



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

**"METODO DEL ELEMENTO FINITO
APLICADO A UN MEDIO ANISOTROPO"**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A :

JUAN CARLOS CABRERIZO BARRIENTOS

MEXICO, D. F.

1986.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL

AVENIDA DE
MEXICO

Señor CABRERIZO BARRIENTOS JUAN CARLOS
P r e s e n t e .

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-205

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Agustín Doméñghi Colina para que lo desarrolle como TESIS para su Examen Profesional de la carrera de INGENIERO CIVIL.

"METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO
A UN MEDIO ANISOTROPO"

- I. INTRODUCCION
- II. TEORIA DE LA ELASTICIDAD PARA UN CUERPO ANISOTROPO
- III. PRINCIPIOS BASICOS DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO
- IV. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS
- V. CONCLUSIONES

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, - el título del trabajo realizado.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 3 de septiembre de 1986
EL DIRECTOR

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

OARCH/GZM/ard.-

INDICE

I	Introducción	1
II	Teoría de la Elasticidad para un Medio Anisótropo	4
	2.1 Estados de esfuerzo y deformación en un medio continuo.	4
	2.2 Transformación de componentes de esfuerzos a nuevos ejes.	11
	2.3 Ley de Hooke generalizada	15
	2.4 Casos básicos de simetría elástica	25
III	Principios básicos del Método del Elemento Finito	34
	3.1 El método del elemento finito	34
	3.2 Algunas matrices y ecuaciones importantes	37
	3.3 Ecuaciones para un elemento finito triangular	40
IV	Ejemplos Ilustrativos	56
	4.1 Ecuaciones para un medio anisótropo con estratificación horizontal	56
	4.2 Ejemplo	63
V	Conclusiones	71
	Bibliografía	74

INTRODUCCION

En la resolución de un problema de ingeniería intervienen soluciones analíticas y soluciones numéricas, cuando se emplea la primera se cuenta con una fórmula explícita, que permite tomar en cuenta las variables significativas que intervienen en un problema. Las soluciones analíticas que toman parte en la solución de un problema de Ingeniería Civil están basadas en su mayoría en la teoría de la elasticidad; por ejemplo la fórmula de Boussinesq para la determinación del esfuerzo normal vertical en un medio semi-infinito, homogéneo, isótropo y linealmente elástico, la cual se emplea para el análisis de cimentaciones superficiales en mecánica de suelos.

Muy frecuentemente no se cuenta con soluciones analíticas para la solución de un problema de ingeniería o éstas, si existen, resultan ser limitadas; lo cual hizo pensar en soluciones numéricas, haciendo uso de algún método numérico, uno de éstos es el método del elemento finito, éste consiste en discretizar un medio, hallar una solución particular para cada elemento discretizado en base a los principios de la mecánica e integrar todas las soluciones particulares para hallar una solución general, que represente el comportamiento de todo el medio.

En este trabajo se tratará de exponer de manera sencilla los principios básicos del método del elemento finito, considerando que el comportamiento del material de que se trate es elástico lineal, empleando el principio de que la energía interna de deformación (potencial elástico), es igual al trabajo externo entregado al sistema (despreciando las pérdidas de energía). Lo que

conduce a la obtención de las ecuaciones del elemento finito.

Aunque el método del elemento finito se basa en suposiciones de condiciones que no son necesariamente las que imperen en la naturaleza (comportamiento elástico lineal), la aplicación del método en ingeniería civil es muy amplia, sobre todo si se trabaja con módulos secantes de deformación (o módulos secantes de rigidez o elasticidad) en las curvas de esfuerzo deformación de los materiales.

Un caso muy interesante y de mucha utilidad es el método del elemento finito aplicado a un medio heterogéneo y anisótropo que se dan en rocas y suelos estratificados. Este trabajo está centrado en este tipo de material, para lo cual desarrollamos en el capítulo II, la teoría de la elasticidad para un medio anisótropo, analizando primero los estados de esfuerzo y deformación para un medio continuo, con las respectivas suposiciones (material elástico lineal), transformación de componentes de esfuerzo y deformación a nuevos ejes que será de mucha utilidad en el desarrollo posterior del trabajo; desarrollamos también en este capítulo la ley generalizada de Hooke (caso más general de anisotropía) y posteriormente particularizamos para cuatro casos típicos de anisotropía, incluyendo en las fórmulas las constantes elásticas de ingeniería (E, G, ν), casos que dependen del tipo de simetría elástica que tiene el material.

Una vez establecidas las ecuaciones de Hooke para un medio anisótropo, detallamos los principios básicos del elemento finito, deducimos las ecuaciones para un elemento triangular, haciendo un análisis plano, empleando las ecuaciones de Hooke para un medio anisótropo, y el principio de la energía y el trabajo mencionado arriba.

En el capítulo IV obtenemos la matriz de rigidez de un elemento $[k^e]$, para los dos casos que se deben tomar en cuenta cuando el análisis es plano, deformación plana y esfuerzo plano. Al final de este capítulo se muestra un ejemplo ilustrativo para el caso de un medio anisótropo con estratigrafía horizontal, que es lo que se presenta en una -- variedad de suelos.

En el capítulo V, hacemos las conclusiones y comparaciones de los resultados del ejemplo, vemos las ventajas y desventajas y desventajas del método, la versatilidad, y los problemas que se pueden presentar en su aplicación (por ejemplo si no se cuenta con una buena computadora y un buen programa, así como un buen analista).

II

TEORIA DE LA ELASTICIDAD PARA UN MEDIO ANISOTROPO

2.1 ESTADOS DE ESFUERZO Y DEFORMACION EN UN MEDIO CONTINUO.-

En el estudio de los estados de esfuerzo y deformación en los cuerpos anisótropos producidos por una fuerza externa, hacemos un número de suposiciones que imponen ciertas restricciones. Las más importantes se reducen a las siguientes:

1) Un cuerpo es sólido (un medio continuo). Los esfuerzos en cualquier plano dentro del cuerpo y sobre su superficie son fuerzas por unidad de área.

2) La relación entre las componentes de deformación y las proyecciones de desplazamiento y sus primeras derivadas con respecto a las coordenadas es lineal, es decir, se consideran sólo deformaciones pequeñas.

3) Las relaciones esfuerzo-deformación son lineales, es decir, el material sigue la ley generalizada de Hooke, los coeficientes en estas relaciones lineales pueden ser una constante (cuerpo homogéneo) o variable, es decir una función de posición, continua o discontinua (en el caso de un cuerpo no-homogéneo).

4) A los esfuerzos iniciales, es decir los que existen sin ninguna carga externa, incluyendo los esfuerzos térmicos, son despreciados.

Por lo tanto, consideramos la teoría de los cuerpos elásticos anisótropos desde el punto de vista de la teoría lineal clásica de

los cuerpos elásticos, homogéneos o no homogéneos. Por supuesto, los problemas de dinámica, los de estabilidad de vibración, problemas que implican grandes deformaciones y algunos otros, como los problemas para un cuerpo anisótropo no elástico ya no se considerarán.

Al considerar problemas específicos, usaremos coordenadas cartesianas pero por considerar de interés y útil en ciertos casos deduciremos también algunas fórmulas para coordenadas cilíndricas y esféricas.

Primero indicaremos la notación más utilizada.

Las coordenadas de los puntos en el espacio tridimensional, se denotan para los distintos sistemas de coordenadas así: x, y, z sistema cartesiano, r, θ, z = cilíndrico, ρ, θ, φ = esférico.

Las mismas letras se utilizan para designar las direcciones de las ordenadas.

Los esfuerzos que actúan sobre los planos normales a las direcciones de las ordenadas son descompuestos cada uno en tres componentes:

Una normal (esfuerzo normal) y dos tangenciales (esfuerzo cortante). Los esfuerzos normales se denotan con la letra σ con un subíndice que indica la dirección de la normal a un plano (y del esfuerzo). Los esfuerzos cortantes se denotan con la letra τ con dos subíndices (la --

dirección de la normal a un plano y la dirección del esfuerzo). En los planos normales a los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas, no tenemos las componentes de esfuerzo como siguen:

$$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$$

Las componentes de esfuerzo constituyen un tensor de esfuerzo, se escribe amenodo como matriz, la que por motivos de equilibrio in finitesimal del cuerpo es simétrica.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

El tensor es de rango dos.

Las expresiones para los tensores de esfuerzo en un sistema cilíndrico y esférico se escriben así:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{ro} & \tau_{rz} \\ \tau_{ro} & \sigma_o & \tau_{oz} \\ \tau_{rz} & \tau_{oz} & \sigma_z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\phi} & \tau_{\rho z} \\ \tau_{\rho\phi} & \sigma_\phi & \tau_{\phi z} \\ \tau_{\rho z} & \tau_{\phi z} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

La figura 2.1.1 nos muestra planos normales a las direcciones de las coordenadas x, y, z y r, e, z de un sistema de coordenadas cartesianas y otro cilíndrico y las componentes de esfuerzo sobre ellos, las que se consideran positivas.

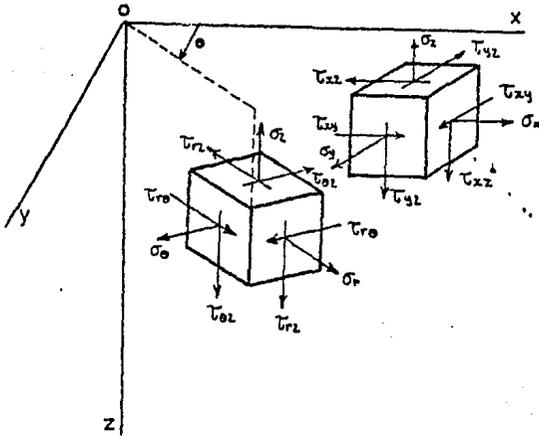


Figura 2.1.1

Conociendo las componentes de esfuerzo en un punto (de los que sólo seis son independientes) en tres planos mutuamente perpendiculares que atraviesan cualquier punto de un cuerpo, podemos determinar los esfuerzos en el cuarto plano que atraviesan el mismo punto. Al denotar la normal al cuarto plano por n y las proyecciones sobre los ejes x, y, z del esfuerzo actuando sobre este plano por X_n, Y_n, Z_n , tenemos tres fórmulas para determinar las proyecciones desconocidas:

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z), \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z), \\ Z_n &= \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

Se pueden escribir fórmulas similares en coordenadas cilíndricas, esféricas y otras coordenadas curvilíneas.

En este capítulo usaremos también otra notación para las componentes de esfuerzo en derivación de algunas propuestas teóricas, específicamente $\sigma_{\lambda\lambda}$ ($\lambda=1,2,3$) para esfuerzos normales y $\sigma_{\lambda j}$ ($\lambda \neq j$, $\lambda, j=1, 2, 3$) para esfuerzos cortantes.

Las proyecciones del desplazamiento de un punto en los ejes de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas se denotan con:

u, v, w (cartesiano),
 u_r, u_θ, w (cilíndrico),
 $u_\rho, u_\theta, u_\varphi$ (esférico).

La deformación de un cuerpo alrededor de un punto dado, se caracteriza por las componentes de deformación, en particular tres extensiones o deformaciones lineales y tres deformaciones por cortante o angulares. Las primeras tres se denotan por la letra ϵ con un subíndice que indica la dirección original de un segmento, el cual se alarga o se acorta, las últimas tres se denotan con la letra γ con dos subíndices que indican las originales direcciones perpendiculares, (por ejemplo ϵ_x y ϵ_y son las extensiones a segmentos originalmente paralelos a X y Y, γ_{xy} es el cambio en el ángulo entre los segmentos cuyas direcciones originales eran X y Y).

Las componentes de deformación $\epsilon_{\lambda\lambda}$ y $\frac{1}{2}\gamma_{\lambda j}$ constituyen un tensor simétrico de rango dos. Escrito como matriz, es de la forma, para un sistema cartesiano x,y,z.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

Para otros sistemas de coordenadas ortogonales esta matriz se escribe de modo parecido, lo que no veremos aquí.

Indicamos además la relación entre componentes de deformación - (en ciertos casos denotamos con $\epsilon_{Li}, \epsilon_{Li}$) y las proyecciones de desplazamiento en tres sistemas de coordenadas.

1) Sistema cartesiano:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

2) Sistema cilíndrico:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, & \gamma_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

3) Sistema esférico:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, & \epsilon_\theta &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho}, \\ \epsilon_\varphi &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{\rho} \cot \theta + \frac{u_\rho}{\rho}, \\ \gamma_{\varphi\theta} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cot \theta \right) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho}, \\ \gamma_{\rho\theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Si las deformaciones no son chicas, las extensiones y deformaciones por cortante, $\epsilon_{ij}, \gamma_{ij}$ están relacionadas a los desplazamientos por ecuaciones no lineales. Un ejemplo son las relaciones para un sistema de coordenadas cartesianas:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \\ \epsilon_y &= \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} - 1 \\ \text{sen } \gamma_{xy} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}}{(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_x)} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Las otras tres componentes, $\epsilon_z, \epsilon_{yz}, \gamma_{xz}$, se obtienen de 2.1.5 por permutación cíclica de los subíndices.

Finalmente, lo que necesitamos en lo que sigue son las ecuaciones diferenciales de equilibrio y movimiento para un medio continuo (no necesariamente elástico). Las ecuaciones de equilibrio se escriben como (denotando las proyecciones de fuerzas corporales por unidad de volumen en las direcciones de las coordenadas respectivamente, por $X, Y, Z; R, \theta, Z; P, \theta, \phi$).

1) Sistema de coordenadas cartesianas:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

2) Sistema cilíndrico:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{re}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{oz}}{\partial z} + \frac{2\tau_{ro}}{r} + \Theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

3) Sistema esférico:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{\rho} (2\sigma_r - \sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi} + \tau_{\rho\theta} \cot \theta) + P &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{\rho} [(\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi}) \cot \theta + 3\tau_{\rho\theta}] + \Theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{\rho} (2\tau_{\theta\varphi} \cot \theta + 3\tau_{\rho\varphi}) + \Phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen fácilmente de las ecuaciones de equilibrio agregando los términos de la inercia a las fuerzas corporales. Los términos de inercia son iguales a la densidad $\bar{\rho}$ por el negativo de las proyecciones de la aceleración, lo que se expresa normalmente en términos de las proyecciones de la aceleración, lo que se expresa normalmente en términos de las proyecciones del desplazamiento. Por lo tanto, para un sistema de coordenadas cartesiano y pequeñas deformaciones, a las funciones X, Y, Z hay que agregar

$$-\bar{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\bar{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(los desplazamientos son funciones de las coordenadas de los puntos de un cuerpo antes de la deformación y del tiempo t).

2.2 TRANSFORMACION DE COMPONENTES DE ESFUERZO A NUEVOS EJES.-

En la práctica ocurren a menudo casos donde los componentes de

esfuerzo referentes a un sistema de coordenadas x, y, z , ("viejo") se conocen, y se requiere determinarlos para otro sistema x', y', z' ("nuevo").

Se supone que los sistemas son ortogonales aunque no necesariamente cartesianos. Si conservamos la notación previa para las componentes de esfuerzo en referencia al sistema de coordenadas x, y, z e indicamos las componentes en el nuevo sistema x', y', z' por primos, obtenemos las fórmulas de transformación utilizando las expresiones 2.1.1 para las proyecciones del esfuerzo sobre un plano con una normal dirigida de modo arbitrario. Asignamos los cosenos de los ángulos entre ejes de los sistemas de coordenadas nuevos y viejos por la tabla 2.2.1. Así, $l_{11} = \cos(x', x)$, $l_{23} = \cos(y', z)$, etc.

Consideremos un plano con normal x' y el esfuerzo sobre él con proyecciones Xz', Yx', Zx' en los viejos ejes. Proyectando los esfuerzos sobre las direcciones de los ejes del nuevo sistema obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{x'} &= Xx' l_{11} + Yx' l_{12} + Zx' l_{13} \\ \tau'_{xy} &= Xx' l_{21} + Yx' l_{22} + Zx' l_{23} \\ \tau' &= Xx' l_{31} + Yx' l_{32} + Zx' l_{33} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

cosenos

	x	y	z
x'	l_{11}	l_{12}	l_{13}
y'	l_{21}	l_{22}	l_{23}
z'	l_{31}	l_{32}	l_{33}

tabla 2.2.1

Al substituir las expresiones 2.1.1 donde $n=z'$ obtenemos tres - componentes de esfuerzo como funciones cuadráticas homogéneas de los cosenos l_{ij} . Entonces consideramos los esfuerzos sobre los planos con normales y' , z' .

Las siguientes son dos fórmulas finales:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x l_{11}^2 + \sigma_y l_{12}^2 + \sigma_z l_{13}^2 + \\ &\quad + 2\tau_{yz} l_{12} l_{13} + 2\tau_{xz} l_{11} l_{13} + \tau_{xy} l_{11} l_{12}, \\ \tau'_{yz} &= \sigma_x l_{21} l_{31} + \sigma_y l_{22} l_{32} + \sigma_z l_{23} l_{33} + \\ &\quad + \tau_{yz} (l_{12} l_{33} + l_{23} l_{32}) + \tau_{xz} (l_{11} l_{33} + l_{23} l_{31}) + \\ &\quad + \tau_{xy} (l_{21} l_{32} + l_{22} l_{31}). \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

Nos quedan cuatro componentes de σ' , τ' que se encuentran con - la permutación cíclica de los subíndices de l_{ij} .

De una manera parecida obtenemos fórmulas para la transformación inversa de los esfuerzos σ' y τ' a los esfuerzos σ y τ . Damos dos de - ellas.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma'_x l_{11}^2 + \sigma'_y l_{21}^2 + \sigma'_z l_{31}^2 + \\ &\quad + 2\tau'_{yz} l_{21} l_{31} + 2\tau'_{xz} l_{11} l_{31} + \tau'_{xy} l_{11} l_{21}, \\ \tau_{yz} &= \sigma'_x l_{12} l_{13} + \sigma'_y l_{22} l_{32} + \sigma'_z l_{22} l_{33} + \\ &\quad + \tau'_{yz} (l_{12} l_{33} + l_{23} l_{32}) + \tau'_{xz} (l_{12} l_{33} + l_{32} l_{13}) + \\ &\quad + \tau'_{xy} (l_{12} l_{23} + l_{22} l_{13}). \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

Las fórmulas para la transformación de esfuerzos a nuevos ejes se escribe fácilmente utilizando la notación breve de tensor, con - los cambios necesarios como ya se ha visto, de la notación para - las componentes de esfuerzo por una sola letra σ con los subíndices: subíndices iguales para las componentes normales y subíndices

dis pares para componentes tangenciales (σ_{ij}). Así $\sigma_{11} = \sigma_x$, $\sigma_{33} = \tau_{yz}$ etc. Las seis fórmulas para transformación de componentes de esfuerzo a nuevos ejes se escriben como una sola fórmula:

$$\sigma_{kl}^i = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \sigma_{\lambda\mu} l_{k\lambda} l_{l\mu} \quad (2.24)$$

En esta notación los signos de sumatoria son usualmente omitidos

$$\sigma_{kl}^i = \sigma_{\lambda\mu} l_{k\lambda} l_{l\mu} \quad (2.25)$$

Aquí los índices k, l son fijos, λ, μ, i, j son índices para sumar de 1 a 3. Las fórmulas de transformación de σ_{ij}^k a σ_{ij} se escriben de modo parecido.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{kl}^i l_{k\lambda} l_{l\mu} \quad (2.26)$$

Aquí los índices i, j , son fijos y se suman k, l .

Damos fórmulas para la transformación entre esfuerzos en un sistema de coordenadas cartesianas y esfuerzos a un sistema cilíndrico r, θ, z (los ejes z de ambos sistemas son coincidentes).

cosenos

	x	y	z
x'	cos	-sen	o
y'	sen	cos	o
z'	o	o	1

tabla 2.2.2

La tabla 2.2.1 para los cosenos toma la forma de la tabla 2.2.2 las fórmulas finales se escriben así:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2 \theta + 2 \tau_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \operatorname{sen}^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2 \tau_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta), \\ \tau_{rz} &= \tau_{xz} \cos \theta + \tau_{yz} \operatorname{sen} \theta, \\ \tau_{\theta z} &= -\tau_{xz} \operatorname{sen} \theta + \tau_{yz} \cos \theta, \quad \sigma_z = \sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

Las fórmulas emplean la misma forma para la transformación de rotación, es decir para la transformación de esfuerzos $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ a los esfuerzos $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \tau'_{xy}$ referida a un sistema de coordenadas x', y', z' obtenido al rotar el primer sistema un ángulo ψ , por el eje z ($\theta = \psi$).

La transformación de componentes de deformación a nuevos ejes se hace con fórmulas muy parecidas a 2.2.5 - 2.2.7 ya que estas componentes constituyen un tensor análogo al tensor esfuerzo. Al comparar ambos tensores, vemos que el esfuerzo normal σ corresponde a la extensión ϵ , y al esfuerzo cortante τ corresponde la mitad de la deformación por cortante, $1/2 \gamma$. Por consiguiente, las fórmulas para las componentes de deformación que se refieren a nuevos ejes se obtienen de 2.2.3 al substituir ϵ por σ y $1/2 \gamma$ por τ .

2.3 LEY DE HOOKE GENERALIZADA.-

Las fórmulas y las ecuaciones ya vistas funcionan para todo medio continuo, no importan sus propiedades físicas. Procediendo a un cuerpo elástico debemos elegir un modelo que refleje las propiedades elásticas para obtener, en adición a las ecuaciones de las secciones 2.1 y 2.2, relaciones entre las componentes de esfuerzo y deformación.

Ya que consideramos solo las deformaciones pequeñas, el modelo en cuestión se considerará como un medio continuo según la ley generalizada de Hooke, es decir, solo vamos a considerar esos medios y cuerpos en los que las componentes de deformación son funciones lineales de las componentes de esfuerzo. Estas funciones deben ser homogéneas puesto que en ausencia de esfuerzos las componentes de deformación son también cero y viceversa, es decir si $\epsilon = \gamma = 0$, entonces $\sigma = \tau = 0$

Los cuerpos a los que se aplica la ley de Hooke pueden ser distintos y por eso se necesita dar una clasificación que refleje sus características, aunque sea aproximada. En lo que respecta a las propiedades elásticas, todos los cuerpos se pueden dividir por un lado en homogéneos y no homogéneos y por otro lado, isótropos y anisótropos. Un cuerpo homogéneo con respecto a sus propiedades elásticas es aquel cuyas propiedades elásticas son iguales en distintos puntos. Si las características por ejemplo, el módulo de elasticidad, varían de punto en punto de manera continua, la no homogeneidad puede llamarse también continua, sin embargo, si las características elásticas sufren de discontinuidades al pasar de punto en punto, por ejemplo un cambio abrupto, se dice que la no homogeneidad es discontinua o discreta. Un cambio en los pasos ocurre en los cuerpos compuestos de varias partes con distintas propiedades elásticas (de distintos materiales).

Un cuerpo isótropo, con respecto a sus propiedades elásticas, es aquel en el que estas propiedades (resistencia elástica) son las mismas para todas las direcciones que atraviesan un punto dado. Un cuerpo anisótropo tiene, por lo general distintas propiedades elásticas para las distintas direcciones que atraviesan un punto dado. Las direcciones para las que las propiedades elásticas (resistencia -

sin ángulos rectos entre las caras.

Nótese que supondremos, sólo para facilitar la presentación, que un cuerpo no homogéneo se considera "anisótropo de forma rectilínea", si las ecuaciones de Hooke para él se dan en un sistema de coordenadas cartesianas (a_{ij}, A_{ij} son funciones dadas de x, y, z).

Volvamos al cuerpo homogéneo. En un cuerpo homogéneo los coeficientes a_{ij}, A_{ij} de las ecuaciones 2.3.1 y 2.3.2 se llamarán constantes elásticas. En un cuerpo no homogéneo cuando estos coeficientes son funciones de posición, se llamarán características elásticas. Al considerar a_{ij} y A_{ij} por separado, nos referimos a a_{ij} como los coeficientes de deformación y a A_{ij} como el módulo elástico.

Las ecuaciones 2.3.1 y 2.3.2 demuestran que el número de constantes elásticas en cada cuerpo es de 36. En realidad esto no es cierto ni para el caso más general si existe un potencial elástico (y esto -- siempre se supondrá) igual a la energía de deformación por unidad de volumen. Así es el caso cuando tienen lugar los cambios en un cuerpo de una manera isotérmica o adiabática durante la deformación. Considerando solamente los problemas de equilibrio, supondremos que los cambios se hacen de manera isotérmica durante la deformación, es decir, la temperatura de cada elemento sigue constante. En las ecuaciones 2.3.1 y 2.3.2 con a_{ij} y A_{ij} implicamos constantes isotérmicas elásticas, las que son por lo general distintas a las adiabáticas.

En este caso tenemos las igualdades:

$$\sigma_x = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \epsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \epsilon_y}, \quad \dots \dots \tau_{xy} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \gamma_{xy}} \quad (2.3.4)$$

Al integrar las seis ecuaciones 2.3.4 obtenemos una expresión para el potencial elástico en forma de función homogénea cuadrática de las deformaciones.

$$\begin{aligned} \bar{V} = & \frac{1}{2} A_{11} \epsilon_x^2 + A_{12} \epsilon_x \epsilon_y + \dots + A_{15} \epsilon_x \gamma_{xz} + A_{16} \epsilon_x \gamma_{xy} + \\ & + A_{21} \epsilon_y^2 + \dots + A_{25} \epsilon_y \gamma_{xz} + A_{26} \epsilon_y \gamma_{xy} + \\ & \dots + \\ & + \frac{1}{2} A_{55} \gamma_{xz}^2 + A_{56} \gamma_{xz} \gamma_{xy} + \\ & + \frac{1}{2} A_{66} \gamma_{xy}^2 \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Al descomponer 2.3.10 en seis grupos cada uno de los seis términos

$$\begin{aligned} \bar{V} = & \frac{1}{2} (A_{11} \epsilon_x + \dots + A_{16} \gamma_{xy}) \epsilon_x + \\ & + \frac{1}{2} (A_{16} \epsilon_x + \dots + A_{66} \gamma_{xy}) \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

y substituyendo las expresiones por $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ obtenemos una fórmula muy sencilla y fácil de recordar para el potencial elástico:

$$\bar{V} = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \dots + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \quad (2.3.12)$$

Si las expresiones para las componentes de deformación 2.3.8 se substituyen en esta fórmula, obtenemos \bar{V} como una función homogénea cuadrática de los esfuerzos. La expresión para \bar{V} se construye de la misma manera que 2.3.10, la única diferencia es que ϵ, γ son reemplazadas por σ, τ con los subíndices correspondientes, y A_{ij} se reemplazan por los coeficientes de deformación a_{ij} :

$$\begin{aligned} \bar{V} = & \frac{1}{2} a_{11} \sigma_x^2 + a_{12} \sigma_x \sigma_y + \dots + a_{16} \sigma_x \tau_{xy} + \\ & + \frac{1}{2} a_{22} \sigma_y^2 + \dots + a_{26} \sigma_y \tau_{xy} + \\ & \dots + \\ & + \frac{1}{2} a_{66} \tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

En el caso general de anisotropía el número de constantes elásticas A_{ij} , a_{ij} es 21 pero entre éstas las constantes independientemente son menos. Se dice que geoméricamente todos los sistemas de coordenadas son equivalentes, sin embargo como respecta a las propiedades elásticas y en general físicas la simetría se puede observar hasta en el caso más general. Por consiguiente, hasta en el caso más general el número de constantes elásticas independientes no es 21, sino menos, como 18. Se recomienda que las llamadas constantes invariables se utilicen en el análisis de esfuerzos, y se ha demostrado como determinarlas a partir de las constantes a_{ij} referidas a un sistema de coordenadas arbitrario.

En las ecuaciones generalizadas de Hooke, 2.3.8 y 2.3.9 las constantes elásticas (o características) toman posiciones desiguales, y de alguna manera hay que clasificarlas. Uno de los principios de clasificación en el caso general es dividir todos los coeficientes a_{ij} (y por lo tanto A_{ij}) en seis grupos.

Otros métodos son reemplazar las constantes a_{ij} y A_{ij} , en casos especiales de anisotropía por las llamadas constantes de ingeniería como las de Young y los módulos de cortante, la relación de Poisson, etc. Se propuso un sistema comprensivo de constantes de ingeniería para el caso más general de un cuerpo anisótropo homogéneo. Que un cuerpo se refiera a un sistema de coordenadas fijo. Con nuevos símbolos para a_{ij} , podemos escribir las ecuaciones 2.3.8 de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E_{xx}} (\sigma_x - \nu_{yx} \sigma_y - \nu_{zx} \sigma_z + \\
 &\quad + \eta_{yz,x} \tau_{yz} + \eta_{zx,x} \tau_{xz} + \eta_{xy,x} \tau_{xy}), \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E_{yy}} (-\nu_{xy} \sigma_x + \sigma_y - \nu_{zy} \sigma_z + \\
 &\quad + \eta_{yz,y} \tau_{yz} + \eta_{zx,y} \tau_{xz} + \eta_{xy,y} \tau_{xy}), \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E_{zz}} (-\nu_{xz} \sigma_x - \nu_{yz} \sigma_y + \sigma_z + \\
 &\quad + \eta_{yz,z} \tau_{yz} + \eta_{zx,z} \tau_{xz} + \eta_{xy,z} \tau_{xy}), \\
 \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{yz}} (\eta_{x,yz} \sigma_x + \eta_{y,yz} \sigma_y + \eta_{z,yz} \sigma_z + \\
 &\quad + \tau_{yz} + \mu_{zx,yz} \tau_{xz} + \mu_{xy,yz} \tau_{xy}), \\
 \gamma_{xi} &= \frac{1}{G_{xz}} (\eta_{x,ix} \sigma_x + \eta_{y,ix} \sigma_y + \eta_{z,ix} \sigma_z + \\
 &\quad + \mu_{yz,ix} \tau_{yz} + \tau_{xz} + \mu_{xy,ix} \tau_{xy}), \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} (\eta_{x,xy} \sigma_x + \eta_{y,xy} \sigma_y + \eta_{z,xy} \sigma_z + \\
 &\quad + \mu_{yz,xy} \tau_{yz} + \mu_{zx,xy} \tau_{xz} + \tau_{xy}).
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.14)$$

Aquí E_{xx} , E_{yy} , E_{zz} son módulos de Young en compresión-tensión - en las direcciones de los ejes x, y, z ; G_{yz}, G_{xz} son los módulos de resistencia al cortante (o rigidez) para los planos paralelos de coordenadas, $\nu_{yx}, \nu_{zx}, \dots, \nu_{yz}$ son las relaciones de Poisson que caracterizan la contracción en la dirección del eje x cuando la tensión se aplica en la dirección del otro eje, (por ejemplo, ν_{yx} es la relación que caracteriza la contracción en la dirección del eje x cuando la tensión se aplica en la dirección del eje y). Estas constantes corresponden a los muy conocidos módulos de Young, módulo de resistencia al cortante, y la relación de Poisson para un cuerpo isótropo. - Las otras constantes son nuevas para un cuerpo elástico y son cero -

en un cuerpo isótropo.

Los coeficientes $\mu_{xz,yz}$, , $\mu_{zx,xy}$ son coeficientes de -- hntsov. Ellos caracterizan los cortantes en los planos paralelos -- a los planos coordenados producidos por esfuerzos por esfuerzos cortantes que actúan en otros planos paralelos a los planos coordenados. La constante $\eta_{yz,x}$, η_{zx} $\eta_{xy,z}$ son, coeficientes de influencia mutua de primer tipo; caracterizan extensiones en direcciones de los ejes de coordenadas que son producidas por las fuerzas -- cortantes que actúan en los planos coordenados. Finalmente $\eta_{x,yz}$, $\eta_{x,yz}$, $\eta_{z,xy}$ expresan cortantes en los planos coordenados debido a los esfuerzos normales que actúan en la dirección de los ejes de coordenadas; se llaman los coeficientes de influencia mutua de -- segundo tipo.

Las ecuaciones 2.3.14 se escriben sólo para un sistema dado de coordenadas para otros sistemas los valores de los coeficientes cambian, pero el número total de constantes elásticas independientes -- es, como antes 18.

Al resolver problemas específicos, usaremos mayormente los símbolos a_{ij} y A_{ij} , las constantes de ingeniería se utilizarán en casos donde un cuerpo tiene simetría elástica bien desarrollada, es decir, que es isótropo u ortotrópico de modo transversal.

Finalmente notamos que, al cambiar la notación para las constantes elásticas y las componentes de esfuerzo, podemos escribir las ecuaciones generales de Hooke de una manera muy sencilla. Que -- se denotan las constantes elásticas con letra α (o A , según el caso) no con dos sino cuatro subíndices, poniendo:

- 1) $a_{ij} = a_{mnkl}$ si $i, j = 1, 2, 3$ (todo posible caso donde $j = i$ no es excluido).
- 2) $a_{ij} = 2a_{mnkl}$ si alguno de los dos subíndices i ó j es 4, 5, 6.
- 3) $A_{ij} = 4a_{mnkl}$ si ambos subíndices $i, j = 4, 5, 6$

Las seis ecuaciones 2, 3, 8 entonces se escriben con una sola:

$$\epsilon_{ij} = a_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (2.3.15)$$

Los signos que denotan sumatoria sobre k y sobre l en cada una de las seis igualdades 2.3.15 son generalmente omitidos en esta manera de escribir. El número de todas las constantes a_{ijkl} con cuatro subíndices es 81, pero al agruparlas se reducen a constantes cuyo número es 21 (de éstas, 18 constantes son independientes). Las ecuaciones generalizadas de Hooke, resueltas para las componentes de esfuerzo, son de la forma:

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.3.16)$$

2.4 CASOS BASICOS DE SIMETRIA ELASTICA.

Si la estructura de un cuerpo anisótropo tiene alguna simetría, las propiedades elásticas también exhiben simetría. La llamada simetría elástica se expresa por el hecho de que en cada punto hay direcciones simétricas equivalentes en lo que respecta a las propiedades elásticas.

Las relaciones entre simetría estructural y elástica para cristales se establece en el principio de F. Neumann el que se puede expresar por lo siguiente: con respecto a sus propiedades físicas -- (incluyendo las elásticas) un material exhibe el mismo tipo de simetría como su forma cristalina, o más simetría perfecta.

El principio también se extiende a cuerpos que no son cristales, pero que tengan simetría estructural (madera, fibra de vidrio, plásticos reforzados, madera laminada).

Si hay simetría de las propiedades elásticas (simetría elástica) en un cuerpo anisótropo las ecuaciones generalizadas de Hooke se simplifican para él ya que algunos coeficientes a_{ij} son cero, mientras que en otros hay relaciones lineales. Estas simplificaciones pueden ser derivadas al aplicar el siguiente método. Refiramos un cuerpo a un sistema de coordenadas x, y, z y a un segundo sistema x', y', z' simétrico con respecto al primero, ya que la simetría es del mismo tipo que la observada en el cuerpo. Las direcciones de los ejes respectivos x, y, z y x', y', z' son equivalentes en lo que respecta a las propiedades elásticas, y por lo tanto las ecuaciones de Hooke se escriben de manera idéntica para los sistemas simétricos de coordenadas. Después de escribir estas ecuaciones en los sistemas x, y, z y $x' y' z'$, transformamos a uno o el otro, expresando, digamos, x', y', z' en términos de x, y, z . Al comparar las ecuaciones semejantes que resultan, encontramos relaciones entre a_{ij} y A_{ij} . En lugar de las ecuaciones de Hooke podemos tomar las expresiones para potencial elástico escrita en el sistema básico, x, y, z y en el sistema simétrico x', y', z' . Al transformar la segunda expresión al sistema x, y, z e igualando los potenciales elásticos llegamos a los mismos resultados.

Omitiendo el proceso anterior, primero consideraremos cuerpos homogéneos, para después comentar sobre los cuerpos no homogéneos.

Los cuatro siguientes casos de simetría elástica son los más importantes:

1) Plano de simetría elástico.- Supongamos que atraviesa cada punto de un cuerpo un plano con la siguiente propiedad: cada dos direcciones simétricas con respecto a este plano son equivalentes en cuanto a las propiedades elásticas. Una dirección normal al plano de simetría elástica se llamará dirección principal de elasticidad (o simplemente la dirección principal sin ninguna otra dirección principal, por ejemplo las de los tensores de esfuerzo y deformación, se consideran a la vez). En este caso solamente la dirección principal. En este caso sólo una dirección principal atraviesa un punto del cuerpo.

Si el eje z se supone normal al plano de simetría elástica y los otros dos ejes están en este plano, concluimos que ocho constantes elásticas deben ser cero

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{46} = a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{56} = 0$$

y el número de constantes elásticas a_{ij} se reduce a 13. Las ecuaciones de Hooka son de la forma

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \sigma_z + a_{16} \tau_{xy} , \\ \epsilon_y &= a_{12} \sigma_x + a_{11} \sigma_y + a_{13} \sigma_z + a_{16} \tau_{xy} , \\ \epsilon_z &= a_{13} \sigma_x + a_{13} \sigma_y + a_{33} \sigma_z + a_{36} \tau_{xy} , \\ \gamma_{yz} &= a_{44} \tau_{yz} + a_{45} \tau_{xz} , \\ \gamma_{xz} &= a_{45} \tau_{yz} + a_{44} \tau_{xz} , \\ \gamma_{xy} &= a_{16} \sigma_x + a_{16} \sigma_y + a_{36} \sigma_z + a_{66} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.1)$$

La expresión esquemática para el potencial elástico es (las mitades en la diagonal correspondientes a los términos σ_x^2 , σ_y^2 ... τ_{xy}^2

son rechazados).

$$\left. \begin{array}{cccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\
 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & a_{26} \\
 & & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\
 & & & a_{44} & a_{48} & 0 \\
 & & & & & a_{66}
 \end{array} \right\} \quad (2.4.2)$$

Al resolver la ecuación 2.4.1 para σ, τ obtenemos ecuaciones - difieren de 2.4.1 solo σ, τ se reemplaza por ϵ, γ y a_{ij} por A_{ij} correspondientes. Para las direcciones arbitrarias de los ejes, estas ecuaciones contienen 13 coeficientes de deformación no explícitamente relacionados de ninguna manera. Sin embargo, hay 12, y no 13, -- constantes independientes en 2.4.1 y 2.4.2 y de conocer a_{ij} podemos, teóricamente encontrarlas.

Consideremos un elemento de un cuerpo en la forma de un paralelepípedo en el que dos pares de caras se orientan arbitrariamente y los planos de las otras dos son planos de simetría elástica. En estas dos caras actúan sobre ellas esfuerzos normales uniformemente distribuidos equivalentes a esfuerzos σ_1 (figura 2.4.1). De las ecuaciones 2.4.1 encontramos las componentes de deformación:

$$\left. \begin{array}{lll}
 \epsilon_x = a_{13} \sigma_1, & \epsilon_y = a_{23} \sigma_1, & \epsilon_z = a_{33} \sigma_1, \\
 \gamma_{yz} = 0, & \gamma_{xz} = 0, & \gamma_{xy} = a_{26} \sigma_1.
 \end{array} \right\} \quad (2.4.3)$$

Esto demuestra que en tensión o en compresión en una dirección perpendicular al plano de simetría elástica los ángulos entre segmentos normales paralelos al plano de simetría elástica y dentro de él siguen rectos. Un paralelepípedo rectangular se transforma en un paralelepípedo recto, es decir, sus caras laterales siguen siendo rectangulares y las bases cambian a paralelogramos.

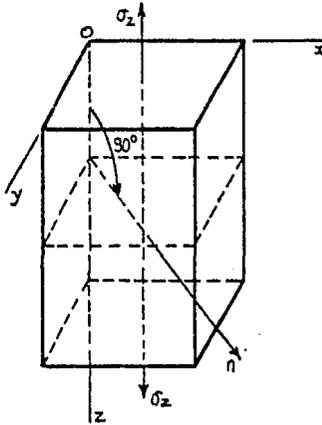


Figura 2.4.1

2) Tres planos de simetría elástica (cuerpo ortotrópico).- Si por cada punto de un cuerpo atraviesan tres planos mutuamente perpendiculares (ortogonales) de simetría elástica, y los planos iguales de simetría elástica son paralelos en todo punto, entonces tomando los ejes coordenados normales a los planos de simetría elástica (a lo largo de las direcciones principales) encontramos que, en adición a las ocho constantes elásticas del caso anterior, hay cuatro constantes más iguales a cero.

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0$$

Las ecuaciones de la ley generalizada de Hooke y la expresión esquemática para el potencial elástico en términos de las constantes

a_{ij} , toman la forma:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \sigma_z, \\ \epsilon_y &= a_{21} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{23} \sigma_z, \\ \epsilon_z &= a_{31} \sigma_x + a_{32} \sigma_y + a_{33} \sigma_z, \\ \gamma_{yz} &= a_{44} \tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = a_{55} \tau_{xz}, \\ \gamma_{xy} &= a_{66} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.4)$$

$$\left. \begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & \\ & & a_{33} & 0 & 0 & 0 & \\ & & & a_{44} & 0 & 0 & \\ & & & & a_{55} & 0 & \\ & & & & & a_{66} & \end{array} \right\} \quad (2.4.5)$$

Introducimos las constantes de ingeniería E_i , G_{ij} , V_{ij} utilizando subíndices numéricos en lugar de letras, las ecuaciones 2.4.4 entonces se escriben:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{V_{21}}{E_2} \sigma_y - \frac{V_{31}}{E_3} \sigma_z \\ \epsilon_y &= -\frac{V_{12}}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y - \frac{V_{32}}{E_3} \sigma_z \\ \epsilon_z &= -\frac{V_{13}}{E_1} \sigma_x - \frac{V_{23}}{E_2} \sigma_y + \frac{1}{E_3} \sigma_z \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{13}} \tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G_{13}} \tau_{xz}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.6)$$

Un cuerpo con tres planos ortogonales de simetría elástica en cada punto, (o, lo que es lo mismo, tres direcciones principales - que son mutuamente perpendiculares) se llama anisótropo ortogonal o simplemente ortotrópico. Las direcciones principales en un punto - dado no tienen que ser equivalentes. De las doce constantes elásticas que entran en las ecuaciones 2.4.6 sólo nueve son independientes, ya que por simetría de la matriz de los lados derechos de las ecuaciones que expresan la ley de Hooke siempre tenemos:

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{11}, \quad E_2 \nu_{31} = E_3 \nu_{23}, \quad E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31} \quad (2.4.7)$$

Los ejes de coordenadas normales a los planos de simetría elástica se llaman ejes principales de coordenadas.

Es importante notar que se puede reducir más el número de constantes elásticas es posible puesto que, en contraste al caso de un plano simple o de simetría elástica, a_{ij} de las ecuaciones 2.4.4 ó E_{ij} , G_{ij} , ν_{ij} de las ecuaciones 2.4.6 son constantes invariables en sí. Pueden llamarse las constantes principales (a diferencia de las constantes de las ecuaciones escritas para un sistema arbitrario x, y, z).

Nótese que el elemento representado en la figura 2.4.1 con caras paralelas a los planos de simetría elástica, cuando se extiende, sigue paralelepípedo, pero cambia sus dimensiones.

3) Plano de isotropía (eje de simetría rotacional). Cuerpo isotropo transversal.- Consideremos un cuerpo con las siguientes propiedades: Por todos los puntos atraviesan planos paralelos de simetría elástica en la que todas las direcciones son equivalentes elásticas (Planos de isotropía).

En otras palabras, en cada punto hay una sola dirección principal y un número infinito de direcciones principales en un plano normal a la primera dirección. Es un cuerpo por el que atraviesa un eje de simetría elástico de un orden infinitamente alto, es un eje de rotación, tal cuerpo es isotropo transversal.

Dejemos que el eje z sea normal al plano de isotropía, con los ejes x y y dirigidos arbitrariamente en este plano. Las ecuaciones de la ley generalizada de Hooke se escriben como:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \sigma_z, \\ \epsilon_y &= a_{12} \sigma_x + a_{11} \sigma_y + a_{13} \sigma_z, \\ \epsilon_z &= a_{13} (\sigma_x + \sigma_y) + a_{33} \sigma_z, \\ \gamma_{yz} &= a_{44} \tau_{yz}; \quad \gamma_{xz} = a_{44} \tau_{xz}; \quad \gamma_{xy} = 2(a_{11} - a_{12}) \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.8)$$

El número de constantes independientes es cinco.

Introducimos las constantes de ingeniería: E, E' = módulo de Young para la tensión o compresión en el punto de isotropía y en una dirección normal a él, ν = la relación de Poisson que caracteriza la contracción transversal en un plano de isotropía cuando la tensión se aplica en una dirección normal al plano, ν' = lo mismo que cuando la tensión se aplica en dirección normal al plano de isotropía, G = E/2 (1+ ν) G' = módulo de resistencia al cortante para el plano de isotropía y en cualquier plano perpendicular a él. Las ecuaciones 2.4.8 se escriben como:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) - \frac{\nu'}{E'} \sigma_z, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x + \sigma_y) - \frac{\nu'}{E'} \sigma_z; & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}; \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu'}{E'} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E'} \sigma_z; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.9)$$

En algunos trabajos un material isótropo transversal se llama - transtróptico.

4) Cuerpo Isótropo.- Si todas las direcciones del cuerpo son - equivalentes elásticas y principales, entonces, al poner $E' = E$, $\nu' = \nu$, $G' = G = E/2 (1+\nu)$ en 2.4.9, observamos las muy conocidas ecuaciones que expresan la ley de Hooke para un cuerpo isótropo de módulo de Young E , relación de Poisson ν , y módulo de resistencia al - cortante G :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] ; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} ; \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] ; & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} ; \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] ; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} . \end{aligned} \right\} \quad (2.4.10)$$

Aparte de los cuatro casos básicos de simetría hay otros. Casos típicos de simetría son los cristales de elementos simples y compuestos de varios elementos. Se ha demostrado que hay 32 clases de cristales geoméricamente simétricos. Sin embargo, el número de clases - de simetría elástica es mucho menor (nueve) por lo tanto la misma forma de las ecuaciones de Hooke se aplican a varios casos de simetría geométrica.

III

PRINCIPIOS BASICOS DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO

3.1 EL METODO DEL ELEMENTO FINITO.-

El método del elemento finito es un procedimiento numérico para resolver un problema de mecánica continua con una aproximación aceptable para ingenieros.

Supongamos que se deben encontrar los esfuerzos y desplazamientos para la estructura de la figura 3.1.1 a. Las respuestas numéricas no se encuentran en ningún libro. Los métodos clásicos describen el problema con ecuaciones diferenciales parciales pero no dan respuestas por que la geometría y las cargas son demasiado complejas. En la práctica la mayoría de los problemas son demasiado complejos para una solución matemática de forma cerrada. Es requerida una solución numérica, y al método más versátil que le dé, es éste.

La figura 3.1.1 b muestra un modelo de elemento finito. Las regiones cuadriláteras y triangulares son elementos finitos. Los puntos negros son nudos donde los elementos se conectan uno a otro. Una red es un arreglo de nudos y elementos. Esta red en particular muestra elementos triangulares y cuadrilateros algunos con nudos de borde y algunos con nudos de esquina.

En cierto sentido, los elementos finitos son piezas de la misma estructura pero no convertimos la figura 3.1.1 a a 3.1.1.b, simplemente cortando hasta que queden solo residuos para juntar los nudos. Tal estructura es muy debilitada, también las piezas tendrían concentrado esfuerzo en los nudos y tenderían a sobreponerse o separarse a lo largo de los cortes. Obviamente la misma estructura no

funciona así, entonces el elemento finito debe deformarse de maneras restringidas. Por ejemplo, si los bordes del elemento son forzados a quedarse rectos, como en la figura 3.1.1 C los elementos adyacentes ni se sobrepondrán ni se separarán.

Para formular un elemento, hay que encontrar las fuerzas nodales que producen los varios modos de deformación de los elementos. Podemos encontrar estas fuerzas por la teoría elemental para un elemento finito natural como es una viga o una barra. Pero para los elementos que defina el analista dibujando líneas en una continuidad tales como los de la figura 3.1.1 b y 3.1.1 c, se necesitan nuevos procedimientos.

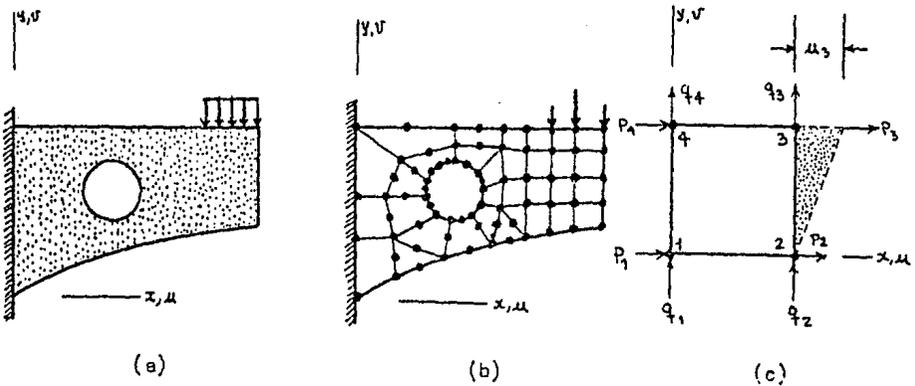


Figura 3.1.1 (a) una fitura plana en forma arbitraria. (b) Un posible modelo de elemento finito para la estructura. (c) Un elemento plano rectangular, mostrando las fuerzas nodales p_i y q_i . La línea quebrada muestra el modo de deformación asociado con la dirección x del desplazamiento del nudo 3.

El método del elemento finito no se restringe a problemas de mecánica estructural (figura 3.1.2). La figura 3.1.2 también sugiere como la superficie suave ϕ , variable, se puede modelar por elementos de varios tipos. Si es modelada por triángulos la superficie ϕ es aproximada por facetas planas. Los elementos de cuatro y ocho nudos muestran superficies deformadas y curvas, respectivamente, y se aproximan mejor a la función. La aproximación mejora mientras más elementos se usen.

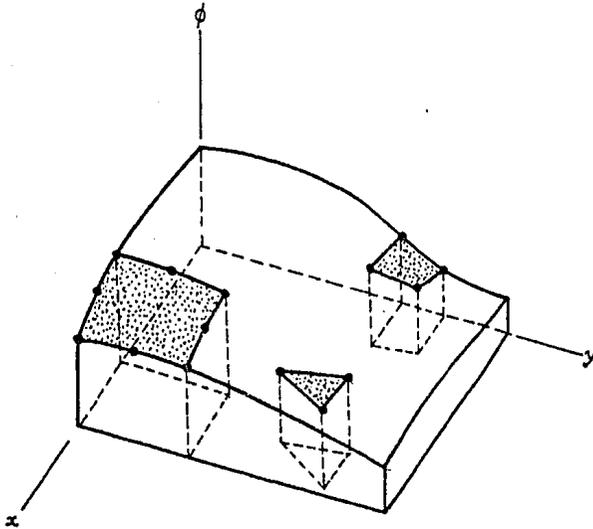


Figura 3.1.2 Una función continua $\phi = \phi(x, y)$ y elementos finitos que podrían ser usados para aproximarse a ésta.

Dentro de cualquier elemento triangular en la figura 3.1.2 ϕ es una función lineal de x y y . La inclinación y elevación del elemento se define por tres valores nodales de ϕ . No más de dos elemen-

Para describir el significado de $[k]$ consideramos la figura 3.2.1 y la ecuación 3.2.2 se convierte en:

$$[k] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{r} \end{Bmatrix}$$

Si todos los g.d.l. son cero menos el j -ésimo y si $d_j = 1$ vemos que $\{\bar{r}\} = \{k_{ij}\}$, la j -ésima columna de $[k]$. En palabras, la j -ésima columna de $[k]$ es el vector de fuerzas (y tal vez momento) que deben aplicarse al elemento para hacer $d_j = 1$ y preservar el equilibrio estático mientras que los otros d (s) son cero. Esto es cierto para cualquier matriz de rigidez de un elemento. Los primeros dos de los cuatro posibles modos $d_j = 1$ se ven en las figuras 3.2.1b y 3.2.1c. Las "fuerzas k_{ij} se muestran en el supuesto sentido positivo, es decir, en los mismos sentidos del g.d.l. en la figura 3.2.1 a, claro está, k_{31} y k_{32} deben ser números negativos. Para este elemento sencillo, la teoría de la viga nos da el k_{ij} en términos de L y la rigidez a la flexión EI .

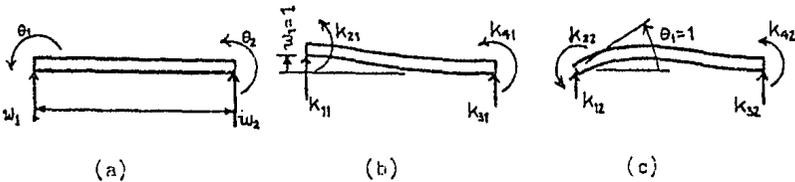


Figura 3.2.1 (a) el g.d.l. $\{d\}$ de un elemento de viga estandar. (b) El modo de deformación $\{d\} = \{1.0 \ 0 \ 0\}$ y las fuerzas requeridas k_{i1} . (c) El modo de deformación $\{d\} = \{0 \ 1 \ 0 \ 0\}$ y las fuerzas requeridas k_{i2} .

Los nudos de los elementos son números asignados en la figura 3.1.1 c. Se podrían haber usado letras. Ambos sirven de etiquetas ya sin sentido después de juntar los elementos para formar una estructura.

La interpretación dada a las columnas de $[k]$ también se aplica a un nivel estructural. En la figura 3.2.2 a al asignar una unidad de desplazamiento a cada nudo por turno, siempre escribiendo las fuerzas necesarias como una columna en una matriz de 4×4 , encontramos:

$$\begin{bmatrix} k_1 & (-k_1) & 0 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & (k_2) & 0 \\ 0 & (0+k_2) & (k_2+k_3) & -k_3 \\ 0 & (0+0) & (0+k_3) & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \\ R_4 \end{Bmatrix} \quad (3.2.4)$$

Cada línea quebrada en la ecuación 3.2.4 encierra una matriz de rigidez de elemento, como se ve al considerar $u_i = 1$ y entonces $u_{i+1} = 1$ en la figura 3.2.2 b. El arreglo de términos en 3.2.4 sugiere

que la matriz estructural se construye agregando matrices de elementos en forma de sobreposición. El nudo 4 en la figura 3.2.2 a, está fijado en contra del movimiento, es decir, $u_4 = 0$. Así las ecuaciones que relacionan el g.d.l. activo son:

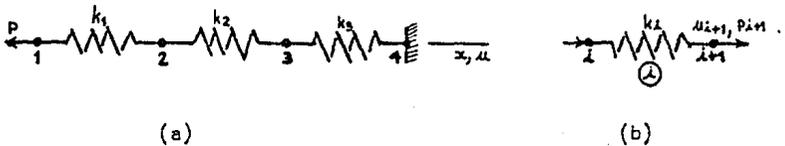


Figura 3.2.2 (a) Una estructura que tiene 3 g.d.l. activos (u_1, u_2, u_3) sus elementos finitos son tres resortes lineales de rigidez k_1, k_2, k_3 . (b) g.d.l. nodales y fuerzas de un elemento típico i .

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.5)$$

$$[K] \{D\} = \{R\} \quad (3.2.6)$$

Las matrices en la ecuación 3.2.6 se nombran con los mismos términos usados para las matrices en la ecuación 3.2.2, sólo que "estructura" o "global" reemplaza a "elemento".

Las ecuaciones 3.2.6 se pueden resolver para $\{D\}$, por lo tanto, como $\{d\}$ para cada elemento está contenida en $\{D\}$, se conocen las deformaciones para todos los elementos. De las deformaciones calculamos los esfuerzos y entonces se completa la solución. Este procedimiento es generalmente aplicable, no se restringe a los elementos de resortes o barras.

¿Cuan grande puede ser un problema con solución?. El tamaño depende del usuario, del dinero disponible y los recursos de computadora. Actualmente un problema de más de un millón de g.d.l. puede ser grande. Problemas con más de un millón de g.d.l. se han resuelto con éxito.

3.3 ECUACIONES PARA UN ELEMENTO FINITO TRIANGULAR.-

Como vimos anteriormente un medio continuo se le puede dividir en elementos finitos rectangulares, triangulares, poligonales, etc. Nosotros ahora desarrollaremos las ecuaciones para un elemento triangular, por considerarlo versátil y de mucha aplicación.

Consideremos un medio continuo y dividámoslo en triángulos como se indica en la figura 3.3.1. Apliquemos un sistema de fuerzas externas en los nudos de la red, lo que ocasiona que el medio se deforme y se presenten desplazamientos en dichos nudos. Las ecuaciones del método del elemento finito se obtienen valuando el trabajo de las -

de las fuerzas externas y el trabajo acumulado debido a los esfuerzos internos. Para el caso elástico lineal ambos trabajos se igualan, dado que se desprecian las pérdidas de energía, lo cual conduce a un sistema de ecuaciones lineales en el que las fuerzas en los nodos de los triángulos quedan en función de los desplazamientos de dichos nudos; la solución de este sistema permite conocer los desplazamientos en los nudos, lo que a su vez sirve para determinar los esfuerzos -- dentro de los triángulos en que se dividió el medio.

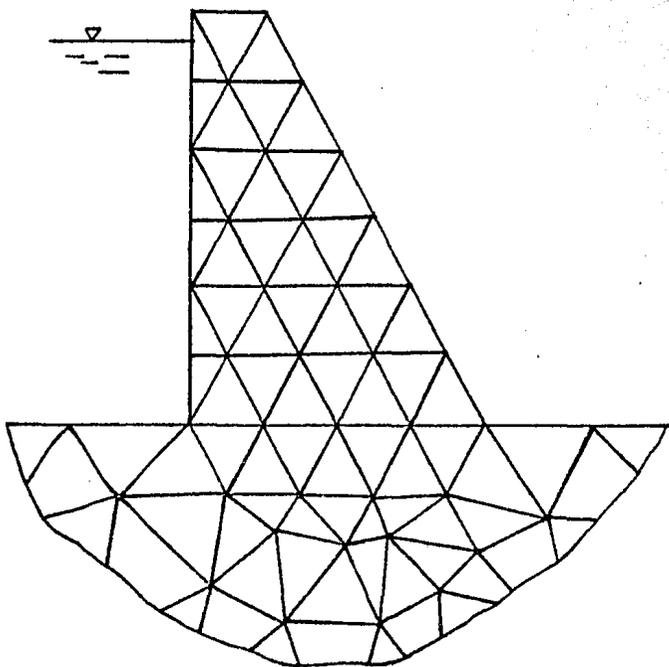


Figura 3.3.1. Una posible red de triángulos de esfuerzo constante, para el análisis de deformación plana de una presa de gravedad y - parte de su cimentación, las cargas son el peso muerto y la presión del agua en la cara izquierda.

Desarrollemos el procedimiento anterior considerando un triángulo cualesquiera del medio y suponiendo que conocemos los desplazamientos en los nudos del triángulo después de la deformación, figura -- 3.3.2. Obtendremos a continuación los desplazamientos, las deformaciones unitarias y los esfuerzos dentro del triángulo en función de los desplazamientos en los nudos del mismo, debido a que necesitamos para evaluar el trabajo interno de deformación.

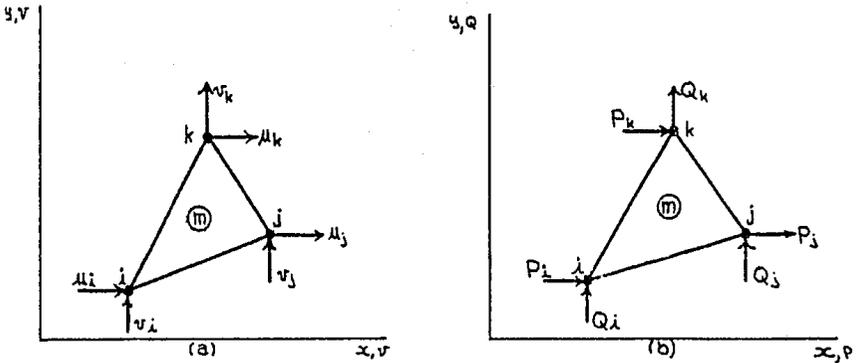


Figura 3.3.2 (a) Desplazamientos en los nudos de un triángulo.
 (b) Cargas en los nudos de un triángulo.

Hallemos primeramente los desplazamientos u y v en cualquier punto dentro del triángulo en función de los desplazamientos en los nudos. Suponemos que u y v son funciones lineales de las coordenadas x y y , figura 3.3.2:

$$u = \alpha_{11} + \alpha_{12}x + \alpha_{13}y \quad (3.3.1)$$

$$v = \alpha_{21} + \alpha_{22}x + \alpha_{23}y \quad (3.3.2)$$

Substituyendo los valores de las coordenadas de los nudos de los triángulos en la ecuación 3.3.1

$$\left. \begin{aligned} \mu_i &= \alpha_{11} + \alpha_{12} x_i + \alpha_{13} y_i \\ \mu_j &= \alpha_{11} + \alpha_{12} x_j + \alpha_{13} y_j \\ \mu_k &= \alpha_{11} + \alpha_{12} x_k + \alpha_{13} y_k \end{aligned} \right\}$$

es decir

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} + \alpha_{12} x_i + \alpha_{13} y_i &= \mu_i \\ \alpha_{11} + \alpha_{12} x_j + \alpha_{13} y_j &= \mu_j \\ \alpha_{11} + \alpha_{12} x_k + \alpha_{13} y_k &= \mu_k \end{aligned} \right\} \quad (3.3.3)$$

despejando los valores de α_{11} , α_{12} , α_{13} de las ecuaciones 3.3.3, utilizando la regla de Cramer,

$$\alpha_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \mu_i & x_i & y_i \\ \mu_j & x_j & y_j \\ \mu_k & x_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2A} [\mu_i (x_j y_k - x_k y_j) - x_i (\mu_j y_k - \mu_k y_j) + y_i (\mu_j x_k - \mu_k x_j)] \quad (3.3.4)$$

donde:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (3.3.5)$$

A = Area del triángulo = $1/2 \det [A]$

De manera análoga:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2A} \left[(\mu_j y_k - \mu_k y_j) - \mu_j (y_k - y_j) + y_i (x_k - \mu_j) \right] \quad (3.36)$$

$$\alpha_{13} = \frac{1}{2A} \left[(x_j \mu_k - x_k \mu_j) - x_i (\mu_k - \mu_j) + \mu_i (x_k - x_j) \right] \quad (3.37)$$

Substituyendo los valores de α_{11} , α_{12} y α_{13} en la ecuación 3.3.1

$$\begin{aligned} \mu = \frac{1}{2A} \left\{ \mu_i \left[(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y \right] + \right. \\ \left. + \mu_j \left[(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y \right] + \right. \\ \left. + \mu_k \left[(x_i y_j - y_j x_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y \right] \right\} \cdot \quad (3.38) \end{aligned}$$

Si llamamos a:

$$\left. \begin{aligned} x_k - x_j = x_{kj}, \quad x_i - x_k = x_{ik}, \quad x_j - x_i = x_{ji} \\ y_j - y_k = y_{jk}, \quad y_k - y_i = y_{ki}, \quad y_i - y_k = y_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

$$\left. \begin{aligned} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ a_j = x_k y_i - x_i y_k \\ a_k = x_i y_j - y_j x_i \end{aligned} \right\} \quad (3.3.10)$$

y substituyendo en la ecuación 3.3.8

$$\mu = \frac{1}{2A} \left[\mu_i (a_i + y_{jk}x + x_{kj}y) + \mu_j (a_j + y_{ki}x + x_{ik}y) + \mu_k (a_k + y_{ji}x + x_{ji}y) \right] \quad (3.3.11)$$

Procediendo de la misma forma con el desplazamiento v:

$$v = \frac{1}{2A} \left[v_i (a_i + y_{jk}x + x_{kj}y) + v_j (a_j + y_{ki}x + x_{ik}y) + v_k (a_k + y_{ji}x + x_{ji}y) \right] \quad (3.3.12)$$

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i + y_{jk} X + x_{kj} Y & 0 & a_j + y_{ki} X + x_{ik} Y & 0 & a_k + y_{ij} X + x_{ji} Y & 0 \\ 0 & a_i + y_{jk} X + x_{kj} Y & 0 & a_j + y_{ki} X + x_{ik} Y & 0 & a_k + y_{ij} X + x_{ji} Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (3.3.13)$$

llamado

$$\{u_{xy}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.3.14)$$

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (3.3.15)$$

$$[N] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i + y_{jk} X + x_{kj} Y & 0 & a_j + y_{ki} X + x_{ik} Y & 0 & a_k + y_{ij} X + x_{ji} Y & 0 \\ 0 & a_i + y_{jk} X + x_{kj} Y & 0 & a_j + y_{ki} X + x_{ik} Y & 0 & a_k + y_{ij} X + x_{ji} Y \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

queda:

$$\{u_{xy}\} = [N] \{u^e\} \quad (3.3.17)$$

A $[N]$ se le denomina matriz de forma.

Definemos a continuación las deformaciones unitarias dentro del elemento en función de los desplazamientos en los nudos del mismo:

De acuerdo con la teoría de la deformación sabemos que la deformación lineal unitaria ϵ_x vale: $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; la deformación unitaria ϵ_y vale: $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ y la deformación unitaria (angular) $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

Empleando las ecuaciones 3.3.11 y 3.3.12

$$\epsilon_x = \frac{1}{2A} (\mu_i y_{jk} + \mu_j y_{ki} + \mu_k y_{ij})$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{2A} (\nu_i x_{kj} + \nu_j x_{ik} + \nu_k x_{ji})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2A} (\mu_i x_{jk} + \mu_j x_{ik} + \mu_k x_{ji} + \nu_i y_{jk} + \nu_j y_{ki} + \nu_k y_{ij})$$

en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{ki} & y_{jk} & x_{ij} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_i \\ \nu_i \\ \mu_j \\ \nu_j \\ \mu_k \\ \nu_k \end{Bmatrix} \quad (3.3.18)$$

Denominando:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.3.19)$$

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{ki} & y_{jk} & x_{ij} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.3.20)$$

queda:

$$\{\epsilon\} = [B] \{\mu^e\} \quad (3.3.21)$$

Determinemos los esfuerzos dentro de un triángulo en función de los desplazamientos en los nudos del mismo:

Como estamos estudiando el método del elemento finito aplicado a un medio anisótropo, para cuerpos que cumplen con la tercera condición de simetría elástica, señalada en el capítulo 2. Esto es: Plano de isotropía (ejes de simetría rotacional). Cuerpo isótropo transversal. Consideremos el elemento de la figura 3.3.5 a. Las propiedades E_1 y ν_1

corresponden a la deformación en las direcciones de los planos de estratificación (dirección x') y E_2, G_2 y ν_2 a la dirección normal a los planos de estratificación (dirección y').

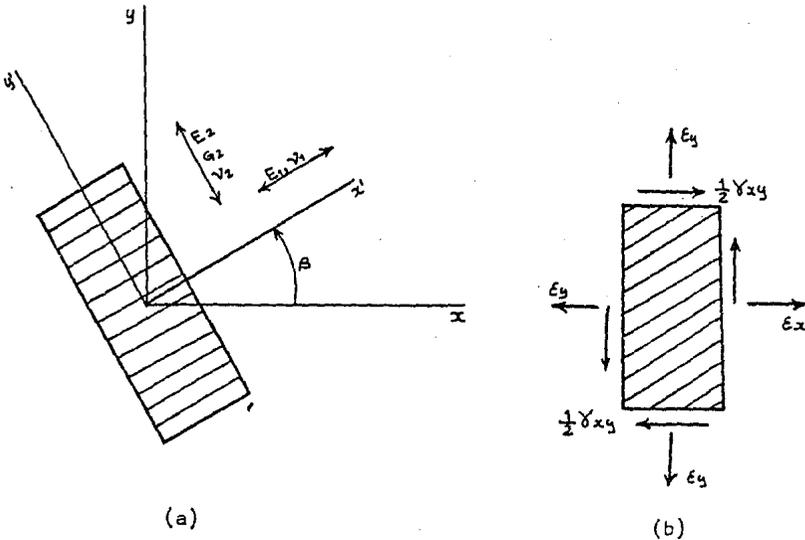


Figura 3.3.3 (a) Geometría y propiedades elásticas, medio anisótropo estratificado. (b) Estado de deformación en el sistema global x - y .

Como vimos en el capítulo II las deformaciones para el caso tridimensional están dadas por las ecuaciones 2.4. y cambiando al eje z por y , y viceversa y por z tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x' &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x' - \nu_1 \sigma_z') - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_y' & \gamma_{y2}' &= \frac{1}{G_2} \tau_{y2}' \\ \epsilon_y' &= -\frac{\nu_2}{E_2} (\sigma_x' + \sigma_z') + \frac{1}{E_2} \sigma_y' & \gamma_{x2}' &= \frac{1}{G_2} \tau_{x2}' \\ \epsilon_z' &= \frac{1}{E_1} (-\nu_1 \sigma_x' + \sigma_z') + \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_y' & \gamma_{xy}' &= \frac{1}{G_2} \tau_{xy}' \end{aligned} \right\} \quad (3.3.22)$$

pero $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

tenemos entonces:

$$\gamma'_{xz} = \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} \tau'_{yz}, \quad \gamma'_{xy} = \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} \tau'_{xy}, \quad \gamma'_{x1} = \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} \tau'_{xz}.$$

Como es un problema bidimensional de un cuerpo que está en el plano $x' - y'$. Entonces por definición $\tau'_{xz} = \tau'_{yz} = 0$. Y debemos considerar un estado de esfuerzo plano y deformación plana.

Para el caso de esfuerzo plano $\sigma_z = 0$ y ϵ_z no necesita entrar en el proceso de solución, así pues:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_x &= \frac{1}{E_1} \sigma'_x - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma'_y, & \gamma'_{yz} &= 0 \\ \epsilon'_y &= -\frac{\nu_2}{E_2} \sigma'_x + \frac{1}{E_2} \sigma'_y, & \gamma'_{xz} &= 0 \\ \gamma'_{xy} &= \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} \tau'_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.2.3)$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} \epsilon'_x \\ \epsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3.2.4)$$

por Cramer:

$$\sigma'_x = \frac{\begin{vmatrix} \epsilon'_x & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\ \epsilon'_y & \frac{1}{E_2} & 0 \\ \gamma'_{xy} & 0 & \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} \end{vmatrix}} = \frac{\epsilon'_x \frac{1}{E_2} \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} + \epsilon'_y \frac{\nu_2}{E_2} \frac{2(1+\nu_2)}{E_2}}{\frac{1}{E_1} \frac{1}{E_2} \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} - \frac{\nu_2}{E_2} \frac{\nu_2}{E_2} \frac{2(1+\nu_2)}{E_2}}$$

$$\sigma'_x = \frac{\epsilon'_x + \epsilon'_y \nu_2}{\frac{1}{E_1} - \frac{\nu_2^2}{E_2}} = \frac{\epsilon'_x + \epsilon'_y \nu_2}{\frac{E_2 - E_1 \nu_2^2}{E_1 E_2}} = \frac{\epsilon'_x + \epsilon'_y \nu_2}{\frac{E_2}{E_1 E_2} - \frac{E_1}{E_1 E_2}}, \quad \text{si: } n = \frac{E_1}{E_2}$$

$$\sigma'_x = \frac{\epsilon'_x + \epsilon'_y \nu_2}{\frac{1}{n E_1} - \frac{1}{E_2} \nu_2^2} = \frac{\epsilon'_x + \epsilon'_y \nu_2}{\frac{1 - n \nu_2^2}{n E_2}} = \frac{E_2}{(1 - n \nu_2^2)} (n \epsilon'_x + n \epsilon'_y \nu_2^2)$$

$$\sigma'_y = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{E_1} & \epsilon'_x & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \epsilon'_y & 0 \\ 0 & \nu_2 \nu_1 & \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{E_1} \epsilon'_y \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} + \epsilon'_x \frac{\nu_2}{E_2} \frac{2(1+\nu_2)}{E_2}}{\frac{1}{E_1} \frac{1}{E_2} \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} - \frac{\nu_2}{E_2} \frac{\nu_2}{E_2} \frac{2(1+\nu_2)}{E_2}}$$

$$\sigma'_y = \frac{\frac{1}{E_1} \epsilon'_y + \frac{\epsilon'_x \nu_2}{E_2}}{\frac{1}{E_1 E_2} + \frac{\nu_2^2}{E_2}} = \frac{\frac{E_2 \epsilon'_y + E_1 \epsilon'_x \nu_2}{E_1 + E_2}}{\frac{E_2 - E_1 \nu_2^2}{E_1 E_2}} = \frac{E_2^2 (\epsilon'_y + n \epsilon'_x \nu_2)}{E_2 (1 - n \nu_2^2)}$$

$$\sigma'_y = \frac{E_2}{(1 - n \nu_2^2)} (n \epsilon'_x \nu_2 + \epsilon'_y)$$

$$\tau'_{xy} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & \epsilon'_x \\ -\frac{\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_1} & \epsilon'_y \\ 0 & 0 & \gamma'_{xy} \end{vmatrix}}{\frac{E_2 - E_1 \nu_2^2}{E_1 E_2^2} 2(1+\nu_2)} = \frac{\frac{1}{E_1 E_2} \gamma'_{xy} - \frac{\nu_2^2}{E_2^2} \gamma'_{xy}}{\frac{E_2 - E_1 \nu_2^2}{E_1 E_2^2} 2(1+\nu_2)} = \frac{\gamma'_{xy}}{2(1+\nu_2)} \frac{E_2 + \nu_2^2 E_1}{E_1 E_2} \frac{E_2 - E_1 \nu_2^2}{E_1 E_2^2}$$

$$\tau'_{xy} = \frac{\gamma'_{xy}}{2(1+\nu_2)} \frac{E_2(1+n\nu_2^2)}{E_2(1-n\nu_2^2)},$$

$$\text{si: } m = \frac{G_2}{E_2} = \frac{1}{2(1+\nu_2)}$$

$$\tau'_{xy} = \frac{E_2}{(1-n\nu_2^2)} m(1+n\nu_2^2) \gamma'_{xy}$$

es decir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_2}{(1-n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1+n\nu_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon'_x \\ \epsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.3.3.25)$$

denominando:

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\epsilon'\} = \begin{Bmatrix} \epsilon'_x \\ \epsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.3.26)$$

$$[D'] = \frac{E_2}{(1-n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1+n\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (3.3.27)$$

entonces:

$$\{\sigma'\} = [D']\{\epsilon\}$$

Se puede demostrar en forma similar que la matriz $[D']$ para una condición de deformación plana, donde $\epsilon_z = 0$ y σ_z no necesita entrar en el proceso de solución ($\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$), vale:

$$[D'] = \frac{E_z}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n(1-n\nu_1^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n\nu_2(1+\nu_1) & 1-\nu_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (3.328)$$

Como la matriz $[D']$ corresponde al sistema local $x'-y'$. Para hallar la matriz $[D]$ correspondiente al sistema general $x-y$, obtenemos primero las deformaciones unitarias $\{\epsilon'\}$ en el sistema local en función de las deformaciones unitarias $\{\epsilon\}$ en el sistema general. De las ecuaciones 2.2.2 y substituyendo ϵ_x por σ_x , ϵ_y por σ_y y $\frac{1}{2}\gamma$ por τ (figura 3.3.3b) tenemos:

$$\epsilon'_x = \epsilon_x l_{11}^2 + \epsilon_y l_{12}^2 + \gamma l_{11} l_{12} ,$$

$$\epsilon'_y = \epsilon_x l_{21} + \epsilon_y l_{22} + \gamma l_{21} l_{22} ,$$

$$\frac{1}{2}\gamma' = \epsilon_x l_{11} l_{21} + \epsilon_y l_{11} l_{22} + \frac{1}{2}\gamma (l_{12} l_{21} + l_{11} l_{22})$$

donde:

$$l_{11} = \cos\beta ,$$

$$l_{12} = \sin\beta ,$$

$$l_{21} = -\sin\beta ,$$

$$l_{22} = \cos\beta ,$$

es decir

$$\begin{Bmatrix} \epsilon'_x \\ \epsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \sin^2\beta & \cos\beta \sin\beta \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & -\cos\beta \sin\beta \\ -2\cos\beta \sin\beta & 2\sin\beta \cos\beta & \cos^2\beta - \sin^2\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.3.29)$$

si

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \sin^2\beta & \cos\beta \sin\beta \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & -\cos\beta \sin\beta \\ -2\cos\beta \sin\beta & 2\sin\beta \cos\beta & \cos^2\beta - \sin^2\beta \end{bmatrix}$$

es decir

$$\{\epsilon'\} = [T]^T \{\epsilon\} \quad (3.3.30)$$

pero:

$$\{\sigma\} = [D'] \{\epsilon'\} \quad (3.3.31)$$

substituyendo 3.3.30 en 3.3.31 tenemos:

$$\{\sigma'\} = [D'] [T]^T \{\epsilon\} \quad (3.3.32)$$

Ahora transformemos $\{\sigma'\}$ a $\{\sigma\}$ utilizando las ecuaciones 2.2.3:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma'_x l_{11}^2 + \sigma'_y l_{21}^2 + 2 \tau'_{xy} l_{11} l_{21} \\ \sigma_y &= \sigma'_x l_{12}^2 + \sigma'_y l_{22}^2 + 2 \tau'_{xy} l_{12} l_{22} \\ \tau_{xy} &= \sigma'_x l_{11} l_{12} + \sigma'_y l_{21} l_{22} + \tau'_{xy} (l_{21} l_{12} + l_{11} l_{22}) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.33)$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \sin^2\beta & -2\cos\beta \sin\beta \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 2\cos\beta \sin\beta \\ \cos\beta \sin\beta & -\sin\beta \cos\beta & \cos^2\beta - \sin^2\beta \end{bmatrix} \{\sigma'\} \quad (3.3.34)$$

Vemos que la matriz de transformación de σ a σ' es la transpuesta de $[T]^T$ entonces:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \operatorname{sen}^2\beta & -2\cos\beta\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}^2\beta & \cos^2\beta & 2\cos\beta\operatorname{sen}\beta \\ \cos\beta\operatorname{sen}\beta & -\operatorname{sen}\beta\cos\beta & \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta \end{bmatrix} \quad (3.3.35)$$

substituyendo 3.3.35 y 3.3.32 en 3.3.34, tenemos:

$$\{\sigma\} = [T] [D] [T]^T \{\varepsilon\} \quad (3.3.36)$$

pero

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.3.37)$$

entonces:

$$[D] = [T] [D] [T]^T \quad (3.3.38)$$

substituyendo la ecuación 3.3.21 en 3.3.37, tenemos:

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{u^e\} \quad (3.3.39)$$

Con las expresiones anteriores estamos en condiciones de obtener las ecuaciones del elemento finito, para lo cual valdremos el trabajo de las fuerzas externas y el trabajo interno de deformación acumulado, para después igualarlos.

El trabajo de las fuerzas externas vale (figura 3.3.2a y 3.3.2b).

$$W_e = \frac{1}{2} P_i u_i + \frac{1}{2} Q_i v_i + \frac{1}{2} P_j u_j + \frac{1}{2} Q_j v_j + \frac{1}{2} P_k u_k + \frac{1}{2} Q_k v_k$$

es decir:

$$W_e = \frac{1}{2} \{u^e\} \{P_e\} \quad (3.3.40)$$

siendo

$$\{P_e\} = \begin{bmatrix} P_i \\ Q_i \\ P_j \\ Q_j \\ P_k \\ Q_k \end{bmatrix} \quad (3.3.41)$$

El trabajo interno acumulado dentro del triángulo, por unidad de volumen vale (ecuación 2.3.12).

$$W_i = \frac{1}{2} \epsilon_x \sigma_x + \frac{1}{2} \epsilon_y \sigma_y + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \tau_{xy} = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\}$$

El trabajo interno en todo el volumen del triángulo vale:

$$W_i = \int_{vol} W_i' dvol = \int_{vol} \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dvol$$

(3.3.42)

Igualando las ecuaciones 3.3.40 y 3.3.42:

$$W_e = W_i, \quad \frac{1}{2} \{\mu^e\}^T \{P^e\} = \int_{vol} \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dvol$$

Pero por las ecuaciones 3.3.21 y 3.3.17:

$$\{\epsilon\} = [B] \{\mu^e\} \quad \text{y} \quad \{u\} = [N] \{\mu^e\}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \{\mu^e\}^T \{P^e\} &= \int_{vol} ([B] \{\mu^e\})^T \{\sigma\} dvol \\ &= \int_{vol} \{\mu^e\}^T [B]^T \{\sigma\} dvol \end{aligned}$$

$$\{\mu^e\}^T \{P^e\} = \{\mu^e\}^T \int_{vol} [B]^T \{\sigma\} dvol$$

es decir:

$$\{P^e\} = \int_{vol} [B]^T \{\sigma\} dvol$$

pero:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\mu\}$$

por lo tanto:

$$\{P^e\} = \int_{vol} [B]^T [D] [B] \{\mu^e\} dvol,$$

$$\{P^e\} = [B]^T [D] [B] \{\mu^e\} \int_{vol} dvol.$$

Si el espesor t del triángulo es constante:

$$\{P^e\} = [B]^T [D] [B] \{\mu^e\} At$$

$$\{P^e\} = At [B]^T [D] [B] \{\mu^e\}$$

(3.3.43)

Donde A es el área del triángulo

$$\{P^e\} = A t [B]^T [D] [B] \{u^e\} \quad (3.3.44)$$

siendo $[k^e]$ la matriz de rigidez del elemento queda

$$\{P^e\} [k^e] \{u^e\} \quad (3.3.45)$$

$$[k^e] \{u^e\} = \{P^e\} \quad (3.3.46)$$

La ecuación 3.3.46 es válida para un elemento dentro del medio. La podemos aplicar entonces para todos los elementos (triángulo) de la región en estudio. Llamamos $[K]$ a la suma de las matrices de rigidez de todos los triángulos, $\{u\}$ al vector de desplazamientos de todo al medio y $\{P\}$ al vector de carga en todos los nudos del medio de la ecuación 3.3.46, válida para un triángulo, se puede poner para todo el medio de la siguiente forma:

$$[K] \{u\} = \{P\} \quad (3.3.47)$$

$[K]$ se denomina matriz de rigidez de todo el medio.

La ecuación 3.3.47 da lugar a un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son los desplazamientos en los nudos de los elementos. La resolución de este sistema permite determinar estos desplazamientos. Para hallar las deformaciones unitarias y los esfuerzos en cada elemento se emplean las ecuaciones 3.3.21 y 3.3.39 en cada triángulo.

IV

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

4.1 Ecuaciones para un Medio Anisótropo con Estratificación Horizontal.-

Si la estratificación de un medio anisótropo es horizontal, como generalmente se da en los suelos, con ángulo entre el sistema de referencia local ($x' - y'$) y el sistema de referencia general ($x - y$) - igual a cero ($\beta = 0$), entonces las ecuaciones para este caso quedarían como sigue a continuación:

tenemos que

donde:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

pero como $\beta = 0$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aquí $[T]$ es igual a la matriz identidad $[T] = [I]$ y $[T]^T = [I]$.

Así pues tenemos

$$[D] = [I][D][I]$$

es decir:

$$[D] = [D]$$

Para el caso de esfuerzo plano:

$$[D] = \frac{E_z}{(1-\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-\nu_2^2) \end{bmatrix}$$

De la ecuación 3.3.44 tenemos que:

$$[k^a] = A^t [B]^T [D] [B]$$

donde:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{ki} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{ki} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}$$

$$[B^T] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & x_{ki} \\ 0 & x_{ki} & y_{jk} \\ y_{ki} & 0 & x_{ik} \\ 0 & x_{ik} & y_{ki} \\ y_{ij} & 0 & x_{ji} \\ 0 & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}$$

la matriz de rigidez está dada por:

$$[k^a] = \frac{E_z t}{4A(1-\nu_2^2)} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & x_{ki} \\ 0 & x_{ki} & y_{jk} \\ y_{ki} & 0 & x_{ik} \\ 0 & x_{ik} & y_{ki} \\ x_{ki} & 0 & x_{ji} \\ 0 & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-\nu_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{ki} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{ki} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}$$

Si llamamos a:

$$\left. \begin{aligned} a' &= n \\ b' &= nv_2 \\ c' &= m(1-nv_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.1)$$

tenemos:

$$\begin{bmatrix} a' & b' & 0 \\ b' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1k} & 0 & x_{k1} & 0 & y_{1j} & 0 \\ 0 & x_{k1} & 0 & x_{1k} & 0 & x_{j1} \\ x_{k1} & y_{1k} & x_{1k} & y_{k1} & x_{j1} & y_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'y_{1k} & b'x_{k1} & a'y_{k1} & b'x_{1k} & a'y_{1j} & b'x_{j1} \\ b'y_{1k} & x_{k1} & b'y_{k1} & x_{1k} & b'y_{1j} & x_{j1} \\ c'x_{k1} & c'y_{1k} & c'x_{1k} & c'y_{k1} & c'x_{j1} & c'y_{1j} \end{bmatrix}$$

$$[k^a] = \frac{Et}{4A(1-nv_2^2)} \begin{bmatrix} y_{1k} & 0 & x_{k1} \\ 0 & x_{k1} & y_{1k} \\ x_{k1} & 0 & x_{1k} \\ 0 & x_{1k} & y_{k1} \\ y_{1j} & 0 & x_{j1} \\ 0 & x_{j1} & y_{1j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'y_{1k} & b'x_{k1} & a'y_{k1} & b'x_{1k} & a'y_{1j} & b'x_{j1} \\ b'y_{1k} & x_{k1} & b'y_{k1} & x_{1k} & b'y_{1j} & x_{j1} \\ c'x_{k1} & c'y_{1k} & c'x_{1k} & c'y_{k1} & c'x_{j1} & c'y_{1j} \end{bmatrix}$$

Realiando el producto queda:

$$[k^e] = \frac{E_s t}{4 A (1 - \nu^2)}$$

$$\begin{bmatrix} y_{jn}^2 \alpha' + x_{nj}^2 c' & y_{jn} x_{nj} (b' + c') & y_{jn} y_{ni} \alpha' + x_{ni} x_{jn} c' & y_{jn} x_{in} b' + x_{ni} y_{ji} c' & y_{jn} y_{ij} \alpha' + x_{ij} x_{ji} c' & y_{jn} x_{ji} b' + x_{ni} y_{ij} c' \\ x_{nj} y_{jn} (b' + c') & x_{nj}^2 + y_{jn}^2 c' & x_{ni} y_{ni} b' + y_{jn} x_{in} c' & x_{ni} x_{in} + y_{jn} y_{ni} c' & x_{ni} y_{ij} b' + y_{jn} x_{ji} c' & x_{ni} x_{ii} + y_{jn} y_{ii} c' \\ y_{ni} y_{jn} \alpha' + x_{in} x_{nj} c' & y_{ni} x_{nj} b' + x_{in} y_{jn} c' & y_{ni}^2 \alpha' + x_{in}^2 c' & y_{ni} x_{in} (b' + c') & y_{ni} y_{is} \alpha' + x_{is} x_{si} c' & y_{ni} x_{si} b' + x_{in} y_{is} c' \\ x_{in} y_{jn} b' + y_{ni} x_{nj} c' & x_{in} x_{nj} + y_{ni} y_{jn} c' & x_{in} y_{ni} (\alpha' + c') & x_{in}^2 + y_{ni}^2 c' & x_{in} y_{ij} b' + y_{ni} x_{ji} c' & x_{in} x_{ji} + y_{ni} y_{ij} c' \\ y_{in} y_{ij} \alpha' + x_{ji} x_{ij} c' & y_{ij} x_{nj} b' + x_{ji} y_{jn} c' & y_{ij} y_{ni} \alpha' + x_{ji} x_{in} c' & y_{ij} x_{in} b' + x_{ji} y_{ni} c' & y_{ij}^2 \alpha' + x_{ji}^2 c' & y_{ij} x_{ii} (b' + c') \\ x_{ji} y_{jn} b' + y_{ij} x_{nj} c' & x_{ji} x_{nj} + y_{ij} y_{jn} c' & x_{ji} y_{ni} b' + y_{ij} x_{in} c' & x_{ji} x_{in} + y_{ij} y_{ni} c' & x_{ji} y_{ij} (b' + c') & x_{ji}^2 + y_{ij}^2 c' \end{bmatrix}$$

(4.1.2)

Para deformación plana:

$$[D] = \frac{E_z}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2\nu_2\nu_1^2)} \begin{vmatrix} n(1-\nu_1^2) & \nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ \nu_2(1+\nu_1) & 1-\nu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2\nu_2\nu_1^2) \end{vmatrix}$$

la matriz de rigidez está dada por:

$$[k^e] = \frac{E_z t}{4A(1-\nu_1)(1-\nu_1-2\nu_2\nu_1^2)} \begin{bmatrix} x_{jk} & 0 & x_{kj} \\ 0 & x_{kb} & y_{jk} \\ y_{ki} & 0 & x_{ik} \\ 0 & x_{ik} & y_{ki} \\ y_{ji} & 0 & x_{ji} \\ 0 & x_{ji} & y_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n(1-\nu_1^2) & \nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ \nu_2(1+\nu_1) & 1-\nu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2\nu_2\nu_1^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{li} & 0 \\ 0 & x_{kb} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{li} \\ x_{kb} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{li} & y_{li} \end{bmatrix}$$

si llamamos a:

$$\left. \begin{aligned} a &= n(1-\nu_1^2) \\ b &= \nu_2(1+\nu_1) \\ c &= 1-\nu_2^2 \\ d &= m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2\nu_2\nu_1^2) \end{aligned} \right\} (4.1.3)$$

tenemos:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{ik} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{jk} & 0 & x_{ji} \\ x_{ki} & y_{ik} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ay_{ik} & bx_{kj} & ay_{ki} & bx_{jk} & ay_{ij} & bx_{ji} \\ by_{ik} & cx_{kj} & by_{ki} & cx_{jk} & by_{ij} & cx_{ji} \\ dx_{ki} & dy_{ik} & dx_{jk} & dy_{ki} & dx_{ji} & dy_{ij} \end{bmatrix}$$

así pues:

$$[k^e] = \frac{E_2 t}{4\lambda(1+\nu_1)(1-\nu_1-2\nu_1\nu_2^2)} \begin{bmatrix} y_{ik} & 0 & x_{kj} \\ 0 & x_{kj} & y_{ik} \\ y_{ki} & 0 & x_{jk} \\ 0 & x_{jk} & y_{ki} \\ y_{ij} & 0 & x_{ji} \\ 0 & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ay_{ik} & bx_{kj} & ay_{ki} & bx_{jk} & ay_{ij} & bx_{ji} \\ by_{ik} & cx_{kj} & by_{ki} & cx_{jk} & by_{ij} & cx_{ji} \\ dx_{ki} & dy_{ik} & dx_{jk} & dy_{ki} & dx_{ji} & dy_{ij} \end{bmatrix}$$

Realizando el producto tenemos:

$$[k^*] = \frac{E_s t}{4A(1+\nu)(1-\nu+2\nu^2)} \begin{bmatrix} Y_{1k}^2 a + X_{1k}^2 d & Y_{1k} X_{1k} (b+d) & Y_{1i} Y_{1k} a + X_{1i} X_{1k} d & X_{1k} Y_{1k} b + Y_{1i} X_{1k} d & Y_{1i} Y_{1k} a + X_{1i} X_{1k} d & Y_{1k} X_{1i} b + X_{1k} Y_{1i} d \\ Y_{1k} X_{1k} (b+d) & X_{1k}^2 c + Y_{1k}^2 d & Y_{1i} X_{1k} b + X_{1i} Y_{1k} d & X_{1k} X_{1k} c + Y_{1i} Y_{1k} d & X_{1k} Y_{1i} b + Y_{1k} X_{1i} d & X_{1i} X_{1k} c + Y_{1k} Y_{1i} d \\ Y_{1i} Y_{1k} a + X_{1i} X_{1k} d & Y_{1i} X_{1k} b + X_{1i} Y_{1k} d & Y_{1i}^2 a + X_{1i}^2 d & X_{1i} Y_{1i} (b+d) & Y_{1i} Y_{1i} a + X_{1i} X_{1i} d & Y_{1i} X_{1i} b + X_{1i} Y_{1i} d \\ X_{1k} Y_{1k} b + Y_{1i} X_{1k} d & X_{1k} X_{1k} c + Y_{1i} Y_{1k} d & X_{1i} Y_{1i} (b+d) & X_{1i}^2 c + Y_{1i}^2 d & X_{1k} Y_{1i} b + Y_{1i} X_{1k} d & X_{1k} X_{1i} c + Y_{1i} Y_{1k} d \\ Y_{1i} Y_{1k} a + X_{1i} X_{1k} d & Y_{1i} X_{1k} b + X_{1i} Y_{1k} d & Y_{1i} Y_{1i} a + X_{1i} X_{1i} d & Y_{1i} X_{1i} b + X_{1i} Y_{1i} d & Y_{1i}^2 a + X_{1i}^2 b & X_{1i} Y_{1i} (b+d) \\ Y_{1k} X_{1i} b + X_{1k} Y_{1i} d & X_{1k} X_{1k} c + Y_{1i} Y_{1k} d & X_{1i} Y_{1i} b + Y_{1i} X_{1i} d & X_{1i} X_{1k} c + Y_{1i} Y_{1k} d & X_{1i} Y_{1k} (b+d) & X_{1i}^2 c + Y_{1i}^2 d \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

4.2 Ejemplo.- Determinación de los desplazamientos en los puntos 1 y 2 del medio anisótropo mostrado en la figura 4.2.1. Para esfuerzo plano y deformación plana. La propiedad de los elementos son las siguientes:

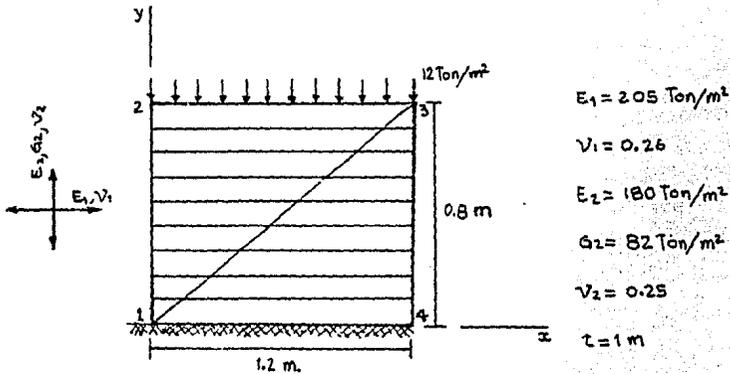
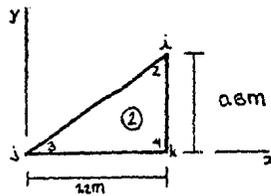
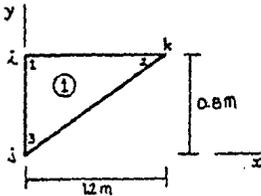


Figura 4.2.1 Medio anisótropo Estratigrafía horizontal.

Solución:

Para esfuerzo plano

Triángulo	u_i	v_i	u_j	v_j	u_k	v_k
1	u_1	v_1	u_3	v_3	u_2	v_2
2	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4



$$A = \frac{0.8 \cdot 1.2}{2} = 0.48$$

$$n = \frac{E_1}{E_2} = \frac{205}{180} = 1.1389$$

$$m = \frac{G_2}{E_2} = \frac{82}{180} = 0.4556$$

Substituyendo valores en la ecuación 4.1.1 tenemos:

$$a' = n = 1.1389$$

$$b' = n v_2 = 1.1389 \times 0.25 = 0.2847$$

$$c' = m(1 - n v_2^2) = 0.4556(1 - 1.1389 \times 0.25^2) = 0.4231$$

Cálculo de la matriz de rigidez para cada elemento.

Elemento 1.

$$y_{ik} = 0 - 0.8 = -0.8$$

$$x_{ik} = 1.2 - 0 = 1.2$$

$$y_{ki} = 0.8 - 0.8 = 0$$

$$x_{ki} = 0 - 1.2 = -1.2$$

$$y_{ij} = 0.8 - 0 = 0.8$$

$$x_{ji} = 0 - 0 = 0$$

$$\frac{E_2}{4A(1 - n v_2^2)} = \frac{1 \times 180}{4 \times 0.48(1 - 1.1389 \times 0.25^2)} = 100.9348$$

Substituyendo valores en la ecuación 4.1.2 tenemos:

$$[k_1^e] = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & u_2 & v_2 \\ 135.070 & - 68.589 & - 61.500 & 27.589 & - 73.570 & 41.000 \\ - 68.589 & 172.679 & 41.000 & -145.346 & 27.589 & - 27.333 \\ - 61.500 & 41.000 & 61.500 & 0.000 & 0.000 & - 41.000 \\ 27.589 & -145.346 & 0.000 & 145.346 & - 27.589 & 0.000 \\ - 73.570 & 27.589 & 0.000 & - 27.589 & 73.970 & 0.000 \\ 41.000 & - 27.333 & - 41.000 & 0.000 & 0.000 & 27.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

(4.2.1)

Elemento 2:

$$\left. \begin{matrix} y_{jk} = 0-0=0 & x_{kj} = 1,2-0=1,2 \\ y_{kl} = 0-0,8=-0,8 & x_{lk} = 1,2-1,2=0 \\ y_{li} = 0,8-0=0,8 & x_{il} = 0-1,2=-1,2 \end{matrix} \right\}$$

Substituyendo valores en la ecuación 4.1.2 tenemos:

$$[k_2^e] = \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 61.500 & 0.000 & 0.000 & - 41.000 & - 61.500 & 41.000 \\ 0.000 & 145.346 & - 27.589 & 0.000 & 27.589 & -145.346 \\ 0.000 & - 27.589 & 73.570 & 0.000 & - 73.570 & 27.589 \\ - 41.000 & 0.000 & 0.000 & 27.333 & 41.000 & - 27.333 \\ - 61.500 & 27.589 & - 73.370 & 41.000 & 135.170 & - 68.589 \\ 41.000 & -145.346 & 27.589 & - 27.333 & - 68.589 & 172.679 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix}$$

(4.2.2)

Pero $u_3 = v_3 = u_4 = v_4 = 0$, por lo tanto sumando 4.2.1 y 4.2.2 queda:

$$[K] = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ 135.070 & -68.589 & -73.570 & 41.000 \\ -68.589 & 172.679 & 27.589 & -27.333 \\ -73.570 & 27.589 & 135.070 & 0.000 \\ 41.000 & -27.333 & 0.000 & 172.679 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

$$P_1 = P_2 = 0$$

$$Q = \frac{-12 \times 1.2}{2} = -7.2 \text{ Ton}; \quad Q = -7.2 \text{ Ton}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ P_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -7.2 \\ 0 \\ -7.2 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema (*)

$$u_1 = -0.00981 \text{ m}$$

$$v_1 = -0.05409 \text{ m}$$

$$u_2 = 0.00571 \text{ m}$$

$$v_2 = -0.04793 \text{ m}$$

(*) Método de Gauss.

Para deformación plana de las ecuaciones 4.1.3 tenemos que:

$$a = n(1 - n\nu_1^2) = 1.1389(1 - 1.1389 \times 0.25^2) = 1.0578$$

$$b = n\nu_2(1 + \nu_1) = 1.1389 \times 0.25(1 + 0.25) = 0.3588$$

$$c = 1 - \nu^2 = 1 - 0.25^2 = 0.9324$$

$$d = m(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2n\nu_2^2) = 0.4556(1 + 0.25)(1 - 0.25 - 2 \times 1.1389 \times 0.25^2) = 0.3480$$

Para el elemento 1:

$$\left. \begin{aligned} Y_{jk} &= 0 - 0.8 = -0.8 & X_{kj} &= 1.2 - 0 = 1.2 \\ Y_{ki} &= 0.8 - 0.8 = 0 & X_{ik} &= 0 - 1.2 = -1.2 \\ Y_{ji} &= 0.8 - 0 = 0.8 & X_{ij} &= 0 - 0 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{E_2 t}{4A(1+\nu_1)(1-\nu_1-2\nu_1^2)} = \frac{1 \times 180}{4 \times 0.48(1+0.26)(1-0.26-2 \times 0.26^2)} = 124.4979$$

Substituyendo valores en 4.1.4 tenemos:

$$[k_i^e] = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & u_2 & v_2 \\ 145.786 & -83.877 & -61.500 & 42.877 & -84.286 & 41.000 \\ -83.877 & 194.491 & -41.000 & -167.158 & 42.877 & -27.333 \\ -61.500 & 41.000 & 61.500 & 0.000 & 0.000 & -41.000 \\ 42.877 & -167.158 & 0.000 & 167.158 & -42.877 & 0.000 \\ -84.286 & 42.877 & 0.000 & -42.877 & 84.286 & 0.000 \\ 41.000 & -27.333 & -41.000 & 0.000 & 0.000 & 27.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

(4.2.3)

Elemento 2:

$$\left. \begin{aligned} Y_{jk} &= 0 & X_{kj} &= 1.2 - 0 = 1.2 \\ Y_{ki} &= 0 - 0.8 = -0.8 & X_{ik} &= 1.2 - 1.2 = 0 \\ Y_{ji} &= 0.8 - 0 = 0.8 & X_{ij} &= 0 - 1.2 = -1.2 \end{aligned} \right\}$$

Substituyendo valores en 4.1.4 tenemos:

$$[k_2^a] = \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 61.500 & 0.000 & 0.000 & -41.000 & -61.500 & 41.000 \\ 0.000 & 167.158 & -42.877 & 0.000 & 42.877 & -167.158 \\ 0.000 & -42.877 & 84.286 & 0.000 & -84.286 & 42.877 \\ -41.000 & 0.000 & 0.000 & 27.333 & 41.000 & -27.333 \\ -61.500 & 42.877 & -84.286 & 41.000 & 145.786 & -83.877 \\ 41.000 & -167.158 & 42.877 & -27.333 & -83.877 & 194.491 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix}$$

(4.2.4)

Pero $u_3=v_3=u_4=v_4=0$, por lo tanto sumando 4.2.3 y 4.2.4 tenemos:

$$[K] = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ 145.786 & -87.777 & -84.286 & 41.000 \\ -83.877 & 194.491 & 42.877 & -27.333 \\ -84.286 & 42.877 & 145.786 & 0.000 \\ 41.000 & -27.333 & 0.000 & 194.491 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

$$P_1=P_2=0$$

$$Q = -\frac{12 \times 1.2}{2} = -7.2 \text{ Ton}, \quad Q = -7.2 \text{ Ton}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix},$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ P_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -7.2 \\ 0 \\ -7.2 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$u_1 = -0.012992 \text{ m}$$

$$v_1 = -0.050008 \text{ m}$$

$$u_2 = 0.007196 \text{ m}$$

$$v_2 = -0.041309 \text{ m}$$

Si aplicamos las ecuaciones de la ley Hooke (ecuaciones de las cuales partimos) para encontrar las deformaciones unitarias:

Para esfuerzo plano

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_y}{E_2}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu_1 \sigma_x}{E_2} + \frac{\sigma_y}{E_2}$$

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = 12 \text{ Ton}$$

así pues:

$$\epsilon_x = -\frac{0.25 \times 12}{180} = -0.01667$$

$$u_x = 1.2 \times 0.01667 = -0.02 \text{ m}$$

$$\epsilon_y = \frac{12}{180} = 0.067$$

$$u_y = 0.8 \times 0.067 = 0.0533 \text{ m}$$

Deformación plana:

$$\epsilon_z = 0; \quad \sigma_z = E_1 \left(\frac{\nu_1 \sigma_x}{E_1} + \frac{\nu_2 \sigma_y}{E_2} \right)$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_1^2 \sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_1 \nu_2 \sigma_y}{E_2}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu_2 \sigma_x}{E_2} + \frac{\sigma_y}{E_2} - \left(\frac{\nu_2 \nu_1 \sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_2^2 \sigma_y}{E_2} \right) \frac{E_1}{E_2}$$

$$\sigma_x = 0$$

$$\epsilon_x = -\frac{0.25}{180} - \frac{0.25 \times 0.26}{180} = -0.021,$$

$$u_x = -0.0252 \text{ m}$$

$$\epsilon_y = \frac{12}{180} + \frac{205}{180} \left(\frac{0.25^2 \times 12}{180} \right) = 0.0714$$

$$u_y = 0.0573 \text{ m}$$

CONCLUSIONES

Este trabajo trata de mostrar una alternativa práctica para la solución de problemas en ingeniería, que es el método del elemento finito aplicado a un medio anisótropo, por lo que se trató de exponer el método en la forma más clara posible, incluyendo ejemplos sencillos de aplicación.

Si observamos en el ejemplo del capítulo anterior la diferencia entre los resultados que nos da el método del elemento finito y el que resulta de la aplicación directa de las fórmulas de la teoría de la elasticidad, podemos apreciar que la diferencia entre los desplazamientos verticales y horizontales es de 0.002 m y 0.010 m. respectivamente. Podemos decir entonces, que los resultados obtenidos con el método del elemento finito dan una idea del orden de magnitud de los desplazamientos, sobre todo para las deformaciones verticales, -- y que estas diferencias se deben a que son solo dos elementos para un área considerable. Si aumentamos el número de elementos, los resultados tendrán una aproximación mayor.

En la realidad los materiales tienen un comportamiento elástico lineal solo en una pequeña parte del proceso esfuerzo de formación - (otros no lo tienen), por lo que no tiene sentido ser precisos. Lo importante es saber el orden de la magnitud de las deformaciones y los esfuerzos, para poder realizar un diseño racional de la estructura - de que se trate.

Para el caso de medios anisótropos, como el del ejemplo, podemos

concluir que el método del elemento finito se adapta perfectamente, y que con la aplicación de este método tenemos una aplicación práctica, ya que en medios anisótropos existen muy pocas soluciones analíticas. Las ecuaciones deducidas para el medio anisótropo son también aplicables a un medio isotrópico, el cual sería un caso especial de anisotropía, donde $E_1 = E_2$, $V_1 = V_2$ (cuarto caso de inciso 2.4).

En la naturaleza encontramos medios anisotropos con estratigrafía no horizontal (el ángulo β desigual a cero), este caso se da muy comunmente en macisos rocosos.

El análisis plano simplifica mucho el método y aunque no es estrictamente verdadero, podemos considerar los resultados como buenos.

Una de las características más importantes del método del elemento finito es su versatilidad, lo que hace que no se restrinja a problemas de mecánica estructural, sino, que se puede adaptar a otro tipo de problemas como los de hidráulica, térmica, diseño de piezas industriales, etc. Así como encontramos las deformaciones y esfuerzos bajo carga elástica, podemos encontrar también, la respuesta dinámica a la sollicitación de un sismo en una presa. El método se aplica a varios problemas. La región bajo análisis puede tener una forma arbitraria, cambiar las cargas y las condiciones de frontera.

La red puede mezclar elementos de distintos tipos, formas y propiedades físicas. Esta gran versatilidad a menudo se contiene en un solo programa de computadora.

Otra característica de los elementos finitos es el parecido físico entre la red y la estructura misma. La red no es un abstracto matemático difícil de visualizar.

El método del elemento finito tiene también sus desventajas. Se encuentra un resultado numérico específico para un problema específico: no hay una expresión de forma cerrada que permita el estudio analítico de los efectos de los varios parámetros cambiantes. Una computadora y un buen programa son esenciales. La experiencia y un buen sentido de ingeniería se necesitan para construir una buena red. Se necesita cargar a la computadora con muchos datos y los resultados deben ser clasificados, ordenados y entendidos.

B I B L I O G R A F I A

- Deméneghi Colina Agustín, "Metodo del Elemento Finito. Análisis Lineal."
- Lekhnitskii S. G. "Theory of Elasticity of an Anisotropic Body." Ed. Mir Publishers, 1981.
- Zienkiewicz O. C. "The Finite Element Method." 3rd. ed. Ed. McGraw-Hill. 1977.
- Cook R. D. "Concepts and Applications of Finite Element Analysis." 2nd ed. Ed. Wiley. 1981.
- Popov E. "Introducción a la Mecánica de Sólidos". Ed. Limusa. 1982.