



**Universidad Nacional Autónoma de México**

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES**

**"ACATLAN"**



**"PROCESOS ESTOCASTICOS Y APLICACIONES"**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:**

**A C T U A R I O**

**P R E S E N T A :**

**María del Carmen González Videgaray**

**ACATLAN, EDO. DE MEXICO**

**1985**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

INTRODUCCION .....	1
--------------------	---

## I. CONCEPTOS GENERALES

1.0 INTRODUCCION .....	7
1.1 DEFINICION .....	9
1.2 DIVISION DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS .....	9
1.3 CONCEPTOS IMPORTANTES .....	11
1.4 EJEMPLOS DE PROCESOS ESTOCASTICOS USUALES .....	12
1.5 LECTURAS RECOMENDADAS .....	16

## II. PROCESOS NO MARKOVIANOS

2.0 INTRODUCCION .....	21
2.1 ESTACIONARIDAD .....	21
2.2 PROCESOS ESTACIONARIOS .....	23
2.3 PROCESOS NO ESTACIONARIOS .....	25
2.4 ALGUNOS EJEMPLOS .....	26
2.5 TEORIA DE LA RENOVACION .....	32
2.6 SERIES DE TIEMPO .....	37
2.7 LECTURAS RECOMENDADAS .....	44
2.8 EJERCICIOS .....	45

## III. PROCESOS MARKOVIANOS

3.0 INTRODUCCION .....	51
3.1 CADENAS DE MARKOV .....	51
3.2 CADENAS DE MARKOV DE DOS ESTADOS .....	52
3.3 FUNCION DE TRANSICION Y DISTRIBUCION INICIAL .....	56
3.4 EJEMPLOS .....	58
3.5 FUNCION DE TRANSICION EN N PASOS .....	66
3.5.1 TIEMPOS DE ALCANCE .....	69
3.5.2 MATRIZ DE TRANSICION .....	71
3.5.3 TIEMPOS DEL PRIMER PASO .....	73
3.6 ESTADOS TRANSITORIOS Y RECURRENTES .....	77
3.7 ANALISIS DEL ESPACIO DE ESTADOS .....	83
3.8 APLICACION DE LA TEORIA DE GRAFOS .....	89
3.8.1 DEFINICIONES .....	90
3.8.2 ORDENACION DE UN GRAFO .....	96
3.8.3 PERIODICIDAD .....	101
3.8.4 EJEMPLOS .....	105
3.9 PROBABILIDADES DE ABSORCION .....	108
3.10 MARTINGALAS .....	111
3.11 CADENAS DE NACIMIENTO Y MUERTE .....	114
3.12 CADENAS DE RAMIFICACION .....	119
3.13 CADENAS DE LINEAS DE ESPERA .....	121
3.14 COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LA MATRIZ DE TRANSICION .....	124
3.14.1 PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE TRANSICION .....	122

3.14.2 EL COMPORTAMIENTO ASINTOTICO .....	123
3.14.3 ESTUDIO MATRICIAL .....	127
3.14.4 EJEMPLOS .....	131
3.15 UNA APLICACION: EL CASO DE LA MOVILIDAD SOCIAL ....	138
3.15.1 EL MODELO BASICO .....	138
3.15.2 ADECUACION DE UN MODELO .....	140
3.15.3 MEDIDAS DE MOVILIDAD .....	143
3.16 LECTURAS RECOMENDADAS .....	143
3.17 EJERCICIOS .....	144
<b>CONCLUSION .....</b>	<b>149</b>
<b>APENDICE A. ALGUNOS PROGRAMAS UTILES .....</b>	<b>155</b>
<b>APENDICE B. ELEMENTOS DE PROBABILIDAD .....</b>	<b>189</b>
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>199</b>

## INTRODUCCION

"La lucha por la vida nos compele a consultar los oráculos. Pero los nuevos oráculos deben ser científicos."

THIELE.

Uno de los principales objetivos del conocimiento matemático es el de crear modelos, modelos que sean cada vez más apegados a las situaciones y circunstancias reales, modelos que permitan la solución de problemas en forma práctica y eficiente.

Observando la naturaleza, es preciso convencerse de sus características de aleatoriedad, las cuales se intensifican al tratar con los seres humanos y sus acciones. Puede concluirse entonces, que los modelos que reflejan con mayor precisión los hechos son aquellos que involucran la teoría probabilística, es decir, los **MODELOS ESTOCASTICOS**.

Los **Procesos Estocásticos** se refieren al comportamiento de modelos aleatorios a través del tiempo. A pesar de ser los más semejantes a los fenómenos reales, su utilidad no ha sido, en forma alguna, desarrollada a su máxima expresión. Esto se debe, posiblemente, a una poca difusión y aparente dificultad de manejo. Por otra parte, la bibliografía al respecto es poco abundante y, en ocasiones, inaccesible por motivos económicos. Si se agrega a esto que, de las obras existentes, son pocas las que tratan directamente con las aplicaciones, resulta explicable que una herramienta de tal magnitud haya sido dejada a un lado.

El objetivo fundamental de esta tesis es la creación de un material de apoyo didáctico accesible a los estudiantes, en particular de las carreras de Actuarial y Matemáticas Aplicadas y Computación; y, en general, cualquier estudio profesional que lo requiera.

Los conocimientos básicos para la comprensión de este trabajo son, ante todo, elementos de probabilidad, álgebra matricial, cálculo diferencial e integral, nociones de estadística e investigación de operaciones. Al final de la obra, en el Apéndice B, se enuncian algunos conceptos de uso

frecuente a lo largo del texto, de modo que pueden consultarse en forma rápida; para un estudio detallado, se recomienda acudir a textos específicos de álgebra y probabilidad.

Esta tesis no pretende, en modo alguno, ser un tratado exhaustivo sobre Procesos Estocásticos; más bien se desea motivar al lector hacia un conocimiento más profundo de la materia y, sobre todo, hacia una implementación de este tipo de modelos en su campo específico de trabajo. Por esta razón, se ha buscado un enfoque ante todo práctico, utilizando como apoyo una microcomputadora de 16 bytes.

En el Capítulo I, se habla de los distintos tipos de modelos, se definen y clasifican los Procesos Estocásticos, se enumeran algunos conceptos y se enlistan varios ejemplos.

En el Capítulo II, se mencionan las características de algunos procesos no markovianos, se trata el concepto de estacionaridad, la teoría de la renovación y las series de tiempo. Es necesario hacer notar que, aunque en muchos casos los procesos no markovianos son más similares al proceso real, se ha centrado el enfoque de la obra en los procesos markovianos (Capítulo III), por su sencillez y manejabilidad. Además, en la generalidad de los casos, las suposiciones necesarias para obtener la propiedad markoviana no modifican en gran escala los resultados.

En el Capítulo III, se define la propiedad de Markov, se analiza la función de distribución y la distribución inicial. Más adelante, se observa el comportamiento después de  $n$  unidades de tiempo, se analiza el espacio de estados y se introduce la Teoría de Grafos aplicada a las cadenas de Markov. Antes de emplear esta teoría, se hace un breve resumen de los conceptos más importantes. En seguida se expone el estudio matricial y algunos ejemplos.

Al final de cada capítulo, se encuentra una sección de lecturas recomendadas, relativas al tema. Se hace referencia a ellas por medio de una clave, cuya equivalencia se encuentra al final de la obra, en la bibliografía. Asimismo, se propone una serie de ejercicios.

En el Apéndice A se enlistan varios programas, codificados en lenguaje Pascal, para uso del lector. Se presentan también los diagramas de bloque respectivos, de modo que pueden transcribirse los programas a cualquier lenguaje.

En el Apéndice B, como ya se dijo, se presentan los conceptos básicos de probabilidad, manejados frecuentemente en el texto.

**CAPITULO I**

**CONCEPTOS GENERALES**

"Imagine que al abrir el periódico descubra que no es el de hoy; es el de mañana y está completo (noticias, cotizaciones de la bolsa, tiempo o clima, trabajos). Un adelanto de 24 horas sobre el estado del mundo. Eso es todo. Pero es todo lo necesario: la riqueza y el poder son suyos..."

(S., H., M., B., Sp)

## CONCEPTOS GENERALES

### 1.0 INTRODUCCION

" STOCHASTIC: (Greek stochastikos). skillful in aiming, proceeding by guesswork. From (assumed) stochastos (verbal of stochazesthai, to aim at, guess at; from stochos, target, aim, guess) + ikos - ic - more at sting. Random. "

WEBSTER'S THIRD NEW INTERNATIONAL  
DICTIONARY.

La búsqueda de los encabezados futuros, de los hechos del mañana, a corto o a largo plazo es lo que hace posible la planeación. Desde el inicio de su existencia el hombre ha deseado incursionar en el futuro por diversos medios. En un principio se hacían adivinanzas utilizando desde bolas de cristal hasta hojas de té, que han perdurado hasta la fecha. Sin embargo, de estas adivinanzas se ha evolucionado a un sistema intelectual firmemente fundamentado con un enfoque científico.

El principio de este sistema científico es el siguiente: Aunque es imposible adelantar el reloj del mundo, si es posible construir un MODELO que imite una parte del mundo para un caso de especial interés. Evidentemente el modelo no podrá ser exactamente igual, pero mientras más aproximado sea a la realidad, más válidas serán las conclusiones que puedan obtenerse a partir de él.

Un SISTEMA se caracteriza por que los elementos que lo componen están interrelacionados e interactúan por una causa común. Por lo tanto, si se modifica alguna característica, habrá cambios consecuentes en las otras partes del sistema. Si estos cambios pueden ser cuantificados, las interrelaciones pueden describirse por ecuaciones matemáticas. Un conjunto de ecuaciones cuyo propósito es describir el comportamiento del sistema es un MODELO MATEMATICO.

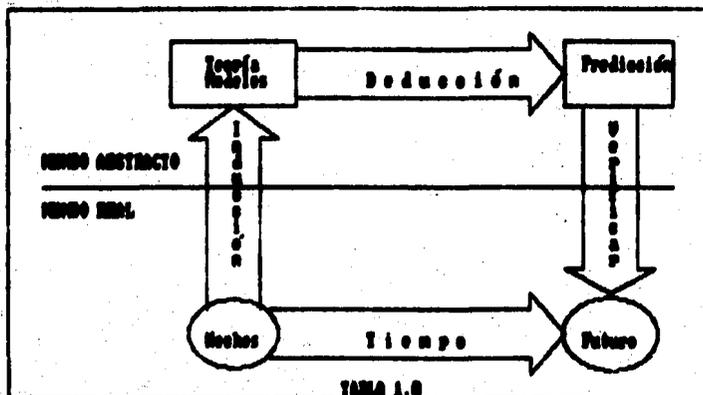
Un modelo matemático puede ser determinístico o estocástico. Si el efecto de cualquier cambio puede describirse con absoluta certeza, el modelo será DETERMINISTICO. Si por el contrario, como sucede en la mayoría de los casos reales, hay efectos que no pueden predecirse con seguridad absoluta, el modelo adecuado será un modelo ESTOCASTICO. Un modelo estocástico deberá incluir entonces variables aleatorias.

En general, los modelos estocásticos son los que más se acercan a la realidad, aunque en muchos casos, por simplicidad, se trata de ajustar a modelos determinísticos que faciliten los cálculos. En particular, cualquier modelo que describa la conducta humana deberá ser formulado en términos estocásticos. (Para una discusión de esta afirmación refiérase a las lecturas recomendadas en este capítulo.)

La construcción de un modelo entraña cuatro pasos básicos:

- i) Observar y entender el fenómeno en cuestión.
- ii) Construir un modelo semejante al fenómeno.
- iii) Resolver el modelo y hacer predicciones.
- iv) Probar el modelo.

En la Tabla 1.0 pueden observarse con claridad las relaciones existentes entre el modelo (mundo abstracto) y los hechos (mundo real). Nótese que la predicción científica de los hechos solamente puede hacerse a partir de un modelo. De otra forma se caerá de nuevo en la adivinanzas; sin embargo, la intuición y el sentido común seguirán jugando un papel muy importante en la toma de decisiones, aunque ayudados y reforzados por los modelos estocásticos.



## 1.1 DEFINICION

Un proceso estocástico es un sistema que se desarrolla a través del tiempo, sufriendo variaciones debidas al azar. (Estocástico es sinónimo de aleatorio).

Se puede describir un sistema de este tipo, definiendo una familia de variables aleatorias  $\{X_t\}$ , que toma valores de un conjunto "S", llamado espacio de los estados; y donde  $t$  es un punto en un espacio "T", llamado espacio paramétrico.

Los valores que puede tomar  $X_t$  se conocen como ESTADOS, y sus cambios de valor se llaman TRANSICIONES.

Los modelos estocásticos son aplicables a cualquier sistema que comprenda variabilidad al azar en el transcurso del tiempo, como ya se ha mencionado, agregando que este tipo de sistema da una imagen más aproximada a la realidad.

### DEFINICION:

Se llama PROCESO ESTOCASTICO a la familia de variables aleatorias

$$\{ X_t, t \in T \}$$

donde  $t$  es un parámetro perteneciente al conjunto T.

T puede ser el conjunto de los números reales, el conjunto de los reales positivos o el conjunto de los números naturales.

Si T es discreto, las  $X_t$  forman una SERIE ESTOCASTICA.

Si T es un intervalo, finito o no, las  $X_t$  forman un PROCESO ESTOCASTICO.

NOTA: Generalmente  $t$  representa un dato y T una secuencia discreta de datos o un intervalo de tiempo.

De la misma forma, el espacio de estados S puede ser discreto o continuo.

A partir de lo anterior pueden distinguirse 4 tipos de procesos estocásticos, que se observan claramente en la Tabla 1.1.

## 1.2 DIVISION DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS

A continuación se ejemplificará cada uno de los cuatro tipos de procesos estocásticos. Es conveniente hacer notar que aunque en la mayoría de los casos reales los dos conjuntos (sobre todo T) son continuos, la suposición de variables discretas simplifica los cálculos sin perder demasiada validez.

TIEMPO \ ESTADOS	SERIES discretas numerables	PROCESOS continuos
discretas numerables	Serie estocástica con espacio de estados discreto (a)	Proceso estocástico con espacio de estados discreto (b)
continuos	Serie estocástica con espacio de estados continuo (c)	Proceso estocástico con espacio de estados continuo (d)

TABLA 1.1

(a) EJEMPLO DE SERIE ESTOCÁSTICA CON ESPACIO DE ESTADOS DISCRETO

Si se analiza la serie estocástica consistente en el número de hombres o mujeres en diferentes generaciones de una línea de familia, se tendrá que el espacio de estados  $S$  es discreto (Número de mujeres:  $0, 1, 2, \dots$ ; número de hombres:  $0, 1, 2, \dots$ ). Por otro lado, el espacio paramétrico serían las diferentes generaciones:  $0, 1, 2, \dots$ . De donde se tiene que tanto el espacio de estados como el espacio paramétrico son discretos.

(b) EJEMPLO DE PROCESO ESTOCÁSTICO CON ESPACIO DE ESTADOS DISCRETO

En una línea de espera sea el proceso donde  $X_t$  es el número de clientes en la línea en el instante  $t$ .  $S$  es el número de personas, por lo tanto es discreto.  $T$  es el conjunto de los reales positivos.

(c) EJEMPLO DE UNA SERIE ESTOCÁSTICA CON ESPACIO DE ESTADOS CONTINUO

Sea una línea de espera y considérese el proceso donde  $X_t$  es la variable aleatoria que representa el tiempo de espera del  $t$ -ésimo cliente. Aquí el espacio de estados  $S$  son los reales positivos, mientras que  $T$  pertenece a los naturales.

(d) EJEMPLO DE PROCESO ESTOCÁSTICO CON ESPACIO DE ESTADOS CONTINUO

En el llenado de latas de aceite para automóvil puede considerarse el proceso estocástico formado por el nivel de

llenado de la lata en un instante  $t$ . Aquí tanto  $S$  como  $T$  son continuos.

### 1.3 CONCEPTOS IMPORTANTES

Entre las diferentes clases de procesos estocásticos frecuentemente se manejarán los siguientes conceptos, que serán tratados con detalle en los capítulos consecuentes.

#### PROBABILIDADES DE TRANSICION

Como su nombre lo indica, son las probabilidades de pasar de un estado a otro en un paso. Cuando el paso no es posible la probabilidad correspondiente será cero. Existen también probabilidades de permanecer en un mismo estado.

#### PROCESOS DE MARKOV

Conocidos también como procesos "sin memoria", son aquellos en que el estado presente depende únicamente del pasado inmediato. Su manejo es, por tanto, más sencillo y son los procesos más comúnmente usados. Las series markovianas reciben el nombre de "cadenas de Markov".

#### ORDEN DE UNA CADENA DE MARKOV

Se dice que una cadena de Markov es de orden " $n$ " si el resultado del  $n$ -ésimo ensayo, para cualquier  $t$  y para todas las realizaciones de  $X$ , no depende más que de los  $n$  eventos precedentes. Cuando se consideran cadenas de Markov de orden 1, quiere decir que el estado futuro depende únicamente del estado presente.

#### PROCESO HOMOGÈNEO EN EL TIEMPO

Un proceso es homogéneo en el tiempo si las probabilidades de transición no dependen de las distintas épocas.

#### TIEMPOS DEL PRIMER PASO

Número de transiciones llevadas a cabo por el proceso al ir del estado " $i$ " al estado " $j$ " por primera vez. (Cuando  $i$  y  $j$  son iguales se conoce como TIEMPO DE RECURRENCIA). También se les denomina "tiempos de alcance".

#### ESTADO RECURRENTE

Se dice que " $i$ " es un estado recurrente si, una vez que el proceso se encuentre en el estado " $i$ ", regresará al estado " $i$ ". Un caso especial de estado recurrente es el ESTADO ABSORBENTE. Un estado es absorbente si una vez que el proceso llega a él, no lo deja jamás.

#### ESTADO TRANSITORIO

Se dice que " $i$ " es un estado transitorio si una vez que el proceso llega a él, existe una probabilidad estrictamente positiva de que nunca regrese.

### ESTADO ESTACIONARIO

Significa que la probabilidad de hallar el proceso en un estado determinado, después de un número grande de transiciones tiende a un valor específico, independientemente de la distribución inicial de probabilidad definida sobre los estados. Es importante hacer notar que la probabilidad de estado estacionario NO implica que el proceso se fije en un estado. Por el contrario, el proceso sigue llevando a cabo transiciones de estado a estado, y en cualquier paso  $n$ , la probabilidad de transición de un estado a otro sigue siendo la misma.

### PROCESO ERGODICO

Un proceso estocástico es ergódico si desde cualquiera de los estados que lo componen puede alcanzarse otro cualquiera, en un solo paso. Si de un estado puede pasarse a cualquier otro, pero en más de un solo paso, el proceso se conoce como REGULAR.

## 1.4 EJEMPLOS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS USUALES

### EJEMPLO 1. UN MODELO DE CAMBIO DE MARCA PARA LA CONDUCTA DEL CONSUMIDOR.

Antes de introducir una nueva marca de chocolate, el fabricante desea estudiar el comportamiento del consumidor en relación a las marcas en existencia.

Supóngase que hay tres marcas en venta: Acme, Bibó y Choco. Los consumidores compran la misma marca por unos pocos meses o las cambian constantemente. También hay una fuerte posibilidad de que cuando se introduzca una marca superior, algunas de las marcas antiguas se queden con pocos clientes. Para analizar la conducta del consumidor es necesario hacer un estudio muestral, de preferencia antes y después de la introducción de la nueva marca.

En dicho estudio, llevado a cabo durante un periodo de tiempo, supóngase que las estimaciones obtenidas para el comportamiento del consumidor son como sigue:

De los que compraron la marca Acme en un mes, durante el siguiente mes 60% compró Acme de nuevo, 30% cambió a Bibó y 10% cambió a Choco.

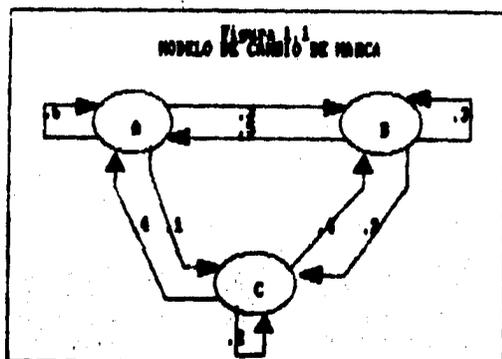
De Bibó a Choco cambió un 50%, siguió con Bibó un 30% y cambió a Acme un 20%.

De Choco a Acme un 40%, de Choco a Bibó un 20%, siguió en Choco un 20%.

Esto puede verse gráficamente en la Figura 1.1 (Más adelante se tratará de este tipo de figuras en detalle.)

Si se tiene interés en el número de gente que compra cierta marca de chocolate, este número estará representado como en

proceso estocástico. La conducta del consumidor puede considerarse aleatoria. Preguntas interesantes serían: ¿Cuál es el número esperado de meses que un consumidor preferirá cierta marca? ¿Cuál es el producto preferido a la larga?



### EJEMPLO 2. PROBLEMA DEL SEGURO DE RIESGO.

Una compañía de seguros comienza con un capital fijo  $x_0$ . El estado de la compañía se considera después de cada periodo, por ejemplo cada mes. Durante el  $n$ -ésimo periodo supóngase que el ingreso es  $I_n$  y el total de reclamaciones es  $C_n$ . El estado de la compañía después de  $n$  periodos estará dado por:

$$X_n = x_0 + (I_1 - C_1) + (I_2 - C_2) + \dots + (I_n - C_n)$$

$$X_n = X_{n-1} + (I_n - C_n)$$

Claramente, cuando  $X_n \leq 0$ , la compañía estaría arruinada.

Algunas de las cosas inciertas involucradas en este proceso son el momento y la magnitud de las reclamaciones y el ingreso por primas u otro medio. Todo esto puede expresarse como distribuciones de probabilidad, haciendo  $X_n$  un proceso estocástico. Con ciertas suposiciones que simplifiquen el problema puede usarse algún proceso estandarizado para estudiar su comportamiento.

### EJEMPLO 3. PROBLEMA DE UN TINACO.

El problema de un tinaco tiene características similares a las del seguro de riesgos. El agua llega al tinaco y se almacena para ser utilizada cuando sea necesario. La entrada y la salida de agua son inciertas, por lo tanto, el contenido del tinaco

puede describirse como una variable aleatoria a través del tiempo.

El tinaco tiene una capacidad máxima límite. Además, no hay garantía de que el tinaco no se seque, lo cual implicaría serios perjuicios.

Son problemas interesantes, desde el punto de vista del comportamiento del proceso, los periodos de tinaco seco, tinaco lleno, contenido en algún tiempo dado, etc. Desde el punto de vista operacional, los problemas a tratar serían el control de la entrada y salida de agua de modo que las condiciones fueran óptimas.

#### EJEMPLO 4. PROBLEMA DE INVENTARIOS.

Una fábrica produce un solo producto para el cual la demanda en un periodo de tiempo puede considerarse una variable aleatoria con distribución conocida. La fábrica tiene gran interés en decidir la cantidad de producto que debe hacerse en un periodo de tiempo de modo que el beneficio sea máximo, bajo ciertas estructuras de costo. En vista de esto, el proceso estocástico de interés es la cantidad de inventario al final del periodo de tiempo.

#### EJEMPLO 5. PROBLEMA DE COLAS.

Un camión lleva estudiantes a la UNAM y de regreso a sus casas, haciendo varios viajes durante el día. El camión tiene capacidad para  $K$  estudiantes. Si hay  $K$  o menos personas esperando a que llegue el camión, éste se va con todos ellos. Si hay más de  $K$  esperando, se van los  $K$  primeros y el resto espera el siguiente camión. Los administradores de la UNAM querrian saber cuántos camiones deben usarse, sin que sobren, para que las colas de espera sean mínimas.

#### EJEMPLO 6. PROBLEMA DE CRECIMIENTO DE LA POBLACION

Es más realista considerar el crecimiento de una población como estocástico que como determinístico. Los factores externos que influyen en el crecimiento de las personas, tales como el clima, enfermedades, comida, etc., son demasiado variables e inciertos. Cuando estos factores se identifican y se toman en cuenta, el tamaño de la población en un momento dado, puede considerarse como un proceso aleatorio. En problemas de esta naturaleza no solo interesa la conducta del proceso, sino usar esta información en el control del crecimiento de la población.

#### EJEMPLO 7. RECUPERACION, RECAIDA Y MUERTE DEBIDO A ENFERMEDAD.

El proceso de recuperaci3n, recaida y muerte en el curso de enfermedades graves, como el c3ncer, esta regido por causas aleatorias, debido a la gran cantidad de factores que intervienen. De aqu3 que los modelos estoc3sticos sean de utilidad en el estudio dentro de los hospitales. Por ejemplo, pueden identificarse 4 estados posibles de un paciente despu3s de un cierto tratamiento: (1) mismo estado inicial; (2) muerte inmediata; (3) recuperaci3n inmediata; (4) recuperaci3n lenta.

#### EJEMPLO 8. MUESTREO DE CONTROL DE CALIDAD.

En un problema de control de calidad, se toman muestras de ciertos productos para verificar que la calidad se mantiene en los lotes de producci3n. Un m3todo de muestreo consiste en elegir las muestras durante diferentes periodos de tiempo.

#### EJEMPLO 9. SISTEMA DE COMPUTO CON TIEMPO COMPARTIDO.

Trabajos de diferente tama1o llegan a un centro de c3mputo, provenientes de diversas fuentes. El n3mero de trabajos que llegan, as3 como su tama1o, sigue ciertas distribuciones. Bajo estas condiciones el n3mero de trabajos en l3nea de espera en alg3n momento y el tiempo que un trabajo tiene que permanecer en el sistema puede representarse por un proceso estoc3stico.

Bajo una pol3tica estricta de "primero en entrar, primero en salir", existe la posibilidad de que un trabajo largo retarde un trabajo corto y m3s importante. Para una operaci3n eficiente del sistema, adem3s de minimizar el n3mero de trabajos esperando y el retardo total, es necesario adoptar una pol3tica de servicio diferente. Una pol3tica en la cual el servicio se realiza en un trabajo en cierto tiempo, y aquellos trabajos que necesitan mayor servicio se colocan al final de la l3nea de espera. Esta es la pr3ctica general en la mayor3a de los casos.

#### EJEMPLO 10. PROBLEMA DE CONGESTION EN UN CRUCE DE CAMINOS.

Consid3rese la intersecci3n de una calle con una avenida. Los veh3culos que vienen de la calle deben dar el paso a los de la avenida. Por lo tanto, asociado a cada veh3culo de la calle hay un periodo de espera cuya longitud depende del n3mero de veh3culos en la avenida. La llegada de veh3culos puede describirse como un proceso estoc3stico, as3 como la espera. La comprensi3n de un proceso de esta naturaleza es esencial si se desea, por ejemplo, instalar un sem3foro.

NOTA: Debe tenerse en mente que del estudio del comportamiento de los procesos estoc3sticos puede obtenerse el

comportamiento del proceso real sólo en un cierto grado de aproximación, ya que los hechos reales tienen que idealizarse y someterse a restricciones para poder aplicar las técnicas. El comportamiento puede obtenerse mediante técnicas de simulación.

### **1.5 LECTURAS RECOMENDADAS**

- i) Bv, pp. 2 a 8.
- ii) B, PP. 1 a 19
- iii) Bh, pp. 1 a 6
- iv) Sp, pp. 318 a 325
- v) ARIAS BALICIA, Fernando. *Técnica de Investigación en Ciencias de la Administración y del Comportamiento*. Ed. Trillas. México, 1979. pp 165 a 176

### **1.6 EJERCICIOS**

1.1 Enunciar la importancia y utilidad de los modelos estocásticos.

1.2 Definir proceso estocástico y mencionar ejemplos.

1.3 Dar definiciones intuitivas de los conceptos: probabilidad de transición, proceso de Markov, estado recurrente, estado transitorio, estado absorbente y estado estacionario.

1.4 Utilizando los ejemplos de la sección 1.4, definir en cada caso el conjunto de estados y el espacio paramétrico, indicando a cual de las 4 divisiones pertenece cada ejemplo.

1.5 Discutir la aplicación de los procesos estocásticos al caso de la conducta humana.

**CAPITULO II**

**PROCESOS NO MARKOVIANOS**

"Bien sabíamos que eran muy peligrosos  
los mares en que nos aventurábamos,  
y que sólo tenemos una probabilidad  
sobre diez de salir vivos;  
y no obstante, nos hemos arriesgado a causa  
de lo que esperábamos ganar,  
haciendo enmudecer el temor  
de los peligros probables..."

(SHAKESPEARE, Enrique IV)

## PROCESOS NO MARKOVIANOS

### 2.0 INTRODUCCION

La forma más general de un proceso estocástico son los procesos no markovianos. Al indicar que un proceso es no markoviano, quiere decirse que el estado futuro en que se encuentre el proceso depende de toda la historia del sistema.

Evidentemente, esta generalidad implica una mucho mayor complejidad de cálculos; ésta es la razón por la cual este tipo de procesos no son utilizados en la práctica. Aunque Kurt Lewin proponía que "No hay nada más práctico que una buena teoría", la realidad es que las funciones TIEMPO y COSTO tienen gran peso en la sociedad.

En la mayoría de los casos es más conveniente sacrificar la exactitud o precisión de un modelo por una resolución sencilla, en poco tiempo y a bajo costo. Sólo en casos muy particulares se dispone del tiempo y los recursos ilimitados.

Dadas las razones anteriores y tomando en cuenta el objetivo de este texto, únicamente se dará una visión superficial de este tema, incluyendo algunos ejemplos, para tener un punto de comparación con los PROCESOS MARKOVIANOS, que serán tratados con mucha mayor profundidad.

### 2.1 ESTACIONARIDAD

Es de sumo interés conocer desde un principio si un proceso tiende o no a estabilizar su distribución de probabilidad; si dicha distribución estable permanece o no durante un tiempo finito, y si depende o no del estado inicial del proceso.

#### DEFINICION

Se dice que  $X_t$ ,  $t \in R$  es ESTRICTAMENTE ESTACIONARIO si y sólo si

$$\forall t_0, t_1, t_2, \dots, t_n \in R; \forall \tau \in R$$

la función  $F$  se conserva en una traslación en el tiempo, i.e.:

$$F(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = F(X_{t_0+\tau}, X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau})$$

De donde resulta que,  $\forall \tau \in \mathbb{R}$

$X_{t_1}, X_{t_1+\tau}$  tienen la misma función de distribución.

#### DEFINICION

Se dice que  $(X_t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  es débilmente estacionario o ESTACIONARIO EN SENTIDO AMPLIO (o con covarianza estacionaria), si y sólo si:

a)  $\forall t$ ,  $E(X_t)$  es finita e independiente del tiempo  $t$ .

$$E(X_t) = \mu \quad \forall t$$

b)  $\forall t$ ,  $E(X_t^2)$  es finita e independiente de  $t$ .

c)  $\forall t, \tau \in \mathbb{R}$ ,  $\text{Cov}(X_t, X_{t+\tau})$  depende únicamente de  $\tau$ .

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) = R(\tau)$$

NOTA 1: Si un proceso  $(X_t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , es débilmente estacionario, la función de correlación

$$C(\tau) = E(X_t X_{t+\tau})$$

únicamente depende de  $\tau$ . La prueba se deja como ejercicio al lector.

Se dice que un proceso débilmente estacionario es CONTINUO si la función de correlación  $C(\tau)$  es continua en el origen.

NOTA 2: Si, cuando  $h \rightarrow 0$ ,  $X_{t+h}$  converge en media cuadrática a  $X_t$ , i.e.:

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(|X_{t+h} - X_t|^2) = 0$$

entonces  $C(\tau)$  es continua en el origen. La prueba se deja también como posible ejercicio.

#### DEFINICION

Se dice que un proceso  $(X_t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , tiene INCREMENTOS ESTACIONARIOS (es homogéneo en el tiempo), si y sólo si:

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}; \quad \forall h > 0$$

$$(X_{t_2+h} - X_{t_1+h}) \text{ y } (X_{t_2} - X_{t_1})$$

son variables aleatorias con la misma distribución de probabilidad.

#### RELACIONES DE INDEPENDENCIA ESTOCÁSTICA

Los procesos estocásticos pueden distinguirse por las relaciones existentes entre las variables aleatorias  $(X_t)$ ,  $t \in \mathbb{T}$ .

Estas relaciones se especifican por la ley de probabilidades de las  $n$ -variables:

$(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \dots, X_{t_n})$  definida para toda  $i \in [1, n]$   
para toda  $t_j \in T$

#### DEFINICION

Si, para toda la familia de indices  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , tal que  
 $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ ,  
las variables aleatorias

$$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}$$

son independientes, se dice que el proceso tiene **INCREMENTOS INDEPENDIENTES**.

#### NOTA 3:

a) Si  $t_0$  el menor indice de  $T$ , forma parte de la familia, supóngase que:

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes.

b) Si  $X_{t_0}$  es un proceso de incrementos independientes, la variable aleatoria

$$X_{t_n} = (X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}) + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) + \dots + (X_{t_1} - X_{t_0}) + X_{t_0}$$

es una suma de variables aleatorias independientes.

## 2.2 PROCESOS ESTACIONARIOS

Se ha dicho que un proceso estocástico  $X_t$  es estacionario en sentido estricto si sus estadísticas no se afectan por un incremento en el tiempo inicial. Esto significa que los dos procesos

$$X_t \text{ y } X_{t+\tau}$$

tienen las mismas estadísticas para cualquier  $\tau$ .

Se dice que los procesos  $X_t$  y  $Y_t$  son **CONJUNTAMENTE ESTACIONARIOS** si las estadísticas conjuntas de

$$X_{t+\tau}, Y_{t+\tau}$$

son las mismas para cualquier  $\tau$ .

NOTA Si los procesos pueden ser estacionarios

individualmente y no serlo en forma conjunta.

#### COROLARIO

De la definición se sigue que la función de densidad de orden  $n$  de un proceso estacionario debe ser tal que:

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

para cualquier  $\tau$ .

En particular,  $f(x; t) = f(x; t + \tau)$

y como esto se cumple para toda  $\tau$ , se concluye que la función de densidad de primer orden  $f(x; t)$  es independiente de  $t$ :

$$f(x; t) = f(x)$$

Es consecuencia de lo anterior el hecho de que  $E(X_t)$  es una constante  $m$ .

La densidad de orden 2 debe ser tal que:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_1 + \tau, t_2 + \tau)$$

la cual debe ser función de  $t_1 - t_2$

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; \theta); \theta = t_1 - t_2$$

De donde  $f(x_1, x_2; \theta)$  es la función de densidad conjunta de las variables aleatorias

$$X_{t_1} \text{ y } X_{t_2}.$$

#### PROCESOS ESTACIONARIOS DE ORDEN FINITO

Se dice que un proceso  $X_t$  es estacionario de orden  $k$  si se cumple:

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

para  $n \leq k$ .

Si se cumple para  $n=k$  debe cumplirse para  $n < k$ , ya que la función de densidad de orden  $k$  determina las densidades de orden menor.

De aquí puede concluirse que si  $X_t$  es estacionario de segundo orden, entonces es estacionario en sentido amplio (o débilmente estacionario); sin embargo, el inverso no siempre se cumple. La estacionaridad en sentido amplio involucra únicamente momentos de primero y segundo orden.

NOTA 5: Si un proceso  $X_t$  es normal y estacionario en sentido amplio, entonces es estacionario en sentido estricto. Esto

se sigue del hecho de que las estadísticas de un proceso normal se determinan únicamente en términos de su media y autocorrelación.

#### OTRAS FORMAS DE ESTACIONARIDAD

Se dice que un proceso  $X_t$  es ASINTOTICAMENTE ESTACIONARIO si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(x_1, \dots, x_n; t_1+T, \dots, t_n+T)$$

existe y es independiente de  $T$ .

Se dice que un proceso  $X_t$  es ESTACIONARIO EN UN INTERVALO si se cumple

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1+T, \dots, t_n+T)$$

cuando los parámetros temporales permanecen en el intervalo dado.

Se dice que un proceso  $X$  es un proceso con INCREMENTOS ESTACIONARIOS si el proceso  $Y$  dado por

$$Y_t = X_{t+h} - X_t$$

es estacionario para todo  $h$ .

Un proceso  $X_t$  es PERIÓDICAMENTE ESTACIONARIO con periodo  $T$  si se cumple

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1+T, \dots, t_n+T)$$

solamente cuando  $T=nT$ . En este caso las variables aleatorias

$$X_0, X_{hT}, \dots, X_{(n-1)T}$$

tienen la misma función de densidad.

NOTA 6: Todas estas definiciones pueden darse también en el sentido amplio.

## 2.3 PROCESOS NO ESTACIONARIOS

### TRANSICIONES EN SISTEMAS LINEALES CON VALORES ESTOCASTICOS

Supóngase un proceso real  $X_t$  con media  $m(t)$  y autocorrelación  $R(t_1, t_2)$

$$m(t) = E(X_t) \quad R(t_1, t_2) = E(X_{t_1}, X_{t_2})$$

La media puede ser cualquier función del tiempo; sin embargo, la autocorrelación debe satisfacer ciertas condiciones.

Por definición de esperanza, la autocorrelación debe ser simétrica, i.e.:

$$R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$$

Con una constante real "a" se tiene:

$$E((X_{t_1} + aX_{t_2})) = R(t_1, t_1) + 2aR(t_1, t_2) + a^2R(t_2, t_2)$$

Este desarrollo cuadrático es no negativo para cualquier valor de a, por lo tanto su discriminante será no positivo, i.e.:

$$R^2(t_1, t_2) - R(t_1, t_1)R(t_2, t_2) \leq 0$$

$$R^2(t_1, t_2) \leq R(t_1, t_1)R(t_2, t_2)$$

## 2.4 ALGUNOS EJEMPLOS

### DEFINICION

Si el proceso estocástico  $\{N_{t, \tau} : t \in [0, \infty)\}$  es:

- i) independiente del tiempo, es decir, para cada  $k$ :  
 $\Pr(N_{t, \tau} = k)$  sólo depende de  $\tau$ .
- ii) tiene incrementos independientes.
- iii) es ordenado, es decir,  $\Pr(N_{t, \tau} \geq 2) = o(\tau)$  conforme  $\tau \rightarrow 0$ , donde, si  $A(\tau) = 0$  conforme  $\tau \rightarrow 0$ , entonces  $\frac{A(\tau)}{\tau} \rightarrow 0$  conforme  $\tau \rightarrow 0$ ,

entonces el proceso es un proceso de Poisson.

Con base en la distribución de Poisson se obtiene la distribución de probabilidades del número de ocurrencias de un evento durante un periodo  $t$ .

$$f_X(y) = P(X=y \text{ en un periodo } t)$$

$$f_X(y) = \frac{(\lambda t)^y}{y!} e^{-\lambda t}; \quad y=0, 1, 2, \dots$$

donde  $\lambda$  es el número medio de ocurrencias por unidad de tiempo. (Ver distribuciones en el Apéndice B)

La esperanza y la varianza de este proceso para un periodo  $t$  son:

$$E(X) = \lambda t$$

$$V(X) = \lambda t$$

Para que esta distribución se aplique se requiere que el evento ocurra cada vez en forma independiente de las anteriores, y que sea constante. A este parámetro se le llama INTENSIDAD DEL PROCESO, mientras que su recíproco  $1/\lambda$ , es el PERIODO DE RECURRENCIA.

La importancia de la ley de probabilidades de Poisson se ha venido haciendo mayor durante los últimos años, y también ha crecido el número de los fenómenos aleatorios que se estudian con aplicaciones de esta ley.

Esta ley se presenta frecuentemente en los campos de investigación de operaciones y ciencias administrativas. Allí, la demanda de servicio, ya sea de las cajas o vendedores de una tienda de departamentos, del encargado de las existencias de una fábrica, de las pistas de aterrizaje de un aeropuerto, de las facilidades para manejar cargamento en un puerto, del encargado de mantenimiento en un cuarto de máquinas, de las líneas de conexión en un conmutador telefónico, y también la rapidez con la cual se ofrecen los servicios, conduce frecuentemente a fenómenos aleatorios que obedecen exacta o aproximadamente a una ley de probabilidades de Poisson. Se tienen los mismos fenómenos aleatorios en relación con la ocurrencia de accidentes, errores, descomposturas y otras calamidades similares.

Se comprenderá mejor la clase de fenómenos que conducen a una ley de probabilidades de Poisson si se considera la clase de eventos que conducen a una ley Binomial (véase Apéndice B).

La situación usual en donde se aplica la ley Binomial consiste en la observación de  $n$  ocurrencias independientes de un experimento. Puede entonces determinarse:

- i) el número de ensayos en los cuales un evento concreto ha ocurrido;
- ii) el número de ensayos en los cuales el evento no ocurrió.

Sin embargo, hay eventos aleatorios que no ocurren como resultado de ensayos definidos de un experimento, sino más bien en puntos aleatorios del tiempo o del espacio. Para eventos así, puede contarse el número de ocurrencias de evento en determinado tiempo (o espacio). Por ejemplo, supóngase que se observa el número de aviones que aterrizan en cierto aeropuerto durante una hora. Puede anotarse el número de aviones que llegaron al aeropuerto durante una hora; sin embargo, no tiene sentido preguntar cuántos aviones no llegaron al aeropuerto durante esa hora (!). De manera similar, si se observa el número de organismos por unidad de volumen de algún líquido, puede contarse el número de organismos presentes, pero no tiene caso hablar del número de los ausentes.

En seguida se indicarán algunas condiciones bajo las cuales se puede esperar que el número de ocurrencias de un evento

aleatorio en el tiempo o en el espacio obedezca a una ley de probabilidades de Poisson. Se hará la suposición básica de que existe una cantidad positiva tal que, para cualquier número positivo  $h$  pequeño y cualquier intervalo de tiempo de longitud  $h$ :

- i) la probabilidad de que ocurra exactamente un evento en el intervalo es aproximadamente igual a  $\lambda h$ , en el sentido de que es igual a  $\lambda h + r_1(h)$ , donde  $r_1(h)/h$  tiende a ser cero cuando  $h$  tiende a cero;
- ii) la probabilidad de que ocurran exactamente cero eventos en el intervalo es aproximadamente igual a  $1 - \lambda h$ , en el sentido de que es igual a  $1 - \lambda h - r_2(h)$ , donde  $r_2(h)/h$  tiende a cero cuando  $h$  tiende a cero;
- iii) la probabilidad de que dos o más eventos ocurran en el intervalo es igual a una cantidad  $r_3(h)$ , tal que el cociente  $r_3(h)/h$  tiende a cero cuando la longitud  $h$  del intervalo tiende a cero;
- iv) los eventos son estocásticamente independientes.

Puede interpretarse el parámetro  $\lambda$  como la razón media de ocurrencia de los eventos por unidad de tiempo (o espacio); en consecuencia, se hará referencia a  $\lambda$  como razón media de ocurrencia de los eventos.

#### EJEMPLO 1. CASETA DE PAGO.

Supóngase que se observan los tiempos de llegada de los automóviles a una caseta de pago. Supóngase que se informa que la razón media de llegada de automóviles es  $\lambda = 1.5$  automóviles por minuto. Entonces, esta suposición indica que en un periodo de longitud  $h=1$  segundo, hay una probabilidad aproximada  $h=1/40$  de que llegue exactamente un coche, mientras que la probabilidad aproximada de que lleguen exactamente cero coches es de  $1-h=39/40$ .

Además de la suposición acerca de la existencia del parámetro con las propiedades indicadas, también se supone que si se divide un intervalo de tiempo en  $n$  subintervalos, y si para  $i=1, \dots, n$ ,  $A_i$  denota el evento de que ocurra por lo menos un evento de la clase que se observa en el  $i$ -ésimo subintervalo, entonces para cualquier entero  $n$ ,  $A_1, \dots, A_n$  son eventos independientes.

Se demostrará a continuación que, con estas suposiciones, el número de ocurrencias del evento en un tiempo (o espacio) de longitud (área o volumen)  $t$ , obedece a una ley de probabilidades de Poisson con parámetro  $\lambda t$ . De manera más precisa, la probabilidad de que ocurran exactamente  $k$  eventos en un periodo de tiempo  $t$  es igual a:

$$e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \dots (2.1)$$

En consecuencia, puede describirse brevemente una sucesión de eventos que ocurren en el tiempo (o espacio), y que satisfacen las suposiciones anteriores, diciendo que los eventos obedecen a una ley de probabilidades de Poisson a la razón de  $\lambda$  eventos por una unidad de tiempo (o de espacio).

Obsérvese que si  $X_t$  es el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud  $t$ , entonces  $X_t$  obedece a una ley de probabilidades de Poisson con media  $\lambda t$ , por lo tanto,  $\lambda$  es la razón promedio de ocurrencias del evento por unidad de tiempo, en el sentido de que el número de eventos que suceden en un intervalo de tiempo de longitud  $t$  está regido por una ley de probabilidades de Poisson con media  $\lambda$ .

Para demostrar (2.1), se divide el intervalo de tiempo de longitud  $t$  en  $n$  periodos de longitud  $t/n$ . Entonces, la probabilidad de que ocurran  $k$  eventos en el tiempo  $t$  es aproximadamente igual a la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los eventos en exactamente  $k$  de los  $n$  subintervalos. Por las suposiciones anteriores, esto es igual a la probabilidad de obtener exactamente  $k$  éxitos en  $n$  ensayos Bernoulli repetidos e independientes, en donde la probabilidad de éxito en cada intento es  $p = \lambda t/n$ ; esto es igual a

$$\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \dots (2.2)$$

Ahora bien, (2.2) es solamente una aproximación a la probabilidad de que  $k$  eventos ocurran en el tiempo  $t$ . Para obtener una evaluación exacta debe dejarse que el número de subintervalos aumente a infinito. Entonces (2.2) tiende a (2.1) puesto que reescribiendo (2.2) se tiene:

$$\frac{1}{k!} (\lambda t)^k \left(1 - \frac{t\lambda}{n}\right)^{n-k} \frac{(n)_k}{n^k} \rightarrow \frac{1}{k!} (\lambda t)^k e^{-\lambda t}$$

y recordando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$

### EJEMPLO 2. BACTERIAS EN EL AGUA.

Supóngase que se sabe que las bacterias de cierta clase aparecen en el agua a razón de dos bacterias por  $\text{cm}^3$  de agua. Si se supone que este fenómeno se rige por una ley de probabilidades de Poisson, cuál es la probabilidad de que en una muestra de  $2 \text{ cm}^3$  de agua se encuentren i) cero bacterias; ii) por lo menos dos bacterias?

Con la suposición que se ha hecho, se concluye que el número de bacterias en una muestra de  $2 \text{ cm}^3$  de agua obedece a una ley de probabilidades de Poisson con parámetro  $\lambda t = 2(2) = 4$ ; en donde

$\lambda$  denota la razón a la cual ocurren las bacterias por unidad de volumen, y  $t$  representa el volumen de la muestra de agua en consideración. En consecuencia, la probabilidad de que no haya bacterias en la muestra es igual a  $e^{-\lambda}$ , y la probabilidad de que haya dos o más bacterias en la muestra es igual a  $1 - 5e^{-\lambda}$ .

### EJEMPLO 3. ERRORES TIPOGRAFICOS.

En un libro de 520 páginas hay 390 errores tipográficos. Cuál es la probabilidad de que 4 páginas, seleccionadas al azar por el impresor como muestra de su trabajo, estén libres de errores?

El problema, con este planteamiento, no tiene solución matemática directa. Sin embargo, formulando nuevamente el problema supóngase que los errores tipográficos ocurren en el trabajo de un impresor de acuerdo con una ley de probabilidades de Poisson, a la razón de  $390/520 = 3/4$  errores por página. El número de errores en 4 páginas obedece entonces a una ley de Poisson con parámetro  $(3/4)4 = 3$ ; en consecuencia, la probabilidad de que no haya errores en las 4 páginas es  $e^{-3}$ .

### EJEMPLO 4. PROBLEMA DE INVENTARIOS.

Supóngase que un comerciante descubre que el número de artículos de cierta clase, que sus clientes demandan en una temporada, obedece a una ley de Poisson, con parámetro conocido. Qué existencia  $k$  de este artículo debe tener el comerciante al principio de la temporada para que haya una probabilidad de 0.99 de que pueda surtir inmediatamente a todos los clientes que soliciten el artículo durante el periodo en consideración?

El problema consiste en encontrar un número  $k$  tal que haya una probabilidad de 0.99 de que el evento ocurra  $k$  o menos veces durante el periodo en que el artículo es demandado. Puesto que el número de ocurrencias de este evento obedece a una ley de Poisson con parámetro  $\lambda$ , se busca un entero  $k$  tal que:

$$\sum_{n=0}^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \geq 0.99; \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \geq 0.01$$

El valor de  $k$  puede obtenerse de las tablas de Poisson, o puede calcularse utilizando algún método numérico.

La distribución de Poisson se puede considerar como una forma límite de la distribución Binomial. Sin embargo, también se puede considerar en sí misma, observando un proceso de Poisson. El proceso de Poisson tiene aplicación a una gran variedad de

procesos físicos; como consecuencia esta distribución, junto con la Normal y la Binomial, es una de las más ampliamente utilizadas.

Considérese ahora la distribución de Poisson en sí misma. Supóngase que se observa la recepción de llamadas telefónicas en una determinada central. Una llamada recibida se denomina un suceso, y cada vez que llega una llamada (esto es, cada vez que ocurre un suceso), se dice que ha habido un CAMBIO en el sistema.

Una característica de este proceso físico es que los sucesos ocurren durante un periodo de tiempo CONTINUO.

Para operar con este proceso se supondrá que:

1. las llamadas llegan en forma aleatoria.
2. las llamadas en cualquier intervalo de tiempo son estocásticamente independientes de las llamadas en otros intervalos de tiempo.

Al hablar de llamadas aleatorias se indica que la probabilidad de que se produzca un suceso en un intervalo de tiempo cualquiera muy pequeño es la misma, y la probabilidad de que ocurra más de uno es muy pequeña. La segunda suposición significa que las llamadas anteriores o futuras no tienen efecto sobre una llamada (suceso), que ocurra en un intervalo de tiempo dado.

Sea  $X_{n+1}$  el número de llamadas en el instante  $n+1$ .

Sea  $\xi_{n+1}$  el número de llamadas que entran en  $n+1$ .

Sea  $R(X_n)$  el número de llamadas que entraron en  $n$  y que permanecen en  $n+1$ .

Sea  $p$  la probabilidad de que ocurra una llamada en un instante.

Entonces

$$X_{n+1} = \xi_{n+1} + R(X_n)$$

$$P(R(X_n) = z \mid X_n = x) = \binom{x}{z} p^z (1-p)^{x-z}, \quad 0 \leq z \leq x$$

y

$$P(\xi_n = z) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{z!}, \quad z \geq 0$$

Supóngase que  $X_n$  tiene distribución Poisson con parámetro  $t$ , i.e.:

$$P(X_n = x) = \frac{t^x e^{-t}}{x!}$$

entonces  $R(X_n)$  tiene distribución Poisson con parámetro  $\lambda t$ , donde  $\lambda = p$ ; i.e.:

$$P(R(X_n) = y) = \sum_{x=y}^{\infty} P(X_n = x, R(X_n) = y)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x=y}^{\infty} P(X_n = x) P(R(X_n) = y \mid X_n = x) \\
&= \sum_{x=y}^{\infty} \frac{t^x e^{-t}}{x!} \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \\
&= \sum_{x=y}^{\infty} \frac{t^x e^{-t}}{x! (x-y)!} p^y (1-p)^{x-y} \\
&= \frac{(pt)^y e^{-t}}{y!} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{(t(1-p))^{x-y}}{(x-y)!} \\
&= \frac{(pt)^y e^{-t}}{y!} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(t(1-p))^z}{z!} \\
&= \frac{(pt)^y e^{-t}}{y!} e^{t(1-p)} \\
&= \frac{(pt)^y e^{-pt}}{y!}
\end{aligned}$$

Así,  $R(X_n)$  tiene distribución Poisson, con parámetro  $\lambda = pt$ .

## 2.5 TEORIA DE LA RENOVACION

Considere una sucesión  $X_i$ ,  $n \geq 1$ , de variables aleatorias independientes, no negativas, con función de distribución común  $f$ . Para evitar trivialidades supóngase que

$$F(0) = P(X_n = 0) = 0.$$

Como  $X_i > 0$ , se sigue que la esperanza (ver Apéndice B)

$$E(X_n) = \int_0^{\infty} x dF(x)$$

existe, (puede ser infinita), y se denota por  $\mu$ .

$$\text{Sea } S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad , \quad n \geq 1 \quad \dots (2.3)$$

$$\text{y } S_0 = 0.$$

### DEFINICION

Una sucesión de variables aleatorias  $S_n$ ,  $n \geq 0$  es un PROCESO DE RENOVACION si es de la forma (2.3) y las  $X_n$  satisfacen las condiciones mencionadas con anterioridad.

Sea

$$N(t) = \text{Máx} \{n / S_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Se dice que una renovación ocurre en  $t$  si  $S_n = t$  para algún  $n$ . Puesto que los  $X_n$  son independientes e idénticamente distribuidos, se sigue que después de cada renovación el proceso comenzará de nuevo.

Se llaman TIEMPOS ENTRE ARRIBOS o TIEMPOS ENTRE RENOVACIONES las variables  $X_n$ ; específicamente  $X_n$  es el tiempo entre la  $(n-1)$ -ésima y la  $n$ -ésima renovaciones.  $S_n$  es el tiempo de la  $n$ -ésima renovación y  $N(t)$  es el número de renovaciones en el intervalo de tiempo  $(0, t]$ . Feller (F) considera el tiempo cero como el de la primera renovación, y, por consiguiente, el número de renovaciones lo toma en el intervalo  $[0, t]$ . Si se denota por  $N_0(t)$  a este número de renovaciones se tiene que

$$N_0(t) = N(t) + 1.$$

El número de renovaciones en  $(0, t]$  es mayor o igual a  $n$  si y solamente si, al tiempo  $t$  ya ha ocurrido la  $n$ -ésima renovación, esto es:

$$N(t) \geq n \iff S_n \leq t \quad \dots(2.4)$$

De (2.4) se obtiene

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1) \\ &= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) \end{aligned}$$

que puede reescribirse utilizando el hecho de que la densidad de una suma de variables aleatorias independientes es la convolución de sus densidades (ver Apéndice B):

$$P(N(t) = n) = f_n^*(t) - f_{n+1}^*(t), \quad n \geq 0 \quad \dots(2.5)$$

Para  $N$  se obtiene:

$$P(N_0(t) = n) = f_{n+1}^*(t) - f_n^*(t), \quad n \geq 1 \quad \dots(2.6)$$

#### DEFINICION

Se llama FUNCION DE RENOVACION al valor esperado del número de renovaciones, esto es:

$$U(t) = E N(t), \quad t \geq 0 \quad \dots(2.7)$$

o bien,

$$U_0(t) = E N_0(t), \quad t \geq 0 \quad \dots(2.8)$$

es claro que:

$$U_0(t) = U(t) + 1 \quad \dots(2.9)$$

$U(t)$  es el número esperado de renovaciones en  $(0, t]$  y  $U_0(t)$  es el número esperado de renovaciones en  $[0, t]$ .

PROPOSICION 1

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t), \quad t \geq 0 \quad \dots(2.10)$$

Demostración:

Pueden utilizarse los siguientes teoremas:

- i) La densidad de una suma de variables aleatorias independientes es la convolución de sus densidades.
- ii) Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa,
  - a) si sólo toma valores enteros, entonces  $X$  tiene esperanza finita si y sólo si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

converge. Si la serie converge, entonces

$$E X = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

- b) si es continua con función de distribución  $F$ , entonces  $X$  tiene esperanza finita si y solamente si

$$\int_0^{\infty} P(X > x) dx$$

es finita; en este caso

$$E X = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$$

Tomando además la equivalencia (2.4):

$$\begin{aligned} U(t) &= E N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N(t) \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t). \end{aligned}$$

PROPOSICION 2

$$U(t) < \infty \quad \text{para toda } t > 0 \quad \dots(2.11)$$

Demostración:

Puesto que  $P(X_n = 0) < 1$ , existe  $\alpha > 0$  tal que

$$P(X_n > \alpha) > 0.$$

Definase un nuevo proceso de renovación  $\bar{S}_n$ ,  $n \geq 1$ , relacionado con  $X_n$ ,  $n \geq 1$ , por

$$\bar{X}_n = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n < \alpha \\ \alpha & \text{si } X_n \geq \alpha \end{cases}$$

$$\bar{S}_n = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n$$

Definase también

$$\bar{N}(t) = \text{Máx} (n / \bar{S}_n \leq t) , \quad t=0$$

Como  $(0, t] \subset (0, ((t/\alpha)+1)\alpha]$ , entonces, teniendo en cuenta que las renovaciones del proceso  $\bar{S}_n$  sólo pueden ocurrir en los tiempos  $t=0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$  y que después de cada renovación el proceso comienza de nuevo, se tiene

$$E \bar{N}(t) = ((t/\alpha) + 1) \cdot E \bar{N}(\alpha) .$$

Ahora, usando la independencia e idéntica distribución de las  $\bar{X}_n$ ,

$$\begin{aligned} E \bar{N}(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\bar{S}_n \leq \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\bar{X}_1 \leq \alpha, \dots, \bar{X}_n \leq \alpha) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\bar{X} = 0) = \frac{1}{1 - P(\bar{X}_1 \leq \alpha)} = \frac{1}{P(\bar{X}_1 > \alpha)} \end{aligned}$$

y por tanto

$$E N(t) = \frac{(t/\alpha) + 1}{P(\bar{X}_1 > \alpha)} < \infty$$

Finalmente, se observa que  $\bar{X}_n \leq X_n$ , lo cual implica  $\bar{N}(t) \geq N(t)$  y por consiguiente  $E \bar{N}(t) = E N(t)$ , de donde se sigue el resultado deseado.

### PROPOSICION 3

Existe una correspondencia uno a uno entre distribuciones  $F$  de tiempos entre arribos y funciones de renovación  $U$ .

Demostración:

Se tiene, de la Proposición 1:

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*(t)$$

Tomando transformada de Laplace en ambos miembros:

$$\bar{U}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_n^*(s)$$

Como la transformada de una convolución es el producto de las transformadas (fe), se sigue que:

$$\tilde{U}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{F}(s)]^n = \frac{\tilde{F}(s)}{1 - \tilde{F}(s)}$$

equivalentemente,

$$\tilde{F}(s) = \frac{\tilde{U}(s)}{1 + \tilde{U}(s)}$$

Entonces, como la transformada de Laplace determina la distribución (Fe), se sigue que F está determinada por U(t).

Las funciones de renovación U(t) y U<sub>0</sub>(t) son funciones no decrecientes definidas en [0, ∞), y por lo tanto, pueden considerarse como funciones de distribución de medidas en [0, ∞), que se llamarán MEDIDAS DE RENOVACION. Así, el intervalo I = (a, b], 0 ≤ a < b < ∞ tiene medidas:

$$U(I) = U(b) - U(a) \quad \text{y} \quad U_0(I) = U_0(b) - U_0(a)$$

pero como U<sub>0</sub> = U + 1, entonces U(I) = U<sub>0</sub>(I).

La única diferencia entre las medidas U y U<sub>0</sub> es que U<sub>0</sub>({0}) = 1 y U({0}) = 0; esto es

$$U_0 = \delta_0 + U \quad \dots(2.13)$$

En donde δ<sub>0</sub> es la delta de Kronecker:

$$\delta_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{si } 0 \notin A \end{cases}$$

Tomando transformada de Laplace (2.13), se observa que:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_0(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \delta_0(dt) = e^0 = 1 \\ \tilde{U}(s) &= \tilde{U}(s) + \tilde{\delta}_0(s) = \tilde{U}(s) + 1 \end{aligned}$$

Ahora, por (2.12)

$$\tilde{U}_0(s) = \frac{\tilde{F}(s)}{1 - \tilde{F}(s)} + 1 = \frac{1}{1 - \tilde{F}(s)}$$

de donde 
$$\tilde{F}(s) = \frac{\tilde{U}_0(s) - 1}{\tilde{U}_0(s)}$$

Así se tiene el siguiente

#### COROLARIO

Existe una correspondencia uno a uno entre la distribución  $F$  de tiempos entre arribos y la función de renovación  $U_0(t)$ .

En resumen, las correspondencias entre funciones de distribución  $F$  de tiempos de renovación y funciones de renovación están dadas por:

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*(t) \quad \text{y} \quad \tilde{F}(s) = \frac{\tilde{U}(s)}{1 + \tilde{U}(s)} \quad \dots(2.14)$$

$$U_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*(t) \quad \text{y} \quad \tilde{F}(s) = \frac{\tilde{U}_0(s) - 1}{\tilde{U}_0(s)}$$

#### EJEMPLO 1. REEMPLAZO DE ARTICULOS.

Considérese un artículo (un foco eléctrico, una máquina, etc.), que se usa hasta que falla y es entonces reemplazado o renovado instantáneamente por un nuevo artículo del mismo tipo. Supóngase que los tiempos de vida  $t_1, t_2, \dots$  de los artículos sucesivos puestos en servicio son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Si  $N(t)$  es el número de artículos renovados o reemplazados hasta el tiempo  $t$ , entonces  $N(t), t \geq 0$  es un proceso de renovación.

#### EJEMPLO 2. LINEA DE ESPERA.

Considérese un servicio al que llegan clientes en los tiempos  $0 < t_1 < t_2 \dots$ . A menudo se puede suponer que los tiempos entre arribos  $X_n = t_n - t_{n-1}$  son variables independientes e idénticamente distribuidas, en cuyo caso  $N(t), t \geq 0$ , en donde  $N(t)$  es el número de clientes que han llegado al servicio hasta el tiempo  $t$ , es un proceso de renovación.

## 2.6 SERIES DE TIEMPO

El pronóstico es una técnica que ayuda a predecir lo que ocurrirá en el futuro. El futuro, ya se ha comentado, por lo

general no es determinístico; ninguna técnica puede aplicarse a todos los procesos; cada problema exigirá un estudio detallado para identificar el tipo de modelo más adecuado.

Las técnicas de pronósticos se utilizan en muchos campos: mercadotecnia, decisiones sobre un nuevo producto o servicio, etc. Los pronósticos sirven para predecir la penetración de un nuevo artículo en el mercado, la tendencia de precios de un producto, etc. En producción, los pronósticos pueden predecir las ventas; en finanzas y contabilidad, necesidades futuras de flujos de efectivo; en planeación macroeconómica de un país, el crecimiento del producto interno bruto, el desempleo, etc.

Los siguientes elementos ayudan a determinar el tipo de técnica que debe emplearse:

- i) El plazo en el cual se desea la predicción (corto, mediano o largo.
- ii) La incertidumbre que rodea el marco de la toma de decisiones.
- iii) La existencia de series históricas que sean relevantes y confiables.

El pronóstico es un elemento necesario del proceso de planeación, pero no es la planeación en sí. El pronóstico predice lo que puede suceder si las tendencias históricas no cambian. Para que un modelo sea adecuado, debe ir siendo adecuado a los cambios en las tendencias históricas.

Las técnicas de pronóstico pueden dividirse en CUANTITATIVAS y CUALITATIVAS. Sólo las primeras requieren de una serie histórica de datos.

Entre las técnicas cuantitativas se encuentran, primordialmente, las MEDIAS MOVILES, el AJUSTE EXPONENCIAL, el ANALISIS DE REGRESION, los MODELOS ECONOMETRICOS, la MATRIZ DE INSUNO PRODUCTO, etc. Dentro de la familia de técnicas cualitativas se encuentran las CURVAS LOGISTICAS Y DE APRENDIZAJE.

Para determinar la técnica más adecuada, pueden tomarse en cuenta los siguientes factores, aunados a la experiencia del investigador sobre el fenómeno en cuestión:

- i) El plazo de interés.
- ii) El nivel de detalle.
- iii) La magnitud de la predicción.
- iv) El uso que se dará al pronóstico.
- v) El costo.
- vi) El tipo de planeación.

Notación:

Sea  $X_t$  , el valor observado en el periodo  $t$ ,  $t=1,2,\dots,n$   
Sea  $H_t$  , el peso asociado a la observación  $X_t$  .

Sea  $S_t$ , el valor pronosticado para el periodo  $t$ .  
 Sea  $e_t$ , el error absoluto del pronóstico en el periodo  $t$ .

Se tiene que

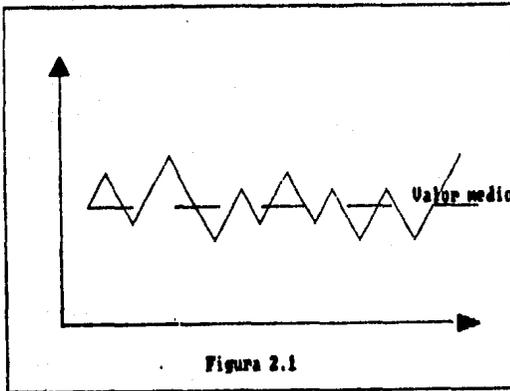
$$\sum_{t=1}^{T+1} W_t = 1 \quad \dots(2.15)$$

y

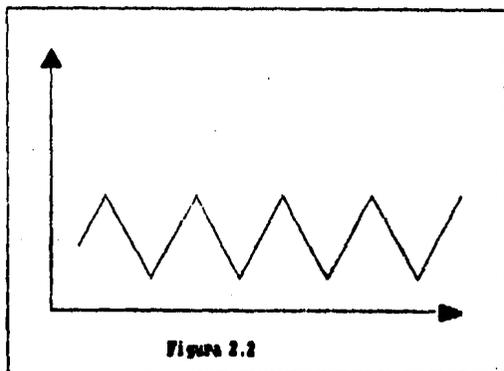
$$e_t = |S_t - X_t| \quad \dots(2.16)$$

En una serie histórica de datos, conocida como SERIE DE TIEMPO, existen 4 patrones básicos que pueden o no presentarse en la serie y que son fundamentales para elegir la técnica adecuada:

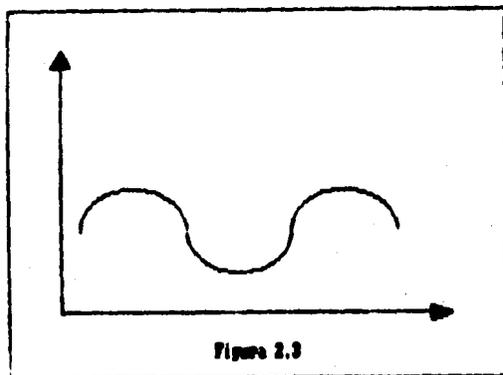
a) la HORIZONTALIDAD, se presenta cuando una serie de tiempo no tiene una tendencia determinada. La serie en este caso es estacionaria. Un caso típico lo forma el número de productos defectuosos en una línea de producción, que por lo general es una constante. (Véase la Figura 2.1)



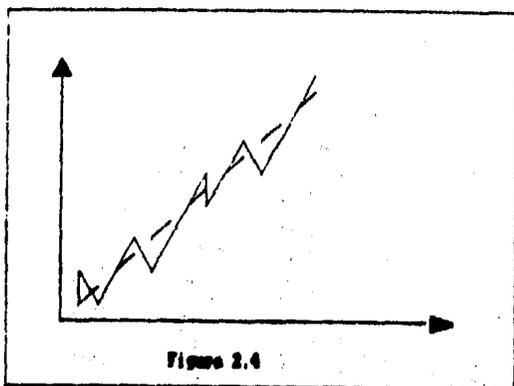
b) la ESTACIONARIDAD, existe cuando una serie de tiempo fluctúa de acuerdo con un factor que depende del periodo del año. Por ejemplo, la venta de refrescos y helados aumenta en épocas de calor y disminuye en épocas de frío; lo mismo puede suceder con algunos tipos de ropa. (Véase figura 2.2)



c) la **PERIODICIDAD**, es similar a la estacionaridad, pero las fluctuaciones ocurren más lentamente: son cambios graduados en el tiempo, descritos por lo general utilizando curvas trigonométricas. Por ejemplo, la curva descrita por el movimiento de una partícula. (Véase Figura 2.3)



d) la **TENDENCIA**, existe cuando el proceso refleja claramente una similitud con alguna curva conocida, por lo general una recta. Cuando el proceso tiene tendencia lineal, quiere decir que tiende a aumentar (o a decrecer) en el transcurso del tiempo. Esto sucede, por ejemplo, cuando se miden estaturas de personas con respecto a su edad. (Véase Figura 2.4)



Una serie de tiempo puede combinar los patrones de tendencia, periodicidad y estacionaridad. Sin embargo, alguno de estos patrones puede predominar en la serie; por lo tanto, existen técnicas que permiten identificar el elemento dominante.

A estos 4 patrones se agrega el elemento indeseable, pero indiscutiblemente presentes: la ALEATORIEDAD.

Las técnicas cuantitativas de pronóstico se subdividen, a su vez en: técnicas de SERIES DE TIEMPO y CAUSALES. Las primeras suponen que la serie histórica tiene un patrón o combinación de patrones que se repiten con el tiempo. Las segundas suponen, que el valor de una variable es función de otras variables.

Las técnicas cuantitativas de pronóstico pueden ser de naturaleza ESTADÍSTICA o NO ESTADÍSTICA. En el primer caso caen aquellas técnicas que determinan una banda de confianza de la verosimilitud del pronóstico (o del error). Las técnicas que no hacen esto, caen dentro del segundo grupo. Evidentemente resultará más realista usar técnicas estadísticas.

Para ilustrar las SERIES DE TIEMPO, se expondrán a continuación las técnicas de medias móviles y ajuste exponencial.

### MEDIAS MOVILES

Esta es una técnica que se utiliza en pronósticos a corto plazo. Es un método no estadístico que requiere de una serie histórica para suavizar o ajustar el valor que se pronosticará. Este pronóstico se utiliza a su vez para predecir otros valores futuros.

Supóngase que se tiene una serie histórica como la de las 3 primeras columnas de la Tabla 2.1.

1 Mes	2 Periodo	3 Demanda	4 Pronóstico	
			N=3	N=5
Enero	1	2000	--	--
Febrero	2	1350	--	--
Marzo	3	1950	1767	--
Abril	4	1775	1767	2075
Mayo	5	1750	1767	2075
Junio	6	1750	1767	2075
Julio	7	1750	1767	2075
Agosto	8	1750	1767	2075
Septiembre	9	1750	1767	2075
Octubre	10	1750	1767	2075
Noviembre	11	1750	1767	2075
Diciembre	12	--	1767	2075

Tabla 2.1

El método de las medias móviles simples procede de la siguiente manera:

$$S_{t+1} = \frac{X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + \dots + X_{t-n+1}}{N} \quad \dots(2.17)$$

donde  $S_t$  y  $X_t$ , para toda  $t$ , se definieron en la notación, y  $N$  es el número de periodos incluidos en el pronóstico. Si se simplifica la expresión anterior queda

$$S_{t+1} = \frac{X_t - X_{t-N} + S_t}{N} \quad \dots(2.18)$$

Por ejemplo, se pronostica con una serie de 3 meses ( $N=3$ ), la venta para el mes de abril, basado en las ventas reportadas de enero, febrero y marzo

$$S_4 = \frac{2000 + 1350 + 1950}{3} = 1767$$

Para el mes de mayo se tendrías

$$S_5 = 1/3 (1775 - 2000) + 1767 = 1750$$

Si ahora  $N=5$  (pronósticos con base en 5 meses), las ventas reales de enero a mayo sirven para pronosticar la venta de junio:

$$S_6 = 1/5 (2000 + 1350 + 1950 + 1775 + 1750) = 2075$$

o de julio

$$S_7 = 1/5 (1750 - 2000) + 2075 = 2025$$

Los resultados del pronóstico hasta el mes de diciembre, para  $N=3$  y  $N=5$ , aparecen en las columnas 4 y 5 de la Tabla 2.1.

Es conveniente agregar que para realizar el primer pronóstico con esta técnica, se requieren tantas observaciones como el valor asignado a N. El efecto de alisamiento es mayor cuanto mayor es el valor de N.

Para encontrar la exactitud del pronóstico, se procede a encontrar el error absoluto, dado por

$$e_t = |S_t - X_t|, \quad t=1,2,\dots, n \quad \dots(2.19)$$

con su respectivo valor medio y desviación estándar.

En el caso del ejemplo de la Tabla 2.1, se obtuvieron:

Valor medio del error:	714 para N=3
	509 para N=5
Desviación estándar del error:	383 para N=3
	222 para N=5

de donde se observa que los resultados fueron mucho mejores utilizando N=5.

Algunas de las desventajas de esta técnica son:

- i) Al requerirse tantas observaciones históricas como valores de n, se presentan problemas de registro y almacenamiento de datos.
- ii) Al existir cambios en el patrón de la serie, por la presencia marcada de una tendencia, periodicidad, estacionariedad o una combinación de estas, la técnica de medias móviles simples no se adapta rápidamente al cambio.

## AJUSTE EXPONENCIAL

Para eliminar la limitación del inciso i), se procede a proporcionar ciertos pesos a las observaciones. Así, se puede dar mayor o menor importancia a las observaciones más recientes o a las más antiguas.

El método de alisamiento o ajuste exponencial pronostica en base a

$$S_2 = X_1 \text{ (cálculo del primer pronóstico)}$$

$$S_{t+1} = S_t + \alpha(X_t - S_t), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad t \geq 2 \quad \dots(2.20)$$

donde  $(X_t - S_t)$  es el error del pronóstico anterior y  $\alpha$  es un peso. Si  $\alpha$  es un valor cercano a la unidad, se le da mucha importancia a los valores recientes y, sobre todo, al error en el pronóstico.

Para el ejemplo anterior, y utilizando valores de  $\alpha$  igual a 0.1, 0.5, 0.9, se pronostica la venta (Tabla 2.2).

1 Mes	2 Periodo	3 Demanda	4 5 6 Pronósticos		
			R.1	R.5	R.9
Enero	1	2000	2000	2000	2000
Febrero	2	2100	2100	2100	2100
Marzo	3	2200	2200	2200	2200
Abril	4	2300	2300	2300	2300
Mayo	5	2400	2400	2400	2400
Junio	6	2500	2500	2500	2500
Julio	7	2600	2600	2600	2600
Agosto	8	2700	2700	2700	2700
Septiembre	9	2800	2800	2800	2800
Octubre	10	2900	2900	2900	2900
Noviembre	11	3000	3000	3000	3000
Diciembre	12	3100	3100	3100	3100

Tabla 2.2

El comportamiento del error es:

Valor medios	477 para $\alpha = 0.1$
	570 para $\alpha = 0.5$
	613 para $\alpha = 0.9$
Desviación estándares	359 para $\alpha = 0.1$
	350 para $\alpha = 0.5$
	377 para $\alpha = 0.9$

Por lo que se deduce que el valor de  $\alpha = 0.5$  fue el más adecuado.

Una seria limitación de este método es determinar los valores apropiados de peso.

## 2.7 LECTURAS RECOMENDADAS

- i) Bh, Cap VIII, Cap XIII
- ii) Co, Cap VII
- iii) Fe, Cap XII
- iv) M, Cap VI, Cap VIII
- v) P, Cap XVI
- vi) Pa, Cap XV
- vii) Pr, Apéndice C
- viii) R, Tesis de Teoría de la Renovación

## 2.8 EJERCICIOS

2.1 Probar que si un proceso es débilmente estacionario, la correlación depende únicamente de  $\tau$ .

2.2 Probar que si

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(|X_{t+h} - X_t|^2) = 0,$$

entonces  $C(\tau)$  es continua en el origen.

2.3 Demostrar que  $N_t(t)$  es un proceso de Poisson, si para una constante positiva

$$\begin{aligned} i) \Pr(N_{t,\Delta} = 0) &= 1 - \lambda\Delta + o(\Delta) \\ \Pr(N_{t,\Delta} = 1) &= \lambda\Delta + o(\Delta) \\ \Pr(N_{t,\Delta} = 2) &= o(\Delta) \end{aligned}$$

ii)  $N_{t,\Delta}$  es independiente de  $N_{0,t}$  para todo  $t$  y  $\Delta$ .

2.4 Se ha determinado, mediante un estudio estadístico, que la ocurrencia de terremotos de cierta magnitud en adelante en la costa del Océano Pacífico en nuestro país, tiene un periodo de recurrencia de 100 años. Calcule la probabilidad de que en los próximos 50 años no ocurra ningún terremoto en esa región, suponiendo que la ocurrencia de estos sismos sigue un proceso estocástico de Poisson.

2.5 Resolver el Ejemplo 4 de procesos de Poisson, para un valor de  $\lambda$  de 10.

2.6 Demostrar que un proceso  $N = \{N(t), t \geq 0\}$ , es un proceso de Poisson con intensidad media  $\lambda$  si y sólo si  $N$  es un proceso de renovación cuyos tiempos entre arribos  $T_n = t_n - t_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución para  $T_n$  Exponencial con parámetro  $\lambda$ .

2.7 Dados los siguientes datos sobre la producción de huevos, graficar los datos, analizar la tendencia y calcular la producción para 1985 con  $N=4$  y  $N=6$ . Comparar ambos resultados.

AÑO	PRODUCCION (en millones de unidades)
1975	540
1976	473
1977	464
1978	455
1979	375
1980	386
1981	310
1982	344
1983	311
1984	260

2.8 Dados los siguientes datos sobre la exportación de camarón, graficar la curva correspondiente, analizar la tendencia, y pronosticar la producción para 1985 con  $d = 0.1$ ,  $0.5$  y  $0.9$ , utilizando ajuste exponencial.

AÑO	EXPORTACION (millones de kgs.)
1975	31
1976	39
1977	50
1978	58
1979	67
1980	73
1981	84
1982	84
1983	81
1984	95

**CAPITULO III**

**PROCESOS DE MARKOV**

" Así, juntando el rigor de estas demostraciones de la ciencia con la incertidumbre de la suerte, y conciliando estas dos cosas en apariencia contradictorias, puede, sacando su nombre de las dos, arrogarse este título desconcertante:

*La Geometría del Azar. "*

BLAS PASCAL

## PROCESOS MARKOVIANOS

### 3.0 INTRODUCCION

Como se mencionó con anterioridad, se hará un estudio más detallado de los procesos de Markov, dado que son de mayor aplicación por la sencillez de los cálculos que involucran.

El estudio de los procesos de Markov puede hacerse desde tres puntos de vista:

- i) El más clásico es el aspecto **PROBABILISTA**. Este aspecto tiene la ventaja de prestarse directamente para representar los procesos de Markov y las cadenas de Markov con espacio de estados infinito, en los cuales no pueden aplicarse los siguientes métodos.
- ii) El punto de vista **ALGEBRAICO**, que analiza las cadenas de Markov basándose en la teoría de los vectores y valores propios, con lo cual se generan métodos muy prácticos para obtener los resultados deseados.
- iii) El punto de vista de la **TEORIA DE GRAFICAS**, que da una visión simplificada y permite (en el caso de estados finitos), obtener los resultados esenciales del comportamiento del proceso. La gran desventaja de este punto de vista es que, hasta ahora, muy pocas personas tienen conocimiento de esta teoría, que, sin embargo, es sumamente sencilla y accesible. En este trabajo se hace un breve resumen de los conceptos más necesarios, de modo que el lector pueda comprender con facilidad la aplicación de la Teoría de Gráficas a las cadenas de Markov. Además, se hace referencia a varias obras que pueden ser consultadas si se desea profundizar en esta teoría, que permite explicar muy objetivamente las cadenas de Markov.

### 3.1 CADENAS DE MARKOV

Considérese un sistema que puede caer en un número finito o infinito numerable de estados. Sea  $S$  el conjunto de estados. Supongase que  $S$  es un subconjunto de los números Naturales. El conjunto  $S$  se llama **ESPACIO DE LOS ESTADOS** del sistema. Si se

hacen observaciones en momentos discretos de tiempo, sea  $X_n$  el estado del sistema en el tiempo  $n$ .

Dado que el interés en este caso, son los sistemas no determinísticos, puede pensarse en  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , como variables aleatorias definidas en un espacio común de probabilidades. Para poder decir algo más sobre estas variables debe elaborarse una estructura adicional.

La estructura más simple consiste de variables aleatorias independientes. Este es un buen modelo para aquellos sistemas de experimentos repetidos en los que los estados futuros del sistema son independientes de los estados pasados y presentes. Sin embargo, aunque en la práctica la mayoría de los sistemas presentan influencia del pasado y presente en el futuro, se establecen restricciones que permitan la aplicación de modelos de resolución sencilla.

Muchos sistemas tienen la propiedad de que dado el estado presente, los estados pasados no tienen influencia en el futuro. Esta propiedad se llama PROPIEDAD DE MARKOV, y los sistemas con esta característica se llaman CADENAS DE MARKOV. La propiedad de Markov se define formalmente como:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} / X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n) \dots (3.1)$$

Para cualquier  $n$  no negativa y  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in S$ .

Las probabilidades condicionales  $P(X_{n+1} = y / X_n = x)$  se llaman PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN de la cadena. Como se mencionó en el Capítulo II, aquellas cadenas de Markov donde  $P(X_{n+1} = y / X_n = x)$  es independiente de  $n$ , serán cadenas de Markov con probabilidades de transición HOMOGENEAS EN EL TIEMPO. De aquí en adelante, al decir que  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , forma una cadena de Markov, se indicará que estas variables aleatorias satisfacen la propiedad de Markov y tienen probabilidades de transición homogéneas en el tiempo.

El estudio de estas cadenas de Markov es muy valioso ya que:

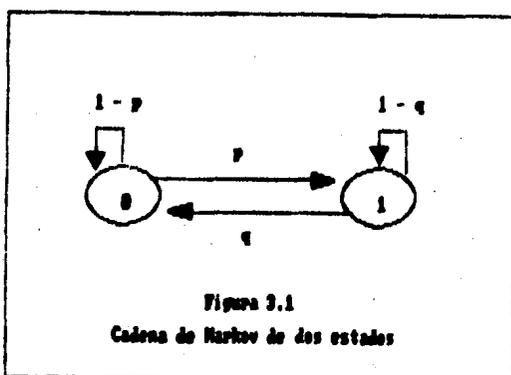
- i) Tienen una amplia teoría que puede presentarse a niveles elementales.
- ii) Un gran número de sistemas pueden ajustarse a modelos de cadenas de Markov, por lo que la materia tiene muchas aplicaciones útiles.

### 3.2 CADENAS DE MARKOV DE DOS ESTADOS

Como ejemplo de cadena de Markov de dos estados, considérese una máquina que al inicio de un cierto día puede estar

descompuesta o funcionando. Supóngase que si la máquina está descompuesta al inicio del  $n$ -ésimo día, la probabilidad de que sea reparada y en condiciones de operar al inicio del día  $n+1$  es  $p$ . Supóngase también que si la máquina está en buenas condiciones al inicio del  $n$ -ésimo día, se tienen la probabilidad  $q$  de que tenga una falla al inicio del día  $n+1$ . Finalmente, sea  $J_0(0)$  la probabilidad de que la máquina esté inicialmente descompuesta, i.e., al inicio del día 0.

Sea el estado 0 el correspondiente a la máquina descompuesta y el estado 1 el correspondiente a la condición de operar correctamente. En la Figura 3.1 se observan las posibles transiciones de un estado a otro. (Recuérdese que la máquina puede también permanecer en un mismo estado.)



Sea  $X_n$  la variable aleatoria que denota el estado de la máquina al tiempo  $n$ . De acuerdo a la descripción anterior:

$$P(X_{n+1} = 1 / X_n = 0) = p$$

$$P(X_{n+1} = 0 / X_n = 1) = q$$

y

$$P(X_0 = 0) = J_0(0).$$

Como hay únicamente dos estados, 0 y 1, se sigue que:

$$P(X_{n+1} = 0 / X_n = 0) = 1 - p$$

$$P(X_{n+1} = 1 / X_n = 1) = 1 - q$$

$$J_0(1) = P(X_0 = 1) = 1 - J_0(0).$$

De esta información pueden calcularse  $P(X_n = 0)$  y  $P(X_n = 1)$ . Obsérvese que:

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = 0) &= P(X_n = 0 \text{ y } X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1 \text{ y } X_{n+1} = 0) \\
&= P(X_n = 0)P(X_{n+1} = 0/X_n = 0) + \\
&\quad P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 0/X_n = 1) \\
&= (1-p)P(X_n = 0) + qP(X_n = 1) \\
&= (1-p)P(X_n = 0) + q(1 - P(X_n = 0)) \\
&= (1-p-q)P(X_n = 0) + q.
\end{aligned}$$

Ahora,  $P(X_0 = 0) = J_0(0)$ , entonces

$$P(X_1 = 0) = (1-p-q)J_0(0) + q$$

$$\begin{aligned}
\text{y } P(X_2 = 0) &= (1-p-q)P(X_1 = 0) + q \\
&= (1-p-q)((1-p-q)J_0(0) + q) + q \\
&= (1-p-q)^2 J_0(0) + q(1 + (1-p-q)) \\
&= (1-p-q)^2 J_0(0) + q(2-p-q)
\end{aligned}$$

Repetiendo  $n$  veces este proceso:

$$P(X_n = 0) = (1-p-q)^n J_0(0) + q \sum_{j=0}^{n-1} (1-p-q)^j \quad \dots(3.2)$$

En el caso trivial  $p=q=0$ , es claro que, para toda  $n$

$$P(X_n = 0) = J_0(0) \quad \text{y} \quad P(X_n = 1) = J_0(1)$$

dado que la máquina no podría cambiar de estado.

Supóngase ahora que  $p+q>0$ . Entonces por la fórmula de la suma de una progresión geométrica infinita:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (1-p-q)^j = \frac{1 - (1-p-q)^{\infty}}{p+q}$$

Se concluye de (3.2) que

$$P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left[ J_0(0) - \frac{q}{p+q} \right] \quad \dots(3.3)$$

y, consecuentemente

$$P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left[ J_0(1) - \frac{p}{p+q} \right] \quad \dots(3.4)$$

Supóngase que  $p$  y  $q$  no son a la vez iguales a cero, ni son a la vez iguales a 1. Entonces  $0 < p+q < 2$ , lo cual implica

$$|1-p-q| < 1.$$

En este caso, si  $n$  tiende a infinito en (3.3) y (3.4), se concluye que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q} \dots (3.5)$$

Estas probabilidades pueden obtenerse de una forma distinta. Supóngase que se desea elegir  $J_0(0)$  y  $J_0(1)$  tales que  $P(X_n = 0)$  y  $P(X_n = 1)$  sean independientes de  $n$ . De (3.3) y (3.4) es claro que deben elegirse

$$J_0(0) = \frac{q}{p+q} \quad \text{y} \quad J_0(1) = \frac{p}{p+q}$$

Así, se ve que si  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , comienza con la distribución inicial

$$P(X_0 = 0) = \frac{q}{p+q} \quad \text{y} \quad P(X_0 = 1) = \frac{p}{p+q}$$

entonces, para todo  $n$

$$P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} \quad \text{y} \quad P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q}$$

NOTA: Este resultado se obtendrá nuevamente al hacer el análisis algebraico de las cadenas de Markov.

Supóngase que se cumple la propiedad de Markov. Puede utilizarse esta información adicional para calcular la distribución conjunta de  $X_0, X_1, \dots, X_n$ .

Por ejemplo, sea  $n=2$  y sean  $X_0, X_1, X_2$  iguales a 0 ó 1. Entonces:

$$\begin{aligned} P(X_0=x_0, X_1=x_1 \text{ y } X_2=x_2) &= P(X_0=x_0 \text{ y } X_1=x_1) \\ &\quad P(X_2=x_2 / X_0=x_0 \text{ y } X_1=x_1) \\ &= P(X_0=x_0) P(X_1=x_1 / X_0=x_0) \\ &\quad P(X_2=x_2 / X_0=x_0 \text{ y } X_1=x_1) \end{aligned}$$

Ahora,  $P(X_0=x_0)$  y  $P(X_1=x_1 / X_0=x_0)$  están determinadas por  $p, q$  y  $J_0(0)$ ; pero sin la propiedad de Markov no podría evaluarse

$$P(X_2=x_2 / X_0=x_0 \text{ y } X_1=x_1)$$

en términos de  $p, q$  y  $J_0(0)$ . Sin embargo, si se satisface la propiedad de Markov, entonces:

$$P(X_2=x_2 / X_0=x_0 \text{ y } X_1=x_1) = P(X_2=x_2 / X_1=x_1),$$

lo cual está determinado por  $p$  y  $q$ . En este caso,

$$P(X_0=x_0, X_1=x_1 \text{ y } X_2=x_2) = P(X_0=x_0) P(X_1=x_1 / X_0=x_0) P(X_2=x_2 / X_1=x_1).$$

Por ejemplo,

$$P(X_0=0, X_1=1, X_2=0) = P(X_0=0)P(X_1=1/X_0=0)P(X_2=0/X_1=1) \\ = \pi_0(0)pq$$

De aquí puede obtenerse la siguiente tabla:

x	x	x	$P(X_0=x_0, X_1=x_1, X_2=x_2)$
0	0	0	$\pi_0(0)(1-p)$
0	0	1	$\pi_0(0)(1-p)p$
0	1	0	$\pi_0(0)pq$
0	1	1	$\pi_0(0)p(1-q)$
1	0	0	$(1-\pi_0(0))q(1-p)$
1	0	1	$(1-\pi_0(0))qp$
1	1	0	$(1-\pi_0(0))(1-q)q$
1	1	1	$(1-\pi_0(0))(1-q)$

### 3.3 FUNCION DE TRANSICION Y DISTRIBUCION INICIAL

Sea  $X_n, n \geq 0$ , una cadena de Markov con espacio de estados  $S$  (no necesariamente dos estados). La función  $P(x, y), x \in S, y \in S$  está definida por

$$P(x, y) = P(X_1 = y / X_0 = x), \quad x, y \in S. \quad \dots(3.6)$$

y es llamada **FUNCION DE TRANSICION** de un paso de la cadena y representa la probabilidad de pasar del estado  $x$  al estado  $y$  en un paso. Se cumple que

$$P(x, y) \geq 0 \quad x, y \in S, \quad \dots(3.7)$$

$$\sum_y P(x, y) = 1 \quad x \in S. \quad \dots(3.8)$$

Dado que la cadena de Markov tiene probabilidades homogéneas en el tiempo, se observa que:

$$P(X_{n+1} = y / X_n = x) = P(x, y), \quad n \geq 1 \quad \dots(3.9)$$

Se sigue de la propiedad de Markov que:

$$P(X_{n+1} = y / X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) = P(x, y) \quad \dots(3.10)$$

En otras palabras, si la cadena de Markov está en el estado  $x$  al tiempo  $n$ , entonces, sin importar como se llegó a  $x$ , tiene probabilidad  $P(x, y)$  de estar en el estado  $y$  en el siguiente paso. Por esta razón los valores  $P(x, y)$  se llaman **PROBABILIDADES DE TRANSICION DE UN PASO** en la cadena de Markov.

La función  $\pi_0(x), x \in S$ , definida por

$$J_0(x) = P(X_0 = x), \quad x \in S \quad \dots(3.11)$$

recibe el nombre de DISTRIBUCION INICIAL de la cadena. Es tal que:

$$J_0(x) \geq 0, \quad x \in S \quad \dots(3.12)$$

y

$$\sum_x J_0(x) = 1 \quad \dots(3.13)$$

La distribución conjunta de  $X_0, \dots, X_n$  puede expresarse fácilmente en términos de la función de transición y de la distribución inicial. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, X_1 = x_1) &= P(X_0 = x_0) P(X_1 = x_1 / X_0 = x_0) \\ &= J_0(x_0) P(x_0, x_1) \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2) &= P(X_0 = x_0, X_1 = x_1) P(X_2 = x_2 / X_0 = x_0, X_1 = x_1) \\ &= J_0(x_0) P(x_0, x_1) P(x_2 = x_2 / X_0 = x_0, X_1 = x_1) \end{aligned}$$

Como  $X_n, n \geq 0$ , satisface la propiedad de Markov y tiene probabilidades de transición homogéneas en el tiempo, entonces,

$$\begin{aligned} P(X_2 = x_2 / X_0 = x_0, X_1 = x_1) &= P(X_2 = x_2 / X_1 = x_1) \\ &= P(X_1 = x_2 / X_0 = x_1) \\ &= P(x_1, x_2). \end{aligned}$$

De donde,

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2) = J_0(x_0) P(x_0, x_1) P(x_1, x_2)$$

Por inducción se observa que

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = J_0(x_0) P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n) \quad \dots(3.14)$$

Por conveniencia, generalmente se invierte el orden de las definiciones. Se dice que  $P(x, y), x \in S, y \in S$ , es una función de transición si satisface (3.7) y (3.8), y se dice que  $J_0(x), x \in S$ , es una distribución inicial si satisface (3.12) y (3.13). Puede demostrarse que dada una función de transición  $P$  y una distribución inicial  $J_0$ , hay un espacio probabilístico de variables aleatorias  $X_n, n \geq 0$ , definidas en el espacio, que satisfacen (3.14). Puede demostrarse también que estas variables aleatorias forman una cadena de Markov con función de transición  $P$  y distribución inicial  $J_0$ .

En seguida se verá que la función de transición de una cadena de Markov juega un papel mucho más importante en la descripción de sus propiedades que la distribución inicial. Por esta razón se acostumbra estudiar simultáneamente todas las cadenas de Markov con la misma función de transición. En general,

cuando se habla de una cadena de Markov con función de transición  $P$ , realmente se trata de una familia de cadenas de Markov con la misma función de distribución.

### 3.4 EJEMPLOS

En esta sección se describirán brevemente varios ejemplos interesantes de cadenas de Markov.

#### EJEMPLO 1. CAMINATA ALEATORIA.

Sean  $\xi_1, \xi_2, \dots$  variables aleatorias independientes con valores enteros y función de densidad común  $f$ . Sea  $X_0$  una variable aleatoria con valor entero que es independiente de las  $\xi_i$ 's, y sea  $X_n = X_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$ . La secuencia  $X_n, n \geq 0$ , se llama CAMINATA ALEATORIA. Es una cadena de Markov cuyo espacio de estados son los enteros y cuya función de transición está dada por

$$P(x, y) = f(y - x)$$

Para verificar esto, sea  $J_0$  la distribución de  $X_0$ , entonces:

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= P(X_0 = x_0, \xi_1 = x_1 - x_0, \dots, \xi_n = x_n - x_{n-1}) \\ &= P(X_0 = x_0) P(\xi_1 = x_1 - x_0) \dots P(\xi_n = x_n - x_{n-1}) \\ &= J_0(x_0) f(x_1 - x_0) \dots f(x_n - x_{n-1}) \\ &= J_0(x_0) P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

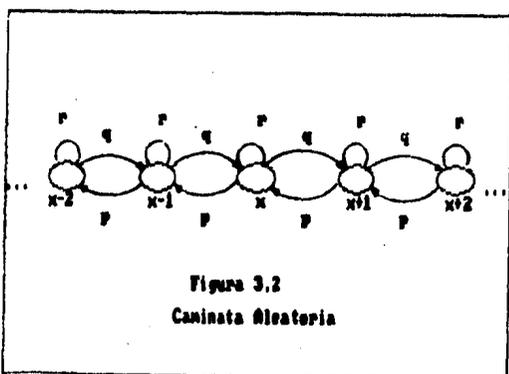
y, por lo tanto, se cumple (3.14)

Supóngase una "partícula" que se mueve a lo largo de los enteros de acuerdo con esta cadena de Markov. Cada vez que la partícula está en  $x$ , sin importar como llegó ahí, salta al estado  $y$  con probabilidad  $f(y - x)$ .

Como caso especial, considérese una caminata aleatoria SIMPLE, en donde  $f(1) = p$ ,  $f(-1) = q$  y  $f(0) = r$ ; donde  $p, q$  y  $r$  son no negativos y suman 1. La función de transición estará dada por:

$$P(x, y) = \begin{cases} p, & \text{si } y=x+1 \\ q, & \text{si } y=x-1 \\ r, & \text{si } y=x \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

(Véase la Figura 3.2)



Es decir, si la partícula se encuentra en el estado  $x$  en una observación dada, en la siguiente observación habrá saltado al estado  $x+1$  con probabilidad  $p$ ; al estado  $x-1$ , con probabilidad  $q$ ; o permanecerá en el mismo estado  $x$  con probabilidad  $r$ .

Por ejemplo, una compañía crea un nuevo envase para su producto y tiene probabilidad  $p$  de aumentar sus ventas, probabilidad  $q$  de disminuirlas y probabilidad  $r$  de que sean aproximadamente las mismas.

NOTA: Más adelante se retomará este ejemplo de caminata aleatoria, véase una simulación de caminata aleatoria en el Apéndice A.

#### EJEMPLO 2. CADENA DE EHRENFEST.

Este es un modelo simple del intercambio de calor o de moléculas de gas entre dos cuerpos aislados. Recuérdese la Ley de Conservación de la Materia y la Energía: "Nada se crea ni se destruye, solamente se transforma". Entonces, cuando existe, por ejemplo, un intercambio de calor entre dos cuerpos, uno de ellos (el que tenga mayor temperatura), lo cede; mientras que el otro lo recibe, de modo que la cantidad inicial de calor sigue siendo la misma. (Aunque en la práctica existen otros factores que modifican este proceso.)

Puede tomarse como modelo un sistema compuesto de dos cajas, la caja A y la caja B, y  $d$  bolas numeradas:  $1, 2, \dots, d$ . A y B representan los cuerpos, las bolas son, por ejemplo, las moléculas.

Inicialmente algunas de estas bolas están en la caja A y las restantes están en la caja B. Se elige un entero al azar entre  $1, 2, \dots, d$ , y la bola correspondiente se saca de la caja y se coloca en la otra. Este proceso se repite indefinidamente con

selecciones independientes en cada ensayo.

Sea  $X_n$  el número de bolas en la caja A después del  $n$ -ésimo ensayo. Entonces  $X_n, n \geq 0$ , es una cadena de Markov en  $S = 0, 1, 2, \dots, d$ .

La función de transición de esta cadena de Markov puede ser calculada fácilmente. Supóngase que hay  $x$  bolas en la caja A al tiempo  $n$ . Entonces, con probabilidad  $x/d$  la bola sacada en el ensayo  $n+1$  pertenecerá a la caja A y será transferida a la caja B. En este caso habrá  $x-1$  bolas en la caja A al tiempo  $n+1$ . Similarmente, con probabilidad  $(d-x)/d$ , la bola sacada en el ensayo  $n+1$  pertenecerá a la caja B y será transferida a la caja A, resultando  $x+1$  bolas en la caja A al tiempo  $n+1$ . Por lo tanto, la función de transición de esta cadena de Markov estará dada por:

$$P(x, y) = \begin{cases} x/d & \text{si } y=x-1 \\ 1-(x/d) & \text{si } y=x+1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Nótese que la cadena de Ehrenfest en una transición únicamente va del estado  $x$  a  $x-1$  o a  $x+1$  con probabilidad positiva. (Véase la Figura 3.3)

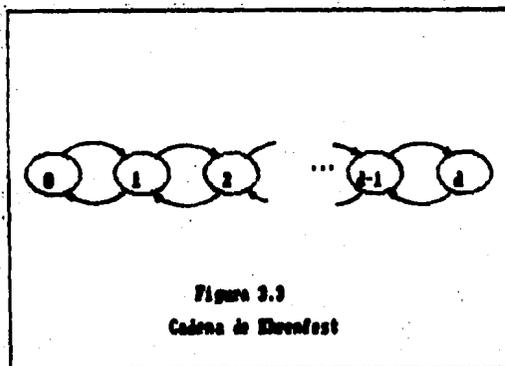


Figura 3.3  
Cadena de Ehrenfest

**NOTA:** Un estado  $a$  de una cadena de Markov es llamado ESTADO ABSORBENTE si  $P(a, a) = 1$ ; equivalentemente,  $P(a, y) = 0$  para todo  $y$  distinto de  $a$ . El siguiente ejemplo utiliza esta definición. En la gráfica se observa este hecho fácilmente, ya que un estado absorbente no tiene arcos que salgan de él.

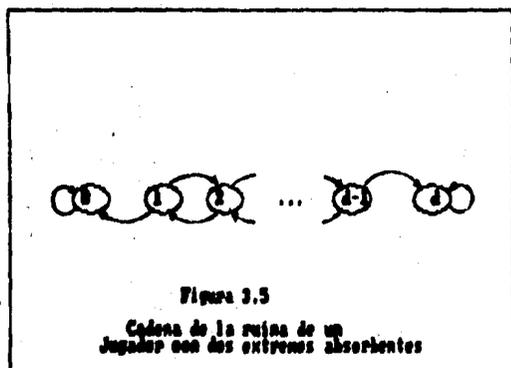
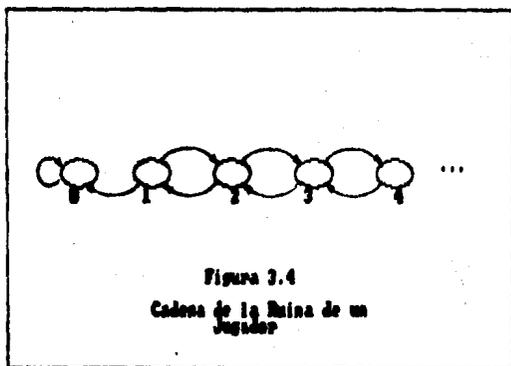
### EJEMPLO 3. CADENA DE LA RUINA DE UN JUGADOR.

Supóngase que un jugador comienza con un cierto capital

inicial en libras y hace una serie de apuestas de una libra contra la casa. Supóngase que tiene probabilidades  $p$  y  $q=1-p$  de ganar o perder, respectivamente, cada apuesta; y que si su capital llega a cero, estará arruinado y permanecerá con capital cero de ahí en adelante. Sea  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , el capital del jugador al tiempo  $n$ . Esta es una cadena de Markov en la que 0 es un estado absorbente (no puede seguir apostando), y para  $x \geq 1$ :

$$P(x,y) = \begin{cases} q & \text{si } y=x-1 \\ p & \text{si } y=x+1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad \dots(3.15)$$

Dicha cadena es llamada CADENA DE LA RUINA DE UN JUGADOR en  $S = 0, 1, 2, \dots$ . Puede modificarse este modelo suponiendo que si el capital del jugador acumula  $d$  libras, deja de jugar. En este caso, 0 y  $d$  son estados absorbentes, y (3.15) se cumple para  $x=1, \dots, d-1$ . (Véanse las Figuras 3.4 y 3.5 para cada uno de estos casos)



Una interpretación alternativa de esta última cadena, puede ser que dos jugadores hagan series de apuestas de una libra uno contra otro y que entre ambos tengan un capital total de  $d$  libras. Supóngase que el primer jugador tiene probabilidad  $p$  de ganar una apuesta dada, y el segundo jugador tiene probabilidad  $q=1-p$  de ganar. Los dos juegan hasta que uno de ellos se arruina. Sea  $X$  el capital del primer jugador al tiempo  $n$ . Entonces  $X_n, n \geq 0$ , es la cadena de ruina del jugador en  $S = 0, 1, 2, \dots, d$ .

#### EJEMPLO 4. CADENA DE NACIMIENTO Y MUERTE.

Considérese una cadena de Markov ya sea en  $S = 0, 1, 2, \dots, 0$  en  $S = 0, 1, \dots, d$  tal que comenzando en  $x$ , la cadena estará en  $x-1$  o en  $x+1$ , o permanecerá en  $x$ , después de un paso.

La función de transición de dicha cadena estará dada por:

$$P(x, y) = \begin{cases} q_x & \text{si } y=x-1 \\ r_x & \text{si } y=x \\ p_x & \text{si } y=x+1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde  $p, q, r$  son números no negativos tales que  $p+q+r=1$ . La cadena de Ehrenfest y las dos versiones de la ruina del jugador son casos de cadenas de nacimiento y muerte. La frase "nacimiento y muerte" proviene de la aplicación en la cual el estado de la cadena representa la población de algún sistema de vida. En estas aplicaciones la transición del estado  $x$  a  $x+1$  corresponde a un nacimiento, mientras que la transición de  $x$  a  $x-1$  corresponde a una muerte. (Véase la Figura 3.6)

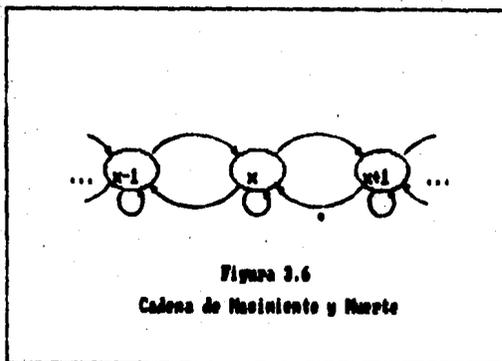


Figura 3.6  
Cadena de Nacimiento y Muerte

### EJEMPLO 5. CADENA DE COLAS.

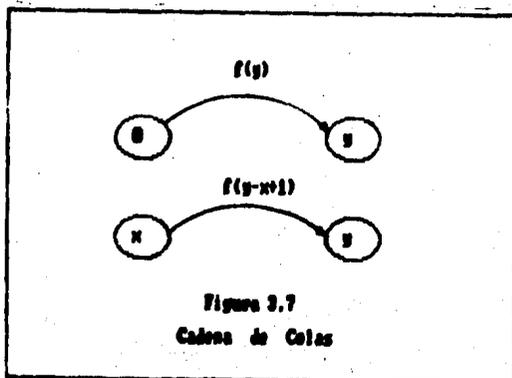
Considérese un servicio como una caja en un supermercado. La gente llega a la caja en diversos momentos y es eventualmente atendida. Aquellos clientes que desean ser atendidos pero aún no lo son, forman una cola o línea de espera. Hay una gran variedad de modelos que describen dichos sistemas, dentro de las lecturas recomendadas se encontrarán varios libros que tratan este tema en detalle, se sugiere revisar (H), *Introducción a la Teoría de Colas*. Se considerará aquí un sistema muy sencillo.

Puede medirse el tiempo en algún periodo conveniente, minutos, por ejemplo. Supóngase que si hay algunos clientes esperando al inicio de un periodo dado, exactamente un cliente será atendido durante ese periodo, y que si no hay clientes esperando, ninguno será atendido durante el periodo. Sea  $\xi_n$  el número de clientes nuevos que llegan durante el  $n$ -ésimo periodo. Supóngase que  $\xi_1, \xi_2, \dots$  son variables aleatorias independientes, enteras y no negativas con función de densidad común  $f$ .

Sea  $X_0$  el número de clientes presentes inicialmente; y, para  $n \geq 1$ , sea  $X_n$  el número de clientes presentes al final del  $n$ -ésimo periodo. Si  $X_n = 0$ , entonces  $X_{n+1} = \xi_{n+1}$ ; y si  $X_n \geq 1$ , entonces  $X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1} - 1$ . Se sigue de la suposición de  $\xi_n, n \geq 1$ , que  $X_n, n \geq 0$ , es una cadena de Markov cuyo espacio de estados son los enteros no negativos y cuya función de transición  $P$  está dada por:

$$P(x, y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } x=0 \\ f(y-x+1) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

(Véase Figura 3.7)

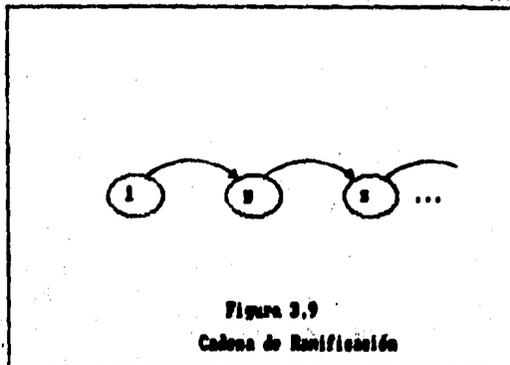
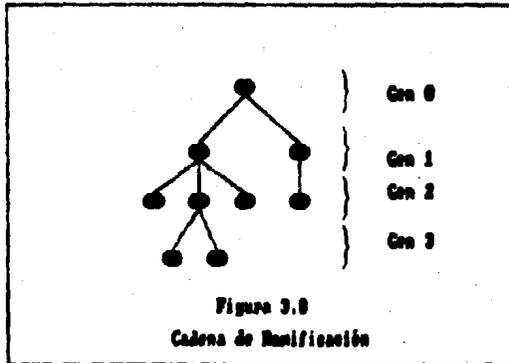


### EJEMPLO 6. CADENA DE RAMIFICACION.

Considèrense partículas tales como neutrones o bacterias, que puedan generar nuevas partículas del mismo tipo. El conjunto inicial de objetos pertenece a la generación cero. Las partículas generadas a partir de la  $n$ -ésima generación pertenecen a la generación  $n+1$ . Sea  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , el número de partículas en la  $n$ -ésima generación.

En un momento dado, pueden coexistir partículas de varias generaciones.

Una situación típica se ilustra en la Figura 3.8: una partícula inicial genera 2 partículas. Así,  $X_0=1$  y  $X_1=2$ . Una de las partículas en la primera generación crea 3 partículas, la otra crea una, i.e.,  $X_2=4$ . Obsérvese en la figura que  $X_3=2$ . Como ninguna de las partículas de la tercera generación crea nuevas partículas,  $X_4=0$ , y, consecuentemente,  $X_n=0$  para toda  $n \geq 4$ . En otras palabras, la descendencia de la partícula inicial en la generación cero se extinguirá después de tres generaciones.



Para ajustar este modelo a una cadena de Markov, supóngase que cada partícula genera  $\xi$  partículas en la siguiente generación, donde  $\xi$  es una variable aleatoria entera no negativa, con función de densidad  $f$ . Supóngase que el número de nacimientos de partículas en las generaciones se eligen independientemente de acuerdo a la densidad  $f$ .

Bajo estas suposiciones  $X_n, n \geq 0$ , forma una cadena de Markov cuyo espacio de estados son los enteros no negativos. El estado cero es un estado absorbente, dado que si no hay partículas en una generación dada, tampoco las habrá en la siguiente.

Para  $x \geq 1$ :

$$P(x, y) = P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_x = y)$$

donde  $\xi_1, \dots, \xi_x$  son variables aleatorias independientes con función de densidad común  $f$ . (Figura 3.9)

En particular,  $P(1, y) = f(y), y \geq 0$ , es la probabilidad de que la partícula original tenga  $y$  descendientes.

Si una partícula da origen a  $\xi = 0$  partículas, la interpretación es que la partícula muere o desaparece. Supóngase que una partícula da origen a  $x$  partículas, que a su vez originan otras; pero después de un cierto número de generaciones toda la descendencia de la partícula inicial ha muerto o desaparecido (Figura 3.8). Un evento de este tipo se describe diciendo que eventualmente, los descendientes de la partícula original se "extinguirán". Un problema interesante que involucra las cadenas de ramificación es el de calcular la probabilidad  $p$  de la extinción de una cadena de ramificación que se inicia con una sola partícula o, equivalentemente, la probabilidad de que una cadena de ramificación que se inicia en el estado 1 llegue a ser absorbida por el estado cero. Una vez determinada  $p$ , se puede encontrar fácilmente la probabilidad de que en una cadena de ramificación que se inicia con  $x$  partículas, los descendientes de cada una de ellas se extingan. En realidad, dado que se supone que las partículas actúan en forma independiente, la probabilidad deseada es  $p^x$ . (Véase Apéndice B, probabilidad de eventos independientes)

La cadena de ramificación se usó originalmente para determinar la probabilidad de que la descendencia masculina de una persona dada se extinguiera. Para este propósito solamente se incluyen los hijos varones en las generaciones.

#### EJEMPLO 7. DUPLICACION DE CELULAS.

Considérese un gene compuesto de  $d$  unidades, donde  $d$  es algún entero positivo, y cada unidad puede ser normal o mutante. Considérese también una célula con un gene compuesto de  $m$  unidades mutantes y  $d-m$  unidades normales.

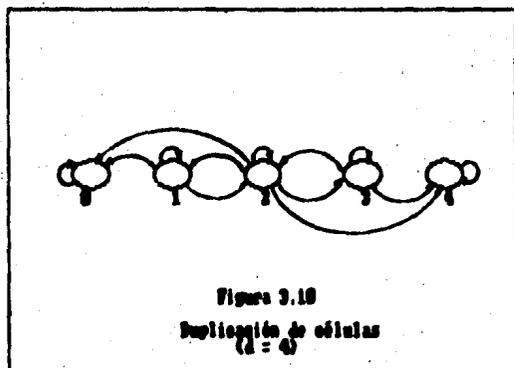
Antes de que la célula se divida en dos, el gene se duplica.

El gene correspondiente a una de las células hijas está compuesto de  $d$  unidades elegidas al azar de entre las  $2m$  unidades mutantes y las  $2(d-m)$  unidades normales. Supóngase que se sigue una línea fija de descendencia para un gene dado.

Sea  $X_0$  el número de unidades mutantes presentes inicialmente, y sea  $X_n$ ,  $n \geq 1$ , el número de mutantes presentes en el  $n$ -ésimo gene descendiente. Entonces  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , es una cadena de Markov en  $S = 0, 1, 2, \dots, d$  y

$$P(x, y) = \frac{\binom{2x}{y} \binom{2d-2x}{d-y}}{\binom{2d}{d}}$$

Es decir, una distribución hipergeométrica. (Véase Apéndice B). Los estados cero y  $d$  son estados absorbentes para esta cadena. (Véase Figura 3.10)



### 3.5 FUNCIÓN DE TRANSICIÓN EN $n$ PASOS

En muchas ocasiones, el interés en un sistema no se reduce a su comportamiento de un periodo de tiempo a otro, sino que también se desea saber cuál será el posible estado del sistema después de  $n$  periodos.

Sea  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , una cadena de Markov en  $S$ , con función de transición  $P$ . Si al tiempo  $n$ , la cadena se encuentra en el estado  $x$ , puede calcularse la probabilidad de que, dentro de  $n$  pasos, se encuentre en  $X_{n+m}$  como:

$$P(X_{n+1}=x_{n+1}, \dots, X_{n+m}=x_{n+m} / X_0=x_0, \dots, X_n=x_n) \\ = P(x_n, x_{n+1}) \dots P(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \quad \dots (3.16)$$

ya que

$$P(X_{n+1}=x_{n+1}, \dots, X_{n+m}=x_{n+m} / X_0=x_0, \dots, X_n=x_n) = \\ \frac{P(X_0=x_0, \dots, X_{n+m}=x_{n+m})}{P(X_0=x_0, \dots, X_n=x_n)}$$

Por (3.14), esta última razón es igual a:

$$\frac{\prod_0(x_0) P(x_0, x_1) \dots P(x_{n+m-1}, x_{n+m})}{\prod_0(x_0) P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n)} \\ = P(x_n, x_{n+1}) \dots P(x_{n+m-1}, x_{n+m})$$

Por lo tanto, (3.16) se cumple.

La ecuación (3.16) puede reescribirse como:

$$P(X_{n+1}=y_1, \dots, X_{n+m}=y_m / X_0=x_0, \dots, X_n=x_n) \\ = P(x, y_1) P(y_1, y_2) \dots P(y_{m-1}, y_m) \quad \dots (3.17)$$

Dado que se está manejando una cadena de Markov, no interesa saber cómo llega el sistema de  $x$  a  $y$  en  $m$  pasos, sino la probabilidad de que lo haga por cualquier camino posible. Sean entonces  $A_0, \dots, A_{n-1}$  subconjuntos de  $S$  que representan los posibles valores que pueden tomar  $x_0, \dots, x_{n-1}$ ; y sean  $B_1, \dots, B_m$  subconjuntos de  $S$  que representan los posibles valores de  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ . De donde pueden formularse las siguientes ecuaciones:

$$P(X_{n+1}=y_1, \dots, X_{n+m}=y_m / X_0 \in A_0, \dots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n=x) \\ = P(x, y_1) P(y_1, y_2) \dots P(y_{m-1}, y_m) \quad \dots (3.18)$$

$$P(X_{n+1} \in B_1, \dots, X_{n+m} \in B_m / X_0 \in A_0, \dots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n=x) \\ = \sum_{y_1 \in B_1} \dots \sum_{y_m \in B_m} P(x, y_1) P(y_1, y_2) \dots P(y_{m-1}, y_m) \quad \dots (3.19)$$

Entonces, la función de transición en  $m$  pasos  $P^m(x, y)$ , es decir, la probabilidad de pasar del estado  $x$  al  $y$  en  $m$  pasos, está definida por:

$$P^m(x, y) = \sum_{y_1} \dots \sum_{y_{m-1}} P(x, y_1) P(y_1, y_2) \dots P(y_{m-2}, y_{m-1}) P(y_{m-1}, y) \quad \dots (3.20)$$

Obsérvese que se toman en cuenta todos los posibles caminos para ir de  $x$  a  $y$  en  $m$  pasos.

Si  $m=0$ , la probabilidad de ir de  $x$  a  $y$  en 0 pasos se puede expresar como una delta de Kronecker:

$$P^0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=y \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si  $m=1$ , se tiene la función de transición de un paso  $P(x, y)$ .

Si  $m \geq 2$ , y además,  $B_1 = \dots = B_{m-1} = S$  y  $B_m = \{y\}$  en (3.19)

$$P(X_{n+m}=y / X_0 \in A_0, \dots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n=x) = P^m(x, y). \quad \dots(3.21)$$

En particular, haciendo  $A_0 = \dots = A_{n-1} = S$

$$P(X_{n+m}=y / X_n=x) = P^m(x, y) \quad \dots(3.22)$$

De (3.21) se obtiene

$$P(X_{n+m}=y / X_0=x, X_n=z) = P^m(z, y) \quad \dots(3.23)$$

Además,

$$\begin{aligned} P^{n+m}(x, y) &= P(X_{n+m}=y / X_0=x) \\ &= \sum_z P(X_n=z / X_0=x) P(X_{n+m}=y / X_0=x, X_n=z) \\ &= \sum_z P^n(x, z) P(X_{n+m}=y / X_0=x, X_n=z) \end{aligned}$$

De (3.23) se concluye que:

$$P^{n+m}(x, y) = \sum_z P^n(x, z) P^m(z, y) \quad \dots(3.24)$$

Esta última ecuación significa que, al pasar el sistema del estado  $x$  al estado  $y$  en  $n+m$  pasos, se encontrará en algún estado cualquiera  $z$ , al tiempo  $n$ , de donde llegará a  $y$  en  $m$  pasos. Estas ecuaciones se conocen como ECUACIONES DE CHAMPMAN-KOLMOGOROV.

Para cadenas de Markov con número de estados finito, se verá más adelante, desde el punto de vista algebraico, esta ecuación puede representarse en forma matricial, y  $P^n$  será la  $n$ -ésima potencia de la matriz de transición.

Sea  $J_0$  la distribución inicial de la cadena de Markov. Como:

$$\begin{aligned} P(X=y) &= \sum_x P(X_0=x, X_n=y) \\ &= \sum_x P(X_0=x) P(X_n=y / X_0=x) \end{aligned}$$

se observa que

$$P(X_n = y) = \sum_x P_0(x) P^n(x, y) \quad \dots(3.25)$$

Esta fórmula permite calcular la distribución de  $X_n$  en términos de la distribución inicial  $P_0$  y la función de transición en  $n$  pasos  $P^n$ .

Un método alternativo para calcular la distribución de  $X_n$ , puede encontrarse utilizando una ecuación de recurrencias:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = y) &= \sum_x P(X_n = x, X_{n+1} = y) \\ &= \sum_x P(X_n = x) P(X_{n+1} = y / X_n = x) \end{aligned}$$

entonces,

$$P(X_{n+1} = y) = \sum_x P(X_n = x) P(x, y) \quad \dots(3.26)$$

Si se conoce la distribución inicial de  $X_0$ , se puede utilizar (3.26) para calcular la distribución de  $X_1$ . Entonces, conociendo esta última, se replica (3.26) para encontrar la distribución de  $X_2$ . Similarmente puede hallarse la distribución de  $X_n$  aplicando (3.26)  $n$  veces.

Se utilizará la notación  $P_x(\cdot)$  para denotar las probabilidades de varios eventos definidos en términos de una cadena de Markov que se inicia en  $x$ . Así:

$$P_x(X_1 \neq a, X_2 \neq a, X_3 = a),$$

es la probabilidad de que una cadena de Markov que se inicia en  $x$  se encuentre en el estado  $a$  al tiempo 3, pero no en el 1 o en el 2. Con esta nueva notación, la ecuación (3.19) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} \in B_1, \dots, X_{n+m} \in B_m / X_0 \in A_0, \dots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = x) \\ = P_x(X_1 \in B_1, \dots, X_m \in B_m) \quad \dots(3.27) \end{aligned}$$

esto es, la probabilidad de que una cadena que se encuentra en  $x$ , se encuentre en algún estado de  $B_m$ , después de  $m$  pasos.

### 3.5.1 TIEMPOS DE ALCANCE

Sea  $A$  un subconjunto de  $S$ . El tiempo de alcance o tiempo de llegada  $T$  de  $A$  está definido como:

$$\begin{aligned} T_n &= \min \{ n > 0 : X_n \in A \}, \\ \text{y } T_0 &= \infty \quad (\text{infinito}), \text{ si } X_0 \notin A, \text{ para todo } n > 0. \end{aligned}$$

Es decir,  $T_A$  es el primer tiempo positivo en que la cadena de Markov llega a A. Los tiempos de alcance juegan un papel muy importante en la teoría de las cadenas de Markov. Se denotará el tiempo de alcance de un punto  $x \in S$  como  $T_A$ .

Una ecuación importante relacionada con los tiempos de alcance está dada por:

$$P^n(x, y) = \sum_{m=1}^n P_x(T_A = m) P^{n-m}(y, y), \quad n \geq 1 \quad \dots(3.28)$$

Esto expresa la probabilidad de que una cadena que se encuentra en  $x$ , se encuentre en  $y$  dentro de  $n$  pasos, como la probabilidad de que alcance  $y$  en  $m$  pasos por primera vez, y de ahí regrese a  $y$  en los restantes  $n-m$  pasos.

### EJEMPLO 1. TIEMPOS DE ALCANCE PARA ESTADOS ABSORBENTES.

Puede demostrarse que, si  $a$  es un estado absorbente, entonces  $P^n(x, a) = P_x(T_A \leq n)$ , para  $n \geq 1$ . Es decir, que la probabilidad de que una cadena que se encuentra en el estado  $x$  se encuentre en el estado absorbente  $a$ , después de  $n$  pasos, es igual a la probabilidad de que alcance  $a$  en algún tiempo menor o igual que  $n$ ; lo cual es intuitivamente cierto, ya que, una vez alcanzado el estado  $a$ , el sistema permanece ahí.

Si  $a$  es un estado absorbente, entonces  $P^{n-m}(a, a) = 1$ , para  $1 \leq n-m$ ; por lo tanto (3.28) implica que:

$$\begin{aligned} P^n(x, a) &= \sum_{m=1}^n P_x(T_A = m) P^{n-m}(a, a) \\ &= \sum_{m=1}^n P_x(T_A = m) \\ &= P_x(T_A \leq n). \end{aligned}$$

NOTA: Obsérvese que

$$P_x(T_A = 1) = P_x(X_1 = y) = P(x, y)$$

y que

$$P_x(T_A = 2) = \sum_{z \neq y} P_x(X_1 = z, X_2 = y) = \sum_{z \neq y} P(x, z) P(z, y)$$

Para valores de  $n$  más grandes, las probabilidades  $P_x(T_A = n)$  pueden encontrarse utilizando la fórmula:

$$P_x(T_A = n+1) = \sum_{z \neq y} P(x, z) P_x(T_A = n), \quad n \geq 1 \quad \dots(3.29)$$

Esta fórmula puede obtenerse de (3.27), pero puede analizarse directamente, ya que para ir de  $x$  a  $y$  por primera vez en el tiempo  $n+1$ , es necesario ir de  $x$  a algún estado  $z \neq y$  al primer paso, y luego ir de  $z$  a  $y$  por vez primera al final de  $n$  pasos adicionales.

### 3.5.2 MATRIZ DE TRANSICION

Supóngase ahora que el espacio de estados  $S$  es finito, es decir,  $S = 0, 1, 2, \dots, d$ . En este caso puede pensarse en  $P$  como la matriz de transición con  $d+1$  renglones y columnas, dada por:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 1 & \dots & d \\
 0 & P(0,0) & P(0,1) & \dots & P(0,d) \\
 1 & P(1,0) & P(1,1) & \dots & P(1,d) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 d & P(d,0) & P(d,1) & \dots & P(d,d)
 \end{array}
 \end{array}$$

Por ejemplo, la matriz de transición de probabilidades para el ejemplo de la ruina de un jugador (Ejemplo 3, Sección 3.5), con  $d=3$ , sería:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 0 & \left[ \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 q & 0 & p & 0 \\
 0 & q & 0 & p \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

**NOTA:** Obsérvese que la suma por renglones siempre es 1, ya que representa las todas las posibilidades a partir de un estado. Dado que es una matriz de probabilidades, todos los elementos serán no negativos. Una gran ventaja de la representación matricial, que se discutirá más adelante, es que indica con claridad las relaciones entre los estados, lo cual será muy útil al tratar con la teoría de gráficas.

Por otro lado, puede verse  $P^n$  como la matriz de transición en  $n$  pasos. La fórmula (3.24) con  $m=n=1$  se convierte en

$$P^{n+m}(x,y) = \sum_z P^n(x,z) P^m(z,y)$$

$$P^2(x,y) = \sum_z P(x,z) P(z,y)$$

Recordando la definición del producto de dos matrices, se observa que la matriz de transición de dos pasos  $P^2$  es el producto de la matriz  $P$  consigo misma. Generalizando con  $m=1$  en (3.24), se tiene que

$$P^{n+1}(x,y) = \sum_z P^n(x,z) P(z,y) \quad \dots(3.30)$$

Se sigue de (3.30) que la matriz de transición en  $n$  pasos  $P^n$ , es la  $n$ -ésima potencia de  $P$ .

Una distribución inicial  $\pi_0$  puede pensarse como el vector renglón de dimensión  $d+1$ , donde cada elemento representa la probabilidad inicial de la cadena de encontrarse en cada uno de los estados. Este vector cumple con las mismas propiedades de  $P$  es no negativo y la suma de sus elementos es 1.

Si  $\pi_n$  denota el vector renglón de dimensión  $(d+1)$ , que representa la distribución de probabilidades en el tiempo  $n$ :

$$\pi_n = (P(X_n=0), \dots, P(X_n=d))$$

De donde (3.25) y (3.26) pueden escribirse respectivamente como:

$$\pi_n = \pi_0 P^n \quad \dots(3.31)$$

$$\pi_{n+1} = \pi_n P \quad \dots(3.32)$$

La cadena de Markov de dos estados que se discutí en la sección 3.2 es uno de los ejemplos donde puede encontrarse fácilmente  $P^n$ .

#### EJEMPLO 2. CADENA DE MARKOV DE DOS ESTADOS.

Un profesor es conocido por sus cambios de carácter durante el día. Observándolo durante un largo periodo de tiempo, sus alumnos han llegado a las siguientes estadísticas: si está de mal humor durante cierta hora, la probabilidad de que continúe así durante la siguiente hora es  $q$ . Si está de buen humor durante dicha hora, la probabilidad de que continúe así en la siguiente hora es  $p$ . Asumiendo que estas probabilidades de cambio de estado de la mente del profesor son homogéneas en el tiempo, sus alumnos desearían obtener la siguiente información:

- i) Dado que el profesor ha comenzado el día con buen (o mal) humor, ¿cuál es la posibilidad de encontrarlo o no de buen humor al final del día?
- ii) Supóngase que el profesor comienza el día con mal (o buen) humor, ¿cuánto tiempo se espera que continúe sin cambiar?
- iii) Supóngase que el profesor se pone de mal humor en alguna hora del día, ¿cuánto tiempo le lleva, en promedio, volver al buen humor?

Para resolver estas cuestiones es necesario obtener la matriz de transición de  $n$  pasos  $P^n$ .

La matriz de transición de un paso esté dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

donde  $p+q > 0$ .

Para encontrar  $P^n(0,0) = P_0(X_n=0)$ , sea  $J_0(0)=1$  en (3.3), con lo que se obtiene:

$$P_0(X_n=0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left( J_0(0) - \frac{q}{p+q} \right)$$

entonces,

$$P^n(0,0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

Para encontrar  $P^n(0,1) = P_0(X_n=1)$ , sea  $J_0(1)=0$  en (3.4), con lo que se obtiene:

$$P^n(0,1) = \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

Similarmente puede concluirse que:

$$P^n(1,0) = \frac{q}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{q}{p+q}$$

y

$$P^n(1,1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{q}{p+q}$$

De lo cual se obtiene:

$$P^n = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q} \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$$

### 3.5.3 TIEMPOS DE RECURRENCIA

A menudo resulta conveniente hacer afirmaciones de probabilidad respecto al número de transiciones llevadas a cabo por el proceso al ir del estado  $x$  al estado  $y$  por primera vez. Este intervalo de tiempo se conoce como tiempo del primer paso o tiempo de alcance para ir del estado  $x$  al estado  $y$ . Cuando  $x=y$ , este tiempo del primer paso es simplemente el número de transiciones hasta que el proceso regresa al estado inicial  $x$ . En este caso el tiempo del primer paso se conoce como TIEMPO DE RECURRENCIA para el estado  $x$ .

En general, los tiempos del primer paso son variables aleatorias y, por lo tanto, tienen distribuciones de probabilidad asociadas a ellas. Estas distribuciones de probabilidad dependen de las probabilidades de transición del proceso. En particular,

se ha denotado por  $P_x(T_y=n)$ , la probabilidad de que el tiempo del primer paso del estado  $x$  al estado  $y$  sea igual a  $n$ .

Estas probabilidades satisfacen las siguientes relaciones de recurrencias:

$$P_x(T_y=1) = P^1(x,y) = P(x,y)$$

$$P_x(T_y=2) = P^2(x,y) - P_x(T_y=1)$$

⋮

$$P_x(T_y=n) = P^n(x,y) - P_x(T_y=1)P^{n-1}(y,y) - P_x(T_y=2)P^{n-2}(y,y) - \dots \\ \dots - P_x(T_y=n-1)P(y,y) \quad \dots(3.33)$$

Por lo tanto, puede calcularse la probabilidad de un tiempo del primer paso del estado  $x$  al estado  $y$ , en  $n$  pasos, de manera recurrente a partir de la probabilidad de transición de un paso.

Para  $x, y$  fijos, las  $P_x(T_y=n)$  son números no negativos tales que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y=n) \leq 1$$

Esta suma puede ser estrictamente menor que 1, lo cual implicaría que un proceso que está inicialmente en el estado  $x$ , es posible que nunca llegue al estado  $y$ . Cuando la suma es igual a 1, puede considerarse  $P_x(T_y=n)$ ,  $n=1,2,\dots$ , como una distribución de probabilidades para la variable aleatoria, el tiempo del primer paso.

Aquí pueden presentarse básicamente dos casos:

i) Si  $x=y$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y=n) = 1$

entonces el estado  $x$  se conoce como ESTADO RECURRENTE, porque una vez que el proceso se encuentre en el estado  $x$ , regresará al estado  $x$ . Un caso especial de un estado recurrente, es un ESTADO ABSORBENTE. Se dice que  $x$  es un estado absorbente si la probabilidad de transición (en un paso)  $P(x,x)$  es igual a 1. Por tanto, si un estado es absorbente, el proceso nunca lo dejará una vez que entra a él.

ii) Si  $\sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y=n) < 1$

entonces el estado  $x$  se conoce como ESTADO TRANSITORIO, porque esto implica que una vez que el proceso se encuentra en el estado  $x$ , existe una probabilidad estrictamente positiva de que nunca regrese a él.

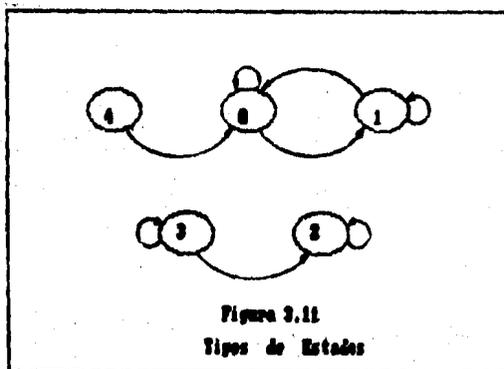
En general, no es posible calcular las probabilidades del tiempo del primer paso para todo  $n$ , de modo que no siempre resulta evidente si un estado puede clasificarse como recurrente o transitorio (el estado absorbente sí es muy fácil de identificar). Por esta razón, se analizará más adelante el criterio de teoría de gráficas, que proporciona herramientas útiles para esta clasificación.

**EJEMPLO 1. CLASIFICACION DE ESTADOS.**

Supóngase que un proceso de Markov tiene la matriz de transición siguientes:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccccc} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

La gráfica correspondiente a la matriz de transición se muestra en la Figura 3.11.



**Figura 3.11**  
**Tipos de Estados**

De la gráfica o en la matriz de transición, se observa que el estado 2 es un estado absorbente (y, por lo tanto, recurrente), porque una vez que el proceso entra en él, nunca lo dejará.

Los estados 3 y 4 son transitorios, ya que no tienen precedentes, es decir, existe una probabilidad positiva de que, una vez que el proceso se encuentra en alguno de ellos, nunca regrese. Nótese que, en este caso, el estado inicial del proceso influye fuertemente en el comportamiento futuro, ya que, si el proceso se inicia en el estado 4, por ejemplo, nunca se encontrará en los estados 2 y 3, ya que no hay posibilidad de pasar a ellos.

La probabilidad de que el proceso vaya del estado 3 al estado 2, en el primer paso es  $1/3$ , una vez que el proceso se encuentra en el estado 2, permanece en él. De la misma forma, una vez que el proceso sale del estado 3, nunca puede regresar.

Los estados 0 y 1 son recurrentes. Como ya se indicó, para demostrar que los estados 0 y 1 son recurrentes es necesario probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_0(T_0=n) = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_1(T_1=n) = 1.$$

Por lo general, esto es difícil y resulta conveniente una prueba alternativa. Una condición necesaria y suficiente para que el estado  $x$  sea recurrente es que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,x)$$

diverja. Como este criterio también es difícil de aplicar, puede tomarse en cuenta lo siguiente.

Obsérvese que la matriz de transición en  $n$  pasos del ejemplo anterior tiene la apariencia:

$$P^n = \begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 \\ + & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 \\ + & + & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde los signos "+" representan probabilidades positivas de pasar de un estado a otro en  $n$  pasos.

NOTA: Esta matriz puede obtenerse de una forma sencilla: sustituyase cada uno de los valores positivos de la matriz de transición de un paso  $P$ , por el valor 1; entonces  $P^n$  puede obtenerse como las potencias booleanas sucesivas de  $P$ .

De la matriz anterior es intuitivamente obvio que, una vez que el proceso se encuentra en el estado 0, regresará al estado 0 (pasando posiblemente por el estado 1), después de un cierto

número de pasos finito. Se cumple un argumento semejante para el estado 1. En cambio, en el caso del estado 4, una vez que el proceso se encuentra en él, no regresará jamás.

Mientras que puede resultar difícil calcular  $P_x(T_y=n)$  para toda  $n$ , es relativamente sencillo obtener el tiempo esperado del primer paso del estado  $x$  al estado  $y$ . Denótese esta esperanza por  $\mu_{xy}$ , la cual se define como:

$$\mu_{xy} = \begin{cases} \infty & , \quad \text{si } \sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y=n) < 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n P_x(T_y=n) & , \quad \text{si } \sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y=n) = 1 \end{cases}$$

Es decir, el tiempo esperado del primer paso de  $x$  a  $y$ , será infinito si existe la posibilidad de que una vez que el proceso se encuentra en el estado  $x$ , nunca llegue a  $y$ . De otra forma, se tiene la ecuación de la esperanza de un evento (véase la definición de ESPERANZA MATEMÁTICA en el Apéndice B).

Siempre que 
$$\sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y=n) = 1$$

entonces el tiempo esperado del primer paso  $\mu_{xy}$ , satisface de modo único la ecuación:

$$\mu_{xy} = 1 + \sum_{k \neq y} P(x,k) \mu_{ky}$$

Cuando  $x=y$ , el tiempo esperado del primer paso se llama TIEMPO ESPERADO DE RECURRENCIA. El resultado recurrente recibe el nombre de ESTADO RECURRENTE NULO, si  $\mu_{xx} = \infty$ ; y se llama estado RECURRENTE POSITIVO si  $\mu_{xx} < \infty$ . En una cadena de Markov de estados finitos, no se tienen estados recurrentes nulos, únicamente se tienen estados recurrentes positivos y estados transitorios.

### 3.6 ESTADOS TRANSITORIOS Y RECURRENTE.

Sea  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , una cadena de Markov con espacio de estados  $S$  y función de transición  $P$ . Sea

$$P_{xy} = P_x(T_y < \infty)$$

Entonces  $P_{xy}$  denota la probabilidad de que una cadena de Markov con inicio en  $x$  se encuentre en el estado  $y$  en un tiempo positivo. En particular,  $P_{yy}$  denota la probabilidad de que una cadena de Markov que se inicia en  $y$ , regrese eventualmente a  $y$ . Un estado  $y$  se llama RECURRENTE, si  $P_{yy} = 1$ , y TRANSITORIO si  $P_{yy} < 1$ . Si  $y$  es un estado recurrente, una cadena de Markov que se inicia en  $y$ , regresará eventualmente a  $y$  con probabilidad 1. Si  $y$  es un estado de transición, la cadena de Markov que se inicia en  $y$ , tiene probabilidad positiva  $1 - P_{yy}$ , de no regresar a  $y$ . Si  $y$  es un estado absorbente, entonces  $P_y(T_y=1) = P(y,y) = 1$ , y, por

lo tanto,  $P_{yy} = 1$ ; por lo que un estado absorbente es necesariamente recurrente (el inverso no se cumple).

Sea  $I_y(z)$ ,  $z \in S$ , la FUNCIÓN INDICADORA del conjunto  $\{y\}$ , definida como una delta de Kronecker:

$$I_y(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z=y \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sea  $N(y)$  el número de veces  $n \geq 1$ , en que la cadena se encuentra en el estado  $y$ . Como  $I_y(X_n) = 1$  si la cadena está en el estado  $y$  al tiempo  $n$ , y  $I_y(X_n) = 0$  en otro caso, se observa que:

$$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} I_y(X_n) \quad \dots (3.34)$$

El evento  $\{N(y) \geq 1\}$  es el mismo que el evento  $\{T_y < \infty\}$ . Así,

$$P_x(N(y) \geq 1) = P_x(T_y < \infty) = P_{xy}$$

Sean  $m$  y  $n$  enteros positivos. Por (3.27), la probabilidad de que una cadena de Markov con inicio en  $x$  visite por primera vez  $y$  al tiempo  $m$ , y su siguiente visita a  $y$  sea  $n$  unidades de tiempo más tarde, es

$$P_x(T_y = m) P_y(T_y = n).$$

Así,

$$\begin{aligned} P_x(N(y) \geq 2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y = m) P_y(T_y = n) \\ &= \left( \sum_{m=1}^{\infty} P_x(T_y = m) \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} P_y(T_y = n) \right) \\ &= P_{xy} P_{yy}. \end{aligned}$$

Es decir, la probabilidad de que una cadena que se encuentra en  $x$ , visite  $y$  2 ó más veces, es igual a la probabilidad de que una cadena que empieza en  $x$  visite  $y$  en un tiempo finito, por la probabilidad de que una cadena que se encuentra en  $y$  regrese a  $y$  en un tiempo finito.

Similarmente, puede concluirse que

$$P_x(N(y) \geq m) = P_{xy} P_{yy}^{m-1}, \quad m \geq 1. \quad \dots (3.35)$$

Es decir, la probabilidad de que una cadena que se inicia en  $x$  visite  $m$  ó más veces el estado  $y$ , es igual a la probabilidad de que una cadena con inicio en  $x$  alcance  $y$  en un tiempo finito, y después lo alcance al menos  $(m-1)$  veces.

Como

$$P_x(N(y) = m) = P_x(N(y) \geq m) - P_x(N(y) \geq m+1),$$

(la probabilidad de que una cadena que empieza en  $x$  visite  $y$  exactamente  $m$  veces, es la probabilidad de que una cadena que empieza en  $x$  visite  $y$   $m$  o más veces, menos la probabilidad de que visite  $y$   $(m+1)$  o más veces), se sigue de (3.35) que

$$P_x(N(y)=m) = P_{xy} P_{yy}^{m-1} (1 - P_{yy}), \quad m \geq 1 \quad \dots(3.36)$$

(la probabilidad de que una cadena que empieza en  $x$ , alcance  $y$ , regrese a  $y$   $(m-1)$  veces, y no vuelva a regresar a  $y$ .)

También

$$P_x(N(y)=0) = 1 - P_x(N(y) \geq 1),$$

por lo que

$$P_x(N(y)=0) = 1 - P_{xy}. \quad \dots(3.37)$$

Es decir, la probabilidad de que una cadena que se inicia en  $x$ , nunca visite  $y$ .

Estas fórmulas son obvias en forma intuitiva. Para verificar (3.36), por ejemplo, obsérvese que una cadena con inicio en  $x$  visita el estado  $y$  exactamente  $m$  veces si y solo si visita  $y$  por una primera vez, regresa a  $y$   $m-1$  veces adicionales, y no vuelve a regresar a  $y$ .

Se usará la notación  $E_x(\cdot)$  para denotar el VALOR ESPERADO de variables aleatorias definidas en términos de una cadena de Markov, con inicio en  $x$ . Por ejemplo,

$$\begin{aligned} E_x(I_y(X_n)) &= 1 \cdot P_x(X_n=y) + 0 \cdot P_x(X_n \neq y) \\ &= P^n(x, y) \end{aligned} \quad \dots(3.38)$$

Se sigue de (3.34) y (3.38) que

$$\begin{aligned} E_x(N(y)) &= E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_y(X_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_x(I_y(X_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y) \end{aligned}$$

Esto es, el valor esperado del número de veces que la cadena que comienza en  $x$  se encuentra en el estado  $y$ .

Sea

$$G(x, y) = E_x(N(y)) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y)$$

Entonces,  $G(x, y)$  denota el número esperado de visitas a  $y$  por una cadena de Markov que se inicia en  $x$ .

TEOREMA 1.

i) Sea  $y$  un estado TRANSITORIO. Entonces,

$$P_x(N(y) < \infty) = 1$$

(la cadena con inicio en  $x$  sólo hará un número finito de visitas a  $y$ ) y

$$G(x, y) = \frac{P_{xy}}{1 - P_{yy}}, \quad x \in S \quad \dots(3.39)$$

la cual es finita para toda  $x \in S$ .

ii) Sea  $y$  un estado RECURRENTE. Entonces,

$$P_y(N(y) = \infty) = 1 \quad y$$

$$G(y, y) = \infty$$

También

$$P_x(N(y) = \infty) = P_x(T_y = \infty) = P_{xy}, \quad x \in S \quad \dots(3.40)$$

Si  $P_{xy} = 0$ , entonces  $G(x, y) = 0$ , mientras que si  $P_{xy} > 0$  entonces  $G(x, y) = \infty$ .

Este teorema describe la diferencia fundamental entre un estado TRANSITORIO y un estado RECURRENTE. Si  $y$  es un estado transitorio, entonces, sin importar donde comience la cadena de Markov, hará sólo un número finito de visitas a  $y$ , y el número esperado de visitas a  $y$  es finito. Supóngase ahora que  $y$  es un estado recurrente. Entonces, si la cadena de Markov se inicia en otro estado  $x$ , puede ser imposible que llegue a  $y$ . Sin embargo, si es posible y la cadena visita a  $y$  al menos una vez, entonces lo hará infinitamente seguido. Esto puede observarse de nuevo en la Figura 3.11.

PRUEBA

Sea  $y$  un estado transitorio. Como  $0 \leq P_{yy} < 1$ , se sigue de (3.35) que

$$\begin{aligned} P_x(N(y) = \infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_x(N(y) \geq n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_{xy} P_{yy}^{n-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por (3.36):

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= E_x(N(y)) \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} m P_x(N(y)=m) \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} m P_{xy} P_{yy}^{m-1} (1 - P_{yy}).
 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $t = P_{yy}$  en la serie de potencias

$$\sum_{m=1}^{\infty} m t^{m-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

se concluye que

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= P_{xy} (1 - P_{yy}) \frac{1}{(1 - P_{yy})^2} \\
 &= \frac{P_{xy}}{1 - P_{yy}} < \infty
 \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba de (i).

Ahora, sea  $y$  un estado RECURRENTE. Entonces  $P_{yy}^n = 1$ , y se sigue de (3.35) que

$$\begin{aligned}
 P_x(N(y)=\infty) &= \lim_{m \rightarrow \infty} P_x(N(y) > m) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} P_{xy}^m = P_{xy}
 \end{aligned}$$

En particular,  $P_y(N(y)=\infty) = 1$ . Si una variable aleatoria no negativa tiene probabilidad positiva de ser infinita, su valor esperado es infinito, así

$$G(y, y) = E_y(N(y)) = \infty.$$

Si  $P_{xy} = 0$ , entonces  $P_x(T_y = n) = 0$ , para todo entero  $n$  positivo e infinito, entonces (3.28) implica que

$$P^n(x, y) = 0, \quad n \geq 1;$$

así  $G(x, y) = 0$

en este caso. Si  $P_{xy} > 0$ , entonces

$$P_x(N(y)=\infty) = P_{xy} > 0$$

y, por lo tanto,

$$G(x, y) = E_x(N(y)) = \infty.$$

Sea  $y$  un estado TRANSITORIO. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y) = B(x, y) < \infty, \quad x \in S,$$

se observa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = 0, \quad x \in S. \quad \dots(3.41)$$

Una cadena de Markov se llama CADENA TRANSITORIA, si todos sus estados son transitorios, y CADENA RECURRENTE, si todos sus estados son recurrentes. Es fácil ver que una cadena de Markov con espacio de estados finito, debe tener al menos un estado recurrente, y por lo tanto, no puede ser una cadena de transición. Ya que si  $S$  es finito y todos los estados fueran de transición, entonces, por (3.41)

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{y \in S} \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in S} P^n(x, y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, S) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

### 3.7 ANALISIS DEL ESPACIO DE ESTADOS

Sean  $x$ ,  $y$  dos estados no necesariamente distintos. Se dice que " $x$  LLEVA A  $y$ " si  $R_{xy} > 0$ . Es decir,  $x$  LLEVA A  $y$  si es posible que una cadena que se encuentra en  $x$ , se encuentre en  $y$  después de un tiempo menor que infinito. Esto se observa gráficamente si es posible, por algún camino, llegar de  $x$  a  $y$ . Por ejemplo, en la Figura 3.11, el estado 4 LLEVA al estado 1.

Se dice que dos estados  $(x, y)$  se COMUNICAN si  $x$  LLEVA a  $y$ , y además,  $y$  LLEVA a  $x$ . Esta relación tiene las siguientes propiedades:

- a) Reflexividad:  $x$  se COMUNICA consigo mismo.
- b) Simetría: si  $x$  COMUNICA con  $y$ , entonces  $y$  COMUNICA con  $x$ .
- c) Transitividad: si  $x$  COMUNICA con  $y$ , y  $y$  COMUNICA con  $z$ , entonces  $x$  COMUNICA con  $z$ .

#### TEOREMA 1.

Sea  $x$  un estado RECURRENTE, y supóngase que  $x$  LLEVA a  $y$ . Entonces  $y$  es RECURRENTE y  $R_{yx} = P_{yx} = 1$ . Es decir, si  $x$  es recurrente, y  $x$  lleva a  $y$ , entonces  $x$ , y están COMUNICADOS.

#### PRUEBA:

Asumiendo que  $y$  distinto de  $x$ , ya que de otra forma se tendría la propiedad (a),

Como

$$P_x(T_y < \infty) = P_{xy} > 0$$

se observa que  $P_x(T_y = n) > 0$ , para algún entero positivo  $n$ . Sea  $n_0$  dicho entero positivo, i.e.:

$$n_0 = \min \{n \geq 1 : P_x(T_y = n) > 0\}. \quad \dots(3.42)$$

Se sigue de (3.42) y (3.29) que  $P^{n_0}(x, y) > 0$  y

$$P^m(x, y) = 0, \quad 1 \leq m < n_0. \quad \dots(3.43)$$

Es decir, la cadena no puede pasar de  $x$  a  $y$  en menos de  $n_0$  pasos.

Como  $P^{n_0}(x, y) > 0$ , pueden hallarse estados  $y_1, y_2, \dots, y_{n_0-1}$ , tales que:

$$P_x(X_1 = y_1, \dots, X_{n_0-1} = y_{n_0-1}, X_{n_0} = y) = P(x, y) \dots P(y_{n_0-1}, y) > 0$$

Ninguno de los estados  $y_1, \dots, y_{n_0-1}$  es igual a  $x$  o a  $y$ ; ya que si esto sucediera, sería posible ir de  $x$  a  $y$  con probabilidad positiva en menos de  $n_0$  pasos, en contradicción con (3.43).

Ahora se demostrará que  $P_y = 1$ . Supongáse lo contrario,  $P_y < 1$ . Entonces, una cadena de Markov con inicio en  $y$  tiene probabilidad positiva  $1 - P_y$  de no alcanzar  $x$ . Aún más, una cadena de Markov con inicio en  $x$  tiene la probabilidad positiva:

$$P(x, y_1) \dots P(y_{n_0-1}, y) (1 - P_y)$$

de visitar los estados  $y_1, \dots, y_{n_0-1}$  y sucesivamente en las primeras  $n_0$  veces y nunca regresar a  $x$  después del tiempo  $n_0$ . Pero, si esto sucede, la cadena de Markov nunca regresa a  $x$  en algún tiempo  $n \geq 1$ , por lo que se contradice la suposición de que  $x$  es un estado recurrente.

Como  $P_y = 1$ , hay un entero positivo  $n_1$  tal que  $P^{n_1}(y, x) > 0$ . Ahora, como

$$\begin{aligned} P^{n_1 + n_0}(y, y) &= P_y(X_{n_1 + n_0} = y) \geq P_y(X_{n_1} = x, X_{n_1 + n_0} = x, X_{n_1 + n_0} = y) \\ &= P^{n_1}(y, x) P^{n_0}(x, x) P^{n_0}(x, y). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} G(y, y) &\geq \sum_{n=n_1+n_0}^{\infty} P^n(y, y) = \sum_{n=1}^{\infty} P^{n_1+n_0+n}(y, y) \geq P^{n_1}(y, x) P^{n_0}(x, x) \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, x) \\ &= P(y, x) P(x, y) G(x, x) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

de donde se tiene que  $y$  es también un estado recurrente. Como  $x$  es recurrente y " $y$  lleva a  $x$ ", se observa que  $P_{yx}^n = 1$ . Esto completa la prueba.

**DEFINICION:**

Un conjunto de estados  $C$  no vacío, es CERRADO si no existe un estado en  $C$  que lleve a otro estado fuera de  $C$ , i.e.,

$$P_{xy} = 0 \quad , \quad x \in C, \quad y \notin C. \quad \dots(3.44)$$

Equivalentemente,  $C$  es cerrado si y sólo si:

$$P^n(x,y) = 0, \quad x \in C, \quad y \notin C, \quad n \geq 1 \quad \dots(3.45)$$

En realidad, aun de la condicion más débil de que

$$P(x,y) = 0 \quad \text{con } x \in C \text{ y } y \notin C \quad \dots(3.46)$$

puede probarse que  $C$  es cerrado.

Si se cumple (3.46), entonces para  $x \in C$  y  $y \notin C$

$$\begin{aligned} P^2(x,y) &= \sum_{z \in S} P(x,z) P(z,y) \\ &= \sum_{z \in S} P(x,z) P(z,y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de modo que (3.45) puede probarse por inducción.

Si  $C$  es cerrado, entonces una cadena de Markov que comienza en  $C$ , permanecerá en  $C$  con probabilidad 1. En la Figura 3.11 puede observarse que los estados 0 y 1 forman un conjunto cerrado. Una vez que la cadena se encuentra en alguno de ellos permanecerá en el conjunto  $\{0,1\}$ .

Si  $a$  es un estado absorbente entonces  $\{a\}$  es un conjunto cerrado, ya que el sistema permanecerá siempre en  $a$ .

**DEFINICION**

Un conjunto cerrado  $C$  se llama IRREDUCIBLE si " $x$  lleva a  $y$ " para todas las opciones de  $x, y \in C$ . Se sigue del Teorema 1 que si  $C$  es un conjunto cerrado irreducible, entonces, o todos los estados en  $C$  son transitorios o todos son recurrentes. En la Figura 3.11 se observa que  $\{0,1\}$  forman un conjunto cerrado irreducible. Nótese que en un conjunto irreducible existe siempre un camino que comunica dos estados cualesquiera del conjunto, aunque no necesariamente en un paso.

## COROLARIO

Sea  $C$  un conjunto cerrado irreducible de estados recurrentes. Entonces

$$P_{xy} = 1$$
$$P_x(N(y) = \infty) = 1$$
$$G(x, y) = \infty$$

para todas las opciones de  $x, y \in C$ .

Una cadena de Markov irreducible (también llamada regular), es una cadena cuyo espacio de estados es irreducible, es decir, una cadena en la cual de cada estado se puede pasar a cualquier otro, en uno o más pasos, (véase más adelante, en teoría de gráficas, el concepto equivalente de gráfica fuertemente conexa). Tal cadena de Markov necesariamente es una cadena transitoria o una cadena recurrente.

El Corolario anterior implica, en particular, que una cadena recurrente irreducible visita cada estado un número infinito de veces con probabilidad 1.

Como se mencionó en la sección 3.6, si  $S$  es finita contiene al menos un estado recurrente; de modo que, cualquier conjunto cerrado finito de estados contiene al menos un estado recurrente. Sea ahora  $C$  un conjunto cerrado irreducible finito. Como todos sus estados deben ser transitorios o todos recurrentes, y  $C$  tiene al menos un estado recurrente, se tiene entonces que cada estado en  $C$  es recurrente. Es decir, en un conjunto cerrado irreducible finito, todos los estados serán recurrentes. De aquí se obtiene el siguiente

### TEOREMA 2

Sea  $C$  un conjunto cerrado irreducible finito, entonces cada estado en  $C$  es recurrente.

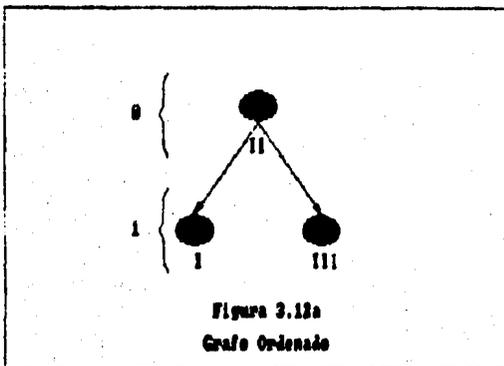
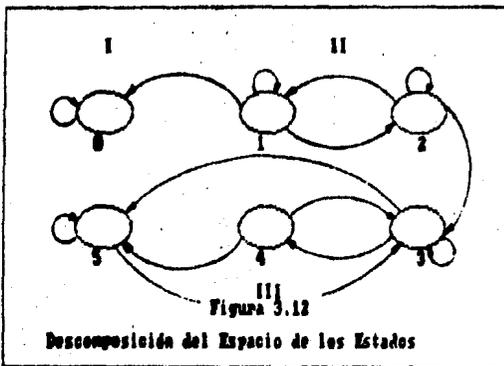
Considérese una cadena de Markov que tiene número finito de estados. El Teorema 2 implica que si la cadena es irreducible, debe ser recurrente. Si la cadena no es irreducible, puede dividirse en subconjuntos que si sean irreducibles, y utilizar los teoremas anteriores para determinar cuáles estados son recurrentes y cuáles transitorios.

### EJEMPLO 1.

Considérese la cadena de Markov con matriz de transición:

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1/4	1/2	1/4	0	0	0
2	0	1/5	2/5	1/5	0	1/5
3	0	0	0	1/6	1/3	1/2
4	0	0	0	1/2	0	1/2
5	0	0	0	1/4	0	3/4

cuya gráfica correspondiente se aprecia en la Figura 3.12.



Como primer paso para determinar cuáles estados son transitorios y cuáles son recurrentes, debe analizarse cuáles estados "llevan" a cuáles otros. Esto se indica en la matriz, de la forma ya mencionada en la sección 3.5.3.

	0	1	2	3	4	5
0	+	0	0	0	0	0
1	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+
3	0	0	0	+	+	+
4	0	0	0	+	+	+
5	0	0	0	+	+	+

Como se dijo, esta matriz puede obtenerse con potencias booleanas de la matriz de transición de un paso, o directamente (lo más sencillo), de la gráfica.

El elemento  $(x,y)$  de esta matriz es "+" o "0", dependiendo de si  $P_{xy}$  es positiva o cero, i.e., si  $x$  lleva o no a  $y$ . Por supuesto, si  $P(x,y) > 0$ , entonces  $P_{xy} > 0$ . (El inverso no siempre se cumple, ya que se puede llegar de  $x$  a  $y$  en más de un paso.)

Por ejemplo,

$$P(2,0) = 0 \quad \text{pero}$$

$$P^2(2,0) = P(2,1)P(1,0) = 1/20 > 0$$

Por lo tanto,  $P_{20} > 0$ .

El estado 0 es un estado absorbente y, por tanto, también es recurrente. Se ve claramente de la matriz (o de la gráfica), que  $\{3,4,5\}$  es un conjunto cerrado irreducible. El Teorema 2 implica que 3,4,5 son estados recurrentes. Los estados 1 y 2 llevan a cero, pero no pueden ser alcanzados desde cero. Del Teorema 1 se tiene que 1,2 deben ser transitorios. En suma, 1 y 2 son transitorios y 0,3,4,5 son recurrentes.

Sea  $S_T$  una colección de estados transitorios en  $S$ , y sea  $S_R$  una colección de estados recurrentes en  $S$ . En el ejemplo anterior,  $S_T = \{1,2\}$  y  $S_R = \{0,3,4,5\}$ . El conjunto  $S_R$  puede descomponerse en los siguientes conjuntos (disjuntos) cerrados irreducibles (o clases):  $C_1 = \{0\}$  y  $C_2 = \{3,4,5\}$ . El siguiente teorema muestra que tal descomposición es siempre posible cuando  $S$  es no vacío.

### TEOREMA 3

Supóngase que el conjunto  $S_R$  de estados recurrentes es no vacío, entonces  $S_R$  es la unión de un número finito o infinito numerable de conjuntos cerrados irreducibles disjuntos  $C_1, C_2, \dots$

Prueba:

Elijase  $x \in S$  y sea  $C$  el conjunto de todos los estados  $y$  en  $S$  tales que " $x$  lleva a  $y$ ". Como  $x$  es recurrente,  $P_{xx} = 1$  y, por tanto,  $x \in C$ . Se verificará ahora que  $C$  es un conjunto cerrado irreducible.

Supóngase que  $y \in C$  y " $y$  lleva a  $z$ ". Como  $y$  es recurrente, del Teorema 1 se tiene que  $x$  lleva a  $z$ . Entonces  $z \in C$ , esto muestra que  $C$  es cerrado.

Supóngase que  $y, z \in C$ , como  $x$  es recurrente y " $x$  lleva a  $y$ ", se sigue del Teorema 1 que  $y$  lleva a  $x$  y como " $y$  lleva a  $x$ " y " $x$  lleva a  $z$ ", se concluye que " $y$  lleva a  $z$ ". Esto muestra que  $C$  es irreducible.

Para completar la prueba del teorema se necesita mostrar que si  $C$  y  $D$  son dos subconjuntos cerrados irreducibles de  $S$ , o son disjuntos o son idénticos.

Supóngase que no son disjuntos y sea  $x \in C \cap D$ . Elijase  $y \in C$  y entonces  $x$  lleva a  $y$ . Como  $x \in C$  y  $C$  es irreducible, y como  $D$  es cerrado,  $x \in D$  y " $x$  lleva a  $y$ ", se concluye que  $y \in D$ . Entonces cada estado en  $C$  está también en  $D$ . De manera similar, cada estado en  $D$  está en  $C$ , y por lo tanto son idénticos.

Puede usarse esta descomposición del espacio de estados de una cadena de Markov para entender el comportamiento de un sistema tal. Si una cadena de Markov se inicia en uno de los conjuntos cerrados irreducibles  $C$  de estados recurrentes, permanecerá en  $C$  para siempre y, con probabilidad 1 visitará cada estado en  $C$  infinito número de veces. Si la cadena empieza en el conjunto de estados transitorios  $S$ , ya sea que se quede en  $S$  para siempre (si el conjunto de estados es infinito), o, en algún momento, entrará en alguno de los estados  $C$  para permanecer ahí, visitando infinito número de veces estos estados.

### 3.8 APLICACION DE LA TEORIA DE GRAFOS

Esta nueva herramienta permitirá hacer un análisis del espacio de estados de una cadena de Markov (con espacio de estados finito), de forma sencilla y objetiva.

Considérese una cadena de Markov con un conjunto de estados de número finito  $r$ , entre los que se efectúan transiciones. A cada una de las  $r$  transiciones efectuables corresponde una probabilidad, que es un número positivo o nulo, de donde se deduce una primera observación: hay transiciones "posibles" (probabilidad positiva), e "imposibles" (probabilidad nula).

En este punto es necesario visualizar el conjunto  $S$  de los estados, así como las transiciones posibles entre ellos.

Puede hacerse un dibujo sumario donde los puntos numerados representan los estados, y donde las flechas entre los estados representaran las transiciones posibles. A esto se le llama **GRAFICA DIRIGIDA**, generalmente abreviado como **DIGRAFICA** o **DIGRAFO**. Si se quiere perfeccionar esta representacion puede inscribirse junto a cada flecha un número positivo inferior o igual a 1: la probabilidad de la transición representada por la flecha. Si no hay flecha, la probabilidad de transición es cero. Completando con estos datos numéricos, el dibujo contiene tanta información como la matriz estocástica asociada a la cadena de Markov.

Paradójicamente, lo que se hizo para dar al problema un soporte concreto y visualizable, servirá para una abstracción muy rigurosa.

En efecto, se ha reducido lo esencial del problema a un dibujo formado por puntos y flechas que unen a ciertos pares de puntos. Un dibujo de este tipo se llama el **DIGRAFO** o la **DIGRAFICA** de las transiciones posibles.

Por otra parte, el ente matemático "grafo", que se encuentra en varios y múltiples campos, es objeto de un estudio sistemático llamado **Teoría de Gráficas**. A continuación se expondrán ciertas nociones y algunos resultados de esta teoría que serán indispensables, y se hará su equivalencia con los conceptos mencionados en las secciones anteriores. Si se desea conocer un estudio más detallado de la **Teoría de Gráficas**, refiérase a (N).

### **3.0.1 DEFINICIONES**

El dibujo del que se habló arriba no es, de hecho, más que una red, imagen concreta del grafo, ente matemático abstracto.

#### **DEFINICION**

Se llama **GRAFO** al par formado por un conjunto  $S$  y una aplicación multiforme  $\Gamma$  de  $S$  en sí mismo (o relación binaria). Se llama a este grafo  $G = (S, \Gamma)$ .

**NOTA:** Únicamente se considerarán los grafos finitos, es decir, grafos tales que la cardinalidad de  $S$  sea finita.

La aplicación  $\Gamma$  hace corresponder a todo elemento  $s$  de  $S$  un conjunto  $\Gamma(s)$  de elementos de  $S$  que puede contener al mismo  $s$ , reducirse a un solo elemento o ser vacío.

**DEFINICION**

Los elementos de  $\Gamma(s)$ , si existen, se llaman los SIGUIENTES de  $s$ .

**DEFINICION**

Se llama ARCO de grafo a todo par orientado (o dirigido),  $(s,t)$  tal que  $t \in \Gamma(s)$ , es decir, tal que  $t$  sea un siguiente de  $s$ . Recíprocamente, se dice que  $s$  es un PRECEDENTE de  $t$ . Se llama ORIGEN del arco a  $s$  y  $t$  es su EXTREMO. (Ver Figura 3.13)

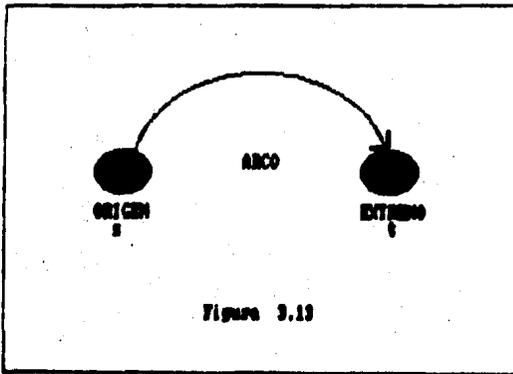


Figura 3.13

**DEFINICION**

Un arco  $(s,s)$  en que origen y extremo se confunden, se llama un BUCLE o un LOOP. (Ver Figura 3.14)

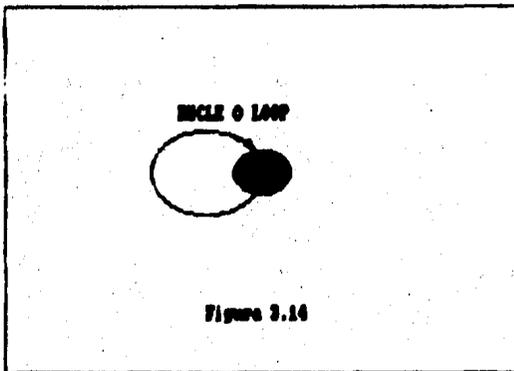


Figura 3.14

La aplicación  $\Gamma$  aparece así como un conjunto de relaciones binarias orientadas entre los elementos de  $S$ , o bien, como una parte del producto cartesiano  $S \times S$ .

Por este motivo, a menudo  $\Gamma$  representará también el conjunto de los arcos. Así, para decir que el grafo  $G(S, \Gamma)$  contiene al arco  $(s, t)$ , se escribirá  $(s, t) \in \Gamma$ .

Si es tan natural representar un conjunto por puntos de un plano, lo es también el representar las relaciones binarias orientadas de este conjunto por las flechas o "arcos" entre estos puntos. El grafo es entonces representado por una red en que los nodos o vértices representan los elementos de  $S$ .

Por esta razón se suele llamar VERTICES del grafo a los elementos de  $S$  y así se vuelve a encontrar la representación concreta que se dio al principio.

Otras definiciones importantes son:

**DEFINICION**

Si en el conjunto  $S$  de los vértices del grafo  $G=(S, \Gamma)$  no se considera más que una parte  $S'$ , para la que no se consideren más que los arcos de  $\Gamma' = \Gamma \cap (S' \times S')$ , se dice que el grafo así formado  $G'=(S', \Gamma')$  es un SUBGRAFO de  $G$ .

**DEFINICION**

Se llama CAMINO a una sucesión de arcos  $(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ , tal que el origen de cada uno, a partir del segundo, sea el extremo del inmediatamente anterior. (Ver figura 3.15)

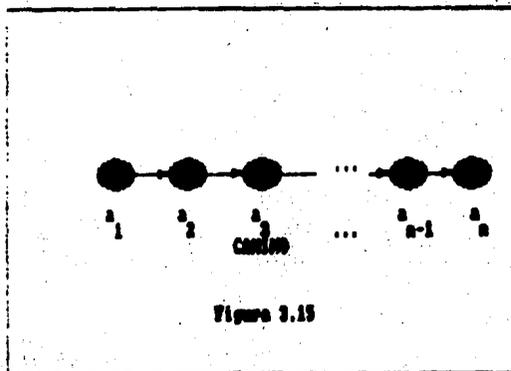
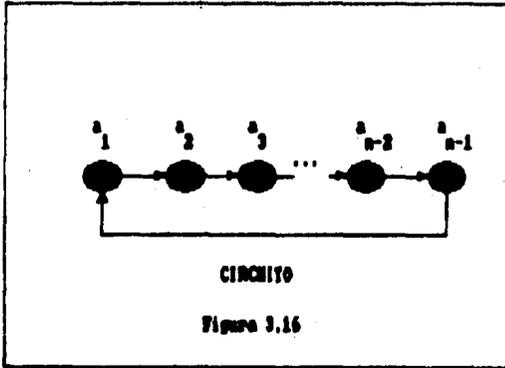


Figura 3.15

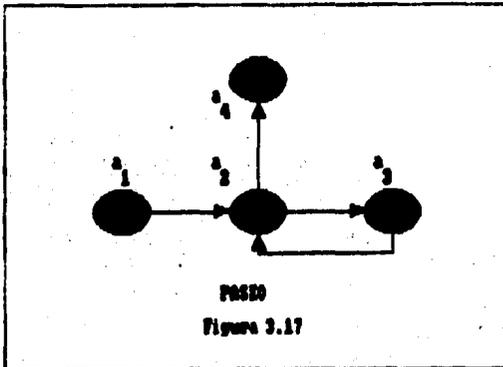
**DEFINICION**

Se llama **CIRCUITO** a un camino cerrado  $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ . (Ver Figura 3.16)



**DEFINICION**

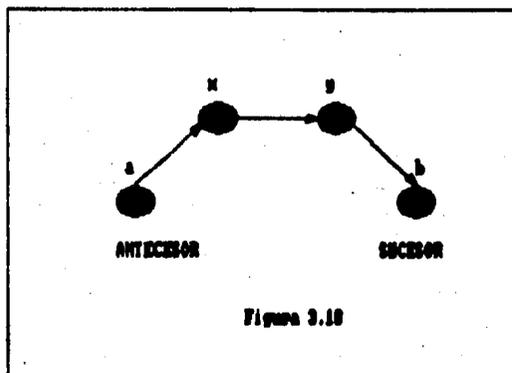
Se llama **PASEO** a una sucesión de arcos en la cual se pasa más de una vez por un mismo vértice, sin regresar al vértice inicial. (Ver Figura 3.17)



En general, los caminos se representan por  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  o también  $(a_1, a_n)$  y los circuitos por  $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_1)$ .

## DEFINICION

Si existe un camino  $(a,b)$  se dice que  $a$  es un ANTECESOR de  $b$ , y que  $b$  es un SUCESOR de  $a$ . No confundir con los conceptos de precedente y siguiente. (Ver Figura 3.18) En las cadenas de Markov, este concepto equivale a decir " $a$  lleva a  $b$ ".



## DEFINICION

Se dice que un grafo es FUERTEMENTE CONEXO, si cualquiera que sea el par  $a,b$  de vértices, están sobre un mismo circuito. Dicho de otra forma, esto equivale a que todos los vértices estén COMUNICADOS, i.e., dado cualquier par de vértices  $a,b$ , " $a$  lleva a  $b$ " y " $b$  lleva a  $a$ ".

Observación: los siguientes conceptos son equivalentes:

- i)  $a$  y  $b$  están sobre el mismo circuito
- ii) existe al menos un camino  $(a,b)$  y un camino  $(b,a)$ .

La relación "estar sobre un mismo circuito" o "estar comunicados", que puede representarse por  $\langle \leftrightarrow \rangle$ , es pues simétrica. Es además, transitiva (véase la demostración en la sección anterior). Por último, si se admite convencionalmente que todo punto está sobre el mismo circuito en sí mismo, o mejor aún, si se amplía la relación  $\langle \leftrightarrow \rangle$  en: "está confundido con o está sobre un mismo circuito con", la relación  $\langle \leftrightarrow \rangle$  es también reflexiva.

Hay pues una relación de equivalencia en el conjunto de los vértices de un grafo.

Toda relación de equivalencia en un conjunto determina en él una partición.

### NOTA:

Se dice que un conjunto  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de partes (o subconjuntos de un conjunto  $E$ ) forman una PARTICION si:

- 1o. Ninguna de estas partes es vacía.
- 2o. Dos a dos son disjuntos.
- 3o. Su unión es el conjunto E.

Las partes  $A_1, A_2, \dots, A_n$  se llaman las CLASES de la partición. Las condiciones 2a. y 3a. son equivalentes a lo siguientes: Todo elemento de E pertenece a una clase y solamente a una.

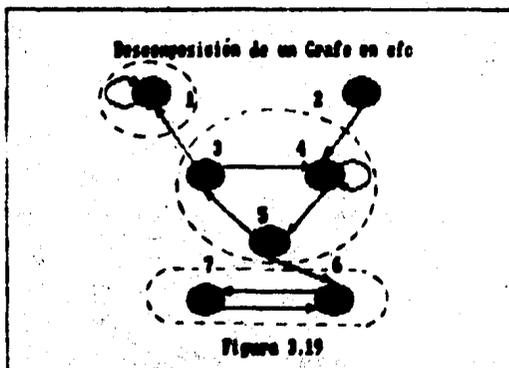
Se mencionó arriba que existe una partición inducida por una relación de equivalencia, pero es obvio que inversamente, toda partición define una relación de equivalencia, que es, simplemente, "pertenecer a una misma clase que".

La relación  $\leftrightarrow$  determina en un grafo una partición cuyas clases se llaman las COMPONENTES FUERTEMENTE CONEXAS, abreviado generalmente como cfc.

Por definición, dos vértices de una misma cfc están sobre un mismo circuito, pero esto no quiere decir necesariamente que el subgrafo formado por esta cfc sea un grafo fuertemente conexo. Esto sólo sucede si dos vértices cualesquiera de esta cfc están sobre un mismo circuito compuesto de elementos de la cfc.

Pero todo circuito que pase por estos dos vértices no tiene más que dos que "están sobre un mismo circuito con o confundidos con" cada uno de ellos, y que pertenecen pues a la misma clase de equivalencia. Las clases de la partición o cfc son, por lo tanto, subgrafos fuertemente conexos. Esta noción es equivalente a la anterior de CONJUNTO IRREDUCIBLE.

La Figura 3.19 representa la partición de un grafo en componentes fuertemente conexas (o conjuntos irreducibles).



### 3.0.2 ORDENACION DE UN GRAFO

Considérese que el grafo  $G$  con  $r$  vértices o nodos representando  $r$  estados, donde cada una de las transiciones est  representada por un arco  $(s,t)$ .

Los vértices de  $G$  que no tienen PRECEDENTE, representan los eventos que sólo pueden efectuarse en primer lugar. Se dice que su conjunto forma la GENERACION (0) del grafo.

Esta generación (0) no podrá ser vacía mas que en el caso de que todo punto del grafo tenga su precedente. Supuesto el número de vértices finito, será necesario que en este grafo haya un circuito, como esto formaria un conjunto irreducible de estados finitos, se tratará de una cadena de Markov RECURRENTE. (Ver más adelante el concepto de "anillo")

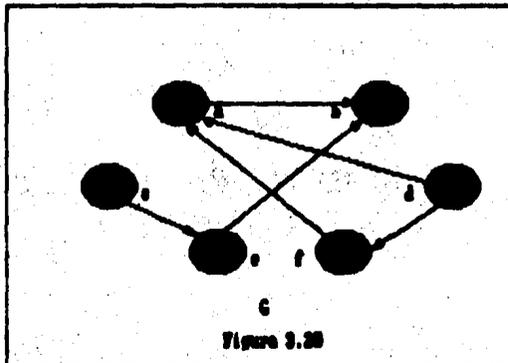
Una vez efectuados los eventos de la generación (0), se tendrán otras generaciones. Son aquellas que se encuentran sin precedente en el subgrafo  $G-(0)$ . Se llamar  GENERACION 1 a este conjunto.

Lo mismo que antes, (1) no será vacío mas que si se tiene un circuito en  $G-(0)$ . Pero suponiendo que no lo hay en  $G$ , tampoco existirá en  $G-(0)$ , ya que es un subgrafo de  $G$ .

Y así, sucesivamente, puede seguirse esta descomposición en generaciones hasta que se terminen los vértices del grafo. Los vértices que pertenezcan a la última generación representarán estados absorbentes, por carecer de siguientes. Del mismo modo, los vértices de la generación cero serán necesariamente transitorios, por carecer de precedentes.

La ausencia de circuito al comienzo y, por tanto, en cada una de las etapas, asegura que ninguna generación será vacía.

Esta descomposición de estados se llama ORDENACION DEL GRAFO. Puede materializarse escribiendo los vértices de la generación cero sobre una primera línea horizontal, las de (1), sobre la línea inmediata inferior, etc. (Ver Figuras 3.20 y 3.20a)



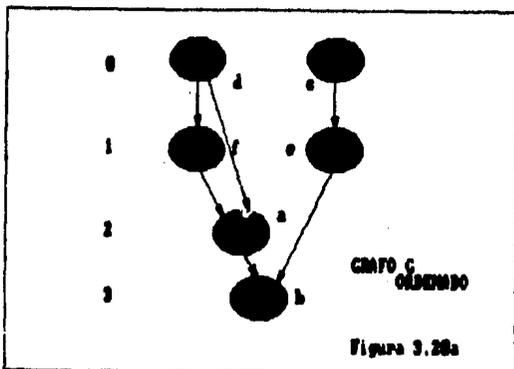


Figura 3.20a

Así, queda demostrado el siguiente

#### TEOREMA 1

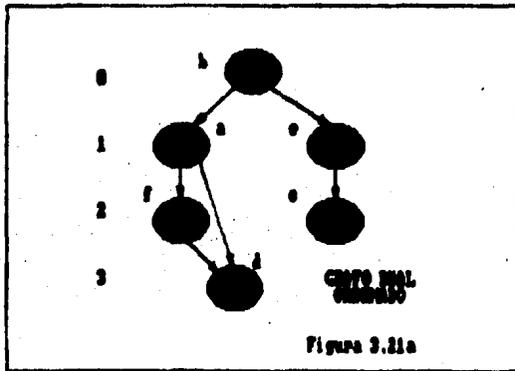
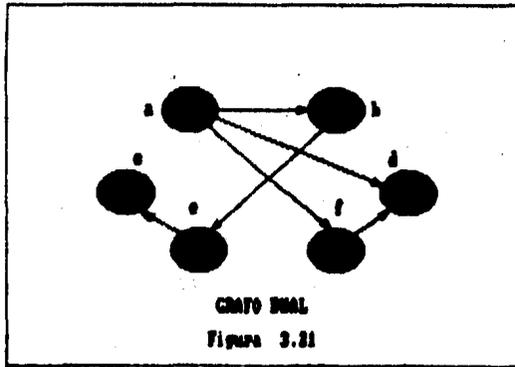
Un grafo sin circuitos puede ser ordenado.

#### PROPIEDADES DE LAS GENERACIONES

1. Un vértice inscrito en la generación  $(i)$  no tiene precedentes mas que en las generaciones  $(0), (1), \dots, (i-1)$ . De lo contrario tendría al menos un precedente en el subgrafo  $\theta - (0) - (1) - \dots - (i-1)$ , y no formaría parte de  $(i)$ .
2. Además, tiene por lo menos un precedente en  $(i-1)$ . De lo contrario, habría sido alcanzado antes de llegar a  $(i)$ .

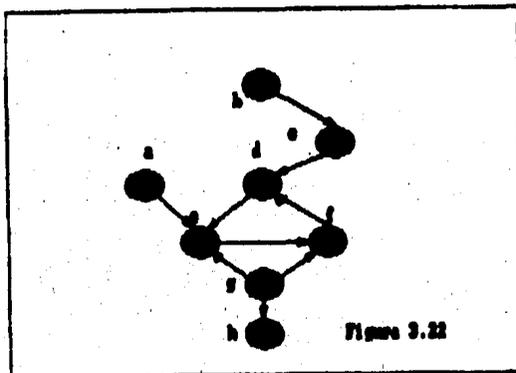
**Observación:** Con el sentido otorgado al arco  $(s,t)$ , es decir, "t se efectúa después de s"; el interés recae sobre los vértices sin precedencia, ya que de ellos dependerá, en gran medida, el comportamiento futuro del sistema. Si, por el contrario, se representa por  $(a,b)$  la relación "b se efectúa después de a", se buscarían antes los vértices sin siguiente, y se continúa la ordenación de esta forma. El método es el mismo, con la condición de sustituir "precedente" por "siguiente".

Téngase en cuenta que, si en  $\theta$  se cambia el sentido de todos los arcos se obtiene un grafo que se denota por  $\theta^*$ , y al que se llama DUAL de  $\theta$ . Entonces, la generación  $(0)$  de  $\theta^*$  no corresponde necesariamente a la última generación de  $\theta$ . La Figura 3.21 muestra el dual de  $\theta$ , y la Figura 3.21a muestra el dual ordenado.



**RECIPROCO DEL TEOREMA 1**

Solo puede ordenarse un grafo sin circuitos, o bien: un grafo con un circuito no puede ser ordenado. Obsérvese la Figura 3.22, es imposible ordenarla.



## Pruebas

Considérense todos los caminos que vayan de un vértice sin precedente a un vértice de un circuito (si no hay, el recíproco queda demostrado), sin pasar por otro vértice situado sobre un circuito. Sea  $k$  la LONGITUD (es decir, el número de arcos) del mayor de ellos (en la figura 3.22 es el camino  $(b,c,d)$  de longitud 2). En la ordenación se toca un circuito, lo más tarde para la generación  $k$  (aquí desde 1, a causa de  $e$ ), pero en todos los casos, cuando se llega a la etapa  $k+1$  no quedan ya puntos sin precedentes. Desde luego, si  $r$  es el número de vértices,  $k < r$ . De modo que el teorema puede reescribirse como

### TEOREMA 2

Un grafo puede ser ordenado si y sólo si es un grafo sin circuitos.

La palabra ORDEN designa una relación binaria con las siguientes propiedades: reflexividad, transitividad y antisimetría.

Denótese por " $T$ " la relación de orden, entonces se tiene la siguiente

### DEFINICION

$a T b$  si existe un camino  $(a,b)$  o  $a=b$ .

Con esta definición, la reflexividad sería cierta. La antisimetría es debida a la ocurrencia de circuitos: si existe un camino  $(a,b)$ , entonces no existe el camino  $(b,a)$ . Si existiera se tendría un circuito, el cual no puede ser ordenado.

Pero, de manera general, también en un grafo con circuitos, la relación  $T$  tiene por lo menos las propiedades de: reflexividad y transitividad.

Tal relación se llama un PREORDEN.

Un orden es, pues, un caso particular de un preorden: un preorden antisimétrico. La relación de equivalencia " $E$ " está relacionada con " $T$ ".

En efecto,

" $a$  existe sobre el mismo circuito que  $b$ ", i.e.,  $a E b$   
equivale a:

"existe un camino entre  $a$  y  $b$ ", i.e.,  $a T b$ , y  
"existe un camino entre  $b$  y  $a$ ", i.e.,  $b T a$ .

Esto puede escribirse como

$$a \in b \iff a \in T \text{ b y } b \in T \text{ a}$$

Dado un preorden  $T$ , la relación de equivalencia  $E$  así construida, determina en  $S$  clases de equivalencia entre las que existe un orden.

El preorden  $T$  corresponde al grafo  $\theta$  y la relación de equivalencia  $E$  es la que descompone el grafo en componentes fuertemente conexas. Esto representa la noción de la sección anterior correspondiente a "descomponer el espacio de estados en conjuntos IRREDUCIBLES".

Construyendo ahora un grafo  $g$  en el que los vértices representan las cfc de  $\theta$ , y donde un arco  $(i, j)$  signifique la existencia de por lo menos un arco que va de un vértice de la cfc número  $i$  a un vértice de la cfc número  $j$ .

Es evidente que si hay un arco  $(i, j)$  no existe arco  $(j, i)$ , ya que entonces "i" y "j" pertenecerían a la misma cfc.

De manera más general, se ve que  $g$  es sin circuitos,  $g$  puede ordenarse y se le llama el GRAFO REDUCIDO DE  $\theta$ , y representa la división del sistema en conjuntos irreducibles. Para ejemplificar esto, véanse las Figuras 3.23 y 3.23a, donde se observa la relación de orden de las clases de equivalencia.

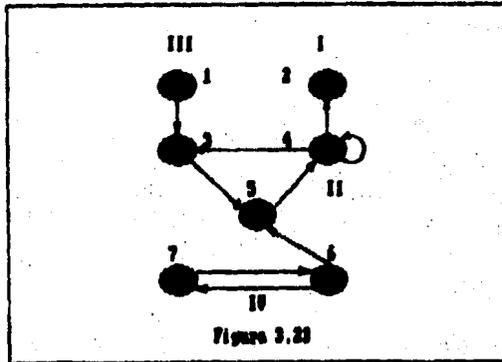


Figura 3.23

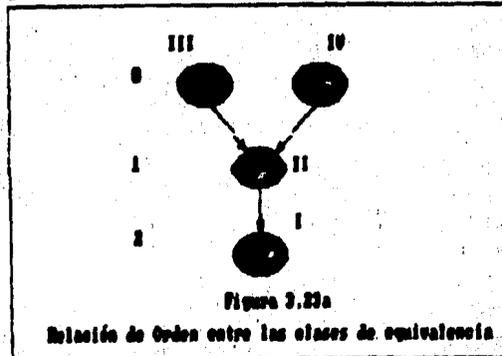


Figura 3.23a

Relación de Orden entre las clases de equivalencia

#### DEFINICION

Se llama CLASE INICIAL de un grafo  $G$  a toda cfc de  $G$  representada en  $G$  por un punto de la generaci3n (0). (Por lo tanto, el grafo de la Figura 3.23 tiene dos clases iniciales.)

#### DEFINICION

Reciprocamente, se llama CLASE FINAL de un grafo  $G$  a toda cfc de  $G$  representada en  $G$  por un punto de la ulti ma generaci3n. (Por lo tanto, el grafo de la Figura 3.23 tiene una clase final.)

Estas definiciones son de suma importancia, ya que permiten determinar con facilidad los diferentes tipos de estados que forman un sistema. Toda clase final sera necesariamente un conjunto de estados recurrentes (si es un solo estado, este ser3 absorvente), ya que el sistema permanecer3 siempre en esa clase una vez que ha llegado a ella. Todas las clases que no sean finales, necesariamente representaran conjuntos de estados transitorios, ya que existe probabilidad positiva de que el sistema no regrese a ellas.

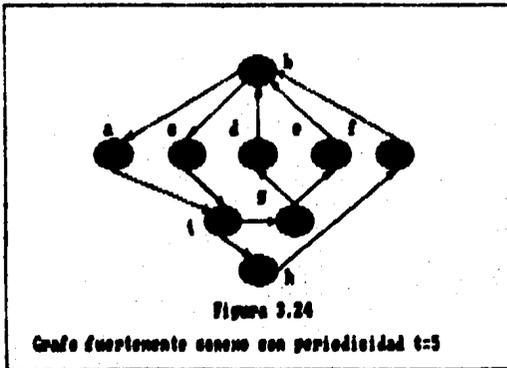
#### EJEMPLO 1.

Consid3rese la matriz de transici3n mencionada en el Ejemplo 1 de la secci3n 3.6. En la Figura 3.12a se tiene el grafo asociado, junto con el grafo  $g$  de las clases de  $G$ , ordenado. Puede verse que las clases finales I y III, son necesariamente conjuntos de estados recurrentes, mientras que II es un conjunto de estados transitorios. Estos resultados son exactamente los mismos que los encontrados en la secci3n 3.6.

### 3.9.3 PERIODICIDAD

Una clase final, considerada aisladamente, no es mas que un grafo fuertemente conexo, es decir, un grafo en el que dos v3rtices cualesquiera est3n sobre un mismo circuito.

Es conveniente extenderse un poco m3s sobre estos circuitos. Consid3rese el grafo de la Figura 3.24.



Puede verificarse que todos los circuitos de este grafo fuertemente conexo contienen un número de arcos que es múltiplo de 5. Se dice entonces que son de longitud múltiplo de 5 (llamando "longitud" de un camino o de un circuito, como se indicó, al número de sus arcos).

Para explicar y generalizar estas propiedades, sea  $t$  el mínimo común divisor de la longitud de todos los circuitos del grafo  $G$  ( $t$  recibe el nombre de PERIODICIDAD o PERIODO del grafo). Este número puede, en particular, ser igual a 1 (por ejemplo, si el grafo tiene bucle), entonces se dice que el grafo es APERIODICO. Si el estado  $i$  de una clase es aperiódico, entonces todos los estados son aperiódicos. Los estados recurrentes positivos que son aperiódicos reciben el nombre de estados ERGODICOS. Una cadena formada de estados ergódicos, se dice que es una CADENA ERGODICA.

#### LEMA.

Todos los caminos entre dos vértices dados  $i$  y  $j$  son de longitud igual en módulo  $t$ .

Sea  $u_1$  un camino  $(i, j)$ . Se llamará  $L(u_1)$  a su longitud. Sea  $u$  un camino cualquiera  $(j, i)$ .

Entonces  $u_1 + u$  constituye un circuito  $(i, j, i)$  cuya longitud  $L(u_1) + L(u)$ , será un múltiplo de  $t$  por definición.

Nota: Cuando dos números  $x, y$  son iguales en MODULO  $t$ , quiere decir que  $x - y$  es igual a un múltiplo de  $t$ ; esto se denota por:

$$x = y \text{ mod } t,$$

$$o \quad x - y = 0 \text{ mod } t.$$

Entonces,

$$L(u_1) + L(u) = 0 \text{ mod } t.$$

Sea  $u_2$  otro camino cualquiera  $(i, j)$ . Se tiene también

$$L(u_2) + L(u) = 0 \text{ mod } t.$$

Restando estas dos últimas ecuaciones se obtiene

$$L(u_1) - L(u_2) = 0 \text{ mod } t.$$

Apoyándose en este lema, se puede definir una DISTANCIA entre dos vértices cualesquiera de un grafo. Dados dos vértices  $i$  y  $j$ , se ha demostrado que todos los caminos  $u = (i, j)$  son de longitud igual en módulo  $t$ .

Sea  $D$  la distancia  $(i, j)$ , entonces

$$D(i, j) = L(u) \text{ mod } t$$

con  $0 \leq D(i,j) \leq t-1$ ,  $D(i,j) = 0, 1, \dots, t-1$ .

Esta distancia tiene la propiedad de aditividad módulo  $t$ . En efecto, del lema anterior:

$$D(i,j) + D(j,k) = D(i,k) \text{ mod } t.$$

En particular,

$$D(i,j) + D(j,i) = 0 \text{ mod } t.$$

Nota: Téngase presente que de aquí no puede deducirse

$$D(i,j) = -D(j,i) \text{ mod } t,$$

pero puede escribirse

$$D(i,j) + D(j,i) = t.$$

Esta distancia permite definir una PARTICION en el conjunto de vértices del grafo  $G$ .

Sea  $a$  un vértice arbitrario, pero fijo de  $G$ . Considérense los  $t$  conjuntos:

$$C_n = \{ i / D(a,i) = n \} \quad (n = 0, 1, \dots, t-1)$$

que se lee: "conjunto de vértices de  $G$  situados a una distancia de  $a$  igual a  $n$ ", para los  $t$  valores posibles de  $n$ .

Si  $t=1$ , no hay más que un conjunto  $C_0$ .

Si  $t \geq 2$ , se dice que los  $C_n$  forman una partición de  $G$ .

En efecto, para todo vértice  $i$ ,  $D(a,i)$  es un número bien determinado que vale  $0, 1, \dots, 0$  ( $t-1$ ). Todo vértice  $i$  pertenece a uno y sólo uno de los  $C_n$ .

Nota: las  $C_n$  reciben en general el nombre de SUBCLASES.

#### PROPIEDADES DE LA PARTICION EN SUBCLASES

1o. Decir que  $i, j$  pertenecen a una misma subclase o no, significa que:

$$D(a,i) = D(a,j)$$

y cualesquiera que sean  $i$  y  $j$ , pertenecientes o no a una misma subclase, se tiene, de una forma general, por la propiedad de aditividad

$$D(a,i) = D(a,j) + D(j,i) \text{ mod } t.$$

Por lo que es equivalente a decir que  $i$  y  $j$  pertenecen a una misma subclase, o que

$$D(j, i) = 0 \pmod{t}.$$

Se observa que la relación de equivalencia "pertenecer a una misma subclase", no distingue a ningún  $a$ . La partición en subclases está pues intrínsecamente ligada al grafo  $G$  fuertemente conexo.

Por lo tanto, la relación de definición a partir de un  $a$  particular, tiene la ventaja de permitir una numeración de las subclases.

Si se hubiera partido de otro vértice  $b$ , se tendría otra numeración, deducida de la precedente por permutación circular, pero siempre en las mismas subclases.

20. Sea  $i$  un vértice de la subclase  $C_n$ . Todos sus siguientes pertenecen a  $C_{n+1}$ . (Por excepción, a  $C$  para  $n=t-1$ ). En efecto, para cualquier  $j$  siguiente de  $i$

$$D(i, j) = 1$$

de donde

$$D(a, j) = (n + 1) \pmod{t}.$$

### CONCLUSION

Si se sigue un camino cualquiera de un grafo fuertemente conexo,

- a cada paso se cambia de subclase,
- las subclases se encuentran siempre en el mismo orden, con una periodicidad  $t$ .

En lo que se refiere a las cadenas de Markov, estas propiedades tienen la siguiente consecuencia:

Sean  $x, y$  dos estados de una misma clase final (y por lo tanto recurrente), de periodicidad  $t$ , representados por los vértices  $i$  y  $j$  de grafo asociado. Como  $i$ , por hipótesis, no tiene siguientes que no pertenezcan a  $C$ , todo camino  $(i, j)$  está enteramente dentro de  $C$ .

Su longitud es pues igual a  $D(i, j) \pmod{t}$ . Partiendo de  $x$ , es imposible encontrarse en  $y$  al cabo de un número de transiciones que no sea igual a  $D(i, j) \pmod{t}$ . Así,

$$P^n(x, y) = 0 \quad \text{para todo } n \neq D(i, j) \pmod{t}.$$

En particular,

$$P^n(y,y) = 0 \quad \text{para todo } n \text{ no múltiplo de } t.$$

Por otro lado, se dice que el estado  $y$  tiene periodo  $t$  ( $t \geq 1$ ), si  $P^n(y,y) > 0$  siempre que  $n$  no sea divisible entre  $t$  y que  $t$  sea el menor entero con esta propiedad. Por ejemplo, si es posible que el proceso entre al estado  $i$  solamente en los instantes  $0, 2, 4, \dots$ , en cuyo caso este estado tiene periodo 2.

Si existen dos números consecutivos  $s$  y  $(s+1)$ , tales que el proceso puede encontrarse en el estado  $i$  en los instantes  $s$  y  $(s+1)$ , se dice que el estado tiene periodo 1 y recibe el nombre de estado aperiódico. Si el estado  $i$  de una clase es aperiódico, entonces todos los estados son aperiódicos. Los estados recurrentes positivos aperiódicos son, como se dijo mas arriba, ergódicos.

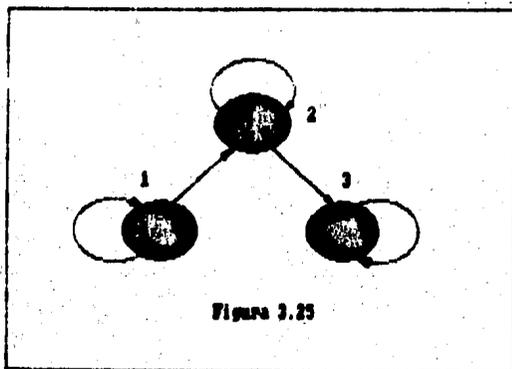
### 3.8.4 EJEMPLOS

#### EJEMPLO 2.

Considérese el proceso con matriz de transición:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[ \begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Cuyos grafos asociados se muestran en la Figura 3.25. De esta gráfica se observa que el estado 3 es absorbente (caso particular de estado ergódico), mientras que 1 y 2 son transitorios.



### EJEMPLO 3.

Considérrese el proceso con matriz de transiciones

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cuya gráfica asociada esta en la Figura 3.26. De aquí se concluye que el estado 1 es transitorio, mientras que 2 y 3 forman un conjunto de estados recurrentes, ergódico.

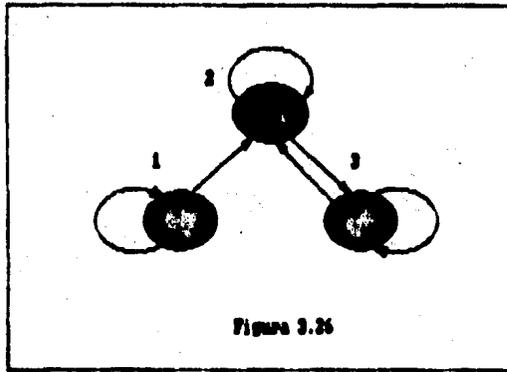


Figura 3.26

### EJEMPLO 4.

Considérrese el proceso con matriz de transiciones

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cuya gráfica asociada se muestra en la Figura 3.27. Obsérvese que en este caso, se tiene una cadena irreducible, donde todos los estados son recurrentes y aperiódicos.

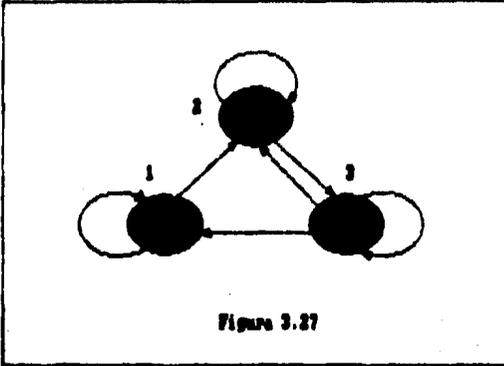


Figura 3.27

**EJEMPLO 5.**

Considérese el proceso con matriz de transición:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La gráfica correspondiente es la Figura 3.28, donde se ve que la cadena es irreducible o de clase única, periódica, con  $t=2$ .

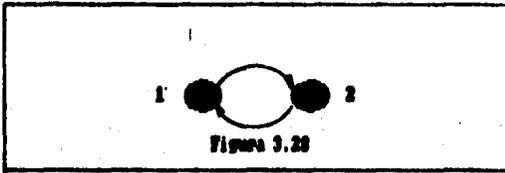


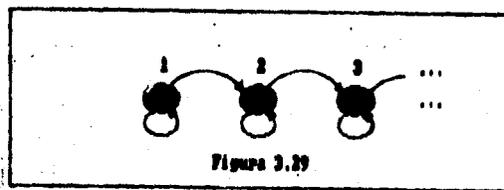
Figura 3.28

**EJEMPLO 6.**

Considere el proceso con matriz de transición:

	1	2	3	...
1	1/2	1/2	0	...
2	0	1/2	1/2	...
3	0	0	1/2	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Cuya gráfica corresponde a la Figura 3.29, donde se ve que todos los estados son transitorios.



**3.9 PROBABILIDADES DE ABSORCION**

Sea  $C$  uno de los conjuntos cerrados e irreducibles de estados recurrentes, y sea  $P_C(x) = P_x(T_C < \infty)$ , la probabilidad de que una cadena de Markov con inicio en  $x$ , eventualmente llegue a  $C$ . Como la cadena permanece en  $C$  una vez que ha llegado, se llama a  $P_C(x)$  la probabilidad de que una cadena que se inicia en  $x$  sea "absorbida" por el conjunto  $C$ . Claramente,

$$P_C(x) = 1, \quad \text{si } x \in C \quad \text{y}$$

$$P_C(x) = 0, \quad \text{si } x \text{ es recurrente y } x \notin C.$$

No es tan claro como calcular  $P_C(x)$  para  $x \in S_T$ .

Si hay solamente un número finito de estados transitorios, y en particular, si  $S$  mismo es finito, es siempre posible calcular

$P_0(x)$ ,  $x \in S$ , resolviendo un sistema de ecuaciones lineales con tantas ecuaciones como incógnitas, i.e., miembros de  $S_T$ . Para entender por qué, obsérvese que si  $x \in S_T$ , una cadena con inicio en  $x$  puede entrar a  $C$  solo si lo hace al tiempo 1, o estando en  $S_T$  al tiempo 1 y entrando a  $C$  en algún momento futuro. El primer evento tiene probabilidad

$$\sum_{y \in C} P(x, y)$$

y el segundo

$$\sum_{y \in S_T} P(x, y) P_0(y)$$

Entonces

$$P_0(x) = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in S_T} P(x, y) P_0(y), \quad x \in S_T \quad \dots (3.47)$$

La ecuación (3.47) se cumple con  $S$  finito o infinito, pero es más claro como resolverla para las  $P_0(x)$ ,  $x \in S_T$ , desconocidas, cuando  $S_T$  es finito. Una dificultad adicional es que si  $S_T$  es infinito, entonces (3.47) no tiene necesariamente solución única.

#### TEOREMA 1

Supóngase que el conjunto  $S_T$  de estados transitorios es finito, y sea  $C$  un conjunto cerrado irreducible de estados recurrentes. Entonces el sistema de ecuaciones

$$f(x) = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in S_T} P(x, y) f(y), \quad x \in S_T \quad \dots (3.48)$$

tiene la solución única:

$$f(x) = P_0(x), \quad x \in S_T. \quad \dots (3.49)$$

#### Pruebas

Si se cumple (3.48), entonces

$$f(y) = \sum_{z \in C} P(y, z) + \sum_{z \in S_T} P(y, z) f(z), \quad y \in S_T.$$

Sustituyendo en (3.48)

$$f(x) = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in S_T} \sum_{z \in C} P(x, y) P(y, z) + \sum_{y \in S_T} \sum_{z \in S_T} P(x, y) P(y, z) f(z)$$

La suma de los dos primeros términos es  $P_2(T_0, \neq 2)$ , y el tercero se reduce a  $\sum_{z \in S_T} P^2(x, z) f(z)$ , que es lo mismo que  $\sum_{y \in S_T} P^2(x, y) f(y)$ .

Entonces,

$$f(x) = P_2(T_0, \neq 2) + \sum_{y \in S_T} P^2(x, y) f(y)$$

Utilizando la inducción o repitiendo el proceso anterior se concluye que, para todos los enteros positivos  $n$

$$f(x) = P_n(T_0, \neq n) + \sum_{y \in S_T} P^n(x, y) f(y), \quad x \in S_T. \quad \dots (3.50)$$

Como cada  $y \in S_T$  es transitorio, se sigue de (3.41) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = 0, \quad x \in S, \quad y \in S_T. \quad \dots (3.51)$$

De acuerdo a las suposiciones del teorema  $S_T$  es un conjunto finito, por lo tanto, se sigue de (3.51) que la suma en (3.50) se aproxima a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Consecuentemente, para  $x \in S_T$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(T_C \leq n) \\ &= P_x(T_C < \infty) = P_C^*(x). \end{aligned}$$

#### EJEMPLO 1.

Considérese la cadena de Markov del Ejemplo 1 de la sección 3.6. Encontrar las probabilidades de absorción por el conjunto (0) para los estados 1 y 2, es decir

$$\begin{aligned} P_{10} &= P_{(0)}(1) \\ y \quad P_{20} &= P_{(0)}(2). \end{aligned}$$

De (3.47) y de la matriz de transición del ejemplo, se ve que 1 y 2 son estados transitorios, con  $P_{10}$  y  $P_{20}$  determinadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} P_{10} &= 1/4 + (1/2)P_{10} + (1/4)P_{20} \\ P_{20} &= P_{(0)}(n) = \sum_{y \in (0)} P(1, y) + \sum_{y \in S_T} P(1, y) P_{(0)}(y) \\ P_{10} &= 1/4 + (1/2)P_{10} + (1/4)P_{20} \\ y \quad P_{20} &= (1/5)P_{10} + (2/5)P_{20}. \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones

$$P_{10} = 3/5 \quad y \quad P_{20} = 1/5.$$

Por métodos similares se concluye que

$$P_{(3,4)}(1) = 2/5 \quad y \quad P_{(3,4)}(2) = 4/5.$$

Alternativamente, se pueden obtener estas probabilidades restando  $P_{(0)}(1)$  y  $P_{(0)}(2)$  de 1.

#### TEOREMA 2

Si hay un número finito de estados transitorios,

$$\sum_I P_{(I)}^*(x) = 1 \quad \text{con } x \in S_T. \quad \dots (3.52)$$

Para verificar (3.52) nótese que para  $x \in S_T$   $\sum_I P_{(I)}^*(x)$  es igual a

$$\sum_i P_x(T_{C_i} < \infty) = P_x(T_{S_R} < \infty).$$

Como solamente hay un número finito de estados transitorios y cada estado transitorio es visitado sólo un número finito de veces, la probabilidad  $P_x(T_{S_R} < \infty)$  de que un estado recurrente sea alcanzado es 1, por lo que se cumple (3.52).

Una vez que una cadena de Markov empieza en un estado transitorio  $x$ , entra en un conjunto  $C$  cerrado irreducible de estados recurrentes, visitando cada estado en  $C$ . Entonces

$$P_{xy} = P_C(x) \quad \text{para } x \in S_T, \quad y \in C \quad \dots(3.53)$$

Se sigue de (3.53) que en el ejemplo

$$P_{12} = P_{13} = P_{15} = P_{(1,2,3)}(1) = 2/5$$

$$y \quad P_{21} = P_{31} = P_{25} = P_{(1,2,3)}(2) = 4/5$$

### 3.10 MARTINGALAS

Consideréase una cadena de Markov con espacio de estados finito  $0, 1, \dots, d$  y función de transición  $P$  tal que

$$\sum_{y=0}^d yP(x, y) = x, \quad x=0, 1, \dots, d \quad \dots(3.54)$$

Recordando la definición de esperanza matemática (véase Apéndice B), se observa que esta ecuación implica que el valor esperado del estado próximo futuro  $y$ , sea igual al valor presente  $x$ .

Ahora, la esperanza

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} / X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) &= \\ &= \sum_{y=0}^d yP(X_{n+1} = y / X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) \\ &= \sum_{y=0}^d y P(x, y) \end{aligned}$$

por la propiedad de Markov. Se concluye de (3.54) que

$$E(X_{n+1} / X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) = x \quad \dots(3.55)$$

es decir, que el valor esperado de  $X_{n+1}$  dados los valores pasados y presente de  $X_0, \dots, X_n$  es igual al valor presente de  $X_n$ . Una sucesión de variables aleatorias que tienen esta propiedad son llamadas MARTINGALAS. Las martingales no necesariamente son cadenas de Markov, y juegan un papel muy importante en la teoría de probabilidad. Surgieron inicialmente en los juegos de azar (véase (D) para un estudio en particular sobre los juegos de azar).

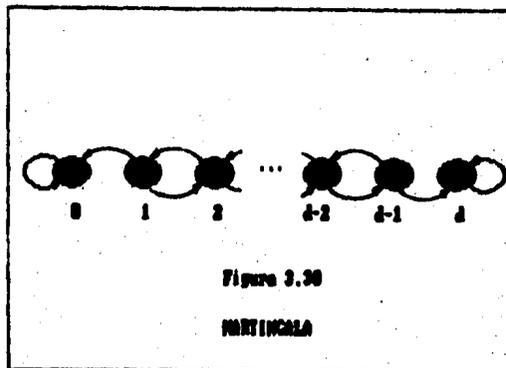
Si  $X_n$  denota el capital de un jugador después del tiempo  $n$ , y si todas las apuestas son justas, esto es, si el resultado de la esperanza de ganancia es cero (juego suma cero), entonces  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , forma una martingala. Los jugadores, naturalmente, se interesan por encontrar alguna estrategia de apuesta, como incrementar sus apuestas hasta que ganen. Esto podría darles una ganancia esperada neta, después de una serie de apuestas. Esta técnica fue conocida como "LA MARTINGALA INFALIBLE", aunque la práctica demostró que no era realmente infalible. (Vease (Bo), pp. 143) Por una parte, las apuestas en el juego por lo general están limitadas; además, por muy rico que fuera el jugador que quisiera utilizar esta martingala, no hay más que una fortuna limitada y, por consiguiente, corre el peligro de verse obligado a dejar de jugar por falta de dinero.

Se sigue de (3.54) que

$$\sum_{y=0}^d y P(0,y) = 0$$

y, por lo tanto, que  $P(0,1) = P(0,2) = \dots = P(0,d) = 0$ . Entonces cero es necesariamente un estado absorbente. Se sigue en forma similar que  $d$  es absorbente. Representan los estados de ruina o de ganancia máxima.

Considérese ahora una cadena de Markov que satisface (3.54) y que no tiene estados absorbentes distintos de 0 y  $d$ , entonces los estados  $1, \dots, d-1$  son transitorios y cada uno lleva a cero o a  $d$ . (Véase la Figura 3.30) Si la cadena de Markov empieza en  $x$ , eventualmente entrará en uno de los dos estados absorbentes 0 o  $d$ , y permanecerá ahí.



Entonces,

$$\begin{aligned}
 E_x(X_n) &= \sum_{y=0}^{d-1} y P_x^n(X_n=y) \\
 &= \sum_{y=0}^{d-1} y P^n(x,y) \\
 &= \sum_{y=0}^{d-1} y P^n(x,y) + d P^n(x,d) \\
 &= \sum_{y=0}^{d-1} y P^n(x,y) + d P_x(T_d \leq n)
 \end{aligned}$$

Como los estados  $1, 2, \dots, d-1$  son transitorios, se ve que  $P^n(x,y)$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito para  $y = 1, 2, \dots, d-1$ .

En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_x(X_n) = d P_x(T < \infty) = d P_{x,d}$$

Por otro lado, se sigue de (3.54) que  $E X_n = E X_{n+1} = \dots = E X_0$  y por tanto,  $E_x(X_n) = x$ . Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_x(X_n) = x$$

Iguando estas dos últimas ecuaciones

$$P_{x,d} = x/d, \quad x=0, \dots, d \quad \dots(3.56)$$

Como  $P_{x,0} + P_{x,d} = 1$ , se sigue de (3.56) que

$$P_{x,0} = 1 - x/d, \quad x=0, \dots, d$$

Es necesario verificar que, para  $x=1, \dots, d-1$ ,

$$x/d = P(x,d) + \sum_{y=1}^{d-1} (y/d) P(x,y) \quad \dots(3.57)$$

lo cual puede seguirse de (3.54).

La cadena genética del Ejemplo 7 de la sección 3.4, satisface (3.54), así como la cadena de la ruina de un jugador en  $0, 1, \dots, d$  con matriz de transición de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Supóngase que dos jugadores hacen series de apuestas de cien pesos hasta que uno de ellos se arruina, y además cada jugador tiene probabilidad  $1/2$  de ganar una apuesta dada. Si el primer jugador tiene un capital inicial de  $d-x$  cientos de pesos, entonces el segundo jugador tiene probabilidad  $\frac{x}{d}$  de arruinarse y el primer jugador tiene probabilidad  $1-(x/d)$  de arruinarse.

### 3.11 CADENAS DE NACIMIENTO Y MUERTE

En una cadena de Markov irreducible, o todos los estados son recurrentes, o todos son transitorios, de modo que una cadena de Markov irreducible o es recurrente o es transitoria. Una cadena de Markov irreducible con número finito de estados, es necesariamente recurrente. En general, es difícil decidir cuando una cadena irreducible con número infinito de estados es recurrente o transitoria. Sin embargo, esto puede hacerse para la cadena de nacimiento y muerte.

Considérese una cadena de nacimiento y muerte en los enteros no negativos o en el conjunto finito  $0, \dots, d$ . En el primer caso  $d = \infty$ . La función de transición es de la forma:

$$P(x, y) = \begin{cases} q_x & \text{si } y=x-1 \\ r_x & \text{si } y=x \\ p_x & \text{si } y=x+1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Donde  $p_x + q_x + r_x = 1$ , para  $x \in S$ ,  $q_x \geq 0$  y  $p_x \geq 0$ , si  $d < \infty$ . Adicionalmente, supóngase que  $p_x$  y  $q_x$  son positivos para  $0 < x < d$ .

Para  $a$  y  $b$  en  $S$  tales que  $a < b$ , sea

$$u(x) = P_x(T_a < T_b), \quad a < x < b$$

(Es decir,  $u(x)$  representa la probabilidad de que una cadena que

se inicia en  $x$ , alcance el estado  $a$  antes que el estado  $b$ ). Y sea  $u(a)=1$  y  $u(b)=0$ . Si la cadena de nacimiento y muerte se inicia en  $y$ , entonces va en un paso a  $y-1$ ,  $y$  o  $y+1$ , con probabilidades  $q_y, r_y$ , o  $p_y$  respectivamente. Se sigue entonces que:

$$u(y) = q u(y-1) + r u(y) + p u(y+1), \quad a < y < b \quad \dots (3.58)$$

Como  $r_y = 1 - p_y - q_y$ , puede reescribirse esta ecuación

$$u(y+1) - u(y) = \frac{q_y}{p_y} (u(y) - u(y-1)), \quad a < y < b \quad \dots (3.59)$$

Sea  $\delta'_y = 1$  y

$$\delta'_y = \frac{q \dots q}{p \dots p}, \quad 0 < y < d \quad \dots (3.60)$$

De (3.59) se ve que

$$u(y+1) - u(y) = \frac{\delta'_y}{\delta'_{y-1}} (u(y) - u(y-1)), \quad a < y < b$$

de lo cual se tiene

$$\begin{aligned} u(y+1) - u(y) &= \frac{\delta'_{a+1}}{\delta'_a} \dots \frac{\delta'_y}{\delta'_{y-1}} (u(a+1) - u(a)) \\ &= \frac{\delta'_y}{\delta'_a} (u(a+1) - u(a)) \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$u(y) - u(y+1) = \frac{\delta'_y}{\delta'_a} (u(a) - u(a+1)), \quad a \leq y < b \quad \dots (3.61)$$

Sumando (3.61) sobre  $y=a, \dots, b-1$  y recordando que  $u(a)=1$  y  $u(b)=0$ , se concluye que

$$\frac{u(a) - u(a+1)}{\delta'_a} = \frac{1}{\sum_{y=a}^{b-1} \delta'_y}$$

(3.61) se convierte en

$$u(y) - u(y+1) = \frac{\delta'_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \delta'_y} \quad a \leq y < b$$

Sumando esta ecuación sobre  $y = x, \dots, b-1$  y utilizando la fórmula  $u(b)=0$ , se obtiene

$$u(x) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \delta'_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \delta'_y} \quad a \leq x < b$$

Se sigue de la definición de  $u(x)$  que

$$P_a(T_a < T_b) = \frac{\sum_{y=a}^{b-1} \delta_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \delta_y}, \quad a < x < b \quad \dots(3.62)$$

Restando (3.62) de 1 a ambos lados

$$P_a(T_a < T_b) = \frac{\sum_{y=a}^{x-1} \delta_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \delta_y}, \quad a < x < b \quad \dots(3.63)$$

### EJEMPLO 1.

Una cierta célula tiene probabilidades de  $9/20$  de particionarse en dos,  $10/20$  de morir, y  $1/20$  de seguir viviendo sin duplicarse. Si la comunidad alcanza 35 mil células, la comunidad se destruye por exceso de población; si llegan a morir 10 mil células, también se destruye por falta de defensas.

a) Encontrar la probabilidad de que la comunidad se destruya por exceso de población.

b) Encontrar el número esperado de muertes.

Si se denota por  $X_n$  el número de células presentes en el tiempo  $n$ , con  $X_0 = 10$  mil, (ya que de otra forma no habría comunidad), entonces  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , forma una cadena de nacimiento y muerte sobre  $(0, \text{mil}, \dots, 35 \text{ mil})$  con tasas  $p_x = 9/20$ ,  $q_x = 10/20$  y  $r_x = 1/20$ , con  $0 < x < 35$ .

Los estados cero y 35 son absorbentes. La fórmula (3.63) es aplicable con  $a=0$  y,  $x=10$ ,  $b=35$ .

Se concluye que  $\delta_y = (10/9)^y$ ,  $0 \leq y \leq 34$ , y entonces

$$P_{10}(T_{35} < T_0) = \frac{\sum_{y=0}^9 (10/9)^y}{\sum_{y=0}^{34} (10/9)^y} = \frac{(10/9)^{10} - 1}{(10/9)^{35} - 1} = .047$$

Entonces la comunidad tiene probabilidad .047 de destruirse por exceso de población (una probabilidad bastante pequeña). El número esperado de muertes es:

$$10 \text{ mil} - 35 \text{ mil}(0.047) = 8,360$$

Considérese una cadena de nacimiento y muerte en los enteros no negativos, la cual es irreducible, i.e., tal que  $p_x > 0$  para  $x \geq 0$ , y  $q_x > 0$  para  $x \geq 1$ . Puede determinarse cuándo esta cadena es recurrente y cuándo es transitiva. (Véase la Figura 3.31)

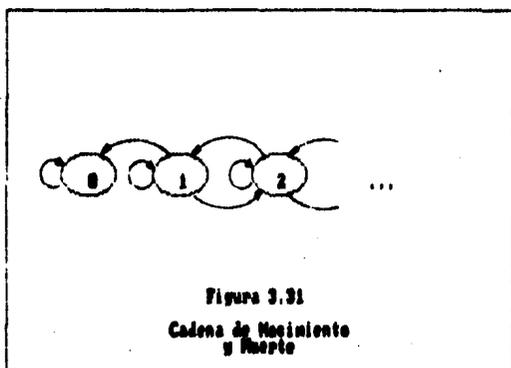


Figura 3.31  
Cadena de Nacimiento  
y Muerte

Como un caso especial de (3.62)

$$P_1(T_0 < T_n) = 1 - \frac{1}{\sum_{y=0}^{n-1} \delta_y}, \quad n > 1 \quad \dots(3.64)$$

Considérese ahora una cadena de nacimiento y muerte que se inicia en el estado 1. Como la cadena de nacimiento y muerte puede moverse a lo más un paso hacia la derecha, en un tiempo dado, (considerando la transición de un estado a otro como un movimiento a lo largo de la recta real),

$$1 \leftarrow T_2 < T_3 < \dots \quad \dots(3.65)$$

Se sigue de (3.65) que  $(T_0 < T_n)$ ,  $n > 1$ , forma una secuencia no decreciente de eventos. Se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_1(T_0 < T_n) = P_1(T_0 < T_n \text{ para algún } n > 1) \quad \dots(3.66)$$

La ecuación (3.65) implica que  $T_n > n$  y entonces  $T_n \rightarrow \infty$  cuando  $n$  tiende a infinito; por lo tanto, el evento  $(T_0 < T_n$  para algún  $n > 1$ ) ocurre si y sólo si el evento  $(T_0 < \infty)$  ocurre. Puede reescribirse (3.66) como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_1(T_1 < T_n) = P_1(T_1 < \infty) \quad \dots(3.67)$$

Se sigue de (3.64) y (3.67) que

$$P_1(T_0 < \infty) = 1 - \frac{1}{\sum_{y=0}^{\infty} \delta_y} \quad \dots(3.68)$$

Ahora puede observarse que una cadena de nacimiento y muerte es recurrente si y sólo si

$$\sum_{y=0}^{\infty} \delta_y = \infty \quad \dots(3.69)$$

Si la cadena de nacimiento y muerte es recurrente, entonces  $P_i(T_0 < \infty) = 1$ , y (3.69) se sigue de (3.68). Para obtener el inverso, obsérvese que  $P(0, y) = 0$  para  $y \geq 2$ , y por lo tanto

$$P_0(T_0 < \infty) = P(0, 0) + P(0, 1)P_1(T_0 < \infty) \quad \dots(3.70)$$

Supóngase que (3.69) se cumple, entonces por (3.68)

$$P_1(T_0 < \infty) = 1$$

De aquí y de (3.70) se concluye que

$$P_0(T_0 < \infty) = P(0, 0) + P(0, 1) = 1$$

Entonces 0 es un estado recurrente, y como se asumió que la cadena era irreducible, debe ser una cadena recurrente.

En conclusión, se ha probado que una cadena irreducible de nacimiento y muerte en  $0, 1, 2, \dots$  es recurrente si y sólo si

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{q_1 \dots q_x}{p_1 \dots p_x} = \infty \quad \dots(3.71)$$

#### EJEMPLO 2.

Considérese una cadena de nacimiento y muerte en  $0, 1, 2, \dots$  definida por

$$p_x = \frac{x+2}{2(x+1)} \quad \text{y} \quad q_x = \frac{x}{2(x+1)}, \quad x \geq 0$$

Determinar si la cadena es recurrente o transitoria.

Como 
$$\frac{q_x}{p_x} = \frac{x}{x+2}$$

se sigue que 
$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{q_1 \dots q_x}{p_1 \dots p_x} = \frac{1 \cdot 2 \dots x}{3 \cdot 4 \dots (x+2)} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x+2)} = 2 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{\infty} \delta_x &= 2 \sum_{x=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \right) \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, esta cadena es transitoria.

### 3.12 CADENAS DE RAMIFICACION

Considérese la cadena mencionada en el Ejemplo 6 de la sección 3.4. La probabilidad de extinción  $\rho$  de la cadena es la probabilidad de que los descendientes de una partícula dada se extingan. Entonces,

$$\rho = P_{10} = P_1(T_0 < \infty)$$

Ahora, supóngase que en lugar de 1, inicialmente hay  $x$  partículas. Como el número de nacimientos en las diversas generaciones es independiente de las otras, la probabilidad de que los descendientes de cualquiera de las  $x$  partículas eventualmente se extinga es la potencia  $x$  de la probabilidad de que los descendientes de cualquier partícula eventualmente se extingan. En otras palabras,

$$\rho_{10} = \rho^x, \quad x = 1, 2, \dots \quad \dots(3.72)$$

En el Ejemplo 6 de la sección 3.4, una partícula da origen a  $\xi$  partículas en la siguiente generación, donde  $\xi$  es una variable aleatoria con densidad  $f$ . Si  $f(1)=1$ , se tiene una cadena de ramificación degenerada, en la que cada estado es absorbente. Entonces, supóngase que  $f(1) < 1$ . Entonces el estado 0 es un estado absorbente, y los demás son transitorios. De aquí se sigue que, con probabilidad 1, la cadena de ramificación o es absorbida por 0 o se aproxima a  $+\infty$ . Se concluye de (3.72) que:

$$P_x(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1 - \rho^x, \quad x=1, 2, \dots$$

Es conveniente determinar  $\rho$ , o al menos, determinar cuando  $\rho = 1$  y cuando  $\rho < 1$ , dado que esto nos indica si la extinción es segura o no. Esto puede hacerse usando argumentos basados en la fórmula

$$\Phi(\rho) = \rho \quad \dots(3.73)$$

donde  $\Phi$  es la función generatriz de probabilidad de  $f$  (ver Apéndice B), definida por

$$\Phi(t) = f(0) + \sum_{y=1}^{\infty} f(y) t^y \quad 0 \leq t \leq 1$$

Para verificar (3.73)

$$\begin{aligned} \rho &= P_{10} = P(1, 0) + \sum_{y=1}^{\infty} P(1, y) \rho^y \\ &= P(1, 0) + \sum_{y=1}^{\infty} P(1, y) \rho^y \\ &= f(0) + \sum_{y=1}^{\infty} f(y) \rho^y \\ &= \Phi(\rho) \end{aligned}$$

Sea  $\mu$  el número esperado de nacimientos de una partícula dada. Supóngase  $\mu < 1$ . Entonces la ecuación  $\Phi(t) = t$  no tiene

raíces en  $[0,1)$ , (ya que  $f(1) < 1$ ), y entonces  $P=1$ . De modo que la extinción es cierta si  $\mu < 1$  y  $f(1) < 1$ .

Supóngase ahora que  $\mu > 1$ . Entonces la ecuación  $\Phi(t)=t$  tiene una raíz única en  $[0,1)$ , y por lo tanto  $P$  es  $P_0$  b 1. En realidad,  $P$  siempre es igual a  $P_0$ . En consecuencia, si  $\mu > 1$ , la probabilidad de extinción es menor que uno. (Para probar estos resultados recuérdese que  $\mu$  es igual a la derivada de la función generatriz, evaluada en  $t=1$ , Apéndice B).

Estos resultados son razonables en forma intuitiva. Si  $\mu < 1$ , entonces, en promedio cada partícula da origen a menos de una nueva partícula; así se espera que la población llegue a desaparecer. Si  $\mu > 1$ , en promedio, cada partícula da origen a más de una nueva partícula. En este caso se espera que la población tenga probabilidad positiva de crecer rápidamente, en forma geométrica. El caso  $\mu=1$  es la línea divisoria, pero como  $P=1$  cuando  $\mu < 1$ , es plausible que  $P=1$  también cuando  $\mu=1$ . Esto, de nuevo es lógico, ya que si, en promedio, cada partícula genera sólo otra, la tendencia será la extinción.

#### EJEMPLO 1. EXTINCIÓN DE UN APELLIDO.

El señor Valle de la Loma desea saber cual es la probabilidad de que su apellido se extinga. Supone que, en promedio, cada hombre tiene 3 hijos, de los cuales cada uno tiene probabilidad  $1/2$  de ser hombre y  $1/2$  de ser mujer. Supóngase que el número de hombres (los que conservarán y transmitirán el apellido), en la  $n$ -ésima generación, forma una cadena de ramificación.

La función de densidad del número de hijos varones de un hombre dado es una Binomial (ver Apéndice B), con parámetros  $n=3$  y  $p=1/2$ . Entonces la función de densidad está dada por:

$$f_n(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Calculando las probabilidades

$$f(0) = (1/2)^3 = 1/8$$

$$f(1) = 3/8$$

$$f(2) = 3/8$$

$$f(3) = 1/8$$

$$f(x) = 0, \text{ para } x \geq 4.$$

El número promedio de nacimientos masculinos es  $\mu=np=3/2$ . Como  $\mu > 1$ , la probabilidad de extinción  $P$  es la raíz de la ecuación

$$f(0) + f(1)t + f(2)t^2 + f(3)t^3 = t$$

que se encuentra en  $[0,1)$ . Reescribiendo la ecuación

$$t^3 + 3t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$(t-1)(t^2 + 4t - 1) = 0$$

Esta ecuación tiene las raíces: 1,  $-\sqrt{5} - 2$ , y  $\sqrt{5} - 2$ . Como necesariamente debe ser mayor que 0 y menor que 1,  $\rho = \sqrt{5} - 2$ .

Ahora, si por ejemplo, el señor Valle de la Loma tiene dos hijos y una hija, la probabilidad de que su apellido se extinga será simplemente  $\rho_{11} = \rho^2$ .

### 3.13 CADENAS DE LINEAS DE ESPERA.

Considérese la cadena de línea de espera del Ejemplo 5 de la sección 3.4. Sean  $\xi_1, \xi_2, \dots$  y  $\mu$  como en dicho ejemplo. De nuevo, es conveniente determinar cuándo la cadena es recurrente y cuándo es transitoria.

Sea  $\mu$  el número esperado de clientes que llegan en una unidad de tiempo. Supóngase primero que  $\mu > 1$ . Como al menos una persona es atendida en un momento y, en promedio, más de un nuevo cliente se incorpora a la cola, parecería que, a medida que el tiempo avanza, habrá más y más gente esperando, y la longitud de la cola tendería a infinito. Entonces, si  $\mu > 1$ , la línea de espera es una cadena transitoria. En general, esto no sucede, pues cuando una cola es demasiado larga, la gente ya no se incorpora.

Para discutir el caso en que  $\mu < 1$ , puede suponerse que la cadena es irreducible, ya que es posible pasar de un estado a cualquier otro, aunque no necesariamente en una unidad de tiempo. Tomando  $\mu < 1$ , en promedio, menos de un nuevo cliente llega a la cola en una unidad de tiempo. Como se atiende a un cliente siempre que la cola no esté vacía, se esperaría que, sin importar la longitud inicial de la cola, esta desaparecería en un tiempo futuro. Entonces 0 es un estado recurrente, y por lo tanto, la cadena es recurrente. El caso  $\mu = 1$  es la línea fronteriza, pero de nuevo, 0 es un estado recurrente, de modo que, al ser la cadena irreducible, debe ser recurrente.

### 3.14 COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LA MATRIZ DE TRANSICION

En muchos casos, al estudiar un sistema, se observa que su desarrollo data de mucho tiempo atrás, entonces el sistema puede tener un cierto comportamiento límite, es decir, una distribución estable de probabilidades. Es muy conveniente, por lo tanto, determinar si un proceso tiende o no a estabilizarse después de un número grande de transiciones. Claro que no todos los procesos llegarán a obtener estabilidad y, en algunos casos, como se verá más adelante, el comportamiento futuro del proceso dependerá en

gran medida del estado inicial.

Aprovechando el desarrollo anterior de la teoría de gráficas, y utilizando las técnicas matriciales, es relativamente sencillo determinar cuando un sistema tiende a un límite y cuál es este límite.

### 3.14.1 PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE TRANSICION

La matriz  $P$ , definida como matriz de probabilidades de transición tiene, como ya se dijo, las siguientes propiedades:

- 1a. Todas sus términos son positivos o nulos.
- 2a. La suma de los términos de cada renglón es 1.
- 3a. El producto de dos matrices estocásticas es una matriz estocástica. En efecto, sea  $C$  el vector columna del espacio  $r$  (para una matriz estocástica de  $r$  columnas por  $r$  renglones), tal que todas sus componentes sean iguales a la unidad. Como la suma de las componentes de cada renglón de  $P$  es 1, puede escribirse

$$P C = C,$$

lo cual demuestra que 1 es un valor propio de  $P$  y que es un vector propio a la derecha correspondiente a este valor.

Ahora, sean  $A$  y  $B$  dos matrices estocásticas del mismo orden, y sea  $D$  el producto  $AB$ . Se tiene

$$B C = C$$

Premultiplicando ambos miembros por  $A$ .

$$A(BC) = AC = C$$

$$(AB)C = C$$

Entonces

$$D C = C$$

Por lo tanto,  $D$  es una matriz estocástica.

En particular, todas las potencias de  $P$  serán matrices estocásticas.

Se obtuvo también el resultado, en la sección 3.5.2, de que la matriz de probabilidades de transición en  $n$  pasos es igual a la  $n$ -ésima potencia de  $P$ . Por otro lado, se tiene entonces que la distribución de probabilidades en el  $n$ -ésimo estado es igual a la distribución inicial  $\pi_0$  por la matriz de transición  $P$  elevada a

la  $n$ . Asimismo, la distribución de probabilidades en el estado  $(n+1)$  es igual a la distribución en el estado  $n$  por la matriz de transición en un paso  $P$ . (Véanse las ecuaciones (3.31) y (3.32) en la sección 3.5.2)

### 3.14.2 EL COMPORTAMIENTO ASINTOTICO

Recordando la ecuación (3.31)

$$\mathbb{J}_{n+1} = \mathbb{J}_n P$$

se observa que, dadas la distribución inicial de probabilidad  $\mathbb{J}_0$  y la matriz de probabilidades de transición  $P$ , bastan para determinar la distribución de probabilidades en todo instante posterior  $n$ .

Ahora bien, es de gran interés determinar que sucede al sistema después de un tiempo infinito, sobre todo, si el vector de probabilidades  $\mathbb{J}_n$  converge hacia un vector  $\mathbb{J}$ .

Esta eventual convergencia está estrechamente relacionada con el estado de régimen prácticamente alcanzado al cabo de un número suficientemente grande de transiciones.

Como de lo anterior resulta que, dado  $\mathbb{J}_0$ , todo el futuro del sistema está contenido en la matriz  $P$ , no hay duda de que el comportamiento asintótico del sistema dependerá de las propiedades de esta matriz.

En el caso de existir este límite  $\mathbb{J}$ , puede afirmarse que deberá satisfacer las siguientes condiciones:

1. Si  $\mathbb{J}_n$  tiende hacia un límite  $\mathbb{J}$ , entonces  $\mathbb{J}_{n+1}$  tiende hacia el mismo límite.

Puesto que, según (3.32) se tiene

$$\mathbb{J}_{n+1} = \mathbb{J}_n P$$

entonces debe verificar

$$\mathbb{J} = \mathbb{J} P.$$

Esto puede resumirse diciendo que  $\mathbb{J}$  es un vector propio de  $P$  por la izquierda, correspondiente al valor propio 1.

Luego, dicho vector propio, con la condición de ser de términos no negativos cuya suma sea 1 (normalizado), representa una distribución de probabilidad que no está afectada por una transición (no estándolo tampoco por un número cualquiera de transiciones). Una distribución de este tipo recibe el nombre de DISTRIBUCION ESTACIONARIA asociada a  $P$ .

De forma general, se dice que un proceso estocástico es estacionario si es homogéneo en el tiempo, y si, además, su distribución de probabilidades es independiente en el tiempo.

El término probabilidad de estado estacionario de la cadena e Markov significa que la probabilidad de hallar el proceso en un estado determinado, por ejemplo  $j$ , después de un número grande de transiciones, tiende al valor  $\pi(j)$ , independiente de la distribución inicial de probabilidad definida sobre los estados. Es importante hacer notar que la probabilidad de estado estacionario NO implica que el proceso se fije en un estado. Por el contrario, el proceso sigue llevando a cabo transiciones de estado a estado, y en cualquier paso  $n$ , la probabilidad de transición del estado  $i$  al estado  $j$  sigue siendo  $P(i, j)$ .

También pueden interpretarse los  $\pi(j)$  como probabilidades estacionarias (no confundir con probabilidades de transición estacionarias). Si la probabilidad absoluta inicial de encontrarse en el estado  $j$  está dada por  $\pi(j)$  para toda  $j$ , entonces la probabilidad absoluta de hallar el proceso en el estado  $j$  en el instante  $n=1, 2, \dots$ , también está dada por  $\pi(j)$ .

Cuando una cadena de Markov converge hacia una distribución límite  $\pi$ , converge pues hacia un proceso estacionario. Además, si  $\pi$  es alcanzado en un instante cualquiera, el proceso es, a partir de entonces, estacionario.

2. De igual modo, si  $\pi_n$  tiende efectivamente hacia un límite  $\pi$ , puede ocurrir que dependa no solamente de  $P$ , sino también de la distribución inicial  $\pi_0$ .

En efecto, haciendo tender  $n$  hacia infinito en (3.31), se tiene:

$$\pi = \pi P^n \quad \dots(3.74)$$

donde  $P^n$  representa el límite (si existe) de  $P^n$  cuando  $n$  tiende a infinito.

Sin embargo, en algunos casos, la distribución de probabilidad límite será independiente de la distribución inicial  $\pi_0$ . De aquí se tiene el siguiente

#### TEOREMA 1

Es necesario y suficiente para que  $\pi$  sea independiente de  $\pi_0$ , que la matriz  $P^n$  tienda hacia una matriz límite  $P^\infty$  estocástica, cualquiera que sea el estado inicial, y que tenga todos sus renglones iguales entre sí, y además iguales a .

#### Prueba

La condición es necesaria. En efecto, si  $\pi$  es la misma para todas las distribuciones iniciales  $\pi_0$ , en particular es la misma para las  $n$  distribuciones:

$(1, 0, 0, \dots, 0)$   
 $(0, 1, 0, \dots, 0)$   
 $(0, 0, 1, \dots, 0)$   
 $\dots\dots\dots$   
 $(0, 0, 0, \dots, 1)$

Cada renglón de  $P^n$  tiene pues, por límite  $\pi$ . Por lo tanto  $P^n$  existe y sus  $r$  renglones son idénticos a  $\pi$ .

La condición es suficiente. En efecto, si la matriz  $P^n$  tiene todas sus filas idénticas, sea

$$P_{ij} = p_j^n$$

entonces la ecuación (3.74) que se escribe

$$\pi(j) = \sum_i \pi_0(i) p_{ij}^n$$

se convierte en

$$\pi(j) = \sum_i \pi_0(i) p_j^n = p_j^n \sum_i \pi_0(i) = p_j^n \dots (3.75)$$

resultado que es independiente de las  $\pi_0(i)$  y que demuestra además que la distribución límite es idéntica a los renglones de la matriz  $P^n$ .

**DEFINICION**

Se dice que una cadena de Markov es **REGULAR**, o mejor, que está en el caso regular, si  $\pi_n$ , distribución de probabilidad en el instante  $n$ , tiende, cuando  $n$  tiende a infinito, hacia un límite  $\pi$ , independiente de  $\pi_0$ , distribución inicial.

Obsérvese que una cadena **ERGODICA** siempre seha regular.

El Teorema 1 que se acaba de mencionar, es ya una primera condición necesaria y suficiente de regularidad. La regularidad es por lo general un problema muy importante.

**NOTA 1:** Se ha visto, antes de hablar de regularidad, que el límite  $\pi$ , si existe, y sea o no independiente de  $\pi_0$ , es de todas formas un vector propio a la izquierda correspondiente al valor propio de 1 de  $P$ . Se ha llamado también  $\pi$ , a la distribución de probabilidad estacionaria asociada con  $P$ .

Sea " $u$ " un valor propio de  $P$  y sea  $U_0$  un vector propio por la izquierda asociado a  $u$ :

$$U_0 P = u U_0$$

Postmultiplicando por el vector columna  $C$ , en que todos los términos son iguales a 1

$$U_0 PC = u U_0 C$$

$$PC = C$$

entonces

$$(u-1) U_u C = 0$$

El producto escalar  $U_u \cdot C$  representa la suma de los términos de  $U_u$ . Así, únicamente los vectores propios por la izquierda correspondientes a  $u=1$  pueden tener la suma de sus términos no nula, o sea que pueden representar, convenientemente normalizados, una distribución de probabilidad.

NOTA 2: Puede hacerse la siguiente afirmación: si hay regularidad hay unicidad de la distribución estacionaria.

En efecto, sea  $U_1$  tal que

$$U_1 P = U_1$$

Por la hipótesis de regularidad,  $\mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}$ , cualquiera que sea  $n$ , luego en particular, para  $\mathbb{N} = U_1$ . De otro modo, si  $\mathbb{N}_n = U_1$ , para todo  $n$ . Luego  $U_1 = \mathbb{N}$ .

NOTA 3: La existencia de una distribución estacionaria única no implica que ésta sea regular. Como contraejemplo considérese la matriz estocástica

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los dos valores propios correspondientes a  $P$  son  $+1$  y  $-1$ . El único vector propio (con suma de términos igual a uno), correspondiente al valor propio de  $1$  de  $P$  es

$$U_1 = (1/2, 1/2)$$

Luego, con  $\mathbb{N}_0 = (p, q)$ , se tiene  $\mathbb{N}_1 = (q, p)$ ,  $\mathbb{N}_2 = (p, q)$ , etc. Es decir, se tiene una cadena periódica, con periodo 2. No existe pues límite para  $\mathbb{N}$  en general, salvo para  $p=q=1/2$ , es decir, si la distribución estacionaria era ya alcanzada al comienzo.

NOTA 4: Se mencionó en la Nota 1 que sólo los vectores propios  $U_1$  pueden representar una distribución de probabilidad y los otros tendrán necesariamente términos negativos. Pero no está excluido a priori que sea así para ciertos vectores  $U_1$ .

Sin embargo, si hay regularidad, el vector propio  $U_1$  únicamente puede representar una distribución de probabilidad ya que entonces es igual (una vez normalizado), a todos los renglones de  $P^n$ .

De la Nota 3 se sigue que la periodicidad eventual de ciertos estados finales es incompatible con la regularidad, pues

rapide la existencia de limite para las probabilidades de transición.

Por otro lado, la existencia de varias clases finales es incompatible con la regularidad. Sean  $E_i$  y  $E$  dos estados recurrentes pertenecientes a dos clases finales diferentes ( dos conjuntos cerrados irreducibles), entonces se tiene para  $n$  que tiende a infinito:

$$P^n(i, j) \rightarrow 0$$

Pero  $P(j, j)$  no tiende hacia cero (tiende a  $1/\mu_j$ ). Por lo tanto, la columna  $j$  de  $P^n$  no puede tener en el limite todos sus términos iguales.

De las observaciones anteriores se tiene que la condición necesaria y suficiente de regularidad (o ergodicidad), es que la cadena de Markov sólo tenga una clase final y que ésta no sea periódica.

Estos resultados son intuitivamente ciertos, utilizando la teoría de gráficas, ya que se ve en el grafo de las transiciones posibles que no se puede estar indefinidamente en los estados transitorios. Llega pues un momento en que se está en una clase final. Se queda allí el sistema y da vueltas dentro indefinidamente sin salir jamás.

Si hay varias clases finales, no se sabe a priori en cual se quedará. La distribución límite no puede ser entonces independiente de las condiciones iniciales, pues si se encuentra en el momento de partir en una clase final, según se trate de una o de otra, la evolución posterior será enteramente diferente.

En cuanto a la periodicidad, se ve claramente que tiene por consecuencia que la probabilidad de hallarse en tal estado depende del número de orden de la transición considerada, por elevado que sea.

### 3.14.3 ESTUDIO MATRICIAL

El estudio de la potencia  $n$ -ésima de una matriz es un problema clásico del álgebra matricial y es de suma importancia el papel que desempeña su ESPECTRO, es decir, el conjunto de los valores propios o valores característicos de la matriz.

Puede preverse que es en las particularidades del espectro de las matrices estocásticas donde reside la naturaleza de su comportamiento asintótico general, y que sobre su espectro se impondrán necesariamente las condiciones de todo comportamiento particular, por ejemplo, y sobre todo, la condición de regularidad o ergodicidad.

El siguiente teorema será de utilidad en los resultados posteriores:

**TEOREMA 1**

Sea  $A$  una matriz cuadrada cualquiera. Entonces cualquier valor propio (o valor característico) de la matriz  $A$  cae en al menos uno de los círculos con centro en  $a_{jj}$  y radio  $= \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ . (Figura 3.32)

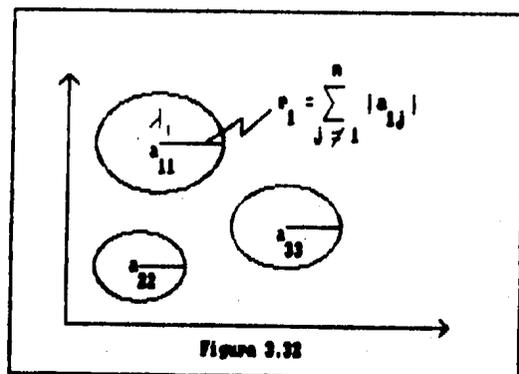


Figura 3.32

**Prueba**

Sea  $\lambda$  un valor propio de la matriz  $A$ . Entonces, existe un vector no nulo tal que cumple con la ecuación

$$\lambda x = x A$$

es decir,

$$\lambda (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

de donde se tiene el sistema de ecuaciones

$$\lambda x_j = \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n.$$

En particular,

$$\lambda x_j = a_{jj} x_j + \sum_{i \neq j} x_i a_{ij}$$

entonces,

$$\sum_{i \neq j} x_i a_{ij} = \lambda x_j - a_{jj} x_j$$

$$= x_j (\lambda - a_{jj})$$

Tomando valores absolutos

$$|x_j| |\lambda - a_{jj}| = \left| \sum_{i \neq j} x_i a_{ij} \right|$$

y, por la desigualdad triangular

$$|x_j| |\lambda - a_{jj}| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| |x_i| \quad \dots (3.76)$$

Ahora bien, como el vector  $x$  tiene al menos una coordenada  $x_j$  de módulo máximo, puede ser normalizado

$$x' = (x'_1 \quad x'_2 \quad \dots \quad x'_n)$$

Y en este nuevo vector

$$x'_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Sustituyendo en (3.76)

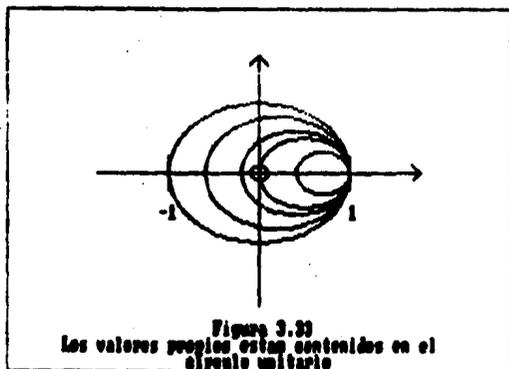
$$|\lambda - a_{jj}| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$$

Este teorema se cumple entonces para cualquier valor propio  $\lambda$  y elementos  $a$  en los complejos.

Ahora, puede aplicarse este teorema al caso especial de una matriz estocástica.

### TEOREMA 3

Toda matriz estocástica  $P$  tiene valores propios contenidos en un círculo unitario con centro en el origen. (Figura 3.33)



Prueba

Aplicando el Teorema 2 a una matriz estocástica

$$|\lambda - p_{jj}| \leq \sum_{i \neq j} |p_{ij}|$$

pero,

$$\sum_j p_{ij} = 1, \text{ entonces } \sum_{i \neq j} p_{ij} \leq 1$$

de donde,

$$|\lambda - p_{jj}| \leq 1.$$

#### TEOREMA 4

Toda matriz estocástica o matriz de Markov tiene un valor propio cuyo módulo es 1 (es decir,  $\lambda = 1$ ).

Prueba

Como se sabe que

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

entonces,

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & p & \dots & p \\ p & p & \dots & p \\ p & p & \dots & p \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ p & p & \dots & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

lo cual demuestra que 1 es un valor propio de P y que el vector de elementos iguales a la unidad es un vector propio a la derecha correspondiente a este valor.

A continuación se enunciarán tres teoremas cuya demostración puede encontrarse en (C):

#### TEOREMA 5

El orden de multiplicidad del valor propio 1 es igual a número de clases recurrentes para una matriz estocástica finita.

#### TEOREMA 6

Si  $P$  es la matriz de transición de una cadena de Markov finita, irreducible y periódica de periodo  $t$ , entonces las  $t$ -ésimas raíces de la unidad son valores propios de  $P$ , cada una de multiplicidad 1, y no existen otros valores propios de módulo 1.

#### TEOREMA 7

Si  $P$  es la matriz de transición de una cadena de Markov finita, todo valor propio de  $M$  de módulo 1 es raíz de la unidad. Las  $t$ -ésimas raíces de la unidad son valores propios de  $P$  si y solamente si  $P$  contiene una clase recurrente de periodo  $t$ . La multiplicidad de cada  $t$ -ésima raíz de la unidad es exactamente el número de clases recurrentes de periodo  $t$ .

A continuación se analizarán algunos ejemplos de cadenas de Markov, utilizando los conceptos anteriores.

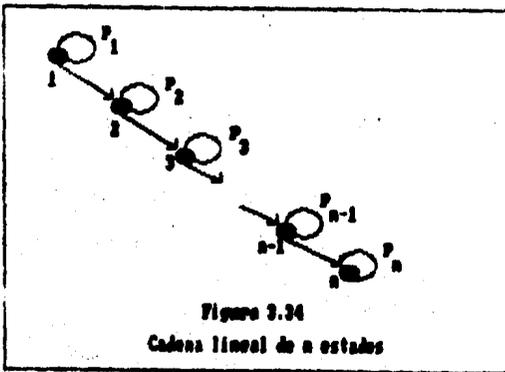
#### 3.14.4 EJEMPLOS

##### EJEMPLO 1. CADENA LINEAL DE $N$ ESTADOS.

Considérese la cadena de Markov con matriz de transición

$$\begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p & 1-p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo grafo asociado se presenta en la Figura 3.34. Esta es una cadena donde todos los estados son transitorios, excepto  $n$ , que es absorbente. De cada estado sólo puede pasarse al siguiente, o permanecer en el mismo.



Planteando la ecuación de valores propios

$$\lambda x = x P$$

se tiene el sistema

$$\lambda x_1 = x_1 p_1$$

$$\lambda x_2 = x_1 (1-p_1) + x_2 p_2$$

⋮

$$\lambda x_n = x_{n-1} (1-p_{n-1}) + x_n$$

Se observa que existe una relación de recurrencia del primer orden, es decir, cada estado depende únicamente del anterior. Esto puede expresarse con la matriz de transferencia

$$(x_{j+1} \ x_j) = (x_j \ x_{j-1}) \begin{pmatrix} \frac{1-p_j}{p_j - p_{j+1}} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el estado estacionario, se toma el valor característico igual a 1, lo cual genera el sistema

$$x_1 = x_1 p_1$$

$$x_2 = x_1 (1-p_1) + x_2 p_2$$

⋮

$$x_n = x_{n-1} (1-p_{n-1}) + x_n$$

Cuya solución es el vector de estado estacionario

$$(0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1).$$

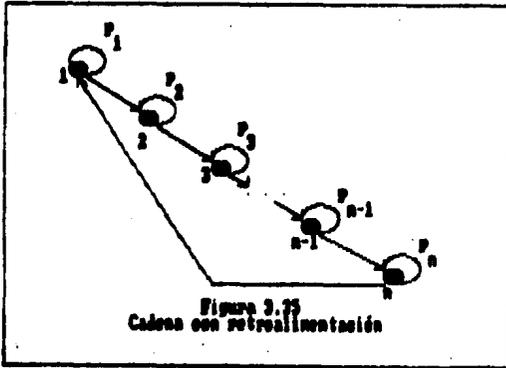
Esto es razonable, dado que todos los estados, excepto el último, son estados de transición.

## EJEMPLO 2. CADENA DE MARKOV CON RETROALIMENTACION.

Considérese una cadena de Markov con la siguiente matriz de transición:

$$\begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p & 1-p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1-p & 0 & 0 & \dots & p \end{bmatrix}$$

cuya gráfica asociada se presenta en la Figura 3.35. Se trata de un sistema semejante al anterior, pero en el estado  $n$  existe la posibilidad de regresar al primero. Esto forma un grafo fuertemente conexo, es decir, es una cadena cerrada irreducible finita, por lo tanto, todos los estados serán recurrentes, y es aperiódica, por tener bucles.



Escribiendo la ecuación de valores propios

$$\lambda x = x P$$

la cual genera el sistema

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= x_1 p_1 + x_n (1-p_n) \\ \lambda x_2 &= (1-p_1) x_1 + x_2 p_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \lambda x_n &= (1-p_{n-1}) x_{n-1} + x_n p_n \end{aligned}$$

donde se ve que cada estado depende del anterior, y el primero depende del último. Para encontrar el vector estacionario se toma  $\lambda = 1$ , de donde:

$$x_1 = \frac{(1-p_n)}{(1-p_1)} x_n$$

$$x_2 = \frac{(1-p_1)}{(1-p_2)} x_1$$

$$x_3 = \frac{(1-p_2)}{(1-p_3)} x_2$$

.

.

.

$$x_n = \frac{(1-p_{n-1})}{(1-p_n)} x_{n-1}$$

de donde se debe dar un valor arbitrario a  $x_n$ , de modo que el vector estacionario sea normalizado.

Por ejemplo, para dos estados sea la matriz

$$\begin{pmatrix} .4 & .6 \\ .5 & .5 \end{pmatrix}$$

Para el valor  $\lambda=1$ , se tienen las ecuaciones

$$x_1 = .4 x_1 + .5 x_2$$

$$x_2 = .6 x_1 + .5 x_2$$

lo cual puede expresarse como

$$x_1 = (.5/.6) x_2$$

$$x_2 = (.6/.5) x_1$$

dando a  $x_1$  el valor 1

$$x_2 = 1.2$$

normalizando

$$x_1 = .4545 \quad \text{y} \quad x_2 = .5454.$$

### EJEMPLO 3. ANILLO.

Un anillo es una cadena de Markov con retroalimentación, en la cual las probabilidades son uniformes, es decir,  $p_i = p$  para todo  $i$ . La matriz de transición es

$$\begin{pmatrix}
 p & 1-p & 0 & \dots & 0 \\
 0 & p & 1-p & \dots & 0 \\
 0 & 0 & p & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 1-p & 0 & 0 & \dots & p
 \end{pmatrix}$$

cuya gráfica asociada es la Figura 3.36.

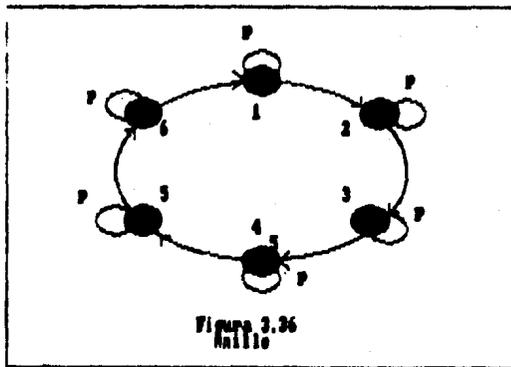


Figura 3.36  
Ciclo

Utilizando los resultados anteriores, se obtiene el vector estacionario

$$(1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$$

normalizando

$$(1/n \quad 1/n \quad 1/n \quad \dots \quad 1/n)$$

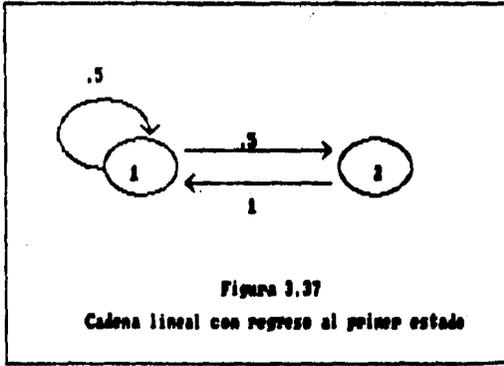
Es decir, en cualquier instante existe la misma probabilidad de que el proceso se encuentre en cualquiera de los estados.

#### EJEMPLO 4. CADENA CON REGRESO AL PRIMER ESTADO.

Considere una cadena de dos estados con matriz de transición,

$$\begin{pmatrix}
 .5 & .5 \\
 1 & 0
 \end{pmatrix}$$

donde existe la posibilidad de volver al primer estado. Se trata de una cadena cerrada irreducible finita, que por lo tanto será recurrente. La gráfica asociada se muestra en la Figura 3.37.



Las ecuaciones con  $\lambda=1$  serán

$$x_1 = .5 x_1 + x_2$$

$$x_2 = .5 x_1$$

dando un valor arbitrario  $x = 1$ , entonces  $x = .5$ . Normalizando

$$x_1 = 2/3$$

$$x_2 = 1/3$$

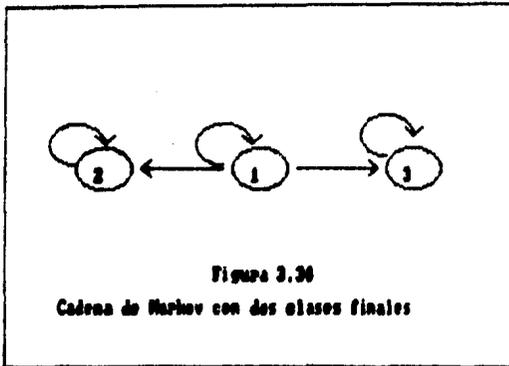
Nótese que la probabilidad es mayor para el estado 1, ya que tiene más vías de acceso.

#### EJEMPLO 5. CADENA CON DOS CLASES FINALES.

Sea la cadena con matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya gráfica se presenta en la Figura 3.38. Puede observarse que existen dos clases finales, por lo que no habrá un estado estacionario. El comportamiento futuro del sistema depende, en forma definitiva, del estado inicial del sistema.



Se tienen dos valores propios iguales a 1, que indican la existencia de dos clases recurrentes: las clases finales.

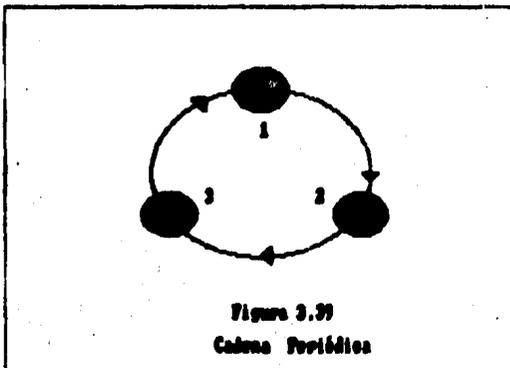
**EJEMPLO 6. CADENA PERIODICA.**

Sea la cadena de Markov con matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuya gráfica corresponde a la Figura 3.39. Se observa que existe periodicidad 3, ya que la longitud de todos los caminos de recurrencia es 0 en módulo 3.

Al obtener los valores propios se observa que existen 3 raíces de la unidad, lo cual indica la existencia de una clase periódica con periodo 3.



El sistema de ecuaciones correspondiente a  $n=1$  será

$$x_1 = x_3$$

$$x_2 = x_1$$

$$x_3 = x_2$$

lo cual parecería implicar que la cadena tiene la misma probabilidad ( $1/3$ ) de encontrarse en cualquier estado. Sin embargo, al ser una cadena periódica, el estado de la cadena dependerá necesariamente del orden del instante, por muy grande que éste sea.

### 3.15 UNA APLICACION: EL CASO DE LA NOVILIDAD SOCIAL

Las sociedades humanas se clasifican por lo general en clases en cuanto a ingreso, ocupación, status social o lugar de residencia, etc. Los miembros de dicha sociedad transitan de una clase a otra, aparentemente al azar. El elemento esencial de cualquier modelo estocástico de movilidad es una descripción probabilística de cómo tiene lugar el cambio de una clase a otra.

En el modelo más simple se supone que la posibilidad de moverse depende sólo de la clase presente, y no de cómo se llegó a ella. Si el movimiento puede observarse en puntos discretos de tiempo, el modelo apropiado será una cadena de Markov. Pueden hacerse modificaciones para que el modelo sea más realista. El sistema se considerará cerrado, es decir, se supondrá que los miembros del sistema no cambian a través del tiempo: no entra ni sale ninguna persona.

Es importante distinguir entre el movimiento intergeneracional y el movimiento intrageneracional. El primero se refiere a cambios de status de padre a hijo a través de generaciones subsecuentes. Aquí las unidades de tiempo son discretas y se miden en generaciones. Los modelos intrageneracionales son aquellos en que el movimiento de los individuos entre las clases sucede durante la vida de cada uno. En este caso el tiempo sería continuo.

#### 3.15.1 EL MODELO BASICO

Considérese inicialmente un modelo muy simple para el desarrollo de una línea de familia. El requerimiento fundamental de un modelo es que debe especificar la forma en que ocurren los cambios de clase social o económica. Supóngase que estos cambios se rigen por probabilidades independientes del tiempo. Sea  $p_{ij}$  la probabilidad de que el hijo de un padre de clase  $i$  este en la clase  $j$  en la siguiente generación.

Como el sistema es cerrado

$$\sum_{j=1}^r p_{ij} = 1$$

donde  $r$  es el número de clases. Sea  $P$  la matriz de transición de probabilidades.

Si se consideran sólo familias en las que cada padre tiene exactamente un hijo, la historia de la familia será una cadena de Markov. (En realidad, en una población cuyo número permanece constante en el tiempo, cada padre tiene, en promedio, un hijo.)

Supóngase que la probabilidad de que el progenitor inicial de una familia esté en la clase  $j$  al tiempo cero es  $J_0(j)$ . Sea la probabilidad de que la línea de descendencia esté en la clase  $j$  al tiempo  $n$  ( $n=1,2,3,\dots$ ),  $J_n(j)$ . Las probabilidades ( $J_n(j)$ ) pueden calcularse recursivamente del hecho

$$J_{n+1}(j) = \sum_{i=1}^r J_n(i) p_{ij}, \quad (i=1,2,\dots,r)$$

en notación matricial

$$J_{n+1} = J_n P$$

de donde

$$J_{n+1} = J_0 P^n$$

Los elementos del vector  $J_n$  pueden también interpretarse como las proporciones esperadas de población en las diversas clases al tiempo  $n$ . Si las clases originales de las líneas familiares se conocen, el vector  $J_0$  representará la estructura de la clase inicial.

Sea  $p_{ij}^{(n)}$  el  $(i,j)$ -ésimo elemento de la matriz de transición en  $n$  pasos  $P$ . Entonces,

$$J_n(j) = \sum_{i=1}^r J_0(i) p_{ij}^{(n)}, \quad j=1,2,\dots,r.$$

En esta representación se ve que  $p_{ij}^{(n)}$  es la probabilidad de que una línea de familia vaya de la clase  $i$  a la clase  $j$  en  $n$  generaciones.

El caso  $i=j$  es de especial interés ya que las probabilidades  $p_{jj}^{(n)}$  pueden tomarse como bases de las medidas de movilidad.

En muchas aplicaciones la población ha existido por muchas generaciones, por lo que el estado "presente" corresponde a un valor grande de  $n$ . Por lo tanto, es de gran interés práctico investigar la conducta de las probabilidades ( $p_{ij}$ ) y  $p$  cuando  $n$  tiende a infinito.

Esta conducta límite depende de la estructura de  $P$ . Dado que  $P$  es regular, (puesto que puede pasarse de un estado a cualquier otro en un paso, de donde se ve que el proceso forma una cadena

cerrada irreducible finita, que por lo tanto es recurrente positiva y aperiódica), estas probabilidades tienden a un límite cuando  $n$  tiende a infinito.

Una vez asegurada la existencia de los límites, es necesario calcularlos. Así, si se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{J}_n(j) = \bar{J}(j)$$

la estructura límite debe satisfacer

$$\bar{J} = \bar{J} P$$

con  $\sum_{j=1}^r \bar{J}(j) = 1$ .

La estructura o distribución límite puede entonces obtenerse, como ya se dijo, resolviendo el sistema de ecuaciones dado por el valor propio 1. Una propiedad importante de la solución es que no depende del estado inicial del problema. Como, dadas las suposiciones, el vector de la estructura esperada de la población en el tiempo presente, si esta estructura es todo lo que puede observarse, no existe forma de reconstruir la matriz de transición. Pero, de hecho, puede deducirse  $P$  de dos estructuras consecutivas  $\bar{J}_n$  y  $\bar{J}_{n+1}$ , aunque la información obtenida de este modo no sea totalmente confiable, dependiendo de las circunstancias.

El valor límite de  $P^n$ , denotado por  $P^\infty$  debe satisfacer:

$$\bar{J} = \bar{J}_0 P^\infty$$

lo cual sólo sucede cuando  $P^\infty$  es una matriz con todos sus renglones iguales entre sí e iguales al vector estacionario.

Si un modelo provee una adecuada descripción de sociedades reales, entonces su desarrollo futuro depende únicamente de su estructura inicial y de la matriz de transición. De estos dos factores, la distribución inicial tiene menos influencia conforme transcurre el tiempo. A la larga, la estructura de la sociedad está determinada por la matriz de transición.

Esta conclusión implica que el estudio de la movilidad debe centrarse en las probabilidades de transición. En particular, las medidas de movilidad serán funciones de los elementos de  $P$ . (Antes de esto, deben hacerse pruebas sobre la adecuación del modelo usando datos reales.)

### 3.15.2 ADECUACION DE UN MODELO

Considérese la siguiente tabla:

MATRIZ DE TRANSICION EN UN PASO

CLASE DEL PADRE	CLASE DEL HIJO				
	A	B	C	D	E
A. Profesional	.40	.30	.20	.09	.01
B. Ejecutivo	.40	.40	.10	.08	.02
C. Supervisor	.20	.30	.40	.06	.04
D. Obrero	.05	.05	.30	.40	.20
E. Subempleado	.01	.01	.08	.40	.50

Tabla 3.1

Estos datos no son reales, pero dan una imagen de los hechos: por lo general, la tendencia de los hijos es permanecer en la clase del padre, esto se observa por las probabilidades más altas sobre la diagonal principal. Por otro lado, es poco probable que el hijo de un profesional sea un subempleado y viceversa (aunque no es imposible); de modo que esto se expresa con probabilidades pequeñas.

En realidad, como se verá en seguida, la tendencia general es aumentar de status social.

Supongase una distribución inicial de probabilidades de la forma:

$$\pi_0 = (.02, .08, .20, .40, .30)$$

donde la mayoría se concentra en la clase obrera y la probabilidad de pertenecer a las clases más altas es pequeña.

Si se desea calcular la distribución de probabilidad dentro de 10 generaciones, por ejemplo, se obtienen los siguientes resultados:

$$\pi_{10} = (.25717, .25406, .22377, .16393, .10107)$$

Estos resultados se obtuvieron con el programa MARK1, que se muestra en el Apéndice A.

Dentro de 50 generaciones, el estado esperado será:

$$\pi_{50} = (.26090, .25715, .22331, .16091, .09773)$$

Se observa, entonces, una tendencia a pasar a las clases superiores, disminuyendo la probabilidad de ser subempleado, por ejemplo.

Ahora, supóngase que un profesional desea conocer la probabilidad de que sus bisnietos no pertenezcan a la clase "profesional". Esto equivaldría a calcular la probabilidad de encontrarse en cada uno de los otros 4 estados, después de 3 pasos (paso 1= hijo, paso 2= nieto, paso 3= bisnieto). Utilizando el programa MARK2, del Apéndice A:

$$P_a (T_a=3) = .12247$$

$$P_b (T_b=3) = .14020$$

$$P_c (T_c=3) = .07346$$

$$P_e (T_e=3) = .03961$$

La última probabilidad es la probabilidad de que sus bisnietos sean subempleados; la anterior es la probabilidad de que sean obreros, y así sucesivamente.

Con esta matriz de transición se obtiene un vector de probabilidades estacionario (MARK3, Apéndice A):

$$\pi = (.2690, .25715, .22331, .16090, .09773)$$

que, como se ve, es igual al vector de las 50 generaciones. Esto quiere decir que, en la generación número 50, ya se alcanzó una distribución estable.

Si se desea conocer los tiempos esperados de recurrencia, es decir, el número de generaciones esperado para que, una vez que se ha salido de una clase, se vuelva a ella, se tiene (programa MARK3, Apéndice A):

$$\mu_a = 3.83$$

$$\mu_b = 3.89$$

$$\mu_c = 4.48$$

$$\mu_d = 6.21$$

$$\mu_e = 10.23$$

(Recuérdese que la probabilidad de recurrencia es igual al inverso de los tiempos esperados de recurrencia.)

De la misma forma, pueden calcularse los tiempos de llegada por primera vez (o tiempos del primer paso):

$$\mu_{a0} = 4.31$$

$$\mu_{bc} = 5.55$$

$$\mu_{e0} = 10.82$$

que representan el número de generaciones esperado para pasar de una clase a otra. (Programa MARK4, Apéndice B)

### 3.15.3 MEDIDAS DE MOVILIDAD

Es conveniente, especialmente cuando se comparan dos sociedades, tener una medida de la movilidad. De acuerdo al modelo de Markov, la sociedad se caracteriza por su matriz de transición.

En una sociedad completamente inmóvil, los hijos tendría exactamente la clase de sus padres, y la matriz  $P$  tendría 1's en la diagonal principal, y cero en todas las demás entradas.

En una sociedad perfectamente móvil, la clase del hijo sería absolutamente independiente de la del padre. Una sociedad de este tipo, tendría una matriz  $P$  con todos sus renglones idénticos.

Una sociedad con movilidad extrema, donde los hijos siempre tuvieran una clase distinta de la del padre, tendría una matriz de transición  $P$  con entradas cero, excepto en la diagonal secundaria, cuyos elementos serían todos 1's.

Por lo general, la matriz de transición de una sociedad normal, es un intermedio entre los dos primeros casos, semejante a la matriz de transición del ejemplo.

### 3.16 LECTURAS RECOMENDADAS

- i) Bh, Caps. III al VII
- ii) C, *Processus Stochastiques, leurs Graphes, leurs Usages*
- iii) Gg, *Cadenas Finitas de Markov y sus Aplicaciones*
- iv) Hi, Cap. IX
- v) K, Cap. VII y VIII
- vi) Hps, *Introduction to Stochastic Processes*
- vii) N, *Stochastic Processes*
- viii) Pa, Caps. VI y VII
- ix) Ro, *Random Processes*

### 3.17 EJERCICIOS

3.1. Supóngase que la probabilidad de que llueva mañana, si está lloviendo hoy, es 0.6; y que la probabilidad de tener un día despejado mañana es de 0.9, si está despejado hoy.

a) Determine la matriz de transición de un paso.

b) Encuentre las probabilidades de estado estacionario.

3.2 Determine las clases de las cadenas de Markov y cuáles son recurrentes y transitorias.

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

3.3 Supóngase que una red de comunicaciones transmite números en un sistema binario. Al pasar a través de la red, existe una probabilidad  $q$  de que el número registrado se reciba incorrectamente en la siguiente etapa. Si  $X_0$  denota el número que entra al sistema,  $X_1$  el número registrado después de la primera transmisión,  $X_2$  el número registrado después de la segunda transmisión, ..., entonces  $X_n$  es una cadena de Markov. Hallar la matriz de transición de un paso y el estado estacionario.

3.4 Supóngase que una cadena de Markov tiene matriz de transición doblemente estocástica, y que consta de  $n$  estados. Demuestre que si una cadena de este tipo es irreducible, y aperiódica, entonces

$$\pi(j) = \frac{1}{n}, \quad \text{para } j=1,2,\dots, n$$

3.5 Una partícula se mueve sobre un círculo, pasando por los puntos que se han marcado 0,1,2,3,4 (siguiendo un orden en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj). La partícula parte del punto 0. En cada paso tiene una probabilidad  $q$  de moverse un punto en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj y  $1-q$  de moverse un punto en sentido contrario a las

manecillas del reloj. Sea  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , su localización sobre el círculo, entonces  $X_n$  es una cadena de Markov.

- a) Hallar la matriz de probabilidad de transición.
- b) Encontrar el grafo asociado.
- c) Hallar el vector de estado estacionario.

3.6 Sea  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , una cadena de Markov de dos estados. Encontrar

- a)  $P(X_2=0 / X_0=0 \text{ y } X_1=0)$
- b)  $P(X_1 \neq X_2)$
- c)  $P(X_1 = X_2)$

3.7 Supóngase que se tienen dos cajas y  $2d$  bolas, de las cuales  $d$  son negras y  $d$  son blancas. Inicialmente, hay  $d$  bolas en cada caja. En cada ensayo se extrae una bola al azar de cada una de las dos cajas y se colocan en la caja opuesta. Sea  $X_0$  el número de bolas negras que hay inicialmente en la caja A y, para  $n=1$ , sea  $X_n$  el número de bolas negras en la caja A después del  $n$ -ésimo ensayo. Hallar la función de transición.

3.8 Modifíquese la cadena de colas suponiendo que si hay uno o más clientes esperando ser atendidos al inicio de un periodo, existe una probabilidad  $p$  de que un cliente sea atendido durante ese periodo, y  $1-p$  de que ninguno sea atendido, es decir, que se esté atendiendo todavía al cliente anterior. Hallar la función de transición.

3.9 Sea  $X_n$ ,  $n=0$ , una cadena de Markov de dos estados.

- a) Encontrar  $P_x(T_0 = n)$
- b) Encontrar  $P_0(T_1 = n)$

3.10 Sea  $X_n$ ,  $n=0$ , la cadena de Ehrenfest, y supóngase que  $X_0$  tiene una distribución binomial con parámetros  $d$  y  $1/2$ . Encontrar la distribución de  $X$ .

3.11 Considere la cadena de Ehrenfest con  $d=4$ .

- a) Encontrar  $P_x(T_0 = n)$  para  $x \in S$  y  $1 \leq n \leq 4$ .
- b) Encontrar  $P$ ,  $P^2$  y  $P^3$ .
- c) Si  $\pi_0 = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$ , encontrar  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_n$ .
- d) Encuentre el grafo asociado y determine su periodo.

3.12 Considérese la cadena de Markov con espacio de estados  $\{0, 1, 2\}$  y matriz de transición

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 \\
 1-p & 0 & p \\
 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}$$

- a) Encontrar  $P^2$  y  $P^4$ .
- b) Encontrar  $P^n$ ,  $n > 1$ .
- c) Encontrar el grafo asociado y determinar el periodo.

3.13 Considérese una cadena de Markov en los enteros no negativos tal que, iniciando en  $x$ , la cadena va al estado  $x+1$  con probabilidad  $p$ ,  $0 < p < 1$  y va al estado 0 con probabilidad  $1-p$ .

- a) Trazar el grafo asociado.
- b) Probar que esta cadena es irreducible.
- c) Probar que la cadena es recurrente.

3.14 Considérese la cadena de Markov con espacio de estados  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y matriz de transición

$$\begin{bmatrix}
 1/2 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2
 \end{bmatrix}$$

- a) Trazar el grafo asociado a la matriz.
- b) Determinar cuáles estados son transitorios y cuáles recurrentes.
- c) Hallar  $P_{ij}^n$ ,  $j=0, \dots, 6$ .

3.15 Considere la cadena de Markov en  $0, 1, \dots, 5$  con matriz de transición

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

a) Trazar el grafo asociado.

b) Determinar los estados transitorios y recurrentes,

c) Hallar  $P_{ii}^{(x)}$ ,  $x=0, \dots, 5$ .

3.16 Considere la cadena de la ruina de un jugador en  $(0, 1, \dots, d)$ . Hallar  $P_x(T_0 < T_d)$ ,  $0 < x < d$ .

3.17 Considere una cadena irreducible de nacimiento en los enteros. Mostrar que si  $p_x \neq q_x$  para  $x \geq 1$ , la cadena es recurrente.

3.18 Considere una cadena irreducible de nacimiento y muerte en los enteros no negativos tal que

$$(q_x / p_x) = (x / (x+1))^2, \quad x \geq 1.$$

a) Probar que la cadena es transitoria.

b) Hallar  $P_{20}$ ,  $x=1$ .

3.19 Se efectuó una encuesta de mercado de tres marcas de chocolates X, Y y Z. Cada vez que el cliente compra un nuevo paquete, puede comprar de la misma marca o cambiarse a otra. Se han obtenido los siguientes datos estimados:

	MARCA RECIEN COMPRADA		
	X	Y	Z
MARCA PRESENTE	X 0.7	0.2	0.1
Y	0.3	0.5	0.2
Z	0.3	0.3	0.4

Se estima que en este momento el 30 por ciento de los clientes compran la marca X, 20 por ciento la marca Y, y 50 por ciento la marca Z.

a) Trazar el grafo asociado.

b) Encontrar la distribución límite.

3.20 Demostrar que una cadena absorbente no es regular.

## CONCLUSION

Como se ha visto a lo largo del texto, existe una infinidad de posibles aplicaciones de la teoría de los Procesos Estocásticos, y, sobre todo, este tipo de modelos se ajustan más a los fenómenos reales.

Sin embargo, en la práctica es poco usual el empleo de estos conocimientos. Además de ser poco conocidos, y de que la bibliografía al respecto es poco abundante, se da un cierto rechazo a involucrar la probabilidad en la planeación. Esto sucede, sobre todo, en los aspectos que tratan con la conducta humana.

Cuando los aspectos sociales de un problema son significativos, como frecuentemente lo son, los procesos estocásticos pueden facilitar parte del camino a recorrer. Aunque, indudablemente, esta tarea debe ser completada por el criterio, el sentido común, la intuición, la experiencia o cualquier otro elemento que esté disponible. Pero se observa que el uso de los Procesos Estocásticos en particular, y de los métodos estadísticos y matemáticos en general, son muy limitados en estos aspectos.

El hombre no es sujeto de fácil estudio. Los métodos que se emplean para estudiar su naturaleza no funcionan muy bien. Los experimentos en los que intervienen seres humanos nunca pueden repetirse exactamente; y cambios sutiles de las condiciones experimentales pueden hacer que los resultados no sean concluyentes. Las predicciones basadas en teorías también son difíciles de verificar; el propio acto de la verificación puede alterar el comportamiento del sujeto.

En realidad, también un experimento físico o químico resulta estar influenciado por una serie de factores imposibles de detectar y, menos aún, de medir. Por muy científico y exacto que se considere un experimento, siempre existirán elementos del exterior afectaran de algún modo los resultados, muy posiblemente en forma aleatoria. De modo que los Procesos Estocásticos resultan útiles en cualquier caso.

Se dice consensuadamente que las matemáticas son el lenguaje de la ciencia. Entonces, deben serlo también de las ciencias sociales. El lenguaje de las matemáticas, desconocido para la mayoría de la gente, es un lenguaje preciso, breve y objetivo, que simplifica

las cosas, haciéndolas manejables. No es un lenguaje emocional, pero sí suficientemente rico para servir a las necesidades de la ciencia en todas sus etapas. En cualquier parte de la ciencia son necesarias la precisión, la brevedad y la objetividad; aun en las ciencias sociales, que tratan con un sujeto (el hombre), cuyas características vagas, ambiguas y emocionales hacen que la precisión sea difícil de obtener.

En muchas ocasiones, se rechaza el empleo de las matemáticas en las ciencias sociales, porque se da una impresión de deshumanización, de materialización de los actos personales, perdiendo de vista a la persona como ser único y especial. Esta sensación se ha incrementado con el advenimiento y desarrollo de los sistemas electrónicos de información.

Pero de la misma forma que el teléfono, la televisión, y demás medios de comunicación son herramientas al servicio de la sociedad y de la persona en particular, las matemáticas, junto con la computación y todos los avances, son implementos cuyo objetivo esencial es mejorar la condición del hombre.

Claro que, como todos los demás conocimientos, pueden ponerse al servicio de intereses poco sanos, y redundar en consecuencias fatales. El uso que se haga de ellos dependerá, como siempre, de la libertad y los ideales de quien los tenga en sus manos.

**A P E N D I C E    A**  
**ALGUNOS PROGRAMAS UTILES**

*"Dar al hombre lo que es del hombre,  
y a la computadora  
lo que es de la computadora"*

(N. WIENER)

## A P E N D I C E A

A continuación se presentan varios programas que pueden utilizarse para agilizar y simplificar algunos de los cálculos que aparecen dentro del texto.

Los programas están escritos en lenguaje Pascal, para la microcomputadora Columbia. Sin embargo, se muestran también los respectivos diagramas de bloque, de modo que pueden realizarse fácilmente en cualquier otro lenguaje o máquina.

(Estos programas se utilizaron para calcular los resultados obtenidos en la sección 3.15.2 del Capítulo III.)

Antes de cada programa aparece su respectivo diagrama de bloque, así como las variables que el programa acepta y los resultados que se producen. Se incluye, al final de cada programa una corrida, que puede emplearse para probar el programa.

**A.1 MARK1. PROGRAMA PARA CALCULAR LA N-ESIMA POTENCIA DE LA MATRIZ DE TRANSICION Y LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DESPUES DE N PASOS.**

El programa acepta los siguientes datos:

NED: número de estados (entero).

NPT: potencia (entero).

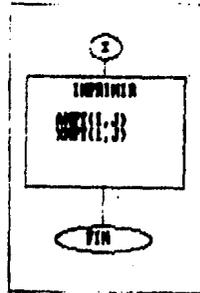
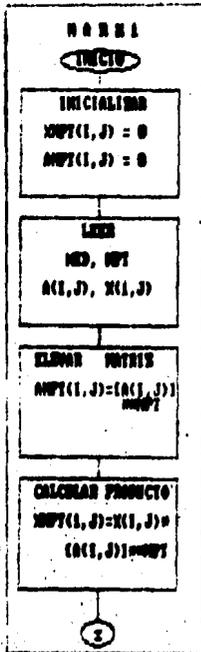
A(I,J): probabilidad de pasar del estado i al estado j (real).

X(J): distribución inicial de probabilidad del estado j (real).

El programa genera los siguientes resultados:

ANPT(I,J): probabilidad de pasar del estado i al estado j después de npt pasos (real).

XNPT(J): proporción del estado j después de npt pasos (real).



```

program mark1;
type
  MAT2DIN = array [1..25,1..25] of real;

var
  NED,R,S,N : integers;
  A : MAT2DIN;
  PRSN : real;

procedure DESPMAT(N,M : integers;
  A : MAT2DIN);

var
  I,J : integers;

begin
  for I:=1 to N do
    for J:=1 to M do
      begin
        writeln('A(',I,',',J,')=' ,A[I,J]);
      end;
    end;
  end;

procedure MULMAT(N,M,L : integers;
  A,B : MAT2DIN;
  var C : MAT2DIN);

var
  I,J,K : integers;

begin
  for I:=1 to N do
    for J:=1 to L do
      begin
        C[I,J]:=0;
        for K:=1 to M do
          begin
            C[I,J]:=C[I,J]+A[I,K]*B[K,J];
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;

procedure LEENAT(N,M : integers;
  var A : MAT2DIN)

var
  I,J : integers;

begin
  for I:=1 to N do
    for J:=1 to M do
      begin
        write('A(',I,',',J,')=' );
        readln(A[I,J]);
      end;
    end;
  end;

```

```

        end;

    end;

    procedure RESULTADOS(NED,R,S,N : integer;
        A : MAT2DIM;
        PRSN : real);
    begin
        writeln;
        writeln('Resultados:');
        writeln;
        writeln('Matriz de ','Transicion Original');
        DESPMAT(NED,NED,A);
        writeln;
        writeln('Probabilidad de ir del estado ',R,' al estado ',S);
        writeln(' en ',N,' pasos = ',PRSN);
    end;

    function G(NED,R,S,N : integer; A : MAT2DIM) : real;
    var
        I,J : integer;
        B : MAT2DIM;
        SUM : real;
    begin
        for I:=1 to NED do
            for J:=1 to NED do
                B[I,J]:=A[I,J];
            if N>1 then
                begin
                    SUM:=0;
                    for I:=N-1 downto 1 do
                        begin
                            SUM:=SUM+G(NED,R,S,I,A)*B[S,J];
                            MULMAT(NED,NED,NED,A,B,B);
                        end;
                    B:=B[R,S]-SUM;
                end
            else
                B:=B[R,S];
            end;
        end;
    end;

    procedure LECTURA(var NED,R,S,N : integer;
        var A : MAT2DIM);
    begin
        writeln;
        writeln('Mark2. Probabilidad de ir de R a S');
        writeln('por primera vez en N pasos');
        writeln;
        write('Numero de Estados');
        readln(NED);
        write('R=');
        readln(R);
        write('S=');
        readln(S);
        write('N=');
    end;

```

```
readln(N);  
writeln('Matriz de Transiciones');  
LEEMAT(NED,NED,A);  
  
end;  
  
procedure INICIALIZA;  
begin  
  PRSN:=0;  
  
end;  
  
begin  
  INICIALIZA;  
  LECTURA(NED,R,S,H,A);  
  PRSN:=B(NED,R,S,H,A);  
  RESULTADOS(NED,R,S,H,A,PRSN);  
  
end.
```

**A.2 MARK2. PROGRAMA PARA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE PASAR DEL ESTADO "R" AL ESTADO "S" POR PRIMERA VEZ EN "N" PASOS.**

El programa acepta los siguientes datos:

*NED*: número de estados (entero).

*R*: estado inicial (entero).

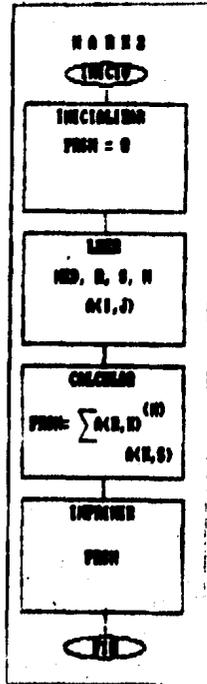
*S*: estado final (entero).

*N*: número de pasos (entero).

*A(I,J)*: probabilidad de pasar del estado *i* al estado *j* (real).

Y genera los siguientes resultados:

*PRSN*: probabilidad de pasar del estado *r* al estado *s* por primera vez en *n* pasos (real).



```

program mark2;
type
  mat2dim = array [1..25,1..25] of real;

var
  ned,npt:integer;
  a,anpt:mat2dim;
  X,xnpt:mat2dim;

procedure despmat(n,m:integer;a:mat2dim);
var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
    for j:= 1 to m do
      begin
        writeln('A(',i,',',j,')=',a[i,j]);
      end;
    end;
  end;

procedure mulsat(n,m,l:integer;
  a,b:mat2dim;
  var c:mat2dim);
var
  i,j,k:integer;
begin
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to l do
      begin
        c[i,j]:=0;
        for k:=1 to m do
          begin
            c[i,j]:=c[i,j]+a[i,k]*b[k,j];
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;

procedure potsat(n,p:integer;
  a:mat2dim;
  var apos:mat2dim);
var
  i,j,l:integer;
begin
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
      begin
        if i<>j then

```

```

                apo[i, j] := 0
            else
                apo[i, j] := 1;
            end;
        for i:=1 to po do
            begin
                mulmat(n, n, n, a, apo, apo);
            end;
        end;

procedure resultados(ned, npt: integer;
                    anpt: mat2dim;
                    xnpt: mat2dim);

begin
    writeln;
    write('La Matriz de Transicion elevada a la ', npt);
    writeln;
    despmat(ned, ned, anpt);
    writeln;
    writeln('Distribucion de Probabilidad despues de ',
            npt, ' pasos');
    despmat(1, ned, xnpt);
end;

procedure calcpot(ned, npt: integer;
                 a: mat2dim;
                 x: mat2dim;
                 var anpt: mat2dim;
                 var xnpt: mat2dim);

begin
    potmat(ned, npt, a, anpt);
    mulmat(1, ned, ned, x, anpt, xnpt);
end;

procedure lectura(var ned, nept: integer;
                 var a: mat2dim;
                 var x: mat2dim);

var
    i, j: integer;

begin
    writeln('Mark1. Matriz de Transicion en N pasos');
    writeln(' y Distribuciones de Probabilidad');
    writeln(' despues de N pasos');
    writeln;
    write('Numero de Estados= ');
    readln(ned);
    writeln;
    write('Potencia= ');

```

```

readln(npt);
writeln;
writeln('Matriz de Transicion');
for i:=1 to ned do
  for j:=1 to ned do
    begin
      write('A(' , i , ',' , j , ')=' );
      readln(a[i,j]);
    end;
  writeln;
writeln('Distribucion Inicial de Probabilidad');
for j:=1 to ned do
  begin
    write('x(' , j , ')=' );
    readln(x[i,j]);
  end;
end;
end;

```

```

procedure inicializa;
var
  i, j:integer;
begin
  for i:=1 to 25 do
    begin
      for j:=1 to 25 do
        begin
          xnpt[i,j]:=0;
          anpt[i,j]:=0;
        end;
      end;
    end;
end;

```

```

end;
begin
  inicializa;
  lectura(ned,npt,e,x);
  calculo(ned,npt,e,x,anpt,xnpt);
  resultados(ned,npt,anpt,xnpt);
end.

```

**A.3 MARK3. PROGRAMA PARA CALCULAR EL ESTADO ESTACIONARIO DE UNA CADENA DE MARKOV Y SUS TIEMPOS DE RECURRENCIA.**

El programa acepta los siguientes datos:

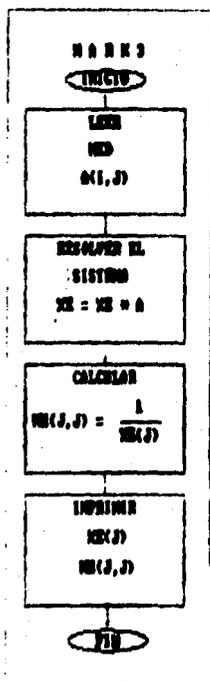
**NED:** número de estados (entero).

**A(I,J):** probabilidad de pasar del estado *i* al estado *j* (real).

Y genera los siguientes resultados:

**XE(J):** proporción del estado *j* en el estado estacionario (real).

**MU(I,J):** tiempo de recurrencia para  $i=j$  (real).



```

program mark3;
type
  mat2dim=array[1..25,1..25] of real;

var
  ned,swerror:integer;
  a,x,e,mu:mat2dim;

procedure despmat(n,m:integer; a:mat2dim);
var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to m do
      begin
        writeln('A(',i,',',j,')=',a[i,j]);
      end;
    end;
  end;

procedure gssjrd(n,m:integer;
  a:mat2dim;
  var b:mat2dim);

var
  i,j,k,l,ipiv,jpiv:integer;
  factor,max:real;

  procedure buscamax(n,m,iact:integer;
    a:mat2dim;
    var max:real;
    var ipiv,jpiv:integer);
var
  i,j:integer;
begin
  for i:=iact to n do
    for j:=1 to m do
      begin
        if (j<=n) then
          if abs(a[i,j])>max then
            begin
              max:=abs(a[i,j]);
              ipiv:=i;
              jpiv:=j;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;

  procedure cambrenq(m,i,ipiv:integer;
    var a: mat2dim);
var
  j:integer;

```

```

    factors:=real;
begin
    for j:=1 to m do
        begin
            factors:=a[ipiv,j];
            a[ipiv,j]:=a[i,j];
            a[i,j]:=factors;
        end;
    end;
begin
    for i:=1 to n do
        for j:=1 to m do
            b[i,j]:=a[i,j];
        for i:=1 to n do
            begin
                maxi:=0;
                ipiv:=0;
                jpiv:=0;
                buscamax(n,m,i,b,max,ipiv,jpiv);
                if (ipiv<>1) and (ipiv<>0) then
                    cambren(n,i,ipiv,b);
                if jpiv<>0 then
                    begin
                        factors:=b[i,jpiv];
                        for j:=1 to m do
                            begin
                                b[i,j]:=b[i,j]/factors;
                            end;
                        b[i,jpiv]:=1;
                        for k:=1 to N do
                            begin
                                if k<>i then
                                    begin
                                        factors:=b[k,jpiv];
                                        for l:=1 to m do
                                            begin
                                                b[k,l]:=b[k,l]-factor*b[l,
                                                end;
                                            end;
                                        end;
                                    end;
                                end;
                            end;
                        end;
                    end;
                end;
            end;
        end;
    end;
end;

procedure resultados(ned:integer;
    a,xo,auxmat2dim;
    swerrors:integer);

begin
    writeLn;
    writeLn('Matriz de Transicion Originals');
    despmat(ned,ned,a);

```

```

writeln;
writeln('Distribuciones Estacionarias de Probabilidad:');
despmat(1,ned,xe);
writeln;
writeln('Tiempos Esperados de Recurrencia');
despmat(ned,ned,mu);
if swerror=1 then
  writeln('***** Ninguna o Infinitas Soluciones *****');
end;

```

```

procedure calctar(ned:integer;
  xemat2dim;
  var muemat2dim);

```

```

var
  i,j:integer;

```

```

begin
  for i:=1 to ned do
    begin
      for j:=1 to ned do
        begin
          mu[i,j]:=0;
          end;
          if xe[i,i]>0 then
            mu[i,i]:=1/xe[i,i];
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;

```

```

procedure calcede(ned:integer;
  bemat2dim;
  var xemat2dim;
  var swerror:integer);

```

```

var
  i,j,swsig:integer;
  amat2dim;

```

```

begin
  swerror:=0;
  for i:=1 to ned do
    for j:=1 to ned do
      begin
        amat[i,j]:=b[j,i];
        end;
      end;
    for i:=1 to ned do
      begin
        amat[i,i]:=amat[i,i]-1;
        amat[i,ned+1]:=0;
        end;
      for j:=1 to ned+1 do
        begin
          amat[i,j]:=1;

```

```

        end;
    gssjrd(ned,ned+1,a,a);
    for i:=1 to ned do
        begin
            swasig:=0;
            for j:=1 to ned do
                begin
                    if a[i,j]=1 then
                        begin
                            swasig:=1;
                            xe[i,j]:=a[i,ned+1];
                        end;
                    end;
                if swasig=0 then
                    begin
                        swerror:=1;
                        for is:=1 to ned do
                            xe[1,is]:=0;
                        end;
                    end;
                end;
            end;
        end;

    end;

procedure lectura(var ned:integer;
                 var amat2din);

var
    i,j:integer;

begin
    writeln('Mark3. Estados Estacionarios');
    writeln(' y Tiempos de Recurrencia');
    writeln;
    write('Numero de Estados=');
    readln(ned);
    writeln;
    writeln('Matriz de Transiciones');
    for i:=1 to ned do
        for j:=1 to ned do
            begin
                write('A(' ,i ,',' ,j ,')=');
                readln(a[i,j]);
            end;
        end;
    end;

end;

begin
    lectura(ned,a);
    calcede(ned,a,xe,swerror);
    calctar(ned,xe,au);
    resultados(ned,a,xe,au,swerror);

end.

```

**A.4 MARK4. PROGRAMA PARA CALCULAR EL TIEMPO DE LLEGADA POR PRIMERA VEZ DEL ESTADO "I" AL ESTADO "J", CON "I" DISTINTO DE "J".**

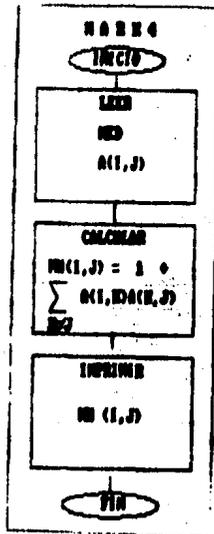
El programa acepta los siguientes datos:

NED: número de estados (entero).

A(I,J): probabilidad de pasar del estado i al estado j (real).

Y genera los siguientes resultados:

NU(I,J): tiempo de llegada por primera vez del estado i al estado j, para i distinto de j.



```

program mark4;
type
  mat2dim=array[1..25,1..25] of real;
var
  ned, j, swerror:integer;
  a, mat2dim;

procedure despmat(n, m:integer;
  a:mat2dim);
var
  i, j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to m do
      begin
        writeln('A(', i, ', ', j, ') = ', a[i, j]);
      end;
    end;
  end;

procedure gsjrd(n, m:integer;
  a:mat2dim;
  var b:mat2dim);
var
  i, j, k, l, ipiv, jpiv:integer;
  factor, max:real;

  procedure buscamax(n, m, iact:integer;
    a:mat2dim;
    var max:real;
    var ipiv, jpiv:integer);
  var
    i, j:integer;
  begin
    for i:=iact to n do
      for j:=1 to m do
        begin
          if (j<=n) then
            if abs(a[i, j])>max then
              begin
                max:=abs(a[i, j]);
                ipiv:=i;
                jpiv:=j;
              end;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;

  procedure cambren(m, i, ipiv:integer;
    var a:mat2dim);
  var
    j:integer;
    factor:real;

```

```

begin
  for j:=1 to m do
    begin
      factor:=a[ipiv,j];
      a[ipiv,j]:=a[i,j];
      a[i,j]:=factor;
    end;
  end;

begin
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to m do
      b[i,j]:=a[i,j];
    for i:=1 to n do
      begin
        maxi:=0;
        ipiv:=0;
        jpiv:=0;
        buscanex(n,m,i,b,max,ipiv,jpiv);
        if(ipiv<>i) and(ipiv<>0) then
          casbrenq(m,i,ipiv,b);
        if jpiv<>0 then
          begin
            factor:=b[i,jpiv];
            for j:=1 to m do
              begin
                b[i,j]:=b[i,j]/factor;
              end;
            b[i,jpiv]:=1;
            for k:=1 to N do
              begin
                if k<>i then
                  begin
                    factor:=b[k,jpiv];
                    for l:=1 to m do
                      begin
                        b[k,l]:=b[k,l]-factor*b[
                        end;
                      end;
                    end;
                  end;
              end;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;

end;

procedure leemat(n,m:integer;
  var a:mat2dim);

var
  i,j:integer;

begin
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to m do
      begin

```

```

        write('A',i,',',j,')='');
        readln(a[i,j]);
    end;
end;

procedure resultados(ned:integer;
                    a:mat2dim;
                    mu:mat2dim;
                    swerror:integer);

begin
    writeln;
    writeln('Matriz de Transicion Originals');
    despmat(ned,ned,a);
    writeln;
    if swerror <> 1 then
        writeln('Matriz de Tiempos de Llegadas por Primera Vez');
    if swerror <> 1 then
        despmat(ned,ned,mu);
    writeln;
    if swerror=1 then
        writeln('**** No hay Solucion o la Solucion es Infinita ****');
end;

procedure calctim(ned:integer;
                  a:mat2dim;
                  var mu:mat2dim;
                  var swerror:integer);

var
    j:integer;

    procedure calcau(ned,s:integer;
                    a:mat2dim;
                    var mu:mat2dim;
                    var swerror:integer);

    var
        i,j,swasig:integer;
        b:mat2dim;

    begin
        for i:=1 to ned do
            begin
                for j:=1 to ned do
                    begin
                        b[i,j]:=a[i,j];
                        if i=j then
                            b[i,j]:=b[i,j]-1;
                        if j=s then
                            b[i,j]:=0;
                    end;
                b[i,ned+1]:=-1;
                if i=s then

```

```

begin
    for j:=1 to ned+1 do
        b[i,j]:=0;
        b[s,s]:=1;
    end;
end;
gssjrd(ned,ned+1,b,b);
for i:=1 to ned do
begin
    swasig:=0;
    for j:=1 to ned do
begin
    if b[i,j]=1 then
begin
        mu[j,s]:=b[i,ned+1];
        swasig:=j;
    end;
end;
if swasig=0 then
    swerror:=1;
end;
end;
end;
begin
    swerror:=0;
    for j:=1 to ned do
begin
    calcau(ned,j,a,mu,swerror);
end;
end;
end;
procedure lectura(var ned:integer;
var amat2dim);
begin
    writeln;
    writeln('Mark4. Tiempos de Llegada Por Primera Vez');
    writeln(' del Estado I al Estado J. [I<>JJ]');
    writeln;
    write('Numero de Estados= ');
    readln(ned);
    writeln;
    writeln('Matriz de Transiciones');
    leemat(ned,ned,a);
end;
begin
    lectura(ned,a);
    calctim(ned,a,mu,swerror);
    resultados(ned,a,mu,swerror);
end.

```

**A.5 MARKS. PROGRAMA QUE SIMULA UN PROCESO DE CAMINATA ALEATORIA.**

El programa simula un paseo aleatorio en dos dimensiones, partiendo del origen, en ángulos al azar.

El programa acepta el dato:

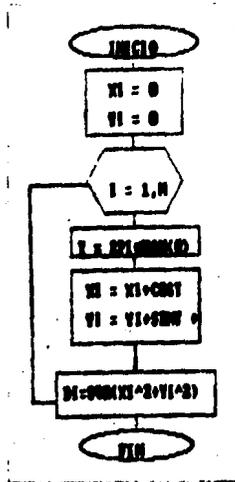
$N$  : número de pasos

Y genera los siguientes resultados:

$X$  : posición en la abscisa correspondiente

$Y$  : posición en la ordenada correspondiente

$D$  : distancia del punto  $(X,Y)$  al origen



```

program mark5;
var
  n,i:integer;
  t,x,y,d:real;
const
  pi=3.1415926;
begin
  writeln(' Mark5. Programa que Simula un Proceso de Caminata Aleator
  writeln;
  write(' Numero de pasos = ');
  readln(n);
  x:=0;
  y:=0;
  for i:=1 to n do
    begin
      t:=2 * pi * random;
      x:=x + cos(t);
      y:=y + sin(t);
      d:=sqrt(x*x + y*y);
      writeln;
      writeln('Paso ',i,' Coordenadas ',
        'x = ',x:3:2,' , y = ',y:3:2,
        ' Distancia al origen = ',d:2:2);
    end;
end.

```

**Mark5. Programa que Simula un Proceso de Caminata Aleatoria**

**Numero de pasos = 10**

**Paso 1** Coordenadas  $x = 0.97$  ,  $y = -0.24$  Distancia al origen = 1.00  
**Paso 2** Coordenadas  $x = 1.00$  ,  $y = 0.76$  Distancia al origen = 1.26  
**Paso 3** Coordenadas  $x = 1.39$  ,  $y = -0.16$  Distancia al origen = 1.40  
**Paso 4** Coordenadas  $x = 1.88$  ,  $y = 0.71$  Distancia al origen = 2.01  
**Paso 5** Coordenadas  $x = 2.77$  ,  $y = 0.25$  Distancia al origen = 2.79  
**Paso 6** Coordenadas  $x = 2.08$  ,  $y = 0.97$  Distancia al origen = 2.30  
**Paso 7** Coordenadas  $x = 3.05$  ,  $y = 1.22$  Distancia al origen = 3.11  
**Paso 8** Coordenadas  $x = 2.99$  ,  $y = 2.22$  Distancia al origen = 3.11  
**Paso 9** Coordenadas  $x = 2.85$  ,  $y = 1.23$  Distancia al origen = 3.11  
**Paso 10** Coordenadas  $x = 3.77$  ,  $y = 1.61$  Distancia al origen = 4.10

**A P E N D I C E 3**  
**ELEMENTOS DE PROBABILIDAD**

**"El hombre tiene mil planes para sí mismo.  
El azar, sólo uno para cada uno."**

**(Aristóteles)**

## A P E N D I C E B

A continuación se enunciarán algunos conceptos importantes que se manejan a lo largo del texto. Para un estudio más detallado se sugiere consultar textos específicos de probabilidad.

### DEFINICIONES

Se llama **ESPACIO MUESTRAL** al conjunto de resultados posibles de un experimento.

Una **VARIABLE ALEATORIA** (generalmente abreviada como *v.a.*), es una función de valor numérico definida sobre el espacio muestral.

### PROPIEDADES

i)  $0 \leq P(\text{evento}) \leq 1$ , i.e., la probabilidad de un evento siempre es no negativa y nunca será mayor que 1.

ii)  $P(\text{evento imposible}) = 0$

iii)  $P(\text{espacio muestral}) = 1$

### EVENTOS Y REGLAS

EVENTOS A, B	REGLAS DE ADICION $P(A \cup B)$	REGLAS DE PRODUCTO $P(A \cap B)$
Mutuosmente excluyentes	$P(A) + P(B)$	0
Dependientes	$P(A) + P(B) - P(A)P(B/A)$	$P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$
Independientes	$P(A) + P(B) - P(A)P(B)$	$P(A)P(B)$

### DEFINICIONES

**FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD:**  $f_n(x) = P(X=x)$

**FUNCION DE DISTRIBUCION ACUMULATIVA:**

$$F_n(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X=x_i), \text{ si } X \text{ discreta}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx, \text{ si } X \text{ continua.}$$

ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_k k P(X=k) = \sum_k k P(k), & \text{si } X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y) dy, & \text{si } X \text{ continua.} \end{cases}$$

ESPERANZA DE UNA FUNCION DE VARIABLE ALEATORIA:

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_k g(k) P(X=k) = \sum_k g(k) P(k), & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f_X(y) dy, & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

MOMENTOS:

Sea la función  $g$  dada por

$$Z = g(X) = X^j,$$

donde  $j$  es un entero positivo, entonces la esperanza de  $X^j$  se conoce como  $j$ -ésimo momento respecto al origen de la variable aleatoria  $X$  y está dado por

$$E(X^j) = \begin{cases} \sum_k k^j P(k), & \text{si } X \text{ es v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^j f_X(y) dy, & \text{si } X \text{ es v.a. continua.} \end{cases}$$

Nótese que cuando  $j=1$  el primer momento coincide con la esperanza de  $X$ . Generalmente este momento se denota mediante el símbolo  $\mu$  y a menudo se conoce con el nombre de media o promedio de la distribución.

La esperanza de una constante  $C$  por  $X$  es igual a la constante  $C$  por la esperanza de  $X$ :

$$E(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cy f_X(y) dy = C \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y) dy = C E(X).$$

Si la función  $g$  está dada por  $Z=g(X)=(X-E(X))^j = (X-\mu)^j$ , en donde  $j$  es un entero positivo, entonces la esperanza de  $(X-\mu)^j$  se llama  $j$ -ésimo momento respecto a la media de la variable aleatoria  $X$  y está dado por

$$E(X-E(X))^j = E(X-\mu)^j = \begin{cases} \sum_k (k-\mu)^j P_X(k), & \text{si } X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu)^j f_X(y) dy, & \text{si } X \text{ continua.} \end{cases}$$

Nótese que si  $j=1$ , entonces  $E(X-\mu)=0$ . Si  $j=2$ , entonces  $E(X-\mu)^2$  se llama varianza de la variable aleatoria  $X$  y frecuentemente se denota por  $\sigma^2$ . La raíz cuadrada de la varianza,  $\sigma$ , se llama

desviación estándar de la variable aleatoria  $X$ .

#### ALGUNOS TEOREMAS PARA VARIABLES ALEATORIAS.

Estos teoremas pueden demostrarse fácilmente utilizando las definiciones anteriores.

##### TEOREMA 1.

El valor esperado de una suma de variables aleatorias es la suma de los valores esperados individuales.

##### TEOREMA 2.

La varianza de una suma de variables aleatorias es

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij}$$

##### TEOREMA 3.

Si una variable aleatoria  $x$  con varianza  $\sigma_x^2$  se multiplica por una constante  $C$ , la varianza de la variable aleatoria  $z=Cx$  es igual a  $C^2\sigma_x^2$ .

#### FUNCION CARACTERISTICA.

Sea  $X$  una variable aleatoria con función de distribución  $f(x)$ . Entonces la función característica está definida como

$$\Phi(t) = E(e^{it^n})$$

de donde

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} \sum e^{itx} p(x_i), & \text{si } X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx, & \text{si } X \text{ continua.} \end{cases}$$

##### TEOREMA 4.

Si el  $k$ -ésimo momento de una variable aleatoria existe, éste es expresado por

$$\mu_k = \frac{\Phi^{(k)}(0)}{i^k}$$

donde  $\Phi^{(k)}(0)$  es la  $k$ -ésima derivada de la función característica  $\Phi(t)$  de dicha variable evaluada en  $t=0$ .

#### FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS.

Sea  $X$  una variable aleatoria cualquiera con función de distribución  $f(x)$ , entonces la función generatriz de momentos está dada por

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

de donde

$$M_X(t) = \begin{cases} \sum e^{tx_i} p(x_i), & \text{si } X \text{ es discreta.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

TEOREMA 5.

Sea  $X$  una variable aleatoria cualquiera con función generatriz de momentos finita en algún intervalo abierto que contenga al cero, entonces  $X$  tiene momentos

$$\mu_k = M_X^{(k)}(0)$$

donde  $M_X^{(k)}(0)$  es la  $k$ -ésima derivada de la función generatriz de momentos valuada en  $t=0$ .

DEFINICION

Dadas dos densidades  $f$  y  $g$ , la función  $f * g$  definida por

$$f * g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(z-x) dx, \quad -\infty < z < \infty$$

es una densidad, se llama CONVOLUCION de  $f$  y  $g$ .

TEOREMA 6.

La densidad de una suma de variables aleatorias independientes es igual a la convolución de sus densidades.

TEOREMA 7.

Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa,

i) Si sólo toma valores enteros, entonces  $X$  tiene esperanza finita si y sólo si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) \text{ converge.}$$

Si la serie converge entonces

$$E X = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

ii) Si es continua con función de distribución  $F$ , entonces  $X$  tiene esperanza finita si y sólo si  $\int_0^{\infty} P(X > x) dx$  es finita; en este caso

$$E X = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx.$$

Considérese el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y supóngase que los conjuntos mencionados abajo están en  $\mathcal{A}$ .

TEOREMA 8.

i) Si  $D_i$  son disjuntos y  $P(C/D_i) = p$  independientemente de  $i$ ,

entonces  $P(C/u D_i) = p$ .

ii) Si  $C_i$  son disjuntos, entonces  $P(C/D) = \sum P(C_i/D)$ .

iii) Si  $E_i$  son disjuntos y  $\cup E_i = \Omega$ , entonces

$$P(C/D) = \sum P(E_i/D) P(C/E_i \cap D).$$

iv) Si  $C_i$  son disjuntos y  $P(A/D_i) = P(B/C_i)$  para todo  $i$ , entonces  $P(A/u C_i) = P(B/n C_i)$ .

#### ANALOGIAS

VARIABLE ALEATORIA	TIEMPO CONTINUO	TIEMPO DISCRETO
Número de eventos	Proceso Poisson ( $\lambda$ ) Media $\lambda t$ Varianza $\lambda t$	Proceso Binomial Media $np$ Varianza $np(1-p)$
Tiempo entre ocurrencias	Exponencial Negativa ( $\lambda$ ) Media $1/\lambda$ Var $1/\lambda^2$	Geométrica ( $p$ ) Media $1/p$ Var $q/p^2$
Tiempo de espera para la $n$ -ésima ocurrencia	Distribución Gamma ( $n, \lambda$ ) Media $n/\lambda$ Var $n/\lambda^2$	Binomial Negativa ( $n, p, q$ ) Media $n/p$ Var $nq/p^2$

**ALGUNAS LEYES DISCRETAS DE PROBABILIDADES QUE SE USAN  
FRECUENTEMENTE CON SUS MOMENTOS Y FUNCIONES GENERATRICES(\*)**

Ley de probabilidades	Parámetros	Función de masa de probabilidades $p(\cdot)$	Media $m = E[x]$	Variancia $\sigma^2 = E[x^2] - E[x]^2$
De Bernoulli	$0 \leq p \leq 1$	$p(x) = p^x q^{1-x}$ $= q$ $x=0$ $= 0$ en otro caso	$p$	$pq$
Binomial	$n = 1, 2, \dots$ $0 \leq p \leq 1$	$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, 2, \dots, n$ $= 0$ en otro caso	$np$	$npq$
De Poisson	$\lambda > 0$	$p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ $x = 0, 1, 2, \dots$ $= 0$ en otro caso	$\lambda$	$\lambda$
Geométrica	$0 \leq p \leq 1$	$p(x) = pq^{x-1}$ $x = 1, 2, \dots$ $= 0$ en otro caso	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomial negativa	$r > 0$ $0 \leq p \leq 1$	$p(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x$ $= \binom{-r}{x} p^r (-q)^x$ $x = 1, 2, \dots$ $= 0$ en otro caso	$\frac{rq}{p} = r/p$ $r$ $p = \frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2} = r/pq$ $r$ $Q = \frac{1}{p}$
Hipergeométrica	$N = 1, 2, \dots$ $n = 1, 2, \dots, N$ $p = 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1$	$p(x) = \frac{\binom{Np}{x} \binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $x = 0, 1, \dots, n$ $= 0$ en otro caso	$np$	$np \left( \frac{N-n}{N-1} \right)$

Ley de probabilidades	Función generatriz de momentos $\phi(t) = E[e^{tX}]$	Función característica $\phi(\omega) = E[e^{i\omega X}]$	Tercer momento central $E[(X - E[X])^3]$	Cuarto momento central $E[(X - E[X])^4]$
De Bernoulli	$p e^t + q$	$p e^{i\omega} + q$	$3p q (q - p)$	$3p^2 q^2 + p q (1 - 6pq)$
Binomial	$(p e^t + q)^n$	$(p e^{i\omega} + q)^n$	$np^2 q (q - p)$	$3n^2 p^2 q^2 + p q n (1 - 6pq)$
De Poisson	$e^{\lambda(e^t - 1)}$	$e^{\lambda(e^{i\omega} - 1)}$	$\lambda$	$\lambda^2 (3\lambda^2)$
Geométrica	$\frac{p e^t}{1 - q e^t}$	$\frac{p e^{i\omega}}{1 - q e^{i\omega}}$	$\frac{q}{p^2} (1 + 3 \frac{q}{p})$	$\frac{q}{p^2} (1 + 9 \frac{q^2}{p^2})$
Binomial negativa	$\left( \frac{p}{1 - q e^t} \right)^r$ $= (Q - p e^t)^{-r}$	$\left( \frac{p}{1 - q e^{i\omega}} \right)^r = (Q - p e^{i\omega})^{-r}$	$\frac{r q}{p^2} (1 + 3 \frac{q}{p})$ $= r p Q (Q + p)$	$\frac{r q}{p^2} (1 + (6 + 3r) \frac{q}{p^2})$ $= 3 r^2 p Q^2 + r p Q (1 + 6 p Q)$
Hipergeométrica	ver M. G. Kendall, <i>Advanced Theory of Statistics</i> , Charles Griffin, London, 1946, pág. 127.			

(\*) Tabla tomada de (Pe), pp. 246 y 247.

**ALGUNAS LEYES CONTINUAS DE PROBABILIDADES QUE SE USAN  
FRECUENTEMENTE CON SUS MOMENTOS Y FUNCIONES GENERATRICES(\*)**

Ley de probabilidades	Parámetros	Función de densidad de probabilidades $f(x)$	Media $m = E[x]$	Variación $\sigma^2 = E[x^2] - E^2(x)$
Uniforme en el intervalo de $a$ a $b$	$-a < a < b < \infty$	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $a < x < b$ $= 0$ en otro caso	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$-a < m < \infty$ $\sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$	$m$	$\sigma^2$
Exponencial	$\lambda > 0$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $x > 0$ $= 0$ en otro caso	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$r > 0$	$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}$ $x > 0$ $= 0$ en otro caso	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$

Ley de probabilidades	Función generatriz de momentos $\phi(t) = E[e^{tX}]$	Función característica $\phi(u) = E[e^{iuX}]$	Tercer momento central $E[(x - E[x])^3]$	Cuarto momento central $E[(x - E[x])^4]$
Uniforme en el intervalo de $a$ a $b$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{iu(b-a)}$	0	$\frac{(b-a)^4}{80}$
Normal	$e^{tm + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$	$e^{itmu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$	0	$3\sigma^4$
Exponencial	$\frac{\lambda}{\lambda - t} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$	$\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$	$\frac{2}{\lambda^3}$	$\frac{9}{\lambda^4}$
Gamma	$\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-r}$	$\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-r}$	$\frac{2r}{\lambda^3}$	$\frac{6r + 3r^2}{\lambda^4}$

(\*) Tablas tomadas de (Pe), pp. 248 y 249.

## BIBLIOGRAFIA

### OBRAS CONSULTADAS

- (A) ACADEMIA DE CIENCIAS DE UCRANIA.  
Manual de la Teoría de Probabilidades y Estadística Matemática. Ed. Mir, 1981.
- (B) BARTHOLOMEW, D.J.  
Stochastic Models for Social Processes.  
Wiley, 2nd. Edition.
- (Bh) BHAT, U. HARAYAN.  
Elements of Applied Stochastic Processes.  
Wiley, 1972.
- (Bo) BOURSIN, JEAN-LOUIS.  
Les Structures del Azar.  
Ediciones Martínez Roca, 1968.
- (Br) BRONSON, RICHARD.  
Investigación de Operaciones.  
Mc Graw-Hill, 1982.
- (By) BYRON, S. GOTTFRIED.  
Elements of Stochastic Process Simulation.  
Prentice-Hall, 1984.
- (C) CHRETIENNE ET FAURE.  
Processus Stochastiques, leurs Graphes, leurs Usages.  
Dunod, 1980.
- (Ch) CHAPA V., SERGIO.  
Apuntes de Clase de Procesos Estocásticos.  
ENEP Acatlán, UNAM 1983.
- (CK) CHUNG KAI LAI  
Elementary Probability Theory with Stochastic Processes.  
Springer-Verlag, 1975.
- (Co) COLEMAN, R.  
Procesos Estocásticos.  
Libusa, 1976.
- (D) DUBINS AND SAVAGE.  
Inequalities for Stochastic Processes.  
Dover, 1976.

- (F) FELLER, WILLIAM.  
Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones. Tomos I y II. Ed. Limusa, 1973.
- (G) GILLET, BILLY E.  
Introduction to Operations Research.  
Mc Graw-Hill, 1976
- (Go) GORDON, PATRICK.  
Cadenas Finitas de Markov y sus Aplicaciones.  
Ed. Hispano Europea, 1967.
- (H) HERNANDEZ, ONESIMO.  
Procesos Estocásticos: Introducción a la Teoría de Colas. IPN, 1981.
- (Hi) HILLIER / LIEBERMAN.  
Introducción a la Investigación de Operaciones.  
Mc Graw-Hill, 1982.
- (K) KISHOU, SHIRIDARBHAI, TRIVEDI.  
Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications.  
Prentice-Hall, 1982.
- (Hs) HINES AND MONTGOMERY.  
Probability and Statistics in Management Science.  
Wiley, 1980.
- (Hps) HOEL, PORT AND STONE.  
Introduction to Stochastic Processes.  
Houghton Mifflin, 1972.
- (N) NEDHI, J.  
Stochastic Processes.  
Wiley, 1982.
- (N) NARSINGH DEO.  
Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. Prentice-Hall, 1974.
- (P) PAPOULIS, A.  
Probability, Random Variables and Stochastic Processes. Mc Graw-Hill, 1965.
- (Pa) PARZEN, EMANUEL.  
Stochastic Processes.  
Holden-Day, 1962.
- (Pe) PARZEN, EMANUEL.  
Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones. Limusa, 1979.

- (Pr) PRAHDA, JUAN.  
Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, Tomo II, Modelos Estocásticos. Limusa, 1981.
- (R) RAMIREZ CENTENO, LUIS FERNANDO.  
Tesis de Teoría de la Renovación. IPN, 1974.
- (Ra) RANGEL N., LUZ MARIA.  
Teoría de Procesos Estocásticos Aplicados a Ingeniería Civil. ENEP Acatlán, 1984.
- (Ro) ROSENBLAT, MURRAY.  
Random Processes. Springer-Verlag, 1974.
- (S) SHAMBLIN AND STEVENS.  
Investigación de Operaciones, un Enfoque Fundamental. Mc Graw-Hill, 1975.
- (Sp) SPRINGER, HEALINY, MALL, BEGGS.  
Modelos Probabilísticos. UTEHA, 1972.
- (T) THIERAUF AND GROSSE.  
Toma de Decisiones por Medio de la Investigación de Operaciones. Limusa, 1982.
- (U) VENTSEL, ELENA S.  
Investigación de Operaciones. Mir, 1980.

#### OTRAS OBRAS RELATIVAS AL TEMA

- KEMENEY, SMELL AND KNAPP.  
Denumerable Markov Chains. Springer-Verlag.
- GHEDENKO AND KOLMOGOROV.  
Limit Distributions of Sums of Independent Random Variables. Addison-Wesley.
- ROZANOV, JURIJ ANTOLEVIC.  
Procesos Aleatorios. Mir, 1973.
- PURI, MADAN LAL.  
Stochastic Processes and Related Topics. Academic, 1975.

- BARTLETT, MAURICE STEVENSON.**  
*An Introduction to Stochastic Processes with  
 Special Reference to Methods and Applications.*  
 Cambridge University, 1966.
- KARLIN, SAMUEL.**  
*A First Course in Stochastic Processes.*  
 Academic, 1963.
- COX AND MILLER.**  
*The Theory of Stochastic Processes.*  
 Methuen, 1965.
- BAILEY NORMAN, T.J.**  
*The Elements of Stochastic Processes with  
 Applications to the Natural Sciences.*  
 Wiley, 1964.
- MARSDEN, E.**  
*Markov Chains: Theory and Applications.*  
 Wiley.
- TAKACS, LAJOS.**  
*Stochastic Processes: Problems and Solutions.*  
 Methuen, 1966.
- DOOB, JOSEPH L.**  
*Stochastic Processes.*  
 Wiley, 1953.

#### **TESIS SOBRE PROCESOS ESTOCÁSTICOS**

- ESTRADA CORTES, LUIS.**  
*Un Proceso Estocástico como Modelo para estudios  
 de Follow-Up. F.C. UNAM, 1972. (Actuarial)*
- PASTOR CORNEJO, VÍCTOR.**  
*Los Procesos Estocásticos en la Teoría del  
 Seguro. F.C UNAM, 1967. (Actuarial)*
- ESCARELA CORNEJO, SAMUEL.**  
*Procesos Estocásticos en un Espacio de Hilbert.  
 F.C. UNAM, 1966. (Matemáticas)*