2 ej
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIOS FIBRADOS DE SEIFERT.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

VICTOR MANUEL NUÑEZ HERNANDEZ

MEXICO, D. F. 1986

Introducción

Las variedades de Seifert (espacios fibrados) constituyen uno de los ejemplos más importantes de 3-variedades.

Definiremos "espacio fibrado" en términos topológicos y después de establecer algunas propiedades de los espacios fibrados, determinaremos para un espacio fibrado dado F , un sistema de invariantes que es completo, en el sentido de que si F' tiene el mismo sistema de invariantes que F, entonces F y F' son homeomorfos bajo un homeomorfismo que preserva fibras (§1-§8).

Se debe notar que el caso orientable es esencialmente distinto del caso no orientable, porque, en el primer caso, los invariantes dependen de una orientación dada al espacio fibrado.

Obtendremos propiedades de algunos espacios cubrientes de espacios fibrados (§9) y calcularemos el grupo fundamental de un espacio fibrado dado a partir de un sistema de invariantes (§10).

Aplicaremos estos resultados

para obtener propiedades de ciertos casos concretos (§ 11-§ 13).

Finalmente, encontraremos ejemplos de 3-variedades que no admiten fibración.

CONTENIDO

1. Espacios Fibrados.

<u>Def</u>. Un <u>toro sólido fibrado</u> V se obtiene de un cilindro fibrado $D^2 \times I$, donde las fibras son las rectas $\{x\} \times I$, $x \in D^2$, rotando a $D^2 \times \{1\}$ (pero dejando fijo a $D^2 \times \{0\}$) un ángulo de:

$$2\pi\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$$

e identificando a $D^2 \times \{0\}$ con $D^2 \times \{1\}$ (i.e., $(x,0)$ se identifica con $(\rho(x),1)$, donde ρ es la rotación). ν y μ son enteros, $(\nu,\mu)=1$ y se llaman los números de definición del toro sólido fibrado V.

Esta identificación es equivalente a

$$D^2 \times I \longrightarrow D^2 \times S^1$$
$$(te^{i\theta}, s) \longmapsto \left(t\, e^{i(\theta + s\frac{\nu-\mu}{\mu}\theta)},\ e^{2\pi i s}\right)$$

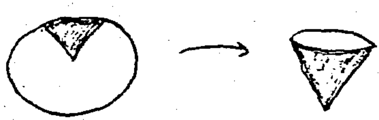
<u>Observación</u> Si ν se reemplaza por $\nu + k\mu$ o por $-\nu$, entonces el nuevo toro sólido fibrado se puede mapear en el original mediante un homeomorfismo que preserva fibras.

Por tanto, sin perder generalidad, $\mu > 0$ y $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}\mu$.

Al hacer la identificación en el cilindro $D^2 \times I$ para obtener el toro sólido, las fibras de $D^2 \times I$ se descomponen en clases, de tal manera que cada clase contiene exactamente μ fibras (de $D^2 \times I$) que se unen para convertirse en una sola fibra en el toro sólido, <u>a excepción</u> de la clase que contiene al eje de $D^2 \times I$ que consiste del eje solamente y que se convierte también en una fibra.

Si $\mu = 1$, el toro sólido se llama un <u>toro sólido ordinario</u>

<u>Observación</u> Si en un toro sólido fibrado V con números característicos μ y ν, identificamos cada fibra en un punto, el espacio de identificación es homeomorfo a un disco que es un sector de un disco meridional de V de angulo $2\pi/\nu$ cuyos radios frontera se identifican



Luego, para cada toro sólido fibrado, tenemos asociada una identificación $\pi : V \longrightarrow D^2$, tal que π (la fibra central) $= 0$

Def. Un espacio fibrado de Seifert M, es una 3-variedad conexa y sin frontera tal que

(1) Existe una 2-variedad B (la superficie de órbitas de M) y una función continua y suprayectiva $\eta : M \to B$ tal que para cada $x \in B$, $\eta^{-1}(x)$ es una curva simple cerrada.

Las curvas $\eta^{-1}(x)$ para $x \in B$ se llaman las fibras de M

(2) Para cada $x \in B$, existe una vecindad $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $\eta^{-1}U$ es una vecindad fibrada de $\eta^{-1}(x)$; es decir, es una vecindad tal que existen homeomorfismos $\varphi : \eta^{-1}U \to V$, $\bar{\varphi} : U \to D^2$ tales que

$$\begin{array}{ccc} \eta^{-1}U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \eta \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & D^2 \end{array}$$

conmuta y $\bar{\varphi}(x) = 0$,

donde $V \xrightarrow{\pi} D^2$ es un toro sólido fibrado.

<u>Notación técnica</u> $(S^1, 1) = (\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, 1)$,
$(T, x_0) := (S^1, 1) \times (S^1, 1)$, $\lambda(t) := (e^{2\pi i t}, 1)$,
$\mu(t) := (1, e^{2\pi i t})$; $\ell := [\lambda]$, $m = [\mu]$ en
$\pi_1(T, x_0)$.

<u>Lema</u> $p\ell + qm \in \pi_1(T)$ está representado por una curva simple cerrada si y solo si $(p, q) = 1$.

<u>Dem</u>. Si $(p, q) = 1$,

def
$$\begin{aligned} \omega : I &\longrightarrow T \\ t &\longmapsto (e^{2p\pi i t}, e^{2q\pi i t}) \end{aligned}$$

por tanto ω es simple cerrada y $[\omega] = p\ell + qm$ en $\pi_1(T)$.

Supongamos que $\omega:(I,\partial I)\to(T,x_0)$ es simple cerrada y $[\omega]\neq 0$.
Cortando a T a lo largo de ω, obtenemos un anillo; como cortando T a lo largo de λ también obtenemos un anillo, por tanto existe un homeomorfismo $h:T\to T$ tal que $h\lambda=\omega$.
Como existen enteros p,q,r,s tales que $h_\#(l)=[\omega]=pl+qm$ y $h_\#(m)=rl+sm$ y como $h_\#$ es isomorfismo, por tanto $\det\begin{pmatrix} p & q \\ r & s\end{pmatrix}=\pm 1$, i.e., $(p,q)=1$. ∎

<u>Corolario</u> Una pareja $pl+qm$ de elementos no triviales de $\pi_1(T)$ está representada por una pareja de trayectorias simples cerradas que se intersectan transversalmente en un solo punto si y solo si $\det\begin{pmatrix} p & q \\ r & s\end{pmatrix}=\pm 1$.

Dem. Si $\det\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \pm$, definimos

$$\begin{aligned} \omega : I &\longrightarrow T \\ t &\longmapsto (e^{2p\pi i t}, e^{2q\pi i t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho : I &\longrightarrow T \\ t &\longmapsto (e^{2r\pi i t}, e^{2s\pi i t}) . \end{aligned}$$

Entonces ω y ρ son simples cerradas, se intersectan exactamente en un punto transversalmente y $[\omega] = p\ell + qm$, $[\rho] = r\ell + sm$.

Si $\omega, \rho : (I, \partial I) \longrightarrow (T, x_0)$ son simples, se intersectan transversalmente en un solo punto y $[\omega] = p\ell + qm$ y $[\rho] = r\ell + sm$, entonces existe un homeomorfismo $h : T \longrightarrow T$ tal que $h(\lambda) = \omega$ y $h(m) = \rho$. Como $h_\#$ es un isomorfismo, por tanto $\det\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \pm 1$. ∎

En particular se tiene que dos curvas en T se intersectan transversalmente en un punto si y solo si sus clases generan a $\pi_1(T)$

Def. Un <u>meridiano</u> M de un toro sólido V es una curva simple orientada en $T = \partial V$, que no es contraible en T pero si es contraible en V.

Un homeomorfismo $H: V \to V$ mapea un meridiano en un meridiano. Porque si $h: T \to T$ es la restricción de H a $T = \partial V$, entonces h es un homeomorfismo y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{h} & T \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ V & \xrightarrow[H]{} & V \end{array}$$

conmuta, donde $i: T \hookrightarrow V$ es la inclusión.

Por tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi_1(T) \arrow[r, "h_\#"] \arrow[d, dashed, "i_\#"'] & \pi_1(T) \arrow[d, "i_\#"] \\ \pi_1(V) \arrow[r, "H_\#"'] & \pi_1(V) \end{tikzcd}$$

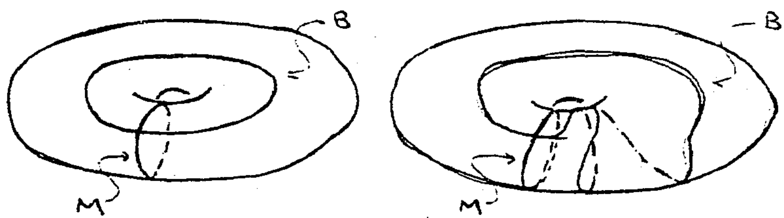
conmuta. Si $\{a, m\}$ genera a $\pi_1(T)$, donde m es un meridiano, entonces $i_\#(pa + qm) = pa$ para $p, q \in \mathbb{Z}$; si $h_\#(a) = pa + qm$ y $h_\#(m) = ra + sm$ con $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, entonces como $h_\#$ es isomorfismo, portanto $\det\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \pm 1$; $i_\# h_\#(m) = ra$ y $H_\# i_\#(m) = H_\#(0) = 0$, por tanto $ra = 0$, luego $ps = \pm 1$ y por tanto $s = \pm 1$ porque $ps - qr = \pm 1$; luego $h_\#(m) = \pm m$. Por tanto, si μ es un meridiano, entonces $h(\mu)$ es un meridiano, luego $H(\mu)$ es un meridiano

El recípróco tambien es cierto: un homeomorfismo $h: T \to T$ se puede extender a $H: V \to V$, si h mapea un meridiano en un meridiano. Una versión más débil de esta afirmación se prueba en el lema 6.

Si no se toma en cuenta la orientación, un meridiano se puede mapear a cualquier otro meridiano bajo una deformación (un homeomorfismo isotópico a la identidad de T).

<u>Def</u>. Una <u>longitud</u> B del toro sólido es una curva simple cerrada sobre T que intersecta a M en exactamente un punto y no es contraíble en V.

La longitud B esta determinada (módulo deformaciones de T) por su orientación y múltiplos de M, es decir, si B' es otra longitud, entonces $B' \sim \pm B + kM$ sobre T p.a. $k \in \mathbb{Z}$



El signo "~" denota "homologo".
En adelante, escribiremos relaciones en el primer grupo de homología aditivamente y relaciones en el grupo fundamental multiplicativamente.

Cualquier pareja meridiano, longitud se puede mapear en cualquier otra pareja meridiano, longitud mediante un homeomorfismo del toro sólido en si mismo.

Sin embargo no siempre una longitud se puede mapear en otra longitud bajo una deformación continua de T.

El homeomorfismo del toro sólido que envía a una longitud en otra que no es homologa sobre T no se puede obtener por una deformación de la identidad.

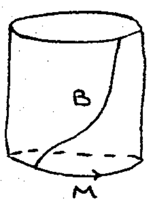
Sea H una fibra orientada del toro sólido fibrado V contenida en T, M un meridiano y B una longitud; si H', M', B' es otro sistema similar, entonces

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & H \sim \varepsilon_1 H' \\ (2) & M \sim \varepsilon_2 M' \\ (3) & B \sim \varepsilon_3 B' + x M' \end{array}\right\} \text{sobre } T$$

donde $\varepsilon_i = \pm 1$, $x \in \mathbb{Z}$.

<u>Proposicion</u> Dos toros sólidos fibrados son homeomorfos bajo un homeomorfismo que preserva fibras si y solo si tienen los mismos números de definición.

<u>Dem</u>.



Eligiendo a B adecuadamente (la trayectoria mas corta en $\partial D^2 \times I$ de un punto $x \in \partial D^2 \times \{0\}$ a su equivalente en $\partial D^2 \times \{1\}$ como en la figura) y orientando a M y a H adecuadamente, se tiene

$$H \sim \nu M + \mu B \quad (\text{sobre } T)$$

Lo que significa precisamente que ν y μ son los números de definición de V. Sean H', M', B' otro sistema de curvas fibra, meridiano y longitud respectivamente, entonces

$$H' \sim nM' + mB' \quad \text{sobre } T$$

Porque M' y B' es un sistema fundamental sobre T (i.e., sus clases generan a $H_1(T)$) y además $(n,m)=1$ porque H' es simple cerrada y $m \neq 0$ porque H' no es homóloga a un meridiano. Usando las formulas (1), (2) y (3):

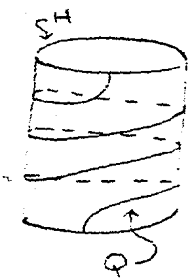
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 H' \sim H &\sim \nu M + \mu B \sim \\ &\sim \nu(\varepsilon_2 M') + \mu(\varepsilon_3 B' + xM') \sim \\ &\sim (\varepsilon_2 \nu + \mu x) M' + (\varepsilon_3 \mu) B' \\ \text{y} \quad \varepsilon_1 H' \sim \varepsilon_1 n M' &+ mB' \end{aligned}\right\} \text{Sobre } T$$

Por tanto $\varepsilon_1((\varepsilon_2 \nu + x\mu) M' + \varepsilon_3 \mu B') \sim nM' + mB'$

Comparando coeficientes, $|\mu| = |m|$; como $\mu > 0$, $\therefore \mu = |m|$ y ν es igual a $|n|$ reducido modulo m $(=\mu)$ a un número en el intervalo $[-\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}m]$.

Por tanto los numeros μ y ν son los caracteristicos del toro sólido fibrado ∎

Def. Una <u>curva cruzada</u> (<u>Querkreis</u>) Q en V es una curva simple cerrada sobre T que intersecta a cada fibra de T en exactamente un punto.



Por tanto una curva cruzada está determinada por la fibración de T (salvo deformaciones, orientación y múltiplos de la fibra), es decir, si Q y Q' son curvas cruzadas, entonces

$$(4) \quad Q \sim \varepsilon_4 Q' + y H \quad (\text{sobre } T)$$

Esto es porque $\{H, Q\}$ y $\{H, Q'\}$ son sistemas fundamentales, luego el determinante de la transformación que manda a (las clases de) H

en H' y a Q en Q' es ± 1; como $Q \sim rQ' + yH$ sobre T, por tanto la transformación esta representada por $\begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & y \end{pmatrix}$, por tanto $r = \varepsilon_4 = \pm 1$.

La frontera de un toro sólido fibrado es un toro fibrado, por tanto las fronteras de dos toros sólidos se pueden mapear una en la otra mediante un homeomorfismo que preserva fibras

Si T_1 y T_2 son los dos toros fibrados, H_1 una fibra de T_1 y H_2 una fibra de T_2, entonces cortando a T_i a lo largo de H_i $(i=1,2)$, obtenemos dos cilindros C_1 y C_2, porque $H_i \nsim 0$ sobre T_i.

En los cilindros C_1 y C_2, cada curva meridiano es una fibra de T_1 y de T_2 respectivamente. El homeomorfismo está dado mapeando C_1 sobre C_2, mandando curvas meridiano en curvas meridiano

Proposición. Un toro solido fibrado está determinado por la fibracion de su toro frontera si sobre este toro se elige alguna curva simple cerrada M distinguida como meridiano (M no debe ser trivial sobre T ni homóloga a una fibra).

Dem.

Si orientamos a una fibra H en T y elegimos una curva cruzada Q, entonces M se puede expresar como

$$M \sim \alpha Q + \beta H \text{ sobre } T \ (\alpha \neq 0, (\alpha, \beta) = 1).$$

(Podemos elegir, a priori a α y β de tal manera que $0 \leq \beta < \alpha$, porque si H' y Q' son otra fibra y otra curva cruzada respec., entonces

$$H \sim \varepsilon_1 H', \quad Q \sim \varepsilon_4 Q' + \gamma H' \quad \text{sobre } T$$

Luego

$$\begin{aligned} M &\sim \alpha Q + \beta H \sim \\ &\sim \alpha \varepsilon_4 Q' + (\alpha\gamma + \varepsilon_1 \beta) H' = \alpha' Q' + \beta' H' \end{aligned}$$

Por la condición $\alpha' > 0$, determinamos a ε_4 y $\beta' = \alpha\gamma + \varepsilon_1\beta$ se puede reducir módulo α' a $0 \leq \beta' < \alpha$ determinando de manera única a ε_1 y a γ).

Si $B \sim \rho Q + \sigma H$

es una longitud en T, podemos suponer (eligiendo una orientación adecuada para B) que

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \rho & \sigma \end{pmatrix} = 1 .$$

Por tanto

$$H \sim \alpha J H - \rho \beta H \sim$$
$$\sim -\rho M + \rho\alpha Q + \alpha B - \alpha\rho Q \sim$$
$$\sim \alpha B - \rho M$$

Como en la proposición anterior, se sigue que los numeros de definición μ y ν se determinan de manera única de ésta última ecuación:

$\mu = |\alpha|$, $\nu = |\rho|$ reducido mod $|\alpha|$ al intervalo $[-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha]$.

Es decir, el toro sólido fibrado está determinado de manera única por la fibración de su frontera y por M (por tanto por α y β) debido a la proposición anterior. +

2. Superficie de Órbitas

<u>Proposición</u>. Si f es la superficie de órbitas de un espacio fibrado F, entonces

(1) la proyección $\eta : F \to f$ es una identificación

(2) f es una 2-variedad cerrada o abierta si F es cerrada o abierta

(3) f es conexa.

<u>Dem</u>. "(1)"
Sea $W \subset f$ tal que $\eta^{-1}W$ es abierto de F. Sea $x \in W$, como $\eta^{-1}W$ es abierto, por tanto para cada punto $\tilde{x} \in \eta^{-1}(x)$, existe una vecindad abierta $U_{\tilde{x}}$ de $\tilde{x}$ tal que $U_{\tilde{x}} \subset \eta^{-1}W$. Sea V_x una vecindad fibrada de $\eta^{-1}(x)$; <u>def</u>. $D_\ell := \{(z,w) \in D^2 \times S^1 \mid |z| \leq \frac{1}{\ell}\}$; sea $\varphi : D^2 \times S^1 \to V_x$ un homeomorfismo tal que $\varphi(\{0\} \times S^1) = \eta^{-1}(x)$, entonces existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(D_n) \subset \bigcup U_{\tilde{x}}$. De lo contrario elegimos para cada $\ell \in \mathbb{N}$, $t_\ell \in \varphi(D_\ell)$ tal que $t_\ell \notin \bigcup U_{\tilde{x}}$; como $D^2 \times S^1$ es compacto, existe un punto límite de $\{\varphi^{-1}(t_\ell)\}$ en $D^2 \times S^1$. S.P.G. $\varphi^{-1}(t_\ell) \to \varphi(t)$ para alguna

$t \in V_x$. Luego $t \in \eta^{-1}(x)$; como $t \in U_{\bar{x}_i}$ para alguna $\bar{x}_i \in \eta^{-1}(x)$ y $U_{\bar{x}_i}$ es abierto, por tanto existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $t_\ell \in U_{\bar{x}_i}$, lo que es una contradicción.

Por tanto $\eta(\mathrm{int}\, \varphi(D_n)) \subset W$

Supongamos que $\eta(\mathrm{int}\, \varphi D_n)$ no es abierto; existe por tanto un punto $y \in \eta(\mathrm{int}\, \varphi D_n)$ tal que para cada $\ell \in \mathbb{N}$, la bola $B(y, \frac{1}{n}) \not\subset \eta(\mathrm{int}\, \varphi D_n)$; sea $y_n \in B(y, 1/n)$ tal que $y_n \notin \eta(\mathrm{int}\, \varphi D_n)$.

Por la elección de D_n, se tiene que $\eta^{-1}(y) \subset \mathrm{int}\, \varphi D_n$; luego existe una vecindad fibrada V_y de $\eta^{-1}(y)$ tal que $V_y \subset \mathrm{int}\, \varphi D_n$. Como $\eta^{-1} B(y, 1/n)$ es una vecindad abierta de $\eta^{-1}(y)$, a partir de cierta $\ell \in \mathbb{N}$, $\eta^{-1}(y_\ell) \subset V_y$. Por tanto $y_\ell = \eta\, \eta^{-1}(y_\ell) \subset \eta(V_y) \subset \eta(\mathrm{int}\, \varphi D_n)$, lo que es una contradicción.

Por tanto $\eta(\mathrm{int}\, \varphi D_n)$ es abierto

Por tanto W es abierto

Como η es continua y suprayectiva, por tanto η es una identificación.

"(2) y (3)" Inmediatos ∎

<u>Corolario</u>. Sea F un espacio fibrado. La superficie de órbitas f de F es el espacio que resulta de identificar cada fibra de F en un punto

<u>Convención</u>. Al "pasar" de un espacio fibrado F a la superficie de órbitas f, "pasaremos" de letras mayúsculas a letras minúsculas, por ejemplo, a la fibra H de F, le corresponde el punto $h \in f$, etc.

<u>Def</u>. Si Ω_H es una vecindad fibrada de la fibra H, su imágen ω_h se llama una vecindad de órbitas del punto h que es imágen de H.

<u>Observación</u>. Las vecindades de órbitas son discos <u>cerrados</u>.

<u>Lema</u>. Si $x, y \in \operatorname{int} D^n$, entonces existe un homeomorfismo $h: D^n \longrightarrow D^n$ isotópico a la identidad tal que $h(x) = y$ y $h|_{\partial D^n} = 1_{\partial D^n}$.

<u>Dem</u> <u>Def</u>. $g: D^n - \partial D^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $z \longmapsto \frac{z}{1-|z|}$; es claro que g es función continua y que $g^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow D^n - \partial D^n$, $w \longmapsto \frac{w}{1+|w|}$ también es función continua.

<u>Def</u>. $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $w \longmapsto w + g(y) - g(x)$, $\therefore$ f es un homeomorfismo y $fg(x) = g(y)$. Además f es isotópico a la identidad mediante la isotopía:

$H: \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(w,t) \longmapsto w + t(g(y) - g(x))$; si $H_t(w) := H(w,t)$,

entonces $g^{-1} H_t g: D^n - \partial D^n \longrightarrow D^n - \partial D^n$ es homeomorfismo para cada $t \in I$. $\therefore$ $g^{-1} f g$ es isotópico a la identidad y además $g^{-1} f g(x) = y$;

como
$$\lim_{|w|\to 1} g^{-1} f_t g(w) = \lim_{|w|\to 1} \frac{\frac{w}{1-|w|} + t(g(y) - g(x))}{1 + \left|\frac{w}{1-|w|} + t(g(y)-g(x))\right|} =$$

$$= \lim_{|w|\to 1} \frac{1-|w|}{1-|w|} \; \frac{\frac{w}{1-|w|} + t(g(y) - g(x))}{1 + \left|\frac{w}{1-|w|} + t(g(y)-g(x))\right|} =$$

$$= \lim_{|w|\to 1} \frac{w + t(1-|w|)(g(y)-g(x))}{1-|w| + |1-|w||\left|\frac{w}{1-|w|} + t(g(y)-g(x))\right|} =$$

$$= \lim_{|w|\to 1} \frac{w + t(1-|w|)(g(w)-g(x))}{1-|w| + |w + t(1-|w|)(g(w)-g(x))|} = w$$

Por tanto $G_t : D^n \longrightarrow D^n$

$w \longmapsto w$ si $w \in \partial D^n$

$w \longmapsto g^{-1} f_t g(w)$ si $w \in D^n - \partial D^n$

es un homeomorfismo para cada $t \in I$.
Luego $h := G_1 : D^n \to D^n$ es un homeomorfismo isotópico a la identidad tal que $h(x) = y$ y $h|_{\partial D^n} = 1_{\partial D^n}$. ∎

Lema 1 Si W_h es una vecindad de órbitas del punto $h \in \mathfrak{f}$ y si e es un 2-disco contenido en W_h tal que $h \notin \partial e$, entonces e es también una vecindad de órbitas:

a) de h si $h \in \operatorname{int} e$

b) de cada punto interior de e si $h \notin e$.

Las vecindades fibradas E (respectivamente Ω_H) preimágenes de e (respec. ω_n) son en el caso

a) homeomorfas bajo un homeomorfismo que preserva fibras

b) E es un toro sólido ordinario.

<u>Dem.</u>

"(a)" Las fibras que se mapean en los puntos de e forman un conjunto fibrado E contenido en Ω_H que contiene a la fibra H en su interior. Si pensamos en Ω_H como en un cilindro fibrado con sus discos frontera identificados bajo una rotación, obtenemos a la vecindad de órbitas ω_n de un disco meridional $\tilde{\omega}_{\tilde{n}}$ de Ω_H al identificar los puntos de

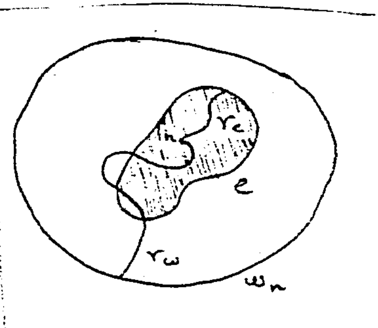
$\tilde{\omega}_{\tilde{n}}$ que son equivalentes bajo el grupo cíclico de rotaciones de orden μ actuando sobre $\tilde{\omega}_{\tilde{n}}$.
Los puntos de $\tilde{\omega}_{\tilde{n}}$ que se mapean en e forman un 2-disco $\tilde{e}$ que contiene al punto central $\tilde{h}$ de $\tilde{\omega}_{\tilde{n}}$ en su interior y que se mapea en sí mismo bajo el grupo cíclico de rotaciones. El subespacio E de Ω_H está formado de rectas paralelas al eje del cilindro Ω_H que pasa a través de puntos de $\tilde{e}$.
Se mostrará que $\tilde{e}$ se puede mapear sobre $\tilde{\omega}_{\tilde{n}}$ bajo un homeomorfismo $\tilde{\alpha}$ que deja fijo a $\tilde{h}$ y tal que cualesquiera μ puntos que son equivalentes bajo el grupo cíclico de

rotaciones se mapean de nuevo sobre μ puntos equivalentes.

Sea a un homeomorfismo de e sobre W_n que preserva orientación. Que a preserve orientación tiene sentido, porque como e es una subvariedad de W_n de la misma dimensión, una orientación sobre W_n induce una orientación sobre e; y dada una orientación sobre e, se tiene sobre W_n una orientación determinada, a saber, la orientación de W_n que induce sobre e la orientación dada.

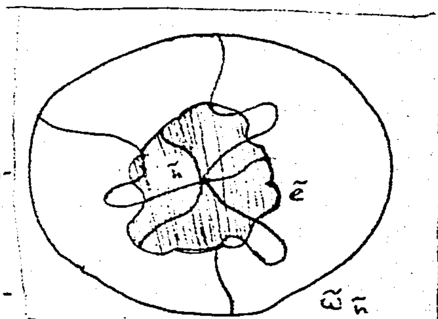
Como e y W_h son 2-discos, existen homeomorfismos $\varphi: D^2 \to W_h$ y $\psi: e \to D^2$; Sea $g: D^2 \to D^2$ un homeomorfismo isotópico a la identidad tal que $g\psi(h) = \varphi^{-1}(h)$, por tanto $\varphi^{-1}g\psi: e \to W_h$ es un homeomorfismo que deja fijo a h.
Tomamos $a := \varphi^{-1}g\psi$ si éste preserva orientación; en caso contrario, tomamos $b: D^2 \to D^2$ un homeomorfismo que invierta la orientación y que deje fijo a $\varphi^{-1}(h)$. entonces $\varphi^{-1}bg\psi: e \to W_h$ es un homeomorfismo que preserva orientación y que deja fijo a h. tomamos $a := \varphi^{-1}bg\psi$.

Sea r_e un arco simple de h a la frontera de e contenido en e, y sea $r_\omega := a(r_e)$ que es un



arco simple de h a la frontera de ω_n. Por tanto $\tilde{e}$ (respec. $\tilde{\omega}_{\tilde{n}}$) se descompone en μ sectores circulares consecutivos por las μ preimágenes de r_e (respec. r_ω)

$\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \ldots, \tilde{e}^\mu$ (respec. $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \ldots, \tilde{\omega}^\mu$) que se intercambian cíclicamente bajo el grupo de rotaciones. El homeomorfismo a determina un homeomorfismo de $\tilde{e}^i$ sobre el sector $\tilde{\omega}^i$ y por tanto un homeomorfismo $\tilde{a}$ de $\tilde{e}$ sobre $\tilde{\omega}_{\tilde{n}}$ que deja fijo a $\tilde{h}$. Tomando el mapeo correspondiente sobre las rectas de E y Ω_H, obtenemos un homeomorfismo que preserva fibras de E sobre Ω_H y que deja fija a la fibra H.



"(b)" En este caso al disco e en ω_h le corresponden μ 2-discos ajenos $\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^\mu$ en $\tilde{\omega}_{\tilde{h}}$ que se intercambian bajo el grupo cíclico de rotaciones. El conjunto fibrado E correspondiente, está constituido en Ω_H de μ-cilindros fibrados congruentemente que están sobre los discos $\tilde{e}^1$ hasta $\tilde{e}^\mu$. E se obtiene de estos cilindros identificándolos uno tras otro, pegando los discos fondo y tapa correspondientes bajo la identidad. Por tanto E es un toro sólido ordinario en el que cada fibra interior se puede tomar como la fibra de enmedio. ∎

<u>Lema 2</u> Si Ω^1_H y Ω^2_H son dos vecindades fibradas de la fibra H, éstas son homeomorfas bajo un homeomorfismo que preserva fibras y que deja fija a H.

<u>Dem.</u> En la superficie de órbitas existe un disco e que contiene a h en su interior y que esta contenido en la intersección de las vecindades de órbitas ω^1_h y ω^2_h. Por el lema 1, e es la imágen de una vecindad fibrada E de la fibra H que es homeomorfa a Ω^1_H y a Ω^2_H bajo homeomorfismos que preservan fibras y que dejan fija a H. El homeomorfismo buscado es uno de éstos dos seguido del inverso del otro. ∎

Este último lema implica que para una fibra H dada, los números μ y ν son los mismos para todas las vecindades fibradas de H, por tanto son un invariante de H. Si $\mu > 1$, H se llama una <u>fibra excepcional de orden μ</u> del espacio; si $\mu = 1$, H se llama una fibra ordinaria. Si una fibra en la vecindad de una fibra excepcional H de orden μ se aproxima a H, su límite recorre a H μ veces. En un toro sólido fibrado todas las fibras son fibras ordinarias, excepto posiblemente la fibra central. En una vecindad fibrada de una fibra excepcional H de orden μ, tenemos que $\mu \cdot H$ es homologa a una fibra ordinaria de la vecindad fibrada.

Los puntos de la superficie de órbitas que son imágenes de fibras excepcionales se llaman <u>puntos excepcionales</u>; por supuesto que como puntos de la superficie de órbitas, son indistinguibles de los puntos ordinarios.

<u>Teorema 1</u> Un espacio fibrado cerrado contiene a lo más un número finito de fibras excepcionales.

<u>Dem</u>.

Si no fuera asi, existiría un punto del

espacio tal que cada vecindad de él intersectaría un número infinito de fibras excepcionales. La fibra que pasa por este punto no tendría por tanto una vecindad fibrada. ∎

<u>Def.</u> Sea D un 2-disco, K una triangulación de D, $\sigma \in K$ un 2-simplejo, entonces <u>σ es libre en K</u> si $\sigma \cap \partial D$ es una o dos aristas de σ.

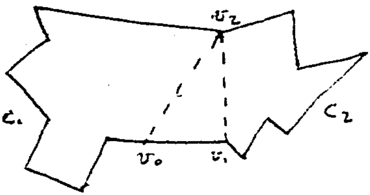
<u>Lema</u> Sea D un 2-disco y K una triangulación de D. Si K tiene más de un 2-simplejo, entonces K tiene un 2-simplejo libre

<u>Dem.</u> Se probara por inducción que K tiene al menos dos 2-simplejos libres.

Si K tiene exactamente dos 2-simplejos, entonces el lema es claro. Podemos suponer que K tiene más de dos 2-simplejos. Supongamos como hipótesis de inducción que la afirmación se cumple para cada complejo L que es triangulación de un 2-disco y que tiene menos 2-simplejos que K. Existen al menos dos 2-simplejos $\sigma, \tau \in K$ que tienen una arista en la frontera de $|K|$. Si ambos son libres, entonces no hay nada que probar. Supongamos entonces que

$$\sigma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle \in K, \quad \langle v_0, v_1 \rangle \subset \partial |K|$$

y que σ no es libre. Entonces ni $\langle v_0, v_2 \rangle$ ni $\langle v_1, v_2 \rangle$ están contenidos en $\partial |K|$ y $v_2 \in \partial |K|$.



Los puntos v_0 y v_2 descomponen a polígono $J := \partial|K|$ en dos líneas quebradas C_1 y C_2 y $|K| = \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$ donde D_1 y D_2 son los interiores de $C_1 \cup \langle v_0, v_2\rangle$ y $C_2 \cup \langle v_0, v_2\rangle$ respectivamente. Sea L_1 el complejo que consiste de los simplejos de K que están contenidos en $\bar{D}_1$ junto con $\langle v_0, v_1, v_2\rangle$ y sus caras. Sea L_2 el conjunto de todos los simplejos de K que están contenidos en $\bar{D}_2$. Por la hipótesis de inducción, cada uno de los complejos L_i tiene dos 2-simplejos libres. Por tanto cada uno tiene un 2-simplejo libre σ_i diferente de $\langle v_0, v_1, v_2\rangle$.

Se sigue que cada σ_i es libre no solo en L_i, sino también en K, que es lo que se quería probar. $\boxed{*}$

Lema Sea D un 2-disco, K una triangulación de D, $\sigma \in K$ un 2-simplejo. Existe una sucesión de 2-células $\omega_1 = \sigma^2, \omega_2, \ldots, \omega_s = D$ tal que ω_i es unión de 2-simplejos de K y ω_i se obtiene de ω_{i-1}, uniendo un 2-simplejo adyacente a ω_{i-1} a lo largo de una o dos aristas.

Dem.

Se probará por inducción sobre el número de 2-simplejos de K.

Si el único 2-simplejo de K es σ, entonces el lema es claro. Por tanto podemos suponer que K tiene más de un 2-simplejo.

Supongamos como hipótesis de inducción que el lema es cierto para cada complejo L que es triangulación de un 2-disco y que tiene menos 2-simplejos que K

Como K tiene al menos dos 2-simplejos, por tanto K tiene al menos dos 2-simplejos libres, es decir K tiene un 2-simplejo τ libre que es distinto de σ. Sea $D_1 = \overline{|K| - \tau}$ y L el complejo que consiste de los simplejos de K que están contenidos en D_1.

Como τ es libre, por tanto D_1 es un 2-disco y como L tiene menos 2-simplejos que K, por tanto existe una sucesión de 2-celdas $\omega_1 = \sigma^2, \omega_2, \ldots, \omega_{s-1} = D_1$ con las propiedades requeridas. Definimos $\omega_s = \omega_{s-1} \cup \tau$. Como τ es libre, por tanto $\omega_1 = \sigma^2, \omega_2, \ldots, \omega_s = D$ es una sucesión de 2-celdas con las propiedades requeridas $\boxed{\#}$

<u>Lema 3</u> Si w es un 2-disco (cerrado) en la superficie de órbitas f de un espacio fibrado F que no contiene puntos excepcionales, entonces w es una vecindad de órbitas de cada uno de sus puntos interiores. Si w contiene exactamente un punto excepcional en su interior, entonces w es una vecindad de órbitas de este punto excepcional.

<u>Dem.</u> Sea h un punto excepcional, o, si w no contiene puntos excepcionales, sea h un punto interior de w. Tomemos una triangulación de w tal que cada 2-simplejo esté cubierto por una vecindad de órbitas. Podemos pedir además que h esté en el interior de un 2-simplejo. Entonces por el lema 1, cada 2-simplejo es una vecindad de órbitas. Las correspondientes vecindades fibradas son toros sólidos excepto (posiblemente) la vecindad fi-

brada Δ_H de H correspondiente a la vecindad $\mathcal{E}_h$ de h. Por el lema anterior, existe una sucesión $\omega_1 = \mathcal{E}_h, \omega_2, \ldots, \omega_r = \omega$ tal que cada ω_i es una 2-célula, unión de 2-simplejos de la triangulación y tal que cada una se obtiene de su predecesora adjuntando un 2-simplejo adyacente a lo largo de una o dos aristas.

Los correspondientes conjuntos fibrados $\Omega_1 = \Delta_H, \Omega_2, \ldots, \Omega_r = \Omega$ son vecindades fibradas de H. Porque como ω_i se obtiene de ω_{i-1} pegando un 2-simplejo a lo largo de una 1-célula (que puede consistir de uno o dos 1-simplejos), obtenemos a Ω_i de Ω_{i-1} pegando un toro sólido ordinario Δ a Ω_{i-1} coherentemente (preservando fibras) a lo largo de un anillo fibrado. Este es de nuevo un toro sólido fibrado. ∎

3. Ejemplos de Espacios Fibrados.

1. Sea f una 2-variedad sin frontera. Entonces $F = f \times S^1$ es un espacio fibrado sin fibras excepcionales. Las fibras son las curvas $\{x\} \times S^1$, $x \in f$.

Si f es orientable, como S^1 es orientable, entonces $F = f \times S^1$ es orientable.

Si f es no orientable, entonces F es no orientable.

En efecto. Supongamos que $F = f \times S^1$ es orientable; como f es una subvariedad propiamente encajada en F y f no separa a F, por tanto cortando a F a lo largo de f obtenemos una 3-variedad F' tal que $\partial F'$ es la unión ajena de dos copias de f. F' hereda la orientación de F y F' induce una orientación sobre $\partial F'$, en particular f es orientable.

Claramente la superficie de órbitas de $F = f \times S^1$ es f.

2. Pensamos en la esfera de dimensión 3 como

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

Construiremos ejemplos de fibraciones de S^3 con fibras excepcionales.

Las fibras son las curvas traza de cierto grupo de traslaciones rígidas en una variable de la esfera en ella misma.

Como curvas en $\mathbb{R}^4$ están dadas por

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1 \cos mt + x_2 \operatorname{sen} mt \\
x_2' &= -x_1 \operatorname{sen} mt + x_2 \cos mt \\
x_3' &= \qquad\qquad\qquad x_3 \cos nt + x_4 \operatorname{sen} nt \\
x_4' &= \qquad\qquad\qquad -x_3 \operatorname{sen} nt + x_4 \cos nt .
\end{aligned}$$

m y n son enteros positivos primos relativos; t es un parametro continuo que varía de 0 a 2π.

Claramente las curvas traza son curvas cerradas simples para cada $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$. y S^3 es unión de fibras.

Supongamos que (x_1, x_2, x_3, x_4) está en la fibra de (y_1, y_2, y_3, y_4); por tanto

$$x_1 = y_1 \cos mt + y_2 \operatorname{sen} mt$$
$$x_2 = -y_1 \operatorname{sen} mt + y_2 \cos mt$$
$$x_3 = y_3 \cos nt + y_4 \operatorname{sen} nt$$
$$x_4 = -y_3 \operatorname{sen} nt + y_4 \cos nt$$

para alguna $t \in [0, 2\pi]$.

Por tanto, $x_1 \cos m(2\pi - t) + x_2 \operatorname{sen} m(2\pi - t) =$

$= x_1 \cos mt - x_2 \operatorname{sen} mt =$

$= y_1 \cos mt \cos mt + y_2 \operatorname{sen} mt \cos mt$
$+ y_1 \operatorname{sen} mt \operatorname{sen} mt - y_2 \cos mt \operatorname{sen} mt$

$= y_1$

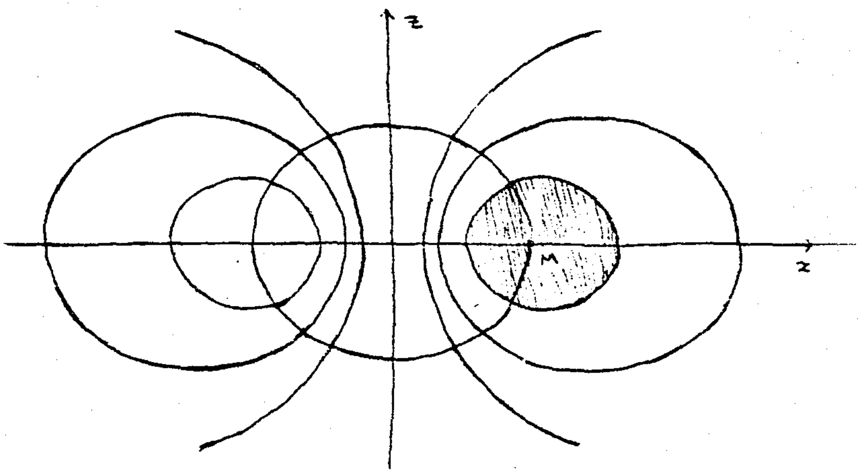
De manera análoga

$$y_2 = -x_1 \operatorname{sen} m(2\pi - t) + x_2 \cos m(2\pi - t)$$
$$y_3 = x_3 \cos n(2\pi - t) + x_4 \operatorname{sen} n(2\pi - t)$$
$$y_4 = -x_3 \operatorname{sen} n(2\pi - t) + x_4 \cos n(2\pi - t)$$

Por tanto (y_1, y_2, y_3, y_4) está en la fibra de (x_1, x_2, x_3, x_4), i.e., cada punto de S^3 está en exactamente una fibra.

Visualizamos a la esfera proyectándola estereográficamente de su polo norte $(0,0,0,1)$ en el plano ecuatorial $x_4=0$. El plano ecuatorial es un espacio euclídeano de dimensión 3 con las coordenadas cartesianas x, y, z, que cerramos de nuevo a la esfera, compactándolo adjuntándole un punto al infinito, la imagen del polo norte. La proyección estereográfica mapea al grupo de traslaciones rígidas descrito anteriormente, en un grupo de transformaciones del espacio que deja fijos al eje z y al círculo unitario $\{x^2+y^2=1, z=0\}$.

Entonces el continuo de toros que tiene al eje z como eje de rotación y que intersecta a cada una de las 2-esferas, que pasa por el círculo unitario, ortogonalmente, se mapean en ellos mismos bajo este grupo de transformaciones.



La figura muestra una sección del toro con el plano xz. Cada uno de los toros es frontera de un toro sólido que contiene al círculo unitario en su interior y está fibrado por las curvas traza del grupo de traslaciones. Ésto porque un semiplano bordeado por el eje z rota al rededor del eje z bajo una transformación del grupo

La seccion circular del semiplano con un toro sólido (sombreado en la figura) rota al rededor de su centro esférico M con un ángulo de $2\pi n/m$ durante el tiempo que el semiplano rota una vez al rededor del eje z.

Los números característicos μ y ν del toro sólido fibrado son por tanto $\mu = m$ y $\nu =$ al valor absoluto de n reducido mod(m) a $[\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}m]$.

La parte de la hiperesfera que está fuera del toro considerado es también un toro sólido fibrado que tiene al eje z como su fibra central y como fibras a las curvas traza. Esto porque bajo las traslacion rigida de la esfera $x_1' = x_3$, $x_2' = x_4$, $x_3' = x_1$, $x_4' = x_2$, esto es, bajo la transformación correspondiente del espacio, el circulo unitario y el eje z se intercambian. Los números característicos de este toro sólido son $\mu = n$ y $\nu = m$ reducido mod(n) al intervalo $[-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n]$.

El circulo unitario es por tanto una fibra excepcional de multiplicidad m y el eje z una fibra excepcional de multiplicidad n.

Cualquier otra curva es una fibra, ordinaria porque por ejemplo, está contenida en un toro solido fibrado que es vecindad fibrada del circulo unitario.

Cada fibra ordinaria se enrolla m veces alrededor del eje z y n veces alrededor del círculo unitario, por tanto está anudada, es, a saber, el nudo toroidal m, n, si m y n son distintos de 1.

La superficie de órbitas de una fibración de la hiperesfera S^3, es siempre S^2. Porque cada curva cerrada en S^3 es contraíble a un punto, por tanto lo mismo se cumple para la superficie de órbitas. Como S^3 es cerrada, la superficie de órbitas también; por tanto solo puede ser la 2-esfera.

3. Sean V_1 y V_2 dos toros sólidos. Si $h: \partial V_2 \to \partial V_1$ es un homeomorfismo, formamos el espacio

$$M = V_1 \underset{h}{\cup} V_2$$

que es el resultado de identificar cada $x \in \partial V_2$ con $h(x) \in \partial V_1$ en la unión disjunta de V_1 y V_2.

Claramente M es una 3-variedad cerrada y conexa.

Como se tiene la sucesión exacta (Mayer-Vietoris)

$$H_3(V_1) \oplus H_3(V_2) \to H_3(M) \to H_2(V_1 \cap V_2) \to$$
$$\to H_2(V_1) \oplus H_2(V_2)$$

y como $H_3(V_1) \cong H_3(V_2) \cong H_2(V_1) \cong H_2(V_2) = 0$ porque $V_1 \cong V_2 \simeq S^1$; y además $H_2(V_1 \cap V_2) \cong H_2(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$

por tanto se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_3(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Luego $H_3(M) \cong \mathbb{Z}$ y por tanto M es orientable.

M depende, salvo homeomorfismo, solo de la clase de homotopía de $h(m_2)$ en ∂V_1, donde m_2 es un meridiano de V_2 (ver demostracion del lema 6).

<u>Def</u>. Eligiendo generadores fijos ℓ_1 y m_1 para $\pi_1(\partial V_1)$ donde m_1 es un meridiano de V_1, podemos escribir

$$h_*(m_2) = p\,\ell_1 + q\,m_1$$

donde p y q son enteros primos relativos. La variedad resultante M se llama <u>el espacio lente</u>

de tipo (p,q) y se denota como

$$M = L(p,q).$$

En otras palabras, una 3-variedad es un espacio lente si y solo si contiene un toro sólido tal que la cerradura de su complemento es también un toro sólido. Usualmente $S^3 = L(1,0)$ y $S^2 \times S^1 = L(0,1)$ no se consideran espacios lente.

Si M_1 y B_1 son meridiano y longitud sobre ∂V_1, entonces el espacio lente está determinado por la homología

$$h(M_2) \sim p B_1 + q M_1$$

donde M_2 es un meridiano de V_2. $p \neq 0$, de otra manera $L(p.q) \cong S^2 \times S^1$.

Fibrando a V_1 de tal manera que

$$H \sim y B_1 + x M_1$$

donde $(y \neq p$ ó $x \neq q)$ y $(y.x) = 1$, la fibración del espacio lente esta determinada de manera única por esta fibración de V_1.

Explícitamente: los números de definición de V_1 son $\mu_1 = |y|$, $\nu = |x_1|$ reducido modulo μ_1.

Si Q es una curva cruzada en ∂V_1, entonces

$Q \sim \ell B_1 + m M_1$

con $\det\begin{pmatrix} y & \ell \\ x & m \end{pmatrix} = +1$ (i.e., se puede elegir de esta manera).

Por tanto

$B_1 \sim m H + (-x) Q$

$M_1 \sim -\ell H + y Q$

porque $\begin{pmatrix} y & \ell \\ x & m \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ym - x\ell}\begin{pmatrix} m & -\ell \\ -x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -\ell \\ -x & y \end{pmatrix}$

Se han elegido una fibración sobre $\partial V_2 = \partial V_1$ y una curva meridiano tal que $h(M_2) \not\sim H$ y que es no trivial sobre ∂V_2:

$h(M_2) \sim p B_1 + q M_1 \sim$

$\sim p(mH - xQ) + q(-\ell H + yQ) \sim$

$\sim (pm - q\ell) H + (qy - px) Q$

Eligiendo a una longitud

$B_2 \sim r Q + s H$

tal que $\det\begin{pmatrix} qy-px & pm-ql \\ r & s \end{pmatrix} = +1$,

se tiene que $\mu_2 = |yq - px|$ y

$\nu_2 = |r|$ reducido módulo μ_2

son los números de definición de V_2.

Observese que como $pz - qr = 1$ p. a. $z, r \in \mathbb{Z}$, si fibramos a V_1 con $H \sim rB_1 + zM_1$, entonces V_2 es un toro sólido ordinario.

Por ejemplo en $L(2,3)$, fibrando a V_1 con $H \sim B_1 + 2M_1$, entonces $L(2,3)$ no tiene fibras excepcionales.

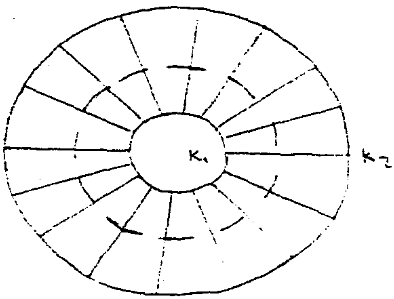
En el espacio $L(p,q)$, fibrando a V_1 con

$$H - pB_1 + xM_1 \quad (x \neq q),$$

se tiene que la fibra es homóloga a cero en $L(p,q)$.

Como $\pi_1(L(p,q)) \cong \mathbb{Z}_p$, por tanto la superficie de órbitas de $L(p,q)$ es S^2 para cualquier pareja (p,q) y cualquier fibración (ver §14).

4. La suma conexa de dos espacios proyectivos $P^3 \# P^3$ se obtiene identificando puntos diametralmente opuestos de las esferas K_1 y K_2 que son frontera de $S^2 \times I$ (ver figura), porque la 2-esfera punteada en la figura separa a esta variedad en dos espacios proyectivos agujerados. Las fibras son los radios de $S^2 \times I$; dos radios diametralmente opuestos forman una fibra.



Esta fibración no tiene fibras excepcionales y su superficie de órbitas es P^2.

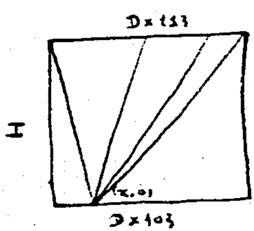
Los invariantes de la fibración (ver §7) son $(On; 1|0)$; $b=0$, porque $D^3 \# D^3$ admite un homeomorfismo que preserva fibras y que invierte la orientación (reflexión c.r. a la S^2 punteada). Por tanto $(On; 1|b) = (On; 1|-b)$ por tanto $b=-b$.

5. $(S^2 \times S^1) \# (S^2 \times S^1)$ no admite ninguna fibración (ver §14).

4. Remoción y Sellado (Cirugía).

<u>Lema</u> Si $h:(D,*) \to (D,*)$ es un homeomorfismo (PL) de un n-disco, que es la identidad sobre la esfera frontera, entonces existe una isotopía (PL) de h a la identidad que deja fijos a ∂D y al punto base.

<u>Dem.</u> Si el punto base está en ∂D, elegimos a x como un punto cualquiera en int D. Si el punto base no esta en ∂D, elegimos a x como el punto base. Sea $\varphi: D \to \Delta^n$ una equivalencia PL de D con un n-simplejo. Triangulamos D de tal manera que x es un vértice y tal que φh es simplicial (La última condición solo se impone si h es PL por supuesto). Triangulamos $D \times I$ tomando la triangulacion de D en $D \times \{1\}$, la triangulación producto de $\partial D \times I$ y considerando a $D \times I$ como el cono sobre $(D \times \{1\}) \cup (\partial D \times I)$ con $(x,0)$ como el vèrtice del cono.



Definimos un homeomorfismo que preserva niveles $H: D \times I \to D \times I$ como sigue:

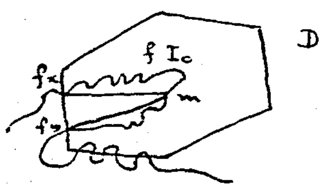
$H|\partial D \times I$ es la identidad;

$H|D \times \{1\}$ es h; $H(x,0) = (x,0)$;

y $(\varphi \times 1)H : D \times I \to \Delta^n \times I$ es lineal en cada arco rectilineo en $D \times I$, tal que un extremo del arco es $(x,0)$ y el otro esta en $(D \times \{1\}) \cup (\partial D \times I)$ ⊠

<u>Teorema</u> Sea M una 2-variedad, $f:(S^1,s) \longrightarrow (\mathrm{int}\,M, m)$ un encaje. Entonces existe una isotopía ambiental que deja fijos a m y al exterior de un subconjunto compacto de $\mathrm{int}\,M$ y que cambia a f por un encaje P.L.

<u>Dem</u> Sea D un disco PL pequeño en $\mathrm{int}\,M$ que es una vecindad de m. Entonces $f^{-1}(\mathrm{int}\,D)$ consiste de una unión ajena de intervalos abiertos. Sea I_0 la cerradura del intervalo abierto que contiene a m y sean x y y sus extremos. Trazamos arcos P.L X y Y en D de tal manera que $X \cap Y = m$, $X \cap \partial D = fx$ y $Y \cap \partial D = fy$.



Tenemos un homeomorfismo

$$(f I_0, fx, fy, m) \longrightarrow (X \cup Y, fx, fy, m)$$

De acuerdo al teorema de Schönflies, podemos extender éste a un homeomorfismo de D en si mismo que es la identidad en ∂D. Por el lema anterior, existe una isotopía de M que deja fijos a m y a $M-D$ y que cambia $f|_{I_0}$ a un mapeo PL.

Sean $D_1,\dots,D_k$ discos en $\mathrm{int}M - fI_0$ tales que $f(S^1 - \mathrm{int}I_0)$ esta cubierto por $\mathrm{int}D_1,\dots,\mathrm{int}D_k$. $f^{-1}\mathrm{int}D_i$ es una unión de intervalos abiertos. Así, $S^1 - \mathrm{int}I_0$ está cubierto por un número finito de estos intervalos abiertos, $\mathrm{int}I_1,\dots,\mathrm{int}I_n$ con cerraduras $I_1,\dots,I_n$. Por conveniencia definimos $I_0 = I_{n+1}$. Sin perder generalidad suponemos que $I_r \cap I_s \neq \emptyset$ si y solo si $|r-s| \leq 1$. Para cada i elegimos un subarco J_i de $\mathrm{int}I_i$ de tal manera que $\mathrm{int}J_0 \cup \dots \cup \mathrm{int}J_n$ cubre a S^1.

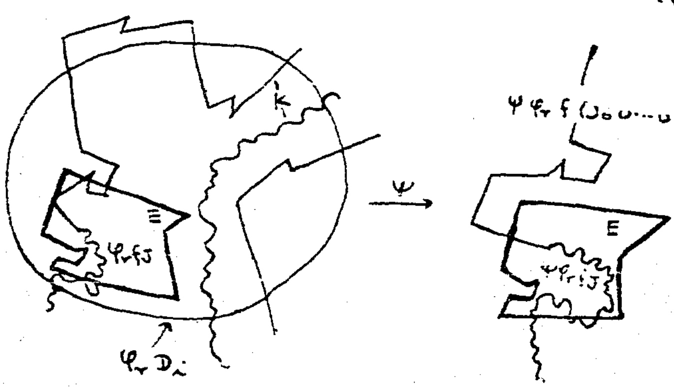
Para cada r trataremos de encontrar un homeomorfismo φ_r de M que es isotópico a la identidad por una isotopía que deja fijos a m y al exterior de un subconjunto compacto de $\mathrm{int}M$ y tal que $\varphi_r f$ es P.L. en $J_0 \cup \dots \cup J_r$. Hemos definido a φ_0. Supongamos que hemos definido a $\varphi_0,\dots,\varphi_r$ para $r<n$. Definiremos φ_{r+1}.

Supongamos que $\mathrm{int}I_{r+1}$ es una componente de $f^{-1}\mathrm{int}D_i$. $\varphi_r(\mathrm{int}D_i)$ hereda la estructura PL de M y es homeomorfo PL a un plano.

$$K := \varphi_r f\,(S^1 - \operatorname{int} I_{r+1}) \cap \varphi_r(\operatorname{int} D_i)$$

es un subespacio cerrado de $\varphi_r \operatorname{int} D_i$. Elegimos una subvariedad compacta PL E de $\varphi_r \operatorname{int} D_i$ que contenga a $\varphi_r f J_{r+1}$ en su interior y que es ajena a K. Sin perder generalidad podemos suponer que E es un disco.

Sea $J_{r+1} \subset J \subset I_{r+1}$ donde J es la cerradura de una componente de $f^{-1}\varphi_r^{-1}(\operatorname{int} E)$.



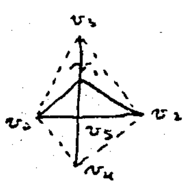
Existe una isotopía ambiental PL de M, que deja fijos a $M - \operatorname{int} \varphi_r D_i$ y a J, de la identidad a un homeomorfismo ψ tal que $E \cap \psi\varphi_r f(J_0 \cup \cdots \cup J_r)$ es un arco en E que intersecta a ∂E solo en un extremo (si $r = n$ tenemos dos arcos en vez de uno). Ahora aplicamos el lema anterior a E como en el primer párrafo de esta demostración para obtener una isotopía, que deja fijo al exterior de E, de la identidad a un homeomorfismo η tal que $\eta\Psi\varphi_r f|_J$ es P.L. Definimos $\varphi_{r+1} := \eta\Psi\varphi_r$.

<u>Lema</u> Sea J una curva cerrada simple PL en $\mathbb{R}^2$. Entonces existe un homeomorfismo $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $h(J)$ es la frontera de un 2-simplejo.

<u>Dem</u> Sea I el interior de J y sea K una triangulación de $\overline{I}$.

Cualquier 2-simplejo libre de K puede removerse mediante un homeomorfismo $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

<u>Caso 1</u> Supongamos que $\langle v_0, v_1, v_2\rangle$ es libre en K y $\langle v_0, v_1, v_2\rangle \cap Fr(|K|) = \langle v_0, v_2\rangle$. Tomamos a v_3, v_4 y v_5 como en la figura: v_3, v_4, v_5 y v_1 son colineales y v_5 está "suficientemente cerca" de v_4 y v_1 de v_3 de tal manera que $\langle v_0, v_3, v_2, v_4\rangle$ intersecta a $\partial|K|$ solo en $\langle v_0, v_2\rangle$.



Definimos a h como la identidad en el complemento de la figura ($h := 1_{\overline{\mathbb{R}^2 - \langle v_0, v_3, v_2, v_4\rangle}}$) Por tanto v_0, v_2, v_3 y v_4 quedan fijos. Definimos $h(v_5) := v_1$ y extendemos a h lineal-

mente de tal manera que $h\langle v_0, v_4, v_3\rangle = \langle v_0, v_4, v_1\rangle$,
$h\langle v_2, v_4, v_3\rangle = \langle v_2, v_4, v_1\rangle$, $h\langle v_0, v_3, v_3\rangle = \langle v_0, v_1, v_2\rangle$,
$h\langle v_2, v_3, v_3\rangle = \langle v_2, v_1, v_3\rangle$.

Caso 2 Sup que $\langle v_0, v_1, v_2\rangle$ es libre en K con $\langle v_0, v_1, v_2\rangle \cap \partial|K| = \langle v_0, v_1\rangle \cup \langle v_1, v_2\rangle$.
Usamos el inverso del homeomorfismo h definido en el caso 1.

En cualquiera de los casos, el efecto de h es reducir en 1 el número de 2-simplejos de K. El teorema se sigue por inducción sobre el número de simplejos de K. +

Lema Sean J y J' curvas cerradas simples PL en $\mathbb{R}^2$, entonces existe un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ∍. $h(J) = J'$

Dem. Por el lema anterior, tenemos homeomorfismos

$$f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_1 J = \partial\sigma^2 = \partial\langle v_0, v_1, v_2\rangle$$
$$f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_2 J' = \partial\tau^2 = \partial\langle w_0, w_1, w_2\rangle$$

Sean $t_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto x - v_0$,

$t_3: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto x + w_0$

$t_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\sum \alpha_i (t_1(v_i)) \mapsto \sum \alpha_i (t_3(w_i))$ $(\sum \alpha_i = 1)$

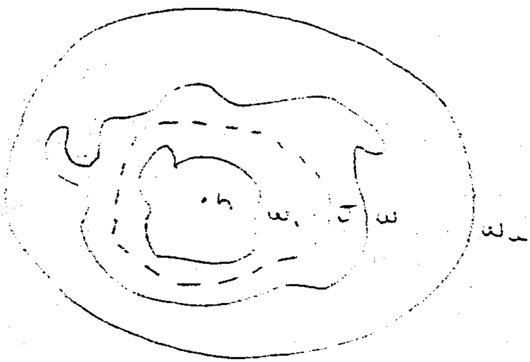
Def. $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $f_3 := t_3 t_2 t_1$.
Entonces $h := f_2^{-1} f_3 f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que
$h(J) = J'$ +

<u>Lema 4</u> Si Ω y Ω' son vecindades fibradas de una fibra H en un espacio fibrado F, entonces existe una deformación de F que preserva fibras que envía a Ω en Ω' y que deja fija a H.

<u>Dem</u>. Por el lema 1, existe una vecindad fibrada Ω_1 de H que está contenida en los interiores de Ω y de Ω', porque para las vecindades de órbitas ω y ω' de h, existe una vecindad de órbitas ω_1 de h que está contenida en $\operatorname{int}\omega \cap \operatorname{int}\omega'$.

Sea ω_a un 2-disco que contiene a ω en su interior y no contiene puntos excepcionales salvo (posiblemente) h. Este 2-disco existe porque las vecindades de órbitas son cerradas y los puntos excepcionales no tienen puntos de acumulación. Por el lema 3, ω_a es también una vecindad de órbitas de h.

Mapeamos a W_a sobre un disco de $\mathbb{R}^2$ con la imágen de h como su centro. W y W_1 se mapean a discos



contenidos en el interior de W_a (más precisamente, de la imagen de W_a) y tal que $\partial W_1 \cap \partial W = \emptyset$.

Existe una curva simple cerrada J contenida en el interior de la región entre W y W_1.

Sea K la cerradura del interior de J en $\mathbb{R}^2$ (K es un 2-disco) y sea L la cerradura de la región entre J y W_a (L es un anillo).

Entonces existe una isotopía ambiental que deja fijo al exterior de un subconjunto compacto de $\operatorname{int}(\alpha - \{h\})$ y que deforma a ω_1 en una curva poligonal, y existe una isotopia que deja fijo al exterior de un subconjunto compacto de L y que cambia a ω por una curva poligonal.

Estas dos isotopias nos dan una isotopia ambiental de W_a que deja fijos a h y a ∂W_a.

Expandemos ahora a $\operatorname{int} W_a$ en $\mathbb{R}^2$ (expansion radial), entonces las curvas ω_1 y ω así deformadas se convierten bajo la expansión en dos curvas C_1 y C, cerradas, simples PL en $\mathbb{R}^2$, por tanto existe una deformación de $\mathbb{R}^2$ que manda a C_1 en C.

Tomando la inversa de la expansión, obtenemos una deformación de W_a que manda a ω_1 en ω deformada y que deja fijos a h y ∂W_a.

Tomando la inversa de la deformación que cambia a ω en una curva PL, tenemos una deformación de W_a que manda a W_1 en W y deja fijos a h y a la frontera de W_a.

Esta deformacion, corresponde a una deformación que preserva fibras de la vecindad fibrada Ω_a de H que deja fijos a H y a la frontera de Ω_a (puntualmente) y que manda a Ω_1 en Ω.

Obtenemos ésta deformación de Ωa cortando a Ωa en un cilindro euclidiano y transfiriendo la deformación de ωa a todos los discos meridionales $\#$

<u>Def.</u> <u>Remover</u> una fibra H de un espacio fibrado F significa remover de F los puntos interiores de una vecindad fibrada Ω_H de H.

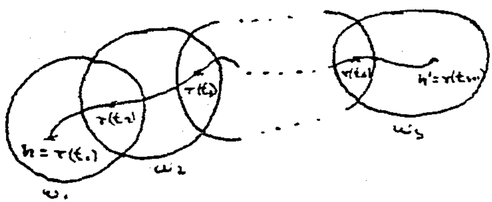
De remover una fibra H de un espacio fibrado F resulta un <u>espacio fibrado</u> $\bar{F}$ <u>con frontera</u>. La frontera es un toro fibrado.

La <u>superficie de órbitas $\bar{f}$ de $\bar{F}$</u> se obtiene de la superficie de órbitas f de F removiendo los puntos interiores de la vecindad de órbitas ω_h en la que se mapea la vecindad fibrada removida Ω_H.

<u>Lema 5</u> El espacio fibrado con frontera $\bar{F}$ que se obtiene de F removiendo una fibra ordinaria H es independiente de la elección de la fibra ordinaria H.

<u>Dem.</u> Sean H y H' fibras ordinarias de F y h y h' sus imagenes en la superficie de órbitas f. Sea r una trayectoria simple de h a h' sobre f que no pasa por puntos excepcionales.

Como la imagen de r es un compacto, la podemos cubrir con un número finito de vecindades de órbitas que no contienen puntos excepcionales $w_1, w_2, \ldots, w_s$ y podemos elegir puntos $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_s < t_{s+1} = 1$ tales que $r(t_{i+1}) \in \operatorname{int} w_i \cap \operatorname{int} w_{i+1}$.



Sea $\varphi_i : w_i \to w_i$ una deformación tal que $\varphi_i(r(t_i)) = r(t_{i+1})$ y $\varphi_i|_{\partial w_i} = 1_{\partial w_i}$ para $1 \leq i \leq s$. La deformación φ_i de w_i corresponde a una deformación que preserva fibras del toro sólido ordinario Ω_i que envía a la fibra H_i correspondiente a $r(t_i)$ en la fibra H_{i+1} correspondiente a $r(t_{i+1})$ y que deja al toro frontera de Ω_i fijo puntualmente. Esta deformación de Ω_i corresponde a una deformación $\phi_i : F \to F$ que es la identidad fuera de Ω_i. La composición $\phi_s \circ \phi_{s-1} \circ \cdots \circ \phi_1$ es una deformación que envía a H en H' $\boxed{\mathcal{F}}$

Los mismos argumentos se aplican al espacio agujerado $\bar{F}$ y muestran que el espacio obtenido de F al remover un número arbitrario de fibras ordinarias es independiente de la elección de las fibras ordinarias que se remueven. La unica condición es que las vecindades removidas sean ajenas.

Del espacio fibrado con frontera $\bar{F}$ que se obtiene de F removiendo una fibra podemos construir nuevos espacios fibrados (cerrados) cerrando el toro frontera $\bar{\Pi}$ de $\bar{F}$ con un toro sólido fibrado, el <u>toro sellador</u> V. Esto se consigue mediante un empaste que preserve fibras del toro Π frontera de V al toro $\bar{\Pi}$. Dado el toro sellador V, esta pegadura se puede hacer de un numero infinito de formas esencialmente distintas. Pero el cerrado del espacio está completamente determinado si se conoce la imágen $\bar{M}$ de una curva meridional de V sobre el toro $\bar{\Pi}$. Obviamente $\bar{M}$ no puede ser homologicamente cero ni homologo a una fibra sobre $\bar{\Pi}$ porque esto sería cierto para la curva meridional M sobre Π; además $\bar{M}$ no tiene puntos singulares. Estas son todas las condiciones para $\bar{M}$. En efecto, tenemos el

<u>Lema 6</u> Si sobre el toro $\bar{\Pi}$ frontera de un espacio fibrado con frontera $\bar{F}$ tenemos una curva simple cerrada $\bar{M}$ sobre $\bar{\Pi}$ que no es homólogo a cero ni a una fibra sobre $\bar{\Pi}$, entonces existe exactamente un toro sólido fibrado V cuyo toro frontera Π se puede mapear bajo un homeomorfismo que preserva fibras sobre $\bar{\Pi}$ de tal manera que $\bar{M}$ es

homotópico a cero en V. El espacio fibrado (cerrado) F_1 resultante está determinado de manera única por $\bar{F}$ y la clase de homología de $\bar{M}$ sobre $\bar{\Pi}$.

<u>Dem</u>

"(a)" Mostraremos primero que existe uno y sólo un toro sólido fibrado V que satisface las condiciones del teorema. Si $\bar{Q}$ es una curva cruzada y $\bar{H}$ una fibra orientada sobre $\bar{\Pi}$, tenemos

$$\bar{M} \sim \alpha \bar{Q} + \beta \bar{H} \quad (\alpha \neq 0,\ (\alpha, \beta) = 1) \text{ sobre } \bar{\Pi}.$$

Se mostró en §1 que existe exactamente un toro sólido fibrado V con meridiano M, fibra H y curva cruzada elegida adecuadamente Q tal que sobre el toro Π frontera de V se cumple

$$M \sim \alpha Q + \beta H$$

Podemos mapear a Π sobre $\bar{\Pi}$ bajo un homeomorfismo que preserva fibras tal que Q va a $\bar{Q}$ y H a $\bar{H}$. Para ésto, cortamos Π y $\bar{\Pi}$ a lo largo de Q y H, y $\bar{Q}$ y $\bar{H}$, respectivamente y obtenemos dos rectángulos conformados por las fibras y podemos mapear estos rectangulos uno sobre otro bajo un homeomorfismo que preserva fibras. Entonces $\bar{M}$ se mapea a M y por tanto $\bar{M}$ se convierte un meridiano de V.

(b)" Mostraremos ahora que el espacio fibrado F_1 está determinado de manera única por F y por la clase de homología de $\bar{M}$ (sobre $\bar{\Pi}$). Todos los mapeos que preservan fibras de $\bar{\Pi}$ sobre Π bajo los que $\bar{M}$ se vuelve homotopicamente cero en V se obtienen de un solo mapeo tal seguido de un mapeo que preserva fibras $A_\Pi : \Pi \to \Pi$ que mapea al meridiano M, o más precisamente a su clase de homología, en ella misma o su negativa. Habremos probado la independencia de la fibración resultante de F_1 de la elección de los mapeos anteriores una vez que mostremos que podemos extender A_Π a un homeomorfismo que preserva fibras $A_V : V \longrightarrow V$ cuya restricción a Π es A_Π.

Revisaremos primero como se transforman las clases de homología de Π bajo A_Π.

Sean H, Q y M una fibra, una curva cruzada y un meridiano sobre Π respectivamente con una orientación fija y supongamos que

$$M \sim \alpha Q + \beta H$$

Podemos elegir a Q tal que $\alpha > 0$ y $0 \leq \beta < \alpha$.

Como M es una curva simple cerrada, α y β son primos relativos. Sean H', Q' y M' las imágenes de estas curvas bajo A_Π. Como A_Π preserva fibras tenemos que

$$H' \sim \varepsilon_1 H, \quad Q' \sim \varepsilon_2 Q + \lambda H \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1) \qquad (1)$$

El meridiano $\dot{M}$ se mapea bajo A_π en

$$M' \sim \alpha Q' + \beta H' \sim \varepsilon_2 \alpha Q + (\varepsilon_1 \beta + \alpha\lambda] H$$

Como $M' \sim \varepsilon_3 M$, por tanto

$$\varepsilon_2 \alpha Q + (\varepsilon_1 \beta + \alpha\lambda] H \sim \varepsilon_3(\alpha Q + \beta H)$$

Comparando coeficientes obtenemos $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ y

$$\alpha\lambda + \varepsilon_1 \beta = \varepsilon_2 \beta \qquad (1)$$

Supongamos que $\alpha > 2$; si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, ent. $\alpha\lambda = 0$ y por tanto $\lambda = 0$; supongamos que $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, por tanto $2\beta = \alpha\lambda$ o $2\beta = \alpha(-\lambda)$, en todo caso $2\beta = \alpha k$ con $k \geq 0$; como $(\alpha, \beta) = 1$, se tiene que $\beta | k$, por tanto $k \geq \beta$; como $\alpha > 2$, por tanto $\alpha k > 2\beta$ lo que es una contradicción, por tanto $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ y se cumple que si $\alpha > 2$ entonces $\lambda = 0$

Por (1) solo hay dos posibilidades

$$\alpha > 2 \quad \begin{cases} H' \sim H & Q' \sim Q \\ H' \sim -H & Q' \sim -Q \end{cases}$$

Supongamos que $\alpha = 2$, por tanto $2\lambda + \varepsilon_1\beta = \varepsilon_2\beta$; si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, entonces $\lambda = 0$; si $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, entonces $2\beta = 2\lambda$ o $2\beta = -2\lambda$, por tanto $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$

Luego para $\alpha = 2$ debemos tener $\lambda = +1, -1$ o 0.

Por tanto hay cuatro posibilidades

$$\alpha = 2 \quad \begin{cases} H' \sim H & Q' \sim Q \\ H' \sim -H & Q' \sim -Q \\ H' \sim -H & Q' \sim Q + H \\ H' \sim H & Q' \sim -Q - H \end{cases}$$

Para $\alpha = 1$, como $0 \le \beta < \alpha$, se tiene de nuevo $\lambda = 0$ y obtenemos las cuatro posibilidades

$$\alpha = 1 \quad \left\{ H' \sim \pm H \quad Q' \sim \mp Q \right.$$

con todas las cuatro combinaciones de los signos.

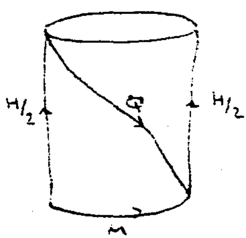
El mapeo A_V que debemos construir será la composición de dos homeomorfismos que preservan fibras $A_V = J_V \circ B_V$. $B_V : V \to V$ es un homeomorfismo que preserva fibras que transforma las clases de homología sobre Π de la misma manera que A_Π. $J_V : V \to V$ mapea cada clase en sí misma.

Cortemos a V en un cilindro circular recto.

- Para $\alpha \geq 2$, en el caso $H' \sim -H$, $Q' \sim -Q$, definimos a B_V como una rotación de V alrededor de una recta ortogonal al eje del cilindro. Entonces B_V preserva fibras y manda a cada clase de homología de Π en su negativa.
- Para $\alpha = 1$, obtenemos a B_V de una rotación como en el caso anterior $(H' \sim -H, Q' \sim -Q)$; o como una reflexión c.r.a un plano ortogonal

al eje del cilindro ($H' \sim -H$, $Q' \sim Q$); o una reflexión c.r. a un plano que contiene al eje del cilindro ($H' \sim H$, $Q' \sim -Q$).

- En el caso $\alpha = 2$, la fibra esta conformada por dos rectas diametralmente opuestas paralelas a la fibra de enmedio. Como $M \sim 2Q + H$,



la curva cruzada aparece como en la figura. Una transformación (3) ($H' \sim -H$, $Q' \sim Q+H$), se obtiene reflejando el cilindro c.r. a el plano ortogonal al eje del cilindro que pasa por el punto medio de este. Una transformación (4) ($H' \sim H$, $Q' \sim -Q-H$), se obtiene reflejando c.r. a un plano que contiene el eje del cilindro.

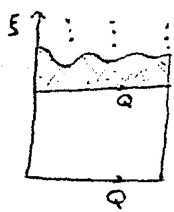
Falta mostrar que para un mapeo arbitrario que preserva fibras $J_\pi : \pi \to \pi$ que manda cada clase de homología de π sobre si misma, existe un mapeo que preserva fibras $J_V : V \to V$ tal que $J_V|_\pi = J_\pi$.

Mostraremos primero que J_π se puede deformar a la identidad mediante una deformación que preserva fibras.

Como la imágen Q' de Q es homologa a Q sobre el toro frontera por hipótesis, tomamos una traslación rígida de cada fibra sobre si misma de tal manera que Q' se mapea sobre G como subconjuntos de Π.

Esta deformación es seguida de una deformación que preserva fibras que intercambia a las fibras y tal que la composicion de las dos deformaciones deja a Q fija puntualmente.

El mapeo J_Π deformado de esta manera aparece en el rectángulo fibrado que se obtiene de Π cortando a lo largo de Q y de una fibra H como un mapeo C que preserva fibras que deja a las dos aristas paralelas Q fijas puntualmente y que traslada a los puntos interiores sólo a lo largo de sus fibras.



Completamos el rectángulo a una banda (un espacio homeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times Q$) mediante la región que esta sombreada en la figura y definimos un mapeo C': banda $\to$ banda que coincide con C en el rectángulo y es la identidad en la región sombreada.

Sea $T(t)$ un estiramiento de la banda "hacia arriba" que deja a la frontera inferior Q fija: la ordenada ξ de un punto debe ir a $t\xi$ $(t \geq 0)$

Entonces $T(t)^{-1} C' T(t) =: C'(t)$ es un homeomorfismo de la banda que mapea preservando fibras al rectángulo sobre si mismo para $t \geq 1$. Para $t = 1$, este mapeo coincide con C en el rectángulo.

Conforme $t \to \infty$, $C'(t)$ se aproxima continuamente a la identidad.

Luego C y por tanto J_π se deforma a la identidad por una deformación que preserva fibras.

Describimos esta deformación de J_π mediante un parámetro τ que decrece de 1 a $\frac{1}{2}$. Sea $J_\pi(\tau)$ el mapeo correspondiente a τ.

Para extender J_π al mapeo deseado J_V, cortamos V en un cilindro (de radio 1) e introducimos coordenadas cilíndricas z, φ, ρ. Entonces para $\rho = k =$ constante, obtenemos un toro concéntrico de radio k.

Mapeamos cada uno de los toros sobre sí mismo bajo un homeomorfismo que preserva fibras. El toro frontera se mapea bajo $J_\pi = J_\pi(1)$. Si el mapeo $J_\pi(\tau)$ en las coordenadas z, φ está dado por

$$\left.\begin{aligned} z' &= z'(z, \varphi, \tau) \\ \varphi' &= \varphi'(z, \varphi, \tau) \end{aligned}\right\} \qquad (J_\pi(\tau))$$

el mapeo J_V para $1 \geq \rho \geq \frac{1}{2}$ está definido como

$$\left.\begin{aligned} z' &= z'(z, \varphi, \rho) \\ \varphi' &= \varphi'(z, \varphi, \rho) \\ \rho' &= \rho \end{aligned}\right\} \qquad (J_V)$$

mientras que para $\frac{1}{2} \geq \rho \geq 0$ es la identidad.
Esta construccion del homeomorfismo A_v completa la prueba del lema ☒

5. Clases de Espacios Fibrados

Si $w: I \to f$ es una trayectoria sobre la superficie de órbitas de un punto h_1 a un punto h_2, tenemos para cada $s \in I$ un punto $h(s)$ de f y por tanto una fibra $H(s)$ que se mapea en $h(s)$.

Orientamos cada fibra $H(s)$ arbitrariamente. Si la misma fibra H pertenece a distintos valores de s, lo que sucede si w tiene puntos múltiples, le asignamos a H el mismo número de orientaciones mutuamente independientes. Sea Ω_s una vecindad fibrada de $H(s)$, la correspondiente vecindad de órbitas ω_s de $h(s)$, intersecta a $w(I)$ en una vecindad N_s de $h(s)$ en $w(I)$. Si para cada s, las fibras $H(t)$ con $h(t) \in N_s$ son homólogas en Ω_s donde una fibra excepcional de orden μ cuenta μ veces, decimos que <u>las fibras están orientadas simultáneamente a lo largo de w</u>.

Si $w(I)$ está cubierta por una sola vecindad de órbitas, es claro que existe una orientación simultánea de las fibras a lo largo de w, porque solo necesitamos orientar todas las fibras que se proyectan en w de tal manera que sean homólogas en la vecindad fibrada correspondiente.

En el caso general, $w(I)$, por ser compacto, está cubierto por un número finito de vecindades de órbitas que descomponen a w en un número finito de segmentos, de tal manera que cada segmento está contenido en el interior de una vecindad de órbitas. Las fibras de los segmentos individuales se pueden se pueden orientar simultáneamente de tal manera que cada fibra en la intersección de dos segmentos obtenga la orientación igual de los dos segmentos. Por tanto las fibras se pueden orientar simultáneamente a lo largo de w.

Evidentemente las fibras se pueden orientar simultaneamente a lo largo de w solo de dos maneras: La orientación de las fibras a lo largo de w está determinada por la orientación de una sola fibra, por ejemplo, de la fibra inicial $H(0)$.

Bajo una orientación simultánea de las fibras de w, la orientación de la primera fibra se traslada a lo largo de w a la última fibra.

Si w y w' son curvas homotópicas de la superficie de órbitas que van ambas de h_1 a h_2 y si la fibra H_1 está orientada, entonces la traslación de la orientación a H_2 a lo largo de w y w' dá el mismo resultado, i.e., la orientación de la fibra se preserva a lo largo de la trayectoria cerrada $w(w')^{-1}$

En efecto, $w(w')^{-1}$ es la frontera de un disco con singularidades, es decir, la imágen de una 2-célula e (por ejemplo, la imagen de la homotopía que existe entre w y w'). Triangulamos a e de tal manera que la imagen de cada 2-simplejo esté contenida en una vecindad de órbitas.

Como la trayectoria $w(w')^{-1}$ se puede construir de trayectorias hechas de aristas de los 2-simplejos cancelando aristas que se recorren en direcciones opuestas y como la orientación de las fibras se preserva a lo largo de una trayectoria cerrada que esté contenida en una vecindad de órbitas, por tanto la orientación de las fibras se preserva a lo largo de $w(w')^{-1}$.

Si la orientación de las fibras se preserva a lo largo de w, asociamos a w el <u>valor +1</u>. En otro caso le asociamos a w el <u>valor −1</u>.

Como este valor es invariante bajo homotopías de w, a cada elemento de $\pi_1(f)$ le corresponde un único valor.

Al producto ab le corresponde el producto de los valores correspondientes a a y b y el inverso de a tiene el mismo valor que a para $a, b \in \pi_1(f)$.

Por tanto tenemos un homomorfismo $\begin{array}{l} \pi_1(f) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ a \longmapsto \text{valor}(a) \end{array}$ y como el valor de cada conmutador $aba^{-1}b^{-1}$ es $+1$ para $a, b \in \pi_1(f)$, tenemos un homomorfismo inducido $H_1(f) \to \mathbb{Z}_2$. Esto implica que el valor de una curva está determinado por su clase de homología. Por tanto los valores de todas las curvas están determinados si se conocen los valores de un sistema fundamental de curvas del grupo fundamental, o incluso del grupo de homología.

<u>Def</u>. Dos espacios fibrados F y F' <u>pertenecen a la misma clase</u> si existe un homeomorfismo de las superficies de órbitas f y f' tal que cada curva se mapea a otra con el mismo valor (i.e. si existe un homeomorfismo $h : f \to f'$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(f) \arrow[r, "\text{valor}"] \arrow[d, "h_*"'] & \mathbb{Z}_2 \\ \pi_1(f') \arrow[ur, "\text{valor}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta).

Por tanto la clase de un espacio fibrado está determinada por su "<u>superficie de</u>

<u>orbitas evaluada</u>".

Se tiene que dos espacios fibrados pertenecen a distintas clases si sus superficies de órbitas no son homeomorfas y que para una superficie simplemente conexa solo hay una clase porque cada curva sobre ella es nulhomotópica y por tanto tiene valor +1.

Si removemos una fibra del espacio fibrado y cerramos el hoyo producido con un nuevo toro sellador, la clase del espacio fibrado no cambia. Esto sucede porque la clase está determinada si conocemos el valor de una sola curva en cada clase de homología. Los representantes de las clases de homología se pueden elegir de tal manera que no sean afectados al perforar y sellar el espacio fibrado. Es decir, en este proceso de cambiar el espacio no se afecta a la evaluación de las curvas y tampoco se afecta a la superficie de orbitas

Si removemos todas las fibras excepcionales de un espacio fibrado F y sellamos los hoyos producidos con toros sólidos ordinarios, obtenemos de F (pero no de manera única) otro espacio fibrado F_0 sin fibras excepcionales y que pertenece a la misma clase que F.

Recíprocamente, podemos recuperar a F a partir de F_0.

Quisiéramos caracterizar a todos los espacios sin fibras excepcionales que pertenecen a la misma clase.

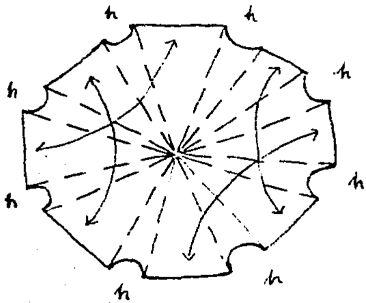
<u>Teorema 3</u> Cada clase de espacios fibrados cerrados determina (y esta determinada) por un único espacio fibrado con frontera: <u>el espacio clasificador $\bar{F}_0$</u>

El espacio clasificador es el único espacio fibrado con frontera y sin fibras excepcionales que tiene como superficie de órbitas a la superficie de órbitas agujerada que caracteriza a la clase. De $\bar{F}_0$ obtenemos todos los espacios de la clase removiendo r fibras ($r \in \mathbb{N}$) y sellando los r+1 toros frontera con toros selladores arbitrarios.

<u>Dem.</u>

Sea Fo un espacio fibrado cerrado sin fibras excepcionales y sea f la superficie de órbitas de Fo.

Cortemos a f en un polígono fundamental v. Cambiamos a v en un polígono $\bar{v}$ cortando sus vertices, lo que significa que cambiamos a la superficie f en una superficie agujerada $\bar{f}$, cortando un 2-disco que contiene un vertice h de v. Podemos pensar en $\bar{f}$ como en la superficie de órbitas de un espacio $\bar{F}o$ que se obtiene de Fo removiendo una fibra H. Entonces $\bar{F}o$ está determinado de manera única por Fo, porque por el lema 5, $\bar{F}o$ no depende de la elección de la fibra ordinaria removida.



Triangulamos $\bar{f}$ usando las aristas del polígono $\bar{v}$. Por el lema 3, las fibras de $\bar{F}o$ que se mapean a puntos de un 2-simplejo de la triangulación, constituyen un toro-sólido fibrado. Podemos construir al polígono $\bar{v}$ paso a paso de 2-simplejos, de tal manera que después de cada paso obtenemos un 2-disco. Esta construcción corresponde a una construcción de $\bar{F}_o$ a partir de toros sólidos fibrados ordinarios que nos da un toro sólido ordinario $\bar{V}$. Las aristas de $\bar{v}$ corresponden a anillos fibrados en la frontera de $\bar{V}$.

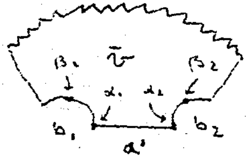
Si dos aristas a' y a'' en $\bar{v}$ se identifican con un arco a de $\bar{f}$, tenemos que identificar los anillos correspondientes A' y A'' en $\bar{V}$ con un anillo fibrado A de $\bar{F}_o$ bajo un homeomorfismo que preserva fibras.

Si identificamos de esta manera a todos los anillos correspondientes de $\bar{v}$, obtenemos a $\bar{F}_o$.

Si sabemos como se identifican dos aristas a' y a'' de $\bar{v}$ (bajo un mapeo que preserve o cambie la orientación) y si la orientación de las fibras se preserva o cambia a lo largo de una curva cerrada de $\bar{f}$ que intersecta a las aristas de $\bar{v}$ en un solo punto de la arista a, entonces los anillos A' y A'' se deben identificar bajo un homeomorfismo que preserve fibras que induzca en a' y a'' el homeomorfismo conocido y que invierta o preserve la orientación de las fibras inducida por una orientación simultánea de las fibras de $\bar{V}$ en A' y A''.

La identificación de los anillos A' y A'' está determinada de manera única salvo un homeomorfismo que preserva orientación y preserva fibras de uno de los anillos en sí mismo, digamos A'. Este mapeo de A' se puede extender a un mapeo que preserva fibras del toro sólido $\bar{V}$ que deja fijos a todos los otros anillos (que se corresponden en pares).

En efecto. Sean x_1 y x_2 los extremos de a'. Sea M un meridiano de $\bar{V}$ tal que $M \cap \overline{(\partial\bar{V} - A')} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$; sea $j_1 := \overline{M - A'}$; por tanto j_1 es un arco de x_1 a x_2 contenido en la cerradura del exterior de A' en $\partial\bar{V}$. Se tiene que $j_1 \cup a'$ es una curva simple cerrada en $\partial\bar{V}$ y $j_1 \cup a' \sim M + RH$ sobre $\partial\bar{V}$ para alguna fibra H.

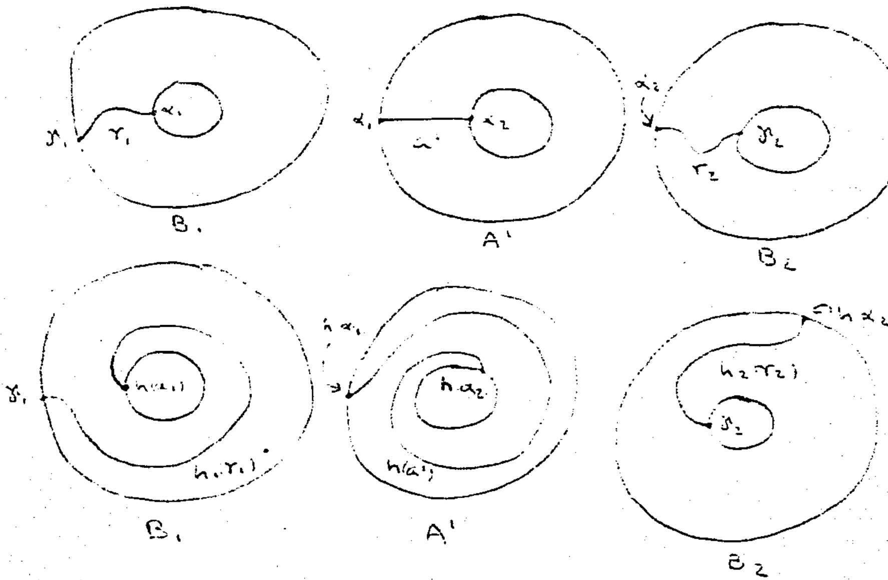


Sea b_1 el arco en $\bar{\tau}$ que es subconjunto de la frontera del disco retirado de $\bar{F}$ y que tiene a x_1 como extremo y sea b_2 el arco en $\bar{v}$ similar a b_1 que es adyacente a a' por x_2. Sea β_1 un punto interior de b_1 y β_2 un punto interior de b_2. Sean B_1 y B_2 los anillos en $\partial\bar{V}$ tales que su proyección en $\bar{v}$ son los arcos $\overline{\beta_1 x_1}$ y $\overline{\beta_2 x_2}$ respectivamente.

Por tanto $M \cap \partial B_1 = \{x_1, \gamma_1\}$ y $M \cap \partial B_2 = \{x_2, \gamma_2\}$ para puntos $\gamma_1 \in \partial B_1$ y $\gamma_2 \in \partial B_2$ (esto se puede suponer sin perder generalidad escogiendo a M adecuadamente); sea $j_2 := \overline{M - (B_1 \cup A' \cup B_2)}$.

Sea r_1 un arco contenido en B_1 de γ_1 a x_1 que intersecta a cada fibra en exactamente un punto y sea r_2 un arco contenido en B_2 de γ_2 a x_2 que intersecta a cada fibra en exactamente un punto tales que $j_2 \cup r_1 \cup a' \cup r_2 \sim M$ sobre $\partial\bar{V}$ (eligiendo orientaciones adecuadas de j_2, a', r_2 y r_1).

Sea h un homeomorfismo de A' que preserva orientacion y preserva fibras.



Elegimos $h_1 : B_1 \longrightarrow B_1$ y $h_2 : B_2 \longrightarrow B_2$ homeomorfismos que preservan fibras y preservan orientacion tales que h_i restringido a la componente de la frontera de B_i que se proyecta a B_i en $\bar{T}$ es la identidad, $h_i(\alpha_i) = h(\alpha_i)$, para $i=1,2$; y $j_2 \cup h_1(\gamma_1) \cup h(a') \cup h_2(\gamma_2) \sim M$ sobre $\partial \bar{V}$.

Luego podemos extender a $h : A' \longrightarrow A'$ a un homeomorfismo que preserva fibras $g : \partial\bar{V} \longrightarrow \partial\bar{V}$ definido como

$$g|_{A'} = h, \quad g|_{B_1} = h_1 \quad g|_{B_2} = h_2 \quad y$$

$$g|_{\overline{\partial\bar{V} - (B_1 \cup A' \cup B_2)}} = \text{identidad}.$$

Como g manda a la clase de homologia de M en si misma g se puede deformar a la identidad mediante una isotopia que preserva fibras, de acuerdo a la demostracion del lema 6, y se puede extender por tanto a un homeomorfismo $G : \bar{V} \longrightarrow \bar{V}$ que preserva fibras y deja fijos puntualmente a los anillos de $\partial\bar{V}$ que se proyectan en $\bar{T}$ a aristas distintas de a'.

Por tanto, el mapeo de A' en A' no afecta el cerrado de $\bar{V}$ en F_0. Luego todos los espacios fibrados con frontera obtenidos de esta manera se pueden mapear sobre $\bar{F}_0$ bajo un homeomorfismo que preserva fibras.

Esto muestra que todos los espacios fibrados F_0 sin fibras excepcionales que pertenecen a la misma clase dan el mismo espacio fibrado (con frontera) $\bar{F}_0$ despues de remover una fibra arbitraria. Si removemos $r+1$ fibras en vez de una, obtenemos otra vez el mismo espacio fibrado (que tiene $r+1$ toros como frontera) que es el espacio obtenido de $\bar{F}_0$ removiendo r fibras. ⊞

Empezamos con un espacio fibrado dado F y definimos su clase, i.e., su superficie de órbitas evaluada. Ahora empezaremos con una superficie cerrada evaluada arbitraria y mostraremos que es la superficie de órbitas evaluada de una clase.

<u>Teorema 4</u> Para una superficie cerrada evaluada arbitraria existe una clase correspondiente de espacios fibrados. Una evaluación de la superficie se obtiene de una evaluación arbitraria de un sistema ca-

nónico de curvas fundamentales, i.e., las aristas de un polígono fundamental de Poincaré de la superficie.

<u>Dem</u>.

Cortamos a la superficie dada f en el polígono fundamental v como antes y cortamos todos los vértices de v para obtener $\bar{v}$.

El toro sólido ordinario $\bar{V}$ que tiene a $\bar{v}$ como disco meridional se puede convertir en un espacio fibrado (con frontera) $\bar{F}_0$ identificando bajo un mapeo que preserva fibras a dos anillos A' y A'' sobre la frontera de $\bar{V}$ que se mapean a las aristas correspondientes a' y a'' de $\bar{v}$ de tal manera que una fibra de A' se identifica con una fibra de A'' si el punto correspondiente de a' se identifica con el punto correspondiente de a''.

Esencialmente hay dos mapeos distintos de A' en A'', porque si orientamos las fibras de $\bar{V}$ simultáneamente de tal manera que cualesquiera dos fibras orientadas sean homólogas, podemos mapear A' en A'' bajo un mapeo que preserve la orientación de las fibras y bajo otro que la cambie.

En el primer caso la orientación de una fibra de A' se preserva a lo largo de una curva que vaya de un punto de A' a través del interior de $\bar{V}$ a el punto equivalente de A''; en el segundo caso, se cambia.

Si identificamos de esta manera cualesquiera dos anillos de $\bar{V}$ que corresponden a aristas equivalentes de $\bar{\tau}$ bajo alguno de los dos mapeos, obtenemos un espacio con frontera Π_0 que consiste de fibras. Estas fibras de la frontera corresponden a la curva frontera de $\bar{\tau}$. Por tanto Π_0 es un toro o una botella de Klein.

Para mostrar que Π_0 es un toro observamos que, si recorremos la curva frontera de $\bar{f}$, cruzamos cada arista del polígono $\bar{\tau}$ exactamente dos veces. En ambos casos la orientación de las fibras o bien se preserva o bien se cambia, así que si recorremos una vez la curva frontera, la orientación de las fibras se preserva. Esto solo sucede si Π_0 es un toro. Porque si una curva en Π_0 invierte la orientación, entonces forzosamente invierte la orientación de las fibras, por tanto al proyectarla en la curva frontera de $\bar{\tau}$ invertiría la orientación de las fibras, lo que es imposible.

El espacio obtenido de $\bar{V}$ bajo las identificaciones es por tanto un espacio fibrado con frontera sin fibras excepcionales. Su superficie de órbitas es la superficie f agujerada cuya evaluación se obtiene de una evaluación arbitraria de las aristas de un polígono fundamental (del polígono fundamental dual a v).

Una evaluacion arbitraria de las curvas fundamentales, i.e., de los generadores del grupo fundamental, proporciona una evaluacion bien definida de todo el grupo fundamental; porque cada generador aparece exactamente dos veces en la única relación en la presentacion del grupo fundamental; y por tanto, una evaluación arbitraria de los generadores dá una evaluación bien definida de la única relación de definición del grupo fundamental y por tanto de cada relación entre los elementos del grupo fundamental.

Queremos resolver el problema de cuando y de cuantas maneras distintas la superficie de órbitas $\bar{f}_0$ se puede encajar en el espacio clasificador $\bar{F}_0$ en tal forma que cada fibra la intersecte en exactamente su punto imágen.

Cortamos a $\bar{f}_0$ en un polígono fundamental $\bar{\mu}$ que a diferencia del polígono $\bar{\tau}$ de antes, contiene al agujero de $\bar{f}_0$ en su interior i.e., $\bar{\mu}$ es un 2-disco agujerado. Esto corresponde a cortar $\bar{F}_0$ en un toro sólido ahuecado $\bar{U}$.

La superficie frontera "interior" Π_0 de $\bar{U}$ se mapea sobre la frontera del hoyo de $\bar{\mu}$, mientras que la frontera "exterior" Σ de $\bar{U}$ esta descompuesta en un número par $2j$ de anillos equivalentes a pares que se mapean sobre las aristas del polígono $\bar{\mu}$.

Supongamos que $\bar{f}_0$ está encajada en $\bar{F}_0$. Entonces $\bar{f}_0$ aparece en $\bar{U}$ como un anillo que intersecta a Σ necesariamente en una curva cruzada Q y a Π_0 en una cruzada Q_0

Si $Q_1', \dots, Q_j', Q_1'', \dots, Q_j''$ son las $2j$ aristas orientadas que confeccionan a Q y que corresponden a las $2j$ superficies laterales de Σ, entonces si dos superficies laterales (anillos) A_i', A_i'' se identifican, las dos aristas Q_i' y Q_i'' que contienen se tienen que identificar bajo un mapeo que preserva o que cambia la orientación.

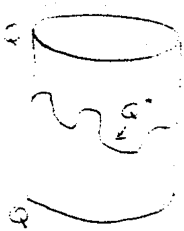
(Recíprocamente) una curva cruzada Q con esta propiedad se puede siempre encontrar sobre Σ escogiendo los segmentos de recta cruzados Q_1', $Q_2', \dots, Q_j'$ arbitrariamente, pero de tal manera que los extremos vayan al mismo punto bajo la identificación de las superficies laterales.

Entonces $\bar{f}_0$ se puede encajar en $\bar{F}_0$; por ejemplo, podemos cortar a $\bar{U}$ en un cilindro ahuecado (anillo x I) y trazar desde los puntos de Q radios que sean ortogonales al eje del cilindro. Estos radios en $\bar{U}$ confeccionan a la superficie de órbitas requerida.

Supongamos ahora que hemos encajado a $\bar{\mathfrak{F}}_0$ en $\bar{F}_0$ de dos maneras distintas, con curvas cruzadas Q^* y Q_0^* en vez de Q y Q_0. Los segmentos Q_i' y $Q_i'^*$ de Q y Q^* respectivamente que están en la misma cara lateral A_i de Σ tienen (después de elegir una orientación de Σ) un cierto número de intersección γ_i'; esto porque podemos suponer que Q_i' y $Q_i'^*$ no tienen extremos en común, lo que se puede lograr mediante una pequeña deformación de las superficies de órbitas encajadas.

Como bajo la identificación de las caras laterales correspondientes A_i y A_i', las rectas Q_i' y $Q_i'^*$ se identifican con las rectas Q_i'' y $Q_i''^*$ (respectivamente con $-Q_i''$ y $-Q_i''^*$), por tanto el número de intersección es $\gamma_i'' = \pm \gamma_i'$, luego $\gamma = \sum_{i=1}^{j} \gamma_i' + \gamma_i''$; el número de intersección de Q y Q^* es cero si todas las caras laterales de Σ están identificadas del primer modo, i.e., si $\bar{F}_0$ es orientable. En otro caso podemos elegir a Q^* tal que γ es un número par dado. Por tanto si $\overline{F}_0$ es orientable, Q se puede deformar sobre Q^* y por tanto Q_0 en Q_0^*.

En efecto. Si $Q \cap Q^* = \emptyset$ como Q y Q^* son curvas esenciales sobre Σ, se tiene que Q y Q^* bordean un anillo fibrado en Σ; porque al cortar Σ a lo largo de Q, obtenemos un anillo fibrado en el que Q^* continúa siendo una curva simple y esencial, por tanto Q^* separa a este anillo en dos anillos fibrados. Luego existe una deformación de Σ que manda a Q^* sobre Q (por ejemplo, tomando una traslación rígida de cada fibra sobre sí misma).



Podemos suponer por tanto que $Q \cap Q^* \neq \emptyset$. Considérese el cubriente universal

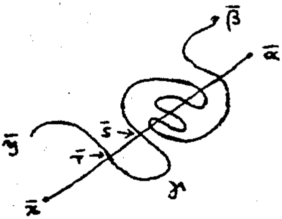
$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times S^1 \cong \Sigma$$
$$(x,y) \longmapsto (e^{ix}, e^{iy})$$

Como $Q \cap Q^* \neq \emptyset$, existen $x \in Q$, $y \in Q^*$; $x, y \notin Q \cap Q^*$ y un abierto U de Σ tales que $x, y \in U$ y

p restringido a una componente W de $p^{-1}(U)$ es homeomorfismo.

Sea $\bar{x} := p^{-1}(x) \cap W$ y $\bar{y} := p^{-1}(y) \cap W$

Eligiendo adecuadamente el homeomorfismo $S^1 \times S^1 \cong \Sigma$, podemos levantar a Q, mediante p, a un segmento de recta que comienza en $\bar{x}$ y termina en un punto $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^2$. Levantamos a Q^* a un arco ω que comienza en $\bar{y}$ y termina en un punto $\bar{\beta} \in \mathbb{R}^2$.



Por construcción, como Q y Q^* tienen número de intersección cero, por tanto el número de intersección del segmento $\bar{x}\bar{\alpha}$ y ω es cero.

Podemos, por tanto, encontrar un subarco γ de ω con extremos $\bar{r}$ y $\bar{s}$ que esté contenido en un lado de la recta que contiene a $\bar{x}\bar{\alpha}$ y tal que

$\gamma \cap \bar{x}\bar{\alpha} = \omega \cap \bar{r}\bar{s} = \{\bar{r}, \bar{s}\}$

Como $p(\gamma - \{\bar{r}, \bar{s}\}) \subset \Sigma - Q$ y $\Sigma - Q$ es "región fundamental", $\gamma \cup \bar{r}\bar{s}$ está contenido en el interior de una región fundamental R. Como $\gamma \cup \overline{FJ}$ es una curva simple cerrada en $\mathbb{R}^2$, por tanto es frontera de un disco en $\mathbb{R}^2$. Con técnicas similares a las de los lemas anteriores al lema 4, podemos mover al arco γ mediante este disco para deshacer la intersección de $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{w}$ en al menos los puntos F y J sin crear nuevas intersecciones, obteniendo una isotopía ambiental de $\mathbb{R}^2$ que deja fijo al exterior de un subconjunto compacto de $\text{int}(R)$. Como R es una región fundamental, esta isotopía se puede trasladar a Σ mediante p.

Luego hemos reducido en al menos dos puntos la intersección de Q y Q^*. Continuando de esta manera, podemos separar a Q y Q^* mediante una deformación de Σ y por tanto deformar a Q^* sobre Q.

Se sigue que si $\overline{F}_0$ es orientable, sobre la superficie frontera Π_0 de $\overline{F}_0$, existe una curva cruzada Q_0 que esta determinada salvo su orientación y deformaciones, tal que Q_0 es la intersección de Π_0 y la superficie de órbitas $\overline{f}_0$ encajada en $\overline{F}_0$.

Si $\overline{F}_0$ es no orientable, existen junto con Q_0 una cantidad infinita de curvas cruzadas Q_0^* que pueden ser la interseccion de $\overline{f}_0$ y Π_0. <u>Todas estas difieren de Q_0 por un múltiplo par de la fibra</u>

<u>Observacion</u>: Si cortamos el (toro fibrado) $X \times I \cong J$ a lo largo de la superficie de órbitas encajada $\overline{f}_0$, obtenemos un prisma fibrado agujerado en el cual las superficies fondo y tapa son equivalentes y las superficies laterales "exteriores" son equivalentes a pares.

6. Determinación de las Clases.

Sea F un espacio fibrado orientable. Supongamos que su superficie de orbitas f es orientable de genero p. Como F es orientable, la orientacion de las fibras se preserva a lo largo de cualquier curva de la superficie. En efecto, si w es una curva cerrada de valor −1 sobre f (que no pasa por puntos excepcionales), existe una deformacion que preserva fibras del espacio F, que traza a la fibra H a lo largo de la curva w. Esto sucede porque como w es compacto, se puede cubrir con un número finito de vecindades de órbitas sin puntos excepcionales. Sobre cada vecindad de órbitas se puede aplicar la deformación que preserva fibras de la demostracion del lema 5 y por tanto trasladar la fibra paso a paso a lo largo de w a su posición inicial. En particular se puede elegir la deformación de tal manera que una vecindad de órbitas ω del punto h, regrese a ella misma bajo la identidad, porque a lo largo de w la orientación de la superficie no cambia (porque f es orientable). El toro sólido Ω correspondiente se mapea sobre si mismo bajo un mapeo que invierte la orientación. Pero la orientación de un espacio orientable no se invierte bajo una deformación (un homeomorfismo isotópico a la identidad). Por tanto todas las curvas tienen valor +1 y para cada superficie de órbitas orientable, existe una única clase de espacios fibrados orientables.

El producto topológico de una superficie de genero p agujerada y S^1 es un espacio fibrado orientable cuya superficie de órbitas es la superficie de genero p agujerada y todas sus curvas tienen valor +1. Como este espacio no tiene fibras excepcionales, es el espacio clasificador $\overline{F}_o$.

<u>Incluso si la superficie de órbitas f es no orientable, solo hay una única clase correspondiente de espacios orientables.</u>

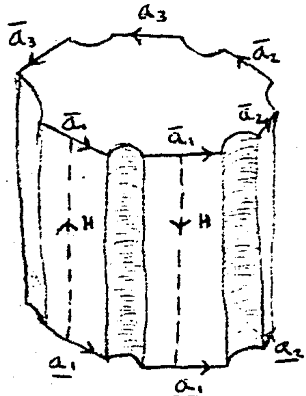
Como en el caso anterior observamos que la orientación de las fibras se preserva a lo largo de una curva sobre la superficie de órbitas que preserve orientación.

Pero si w es una curva de la superficie de órbitas que invierte la orientación, entonces el espacio es orientable solo si la orientación de las fibras se invierte a lo largo de w.

En efecto, supongamos que la orientación de las fibras se preserva a lo largo de w. Tomemos una deformación del espacio que preserva fibras que traza a la fibra H a lo largo de la curva w como en el caso anterior. Como se preserva la orientación de H, podemos elegir la deformación de tal manera que una vecindad fibrada Ω de H regrese a ella misma bajo la identidad. Esto quiere decir que la correspondiente vecindad de órbitas ω del punto h regresa a ella misma bajo la identidad al recorrer una vez a w; por tanto w debe preservar la orientación sobre f, lo que es imposible.

Por tanto la evaluación está determinada por la superficie de órbitas.

El espacio clasificador no es en este caso el producto topológico de la superficie de genero k agujerada y S^1, sino que se tiene que construir con el método del teorema 4.



En la figura se muestra el caso $k=3$. En el prisma tenemos que identificar los discos tapa y fondo bajo la identidad. Las dos superficies laterales en las que se ha dibujado la fibra H se deben identificar de tal manera que la arista $\underline{a}_1$ de una superficie se identifique con la arista de la otra superficie (pensando cada superficie como $I \times I$, hay que identificarlas bajo una rotacion de 180° c.r. a el centro del cuadrado, seguido de una reflexión c.r. a la fibra H). De manera similar hay que identificar las otras cuatro superficies laterales sin sombrear. Los seis lados sombreados se convierten en el toro frontera del espacio clasificador y la superficie tapa se convierte en la superficie de órbitas.

Sea F un espacio fibrado no orientable. Supongamos que su superficie de órbitas f es orientable. Entonces el genero de f es mayor que cero, porque de otra manera F sería orientable.

<u>Para cada superficie de órbitas orientable de género mayor que cero existe exactamente una clase de espacios no orientables.</u>

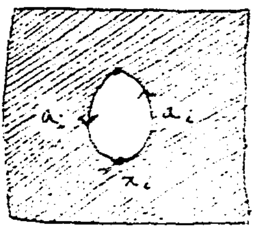
La afirmación es cierta para $p=1$ ($p :=$ genero de f), porque si a y b son curvas simples cuyas clases generan a $\pi_1(f)$, entonces a, digamos, tiene valor -1. Podemos suponer entonces que b tiene valor -1; si no es el caso, reemplazamos a b por ab.

Supongamos que la afirmación es cierta para $p-1$. Probaremos que en una superficie de género $p>1$, existe una asa en la cual todas las curvas tienen valor $+1$. Elijamos un sistema fundamental de curvas de la superficie $a_1, b_1, \ldots, a_p, b_p$. Si hay un par a_i, b_i con valor $+1$, la afirmación es cierta. Si a_1, por ejemplo, tiene valor -1, entonces podemos suponer que b_1 tiene valor $+1$ (si no, reemplazamos a b_1 por $a_1 \cdot b_1$). Existe una curva a_j o b_j ($j>1$) de valor -1. Por tanto una de las curvas $a_1 a_j$ o $a_1 b_j^{-1}$ tiene valor $+1$ y junto con b_1 genera una asa donde cada curva tiene valor $+1$.

Recortando esta asa obtenemos una superficie agujerada de genero $p-1$, que tiene algunas curvas con valor -1, y donde, por hipótesis de inducción, la afirmación es cierta. Por tanto la afirmacion es cierta para f.

Como la clase es única, podemos elegir (sobre una superficie de genero $p \geq 1$) un sistema canónico tal que todas sus curvas tengan valor -1.

Supongamos que la superficie de órbitas f es no orientable de género k. Representamos a f como una esfera con k gorros cruzados $x_1,\dots,x_k$.



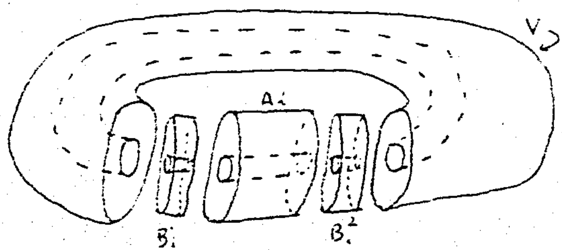
Sea a_i una curva simple cerrada que intersecta al gorro x_i en exactamente un punto (a_i invierte orientación por tanto). Entonces $H_1(f) = |a_1,\dots,a_k : 2a_1+\cdots+2a_k=0|$

Por tanto la evaluación de f está determinada por la evaluación de $a_1, a_2,\dots,a_k$. Si todas las a_i tienen valor -1, entonces F es orientable.

En efecto. Elegimos para cada i una curva cerrada simple a'_i sobre f homóloga a a_i, de tal manera que $\bigcap_{j=1}^{i} a'_i$ = un punto. Entonces, recortando a f a lo largo de las a'_i, obtenemos un polígono v con frontera $a'_1 a'_1 a'_2 a'_2 \cdots a'_k a'_k$. Recortamos los vértices de v y obtenemos el polígono $\bar{v}$, lo que significa que recortamos un disco pequeño de f que contiene al punto de intersección de las $\bar{a}_i$ en su interior.

Sea $\bar{V}$ el prisma $\bar{D} \times I$. Identificando los discos tapa y fondo del prisma $\bar{V}$ bajo la identidad obtenemos un toro sólido V. En V hay que identificar las superficies laterales que contienen a las aristas $\bar{a}_i = a_i \times \{0\}$ y $\underline{a}_i = a_i \times \{1\}$, que se han convertido en anillos después de la identificación de las tapas, para obtener el espacio F_0 cuya frontera es un toro bidimensional.

Podemos descomponer a F_0 en el toro sólido V y n toros sólidos A_i, donde A_i contiene el anillo en el que se han identificado las superficies laterales que contienen a las aristas $\bar{a}_i$ y $\underline{a}_i$ (i.e. A_i es el anillo "engordado un poco"). De tal manera que $A_i \cap V =$ = unión ajena de dos toros sólidos $= B_i^1 \cup B_i^2$.



Sea V_i el espacio que se obtiene de identificar en V a los anillos que contienen a las aristas $\bar{a}_j$ y $\underline{a_j}$, para $j=1,\dots,i$. Luego, V_{i+1} se obtiene de V_i identificando los anillos que contienen a las aristas $\bar{a}_{i+1}$ y $\underline{a_{i+1}}$ y en particular $V_R = \bar{\bar{F}}_0$

Sean $i: V\cap A_1 \longrightarrow V$ y $j: V\cap A_1 \longrightarrow A_1$ las inclusiones. Como $V \cong A_1 \cong D^2\times S^1 \simeq S^1$, por tanto $H_1(V)\cong H_1(A_1)\cong \mathbb{Z}$; similarmente $H_1(V\cap A_1)\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

Como a_i tiene valor -1, la identificación de V en V_1 es tal que:

$$(\text{inclusión})_*: H_1(B_1^1) \longrightarrow H_1(A_1)$$
$$1 \longmapsto 1$$

$$(\text{inclusión})_*: H_1(B_1^2) \longrightarrow H_1(A_1)$$
$$1 \longmapsto -1$$

$$(\text{inclusión})_*: H_1(B_1^1) \longrightarrow H_1(V)$$
$$1 \longmapsto 1$$

$$(\text{inclusión})_*: H_1(B_1^2) \longrightarrow H_1(V)$$
$$1 \longmapsto 1$$

Por tanto

$$(i_*, j_*): H_1(V\cap A_1) \longrightarrow H_1(V)\oplus H_1(A_1)$$
$$(1,0) \longmapsto (1,1)$$
$$(0,1) \longmapsto (1,-1)$$

es monomorfismo.

Como se tiene la siguiente sucesion exacta (sucesión de Mayer-Victoris)

$$H_2(V)\oplus H_2(A_1)\longrightarrow H_2(V_1)\longrightarrow H_1(V\cap A_1)\overset{(i_*,j_*)}{\rightarrowtail} H_1(V)\oplus H_1(A_1)$$

y como $H_2(V)\cong H_2(A_1)\cong 0$ porque $V\cong A_1\simeq S^1$, por tanto la siguiente sucesión es exacta:

$$0\longrightarrow H_2(V_1)\to 0$$

Ahora, si $j: V_i\cap A_{i+1}\hookrightarrow A_{i+1}$ e $i: V_i\cap A_{i+1}\hookrightarrow V_i$ son las inclusiones, por argumentos similares se tiene que: $(i_*,j_*): H_1(V_i\cap A_{i+1})\longrightarrow H_1(V_i)\oplus H_1(A_{i+1})$

es monomorfismo, para cada i.

Como se tiene también la sucesión exacta:

$$H_2(V_i)\oplus H_2(A_{i+1})\longrightarrow H_2(V_{i+1})\longrightarrow H_1(V_i\cap A_{i+1})\overset{(i_*,j_*)}{\rightarrowtail}$$
$$\overset{(i_*,j_*)}{\rightarrowtail} H_1(V_i)\oplus H_1(A_{i+1})$$

para cada i, por un argumento de inducción, se tiene que

$$H_2(V_i)=0 \quad \text{para } i=1,\dots,k.$$

En particular $H_2(\bar{F}_0)=0$.

El espacio F se obtiene de $\bar{F}_0$ pegando un toro sólido W por la frontera, en la frontera de $\bar{F}_0$; "engordando un poco" a W, tenemos la sucesión exacta (suc. de Mayer-Vietoris):

$$H_3(\bar{F}_0)\oplus H_3(W)\longrightarrow H_3(F)\longrightarrow H_2(\bar{F}_0\cap W)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_2(\bar{F}_0)\oplus H_2(W)$$

Como $\bar{F}_0$ es 3-variedad con frontera, por tanto $H_3(\bar{F}_0)=0$; como $\bar{F}_0\cap W\simeq S^1\times S^1$, por tanto $H_2(\bar{F}_0\cap W)\cong\mathbb{Z}$; como $W\simeq S^1$, por tanto $H_2(W)=0$; y como $H_2(\bar{F}_0)=0$, por tanto se tiene la sucesión exacta:

$$0\longrightarrow H_3(F)\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

por tanto $H_3(F)\cong\mathbb{Z}$ y por tanto F es orientable (porque F es una 3-variedad cerrada).

Por tanto al menos una a_i tiene valor $+1$

Tenemos los siguientes casos.

Caso (a): a_i tiene valor $+1$ para cada i.
Entonces $F \equiv f \times S^1$ y $F_0 \equiv (f$ agujereada$) \times S^1$

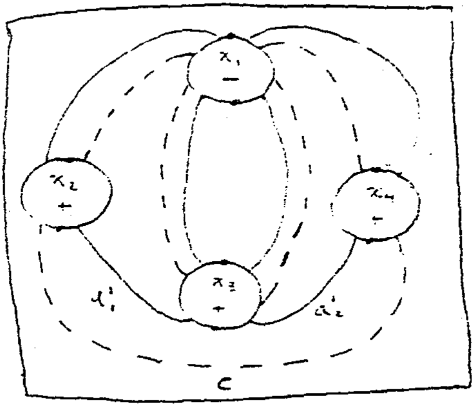
Caso (b) k_1 curvas tienen valor $+1$ y $k_2 = k - k_1$ tienen valor -1 ($k_1 > 0$ y $k_2 > 0$).

Supongamos que $f \neq D^2$ ($k=1$) y $f \neq$ botella de Klein ($k=2$).

Podemos suponer que $k_1 \in \{1,2\}$. Esto es claro para $k=3$. Supongamos que $k > 3$ y que $k_1 \notin \{1,2\}$; existen al menos tres curvas a_i, digamos a_2, a_3 y a_4, de valor $+1$ y una, digamos a_1, de valor -1.

Sea l una curva cerrada y simple que separa a los gorros cruzados x_1, x_2, x_3 y x_4 de los otros. l separa a f en f_1 y f_2, donde f_1 es una esfera con los gorros cruzados x_1, x_2, x_3 y x_4 y una frontera: C.

Sobre f_1 hay dos curvas simples cerradas y ajenas, $a_1' \sim a_1 + a_2 + a_3$ y $a_2' \sim a_1 + a_3 + a_4$ de valor -1.



Existe una curva cerrada simple c que invierte la orientación y que es ajena a $a_1' \cup a_2'$, de tal manera que la superficie $\bar{\Psi}$ obtenida de Ψ recortando a lo largo de a_1' y a_2' resulta ser no orientable. Podemos representar a $\bar{\Psi}$ como una esfera con dos gorros cruzados y tres curvas frontera: $\hat{c}$, $a_1'^2$ y $a_2'^2$. Ψ se obtiene de $\bar{\Psi}$ identificando puntos diametralmente opuestos de $a_1'^2$ y $a_2'^2$. Pegando nuevamente a Ψ por $\hat{c}$, obtenemos una nueva representación de $\bar{\Psi}$ como una esfera con k gorros cruzados. Como a_1' y a_2' tienen ahora valor -1 el número de gorros cruzados se ha incrementado en al menos 1. Continuando de esta manera, obtenemos $k_1 = 1$ o $k_1 = 2$.

Mostraremos ahora que las dos últimas evaluaciones son distintas.

Sea d una curva simple cerrada sobre f tal que

$$d \sim \sum \gamma_i a_i \not\sim 0 \quad y \quad 2d \sim \sum 2\gamma_i a_i \sim 0 \qquad (1)$$

Por ejemplo d se puede elegir como una curva simple cerrada que intersecta cada gorro cruzado exactamente una vez. En este caso cortando a f a lo largo de d obtenemos una superficie orientable con uno o dos agujeros, dependiendo de si R es impar o par. d se llama una curva cerrada simple productora de orientación. Como $2d \sim 0$ es una consecuencia de $2a_1 + \dots + 2a_k \sim 0$ por tanto $\sum 2\gamma_i a_i$ difiere de $\sum 2a_i$ solo en un factor y por tanto todos los γ_i son el mismo número impar, porque de otra manera $d \sim 0$. Por tanto d tiene valor $(-1)^{R_2}$.

Por tanto la evaluación de f con R_2 par es distinta de la evaluación con R_2 impar; en particular las evaluaciones con $k_1=1$ y $k_1=2$ generan evaluaciones distintas de f.

La investigación de todas las clases de espacios fibrados está completa.

<u>Teorema</u> Para cada superficie de órbitas orientable f de género p existe una única clase de espacios fibrados orientables y si $p>0$, exactamente una clase de espacios no orientables.

Para cada superficie de órbitas f no orientable de género k existe una única clase de espacios fibrados orientables y si $k>2$ existen exactamente tres clases de espacios fibrados no orientables; para $k=1$ existe una única clase; para $k=2$ existen dos clases.

La tabla siguiente enlista las distintas clases. O y N se refieren a la orientabilidad o no orientabilidad de F; o y n a la superficie de órbitas, cuyo genero se debe dar para que la clase esté determinada. Nótese que la clase y por tanto el espacio clasificador $\bar{F}_0$ está determinado de manera unica por la evaluacion de las curvas de $\bar{F}$.

Oo	Todas las curvas tienen valor +1; $\bar{F}_0 \cong$ ($\bar{F}$ agujerada) $\times S^1$
On	todas las curvas de un solo lado tienen valor −1
No	Hay curvas de valor −1
Nn I	Todas las curvas tienen valor +1; $\bar{F}_0 \cong$ ($\bar{F}$ agujerada) $\times S^1$
Nn II	Hay curvas de un solo lado de valor −1 y de valor +1; cada curva simple cerrada productora de orientación tiene valor −1
Nn III	Hay curvas de un solo lado de valor −1 y de valor +1; cada curva simple cerrada productora de orientacion tiene valor +1

Para $p=0$ solo hay la clase C_0; para $R=1$ solo C_n y $N_n I$; para $R=2$ solo C_n, $N_n I$ y $N_n II$. F_2 se puede construir con los metodos del teorema 4.

7. Los Espacios Fibrados Orientables.

Procederemos a determinar los invariantes del espacio fibrado orientable F.
Orientamos el espacio y <u>los invariantes dependerán de la orientación elegida.</u>
Obtendremos estos invariantes removiendo las fibras excepcionales de F y reemplazándolas por toros sólidos ordinarios cuyos meridianos están determinados de manera única por el espacio fibrado F y por su orientación.

De esta manera obtendremos del espacio <u>orientado</u> F un único espacio orientado F_0 sin fibras excepcionales.

Sea C_1 una fibra excepcional de F y Ω_1 una vecindad fibrada de C_1.
El toro sólido Ω_1 obtiene una cierta orientación de F que induce una cierta orientación o sobre el toro frontera Π_1 de Ω_1.
Sobre Π_1 elegimos una curva cruzada orientada Q y una fibra orientada H.

Estas dos curvas determinan una orientacion o' sobre Π_1: cortando a Π_1 a lo largo de Q y H en un rectángulo, se determina una cierta orientación de este por la sucesion $QHQ^{-1}H^{-1}$. Invirtiendo la orientacion de una de las curvas Q y H, invertimos la orientación o'. Pero o' no cambia invirtiendo la orientacion de ambas curvas simultáneamente. Orientamos Q y H de tal manera que o' coincida con o. Esto se puede expresar diciendo que al considerar la orientacion o, las curvas Q y H deben tener numero de interseccion $+1$.

Otro par de curvas Q_1 y H_1 que determinan la misma orientación $o = o'$ sobre Π_1 está relacionado con Q y H (sobre Π_1) como sigue:

$$H \sim \varepsilon H_1 \; ; \quad Q \sim \varepsilon Q_1 + y H_1 \quad (\varepsilon = \pm 1, \, y \in \mathbb{Z}) \qquad (1)$$

Porque si Q_1 y H_1 determinan la misma orientación que Q y H, el determinante de la transformación debe tener valor $+1$. Por las fórmulas de transformación (1) a (4) de §1, $H \sim \varepsilon_1 H_1$, $Q \sim \varepsilon_4 Q_1 + y H_1$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$, luego $\det \begin{pmatrix} \varepsilon_4 & 0 \\ y & \varepsilon_1 \end{pmatrix} = \varepsilon_4 \varepsilon_1 = +1$, por tanto $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 \ (= \varepsilon)$.

La curva meridiano M_1 del toro sólido Ω_1 se puede expresar en términos de Q y H como

$$M_1 \sim \alpha Q + \beta H \sim$$
$$\sim \varepsilon \alpha Q_1 + (\alpha y + \varepsilon \beta) H_1 = \alpha_1 Q_1 + \beta_1 H_1 . \quad (2)$$

<u>Podemos elegir</u> a Q_1 y H_1 tales que

$$\alpha_1 > 1 \quad y \quad 0 < \beta_1 < \alpha_1 \qquad (3)$$

lo que determina a ε y a y.

Si en vez de M_1 elegimos a la curva meridiano con orientación opuesta, solo tenemos que invertir las orientaciones de Q_1 y H_1 para obtener las misma relación de homología $M_1 \sim \alpha_1 Q_1 + \beta_1 H_1$ (es decir, los números α_1, β_1 son los mismos para M_1 y para $-M_1$).

Por tanto los números α_1 y β_1 están determinados de manera única por el meridiano no orientado de Ω_1, y la curva cruzada Q_1 está determinada salvo por su orientación

Removemos ahora a Ω_1 y sellamos el espacio con un nuevo toro sellador V_1 que tiene a Q_1 como su meridiano.

Por tanto obtuvimos un espacio fibrado orientable F_1, a partir de F, que está determinado de manera única, la orientación de F y la fibra excepcional removida, porque F_1 es independiente de cual vecindad fibrada Ω_1 de C_1 se remueva, ya que por el lema 4, podemos deformar una vecindad fibrada arbitraria de C_1 sobre cualquier otra bajo una deformación que preserva fibras de F.

Aplicamos esta construcción a F_1, i.e., removemos una fibra excepcional C_2 y obtenemos el par α_2, β_2 como invariantes adicionales del espacio orientado F. Continuando este proceso obtenemos finalmente un espacio orientado F_0 sin fibras excepcionales que está determinado por F y por su orientación.

F_0 es independiente del orden en el que removimos las fibras excepcionales de F porque podemos remover todas al mismo tiempo eligiendo vecindades fibradas suficientemente pequeñas.

De F_0 removemos una vecindad fibrada V_0 arbitraria y obtenemos el espacio clasificador $\bar{F}_0$ de

F. Como $\bar{F}_0$ es orientable, existe una curva cruzada Q_0 sobre el toro frontera Π_0 de $\bar{F}_0$, que está determinada, salvo su orientación y deformaciones, como la frontera de la superficie de órbitas $\bar{\bar{F}}_0$ de $\bar{F}_0$ encajada en $\bar{F}_0$. Orientamos Q_0 y una fibra H_0 de Π_0 de tal manera que induzcan sobre Π_0 la misma orientación que la inducida por V_0. La curva meridiano M_0 de V_0, que es una curva cruzada, tiene en el sistema Q_0, H_0, la forma

$$M_0 \sim Q_0 + b H_0 \,. \quad (4)$$

El entero b está determinado por el espacio orientado F_0, por tanto por F y su orientación

Esto nos da un sistema completo de invariantes de F por el siguiente:

<u>Teorema 3</u> Un espacio fibrado orientable F junto con su orientación está determinado por una correspondencia uno a uno por un sistema de invariantes

$$(O,o;\ p \mid b;\ \alpha_1,\beta_1;\ \alpha_2,\beta_2;\ \dots;\ \alpha_r,\beta_r)$$
$$(O,n;\ k \mid b;\ \alpha_1,\beta_1;\ \alpha_2,\beta_2;\ \dots;\ \alpha_r,\beta_r)$$

O significa que F es orientable; o (n) significa que la superficie de órbitas es orientable (no orientable). p y k son el género (número de asas o de gorros cruzados) de la superficie de órbitas orientable (respectivamente no orientable). Los tres símbolos de la izquierda determinan por tanto la clase de F. El número b determina de manera única la construcción del espacio Fo a partir del espacio clasificador $\overline{Fo}$. Los números α_i, β_i determinan de manera única (uno a uno) las fibras excepcionales en F.

Vimos como encontrar un sistema de invariantes para un espacio <u>orientado</u> F dado. Para mostrar que este sistema es completo, construiremos para un sistema dado de invariantes un único espacio orientado F.

Los numeros p (respec. k) determinan la clase y por tanto, por el teorema 3, al espacio clasificador $\overline{F}_0$.

Podemos orientar a $\overline{F}_0$ arbitrariamente, porque existe un homeomorfismo que preserva fibras y que invierte la orientacion de $\overline{F}_0$ en si mismo (reflexión del toro sólido $\overline{V}$ del teorema 3 c.r. a un disco meridional, por ejemplo).

Esto determina a la curva cruzada Q_0 del toro Π_0, frontera de $\overline{F}_0$ y a una fibra. H_0 salvo inversion simultánea de su orientación.

b determina a $M_0 \sim Q_0 + bH_0$ salvo orientación y por tanto el cerrado de $\bar{F}_0$ a F_0.

De F_0 debemos remover r fibras arbitrarias; el espacio resultante que tiene como frontera a r toros es independiente de la elección de las fibras removidas por el lema 5.

Sobre cada uno de los toros frontera hay una curva cruzada distinguida Q_i (determinada salvo su orientación), a saber, el meridiano del toro sólido removido; y la orientación de F_0 determina por tanto un par de curvas Q_i y H_i salvo inversión simultánea de su orientación. Esto determina de manera al meridiano $M_i \sim \alpha_i Q_i + \beta_i H_i$ del nuevo toro sellador (salvo su orientación) y por tanto de manera única el cerrado de F_0 a F. ∎

El teorema nos dice cuando dos espacios fibrados orientables con orientación dada son homeomorfos bajo un homeomorfismo que preserva fibras y orientación.

Describimos ahora para un espacio fibrado orientado un "<u>diagrama</u>" útil $\overline{V}_0$ que junto con $\overline{F}_0$ determina al espacio.

Elegimos en F vecindades fibradas de las fibras excepcionales Ω_i ajenas. Entonces los toros selladores V_i que reemplazan a los toros removidos en F_0 son ajenos. Podemos elegir a la vecindad fibrada V_0 que removimos de F_0 para obtener al espacio clasificador $\overline{F}_0$ de tal manera que contenga a todos los toros selladores V_i en su interior debido al lema 3.

El espacio fibrado con frontera $\overline{V}_0$ que se obtiene de V_0 después de remover a los V_i's, que es el protopológico de S^1 y un disco con r agujeros, es el <u>diagrama</u> del espacio fibrado F si la curva cruzada Q_0 de $\overline{F}_0$ se traza sobre el toro frontera Π_0 de $\overline{V}_0$ y las curvas meridionales M_i de los toros removidos Ω_i se trazan sobre los r toros frontera restantes Π_i.

Obviamente Q_0 determina como se debe pegar sobre el espacio clasificador $\overline{F}_0$ (que está determinado por p (respec. $\mathbb{R}$)) al toro frontera Π_0.

Por el lema 6, M_i determina el sellado del toro removido Ω_i. Además, si orientamos a $\overline{V}_0$, obtenemos una orientación de F

Para obtener a los invariantes $b; \alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_r, \beta_r$ de F a partir del diagrama $\overline{V}_0$, orientamos las fibras de $\overline{V}_0$ simultáneamente, i.e., de tal manera que sean homólogas en $\overline{V}_0$. Entonces la orientación de las fibras

$H_0, H_1, \ldots, H_r$ sobre los toros frontera $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_r$ está determinada. Por tanto las curvas cruzadas $Q_1, \ldots, Q_r$ sobre los toros frontera estan determinadas junto con su orientación, requiriendo que la orientación sobre Π_i inducida por Q_i y H_i sea la opuesta a la orientación inducida por $\bar{V}_0$ y requiriendo que los números α_i, β_i en

$$M_i \sim \alpha_i Q_i + \beta_i H_i \text{ (sobre } \Pi_i) \qquad (5)$$

satisfagan que $\alpha_i > 1$ y $0 < \beta_i < \alpha_i$.

Los Q_i son meridianos de los toros selladores V_i. Cerrando $\bar{V}_0$ con los V_i's, obtenemos un toro sólido ordinario V_0 con el meridiano

$$M_0 \sim Q_0 + b H_0 \text{ (sobre } \Pi_0) . \qquad (6)$$

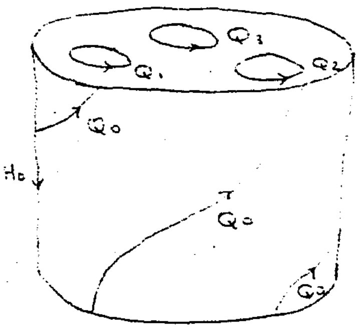
Y se tiene que

$$M_0 \sim Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_r \text{ (en } \bar{V}_0)$$

porque, por ejemplo, $M_0, Q_1, \ldots, Q_r$ bordean al disco con r agujeros "meridional" de $\overline{V}_0$.

Y por tanto

$$-Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_r \sim b H_0 \quad (\text{en } \overline{V}_0) \qquad (7)$$



La figura muestra a $\overline{V}_0$ en el caso $r = 3$, $b = 4$.

Queremos ahora averiguar como cambian los invariantes si se invierte la orientación de F.

<u>Teorema 6</u> El espacio fibrado orientado F con invariantes

$$(O, o; p \mid b; \alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_r, \beta_r)$$

$$[\text{respec. } (O, n; k \mid b; \alpha_1, \beta_1; \cdots; \alpha_r, \beta_r)]$$

tiene, después de invertir su orientación, los invariantes

$$(0,o;\rho\,|\,-r-b;\alpha_1,\alpha_1-\beta_1;\dots;\alpha_r,\alpha_r-\beta_r)$$

[respec. $(O,n;k\,|\,-r-b;\alpha_1,\alpha_1-\beta_1;\dots;\alpha_r,\alpha_r-\beta_r)$].

<u>Dem</u>. Invertir la orientación de F, corresponde a invertir la orientación de $\bar{V}_0$ pero dejando fija la orientación de las curvas M_i y Q_0. Es útil invertir las orientaciones de las fibras de $\bar{V}_0$ simultáneamente; sean $H_0', H_1', \dots, H_r'$ las fibras $H_0, H_1, \dots, H_r$ con orientación opuesta:

$$H_i' \sim -H_i \quad (\text{sobre } \Pi_i,\ i=0,1,\dots,r) \qquad (8)$$

Debemos reemplazar a $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ por las curvas cruzadas $Q_1', Q_2', \dots, Q_r'$. Entonces

$$Q_i' \sim Q_i + y_i H_i \quad (\text{sobre } \Pi_i,\ i=1,2,\dots,r) \qquad (9)$$

El coeficiente de Q_i es $+1$ porque el determinante de la transformación de la pareja (8) y (9) tiene valor -1, así que la orientación de $\bar{V}_0$ se invierte y por tanto la orientación de Π_i también.

Por la misma razon

$$Q_0' \sim Q_0 \quad (\text{sobre } \Pi_0) \qquad (10)$$

Entonces tenemos para el meridiano M_i

$$\begin{aligned} M_i &\sim \alpha_i Q_i + \beta_i H_i \sim \\ &\sim \alpha_i Q_i' + (\alpha_i y_i - \beta_i) H_i' = \\ &= \alpha_i' Q_i' + \beta_i' H_i' \end{aligned}$$

La condición $\alpha_i' > 1$ y $0 < \beta_i' < \alpha_i'$ nos dá $\alpha_i' = \alpha_i$ y $\beta_i' = \alpha_i - \beta_i$, i.e., $y_i = 1$.

b' esta determinado (como b de (7)) por

$$-Q_0' + Q_1' + \cdots + Q_r' \sim b' H_0' \qquad (11)$$

Usando (7)-(10) obtenemos $b' = -r - b$.

8. Los Espacios Fibrados no Orientables

Caracterizaremos los espacios fibrados no orientables mediante invariantes que dependen exclusivamente del espacio (porque no hay orientación posible).

Sea F un espacio fibrado no orientable. Sea C_1 una fibra excepcional en F, Ω una vecindad fibrada de C_1, Π_1 la frontera de Ω_1, M_1 un meridiano sobre Π_1, Q una curva cruzada y H una fibra sobre Π_1, entonces

$$M_1 \sim \alpha Q + \beta H \text{ (sobre } \Pi_1) \qquad (1)$$

Usando las formulas (1)-(4) de §1,

$$H \sim \varepsilon_1 H_1 \, , \quad Q \sim \varepsilon_4 Q_1 + y H_1 \qquad (2)$$

podemos elegir una nueva curva cruzada Q_1 y una fibra H_1 sobre Π_1 tales que

$$M_1 \sim \alpha_1 Q_1 + \beta_1 H_1 \qquad (3)$$

con $\alpha_1 > 1$, $0 < \beta_1 \leq \frac{1}{2} \alpha_1$.

Porque la primera condición determina a ε_4. Eligiendo a y adecuadamente reducimos a β_1 al intervalo $[-\frac{1}{2}\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_1]$ y, finalmente, elegimos a ε_1. Como no hay orientación sobre Π_1 determinada por F (porque F es no orientable),

ε_1 y ε_4 se pueden elegir independientemente (compárese con el caso orientable). Se tiene que α_1 y β_1 están determinados de manera única por Ω_1 y portanto por C_1.

Argumentando de manera similar a la demostración del lema 6, tenemos que, si $\alpha_1 > 2$, Q_1 y H_1 están determinados de manera única por Ω_1 salvo cambio simultáneo de su orientación, lo que está permitido porque la orientación de M_1 no está dada por Ω_1.

Pero para $\alpha_1 = 2$, junto con Q_1 y H_1, existe otro sistema

$$Q_1' \sim Q_1 + H_1, \quad H_1' \sim -H_1 \qquad (4)$$

en el que M_1 también aparece en la forma normalizada (3):

$$M_1 \sim 2Q' + H_1' \qquad (5)$$

Si $\alpha_1 > 2$, removemos Ω_1 y lo reemplazamos por un toro solido ordinario V_1 que tiene a Q_1 como su meridiano y hacemos lo mismo con todas las fibras de multiplicidad mayor que 2.

Esto determina de manera única a un espacio fibrado no orientable F_s que tiene solo s fibras excepcionales de multiplicidad 2 ($s \geq 0$). Para investigar a F_s necesitamos el:

<u>Lema 7</u> Un espacio fibrado no orientable $\bar{F}$ con frontera que se obtiene de un espacio fibrado (cerrado) removiendo un número finito de fibras excepcionales admite un

autohomeomorfismo que preserva fibras y que deja fijos puntualmente a los toros frontera, excepto por uno $\overline{\Pi}$. Sobre $\overline{\Pi}$ una curva cruzada dada Q se mapea a una curva cruzada de la forma

$$Q' \sim (Q + 2zH) \quad o \quad Q' \sim -(Q + 2zH) \qquad (6)$$

donde z es un entero arbitrario y H es una fibra sobre $\overline{\Pi}$. Además, se puede elegir el homeomorfismo de tal manera que preserve o que invierta la orientación sobre $\overline{\Pi}$

<u>Observación</u>: El teorema no afirma que se puede escoger el signo en (6) arbitrariamente.

<u>Dem</u>. (a) Supongamos que $z=0$. Para encontrar un homeomorfismo que invierta la orientación, pegamos sobre $\overline{\Pi}$ un toro sólido ordinario V que tiene a Q como su meridiano y obtenemos un espacio $\overline{\overline{F}} + V$. Elegimos sobre $F + \overline{V}$ una curva simple cerrada W

basada en un punto P interior a V que es ajena de las fibras excepcionales y que invierte la orientación. Deformamos a $\bar{F} + V$ (preservando fibras) de tal manera que P recorre a W y al final V se mapea sobre sí mismo.

Entonces V y por tanto $\bar{\Pi}$ se mapea sobre sí mismo bajo un homeomorfismo que invierte la orientación que manda a Q en $Q' \sim +Q$ o en $Q' \sim -Q$, dependiendo de si la orientación de las fibras se preserva o se cambia a lo largo de W.

Finalmente removemos a V para obtener el mapeo deseado de $\bar{F}$.

(b). Por (a), existe un mapeo que preserva fibras de $\bar{F}$ y que mapea a $Q + zH$ en $\pm(Q + zH)$, porque $Q + zH$ es una curva cruzada, y que invierte la orientación sobre $\bar{\Pi}$. Como $Q \sim -zH + (Q+zH)$, por tanto Q se mapea en $Q' \sim \pm(Q + 2zH)$.

Para obtener un mapeo que preserve orientación, componemos el mapeo anterior con un homeomorfismo de $\bar{F}$ que envíe a Q' en $\pm Q'$ y que invierta la orientación sobre $\bar{\Pi}$.

Usaremos el lema para mostrar que F_s esta determinado de manera única por su clase y por s, si $s>0$.

Removemos las s fibras excepcionales. El resultado $\bar{F}_s$ está determinado por la clase de F_s (= la clase de F) y por s, porque $\bar{F}_s = \bar{F}_0$, si $s=1$ o $\bar{F}_s = (\bar{F}_0$ agujerado $(s-1)$ veces$)$.

De $\bar{F}_s$ obtenemos a F_s cerrando con s toros sólidos de multiplicidad $\mu=2$. Este cerrado es independiente de como el toro sellador Ω es pegado (preservando fibras) sobre la frontera $\bar{\Pi}$ de $\bar{F}_s$.

En efecto. Si Q es una curva cruzada, H una fibra de $\bar{\Pi}$ y M es un meridiano de Ω, entonces

$$M \sim 2Q + yH \quad (\text{sobre } \bar{\Pi}).$$

Mostraremos que el resultado es independiente de y.

Como M es una curva simple cerrada, por tanto $(2, y) = 1$, es decir, y es impar. Si $y \equiv 1 \pmod 4$, existe un homeomorfismo que preserva fibras de $\overline{F}_s$ que deja fijas puntualmente a todas las componentes de la frontera de $\overline{F}_s$, a excepción de $\overline{\Pi}$ y tal que $\overline{\Pi}$ se mapea preservando orientación y Q se mapea en

$$Q' \sim \pm\left(Q + 2\left(\tfrac{1-y}{4}\right)H\right);$$

por tanto M se mapea en

$$M' \sim 2Q' + yH' \sim \pm(2Q + H)$$

por el lema 7.

Si $y \equiv -1 \pmod 4$ elegimos un mapeo que preserva fibras de $\overline{F}_s$ que invierte la orientación sobre $\overline{\Pi}$ y que envia a Q en

$$Q' \sim \pm\left(Q + 2\left(\tfrac{1+y}{4}\right)H\right),$$

Por tanto M va a

$$M' \sim \pm(2Q+H)$$

Luego en vez de

$$M \sim 2Q + yH$$

podemos elegir a $M' \sim \pm(2Q+H)$ como meridiano del toro sellador. Por tanto F_s depende sólo de $\bar{\bar{F}}_o$ y de s.

Si $s=0$, obtenemos F_o de $\bar{\bar{F}}_o$ cerrando con un toro sólido ordinario que tiene a una curva cruzada Q sobre Π_o como meridiano. Sobre Π_o existen exactamente dos curvas cruzadas esencialmente distintas.

Porque, por el lema 7, Q se puede mapear a $Q' \sim \pm(Q+2zH)$ mediante un mapeo que preserva fibras de $\bar{F}_o$.

Por tanto, si Q_o es una curva cruzada de Π_o, por ejemplo $Q_o = \bar{f}_o \cap \Pi_o$, donde $\bar{f}_o$ es la superficie de órbitas

encajada en $\overline{\overline{F}}_0$ tenemos solamente dos casos: $Q \sim Q_0$ o $Q \sim Q_0 + H$ (es decir, podemos mapear a Q en Q_0 o en Q_0+H).
Si $\overline{F}_0$ se puede encajar en $\overline{\overline{F}}_0$ de tal manera que $\overline{F}_0 \cap \Pi_0 = Q_0$, entonces $\overline{F}_0$ no puede encajarse en $\overline{\overline{F}}_0$ de tal manera que $\overline{F}_0 \cap \Pi_0 = Q_0 + H$, y viceversa. (ver §5)

Luego las dos curvas cruzadas Q_0 y Q_0+H son esencialmente diferentes, i.e. no existe un homeomorfismo que preserve fibras de $\overline{\overline{F}}_0$ en si mismo que envíe a Q_0 en $\pm(Q_0+H)$. Por tanto los espacios fibrados F_0 y F_0' obtenidos de $\overline{\overline{F}}_0$ tomando a Q_0 y a Q_0+H, respectivamente, como meridiano del toro sellador, son diferentes. Porque un homeomorfismo que preserva fibras $F_0 \to F_0'$ podría deformarse de tal manera que los toros selladores y por tanto los meridianos de F_0 y F_0'

coincidieran; habría por tanto un mapeo que preserva fibras de $\overline{F}_0$ que enviaría a Q_0 en $\pm(Q_0+H)$.
Los dos espacios F_0 y F_0' están por tanto determinados por $\overline{F}_0$ y por el número $b=0$ o $b=1$.

Supongamos ahora que conocemos a F_s $(s\geq 0)$. Entonces F está determinado de manera única por

$$\alpha_i, \beta_i \quad (\alpha_i > 2,\ 0<\beta_i<\tfrac{1}{2}\alpha_i)$$
$$i=s+1,\ldots,r.$$

En efecto, removiendo $r-s$ fibras ordinarias arbitrarias de F_s, existe una única curva cruzada (no orientada) Q_i sobre cada toro frontera Π_i, a saber, el meridiano M_i del toro sólido ordinario removido. Eligiendo una fibra orientada H_i sobre Π_i, el meridiano M_i del nuevo toro sellador está determinado por

$$M_i \sim \alpha_i Q_i + \beta_i H_i,$$

debido a la ecuación (3). Pero como la orientacion de Q_i y de H_i es arbitraria, tenemos junto con M_i otro meridiano posible:

$$M_i' \sim \alpha_i Q_i - \beta_i H_i.$$

Por el lema 7 existe un homeomorfismo que preserva fibras del espacio con frontera que deja a Π_j fijo puntualmente para $j \neq i$ y que mapea a Π_i bajo un homeomorfismo que invierte orientación sobre si mismo tal que $Q \mapsto \pm Q_i$. Entonces $M_i \mapsto \pm M_i' \sim \pm(\alpha Q_i - \beta_i H_i)$. Por tanto no importa cual de los meridianos M_i o M_i' se elige para el toro sellador. Por tanto F está determinado de manera única por

su clase y los numeros α_i, β_i, s y b.
Enunciamos este resultado en el:

<u>Teorema 8</u> Un espacio fibrado no orientable F esta determinado de manera única por un sistema de invariantes

$$(No;\, p \mid b;\, \alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_s, \beta_s; \alpha_{s+1}, \beta_{s+1}; \dots; \alpha_r, \beta_r)$$

o bien

$$(NnI;\, k \mid b;\, \alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_s, \beta_s; \alpha_{s+1}, \beta_{s+1}; \dots; \alpha_r, \beta_r)$$

o bien

$$(NnII;\, k \mid b;\, \alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_s, \beta_s; \alpha_{s+1}, \beta_{s+1}; \dots; \alpha_r, \beta_r)$$

o bien

$$(NnIII;\, k \mid b;\, \alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_s, \beta_s; \alpha_{s+1}, \beta_{s+1}; \dots; \alpha_r, \beta_r).$$

N significa que F es no orientable; o (respec. n) significa que la superficie de órbitas es orientable (respec. no orientable). Los números α_i, β_i determinan las fibras excepcionales. $\alpha_i = 2$ y $\beta_i = 1$

para $i \leq s$, y $\alpha_i > 2$ y $0 < \beta_i < \frac{1}{2}\alpha_i$ para $i > s$. b tiene significado solo si $s = 0$. En este caso $b = 0$ o $b = 1$ y determina el cerrado del espacio clasificador $\overline{F_0}$ a F_0. Si $s > 0$, entonces F está determinado sin especificar a b, y b se omite del símbolo.

<u>Ejemplo</u>. Sea F un espacio fibrado no orientable con una fibra excepcional de multiplicidad 3, con $\overline{F_0}$ determinado por $NnI; k$. Se tiene que $\overline{F_0} \cong$ (la superficie no orientable de género k agujerada) $\times S^1$.

Obtenemos los dos espacios fibrados distintos:

$$(NnI; k \mid 0; 3, 1) \quad \text{y} \quad (NnI; k \mid 1; 3, 1).$$

Pero añadiendo una fibra de multiplicidad 2, ambos espacios se convierten en el mismo:

$$(NnI; k \mid -; 2, 1; 3, 1).$$

9. Espacios Cubrientes.

Sea $\tilde{F}$ un espacio cubriente de F, $p: \tilde{F} \to F$ la proyección.

Supongamos que F es un espacio fibrado, H una fibra de F. Sea $\tilde{H}$ una componente de $p^{-1}(H)$. Como p es localmente un homeomorfismo, $\tilde{H}$ es una 1-variedad sin frontera, por tanto $\tilde{H} \cong S^1$ o $\tilde{H} \cong \mathbb{R}^1$.

Sea S la colección de todas las curvas $\tilde{H}$, para todas las fibras H de F. Investigaremos cuando S es una fibración para $\tilde{F}$.

Sea Ω_C una vecindad fibrada de una fibra C de F y sea $\tilde{\Omega}_{\tilde{C}}$ una componente de $p^{-1}(\Omega_C)$. Entonces $\tilde{\Omega}_{\tilde{C}}$ consiste de curvas de S y contiene a la curva $\tilde{C}$ (que es una componente de $p^{-1}(C)$) en su interior. $\tilde{\Omega}_{\tilde{C}}$ está determinada por Ω_C y por un entero σ (incluido ∞) que denota a la multiplicidad del cubriente $\tilde{\Omega}_{\tilde{C}} \to \Omega_C$. Por tanto $\tilde{C} \to C$ es un cubriente de multiplicidad σ.

Si $\sigma < \infty$, entonces todas las curvas de $\tilde{\Omega}_{\tilde{C}}$ son cerradas (esto porque claramente, si $\sigma < \infty$ y $K \subset \Omega_C$ es un compacto, entonces $p^{-1}(K) \cap \tilde{\Omega}_{\tilde{C}}$ es un compacto); Si $\sigma = \infty$, entonces todas son abiertas. Por tanto cada curva de S tiene una vecindad que consiste totalmente de curvas abiertas o totalmente de curvas cerradas de S. Por tanto $\tilde{F}$ es la unión de dos conjuntos abiertos ajenos: el conjunto de curvas cerradas de S y el conjunto de curvas abiertas.

Como $\tilde{F}$ es conexo, uno de estos dos conjuntos es vacío.

Luego <u>S no puede contener curvas cerradas y abiertas a la vez.</u>

<u>Si (todas) las curvas de S son cerradas, entonces S es una fibración para $\widetilde{F}$</u>, porque un cubriente finito de una vecindad fibrada Ω_c es de nuevo un toro sólido fibrado.

De ahora en adelante supondremos que S es una fibración para $\widetilde{F}$.

Como el cubriente $\bar{\Omega}_{\bar{c}} \longrightarrow \Omega_c$ está completamente determinado por el entero σ, podemos calcular los invariantes $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\nu}$ de $\bar{\Omega}_{\bar{c}}$ a partir de los invariantes μ y ν de Ω_c y de σ.

Cortamos a $\tilde{\Omega}_{\tilde{c}}$ en un cilindro fibrado. Tenemos que identificar los discos tapa y fondo bajo una rotación de

$$2\pi \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\mu}} = 2\pi \frac{\nu}{\mu}\sigma = 2\pi\nu \frac{\sigma/(\mu,\sigma)}{\mu/(\mu,\sigma)}$$

(μ,σ) es el máximo común divisor de μ y σ. Por tanto, por la definición de los números característicos,

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{(\mu,\sigma)} \quad , \quad \tilde{\nu} \equiv \pm \nu \frac{\sigma}{(\mu,\sigma)} \bmod (\tilde{\mu}) \qquad (1)$$

Por tanto en el cilindro $\tilde{\Omega}_{\tilde{c}}$ existen $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{(\mu,\sigma)}$ rectas paralelas que forman una fibra ordinaria de $\tilde{\Omega}_{\tilde{c}}$. Por tanto cada fibra ordinaria de Ω_c está cubierta por

por (μ,σ) fibras ordinarias de $\tilde{\Omega}_{\tilde{c}}$, pero la fibra central C está cubierta por solo una fibra $\tilde{C}$ de $\tilde{\Omega}_{\tilde{c}}$. Por tanto $p: \tilde{F} \to F$ induce un mapeo contínuo $\tilde{p}$ de la superficie de orbitas $\tilde{f}$ de $\tilde{F}$ sobre f. Si c y $\tilde{c}$ son los puntos correspondientes de las fibras C y $\tilde{C}$ respectivamente, entonces, si $(\mu,\sigma) > 1$, el cubriente $\tilde{f} \to f$ está ramificado sobre c con indice de ramificación (μ,σ). Luego el indice de ramificación divide siempre a la multiplicidad de la fibra excepcional C. Por tanto solo puntos excepcionales pueden ser puntos de ramificación.

Como $\tilde{\mu} \leq \mu$ por (1), el cubriente $\tilde{C}$ de C es una fibra ordinaria si C es ordinaria. Pero si C es excepcional ($\mu > 1$) entonces $\tilde{C}$ puede ser o no fibra excepcional.

Por ejemplo, identificando dos toros sólidos fibrados congruentemente con una fibra excepcional de multiplicidad α, a lo largo de sus fronteras de tal manera que puntos congruentes esten identificados, obtenemós un espacio fibrado con invariantes $(Oo; 0 \mid -1; \alpha, \beta; \alpha, \alpha-\beta)$. Tomando el cubriente de multiplicidad α de cada uno de los toros sólidos e identificando los puntos equivalentes, obtenemos un cubriente $\tilde{F} \to F$ de multiplicidad α sin fibras excepcionales, porque los invariantes en (1) son $\mu = \alpha$, $\sigma = \alpha$ y por tanto $\bar{\mu} = 1$ para ambas fibras (excepcionales).

Si $\tilde{H}$ y $\tilde{H}'$ son dos fibras de $\tilde{F}$ que cubren a dos fibras ordinarias H y H' ρ y ρ' veces respectivamente, entonces $\rho = \rho'$. Porque uniendo a $\tilde{H}$ y $\tilde{H}'$ en $\tilde{F}$ por una trayectoria cuya proyección en F no pasa por fibras excepcionales, como en una vecindad fibrada (suficientemente pequeña) de una fibra ordinaria, la multiplicidad del cubriente no cambia, ésta permanece constante a lo largo de toda la trayectoria.

El cubriente universal F de F es un espacio fibrado si y solo si para una fibra H de F, una componente $\hat{H}$ de $p^{-1}(H)$ es cerrada. Entonces H está cubierta p veces por $\hat{H}$, $p<\infty$. Como $\hat{H} \simeq 0$ en $\hat{F}$ (porque es simplemente conexo), $H^p \simeq 0$ en F. Por tanto

$\hat{F}$ es un espacio fibrado si y solo si un múltiplo finito de alguna fibra de F es homotópico a cero en F.

Claramente si esto se cumple para una sola fibra H, se cumple para todas las fibras de F.

<u>Teorema</u> Sea M una variedad, entonces existe un cubriente doble $\tilde{M} \to M$ tal que $\tilde{M}$ es orientable.

<u>Dem</u> Se omite.

Sea F un espacio fibrado no orientable y $\tilde{F} \xrightarrow{\rho} F$ el cubriente doble orientable de F. Cualquier fibra H de F preserva orientación, porque H posee una vecindad (fibrada) homeomorfa a un toro sólido. Por tanto H se levanta a dos curvas cerradas $\tilde{H}$ y $\tilde{H}'$. Luego $\tilde{F}$ es espacio fibrado y $\sigma = 1$. Por tanto $\rho|\Omega_{\tilde{H}} : \Omega_{\tilde{H}} \to \Omega_H$ es un homeomorfismo que preserva fibras. Sea $T: \tilde{F} \to \tilde{F}$ la involución que preserva fibras (sin puntos fijos) y que es la traslación cubriente no trivial. T invierte la orientación de $\tilde{F}$.

Como $p_* \pi_1(\tilde{F})$ tiene índice dos en $\pi_1(F)$ y es, por tanto, normal, $\tilde{F}$ es un cubriente regular de F.

Sea $(\tilde{M}, \beta)$ un cubriente regular de M, $\tilde{M}$ es n-variedad conexa orientable y es tal que todas sus traslaciones cubrientes preservan la orientación.

Sea $x \in M$ y sea U una vecindad de x tal que β restringido a cada componente de $\beta^{-1}(U)$ es un homeomorfismo.

Sea $\tilde{U}$ una componente de $\beta^{-1}(U)$, $\tilde{x} := \beta^{-1}(x) \cap \tilde{U}$. Sea $\tilde{\mu}_{\tilde{x}}$ una orientación local en $\tilde{x}$. Entonces $\beta_*(\tilde{\mu}_{\tilde{x}}) = \mu_x$ es una orientación local en x. Sea μ la función que a cada $x \in M$ le asocia la orientación local μ_x inducida por β. μ_x no depende de la elección de la vecindad $\tilde{U}$, porque si $\tilde{U}'$ es otra componente de $\beta^{-1}(U)$, entonces existe una traslación cubriente t, tal que $t\,\tilde{U} = \tilde{U}'$; como t preserva orientación y $\beta_* t_* = \beta_*$, por tanto la orientación local μ'_x de x inducida por U' y β coincide con μ_x (inducida por U y β).

La condición de continuidad de la orientación de $\tilde{M}$ implica la continuidad de μ para M.

Por tanto si $\tilde{M}$ es orientable, entonces M es orientable.

En nuestro caso, como F es no orientable y solo hay dos traslaciones cubrientes de $\tilde{F}$ y $T \neq id$, por tanto T invierte orientación.

Además T induce una involución sin puntos fijos de $\tilde{F}$.

Por ejemplo, sea F el espacio

$$(No;\, p \mid b;\, \alpha_1, \beta_1;\, \ldots;\, \alpha_r, \beta_r). \qquad (2)$$

Entonces $\tilde{F}$ tiene $2r$ fibras excepcionales; si H es una fibra excepcional con invariantes α_1, β_1, entonces H esta cubierta por dos fibras excepcionales $\tilde{H}$ y $\tilde{H}'$ con invariantes α_1, β_1 y $\alpha_1, \alpha_1 - \beta_1$ respectivamente (por el teorema 6). Esto porque T mapea a $\tilde{H}$ en $\tilde{H}'$ e invierte la orientación de $\tilde{F}$.

Como $\tilde{f}$ es un cubriente doble de f, por tanto $\tilde{f}$ es orientable de genero $2p-1$. Por tanto $\tilde{F}$ es el espacio

$$(Oo;\, 2p-1 \mid \tilde{b};\, \alpha_1, \beta_1;\, \ldots;\, \alpha_r, \beta_r;\, \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1;\, \ldots$$
$$\ldots;\, \alpha_r, \alpha_r - \beta_r). \qquad (3)$$

Como $\bar{F}$ admite un homeomorfismo que preserva fibras y que invierte orientación, los invariantes de $\bar{F}$ son los mismos si la orientación de $\bar{F}$ se invierte. Por el teorema 6, $\tilde{\bar{F}}$ tiene los invariantes

$$(Oo; 2p-1 \mid -2r-\tilde{b}; \alpha_1, \beta_1; \cdots; \alpha_1, \alpha_1-\beta_1; \cdots$$
$$\cdots; \alpha_r, \alpha_r-\beta_r) \qquad (4)$$

Para que (3) y (4) sean iguales, se debe tener que $\tilde{b} = -2r - \tilde{b}$; por tanto $\tilde{b} = -r$, es independiente de b.

De manera similar, para los otros casos:

Sea $\bar{F}$ el doble cubriente orientable de F

$$\begin{cases} F = (No;\, p \mid b;\, \alpha_1, \beta_1;\, \cdots;\, \alpha_r, \beta_r) \\ \tilde{F} = (Oo;\, 2p-1 \mid -r;\, \alpha_1, \beta_1;\, \cdots;\, \alpha_r, \beta_r;\, \cdots \\ \quad ;\, \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1;\, \cdots;\, \alpha_r, \alpha_r - \beta_r). \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = (Nn\,\mathrm{I};\, k \mid b;\, \alpha_1, \beta_1;\, \cdots;\, \alpha_r, \beta_r) \\ \tilde{F} = (Oo;\, k-1 \mid -r;\, \alpha_1, \beta_1;\, \cdots;\, \alpha_r, \beta_r;\, \cdots \\ \quad \cdots;\, \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1;\, \cdots;\, \alpha_r, \alpha_r - \beta_r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = (Nn\,\mathrm{II};\, k \mid b;\, \alpha_1, \beta_1;\, \cdots;\, \alpha_r, \beta_r) \\ \tilde{F} = (On;\, 2k-2 \mid -r;\, \alpha_1, \beta_1;\, \cdots;\, \alpha_r, \beta_r;\, \cdots \\ \quad \cdots;\, \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1;\, \cdots;\, \alpha_r, \alpha_r - \beta_r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = (Nn\,\mathrm{III};\, k \mid b;\, \alpha_1, \beta_1;\, \cdots;\, \alpha_r, \beta_r) \\ \tilde{F} = (On;\, 2k-2 \mid -r;\, \alpha_1, \beta_1;\, \cdots;\, \alpha_r, \beta_r;\, \cdots \\ \quad \cdots;\, \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1;\, \cdots;\, \alpha_r, \alpha_r - \beta_r). \end{cases}$$

En los dos últimos casos la superficie de órbitas $\tilde{F}$ es no orientable porque hay curvas de un solo lado sobre $\tilde{F}$ a lo largo de las cuales la orientación de las fibras se invierte, i.e., que preservan orientación sobre F.

Sea F un espacio fibrado con superficie de órbitas f. Sea $\tilde{f}$ un cubriente de f, $\tilde{p}$ un punto sobre un punto $p \in f$ y P un punto de F que se mapea en p. Sea $\tilde{F}$ la colección de las parejas $(P, \tilde{p})$. Una vecindad de un punto $(P_0, \tilde{p}_0)$ consiste de todos los puntos $(P, \tilde{p})$ donde P está en una vecindad de P_0 y $\tilde{p}$ en una vecindad de $\tilde{p}_0$.

Definimos $g : \tilde{F} \longrightarrow F$ como $g(P, \tilde{p}) := P$, entonces $g : \tilde{F} \rightarrow F$ es un cubriente de F. La multiplicidad de este cubriente es la multiplicidad del cubriente $\tilde{f} \rightarrow f$.

Si un punto $P \in F$ recorre una fibra H, entonces $(P, \tilde{p})$, para un $\tilde{p}$ fijo, recorre a la curva $\tilde{H}$ que se proyecta uno a uno sobre H.

Por tanto $\widetilde{F}$ es un espacio fibrado y una vecindad fibrada $\widetilde{\Omega}_{\widetilde{H}}$ en $\widetilde{F}$ se mapea sobre Ω_H bajo un homeomorfismo que preserva fibras.

Por ejemplo, sea F el espacio orientable $(On; 1 \mid b; \alpha_1, \beta_1; \cdots; \alpha_r, \beta_r)$ con superficie de órbitas el plano proyectivo. Sea $\widetilde{f}$ la 2-esfera. Entonces $\widetilde{F}$ es orientable (porque F lo es) y por tanto $\widetilde{F}$ es de clase $(Oo; 0)$. Orientando a $\widetilde{F}$ de tal manera que $g: \widetilde{F} \to F$ preserve orientación, las vecindades $\widetilde{\Omega}_{\widetilde{H}}$ y $\widetilde{\Omega}_{\widetilde{H}'}$ se mapean a la misma Ω_H preservando orientación, y por tanto a la fibra excepcional con invariantes α, β, le corresponden en

$\tilde{F}$ dos fibras excepcionales, ambas con invariantes α, β.
Removiendo las fibras excepcionales de F y sellando con toros sólidos ordinarios y haciendo lo mismo en $\tilde{F}$, obtenemos a F_0 y $\tilde{F}_0$ sin fibras excepcionales. Como $\tilde{F}_0$ es una doble cubierta de F_0, por tanto $\tilde{b} = 2b$.

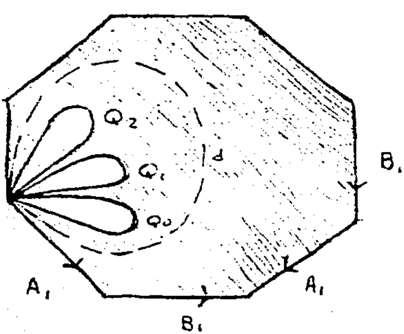
Por tanto

$$\tilde{F} = (Oo; 0 \mid 2b; \alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_r, \beta_r; \alpha_1, \beta_1; \ldots \\ \ldots; \alpha_r, \beta_r).$$

10. Grupo Fundamental.

Sea $\overline{F}_0$ el espacio clasificador de un espacio fibrado F.

Cortamos a $\overline{F}_0$ en un prisma fibrado ahuecado (como en §5) pero de tal manera que el agujero toque al prisma a lo largo de la arista (una fibra) H. De manera similar removemos a los r toros sólidos ordinarios $V_1, \ldots, V_r$ (que deben reemplazarse por toros excepcionales) de tal manera que toquen a H.



Entonces los $r+1$ toros frontera $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_r$ intersecan a la superficie fondo en las curvas cruzadas $Q_0, Q_1, \ldots, Q_r$ (ver figura para $p=2$ y $r=2$)

Sea $\overline{\overline{F}}_0 := \overline{F}_0 - \text{int}(V_1 \cup \cdots \cup V_r)$

<u>1er caso</u> La superficie de órbitas es orientable de género $p \geq 0$.

Sea D un toro fibrado en $\overline{\overline{F}}_0$ que tiene a H como arista, intersecta a la superficie fondo en la curva cruzada d y separa a los toros $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_r$ de las superficies que se proyectan en las aristas $A_1, B_1, \ldots, A_p, B_p$.

Entonces D separa a $\overline{\overline{F}}_0$ en un toro sólido ahuecado X_1 que contiene a los toros $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_r$ y en un espacio X_2 tal que $X_1 \cap X_2 = D$.

Podemos pensar en X_1 y X_2 un "poco engordados" de tal manera que $\overline{\overline{F}}_0 = \text{int}\, X_1 \cup \text{int}\, X_2$ y $X_1 \cap X_2$ es un abierto de $\overline{\overline{F}}_0$ que contiene y que es del mismo tipo de homotopía que D.

Ahora: X_1 es del mismo tipo de homotopía que $T_0, T_1, \ldots, T_r$ pegados a lo largo de H, por tanto:

$$\pi_1(X_1) = \{ Q_0, Q_1, \ldots, Q_r : Q_j H Q_j^{-1} = H \ (j=0,1,\ldots,r) \};$$

X_2 es del mismo tipo de homotopía que la unión de las superficies que se proyectan en $A_1, B_1, \ldots, A_p, B_p$ pegadas a lo largo de H.

La superficie que se proyecta en A_i (en B_i) es un toro o una botella de Klein dependiendo de si la orientación de las fibras se preserva o se invierte a lo largo de A_i (B_i), por tanto:

$$\pi_1(X_2) = \{ A_1, B_1, \ldots, A_p, B_p, H : A_i H A_i^{-1} = H^{\varepsilon_i},\ B_i H B_i^{-1} = H^{\bar{\varepsilon}_i} \ (i=1,\ldots,p;\ \varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_i = \pm 1) \}$$

donde ε_i ($\bar{\varepsilon}_i$) $= +1$ o -1 dependiendo de si la orientación de las fibras se preserva o se invierte a lo largo de A_i (B_i).

Como

$$\pi_1(X_1 \cap X_2) \cong \pi_1(D) = |d, H : d H d^{-1} = H|$$

y como $d \simeq Q_0 Q_1 \cdots Q_r$ en X_1 y

$d \simeq A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1}$ en X_2

por tanto (Tma. de Seifert-Van Kampen)

$$\pi_1(\bar{\bar{F}}_0) = \pi_1(X_1 \cup X_2) = | A_1, B_1, \ldots, A_p, B_p, Q_0, Q_1, \ldots, Q_r, H :$$

$$A_i H A_i^{-1} = H^{\varepsilon_i}, \quad B_i H B_i^{-1} = H^{\varepsilon_i}$$

$$(i = 1, \ldots, p \; ; \; \varepsilon_i, \varepsilon_i = \pm 1)$$

$$Q_0 Q_1 \cdots Q_r = A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1}$$

$$Q_j H Q_j^{-1} = H \quad (j = 0, 1, \ldots, r) \; | . \qquad (1)$$

para $p = 0$ obtenemos las relaciones

$$Q_0 Q_1 \cdots Q_r = 1$$

$$Q_j H Q_j^{-1} = H \quad (j = 0, 1, \ldots, r) \qquad (2)$$

<u>2do Caso</u> La superficie de órbitas es no orientable de género k.

De manera totalmente análoga al caso anterior obtenemos:

$$\pi_1(\bar{\bar{F}}_0) = \{ A_1, \ldots, A_k, Q_0, Q_1, \ldots, Q_r, H : \\ A_i H A_i^{-1} = H^{\varepsilon_i} \quad (i=1,2,\ldots k;\ \varepsilon_i = \pm 1) \\ Q_0 Q_1 \cdots Q_r = A_1^2 \cdots A_k^2 \\ Q_j H Q_j^{-1} = H \quad (j=0,1,\ldots r) \ \} . \qquad (3)$$

$\pi_1(F)$ se obtiene de $\pi_1(\bar{\bar{F}}_0)$ añadiendo $r+1$ relaciones (de nuevo por Seifert-Van Kampen), que corresponden a los $r+1$ toros selladores de los toros frontera $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_r$. Éstas son

$$Q_0 H^b = Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = \cdots = Q_r^{\alpha_r} H^{\beta_r} = 1 \qquad (4)$$

Por ejemplo, $Q_1^{\alpha_1} H_1^{\beta_1} = 1$ significa que el meridiano $M_1 \sim \alpha_1 Q_1 + \beta_1 H_1$ del toro sellador que pertenece a Π_1 es nulhomotópico en el toro sellador.

Por ejemplo el grupo fundamental del espacio $(Oo; 0 \mid b; \alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_r, \beta_r)$ tiene las relaciones

$$Q_0 H^b = Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = \dots = Q_r^{\alpha_r} H^{\beta_r} = Q_0 Q_1 \cdots Q_r = 1$$

$$Q_j H Q_j^{-1} = 1 \quad (j = 0, 1, \dots, r). \tag{5}$$

Añadiendo las relaciones $Q_0 = Q_1 = \dots = Q_r = H = 1$ obtenemos de $\pi_1(F)$ el grupo $\pi_1(f)$ de la superficie de órbitas f.

Geométricamente podemos ver esto como sigue: el mapeo proyección $F \to f$ induce un epimorfismo $\pi_1(F) \to \pi_1(f)$ y por tanto $\pi_1(f)$ es un grupo cociente de $\pi_1(F)$. De manera análoga $H_1(f)$ es un grupo cociente de $H_1(F)$ (esto es cierto también para espacios fibrados abiertos).

Investigaremos los espacios fibrados con grupo fundamental finito.

Una condición necesaria para que el grupo fundamental de F sea finito, es que el grupo fundamental de la superficie de órbitas f sea finito, porque el último es cociente del primero. Por tanto f es una 2-esfera o un plano proyectivo.

Si f es una 2-esfera, entonces (5) son las relaciones del grupo fundamental de F. Añadiendo $H=1$ (i.e., dividiendo entre el subgrupo normal generado por H) obtenemos el grupo

$$G = | Q_1, \ldots, Q_r : Q_1^{\alpha_1} = \cdots = Q_r^{\alpha_r} = Q_1 \cdots Q_r = 1 |$$

Si $r=1$, tenemos

$$G = | Q_1 : Q_1^{\alpha_1} = Q_1 = 1 | = | - : - |$$

Si $r=2$, usando las equivalencias de presentaciones de Tietze, obtenemos

$$(Q_1, Q_2 : Q_1^{\alpha_1} = Q_2^{\alpha_2} = Q_1 Q_2 = 1)$$

$\updownarrow$ $Q_1^{\alpha_2}$ es consecuencia de $Q_2^{\alpha_2}$ y $Q_1 Q_2$

$$(Q_1, Q_2 : Q_1^{\alpha_1} = 1,\ Q_2^{\alpha_2} = 1,\ Q_1 = Q_2^{-1},\ Q_1^{\alpha_2} = 1)$$

$\updownarrow$ $Q_2^{\alpha_2}$ es consecuencia de $Q_1^{\alpha_2}$ y $Q_1 Q_2$

$$(Q_1, Q_2 : Q_1^{\alpha_1} = 1,\ Q_1 = Q_2^{-1},\ Q_1^{\alpha_2} = 1)$$

$\updownarrow$ Q_2 está en términos de Q_1

$$(Q_1 ; Q_1^{\alpha_1} = Q_1^{\alpha_2} = 1)$$

Portanto, el grupo de (5) es cíclico (finito o infinito).

Si $r > 3$, entonces $\overline{G} = | Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 : Q_1^{\alpha_1} = \cdots = Q_4^{\alpha_4} = Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 = 1 |$ es cociente de G, y se tienen las equivalencias de presentaciones siguientes:

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 : Q_1^{\alpha_1} = Q_2^{\alpha_2} = Q_3^{\alpha_3} = Q_4^{\alpha_4} = Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 = 1)$$

$$\updownarrow$$

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 : Q_1^{\alpha_1} = Q_2^{\alpha_2} = Q_3^{\alpha_3} = 1,\ Q_4^{\alpha_4} = 1,\ Q_4 = (Q_1 Q_2 Q_3)^{-1},\ (Q_1 Q_2 Q_3)^{\alpha_4} = 1)$$

$$\updownarrow$$

$$(Q_1, Q_2, Q_3 : Q_1^{\alpha_1} = Q_2^{\alpha_2} = Q_3^{\alpha_3} = (Q_1 Q_2 Q_3)^{\alpha_4} = 1)$$

Por tanto $\bar{G} \cong (\mathbb{Z}_{\alpha_1} * \mathbb{Z}_{\alpha_2} * \mathbb{Z}_{\alpha_3}) / \langle (z_1 z_2 z_3)^{\alpha_4} \rangle$

donde z_i es el generador de $\mathbb{Z}_{\alpha_i}$

Como, por ejemplo, el elemento $(z_1 z_2)^k$ es no trivial en $\mathbb{Z}_{\alpha_1} * \mathbb{Z}_{\alpha_2} * \mathbb{Z}_{\alpha_3}$ y no está en el subgrupo normal generado por $(z_1 z_2 z_3)^{\alpha_4}$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, por tanto $\bar{G}$ y consecuentemente G es infinito para $r > 3$. Luego el grupo (5) es infinito para $r > 3$

El siguiente hecho se enuncia sin demostración:

"Para $r=3$, el grupo G es finito, solo si es un grupo platónico, i.e., solo si $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es una de las ternas

$(2,2,n)$, $(2,3,3)$, $(2,3,4)$, $(2,3,5)$ $(n \geq 2)$.

Para estas ternas también el grupo (5) es finito."

Si f es el plano proyectivo, entonces F es el espacio

$$(On; 1 \mid b; \alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_r, \beta_r) \qquad (7)$$

porque una 3-variedad no orientable (cerrada) tiene grupo fundamental infinito.

El espacio (7) tiene una doble cubierta orientable, a saber

$$(Oo, 0 \mid 2b; \alpha_1, \beta_1; \alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_r, \beta_r; \alpha_r, \beta_r)$$

Este espacio tiene grupo fundamental a menos que $r=1$.

Se sigue el:

<u>Teorema 9</u> Un espacio fibrado F con grupo fundamental finito tiene al plano proyectivo o a la 2-esfera como superficie de órbitas. En el primer caso F tiene a lo más una fibra excepcional, en el segundo caso F tiene a lo más tres fibras excepcionales. Si F tiene tres fibras excepcionales, estas tienen que ser de multiplicidades (2,2,n), (2,3,3), (2,3,4) o (2,3,5).

11. Fibraciones de S^3
(Lista Completa).

Sea F un espacio fibrado tal que $\pi_1(F)=1$. Por tanto su superficie de órbitas f es homeomorfa a S^2 y F es el espacio

$$(Oo; 0 \mid b; \alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_r, \beta_r)$$

Por el teorema 9, una condición necesaria para que $\pi_1(F)$ sea finito es que $r \leq 3$.

Para $r=3$, el grupo cociente (6) de $\pi_1(F)$, donde F es como en el teorema 9, es un grupo platónico y por tanto es no trivial. Luego si $\pi_1(F)=$ $=1$, entonces $r \leq 2$.

Para $r=0$, $\pi_1(F) = \{Q_0, H : Q_0 H^b = Q_0 = 1\} =$ $= \{H : H^b = 1\}$. Por tanto $b = \pm 1$ y $(Oo; 0 \mid 1)$ y $(Oo; 0 \mid -1)$ son los únicos espacios fibrados sin fibras excepcionales. Por el teorema 6, éstos difieren únicamente por su orientación y son fibraciones de S^3 mediante círculos (curvas no anudadas) porque no hay fibras excepcionales.

Para $r=1$, $\pi_1(F) = | Q_0, Q_1, H : Q_0 H^b = Q_0 Q_1 =$

$= Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = 1, \ Q_1 H Q_1^{-1} = H | =$

$= | Q_0, Q_1, H : H^b = Q_0^{-1}, \ Q_1 = Q_0^{-1}, \ Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = 1, \ Q_1 H Q_1^{-1} = H |$

$= | Q_1, H : H^b = Q_1, \ H^{b\alpha_1 + \beta_1} = 1 |$

Por tanto, $b\alpha_1 + \beta_1 = \pm 1$ es necesario y suficiente para que $\pi_1(F) = 1$.

Ahora bien, α_1 (≥ 2) es arbitrario y para b y β_1 hay dos soluciones $b=0$ y $\beta_1 = 1$ o $b=-1$ y $\beta_1 = \alpha_1 - 1$.

Los dos espacios $(Oo; 0 | 0; \alpha_1, 1)$ y $(Oo; 0 | -1; \alpha_1, \alpha_1 - 1)$ difieren solamente en su orientación (teorema 6) y por tanto solo hay un espacio fibrado fibrado simplemente conexo (salvo orientación) con una sola fibra excepcional de orden α_1. Este espacio es por tanto la fibración por curvas traza de S^3 con valores $m=1$, $n=\alpha_1$.

Para $r=2$, $\pi_1(F)$ es cíclico de orden $|b\alpha_1\alpha_2+\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1|$. La ecuación:

$$b\alpha_1\alpha_2+\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1=\pm 1$$

tiene solución solo si $(\alpha_1,\alpha_2)=1$. Pero para un par dado de primos relativos α_1,α_2 (≥ 2), hay exactamente dos soluciones para b,β_1,β_2 donde $0<\beta_1<\alpha_1$, $0<\beta_2<\alpha_2$. Los espacios correspondientes difieren solo en su orientación. Esto se probará en la siguiente sección para una r arbitraria.

Por tanto solo hay una fibración (salvo orientación) para una pareja de fibras excepcionales de multiplicidades coprimas, lo que coincide con las fibraciones de S^3 descritas en §3. Se tiene el

<u>Teorema 10</u> Un espacio fibrado cerrado simplemente conexo es S^3. Cualquier fibración de S^3 está determinada por dos enteros positivos primos relativos m y n. Para $m=n=1$ no hay fibras excepcionales; si solo m (o n) es 1, hay una fibra excepcional de orden n (m). Si m y n son distintos de 1, m y n son las multiplicidades de las fibras excepcionales. Todas las fibraciones de S^3 coinciden con las del §3.

12. Espacios de Poincaré Fibrados.

Sea M un grupo abeliano finitamente presentado

$$M = |x_1, \dots, x_r ; \rho_1, \dots, \rho_s| .$$

Entonces cada relación es una combinación lineal de los generadores

$$\rho_i = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{ir} x_r \qquad (a_{ij} \in \mathbb{Z})$$

y definimos la $s \times r$-matriz $P = (a_{ij})$ como <u>la matriz de presentación de M</u> correspondiente a la presentación dada. Esto es, los renglones de P son los coeficientes de las relaciones relativos a los generadores.

Conocer a P es lo mismo que conocer la presentación específica a la que corresponde. Por tanto P determina a M salvo isomorfismo de grupos abelianos.

El grupo presentado por una matriz dada P no cambia, salvo isomorfismo de grupos abelianos, al realizar cualquiera de las siguientes operaciones sobre P:

(a) intercambiar dos renglones o dos columnas

(b) sumar a cualquier renglón una combinación lineal de otros renglones

(c) sumar a cualquier columna una combinación lineal de otras columnas

(d) multiplicar una fila o una columna por -1

(e) reemplazar a P por la matriz

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & ? & ? & ? \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & P & \\ \vdots & & & \end{array}$$

(f) el inverso de (e)

(g) añadir un nuevo renglón que es una combinación lineal de renglones de P
(h) borrar un renglón que es una combinación lineal de otros renglones de P.

Las operaciones (a)-(d) corresponden a cambios de base.
Las operaciones (e)-(f) corresponden a equivalencias de presentaciones de Tietze:
(e) corresponde a introducir un nuevo generador y una relación que lo define en términos de los generadores viejos; (f) corresponde a quitar un generador redundante; (g) y (h) corresponden a añadir o quitar relaciones redundantes.

Se enuncia la siguiente proposición (sin demostración) que es una adaptación del teorema de Tietze al caso presente.

<u>Proposición</u> Dos matrices con entradas en $\mathbb{Z}$ representan a grupos abelianos isomorfos si y solo si una se puede transformar en la otra mediante un número finito de aplicaciones de las operaciones (a)-(h) $\div$

Determinaremos cuales espacios son <u>espacios de Poincaré</u>, esto es, cuales espacios tienen el primer grupo de homología trivial y que no son homeomorfos a S^3.

Si $H_1(F) = 1$, entonces $H_1(f) = 1$; por tanto $f \cong S^2$ y F es $(Oo; 0 \mid b; \alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_r, \beta_r)$.

$H_1(F)$ es la abelianización de $\pi_1(F)$ y tiene los $r+2$ generadores

$$Q_0, Q_1, \ldots, Q_r, H$$

y además de ser conmutativo, tiene las relaciones

$$Q_0 H^b = Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = \cdots = Q_r^{\alpha_r} H^{\beta_r} = Q_0 Q_1 \cdots Q_r = 1$$

En notacion aditiva

$$\begin{array}{lr} Q_0 \qquad\qquad + bH = 0 & \\ \quad \alpha_1 Q_1 \qquad + \beta_1 H = 0 & \\ \qquad\qquad\qquad \vdots & (1) \\ \qquad \alpha_r Q_r + \beta_r H = 0 & \\ Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_r \qquad = 0 & \end{array}$$

Sea P la matriz de presentación de $H_1(F)$ correspondiente a la presentación anterior. Entonces P es una matriz cuadrada de tamaño $(r+2)\times(r+2)$. Si $H_1(F)=1$, entonces podemos transformar a P mediante las operaciones (a) - (f) en la matriz identidad de tamaño $r+2$. En otras palabras, P es invertible en $\mathbb{Z}$, lo que es equivalente a que

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & \alpha_1 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r & \beta_r \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \pm 1 \tag{2}$$

Obtenemos la ecuación:

$$\Delta = b\alpha_1\cdots\alpha_r + \beta_1\alpha_2\cdots\alpha_r + \alpha_1\beta_2\alpha_3\cdots\alpha_r + \cdots + \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}\beta_r = \varepsilon \quad (\varepsilon=\pm 1) \tag{3}$$

Si invertimos la orientación de F, i.e., si consideramos $(Oo;O|-r-b;\alpha_1,\alpha_1-\beta_1;\ldots;\alpha_r,\alpha_r-\beta_r)$, obtenemos el determinante $\Delta' = -\Delta$. Por tanto $\varepsilon\,(=\pm 1)$ determina la orientación de F.

Para resolver (3) con $\varepsilon = 1$, suponemos dados a $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\ (\geq 2)$ y trataremos de resolver para $b,\beta_1,\ldots,\beta_r$.

Para $r=0$ y $r=1$ obtenemos $b=1$ y $b\alpha_1+\beta_1=1$ que se discutieron en la sección anterior.

Podemos suponer por tanto que $r\geq 2$. No existe solución de (3) si dos α_i tienen un común divisor mayor que 1.

Supongamos por tanto que las α_i son primos relativos dos a dos. Entonces

$$\text{m.c.d.}\,(\alpha_1\cdots\alpha_r,\ \alpha_2\cdots\alpha_r,\ \alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_r,\ \ldots,\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}) = 1$$

Por tanto existe una solución $b, \beta_1, \dots, \beta_r$ y $(\beta_i, \alpha_i) = 1$; de otra manera el lado derecho de (3) tendría un factor común distinto de 1.

Pero β_i no necesariamente satisface que $0 < \beta_i < \alpha_i$.

Como $b - x_i, \beta_1, \dots, \beta_i + x_i\alpha_i, \dots, \beta_r$ también es solución de (3), podemos por tanto normalizar a β_i para $1 \leq i \leq r$.

Esta solución normalizada es única, porque si $b', \beta_1', \dots, \beta_r'$ es otra solución normalizada de (3), entonces

$$(b - b')\alpha_1 \cdots \alpha_r + (\beta_1 - \beta_1')\alpha_2 \cdots \alpha_r + \cdots = 0$$

Esto implica que $\beta_i - \beta_i' \equiv 0 \bmod (\alpha_i)$, por tanto $\beta_i = \beta_i'$

Esta solución de (3) completa la demostración del teorema 11. Luego para $r=2$ los espacios fibrados con el primer grupo de homología trivial son homeomorfos a S^3. Para $r>2$ existen espacios de Poincaré, porque por el teorema 11 una fibración de S^3 tiene a lo más dos fibras excepcionales. Se sigue el

<u>Teorema 11</u> Un espacio fibrado de Poincaré ($\neq S^3$) tiene al menos tres fibras excepcionales; sus multiplicidades $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son primas relativas dos a dos. Recíprocamente, para cualquier $r \geq 3$ enteros primos relativos dos a dos ≥ 2, existe un único espacio fibrado de Poincaré que tiene r fibras excepcionales con las multiplicidades dadas.

13. Construcción de Espacios de Poincaré a partir de Nudos Toroidales.

Sea k un nodo en S^3, V una vecindad de k tal que $V \cong D^2 \times S^1$; sea $A = \overline{S^3 - V}$, $\Pi = \partial A$. Se tiene la sucesión exacta (Mayer-Vietoris)

$$H_2(S^3) \longrightarrow H_1(\Pi) \longrightarrow H_1(A) \oplus H_1(V) \longrightarrow H_1(S^3)$$

Como $H_1(\Pi) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_1(V) \cong \mathbb{Z}$ y $H_1(S^3) \cong H_2(S^3) \cong 0$, por tanto

$$H_1(A) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Luego $H_1(A)$ es un grupo cíclico libre generado por un meridiano M de V sobre Π. Si B es una curva simple cerrada sobre Π que intersecta a M en un punto, $B \sim xM$ (en A) y podemos suponer que $x=0$ reemplazando a B (si es necesario) por $B - xM$. Entonces B está determinado de manera única pidiendo que $M \cap B$ sea un punto y $B \sim 0$ en A (salvo orientación y deformaciones de Π).

Cerrando a A con un toro sellador V' que tiene como meridiano a

$$M' \sim M + qB \quad (\text{sobre } \Pi,\ q \neq 0) \tag{1}$$

obtenemos un espacio cerrado $R = A \cup V'$ tal que $H_1(R) = 0$, porque el homomorfismo inducido por las inclusiones $\Pi \hookrightarrow A$, $\Pi \hookrightarrow V'$ es tal que

$$\begin{aligned} H_1(\Pi) &\longrightarrow H_1(A) \oplus H_1(V') \\ (1,0) &\longmapsto (1,0) \\ (0,1) &\longmapsto (1,q) \end{aligned}$$

y es por tanto un monomorfismo. Como se tiene la sucesión exacta

$$H_1(\Pi) \rightarrowtail H_1(A) \oplus H_1(V') \longrightarrow H_1(R) \longrightarrow 0$$

tenemos por tanto a sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_1(R) \longrightarrow 0$$

y por tanto $H_1(R)=0$.

Supongamos ahora que R es un nudo toroidal. Tales nudos son fibras ordinarias de las fibraciones de S^3 dadas en la sección 3, que están caracterizadas por dos enteros primos relativos m y n (≥ 2). Removemos la fibra ordinaria R. Entonces una fibra H de Π se puede deformar en n veces el eje z (después de proyectar estereográficamente como en §3) y como el eje z es homólogo a mM en A (con una orientación adecuada de M), tenemos que $H \sim mnM$ (en A). Por tanto $H - mnM \sim 0$

en A, i.e., $H = B$. Por (1) $M' \sim M + qB \sim$ $\sim (1-qmn)M + qH$ sobre Π. Como M es una curva cruzada sobre Π, el toro sellador tiene una fibra de multiplicidad $|qmn-1|$, porque $m, n > 1$ (de otra manera $\mathbb{R}$ estaría desanudado y no obtendríamos un espacio de Poincaré), luego $|qmn-1| \geq \max\{m,n\} >$ > 1. Por tanto R es el espacio de Poincaré con tres fibras excepcionales de multiplicidad m, n y $|qmn-1|$. Además como $|q_1mn-1| \neq$ $\neq |q_2mn-1|$ si $q_1 \neq q_2$, por tanto dos espacios de Poincaré obtenidos del mismo nudo toroidal con diferentes q's no son homeomorfos.

Finalmente, dos espacios de Poincaré obtenidos de nudos toroidales distintos nunca son homeomorfos. Porque si un espacio de Poincaré con fibras excepcionales $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ se obtiene de un nudo toroidal, entonces solo puede ser el nudo $m = \alpha_1$, $n = \alpha_2$, porque $|4mn-1| \geq \max\{n, m\}$.

Esto implica de paso que dos nudos toroidales m, n y m', n' con $m < n$ y $m' < n'$ son equivalentes solo si $m = m'$ y $n = n'$, porque solo en este caso coinciden los espacios de Poincaré que se construyen de ellos. Resumimos en el

<u>Teorema 12</u>. Un espacio de Poincaré se puede construir de un nodo toroidal si y solo si puede fibrarse y la fibración tiene exac-

tamente tres fibras excepcionales de multiplicidades $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son enteros primos relativos dos a dos (>1) y $\alpha_3 = |q\alpha_1\alpha_2 - 1|$ para algún $q \in \mathbb{Z}$.
Un espacio de Poincaré tal solo puede construirse de un nudo toroidal de manera única.

14. Espacios que no pueden Fibrarse.

Sea F un espacio fibrado (cerrado o abierto). Sea H una fibra ordinaria, o un punto de H y w una curva cerrada que empieza y termina en o. Trasladando a la fibra H a lo largo de w, H regresa como $H' = \pm H$. Por tanto, como elementos del grupo fundamental de F, $w^{-1} H w = H^{\pm 1}$! Por tanto si una 3-variedad M se puede fibrar, entonces $\pi_1(M)$ debe contener un elemento H tal que para cada elemento $w \in \pi_1(M)$, $w^{-1} H w = H^{\varepsilon(w)}$, donde $\varepsilon(w) = \pm 1$.

Esta es una condición no trivial, porque mostraremos que una fibra ordinaria H representa al elemento trivial del grupo si y solo si el espacio fibrado es S^3 o un espacio lente con una fibración que se puede describir explícitamente. En particular, si el grupo fundamental es infinito, entonces H es no trivial.

<u>Teorema</u> 14 Un espacio abierto simplemente conexo no puede fibrarse.

<u>Dem</u>. Supongamos que F es un espacio abierto simplemente conexo con superficie de órbitas f. Entonces $f \cong$ un disco abierto

<u>Caso (a)</u> F no tiene fibras excepcionales.

Como $\pi_1(F) = 1$, H es frontera de un disco con singularidades E contenido en F. La imagen de E sobre f es un disco con singularidades e que puede cubrirse con una vecindad de órbitas ω (porque f es abierto y simplemente conexo). E está, por tanto, contenido en la vecindad fibrada Ω correspondiente a ω, i.e. $H \simeq 0$ en el toro sólido Ω, lo que es una contradicción.

<u>Caso (b)</u> F tiene al menos una fibra excepcional C de multiplicidad α (>1)

Removiendo a C, obtenemos un espacio $\overline{\overline{F}}$ cuya superficie de órbitas $\overline{f}$ es un disco abierto agujerado. Usando, por ejemplo, la sucesión de Mayer-Vietoris para (F; $\overline{\overline{F}}$, vecindad de C), se tiene que $H_1(\overline{\overline{F}})$ es libre de rango 1, generado por un meridiano M del toro sólido removido que se mapea α veces sobre la curva frontera ℓ de $\overline{f}$, $\alpha \geq 2$. El mapeo proyección $\overline{F} \to \overline{f}$ induce un epimorfismo $H_1(\bar{F}) \to H_1(\bar{f})$. Como $H_1(\bar{f})$ es cíclico infinito, M se debe mapear a un generador $\pm l$ de $H_1(\bar{f})$, pero $M \mapsto \alpha l$ y $\alpha > 1$, lo que es una contradicción. +

El teorema anterior implica que $\mathbb{R}^3$ no puede fibrarse. Proyectando estereográficamente una fibración de S^3 en el espacio euclideano, el último se llena de curvas que parecen una fibración; solo una curva, el eje z, no es cerrada.

<u>Teorema</u> 15 Si en un espacio fibrado F, una fibra H o un múltiplo finito de H es homotópico a 0, entonces F es cerrado y $\pi_1(F)$ es finito.

<u>Dem</u>. El cubriente universal $\tilde{F}$ de F es un espacio fibrado (§9) que es

cerrado por el teorema anterior (por tanto $\tilde{f} \cong S^2$) y por tanto el cubriente $\tilde{F} \to F$ tiene un número finito de hojas.

<u>Teorema</u> 10 Si F es un espacio fibrado (cerrado o abierto) en el que una fibra ordinaria es homotópica a 0, entonces F es un espacio lente. Cualquier espacio lente admite una fibración tal.

<u>Dem</u>. Por el teorema anterior $\pi_1(F)$ es finito. Aplicamos el teorema 9.

Si $f \cong S^2$ y F tiene tres fibras excepcionales, entonces

$$\pi_1(F) = |Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, H : Q_0 H^b = 1 = Q_i^{\alpha_i} H^{\beta_i}, \quad Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 = 1, \quad Q_j H Q_j^{-1} = H| \quad (1)$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es una de las ternas platónicas. Eliminando a Q_0 e incluyendo la relación $H^2=1$, obtenemos un grupo cociente con relaciones

$$\bar{Q}_i^{\alpha_i}\,\bar{H}^{\delta_i} = \bar{Q}_1\bar{Q}_2\bar{Q}_3\,\bar{H}^{\delta_4} = \bar{H}^2 = 1$$

$$\bar{Q}_i\,\bar{H}\,\bar{Q}_i^{-1} = H \quad (i=1,2,3) \qquad (2)$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ son 0 o 1 dependiendo de si $\beta_1, \beta_2, \beta_3, b$ son pares o impares respectivamente. Tomando nuevos generadores, podemos suponer siempre que $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$ y $\delta_4 = 0$, porque en las ternas platónicas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, algún exponente, digamos $\alpha_2 = 2$; entonces $\beta_2 = 1$ $(0 < \beta_i < \alpha_i)$; por tanto $\delta_2 = 1$. Si α_1 es impar, β_1 podría ser par y $\delta_1 = 0$. En este caso tomamos como nuevo generador a Q'_1 definido por $\bar{Q}_1 = Q'_1 \bar{H}$. La relación $\bar{Q}_1^{\alpha_1} \bar{H}^{\delta_1} = 1$ se convierte en $Q_1'^{\alpha_1} \bar{H}^{\alpha_1+\delta_1} = 1$ y $\alpha_1 + \delta_1$ es impar, por tanto $\bar{H}^{\delta_1+\alpha_1} = \bar{H}$. Por tanto s.p.g. $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$. Si $\delta_4 = 1$, definimos a Q'_2 por $\bar{Q}_2 = Q'_2 \bar{H}$. Entonces $\delta_4 = 0$ y como $\alpha_2 = 2$, las otras relaciones no cambian. Por tanto

$$Q_1'^{\alpha_1} = Q_2'^{\alpha_2} = Q_3'^{\alpha_3} = \bar{H}.$$

$$Q'_1 Q'_2 Q'_3 = 1 \quad , \quad \bar{H}^2 = 1 \qquad (3)$$

Los grupos definidos por estas relaciones son (para las ternas platónicas) los grupos platónicos binarios. $\bar{H}$ tiene orden 2, de lo contrario, el grupo definido por (3) es el mismo que

$$| x_2, x_3 : (x_2 x_3)^{\alpha_1} = x_2^{\alpha_2} = x_3^{\alpha_3} = 1 |$$

Y en este último, el elemento $x_3 \cdot x_2$ no tiene orden finito.

Por tanto H no tiene orden 1 en $\pi_1(F)$, luego $H \not\simeq 0$ en F

Si $f \cong P^2$, entonces $r=1$ o $r=0$.

Para $r=1$, $\pi_1(F)$ tiene las relaciones

$$A H A^{-1} H = 1, \quad Q_0 Q_1 = A^2, \quad Q_j H Q_j^{-1} = H \quad (j=0,1)$$

$$Q_0 H^{o} = 1 = Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} \tag{4}$$

Eliminando a Q_0 y añadiendo la relación $H^2=1$, obtenemos un grupo cociente con relaciones:

$$\bar{A}^2 \bar{Q}_1^{-1} \bar{H}^{\delta_1} = \bar{Q}_1^{\alpha_1} \bar{H}^{\delta_2} = 1, \quad \bar{H}^2 = 1,$$

$$\bar{A}\bar{H}\bar{A}^{-1} = H, \quad \bar{Q}_1 \bar{H} \bar{Q}_1^{-1} = \bar{H}.$$

Eliminando a $\bar{Q}_1$ obtenemos el grupo abeliano con relaciones

$$\bar{H}^2 = 1 \ , \quad \bar{A}^{2\alpha_1} \bar{H}^{\delta_1} = 1$$

donde δ_1, δ_2 y δ_3 son 0 o 1. En este grupo abeliano $\bar{H}$ no tiene orden 1; por tanto $H \neq 0$ en F.

Si $r=0$, tenemos $\alpha_1 = 1$ y obtenemos el mismo resultado

El caso restante es que $f \cong S^2$ y F tiene a lo mas dos fibras excepcionales

Descomponemos a f en dos discos cada uno teniendo a lo más un punto excepcional. Esto corresponde a una descomposición de F en dos toros sólidos V_1, V_2.

Por tanto F es un espacio lente o $S^2 \times S^1$. $F \not\cong S^2 \times S^1$ porque una fibra en $S^2 \times S^1$ no es homotopica a 0.

<u>Teorema</u> 17 Si una variedad (abierta o cerrada) M no simplemente conexa se puede fibrar, entonces $\pi_1(M)$ tiene un elemento $H \neq 1$ tal que $w^{-1} H w = H^{\epsilon(w)}$, $\epsilon(w) = \pm 1$ para cada $w \in \pi_1(M)$.

<u>Dem.</u> Si una fibra $H \simeq 1$ en $\pi_1(M)$, entonces M es un espacio lente; si una fibra $H \not\simeq 1$ en $\pi_1(M)$, el resultado se sigue del primer párrafo de esta sección. +

Sean R_A y R_B dos 3-variedades. La suma conexa de R_A y R_B, denotada como $R_A \# R_B$, se obtiene removiendo de cada una una 3-bola y pegando las dos 2-esferas resultantes.

Si A y B son los grupos fundamentales de R_A y R_B, entonces el grupo fundamental de $R_A \# R_B$ es, por el teorema de Seifert-Van Kampen, el producto libre $A * B$ de A y B.

Cada elemento de $A * B$, que no es el elemento identidad, se puede reducir a una forma normalizada, en la que los terminos de A y de B diferentes de la identidad se alternan. Dos elementos del producto libre son iguales si y solo si sus formas normalizadas coinciden. Por ejemplo,

$$A_{i_1} B_{j_1} A_{i_2} B_{j_2} \cdots A_{i_r} B_{j_r} = A'_{i_1} B'_{j_1} A'_{i_2} B'_{j_2} \cdots A'_{i_s} B'_{j_s}$$

si y solo si

$s = r$ y $A_{i_1} = A'_{i_1}, B_{j_1} = B'_{j_1}, \dots, A_{i_r} = A'_{i_r}, B_{j_r} = B'_{j_r}$

<u>Lema 3</u> Si A y B son grupos no triviales entonces el producto libre $A * B$ tiene un elemento H como en el teorema anterior si y solo si A y B tienen orden 2.

<u>Dem</u> Supongamos que A y B tienen orden 2, sean $x \in A - \{1\}$ $y \in B - \{1\}$, entonces $x(xy)x^{-1} = yx^{-1} = (xy)^{-1}$ y $y(xy)y^{-1} = yx = (xy)^{-1}$, por tanto para cada $w \in A * B$, $w(xy)w^{-1} = (xy)^{\varepsilon(w)}$ con $\varepsilon(w) = \pm 1$.

Supongamos que existe un elemento $H \in A * B$ con la propiedad de que $wHw^{-1} = H^{\pm 1}$, por tanto $H \notin A$ y $H \notin B$, porque si $w \in B$, ent. $wHw^{-1} = H^{\pm 1}$ no puede ser un elemento de A

De manera similar $H \notin B$.
Como $H \notin A$, entonces H no conmuta con ningún elemento no trivial de A, porque, por ejemplo, aHa^{-1} no tiene la misma forma normalizada que H.
Por tanto para $a \in A - \{1\}$ $aHa^{-1} = H^{-1}$!
Si $a' \in A - \{1\}$, entonces $a'Ha'^{-1} = H^{-1}$, por tanto $a'^{-1}aHa^{-1}a' = H$, luego, $a^{-1}a' = 1$. Por tanto cada elemento $a' \neq 1$ de A es a^{-1}, en particular $a = a^{-1}$, i.e. $A = \mathbb{Z}_2(a)$. Lo mismo se cumple para B. +

Se tiene el

<u>Teorema</u> 18 La suma conexa de dos 3-variedades no simplemente conexas puede fibrarse si y solo si ambas variedades tienen grupo fundamental de orden 2.

BIBLIOGRAFIA

1. H. Seifert, "Topology of 3-dimensional fibered spaces", Acta Math. 60 (1933), 147-288

2. D.B.A. Epstein, "Curves on 2-manifolds and isotopies", Acta Math. 115 (1966), 83-107.

3. B. Gray, "Homotopy theory", Academic Press, New York, 1975

4. J. Hempel, "3-manifolds", Ann. of Math Studies 86, University Press, New Jersey, 1976

5. W. Massey, "Introducción a la topología algebraica", Reverté, Barcelona, 1972

6. W. Massey, "Singular homology theory", Springer Verlag, New York, 1980.

7. E. Moise, "*Geometric topology in dimensions 2 and 3*", Springer Verlag, New York, 1977.

8. M. H. A. Newman, "*Elements of the topology of plane sets of points*", University Press, Cambridge, 1951.

9. D. Rolfsen. "*Knots and Links*", Publish or Perish, Berkeley, 1976.

10. J. Vick, "*Homology theory*", Academic Press, New York, 1973.