en cada trimestre?.
e) El envio de 700 unidades de la planta A fue criticado como excesivo. Si A1 se forzara a ser mas peque&o, como cambiarían las ganancias?. A qué tasa se modificarían?.

Maximizar z = 200A1 + 175A2 + 50A3 + 100A4 - 100B1 + 50B2 + 25B3 + 50B4 + 175C1 + 75C2 + 150C3 + 175C4

sa

A1 + A2 + A3 + A4 <= 1,200
B1 + B2 + B3 + B4 <= 1,200
C1 + C2 + C3 + C4 <= 500
A1 + B1 + C1 <= 700
A2 + B2 + C2 <= 400
A3 + B3 + C3 <= 600
A4 + B4 + C4 <= 500
50A1 + 75A2 + 200A3 + 150A4 + 250B1 + 10[illegible]2
125B3 + 100B4 + 125C1 + 225C2 + 150C3 + 1[illegible]5C4 <= 200,000
Todas las variables mayores o iguales que cero

FUNCION OJETIVO: MAXIMIZAR

SOLUCION OPTIMA

INDICE	VARIABLE	VALOR
1	A1	700
2	A2	400
4	A4	100
7	B3	40
8	B4	400
11	C3	500
14		760
18		60

GANANCIA = 316000

INDICE	RESTRICC ON	PRECIO SOMBRA
1		40
2		0.
3		120
4		150
5		120
6		0.
7		30
8		0.2

INDICE	VARIABLE	COSTO REDUCIDO
3	A3	30
5	B1	30
6	B2	90
9	C1	120
10	C2	210

RANGOS DE VARIACION EN LOS COSTOS DE LA FUNCION OBJETIVO:

VARIABLE	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
A1	320	200	INFINITO
A2	265	175	INFINITO
A3	INFINITO	50	80
A4	70	100	190
B1	INFINITO	-100	200
B2	INFINITO	50	140
B3	50	25	25
B4	50	50	80
C1	INFINITO	175	295
C2	INFINITO	75	285
C3	150	150	INFINITO
C4	INFINITO	175	175

RANGOS DE VARIACION EN LOS RECURSOS:

RECURSO	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
1	1100	1200	1300
2	440	1200	INFINITO
3	200	500	533.33
4	300	700	800
5	100	400	500
6	540	600	INFINITO
7	425	500	550
8	390	400	415

---

2. Una empresa pequeña de aviación, que opera 7 días a la semana, da servicio a tres ciudades: A, B y C. El costo de espera en cada escala es aproximadamente proporcional a cien mil veces el cuadrado del tiempo en que el avión no esta en vuelo. Cómo deben asignarse los aviones a los vuelos para hacer mínimo el costo total de esp ra?.

Vuelo No.	De	Hora de Salida	A	Hora de Llegada
1	A	9:00 A.M.	B	Mediodia
2	A	10:00 A.M.	B	1:00 P.M.
3	A	3:00 P.M.	B	6:00 P.M.
4	A	8:00 P.M.	C	Medianoche
5	A	10:00 P.M.	C	2:00 A.M.
6	B	4:00 A.M.	A	7:00 A.M.
7	B	11:00 A.M.	A	2:00 P.M.
8	B	3:00 P.M.	A	6:00 P.M.
9	C	7:00 P.M.	A	11:00 P.M.
10	C	3:00 P.M.	A	7:00 P.M.

3. Una compañía manufactura ciertos productos que pueden ser producidos en diferentes máquinas. Sin embargo, existen diferentes velocidades, precios de venta y costos, que se muestran a continuación:

	Máquinas (producción por hora)			Precio	No. de
	1	2	3	de Venta	Productos
Productos:					
A	—	9.0	7.2	$305	1,620
B	7.5	10.0	8.0	$300	2,000
C	—	8.0	6.4	$285	1,800
D	7.5	10.0	8.0	$290	1,750
Tiempo Disponible Mensual	320 hrs.	400 hrs.	320 hrs.		

	Costo Variable por Máquina		
	1	2	3
Productos:			
A	-	$115	$125
B	$150	$125	$140
C	-	$105	$130
D	$135	$120	$145

a) Determine la programación óptima en el proceso productivo.
b) Existen soluciones óptimas múltiples?. Explique.
c) Si pudiera incrementarse la oferta en horas-máquina, cuál sería la mejor opción?. En cuánto aumentarían las ganancias por unidad de incremento?.
d) Cuál es la máquina que menos conviene a la compañía?. Explique.

TEMA 6: TECNICAS DE PREVISION Y EVALUACION DE PROYECTOS Y RUTA CRITICA (PERT Y CPM).

Hubo una vez un ingeniosísimo arquitecto
que había concebido un método nuevo
para edificar casas,
empezando por el tejado y prosiguiendo
hacia abajo hasta los cimientos.

JONATHAN SWIFT

6.1 Introducción

Uno de los aspectos primordiales en el control de la producción y la asignación de recursos, es el relativo a los niveles de información disponibles para tales fines, ya que permiten implantar mejores mecanismos de control. Este principio ha sido un gran estímulo en el desarrollo de técnicas denominadas como Planeación de Proyectos que, a través de los a&os, han adquirido una gran relevancia en diferentes proyectos.

Un trabajo se dice que es planificable, si es posible derivar ahorros en el consumo de recursos a través de su estudio previo.

Ejemplo 6.1:

Cada ma&ana una persona prepara su desayuno consistente de tres piezas de pan tostado con mermelada y una taza de café, de acuerdo a la siguiente secuencia:

Tostar un lado de las piezas A y B	30 segundos
Tostar el otro lado de las piezas A y B	30 segundos
Tostar un lado de la pieza C	30 segundos
Tostar el otro lado de la pieza C	30 segundos
Calentar el café	60 segundos

Tiempo Total	180 segundos

la cual podría reducirse en tiempo, si se hiciera de la siguiente manera:

Tostar un lado de las piezas A y B	30 segundos
Tostar un lado de la pieza C y el otro de la pieza A y comenzar a calentar el cafe	30 segundos
Tostar el otro lado de las piezas B y C y apagar el café	30 segundos
	----------
Tiempo Total	90 segundos

Aunque se trata de un ejemplo bastante trivial, observe que con una mejor planificación puede lograrse un ahorro en tiempo. Si esto se infiere a procesos en los que múltiples actividades tienen que ser desarrolladas, la ganancia en tiempo o costos resulta claro.

Es importante advertir que todo abuso en la planificación puede resultar contraproducente. Por ejemplo, imagine a una enfermera que tenga que despertar a sus enfermos para suministrarles somníferos a la hora que le fue indicada. Elaborar planes que permitan programar una serie de actividades es indispensable, pero siempre subordinando los medios a los fines y distinguiendo aquellos de estos.

Existen diversas técnicas dentro de la Investigación de Operaciones, que ayudan a programar una serie de actividades complejas dentro de los procesos administrativos, entre las que pueden citarse:

- El Método del Camino Crítico (CPM).

- Las Técnicas de Previsión y Evaluación de Proyectos (PERT).

En general todas presentan los mismos principios, sin embargo, aportan diversos grados de información que pueden ser importantes en el desarrollo de proyectos. Existen múltiples aplicaciones en las que estas han sido de gran ayuda, por ejemplo:

- La construcción de un edificio (carretera).

- La planeación e introducción de un nuevo producto al mercado.

- El paro periodico de una unidad para revisión en una refinería (u otros proyectos de mantenimiento).

- La instalación y corrección de algún defecto en un sistema de computadoras.

- Proyectos de investigación y diseño de ingeniería.

- La programación de la construcción y reparación de navíos.

- El proceso de secuencia en trámites administrativos.

Cada una posee varias características que son esenciales para la aplicación de alguna de las técnicas indicadas, por ejemplo:

- El proyecto consiste de un conjunto bien definido de tareas (o actividades) que al ser finalizadas señalan su término.

- Las actividades pueden ser iniciadas e interrumpidas independientemente la una de la otra, dentro de una secuencia dada.

- Los trabajos estan ordenados, es decir, tienen que seguir una secuencia tecnológica.

En particular, el presente estudio se concentrara en el PERT y el CPM, introduciendo en primer término a las Gráficas de Gantt.

6.2 Gráficas de Gantt

Las gráficas de Gantt fueron las primeras herramientas que se utilizaron para incursionar en el camino de la planeación de proyectos, sin embargo, dada su ambiguedad estas han venido a ser sustituidas por diagramas más complejos y mejor estructurados.

Una gráfica de Gantt es un diagrama de barras horizontales dividido en dos partes, en una de las cuales aparecen los resultados previstos y en la otra los obtenidos, permitiendo asi llevar a una comparación entre lo proyectado y lo ocurrido. En algunos casos, para ahorrar la subdivisión se emplea unicamente una de las partes, en la cual la longitud de cada barra representa el 100% de la realización de la actividad correspondiente, y en cada día, esta es sombreada según el avance experimentado.

Ejemplo 6.2:

En la figura 6.1 se muestra un diagrama de Gantt. Cada barra indica una actividad independiente que tiene que ser desarrollada en un tiempo determinado, representado por su longitud -en general se acostumbra ennumerar en los renglones a las actividades a desarrollar y en las columnas a sus tiempos estimados de duración. Debido a que las actividades pueden considerarse como independientes, es posible que algunas comiencen antes de que otras terminen, o que para poder comenzar alguna actividad posterior sea necesario finalizar alguna anterior (por ejemplo, hay que construir el cimiento de una casa antes de levantar los muros).

En este ejemplo la programación difirió considerablemente con lo ocurrido; ante tal instancia, el investigador debe evaluar el porqué de los resultados para que en planeaciones futuras pondere la ocurrencia de imprevistos.

Una de las principales desventajas de las gráficas de Gantt radica en su operatividad, pues realizar cambios imprevistos en la programación de un proyecto que involucre 50 actividades diferentes, puede resultar un trabajo complejo de ejecutar, debido a la dificultad que representa el tratar de impactar a todas las actividades secuenciales que posea. Cualquier actividad que se retrase puede provocar un efecto desfavorable en otras que dependan de esta. Cuando las interrelaciones no son muy numerosas el uso de diagramas de Gantt puede resultar apropiado, en caso contrario se vuelven obsoletos, por lo que resulta necesario describir al sistema de una manera más eficiente.

Pese a sus limitaciones, por lo regular, la gráfica de Gantt es uno de los elementos más usados. Probablemente esto se debe básicamente a tres aspectos:

- Para poder dibujar una gráfica de Gantt en el diseño de un proyecto, es necesario desglosarlo en actividades significativas, estimar la duración de cada una así como la programación de su fecha de inicio y terminación. Lo cual no es otra cosa que PLANEACION.

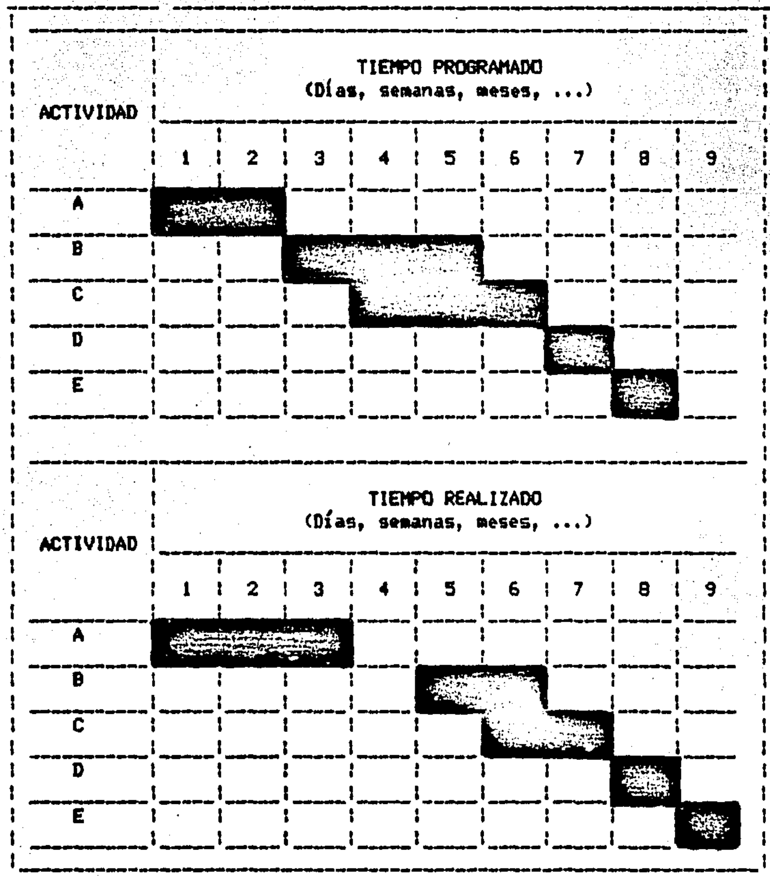


Figura 6.1: Gráfica de Gantt.

- La gráfica de Gantt es fácil de construir y de comprender. No es necesario ser un experto para leerla ni para graficarla.

- Muestra el grado de avance con respecto a lo proyectado.

6.3 Construcción de Redes

Una de las características que particularizan a las técnicas de planeación es el uso de gráficas o redes de actividades.

Una red es la representación gráfica de un proyecto mediante el uso de círculos o eventos y líneas (flechas) que representan actividades, este tipo de diagrama es conocido como de actividad en flechas y es utilizado en el PERT. El CPM generalmente utiliza a los nodos como actividades y a las flechas para indicar procedencia entre estas. Podría pensarse que tal distinción provoca cambios significativos en la interpretación de una red, sin embargo, en esencia representan lo mismo, a pesar de estar construidas bajo principios distintos. Más adelante podrá apreciarse que la diferencia entre ambos tipos es únicamente de caracter pictórico.

En adelante se utilizará el diagrama de flechas (actividad en flechas), por lo que todas las consideraciones que se realicen serán en torno a la contrucción de este tipo de redes. Esto realmente se debe a preferencias personales, puesto que cualquier método puede utilizarse en el desarrollo del presente tema.

El desarrollo de diagramas surge durante la planeación de un proyecto: costos, recursos y tiempos son aspectos que en este punto son hechos a un lado para facilitar el trabajo -ello no quiere decir que carezcan de importancia. En general se realizan tres preguntas básicas para cada uno de los eventos del proyecto:

1. Qué actividades preceden a este evento?.

2. Qué actividades siguen a la consecución de este evento?.

3. Qué actividades pueden ser inicializadas o finalizadas en forma paralela?.

Con las respuestas que se obtengan podrá ser preparado un diagrama de flechas que ilustre graficamente al proyecto. Todas las actividades y eventos asociados con este tienen que ser interelacionados para que pueda llevarse a cabo la construcción de una red.

Una actividad consume tiempo y/o recursos, mientras que un evento es una etapa en la vida de un proyecto donde ciertas actividades previas tienen que estar terminadas y otras consecuentes pueden ser inicializadas. Cuando dos o más actividades terminan con el mismo evento, a este se le conoce como unión. De manera semejante, cuando dos actividades pueden principiar al mismo tiempo, el evento que denota ese tiempo se denomina sucesión. Una unión o una sucesión pueden reconocerse en la lista de actividades por la ocurrencia de los mismos prerrequisitos o postrequisitos para dos o más actividades.

Ejemplo 6.3:

La red que se ejemplifica el la figura 6.2, muestra 7 actividades: (indicadas en los arcos) A a la G, en la practica, se acostumbra acompañar a la gráfica por una breve descripción de cada actividad. Por convención, se considerará que el avance de izquierda a derecha consume tiempo o costo, asimismo, cada número inscrito en cada nodo, debe ir en forma progresiva. Toda actividad puede ser identificada de manera única a través de sus eventos antecedente y consecuente, por ejemplo la actividad C está representada de manera única por los números 2-4, lo mismo se aplica para cada una de las restantes. La red enmarca las siguientes relaciones:

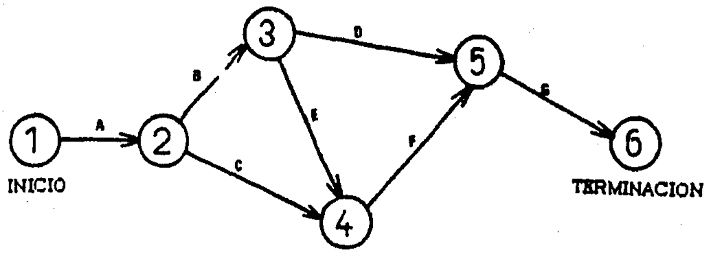


Figura 6.2.

1. El evento 1 es el punto de partida del proyecto.

2. Las actividades B y C no pueden comenzar hasta que la actividad A haya sido terminada.

3. Las actividades D y E no pueden comenzar hasta que la actividad B sea finalizada.

4. La actividad F no puede ser inicializada hasta que las actividades C y E sean acabadas.

5. La actividad G no puede comenzar hasta que las actividades D y F sean terminadas.

6. El evento 6 es la terminación del proyecto.

Existe una serie de reglas que conviene seguir cuando una red esta siendo construida:

Regla 1. Los nodos deberán ir unidos por flechas, con dirección de izquierda a derecha (figura 6.3.1).

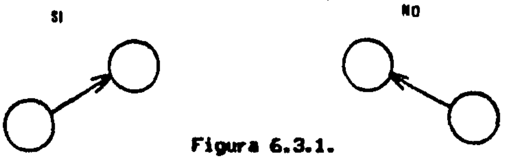


Figura 6.3.1.

Regla 2. Las flechas no deberán dibujarse en lo posible verticalmente, sino con cierta inclinación (figura 6.3.2).

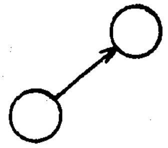


Figura 6.3.2.

Regla 3. Si más de dos actividades guardan una secuencia lógica entre ellas, deberá dibujarse dicha secuencia en forma horizontal (figura 6.3.3).

Figura 6.3.3.

Regla 4. Deberá evitarse al máximo el cruce de flechas.

Regla 5. Una vez dibujada una red deberá procederse a numerar los nodos, procurando realizar esto de izquierda a derecha y en forma ascendente. Nunca un nodo superior irá direccionado a uno con una denominación menor (figura 6.3.4).

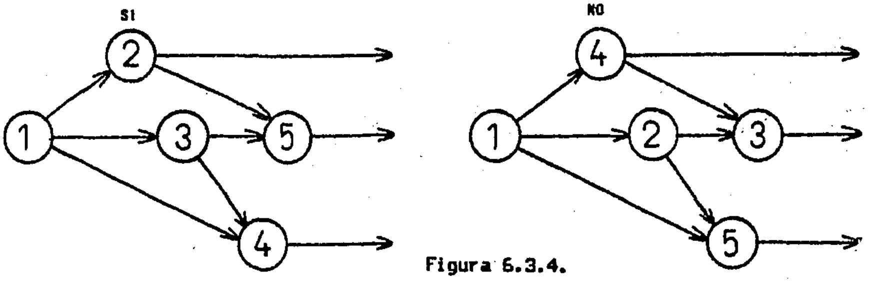


Figura 6.3.4.

Regla 6. Ninguna actividad deberá quedar suspendida. Por ejemplo en la figura 6.3.5, la actividad 2-3 no tiene conección alguna con el evento de terminación. Por lo tanto, el diagrama deberá ser modificado para incorporarla a un evento subsecuente, de tal forma que quede "cerrada" la red, si la actividad no se requiere para la ejecución de alguna posterior, lo recomendable es unir los nodos con una línea punteada, conocida como actividad "ficticia" que, por razones obvias, no consume costos ni tiempo. El empleo cuidadoso de las actividades ficticias eliminará muchos errores en el investigador que comienza a incursionar en el dibujo de las redes.

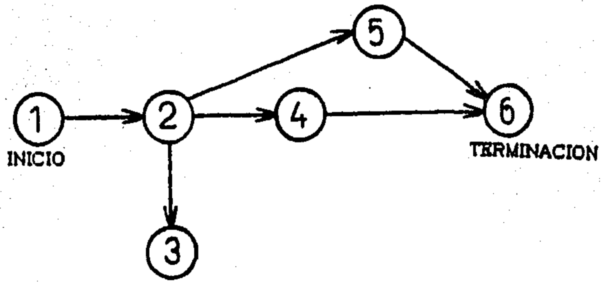


Figura 6.3.5.

Regla 7. No se permitirán loops (circuitos cerrados cíclicos). Por ejemplo, la figura 6.3.6, ejemplifica un loop entre actividades.

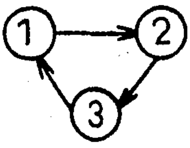


Figura 6.3.6.

Regla 8. Actividades paralelas no deberán tener a un evento único de finalización, ya que puede provocar confusión. Esto se soluciona insertando una actividad ficticia. Por ejemplo, la gráfica de la figura 6.3.7 puede representarse apropiadamente como se muestra en la figura 6.3.8.

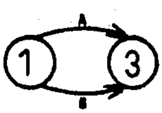


Figura 6.3.7.

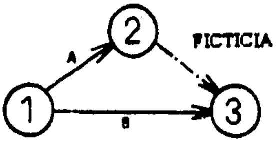


Figura 6.3.8.

Regla 9. Ni ɉún evento podrá tener más de dos actividades precedentes ni más de dos consecuentes, a menos de que todas las actividades subsecuentes no puedan ser inicializadas sino hasta la consecución de las precedentes. Por ejemplo, la red esquematizada en la figura 6.3.9, significa que:

i) la actividad 3-5 no puede comenzar hasta que las actividades 1-3 y 2-3 sean finalizadas.

ii) la actividad 3-4 no puede comenzar hasta que las actividades 1-3 y 2-3 sean finalizadas.

Si la inicialización de la actividad 3-5 depende únicamente de la terminación de la actividad 2-3, entonces un evento adicional (6) y una actividad ficticia (3-6) se requieren, obteniéndose la gráfica de la figura 6.3.10.

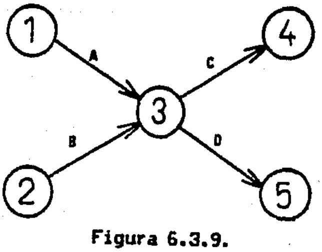


Figura 6.3.9.

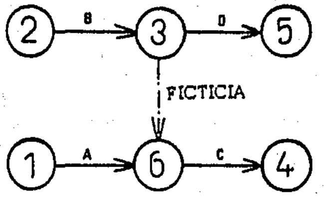


Figura 6.3.10.

Naturalmente el mundo no se saldrá de su órbita si alguna(s) de las reglas es(son) violada(s), su objetivo radica en dar a los diagramas cierta legilibilidad y universalidad en su comprensión.

Ejemplo 6.4:

Suponga que en una compañía se ha adquirido un equipo de trabajo nuevo mediante el cual pretende llevar a cabo un cambio en lo que respecta al manejo de ciertas formas de control. En el cuadro 6.1, se muestran las actividades necesarias en la implantación de las políticas a seguir por la empresa. En este se ha optado por identificar a cada actividad con una literal. Se pretende dibujar con la información una red apropiada.

La figura 6.4 muestra la secuencia seguida en la contrucción de la red correspondiente, observe que los nodos extremos se han denotado como INICIO y TERMINACION por razones obvias.

Las técnicas de dibujo varían según la persona que las aplique, el intento general para llevar a una gráfica un proyecto es generalmente un esquema aproximado. Algunas veces varias actividades son agrupadas en una sola flecha para acentuar el flujo general. Después de verificar la secuencia, las actividades compuestas pueden subdividirse en operaciones detalladas.

CUADRO 6.1: Tabla de Actividades para la Implantación de un Nuevo Procedimiento, Mediante el Uso de un Equipo de Trabajo Nuevo.

Actividad	Código de Actividad	Predecesores
Adiestramiento preliminar	A	-
Procurar un abastecimiento suficiente de formas	B	D
Adiestrar al personal en el uso de las nuevas formas	C	A, D
Modificar las formas para el nuevo sistema	D	-
Adiestrar al personal en el uso del equipo nuevo	E	A, C

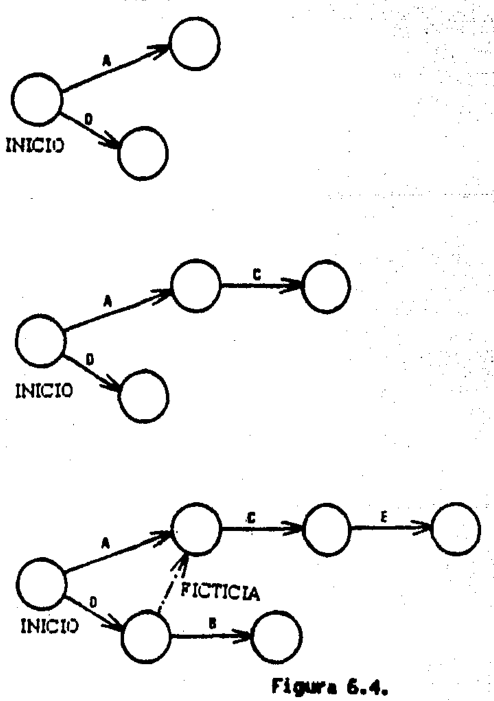


Figura 6.4.

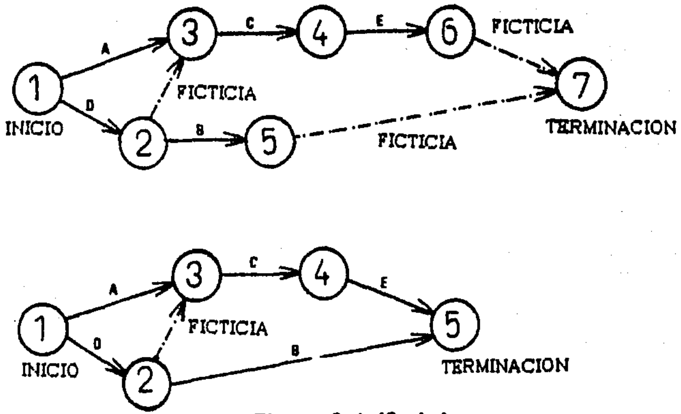


Figura 6.4 (Cont.).

Los proyectos muy grandes se modelan de una manera más eficiente, tratando independientemente las subdivisiones en las redes preliminares y después integrándolas con flechas ficticias para relacionar los segmentos. Un enfoque semejante es conveniente para las etapas que en un proyecto se repiten varias veces. Por ejemplo, en la construcción de un edificio de varios niveles, en la que algunos pisos tienen esencialmente las mismas características y consecuentemente listas idénticas de actividades, puede resultar más conveniente diagramar una red para la lista común, que una serie innecesaria de los mismos.

Una vez que una red ha sido dibujada deberán comprobarse las relaciones entre las actividades, corrigiendo aquellas en las que algún error haya sido cometido.

Ejemplo 6.5:

La Compa&ía Distribuidora MD ha obtenido los derechos exclusivos, a nivel nacional, para la venta de un nuevo producto. Se requiere pianear su introducción en el mercado así como fijar una política de control de inventario. La introducción del producto requiere de las siguientes actividades:

- Pruebas de Laboratorios.

- Envío de productos a los centros de distribución regionales.

- Estudio de mercado en una zona peque&a.

- Dise&o de una campa&a publicitaria.

- Establecimiento de la decisión de consecución o no del proyecto.

- Implantación de la campa&a publicitaria.

- Prestación de serviciu a revendedores.

- Demostraciones.

Una de las primeras actividades que tiene que ser realizada para la planificación de un proyecto es: enumerar a todas las actividades que lo componen, si esto no es realizable desde el comienzo, habra que fijar un primer marco de referencia al que se irá agregando lo que falte. En el desarrollo de este trabajo, sin duda alguna estas surgirán espontaneamente en cierto "desorden" involuntario, aun más si son numerosas, habrá ocasiones en las que se repitan. Por ello el trabajo de secuenciación que prosigue a esta labor, es de vital importancia si se le contempla como la conjugación de las actividades en un diagrama. El conocimiento del proyecto ayudará a tener una visión más amplia para realizar con mayor sencillez este trabajo.

En el ejemplo es posible llevar a cabo la secuenciación sin poseer profundos conocimientos sobre el tema en cuestión, un poco de sentido común es lo importante en este caso. Así se tendrá que:

- Para desarrollar las pruebas de laboratorios no es necesaria ninguna de las restantes actividades enumeradas en la lista, por lo que es factible pensar que es la primera.

- Enviar los productos a los centros de distribución regionales, se hará siempre que se haya tomado la decisión afirmativa de consecución del proyecto, por lo que esta última es la actividad precedente a la de envío.

- El estudio de mercado podrá realizarse una vez que las demostraciones hayan sido realizadas.

- En general, el dise&o de la campa&a publicitaria es una de las actividades que se comienzan con gran antelación, en este caso, observe que puede ser realizada después de las pruebas de laboratorio y de las demostraciones. Es necesario conocer a fondo el producto que se va a vender para proyectarle una imagen adecuada.

- La decisión de consecución o no del proyecto, se tomará una vez que se conozcan resultados de pruebas de campo, es decir, con base en el estudio de mercado que se haya realizado.

- La implantación de la campa&a publicit?ia se sigue del dise&o de la misma. Así como de la aprobación de la consecución del proyecto.

- La prestación de servicio a revendedores es una de las últimas actividades que se realizan, por lo que se hará una vez que la campa&a de publicidad haya salido al público, y que los productos hayan sido enviados a las casas de distribución.

- Las demostra iones corresponden a las actividades en las que es necesario llevar a cabo otro tipo de pruebas, diferentes a las de laboratorio. Por lo que pueden citarse como una de las primeras (inmediata a las pruebas de laboratorio).

Con base en lo anterior, es posible construir el cuadro 6.2.

CUADRO 6.2: Actividades para el Lanzamiento de un Producto.

Actividad:	Descripción:	Precedente:
A	Pruebas de Laboratorios.	Ninguna
B	Demostraciones.	A
C	Diseño de una campaña publicitaria.	A, B
D	Implantación de la campaña publicitaria.	C, F
E	Estudio de mercado en una zona pequeña.	B
F	Establecimiento de la decisión de consecución o no del proyecto.	E
G	Envío de productos a los centros de distribución regionales.	F
H	Prestación de servicio a revendedores.	D, G

La figura 6.5 muestra la secuencia seguida en la construcción de la red correspondiente.

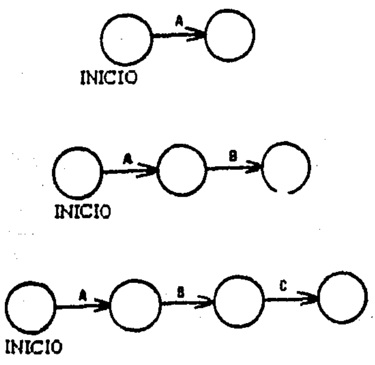


Figura 6.5.

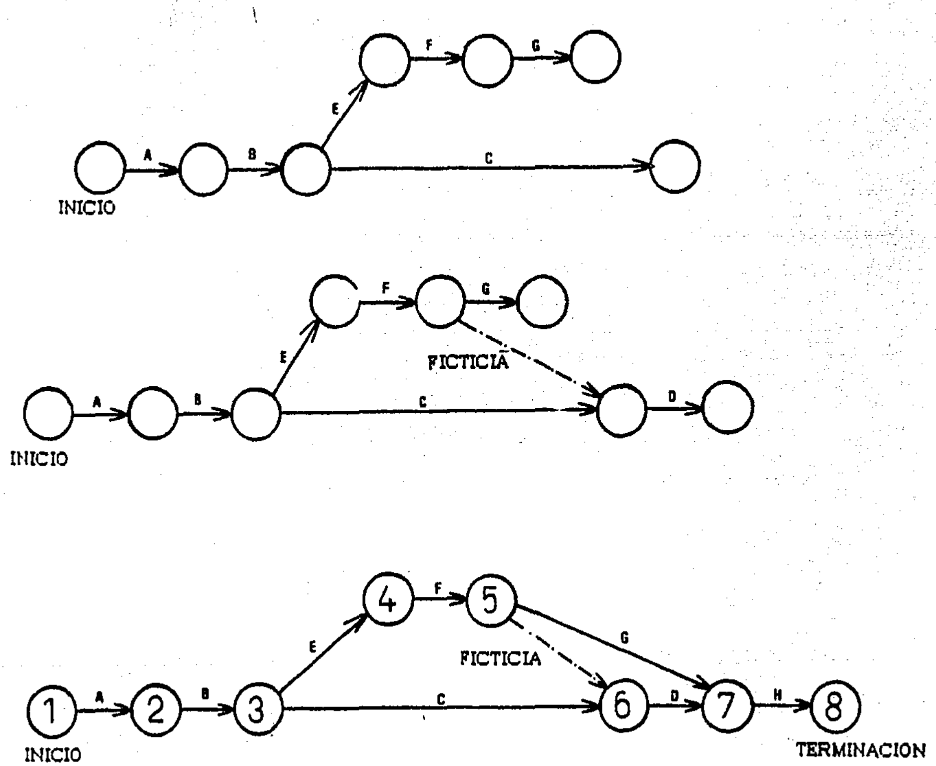


Figura 6.5 (Cont.).

Ejemplo 6.6:

La Dirección de Planificación Familiar tiene proyectada la adquisición de una computadora, para llevar a cabo el procesamiento de la información que se maneja en grandes volúmenes. De esta forma, el control automatizado permitirá obtener resultados en un período de tiempo menor y con una mayor confiabilidad en los mismos.

Debido a esta situación, se han planteado una serie de actividades que tienen que seguirse en la instalación de una computadora. El equipo de cómputo aparte de costoso es muy delicado en su mantenimiento, por lo que su uso tiene que llevarse a cabo dentro de los estándares fijados por las compañías fabricantes.

El cuadro 6.3 muestra una secuencia de actividades que tienen que ser consideradas por el Director a fin de que se programen en forma adecuada.

Como puede apreciarse, el desarrollo de las actividades guarda una secuencia fija bastante clara, por lo que resulta importante programar a cada una de ellas con el objeto de llevar a cabo la integración de todas las partes que se necesitan para su consecución, es decir, sería absurdo contratar desde el principio a personal que va a ser ocupado en una de las últimas actividades, o lo contrario, no contratarlo cuando se necesita. Al igual que estos aspectos, existen otros que resultan importantes en la planeación de proyectos.

CUADRO 6.3: Actividades para la Instalación de un Equipo de Cómputo.

Actividad:	Descripción:	Precedente:
A	Tender una duela especial	Ninguna
B	Conectar los cables que servirán de comunicación entre la máquina principal y cada una de las terminales.	C
C	Hacer el cableado necesario.	Ninguna
D	Instalar el aire acondicionado.	B, G
E	Esperar entrega de la computadora.	Ninguna
F	Instalar la computadora.	A, C, D, E
G	Construir respiradores.	A
H	Realizar pruebas de funcionamiento de la computadora.	B, C, F

La figura 6.6 muestra la red respectiva.

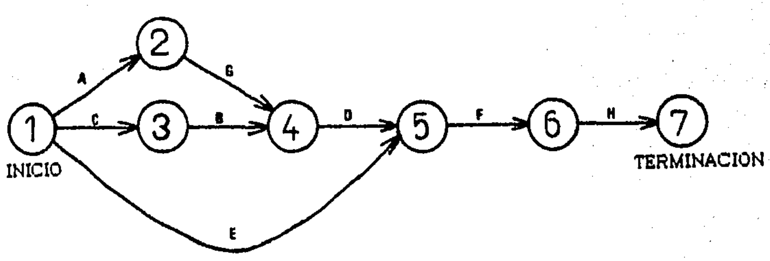


Figura 6.6.

6.4 La Determinación de Tiempos o Costos en el Modelo de Planeación

Una vez que el esqueleto del modelo ha sido construido, es necesario estimar costos o tiempos para cada una de las actividades, con el objeto de considerar una medida de efectividad en la optimización del sistema. Esta labor generalmente requerirá la intervención de más de una persona estrechamente relacionada con el desarrollo del proyecto. Con base en los datos obtenidos, será posible tener una idea tanto de su duración como de sus costos -sin duda alguna información sumamente valiosa. Cabe aclarar que las actividades ficticias tendrán asociados tiempos y costos nulos, debido a los aspectos que las caracterizan.

Es importante que las estimaciones que se realicen en cuanto a costos o tiempos, esten expresadas en las mismas unidades. Las fuentes objetivas de los datos incluyen los registros de ejecuciones pasadas en proyectos semejantes, estimaciones empíricas, etc.; en general, se espera que su confiabilidad y aplicación varíe, de manera que el juicio será el ingrediente vital para convertir las suposiciones en estimaciones.

Conforme se analiza la duración de las actividades, a menudo es necesario revisar su descripción. Las contradicciones aparecen cuando parte del trabajo asociado tradicionalmente con una actividad se incluye en una diferente.

Ejemplo 6.7:

Suponga que después de haber dialogado con los técnicos, el Director de Planificación Familiar de la SSA ha llegado al plan de actividades mostrado en el cuadro 6.4.

Para reflejar los tiempos en la red, se anotará dentro de un paréntecis, el número de días que se requiere para el desarrollo de la actividad (figura 6.7).

En este punto, la red está lista para los cálculos de los límites de tiempo. Estos pueden hacerse ya sea con la ayuda de una computadora o manualmente, con lo cual se buscará proporcionar relaciones adecuadas del tiempo en la programación de actividades. Para tener una idea intuitiva de la información que proporciona un paquete de computación, se analizará manualmente el problema, para estudiar el significado de los tiempos más importantes que se utilizan en la planeación. Para llevar a cabo estos cálculos, se harán las siguientes suposiciones:

1. El proyecto se inicia en cero de tiempo relativo.

2. No se debe iniciar ninguna actividad sin antes haber completado las tareas de cuya ejecución depende esta.

3. La realización de cada actividad debe llevarse a cabo tan pronto como sea posible.

4. Una vez iniciada, cada actividad se ejecuta sin interrupción hasta ser terminada.

CUADRO 6.4: Actividades para la Instalación de un Equipo de Cómputo

Actividad:	Descripción:	Predecesoras:	Tiempo: (dias)	Personal:
A	Tender una duela especial	Ninguna	4	Carpintero
B	Conectar los cables que servirán de comunicación entre la máquina principal y cada una de las terminales	C	5	Electricista
C	Hacer el cableado necesario	Ninguna	6	Electricista
D	Instalar el aire acondicionado	B, G	2	Electricista
E	Esperar entrega de la computadora	Ninguna	14	Administrador
F	Instalar la computadora	A, C, D, E	10	Ingeniero en Electrónica
G	Construir respiradores	A	3	Carpintero
H	Realizar pruebas de funcionamiento de la computadora	B, C, F	4	Ingeniero en Electrónica

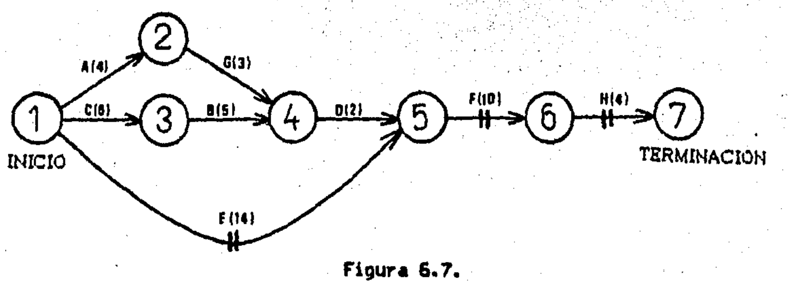


Figura 6.7.

En relación al problema, observe que en el nodo de terminación de las actividades G y C esta implícita la condición de que se requiere la consecución de las actividades A, G, C, B. A y G deben realizarse en una secuencia específica (primero la A y únicamente después la G), lo mismo ocurre con C y B. El desarrollo de ambas parejas es independiente, la realización de la primera debe tomar 7 días de tiempo (4 + 3 = 7), mientras que la segunda 11 (6 + 5 = 11). Ambas pueden marchar en paralelo (nada lo impide, excepto un error de planeación), por lo tanto, si se supone que estas comienzan al mismo tiempo, una terminará 4 días antes que la otra (11 - 7 = 4). A este período de duración se le denomina holgura y generalmente es explotado por los administradores, asignando los recursos que quedan libres al desarrollo de otras actividades que requieran de ayuda.

La actividad D tiene una duración de 2 días que aunada al tiempo máximo permitido para la realización de las actividades anteriores proporciona una duración de 13 días. Sin embargo, la máquina tardará 14 (desde el comienzo del proyecto) para ser entregada, por lo que existirá una holgura de un día para poder finalizar tanto la actividad D o cualquiera de las anteriores, ninguna de las subsecuentes podra ser comenzada pues no se cuenta con las condiciones necesarias para lograrlo. F y H consumen 14 días que junto con los 14 anteriores (el tiempo que se requiere para que la computadora sea recibida) hacen un total de 28 días, y es el máximo tiempo disponible para llevar a cabo el proyecto. Con base en lo anterior, el Director no deberá permitir maś de 28 días para la culminación de las actividades antes citadas.

De las conclusiones anteriores resultan evidentes los siguientes puntos:

- Una ruta es una secuencia específica de actividades.

- La ruta descrita por las actividades A, G, D, F y H, consume en su ejecución 23 días, mientras que C, B, D, F y H ocupa 27, finalmente E, F y H utiliza 28. Por lo tanto la ruta E, F y H, define al tiempo máximo permitido de duración del proyecto, a esta se le denomina como: "Ruta Crítica", y será identificada por una doble linea perpendicular dibujada sobre cada una de las actividades que la componen. Cualquier retraso que se presente en alguna, afectará a la duración total del proyecto, no así las restantes (naturalmente dentro de un cierto rango que después será determinado). Las demas rutas pueden hacerse críticas mediante la reducción de los tiempos de ejecución de las actividades que componen a la actual ruta crítica, por ejemplo, si la actividad E es acortada a 13 días (tiempo de espera para recibir el equipo de cómputo): C, B, D, F y H al igual que la E, F y H, ambas con una duración total de 27 días, se convertirán en críticas. Observe que si F o H se hubieran reducido, la ruta crítica sería la misma, esto se debe a que ambas son comunes a todas las rutas. Por lo general, una reducción en los tiempos de ejecución, se consigue mediante un aumento en el uso de recursos humanos o materiales, lo cual ocasiona un incremento en el costo del proyecto, por lo que siempre será necesario establecer prioridades.

- Las rutas: A, G y D (9 días), C, B y D (13 días) y E (14 días), deben estar finalizadas en un tiempo máximo de 14 días (el de la que tiene la duración mayor). De esta forma la A, G y D tiene una holgura de 5 días (14 - 9 = 5), mientras que C, B y D de 1 día (14 - 13 = 1). Sin embargo, A y G (7 días) y

C y B (11 días) deben estar finalizadas para el inicio de la actividad D. Por lo tanto, A y G tienen una holgura de 4 días en comparación con las otras. No obstante, si la ruta C y B se retrasara un día, obligando con ello que D comenzara y finalizara en la fecha limite prevista (11 + 1 + 2 = 14 días), la ruta A y G tendría un día más de holgura, es decir, 5 días efectivos.

- Si la actividad A comienza de inmediato, la G podrá inicializarse a la finalización de la misma, o 5 días después (la holgura disponible), sin embargo A puede programarse 5 días después (o en menos tiempo), lo que provocará que G carezca de holgura y tenga que ser calendarizada inmediatamente después de la consecución de A. Si la holgura es completamente consumida por las actividades A y G (también podrían ser las actividades C y B), la actividad D carecerá de esta. Lo anterior se concluye tomando en cuenta un tiempo máximo de terminación en cada una de las rutas de 14 días. Si este tiempo crece, el proyecto tendrá que retrasarse inevitablemente.

Este interesante estudio puede resultar indudablemente más complejo si el número de actividades asciende de 8 a 80 o a 800. En este último caso, resultará imposible realizar el análisis anterior sin perderse en la inmensidad de cálculos y posibles relaciones. Afortunadamente existen programas de computación que mediante la alimentación de la información y bajo un formato de salida específico, proporcionan los elementos necesarios para la programación de cada una de las actividades que lo componen.

Con base en lo anterior se presentan los siguientes conceptos:

La duración (D) de una actividad, es el tiempo que esta se lleva en su ejecución.

El Tiempo Temprano de Inicio (TTI) para una actividad, es el primer momento en el que esta puede principiar, cuando estan terminadas, tan rapidamente como es posible, todas las actividades precedentes.

El Tiempo Remoto de Inicio (TRI) para una actividad, es el último momento en el que esta puede comenzar sin retrasar el tiempo de terminación del proyecto.

El Tiempo Temprano de Terminación (TTT) para una actividad, es la suma de su TTI y la D.

El Tiempo Remoto de Terminación (TRT) para una actividad, es la suma de su TRI y la D.

La Holgura (H) para una actividad, es la magnitud del tiempo sobrante o tiempo extra permitido en las actividades, para evitar la interferencia con cualquier actividad en la red de ruta crítica.

Para fines del ejemplo, suponga que la fecha en la que se realiza el pedido, es el 1ero. de febrero de 1986, se consideraran a los días festivos como laborables. De esta forma puede apreciarse:

Que la construcción de la duela puede comenzar a realizarse a partir del 1ero. de febrero (TTI), terminando el 4 del mismo mes (0 + 4 = 4) el cual es el TTT. Sin embargo, si alguna contingencia ocurriera, su fecha de inicio podría posponerse al 6 de febrero (TRI) con fecha de terminación el 9 del mismo (TRT), por lo tanto, el TTI de G será el 5 de febrero con TTT del 7 y el TRI será el 10 del corriente, con el día 12 como TRT. La holgura para las actividades A y G es de 5 días, que es el tiempo en el que cualesquiera de las dos puede ser retrasada sin que ello afecte a la duración total del proyecto. Si la actividad A se pospusiera 4 días (y por ende la G) esta ruta terminaría exactamente en 11 días (duración de las actividades C y B), acción que no afecta a la realización de la siguiente actividad (la D), estos cuatro días se denominan holgura independiente, ya que dicho tiempo no afecta a actividades subsecuentes, sin embargo, son una holgura interferente para las actividades A y G, puesto que un retrazo en A provocará uno en G.

Las actividades que definen a la ruta crítica carecen de holguras, por lo tanto "jamás" deberán ser pospuestas.

Un análisis semejante para cada una de las restantes actividades puede ser aplicado. Cabe aclarar que una computadora no proporciona los resultados en términos de la calendarización ejemplificada, sino únicamente en términos de su duración por lo que, será necesario, una vez que se obtengan, reflejar los cambios en función de un calendario. En este caso pueden usarse, después del análisis, diagramas de Gantt bastante generales en los que el proyecto puede ser transmitido conceptualmente a otras personas sin caer en el lujo de detalle que, en algunas ocasiones, resulta contraproducente.

Advierta que el análisis puede llevarse a tanto detalle como se desee, naturalmente cada caso que se estudie poseerá diferentes interpretaciones y variantes, por lo que es importante ejercitar al máximo la habilidad de "jugar" con un problema, para así obtener el máximo provecho de este. Se recomienda al lector la consulta del Capítulo III (en la sección Otros Programas Utiles), para apreciar el uso del programa de computación propuesto.

6.5 PERT (Técnicas de Revisión y Evaluación de Proyectos)

El PERT fue desarrollado en la década de los años 50 en las Oficinas de Proyectos Especiales de Marina de los Estados Unidos, en colaboración con el despacho BOOZ, Allen y Hamilton. Una de las más célebres aplicaciones de esta técnica fue la relativa a la construcción del famoso submarino Polaris; dicho proyecto requería la fabricación de numerosos elementos y ensambles de subsistemas. La aplicación del PERT proporcionó un ahorro de dos años y varios millones de dólares durante su desarrollo.

El PERT tiene la característica de introducir tres estimaciones de los tiempos para cada actividad. De esta forma, dicha técnica es empleada en situaciones donde existe insuficiencia de información para la predicción de las duraciones de las actividades. En vez de un compromiso respecto a una sola estimación en la duración, se establece un tiempo más probable, que se coloca entre una estimación pesimista y una optimista. El tiempo más probable es la duración que se espera se presente más a menudo si la actividad fuera repetida muchas veces bajo las mismas condiciones. Las estimaciones optimistas y pesimistas son los límites extremos del tiempo de terminación cuando todo sale bien o mal.

En general, puede resumirse la aplicación del PERT en la planeación y control de un proyecto a partir de 5 etapas básicas:

1. Preparación de un Diagrama de Redes.

2. Estimación de los Tiempos para cada una de las Actividades.

3. Aplicación del Programa de Cómputo CPM (en su opción PERT) en la Resolución del Problema.

4. Interpretación de Resultados.

5. Evaluación de la Red.

Ejemplo 6.8:

Mennen S.A. se encuentra actualmente en el proceso de planeación para la construcción de una nueva planta, que tendrá como objetivo reducir los problemas de almacenamiento por los que se encuentra. La mayor parte del trabajo será realizado por un buffete de arquitectos, sin embargo, ciertas labores del proyecto como: trabajos de electricidad y plomeria tendrán que ser contratados por otras fuentes.

Suponga que la compañía ha decidió utilizar la técnica PERT (por carecer de una idea clara en cuanto a tiempos) para llevar a cabo la de planeación y administración del proyecto. Antes de dar comienzo al desarrollo de la red, se llevó a cabo una reunión en la que participaron: el Director de Mennen, el arquitecto a cargo de una parte del proyecto, un dictaminador y un jefe de ingenieros (estos últimos por parte del buffete de arquitectos), para que se llevara a cabo una serie de proyecciones para las diferentes actividades. Estas incluyen tres tipos de estimaciones: una optimista, una pesimista y una denominada como la más probable a ocurrir. La información captada ha sido transcrita en el cuadro 6.5, en el que cada actividad se presenta con sus tiempos estimados correspondientes.

Asimismo, durante la reunión, el arquitecto junto con su jefe de ingenieros, discutieron a detalle la manera en la que las actividades deberían ser secuenciadas, ya que el cuadro no indica el orden de su realización, obteniéndose las siguientes notas:

La aprobación del consejo ejecutivo, debe ser obtenida antes de que cualesquiera de las actividades de abastecimiento sea realizada.

CUADRO 6.5: Tiempos por Actividad para la Construcción del Almacén para la Compañía Mennen.

Actividad:	Descripción:	Tiempo Optimista Días	Tiempo más Probable Días	Tiempo Pesimista Días
A	Obtener aprobación del consejo administrativo	2	5	8
B	Terminar la negociaciones con el subcontratista	1	3	7
C	Explanar el lugar y excavar para poner las cimentaciones	5	7	9
D	Conseguir estructuras de acero para el armazón	10	15	20
E	Conseguir concreto	1	3	5
F	Conseguir ventanas y marcos para puertas	5	7	11
G	Suministros para muros exteriores y techos	1	3	5
H	Colar el concreto para los cimientos	9	10	15
I	Colar el embasamiento de la construcción	4	5	10
J	Erguir la armazón de hierro	8	11	14
K	Tender la duela y la losa para los pisos	5	9	13
L	Levantar las paredes exteriores	21	24	27
M	Colocar la losa de azotea	9	12	15
N	Tender el techado	2	3	8
O	Trabajo eléctrico (subcontratada)	8	10	14
P	Plomería (subcontratada)	7	10	13
Q	Impermeabilización y recubrimintr-s interiores	10	15	20
R	Pintura interior	3	5	9
S	Instalación de tanque de gas y sistema de calefacción	8	10	16
T	Excavación y tendido para el drenaje	5	8	11
U	Caminos y estacionamientos (subcontratada)	9	12	15
V	Remozamiento de exteriores	6	8	10
W	Limpieza general de la localidad	2	2	2
X	Obtención de aceptación de trabajo	3	5	9

El abastecimiento de materiales y las negociaciones de contratación externa, pueden comenzar tan pronto como la aprobación sea obtenida.

El explanado puede comenzar tan pronto como las negociaciones de subcontratación sean terminadas.

La cimentación puede ser realizada después de la excavación y una vez que el concreto haya llegado.

El embasamiento puede llevarse a cabo una vez que la excavación haya terminado.

La estructura debe erguirse en forma simultanea al embasamiento.

El tendido de la duela puede comenzar una vez que se finalice la cimentación. Tiempos extra han sido permitidos en las estimaciones por razones de seguridad, de tal forma que el trabajo no interfiera con la construcción del armazón.

Las paredes exteriores pueden colocarse una vez que el armazón y la duela hayan sido instalados y los suministros, ventanas y arcos hayan llegado.

El techo puede ser instalado después de que la armazón haya sido erguida.

Los trabajos de electricidad y plomería pueden comenzar una vez que el armazón de hierro haya sido levantado y la duela colocada.

La impermeabilización y los recubrimientos interiores pueden colocarse después de los trabajos de plomería y electricidad.

La pintura de interiores debe esperar a la instalación de los recubrimientos interiores.

El tendido del drenaje, los caminos y el estacionamiento, pueden comenzar tan pronto como el lugar para la construcción haya sido explanado y excavado. Las actividades de remozamiento, deben esperar a la terminación de las actividades antes indicadas.

La instalación del gas y del sistema de calefacción deben comenzar una vez que la cimentación haya sido realizada, y debe terminar antes de que los recubrimientos interiores comiencen a instalarse.

La limpieza del lugar es la ultima actividad antes de la obtención de aceptación del trabajo.

El trabajo consiste en llevar a cabo la planeación del proyecto en términos de una red de actividad PERT que le permita al Director de la Compañía Mennen, conocer la secuenciacion de actividades y las posibilidades de que existan retrasos en el proyecto, así como el tiempo de duración del mismo.

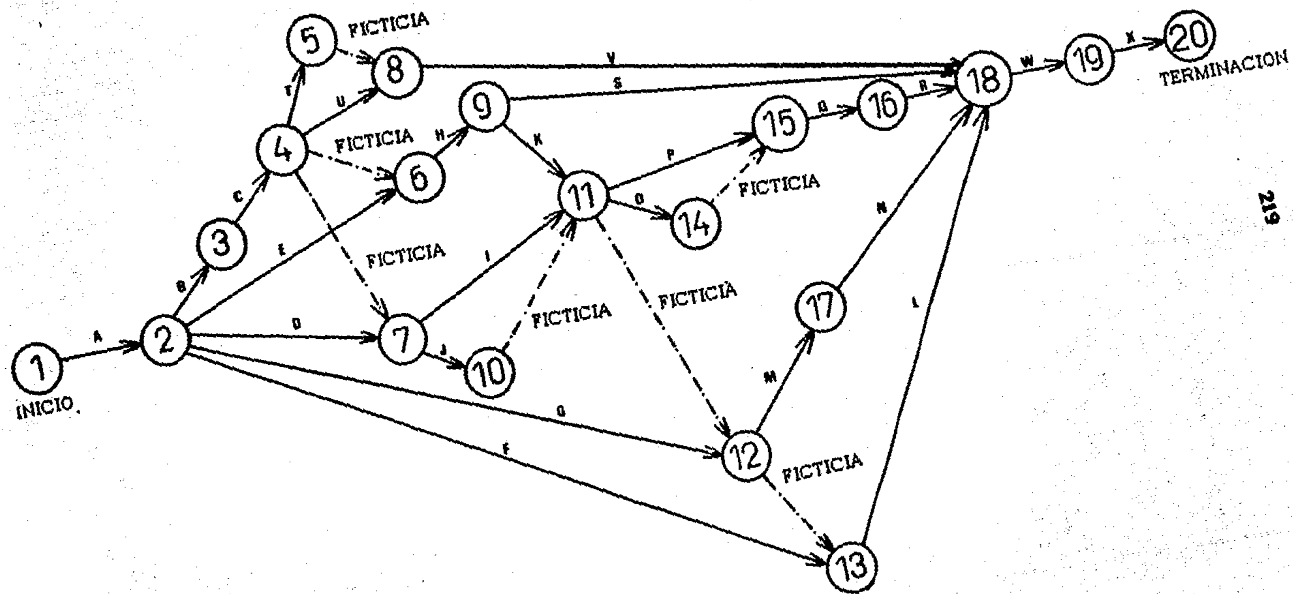
1. Preparación de un Diagrama de Redes.

El problema incluye 24 actividades diferentes que deben secuenciarse, antes de llevar a cabo la contrucción de una red (la representación gráfica del modelo). Con base en el extracto obtenido de la reunión, note que cada una de las actividades puede programarse como se indica en el cuadro 6.6.

CUADRO 6.6: Secuenciación de Actividades para la Construcción del Almacén para la Compa&ía Mennen.

Actividad:	Descripción:	Predecesora:
A	Obtener aprobación del consejo administrativo	Ninguna
B	Terminar la negociaciones con el subcontratista	A
C	Explanar el lugar y excavar para poner las cimentaciones	B
D	Conseguir estructuras de acero para el armazón	A
E	Conseguir concreto	A
F	Conseguir ventanas y arcos para puertas	A
G	Suministros para muros exteriores y techos	A
H	Colar el concreto para los cimientos	C, E
I	Colar el embasamiento de la construcción	C, D
J	Erguir la armazón de hierro	C, D
K	Tender la duela y la losa para los pisos	H
L	Levantar las paredes exteriores	F, G, I, J, K
M	Colocar la losa de azotea	G, I, J, K
N	Tender el techado	M
O	Trabajo electrico	I, J, K
P	Plomería	I, J, K
Q	Impermeabilización y recubrimintos interiores	O, P
R	Pintura interior	Q
S	Instalación de tanque de gas y sistema de calefacción	H
T	Excavación y tendido para el drenaje	C
U	Caminos y estacionamientos	C
V	Remozamiento de exteriores	T, U
W	Limpieza general de la localidad	L, N, R, S, V
X	Obtención de aceptación de trabajo	W

La red correspondiente se muestra en la figura 6.8, para su construcción las consideraciones hechas en el subtema 6.3, fueron tomadas en cuenta.



INICIO.
TERMINACION
FICTICIA
FICTICIA
FICTICIA
FICTICIA
FICTICIA
FICTICIA
FICTICIA
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
U
V
W
X
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Figura 6.8.

2. Estimación de los Tiempos para cada una de las Actividades.

La asignación de tiempos para cada una de las actividades, es de vital importancia en el desarrollo de una red. Aspectos como costos y tiempos tienen que ser ponderados para encontrar su relevancia en el proyecto. Para hacerlo, es necesario utilizar la estadística, en particular las distribuciones: normal y beta. Como podrá recordarse la mayoría de las poblaciones tienden a tener un comportamiento "normal", sin embargo, existen situaciones en las que el comportamiento simétrico no se presenta.

El PERT utiliza una duración para cada actividad denominada tiempo esperado (t(e)), el cual tiene asociada una medida de desviación de ocurrencia de la duración, expresada como la desviación estándar de t(e) o la varianza de la misma.

Cada una de las tres estimaciones que utiliza el PERT:

a, un tiempo optimista, el cual deberá tener una probabilidad de ocurrencia muy reducida.

m, el tiempo más probable, el cual estará determinado por la moda de la distribución probabilística.

b, el tiempo pesimista, que al igual que el optimista deberá tener asociada una probabilidad de ocurrencia muy reducida.

es empleada para calcular el tiempo esperado t(e), que es un promedio ponderado de las tres estimaciones temporales. Fórmulas para calcular la varianza y la desviación estándar, se utilizan para conocer el grado de dispersión de las duraciones posibles. La técnica PERT combina a las estimaciones antes indicadas, suponiendo que definen los parámetros de una distribución beta.

El lector que desee profundizar, puede consultar el Apéndice D o cualesquiera de las referencias citadas al final del tema. Para nuestro propósito, será suficiente comprender el concepto de cada uno de los términos antes indicados.

El tiempo esperado, en resumen, pondera las consideraciones para cada uno de los tiempos incluidos. De esta forma se espera contar con una medida "más representativa" en lo que respecta a la duración de una actividad determinada, o de todo el proyecto. Debido a la variabilidad que se presenta en las proyecciones, es de esperarse que el tiempo estimado no sea una cifra exacta, por lo tanto, cierta dispersión debe ser considerada -a través de la desviación estándar- lo cual permitirá tener una visión más amplia sobre las consecuencias de un retraso.

3. Aplicación del Programa de Computación CPM en la Resolución del Problema.

Una vez que las estimaciones de los tiempos de ocurrencia para cada una de las actividades han sido determinados, se procederá a aplicar el paquete de computación detallado en el Capítulo III (ningún cálculo extra es necesario).

El programa tiene como objetivo, determinar el tiempo medio y la desviación estándar de la ruta crítica, es decir, de todo el proyecto. Formalmente, esto significa combinar las actividades que tienen una distribución beta, matemáticamente hablando esto representa una labor bastante difícil de lograr. Por lo tanto, se hace uso del teorema central del límite y se supone que en general el proyecto es lo suficientemente grande de tal manera que las variables (actividades) que lo componen tienen una distribución normal, aun más se supone que los tiempos de duración para cada una son estadísticamente independientes. Aunque puede existir algún error en este razonamiento, en la mayoría de los casos el error introducido será menor al ya existente en las tres estimaciones para cada actividad. Sin duda alguna el conjunto de suposiciones que se tiene que considerar es muy "numeroso", sin embargo este es necesario para que el algoritmo resulte sencillo. En general, las experiencias de la vida real han sido satisfactorias en relación a la aplicación adecuada de la técnica, sin embargo, existiran otros casos no tan afortunados, cuyo fracaso se debe indudablemente al desconocimiento de las limitaciones del modelo.

En el cuadro 6.7 se presentan los resultados generados por el paquete de cómputo, al correr el modelo en la subrutina PERT, cabe aclarar que estos no poseen en formato de salida.

CUADRO 6.7: Análisis de la Compañía Mennen.

ACTIVIDAD	t(e)	DESV. EST.	TTI	TTT	TRI	TRT	HOLGURA
A	5	1	0	5	0	5	0
B	3.333	1	5	8.333	5	8.333	0
C	7	.667	8.333	15.333	8.333	15.333	0
D	15	1.667	5	20	9	24	4
E	3	.667	5	8	12.333	15.333	7.333
F	7.333	1	5	12.333	34.333	41.667	29.333
G	3	.667	5	8	38.667	41.667	33.667
H	10.667	1	15.333	26	15.333	26	0
I	5.667	1	20	25.667	29.333	35	9.333
J	11	1.333	20	31	24	35	4
K	9	1	26	35	26	35	0
L	24	1	35	59	41.667	65.667	6.667
M	12	1	35	47	49.999	61.999	15
N	3.667	1	47	50.667	61.999	65.667	15
O	10.333	1	35	45.333	35	45.333	0
P	10	1	25.667	30.667	35.333	45.333	9.667
Q	15	1.667	45.333	60.333	45.333	60.333	0
R	5.333	1	60.333	65.667	60.333	65.667	0
S	10.667	1.333	26	36.667	55	65.667	29
T	8	1	15.333	23.333	49.667	57.667	34.333
U	12	1	15.333	27.333	45.667	57.667	30.333
V	8	.667	27.333	35.333	57.667	65.667	30.333
W	2	0	65.667	67.667	65.667	67.667	0
X	5.333	1	67.667	72.999	67.667	72.999	0

4. Interpretación de los Resul'ados.

La información proporcionada por el programa, corresponde a los tiempos próximo y remoto esperados de inicialización y terminación, con sus respectivas desviaciones estándar y, en la última columna, la holgura disponible.

Al igual que en el subtema anterior, cada uno de los conceptos indicados tienen la misma interpretación, pero en este caso, se cuenta con información "esperada" y por ello se le asocia una medida de dispersión, que permitirá realizar un análisis estadístico.

Para identificar la ruta crítica, será necesario observar en la columna "Holgura" aquellas actividades que posean holguras nulas (iguales a cero).

Una vez obtenidos los resultados, es posible realizar especulaciones en lo que respecta a las posibilidades de cumplir con la fecha prevista de terminación. La respuesta que en este caso proporcione la técnica será en terminos de probabilidades, basadas en las estimaciones originales (y las supociciones adicionales, ya indicadas). En cierta forma el caracter subjetivo, en relación a la interpretación de una medida de probabilidad, puede ocasionar problemas en su transcripción a una situación real, es por ello que los resultados deben tomarse con precaución.

En el cálculo de probabilidades, el PERT hace la suposición fundamental de "normalidad", por lo que la distribución del tiempo de terminación de un proyecto tendrá la forma de una campana, similar a la mostrada en la figura 6.9. Observe que la media de esta distribución está definida por el tiempo esperado de duración del proyecto (o en particular del de una actividad), la desviación estándar (dependiendo de su magnitud) hará más ancha o estrecha la forma de la campana. Para calcular la probabilidad de cumplir con un cierto avance en un determinado período de tiempo, será necesario introducir en el programa PERT, el tiempo especulado de terminación del proyecto, este proporcionará el valor correspondiente bajo la suposición de normalidad. Del cuadro 6.7, puede apreciarse que en el último renglón la actividad X termina 72.999 días despues de inicializado el proyecto, esta es su duración máxima permitida. Suponga que se desea encontrar la probabilidad de terminación para una duración de 65 días, este dato es introducido al programa obteniendo una probabilidad 0.0079 (bastante baja).

Si se quiere reducir la duración del proyecto, tiene que realizarse un análisis profundo de la secuenciación de las actividades, estudiando la posibilidad de adelantar algunas (en las que esto sea posible), o incrementar el uso de los recursos en las realizaciones. Por ejemplo, los trabajos de plomería y electricidad, podrían probablemente marchar en "paralelo" con el tendido de la duela y la losa para los pisos, obteniéndose de esta forma un ahorro aproximado de 10 días. El investigador deberá verificar siempre la factibilidad de sus propuestas con el personal que conozca profundamente el proyecto, para reanalizar el sistema.

5. Evaluar la Red.

Después de que la red ha sido dibujada, los tiempos han sido estimados y mediante el uso de un paquete de computación se han obtenido resultados que permiten hacer interpretaciones sobre un modelo, es necesario establecer su veracidad. Naturalmente esta actividad no debe ser practicada al final del proyecto, ya que resulta más conveniente mantener un nivel de validación contínuo, sin embargo, una evaluación final rigurosa siempre es necesaria, aun más, puede ocurrir que el usuario no esté conforme con la planeación resultante, y por ello tenga que reasignar recursos en el desempeño de cada una de las actividades del proyecto, alterando significativamente su duración. Ante tal tipo de circunstancias, tendrán que efectuarse ajustes por lo que nuevas corridas seran necesarias. En caso de que los cambios no sean graves, una pequeña revisión permitirá comprobar si es necesario volver a realizar una corrida, o simplemente hacer algunos pequeños ajustes manuales. Para ello no se requiere mucha ciencia, pues basta recordar que una ruta crítica puede convertir en críticas a otras si algunas de sus actividades son reducidas. O las no críticas pueden llegar a serlo, si la duración de algunas de sus actividades se ven alargadas. Aunque estos simples principios no son los únicos (dada la diversidad de situaciones), siempre es posible utilizar el sentido común (bien fundamentado) para tomar las providencias adecuadas ante circunstancias inesperadas.

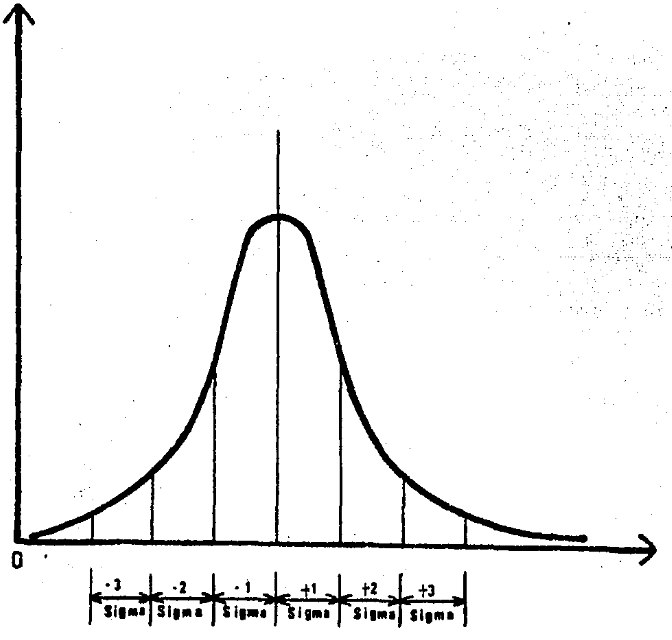


Figura 6.9.

6.6 PERT/Costo

El PERT/Costo o CPM como comunmente se le conoce, tuvo su desarrollo en forma casi paralela al PERT/Tiempo, su campo de aplicación se ha enfocado principalmente a la industria de la construcción, donde una infinidad de tareas específicas y secuenciales tienen que ser desempeñadas.

Como pudo apreciarse, el PERT/Tiempo involucra cuestiones en lo que respecta a la planeación de las actividades de acuerdo a un tiempo específico, sin embargo, pueden existir otros factores importantes en el desarrollo de un proyecto, como costos o erogaciones en la utilización de los recursos. De esta forma, el interés radica en determinar el costo mínimo en el que puede incurrirse para completar un proyecto en un tiempo mínimo. Con base en esta idea, se creó una técnica más completa denominada PERT/Costo o Ruta Crítica (CPM).

En este punto el lector no debe caer en confusión en relación al subtema 6.3, donde se especificó el significado de ruta crítica. El procedimiento desarrollado proporciona información para describir a un sistema sin optimizarlo, y no especifica la manera en la que deben tomarse las decisiones que conducen al control.

Varias compañías han implantado sus propias versiones del CPM, por lo que pueden existir discrepancias en cuanto a los niveles de información que se obtengan. En este subtema se aporta una visión universal, exponiendo los resultados más comunes que cualquier paquete de computación posee. Para explicar su naturaleza es importante comprender algunos aspectos preliminares.

Con base en el desarrollo expuesto en los subtemas anteriores, resultará bastante claro que toda actividad representa un costo fijo para una empresa, y que varía de acuerdo al volumen de los recursos que emplea para desarrollarla, naturalmente esto tiene que ser planeado de una manera efectiva, pues una disminución en la duración de una actividad no crítica no reduce la duración total de un proyecto, de igual forma ciertas actividades pueden resultar más costosas que otras y por ende resultará más conveniente acelerar los tiempos de las más económicas.

Bajo este enfoque, existen dos costos estimados: uno denominado normal, que representa el egreso en el que se incurre por desarrollar una actividad con los recursos con que normalmente se dispone, y otro conocido como de compresión o intensivo, que indica el costo en el que se incurre por reducir su duración en una unidad determinada. Al costo normal, se le asocia un tiempo estimado de duración (similar al utilizado por el PERT/Tiempo), y al costo de compresión, el mínimo tiempo en el que una actividad puede ejecutarse.

En el tratamiento de una red, pueden considerarse cualesquiera de las siguientes alternativas para determinar la red de tiempo mínimo a costo mínimo:

- Comenzar con la red normal e ir reduciendo los tiempos de terminación hasta un mínimo.

- Comenzar la red con los tiempos de compresión al máximo, e ir desintensificándolos para obtener un costo mínimo sin afectar con ello el tiempo total de duración del proyecto.

- Comenzar con la ruta crítica a su nivel máximo de compresión, pero con las demás actividades a sus tiempos normales, e ir ·educiendo paulatinamente las demás trayectorias lo necesario.

Cuál es la mejor?, generalmente esto no se sabe sino hasta que el análisis es realizado, no obstante, las tres conducen a las mismas conclusiones. En el siguiente desarrollo se utilizará la primera.

Ejemplo 6.9:

Suponga que en la Dirección de Planificación Familiar se ha proyectado un ahorro de $3,000 por día, una vez que el equipo de cómputo haya sido instalado, debido al uso de recursos humanos en la condensación manual de la información. Asimismo, se ha programado que todas las actividades excepto la correspondiente a la entrega del equipo, pueden ser aceleradas mediante el uso de horas extra. Los electricistas (2) son empleados a una tasa de $1,500 diarios (8 horas de trabajo), y sus tiempos extra se cobran a un costo adicional de $250 la hora. El trabajo de carpintería es empleado a un costo de $2,000 diarios y el tiempo extra se cobra a $500 la hora. El ingeniero en electrónica hace un cargo de $2,500 diarios, y puede trabajar tiempos extra a $625 la hora. Suponga que el número máximo de horas extra que cada persona estaría dispuesto a trabajar varía de la siguiente manera: los electricistas y carpinteros 4 horas extra diarias, mientras que el ingeniero 8. De esta forma, para que los electricistas liberen el trabajo de un día normal, necesitan dos de tiempos extra, un razonamiento similar se aplica a los demás. Si el trabajo es terminado antes de que un día laborable de 8 horas finalice, el sueldo de este se pagará íntegramente al obrero.

Con base en la información anterior, es posible construir el cuadro 6.8. Los tiempos de compresión y sus costos asociados, fueron calculados tomando en cuenta la disponibilidad de cada uno de los recursos (en tiempos extra) así como la erogación que implica utilizarlos. Por ejemplo, si el equipo de carpinteros trabajara dos días de horas extra (8 horas en total) ahorraría un día normal de trabajo, mientras que el ingeniero lo conseguiría trabajando un día extra. Los costos de compresión se obtienen multiplicando el egreso respectivo por hora extra por el número de horas que se necesitan trabajar para ahorrar un día. La actividad E carece de ambos tipos de costo debido a que la entrega no puede ser acelerada.

La figura 6.10 muestra la red correspondiente al problema, la ruta crítica ha sido señalada por una doble línea perpendicular. Si la duración de un proyecto quiere ser recortada, bastará con comprimir sus tiempos de duración, no obstante, esto puede provocar que otras se vuelvan críticas sin serlo, por lo que en la labor de compresión habrá que tener esto en cuenta.

CUADRO 6.8: Costos Pelativos a la Realización de Actividades para la Instalación de un Equipo de Cómputo.

Actividad:	Normal:		Compresión:	
	Tiempo (días):	Costo $ por día:	Tiempo (días):	Costo $ por día:
A	4	2,000	3	4,000
B	5	3,000	4	4,000
C	6	3,000	4	4,000
D	2	3,000	-	-
E	14	-	-	-
F	10	2,500	5	5,000
G	3	2,000	2	4,000
H	4	2,500	2	5,000

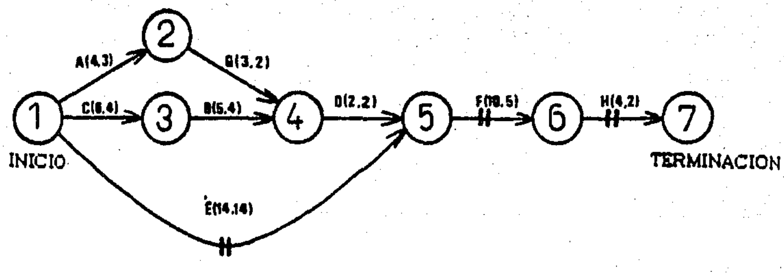


Figura 6.10.

Comprimir un día la actividad A representa un costo de $4,000, sin embargo, ello no acelera la duración total del proyecto, pues habrá que esperar la entrega del equipo de cómputo para desempe&ar las actividades F y H, por lo tanto este gasto resulta una pérdida inecesaria. Si se acelera cualesquiera de las actividades F o H, la duración uel proyecto se verá modificada. Por ejemplo, si la actividad F se comprime al tiempo máximo (5 días) el proyecto se reducirá de 28 a 23 días a un costo total de $25,000. Por su parte, una reducción de dos días en la actividad H representa un egreso de $10,000, de esta forma el tiempo mínimo de duración de la ruta F, H es de 7 días a un costo de $52,500 (12,500 + 25,000 + 5,000 + 10,000 = $52,500), que aunado a los costos en los que se incurre en el desempe&o de las demás actividades representa un egreso total de:

(2)(4,000)	= $ 8,000
(3)(2,000)	= $ 6,000
(6)(3,000)	= $ 18,0C,
(5)(3,000)	= $ 15,000
(2)(3,000)	= $ 6,000
	$ 52,500

	$105,500

este es el costo mínimo de comprimir al máximo la duración de ciertas actividades, logrando con ello un tiempo mínimo de 21 días. El normal es 28 días a un costo de $88,000. El costo de compresión erogado por día ahorrado es $2,500 ((105,500 - 88,000)/(28 - 21) = $2,500). Dado que el ahorro es $3,000, se concluye que existe una ganancia efectiva diaria de $500 (3,000 - 2,500 = $500) una vez que el equipo de cómputo se encuentre instalado, por lo que convendrá comprimir el tiempo de algunas actividades para obtener ciertos dividendos. El curso de acción recomendable para el Director es: programar el número máximo de horas extra para el ingeniero en electrónica, los demas trabajadores deberán contratarse en el horario de trabajo normal.

Este ejemplo resultó bastante sencillo y apropiado para cálculos manuales, sin embargo existen redes más grandes y complejas en las que su resolución no resulta tan obvia. Por ejemplo, aquellas en el que ciertas rutas no críticas no puedan reducirse tanto como el tiempo de compresión para la crítica, haciendo que resulte necesario descomprimir las duraciones de la ruta crítica, considerando en primer término a aquellas actividades que más costo representen. Estas y otras situaciones pueden provocar que el análisis del sistema resulte más complejo. Ante tales circunstancias se vuelve necesario utilizar un paquete de cómputo que sea capáz de proporcionar la ruta óptima.

Un aspecto de suma importancia considerado en el desarrollo del problema, es la relación costo-tiempo que guarda la duración para cada actividad. La ruta crítica pone al descubierto al grupo de actividades que deben reducirse para abreviar el proyecto, pero no indica cuales son las más económicas. Los costos de compresión presentan una relación con el tiempo que se desea disminuir una actividad. La razón de esta relación puede tener comportamientos similares a los mostrados en la figura 6.11. Esto puede deberse a fluctuaciones naturales tales como la oferta-demanda de un producto, incremento exponencial en el salario por horas extra de servicio, etc. Por sencillez, se ha optado por aceptar una aproximación lineal para tal relación. No obstante, para aquellos problemas en los que esto no se cumpla, deberá utilizarse algún paquete de computación que acepte relaciones no lineales.

Los $3,000 de ahorro que representa tener el sistema implantado, reciben el nombre de costo indirecto. En este caso, es importante observar la relación de los costos directos e indirectos para la obtención del costo total del proyecto. En general, los costos directos aumentan conforme se desee reducir el tiempo de duración del proyecto, mientras que los indirectos aumentan conforme más tiempo se lleve en su terminación, la suma de ambos dara una curva en forma de U similar a la mostrada en la figura 6.12. Nuevamente observe que las relaciones no tienen que ser necesariamente lineales. Cuando se carece de la información asociada a los costos

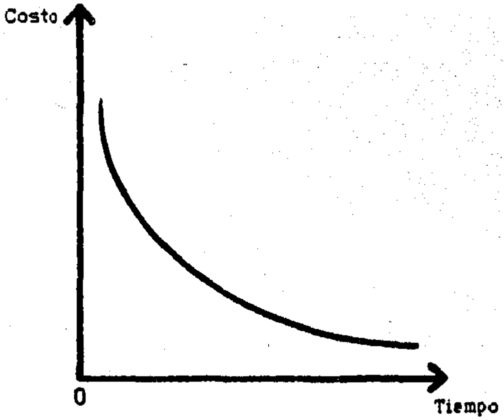


Figura 6.11.

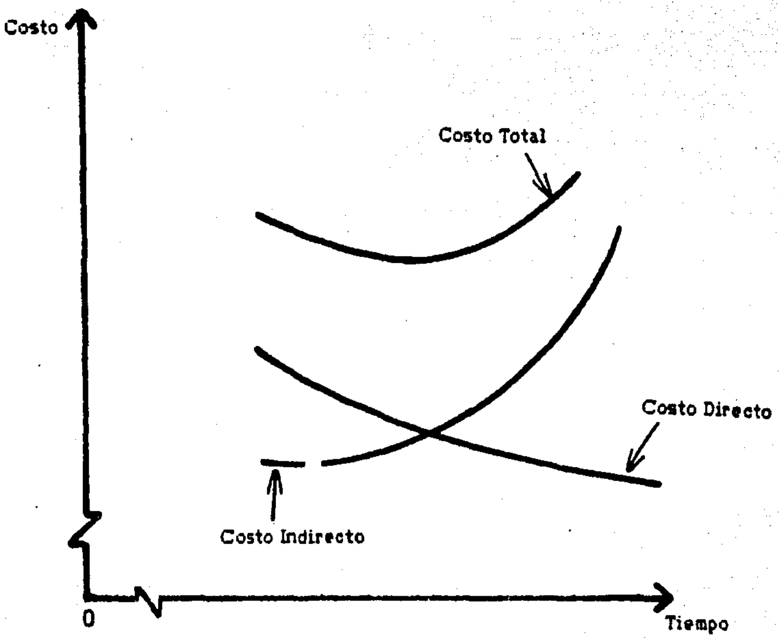


Figura 6.12.

indirectos, la elección de la compresión más adecuada puede variar dependiendo de las políticas que sean establecidas en cada caso.

Ejemplo 6.10:

Varios Jefes de **Sección de una empresa, han sido comisionados para determinar** los tiempos y los costos de **un nuevo componente a manufacturar. El directivo** necesita tiempos veraces y costos estimados, ya que piensa pactar un contrato fijo que no ofrece la posibilidad de alguna renegociación en caso de que se decida llevar a cabo posibles cambios. Debido a políticas empresariales concernientes a la confidencialidad de la información manejada entre los jefes, el director de la compañía decidió poner en manos de su departamento asesor la siguiente información, en espera de que sea la suficiente para contestar a sus preguntas.

CUADRO 6.9: Costos de Manufactura de un Nuevo Componente.

Actividad:	Descripción:	Tiempo Normal:	Costo Normal Total:	Tiempo de Compresión	Costo de Compresión Total:
1-2	Estudio del Componente	4	$ 8,000	3	$10,000
1-3	Bosquejos	5	$15,000	3	$20,000
1-4	Diseño del Subsistema	5	$25,000	4	$32,500
2-5	Evaluación	3	$ 4,000	1	$ 6,000
3-5	Especificaciones	6	$10,000	4	$17,500
4-6	Pruebas del Subsistema	10	$45,000	8	$60,000
5-7	Trabajo del Subcontrato	9	$35,000	7	$50,000
3-6	Ajustes Finales	9	$30,000	6	$40,000
6-7	Fabricación	10	$35,000	7	$42,500

En resumen, quiere conocer la evaluación de la ruta crítica a un costo mínimo-tiempo mínimo. Para ello, se dibujará en primera instancia la red correspondiente, observe que la columna de actividad ya tiene especificadas las direcciones de cada uno de los nodos que integran al diagrama, por ello este trabajo resulta bastante sencillo. Como el lector podrá comprobar, el diagrama correspondiente al problema se muestra en la figura 6.13, este ya contempla los tiempos normales y de compresión programados para cada uno de los arcos de acuerdo al cuadro anterior. El siguiente paso es correr el problema en el paquete CPM, para lo cual será necesario capturar la información correspondiente. De acuerdo con este, la ruta crítica está determinada por los nodos:

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$$

con una duración de 25 días y un costo total de (en miles):

$$8 + 15 + 25 + 4 + 10 + 45 + 35 + 30 + 35 = 207$$

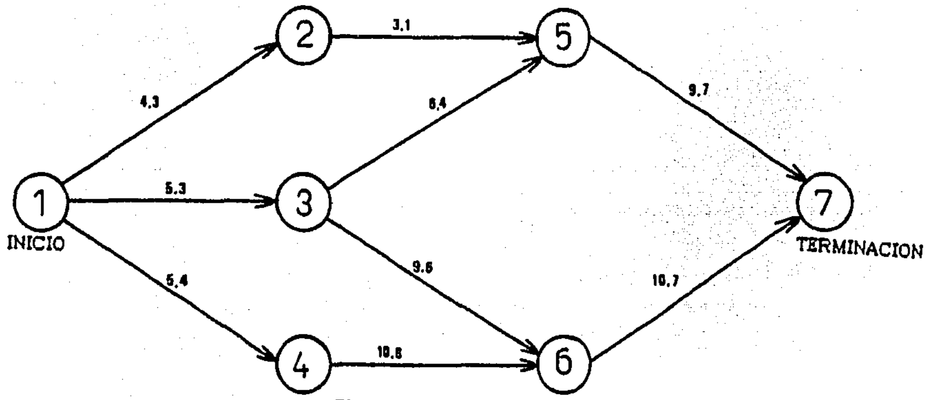


Figura 6.13.

El cuadro 6.10 muestra un condensado de la salida del programa, en este podrá identificarse, con base en las holguras nulas, la dirección de la ruta crítica y el costo (normal) asociado al proyecto. El siguiente paso será determinar el tiempo mínimo más económico para cada una de las actividades críticas. La actividad 1-4, puede reducirse a 4 días a un costo de $32,500 ($7,500 más de su costo normal), las actividades 4-6 y 6-7, pueden reducirse a 8 y 7 días a un costo de $60,000 y $42,500 respectivamente, llevar a cabo tal compresión, producirá una duración del proyecto de 19 días (en lugar de los 25 originalmente obtenidos), a un costo de $237,000 (o sea $30,000 más caro). El realizar una reducción en los tiempos de duración en las actividades críticas, provocará que otras se conviertan asimismo en críticas. En este caso, las rutas:

1 --> 3 --> 5 --> 7 con 20 días de duración

y 1 --> 3 --> 6 --> 7 con 24 días de duración,

sobrepasan a la reducción hecha en la ruta crítica, por lo tanto habrá que considerar compresiones adecuadas en cada una de estas para evaluarlas en cuanto a costos y seleccionar la más conveniente.

Por ejemplo, la primer ruta indicada puede tener una compresión que reduzca su duración a 14 días, a un costo adicional de $27,500. Naturalmente una reducción a tal grado resulta inconveniente, debido a que existirán holguras infructuosas y costosas. Por lo tanto, antes de decidir una política de reducción en cada una de las actividades, puede resultar más conveniente determinar una tasa de variación entre tiempo y costo. Esto se obtiene suponiendo linealidad en la relación costo-tiempo, y mediante la aplicación de la ecuación de la pendiente de una recta.

CUADRO 6.10: Ruta Crítica.

ACTIVIDAD:	DURACION:	TTI:	TTT:	TRI:	TRT:	HT:	HL:
1-2	4	0	4	9	13	9	0
1-3	5	0	5	1	6	1	0
1-4	5	0	5	0	5	0	0
2-5	3	4	7	13	16	9	4
3-5	6	5	11	10	16	5	0
4-6	10	5	15	5	15	0	0
5-7	9	11	20	16	25	5	5
3-6	9	5	14	6	15	1	1
6-7	10	15	25	15	25	0	0

En la figura 6.14 se muestran los costos normal y de compresión para la actividad 1-3, estos variarán de acuerdo al tiempo que se desee acelerar, es decir, el tiempo de compresión solo indica un límite inferior al cual es posible reducir la duración de una actividad. Lo anterior hace que resulte necesario evaluar el costo unitario (por día) de compresión, por lo que se requerirá de la suposición de linealidad para calcularlo (si se tomara una relación no lineal, esta operación resultaría más complicada). La pendiente de la curva se calcula a partir de la formula siguiente:

$$\frac{\text{Costo de Compresión} - \text{Costo Normal}}{\text{Tiempo Normal} - \text{Tiempo de Compresión}}$$

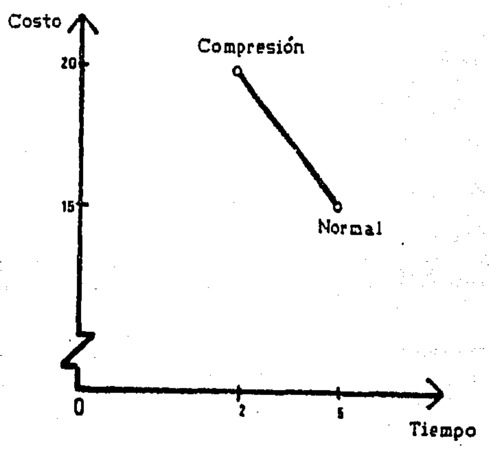


Figura 6.14.

Para cada una de las actividades esta información es:

Actividad:	Pendiente-Costo:	Actividad:	Pendiente-Costo:
1-2	$2,000	4-6	$7,500
1-3	$2,500	5-7	$7,500
1-4	$7,500	3-6	$3,333.333
2-5	$1,000	6-7	$2,500
3-5	$3,750		

Una vez obtenida es posible proyectar diferentes duraciones para el proyecto:

- 25 días -con base en la duración normal del proyecto a un costo de $207,000

- 24 días de duración -la forma más económica de conseguir esto es: comprimir un día a la actividad menos costosa de la ruta crítica, o sea la 6-7 (de 10 a 9 días), a un costo adicional de $2,500, el costo del proyecto será de $209,500 (207,000 + 2,500 = 209,500). Si otras actividades como la 4-6 o la 1-4 se hubieran reducido, el costo se hubiera incrementado aun más. Esta reducción provoca que la ruta:

  1 --> 3 --> 6 --> 7 se vea reducida a 23 días.

- 23 días de duración -nuevamente reduciendo a la actividad 6-7 de 9 a 8 días, provocando un costo total del proyecto de $212,000, la ruta

  1 --> 3 --> 6 --> 7 se verá reducida a 22 días.

- 22 días de duración -reduciendo a la actividad 6-7 de 8 a 7, su máximo tiempo de compresión, el costo total del proyecto es $214,500, la ruta

  1 --> 3 --> 6 --> 7 se verá reducida a 21 días.

- 21 días de duración -las actividades 1-4 o 4-6 pueden reducirse a un costo de $7,500 indistintamente (se eligirá la 1-4), asi el costo del proyecto será, $222,000 y la ruta:

  1 --> 3 --> 6 --> 7 se convertirá en crítica.

- 20 días de duración -aquí será necesario reducir dos actividades, una para cada una de las dos rutas críticas (de igual forma seleccionando la compresión que ocasione un costo mínimo), sean estas la 4-6 a un costo de $7,500 (la 1-4 ya no puede ser seleccionada ya que su compresión mínima es a 4 días) y la 1-3 ($2,500), provocando un costo total del proyecto de $232,000.

- 19 días de duración -reduciendo una vez más a las actividades 1-3 y 4-6 en un día a un costo de $2,500 y $7,500 respectivamente. El costo total será de $242,000, la ruta:

  1 --> 3 --> 5 --> 7 se convertira en crítica.

En este caso ya no es posible llevar a cabo una compresión unitaria más, ya que la ruta crítica no lo permite. Lo anterior nos permite observar varias cosas:

- El proyecto puede tener una duración máxima permitida de 25 días a un costo de $207,000.

- El proyecto puede tener una duración "mínima" de 19 días (una ganancia de 6 días) a un costo de $242,000.

El decisor deberá tomar el curso de acción más adecuado, o imponer costos penales (conocidos como Costos Indirectos), con base en el tiempo en que desee finalizar, para captar el efecto que representa cumplir con una fecha determinada. Para este ejemplo, un costo indirecto podría ser el equivalente a la pérdida monetaria en clientes por cada día de planeación extra (a partir de los 19 días de comenzado). Los costos directos son los asociados al proyecto, los totales son iguales a la suma de los directos e indirectos. Suponga que estos se condensan en el cuadro 6.11.

CUADRO 6.11: Resumen de Costos para la Manufactura de un Componente.

Dias	25	24	23	22	21	20	19
Costos Directos	$207000	$209500	$212000	$214500	$222000	$232000	$242000
Costos Ind.	$255000	$240000	$230000	$225000	$220000	$218000	$215000
Costos Totales	$462000	$449500	$442000	$439500	$442000	$450000	$457000

Bajo la opción de costos penales indirectos, la mejor elección es aquella que tiene asociada el costo total más reducido, por lo tanto, la planeación óptima a tiempo mínimo-costo mínimo es la de 22 días con las siguientes duraciones:

Actividad 1-4: con 5 días de duración.
Actividad 4-6: con 10 días de duración.
Actividad 6-7: con 7 días de duración.

Duración Total del Proyecto: 22 días.

Costo Total del Proyecto: $239,500

Si ningún costo penal hubiera sido impuesto, el tomador de decisiones tendría que hacer su elección con base en su criterio de evaluación en cuanto al tiempo-costo, es decir, qué es más conveniente para él: ahorrar tiempo a un determinado costo, o ahorrar costos a un determinado tiempo. Naturalmente esta tendrá que ser tomada de acuerdo a diversos criterios: imagen de la empresa, tiempos prometidos, otros productos a manufacturar en cola de espera, etc.

El análisis antes descrito, resulta bastante tedioso cuando se trabaja con un proyecto de más de 30 actividades, por lo que es recomendable usar un paquete de computación que presente la posibilidad de obtener la ruta de tiempo mínimo-costo mínimo. El CPM proporcionado en el Capítulo III carece de este alcance, por lo que solo puede ser aplicado siempre y cuando se desee determinar la ruta crítica.

Como pudo apreciarse, existen diversas ventajas (en cuanto a costos y tiempos) que hacen al CPM mas atractivo que el PERT. Sin embargo, cuando es necesario realizar la planeación de un proyecto nuevo, donde se requiera manejar una tabla de tiempos estimados (optimista, pesimista y más probable), deberá utilizarse el PERT, para encontrar el tiempo estimado, así como la ruta crítica correspondiente. El PERT tiene la ventaja de proporcionar una estimación de la probabilidad de cumplir con un compromiso dentro de los límites de tiempo fijados. Ambas técnicas, no obstante, han tenido gran aceptación dentro del mercado de la Investigación de Operaciones, debido a su versatilidad y potencialidad en la planeación de proyectos.

6.7 Las Redes y su Utilidad

Una red es construida básicamente por tres razones:

1. Planear.

2. Programar.

3. Controlar.

Tres actividades primordiales en la administración de los recursos.

En la Planeación, una red muestra las interrelaciones que se dan en un sistema, esto ayuda a determinar al conjunto de actividades que se requieren incluir en un proyecto, y a realizar la asignación de los recursos de manera más eficiente sobre las actividades que lo requieran. Los cuellos de botella (actividades críticas) son identificados para que, a lo largo del proyecto, reciban una atención especial en su desarrollo, cualquier retraso en estos, provocará uno general.

El uso de redes en esta fase es bastante simple y económico, factores que las convierten en herramientas adecuadas a casi cualquier bolsillo.

El Programar actividades, es uno de los aspectos que hacen atractivo el uso de redes, sin embargo, esta actividad puede no llegar a niveles de detalle deseados (programación por horarios de actividades), no obstante, es posible manejar tiempos próximos y lejanos de terminación.

Una vez que un proyecto se encuentra "caminando", es muy fácil perder el Control del mismo, las redes pueden ayudar a evitarlo, al proporcionar al usuario el grado de avance en un período dado. Lo anterior de ninguna manera asegura una efectividad del 100% en esta labor, pero permitirá detectar fuentes problemáticas que ameriten de mayor atención y cuidado.

6.8 Temas Selectos de Redes

Existen diversas consideraciones importantes que es necesario apuntar antes de finalizar con el tema.

6.8.1 Redes de Actividad en el Nodo:

En el subtema 6.3 se comentó la existencia de un procedimiento diferente al expuesto, para llevar a cabo la representación gráfica de una red, éste es el de actividad en el nodo. En realidad el uso de cualesquiera no cambia en si la esencia del proyecto. Para efectos manuales, este tipo de diagramas resulta bastante apropiado pues elimina la inclusión de actividades ficticias.

Ejemplo 6.11:

Para ejemplificarlo se retomara el problema relativo a la implantación de un nuevo sistema administrativo expuesto en el subtema 6.3, asimismo, en la construcción de su red se considerará el siguiente procedimiento general:

1. Dibuje un nodo denominado INICIO al lado izquierdo de la pieza de papel sobre la que se va a diagramar la red.

2. Dibuje un nodo para cada una de las actividades que carezcan de predecesoras, y dibuje una flecha del INICIO a cada nodo. (Las actividades A y D serían las elegidas, como se muestra en la figura 6.15.1.)

3. Seleccione cualquier actividad en el diagrama que no haya sido eliminada de la lista de actividades. Denomínela como "la candidata". (La actividad A sería la primer candidata en el ejemplo. Esta será eliminada de la lista de actividades una vez que los pasos 4 y 5 sean finalizados.)

4. Busque entre la lista de predecesoras para las otras actividades, a la candidata. Cada vez que se encuentre, dibuje una flecha a la actividad correspondiente del nodo de la candidata. Si la actividad carece de un nodo en el diagrama, dibuje uno, y luego entonces dibuje la flecha. Una vez que esto haya sido ejecutado, elimine a la candidata de la lista de procedencia. (La actividad C es la primera que tiene a A como predecesora. Una vez que se considere, la actividad A será eliminada de la columna de predecesoras para la actividad C, vease la figura 6.15.2.)

5. Repita el paso 4 con la misma candidata, hasta que ya no aparezca en la lista de procedencia para ninguna actividad. Elimine a la candidata de la lista de actividades y regrese a los pasos 3 y 4 hasta que todas las actividades y predecesoras hayan sido eliminadas. (Una vez que los nodos C y E son dibujados, se elimina la actividad A de la lista de actividades.)

6. Dibuje un nodo denominado TERMINACION. Aquellos nodos suspendidos conéctelos a este. (para el ejemnlo, los nodos B y E son suspendidos, esto se indica en la figura 6.15.3.)

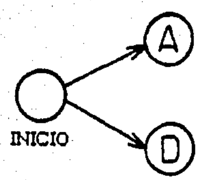


Figura 6.15.1.

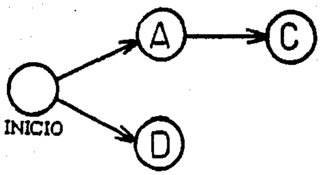


Figura 6.15.2.

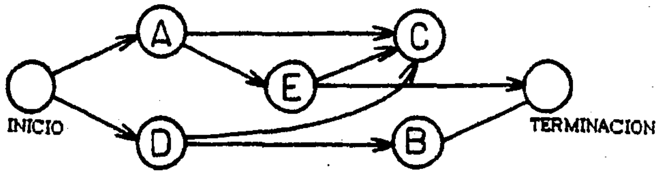


Figura 6.15.3.

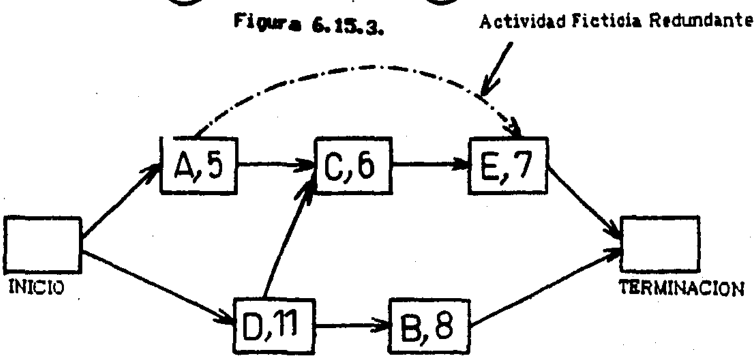


Figura 6.15.4.

7. Reestructure el diagrama. En esta ocasión utilice nodos rectangulares, inscribiendo en ellos la clave de la actividad, así como su duración. Elimine las flechas redundantes. (Para este problema la flecha que une a las actividades A y E resulta redundante, por lo tanto puede ser eliminada, el diagrama general se muestra en la figura 6.15.4.)

Como puede observarse el significado del proyecto no se ve alterado, sin embargo, cabe aclarar que el paquete de computación utiliza la representación de actividad en las flechas, razón por la que se ha utilizado este enfoque durante el desarrollo del tema.

6.8.2 Coordinación de Recursos:

Uno de los aspectos primordiales en la planeación de un proyecto es, sin duda alguna, la programación de los recursos; por ejemplo, suponga que en el desarrollo de un proyecto el primer día se requieren 30 hombres, el segundo 14 el tercero 20 y así sucesivamente. Sin duda alguna, llevar a cabo la coordinación de tal programación resultará bastante complicada, costosa y poco veráz. Para solucionar semejante tipo de problemas se han implantado una serie de reglas heurísticas que tienen la finalidad de llevar a cabo la asignación de los recursos de tal forma que las variaciones sean mínimas. Sin embargo, estos métodos no aseguran una eficiencia total, es decir, no es posible aseverar al 100% que la programación sea óptima. Para redes relativamente pequeñas esta operación puede realizarse manualmente, pero para proyectos grandes el uso de una computadora se vuelve imprescindible. En general, en el mercado existen diferentes paquetes de planeación, que permiten llevar a cabo la asignación de los recursos. En particular, el paquete de computación expuesto en el Capítulo III carece de tal "utilería", por lo que solo se ilustrará este aspecto mediante un ejemplo.

Ejemplo 6.12:

Suponga que un proyecto ha sido planeado de acuerdo a la siguiente lista de actividades, en la que se indican los requerimientos de personal. Se pretende llevar a cabo la coordinación "óptima" de los recursos, bajo el principio de que un uso casi constante en los mismos resulta más sencillo y económico, en comparación de uno con bastantes fluctuaciones.

Actividad:	Duración:	Hombres:	Actividad:	Duración:	Hombres:
1-2	2	2	3-8	2	2
1-3	2	2	2-6	2	3
1-4	1	2	7-9	2	2
4-7	2	1	5-8	2	4
4-5	3	2	8-9	2	4
3-5	1	3	6-8	4	2

El primer paso, es llevar a cabo una representación gráfica del proyecto a través del tiempo, que permita apreciar el uso efectivo que se requiere en cada una de las actividades. Para el ejemplo, en la parte inferior de la figura 6.16, se presenta la acumulación de personal que se requiere, para ello se ha supuesto que cada una de las actividades comienza en su tiempo próximo de inicio. En la parte superior de la misma figura se muestra una construcción a barras de la red a escala, observe que el eje horizontal expresa al tiempo, mientras que el vertical, al número de hombres que se requiere. Esta representación es similar al diagrama de Gantt estudiado en el subtema 6.2, con la ventaja adicional de describir secuencialmente el desarrollo de cada una de las actividades (mediante las barras verticales) y las holguras de cada una de ellas (mediante lineas punteadas). Para suavisar la forma irregular de la figura mostrada en la parte inferior, es necesario realizar ciertas consideraciones:

- Si el proyecto no puede extenderse más, habrá que reprogramar algunas actividades (no críticas) de acuerdo a sus holguras.

- La reprogramación deberá hacerse de tal forma que el uso de los recursos se lleve a cabo casi en forma uniforme.

- Las reprogramaciones se llevarán de acuerdo a la regla: ensayo-error-ensayo.

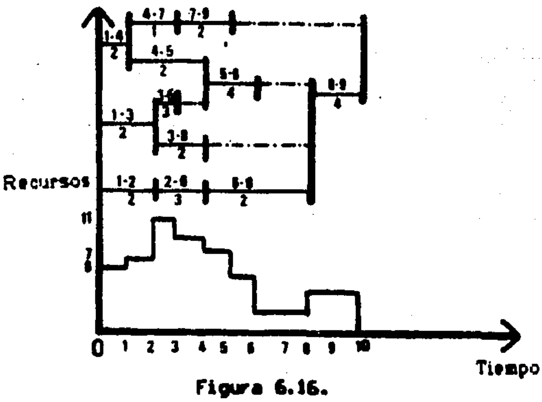


Figura 6.16.

En la figura 6.17 se muestra la reprogramación de las actividades y los recursos respectivos, la gráfica inferior de la figura es mas "suave", lo cual implica fluctuaciones más reducidas (6, 5 y 7).

Como fué indicado, lo anterior solo es posible cuando la dimensión de una red no es muy grande, ya que en proyectos de ciertas dimensiones, el número de opciones a ser considerado puede resultar muy elevado y por lo tanto imposible de efectuar. Cuando una coordinación de recursos no puede ser llevada lo más eficientemente posible, será necesario considerar posibles elongaciones en las actividades críticas, naturalmente, en este caso será necesario evaluar la magnitud de los costos que tal decisión provocaría.

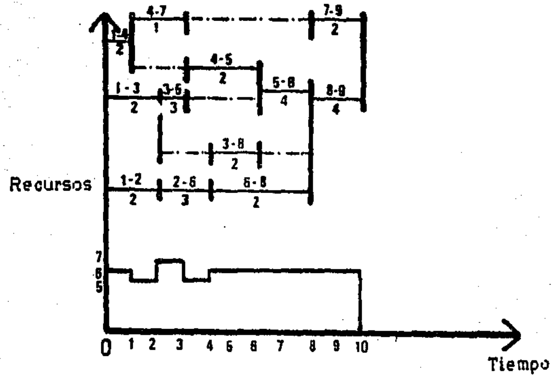


Figura 6.17.

6.8.3 <u>Otras Técnicas de Proyecto:</u>

En su intento por desarrollar técnicas mas sofisticadas, los estudiosos de la materia han creado diferentes versiones, basadas en los mismos principios estudiados, con el objeto de contestar a más preguntas que un usuario pueda realizar y de esta forma proporcionarle las herramientas suficientes que le permitan llevar a cabo una planeación, programación y control adecuados. Entre estos pueden citarse:

1. PERT/LOB.

2. PERT/LOB/Costo.

3. GERT.

El PERT/LOB (balance de línea), pertenece a la generación que de esta técnica se ha desarrollado (PERT/Tiempo, PERT/Costo). Esta ha sido empleada en las actividades de control de produccion. Muchas empresas han empleado al PERT en la fase de desarrollo de grandes proyectos, mientras que el LOB ha sido utilizado en la fase de producción.

El PERT/LOB/Costo, solo requiere la adición de costos estimados para cada una de las actividades que integran una red.

El GERT (Técnica de Revisión y Evaluación Gráfica) es relativamente de reciente creación y es mas un lenguaje de simulación que una técnica de redes. Permite tanto eventos como actividades con ocurrencia probabilística y, en especial, es adecuada para el análisis de redes de simulación.

Las técnicas hasta el momento estudiadas, proporcionan las herramientas básicas suficientes para que el lector pueda realizar el estudio de cada una de las antes indicadas.

REFERENCIAS:

[1] Capítulo 11.
[4]
[6], [50] y [60] Capítulo 6.
[11] Capítulo 13.
[12]
[15] Capítulo 8.
[22] Capítulo 12.
[38]
[44] Capítulo 3.
[78] y [83] Capítulo 5.
[84] Capítulos 1 al 4.

PROBLEMAS:

1. Suponga que desea escribir una tesis. Constr‹,a una red de actividades indicando los tiempos estimados para cada una. Realic‹ una análisis similar al presentado en este tema.

2. Suponga la siguiente lista de actividades:

		Normal		Compresión	
Actividad	Predecesoras	Días	Costo	Días	Costo
A	Ninguna	4	$100	3	$200
B	Ninguna	7	280	5	520
C	Ninguna	3	50	2	100
D	A	5	200	3	360
E	C	2	160	2	160
F	A	10	230	8	350
G	B, D, E	7	200	5	480
H	C	2	100	1	200
		Total	$1320	Total	$2370

a) Construya su red de actividades.
b) Identifique la ruta crítica realizando una evaluación de los tiempos normales de duración. Determine el costo total del proyecto.
c) Suponiendo linealidad en los costos, determine la ruta tiempo mínimo-costo mínimo.
d) Suponga los siguientes costos indirectos por día:

Días	16	15	14	13	12	11
Costo Indirecto	1,600	1,500	1,400	1,300	1,200	1,100

de la ruta a costo mínimo.

3. A continuación se presenta una lista de actividades:

Actividad	Predecesora	Duración*
A	E	5
B	F	4
C	G	8
D	A, B	5
E	Ninguna	5
F	Ninguna	4
G	Ninguna	9

* Días Laborables

a) Construya el diagrama correspondiente.
b) Determine para cada actividad los tiempos tempranos y tardíos de inicio y finalización, determinando las holguras, en cada caso, suponga un tiempo máximo de 20 días de duración en el proyecto. Identifique a la ruta crítica.
c) El administrador del proyecto está preocupado, pues espera que la actividad D se retrace más allá de 12 días de comenzado el proyecto. Discuta brevemente cómo podría determinar que actividades son las más susceptibles a causar tal efecto.
d) Discuta brevemente la exactitud de los tiempos para fines de planeación.

4. El consejo técnico de un prestigiado colegio, ha decidido que los programas para la maestría que se encuentra ofreciendo son demasiado extensos. Ellos han decidido adoptar un plan modular, donde cada persona hace su selección de las materias que desea cursar, sin embargo, existe una serie de prerrequisitos que en algunos casos deben cubrirse para que esto sea posible. Se ha tomado una muestra para realizar un análisis previo del sistema, a continuación se muestran algunas de las actividades, tiempos promedios y prerrequisitos:

Actividad	Descripción	Tiempo Promedio (Módulos)*	Predecesora
1	Contabilidad	3	Ninguna
2	Métodos Cuantitativos	4	Ninguna
3	Economía	4	Ninguna
4	Finanzas	3	1, 3
5	Investigación de Operaciones	2	2
6	Administración	2	4, 5

* Los tiempos promedios estan en una base de 5 semanas.

a) Dibuje la red, y determine la ruta crítica así como su duración esperada. Indique los tiempos tempranos y tardíos de inicio y terminación.

b) Es el tiempo de la ruta crítica una estimación adecuada del tiempo que un estudiante tomaría para terminar el programa de estudios?. Explique.

5. Una compañía produce diferentes tipos de envases de vidrio. En fechas recientes se han reducido las capacidades de varias de sus plantas. El proceso de manufactura requiere de grandes y costosas maquinas (incluyendo hornos), algunas de las cuales fueron desactivadas en la reducción. Los procesos de arranque y paro son difíciles de llevar a cabo. En caso de alguna demanda inesperada, la compañía desea determinar la velocidad en la que podría arrancarse el proceso productivo para una máquina tanto a costos normales como de compresión y la suma que esto representa.

Costo por Reducción Unitaria	Actividad	Tiempo Normal (horas)	de	Tiempo Compresión (horas)	Predecesoras
--	A. Precalentar el vidrio	8		8	C
--	B. Precalentar el horno	12		12	D
$400/hr.	C. Obtener materiales	4		2	Ninguna
$200/hr.	D. Revisar valvulas	4		2	Ninguna
$200/hr.	E. Revisar la presión de los sellos	2		1	B
--	F. Meter el vidrio en el horno	2		2	A, E
$500/hr.	G. Preparar el molde	6		3	E
--	H. Correr prueba piloto	4		4	F, G
$500/hr.	I. Evaluar prueba y realizar ajustes	4		2	H
--	J. Rellenar los hornos con el vidrio	2		2	H

TEMA 7: MODELOS DE INVENTARIO.

Por falta de un clavo se pierde la herradura,
Por falta de la herradura se pierde el caballo,
Por falta del caballo se pierde el jinete.

GEORGE HERBERT

7.1 Introducción

En el primer tema se presentó un ejemplo relativo a los problemas que una empresa tiene que afrentar, en relación a sus niveles de inventario; pues generalmente estos absorben una magnitud considerable en las inversiones de una compañía. Ventas lo ve como un aspecto fundamental para un buen servicio a los clientes, y cree que el departamento de manufactura ha fallado si algún producto no se encuentra disponible cuando se solicita. Finanzas piensa que son un mal necesario, cuyo capital podría haber sido invertido más convenientemente en otra parte. Producción presenta dificultades en la comprensión de los costos asociados con su mantenimiento, y cree que grandes líneas de manufactura representan ahorros significativos. Como puede apreciarse, el problema es que los inventarios son contemplados desde un punto de vista particular más que desde uno general.

Sin duda alguna son recursos ociosos, pero necesarios si se desea dar un servicio eficiente a los clientes o si se busca minimizar costos de producción. Por ejemplo, muchas compañías prefieren estabilizar los niveles de producción ya que los costos asociados con el reclutamiento, capacitación de personal, compensación de desempleo, horas extra, ajustes, etc., pueden resultar más elevados que el mantenimiento de un inventario.

En el presente tema, se pretende remarcar la importancia que poseen los inventarios en la administración óptima de los recursos. Este se ha dividido en dos bloques básicos: uno determinístico y otro probabilístico, con el objeto de que el lector aprecie las diferencias entre ambos enfoques.

7.2 Naturaleza de los Sistemas de Inventario

Uno de los problemas que debe enfrentar el decisor, consiste en establecer un balance de inversión apropiado en el inventario, en comparación con los costos a que tiene que incurrir la compañía. Este plan requiere de decisiones que pueden ser agrupadas de acuerdo a las siguientes categorías:

1. Cuál es el balance deseado entre la inversión en inventarios y servicio al cliente?
   Mientras más bajo sea el nivel de inventario, frente a demandas imprevistas, habrá una tendencia a recibir un mayor número de ordenes de rechazo y de agotamiento de existencias. Un nivel elevado permitirá un mejor servicio.

2. Cuál es el balance deseado entre la inversión en inventarios y los costos asociados con los cambios en los niveles de producción?
   Excesos en la capacidad, horas extra, tiempos muertos, reclutamiento, capacitación, despido y otros costos, serán más elevados si la producción tiene que ajustarse a un patrón irregular de ventas. Los inventarios pueden nivelar las fluctuaciones que se presenten.
3. Cuál es el balance deseado entre la inversión en inventarios y el costo de colocación de ordenes de reposición de inventarios?
   Un nivel reducido de inventarios puede ser conservado mediante un uso frecuente de diferentes tipos de trabajos, sin embargo se incurrirán en costos más frecuentes de ordenes de compra o de arranque en la producción. Cantidades más grandes diminuirán el número de ordenes y por ende estos costos serán menores.

4. Cuál es el balance deseado entre la inversión en inventarios y los costos de transporte?
   Medios de transporte más rapidos serán más costosos, pero aseguraran un servicio más eficáz.

Los inventarios pueden ser clasificados dentro de la siguiente estructura particular:

- Inventarios de Recursos Humanos.

- Inventarios de Recursos Materiales.

Inventarios de Recursos Humanos:

Para ilustrar este tipo de inventarios imagine, por ejemplo, un hospital en el que existe una demanda irregular en el servicio de enfermeras en epocas que han sido catalogadas como críticas (navidad, vacaciones, fines de semana), si se cuenta con una planta de reserva de estas (inventario), podrán atenderse sin mayor problema a los pacientes en aquellas temporadas en las que se reporta un elevado número de accidentes, el no disponer de esta facilidad podría provocar consecuencias graves. Algo similar ocurre en las aerolíneas, cuando debe decidirse con que frecuencia tiene que capacitarse a las azafatas y el número adecuado de estas. Un exceso de capacitación, provocará pérdidas monetarias por resultar innecesario, pero un reducido número, creará problemas si su demanda aumenta.

Inventarios de Recursos Materiales:

Dentro de esta categoría puede establecerse una subclasificación de acuerdo al estado de los materiales:

1. Inventarios de Materias Primas:
   Entre estos pueden citarse el acero, la madera, telas u otros materiales empleados para conformar los componentes de un producto terminado.

2. **Inventarios de Componentes:**
Los cuales están conformados por partes o subensambles listos para ser integrados en un producto final.

3. **Inventarios de Productos en Proceso:**
Están compuestos por productos semiacabados, en cola de espera.

4. **Inventarios de Productos Terminados:**
Son aquellos que están conformados por artículos completamente terminados, ya sea producidos internamente o comprados en el exterior.

Aunque los problemas de inventarios pueden surgir de una amplia variedad de contextos, estos se han avocado más a la administración de los recursos materiales, por ello, el siguiente desarrollo se concentrará dentro de este aspecto.

Los inventarios presentan un comportamiento bastante peculiar a lo largo del tiempo. Piense en una tienda de viveres, en la que el departamento de compras hace el pedido de un producto, una cantidad la almacena en el inventario y la otra la pone en exhibición. Conforme transcurre el tiempo existe una demanda del artículo que hace que se agoten las existencias. Antes de que esto ocurra, se coloca un nuevo pedido que, al surtirse, colocará a la tienda nuevamente en el punto inicial. Advierta que el inventario se comporta de manera cíclica: comienza en un nivel alto y la cantidad se reduce conforme se sacan las unidades, cuando el nivel baja se coloca una orden, que al recibirse eleva su nivel y el ciclo se repite. En la figura 7.1 se muestra un esquema de la propiedad antes indicada.

Puede apreciarse que el volumen de los inventarios se controla con el tiempo y el tamaño de cada orden. Con base en esto, se identifican tres aspectos de suma importancia que un sistema de inventarios debe contestar:

1. Qué cantidad de artículos debe ordenarse?

2. Con qué frecuencia debe realizarse un pedido?

3. Deben mantenerse existencias de seguridad en los inventarios para hacer frente a demandas inesperadas o a otras contingencias?

Cabe aclarar en este punto, que los inventarios pueden ser divididos en dos categorias:

1. Inventarios Determinísticos.

2. Inventarios Probabilísticos.

Los primeros asumen certeza, es decir, la demanda de un producto se conoce, los costos se mantienen constantes, los niveles de producción no se ven afectados por aspectos aleatorios, etc. Los del segundo tipo, dentro del presente tratamiento, serán aquellos que, en la demanda y tiempo de entrega de los productos, incluyen incertidumbre y riesgo para el tomador de decisiones.

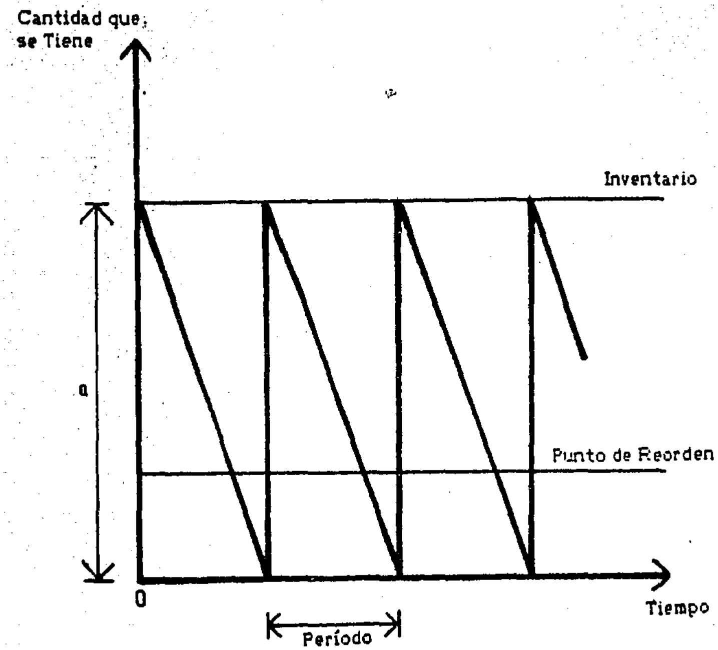


Figura 7.1.

Naturalmente, estos últimos, son más aplicables a situaciones reales que los primeros. Sin embargo, el hecho de concentrar parte de este estudio en los Inventarios Determinísticos, se debe principalmente a que los modelos desarrollados dentro de esta categoría han servido para formular sistemas mas complejos.

Debido a la gran cantidad de sistemas de inventarios, es necesario restringir este desarrollo sobre aquellos denominados como "básicos", necesarios para el estudio de textos más avanzados sobre el tema.

7.3 Características de los Sistemas de Inventario

En un sistema de inventarios existe una serie de factores que deben considerarse, si es que se desea hacer un uso adecuado de los recursos de que se dispone.

7.3.1 Elementos de un Sistema de Inventario:

En el ejemplo de la tienda de víveres, el departamento de compras debe considerar los siguientes puntos, para establecer su política óptima de inventario:

- La demanda existente del producto, para fijar la periodicidad con la que debe abastecerse un cierto número de artículos.
- Los costos de solicitud y mantenimiento del inventario.
- La posibilidad de que una orden no se surta de inmediato, para considerar un tiempo de entrega en cada pedido.

Los aspectos anteriores enmarcan, en general, a todos los elementos que un modelo de inventarios debe poseer, a continuación se desglosa cada uno de ellos:

DEMANDA:

Es el número de artículos que se requieren por período. Advierta que no necesariamente es la cantidad vendida, ya que pueden existir déficits o demoras.

La demanda puede ser considerada como conocida con certeza (determinística) o en forma probabilística, en cuyo caso se asumirá conocida su distribución de probabilidad, si este no es el caso, se tratará de un Inventario con Riesgo, cuyo estudio queda fuera del alcance del tema. La distribución probabilística puede suponerse estacionaria cuando no cambia a lo largo del tiempo o no estacionaria cuando si lo hace.

La demanda puede ser la misma de período en período (estática), o variable a lo largo del tiempo (dinámica). El consumo de bolillos, por ejemplo, se considera como demanda estática, mientras que el consumo de joyas o de perfumes varía a lo largo del tiempo.

La demanda puede satisfacerse instantaneamente al principio de un período (en una tienda) o uniformemente sobre el tiempo (en una fábrica).

La demanda puede ser considerada como dependiente o independiente. Es posible convertir una independiente en dependiente, por ejemplo, un producto tendrá más venta, si se lanza una campaña publicitaria. Los equipos de sonido, son considerados como productos expuestos a una demanda independiente ya que la cantidad exacta que se requiere para un determinado período de tiempo se desconoce, es decir, esta es completamente variable a lo largo del tiempo. Los componentes electrónicos de los equipos están en función de la compra de estos últimos, por lo tanto, se consideran como demanda dependiente. Es importante diferenciar ambos tipos ya que cada uno proporciona cursos de acción diferentes dentro de las políticas de inventario. La independiente, requiere de métodos estadísticos de predicción (tales como series de tiempo) mientras que la dependiente actúa con base en sucesos conocidos (bajo la filosofía de que el futuro sera "muy similar" al pasado). El utilizar incorrectamente los métodos estadísticos en la demanda independiente puede resultar costoso, ya que la existencia de un margen de seguridad es generado para esta, lo cual se traduce en costos.

COSTOS DE INVENTARIOS:

Los inventarios son un beneficio mixto. Un inventario ocasiona costos de adquisición y mantenimiento que pudieron haber sido empleados en otro tipo de inversiones. Sin embargo, proporcionan la ventaja de prestar un servicio más eficiente a la demanda de los clientes. El reto es alcanzar un nivel tal que los costos en los que se incurre sean los más bajos posibles. Los costos siguientes son los que se utilizarán en los modelos de inventario a tratar.

- Costo de Compra:

El valor de un artículo es su precio unitario de compra si se obtiene de un proveedor externo, o su costo unitario de producción si se manufactura internamente. La cantidad invertida en un artículo que se esta produciendo, es una función de su grado de refinamiento, mientras más avance presente el producto más costoso será. El precio unitario de compra puede también variar como una función de los descuentos por cantidad. Por ejemplo, un artículo que cuesta $500 si se adquiere en volúmenes de 50 unidades, puede tener un descuento si se compra en cantidades mayores.

- Costo de Ordenar:

Los costos de ordenar se relacionan con los pedidos que se tienen que hacer para comprar ciertos productos de un vendedor o con la preparación de la producción. Cuando el material es comprado, es necesario llenar ordenes, preparar cheques para pagar al vendedor, recibir el producto, revisarlo y guardarlo en su área de almacenamiento correspondiente. Si un producto es manufacturado internamente, costos de papeleo, de ajuste de máquina, de arranque, horas extra, contratación, entrenamiento y liquidación tienen que ser considerados.

- Costos de Mantenimiento:

Estos incluyen todos los gastos en los que una empresa incurre a causa del inventario. Generalmente los siguientes elementos son los que se incluyen en este tipo de costos:

1. Obsolecencia. Son los costos ocasionados por la disminución en la comercialización de un producto. Generalmente, estos se reflejan en artículos considerados como "de moda", de tecnología y otros similares.

2. Deterioro. Los productos conservados en el inventario pueden dañarse, deteriorarse en su manejo o ser robados, lo cual los convierte en no comercializables (no deben incluirse aquellos productos asegurados).

3. Impuestos. En algunos casos se aplican impuestos sobre los inventarios según la cantidad promedio que se haya tenido almacenada durante el año.

4. Seguro. Debido a que los inventarios se consideran como una inversión expuesta a todo riesgo, puede resultar conveniente asegurar total o parcialmente a las existencias (cuando menos a las más costosas). La protección se basa por lo común en el valor monetario promedio del inventario.

5. Instalaciones de Almacenamiento. Para almacenar cualquier tipo de inventario se requiere de instalaciones especiales, supervisores, montacargas, registros, calefacción, electricidad, etc. Costos en los que no se incurriría si los inventarios no existieran.

6. Capital. La cantidad invertida en un artículo es una parte del capital que no está disponible para otros propositos. Si el dinero se invirtiera en otras cosas, se esperaría una recuperación de la inversión. Se hace un cargo al gasto del inventario para explicar esta recuperación que no se obtiene. El interés que se carga se aplica al precio, este puede obtenerse de las tasas de préstamo de un banco.

- Costo de Oportunidad o de Faltantes:

Si un artículo no está disponible cuando se solicita, se pierde una venta (produciendo con ello desprestigio para la compañía al quedar un cliente insatisfecho), o se incurren en costos extra denominados de emergencia, si se decide llevar a cabo corridas adicionales de producción a un mayor costo para satisfacer la demanda que se presenta.

CICLO DE REORDEN:

El ciclo de reorden es el período de tiempo que separa a dos ordenes sucesivas. Estas pueden ser colocadas como resultado de un proceso contínuo de revisión, donde el estado o nivel del inventario es actualizado continuamente hasta que un cierto punto (el punto de reorden) es alcanzado. En este caso existen dos variantes: una en la que se fija un nivel de pedido constante a solicitar cuando el inventario baja a un punto de reorden establecido (conocido como sitema perpetuo) y otra en la que se fija un período de tiempo constante en la que los pedidos son colocados y cuya magnitud varía dependiendo del nivel de existencias con que se cuente al momento del pedido (conocido como sitema de período fijo).

TIEMPO DE REORDEN:

Es el tiempo que transcurre entre la colocación de un pedido y la recepción del artículo. Este puede ser de tipo determinístico (se conoce con exactitud) o probabilístico. Si el tiempo de reorden es nulo, se tiene el caso especial de entrega instantanea.

TASA DE ABASTECIMIENTO:

Es la tasa en la que un producto esta siendo depositado en el inventario. Si el producto se recibe de una fuente externa, esta será instantánea e igual al 100%. Sin embargo, si el producto es manufacturado internamente, existirá una tasa en la que este siendo generado.

TAMAÑO DEL LOTE:

Es el número de unidades que puede adquirirse para su almacenamiento en el inventario. Este volumen puede ser considerado determinístico o probabilístico.

Los inventarios funcionan mediante la conjugación de los factores antes mencionados. Un manejo adecuado en estos permitirá al usuario tomar decisiones con un mayor grado de aprovechamiento.

7.3.2 Control de Inventarios: El Sistema de Inventario ABC:

El sistema de inventario ABC es un concepto ampliamente utilizado, debido a su utilidad. Se basa en la identificación de aquellos productos que, dado su valor, representa la más alta inversión en el inventario; permitiendo obtener una reducción considerable en el control, al demandar la concentración en un reducido número de artículos, en vez de uno elevado. La idea básica consiste en dividir al inventario en tres partes diferentes:

1. **Artículos tipo A:**
   Son aquellos que poseen un valor elevado y que representan entre un 70 y 80% del valor total del inventario. Por lo regular comprenden entre un 10 y 20% de todos los productos.

2. **Artículos tipo B:**
   Son aquellos que poseen un valor intermedio, entre el 15 y 20% del valor total del inventario. Por lo regular comprenden del 20 al 30% del volumen del inventario.

3. **Artículos tipo C:**
   Son aquellos que poseen un valor bajo, entre el 5 y 10% del valor total del inventario y ascienden a un volumen entre el 50 y 70% de todos los artículos.

Este criterio de clasificación es un tanto "arbitrario"; algunas compañías añaden otro tipo de subdivisones como productos de tipo D, o dentro de cada categoría hace clasificaciones adicionales, como productos AAA, AA y A, dependiendo de su valor. Independientemente del criterio seguido, la estructura en si presenta la misma filosofía.

La figura 7.2 muestra una distribución típica de la categorización ABC de un sistema de inventarios. El eje horizontal representa el porcentaje en términos de los productos en el inventario, mientras que el vertical indica el porcentaje en términos monetarios. Advierta que solo un reducido porcentaje de artículos capta en gran medida el manejo monetario (productos tipo A), otro ocupa una escala intermedia (productos tipo B), mientras que el más elevado representa un reducido volumen de capital (productos tipo C).

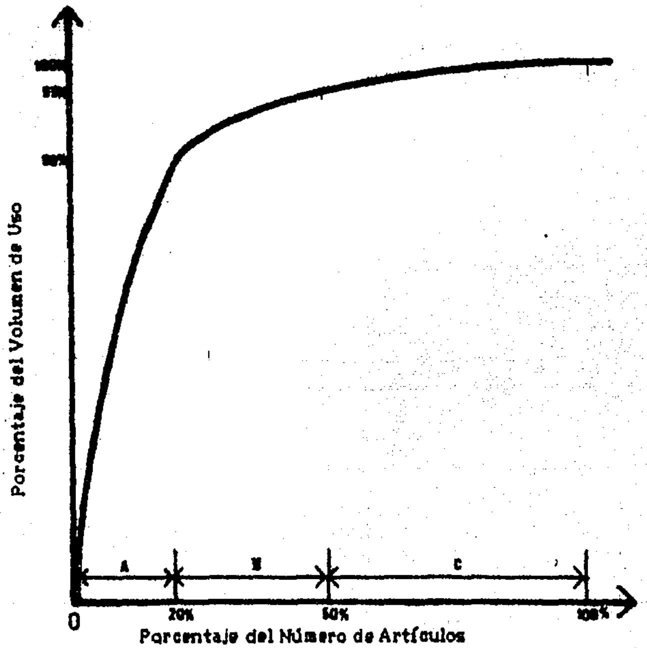


Figura 7.2.

Ejemplo 7.1:

Suponga que en una compañía se utilizan 10 artículos. Para implantar el Sistema de Inventario ABC, se realizara lo siguiente:

Se listará a cada uno de los productos desplegando su volumen de uso y el precio que tienen asociado.

Se multiplicarán ambas cantidades para cada uno de los productos, y se le dara un rango (entre 1 y 10) de acuerdo al valor obtenido (de mayor a menor).

Lo anterior se muestra en el cuadro 7.1.

CUADRO 7.1: Rango Anual de Uso de una Lista de Productos.

Producto:	Número de Unidades utilizadas por A&o:	Costo Unitario: $	Monto Anual	Rango:
F-11	40,000	7	280,000	5
F-20	195,000	11	2,145,000	1
F-31	4,000	10	40,000	9
L-45	100,000	5	500,000	3
L-51	2,000	14	2,800	10
L-16	240,000	7	1,680,000	2
L-17	16,000	8	128,000	6
N-18	80,000	6	480,000	4
N-91	10,000	7	70,000	7
N-99	5,000	9	45,000	8

Se listarán los productos de acuerdo al rango asignado, col cando en primer término a los de mayor valor, y se a&adirá una columna correspondiente al porcentaje acumulativo de acuerdo al volumen monetario antes obtenido.

Se considerará, "arbitrariamente", como productos del tipo A aquellos que representen el 71% de la inversión, del tipo B aquellos que c p n proximadamente el 23% y los restantes como del tipo C. Lo anterior se muestra en el cuadro 7.2.

CUADRO 7.2: Clasificación ABC.

Producto:	Monto Anual $	Monto Anual Acumulativo $	Porcentaje Acumulativo:	Clase:
F-20	2,145,000	2,145,000	39.8	A
L-16	1,680,000	3,825,000	71.0	A
L-45	500,000	4,325,000	80.2	B
N-18	480,000	4,805,000	89.3	B
F-11	280,000	5,085,000	94.4	B
L-17	128,000	5,213,000	96.7	C
N-91	70,000	5,283,000	97.9	C
N-99	45,000	5,328,000	98.9	C
F-31	40,000	5,368,000	99.6	C
L-51	2,800	5,396,000	100.0	C

Esta información puede ser condensada como se muestra en el cuadro 7.3. La compa&ía debe enfocar su máxima atención sobre los productos que hayan sido catalogados como del tipo A (los cuales representan un 20% del total), obteniendo con ello una reducción substancial en el manejo de inventario.

CUADRO 7.3: Resumen ABC.

Clasificación:	%de los Productos:	Uso Anual por Grupo	% del $:
A = F-20, L-16	20	$3,825,000	71.0
B = L-45, N-18, F-11	30	$1,260,000	23.4
C = Todos los demas	50	$ 311,000	5.6

Existen do~ principios básicos de acuerdo a la conceptualización del esquema ABC:

1. Tener suficientes artículos de un bajo valor; para que esten a disposición cuando se necesiten.

2. Concentrar el esfuerzo ganado en la reducción del inventario de valor elevado.

En el Sistema de Inventario ABC las siguientes recomendaciones pueden seguirse:

Grado de Control en el Inventario ABC:

1. Para los productos del tipo A, deberá concentrarse l máximo control posible, tal que incluya los registros más exactos, un nivel de supervisión estricto, llenado periodico de las ordenes de pedido, etc.

2. Para los productos del tipo B, se requerirá un control normal que involucre una atención regular y el manejo de formas de registros.

3. Para los productos del tipo C, podrán usarse los niveles de control más simples, tales como revisión visual periodica del inventario físico, llenado de registros bastante simples, una gran cantidad de inventario para responder a demandas imprevistas, etc.

Registros en el Inventario ABC:

1. Los productos del tipo requerirán los más completos, exactos y detallados registros con actualizaciones constantes. Un control estricto de las transacciones en lo que respecta a manejo de facturas y otro tipo de documentos, puede ser de gran ayuda.

2. Para los productos del tipo B, solo se necesitarán registros manuales con actualizaciones periodicas.

3. Para los productos del tipo C, podrán llevarse los registros más simples (elaborados por el personal).

Prioridad en los Inventarios ABC:

1. Para los productos del tipo A, deberá ser la más estricta, para reducir los tiempos de entrega y los niveles de inventario.

2. Para los productos del tipo B, se requerirá un tratamiento normal y solo debe dárseles una prioridad considerable cuando se presenten situaciones críticas.

3. Para los productos del tipo C, podrá dársele la más baja prioridad.

En general, este tipo de sistema es recomendable cuando se maneja un volumen elevado de unidades. Hay que tener en cuenta que para llevar un inventario, es necesario identificar por su valor a cada uno de los artículos que lo componen, una variedad considerable puede presentar problemas de manejo y control, en cuyo caso resulta conveniente agruparlos bajo la clasificación ABC antes indicada.

7.3.3 Objetivos de un Sistema de Inventario:

La naturaleza de los problemas involucrados con los inventarios, ocasiona que merezcan especial atención, en particular, diversos objetivos tienen que ser alcanzados para que se logre equilibrar la situación conflictiva de una empresa, entre estos pueden mencionarse los siguientes (considerados como básicos):

1. Minimizar la inversión en el inventario.

2. Minimizar los costos de mantenimiento.

3. Minimizar las pérdidas por daños, obsolecencia o artículos perecederos.

4. Mantener un inventario suficiente para que la producción no carezca de la materia prima, partes y suministros.

5. Mantener un transporte eficiente de los inventarios, incluyendo las funciones de despacho y recibo.

6. Mantener un sistema eficiente de información del inventario.

7. Proporcionar informes sobre el valor del inventario al departamento de contabilidad.

8. Realizar compras de manera que se puedan lograr adquisiciones económicas y eficientes.

9. Realizar pronósticos sobre futuras necesidades del inventario.

Desafortunadamente en los modelos tan sencillos a estudiar -y aún en los más complejos-, el logro de todas las metas en forma uniforme es practicamente imposible. Sin embargo, es necesario determinar un punto de equilibrio entre las diversas pérdidas en que se incurre para que así se llegue al óptimo.

No hay que olvidar que un modelo es una abstracción de la realidad y que depende del decisor, hacer el mejor uso de la alternativa recomendada como óptima por alguna técnica en particular.

7.4 Modelos Determinísticos de Inventario

Como pudo apreciarse en el subtema anterior, los costos asociados a los inventarios siguen dos patrones: costos que varían directa e inversamente con el volumen de la orden, es decir, mientras las ordenes o pedidos sean más elevados, tenderá a existir una mayor cantidad de artículos en el inventario, provovando que los costos relativos a su mantenimiento aumenten, sin embargo, existirá un período de reorden menos frecuente, ocasionando que los costos de colocar un pedido bajen. Si se hacen más pedidos, existirá un movimiento más intenso en papeleo, ajustes, recepción, revisión, almacenamiento, etc., pero los costos de inventario serán más reducidos porque los volúmenes de pedido tendrán que ser peque&os. Así, si se quiere cuantificar el efecto total de llevar un inventario, habra que sumar tanto los costos que representa mantenerlo como aquellos en los que se incurre por solicitarlo. En la figura 7.3 se muestran los comportamientos de los costos antes indicados.

En el presente subtema, se estudiaran los modelos de inventario catalogados como determinísticos, ya que asumen completa certeza en la ocurrencia de los parámetros que los componen. Se deducirán dos modelos básicos, con ciertas variantes, denominados:

1. Modelo del Lote Económico (EOQ).

2. Modelo de Período Fijo de Reorden (EOI).

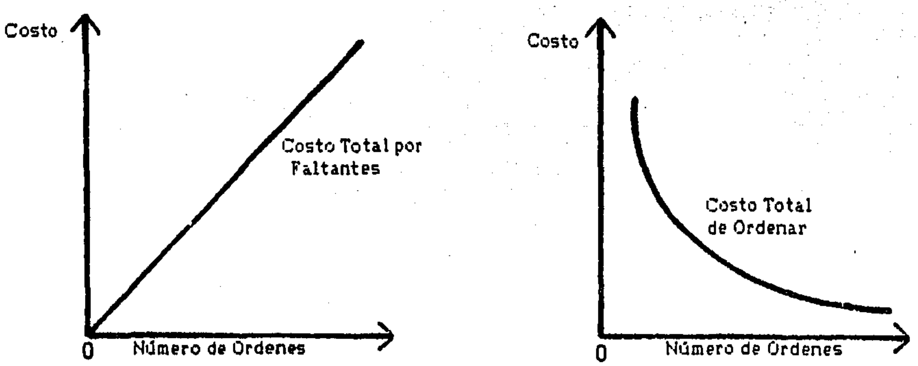


Figura 7.3.

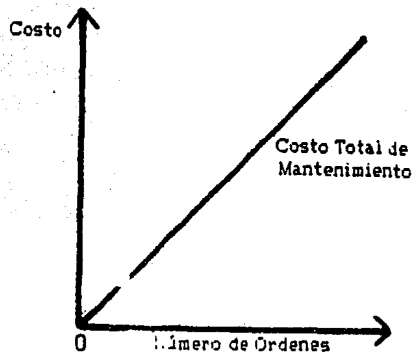


Figura 7.3 (Cont.).

7.4.1 Modelo del Lote Económico (EOQ):

Ejemplo 7.2:

El Sanatorio "San Felipe" realiza sus pedidos a diferentes distribuidores. Las cantidades que se ordenan de cada producto, han sido determinadas en forma empírica. El cuadro 7.4 muestra la actual política de compra para una muestra aleatoria de productos del sanatorio.

El administrador ha leído artículos relativos al control de los inventarios, que indican que los costos unitarios de mantenimiento oscilan entre un 15 y 30% del precio del producto, debido principalmente a los costos de oportunidad.

Una investigación para determinar los costos de transacción presentó algunas dificultades, pues indicó que la mayor parte de estos eran debidos a los salarios, pero su asignación entre las múltiples funciones realizadas por el personal era a los más una suposición. Los costos de transacción se estimaron entre $100 y $1,000 por orden.

CUADRO 7.4: Política de Inventario para el Sanatorio "San Felipe".

Productos	Cantidad Ordenada Actualmente:	Demanda Anual:	Precios	Volumen Anual:
A	500	1000	300	300,000
B	30	360	50	18,000
C	72	432	500	216,000
D	10,000	5000	4.2	21,000
E	600	1800	30	54,000
			TOTAL	$609,900

El problema consiste en determinar si la política de inventario que actualmente lleva el sanatorio es la más adecuada.

El estudio se concentrará en el producto A, y el desarrollo se inferira para el resto. Por ser una cantidad relativamente pequeña de artículos, no se aplicará el Sistema de Inventarios ABC expuesto en el subtema anterior.

Como se mencionó anteriormente, un modelo de inventario busca responder a dos preguntas básicas: cuánto y cuándo ordenar?. Para conseguirlo, el modelo EOQ, se basa en la aplicación de las siguientes expresiones matemáticas:

$$Q = \sqrt{\frac{(2)(D)(C_O)}{C_M}} \qquad \ldots(1)$$

$$\text{Número de Pedidos al Año} = \frac{D}{Q} \qquad \ldots(2)$$

$$\text{Punto de Reorden} = \frac{(D)(L)}{365 \text{ o año comercial}} \qquad \ldots(3)$$

$$\text{Costo Anual de Ordenar} = \frac{D}{Q}(C_O) \qquad \ldots(4)$$

$$\text{Costo Anual de Mantenimiento} = \frac{Q}{2}(C_M) \qquad \ldots(5)$$

$$CTI = \text{Costo Anual de Ordenar} + \text{Costo Anual de Mantenimiento} \qquad \ldots(6)$$

donde:

Q es el tamaño del lote económico óptimo.
C_O es el costo de colocar una orden.
C_M es el costo anual de mantener una unidad en el inventario.
D es la demanda anual de un artículo.
L es el tiempo en que tarda en surtirse una orden después de haber colocado el pedido.
CTI es el costo total de inventario, sin incluir el precio de compra de los artículos.

La expresión (6) es la función objetivo del modelo, observe que contiene los costos involucrados con todo inventario. La formula dada por (1) es la que la minimiza, y se conoce como tamaño del lote económico óptimo.

Este modelo lleva implícito los siguientes supuestos básicos:

1. La demanda es uniforme (constante y contínua).

2. El pedido se recibe todo junto, no en partes (global).

3. El tiempo de entrega es constante.

4. Todos los costos son constantes y conocidos.

Aunque estas suposiciones rara vez son ciertas, a la larga, con frecuencia son aproximaciones bastante razonables de la realidad en un período de tiempo relativamente corto. Advierta que los esquemas relativos a la demanda, abastecimiento e inventario para el producto A, son idénticos a los mostrados en la figura 7.4. Observe que:

- La demanda anual denotada por D (y que puede estar dada en otras unidades de tiempo: diaria, semanal, mensual, trimestral, etc.), es constante a lo largo del tiempo.

- La cantidad que se ordena (Q) se recibe en forma global, es decir, para el producto A, bajo la política actual, cada abastecimiento es por 500 unidades.

- El inventario se comporta en forma cíclica: se recibe un pedido (alcanzándose un nivel máximo representado por la línea vertical), conforme transcurre el tiempo y dado que la demanda es constante el nivel comienza a descender uniformemente hasta alcanzar un punto mínimo de cero unidades en inventario, que es cuando se recibe otro pedido iniciándose de nueva cuenta un ciclo.

- Dado que el tiempo de entrega es constante, no existen faltantes.

- Debido a que el costo de compra es también constante, es decir, no existen (por el momento) descuentos por la adquisición de productos, este puede ser eliminado para fines prácticos, sin embargo, una vez que se haya determinado un costo mínimo óptimo, habrá que incluirlo.

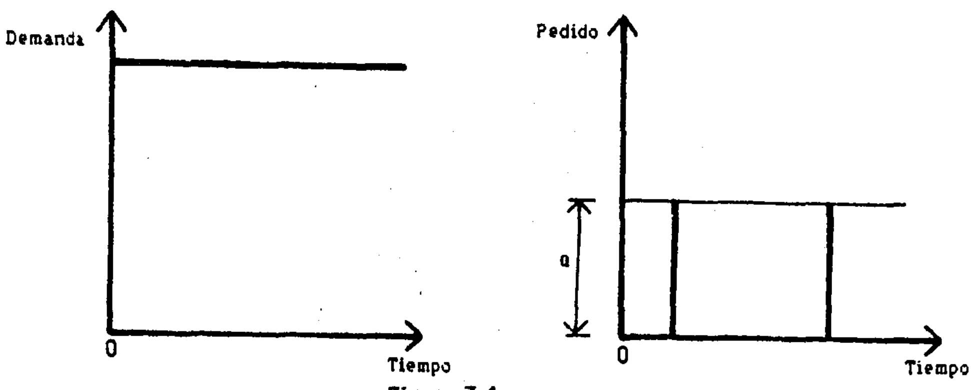


Figura 7.4.

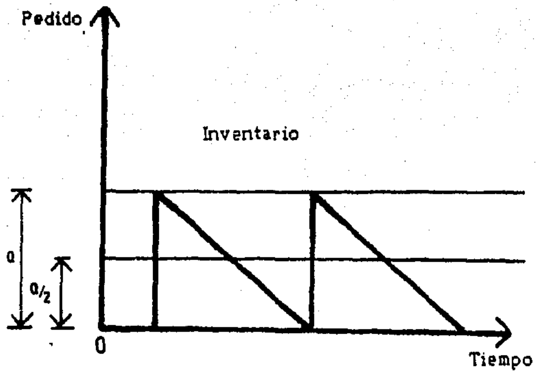


Figura 7.4 (Cont.).

En este problema se manejan costos estimados, por lo que resulta necesario fijarlos. Por ejemplo, dado que los costos de mantenimiento oscilan entre el 15 y 30%, se seleccionará "arbitrariamente" uno equivalente al 20% del precio del producto (esto puede llevarse a cabo con base en experiencias anteriores). Suponga que costo por orden varía de acuerdo al producto solicitado como se muestra en el cuadro 7.5:

CUADRO 7.5: Costos de Colocación de Ordenes.

Producto:	Costo por Orden:
A	500
B	100
C	700
D	100
E	350

A partir de lo anterior es posible fijar los siguientes parámetros, para el producto A:

$D = 1,000$
$C_o = 500$
$C_M = (0.2)(300) = 60$

Sustituyendo esta información en (1), se deduce que la cantidad óptima a solicitar en cada pedido es:

$$Q = \sqrt{\frac{(2)(1,000)(500)}{60}} = 129 \text{ unidades}$$

que difiere considerablemente de las 500 que actualmente se están requiriendo.

De acuerdo a la política óptima, el número de pedidos anuales es 7.75 (1,000/129 = 7.75), que deberán colocarse aproximadamente cada 47 días (365/7.75 = 47), suponiendo un a&o comercial de 365 días, y un período de reposición instantáneo. Dado que en la vida real esto último ra a vez ocurre, es necesario fijar un punto de reorden para cada uno de los productos.

Suponiendo un tiempo de entrega de 7 días, se tendrá que cuando se reporten aproximadamente 19 unidades ((1,000)(7)/365 = 19) en existencia del producto A, será necesario colocar un pedido por 129 adicionales. Cabe aclarar que en este modelo de inventario, la cantidad a ord-nar siempre es fija, sin embargo, el lapso entre pedidos puede se- variable.

El costo total de inventario se obtiene empleando la expresión (6):

Para pedidos de 500 unidades:

$$CTI = \frac{(500)(1,000)}{500} + \frac{(60)(500)}{2} = \$16,000$$

Para pedidos de 129 unidades:

$$CTI = \frac{(500)(1,000)}{129} + \frac{(60)(129)}{2} = \$7,746$$

es decir, actualmente el sanatorio esta perdiendo $8254 anuales (16,000 - 7746 = 8254), en la línea de productos A por no ejercer un adecuado control en su inventario.

El cuadro 7.6 resume los costos asociados a la política actual de inventario que sigue el sanatorio.

CUADRO 7.6: Costos de Inventario de la Política Actual. *

Producto:	Costo de Mantenimiento:	Costo de Ordenar:	Costo Total:	Punto de Reorden:	Número de Pedidos al a&o:
A	15,000	1,000	16,000	19	2
B	150	1,200	1,350	7	12
C	3,600	4,200	7,800	8	6
D	4,200	50	4,250	96	.5
E	1,800	1,050	2,850	35	3
		COSTO TOTAL:	$32,250		

* No incluye el costo de adquisición de los productos.

De igual forma, en el cuadro 7.7 se muestra la información correspondiente a la politica optima de inventario, suponiendo un tiempo de entrega de una semana (7 dias) para cada producto.

CUADRO 7.7: Política Optima de Inventario para el Sanatorio San Felipe. *

Producto:	Tama&o del Lote Optimo:	Costo de Manteni-miento:	Costo de Ordenar:	Costo Total Anual:	Punto de Reorden:	Número de Pedidos al A&o:
A	129	3,870	3,870	7,740 **	19	7.75
B	85	424.26	424.26	848.52	7	4.24
C	78	3,888.44	3,888.44	7,776.88	8	5.55
D	1,091	458.25	458.25	916.51	96	4.58
E	458	1,374.77	1,374.77	2,749.54	35	3.93
			COSTO TOTAL:	$20,031.45		

* No incluye el costo de adquisición de los productos.
** La diferencia con respecto al cálculo realizado anteriormente, radica en el redondeo, que para fines practicos se hizo.

El número de ordenes que deben colocarse bajo la política actual es 23.5 en total (2 + 12 + 6 + .5 + 3 = 23.5), mientras que la óptima crece a 26.05 (7.75 + 4.24 + 5.55 + 4.58 + 3.93 = 26.05).

Suponga que recientemente se implantó por parte de los distribuidores, la política de vender los productos en pedidos no menores a 100 unidades y redondeados a decenas. Lo anterior ocasiona una variación en las cantidades sugeridas por el modelo, al tener que ser aproximadas a la decena más cercana como se muestra en el cuadro 7.8.

CUADRO 7.8: Política "Optima" de Pedido del Sanatorio "San Felipe".

Producto:	Tama&o del Pedido:	No. de Pedidos:	Costo Total:
A	130	7.69	7,746
B	100	3.6	860
C	100	4.32	8,024
D	1,090	4.58	916
E	460	3.9	2,745
		COSTO TOTAL:	$20,291

Observe que tal modificación presenta un costo mayor, pero en cambio posee una política de pedido acorde a la restricción establecida. El número de pedidos se decrementó a 24 por a&o.

El Costo Tota' del Inventario no contempla el de la compra del artículo correspondiente. En el cuadro 7.9 se muestra en forma comparativa los costos bajo ambas políticas, ya incluidos los costos relativos a los productos.

CUADRO 7.9: Costos Totales de Ambas Políticas de Inventario.

Producto:	Costo Total bajo la Política Anterior:	Costo Total bajo la Política Sugerida:
A	316,000	307,746
B	19,350	18,860
C	223,800	224,024
D	24,250	21,916
E	56,850	56,745
COSTO TOTAL:	$640,250	$629,291

La nueva política proporciona un ahorro efectivo de $10,959 anuales en una muestra de tan solo 5, de los múltiples productos que se manejan en el sanatorio. Por lo tanto, resulta aparente la conveniencia de implantar un plan de inventario que tenga como finalidad controlar los pedidos tanto en cantidad como en periodicidad.

En la figura 7.5 se muestra la gráfica asociada con los costos de mantenimiento, orden y total correspondientes al producto A. Advierta que la curva del costo total es bastante suave, la cual es una de las propiedades más importantes del EOQ; variaciones "severas" producirán un efecto reducido en el número de ordenes que se soliciten. Si llegara a incurrirse en algún error de estimación en los costos, la política sugerida no estará muy distante de la correcta. Por ejemplo, suponga que la tasa de mantenimiento correcta fué del 30% y no del 20 como originalmente se consideró, aun más el costo de transacción por orden cambio a $800. Con estos nuevos parámetros, la magnitud del lote económico es:

Q = 133 unidades del producto A

como podrá advertirse una vez que se hace el redondeo se obtiene la misma cantidad indicada bajo la política óptima anterior. Esto comprueba la insensibilidad del modelo frente a cambios drásticos, la cual es una de las ventajas que lo hacen una herramienta poderosa a emplear con bastante exito.

Suponga ahora que la demanda anual del producto A se incrementa en un 100%, es decir a 2,000 unidades. Ante tal cambio, el tam-ño del lote económico es:

Q = 183 unidades del producto A

es decir, mientras que la demanda se incrementa en un 100%, el inventario solo lo hace en un 41%. Como el nivel del inventario promedio es la mitad del EOQ, esto significa que no tiene que duplicarse para satisfacer una doble demanda, sin embargo, tiene que incrementarse a un cierto nivel (41%), al igual que el número de

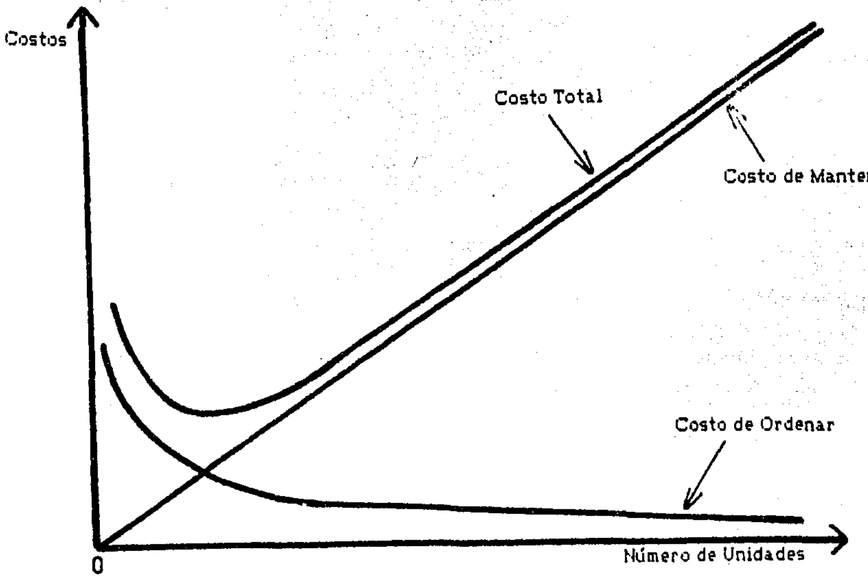


Figura 7.5.

pedidos al año (41%), tal que se establezca un balance apropiado a un mínimo costo. Lo anterior corrobora aun más las ventajas del balance en los inventarios.

Cabe aclarar que dada la sencillez de las fórmulas de cálculo, se ha optado por omitir la consulta del lector al paquete de computación correspondiente, no obstante, se hace la recomendación en este punto.

7.4.2 <u>Casos Especiales del EOQ:</u>

El EOQ puede presentar diversas variaciones que lo convierten en un modelo más aplicable a la realidad, entre estas, pueden citarse las siguientes:

- EOQ con Reabastecimiento Uniforme.

- EOQ con Faltantes.

- EOQ con Descuentos.

a continuación se procederá a explicar el funcionamiento de cada uno de los modelos antes indicados.

EOQ con Reabastecimiento Uniforme:

Ejemplo 7.3:

Suponga que el Sanatorio San Felipe ha decidido manufacturar internamente el producto A, ya que posee un laboratorio que le permite hacerlo (para lo cual ha conseguido los permisos pertinentes). Como consecuencia, el inventario de productos terminados no será abastecido globalmente.

Algo semejante ocurre con empresas que manufacturan los productos en forma interna: los bienes llegan uno a uno conforme salen de la línea de producción a una tasa de reabastecimiento igual a R (la cual se supondrá uniforme en el tiempo), es necesario que esta sea superior a la demanda, de ocurrir lo contrario, se tendrá que recurrir al mercado externo para adquirir las unidades faltantes, de otra forma no existirá inventario.

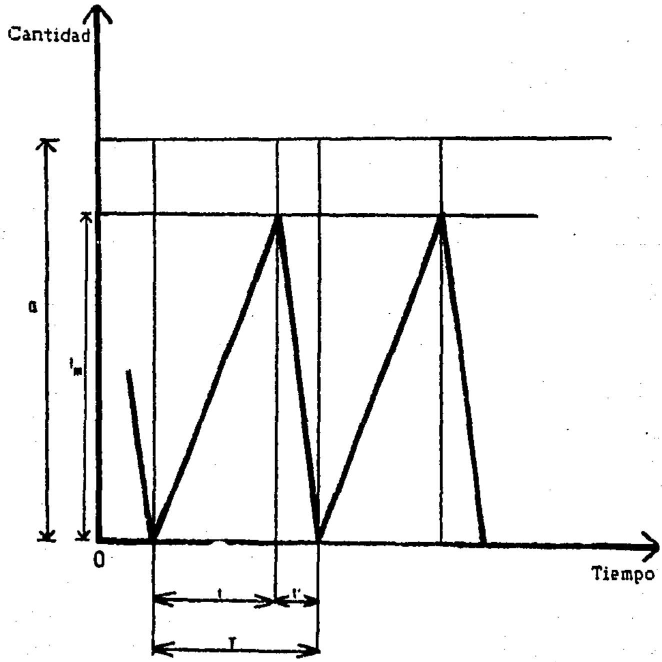


Figura 7.6.

Durante el período de reabastecimiento el inventario crece a una tasa igual a la diferencia entre la oferta y la demanda. De esta forma se incrementa paulatinamente hasta alcanzar un nivel máximo después de un tiempo t. Una vez que el inventario alcanza el nivel económico máximo, es necesario parar la línea de producción, ya que de otra forma se corre el riesg de que crezca más de lo apropiado. Durante los períodos entre reabastecimientos, el inventario decrece en una tasa de D unidades. La figura 7.6 muestra graficamente el comportamiento cíclico de esta clase de inventarios.

El problema nuevamente consistirá en determinar el tama&o óptimo del pedido (Q). Para ello se utilizan las expresiones siguientes:

$$Q = \sqrt{\frac{(2)(D)(C_o)}{(1 - D/R)(C_m)}} \qquad \ldots(7)$$

$$\text{Número de Corridas Anuales de Producción} = \frac{D}{Q} \qquad \ldots(8)$$

$$\text{Punto de Reorden} = \frac{(D)(L)}{\text{365 o a\&o comercial}} \qquad \ldots(9)$$

$$t = \frac{Q}{R} \qquad \ldots(10)$$

$$T = \frac{Q}{D} \qquad \ldots(11)$$

$$\text{Inventario Máximo} = (t)(R - D) \qquad \ldots(12)$$

$$\text{Costo Anual de Ordenar} = \frac{D}{Q}(C_o) \qquad \ldots(13)$$

$$\text{Costo Anual de Mantenimiento} = \frac{(1 - D/R)(Q)}{2}(C_m) \qquad \ldots(14)$$

$$CTI = \text{Costo Anual de Ordenar} + \text{Costo Anual de Mantenimiento} \qquad \ldots(15)$$

donde:

R es la tasa anual de reabastecimiento.
L es el tiempo que tarda en comenzar el proceso productivo de un artículo.
t es el período que dura el reabastecimiento.

T es el perÍodo para colocar una orden (el que tarda en agotarse el inventario).
Los demás elementos reciben la misma interpretación indicada para el EOQ.

Advierta que la expresión (7), en comparación con la obtenida para el modelo anterior, solo difiere en un factor: (1 - D/R), el cual posee una interesante interpretación en terminos de producción: tomando en cuenta que D representa la demanda y R el abastecimiento anuales, puede apreciarse que D/R es el porcentaje que decrece el inventario por unidad en producción. Dicha expresión está asociada a la tasa de agotamiento relativa en el inventario, si esta es superior a la unidad, significará insuficiencia y por ende un inventario nulo (o negativo), si es inferior indicará que la oferta es lo suficientemente buena para amparar a toda la demanda que se presente en un a&o, si es igual a uno se tendrá el caso en el que la producción del bien no debe detenerse. De esta forma (1 - D/R) corresponderá a la tasa de crecimiento relativa bajo la cual el inventario tiende a acumularse. Si D/R fuera igual a cero (es decir la producción es infinitamente grande) el inventario se acumularía instantaneamente a la magnitud Q, pero debido a que esto no ocurre, tal crecimiento, queda en función de la tasa de crecimiento relativa.

Suponga que la tasa de reabastecimiento del producto A (de acuerdo a los insumos de que dispone el sanatorio) ha sido estimada en 1,300 unidades al a&o. Con base en los parámetros proporcionados en el problema del sanatorio se tendrá que:

$D = 1{,}000$
$R = 1{,}300$
$C_O = 500$
$C_H = 60$

Es importante que R y D esten dados en las mismas unidades de tiempo. Sustituyendo la información en (7) se obtiene:

Q = 269 unidades del producto A

Lo anterior quiere decir que cada vez que se dé la instrucción de empezar a manufacturar el producto A, esta debe ser por 269 unidades. El número de ordenes al a&o es 3.71 (1,000/269), y serán colocadas cada 98 días (365/3.71). El punto de reorden, considerando una semana en la política de anticipación fijada por el sanatorio (ya sea para comprar los componentes necesarios, o para calendarizar sus actividades de una manera más planeada), es cuando el inventario descienda a 19 unidades (no cambia), esto se debe a que la expresión empleada está únicamente en función de la demanda y del tiempo de espera (o de programación en este caso).

El inventario máximo que puede alcanzarse será de 62 unidades (este se obtuvo, empleando (12)).

El costo total es:

CTI = $3,724.6

comparando estos resultados con los obtenidos en el modelo anterior, pueden apreciarse dos cosas:

- El tamaño del lote aumento de 129 a 269 unidades.

- El costo total del inventario disminuyó de $7,746 a $3,724.6.

Tales cambios se deben al consumo que experimentan las unidades durante el período de reabastecimiento, ya que el modelo incrementa la cantidad requerida para que la demanda pueda ser solventada, asimismo, ocasiona que los costos de inventario se reduzcan a consecuencia de la distribución inmediata de los bienes.

Para determinar el costo total verdadero, habra que sumarle al anterior el asociado a la manufactura del producto, que se supondra asciende a $250 por unidad. Así:

Costo Total Veradero Anual = $253,724.6

EOQ con Faltantes:

Existen circunstancias en las que la entrega del producto no tiene que ser instantánea (por supuesto que en los hospitales esto no debe ocurrir ya que podría acarrear consecuencias trágicas!), por ejemplo, cuando en una tienda se adquiere un comedor, en general, este no se entrega de inmediato, sino después de un cierto período, comunmente los clientes aceptan tal pacto. Ante tal instancia el inventario puede ser reducido en unas cuantas unidades, pero naturalmente a un costo definido como costo por faltantes (C_F). Este existe, ya que al fin de cuentas la empresa tendrá que recurrir a algún medio (costos de apresuramiento) para cubrir la demanda que se le presente, si es que no quiere perder prestigio.

La función objetivo estará compuesta por los costos de mantenimiento y orden, pero además contará con los asociados a los faltantes. En la figura 7.7, puede apreciarse el comportamiento cíclico de este tipo de inventario. Observe que F representa la cantidad faltante permitida en cada período. El modelo se auxilia de las siguiente expresiones matemáticas:

$$Q = \sqrt{\frac{(2)(C_O)(D)(C_M + C_F)}{(C_M)(C_F)}} \qquad \ldots(16)$$

$$F = \sqrt{\frac{(2)(C_O)(D)(C_M)}{(C_M + C_F)(C_F)}} \qquad \ldots(17)$$

$$\text{Número de Pedidos al Año} = \frac{D}{Q} \qquad \ldots(18)$$

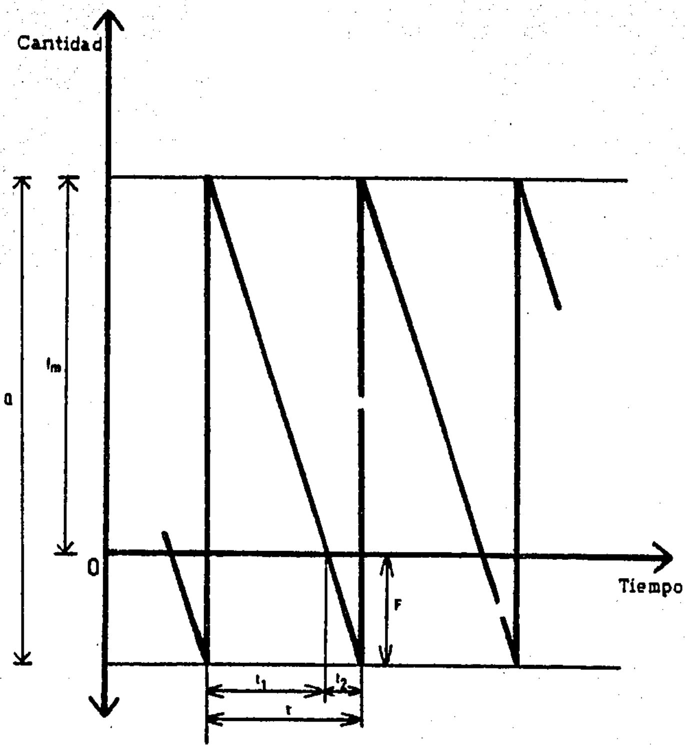


Figura 7.7.

$$\text{Punto de Reorden} = \frac{(D)(L)}{365 \text{ o año comercial}} \qquad \ldots(19)$$

$$t_1 = \frac{(Q - F)}{D} \qquad \ldots(20)$$

$$t_2 = \frac{F}{D} \qquad \ldots(21)$$

$$\text{Inventario Máximo} = Q - F \qquad \ldots(22)$$

$$\text{Costo Anual de Ordenar} = \frac{D}{Q}(C_o) \qquad \ldots(23)$$

$$\text{Costo Anual de Mantenimiento} = \frac{(Q - F)^2}{(2)(Q)} (C_M) \qquad \ldots(24)$$

$$\text{Costo Anual por Faltantes} = \frac{F^2}{(2)(Q)} (C_F) \qquad \ldots(25)$$

$$CTI = \text{Costo Anual de Ordenar} + \text{Costo Anual de Mantenimiento} + \text{Costo por Faltantes} \qquad \ldots(26)$$

donde:

C_F es el costo por unidad faltante.
F es el número óptimo de faltantes.
L es el tiempo en que tarda en surtirse un pedido.
t_1 es el tiempo que tarda en agotarse el inventario.
t_2 es el tiempo en el que el cliente está dispuesto a esperar la entrega de su producto.
Los demás elementos reciben las mismas interpretaciones a las ya indicadas en los modelos anteriores.

Cabe aclarar que la expresión que representa el costo total, no incluye los costos asociados a la compra del producto. Por lo tanto, una vez que este sea obtenido, será necesario agregarle el costo anual (ya sea de producción o de compra del bien), para así obtener el costo total verdadero del inventario.

Ejemplo 7.4:

El departamento de refacciones de una nueva distribuidora, almacena en general solo 2 o 3% de las refacciones disponibles. La mayoría de los clientes entienden esto y no les importa esperar las partes de ordenes especiales. Suponga que un distribuidor almacena un tipo particular de chapa de puertas. La chapa cuesta $500. El distribuidor vende 100 cada año, ya que se usan en varios modelos. El costo normal de ordenar es $40. Si un cliente pide una chapa cuando no se tiene en almacen, se incurre en un costo de faltante de $100 por unidad. Si el costo de mantenimiento es $200 por unidad por año, cuál es la cantidad óptima de reorden?, cuál es el nivel máximo de inventario?, cuál es el número de faltantes permitido? y cuál el costo total anual verdadero del inventario?.

Con base en lo anterior puede apreciarse que:

D = 100 unidades al año
C_O = 40 por orden
C_F = 100 por unidad
C_M = 200 por unidad por año

sustituyendo la información anterior en (16) se obtiene:

Q = 11 chapas

esto indica que el distribuidor debe solicitar en cada pedido 11 chapas para satisfacer su demanda.

Con base en (17):

F = 7 chapas

es decir, 7 compras se quedarán sin surtir de inmediato. De (22) se obtiene que el inventario máximo es 4 chapas.

El costo total mínimo es:

CTI = \$731.81

(el cual se obtuvo empleando la expresión (26)), para derivar el costo total verdadero anual, solo bastará sumarle el costo anual de compra de las unidades que es \$50,000 ((500)(100) = 50,000). Por lo tanto:

Costo Total Verdadero Anual = 50,000 + 731.81 = \$50,731.81

Información adicional de interés puede ser calculada con base en las expresiones ya conocidas. Por ejemplo:

- El período de reabastecimiento es de 41 días aproximadamente ((365)(Q)/(D) = (365)(11)/100 = 41).

- El período de tiempo en el que los productos van a agotarse es:

  t_1 = 15 días

- El período de tiempo que los clientes están dispuestos a esperar sus bienes es:

  t_2 = 26 días

EOQ con Descuentos:

En múltiples ocasiones es posible obtener descuentos por parte de los proveedores cuando se adquiere un volumen determinado de productos. Inclusive los descuentos pueden ser múltiples si se consideran diversos tama&os. En la producción, ocurre lo mismo si se piensa que un mayor aprovechamiento de los recursos puede ser más económico (claro, hasta cierto nivel). Ante tal instancia, es necesario que el investigador tenga en cuenta las consideraciones siguientes:

- Mientras mas unidades se soliciten podrá obtenerse un mejor descuento.

- Un pedido de mayor volumen disminuye el número de ordenes a realizar en un a&o, incurriendo por ello en costos menores.

- Un mayor volumen de inventario acarrea costos de mantenimiento mayores.

Para tomar la decisión de aceptar o no un descuento (es decir, colocar ordenes "grandes"), el investigador podrá evaluar el impacto en costos para cada opción de la siguiente manera:

1. Comience con el último descuento. Es decir, haga k = n.

2. Calcule el EOQ con base en el último descuento. Tenga en cuenta, dada la existencia de descuentos, que la expresión a utilizar es:

$$Q_k = \sqrt{\frac{(2)(C_o)(D)}{(PC)(C_M)}}$$

   donde:
   - PC es el precio de compra (con el descuento)
   - C_M es el costo de mantenimiento en forma porcentual.
   - Q_k es el tamaño del lote para el k-ésimo descuento.

3. Si Q_k es admisible para el precio de descuento (es decir, se encuentra en el rango del volumen para el que se aplica el descuento), vaya al paso 6.

4. Si es inadmisible, considere el EOQ igual al límite inferior del actual descuento, y calcule el costo total de inventario, tal que incluya el precio de adquisición de los productos.

5. Seleccione el siguiente descuento y vaya al paso 2.

6. Calcule el costo total de inventario, tal que incluya el costo de adquisición de los productos.

7. Compare el costo anterior con TODOS los que hayan sido calculados con anterioridad. El menor y su EOQ asociado son los óptimos.

Existen otros enfoques (más sofisticados) para llevar a cabo lo anterior, sin embargo, caen fuera del alcance del texto, el lector interesado puede consultar la referencia [78].

Ejemplo 7.5:

Suponga que el sanatorio puede obtener para el producto E, una serie de descuentos que el proveedor ofrece, siempre y cuando se adquiera bajo un determinado volumen. El cuadro 7.10 muestra los descuentos correspondientes. Para determinar la política óptima de pedido, se aplicará el proceso iterativo descrito, para ello advierta que (según el problema 7.2):

D = 1,800 unidades al año.
C_o = 350
C_M = 20%

CUADRO 7.10: Tabla de Descuentos para el Producto E.

Volumen de Compra: (unidades)	Monto del Decuento: (sobre el precio de compra)
Menos de 500	30
Entre 500 y 599	27
Entre 600 y 699	25.5
Entre 700 y 999	24.9
1000 o más	24.6

Quinto Descuento:

1. k = 5.

2. Tama&o Optimo del Lote:

$$Q_5 = \sqrt{\frac{(2)(350)(1800)}{(24.6)(.2)}} = 506 \text{ unidades}$$

3. Como Q_5 es inadmisible, para que se aplique el descuento se va al paso 4.

4. Se hace Q_5 = 1000. Costo Total de Inventario:

$$\frac{(350)(1800)}{1000} + \frac{(.2)(24.6)(1000)}{2} + (1800)(24.6) = \$47,370$$

5. Se hace k = 4 (siguiente descuento), y se va nuevamente al paso 2.

Cuarto Descuento:

2. Tama&o del Lote Optimo:

$$Q_4 = \sqrt{\frac{(2)(350)(1800)}{(24.9)(.2)}} = 503 \text{ unidades}$$

3. Como Q_4 es inadmisible, se va al paso 4.

4. Se hace Q_4 = 700. Costo Total de Inventario:

$$\frac{(350)(1800)}{700} + \frac{(.2)(24.6)(700)}{2} + (1800)(24.6) = \$47,463$$

5. Se hace k = 3, y se va nuevamente al paso 2.

Tercer Descuento:

2. Tama&o del Lote Optimo: Q_3 = 497.

3. Como Q_3 es inadmisible, se va al paso 4.

4. Costo Total de Inventario: $48,480.

5. Se hace k = 2, y se va nuevamente al paso 2.

Segundo Descuento:

2. Tama&o del Lote Optimo: Q_2 = 483.

3. Como Q_2 es inadmisible, se va al paso 4.

4. Costo Total de Inventario: $51,210.

5. Se hace k = 1, y se va nuevamente al paso 2.

Primer Precio:

2. Tama&o del Lote Optimo: Q_1 = 460.

3. Como Q_1 es admisible, se va al paso 6.

6. Costo Total de Inventario: $56,745.

7. El menor costo es el asociado con el quinto descuento, por lo tanto, conviene adquirir en cada pedido 1,000 unidades a un costo total de inventario de $47,370.

7.4.3 Modelos con Periodo Fijo de Reorden (EOI):

En ocasiones, los proveedores no están dispuestos a surtir los pedidos en el período que la demanda lo solicite, asimismo, el proceso de manufactura no puede detenerse en cualquier momento para que se produzca el número de unidades del bien que se requiere (ya que puede resultar bastante costoso). En resumen, todo tiene que correr bajo un calendario de tal forma que un proceso de planeación adecuado pueda ser implantado para evitar demasiados desperdicios innecesarios.

La idea consistirá en aplicar una expresión que permita determinar el número óptimo de pedidos en un a&o, tal que la demanda se satisfaga y el costo total del inventario se minimice. Nuevamente, las suposiciones hechas para el EOQ, se aplican dentro de este contexto.

Debe resultar clara la importancia de este enfoque y la diferencia que existe entre el anterior y el presente. En la figura 7.8 puede apreciarse un diagrama que refleja el comportamiento cíclico de este tipo de inventarios, la única diferencia existente entre ambo~ modelos radica en que para el anterior, el período de reorden puede ser variable, pero la cantidad a ordenar es fija (e igual a Q), en este caso, el período de reorden (T) es fijo pero la cantidad a solicitar es generalmente variable. Si la demanda es uniforme tanto el EOQ como el EOI coincidirán en todos aspectos. Si la demanda es variable (como generalmente ocurre) ambos cambiarán en sus políticas de inventario, esta situación será discutida a mayor detalle en el subtema 7.5.

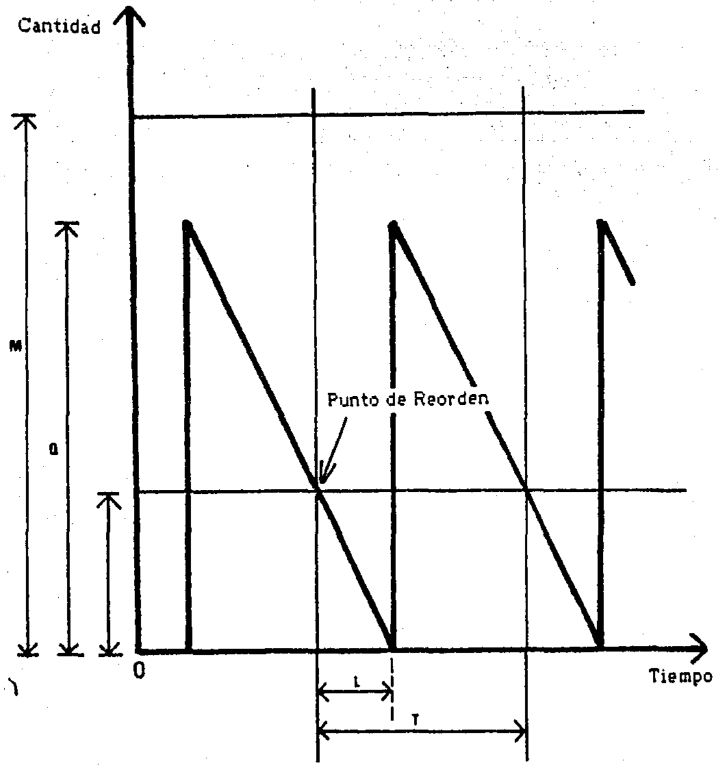


Figura 7.8.

Las expresiones a utilizar bajo este modelo son:

$$T = \sqrt{\frac{(2)(C_o)}{(D)(C_m)}} \qquad \ldots(27)$$

$$\text{Costo Anual de Ordenar} = \frac{---}{T} (C_o) \qquad ...(28)$$

$$\text{Costo Anual de Mantenimiento} = \frac{(T)(D)}{2} (C_M) \qquad ...(29)$$

$$M = (D)(T + L) \qquad ...(30)$$

$$CTI = \text{Costo Anual de Ordenar} + \text{Costo Anual de Mantenimiento} \qquad ...(31)$$

donde:

- T es el intervalo económico de reorden en años.
- D es la demanda anual en unidades.
- C_o es el costo de ordenar.
- C_M es el costo de mantenimiento por unidad por año.
- M es el punto haste el que debe colocarse una orden.
- L es el tiempo que tarda en surtirse un producto.

observe que T, D y L deben estar dados en las mismas unidades de tiempo, para poder aplicar correctamente la expresión (31).

Ejemplo 7.6:

Suponga que el Sanatorio San Felipe ha encontrado la necesidad de programar sus pedidos del producto C, debido a que las políticas de sus proveedores están en función de fechas más que de cantidades. El sanatorio ha decidido por lo tanto, determinar la mejor política de pedidos al año para tal producto a los laboratorios correspondientes.

Recuerde que:

D = 432 unidades al año
C_o = 700
C_M = 100.
L = 7 días.

de (27) se obtiene:

T = .18 años = 66 días aproximadamente ((.18)(365) = 66).

es decir, cada 66 días deberá colocarse un pedido de:

M = 86 unidades.

como puede apreciarse el número de pedidos al año es de 5.55 (365/66 = 5.55 aproximadamente), como se determinó con el EOQ. El tamaño del lote cambia, debido a que en esta instancia se está considerando tanto el tiempo de entrega como todo el periodo entre pedidos. Observe que en el cuadro 7.7, el tamaño económico del lote (78) más el punto de reorden (8) suman exactamente 86, que es la cantidad obtenida en este tipo de modelo.

Los modelos EOQ y EOI son idénticos bajo las suposiciones hechas. Se les ha dado diferentes nombres, debido a que se aplican de manera distinta. Se diferencian en el hecho de que cada uno proporciona una respuesta fija a una pregunta y una variable a la otra.

Cualquier aspecto teórico que se desee conocer con respecto a la deducción de las expresiones utilizadas en los modelos anteriores, puede ser consultado en el Apéndice E, o en cualesquiera de las referencias citadas al final del presente tema.

7.5 Modelos Prababilísticos de Inventario

En los subtemas anteriores, diversas suposiciones fueron consideradas en la formulación de los modelos de inventario, sin embargo, en la vida real rara vez se cumplen. Uno de los problemas más comunes, radica en la distribución de la demanda. Naturalmente esta es estimada y se espera que tenga un comportamiento determinado dentro de ciertos rangos, pero nunca es exacta, es decir, una cifra nunca podrá reflejar lo que en la realidad ocurre. Esta situación puede complicarse si se añade al esquema el hecho de que en general los tiempos de entrega generalmente tampoco son constantes.

Lo anterior obliga a contar con niveles de incertidumbre, que representen tanto el comportamiento de la demanda como de los tiempos de entrega. En esencia el problema radica en tratar de determinar volúmenes de inventario que puedan hacer frente a demandas inesperadas, generalmente esto ocurre durante los períodos de reorden, ya que es en estos cuando los niveles son relativamente "bajos" y existe una marcada probabilidad de que las unidades se agoten antes de que el pedido sea surtido. Ante tales circunstancias, el administrador deberá conformar niveles de inventario de seguridad o de contingencia, que tengan la finalidad de responder a demandas superiores a las programadas. Un inventario de seguridad naturalmente representará un costo, por lo tanto deberá tenerse el cuidado en seleccionar el más "apropiado". En su determinación es necesario considerar lo que se denomina "nivel de servicio", es decir, cuál es la eficiencia que se espera ofrecer para las diversas demandas. Un elevado número de ordenes canceladas es una muestra de un nivel de servicio reducido, mientras que un elevado nivel de inventario (probablemente innecesario) significa uno excesivo. A lo largo del presente subtema, se pretende dar una visión panorámica del uso óptimo de los inventarios de contingencia. Dentro de este aspecto es posible identificar tres tipos básicos de modelos de inventario:

- Modelos de Inventario con Demanda Variable y Período Fijo de Entrega.

- Modelos de Inventario con Demanda Fija y Período Variable de Entrega.

- Modelos de Inventario con Demanda y Período de Entrega Variables.

Modelos de Inventario con Demanda Variable y Período Fijo de Entrega:

La figura 7.9 muestra el punto de reorden obtenido a partir de una estimación de la demanda durante el tiempo de entrega (que se supondrá fijo), además de una reserva de seguridad (nivel de inventario de contingencia) para proteger a la empresa contra demandas superiores a las esperadas durante los tiempos de entrega. El punto A refleja el nivel del inventario en un momento determinado. Conforme transcurre el tiempo el inventario es utilizado. Suponga que la demanda se presenta en forma variable, hasta que el punto de reorden es alcanzado. Una orden de abastecimiento, igual al tamaño del lote económico (Q) es entonces colocada, como se muestra por la línea vertical más suave. El inventario continúa agotandose durante el tiempo de entrega, al final del cual el nuevo pedido es físicamente recibido; el inventario es entonces incrementado en Q unidades, comenzando nuevamente su ciclo.

La obtención de los puntos de reorden, frente a demandas aleatorias, puede resultar una labor bastante compleja dada la inmensidad de posibilidades, consecuentemente, estos son basados en promedios de demanda durante el tiempo de entrega, sin embargo, esta estimación no reflejara la demanda exacta durante todo el tiempo, ya que fluctuara un 50% de las veces por arriba del promedio y otro 50% por debajo de este. De esta forma, el problema radicará en determinar el volumen que se requerirá en el inventario de seguridad.

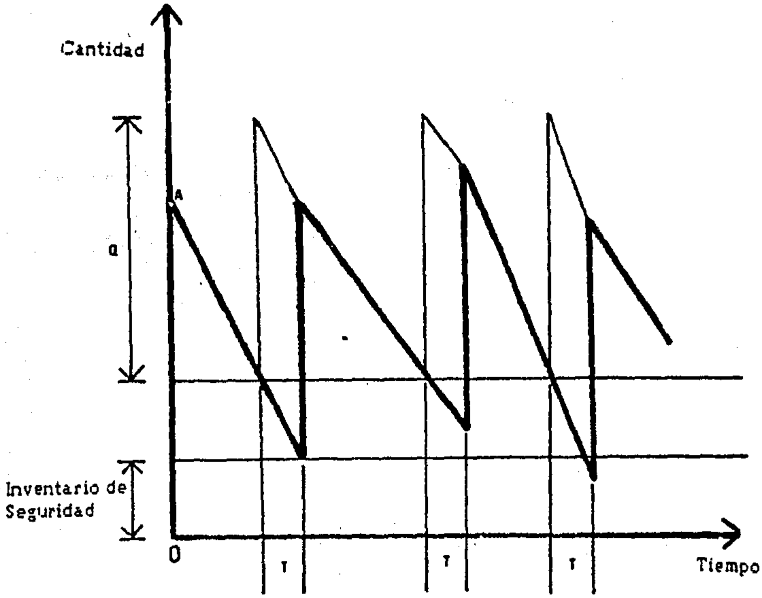


Figura 7.9.

Como puede apreciarse en la figura 7.9, el inventario de contingencia no es utilizado en los primeros dos ciclos de reabastecimiento. En el tercer ciclo, sin embargo, la tasa de demanda .: incrementa, provocando que el inventario caiga hasta su nivel de seguridad antes que el nuevo pedido sea recibido. Si la demanda se hubiera incrementado en una tasa superior durante el tiempo de entrega, el inventario hubiera caido a un nivel nulo, provocando con ello posibles ordenes rechazadas.

Modelos de Inventario con Demanda Fija y Período Variable de Entrega:

El tiempo de entrega comienza cuando el nivel de inventario alcanza un nivel de reorden determinado, y termina cuando una nueva orden de productos llega y queda lista para ser empleada. Durante el tiempo de entrega existe una elevada probabilidad de retrasos. Los eventos críticos son:

1. Se advierte que el nivel de inventario está por debajo de su punto de reorden.

2. Una orden es colocada.

3. El proveedor recibe la orden.

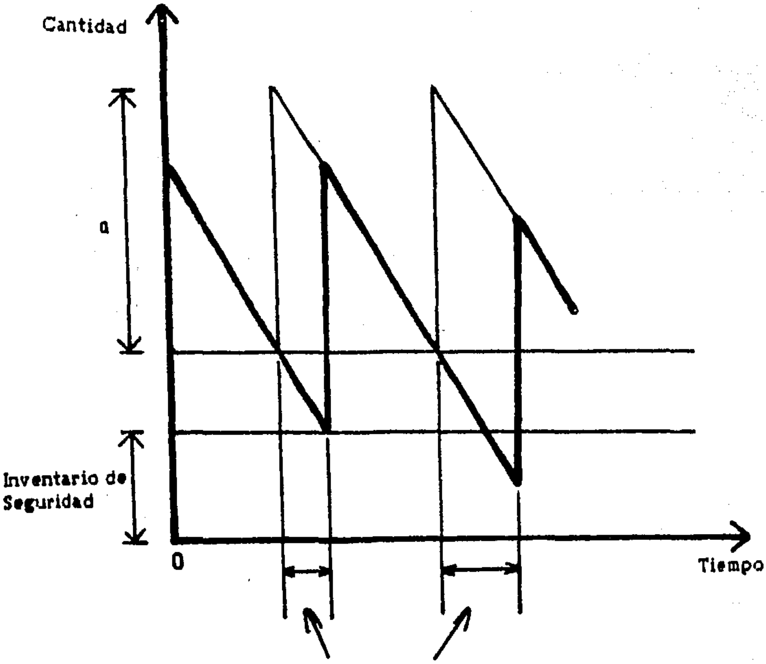


Figura 7.10.

4. El proveedor envia el pedido.

5. El pedido es recibido.

6. El pedido es almacenado en el inventario.

Controlar tales aspectos puede proporcionar dividendos atractivos, ya que generalmente registran un comportamiento bastante inestable. En general, en esta situación, se busca no solo minimizar los tiempos de entrega sino también su variabilidad. La figura 7.10 muestra un diagrama que ilustra un inventario con tiempos de entrega variables, en este caso, resulta necesario contar con niveles de inventario de seguridad más elevados para hacer frente a las contingencias de entrega.

__Modelos de Inventario con Demanda y Período de Entrega Variables:__

En la mayoría de los casos, tanto la demanda como el período de entrega de los pedidos son variables, en estas circunstancias los niveles de los inventarios de contingencia tienen que ser superiores. Estos son los modelos que representan una mayor complejidad, pues con ellos se buscan determinar: el tama&o óptimo del lote, el punto de reorden óptimo, y el nivel de contingencia, tratando de minimizar la variabilidad de los tiempos de entrega, sujetos a la restricción de satisfacción de la demanda que se presente en cualquier instante. La figura 7.11 muestra la representacion gráfica de este sistema.

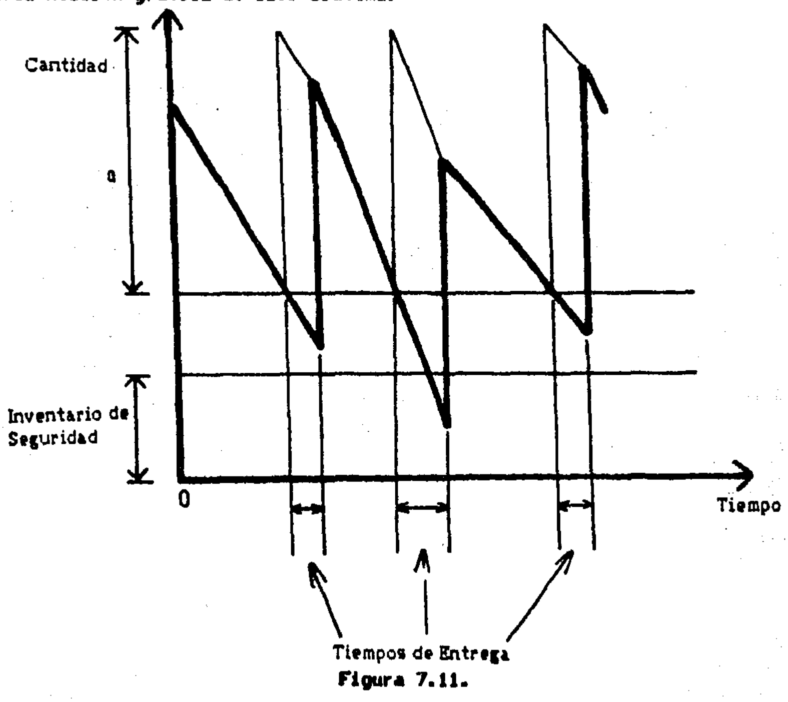


Figura 7.11.

Los siguientes aspectos deben ser apuntados en relación con lo anterior:

1. El EOQ es generalmente una cantidad fija y recalculada solo cuando se presentan cambios significativos en los niveles de demanda.

2. Los intervalos entre las ordenes de abastecimiento sucesivas son no constantes y varían inversamente a la tasa de demanda: mientras la demanda crece, los intervalos entre las ordenes decrecen.

3. El inventario promedio sera igual a la mitad de le tamaño del lote óptimo más la reserva de contingencia.

El volumen de la reserva de contingencia requerido es una función que consiste principalmente de los siguientes elementos:

1. Una demanda estimada que refleje la realidad lo mejor posible.

2. La longitud del tiempo de entrega.

3. El tamaño del lote óptimo (Q).

4. El nivel de servicio deseado.

Algunas técnicas estadísticas pueden ser aplicadas efectivamente en la práctica para determinar los niveles de reserva apropiados.

Ejemplo 7.7:

Suponga que el Sanatorio San Felipe, implantó, a manera de prueba, el modelo EOQ para dos de sus productos de mayor valor, A y C. Para comprobar la efectividad del mismo, decidió registrar en forma exacta la demanda presentada en cada uno de los períodos que separan a los puntos de reorden, los cuales a consecuencia de su variabilidad tuvieron longitudes diferentes. El cuadro 7.11 presenta la muestra (que comprende un período de un año), relativa a estos productos. La información del producto A muestra un tamaño de lote igual a 130 unidades (calculado con anterioridad) por período de reorden y un promedio de ventas de 132 unidades por período (el cual fue obtenido con base en las observaciones tomadas durante el año pasado), puede observarse que el tamaño del lote óptimo es muy cercano al volumen de las ventas programadas. Sin embargo, existen demandas que ascienden a 150 unidades en una semana determinada, y 140 en dos ocasiones. Esto provoca que el administrador del sanatorio tenga que considerar un inventario de seguridad, por ejemplo, de diez unidades. Así, cada vez que se tuvieran 29 del producto A (19 originalmente obtenidas más las 10 asociadas al inventario de seguridad) tendría que colocarse una orden por 130, especificando que ocasionalmente el inventario podría agotarse frente a una demanda inesperada. Si se deseara evitar esto, este tendría que fijarse en 20 unidades y el punto de reorden en 39, no obstante, provocando un nivel "grande" (ya que no se espera que la demanda ascienda frecuentemente a 150 unidades). Sin duda alguna es necesario ampliar la muestra a un período de tiempo superior para apreciar más claramente el comportamiento de la demanda.

El producto B presenta una demanda más inestable, de hecho, si el punto de reorden fuera fijado en 8 unidades, ocurrirían tres períodos de agotamiento (ya que existen tres niveles de demanda que durante el tiempo de entrega, exceden a la oferta de 100 unidades). Obviamente el punto de reorden para el producto B debe ser más elevado que el del A para mantener en ambos el mismo nivel de servicio. Tener niveles de inventario iguales para ambos productos, pro'ocará un exceso en un caso y un nivel de servicio pobre en el otro.

CUADRO 7.11: Nivel de Demanda Registrada por Período entre Pedidos.

Período:	Demanda Obs^rvada: (Producto A)	Demanda Observada: (Producto C)
1	150	97
2	129	118
3	130	115
4	120	120
5	115	50
6	140	
7	140	

Inventario Promedio Anual Observado:

Producto A: 132 unidades. Lote Optimo: 130 unidades.

Producto C: 100 unidades. Lote Optimo: 100 unidades.

Ejemplo 7.8:

El Sanatorio San Felipe ha decidido cambiar de proveedores para el producto G (no analizado), el cual tiene un costo de mantenimiento de $100 al año, acordando que el número de ordenes (4 al año) seguirá manteniendo el mismo patrón que en años anteriores. Un registro concerniente a los tiempos de entrega pasados se muestra en el cuadro 7.12.

CUADRO 7.12: Tiempos de Entrega para Artículos Similares al Producto G Abastecidos por el mismo Distribuidor.

Fecha de la Orden de Colocación:	1/7	2/3	3/16	4/6	5/2	6/2
Fecha de Recepción de la Orden:	1/18	2/21	4/20	4/28	5/20	6/23
Tiempos de Entrega						
Días Calendario:	11	18	35	22	18	21
Días Laborables:	7	12	25	16	14	15

Como puede apre iarse el patrón anterior no guarda un comportamiento uniforme en lo que respecta a los niveles de entrega. Enfrentar un período con una gran variabilidad (25 - 7 = 18 días) no representa ninguna ventaja, sin duda alguna será necesario contar con un inventario de contingencia que permita compensar ya sea demandas estables y uniformes o demandas aleatorias.

El lector podrá advertir que el problema fundamental en los modelos de inventario probabilísticos, consiste en tratar de determinar un nivel adecuado que permita cubrir la demanda que se presente. Naturalmente este nivel tiene que ser optimizado de alguna manera, ya que basta recordar que volúmenes elevados aumentan los costos de mantenimiento.

7.6 Otros Aspectos Relevantes de los Inventarios

Existen diversos aspectos que resultan importantes de tratar, antes de concluir con el presente tema. Los inventarios juegan un papel preponderante dentro de cualquier empresa, pues representan uno de los activos más importantes que desempeña múltiples funciones dentro de las areas de mercadotecnia, promoción, distribución y producción. Los inventarios son los medios de absorción de varias clases de eventos perturbadores, tales como las variaciones en los precios de la materia prima, demandas, flujos de provisión, manufactura, distribución, etc. Los inventarios facilitan la promoción de los productos, ya que aumentan su disponibilidad. Asimismo, ayudan a mejorar la utilización de instalaciones productivas costosas, permitiendo manufacturar varios productos diferentes en lotes de tamaño razonable. Finalmente, ofrecen un programa de producción más económico, a la vez que socialmente más aceptable, al hacer que este sea más estable a lo largo del año.

Existen diferentes procedimientos a los sistemas de inventario, que permiten llevar a cabo un control menos tedioso y detallado en sus niveles. En particular puede citarse:

- **Sistema de dos secciones:**
  Este evita la necesidad del sistema contínuo de registros. El espacio de almacenamiento se divide en dos partes. En uno (el posterior), se almacena la cantidad que indica el punto de reorden. El exceso se coloca en la otra parte. Todos los productos se sacan de este último compartimento, cuando se agota, se coloca un pedido y comienza a usarse el otro, pasando todas las unidades al de enfrente. Cuando llega la nueva orden, se vuelve a abastecer al compartimento con la reserva respectiva colocando en el de enfrente el sobrante. Este sistema presenta la desventaja que no permite llevar un registro exacto de la demanda si no se lleva una relación de esta. Asimismo, interviene el criterio del almacenista, lo cual puede provocar problemas, al presentarse el caso en el que decida variar los niveles de inventario a su gusto.

7.6.1 Otros Modelos de Inventario:

Los Sistemas de Planeación de Requerimiento de Materiales (MPR), son aquellos que se ocupan del análisis de los artículos que tienen una demanda dependiente o derivada. Un ejemplo, sería una parte que se utiliza en el ensamble de algún producto final, por ejemplo un transistor para un aparato de televisión. La demanda del transistor depende de la demanda de los televisores. En el tratamiento de los sistemas estudiados, se supuso una demanda independiente, sin embargo, en la realidad esta puede no serlo. El problema consiste en determinar los niveles de inventario con base en las demandas dependientes. En la referencia [58] se proporciona una visión más amplia de este interesante sistema.

Sistemas de un Solo Pedido. Algunos problemas involucran un pedido en lugar de las ordenes múltiples que se han expuesto. Un ejemplo clásico es el de los árboles de navidad, sólo se coloca un pedido, los que no se vendan se consideran como desecho. Esto sin duda es un caso típico para los diferentes productos perecederos que se manejan en restaurantes, supermercados, panaderías, etc. En cada una de estas situaciones el administrador de inventarios tiene la oportunidad de hacer un pedido; no es posible reordenar durante el período. Los artículos que no se utilicen deberán desecharse. El problema consistirá entonces en determinar el tama&o del pedido.

La amplia variedad en las situaciones ha evitado el desarrollo de un modelo universalmente óptimo. Sin embargo, se han creado muchos modelos en los que puede utilizarse, por ejemplo, la Simulación. En general el problema básico radica en las tres clásicas preguntas:

- Cuánto ordenar?

- Cuándo ordenar?

- Qué nivel de seguridad mantener?

El rápido advenimiento de las computadoras ha dado un decidido impulso al desarrollo de modelos de inventario más complejos. Se han llegado inclusive a sistemas de tal perfección en los que las mismas computadoras tienen el trabajo de decidir niveles de pedido, puntos de reorden, volúmenes de inventario de seguridad y otros aspectos que permiten al decisor, concentrar su atención en aspectos que merecen más de su atención.

REFERENCIAS:

[1] y [50] Capítulo 7.
[2]
[6] Capítulo 10.
[11] Capítulos 1 al 4 y 15.
[15], [66] y [83] Capítulo 6.
[22] Capítulos 13 y 14.
[44] Capítulos 10 al 13.
[48] Capítulo 8.
[52] Capítulo 15.
[58] Capítulos 1 al 5, 11 y 12.
[61] y [78] Capí'ulo 11.
[70]
[74] Capítulo 13.
[83] Capítulo 6.
[87] Capítulos 10 y 11.

PROBLEMAS:

1. Indique el error, si lo hay, en el siguiente caso:
   Un agente de compras percibe $1,600,000 anuales en una peque&a compa&ía, colocando 2,000 ordenes anuales, principalmente con vendedores locales. Ningún trabajo de papelería se lleva a cabo; simple y sencillamente existen pagos por concepto de uso de teléfono. Las facturas son pagadas de la caja.
   Con base en lo anterior, los costos de colocar una orden se calculan de la siguiente manera:

Salario del Agente	=	$1,600,000
Teléfono	=	$ 50,000
Total	=	$1,650,000
Costos por Orden	=	$1,650,000/2,000 = $825

   La compa&ía concluye que esta puede ahorrar dinero mientras menos ordenes sean colocadas. Para comprobar su aseveración decide calcular el ahorro que obtiene para 1,500 ordenes, de la siguiente forma:

   (2,000 - 1,500)(825) = $412,500

2. Una compa&ía tiene una distribuidora donde almacena los artículos que compra para su uso. La distribuidora por lo regular se usa entre la mitad y las dos terceras partes de su capacidad total. Para decidir los valores de los costos por unidad a ser incluidos dentro de las políticas de inventario, el administrador ha encontrado ciertas dificultades para ciertos artículos. Determine la clasificación de los costos para la siguiente lista.
   a) Costo de calefacción y alumbrado.
   b) Pagos realizados para el recuento de los niveles de inventario.
   c) Pagos realizados por la inspección de la calidad de los artículos recibidos.
   d) Salarios de los porteros.
   e) Pagos por el manejo de materiales y equipo.
   f) Pagos por papeleo.

3. Suponga una compañía manufacturera de circuitos impresos y otros componentes electrónicos. En la etapa final, los circuitos impresos son montados en una base que es comprada de un proveedor externo de productos de melamina. Los circuitos impresos son producidos para satisfacer la demanda de los clientes, que se ha estimado en una tasa uniforme de 6,000 unidades al año. El departamento de compras ha estimado que los costos fijos de ordenar ascienden a $2,000 mientras que los de mantenimiento representan el 20% anual. El proveedor carga $1,250 para cada base.
   a) Determine el tamaño óptimo de las ordenes y los costos totales de inventario.
   b) Suponga que los tiempos de entrega se han estimado en 7 días (incluyendo sábados y domingos), determine el punto de reorden.
   c) Suponga que los costos de ordenar fueron erroneamente estimados y se ha determinado que su valor más probable es de $2,500. Sin realizar ningún cálculo, indique qué es lo que va a ocurrir con el tamaño de las ordenes (va a aumentar o a disminuir)?. Explique. Compruebe sus aseveraciones, determinando numéricamente el tamaño del lote óptimo.
   d) Qué ocurriría con el EOQ si los costos de mantenimiento aumentan?. Explique.

4. (Requiere conceptos matemáticos.) Un proveedor de piezas de metal estima el costo de Q unidades a partir de la siguiente expresión: 250 + 20Q pesos. La demanda anual uniforme se estima en 2,400 unidades. Los costos directos por llenado de facturas, recepción inspección y otras actividades relativas, asciende a $5,000 por orden. Los costos de mantenimiento del inventario se han estimado en un 20% anual. (Sugerencia: Construya la fórmula del EOQ a partir de su definición.)
   a) Determine el EOQ.
   b) Suponga que los tiempos de entrega se han estimado en 7 días (incluyendo sabados y domingos). Calcule el punto de reorden.
   c) Determine el número de ordenes que tienen que ser colocadas al año.
   d) Suponga que los costos directos varían en función de la siguiente expresión: 5,000 + Q, resuelva los incisos a) al c) para este caso.

5. El personal a cargo de la producción en una determinada compañía, esta tratando de determinar el número óptimo de unidades del tipo P-2215 a manufacturar en una corrida.
   La unidad P-2215 se probó en el mercado el año pasado, y el personal de ventas espera que su demanda ascienda a una tasa de 500 unidades a la semana. (Suponga una semana de 5 días, y un año comercial de 50 semanas.) Las unidades vendidas en el mercado, fueron producidas en tres corridas diferentes. La primera de dos días y medio de duración, produjo 500 unidades de las piezas P-2215 y registro un costo de $270,000. La segunda, más extensa, tomó cuatro semanas y produjo 4,000 unidades a un costo de $1,950,000. La tercera, aun más grande, produjo 7,500 unidades en siete semanas y media a un costo de $3,630,000.
   Con el objeto de estimar, a partir de esos costos, los correspondientes al de las corridas, para determinar el nivel de producción óptimo, la compañía ha decidido que el costo fijo incurrido en las tres corridas previas debe ser usado para representar el de una corrida de producción mientras que el variable, representará el de los materiales y ajuste de maquinaria.
   Al examinar la posibilidad de conservar un inventario de unidades terminadas del tipo P-2215, el personal reconoció que no era particularmente económico ni simple de controlar. Los costos anuales de mantenimiento de inventario fueron

estimados en un ?5% del valor de las piezas en terminos de los costos variables de manufactura. Se espera que la demanda estimada tenga un comportamiento uniforme a lo largo del año, asimismo, se supone que esta se presentara mientras la línea de producción esté funcionando, por lo tanto, los pedidos irán siendo surtidos a lo largo del año.
Utilizando la información anterior, calcule el nivel de producción óptimo.

6. Una compañía fabricante de velas, establecida desde 1970 cuando dos personas comenzaron a fabricarlas, ha experimentado un crecimiento asombroso. Una pequeña aventura, se ha convertido en una corporación cuyas ventas ascienden a varios millones de pesos anuales, y cuyos productos se distribuyen a nivel nacional. Esta produce 23 tipos diferentes de velas, su manufactura, requiere de diferentes procesos y personal. Las velas se producen ya sea en madera o cerámica rellenas de cera, estas se clasifican dentro de cinco grupos básicos: cirio de madera, manzanita, calabaza, cerámica y madera torneada. Las velas de cerámica han tenido ventas bastante bajas, y al momento, la compañía tiene un exceso en su inventario.
La acelerada tasa de crecimiento acompañada de una demanda creciente (que excede a la producción), ha causado muchos problemas de costos y producción para la corporación. Como resultado, existe un costo de oportunidad asociado con el capital que asciende a un 40% anual. La compañía tiene asimismo, el problema de determinar la cantidad y tiempo para ordenar su materia prima. Un ejemplo de esto es su política relativa a las cajas de empaque. La demanda promedio de estas es de 1,436 al mes, y la política ha sido ordenar la cantidad más grande posible, de tal forma que represente el mínimo costo. Los costos de ordenar han sido estimados en $666 cada vez que una orden sea colocada, sin importar su tamaño. Las tasas de descuento son las siguientes:
Q => 500 cajas a $55/caja
Q => 1,000 cajas a $50/caja
Q => 2,500 cajas a $38/caja
Determine el lote que proporciona el costo mínimo anual, la frecuencia con que deben ser ordenados, y el costo total anual.

7. Una distribuidora de muebles vende 1,500 unidades anuales de un modelo especial de sofá. Este cuesta $50,000 y un día para ser surtido. La empresa estima el costo de mantenimiento en $2,000 por unidad por año. El costo por faltantes es de $30,000 por unidad.
a) Cuántas unidades deben ordenarse?.
b) Cuál es el punto de reorden?.
c) Cuál es el costo total de inventario?.

8. Estime el nivel de servicio apropiado (dando una explicación empírica) para los siguientes artículos, en una tienda de departamentos grande:
a) Ropa interior para caballero.
b) Refrigeradores.
c) Radios de mesa.
d) Focos.
e) Sábanas.

9. Se seleccionaron al azar los siguientes artículos de un almacén grande. Clasifique cada uno como un artículo A, B o C.

Artículo	Costo, $	Ventas anuales, unidades
1	50	1,000
2	900	1,000
3	500	1,200
4	7,500	400
5	600	500
6	10,000	20
7	400	500
8	1,500	3,000
9	4,000	250
10	5,000	30

SOLUCIONES A PROBLEMAS SELECCIONADOS.

TEMA 1:

1. a) Optimización: cuando se trata de fijar un nivel de operación que maximice o minimice algún aspecto.
   b) Suboptimización: cuando se trata de fijar un nivel de operación por debajo del óptimo.
   c) Sobreoptimización: cuando se trata de fijar un nivel de operación superior al óptimo.

2. - Enfoque de Sistemas.
   - Equipo Interdisciplinario.
   - Uso de Modelos.
   - Aplicación del Método Científico.
   - Deducción de Nuevos Problemas para su Estudio.

4. Ventajas:
   - Ayuda a trabajar de una manera ordenada.
   - Es bastante general.
   - Es económico.

   Desventaja:
   - Es muy idealizado (es un modelo).

6. a) Problema Real: Es una situación que se presenta en el mundo real.
   b) Sistema: Es una abstracción donde existen ciertas relaciones que pueden ser controlables o no controlables.
   c) Modelo: Es una representación simplificada de un problema donde se tratan de expresar bajo diferentes formas algunas de las relaciones que se dan.

7. Ventajas:
   - Son económicos.
   - Permiten evaluar una infinita gama de posibilidades.
   - Pueden llegar a reflejar situaciones bastante reales.

   Desventajas:
   - Se basa en modelos matemáticos no muy sencillos.
   - Sus modelos son abstractos.
   - Se requieren diversos supuestos simplificadores.

TEMA 2:

1. Modelos Icónicos, Analógicos y Matemáticos.

4. Ventajas:
   - Son económicos.
   - Permiten evaluar un elevado número de posibilidades.

- Tienen un gran campo de aplicaciones.

Desventajas:
- Son abstracciones de la realidad.
- En algunos casos son difíciles de interpretar.
- En algunas circunstancias no proporcionan la mejor respuesta.

5. a) y c) Icónicos.
   b) y e) Analógicos.
   d) Matemático.

TEMA 3:

Preguntas:

1. La forma en la que van a ser utilizados los recursos.

2. a) Linealidad, Aditividad, Proporcionalidad Divisibilidad e Independencia.
   b) Costos, Niveles de Producción, Rendimiento de Obreros, Demanda, etc.
   c) Deben ser modificados para que se apliquen a la realidad.

4. a) Maximización: tender a incrementar lo más posible una cantidad.
   Minimización: tender a decrementar lo más posible una cantidad.
   b) Maximizar: ganancias, ingreso, ventas, beneficios, producción, oferta, etc.
   Minimizar: pérdidas, costos, deserción, interéses, precios, personal, etc.

Problemas:

1. a) P = número de papas usadas en la producción.
   A = número de almejas usadas en la producción.
   J = número de litros de jitomate utilizados en la producción.
   NLS1 = número de litros a producir de la sopa tipo 1.
   NLS2 = número de litros a producir de la sopa tipo 2.
   b) Uso de papas: 2NLS1 + 0.5NLS2 = P
   Uso de almejas: NLS1 + NLS2 = A
   Uso de jitomate: 0.05NLS1 + 0.25NLS2 = J
   c) Si NLS1 = 1 y NLS2 = 1, entonces:
   P = 2.5 papas
   A = 2 almejas
   J = 0.3 litros de jitomate
   que es el volumen de ingredientes que se necesitan para la producción.
   d) 1,000 litros de la sopa tipo 1, con 100,000 almejas y 15,000 litros de salsa de jitomate sobrantes.
   e) 80,000 litros de la sopa tipo 2, con 160,000 papas y 120,000 almejas sobrantes.
   f) Debido a que los ingredientes se encuentran a disposición en el inventario los costos son ignorados. La formulación puede expresarse como la maximización del ingreso que produce la venta de ambos tipos de sopas: Maximizar z = 500NLS1 + 500NLS2 o, equivalentemente, maximizar la producción de ambos tipos de sopas, es decir: Maximizar z = NLS1 + NLS2, sujetas a las restricciones del inciso b), así como a la de disponibilidades de los ingredientes: P <= 200,000, A <= 200,000 y J <= 20,000.

2. a) Ya que poseen diferentes precios.

b) PS = número de papas sobrantes de la producción del trimestre anterior.
AS = número de almejas sobrantes de la producción del trimestre anterior.
JS = número de litros de jitomate sobrante de la producción del trimestre anterior.
PC = número de papas compradas del exterior para la producción del próximo trimestre.
AC = número de almejas compradas para la producción del próximo trimestre.
JC = número de litros de jitomate comprados del exterior para la producción del próximo trimestre.
NLS1 y NLS2 ya definidas.

c)

Uso de papas:	2NLS1 + 0.5NLS2 =	PS + PC
Uso de almejas:	NLS1 + NLS2 =	AS + AC
Uso de jitomate:	0.05NLS1 + 0.25NLS2 =	JS + JC
Disponibilidad de papas:	PS <=	200,000
Disponibilidad de almejas:	AS <=	200,000
Disponibilidad de jitomate:	JS <=	20,000
Demanda sopa tipo 1:	NLS1 =>	500,000
Demanda sopa tipo 2:	NLS2 =>	400,000

d) Maximizar z = 525NLS1 + 500NLS2 - 15PC - 50AC - 300JC
se tienen que maximizar las ganancias descontadas de los egresos.

e) Las tres primeras de políticas de producción, las tres siguientes de disponibilidad de recursos y las dos últimas de satisfacción de la demanda.

f) Debido a que ambos productos producen ganancias positivas, debe comprarse tanto como sea posible, para satisfacer al menos la demanda que se presenta.

g) Definir:
PC1 = número de papas a comprar en el exterior a un precio de $15.
PC2 = número de papas a comprar en el exterior a un precio de $25.
Agregar las siguientes restricciones:

PC1 <= 150,000
PC2 <= 300,000

Incluir los siguientes términos en la función objetivo: - 15PC1 - 25PC2, y eliminar el de - 15PC.

3. a) Como se trata de minimizar costos y dado que no existe un requerimiento mínimo, lo mejor es no enviar nada. Las restricciones de demanda deben establecerse en sentido estricto de igualdad.

b) Límite superior, permitiendo al modelo fijar el nivel de operación óptimo.

c) A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3 y C_4 como el número de unidades en miles a enviar de las plantas A, B y C a las distribuidoras 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

$$\text{Maximizar } z = 200A_1 + 175A_2 + 50A_3 + 100A_4 - 100B_1 + 50B_2 + 25B_3 + 50B_4 + 175C_1 + 75C_2 + 150C_3 + 175C_4$$

sa

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &<= 1{,}200\\
B_1 + B_2 + B_3 + B_4 &<= 1{,}200\\
C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &<= 500\\
A_1 + B_1 + C_1 &<= 700\\
A_2 + B_2 + C_2 &<= 400\\
A_3 + B_3 + C_3 &<= 600\\
A_4 + B_4 + C_4 &<= 500
\end{aligned}$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

d) Agregar la siguiente restricción al modelo:

$$50A_1 + 75A_2 + 200A_3 + 150A_4 + 250B_1 + 100B_2 + 125B_3 + 100B_4 + 125C_1 + 225C_2 + 150C_3 + 125C_4 <= 200{,}000$$

e) Definir:
CA = capacidad adicional disponible en la planta C.
Agregar la restricción: CA <= 50 y cambiar la restricción relativa a la planta C por: $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 <= 500 + CA$.
A&adir en la función objetivo el término: - 25CA.

4. a) Definir:
CA y CB número de toneladas a producir de los cementos tipo A y B.
I_1, I_2 y I_3 número de toneladas a utilizar de cada uno de los diferentes ingredientes.

Maximizar z = 90,000CA + 75,000CB

sa

$$\begin{array}{rrl}
0.5CA + & 0.4CB & = I_1 \\
0.3CA + & 0.2CB & = I_2 \\
0.2CA + & 0.4CB & = I_3 \\
 & I_2 & <= 15{,}000 \\
 & CA & => 5{,}000 \\
 & CB & => 4{,}000
\end{array}$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

b) Límites superiores en las ventas, y costos de los ingredientes.

c) Cambiar la función objetivo por la siguiente:
Maximizar $z = 90{,}000CA + 75{,}000CB - C_1I_1 + C_2I_2 + C_3I_3$
Agregar las siguientes restricciones:

CA <= SA
CB <= SB

donde:
SA y SB son los límites superiores de las ventas.
C_1, C_2 y C_3 son los costos respectivos para cada uno de los ingredientes.

5. Minimizar $z = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$

sa

$$\begin{array}{llllllll}
P_1 & & & & & + P_6 & => & 20 \\
P_1 & + P_2 & & & & & => & 50 \\
 & P_2 & + P_3 & & & & => & 60 \\
 & & P_3 & + P_4 & & & => & 75 \\
 & & & P_4 & + P_5 & & => & 60 \\
 & & & & P_5 & + P_6 & => & 30
\end{array}$$

Todas las variables mayores o iguales que cero y enteras

$P_1, \ldots, P_6$ representa el volumen de personal contratado para cada uno de los seis diferentes turnos.

6. Definir a K_{ij} como el número de kilos a ser usados del ingrediente i para la mezcla j. i = 1, 2, 3. j = 1, 2
Calcular la ganancia neta como se muestra en el siguiente cuadro:

Combinación	Ganancia
K_{11}	1,375 - 62_ = 750
K_{12}	1,750 - 625 = 1,125
K_{21}	1,375 - 800 = 575
K_{22}	1,750 - 800 = 950
K_{31}	1,375 - 500 = 875
K_{32}	1,750 - 500 = 1,250

La función objetivo es:

Maximizar $z = 750K_{11} + 1{,}125K_{12} + 575K_{21} + 950K_{22} + 875K_{31} + 1{,}250K_{32}$

La restricción del nivel máximo de acidéz para el especial se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$4P_1 + 5P_2 + 3P_3 <= 4$$

donde:

$$P_1 = \frac{K_{12}}{K_{12} + K_{22} + K_{32}}$$

$$P_2 = \frac{K_{22}}{K_{12} + K_{22} + K_{32}}$$

$$P_3 = \frac{K_{32}}{K_{12} + K_{22} + K_{32}}$$

que se convierte en:

$$K_{22} - K_{32} <= 0$$

En general el modelo es:

Maximizar $z = 750K_{11} + 1{,}125K_{12} + 575K_{21} + 950K_{22} + 875K_{31} + 1{,}250K_{32}$

sa

$$\begin{aligned}
K_{11} + K_{12} &<= 6{,}000\\
K_{21} + K_{22} &<= 3{,}000\\
K_{31} + K_{32} &<= 2{,}000\\
-\ 0.5K_{11} + 0.5K_{21} - 1.5K_{31} &<= 0\\
0.5K_{11} + 1.5K_{21} - 0.5K_{31} &=> 0\\
K_{22} - K_{32} &<= 0\\
-\ 0\ 01K_{11} - 0.02K_{21} + 0.01K_{31} &<= 0\\
0.4K_{12} - 1.6K_{22} - 0.6K_{32} &=> 0
\end{aligned}$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

7. a) Definir:

P_1 y P_2 como el número de productos del tipo 1 y 2 a manufacturar.

Maximizar $z = 2{,}200P_1 + 2{,}600P_2$

sa

$$5P_1 + 3P_2 <= 100$$
$$4P_1 + 6P_2 <= 200$$
$$P_1 \ , \ P_2 => 0$$

b) Definir:

P_{ij} = a la producción del artículo i en el período j. i = 1, 2. j = 1, 2.

I_{ij} = al inventario del producto i en el período j.

Maximizar $z = 2{,}200P_{11} + 2{,}600P_{21} - 200I_{11} - 200I_{21}$
$+ 2{,}200P_{12} + 2{,}600P_{22} - 200I_{12} - 200I_{22}$

sa

$$5P_{11} + 3P_{21} <= 100$$
$$4P_{11} + 6P_{21} <= 200$$
$$5P_{12} + 3P_{22} <= 100$$
$$4P_{12} + 6P_{21} <= 200$$
$$P_{11} + P_{21} + P_{12} + P_{22} = 42$$
$$P_{11} - I_{11} = 5$$
$$P_{21} - I_{21} = 10$$
$$I_{11} + P_{12} - I_{12} = 12$$
$$I_{21} + P_{22} - I_{22} = 15$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

El último grupo de restricciones se obtuvo observando el principio:
nuevo inventario = antiguo inventario + producción - compromisos

c) Eliminar de la función objetivo, y de las dos últimas restricciones las variables: I_{12} y I_{22}.

d) Definir:

IP_{ij} = inventario positivo del producto i en el período j.

IN_{ij} = ordenes rechazadas del producto i en el período j.

Cambiar la función objetivo por la siguiente:

Maximizar $z = 2{,}200P_{11} + 2{,}600P_{21} - 200IP_{11} - 300IN_{11} - 200IP_{21}$
$- 300IN_{21} + 2{,}200P_{12} + 2{,}600P_{22} - 200IP_{12} - 300IN_{12}$
$- 200IP_{22} - 300IN_{22}$

Cambiar las últimas cuatro restricciones por las siguientes:

$$P_{11} - IP_{11} + IN_{11} = 5$$
$$P_{21} - IP_{21} + IN_{21} = 10$$
$$IP_{11} - IN_{11} + P_{12} - IP_{12} + IN_{12} = 12$$
$$IP_{21} - IN_{21} + P_{22} - IP_{22} + IN_{22} = 15$$

8. Definir:

BS_1 y BS_2 como el número de trituradoras a producir de cada uno de esos tipos.

P_1, P_2, P_3 y P_4 como el número de partes del tipo 1, 2, 3 y 4 a fabricar.

PV_2 como el número de partes vendidas del tipo 2.

PC_4 como el número de partes compradas del tipo 4.

SE_1 y SE_2 como el número de subensambles a comprar del exterior de cada tipo.

TRAB como el número de horas de trabajo a contratar.

MP_1 y MP_2 cantidad de materia prima a usar en cada caso.

$$\text{Maximizar } z = 7{,}000{,}000BS_1 + 23{,}000{,}000BS_2 + 1{,}700{,}000PV_2 - 517{,}500PC_4$$
$$1{,}575{,}000SE_1 - 9{,}000{,}000SE_2 - 2{,}500MP_1 - 2{,}500MP_2 - 4{,}250TRAB$$

sa

$$P_1 - 3BS_1 - 6BS_2 = 0$$
$$P_2 - 2BS_1 - 5BS_2 - PV_2 = 0$$
$$P_3 - 4BS_1 - 4BS_2 = 0$$
$$P_4 - 2BS_1 - BS_2 + PC_4 = 0$$
$$SE_1 - BS_1 - 2BS_2 = 0$$
$$SE_2 - BS_2 = 0$$
$$MP_1 - 25P_1 - 37P_2 = 0$$
$$MP_2 - 700P_2 - 12P_3 - 170P_4$$
$$TRAB - 0.3BS_1 - BS_2 - .1P_1 - 2P_2 - 2P_3 - 25P_4 = 0$$
$$BS_1 + BS_2 <= 360$$
$$BS_1 + BS_2 => 300$$
$$1{,}575{,}000SE_1 + 9{,}000{,}000SE_2 + 2{,}500MP_1$$
$$+ 2{,}500MP_2 + 4{,}250TRAB <= 3{,}600{,}000{,}000$$
$$BS_1 <= 250$$
$$BS_2 <= 150$$
$$PV_2 <= 5{,}000$$
$$SE_1 <= 450$$
$$MP_1 <= 750{,}000$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

TEMA 4:

3. a) Solución óptima:
   NLS1 = 84,210 litros de sopa tipo 1.
   NLS2 = 63,160 litros de sopa tipo 2.
   Ganancia óptima = $73,685,000
   Sobran: 52,630 almejas.

   b) (210.5/500)(20,000) = 8,420 litros adicionales de sopa de ambos tipos.

   c) Como sobran almejas, un incremento en estas en nada aumenta la producción de sopa.
   Un incremento en la salsa de jitomate, incrementará la producción de sopa en: (1579/500)(20,000) = 63,160 litros.

   d) Se decrementará la produccion de la sopa en (210.5/500)(20,000) = 8,420, así como el valor de la función objetivo en: (8,420)(500) = 4,210,000.

   e) Sí, ya que la salida indica que el valor máximo es $2,000. Sin embargo, el valor de la función objetivo se incrementa.

   f) Definir:
   PP, PA y PJ como los precios pagados por unidad de papas, almejas y salsa de jitomate.
   El dual es:

$$\text{Minimizar } z = 200PP + 200PA + 20PJ$$

sa

$$2PP + PA + 0.50PJ => 500$$
$$0.05PP + PA + 0.25PJ => 500$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

4. a) Las restricciones que carecen de holguras y excesos son:
   Disponibilidad horas-fabricación.

Disponibilida' horas-pintura.
Demanda máxima libreros.

b) Incrementandolas en el departamento de pintura, pues es la que tiene el precio sombra más elevado.

c) Incremento: (50)(9,217) = 460,850.

d) Hasta $30,783.

5. a) Ganancia Máxima: $114,000.

b) Producir: 3,000 repisas del tipo 2, 5,000 del tipo 3 y 2,000 del tipo 4.

c) No, ya que los costos de oportunidad de las variables no básicas son positivos.

d) Ya que su contribución es inferior al egreso que representa producirlas.

e) Aumentando su precio de venta en $3,000.

f) Maximizar $z = 7X_1 + 10X_2 + 12X_3 + 12X_4 + 8X_5$

sa

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
2X_1 & & & + & 2X_3 & + & X_4 & + & X_5 & \leq & 12 \\
 & & 2X_2 & + & X_3 & + & 2X_4 & + & X_5 & \leq & 15 \\
X_1 & + & X_2 & & & & & + & X_5 & \leq & 6 \\
5X_1 & + & 7X_2 & + & 4X_3 & + & 5X_4 & + & 6X_5 & \leq & 60 \\
X_1 & + & X_2 & + & X_3 & + & X_4 & + & X_5 & \leq & 10
\end{array}
$$

Todas las variables mayores o iguales que cero.

TEMA 5:

1. a) Enviar 700,000 unidades del centro A a la distribuidora 1.
Enviar 400,000 unidades del centro A a la distribuidora 2.
Enviar 100,000 unidades del centro A a la distribuidora 4.
Enviar 40,000 unidades del centro B a la distribuidora 3.
Enviar 400,000 unidades del centro B a la distribuidora 4.
Enviar 500,000 unidades del centro C a la distribuidora 3.

b) $316,000,000

c) Sí, su precio sombra es positivo. Resulta más conveniente incrementar la demanda de la distribuidora 1, tiene el precio sombra más elevado.
Nivel máximo: $415,000.
Nivel mínimo: $390,000.

d) (120)(50) = $6,000.
Sí, ya que es inferior al precio sombra.

e) Se decrementarían, ya que el nivel fijado es el óptimo, cualquier reducción en su uso va a provocar el empleo de otras plantas mas caras. La tasa es igual a la del precio sombra de las fuentes que van a tener que usarse en lugar de esta: $120.

2. Matríz de asignación (costos):

	6	7	8	9	10
1	$16^2 + 2^2$	$23^2 + 19^2$	$3^2 + 15^2$	M	M
2	$15^2 + 3^2$	$22^2 + 20^2$	$2^2 + 16^2$	M	M
3	$10^2 + 8^2$	$17^2 + 1^2$	$21^2 + 21^2$	M	M
4	M	M	M	$19^2 + 9^2$	$15^2 + 1^2$
5	M	M	I	$17^2 + 11^2$	$13^2 + 3^2$

o:

	6	7	8	9	10
1	260	890	234	M	M
2	234	8[illegible]4	260	M	M
3	164	290	882	M	M
4	M	M	M	442	226
5	M	M	M	410	178

La solución es:

1 --> 8, 2 --> 6, 3 --> 7, 4 --> 9 y 5 --> 10

Es decir:

Ir de A a B a las 9:00 A.M. y regresar a A a las 3:00 P.M.
Ir de A a B a las 10:00 A.M. y regresar a A a las 4:00 A.M.
Ir de A a B a las 3:00 P.M. y regresar a A a las 11:00 A.M.
Ir de A a C a las 8:00 P.M. y regresar a A a las 7:00 P.M.
Ir de A a C a las 10:00 P.M. y regresar a A a las 3:00 P.M.

Costo mínimo: z = $137,800,000.

3. a) Máquina estandar: 2, nivel de eficiencia: 100%.
Nivel de eficiencia de la máquina 1: 75%.
Nivel de eficiencia de la máquina 3: 80%.
Horas estándar máquina 1: (.75)(320) = 240.
Horas estándar máquina 3: (.80)(320) = 256.
Horas estándar producto A: 1,620/9 = 180.
Horas estándar producto B: 2,000/10 = 200.
Horas estándar producto C: 1,800/8 = 225.
Horas estándar producto D: 1,750/10 = 175.
Oferta horas-estándar: 240 + 400 + 256 = 896.
Demanda horas-estándar: 180 + 200 + 225 + 175 = 780.
Matríz de ganancias:

	Máquina		
	1	2	3
Productos:			
A	- M	305 - 115 = 190	305 - 125 = 180
B	300 - 150 = 150	300 - 125 = 175	300 - 140 = 160
C	- M	285 - 105 = 180	285 - 130 = 155
D	290 - 135 = 155	290 - 120 = 170	290 - 145 = 145

Matríz de ganancias en términos estándar:

	Máquina		
Productos:	1	2	3
A	- M	(9)(190) = 1710	(9)(180) = 1620
B	(10)(150) = 1500	(10)(175) = 1750	(10)(160) = 1600
C	- M	(8)(180) = 1440	(8)(155) = 1240
D	(10)(155) = 1550	(10)(170) = 1700	(10)(145) = 1450

Definir: Eij como el número de horas estándar para producir el producto i, en la máquina j. i = 1, 2, 3, 4. j = 1, 2, 3.

Modelo:

$$\text{Maximizar } z = -ME_{11} + 1710E_{12} + 1620E_{13} + 1500E_{21} + 1750E_{22} + 1600E_{23}$$
$$- ME_{31} + 1440E_{32} + 1240E_{33} + 1550E_{41} + 1700E_{42} + 1450E_{43}$$

sa

$$E_{11} + E_{12} + E_{13} = 180$$
$$E_{21} + E_{22} + E_{23} = 200$$
$$E_{31} + E_{32} + E_{33} = 225$$
$$E_{41} + E_{42} + E_{43} = 175$$
$$E_{11} + E_{21} + E_{31} + E_{41} <= 240$$
$$E_{12} + E_{22} + E_{32} + E_{42} <= 400$$
$$E_{13} + E_{23} + E_{33} + E_{43} <= 256$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

FUNCION OBJETIVO: MAXIMIZAR

SOLUCION OPTIMA

INDICE	VARIABLE	VALOR
3	E13	180
5	E22	175
6	E23	25
8	E32	225
10	E41	175
13		65
15		51

GANANCIA = 1233100

INDICE	RESTRICCION	PRECIO SOMBRA
1	OFER1	0
2	OFER2	150
3	OFER3	0
4	DEM1	1620
5	DEM2	1600
6	DEM3	1290
7	DEM4	1550

INDICE	VARIABLE	COSTO REDUCIDO
1	E11	11620
2	E12	60
4	E21	100
7	E31	11290
9	E33	50
12	E43	100

RANGOS DE VARIACION EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCION OBJETIVO:

VARIABLE	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
E12	INFINITO	1710	1650
E13	1560	1620	INFINITO
E21	INFINITO	1500	1600
E22	1750	1750	1800
E23	1550	1600	1600
E32	1440	1440	INFINITO
E33	INFINITO	1240	1290
E41	1550	1550	INFINITO
E42	INFINITO	1700	1700
E43	INFINITO	1450	1550

RANGOS DE VARIACION EN LOS RECURSOS:

RESTRICCION	COTA MINIMA	VALOR ACTUAL	COTA MAXIMA
OFER1	175	240	INFINITO
OFER2	349	400	425
OFER3	205	256	INFINITO
DEM1	0	180	231
DEM2	175	200	251
DEM3	200	225	276
DEM4	0	175	240

Solución Optima:
Asignar 180 horas-estándar o 225 horas (180/0.8 = 225) para elaborar el producto A en la máquina 3.
Asignar 175 horas-estándar para elaborar el producto B en la máquina 2.
Asignar 25 horas-estándar o 31.25 horas para elaborar el producto B en la máquina 3.
Asignar 225 horas-estándar para elaborar el producto C en la máquina 2.
Asignar 175 horas-estándar o 233.33 horas para elaborar el producto D en la máquina 1.
Ganancia óptima = $1,233,100.

b) Sí, de acuerdo al tableau, la variable no básica E(4,2), tiene su z(j) - c(j) igual a cero.
c) La oferta de la máquina 2, su precio sombra es diferente de cero. La ganancia se incrementa en 150 unidades por unidad de incremento.
d) Las máquinas 1 y 3 presentan holguras en el punto de operación óptimo, mientras que la 2 se utiliza al máximo, operativamente hablando, son las que menos convienen.

TEMA 6:

2. b) Ruta Crítica: A —> D —> —> G, duración: 16 días.
Costo Total: $1,320.

c) Tabla de Costos:

	Normal		Compresión		
Actividad	Días	Costo	Días	Costo	Tasa de Costo
A	4	$100	3	$200	$100
B	7	280	5	520	120
C	3	50	2	100	50
D	5	200	3	360	80
E	2	160	2	160	--
F	10	230	8	350	60
G	7	200	5	480	140
H	2	100	1	200	100

Rutas tiempo mínimo-costo mínimo: A —> D —> G, A —> F y B —> G. Tiempo mínimo: 11 días. Costo mínimo: 2,100.
Reducir A y B un día.
Reducir D, G y F dos días.

d) Tabla de Costos Totales:

Días	Costos Directos	Costos Indirectos	Costos Totales
16	1320	1600	2920
15	1400	1500	2900
14	1480	1400	2880
13	1640	1300	2940
12	1840	1200	3040
11	2100	1100	3200

Rutas a costo mínimo: A —> F, B —> G y A —> D —> G. Duración: 14 días.
Costo total mínimo: $2,880.
Reducir D dos días.

3. b) Tabla de Tiempos:

Actividad	TTI	TTT	TRI	TRT	HT	HL
E	0	5	5	10	5	3
F	0	4	7	11	7	3
G	0	9	3	12	3	3
A	5	10	10	15	5	3
B	4	8	11	15	7	5
C	9	17	12	20	3	3
D	10	15	15	20	5	5

Ruta crítica: B --> C con 17 días de duración.

c) Las actividades E y A, pues presentan una mayor duración que las F y B, por lo tanto, son la que con una mayor probabilidad pueden tender a retrasar a D.

d) Los tiempos pueden ser .rroneos.
La ruta crítica puede estar subestimada en tiempo.

4. a) Tabla de Tiempos:

Actividad	TTI	TTT	TRI	TRT	HT	HL
1	0	3	1	4	1	0
2	0	4	1	5	1	0
3	0	4	0	4	0	0
4	4	7	4	7	0	0
5	4	6	5	7	1	1
6	7	9	7	9	0	0

Ruta crítica: 3 --> 4 --> 6. Duración: 9 módulos o 45 semanas.

b) Probablemente es muy bajo, ya que por lo regular existe un aprovechamiento bastante irregular en los estudiantes al inicio de los estudios, por lo que las primeras materias tenderán a existir retrasos en algunos.

5. Tiempo de arranque normal: 32 horas.
Tiempo de arranque con compresión: 24 horas a un costo de $3,100.
Tabla de Tiempos:

Actividad	TTI	TTT	TRI	TRT	HT	HL
A	4	12	14	22	10	6
B	4	16	4	16	0	0
C	0	4	10	14	10	0
D	0	4	0	4	0	0
E	16	18	16	18	0	0
F	18	20	22	24	4	4
G	18	24	18	24	0	0
H	24	28	24	28	0	0
I	28	32	28	32	0	0
J	28	30	30	32	2	2

Ruta crítica: D --> B --> E --> G --> H --> I.
Ruta tiempo mínimo-costo mínimo: D --> B --> E --> G --> H --> I.
Reducir: D e I a dos días de duración, E a uno y G a tres.

TEMA 7:

3\. a) D = 6,000.
C(0) = 2,000.
C(i) = (0.2)(1,250) = 250.
Precio = 1,250.
Q = 309 unidades.
Número de ordenes al año = 6,000/309 = 19.36.
Costo Total de Inventario = (1,250)(6,000) + (2,000)(6,000/309)
+ (250)(309/2)
= $7,577,459.67.

b) Punto de reorden = (6,000)(7)/365 = 115 unidades.

c) Ya que resulta más costoso ordenar, se espera que se reduzca en una cantidad muy pequeña el número de ordenes al año, incrementándose por consiguiente el volumen de las mismas.
Q = 347 unidades.
Número de Ordenes al año = 6,000/347 = 17.29.

d) Se decrementa, sin embargo el número de ordenes al año tenderá a aumentar.

4\. a) D = 2,400.
C(0) = 5,000.
C(i) = (0.2)(250/Q + 20).
Precio unitario = 250/Q + 20.
Tomando la fórmula:
Costo total anual = Costo de compra + Costo de mantenimiento
+ Costo de ordenar.
derivando y despejando, se obtiene:
Q = 1,122 unidades.
Costo total anual = $70,475.

b) Punto de reorden = (7)(2,400)/365 = 46 unidades.

c) Número de ordenes al año = 2,400/1,122 = 2.14.

d) El EOQ, el punto de reorden y el número de ordenes al año no cambian, ya que la razón es lineal.
El costo total anual se incrementa en: $2,400.

5\. Formular:

CF + 500CV = 270,000.
CF + 4,000CV = 1,950,000.
CF + 7,500CV = 3,630,000.

donde:
CF son los costos fijos de producción.
CV son los costos variables de producción.

Obteniendose: CV = 480.
CF = 30,000.

Por lo tanto, el costo de Q unidades es: 30,000 + 480Q.
El costo de una unidad es: 30,000/Q + 480.
R = 1,000 unidades a la semana o 50,000 al año.
D = 500 unidades a la semana o 25,000 al año.
C(i) = (0.25)(480) = 120.
C(0) anual = (30,000 + 480Q)(D/Q).

Costo total de inventario = Costo de ordenar
+ Costo de mantenimiento.
Costo total de inventario = (30,000 + 480Q)(25,000/Q)
+ (120)(Q)(1 - 1/2)/2.
Derivando se obtiene: Q = 5,000 unidades.
Número de corridas al a&o: 25,000/5,000 = 5.
Costo total de inventario = $12,300,000.

6. D = 1,436 mensuales o 17,232 anuales.
C(0) = 666.
C(1) = (0.4)(38) = 15.2.
Tama&o Optimo del Lote: 2,500.
Costo total de inventario = $664,156.6.
Número de pedidos al a&o: 17,232/2,500 = 6.89.

7. a) D = 1,500.
C(0) = 50,000.
C(1) = 2,000.
C(f) = 30,000.
Q = 283 unidades.
F = 18 unidades.
b) Cuando se tengan 15 ordenes faltantes.
(T = 283/1,500 = 0.18866, t(2) = (0.18866)(18)/283 = 0.012 de un a&o o 5 días, número de faltantes promedio = 18/5 = 3.6 unidades diarias. Dado que el pedido toma un día en llegar se considera que cuando existan (5)(3.6) = 15 unidades faltantes debe solicitarse.
c) Costo total de inventario = $530,335.69.

8. a), c), d) y e) elevado, ya que son artículos baratos y de gran consumo. b) entre un 80% y 90%, es un artículo caro, y es usual que el cliente tienda a esperar un período de entrega.

CAPITULO III: USO DEL PAQUETE DE PROGRAMACION LINEAL.

Computadoras del mundo, uníos!

JAMES MARTIN.

Introducción

En el desarrollo expuesto a lo largo del Capítulo II, se ha tratado de remarcar la importancia y utilidad que representa para cualquier investigador o profesional, dentro o fuera del campo de la Investigación de Operaciones, contar con una computadora. Sin embargo, no hay que pensar en esta como una "bola mágica" que va a indicar lo que debe hacerse, sino más bien como un valioso aliado que va a simplificar en gran medida el trabajo que se desarrolle, para ello, es necesario tener al menos conocimientos someros de su funcionamiento.

En este capítulo se pretende introducir al lector al conocimiento del uso de un paquete de computación, haciendo referencia a otros aspectos de interés que permitirán complementar el objetivo que se persigue. Asimismo, se espera motivarlo para que en su curiosidad por aprender más, incursione dentro del estudio y práctica del maravilloso mundo de la computación.

Computadoras y Lenguajes:

Aproximadamente en una década, el mercado de la computación ha presentado uno de los crecimientos más sorprendentes que se hayan registrado en la historia de la humanidad. En el pasado, ocasionalmente se llegaban a apreciar grandes monstruos electrónicos maniobrados por pequeños hombres de ciencia. En ese entonces, era necesario ser un gran experto para poder operar a las computadoras. Sin embargo, con el paso del tiempo, estas han venido a perder tamaño y a multiplicarse en número, e inclusive se ha llegado a hablar de la sobrepoblación de las computadoras!. Su uso se ha difundido tanto que hasta niños de primaria son capacez de operarlas sin por ello poseer conocimientos profundos sobre el tema. Afortunadamente, en México, el mercado de estas ha presentado gran aceptación, por lo que inclusive sus precios son bastante atractivos.

Una computadora presenta diferentes capacidades de almacenamiento de información, denominada memoria de la máquina. Esta se mide en bits o kilobits, aproximadamente, el lector puede pensar en un bit como el espacio que ocupa una letra. Así, 8 bits dentro de una computadora "representan" 8 letras, y 1,000 bits serán por lo tanto 800 letras aproximadamente.

Las computadoras trabajan bajo una representación binaria, es decir, toda la información que manejan está almacenada en claves compuestas por ceros y unos. Esta representación hace que las máquinas sean más eficientes y rápidas en su operación. Afortunadamente el lector, al operar una, no tiene por que preocuparse por estos detalles.

A grosso modo, una computadora es una máquina capaz de realizar diversos procedimientos (como operaciones aritméticas, elecciones lógicas, etc.) con gran velocidad y precisión. Para ello, es necesario que exista una comunicación entre el usuario y la misma computadora. Una manera de lograrlo es utilizando algún lenguaje de computación o a través de software.

Un lenguaje de computación, al igual que el espa&ol o el inglés, requiere ciertas reglas "gramaticales" o sintácticas, para que uno transmita a la computadora lo que esta debe realizar. Para ello, es necesario tener conocimiento de alguno. Sorprendentemente, es mas sencillo aprender cualquier lenguaje de computación que algún idioma. Debido a las diferentes aplicaciones de la computación, ha sido necesario crear lenguajes para fines específicos, y por ello el lector no deberá sorprenderse del gran número de estos, naturalmente cada uno posee diversos grados de dificultad. Los nombres de algunos lenguajes populares son: Basic, Fortran, Pascal, Cobol, Algol, PL/1 y APL.

De todos estos, el Basic puede considerarse como el denominador universal. Es decir, en este momento, más personas saben como programar en Basic que en algún otro lenguaje. Esto se debe, en parte, al grado de sencillez que posee. Desafortunadamente, este al igual que el Fortran, se consideran como lenguajes de bajo nivel por ser no estructurados, lo que significa que no es necesario seguir algún orden específico en su desarrollo.

El Cobol es uno de los lenguajes más utilizados dentro del campo de los negocios y procesos administrativos, por ejemplo, la elaboración de nóminas, actualizaciones de contrataciones, altas, bajas, cambios, etc. El Fortran, por su parte, se ha utilizado dentro de la ingeniería y en la elaboración de programas científicos. El Algol al igual que el APL, han sido utilizados más frecuentemente por los matemáticos dado su grado de sofisticación. El PL/1 fue creado con el objeto de reemplazar al Fortran y Cobol. El Pascal puede considerarse como el "justo medio", ya que aparte de ser un lenguaje estructurado resulta bastante accesible y poderoso en aplicaciones tanto científicas como administrativas.

El Basic y el Pascal fueron dise&ados para ense&ar computación. Ambos constituyen buenas elecciones para los principiantes, aunque por distintos motivos, para empezar, el Basic es mucho más fácil, parte por su dise&o y parte por la forma interactiva en que usualmente se aprende.

El hecho de aprender un lenguaje, radica en poder establecer una forma en la que puedan comunicarse las ideas del usuario a una máquina, a través de un programa. Una computadora, por lo general, es similar a una máquina de escribir, por lo tanto, el teclado es el medio que permitirá una comunicación con esta.

Un programa es una serie de instrucciones en las que se indica como deben hacerse las cosas y en que orden. Para comprender más claramente esto, imagine que se encuentra guiando a un invidente. Si por alguna circunstancia usted olvida indicarle la presencia de algun precipicio, el desenlace sin duda alguna, será trágico.

Si el usuario desea evitar por falta de conocimiento o por comodidad esta tarea, puede utilizar lo que se denomina software. El software, en general, es cualquier programa escrito con algún fin específico. En pocas palabras, es como comprar un pastel en lugar de prepararlo. En la actualidad, las compa&ías manufactureras han creado inmensas cantidades de software que permiten al usuario realizar casi lo que quiera sin necesidad de que conozca siquiera lo que es un lenguaje de computación.

Naturalmente existen diferentes clases de software denominadas amigables o no amigables. Esto se refiere al grado en que permiten al usuario utilizarlos, sin necesidad de poseer conocimientos profundos del tema. Mientras más amigable es un programa, el usuario puede emplearlo sin temor a saber que es lo siguiente que necesita hacer, pues el programa va guiandolo.

El software, o los programas que un usuario genera, se guardan por lo general, en diskettes (discos) o cintas. Estos accesorios son similares a los discos o cassettes comunes, en los que uno puede tocar y grabar la música que desee. De igual forma, los diskettes o las cintas son capaces de almacenar la información que bajo un formato ha sido introducida a una computadora.

Paquete de Cómputo para Administradores CAAMM Master:

Un paquete de computación es un conjunto de programas unidos a uno principal. El programa principal es un medio de comunicación para cada uno de los restantes que lo integran, de tal forma que el usuario, en primera instancia, tiene que "entrar" a este para realizar su elección para cualesquiera de los subsecuentes.

El paquete CAAM Master dise&ado para funcionar en microcomputadoras Apple, es una versión en Basic bastante útil para el alumno que incursiona dentro del Area de Estadística o Investigación de Operaciones. Para poder ser empleado, el usuario debe disponer de los siguientes accesorios:

- Una microcomputadora Apple IIplus, IIe o IIc con una capacidad mínima de memoria de 48K.
- Un monitor.
- En el caso de las microcomputadoras IIplus y IIe un drive (lector de discos).
- Una impresora (opcional).
- Un diskette (disco) donde se encuentre el paquete de cómputo.

Este paquete es lo suficientemente interactivo, por lo que aun una persona que no posea conocimientos de computación puede operarlo.

El paquete CAAM Master está integrado por tres programas unidos a uno principal, este último es el que introduce al lector al paquete. A continuación se presenta el desarrollo secuencial que este sigue; en su aplicación se ha decidido utilizar el ejemplo de la producción de cinturones de la Compa&ía Ahedo.

Para poder resolverlo lo único que necesita hacer el lector es seguir la siguiente secuencia de pasos:

1. Introducir el diskette en el drive de la computadora.

2. Encender el monitor de la computadora.

3. Encender la Impresora (opcional).

4. Encender la computadora.

5. Cuando aparezca una se&al que presente la forma: "^", debe digitar : "RUN CAAMM MASTER".

6. En ese momento el usuario escuchara cierta actividad por parte de la computadora, y después de unos segundos deberá apreciar el desplegado que se muestra en la figura 1. Si esto no ocurre, deberá repetir la secuencia antes indicada.

```
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
* P A Q U E T E   D E   C O M P U T O *
*                P A R A               *
*    A D M I N I S T R A D O R E S    *
*              ( C A A M )             *
*                 P O R                *
*          ROBERT  D.  CONTE           *
*         DE APPLE COMPUTER            *
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
      NOTAS INTRODUCTORIAS? (S/N)   S
```

Figura 1.

7. Si se desean notas introductorias, bastará con digitar la letra "S", en otro caso la tecla "N" o "RETURN". Con la letra "S", se obtiene la secuencia de desplegados mostrada en la figura 2.

   Bajo la opción "N" o "RETURN", se obtiene la mostrada en la figura 3, correspondiente al menú de opciones. Para que la computadora opere alguna, es necesario que el usuario indique su elección digitando uno de los números con que aparecen identificadas cada una de ellas.

```
        PAQUETE DE COMPUTO CAAM
        ======= == ======= ====

     EL PAQUETE DE COMPUTO CAAM, ESTA
  DISE&ADO PARA SATISFACER LAS
  NECESIDADES DE:

           ADMINISTRADORES Y ANALISTAS

     EL PAQUETE NO INCLUYE TODO EL
  ANALISIS DE CADA TECNICA, PERO DA LOS
  ELEMENTOS SUFICIENTES PARA ESTO. ESTAS
  SON:
           ANALISIS DE REGRESION

           PROGRAMACION LINEAL

           ANALISIS DE DECISIONES
  - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
       DE 'RETURN' PARA COMENZAR...

                ** NOTA **

       PARA MAYOR RAPIDEZ,

  TODA RESPUESTA DEL TIPO 'SI/NO' PUEDE
  SER CONTESTADA CON UNA 'S' PARA 'SI' O
  UNA 'N' O UN SIMPLE 'RETURN' PARA
  INDICAR 'NO' ...
  - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
       DE 'RETURN' PARA COMENZAR...
```

Figura 2.

```
           MENU CAAM MASTER
           ==== ==== ======

  UD. PUEDE SELECCIONAR LO SIGTE.:
  --- ----- ----------- -- ------

  1.   ANALISIS DE REGRESION

  2.   PROGRAMACION LINEAL

  3.   ANALISIS DE DECISIONES

  4.   ** SALIDA DEL PAQUETE **

           SELECCION?  2
```

Figura 3.

8. Digitar el número 2 (Programación Lineal). Después de cierta actividad de la computadora, el usua.io obtendrá en el monitor el desplegado que se muestra en la figura 4. El cual muestra las notas introductorias del programa, resultantes de elegir la opción "S".

```
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

          P R O G R A M A C I O N

                L I N E A L

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

     NOTAS INTRODUCTORIAS?  S

LA PROGRAMACION LINEAL, ES UTILIZADA
PARA DETERMINAR LA MEJOR ASIGNACION
DE RECURSOS ESCASOS, CON EL OBJETO DE:

      MAXIMIZAR GANANCIAS

      MINIMIZAR PERDIDAS

POR CITAR ALGUNOS EJEMPLOS
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
DE 'RETURN' PARA CONT, O 'Q' PARA SALIR
```

Figura 4.

En la figura 5 se presenta su menú incicial.

```
PARA CORRER UN MODELO LP, UD. PUEDE:
---- ------ -- ------ --  --  ------

1.    LEERLO DEL DISCO

2.    CREARLO INTERACTIVAMENTE
         (UTILIZANDO NOMBRES)

3.    CREARLO INTERACTIVAMENTE
         (UTILIZANDO NUMEROS)

        CUAL METODO?  2
```

Figura 5.

9. Si el modelo ha sido guardado en disco con anterioridad, el usuario puede "llamarlo" para su resolución digitando el número 1. La opción 2 permite crear un problema utilizando nemónicas tanto para las variables como para las restricciones. Por su parte, la última únicamente ofrece la posibilidad de que estos elementos sean denotados por números. En este caso se ha elegido la opción 2.

10. En la figura 6 se presentan las dos opciones que pueden darse en la optimización de un Modelo de Programación Lineal, dado que el problema es de maximización, la elección es la número 1.

```
PARA RESOLVER EL PROBLEMA, UD. PUEDE:
---- -------- -- -------- -- -----

       1.   MAXIMIZAR LA FUNCION OBJ.

  O    2.   MINIMIZAR LA FUNCION OBJ.

            OPCION? 1
```

Figura 6.

11. Hecho lo anterior, el paquete presenta algunas preguntas sobre los nombres que el usuario desea dar tanto a la función objetivo como a las variables y restricciones involucradas en el modelo, esto se muestra en la figura 7. El número máximo de dígitos se refiere a la magnitud de cada uno de los parámetros que se emplean; para hacer una elección, el usuario debe tomar en cuenta aquel que tenga la longitud máxima.

```
OBJETIVO QUE DESEA MAXIMIZAR?
(1-6 CARACTERES).

(EJEM. UTILIDADES, INGRESOS)

          GANANC

INDIQUE LAS VAR. (MAX 20) QUE AFECTAN A
GANANC, UTILIZANDO 1-6 CARACTERES:
PARA TERMINAR LA CAPTURA DE 2 'RETURN'.
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
X(1)        = CLUJO
X(2)        = CECON
X(3)        =
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
     CAMBIOS?  N
```

Figura 7.

```
INDIQUE LAS REST (MAX 20) QUE AFECTAN A
GANANC, UTILIZANDO 1-6 CARACTERES:
PARA TERMINAR LA CAPTURA DE 2 'RETURN'.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
R(1)        = TIEMP
R(2)        = PIEL.
R(3)        = HLUJO
R(4)        = HECON
R(5)        =
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
      CAMBIOS?  N

NUMERO MAX DE DIGITOS (1-15)?  5
```

Figura 7 (Cont.).

12. En la figura 8 se muestra la captura interactiva del modelo. Observe que únicamente es necesario digitar los valores de los parámetros y los signos de cada restricción. En caso de que alguno sea negativo, deberá teclearse adicionalmente el signo "-", en caso contrario podrá omitirse el "+". Para representar alguna de las condiciones siguientes: "<=", "=>" o "=" bastará con digitar únicamente "<", ">" o "=" respectivamente. Asimismo, advierta que cada vez que se captura alguna restricción o la función objetivo, el paquete da la oportunidad de efectuar cambios en caso de que se haya cometido algún error. Para realizar alguna modificación, bastará con digitar "S" y el programa dará la oportunidad de volver a capturar desde el principio a la restricción correspondiente.

```
CAPTURE EL COEF. POR CADA VARIABLE
DE 'RETURN' DESPUES DE CADA UNO
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

FUNCION OBJETIVO: MAXIMIZAR GANANC =...

CLUJO       CECON
400         300

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
      CAMBIOS?  N

              RESTRIC.  TIEMPO

CLUJO       CECON       < = >     LD.
2           1             <       1000

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
      CAMBIOS?  N
```

Figura 8.

RESTRIC. PIEL

CLUJO	CECON	< = >	LD.
1	1	<	800

- -

CAMBIOS? N

RESTRIC. HLUJO

CLUJO	CECON	< = >	LD.
1	0	<	400

- -

CAMBIOS? N

RESTRIC. HECON

CLUJO	CECON	< = >	LD.
0	1	<	700

- -

CAMBIOS? N

Figura 8 (Cont.).

13. Una vez que se haya capturado el modelo completo, el paquete presentará automaticamente el menú principal de este programa, presentado en la figura 9.

MODELO DE P.L.
------ -- ----

1. LISTA MODELO ACTUAL
2. EDICION DEL MODELO ACTUAL
3. SALVAR EL MODELO EN DISCO
4. CAPTURAR UN MODELO DIFERENTE
5. SALIR DEL PROGRAMA

6. RESOLVER EL PROBLEMA

OPCION? 1

Figura 9.

Bajo la opción 1 el usuario puede desplegar el modelo por pantalla o en la impresora, como se m..estra en la figura 10.

```
SALIDA A IMPRESORA?  S
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

MODELO PL ACTUAL: MAXIMIZAR GANANC
====== == ======

CLUJO      .CECON             LD.
400        300                0
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
2          1          <       1000
1          1          <       800
1          0          <       400
0          1          <       700
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    DE 'RETURN' PARA CONTINUAR...
```

Figura 10.

La 2 le permite efectuar las modificaciones que se presentan en la figura 11.

```
        FUNCIONES DE EDICION:
        --------- -- -------

1.      ELIMINAR UNA VARIABLE
2.      ELIMINAR UNA RESTRICCION

3.      A&ADIR UNA VARIABLE
4.      A&ADIR UNA RESTRICCION

5.      CAMBIAR COEFICIENTES POR VAR.
6.      CAMBIAR COEFICIENTES POR REST.
7.      CAMBIAR COEFICIENTE INDIVIDUAL

8.      CAMBIAR VALORES DEL LD.
9.      CAMBIAR FUNCION OBJFTIVO

10.     REGRESAR AL MENU PRINCIPAL

        OPCION?  1
```

Figura 11.

Con la 3 el usuario puede grabar el modelo que ha capturado en el diskette, para su uso futuro, esta secuencia se muestra en la figura 12.

SALVAR EL MODELO A DISCO
------ -- ------ - -----

SALVAR BAJO QUE NOMBRE? CINTU

Figura 12.

Si se elige la 4 el modelo actual se borrará y el usuario podrá realizar la captura de alguno nuevo.
La opción 5 le permite terminar la sesión.
Finalmente, con la 6 podrá resolver el modelo actual.
Siempre que el usuario elija las opciones 1, 2, 3 y 6, este regresará al menú principal. Si escoge la 4, apreciará el desplegado de la figura 6. Con la 5 obtendrá el mostrado en la figura 1.

14. Bajo la opción 6 el usuario obtendrá el menú de salida que se muestra en la figura 13.

OPCIONES DE SALIDA (S/N)
-------- -- ------

1.	IMPRESION?	S
2.	TABLEAU INICIAL?	S
3.	SOLS. BASICAS INTERMEDIAS?	S
4.	TABLEAU FINAL?	S

CAMBIOS? N

Figura 13.

En esta aparecen las elecciones hechas en cada caso y cuyos resultados se encuentran mostrados en la figura 14. Observe que en cada apartado, se muestran las soluciones de cada una de las variables iteración por iteración. La solución óptima está identificada de la siguiente manera:

** SOLUCION MAXIMA **

La solución dual óptima (precios sombra de cada uno de los recursos) y el tableau óptimo es información adicional que acompaña a la solución óptima del Modelo de Programación Lineal.

Advierta que en el primer renglón del tableau, aparece la identificación de cada una de las variables involucradas en el modelo, en el segundo se presentan los valores de los z(j) - c(j), o costos reducidos. Los restantes representan las tasas de sustitución para cada variable por recurso, en la solución óptima.

```
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
              VARIABLES:
              =========

LAS VAR. DE DECISION SON          1-2

1     CLUJO
2     CECON

LAS VAR. DE HOLGURA SON           3-6
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    DE 'RETURN' PARA CONTINUAR...

             TABLEAU INICIAL
             ======= =======

X(1)     X(2)     X(3)     X(4)     X(5)
-400     -300     0        0        0
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
2        1        1        0        0
1        1        0        1        0
1        0        0        0        1
0        1        0        0        0
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    DE 'RETURN' PARA CONTINUAR...

X(6)     LD.
0        0
- - - - - - - -
0        1000
0        800
0        400
1        700
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    DE 'RETURN' PARA CONTINUAR...
```

Figura 14.

```
   SOL. BASICA FACTIBLE INICIAL
   ==== ====== ======== =======

INDICE  VARIABLE          VALOR
------  --------          -----
3                         1000
4                         800
5                         400
6                         700
** GANANC = 0
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    DE 'RETUPN' PARA CONTINUAR...

  SOL. BASICA F^CTIBLE, ITERACION 1
  ==== ====== ========= =========

INDICE  VARIABLE          VALC?
------  --------          -----
1       CLUJO             400
3                         200
4                         400
6                         700
** GANANC = 160000
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    DE 'RETURN' PARA CONTINUAR...

  SOL. BASICA FACTIBLE, ITERACION 2
  ==== ====== ========= =========

INDICE  VARIABLE          VALOR
------  --------          -----
1       CLUJO             400
2       CECON             200
4                         200
6                         500
** GANANC = 220000
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    DE 'RETURN' PARA CONTINUAR...
```

Figura 14 (Cont.).

```
  SOL. BASICA FACTIBLE, ITERACION 3
  === ====== ========   =========

INDICE   VARIABLE         VALOR
------   --------         -----
1        CLUJO            200
2        CECON            600
5                         200
6                         100
** GANANC = 260000

*** SOLUCION MAXIMA ***
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    DE 'RETURN' PARA CONTINUAR...

SOLUCION DUAL OPTIMA
======== ==== ======

INDICE   RESTRICCION      PRECIO SOMBRA
------   -----------      ------ ------
1        TIEMP            100
2        PIEL.            200
3        HLUJO            0  (BIEN LIBRE)
4        HECON            0  (BIEN LIBRE)
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    DE 'RETURN' PARA CONTINUAR...

           TABLEAU OPTIMO
           ------- ------

X(1)     X(2)     X(3)     X(4)     X(5)
0        0        100      200      0
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
0        1        -1       2        0
0        0        -1       1        1
1        0        1        -1       0
0        0        1        -2       0
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    DE 'RETURN' PARA CONTINUAR...

X(6)     LD.
0        260000
- - - - - - - -
0        600
0        200
0        200
1        100
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    DE 'RETURN' PARA CONTINUAR...
```

Figura 14 (Cont.).

15. En la figura 15 se muestra la secuencia de salida del paquete.

```
            MODELO DE P.L.
            ------ -- ----

        1.  LISTA MODELO ACTUAL

        2.  EDICION DEL MODELO ACTUAL

        3.  SALVAR EL MODELO EN DISCO

        4.  CAPTURAR UN MODELO DIFERENTE

        5.  SALIR DEL PROGRAMA

        6.  RESOLVER EL PROBLEMA

                 OPCION?  5

        * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
        *P A Q U E T E   D E   C O M P U T O*
        *               P A R A                *
        *    A D M I N I S T R A D O R E S     *
        *             ( C A A M )              *
        *                P O R                 *
        *          ROBERT  D.  CONTE           *
        *          DE APPLE COMPUTER           *
        * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

        NOTAS INTRODUCTORIAS? (S/N)   N
```

Figura 15.

MENU CAAM MASTER
==== ==== ======

UD. PUEDE SELECCIONAR LO SIGTE.:

1. ANALISIS DE REGRESION

2. PROGRAMACION LINEAL

3. ANALISIS DE DECISIONES

4. ** SALIDA DEL PAQUETE **

SELECCION? 4

GRACIAS...

OJALA HAYA OBTENIDO LO QUE NECESITA!!!

Figura 15 (Cont.).

El paquete de cómputo, está restringido a 20 variables de decisión y a 20 restricciones como máximo. Cabe aclarar que el usuario no debe preocuparse por estandarizar el problema, en forma previa a la aplicación del paquete, pues este lo hace en forma automática. Asimismo, indica los índices de las variables de decisión, holgura, exceso y artificiales involucradas en el modelo.

Paquete de Cómputo MILP88:

Como el lector pudo apreciar, el paquete anterior presenta una excelente ayuda para el investigador que desea evitar el tedioso proceso de resolución de un Modelo de Programación Lineal. Sin embargo, este no proporciona toda la información a que se ha hecho referencia (límites de variación en el volumen de los recursos y costos), no obstante estos pueden ser calculados a partir del tableau final, para ello el lector puede consultar las referencias correspondientes, indicadas al final del capítulo.

En nuestro caso, esta información fue obtenida utilizando una versión comercial del Paquete de Programación Lineal y Entera MILP88.

MILP88 es un programa que opera en microcomputadoras IBM, o cualquier otra máquina compatible que utilice el sistema operativo DOS. Las opciones que este presenta son las siguientes:

- Resolución de problemas de Programación Lineal con un máximo de 255 restricciones y 2255 variables.

- Resolución de problemas de Programación Entera.

- Solución Dual Optima.

- Análisis de Sensibilidad en los costos de la función objetivo.

- Análisis de Sensibilidad en cada uno de los recursos.

- Resolución de problemas previamente capturados (grabados en disco).

y otras opciones que lo convierten en un paquete bastante poderoso.

Para poder utilizarlo se requiere del siguiente equipo:

- Una computadora IBM o cualquier otra máquina compatible con 128K de memoria como mínimo.

- Un monitor de 80 columnas.

- Un lector de discos.

- Una impresora (opcional).

Para su ejecución el usuario deberá insertar previamente el diskette con el sistema operativo DOS y encender la computadora. Después de cierta actividad en el disco, se apreciarán desplegados en los que se pregunta: la fecha y la hora correspondiente. Hecho lo anterior, aparecerá en la pantalla la siguiente se&al: A>, indicando que la máquina se encuentra lista para ejecutar las i: ;tru ciones que el usuario indique.

Este deberá insertar el diskette de trabajo, es decir, aquel que tenga grabado el paquete de cómputo MILP88, y digitar:

```
A>TYPE MILP88.DOC
```

con lo que aparecerá en la pantalla, el conjunto de instrucciones que componen al manual de uso del paquete, el cual puede ser impreso habiendo digitado en forma previa las teclas 'Control' y 'P' al mismo tiempo.

Los paquetes antes indicados presentan un objetivo común: ser AUXILIARES en la resolución numérica de un Problema de Programación Lineal. Analogamente buscan proporcionar al investigador información que le permita desarrollar su comprensión del problema que enfrenta.

Es importante hacer notar que aunque los problemas correspondientes a los Modelos de Transporte y Asignación poseen técnicas más eficientes que el método simplex para su tratamiento, también pueden ser resueltos utilizando a este último, como es nuestro caso. Dada la magnitud de estos modelos (generalmente grande aún para problemas peque&os), en su resolucion se utilizó el paquete de cómputo MILP88, que permite un elevado manejo de variables de decisión en comparación con el CAAM Master.

Otros Programas Utiles:

Existen programas de cómputo de "biblioteca", que pueden ser facilmente implantados en una computadora por el mismo usuario (no es el caso de los paquetes antes indicados). A continuación se presentan dos programas complementarios en Basic, que permitirán al lector resolver problemas de Ruta Crítica, Pert y Modelos Clásicos de Inventario. Se ha procurado que estos sean amigables en términos "elementales".

Ruta Crítica, Pert:

Este programa de cómputo es razonablemente peque&o para que el lector lo capture en una microcomputadora, para ello, deberá digitarlo tal y como se presenta en el listado. Ninguna línea deberá ser omitida o intercambiada de lugar. Se recomienda que durante el proceso de captura el lector acostumbre salvar periódicamente (cada 10 líneas) el programa digitando:

SAVE CPM

cada vez que lo haga podrá apreciar cierta actividad en la computadora, cuando esta se detenga podrá proseguir con la operación de captura a partir de la línea en que la interrumpió para salvar al programa. Si por algún motivo recibe algun mensaje de error, deberá digitar nuevamente la línea, si alguna equivocación fué cometida durante la digitación, esta podrá ser corregida capturando nuevamente la línea errónea.

El programa esta escrito en un Basic estándar, por lo que puede utilizarse en otras microcomputadoras. Las únicas modificaciones que pueden presentarse radican en las instrucciones "HOME" y salida a impresora, la primera es utilizada para borrar la pantalla, algunas máquinas utilizan en su lugar la instruccion "CLS", la segunda emplea la instruccion "PR#1" que puede variar entre computadoras, se recomienda al lector la consulta del manual de operación de la computadora respectivo en la sección de palabras reservadas, para que efectúe las modificaciones pertinentes.

El programa puede correrse indicando:

RUN CPM

el lector podrá apreciar el menú principal que se muestra en la figura 16. Para ejemplificar su uso, se utilizará un ejemplo correspondiente a PERT.

```
(1) RUTA CRITICA
(2) PERT
(3) SALIDA DEL PROGRAMA
DE OPCION  2
```

Figura 16.

Considere el siguiente cuadro de actividades y duraciones:

Actividad	a	m	b	Predecesora	Nodo Inicio	Nodo Terminación
A	3	4	5	-	1	2
B	2	3	4	-	1	3
C	3	4	11	A	2	5
FICTICIA	0	0	0	A	2	3
D	2	4	6	A, B	3	4
G	3	3	3	D	4	6
FICTICIA	0	0	0	D	4	5
E	3	5	7	A, C, D	5	7
F	1	3	11	C, D	5	6
H	1	2	3	F, G	6	7

Cada vez que el usuario desee que la máquina acepte la información digitada, este deberá oprimir la tecla 'RETURN'. En la figura 17 puede apreciarse el desplegado que pregunta el número de actividades que integran a la red (10), acompañado de la correspondiente captura de la información de cada una.

```
                 P E R T

NUMERO DE ACTIVIDADES EN LA RED?  10

------------ ACTIVIDAD  1 ------------
NODO DE INICIO................1
NODO DE TERMINACION...........2
TIEMPO OPTIMISTA (A)..........3
TIEMPO MAS PROBABLE (M).......4
TIEMPO PESIMISTA (B)..........5
COSTO ACTIVIDAD...............0
------------ ACTIVIDAD  2 ------------
NODO DE INICIO................1
NODO DE TERMINACION...........3
TIEMPO OPTIMISTA (A)..........2
TIEMPO MAS PROBABLE (M).......3
TIEMPO PESIMISTA (B)..........4
COSTO ACTIVIDAD...............0
------------ ACTIVIDAD  3 ------------
NODO DE INICIO................2
NODO DE TERMINACION...........3
TIEMPO OPTIMISTA (A)..........0
TIEMPO MAS PROBABLE (M).......0
TIEMPO PESIMISTA (B)..........0
COSTO ACTIVIDAD...............0
```

Figura 17.

```
----------- ACTIVIDAD  4 -----------
NODO DE INICIO................2
NODO DE TERMINACION...........5
TIEMPO OPTIMISTA (A)..........3
TIEMPO MAS PROBABLE (M).......4
TIEMPO PESIMISTA (B)..........11
COSTO ACTIVIDAD...............0
----------- ACTIVIDAD  5 -----------
NODO DE INICIO................3
NODO DE TERMINACION...........4
TIEMPO OPTIMISTA (A)..........2
TIEMPO MAS PPOBABLE (M).......4
TIEMPO PESIMISTA (B)..........6
COSTO ACTIVIDAD...............0
----------- ACTIVIDAD  6 -----------
NODO DE INICIO................4
NODO DE TERMINACION...........5
TIEMPO OPTIMISTA (A)..........0
TIEMPO MAS PROBABLE (M).......0
TIEMPO PESIMISTA (B)..........0
COSTO ACTIVIDAD...............0
----------- ACTIVIDAD  7 -----------
NODO DE INICIO................4
NODO DE TERMINACION...........6
TIEMPO OPTIMISTA (A)..........3
TIEMPO MAS PROBABLE (M).......3
TIEMPO PESIMISTA (B)..........3
COSTO ACTIVIDAD...............0
----------- ACTIVIDAD  8 -----------
NODO DE INICIO................5
NODO DE TERMINACION...........6
TIEMPO OPTIMISTA (A)..........1
TIEMPO MAS PROBABLE (M).......3
TIEMPO PESIMISTA (B)..........11
COSTO ACTIVIDAD...............0
----------- ACTIVIDAD  9 -----------
NODO DE INICIO................5
NODO DE TERMINACION...........7
TIEMPO OPTIMISTA (A)..........3
TIEMPO MAS PROBABLE (M).......5
TIEMPO PESIMISTA (B)..........7
COSTO ACTIVIDAD...............0
----------- ACTIVIDAD 10 -----------
NODO DE INICIO................6
NODO DE TERMINACION...........7
TIEMPO OPTIMISTA (A)..........1
TIEMPO MAS PROBABLE (M).......2
TIEMPO PESIMISTA (B)..........3
COSTO ACTIVIDAD...............0
```

Figura 17 (Cont.).

El usuario deberá tener el cuidado de introducir a la máquina en orden sucesivo, con respecto a los nodos, la información para cada una de las actividades. Cualquier error podrá corregirse al final o con la salida del programa, la primera una vez que los resultados (con el error) hayan sido obtenidos y el programa pregunte sobre modificaciones en la red, y la segunda apretando las teclas 'CONTROL' y 'RESET' al mismo tiempo; esta última borrará toda la información capturada obligando al usuario a comenzar, digitando en primera instancia:

RUN

Una vez capturada la información, el programa presenta un desplegado en el que se pregunta si el usuario desea la impresión de los resultados. En la figura 18 se muestra el formato de salida, el cual contiene los resultados que permitirán al investigador realizar el análisis correspondiente, es decir:

- Duración estimada de la actividad identificada segun los nodos inicial y final.
- Desviacion estándar (DESV EST) para cada actividad.
- Tiempo temprano de inicio (TTI).
- Tiempo temprano de terminación (TTT).
- Tiempo remoto de inicio (TRI).
- Tiempo remoto de terminación (TRT).
- Holgura total (HT).
- Holgura libre (HL).
- Identificación de aquellas actividades críticas, con el desplegado:

*** ACTIVIDAD CRITICA ***

- Longitud de la ruta crítica.
- La dispersión (desviación estándar) de esta cifra.
- El costo total del proyecto.

```
SALIDA A IMPRESORA? (S/N)  S

ACTIVIDAD 1 (NODO 1 AL NODO 2)
DURACION  4
DESV EST  .111
TTI = 0                   TTT = 4
TRI = 0                   TRT = 4
HT = 0                    HL = 0
*** ACTIVIDAD CRITICA ***
---------------------------------------
ACTIVIDAD 2 (NODO 1 AL NODO 3)
DURACION  3
DESV EST  .111
TTI = 0                   TTT = 3
TRI = 2                   TRT = 5
HT = 2                    HL = 1
---------------------------------------
```

Figura 18.

```
^CTIVIDAD 4 (NODO 2 AL NODO 5)
DURACION  5
DESV EST  1.777
TTI = 4                    TTT = 9
TRI = 4                    TRT = 9
HT = 0                     HL = 0
*** ACTIVIDAD CRITICA ***
---------------------------------------
ACTIVIDAD 5 (NODO 3 AL NODO 4)
DURACION  4
DESV EST  .444
TTI = 4                    TTT = 8
TRI = 5                    TRT = 9
HT = 1                     HL = 0
---------------------------------------
ACTIVIDAD 7 (NODO 4 AL NODO 6)
DURACION  3
DESV EST  0
TTI = 8                    TTT = 11
TRI = 10                   TRT = 13
HT = 2                     HL = 2
---------------------------------------
ACTIVIDAD 8 (NODO 5 AL NODO 6)
DURACION  4
DESV EST  2.777
TTI = 9                    TTT = 13
TRI = 9                    TRT = 13
HT = 0                     HL = 0
*** ACTIVIDAD CRITICA ***
---------------------------------------
ACTIVIDAD 9 (NODO 5 AL NODO 7)
DURACION  5
DESV EST  .444
TTI = 9                    TTT = 14
TRI = 10                   TRT = 15
HT = 1                     HL = 1
---------------------------------------
ACTIVIDAD 10 (NODO 6 AL NODO 7)
DURACION  2
DESV EST  .111
TTI = 13                   TTT = 15
TRI = 13                   TRT = 15
HT = 0                     HL = 0
*** ACTIVIDAD CRITICA ***
---------------------------------------
LONGITUD DE LA RUTA CRITICA...15
MAS MENOS..................... 2.19
COSTO TOTAL DEL PROYECTO...... 0
---------------------------------------
```

Figura 18 (Cont.).

En la pregunta:

```
DE DURACION ESTIMADA
(O A LA TERMINACION).........
```

el usuario puede presentar sus especulaciones de que el proyecto sea finalizado en una fecha determinada. A esta el programa proporcionará la probabilidad correspondiente. Por ejemplo, para una duración estimada de 18 días, puede obtenerse el resultado mostrado en la figura 19.

```
DE DURACION ESTIMADA
(O A LA TERMINACION)..........18
SALIDA A IMPRESORA? (S/N)  S

LA PROBABILIDAD DE TERMINAR EL PROYECTO
DENTRO DE UN PLAZO DE 18
DIAS, ES .91

OTRO CALCULO? (S/N)  N

OPRIMA CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR  S
```

Figura 19.

Si ya no se requiere otro cálculo, el usuario en la siguiente opción tiene la oportunidad de editar el modelo, esta opción se muestra en la figura 20. Para ello tendrá que digitar, según la actividad que desee modificar, la misma información que se le preguntó durante la captura original. El programa de nueva cuenta presentará los resultados antes indicados bajo las mismas opciones. En caso de que la respuesta a esta pregunta sea negativa, el programa regresará al usuario al menú original.

```
ALGUN CAMBIO EN LA DURACION DE
LAS ACTIVIDADES? (S/N)  S
CUAL ACTIVIDAD?  1

NUEVO TIEMPO OPTIMISTA (A)....3
NUEVO TIEMPO MAS PROBABLE (M).8
NUEVO TIEMPO PESIMISTA (B)....10
NUEVO COSTO...................0
```

Figura 20.

El CPM (opción 1) presenta, en general, una filosofía similar a la antes expuesta, a excepción de que en este caso únicamente se efectua una pregunta para el tiempo de duración de cada actividad.

La tercera y última opción, es la salida del programa, el usuario deberá elegirla una vez que haya terminado. El programa esta restringido a un máximo de 100 actividades.

LISTADO DEL PROGRAMA:

```
10  REM  RUTA CRITICA Y PERT
20  DIM A(100,2),S(100),F(100),E(100,2),C(100,2),V(100)
30  HOME : VTAB (4): PRINT  TAB( 10);"(1) RUTA CRITICA": VTAB (8): PRINT
     TAB( 10);"(2) PERT": VTAB (12): PRINT  TAB( 10);"(3) SALIDA DEL PRO
    GRAMA": VTAB (16): HTAB (10): INPUT "DE OPCION ";O
40  IF O = 1 THEN 810
50  IF O = 2 THEN 820
55  IF O <  > 3 THEN 30
60  GOTO 800
70  FOR I = 1 TO N
80  IF S(A(I,2)) >  = S(A(I,1)) + E(I,1) THEN 100
90 S(A(I,2)) = S(A(I,1)) + E(I,1)
100  NEXT I
110 F(A(N,2)) = S(A(N,2))
120  FOR I = N TO 1 STEP  - 1
130  IF F(A(I,1)) = 0 THEN 160
140  IF F(A(I,1)) > F(A(I,2)) - E(I,1) THEN 160
150  GOTO 170
160 F(A(I,1)) = F(A(I,2)) - E(I,1)
170  NEXT I
180 C1 = 0:V = 0:J = 0: HOME
190  GOSUB 990
200  IF A$ = "N" THEN 230
210  IF A$ <  > "S" THEN 190
220  GOSUB 1000
230  HOME
240  FOR I = 1 TO N
250  IF E(I,1) = 0 THEN 440
260 D1 =  INT (E(I,1) * 1E + 3) / 1E + 3
270 IT =  INT (S(A(I,1)) * 1E + 3) / 1E + 3:TT = IT + D1
280 IR =  INT ((F(A(I,2)) - E(I,1)) * 1E + 3) / 1E + 3:TR = IR + D1
290 HT = TR - TT:HL =  INT ((S(A(I,2)) - TT) * 1E + 3) / 1E + 3
300  PRINT : PRINT "ACTIVIDAD ";I;" (NODO ";A(I,1);" AL NODO ";A(I,2);")
     "
310  PRINT : PRINT "DURACION ";D1
320  IF O = 1 THEN 350
330 EST =  INT ( SQR (V(I)) * 1E + 3) / 1E + 3
340  PRINT "DESV EST  ";EST
350  PRINT "TTI = ";IT; TAB( 20);"TTT = ";TT
360  PRINT "TRI = ";IR; TAB( 20);"TRT = ";TR
370  PRINT "HT = ";HT; TAB( 20);"HL = ";HL
```

```
380  IF NT <  > 0 THEN 400
390 V = V + V(I): PRINT "*** ACTIVIDAD CRITICA ***"
400  PRINT : PRINT "----------------------------------------"
410 C1 = C1 + E(I,2): IF A$ = "S" THEN 440
420 J = J + 9: IF J < 18 THEN 440
430  VTAB (24): INPUT "OPRIMA CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR ";R$:J = 0:
    HOME
440  NEXT I
450  IF A$ = "S" THEN 470
460  VTAB (24): INPUT "OPRIMA CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR ";R$
470  HOME : PRINT "LONGITUD DE LA RUTA CRITICA...";F(A(N,2))
480  IF O = 1 THEN 500
490  PRINT : PRINT "MAS MENOS..... ...............   "; INT ( SQR (V) *
    1E + 3) / 1E + 3
500  PRINT : PRINT "COSTO TOTAL DEL PROYECTO..... ";C1
510  PRINT "----------------------------------------"
520  IF O = 1 THEN 640
530  PRINT : PRINT "DE DURACION ESTIMADA": INPUT "(O A LA TERMINACION)..
    ........";D: IF D <  = 0 THEN 640
540 Y = (D - F(A(N,2))) /  SQR (V):R =  EXP ( - (Y ^ 2) / 2) / 2.5066282
    746
550 Z = Y:Y = 1 / (1 + .33267 *  ABS (Y)):T = 1 - R * (.4361836 * Y - .1
    201676 * Y ^ 2 + .937298 * Y ^ 3)
560  IF Z >  = 0 THEN 620
570 T = 1 - T
580  GOSUB 990
590  IF A$ = "N" THEN 620
600  IF A$ <  > "S" THEN 580
610  GOSUB 1000
620  PRINT : PRINT "LA PROBABILIDAD DE TERMINAR EL PROYECTO": PRINT "DEN
    TRO DE UN PLAZO DE ";D: PRINT "DIAS, ES ";T
630  INPUT "OTRO CALCULO? (S/N) ";R$: IF R$ = "S" THEN 530
640  VTAB (24): INPUT "OPRIMA CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR ";R$: HOME
    : PRINT "ALGUN CAMBIO EN LA DURACION DE": INPUT "LAS ACTIVIDADES? (S
    /N) ";R$
650  IF R$ = "S" THEN 670
660  IF R$ = "N" THEN 30
670  PRINT : INPUT "CUAL ACTIVIDAD? ";I: PRINT
680  IF I < 1 THEN 670: IF I > P THEN 670
690  IF O = 2 THEN 750
700  PRINT "DURACION Y COSTO": PRINT "ACTUALES: ";E(I,1);"  ,$";E(I,2): PRINT
    "----------------------------------------": PRINT
710  INPUT "NUEVA DURACION................";E(I,1)
720  INPUT "NUEVO COSTO..................";E(I,2)
730  HOME : PRINT "CALCULO DE LA RED MODIFICADA": PRINT "--------------
    --------------------------": FOR I = 1 TO N:S(I) = 0:F(I) = 0: NEXT I

740  GOTO 70
750  HOME : INPUT "NUEVO TIEMPO OPTIMISTA (A)....";A: INPUT "NUEVO TIEMP
    O MAS PROBABLE (M).";M: INPUT "NUEVO TIEMPO PESIMISTA (B)....";B
760  INPUT "NUEVO COSTO..................";E(I,2)
```

```
770 E(I,1) =  INT ((A + 4 * M + B) / 6 * 1E + 3) / 1E + 3
780 V(I) =  INT (((B - A) / 6) ^ 2 * 1E + 3) / 1E + 3
790  GOTO 730
800  HOME : END
810  HOME : HTAB (8): PRINT "R U T A     C R I T I C A": GOTO 830
820  HOME : HTAB (16): PRINT "P E R T"
830  VTAB (10): INPUT "NUMERO DE ACTIVIDADES EN LA RED?  ";N
840  FOR I = 1 TO N:V(I) = 0
850  HOME : PRINT "----------- ACTIVIDAD  ";I;" -----------": PRINT : INPUT
    "NODO DE INICIO................";A(I,1)
860  INPUT "NODO DE TERMINACION...........";A(I,2)
870  IF A(I,2) <  = A(I,1) THEN 890
880  IF A(I,2) < N THEN 920
890  PRINT "ERROR EN LA DENOMINACION DE LOS NODOS": PRINT  TAB( 5);"***
    INTENTE   DE   NUEVO ***"
900  VTAB (24): INPUT "PRESIONE LA TECLA 'S' PARA CONTINUAR ";S$: IF S$ <
    > "S" THEN 900
910  PRINT : GOTO 850
920  IF O = 2 THEN 940
930  INPUT "DURACION ACTIVIDAD............";E(I,1): GOTO 960
940  INPUT "TIEMPO OPTIMISTA (A)..........";A: INPUT "TIEMPO MAS PROBABL
    E (M).......";M: INPUT "TIEMPO PESIMISTA (B)..........";B
950 E(I,1) =  INT ((A + 4 * M + B) / 6 * 1E + 3) / 1E + 3:V(I) =  INT ((
    (B - A) / 6) ^ 2 * 1E + 3) / 1E + 3
960  INPUT "COSTO ACTIVIDAD...............";E(I,2)
970 S(I) = 0:F(I) = 0: NEXT I
980  GOTO 70
990  HOME : VTAB (12): INPUT "SALIDA A IMPRESORA? (S/N) ";A$: RETURN
1000  PRINT " ": PR# 1: RETURN
```

Inventarios:

Este programa, al igual que el anterior, puede capturarse y salvarse con el nombre INVENT (es decir, SAVE INVENT), para utilizarlo, deberá digitarse:

RUN INVENT

Para mostrar su funcionamiento se utilizará el ejemplo 7.5 (correspondiente al EOQ con descuentos), las opciones restantes guardan la misma filosofía. En la figura 21 se muestra el menú principal del programa, en este pueden apreciarse los nombres de los modelos determinísticos estudiados.

```
(1) MODELO DEL LOTE ECONOMICO (EOQ)
(2) EOQ CON REABASTECIMIENTO UNIFORME
(3) EOQ CON FALTANTES
(4) EOQ CON DESCUENTOS
(5) MODELO CON PERIODO FIJO DE REORD.
(6) SALIDA DEL PROGRAMA
DE OPCION  4
```

Figura 21.

La figura 22 muestra la captura de la información como la solicita el programa. El usuario debe tomar en cuenta que los límites no deben cruzarse para cada uno de los descuentos. El costo de mantenimiento debe capturarse SIEMPRE en forma porcentual de acuerdo al precio del producto (lo mismo se aplica para cada una de las opciones restantes), es decir, si este representa el 15% del precio del producto, deberá capturarse la cifra 15.

```
  (4) EOQ CON DESCUENTOS
---------------------------------------
NUMERO DE DESCUENTOS?.....5
LIMISTES DE LOS DESCUENTOS:
DESCUENTO 1:
MINIMO....................1
MAXIMO....................499
PRECIO....................30
DESCUENTO 2:
MINIMO....................500
MAXIMO....................599
PRECIO.................... 27
DESCUENTO 3:
MINIMO....................600
MAXIMO....................699
PRECIO....................25.5
```

Figura 22.

```
DESCUENTO 4:
MINIMO...................700
MAXIMO...................999
PRECIO...................24.9
DESCUENTO 5:
MINIMO...................1000
MAXIMO...................10000
PRECIO...................24.6
COSTO DE ORDENAR..........350
COSTO DE MANTENIMIENTO....20
DEMANDA ANUAL.............1800
TIEMPO DE ENTREGA (DIAS)..7
```

Figura 22 (Cont.).

La siguiente opción corresponde a la impresión de los resultados, que se muestran en la figura 23. Cada vez que se efectue una corrida completa, el programa regresa al menú principal para que el usuario escoja su siguiente elección.

```
SALIDA A IMPRESORA? (S/N)  S

  (4) EOQ CON DESCUENTOS
--------------------------------------
CANTIDAD A ORDENAR       1000
NO. DE ORDENES AL A&O 1.8
PUNTO DE REORDEN         34
COSTO TOT. ANUAL         47370
COSTO TOT. DE INV.       3090
COSTO ANUAL DE ORD.      630
COSTO ANUAL DE MANT.     2460
--------------------------------------
```

Figura 23.

La salida del programa deberá indicarse siempre y cuando este se haya terminado de utilizar, si llegara a digitarse por error, bastará con dar la instrucción:

RUN

para volver a empezar con la corrida. El programa esta restringido a 10 descuentos sucesivos.

LISTADO DEL PROGRAMA:

```
10  REM  MODELOS DE INVENTARIO
20  DIM Q(2,10),U(10),EOQ(10),K(10)
30  HOME : PRINT  TAB( 3)"(1) MODELO DEL LOTE ECONOMICO (EOQ)": VTAB (4)
    : PRINT  TAB( 3)"(2) EOQ CON REABASTECIMIENTO UNIFORME": VTAB (8): PRINT
     TAB( 3)"(3) EOQ CON FALTANTES": VTAB (12): PRINT  TAB( 3)"(4) EOQ C
    ON DESCUENTOS"
40  VTAB (16): PRINT  TAB( 3)"(5) MODELO CON PERIODO FIJO DE REORD.": VTAB
    (20): PRINT  TAB( 3)"(6) SALIDA DEL PROGRAMA": VTAB (24): HTAB (3): INPUT
    "DE OPCION ";O
50  IF O = 2 THEN 160
60  IF O = 3 THEN 240
70  IF O = 4 THEN 320
80  IF O = 5 THEN 510
90  IF O = 6 THEN 560
100  IF O <  > 1 THEN 30
110  GOSUB 570: PRINT : GOSUB 630: GOSUB 800
120  GOSUB 750:Q =  SQR (2 * DA * CO / C1)
130 CTI = C1 * Q:KO = CTI / 2:KM = KO: GOSUB 760: GOSUB 670
140  GOSUB 570: GOSUB 770: GOSUB 720
150  GOTO 550
160  GOSUB 580: GOSUB 630
170  INPUT "REABASTECIMIENTO ANUAL....";RA
180  GOSUB 790
190  GOSUB 750:Q =  SQR (2 * DA * CO / ((1 - DA / RA) * C1))
200 T = Q / RA:IM = (RA - DA) * T: GOSUB 770
210 CTI = 2 * CO * DA / Q:KO = CTI / 2:KM = KO: GOSUB 760: GOSUB 670: GOSUB
    580: PRINT
220  PRINT "PERIODO DE REABAST.   ";T: PRINT "NIVEL DE INVENT. MAX. "; INT
    (IM): GOSUB 720
230  GOTO 550
240  GOSUB 590: PRINT : INPUT "COSTO POR FALTANTES.......";CF: GOSUB 630
    : GOSUB 780: GOSUB 750
250 Q =  SQR (2 * DA * CO * (C1 + CF) / (C1 * CF)):F =  SQR (2 * DA * CO
     * C1 / ((C1 + CF) * CF)): GOSUB 770
260 KO = CO * DA / Q:KM = C1 * (Q - F) ^ 2 / (2 * Q):KF = CF * F ^ 2 / (
    2 * Q):CTI = KO + KM + KF: GOSUB 760
270 T1 = (Q - F) / DA:T2 = F / DA:IM = Q - F: GOSUB 670
280  GOSUB 590: PRINT : PRINT "TIEMPO DE AGOTAMIENTO ";T1: PRINT "TIEMPO
     DE FALTANTES   ";T2
290  PRINT "INVENTARIO MAXIMO       "; INT (IM): PRINT "NO. DE FALTANTES O
    PT. "; INT (F): GOSUB 720
300  PRINT "COSTO ANUAL DE FALT.  ";KF
310  GOTO 550
320  GOSUB 600: PRINT : INPUT "NUMERO DE DESCUENTOS?.....";B: PRINT "LIM
    ITES DE LOS DESCUENTOS:"
```

```
330  FOR I = 1 TO B: PRINT "DESCUENTO ";I;":": INPUT "MINIMO............
     ........";Q(1,I): IN^UT "MAXIMO..................";Q(2,I): INPUT "
     PRECIO...................";U(I): NEXT I
340  GOSUB 640:C1 = CM / 100
350 MI = 1E + 10:FL = 0
360  FOR I = B TO 1 STEP  - 1:EOQ(I) =  SQR (2 * DA * CO / (C1 * U(I)))
370  IF Q(1,I) > EOQ(I) THEN 460
380  IF Q(2,I) < EOQ(I) THEN 460
390 KO = DA * CO / EOQ(I):KM = C1 * U(I) * EOQ(I) / 2:PC = DA * U(I):K(I
     ) = KO + KM + PC:CTI = K(I) - PC
400 MIN = K(I):FL = I
410  FOR J = (I + 1) TO B
420  IF MIN < K(J) THEN 440
430 MIN = K(J):FL = J
440  NEXT J
450 I = 1: GOTO 470
460 EOQ(I) = Q(1,I):KO = DA * CO / EOQ(I):KM = U(I) * C1 * EOQ(I) / 2:PC
     = DA * U(I):K(I) = KO + KM + PC:CTI = K(I) - PC
470  NEXT I
480 Q = EOQ(FL):KO = DA * CO / Q:KM = C1 * U(FL) * Q / 2:CA = DA * U(FL)
     :KT = MIN:CTI = KT - CA
490  GOSUB 770: GOSUB 670: GOSUB 600: PRINT : GOSUB 720
500  GOTO 550
510  GOSUB 610: PRINT : GOSUB 630: GOSUB 800: GOSUB 750
520 T =  SQR (2 * CO / (DA * C1)):Q = T * DA:NO = DA / Q:RO = DA * (T +
     L / 365)
530 CTI = 2 * CO * DA / Q:KO = CTI / 2:KM = KO: GOSUB 760: GOSUB 670
540  GOSUB 610: PRINT : PRINT "INT. ECON. DE REORD.  ";T: GOSUB 720
550  GOSUB 620: PR# 0: VTAB (24): INPUT "OPRIMA CUALQUIER TECLA PARA CON
     TINUAR";C$: GOTO 30
560  HOME : END
570  HOME : PRINT  TAB( 3)"(1) MODELO DEL LOTE ECONOMICO (EOQ)": GOSUB 6
     20: RETURN
580  HOME : PRINT  TAB( 3)"(2) EOQ CON REABASTECIMIENTO UNIFORME": GOSUB
     620: RETURN
590  HOME : PRINT  TAB( 3)"(3) EOQ CON FALTANTES": GOSUB 620: RETURN
600  HOME : PRINT  TAB( 3)"(4) EOQ CON DESCUENTOS": GOSUB 620: RETURN
610  HOME : PRINT  TAB( 3)"(5) MODELO CON PERIODO FIJO DE REORD.": GOSUB
     620: RETURN
620  PRINT "----------------------------------------": RETURN
630  INPUT "PRECIO DE COMPRA..........";PC
640  INPUT "COSTO DE ORDENAR..........";CO: INPUT "COSTO DE MANTENIMIENT
     O....";CM
650  INPUT "DEMANDA ANUAL.............";DA: INPUT "TIEMPO DE ENTREGA (DI
     AS)..";L
660  RETURN
670  HOME : VTAB (12): HTAB (3): INPUT "SALIDA A IMPRESORA? (S/N) ";R$
680  IF R$ = "N" THEN 710
690  IF R$ < > "S" THEN 670
700  PR# 1
710  RETURN
```

```
720  PRINT "CANTIDAD A ORDENAR    "; INT (Q): PRINT "NO. DE ORDENES AL A
    &O ";NO: PRINT "PUNTO DE REORDEN       "; INT (RO)
730  PRINT "COSTO TOT. ANUAL       ";KT: PRINT "COSTO TOT. DE INV.    ";C
    TI: PRINT "COSTO ANUAL DE ORD.   ";KO: PRINT "COSTO ANUAL DE MANT.
    ";KM
740  RETURN
750 C1 = PC * CM / 100: RETURN
760 KT = PC * DA + CTI: RETURN
770 NO = DA / Q:RO = DA * L / 365: RETURN
780  IF CF < 0 GOTO 850
790  IF RA < 0 GOTO 850
800  IF CO < 0 GOTO 850
810  IF CM < 0 GOTO 850
820  IF DA < 0 GOTO 850
830  IF L < 0 GOTO 850
840  RETURN
850  VTAB (23): PRINT "LAS CANTIDADES DEBEN SER POSITIVAS": INPUT "OPRIM
    A LA TECLA 'S' PARA CONTINUAR";R$: IF R$ < > "S" THEN 850
860  GOTO 50
```

REFERENCIAS:

[3]
[34]
[39]
[40]
[53]
[75]

C O N C L U S I O N E S

A lo largo de la exposición del presente trabajo de tesis, se ha tratado de remarcar dos aspectos fundamentales de interés: la utilidad de las matemáticas dentro del contexto de las ciencias sociales, y la de las computadoras en la aplicación acertada de estas.

Probablemente las ciencias sociales presentan niveles de dificultad más elevados que el de las matemáticas, pues se encuentran relacionadas, con frecuencia, con el comportamiento humano y los fenómenos sociales y naturales que lo rodean. Para simplificar su entendimiento, el hombre ha utilizado modelos matemáticos, escalas de medición, y otros medios que permiten catalogar su desempe&o a través de escalas cuantitativas.

Como pudo apreciarse, los Modelos Cuantitativos de la Investigación de Operaciones persiguen un fin específico: servir de auxiliares en el difícil proceso de la toma de decisiones. En esta acción, se auxilia de representaciones matemáticas con diversos grados de complejidad, con las que busca determinar cursos de acción viables que permitan al decisor satisfacer al máximo sus necesidades. Sin embargo, en su aplicación, el uso de las computadoras se vuelve imprescindible, pues es difícil concebir procesos de resolución manuales para problemas reales. No obstante, es importante tener en cuenta que como tales, estas herramientas auxiliares, no representan la panacea. El factor humano, juega un papel preponderante; es el hombre quien, a fin de cuentas, decidirá y pondrá en práctica los planes de trabajo. La intuición de este y su compenetración con los problemas reales, lo ayudarán a obtener con mayor éxito las metas que persigue.

Las matemáticas al igual que las computadoras son herramientas que, en su afán por simplificar y universalizar un lenguaje común, ha creado el hombre. Por esta razón resulta importante que, como tales, sean utilizadas para el fin por el que fueron concebidas, que nos familiaricemos más con su empleo y que no sean consideradas como el manjar de un peque&o círculo de intelectuales. En ello el proceso de aprendizaje juega un papel preponderante como factor motivacional, que ayudará al interesado a profundizar más sobre el conocimiento en el que incursiona.

En este último aspecto, se ha tratado de enfocar el contenido del presente trabajo dentro de un contexto práctico, con el objeto de exponer la manera en la que puede introducirse al estudiante al empleo de los Modelos de Investigación de Operaciones. El hecho de llevar a cabo una propuesta de este tipo, se basa en las conclusiones derivadas del análisis del actual programa de estudios de la asignatura Investigación de Operaciones que, al mome to, adolece de los conceptos fundamentales, re,ueridos por el profesional encargado de desarrollar actividades relacionadas con el análisis, interpretación e implantación de sistemas.

Con base en sus objetivos, el actual programa de estudios pretende introducir al alumno, al campo de la Investigación de Operaciones desde un punto de vista más operativo, al estar enfocado a procesos mecánicos de resolución manual. Sin embargo, de acuerdo al perfil del estudiante de Cie^cias Políticas y Administración Pública, tal experiencia no le permite ejecutar adecuadamente la resolución de problemas reales. No se intenta decir con ello que el aprendizaje del aula de clases no sea formativo, sino mas bien inadecuado.

Las modificaciones recomendadas, sin embargo, no son radicales en cuanto a la concepción de la asignatura dentro de la carrera, sino más bien en el enfoque de su contenido. Es decir, se busca a fin de cuentas, que el profesional cuente con un mayor número de herramientas de apoyo que le permitan tener un desempeño más eficiente en sus actividades. No obstante, se presenta lo que se ha considerado como más útil y adecuado de acuerdo a su preparación.

El presente trabajo de tesis, no pretende ser una recopilación exhaustiva de textos sobre Investigación de Operaciones ni la exposición original de algún concepto novedoso dentro de este campo. Este busca proporcionar al profesor diferentes ideas, a través de las cuales pueda estructurar de manera eficiente su exposición. Se ha procurado presentar a lo largo de cada uno de los temas, un gran número de ejemplos, de diversos grados de dificultad, con los que se persigue mostrar el inmenso campo de aplicaciones de la Investigación de Operaciones. Finalmente, intenta resaltar la importancia que guarda la actualización docente-académica, aspecto que frecuentemente suele caer en el olvido, despertando tanto en el profesor como en el alumno el deseo de exigir el nivel académico a la altura de una verdadera universidad.

APENDICE A: METODO SIMPLEX.

Una de las contribuciones más exitosas dentro de la Investigación de Operaciones es, sin duda alguna, la correspondiente al Método Simplex, propuesto por el Dr. G. Dantzig.

Ejemplo:

En fecha reciente la compañía K-2 se ha interesado en manufacturar una nueva línea de cajas acústicas para bocinas de aparatos modulares. En el próximo mes, K-2 espera tener el tiempo suficiente en sus Departamentos de Ensamble y Acabados para correr una prueba con los dos nuevos modelos. El modelo estándar, es un gabinete de grandes dimensiones y excelente calidad, en un diseño tradicional que puede ser vendido en cantidades virtualmente ilimitadas a varios clientes, fabricantes de equipos modulares. El modelo económico es un gabinete pequeño y barato, en un diseño modernista, que puede ser solicitado bajo ordenes específicas. Tentativamente se espera que los clientes de K-2 compren tantos gabinetes económicos como deseen siempre que el pedido en total no exceda a 32 unidades. El modelo estándar requiere 4 horas en el Departamento de Ensamble y 8 en el de Acabado, cada unidad produce una ganancia efectiva de $10,000. El económico requiere 3 horas en el Departamento de Ensamble y 2 en el de Acabado, cada unidad aporta una ganancia de $5,000. La disponibilidad para ambos departamentos asciende a 120 horas en el de Ensamble y 160 en el de Acabado. K-2 desea determinar la política de producción óptima.

Este problema puede ser formulado a través de un Modelo de Programación Lineal, es decir, uno que presente relaciones lineales, para ello, observe que K-2 desea:

Maximizar la ganancia total
sujeta a:

el número de horas asignadas en el departamento de ensamble	<=	número de horas disponibles en el departamento de ensamble
el número de horas asignadas en el departamento de acabado	<=	número de horas disponibles en el departamento de acabado
número de gabinetes económicos producidos	<=	política máxima de venta

que expresado matemáticamente se convierte en:

$$\text{Maximizar } z = 10{,}000X_1 + 5{,}000X_2$$

$$\begin{aligned} \text{sa} \quad 4X_1 + 3X_2 &\le 120 \\ 8X_1 + 2X_2 &\le 160 \\ X_2 &\le 32 \\ X_1,\ X_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

con: X_1 y X_2, definidas como el número de gabinetes estándar y económicos a producir en el próximo mes respectivamente.

Dadas sus dimensiones, el modelo puede ser resuelto en forma gráfica o algebraica. Sin embargo, el lector debe advertir que el conjunto de soluciones a evaluar es infinitamente grande, dado que se esta trabajando con desigualdades más que con ecuaciones. Pese a esto, el metodo simplex hace uso de un simple principio: el valor óptimo de un Problema de Programación Lineal, si existe, puede ser localizado siempre en un punto extremo. Cada punto extremo se denomina solución básica, y tiene la característica de que las variables que se encuentran fuera de la "base" siempre son nulas. Es decir, para cada solución básica, existirán algunas variables que se denominan básicas y otras como no básicas, las primeras pueden tomar valores diferentes de cero mientras que las últimas siempre valdrán cero. Un aspecto importante es que en la aplicación del método simplex, las variables básicas deben tomar valores no negativos.

Para comprender más claramente lo anterior, imagine a un ama de casa que tiene que ir al supermercado para comprar una serie de productos. Esta puede adquirir cantidades variables de cada uno de ellos dentro de su presupuesto, dado que este es limitado, no podrá llevar todo lo que desee. Por lo tanto, habrá ciertos bienes que adquirirá (variables básicas) y otros que no (variables no básicas). Naturalmente buscará que los productos básicos satisfagan sus necesidades aunque no haya llevado los no básicos.

El método simplex trata de fijar los valores más apropiados para cada una de las variables de tal forma que se satisfagan las restricciones y se optimice al mismo tiempo el objetivo impuesto, en ello, hace uso de una serie de pasos iterativos y criterios preestablecidos. En esencia el algoritmo es el siguiente:

Método Simplex (Caso Maximización).

PASO 1: Estandarize el problema.
Un problema se dice que posee forma estandar si presenta la siguiente estructura matemática:

$$
\begin{aligned}
\text{Optimizar } z = {} & c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n \\
\text{sa} \quad & \\
& a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\
& a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2 \\
& \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
& a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m
\end{aligned}
$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

donde:

Optimizar se refiere a maximizar ganancias o minimizar costos.

X_j es la j-ésima variable de decisión. $j = 1, 2, \dots, n$

a_{ij} es el coeficiente tecnológico de la variable j, recurso i. $i = 1, 2, \dots, m$. $j = 1, 2, \dots, n$.

c_j es el costo de la j-ésima variable de decisión.

b_i es la disponibilidad del recurso i-ésimo.

Para estandarizar al problema es necesario convertir las desigualdades en ecuaciones. Para lograrlo, simple y sencillamente deben agregarse variables positivas denominadas de holgura, que representaran las cantidades sobrantes de los recursos no utilizados en la producción. Para alcanzar un óptimo, no se necesita agotar al máximo el volumen de los recursos disponibles, una manera de cuantificar esto en el modelo, es agregando variables de holgura. Estas cambian segun el recurso, por ende, cada restricción debe tener una diferente a las ya agregadas. Una restricción en sentido estricto de igualdad carecera de holgura ya que el modelo así lo exige. Una en sentido =>, poseera una variable de exceso no negativa, que será restada del lado izquierdo de la restricción. Para mayor detalle consulte el subtema 3.4.4 del Capítulo II. El modelo estandarizado es el siguiente:

$$\text{Maximizar } z = 10{,}000X_1 + 5{,}000X_2$$

sa

$$\begin{aligned} 4X_1 + 3X_2 + X_3 &= 120 \\ 8X_1 + 2X_2 + X_4 &= 160 \\ X_2 + X_5 &= 32 \end{aligned}$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

Advierta que los costos de las variables de holgura (X_3, X_4 y X_5) en la función objetivo son nulos, debido a que en nada contribuyen en las ganancias. Las condiciones de no negatividad NO se estandarizan.

PASO 2: Identifique a las variables que están asociadas a la matriz identidad y forme con ellas la primer solución básica, haga cero a las demás variables.

Una matríz identidad es aquella que tiene en su diagonal únicamente elementos de tipo unitario, en sus demás posiciones posee ceros. Por ejemplo, la siguiente es una matríz identidad:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Sin embargo, la matríz puede estar no ordenada, sin por ello dejer de ser identidad, por ejemplo:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \text{o} \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

son matrices identidad. En nuestro caso, las variables X_3, X_4 y X_5 conforman a la matríz identidad. Una manera de apreciar más claramente lo anterior, es ayudándose de la siguiente representación tabular:

X_1	X_2	. . .	X_n
a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}

Es decir, conformar un cuadro que en la parte superior de sus columnas posea la identificación de la variable, y debajo de esta sus coeficientes tecnológicos correspondientes en el Problema de Programación Lineal. Cada columna se denomina vector columna, para nuestro caso, se tendrá el siguiente cuadro:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
4	3	1	0	0
8	2	0	1	0
0	1	0	0	1

Las condiciones de no negatividad no se agregan. Observe que las variables antes indicadas, poseen la matríz identidad debajo de sus columnas. Cuando esta no existe, es necesario agregar variables artificiales (cuya discusión se presentará más adelante).

Con base en lo anterior, X_3, X_4 y X_5, serán las variables básicas, X_1 y X_2 las no básicas y por lo tanto tendrán un valor nulo. El sistema de restricciones ante tal instancia se convierte en:

$$X_3 = 120$$
$$X_4 = 160$$
$$X_5 = 32$$

dado que $X_1 = X_2 = 0$. El valor de la función objetivo es:

$$z = 10,000(0) + 5,000(0) + 0(120) + 0(160) + 0(32) = 0$$

La columna de soluciones será agregada al cuadro con los coeficientes tecnológicos, de la siguiente manera:

X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$B^{-1}b$
X_3	4	3	1	0	0	120
X_4	8	2	0	1	0	160
X_5	0	1	0	0	1	32
						0

Para identificar la correspondencia entre los valores y las variables, se ha agregado una columna adicional con estas últimas. Observe que el elemento unitario coincide renglón y columna con su variable correspondiente, esto debe ocurrir siempre. Asimismo, advierta que la solución es factible, ya que satisface a cada una de las restricciones.

1era. Iteración.

PASO 3: Determine si es posible encontrar una solución mejor a la actual. Si esto no es posible detengase la solución es óptima, en caso contrario proceda al paso 4.

Una manera de determinar la optimalidad de una solución es evaluando el impacto que representa incrementar a las variables denominadas como no básicas. Una modificación de este tipo va a provocar que los valores actuales de las demás variables se alteren para compensar el cambio propuesto. El método simplex se auxilia de ciertos parámetros denominados costos reducidos, que representan el cambio en la función objetivo ante un incremento unitario en la variable no básica a la que está asociado, cabe aclarar que estos ya contemplan el cambio que tiene qu ocurrir en la solución actual. En su cálculo, nos auxiliaremos de una columna y un renglón adicionales al cuadro con el que se ha venido trabajando. La columna contendrá los costos de las variables básicas correspondientes, mientras que el renglón presentará los costos asociados a cada una de las variables del Problema de Programación Lineal. Es decir:

		10,000	5,000	0	0	0	
c_B	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$B^{-1}b$
0	X_3	4	3	1	0	0	120
0	X_4	8	2	0	1	0	160
0	X_5	0	1	0	0	1	32
							0

Para toda variable, su costo reducido se define a partir de la siguiente expresión matemática:

$$z_j - c_j = c^t_B y_j - c_j$$

donde:

c^t_B es el vector columna que contiene a los costos básicos, acomodados en forma de renglón.

y_j es el vector columna asociado a la variable j-ésima.

c_j es el costo asociado a la variable j-ésima.

El cálculo puede realizarse de una manera bastante sencilla con ayuda del cuadro, para ello, multiplique cada costo básico por cada uno de los coeficientes que se encuentra en su renglón correspondiente y realice la suma por columna, reste de esta el costo que se encuentra en la parte superior de la variable. Por ejemplo, para la variable X_1 se tiene el siguiente resultado:

c_m	por	y_1	=	$c^t_m y_1$
0		4	=	0
0		8	=	0
0		0	=	0
	Suma (z_1)		=	0

por lo tanto: $z_1 - c_1 = 0 - 10,000 = -10,000$
De igual forma: $z_2 - c_2 = -5,000$
$z_3 - c_3 = 0$
$z_4 - c_4 = 0$
$z_5 - c_5 = 0$

Por conveniencia se acomodarán estos valores en la parte inferior del cuadro, es decir:

		10,000	5,000	0	0	0	
c_m	X_m	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$B^{-1}b$
0	X_3	4	3	1	0	0	120
0	X_4	8	2	0	1	0	160
0	X_5	0	1	0	0	1	32
$z_j - c_j$		-10,000	-5,000	0	0	0	0

Observe que el valor de la función objetivo puede ser calculado de igual forma que los valores $z_j - c_j$, a excepción de que a este no es necesario restarle ninguna cantidad.

El cuadro anterior se denomina tableau simplex, y es el utilizado para cálculos manuales, dado que es bastante compacto y ya que permite trabajar de una manera ordenada.

Para el caso de maximización, siempre que el tableau posea costos reducidos negativos (NO considere al valor de la función objetivo), podrá seguir optimizándose el valor de la función objetivo, por lo tanto, una vez que todos sean mayores o iguales que cero, deberá concluirse que se ha llegado a la solución óptima, deteniendo el algoritmo en este punto. Dado que el problema presenta valores negativos, se infiere que la solución es no óptima.

Los $z_j - c_j$ representan el cambio en la función objetivo por unidad de incremento en una variable, para comprender más claramente esto observe lo siguiente: Cada unidad de la variable X_1 (número de gabinetes estándar), consume 4 horas en el Departamento de Ensamble y 8 en el de Acabado, ante un incremento unitario en esta, la holgura en el primer departamento se verá reducida en 4 unidades y la del segundo en 8, ambas cuestan \$0, por lo tanto, lo que se pierde con tal aumento, es el producto del número de unidades que se reducen por su contribucion en la funcion objetivo. Sin embargo, la producción de un gabinete estandar aporta un ingreso de $10,000, así la diferencia entre lo que se pierde y lo que se gana, es el cambio efectivo que se produce en la función objetivo. Para nuestro caso, lo que se pierde es $0 y lo que se gana es $10,000, su diferencia: 0 - 10,000 = -10,000, es el cambio neto en la función objetivo por cada unidad adicional de la variable X_1. Si este es negativo se denominará ganancia, en caso contrario perdida. Observe que los costos reducidos para las variables básicas son nulos, esto tiene sentido pues un incremento unitario en estas provocará de igual forma un decremento en la misma magnitud, de tal forma que lo que se pierde y se gana es exactamente lo mismo.

Los elementos que se encuentran debajo de cada una de las columnas de las variables en el tableau simplex, se denominan tasas de sustitución, ya que indican el cambio efectivo o sustitución en los niveles de las variables.

PASO 4: Identifique a la variable que presente el mayor incremento en la función objetivo. En caso de empate, haga una selección arbitraria.

Para nuestro problema, el número más negativo, será el que proporcione la máxima ganancia posible, es decir, la variable X_1 será la candidata a incrementar, y a convertir en básica.

PASO 5: Identifique la variable que va a dejar la base. Incremente tanto como sea posible a la que va a entrar a esta.

Esto puede interpretarse de la siguiente manera: Imagine nuevamente al ama de casa en el supermercado, y suponga que esta ha encontrado un producto que supera la calidad de alguno que ella ha considerado llevar, ante tal instancia, optará por dejar el producto que menos le conviene (hacer cero a una variable básica) y llevar el mejor (incrementar una variable no básica).

Para llevar a cabo este paso, es necesario considerar dos vectores columna:

- el vector de soluciones ubicado en la última columna del tableau.
- el vector columna de la variable con el $z_j - c_j$ más negativo.

una vez identificados estos, deberán realizarse los cocientes de los elementos del primer vector entre los asociados en el segundo de acuerdo al renglón en el que se encuentren, eliminando de este último aquellas posiciones que posean elementos menores o iguales que cero.

Para el problema se tendrá el siguiente conjunto de cocientes:

Vector de soluciones	entre	Vector asociado a X_1	= Cociente
120		4	= 30
160		8	= 20
32		0	No se considera

Advierta que el último cociente no se considera, ya que el elemento en el segundo vector para esa posición es nulo. Sin embargo, si la situación hubiera sido la siguiente:

Vector de soluciones entre Vector asociado a X_1	=	Cociente
0 8	=	0

el cociente SI se consideraría. Si todos los valores de la columna son menores o iguales que cero, deberá detenerse el algoritmo y concluir que la solución es no acotada, es decir, su contribución puede crecer infinitamente (lo cual es imposible).

La variable que va a dejar la base, será aquella que se encuentra en el renglón donde se dio el mínimo de los cocientes calculados, dado que para este caso dicho valor es 20, la variable que se encuentra en el segundo renglón (X_4) será la que deje la base para ser sustituida por X_1. En caso de empate, deberá seleccionarse aquel cociente con el denominador más grande, en caso de empate, la selección deberá hacerse arbitrariamente.

PASO 6: Realice el cambio y las operaciones fundamentales par actualizar el tableau.

El denominador del cociente mínimo, se conoce como "elemento pivote". Para actualizar el tableau, debe realizarse lo siguiente:

- Dibuje un tableau vacío con un número de columnas igual al del original.
- Divida a cada elemento perteneciente al renglón donde se dio el mínimo de los cocientes por el elemento pivote.
- Escriba en el tableau vacío, en el renglón donde se dio el cambio, el conjunto de cálculos obtenidos en el punto anterior, este renglón se denomina "ecuación pivote".
- Para el renglón anterior, en la columna de variables básicas y de costos básicos coloque los elementos correspondientes a la variable que entra a la base.

Lo anterior se ejemplifica en el siguiente tableau:

		10,000	5,000	0	0	0		
c_B	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$B^{-1}b$	
0	X_3							1er. Renglón
10,000	X_1	1	1/4	0	1/8	0	20	
0	X_5							3er. Renglón
$z_j - c_j$								

En este, también se han incluido en las columnas de costos básicos y de variables básicas a los elementos de X_3 y X_5, esto es así, ya que ninguna ha dejado la base. Los valores que faltan, deben calcularse procurando que los elementos restantes del vector columna que entro a la base sean iguales a cero, esto se consigue mediante operaciones fundamentales. Por ejemplo, para el primer renglón, el elemento asociado al vector columna X_1 es 4. Para convertirlo en cero, es necesario multiplicar por -4 a la ecuación pivote y sumarla integra al primer renglón, el resultado de esta suma, elemento a elemento, deberá colocarse en el nuevo tableau. Es decir, al multiplicar por -4 a la ecuación pivote, se obtiene el siguiente renglón:

-4	-1	0	-1/2	0	-5

el renglon que se desea modificar es:

4	3	1	0	0	120

ambos deben sumarse para obtener el nuevo:

-4	-1	0	-1/2	0	-5
4	3	1	0	0	120
0	2	1	-1/2	0	115

que al a&adirlo se obtiene el siguiente tableau simplex:

		10,000	5,000	0	0	0	
c_B	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$B^{-1}b$
0	X_3	0	2	1	-1/2	0	115
10,000	X_1	1	1/4	0	1/8	0	20
0	X_5						
$z_j - c_j$							

3er. Renglon

Dado que el elemento ubicado en el tercer renglón de la columna de X_1 es nulo, es inecesario realizar algún cálculo adicional. Por lo tanto este puede ser copi^do integramente, como se muestra en el siguiente tableau.

		10,000	5,000	0	0	0	
c_B	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$B^{-1}b$
0	X_3	0	2	1	-1/2	0	115
10,000	X_1	1	1/4	0	1/8	0	20
0	X_5	0	1	0	0	1	32
$z_j - c_j$							

PASO 7: Regrese al paso 3.

2da. Iteración.

PASO 3: Como el lector podr… comprobar, los $z_j - c_j$ se muestran en el siguiente tableau.

		10,000	5,000	0	0	0	
c_B	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_8	$B^{-1}b$
0	X_3	0	2	1	-1/2	0	115
10,000	X_1	1	1/4	0	1/8	0	20
0	X_8	0	1	0	0	1	32
$z_j - c_j$		0	-2,500	0	1,250	0	200,000

Observe que el valor de la función objetivo se incrementó de 0 a $200,000. Sin embargo, el $z_2 - c_2$ es todavía negativo, por lo tanto, la solución no es óptima.

PASO 4: La única variable con costo reducido negativo es la X_2 por lo tanto es la candidata a entrar a la base.

PASO 5: Los cocientes entre el vector de soluciones y el vector columna debajo de X_2 son los siguientes:

Vector de soluciones	entre	Vector asociado a X_2	= Cociente
115		2	= 57.5
20		1/4	= 80
32		1	= 32

Como el mínimo es 32, el vector X_8 es el que debe dejar la base para ser sustituido por X_2.

PASO 6: Tableau con el renglón pivote:

		10,000	5,000	0	0	0		
c_B	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_8	$B^{-1}b$	
0	X_3							1er. Renglón
10,000	X_1							2do. Renglón
5,000	X_2	0	1	0	0	1	32	
$z_j - c_j$								

Observe que este no cambia ya que el elemento pivote es 1.

Para calcular los nuevos valores de los renglones restantes hay que convertir en ceros a los demás elementos del vector columna X_2. Para el primer renglón, se multiplica a la ecuación pivote por -2 y se suma al segundo renglón, obteniéndose:

0	-2	0	0	-2	-64
0	2	1	-1/2	0	115
0	0	1	-1/2	-2	51

El segundo renglón se obtiene al sumar el antiguo con la ecuación pivote multiplicada por -1/4.

1	1/4	0	1/8	0	20
0	-1/4	0	0	-1/4	-8
1	0	0	1/8	-1/4	12

El nuevo tableau ante estos cambios, se muestra a continuación:

		10,000	5,000	0	0	0	
c_B	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$B^{-1}b$
0	X_3	0	0	1	-1/2	-2	51
10,000	X_1	1	0	0	1/8	-1/4	12
5,000	X_2	0	1	0	0	1	32
$z_j - c_j$							

PASO 7: Regrese al paso 3.

<u>3era. Iteración.</u>

PASO 3: Los $z_j - c_j$ de este tableau se muestran en el siguiente:

		10,000	5,000	0	0	0	
c_B	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$B^{-1}b$
0	X_3	0	0	1	-1/2	-2	51
10,000	X_1	1	0	0	1/8	-1/4	12
5,000	X_2	0	1	0	0	1	32
$z_j - c_j$		0	0	0	1,250	2,500	280,000

Observe que el valor de la función objetivo se incrementó de $200,000 a $280,000. Como todo $z_j - c_j$ es mayor o igual que cero, se ha llegado a la solución óptima, en este punto se termina la aplicación del algoritmo simplex.

Solución Optima:

$X_3 = 51 \qquad X_4 = X_5 = 0$

$X_1 = 12$

$X_2 = 32$

$z = \$280,000$

Es decir, deben producirse 12 gabinetes estándar, 32 económicos, obteniendo con ello una ganancia de $280,000. Ante este nivel de producción sobran 51 horas en el Departamento de Ensamble y 0 en el de acabado.

Lo anterior resume el funcionamiento del algoritmo simplex.

Casos Especiales:

Minimización. Cuando un Problema de Programación Lineal se esta minimizando es necesario modificar el criterio que determina la optimalidad de una solución. En este caso, una solución se considera óptima cuando todo $z_j - c_j$ es negativo, en otra instancia, habrá la necesidad de aplicar el método simplex para conseguirla. Para obtener el mayor decremento en cada iteración, es necesario seleccionar a la variable que posea el $z_j - c_j$ más positivo, todos los pasos restantes del método simplex NO cambian.

Solución Optima Múltiple. Cuando alguna variable no básica tiene su costo de oportunidad nulo en la solución óptima, es posible determinar una nueva que presente el mismo valor óptimo encontrado. La manera de conseguirlo es realizando las actualizaciones que se deriven de introducirla en la base.

Degeneración. Cuando una solución presenta una o más variables básicas iguales a cero, se dice que esta es degenerada. Tal fenómeno puede provocar problemas de cómputo, el lector interesado en el tratamiento de este tipo de problemas puede remitirse a la referencia [7] pags. 170-175.

Variables Artificiales. En algunas circunstancias no es posible contar con una matríz identidad en el problema ya estandarizado, para conseguirla deben agregarse variables denominadas artificiales (tantas como se necesiten para conseguir esto) en las restricciones. Debido a que se estan a&adiendo "arbitrariamente", es necesario obligar a que en la solución óptima estas asuman un valor nulo, esto se logra afectándolas en la función objetivo con costos penales muy grandes (-M) si se esta maximizando un problema o ganancias muy grandes (M) si esta siendo minimizado. Para efectos de cálculo manual, no es necesario trabajar con cantidades numéricas, solo bastará manejar la literal M en cada iteración indicando que este es un valor infinitamente grande. Por ejemplo, suponga el siguiente Problema de Programación Lineal:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar } z = 8X_1 + 4X_2 \\
&\text{sa} \\
&\qquad 3X_1 + 2X_2 \le 48 \\
&\qquad X_1 \ge 10 \\
&\qquad X_2 \ge 6 \\
&\qquad X_1,\ X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

que al estandarizarlo se convierte en:

Maximizar $z = 8X_1 + 4X_2$

sa

$$\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 + H_1 \quad\quad\quad &= 48 \\ X_1 \quad\quad - E_1 \quad &= 10 \\ X_2 \quad\quad - E_2 &= 6 \end{aligned}$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

donde:

H_1 es una variable de holgura positiva.
E_1 y E_2 son variables de exceso positivas.

La matríz de coeficientes del problema es la siguiente:

X_1	X_2	H_1	E_1	E_2
3	2	1	0	0
1	0	0	-1	0
0	1	0	0	-1

observe que el problema no posee la matriz identidad que se requiere, para conseguirlo, bastará con agregar dos variables artificiales, una en la segunda restricción y otra en la tercera. Es decir:

$$\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 + H_1 \quad\quad\quad\quad &= 48 \\ X_1 \quad - E_1 \quad + A_1 \quad &= 10 \\ X_2 \quad - E_2 \quad + A_2 &= 6 \end{aligned}$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

donde:

A_1 y A_2 son variables artificiales positivas.

cuya matríz de coeficientes es:

X_1	X_2	H_1	E_1	E_2	A_1	A_2
3	2	1	0	0	0	0
1	0	0	-1	0	1	0
0	1	0	0	-1	0	1

el cual ya posee una matriz identidad, no importa que esta se encuentre en forma dispersa. Las variables artificiales han sido agregadas para satisfacer una condición que permite inicializar la aplicación del algoritmo, por lo tanto en la solución óptima estas deben valer cero, para ello, se incluirán en la func objetivo con costos penales muy grandes. Así, se tendrá la siguiente función modificada:

Maximizar $z = 8X_1 + 4X_2 - MA_1 - MA_2$

advierta que no es necesario utilizar costos diferentes. El siguiente paso es aplicar el método simplex con la solución básica inicial:

$X_3 = 48$
$A_1 = 10$
$A_2 = 6$

dado: $X_1 = X_2 = X_4 = X_5 = 0$. Con un valor de la función objetivo:

$$z = 8(0) + 4(0) + 0(48) - M(10) - M(6)$$
$$= -16M$$

el tableau para el problema se muestra a continuación:

		8	4	0	0	0	$-M$	$-M$	
c_B	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	A_1	A_2	$B^{-1}b$
0	X_3	3	2	1	0	0	0	0	48
$-M$	A_1	1	0	0	-1	0	1	0	10
$-M$	A_2	0	1	0	0	-1	0	1	6
$z_j - c_j$		$-M - 8$	$-M - 4$	0	M	M	0	0	$-16M$

el cual es no óptimo, el $z_j - c_j$ más negativo es el asociado a la variable X_1, por lo tanto, esta es la candidata a entrar a la base, la que sale es la A_1, ya que es en este renglón donde se dá el mínimo de los cocientes (10/1). Observe que el elemento pivote es igual a 1, por lo tanto la ecuación pivote estará dada por el segundo renglón. Asimismo, advierta que el tercer renglón ya posee un elemento nulo en la columna asociada al vector X_1, por lo tanto esta no va a cambiar. No obstante, para actualizar el primer renglón, es necesario multiplicar por -3 a la ecuación pivote y sumársela a este, obteniendo:

-3	0	0	3	0	-3	0	-30
3	2	1	0	0	0	0	48
0	2	1	3	0	-3	0	18

El tableau actualizado es:

		8	4	0	0	0	$-M$	$-M$	
c_B	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	A_1	A_2	$B^{-1}b$
0	X_3	0	2	1	3	0	-3	0	18
8	X_1	1	0	0	-1	0	1	0	10
$-M$	A_2	0	1	0	0	-1	0	1	6
$z_j - c_j$		0	$-M - 4$	0	-8	M	$8 + M$	0	$-M + 80$

Dado que existen $z_j - c_j$ negativos la solución aún no es óptima, no obstante, el valor de la función objetivo se incrementó. El valor más negativo es el asociado a X_2, que entra a la base, en este caso la variable que sale de esta es A_2. El tableau actualizado, como el lector podra comprobar, es el siguiente:

c_B	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	A_1	A_2	$B^{-1}b$
		8	4	0	0	0	$-M$	$-M$	
0	X_3	0	0	1	3	2	-3	-2	6
8	X_1	1	0	0	-1	0	1	0	10
4	X_2	0	1	0	0	-1	0	1	6
$z_j - c_j$		0	0	0	-8	-4	8 + M	M	104

La solución es no óptima. La variable que entra a la base es X_4, la única candidata a salir es la X_3, ya que es la que posee el único elemento mayor que cero en el vector columna asociado a X_4. El tableau actualizado es:

c_B	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	A_1	A_2	$B^{-1}b$
		8	4	0	0	0	$-M$	$-M$	
0	X_4	0	0	1/3	1	2/3	-1	-2/3	2
8	X_1	1	0	1/3	0	2/3	0	-2/3	12
4	X_2	0	1	0	0	-1	0	1	6
$z_j - c_j$		0	0	8/3	0	4/3	M	M - 4/3	104

El cual presenta a la solución óptima ya que todo $z_j - c_j$ es mayor o igual que cero, siendo esta:

$$X_1 = 12 \qquad X_3 = X_5 = 0$$
$$X_2 = 6 \qquad A_1 = A_2 = 0$$
$$X_4 = 2$$
$$z = 104$$

Si en la solución óptima llegara a existir una variable artificial en la base a un nivel positivo, debe concluirse que el problema es infactible o inconsistente, por lo que habrá que revisar su formulación para corregir el error y aplicar de nueva cuenta el método simplex.

REFERENCIAS:

[1] y [78] Capítulo 6.
[5]
[6] y [86] Capítulos 3 y 4.
[7] Capítulos 1 al 5.
[9] Capítulos 1 al 4.
[13]
[14] Capítulos 3 al 10.
[19] Capítulos 3 al 5.
[22] Capítulo 8.
[23] Capítulos 3, 4 y 7.
[26] Capítulos 3 al 6.
[32], [51], [58] y [64] Capítulo 2.

[39], [75] y [87] Capítulo 7.
[41], [76] y [83] Capítulo 3.
[50] Capítulos 2 y 3.
[66] Capítulo 10.
[68] Capítulos 1 y 2.
[69] Apéndice A.
[72] Capítulo 1, sección 1.1.

EJERCICIOS:

1. Utilizando el método simplex, resuelva los siguientes Problemas de Programación Lineal.

a) Maximizar $z = 9X_2 + 2X_3 - X_5$

sa

$$\begin{aligned} X_1 - 3X_2 \quad - 4X_4 \quad + 2X_6 &= 60 \\ 2X_2 \quad - X_4 - X_5 + 4X_6 &= -20 \\ X_2 + X_3 \quad + 3X_6 &= 10 \end{aligned}$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

b) Maximizar $z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4$

sa

$$\begin{aligned} X_1 \quad + X_3 - 4X_4 &= 2 \\ X_2 - X_3 + 3X_4 &= 9 \\ X_1 + X_2 - 2X_3 - 3X_4 &= 21 \end{aligned}$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

2. Formule y resuelva el siguiente problema, con la ayuda de un Modelo de Programación Lineal: Una compa&ía transportadora tiene 10 camiones con capacidad de 40,000 libras y 5 camiones de 30,000 libras de capacidad. Los camiones grandes tienen costos de operación de $3,000 por kilómetro, y los más peque&os de $2,500. En la próxima semana la compa&ía debe transportar 400,000 libras de malta para un recorrido de 800 kilómetros. La posibilidad de otros compromisos significa que por cada dos camiones peque&os mantenidos en reserva debe quedarse por lo menos uno de los grandes. Cual es el número óptimo de camiones de ambas clases que deben movilizarse para transportar la malta?. (Ignore el hecho de que la solución debe estar dada en ^nteros.)

APENDICE B: ALGORITMO DE TRANSPORTE.

Los modelos de transporte, dadas sus características, son casos particulares de los de Programación Lineal. En estos se busca determinar la mejor combinación en la que pueden ser enviados o asignados ciertos recursos que se encuentran en fuentes u orígenes a destinos. El utilizar una ruta determinada involucra un costo que puede variar de fuente en fuente así como entre destinos. El objetivo puede ser minimizar: costos, recorrido, tiempos muertos, etc., o maximizar: ganancias, eficiencia, calificaciones, etc. La formulación matemática general de estos modelos es la siguiente:

$$\text{Optimizar } z = \sum_i \sum_j c_{ij} X_{ij}$$

sujeta a las restricciones:

$$\sum_j X_{ij} = a_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, m$$

$$\sum_i X_{ij} = b_j \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$X_{ij} \Rightarrow 0 \text{ para todas las } i \text{ y } j.$$

las primeras restricciones se denominan de oferta (m orígenes) y las últimas de demanda (n destinos). En un problema de transporte se debe buscar un equilibrio entre la oferta y la demanda, es decir:

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j$$

el número de origenes y destinos no necesariamente tiene que ser igual. Puede apreciarse que estos modelos poseen una estructura matemática muy peculiar:

- Poseen restricciones de oferta y demanda.
- Todas las variables tienen coeficientes unitarios en cada una de las restricciones.
- Cada variable aparece a lo mas dos veces en el modelo.

Cuando un modelo presenta estas características, se dice que posee la estructura particular de uno de transporte.

En estos casos resulta más práctico aplicar algoritmos de resolución más eficientes que el método simplex. En el cuadro 1 se muestra el tableau de un modelo de transporte general. Cada renglón representa un centro de oferta u origen, mientras que cada columna un centro de demanda o destino. Las cantidades inscritas en los cuadros más pequeños, son los costos de transportar una unidad del orígen al destino donde se da el cruce. Las cantidades anotadas en la última columna corresponden a las ofertas, mientras que las del último renglón están asociadas a las demandas de cada centro. Las casillas donde se encuentran las X_{ij} se utilizan para indicar el volumen de transporte entre el origen y el destino donde se dá el cruce, es decir, los valores de las variables.

Para que el problema este balanceado debe cumplirse la igualdad entre la suma de las cantidades en el último renglón y en la última columna, cuando no sea el caso, deberá agregarse un origen o un destino ficticios, con un volumen exactamente igual a la diferencia entre la oferta y la demanda, y costos de transporte nulos.

CUADRO 1: Tableau de un Modelo de Transporte.

	DESTINOS						
ORIGENES	1	2	. . .	j	. . .	n	OFERTA
1	c_{11} / X_{11}	c_{12} / X_{12}	. . .	c_{1j} / X_{1j}	. . .	c_{1n} / X_{1n}	a_1
2	c_{21} / X_{21}	c_{22} / X_{22}	. . .	c_{2j} / X_{2j}	. . .	c_{2n} / X_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
i	c_{i1} / X_{i1}	c_{i2} / X_{i2}	. . .	c_{ij} / X_{ij}	. . .	c_{in} / X_{in}	a_i
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
m	c_{m1} / X_{m1}	c_{m2} / X_{m2}	. . .	c_{mj} / X_{mj}	. . .	c_{mn} / X_{mn}	a_m
DEMANDA	b_1	b_2	. . .	b_j	. . .	b_n	

Existen diversos mecanismos heurísticos que auxilian a determinar la primer solución factible, entre los que pueden citarse:

- Método de la Esquina Noroccidental.
- Método del Costo Mínimo.
- Método de Aproximación de Vogel.

De todos estos el más eficiente es el de Vogel, pues proporciona la solución más cercana al óptimo. Este se ilustrará a continuación, acompañado de un ejemplo que será resuelto para ejemplificar su funcionamiento.

Ejemplo:

Cada semana, una compa&ía minera debe decidir la manera en la que debe transportar carbón de sus minas a diferentes plantas que lo utilizan. Para mediados de esta semana, por ejemplo, las operaciones mineras producirán las siguientes cantidades para ser enviadas a los lugares correspondientes:

Fuente	Cantidad Disponible
Mina 1	40 toneladas
Mina 2	50 toneladas
Mina 3	60 toneladas

Asimismo, la compa&ía ha determinado los requerimientos de carbón por parte de cada una de las plantas para la próxima semana:

Destino	Cantidad Requerida
Planta 1	30 toneladas
Planta 2	20 toneladas
Planta 3	45 toneladas
Planta 4	55 toneladas

Debido a que existe la posibilidad de transportar carga de cada una de las minas a cada una de las plantas, existen 12 rutas posibles, y la compa&ía debe decidir cuáles son las que tiene que usar y cuánto tiene que enviar en cada una. Afortunadamente, existe una cantidad suficiente de carbón para cubrir la próxima demanda semanal, sin embargo, deben considerarse los costos asociados con el uso de las diferentes rutas. La tabla siguiente muestra el costo por tonelada de carbón enviada de cada mina a cada planta a traves de una determinada ruta:

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	9	4	6	6
M_2	10	5	7	8
M_3	4	7	3	5

El problema consiste en hallar la manera en la que deben realizarse los envíos, con el objeto de cubrir la demanda a costo mínimo.

Este problema puede ser formulado a través de un modelo de Programación Lineal de la siguiente manera:

Sean X_{ij} el número de toneladas de carbon enviadas de la mina i a la planta j. $i = 1, 2, 3.$ $j = 1, 2, 3, 4.$

Existen 12 variables X_{ij} $((4)(3) = 12)$. La función objetivo será minimizar los costos de envío, es decir:

$$\text{Minimizar } z = 9X_{11} + 4X_{12} + 6X_{13} + 6X_{14} + 10X_{21} + 5X_{22} + 7X_{23} + 8X_{24} + 4X_{31} + 7X_{32} + 3X_{33} + 5X_{34}$$

con sus correspondientes restricciones de oferta y demanda:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 30$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 20$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 45$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 55$$
$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 40$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 50$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 60$$

Todas las variables mayores o iguales que cero

las restricciones se formulan en sentido estricto de igualdad pues la oferta y la demanda son exactamente idénticas en volumen, por lo tanto, no van a existir holguras.

El problema puede resolverse a través del método simplex, pero resulta bastante ineficiente, observe que este posee las características antes indicadas para los modelos de transporte, así, en su resolución puede ser aplicado otro tipo de algoritmos.

Algoritmo de Transporte (Caso Minimización).

En el cuadro 2 se muestra el tableau de transporte del modelo formulado.

CUADRO 2: Tableau de Transporte para la Compañía Minera.

	DESTINOS PLANTAS				
ORIGENES	1	2	3	4	OFERTA
MINA 1	9	4	6	6	40
MINA 2	10	5	7	8	50
MINA 3	4	7	3	5	60
DEMANDA	30	20	45	55	150

I. Determinación de la Solución Inicial (Método de Aproximación de Vogel):

PASO 1: Calcule la diferencia entre los dos costos de distribución más pequeños para cada renglón y cada columna.

PASO 2: Seleccione el renglón o columna con la diferencia más grande y enciérrelo en un cuadro. En caso de empate, seleccione aquel renglón o columna que permita el movimiento más grande de unidades, en caso de empate rómpalo arbitrariamente.

PASO 3: Asigne la cantidad más grande, de acuerdo a la oferta y demanda respectivas, en la celda que posea el costo mínimo. Los pasos 1 al 3 se ejemplifican en el cuadro 3.

CUADRO 3: Tableau de Transporte para la Compañía Minera.

	DESTINOS PLANTAS					
ORIGENES	1	2	3	4	OFERTA	
MINA 1	9	4	6	6	40	2
MINA 2	10	5	7	8	50	2
MINA 3	4 / 30	7	3	5	60	1
DEMANDA	30	20	45	55	150	
	$\boxed{5}$	1	3	1		

PASO 4: Elimine la columna o renglón que se haya saturado con la asignación realizada en el paso anterior. En este caso, la primer columna queda eliminada para asignaciones futuras, pues la demanda de su centro ha quedado completamente cubierta.
Regrese al paso 1 y repita el algoritmo hasta que se hayan realizado todas las asignaciones necesarias. El cuadro 4 muestra la política de distribución final.

El procedimiento antes descrito, busca identificar aquellas celdas que presentan los ahorros más grandes en los costos de penalización, permitiendo realizar las asignaciones en aquellas que poseen el mínimo egreso. Con esto el algoritmo proporciona una buena aproximación al punto óptimo, en algunos casos el mismo óptimo. En este punto uno puede realizar la pregunta: cómo se verifica la optimalidad de una solución?. Para ello se aplica el siguiente algoritmo:

II. Prueba de Optimalidad:

PASO 1: Determine si la solución es no degenerada, contando el número de casillas ocupadas en el tableau. Si el número es igual a m + n − 1, es no degenerada. Más adelante se proporcionará un procedimiento para tratar a las soluciones de tipo degenerado. Para nuestro caso se tienen los siguientes parámetros:

$m = 3; \quad n = 4; \quad$ por lo tanto: $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$

como podrá comprobarse, existen 6 casillas ocupadas, por lo tanto, se aplica el siguiente paso.

CUADRO 4: Tableau de Transporte para la Compañía Minera.

	DESTINOS PLANTAS					
ORIGENES	1	2	3	4	OFERTA	
	9	4	6	6		
MINA 1		20		20	40	2 2 $\boxed{2}$ 0 0
	10	5	7	8		
MINA 2			15	35	50	2 2 2 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$
	4	7	3	5		
MINA 3	30		30		60	1 2 - - -
DEMANDA	30	20	45	55	150	
	$\boxed{5}$	1	3	1		
	-	1	$\boxed{3}$	1		
	-	1	1	1		
	-	-	1	1		
	-	-	-	1		

PASO 2: Forme una matríz que contenga los costos asociados con las casillas en las que se han hecho asignaciones. En las restantes coloque guiones. En la parte superior de cada columna coloque, según el número de esta, una variable denominada k_j (evaluador columna), en cada renglón otra denominada r_i (evaluador renglón). Lo anterior se muestra en el cuadro 5.

CUADRO 5: Matríz de Costos de Asignación.

EVALUADORES RENGLON	EVALUADORES COLUMNA k_1	k_2	k_3	k_4
r_1	-	4	-	6
r_2	-	-	7	8
r_3	4	-	3	-

PASO 3: Utilizando esta matríz, establezca las relaciones entre los evaluadores tanto de los renglones como de las columnas de tal forma que su suma iguale a los costos que se encuentran en su cruce y determine su valor. Matemáticamente se tendrá que:

$$c_{ij} = r_i + k_j$$

Para este caso las relaciones se muestran en el cuadro 6.

CUADRO 6:

$$r_1 + k_2 = 4$$
$$r_1 + k_4 = 6$$
$$r_2 + k_3 = 7$$
$$r_2 + k_4 = 8$$
$$r_3 + k_1 = 4$$
$$r_3 + k_3 = 3$$

El cual es un sistema de 6 ecuaciones con 7 incógnitas, dado que este último es mayor, puede fijarse arbitrariamente el valor de alguna de las variables. Cabe aclarar que esta situacion SIEMPRE se presenta para los problemas de transporte NO degenerados. A continuación se muestra la lista de soluciones, al fijar arbitrariamente a $r_1 = 0$, el valor más sencillo.

$r_1 = 0$, $k_1 = 6$ $k_4 = 6$
$r_2 = 2$, $k_2 = 4$
$r_3 = -2$, $k_3 = 5$

PASO 4: Coloque la suma de los evaluadores en las casillas que no tienen asignación, en las otras coloque guiones. Lo anterior se muestra en el cuadro 7.

CUADRO 7: Valores $r_i + k_j$.

EVALUADORES RENGLON	EVALUADORES COLUMNA 6	4	5	6
0	6	-	5	-
2	8	6	-	-
-2	-	2	-	4

PASO 5: Conforme una matríz con los costos para las casillas que no presentan asignación, en las restantes coloque guiones. Obtenga una matríz diferencia, resultante de la resta de la matríz de costos obtenida en este paso con la generada en el anterior. Matemáticamente, esto se expresa por la ecuación:

$$c_{ij} - (r_i + k_j)$$

Esto se muestra en los cuadros 8 y 9.

CUADRO 8: Matríz de Costos.

ORIGENES MINAS	DESTINOS PLANTAS 1	2	3	4
1	9	-	6	-
2	10	5	-	-
3	-	7	-	5

CUADRO 9: Valores $c_{ij} - (r_i + k_j)$.

ORIGENES MINAS	DESTINOS PLANTAS 1	2	3	4
1	3	-	1	-
2	2	-1	-	-
3	-	5	-	1

PASO 6: Si algún elemento resulta negativo la solución no es óptima, por lo que deberá realizarse un desplazamiento hacia esta. En caso contrario deténgase la asignación es óptima. Dado que existe un valor negativo en el segundo renglón, segunda columna, se concluye que la solución es no óptima.

III. Desplazamiento Hacia una Mejor Solución:

PASO 1: Identifique la casilla que posea el valor más negativo: (2,2). En caso de empate, realice la elección en forma arbitraria.

PASO 2: La casilla seleccionada en el paso anterior es la que proporciona la máxima reducción en el costo, por lo tanto debe ser la candidata a recibir una asignación. La variable correspondiente será susceptible a incrementarse. Sin embargo al realizar esto, para conservar el tableau balanceado, debe efectuarse un cambio en las demás variables, esta actividad recibe el nombre de conformación de un tour. Para nuestro caso, observe que en el cuadro 10, la casilla (2,2) (renglón 2, columna 2), ha sido rellenada con un signo +, esto implica que debe aplicarse un incremento en esta. Para compensar tal cambio, y no alterar la suma por columna, la cantidad que se agregue en esta casilla (la cual al momento se desconoce) debe restarse de alguna asignación que se encuentre en la columna, la de la posición (1,2). De igual forma, este cambio tenderá a alterar la suma del renglón 1, para compensarlo, deberá sumarse la cantidad que se sustrajo en la posición (1,2), a otra asignación que se encuentre en este y que corresponde a la posición (1,4). Nuevamente la adición de una cantidad positiva tenderá a alterar la suma para esta columna, por ende, deberá sustraerse, la cantidad sumada a otra casilla, la (2,3). Observe que ya no es necesario realizar otra operación, ya que esta resta compensa la adición realizada en el segundo renglón para la posición (2,2).

CUADRO 10: Tableau de Transporte para la Compañía Minera.

	DESTINOS PLANTAS				
ORIGENES	1	2	3	4	OFERTA
MINA 1	9	4 20	6	6 20	40
MINA 2	10	5 +	7 15	8 35	50
MINA 3	4 30	7	3 30	5	60
DEMANDA	30	20	45	55	150

CUADRO 11: Tour.

	DESTINOS PLANTAS				
ORIGENES	1	2	3	4	OFERTA
MINA 1	9	4 20 -	6	6 20 +	40
MINA 2	10	5 +	7 15	8 35 -	50
MINA 3	4 30	7	3 30	5	60
DEMANDA	30	20	45	55	150

La trayectoria que define este movimiento se define como tour o recorrido "+" o "-", ya que la cantidad que se a&ade en una casilla se resta de otra y así sucesivamente. Una propiedad importante de este, es que el punto de partida debe ser también el de finalización del recorrido, asimismo, los movimientos deben realizarse en forma horizontal o vertical, nunca diagonalmente. El cuadro 11 muestra el recorrido antes descrito.

Existen diversas formas en las que un tour puede ser formado. Siempre que un problema sea no degenerado, será posible formar un recorrido "+" o "-". Observe que aunque este cruza al elemento (2,3), no existe ninguna modificación alguna para este, por lo tanto, no se coloca ningún signo en su casilla. El recorrido pudo haberse comenzado por renglón, sin por ello alterarlo. Cabe aclarar que en los tours se permiten los cruces en las líneas de reĉorrido, por ejemplo, en casos en los que estos tomen la forma de la figura siguiente:

```
+______________-
!              !
!              !
-______________!  _______________+
               !                 !
               !                 !
               +_________________-
```

PASO 3: Una vez identificado el tour, seleccione el valor más peque&o que se encuentre en la casilla con signo "-". Esta será la cantidad que se sume y reste respectivamente en el recorrido "+" o "-". En nuestro caso, existen dos valores que tienen asociados el signo "-" en el recorrido: 20 en la casilla (1,2) y 35 en la casilla (2,4). El menor es 20, por lo tanto será la cantidad que se sume y reste en el tour. Observe que esto va hacer que una variable se incremente de 0 a 20 (la ubicada en la posición (2,2)) y que otra se vuelva igual a cero (la ubicada en la posición (1,2)). El resultado de esta operación se muestra en el cuadro 12.

Observe que la suma por renglones y columnas, de cada una de las variables, corresponde con los totales de la oferta y demanda respectivamente, esta actividad puede realizarse a manera de verificación, para comprobar que en el proceso de cálculo ningún error ha sido cometido.

Como resultado de la aplicación del algoritmo descrito, se ha obtenido una nueva solución. Por lo que una vez más, tendrá que realizarse el cuestionamiento de su optimalidad, para responderlo deberá aplicarse el algoritmo descrito en el apartado II.

CUADRO 12: Tableau de Transporte Modificado.

ORIGENES	DESTINOS PLANTAS 1	2	3	4	OFERTA
MINA 1	9	4	6	6 40	40
MINA 2	10	5 20	7 15	8 15	50
MINA 3	4 30	7	3 30	5	60
DEMANDA	30	20	45	55	150

El lector podra comprobar que la tabla de valores $c_{ij} - (r_i + k_j)$ que se obtiene es la mostrada en el cuadro 13.

CUADRO 13: Valores $c_{ij} - (r_i + k_j)$

ORIGENES MINAS	DESTINOS PLANTAS 1	2	3	4
1	3	1	1	-
2	2	-	-	-
3	-	6	-	1

Dado que todos sus valores son positivos, se ha llegado a la solución óptima, que indica:

Transportar 40 toneladas de carbón de la mina 1 a la planta 4 a un costo de $6 por unidad enviada.
Transportar 20 toneladas de carbón de la mina 2 a la planta 2 a un costo de $5 por unidad enviada.
Transportar 15 toneladas de carbón de la mina 2 a la planta 3 a un costo de $7 por unidad enviada.
Transportar 15 toneladas de carbón de la mina 2 a la planta 4 a un costo de $8 por unidad enviada.
Transportar 30 toneladas de carbón de la mina 3 a la planta 1 a un costo de $4 por unidad enviada.
Transportar 30 toneladas de carbón de la mina 3 a la planta 3 a un costo de $3 por unidad enviada.

Costo total mínimo de envío:

$$z = (40)(6) + (20)(5) + (15)(7) + (15)(8) + (30)(4) + (30)(3) = \$775.$$

Si algún elemento hubiera resultado negativo, tendría que aplicarse de nueva cuenta el algoritmo descrito en el apartado III, en forma suscesiva hasta que se llegue a una solución óptima.

<u>Casos Especiales:</u>

Maximización. El método de transporte está diseñado para problemas de minimización, sin embargo, pueden existir ocasiones en que se tenga que llevar a cabo una maximización. Por ejemplo, si las rutas alternativas incluyen una función de rendimiento en vez de costo. Una manera sencilla de resolver el problema, es multiplicando por un -1 a cada uno de los costos, y proceder a aplicar el método de transporte antes descrito.

Soluciones Optimas Múltiples. En la solución óptima, si para una casilla vacía se dá que su $c_{ij} - (r_i - k_j) = 0$, se tendrá que existe otra solución óptima. La manera de determinarla, es aplicando los apartados II y III, haciendo la asignación en esta. Las soluciones óptimas múltiples son importantes ya que permiten una mayor flexibilidad en la toma de decisiones.

Rutas Prohibitivas. Cuando alguna ruta, por cuestiones de políticas, no puede ser usada, debe incluirse en el modelo una restricción que la penalice con un costo positivo muy elevado (M), en caso de que se esten minimizando costos, o imponiendo ganancias negativas muy reducidas (-M), en caso de que se este maximizando ganancias.

CUADRO 14: Tableau de Transporte Modificado.

	DESTINOS PLANTAS				
ORIGENES	1	2	3	4	OFERTA
MINA 1	9 30	4 10	6	6 ϵ	40
MINA 2	10	5	7	8 50	50
MINA 3	4	7 15	3 45	5	60
DEMANDA	30	25	45	50	150

Degeneracion. Con el objeto de concluir con la exposición del algoritmo, debe considerarse el caso en el que existan menos de (m + n − 1) casillas con asignación. Esta situación puede presentarse durante el proceso de determinacion de la solución inicial o en el de busqueda de la solución óptima. El cuadro 14 muestra esta configuración (denominada solución DEGENERADA) para el problema, que para efectos ilustrativos se ha obtenido a partir de una pequeña modificación en la asignacion del problema original y al alterar los requerimientos de las plantas 2 y 4.

Se requieren seis celdas ocupadas para que un tour pueda ser determinado (considere por ejemplo la casilla (2,1)). El remedio es bastante simple: Para fines de ejecución del algoritmo, se considerará a alguna celda que carece de asignacion como si la poseyera, asignándole una cantidad igual a 0, como se muestra en el cuadro 15; la forma en la que puede realizarse esta selección es tratando de completar los tours que faltan y que no son posibles de formar por carecer de un elemento. El algoritmo tratará a esta cantidad como una infinitamente pequeña.

CUADRO 15: Tableau de Transporte Modificado.

	DESTINOS PLANTAS				
ORIGENES	1	2	3	4	OFERTA
MINA 1	9 / 30	4 / 10	6 /	6 / 0	40
MINA 2	10 /	5 /	7 /	8 / 50	50
MINA 3	4 /	7 / 15	3 / 45	5 /	60
DEMANDA	30	25	45	50	150

En el cuadro 15, como el lector podra comprobar, las casillas (2,1) y (3,4), son las que violan las condiciones de optimalidad. Para mejorarla, se aplica el algoritmo descrito en el apartado III para la casilla (2,1). Para conformar el tour, se agrega una cantidad igual a 30 unidades a las celdas (2,1) y (1,4) (porqué?), y se resta de las celdas (1,1) y (2,4). La nueva distribución se muestra en el cuadro 16. El 0 que aparecia en la casilla (1,4) no esta (ya que es negligible) y en su lugar aparece la cantidad positiva 30. En esta etapa la degeneración ha desaparecido (no necesariamente tiene que ocurrir esto, por ejemplo, pruebe la ubicación del cero en la casilla (3,4) en vez de la (1,4)), por lo que puede aplicarse el algoritmo de transporte normal.

CUADRO 16: Tableau de Transporte Modificado.

	DESTINOS PLANTAS				
ORIGENES	1	2	3	4	OFERTA
MINA 1	(9)	(4) 10	(6)	(6) 30	40
MINA 2	(10) 30	(5)	(7)	(8) 20	50
MINA 3	(4)	(7) 15	(3) 45	(5)	60
DEMANDA	30	25	45	50	150

La discusión anterior solo ha descrito la forma más simple de la degeneración (m + n - 2 casillas ocupadas), sin embargo, existen casos en los que pueden presentarse situaciones más complejas (un reducido número de asignaciones); en tales circunstancias, el algoritmo descrito hasta este punto, puede ser generalizado. Sin embargo, es importante remarcar que la colocación de los 0's debe hacerse cuidando que cada celda vacía posea un tour.

REFERENCIAS:

[1], [41] y [50] Capítulo 5.
[6] Capítulo 2.
[7] y [9] Capítulo 8.
[14] Capítulo 14.
[19] Capítulo 6.
[22] y [23] Capítulo 10.
[26] y [39] Capítulo 9.
[58] Capítulo 3.
[60] Capítulo 5, secciones 5.4 a la 5.8.
[66] Capítulo 11.
[72] Capítulo 1, sección 1.3.
[76] y [78] Capítulo 7.
[83] Capítulo 4.
[86] Capítulo 9, secciones 9.1 a la 9.4.

EJERCICIOS:

1. Una compañía que renta carros tiene que cubrir la demanda en cuatro ciudades en un futuro próximo. Dos carros se requieren en la ciudad A, tres en B, cinco en C y siete en D. La compañía tiene oficinas en tres ciudades E, F y G, cada una con

seis, uno y diez carros disponibles respectivamente. Las distancias entre cada una de las oficinas y destinos se muestran en el siguiente cuadro:

	DESTINOS			
ORIGENES	A	B	C	D
E	7	11	3	2
F	7	6	10	1
G	9	15	8	5

Cuál es la política de asignación óptima?.

2. Una empresa tiene cinco categorías de trabajo: A, B, C, D y E, y desearía ocuparlas al máximo. Su oferta en el número de plazas es: 25, 10, 5, 15 y 20 respectivamente para cada una de las categorías.
El ejecutivo de personal, tiene varios candidatos a los que ha sometido a diferentes exámenes de aptitudes, que presentan una escala de calificaciones de 1 a 8. La tabla siguiente muestra el número de candidatos así como sus calificaciones dentro de las categorías correspondientes:

Calificación	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de Candidatos	10	15	25	10	5	15	15	5
Plaza	A, E	A, D	B, E	B, D	C, D, E	C, E	D, E	E

Maximice la contribución mediante la asignación adecuada de candidatos a plazas vacantes.

APENDICE C: ALGORITMO DE ASIGNACION.

Los modelos de asignación son casos particulares de los de transporte. Con estos se trata de determinar la mejor manera de asignar una serie de recursos a un grupo de actividades que proporcionan diferentes valores. Los problemas típicos de esta naturaleza incluyen, por ejemplo, asignar trabajadores a máquinas, equipos de trabajo a proyectos, etc. Matemáticamente el modelo de asignación se define como la optimización (maximización o minimización) de la función:

$$\sum_{i} \sum_{j} c_{ij} X_{ij}$$

donde:

c_{ij} representan los costos o contribuciones en la función objetivo de cada una de las variables.

X_{ij} son las variables de decisión, que representan la asignación o no del recurso i-ésimo a la actividad j-ésima, cuyos únicos valores son 0 o 1.

sujeta a las restricciones:

$$\sum_{i} X_{ij} = 1, 0 \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$\sum_{j} X_{ij} = 1, 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$X_{ij} = 0 \text{ o } 1 \text{ para toda } i \text{ y } j.$$

se supone la existencia de n trabajadores y n actividades. Las primeras restricciones se definen como de oferta, las restantes de demanda. Debido a la estructura tan particular de este tipo de modelos, existe un algoritmo sumamente eficiente para resolverlo conocido como algoritmo húngaro de asignación, el cual resulta bastante accesible, aún para cálculos manuales.

Ejemplo:

Una compa&ía constructora tiene cinco palas mecánicas en diferentes localidades, se requiere una pala en tres diferentes sitios de construcción. Determine el programa óptimo de envío para los costos de transporte indicados en el cuadro 1.

Advierta los siguientes aspectos:

- Solo una pala puede ser asignada a un sitio de construcción.

- Existe un exceso de oferta (5 palas y 3 sitios de construcción).

- Se trata de minimizar los costos de recorrido de las localidades a los sitios de construcción.

CUADRO 1: Costos de Transporte *.

	Sitio de Construcción		
Localidad	A	B	C
1	2	3	4
2	7	6	4
3	3	5	8
4	4	6	5
5	4	6	3

* en millones de pesos.

Este problema reune las características típicas de un problema de asignación. El cuadro de costos de transporte se conoce, en general, con el nombre de matríz de costos de asignación.

<u>Algoritmo Húngaro (Caso Minimización).</u>

PASO 1: Balancee el problema, es decir, iguale el número de renglones y columnas. Si el número de renglones supera al de columnas, agregue tantas columnas como sean necesarias a costos nulos. En caso contrario, agregue tantos renglones como se requieran, también a costos nulos. El cuadro 2 muestra los resultados de la aplicación de este paso.

CUADRO 2: Matríz de Asignación Balanceada.

	Sitio de Construcción				
Localidad	A	B	C	Ficticio	Ficticio
1	2	3	4	0	0
2	7	6	4	0	0
3	3	5	8	0	0
4	4	6	5	0	0
5	4	6	3	0	0

PASO 2: Para cada fila reste el elemento más pequeño que se encuentre en esta. Como cada renglón posee un elemento nulo, la matríz de asignación no se modifica.

PASO 3: Para cada columna, reste el elemento más pequeño que se encuentre en esta, como se muestra en el cuadro 3.

CUADRO 3:

	Sitio de Construcción				
Localidad	A	B	C	Ficticio	Ficticio
1	0	0	1	0	0
2	5	3	1	0	0
3	1	2	5	0	0
4	2	3	2	0	0
5	2	3	0	0	0

PASO 4: Verifique la optimalidad trazando el MINIMO número de líneas que puedan pasar a través de todos los ceros de la matríz de asignación modificada. Aunque existen muchas formas de conseguir esto, el lector no deberá preocuparse si su trazo resulta diferente a otro que sea igualmente posible, sin embargo, debe cuidar que en realidad se trate del mínimo número de estos. Las líneas diagonales NO se permiten, por lo que el trazo debe ser a través de líneas horizontales o verticales. Esto se muestra en el cuadro 4.

CUADRO 4:

	Sitio de Construcción				
Localidad	A	B	C	Ficticio	Ficticio
1	0	0	1	0	0
2	5	3	1	0	0
3	1	2	5	0	0
4	2	3	2	0	0
5	2	3	0	0	0

Prueba de Optimalidad:

PASO 5: Si el número mínimo de líneas es igual a n (número de renglones o columnas en la matríz d~ asignación), se ha llegado a la solución óptima vaya al paso 7, en caso contrario, proceda a aplicar el siguiente paso.

Como para el problema el número de líneas es 4 (4 < 5) debe aplicarse una iteración adicional.

PASO 6: Seleccione al elemento más peque&o que no haya sido cruzado por alguna de las líneas, réstelo a todos los elementos NO cruzados por alguna línea y súmelo a todos los elementos cruzados por dos líneas. Los demás elementos permanecen inalterados. Esto se muestra en el cuadro 5.

CUADRO 5:

	Sitio de Construcción				
Localidad	A	B	C	Ficticio	Ficticio
1	0	0	1	1	1
2	4	2	0	0	0
3	0	1	4	0	0
4	1	2	1	0	0
5	2	3	0	1	1

Aplique de nueva cuenta el paso 4. En este caso, el cuadro 6 muestra el resultado de los cruces.

CUADRO 6:

	Sitio de Construcción				
Localidad	A	B	C	Ficticio	Ficticio
1	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
2	~~4~~	~~2~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
3	~~0~~	~~1~~	~~4~~	~~0~~	~~0~~
4	~~1~~	~~2~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
5	~~2~~	~~3~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~

dado que el número de líneas es 5 se ha llegado al óptimo, por lo tanto se aplica el paso 7.

PASO 7: Realice la asignación óptima. Esto se logra determinando en el cuadro final las posiciones con ceros (mínimo número de líneas), y recordando las restricciones de que solo un recurso puede ser asignado a una tarea.

La asignación óptima para el problema es:

Enviar una pala de la localidad 1 al centro de construcción B.
Enviar una pala de la localidad 3 al centro de construcción A.
Enviar una pala de la localidad 5 al centro de construcción C.
Las palas en las localidades 2 y 4 no deben enviarse.

El costo total mínimo es:

$$3 + 3 + 3 = 9 \text{ millones de pesos.}$$

En algunas circunstancias la solución óptima puede resultar no única (solución óptima múltiple), el lector podrá darse cuenta de este fenómeno al advertir, en sus intentos, la posibilidad de formar más de una asignación diferente permisible.

Observe que las asignaciones se han hecho considerando los cruces de los elementos nulos (renglón-columna).

Casos Especiales:

Maximización. El metodo esta diseñado para minimizar costos, si se trata de maximizar ganancias, debe realizarse un pequeño ajuste en la matríz de asignación, para poder utilizar el algoritmo, simplemente multiplique por un -1 a cada uno de sus elementos y aplique el algoritmo antes indicado, tomando en cuenta que el elemento más pequeño es el más negativo.

Asignaciones Prohibitivas. Cuando no puede usarse una determinada combinación entre un recurso y una actividad, simplemente debe incluirse un costo penal muy elevado (M) si se esta minimizando o muy reducido si se esta maximizando (-M).

REFERENCIAS:

[1] Capítulo 5.
[7] Capítulo 8, sección 8.8.
[9] Capítulo 9.
[14] Capítulo 15.
[22] Capítulo 10, pags. 308-317.
[26] Capítulo 10, sección 10.12.
[39] Capítulo 10.
[41] Capítulo 5, sección 5.5.
[50] Capítulo 5, sección 5.10.
[51] Pags. 61, 72 y 354.
[58] Capítulo 3, sección 3.7.
[66] Pags 340-347.
[72] Pags. 74, 322 y 339.
[83] Capítulo 4, sección 4.3.

EJERCICIOS:

1. Minimizar y maximizar cada una de las matrices de asignación siguientes:

a)

	1	2	3	4
1	12	6	8	5
2	14	13	13	12
3	16	10	8	9
4	6	7	12	8

b)

	1	2	3	4
1	12	6	8	5
2	14	13	12	13
3	16	10	8	9
4	6	7	12	8

2. Considere el siguiente problema de asignar 5 operadores a 5 máquinas. Las ganancias de asignación son:

M A Q U I N A

OPERADOR		1	2	3	4	5
	1	5	5	-	2	6
	2	7	4	2	3	4
	3	9	3	5	-	3
	4	7	2	6	7	2
	5	6	5	7	9	1

El operador 1 no puede utilizar la máquina 3; el 3 no puede operar la máquina 4. Determine la asignación óptima.

APENDICE D: RUTA CRITICA.

Los problemas que involucran un considerable número de actividades tienen que planearse, para que exista una programación controlada en el uso de los recursos durante el tiempo que se requieran. Un análisis en tiempos y costos, puede proporcionar parámetros valiosos para el administrador del proyecto. La Ruta Crítica permite conocer la información relativa a la duración máxima permitida en la consecución de un proyecto, así como la identificación de aquellas actividades denominadas como "cuellos de botella" o "críticas".

Ejemplo:

Un grupo de arquitectos consultores ganó, recientemente, un contrato para preparar los planos y especificaciones de un nuevo centro de salud y cuidado intensivo, que pretende construirse en el próximo a&o. Como fundador y presidente del grupo el Se&or M. ha tenido experiencias con esta clase de proyectos. El anticipa que con el objeto de cubrir con los requerimientos del contrato, su empresa debe llevar a cabo el siguiente grupo de actividades:

Preparar los diagramas preliminares del edificio.
Bosquejar las especificaciones físicas del edificio.
Realizar diagramas detallados del edificio.
Describir a detalle las especificaciones de ingeniería.
Redactar el reporte del proyecto.
Imprimir los dibujos a detalle.
Imprimir las tablas de las especificaciones de ingeniería.
Preparar el reporte final del proyecto.

El presidente de la empresa desea estimar los tiempos de duración para cada una de las actividades, para determinar si el proyecto puede llevarse a cabo en 16 semanas. También, ya que el grupo está atendiendo en paralelo otra serie de proyectos, el se&or M. quiere determinar que actividades merecen de una atención especial en su desarrollo. El cuadro 1 presenta información complementaria a la antes proporcionada.

CUADRO 1:

Actividad	Descripción	Predecesora	Duración *
A	Preparar diagramas	-	4
B	Bosquejar especificaciones	-	3
C	Realizar diagramas	A	5
D	Escribir especificaciones	A, B	4
E	Imprimir dibujos	A, C, D	5
F	Redactar reporte	C, D	4
G	Imprimir tablas	D	3
H	Preparar reporte final	F, G	2

* Semanas

Como el lector podrá comprobar, el diagrama de actividad en flechas se muestra en la figura 1. De ahora en adelante, nuestro interés se concentrará en determinar los tiempos más importantes que permiten realizar un estudio más profundo en la programación de las actividades de un proyecto.

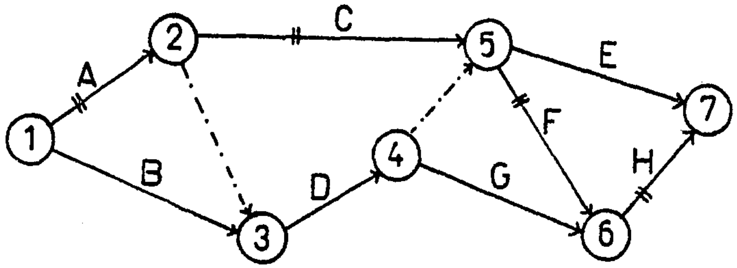


Figura 1.

Ruta Crítica.

Una ruta es una secuencia de actividades conectadas en forma sucesiva en un diagrama. En la figura 1, pueden identificarse las siguientes rutas, que van desde el inicio hasta la terminación del proyecto:

A ---> C ---> E,   A ---> D ---> E,   A ---> D ---> G ---> H,
B ---> D ---> F ---> H,   A ---> C ---> F ---> H,   A ---> D ---> F ---> H,
B ---> D ---> E,   B ---> D ---> G ---> H.

Debido a las relaciones que se dan en las actividades, estas tienen que ser ejecutadas en una determinada secuencia, asimismo, no pueden traslaparse, por lo tanto, la duración del proyecto debe ser al menos igual a la de alguna de las rutas que lo componen.

La ruta de mayor duración en la red se denomina Ruta Crítica. Esta determina el máximo tiempo permisible en la duración de un proyecto. Las actividades que la componen se denominan Actividades Críticas, cualquier retraso en estas puede provocar una demora en la terminación del proyecto.

Con el objeto de identificar la ruta crítica, es necesario conformar todas las posibles rutas del proyecto y seleccionar aquella que tenga la máxima duración. Sin embargo, cuando se esta trabajando con redes de cierta magnitud es necesario contar con algún método más ordenado y eficiente que permita conseguir esto. Este método se lleva a cabo en dos etapas:

I. Determinación de los Tiempos Tempranos y Tardíos.

PASO 1: Suponga que las actividades que carecen de predecesoras comienzan en tiempo cero.

PASO 2: Calcule los tiempos tempranos de inicio y terminación para cada una de las actividades que componen al proyecto, para ello tenga en cuenta que:

Tiempo Temprano de Inicio (TTI), es aquel en el que puede comenzarse una actividad, tan pronto como la predecesora haya finalizado.

Tiempo Temprano de Terminación (TTT), es aquel en el que puede terminarse una actividad, sin ninguna demora.

Para el nodo INICIO se fija el tiempo temprano de inicio igual a cero. Para calcular los tiempos tempranos de inicio y terminación para cada una de las actividades subsecuentes debe considerarse, en general, para la actividad i la siguiente expresión matemática:

$$TTT_i = TTI_i + D_i$$

donde:

TTI_i es el tiempo temprano de inicio para la actividad i.
TTT_i es el tiempo temprano de terminación de la actividad i.
D_i es la duración de la actividad i.

Debe tomarse en cuenta, durante este cálculo, que una actividad no puede inicializarse si alguna de sus predecesoras no ha sido finalizada. En otras palabras, no puede comenzar sino hasta que el máximo tiempo temprano de terminación de todas sus predecesoras se haya cumplido. Así se tendrá que:

TTI_i = Máximo[TTT de las predecesoras de la actividad i]

A partir de las definiciones anteriores, los TTI y TTT pueden calcularse sistemáticamente para cada una de las actividades de izquierda a derecha, y desde el nodo INICIO hasta el de TERMINACION.

Para nuestro ejemplo, en el nodo INICIO se tiene que $TTI_{INICIO} = 0$, y $TTT_{INICIO} = TTI_{INICIO} + D_{INICIO} = 0 + 0 = 0$, así para la actividad A: $TTI_A = 0$ (el inicio es su único predecesor), y $TTT_A = TTI_A + D_A = 0 + 4 = 4$. Similarmente para la actividad B: $TTI_B = 0$ y $TTT_B = 3$, para C: $TTI_C = 4$ (el TTT_A su única predecesora) y $TTT_C = 9$. Para la actividad D el análisis es un poco más complejo, ya que posee dos predecesoras: A y B. Advierta que D no puede comenzar en la 3er. semana, cuando B sea finalizada, sino hasta la 4ta., cuando A y B hayan finalizado. De esta forma, para la actividad D se tiene: $TTI_D = \max[TTT_A, TTT_B] = \max[4,3] = 4$, y $TTT_D = TTI_D + D_D = 4 + 4 = 8$. Procediendo de la misma manera para cada una de las actividades subsecuentes se obtiene la siguiente tabla:

Actividad	Cálculo del TTI	Cálculo del TTT
E	max[TTT_C, TTT_D] = 9	$TTI_E + D_E$ = 9 + 5 = 14
F	max[TTT_C, TTT_D] = 9	$TTI_F + D_F$ = 9 + 4 = 13
G	TTT_D = 8	$TTI_G + D_G$ = 8 + 3 = 11
H	max[TTT_F, TTT_G] = 13	$TTI_H + D_H$ =13 + 2 = 15
TERM.	max[TTT_E, TTT_H] = 15	$TTI_T + D_T$ =15 + 0 = 15

El TTT para la TERMINACION del proyecto, representa el máximo tiempo permisible en el que este debe ser finalizado. Por lo tanto, el presidente del grupo, no debe permitir una duración superior a las 15 semanas, si desea cumplir con las fechas indicadas.

PASO 3: Calcule los tiempos tardíos de inicio y terminación para cada una de las actividades que componen al proyecto, para ello tenga en cuenta:

Tiempo Remoto de Inicio (TRI), es aquel en el que puede comenzarse una actividad sin retrasar al proyecto.

Tiempo Remoto de Terminación (TRT), es aquel en el que puede terminarse una actividad sin retrasar al proyecto.

Para ello, se considerará al TTT del proyecto como el TRT del mismo, por lo tanto, los tiempos tardíos tendrán que comenzarse a calcular de derecha a izquierda, es decir, a la inversa. En general, para la actividad i se tendrá la siguiente expresión matemática:

$$TRI_i = TRT_i - D_i$$

donde:

TRI_i es el tiempo tardío de inicio para la actividad i.
TRT_i es el tiempo tardío de terminación de la actividad i.
D_i es la duración de la actividad i.

Para calcular el tiempo remoto de terminación, debe tenerse en cuenta que esta actividad debe terminarse antes de que cualesquiera de sus sucesoras comience. En otras palabras, debe terminar antes del mínimo tiempo tardío de inicio de sus sucesoras. Matemáticamente se tendrá:

$$TRT_i = \text{Mínimo}[\text{TRI de las sucesoras de la actividad } i]$$

Observe que como $TRT_{TERM} = TTI_{TERM} = 15$, se tendrá para la actividad H que su $TRT_H = 15$ (ya que su única sucesora es la TERMINACION del proyecto), de esta forma $TRI_H = 15 - 2 = 13$. Es decir, para que el proyecto no se demore, la actividad H tiene que estar terminada a más tardar la semana 15; dado que tiene una duración de 2 semanas, a lo más esta debe comenzar en la semana 13. Siguiendo la misma filosofía expuesta se obtiene la siguiente tabla de tiempos remotos (recuerde que en este caso se comienza a la derecha).

Actividad	Cálculo del TRT	Cálculo del TRI
E	$TRI_{TERM} = 15$	$TRT_E - D_E = 15 - 5 = 10$
G	$TRI_H = 13$	$TRT_G - D_G = 13 - 3 = 10$
F	$TRI_H = 13$	$TRT_F - D_F = 13 - 4 = 9$
D	$\min[TRI_E, TRI_F, TRI_G] = \min[10, 9, 10] = 9$	$TRT_D - D_D = 9 - 4 = 5$
C	$\min[TRI_E, TRI_F] = \min[10, 9] = 9$	$TRT_C - D_C = 9 - 5 = 4$
B	$TRI_D = 5$	$TRT_B - D_B = 5 - 3 = 2$
A	$\min[TRI_C, TRI_D] = \min[4, 5] = 4$	$TRT_A - D_A = 4 - 4 = 0$
INICIO	$\min[TRI_A, TRI_B] = \min[0, 2] = 0$	$TRT_I - D_I = 0 - 0 = 0$

II. Identificación de Holguras.

La importancia de los tiempos tardíos de inicio, radica en la identificación de los momentos en los que a más tardar pueden comenzar las actividades. Aquellas actividades que tengan sus tiempos tardíos iguales a los tempranos, son las que no deben retrasarse, es decir, son actividades críticas. El tiempo que una actividad puede posponerse sin afectar por ello la duración del proyecto, se denomina holgura. Existen dos tipos de holguras básicas: holgura total y holgura libre.

La holgura total es el retraso permisible para una actividad sin que por ello se demore la terminación del proyecto, suponiendo que las otras actividades comienzan tan pronto como sea posible.

Para calcular las holguras totales, solo es necesario restar los tiempos tardío y temprano de cada una de las actividades. El cuadro 2 muestra en forma desglosada cada uno de los tiempos para las actividades del ejemplo, así como la holgura total correspondiente.

CUADRO 2: Tabla de Tiempos.

Actividad	TTI	TTT	TRI	TRT	H
A	0	4	0	4	0
B	0	3	2	5	2
C	4	9	4	9	0
D	4	8	5	9	1
E	9	14	10	15	1
F	9	13	9	13	0
G	8	11	10	13	2
H	13	15	13	15	0

Una manera de identificar la ruta crítica, es observando las actividades que presentan holguras nulas, es decir, aquellas que no son susceptibles a sufrir un retraso.

En algunos casos, la holgura total es un tiempo libre compartido por más de una actividad, es decir, esta puede no afectar en la duracion de todo el proyecto, sin embargo, puede retrasar a aquellas actividades que la comparten, por lo que la holgura puede ser interferente o libre.

La holgura libre es el tiempo permisible en el que una actividad puede retrasarse, sin que ello demore el comienzo de otra actividad.

La holgura libre para una actividad es la diferencia entre sus tiempos tempranos de terminación y de inicio de sus sucesoras inmediatas. Así, para la actividad i se tendrá la siguiente expresión matemática:

HL_i = Mínimo[TTI de las sucesoras de la actividad i] − TTT_i

Para nuestro problema se tienen los siguientes resultados:

Actividad	Cálculo de la HL
A	$\min[TTI_C, TTI_D] - TTT_A = \min[4, 4] - 4 = 4 - 4 = 0$
B	$TTI_D - TTT_B = 4 - 3 = 1$
C	$\min[TTI_E, TTI_F] - TTT_C = \min[9, 9] - 9 = 9 - 9 = 0$
D	$\min[TTI_E, TTI_F, TTI_G] - TTT_D = \min[9, 9, 8] - 8 = 8 - 8 = 0$
E	$TTI_T - TTT_E = 15 - 14 = 1$
F	$TTI_H - TTT_F = 13 - 13 = 0$
G	$TTI_H - TTT_G = 13 - 11 = 2$
H	$TTI_T - TTT_H = 15 - 15 = 0$

En el cuadro 3, se muestra el condensado de los tiempos antes calculados para nuestro ejemplo.

CUADRO 3: Tabla de Tiempos.

Actividad	TTI	TTT	TRI	TRT	H	HL
A	0	4	0	4	0	0
B	0	3	2	5	2	1
C	4	9	4	9	0	0
D	4	8	5	9	1	0
E	9	14	10	15	1	1
F	9	13	9	13	0	0
G	8	11	10	13	2	2
H	13	15	13	15	0	0

En este puede apreciarse que la actividad B puede retrasarse una semana sin demorar el proyecto ni alguna actividad sucesora, lo mismo se aplica para E. No obstante, B puede demorarse hasta dos semanas sin que ello retrase el proyecto, sin embargo, retrasará el comienzo de la actividad D (su subsecuente).

Los tiempos antes calculados representan una herramienta valiosa, que todo administrador de un proyecto debe conocer para llevar a cabo una planeación y control en su consecución.

Casos Especiales:

Técnica de Evaluación y Revisión de Proyectos (PERT). En algunas circunstancias existe la necesidad de estimar el tiempo que tardará una actividad en desarrollarse. El PERT utiliza un enfoque bastante simple, al permitir al usuario aportar tres parámetros:

a, un tiempo optimista de duración para una actividad.
b, un tiempo pesimista de duración para una actividad.
m, un tiempo más probable de duración para una actividad.

A partir de estos, es posible obtener una medida representativa o tiempo esperado así como su respectiva desviación estándar, bajo la suposición de que los tiempos de una actividad tienen una distribución beta. Las fórmulas de cálculo son:

$$\text{Media o Tiempo Esperado} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$\text{Desviación Estandar} = \frac{b - a}{6}$$

$$\text{Varianza} = \frac{(b - a)^2}{36}$$

Por ejemplo, suponga que en el problema de los arquitectos, un dibujante técnico asignado para la preparación de los diagramas (actividad C) estima que bajo condiciones favorables el tomará 3 semanas en terminarlos, sin embargo, bajo situaciones desfavorables el tiempo se alargará hasta 11 semanas, su estimación más probable es 4 semanas. De acuerdo a las indicaciones hechas se tendrá:

$a = 3,\qquad m = 4,\qquad b = 11$

y

$$\text{Media o Tiempo Esperado} = \frac{3 + 4(4) + 11}{6} = 5$$

$$\text{Desviación Estándar} = \frac{11 - 3}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Varianza} = \frac{16}{9}$$

el tiempo esperado puede interpretarse como el promedio ponderado más probable a ocurrir en la ejecución de una actividad.

Una vez que para cada actividad se han obtenido los tiempos esperados de ejecución, pueden realizarse los cálculos normales para determinar la ruta crítica.

Por ejemplo, suponga que los parámetros para el ejemplo del grupo de arquitectos son los siguientes:

Actividad	a	m	b
A	3	4	5
B	2	3	4
C	3	4	11
D	2	4	6
E	3	5	7
F	1	3	11
G	3	3	3
H	1	2	3

El lector podrá comprobar los siguientes resultados, con base en la supociciones hechas en el PERT.

Actividad	a	m	b	Media	Varianza
A	3	4	5	4	1/9
B	2	3	4	3	1/9
C	3	4	11	5	16/9
D	2	4	6	4	4/9
E	3	5	7	5	4/9
F	1	3	11	4	25/9
G	3	3	3	3	0
H	1	2	3	2	1/9

La media corresponde con los tiempos proporcionados en el cuadro 1. La ruta crítica, por lo tanto, sigue siendo A —> C —> F —> H, la duración media estimada de esta es:

Media de la Ruta Crítica = Media de la actividad A
+ Media de la actividad C
+ Media de la actividad F
+ Media de la actividad H
= 4 + 5 + 4 + 2 = 15

Varianza de la Ruta Crítica = Varianza de la actividad A
+ Varianza de la actividad C
+ Varianza de la actividad F
+ Varianza de la actividad H
= 1/9 + 16/9 + 25/9 + 1/9 = 43/9 = 4.78

Desviación Estándar de la Ruta Crítica = 4.78 = 2.19

Los cálculos anteriores se hicieron bajo la suposición de que el proyecto es lo sufucientemente grande y que en general tiende a comportarse bajo una distribución normal. Aplicando esta función probabilística, es posible encontrar la probabilidad de terminar el proyecto dentro de 18 semanas, por ejemplo:

P(longitud del proyecto <= 18) = P(z <= (18 - 15)/2.19 = 1.37)

donde z es una variable aleatoria con distribución normal estándar con media nula y varianza unitaria. Por lo tanto, debe encontrarse en las tablas de la distribución normal:

P(z <= 1.37) = ?

que proporcionan un valor de 0.91. Esta es la probabilidad de que el proyecto se termine dentro de 18 semanas.

La ventaja que proporciona el PERT es la de poder realizar especulaciones referentes a la duración o desempeño de un proyecto al contar con información de tipo probabilista.

REFERENCIAS:

[1] Capítulo 11.
[4]
[6], [50] y [60] Capítulo 6.
[9] Capítulo 15.
[12]
[22] Capítulo 12.
[44] Capítulo 3.
[46] Pags. 115 y 540.
[58] Capítulo 4, secciones 4.12.1 y 4.12.2.
[72] Pags. 446-454.
[75], [78] y [83] Capítulo 5.
[84] Capítulos 2 y 3.

EJERCICIOS:

1. Dadas las actividades siguientes:

Actividad	Tiempo, semanas
1,2	5
1,3	4
1,4	8
2,3	2
2,4	6
2,5	9
3,4	3
4,5	4

a) Dibuje la red.

b) Encuentre los tiempos tempranos y tardíos de inicio y terminación, las holguras para cada evento.
c) Determine la ruta crítica y su duración.

2. Dados los siguientes datos de proyecto:

	Tiempo, semanas		
Actividad	Optimista	Más Probable	Pesimista
1,2	1	3	11
1,3	5	8	11
2,3	1	8	9
3,4	1	7	7
3,5	6	9	12
4,5	2	5	8

a) Dibuje la red.
b) Cuál es la ruta crítica?.
c) Cuál es la probabilidad de que el proyecto se termine en 20 semanas?. En 22 semanas?. En 25 semanas?.

APENDICE E: INVENTARIOS.

Un inventario es un recurso ocioso o una cantidad almacenada que tiene el objeto de cubrir alguna necesidad a futuro. El uso de inventarios es universal y se debe a diferentes razones. En este apéndice, se expone el desarrollo matemático de los modelos EOQ y el EOQ con faltantes empleados en el Tema 7 del Capítulo II.

Modelo del Lote Económico (EOQ).

En este tipo de inventario se aplican los siguientes supuestos:

- El análisis cubre un solo producto; los demás son independientes.
- La demanda del producto es conocida con certeza y se presenta a una tasa constante.
- La demanda se cubre a tiempo.
- El reabastecimiento es recibido en forma global.
- Cada orden involucra costos fijos.
- Los cargos de inventario se basan en sus niveles promedio.
- Los pedidos se reciben en forma instantánea.

Con base en esto, el inventario presenta el comportamiento descrito en la figura 1. Su modelo es el siguiente:

Minimizar CTI = Costo de Ordenar + Costo de Mantenimiento
sa
Satisfacción de la Demanda

donde:

CTI es el costo total del inventario, sin considerar el precio de compra del producto.

En general, se usa un año de operación como período de análisis del inventario.

Advierta que el costo de ordenar, esta en función directa del número de órdenes que se realicen y el precio que tenga que pagarse por cada una de ellas, así:

Costo Anual
de Ordenar = (Numero de Ordenes Anuales)(Costo de una Orden)

Si la demanda anual total de un producto es D unidades, y en cada pedido se ordenan Q unidades, se tiene que:

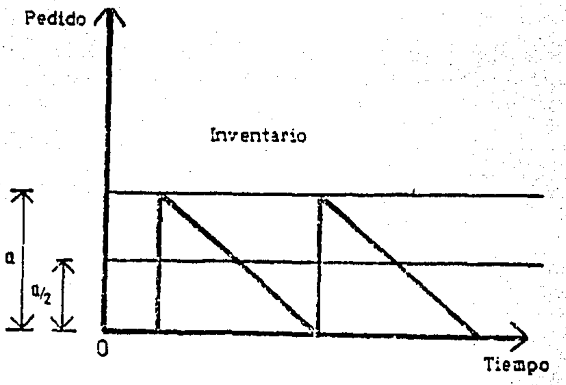


Figura 1.

$$\text{Número de Ordenes al Año} = \frac{D}{Q} \qquad \ldots(1)$$

Denotando al costo de ordenar como C_o, se concluye que:

$$\text{Costo Anual de Ordenar} = \frac{D}{Q} C_o \qquad \ldots(2)$$

Por otro lado:

Costo Anual de Mantenimiento = Inventario Promedio Anual Costo de Conservación por Unidad al Año

El Inventario Promedio en un Período, de acuerdo al la figura 1, es el volumen de artículos almacenados en este tiempo, es decir, es el área de uno de los triángulos. El Inventario Promedio Anual, será igual al Inventario Promedio en un Período multiplicado por el número total de Períodos.

El número de períodos es igual a número de ordenes colocadas en un año. El Inventario Promedio en un Período, de acuerdo a la definición del área de un triángulo se tiene que:

$$\text{Inventario Promedio en un Período} = \frac{(t)(Q)}{2} \qquad \ldots(3)$$

donde:

t es el tiempo de duración de un período (base del triángulo).

$$\text{Inventario Promedio Anual} = \frac{(t)(Q)}{2}\ \frac{D}{Q} = \frac{(t)(D)}{2} \qquad \ldots(4)$$

Observe que en un período debe cumplirse una equivalencia entre la oferta y la demanda, es decir:

$$Q = (t)(D) \qquad \ldots(5)$$

al despejar t se obtiene:

$$t = \frac{Q}{D} \qquad \ldots(6)$$

sustituyendo (6) en (4) se obtiene:

$$\text{Inventario Promedio Anual} = \frac{Q}{2} \qquad \ldots(7)$$

Si se denota a C_M como el costo anual de mantenimiento de una unidad, se tendrá que el costo de conservación anual del inventario es:

$$\text{Costo Anual de Mantenimiento} = \frac{Q}{2} C_M \qquad \ldots(8)$$

Conjuntando (2) y (8), se obtiene la siguiente expresión matemática de la función objetivo:

$$\text{Minimizar CTI} = \frac{D}{Q} C_O + \frac{Q}{2} C_M \qquad \ldots(9)$$

Debe resultar claro que el elemento que se desea determinar el el valor de Q, que haga mínima la expresión antes encontrada. Para ello se deriva parcialmente la expresión (9) con respecto a Q y se encuentra su valor crítico, es decir:

$$\frac{d(CTI)}{dQ} = -\frac{D}{Q} C_O + \frac{C_M}{2} \qquad \ldots(10)$$

haciendo:

$$\frac{d(CTI)}{dQ} = 0$$

se obtiene el siguiente valor óptimo:

$$Q = \sqrt{\frac{(2)(D)(C_O)}{C_M}} \qquad \ldots(11)$$

que es el que minimiza la expresión dada por (9).

Modelo del Lote Económico con Faltantes.

En este caso, se supone que es posible que existan niveles de inventario negativos. Sin embargo, esto será a un costo que se denominara Costo por Faltantes representado por C_F. Los demás supuestos para el primer modelo se aplican. La figura 2 muestra el comportamiento cíclico de esta clase de inventarios.

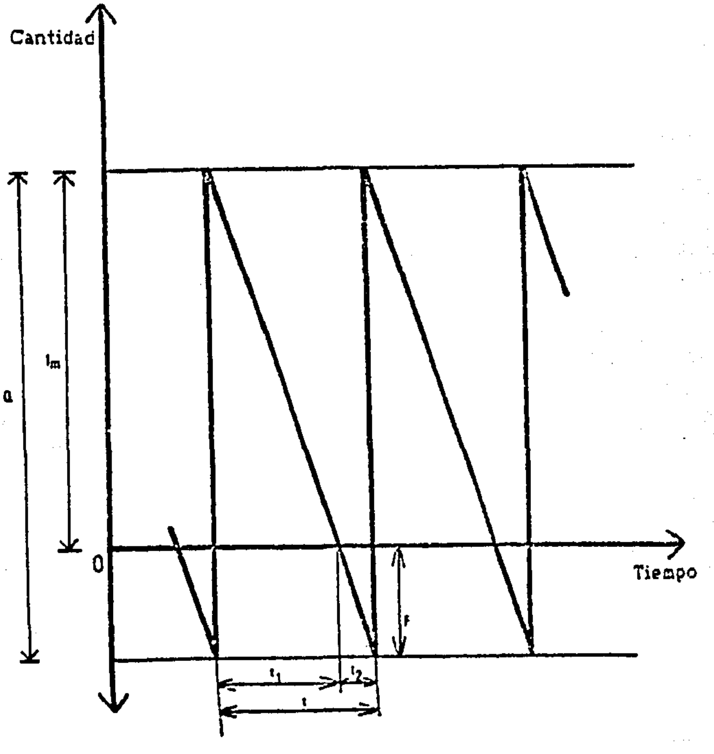


Figura 2.

La función objetivo a minimizar es la siguiente:

$$\text{Minimizar CTI} = \text{Costo de Ordenar} + \text{Costo de Mantenimiento} + \text{Costo por Faltantes}$$

El costo de ordenar anual, no se altera. Para calcular el costo de mantenimiento, se supondrá que F es el número de faltantes permitido. De esta forma:

$$\text{Nivel de Inventario Máximo en un Período (IM)} = Q - F \qquad \ldots(12)$$

en la figura 2 pueden apreciarse dos tiempos básicos:

- t_1 es el que tarda en agotarse el inventario.
- t_2 es el que representa al tiempo en el que el cliente está dispuesto a esperar la entrega de su producto.

Con base en lo anterior, observe que:

$$T = t_1 + t_2 \qquad \ldots(13)$$

donde:
T es el tiempo que tarda el reabastecimiento en surtirse.

A partir de la semejanza de triángulos, se obtiene:

$$t_1 = \frac{(T)(IM)}{Q} = \frac{(T)(Q - F)}{Q} \qquad \ldots(14)$$

$$t_2 = \frac{(T)(F)}{Q} \qquad \ldots(15)$$

Observe que en la figura 2 la altura de los triángulos es Q - F, esta puede interpretarse como el número de pedidos que durante el período de reorden (T) van a satisfacerse. El tiempo que tarda en agotarse el pedido es t_1, sin embargo, al principio de cada período se solicita uno de tama&o Q. Con base en lo anterior, $(t_1)(Q)$ puede interpretarse como la porción a usar del tama&o del pedido durante el período de agotamiento, por lo tanto:

$$(Q)(t_1) = (T)(Q - F)$$

que es exactamente la expresión (14). Una interpretación semejante se aplica a la (15).

Aunque se permiten faltantes, debe cumplirse una equivalencia entre la oferta y la demanda, pues al fin de cuentas estos van a ser surtidos cuando se reciba el pedido, de esta forma:

$$T = \frac{Q}{D}$$

como se obtuvo anteriormente. Sustituyendo esta expresión en (14) y (15):

$$t_1 = \frac{(Q - F)}{D} \qquad \text{...(16)}$$

$$t_2 = \frac{F}{D} \qquad \text{...(17)}$$

El Inventario Promedio en un Período es:

$$\text{Inventario Promedio en un Período} = \frac{(t_1)(Q - F)}{2} \qquad \text{...(18)}$$

sustituyendo (16) en (18) se obtiene:

$$\text{Inventario Promedio en un Período} = \frac{(Q - F)^2}{(2)(D)} \qquad \text{...(19)}$$

Dado que existen D/Q períodos al año puede concluirse que:

$$\text{Inventario Promedio al Año} = \frac{(Q - F)^2}{(2)(Q)} \qquad \text{...(20)}$$

Por lo tanto:

$$\text{Costo Anual de Conservación} = \frac{(Q - F)}{(2)(Q)} (C_H) \qquad \text{...(21)}$$

Por su parte, el número de faltantes promedio en un período es:

$$\text{Número de Faltantes Promedio en un Período} = \frac{F}{(2)(D)} (F) \qquad \text{...(22)}$$

Así:

$$\text{Costo por Faltantes en un Período} = \frac{F^2}{(2)(D)} (C_F) \qquad \text{...(23)}$$

que en términos anuales se convierte en:

$$\text{Costo por Faltantes al A\&o} = \frac{F^2}{(2)(Q)}(C_F) \qquad \ldots(24)$$

Conjuntando todos los costos en la función objetivo, se obtiene:

$$\text{Minimizar CTI} = \frac{D}{Q}(C_o) + \frac{(Q-F)^2}{(2)(Q)} + \frac{F^2}{(2)(Q)}(C_F) \qquad \ldots(25)$$

que al derivarse parcialmente con respecto a Q y F se obtienen los siguientes tama&os óptimos de pedido y faltantes que minimizan al valor de la función objetivo, dada por la expresión (25):

$$Q = \sqrt{\frac{(2)(C_o)(D)(C_M + C_F)}{(C_M)(C_F)}} \qquad \ldots(26)$$

$$F = \sqrt{\frac{(2)(C_o)(D)(C_M)}{(C_M + C_F)(C_F)}} \qquad \ldots(27)$$

Cabe aclarar que, en los desarrollos antes expuestos, se han omitido, en la función objetivo, los costos de adquisición de los productos, ya que estos, bajo los supuestos indicados, son egresos fijos en los que la compa&ía incurre. No obstante deben agregarse una vez que la solución óptima haya sido determinada.

Casos Especiales.

Puntos de Reorden. En los modelos anteriores, se ha supuesto que los pedidos se satisfacen en forma instantánea, es decir, este se recibe inmediatamente después de haber colocado la orden. Generalmente esto no se presenta en la realidad, por lo que es necesario fijar un nivel en el inventario (punto de reorden). Para ello, dado que la demanda se ha supuesto constante durante el a&o, puede asegurarse que:

$$\text{Demanda Diaria} = \frac{D}{\text{365 o a\&o comercial}} \qquad \ldots(28)$$

si se multiplica por el período de tiempo que tarda en llegar un pedido (L), se obtendrá la cantidad de unidades que se necesitan tener en inventario para responder a la demanda, de esta forma:

$$\text{Punto de Reorden} = \frac{(D)(L)}{\text{365 a a\&o comercial}} \qquad \ldots(29)$$

donde:

L es el período de entrega.

REFERENCIAS:

[1] y [50] Capítulo 7.
[6] Capítulo 10.
[11] Capítulo 3.
[22] Capítulo 13.
[57] Capítulos 3 al 5.
[59]
[66] y [83] Capítulo 6.
[78] Capítulo 11.
[87] Capítulo 10.

EJERCICIOS:

1. Presente la deducción matemática de los siguientes modelos de inventario:
   a) EOQ con reabastecimiento uniforme, y
   b) EOI.

2. La demanda de un artículo de una determinada compa&ía es 18,000 unidades/a&o, esta puede producirlo a una tasa de 3,000 unidades por mes. El costo de organizar una corrida es de $50,000 y el de almacenamiento por unidas/mes es $1,500. Asimismo, la compa&ía ha determinado los costos por faltantes, y supone que estos ascienden a $2,000 por a&o.
   a) Determine la cantidad óptima que debe manufacturarse y el costo total por a&o suponiendo que el costo por unidad es $2,000.
   b) Determine el número de faltantes óptimo.
   c) Determine el nivel de inventario máximo.
   (Sugerencia: Construya en primer término el modelo de inventario y determine sus valores críticos).

BIBLIOGRAFIA

Todo hombre debería leer
solo aquello a que le lleva su inclinación;
ya que lo que lee como obligación
de poco le aprovechará.

SAMUEL JOHNSON

[1] Ackoff, Russell L., y M. W. Sasieni, Fundamentos de Investigacion de Operaciones, Limusa, México, 1971.

[2] Anderman, E. D.. Diseño de un Sistema de Ventas y Control de Inventario para un Almacen de Partes Automotrices, Tesis Profesional UNAM, 1969 (Actuaría).

[3] Bajar, Victoria R., J. R. Rios. Lenguaje Pascal: Con Ejemplos en Digital PDP-11 y en Apple, Limusa, México, 1983.

[4] Baitar, Antonio. Control de la Ejecución de Proyectos por el Método del Camino Crítico (PERT), Cuadernos del Instituto Latinoamericano de Planificación Económica y Social (Serie 1 Número 4), México, 1973.

[5] Barsov, A. S.. Qué es la Programación Lineal?, Mir, México, 1977.

[6] Baker, Kenneth R., D. H. Kropp. Management Science: An Introduction to the Use of Decision Models, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[7] Bazaraa, M. S., and J. J. Jarvis. Linear Programming and Network Flows, John Wiley & Sons, New York, 1977.

[8] Berry, William L., y C. J. Christenson. Management Decision Sciences, Cases and Readings, Irwin, Illinois, 1980.

[9] Bronson, Richard. Investigación de Operaciones, McGraw Hill, México, 1982.

[10] Buffa, Elwood S., y J. S. Dyer. Essentials of Management Science / Operations Research, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[11] Buffa, Elwood S., y W. H. Taubert, Sistemas de Producción e Inventario: Planeación e Inventario, Limusa, México, 1975.

[12] Catalytic Construction Company. Método del Camino Crítico, Diana, México, 1971.

[13] Dano, Sven. Linear Programming in Industry, Springer-Verlag, New York, 1974.

[14] Dantzig, George B.. Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton N. J., 1963.

[15] Duckworth, W. E., y A. E. Gear. A Guide To Operational Research, Science Paperbacks, London, John Wiley & Sons, 1977.

[16] Escudero, Laureano F.. Programación Lineal: Contínua, Entera, Bivalente y Mixta, Deutso, Espa&a, 1976.

[17] Ford, L. R., y D. R. Fulkerson. Flows in Networks, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

[18] Ferguson, C. E., y J. P. Gould. Teoría Microeconómica, Fondo de Cultura Económica, México, 1978.

[19] Frazer, J. R.. Programación Lineal Aplicada, Editora Técnica, México, 1972.

[20] Fulmer, Robert M.. Administración Moderna, Diana, México, 1974.

[21] Gago, Antonio . Elaboración de Cartas Descriptivas: Guía para Preparar el Programa de un Curso, Trillas, México, 1977.

[22] Gallagher, Charles A., y H. J. Watson. Metodos Cuantitativos para la Toma de Deciciones en Administracion, McGraw Hill, Mexico, 1980.

[23] Gass, Saul I.. Linear Programming: Methods and Applications, McGraw Hill, New York, 1969.

[24] Gass, Saul I.. "Decision-Aiding Models: Validation, Assessment, and Related Issues for Policy Analysis", Operations Research, Volumen 31/Numero 4, pags. 603-631, Julio/Agosto, 1983.

[25] Gillett, Billy E.. Introduction to Operations Research: A Computer-Oriented Algorithmic Approach. Mc Graw-Hill, New York, 1976.

[26] Hadley, G. Linear Programming, Addison Wesley, Reading, Mass., 1962.

[27] Harvey, Charles M.. Operations Research: An Introduction to Linear Optimization and Decision Anaiysis, North Holland, New York, 1979.

[28] Heredia, Bertha. Manual para la Elaboración de Material Didáctico, Trillas, México, 1983.

[29] Hillier F., y G. Lieberman, Introduction to Operations Research, Holden Day, San Francisco, 1967.

[30] Huerta, Jose. Organización Lógica de las Experiencias de Aprendizaje, Trillas, México, 1977.

[31] Huerta, Jose. Organización Psicológica de las Experiencias de Aprendizaje, Trillas, México, 1977.

[32] Jauffred, Francisco J., y A. M. Bonett. Métodos de Optimización: Programación Lineal-Gráficas, Representaciones y Servicios de Ingeniería, México, 1976.

[33] Kaufmann. Invitación a la Investigación de Operaciones, C.E.C.S.A., México.

[34] Kortright, E.. Paquete de Programas Computacionales para Apoyo a la Investigación de Operaciones, Tesis Profesional UNAM, 1984 (Actuaría).

[35] Lang, Serge. Algebra Lineal, Fondo Educativo Interamericano, México, 1976.

[36] Lannder, Harold. "The Origin of Operations Research", Operations Research, Volumen 32/Numero 2, pags. 465-475, Marzo/Abril, 1984.

[37] von Lanzenauer, Christhoph Haehling. Cases in Operations Research, Holden Day, San Francisco, 1975.

[38] Levy, F. K., G. L. Thompson, y J. D. Wiest, "Fundamentos del Método de Camino Crítico", Biblioteca Harvard, Fascículo 50.

[39] Loomba, Narendra Paul. Linear Programming: A Managerial Perspective, Macmillan, New York, 1976.

[40] Luehrmann, Arthur. Apple Pascal: Enfoque Práctico, Mc Graw-Hill, México, 1983.

[41] Luenberger, David G.. Linear and Nonlinear Programming, Addison Wesley, Reading, Mass., 1984.

[42] Magee, John F. "Arboles de Decisión para la Toma de Decisiones", Biblioteca Harvard, Fascículo 11.

[43] Manzanilla, Lorenzo A.. El Sistema de la Administración Pública Mexicana, Tesis de Maestría en Administración UNAM, 1978.

[44] McClain, John O., y L. J. Thomas. Operations Management: Production of Goods ans Services, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1985.

[45] McCormick, Garth P.. Nonlinear Programming, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[46] Mood, Alexander M., F. A. Graybill, y D. C. Boes. Introduction to The Theory of Statistics, Mc Graw-Hill, New York, 1974.

[47] Morris, William T.. Ciencia de la Administración, El Ateneo, México, 1974.

[48] Morris, W. T.. "The Analysis of Management Decisions", Irwin, Homewood, Ill., 1964.

[49] Muro, Javier Saenz. Práctica de la Investigación Operativa Empresarial, Labor, Barcelona, 1975.

[50] Namakforoosh, Mohammad Naghi. Investigación de Operaciones, Limusa, México, 1985.

[51] Nemhauser, Geroge L., y R. S. Garfinkel. Integer Programming, John Wiley & Sons, New York, 1972.

[52] Ortueta, Lucas. Organización Científica de las Empresas, Limusa, México, 1983.

[53] Osborne/Mc Graw-Hill. Practical Pascal Programs, Mc Graw-Hill, Berkley, Calif., 1980.

[54] Parzen, Emanuel. Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones, Limusa, México, 1979.

[55] Peñafiel, Luis Millan. Programación Lineal: Base Teórica y Aplicaciones Administrativas, Limusa, México, 1976.

[56] Phillips, Cecil R., J. J. Moder y E. W. Davis. Project Management with CPM, PERT and Precedence Diagramming, Van Nostrand Reinhold, New York, 1983.

[57] Phillips, Don T., y A. Ravindran. Operations Research: Principles and Practice, John Wiley & Sons, New York, 1976.

[58] Plossl, George W.. Production and Inventory Control, Principles and Techniques, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1985.

[59] Prawda, Juan. Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, Tomo I, Modelos Determinísticos, Limusa, México, 1976.

[60] Prawda, Juan. Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, Tomo II, Modelos Estocásticos, Limusa, México, 1981.

[61] Riggs, James L.. Sistemas de Producción: Planeación, Análisis y Control, Limusa, México, 1977.

[62] Schneider, G. Michael, y S. W. Weingart. An Introduction to Programming and Problem Solving with Pascal, John Wiley & Sons, New York, 1982.

[63] Schniederjans, Marc J.. Linear Goal Programming, Petrocelli, Princeton, N. J., 1984.

[64] Schultz, Randall L., y D. P. Slevin. Implementing Operations Research/Management Science, American Elsevier, New York, 1975.

[65] SEP. Aspectos Normativos de la Educación Superior, ANUIES, México, 1981.

[66] Shamblin, James E., y G. T. Stevens Jr.. Investigación de Operaciones, Un Enfoque Fundamental, McGraw Hill, México, 1975.

[67] Shao, Stephen P.. Estadística para Economistas y Administradores de Empresas, Herrero, México, 1967.

[68] Shapiro, Jeremy F.. Mathematical Programming, Structures and Algorithms, John Wiley & Sons, New York, 1979.

[87] Zuwaylif, Fadil H., y G. D. Smith. Ciencia de la Administración, Limusa, México, 1979.

[69] Shapiro, Roy D.. Optimization Models For Planning and Allocation: Text and Cases in Mathematical Programming, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[70] Silver, Edwar A.. "Operations Research in Inventory Management: A Rewiew and Critique", Operations Research, Volumen 29/Numero 4, pags. 628-645, Julio/Agosto, 1981.

[71] Solodovnikov, A. S.. Sistemas de Desigualdades Lineales, Mir, México, 1980.

[72] Syslo, Maciej M., y J. S. Kowalik. Discrete Optimization Algorithms, with Pascal Programs, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.,1983.

[73] Taha, Hamdy. Operations Research, McMillan, New York, 1971.

[74] Taylor, George A.. Ingeniería Económica, Limusa, México, 1983.

[75] Thesen, Arne. Computer Methods in Operations Research, Academic Press, New York, 1978.

[76] Thie, Paul R.. An Introduction to Linear Programming and Game Theory, John Wiley & Sons, New York, 1979.

[77] Thierauf, Robert J., y Grosse. Toma de Decisiones por Medio de la Investigacion de Operaciones, Limusa, Mexico, 1982.

[78] Thierauf, Robert J., y R. C. Klekamp. Decision Making Through Operations Research, John Wiley & Sons, New York, 1975.

[79] Vergara, Josep Ma.. Programación Matemática y Cálculo Económico: Teoría y Aplicaciones, Universidad Vicens, 1975.

[80] Wagner, H.. Principles of Operations Research, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1975.

[81] Wainright, Martin Jr.. Programación Lineal, El Ateneo, Argentina, 1978.

[82] Weinberger,. Estadística para las Ciencias Sociales, Interamericana.

[83] Whitehouse, Gary E., y B. L. Wechsler. Applied Operations Research: A Survey, John Wiley & Sons, New York, 1976.

[84] Whitehouse, Gary E.. Systems Analysis and Design Using Network Techniques, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1973.

[85] Williams, H. P.. Model Building in Mathematical Programming, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[86] Zionts, Stanley. Linear and Integer Programming, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1974.