

201  
12



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ingeniería

Análisis de Esfuerzos en Presas de  
Contrafuertes

T E S I S

Que para obtener el título de:

INGENIERO CIVIL

p r e s e n t a :

LUIS ERNESTO GASTELUM CELAYA



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN



UNIVERSIDAD NACIONAL  
DE CHILE

Al Pasante señor LUIS ERNESTO GASTELUM DELAYA,  
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor M. I. Carlos Espinosa González, para que lo desarrolle como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN PRESAS DE CONTRAFUERTE"

- I. Introducción.
- II. Análisis de esfuerzos en contrafuertes por el método de Pigeaud.
- III. Análisis de esfuerzos en contrafuertes por el método de Steflo.
- IV. Análisis de esfuerzos en contrafuertes por el método de Claudio Marcello.
- V. Análisis de esfuerzos por el método del elemento finito.
- VI. Ejemplo de aplicación.
- VII. Conclusiones.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
C.A. Universitaria, 18 de marzo de 1982  
EL DIRECTOR

JAVIER JIMÉNEZ TEJEDA

1982

## INDICE

### CAPITULO I.

#### INTRODUCCION

Pag.

1.1.-	Generalidades .....	1
1.2.-	Selección del tipo de presa .....	1
1.3.-	Clasificación de los diferentes tipos de presas..	6
1.3.1.-	Clasificación atendiendo a su uso.....	6
1.3.2.-	Clasificación según su proyecto hidráulico.....	8
1.3.3.-	Clasificación según los materiales.....	9
1.3.3.1.-	Presas de materiales sueltos.....	9
1.3.3.2.-	Presas de materiales cementados.....	14
1.3.3.1.-	Características de las presas de contrafuertes...	22

### CAPITULO II.

#### ANALISIS DE ESFUERZOS EN CONTRAFUERTE POR EL METODO DE PIGEAUD.

II.1.-	Generalidades.....	25
II.2.-	Distribución de los esfuerzos en la cabeza.....	25
II.2.1.-	Consideraciones del método de análisis.....	25
II.3.-	Revisión estructural del cuerpo del machón.....	32
II.3.1.-	Método de Pigeaud.....	35

### CAPITULO III.

#### ANALISIS DE ESFUERZOS EN CONTRAFUERTE POR EL METODO DE STEFKO.

III.1.-	Método de Stefko.....	39
---------	-----------------------	----

### CAPITULO IV.

#### ANALISIS DE ESFUERZOS EN CONTRAFUERTE POR EL METODO DE CLAUDIO MARCELLO.

IV.1.-	Presas de machones tipo "Marcello".....	42
IV.2.-	Consideraciones para el análisis estructural del contrafuerte.....	45

IV.2.1.-	Fuerzas actuantes.....	43
IV.3.-	Método del cálculo de esfuerzos en el cuerpo del contrafuerte.....	47
IV.3.1.-	Determinación de esfuerzos mediante el equilibrio de trozos de tajadas horizontales.....	49
CAPITULO V.		
ANALISIS DE ESFUERZOS POR EL METODO DEL ELEMENTO FINITO.		
V.1.-	Método del elemento finito.....	54
CAPITULO VI.		
EJEMPLO DE APLICACION.		
VI.1.-	Generalidades.....	59
VI.2.-	Ejemplo.....	59
VI.2.1.-	Datos del ejemplo.....	59
VI.2.2.-	Solución.....	60
CAPITULO VII.		
CONCLUSIONES.		
	Conclusiones.....	79
	BIBLIOGRAFIA.....	81

CAPITULO I  
INTRODUCCION

1.1.- Generalidades.

Presa es el conjunto de estructuras hidráulicas que constituyen un obstáculo que se opone a una corriente, cuya función es la de modificar y regularizar su régimen hidrológico, creando un lago artificial hasta una cota prefijada.

1.2.- Selección del tipo de presa.

Para un sitio o boquilla determinada existe un tipo de presa que resuelve de una manera satisfactoria los problemas propios del sitio. La elección está basada en las siguientes condiciones:

a).- Criterio general.

Depende de la experiencia del proyectista sirviendo como una elección preliminar.

b).- Aspecto topográfico.

Relativo a lo estrecho o amplio de la boquilla, la simetría o asimetría de la misma y de lo escarpado o tendido de las laderas.

c).- Condiciones geológicas.

Es de primordial importancia el aspecto geológico de la boquilla, distinguiéndose diversos factores como son: echado de capas, existencia de fallas, intemperización de los materiales superficiales, etc.; en cada caso se requiere un tratamiento adecuado y un determinado tipo de presa.

d).- Materiales disponibles.

La distribución de los materiales debe satisfacer los requisitos de buen funcionamiento y mínimo costo, lo cual depende, para cada sitio en particular, de las propiedades mecánicas, volúmenes y distancias de acarreo de los materiales disponibles y de las características de la cimentación. Las posibles combinaciones de estos factores, dan lugar a un sinnúmero de secciones pero estas se pueden agrupar en "tipos" adaptables a los diversos conjuntos de condiciones que prevalezcan en distintos sitios, de manera que se cumplan satisfactoriamente los requisitos de seguridad y economía. Es frecuente que el diseñador tenga que comparar entre sí más de un tipo de sección y algunas de sus variantes, antes de llegar a la solución más conveniente.



e).- Aspectos varios.

Son todos aquellos factores que de una manera u otra ejercen su influencia en la selección del tipo de presa, como pueden ser: aspectos legales, de estética o concernientes al tamaño y localización de vertedores.

1.3.- Clasificación de los diferentes tipos de presas.

Las presas se pueden dividir en un número de categorías diferentes, dependiendo del objeto de clasificación siendo éstas: por su uso, proyecto hidráulico o los materiales que forman la estructura.

1.3.1.- Atendiendo al uso las presas se pueden clasificar en:

a). Presas de almacenamiento.

b). Presa derivadora.

c). Presa de control y defensa.

a).- Las presas de almacenamiento se construyen para embalsar el agua en los períodos en que ésta sobra, para utilizarla cuando escasea. Estos períodos pueden ser estacionales, anuales o más largos. Muchas presas pequeñas almacenan los escurrimientos de primavera para utilizarlos en la estación seca de verano.

Los aprovechamientos que se pueden lograr mediante la construcción de una presa de almacenamiento son muy variados, en algunos proyectos son dos o más, tratando siempre de darle el mayor número de finalidades posibles, siendo las más comunes las siguientes:

para abastecimiento de agua potable.

Para generar o producir energía eléctrica.

Para irrigación de tierras.

Para navegación.

Para actividades turísticas o recreativas.

Para el desarrollo de la flora y fauna acuáticas.

Para entarquinamiento.

b).- Las presas derivadoras se construyen ordinariamente para proporcionar la carga necesaria para desviar el agua mediante zanjas, canales u otros sistemas de conducción hacia el lugar en que se van a usar.

Se utilizan en los sistemas de riego, para la derivación de una corriente natural hacia un vaso de almacenamiento fuera del cauce natural de la corriente, para usos municipales e industriales, o para una combinación de los mismos.

c).- Las presas de control y defensa comúnmente denominadas reguladoras se construyen para retardar el escurrimiento de las avenidas y disminuir el pico de éstas, evitando o aminorando los daños por inundación en las zonas localizadas aguas abajo de la obra.

Estas presas se dividen en dos tipos, en uno de ellos el agua es almacenada temporalmente, y se deja salir por una obra de toma con un gasto que no exceda de la capacidad del cauce; en el otro tipo, el agua se almacena tanto tiempo como sea posible y se deja infiltrar en las laderas del valle o por los estratos de grava de la cimentación. A éste último tipo se le llama algunas veces de distribución o dique, porque su principal objeto es recargar los acuíferos. Las presas reguladoras también se construyen para detener los sedimentos, a menudo a éstas se les llama presas para arrastres.

#### 1.3.2.- Clasificación según su proyecto hidráulico.

- a). Presas vertedoras.
- b). Presas no vertedoras.
- c). Presas mixtas.

a). Las presas vertedoras se proyectan para descargar sobre sus coronas, deben de estar formadas por materiales que no se erosionen con tales descargas. Es necesario emplear concreto si es necesario.

b).- Las presas no vertedoras son las que se proyectan para que el agua no rebase por su corona. Este tipo de proyecto permite ampliar la elección de materiales incluyendo las presas de tierra y las de enrocamiento.

c).- Las presas mixtas son las que combinan los dos tipos antes descritos para formar una estructura compuesta, consistiendo en una parte vertedora y otra formada por terraplenes.

#### 1.3.3.- Clasificación según los materiales.

La clasificación más común que se usa en la discusión de los procedimientos de construcción se basa en los materiales que forman la estructura. Estas se dividen en presas de materiales sueltos y presas de materiales cementados, las cuales se subdividen en otros tipos dependiendo de la sección que las constituyen y que enseguida se expresan.

##### 1.3.3.1.- Presas de materiales sueltos.

a).- Presa de tierra.

Las presas de tierra constituyen el tipo de presas más común, principalmente porque en su construcción intervienen materiales en su estado natural que requieren el mínimo de tratamiento. Además los requisitos para su cimentación y construcción son por lo general otros tipos

Las presas de tierra requieren de estructuras complementarias que sirvan de vertedores de demasías. La principal desventaja de una presa de tierra es que, si no tiene suficiente capacidad el vertedor de demasías puede dañarse y aún destruirse por el efecto erosivo del agua que llegue a rebasarla.

b).- Presa homogénea.

Este tipo de presa es construída casi exclusivamente a base de un suelo compactado que proporciona simultáneamente la impermeabilidad y la estabilidad necesarias. Tiene una chapa de enrocamiento en el talud de aguas arriba como protección contra el oleaje producido en el embalse. El talud de aguas abajo suele protegerse de manera similar, aunque en ocasiones también se usa césped para evitar la erosión. Con objeto de evitar el arrastre de material fino a través de la cortina se dispone generalmente de un dren o filtro en el pie o talud de aguas abajo.

La fig. 1 ilustra una sección típica de presa homogénea.

c). Presa de materiales graduados.

Cuando se dispone de suficientes tipos de suelos con diferentes permeabilidades éstos pueden distribuirse en la sección de acuerdo con la permeabilidad de una manera gradual, de lo más grueso en el exterior, pasando por los filtros a través de los cuales se filtran las chapas de enrocamiento. La fig. 2 muestra un ejemplo de este tipo de presa.

d).- Presa de sección mixta.

Este tipo de sección está formado por un corazón impermeable, protegido en ambos lados por respaldos importantes de enrocamiento, bolcos o materiales similares que proporcionan estabilidad al conjunto.

Entre el corazón y los respaldos de enrocamiento se colocan filtros para que impidan la difusión del material del corazón entre el enrocamiento. La fig. 3 muestra una sección típica.

e).- Presas de enrocamiento.

En las presas de enrocamiento se utiliza roca de todos los tamaños, siendo su volumen predominante en la sección, la cual da estabilidad a una membrana impermeable. La membrana puede ser una capa de material impermeable del lado del talud aguas arriba, ya sea una losa de concreto, un recubrimiento de concreto asfáltico o cualquier dispositivo semejante; pudiendo ser también un núcleo interior del material impermeable. La fig. 4 y 5 ilustran secciones de este tipo de presas.

Las presas de enrocamiento requieren de cimentaciones que no estén sujetas a asentamientos de magnitudes suficientes para romper la membrana impermeable. Las únicas cimentaciones adecuadas, por lo general son la roca o la arena y grava compacta.

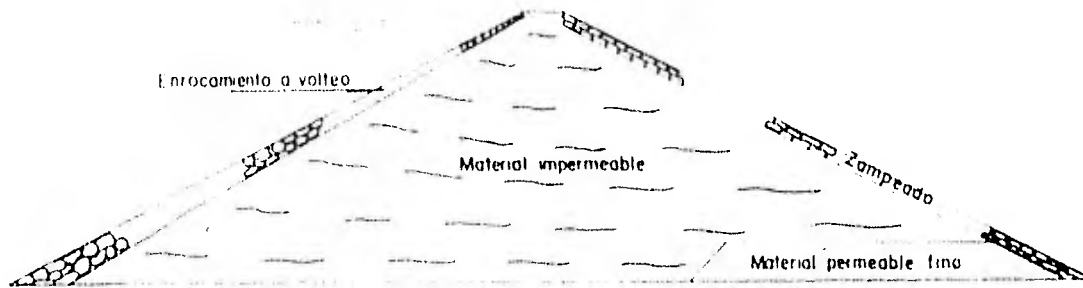


Fig. 1 Sección de presa homogénea.

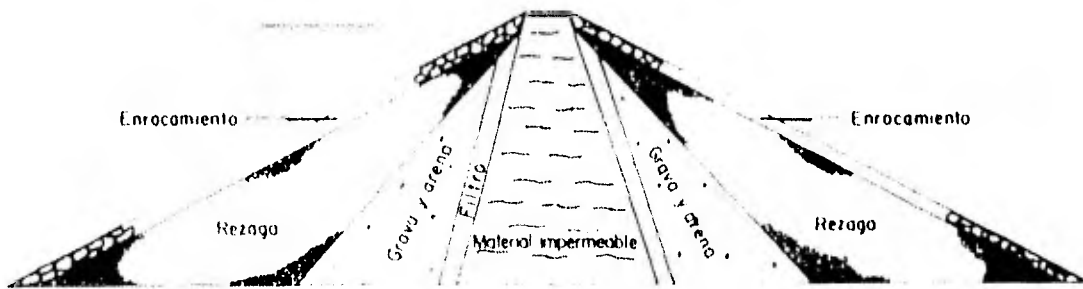


Fig. 2 Sección de presa de materiales graduados.

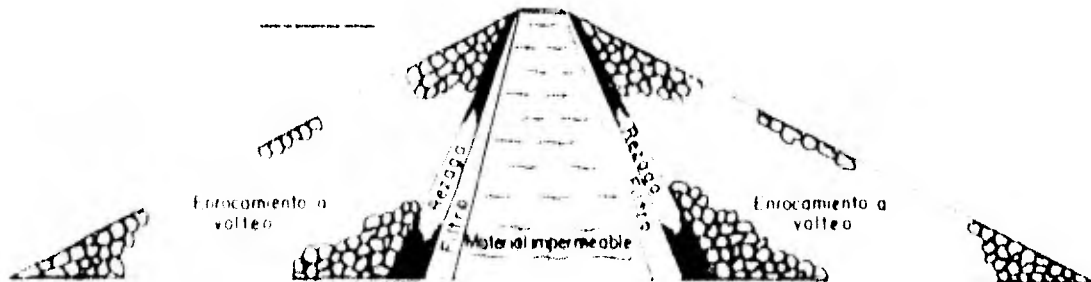


Fig. 3 Sección de presa mixta



Fig. 4 Sección de presa de enrocamiento con pantalla de concreto.

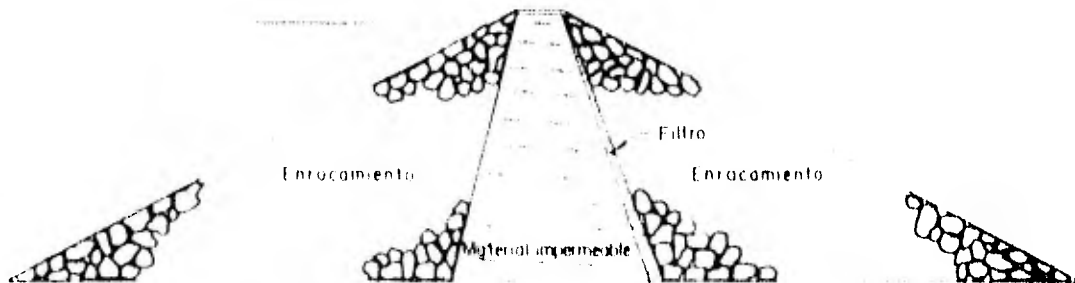


Fig. 5 Sección de presa de enrocamiento con núcleo de material impermeable.



### 1.3.3.2. - Presas de materiales cementados.

Con éste término genérico se agrupan varios tipos de presas entre los que se pueden mencionar las presas de gravedad, las de contrafuertes y las de arco-bóveda.

El material de construcción empleado en la mayoría de éstas presas es el concreto. Estas presas se adaptan a los lugares en que se dispone de una cimentación de roca razonablemente sana, aunque las estructuras bajas se pueden establecer sobre cimentaciones aluviales si se construyen los dados adecuados.

#### a). - Presas de gravedad.

Una presa de éste tipo es aquella cuya estabilidad frente a las fuerzas externas actuantes sobre ellas, se debe fundamentalmente a su peso propio.

La presión hidrostática en la base puede reducirse mediante drenes, lo que trae como consecuencia un talud más reducido en el lado de aguas abajo.

Cuando el paramento de aguas arriba es ligeramente inclinado, el peso del agua introduce cierto efecto estabilizante.

La Fig. 6 muestra una sección típica de gravedad, así como las fuerzas que actúan sobre ella.

Al comenzar el siglo 19, algunas de las presas de gravedad se construyeron de mampostería.

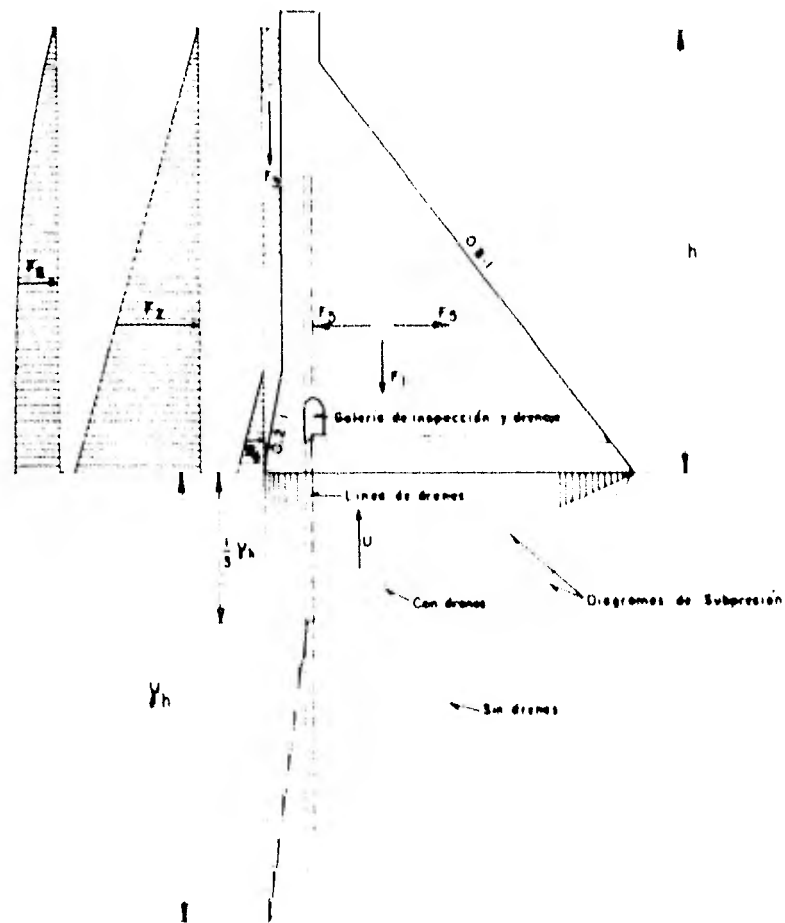


Fig. 6 Sección típica de presa de gravedad.

Fuerzas Actuantes

- $F_1$  — Peso propio de la estructura
- $F_2$  — Empuje hidrostático
- $F_3$  — Peso del agua sobre el talud de aguas arriba
- $F_4$  — Empuje de azoles
- $F_5$  — Fuerzas adicionales por efecto de sismo horizontal en la masa de la estructura
- $F_6$  — Fuerza adicional provocada por el agua en el talud de aguas arriba, por efecto de sismo horizontal
- U — Subpresión hidrostática

Sin embargo, la cantidad de mano de obra requerida en ésta operación ha sido la causa del uso exclusivo que se hace del concreto en la construcción de las presas modernas de gravedad.

A pesar de que el diseño de una presa de gravedad es relativamente fácil, producto de la sencillez de su geometría, los ingenieros de todo el mundo se inclinan también por otros tipos de presa; esto se debe a varias razones, siendo las más importantes:

1).- En éste tipo de presa, los esfuerzos a que se ve sometido el concreto son en general muy bajos respecto a los que podría soportar.

Además no es factible hacer trabajar al concreto a esfuerzos mayores, sin que se afecte radicalmente la estabilidad de la estructura.

2).- Los grandes avances en los procedimientos de construcción, el vertiginoso desarrollo de las computadoras electrónicas, tanto digitales como analógicas, y los modernos métodos matemáticos de análisis estructural, como es el caso del método del elemento finito, desarrollado por el polaco O.C. Zienkiewicz; han permitido una marcada evolución en la ingeniería de presas, en países tales como Italia, Francia, México y Estados Unidos, por citar a algunos; lo que ha venido dando lugar a la construcción de presas de ventrillo, o de arco, o de bóveda.

b). Presas de contrafuertes.

Para clasificar las presas de contrafuertes es necesario tomar en cuenta la solución adoptada para la cubierta de la presa en el talud de aguas arriba; de acuerdo a ello se tienen los siguientes tipos principales.

1. Tipo Ambursen.

Su cubierta está constituida a base de losas planas apoyadas sobre contrafuertes. Se utiliza en su construcción un volumen apreciable de concreto reforzado. Las losas de la cubierta se apoyan sobre los contrafuertes utilizando juntas de expansión. La fig. 7 muestra una sección con sus características geométricas.

2. Presas de arcos (bóvedas) múltiples.

En este tipo de presas la cubierta está constituida por arcos empotrados en los contrafuertes. El efecto de resistencia de los arcos o bóvedas permite disponer de un mayor espaciamiento entre los contrafuertes, pudiéndose requerir en ocasiones, concreto reforzado.

La fig. 8 muestra las características de este tipo.

3. Presa de canchales y arcos.

La presa de canchales se construye cubierta mediante un canchales de concreto en el extremo del talud de aguas arriba de los contrafuertes.

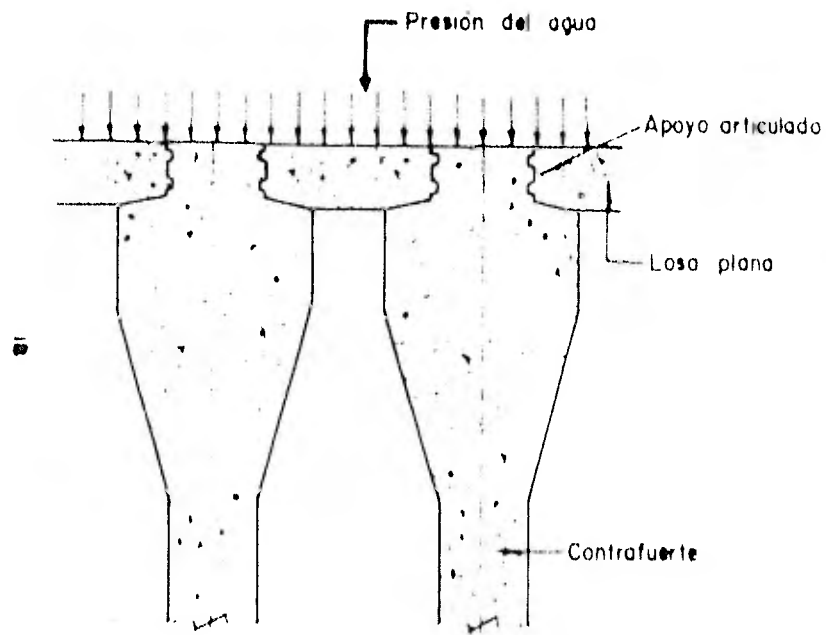


Fig. 7 Cortina tipo Ambursen

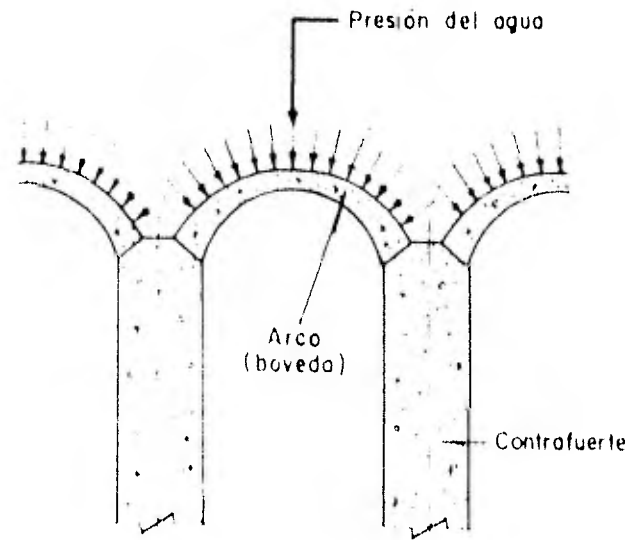


Fig. 8 Cortina de arcos múltiples

Cabe hacer notar que en éste tipo de estructuras no se utiliza acero de refuerzo.

Cada machón deberá ser estable por sí mismo. Las características geométricas de las cabezas de los contrafuertes pueden ser muy variadas, sin embargo las más comunes son:

- Machones de cabeza redonda (Fig. 9)
- Machones de cabeza de diamante (Fig. 10)
- Machones con cabeza en T (Fig. 11)

como caso particular, y de gran desarrollo en los últimos años, es necesario citar de manera especial, la presa de machones huecos o tipo Marcello, desarrollada en Italia por el Dr. Claudio Marcello.

Tiene las mismas características generales que el resto de las presas de machones, aunque hay que añadir como característica particular, una mayor rigidez lateral.

La fig. 12 ilustra una sección típica de éste tipo de machones.

### c). - Presas de bóveda.

En las presas de bóveda se aprovecha el efecto de arco para transmitir la mayor parte de la presión hidrostática, horizontalmente hacia los empotramientos de las laterales.

Estas presas pueden ser muy esbeltas, utilizando por ello volúmenes mucho menores que otra.

20

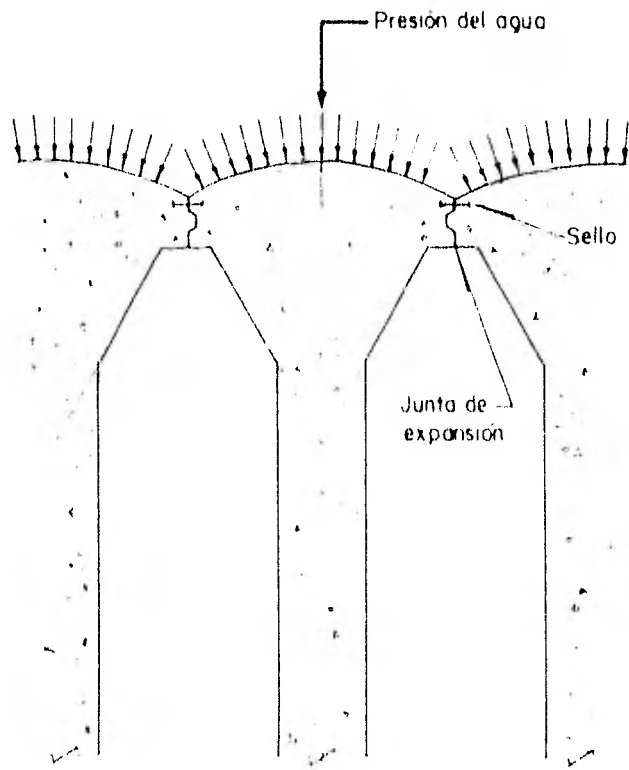


Fig 9 Machones de cabeza redonda

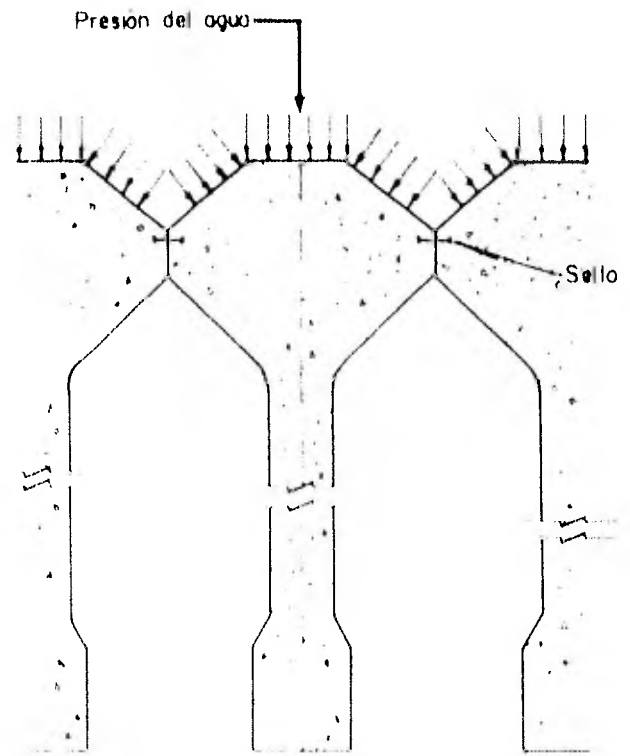


Fig 10 Machones de cabeza de diamante

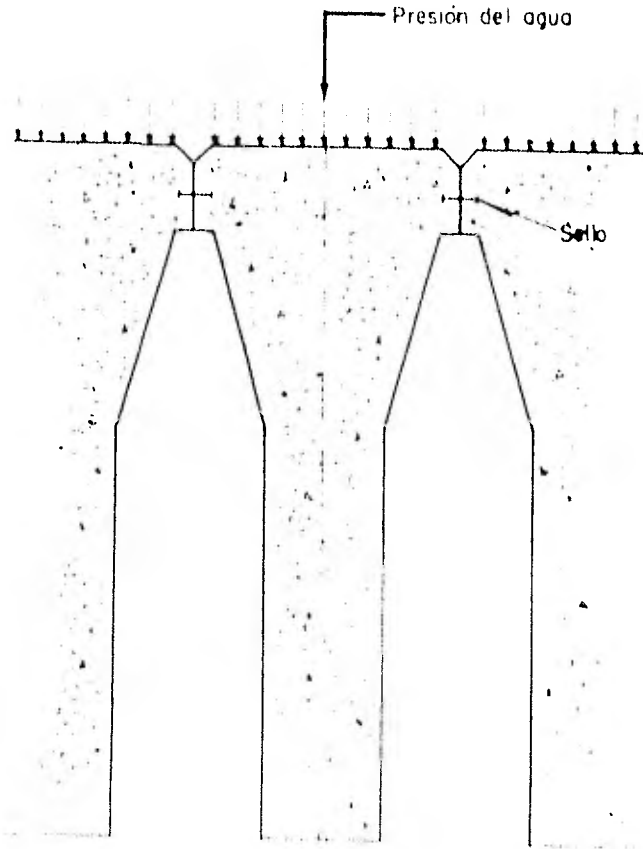


Fig. 11 Machones con cabeza en "T"

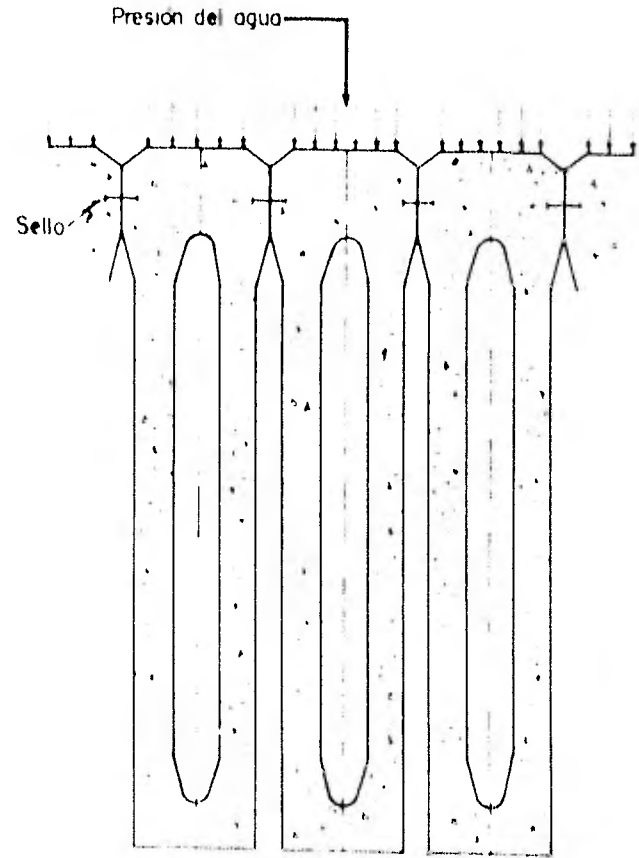


Fig. 12 Machones tipo Marcello



Requieren de condiciones geológicas excelentes, así como boquillas muy angostas.

La fig. 13 muestra una sección típica.

#### 1.3.4.- Características de las presas de contrafuertes.

Las presas de contrafuertes ofrecen características que se traducen en ventajas o desventajas respecto a las presas de gravedad.

A continuación se enlistan unas y otras.

##### a). Ventajas:

- Las presas de contrafuertes requieren un menor volúmen de concreto, como consecuencia de anular prácticamente las subpresiones.
- Si el paramento de aguas arriba es inclinado, debido al peso del agua sobre éste, se introduce un efecto estabilizante, que en las presas de contrafuertes es importante, reduciendo en un ahorro de concreto también.

La presa de contrafuertes facilita el acceso a la parte posterior de la cubierta, lo cual es adecuado para revisiones periódicas de la estructura, así como trabajos de inyección o perforaciones de drenes que pudie en ser necesarios después de la construcción de la presa.

Fig 13 Sección de una pieza  
de Aluminio.

- Se aprovecha más adecuadamente la resistencia del concreto.

- La reducción en volúmen de concreto y el aumento en la relación del área de la superficie de concreto al volúmen, permiten una mayor disipación del calor de fraguado.

b). - Desventajas:

- Los esfuerzos normales y cortantes en la cimentación son mayores, debido a la menor área de contacto entre la estructura y la superficie de desplante.

- Las presas de contrafuertes requieren mayor cantidad de cimbra lo cual implica que el costo unitario del concreto sea un poco mayor que en una presa de gravedad.

- Debido a efectos sísmicos, así como el posible pandeo de los contrafuertes, puede ser necesario utilizar elementos rigidizantes transversales a los contrafuertes, lo cual se logra intrínsecamente con la forma de los machones tipo Marcello.

## CAPITULO II

### ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN CONTRAFUERTES POR EL METODO DE PIGEAUD.

#### II.1.- GENERALIDADES.

Aunque el propósito de éste trabajo es el de describir someramente los distintos métodos de análisis existentes para obtener de una manera preliminar la distribución de esfuerzos en el cuerpo del contrafuerte, se desarrollará de igual forma la obtención de los esfuerzos en la cabeza.

#### II.2.- Distribución de esfuerzos en la cabeza.

La cubierta de éste tipo de cortinas se forma por la unión de las cabezas o ampliaciones de los contrafuertes en contacto con el agua, de manera que su diseño debiera ligarse íntimamente al del cuerpo del machón. No obstante, para efectos prácticos no es necesario resolver el problema tridimensional ya que el cuerpo del machón puede asimilarse en razón de sus dimensiones, a una placa plana y solo es corriente hacer un análisis del estado bidimensional de esfuerzos, como veremos más adelante.

#### II.2.1.- Consideraciones del método de análisis.

Para el diseño de la cabeza se considera un tipo de placa bidimensional. Esto se debe a que al estar la cabeza en contacto con el agua, se puede considerar al problema como un problema de placa plana. En consecuencia, se puede considerar al problema como un problema de placa plana.

e integrando la ecuación biarmónica en el interior a partir de las condiciones de frontera.

Ahora bien, el problema elástico bidimensional puede plantearse de dos formas opuestas en su sentido físico pero de igual aspecto matemático: el estado bidimensional de esfuerzos y el estado plano de deformaciones. El primer caso supone que el cuerpo que interesa es una placa con dimensiones apreciables en el plano XY y espesor muy pequeño en el sentido OZ, en que las caras paralelas al plano XY están libres de esfuerzos.

Es claro que éste modelo no puede representar a la tajada de la cabeza del machón, pues el esfuerzo normal al plano XY, debido primordialmente a la compresión producida por el peso del concreto que se encuentre sobre la tajada, dista mucho de ser nulo o despreciable.

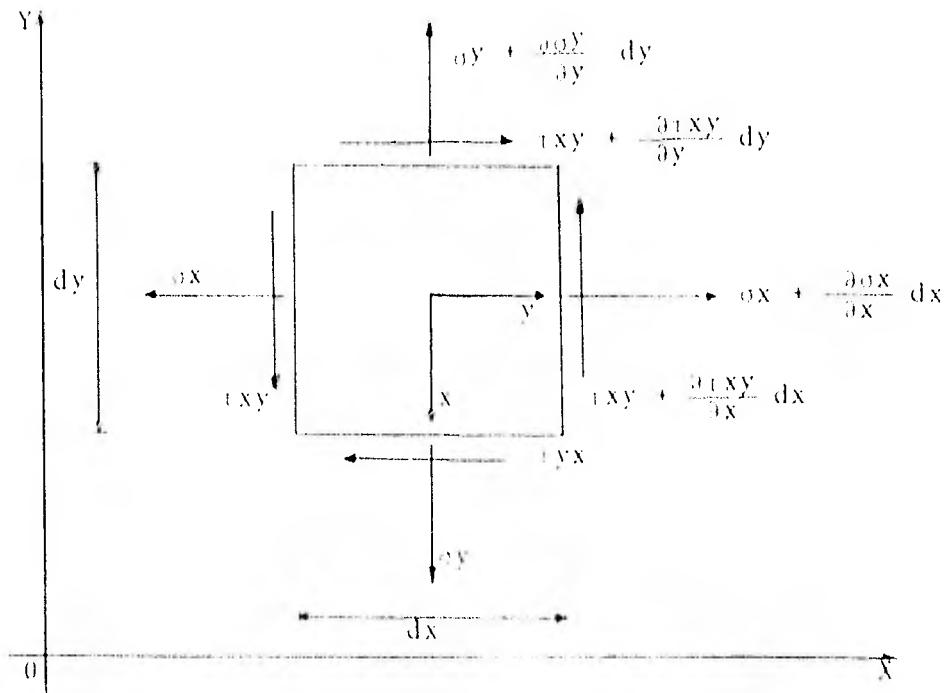
El estado plano de deformación se caracteriza, a su vez, por las hipótesis siguientes: la deformación normal unitaria en la dirección OZ es nula, así como las deformaciones angulares en planos paralelos a dicha dirección; las deformaciones en el plano XY solo dependen de las coordenadas  $x, y$ . Esto implica generalmente, que en la carga externa ni las dimensiones del cuerpo varían con la dirección Z, resultando tam

bién que los esfuerzos cortantes en las caras de la tajada son nulos, en tanto que el normal es solo función de  $(x,y)$ .

El problema de la cabeza del machón puede asimilarse aproximadamente a éste caso de deformación bidimensional en razón, sobre todo a que puede considerarse nula la deformación normal en la dirección  $OZ$ . En todo caso, los resultados del análisis son solo un acercamiento a la realidad. Por otra parte, se puede aproximar al análisis tridimensional de esfuerzos si al estado plano debido a la presión hidrostática, que se haya sustituido como se describe a continuación, se superpone un estado de esfuerzos de compresión simple, debido a la componente del peso propio del concreto que quede arriba de la sección analizada.

En cualquier caso, de estado bidimensional de esfuerzos o deformaciones, las ecuaciones elásticas que permiten valorar las magnitudes de los esfuerzos son las de equilibrio interno.

Consideremos un elemento infinitesimal en el que actúan esfuerzos y fuerzas nítidas del peso propio de la siguiente forma:



Estableciendo el equilibrio para el elemento diferencial, tenemos lo siguiente:

$$\sum F_x = 0$$

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) (dy, 1) - \sigma_x (dy, 1) + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) (dx, 1) - \tau_{xy} (dx, 1) + X (dx, dy, 1) = 0$$

$$\sigma_x dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy - \sigma_x dy + \tau_{xy} dx + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy dx - \tau_{xy} dx + X dx dy = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx dy + X dx dy = 0$$

obteniéndose la ecuación de equilibrio interno en el sentido X,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (1.11)$$

De igual forma se establece la ecuación de equilibrio interno en el sentido Y,

$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \gamma = 0 \quad (1-b)$$

Y la condición de Lévy, deducida a partir de las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones y de la ley de Hooke generalizada:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2)$$

La solución del problema plano se reduce a la integración de las tres ecuaciones anteriores, debiendo satisfacer las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x \cos \alpha + t_{xy} \cos \beta \\ S_y &= t_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta \end{aligned} \quad (3)$$

Usualmente, la componente X de las fuerzas másicas es nula (salvo en la condición extraordinaria de sismo transversal), si se dirige al eje 0X paralelo al borde del contacto con el agua, en tanto que la componente Y, tomaría el valor  $\gamma \cos \theta = K$  si se dirige al eje 0Y normal al paramento y hacia abajo, siendo  $\gamma$  el peso volumétrico del material y  $\theta$  el ángulo de inclinación del paramento aguas arriba con la horizontal.

El sistema (1-a), b) es homogéneo, de forma que su solución general es la del sistema homogéneo adicionada de una solución particular del sistema no homogéneo. La solución general del sistema homogéneo es:



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

en que  $\phi(X,Y)$  es una función arbitraria, exigiéndose solamente la existencia y continuidad de sus derivadas parciales hasta de cuarto orden.

Una solución particular del sistema, para el caso en que  $X = 0$ ,  $Y = W$ , puede ser la siguiente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = W y \quad (5)$$

por lo que la solución general resulta:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} ; \quad W y ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

Al reemplazar en (2) los valores (4), se obtiene:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (7)$$

en tanto que (1 a,b) se satisfacen idénticamente, por lo que el sistema (1 a,b)(2) se reduce a la ecuación biarmónica (7), siempre debiendo cumplirse las condiciones de frontera (5).

Salvo en la parte superior de la cortina, en que la presión del agua tiene magnitud comparable a la componente  $W$  del peso propio del material, ésta puede despreciarse, simplificándose aún más el problema. En efecto si en

las expresiones (6) desaparece el término  $-Wy$ , puede establecerse una analogía entre la frontera de la región de integración y una barra curva, cumpliéndose:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P &= \frac{P}{A} F_y \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_P &= \frac{P}{A} F_x \\ \phi_P &= \frac{P}{A} M_P \end{aligned}$$

expresiones en la que  $F_x$ ,  $F_y$  son las fuerzas exteriores que actúan en la frontera entre el punto A, origen arbitrario y el punto P, en los sentidos X, Y, respectivamente y M es el momento respecto a P de esas mismas fuerzas. Estas igualdades permiten valorar fácilmente los valores de  $\phi$  y de sus dos parciales en todo punto P de la frontera.

Una vez conocidos numéricamente los valores de  $\phi$  en la frontera puede cubrirse la región de integración de la ecuación biarmónica por medio de una malla de cuadrados y procederse a la integración por diferencias finitas, planteando un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve mediante la aplicación de cualquier algoritmo de cálculo común, usualmente ha estado en uso de una computadora electrónica.

Al plantear el problema de un eje se presenta,

generalmente, problemas en los puntos vecinos a la frontera, debiendo echarse mano de artificios para poder valuar el comportamiento de la función en esos puntos.

Una vez resuelto el problema de integrar la ecuación biarmónica obteniendo los valores de dentro de la cabeza del machón, es fácil calcular, a partir de ellos los esfuerzos normales y tangenciales en las direcciones de los ejes coordinados, con las ecuaciones (6), asimilando las derivadas o cocientes de diferencias.

A partir de los esfuerzos calculados se procederá al cálculo de los esfuerzos principales en el interior de la cabeza; la comparación de ellos con los valores permisibles dará la pauta para modificar, si es necesario, la geometría de la cabeza.

### 11.3. - Revisión estructural del cuerpo del machón.

Como en muchos otros problemas de diseño estructural, el proceso general del diseño de los machones consiste en proponer una geometría que, en este caso, ya deberá cumplir con las condiciones de no volteamiento y no deslizamiento e indicar el estado de esfuerzos que en su interior inducen las cargas externas.

### 11.5.4.- Método de Pigeaud.

Uno de los métodos más comunes para revisar los esfuerzos en el seno del machón es el de Pigeaud, utilizado por los ingenieros franceses desde la década de los treinta; las bases del método pueden obtenerse integrando la ecuación biarmónica, con las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Aguas abajo:} \quad & \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + m \frac{\partial xy}{\partial x^2} = 0 \\ & \frac{\partial xy}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Aguas arriba:} \quad & -\lambda + n \frac{\partial xy}{\partial x^2} + W_y = 0 \\ & \frac{\partial xy}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + nW_y = 0 \end{aligned}$$

Se supone que la única fuerza másica es el peso propio del material del machón,  $\gamma = \rho g$ , y la  $W$  de las condiciones de frontera representa el peso volumétrico del agua, ajustado por la relación:  $S = \frac{B}{b}$  entre el ancho de la cubierta que descarga sobre el machón y el espesor de éste  $W = \gamma a S$ .

Como el número de condiciones de frontera es 4, se elige una función de Airy con cuatro coeficientes, no debiendo contener términos de grado superior al tercero, por ejemplo:

$$F = \frac{a}{6} x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3$$

resultando entonces:

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = cx + dy$$

$$\sigma_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = (c + Y) - ax + (b - c) y$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -(bx + cy)$$

La resolución del sistema de ecuaciones conduce a las siguientes expresiones:

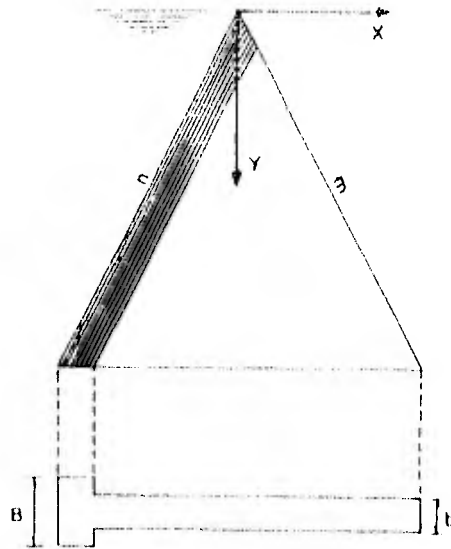
$$a = \frac{m - n}{(m+n)^2} c + \frac{1}{(m+n)^2} (5mn - n^2) W$$

$$b = \frac{2mn}{(m+n)^2} c + \frac{2m^2 n + m - n}{(m+n)^2} W$$

$$c = \frac{mn(m-n)}{(m+n)^2} c + \frac{mn(2 - mn + m^2)}{(m+n)^2} W$$

$$d = -\frac{2m - n^2}{(m+n)^2} c + \frac{m - (2mn^2 - 3n - m)}{(m+n)^2} W$$

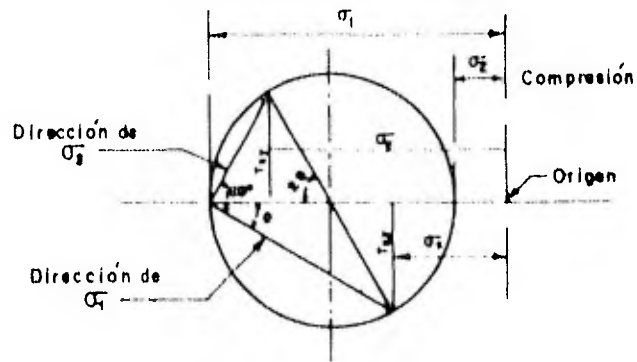
FIG. 1. - CONSIDERACIONES DEL METODO.



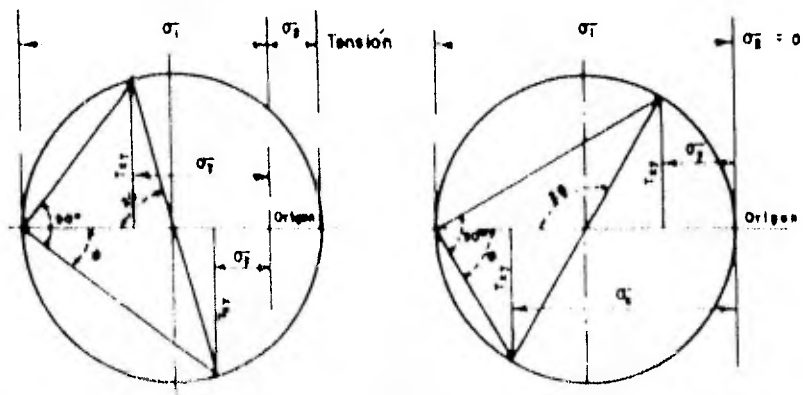
Habrá que tener en consideraci3n que éste método de análisis se basa en las siguientes hipótesis:

- 1.- El nivel del agua coincide con el v rtice superior del triángulo.
  - 2.- El espesor del contrafuerte se considera constante.
- Además los signos que resulten en los esfuerzos, se consideran de compresi3n los negativos y a tensi3n los positivos.

Determinados los valores  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , encontraremos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  los cuales nos servirán para determinar los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  como su direcci3n, ya sea de una manera gráfica mediante el Círculo de Mohr o empleando las siguientes expresiones:



a - SEGUNDO ESFUERZO PRINCIPAL EN COMPRESION



b - Segundo esfuerzo principal en tensión      c - Segundo esfuerzo principal cero

FIG. 2 - ANALISIS DE ESFUERZOS PRINCIPALES  
MEDIANTE EL CIRCULO DE MOHR

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \text{ang} \tan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

La fig. 2 explica por sí misma la determinación de esfuerzos principales mediante el Círculo de Mohr.

El cálculo de los esfuerzos principales y la condición de no tensiones en el paramento de aguas arriba lleva a la expresión:

$$(1 - \mu)W = \mu n + n(n + 1) \cdot c$$

En tanto que el volumen de contrahuerto, por unidad de ancho de la cubierta, es:

$$V = M + n \cdot J$$

Lo que lleva a que el volumen de material en los



contrafuertes cuando se hace mínimo el valor  $(m+n/S)$ .

En la tabla No. 1, debida a Malterre, se muestra el comportamiento de esa función, para parejas de valores de  $n$  y  $S$ , suponiendo satisfecha la condición de no tensiones, y tomando como peso volumétrico del concreto  $2.4 \text{ ton/m}^3$ .

Tabla No. 1 VALORES DE  $\frac{m+n}{S}$

$n \backslash S$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	0.645	0.680	0.752	0.855	0.987	1.136
2	0.455	0.447	0.452	0.489	0.540	0.607
3	0.372	0.340	0.337	0.353	0.382	0.422
4	0.322	0.278	0.273	0.280	0.299	0.327
5	0.288	0.245	0.232	0.234	0.247	0.268
7.5	0.237	0.187	0.174	0.168	0.174	0.187
10	0.204	0.156	0.152	0.133	0.136	0.144

El método anterior presupone que el contrafuerte es una placa plana de espesor constante, sujeta a un estado bidimensional de esfuerzos. La tabla de Malterre permite, en función de la relación entre separación y espesor de los contrafuertes, hacer una primera selección de talado exterior para obtener una cortina estable de volumen mínimo.

## CAPITULO III

### ANALISIS DE ESFUERZOS EN CONTRAFUERTE POR EL METODO DE STEFKO.

#### III.1. Método de Stefko.

Tomando en consideración lo descrito en el Capítulo anterior, y siendo que en la práctica, con frecuencia se diseñan los contrafuertes con espesor variable - de su corona a la cimentación, en tales condiciones, no es aplicable el método de Pigeaud; en cambio se ha desarrollado el método de Stefko que consiste fundamentalmente en lo siguiente:

Si el grueso del contrafuerte varía linealmente con  $y$ , de  $e$  en la cúspide a  $e_0$  en  $e_0 y$  a la profundidad  $y$ , se definen esfuerzos "específicos":

$$S_x = \int_{e/2}^{e/2} \sigma_x d\tau \quad ; \quad S_y = \int_{e/2}^{e/2} \sigma_y d\tau$$

$$I_{xy} = \int_{e/2}^{e/2} \tau_{xy} d\tau$$

De igual forma, se definen momentos "específicos" en la frontera de fuerzas máximas "específicas"; estas no resultan constantes, por lo que la condición de  $I_{xy}$  se toma forma en:

$$I_{xy} = \tau_{xy} \left( \frac{e}{2} - \tau \right) \left( \frac{e}{2} + \tau \right) \left( \frac{y}{2} + \frac{\tau}{2} \right)$$

Si  $\tau = 0$ ,  $I_{xy} = 0$ ,  $\tau = \pm \frac{e}{2}$ ,  $\tau = \pm \frac{e}{2}$ , quedan las ecuaciones elásticas:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + (e_0 + e^1 y) \rho c = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (S_x + S_y) \rho c = (1 + e^1 y) \rho c$$

Al observar ésta última expresión resulta que, por ser constante el segundo miembro,  $S_x + S_y$  no puede contener términos de grado superior al segundo. Aprovechando esta circunstancia, se logra llegar a las siguientes expresiones:

$$S_x = \frac{1}{c} \left( \frac{B}{2} x^2 + 2C xy + \frac{P}{2} y^2 + Ex + Qy \right)$$

$$S_y = \frac{1}{c} \left[ \frac{K}{2} x^2 + 2Axy + \frac{B}{2} y^2 + C y^2 + Lx + (D - e_0 + e^1 y)y \right]$$

$$S_{xy} = \frac{1}{c} (Ax^2 + Rxy + Cy^2 + Dx + Ey)$$

Los coeficientes A, B, C, D, E, F, G, H, I, P, Q se valúan resolviendo el sistema de ecuaciones lineales siguientes:

$$\begin{bmatrix} 2n^2 & 2n^2 & 0n & 0 & 1 \\ 0n^2 & 2n & - & n^2 & 0 \\ 2m^2 & 2m^2 & 2m & 0 & 1 \\ 0m^2 & 2m & - & m^2 & 0 \\ 0 & - & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -e^1 \rho c \\ 0 \\ m \rho c \\ -e^1 \rho c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n^2 & n & 0 & 1 \\ 2n & 1 & n & 0 \\ n & 2n & 0 & 1 \\ 2m & 1 & m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ H \\ I \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_0 \rho c + e_0 \rho c \\ 0 \\ m_0 \rho c + e_0 \rho c \end{bmatrix}$$

en que  $e_0$  es el ángulo de la cubierta que se aplica en el centro de la torre,  $m_0 = 1 + 2 \tan^2 \alpha$  donde  $\alpha$  es el ángulo de inclinación de la cubierta de la torre con la horizontal.

Determinados los parámetros A, B, C, D, E, K, L, P, Q, se sustituyen en las expresiones para valuar  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  y de ésta forma encontrar los valores de los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  así como su dirección, mediante los círculos de Mohr (fig. 2 cap. II) o empleando las siguientes expresiones:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}$$

## CAPITULO IV

### ANALISIS DE ESFUERZOS EN CONTRAFUERTES POR EL METODO DE CLAUDIO MARCELLO.

#### IV.1. Presas de machones tipo Marcello.

Estas presas tienen como característica importante el reducir ampliamente la subpresión mediante la creación de cavidades o huecos internos en el cuerpo de los contrafuertes. Ello trae como consecuencia una reducción apreciable en las fuerzas que tienden a hacer voltear la estructura. Aparte de las múltiples características que tiene una presa de contrafuertes ya descritas en capítulos anteriores.

Es necesario mencionar también que éste tipo de machones proporciona mayor rigidez en sentido lateral que otros, lo cual resulta adecuado cuando actúan fuerzas sísmicas en dicho sentido.

Todas las características enumeradas traen como consecuencia directa obtener mejores distribuciones de esfuerzos, lo que permite un aprovechamiento más adecuado del concreto utilizado en la construcción de estas presas. En la Fig. 4.1, se muestra una sección típica de una presa tipo Marcello diseñada en México.

En la Fig. 4.2 se muestra específicamente el efecto establecido ante que produce el agua en el talud de aguas arriba.

#### IV.2.- Consideraciones para el análisis estructural del contrafuerte.

##### IV.2.1. Fuerzas actuantes.

Las fuerzas que actúan normalmente en una presa tipo Marcello son las siguientes:

a). El peso propio de la estructura, para lo cual se considera un peso volumétrico del concreto ( $\gamma_c$ ) de 2.4 toneladas por metro cúbico.

b).- El empuje hidrostático en el talud de aguas arriba, para lo cual se considera como peso volumétrico del agua ( $\gamma_w$ ), un valor de 1.0 ton. por  $m^3$ .

c).- El empuje y el peso sobre el talud de aguas arriba producido por los azolves, para lo cual se toman en cuenta los valores adoptados por el U.S.B.R., considerándolos como un fluido de la manera siguiente:

Carga horizontal (empuje)  $\gamma = 1.56 \text{ ton}/m^3$

Carga vertical (peso)  $\gamma = 1.92 \text{ ton}/m^3$

Se sugiere tomar los valores anteriores cuando no pueden obtenerse las características de los materiales que se espera se depositen como azolve, en caso contrario, más adecuando utilizar los resultados de ensayos.

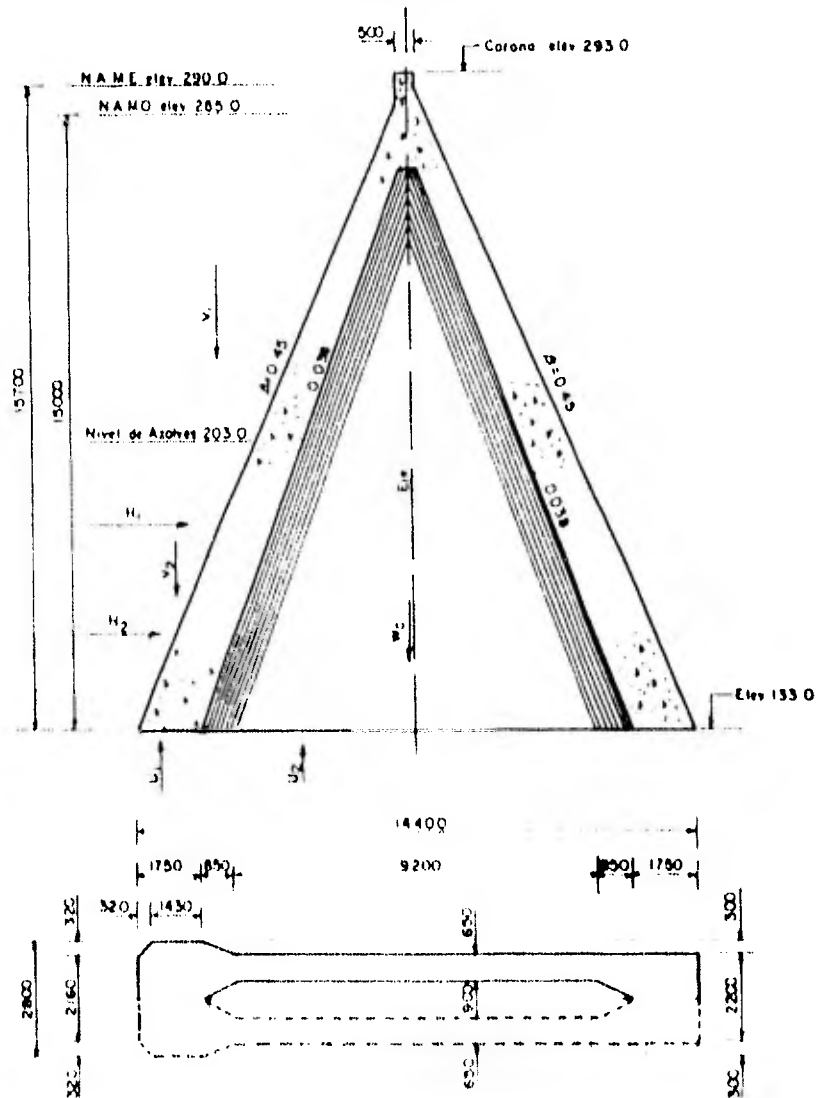


Fig. 1-a Presa de gravedad aligerada  
 Machón tipo Marcello

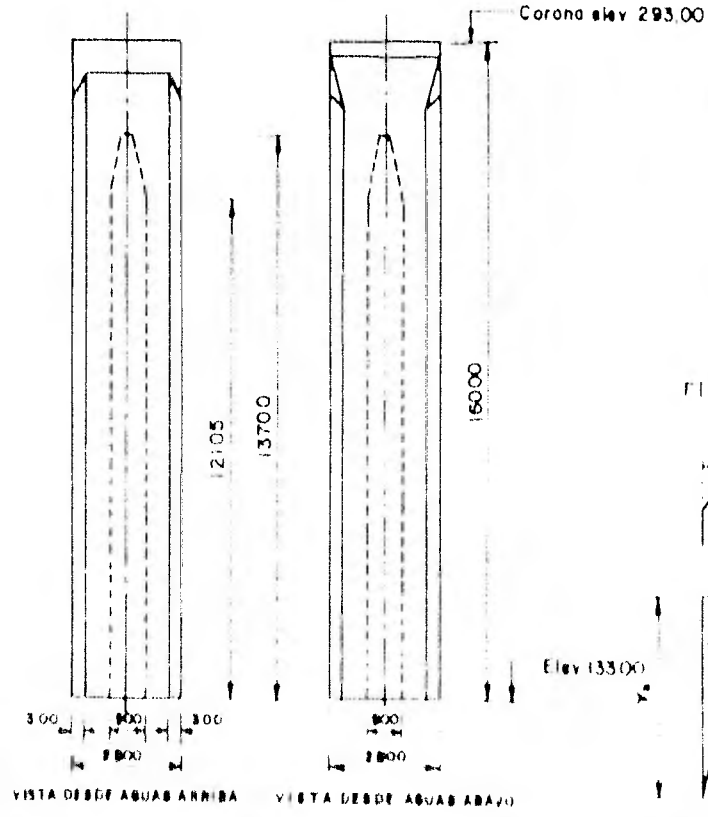


FIG 1 B. MACHÓN TÍPICO MARCELLO TÍPICO

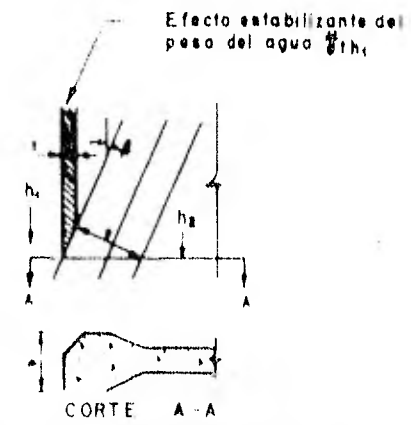


FIG 2 EFECTO DEL PESO DEL AGUA EN EL TALUD DE AGUAS ARRIBA

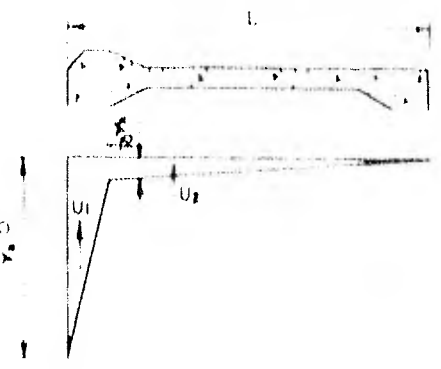


FIG 3 DIAGRAMA DE SUBPRESION CONSIDERADO



d).- La subpresión hidrostática, la cual se considera que decrece linealmente desde un valor inicial en la cara de aguas arriba igual a la carga total en el embalse, hasta un décimo de ésta en donde empieza la reducción de la cabeza del machón, y de ahí, decrece linealmente hasta cero en la cara de agua abajo. La fig. 3 muestra la variación considerada.

e).- La presión de "poro" dentro del concreto considerada con los mismos valores y distribución que la subpresión hidrostática.

f).- Las fuerzas inducidas como efecto de sismo horizontal que se consideran como sigue:

- La inercia producida en el concreto se considera actuando en el centro de gravedad de la masa de la estructura. Se suelen tomar valores de 0.05 a 0.15 del peso de la masa de concreto, dependiendo de la sismicidad de la zona donde se localiza la presa.

La sobrepresión hidrostática inducida por sismo  $P_0$  en  $\text{ton/m}^2$ , que según Manual III. B.E.C., a cualquier elevación queda expresada por la siguiente ecuación:

$$P_0 = C \cdot H$$

donde:

$$C = \frac{1}{10} \cdot \gamma_m \left[ \frac{1}{10} \cdot \left( \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \right]$$

$C$  = Coeficiente adimensional de la distribución y magnitud de presiones.

$\lambda$  = Coeficiente de sismo.

$\gamma$  = Peso volumétrico del agua en  $\text{ton}/\text{m}^3$ .

$h$  = Carga total en el embalse en m.

$y$  = Distancia desde la superficie libre del agua del embalse, a la elevación en cuestión en m.

$C_m$  = Valor máximo de  $C$  para un talud constante dado.

Los valores de  $C$  para diferentes taludes y relaciones de  $y$  y  $h$  se determinan de la fig. 4. Lo anterior permite determinar la fuerza horizontal total  $V_e$  a cualquier elevación, a una profundidad  $y$ , así como el momento  $M_e$ , producida por ésta.

$$V_e = 0.726Pe y$$

$$M_e = 0.299Pe y^2$$

Las consideraciones anteriores resultan adecuadas en nuestro país, aunque se debe aclarar que en otros, donde el invierno es extremadamente frío, sería necesario considerar una carga adicional; tal carga es el empuje producido por el hielo cuando se congelan las capas del embalse.

#### IV.5. Método de cálculo de esfuerzos en el cuerpo del contrafuerte.

El método de cálculo de esfuerzos que se adopta en esta obra se presenta en el capítulo correspondiente y trata de la manera más sencilla y clara que se puede lograr. Véase la Fig. 5.

# COEFICIENTES DE DISTRIBUCION DE PRESIONES PARA TALUDES CONSTANTES (METODO DE ZANGAR)

52

Pe - CATE

$$K = \frac{(1 + \lambda) \cdot \gamma \cdot (1 - \lambda)}{(1 + \lambda) \cdot \gamma \cdot (1 - \lambda)}$$

donde:  
 K = coeficiente de distribución de presiones  
 λ = coeficiente de fricción  
 γ = peso específico del suelo

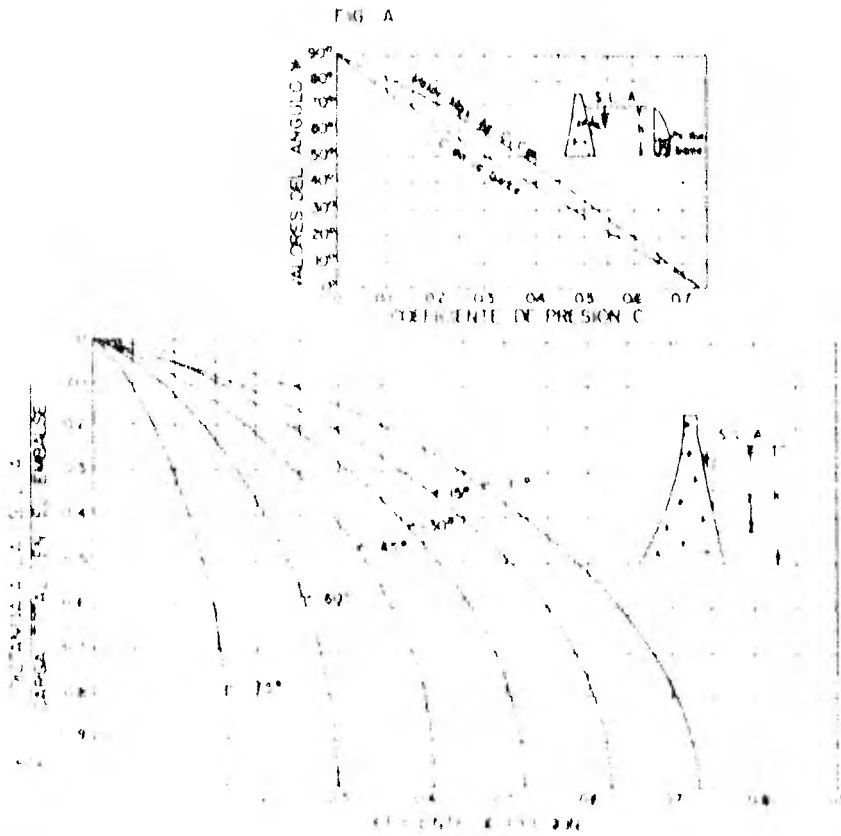


Fig 4

Este método es aplicable a otros tipos de presa de contrafuertes así como a presas de gravedad con las consideraciones propias de cada caso.

#### IV.3.1.- Determinación de esfuerzos mediante el equilibrio de trozos de tajadas horizontales.

Se parte de considerar una distribución de esfuerzos verticales sobre planos horizontales con variación lineal, es decir, calculados mediante la conocida fórmula de la escuadría. Dichos esfuerzos verticales se designan como  $\sigma_x$ .

$$\sigma_x \begin{matrix} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{matrix} = \frac{\sum N}{A} \pm \frac{M}{I} Y \quad (1)$$

donde:

- $\sigma_x$  = Esfuerzo vertical, en ton/m<sup>2</sup>.
- $\sum N$  = Suma algebraica de todas las fuerzas verticales actuantes en toneladas.
- $A$  = Area de la sección en el plano de análisis, en m<sup>2</sup>.
- $M$  = Suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas actuantes respecto al centro de gravedad de la sección, en ton m.
- $Y$  = Distancia del centro de gravedad de la sección a la fibra más alejada de ésta en m.
- $I$  = Momento de inercia de la sección en el plano de análisis, en m<sup>4</sup>.

A partir de los esfuerzos verticales  $\sigma_x$ , pueden ser determinados los esfuerzos cortantes verticales y horizontales  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yx}$ , los esfuerzos horizontales  $\sigma_y$ .

Una vez conocidos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_{xy}$ , y  $\sigma_y$  resulta sumamente fácil valuar el primero y segundo esfuerzos principales así como la dirección de éstos.

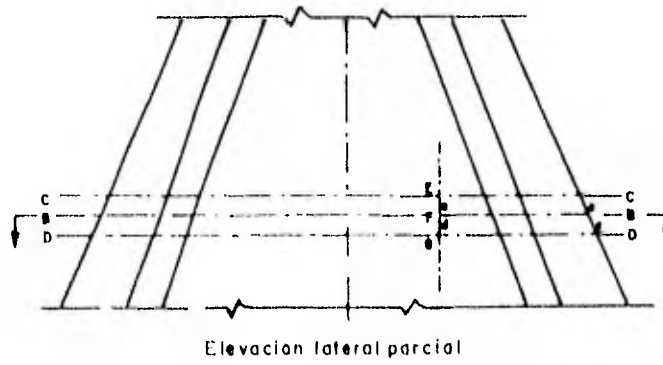
Considérese que se pretende determinar las magnitudes y direcciones de los esfuerzos principales en el punto F del plano BB ilustrado en la fig. 5. Los planos CC y DD se localizan a distancias iguales del plano BB, hacia arriba y hacia abajo de éste respectivamente. Aplicando la ecuación (1) se determinan  $\sigma_x$  max. y  $\sigma_x$  mín. para cada uno de los planos CC, BB y DD. La distancia entre los planos debe ser relativamente pequeña si se desea mantener suficiente precisión. Resulta adecuado elegir espaciamientos de 1.0 a 4.0 metros.

El siguiente paso es construir un plano vertical que intersecte los tres planos horizontales en los puntos E, F y G. El prisma elemental ECBE puede visualizarse aislado del resto del machón como se muestra en la fig. 6 y en el equilibrio debido a las fuerzas que actúan en él. Dichas fuerzas son: la resultante de los esfuerzos verticales en el plano EC, o sea:

$$\int_0^1 \sigma_x \, dx \quad (11)$$

El peso del prisma elemental,  $W_p$ ; y la resultante de los esfuerzos verticales en el plano EB, o sea:

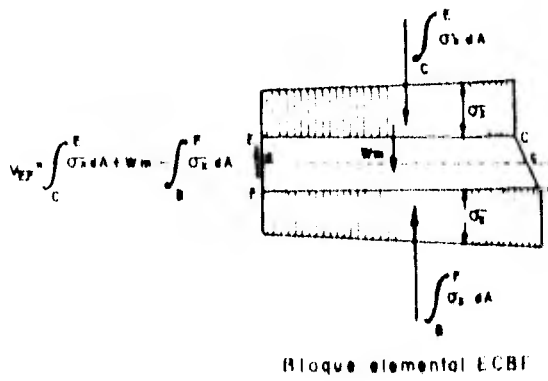
$$\int_0^1 \sigma_y \, dx \quad (12)$$



Elevación lateral parcial



Sección plano B-B



Bloque elemental ECFB

FIG. 5 DETERMINACION DE ESFUERZOS  $T_{xy}$  Y  $\sigma_y$

La fuerza cortante  $V$  actuando en el plano EF puede ser determinada planteando la ecuación de equilibrio vertical del prisma elemental ECBF, como sigue:

$$V_{EF} = \int_C^E \tau_{xy} dA + Wm = \int_B^F \tau_{yx} dA \quad (4)$$

El esfuerzo cortante medio  $V_1$  en la sección EF es igual a la fuerza cortante  $V_{EF}$  dividida entre el área de la sección comprendida entre E y F.

$$V_1 = \frac{V_{EF}}{\text{Área EF}} \quad (5)$$

Procediendo de manera similar es factible determinar el esfuerzo cortante medio  $V_2$  entre F y G.

$$V_2 = \frac{V_{FG}}{\text{Área FG}} \quad (6)$$

En consecuencia el esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$  en el punto F es igual a:

$$\tau_{xy} = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad (7)$$

El siguiente paso consiste en aislar el prisma (acde) del machón y considerarlo en equilibrio horizontal bajo el efecto de las fuerzas cortantes actuando en él. Puesto que los esfuerzos cortantes horizontales y verticales son iguales, o sea,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , las fuerzas cortantes totales que actúan en el plano "de" así como en el de "de" pueden ser determinadas mediante integración aritmética.

La diferencia entre estas fuerzas cortantes es la fuerza normal horizontal  $N_y$  aplicada en el área "ad" y normal al plano EF.  $N_y$  queda expresada en términos de las fuerzas cortantes mediante la siguiente ecuación:

$$N_y = \int_c^a \tau_{xy} dA - \int_e^d \tau_{xy} dA \quad (8)$$

El esfuerzo normal horizontal medio  $\sigma_y$  es igual a  $N_y$  dividido entre el área comprendida entre a y d.

$$\sigma_y = \frac{N_y}{\text{Área } ad} \quad (9)$$

Una vez determinados  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  se pueden determinar los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  así como su dirección, ya sea de una manera gráfica mediante el Círculo de Mohr ( fig. 2 Capítulo II) o empleando las siguientes expresiones:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



## CAPITULO V

### ANALISIS DE ESFUERZOS POR EL METODO DEL ELEMENTO FINITO.

#### V.1.- Método del elemento finito.

Debido a la amplitud del método del elemento finito se presentará de una forma somera tal que entendamos sus aplicaciones.

En la descripción de los métodos anteriores así como en la solución numérica de las ecuaciones armónica y biarmónica, para atacar problemas de flujo y elasticidad planos, traen consigo una serie de limitaciones que restringen su empleo o que hacen perder precisión en los resultados finales.

Al pretender analizar el comportamiento de una estructura determinada nos encontramos con la situación de no poder idealizar la geometría y sollicitaciones que actúan sobre éstas de una manera fácil y sencilla que permita manejar el problema como bidimensional, y que además representen adecuadamente las condiciones reales de trabajo de la estructura, tal es el caso de una sección de cortina (contrafuerte) en el que se tenga, la inclusión de huecos, el efecto de peso propio, la estratificación en zona de diferentes propiedades mecánicas, la presencia de alguna falla geológica inactiva, etc. ocasionando en el análisis simplificaciones de alguna importancia.

El problema es pues bastante complejo, y una manera de realizar un análisis estructural aceptable es mediante un modelo tridimensional, haciendo uso de una metodología tan sofisticada y completa como el problema en sí. Recientemente, Clough, Zienkiewicz y otros autores han elaborado una técnica de solución para los problemas antes mencionados con la cual prácticamente no existen ninguna de las limitaciones expresadas, siendo el método del elemento finito, y sin más dificultad para servirse de él, que la necesidad de emplear una computadora.

El método del elemento finito se basa en las siguientes hipótesis:

- 1.- El cuerpo en estudio se idealiza discretizándolo; si es un problema bidimensional, generalmente mediante triángulos de forma y dimensiones cualesquiera (de preferencia triángulos regulares), articulados en los vértices y ligados solo en las articulaciones (nodos), y si se trata de un problema tridimensional mediante tetraedros, rombos o paralelepípedos.
- 2.- Los movimientos  $\delta$  de desplazamiento de las articulaciones (nodos), en sus ejes locales de las coordenadas de las propias articulaciones.
- 3.- Todas las fuerzas que actúan sobre la estructura están aplicadas en las articulaciones (nodos).

La estructura de esta sección cubre un tema que se re-

ma de cargas también cualesquiera, como se muestra en la figura No. 1.

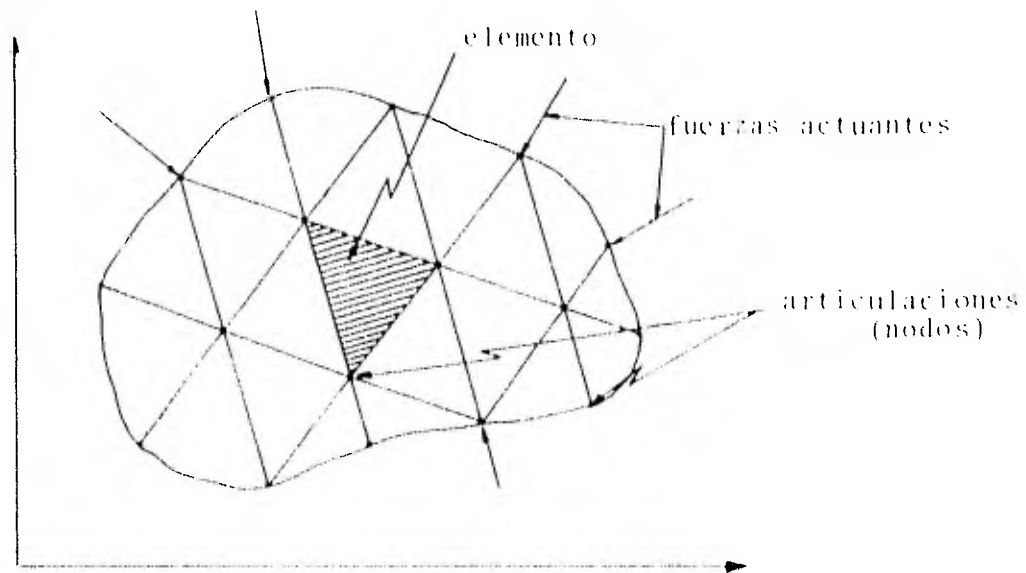


FIGURA 1

Esto quiere decir que el problema continuo existente en determinada estructura se simplifica; el número infinito de grados de libertad de un medio continuo se vuelve finito mediante la discretización, es decir, la división de la estructura en una serie de subregiones (elementos) los cuales se consideran interconectados mediante un número finito de puntos nodales (articulaciones). Especificando ciertos patrones simples de desplazamientos y tomando en cuenta las relaciones entre las fuerzas nodales se pueden obtener los desplazamientos nodales.

Al ensamblar los elementos en conjunto, al imponer condiciones de equilibrio en todos los nodos, se obtiene un sistema de ecuaciones simultáneas cuya solución conduce a la obtención de los desplazamientos nodales. Finalmente, el cálculo de los esfuerzos es factible a partir de los resultados anteriormente obtenidos, mediante expresiones clásicas.

Al hacer uso del método del elemento finito ya sea en modelos bidimensionales o tridimensionales mediante cualquiera de los programas de computadora desarrollados para tal fin, es posible utilizar una gran variedad de tipos de elementos, tal es el caso del programa SAP IV (Structural Analysis Program IV) desarrollados en la Universidad de Berkeley, California, y del programa NASTRAN implementado en la NASA, E.E.U.U.

#### EJEMPLOS

1. Se tiene un elemento bidimensional como el mostrado en la fig. 2, el cual consta de tres nodos los cuales admiten desplazamientos en dos direcciones; no admiten giro.



Puesto que cada nodo  $i$ , tiene dos grados de libertad, es decir puede desplazarse en sentido  $u$  y  $v$  en las direcciones de los ejes  $X$  y  $Y$  respectivamente, da como resultado un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas.

2.- En el caso de un elemento tridimensional Fig. 3, los nodos admiten desplazamientos en tres direcciones, sin giro, es decir cada nodo  $i$  tiene tres grados de libertad, pudiéndose desplazar en sentido  $u, v$  y  $w$ , en las direcciones de los ejes  $X, Y$  y  $Z$  respectivamente, dando un sistema de 21 ecuaciones simultáneas.

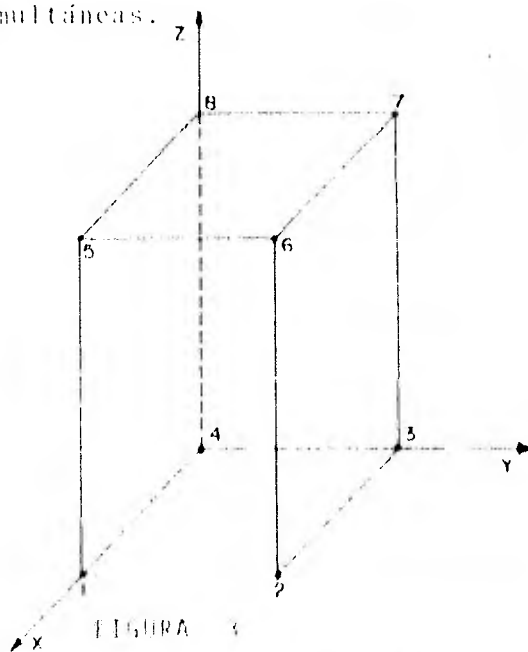


FIGURA 3

Debe señalarse que respecto a los nodos implícitos en ecuaciones tanto en el plano de la figura como en el tridimensional, la que aparece de ellos es en el plano de cámara auxiliar, en la dirección  $z$  (Fig. 3).

## CAPITULO VI

### EJEMPLO DE APLICACION

#### VI.1. - GENERALIDADES.

El ejemplo de aplicación expresado a continuación estará basado en el método de Pigeaud desarrollado en el capítulo II.

#### VI.2. - Ejemplo.

Analizar la estructura de un contrafuerte, cuyas dimensiones y características enseguida se expresarán, obteniendo la distribución y magnitud de los esfuerzos horizontales ( $T_{xy}$ ), verticales ( $V_{xy}$ ), cortantes ( $T_{xy}$ ) y principales ( $T_{1,2}$ ) así como, la dirección  $\theta$  de los principales.

#### VI.2.1. - Datos del ejemplo.

Sea un contrafuerte en abanico de forma de diagrama, considerando como punto de apoyo de dicho punto la tridimensional, sea  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  con las siguientes características:

$$\sigma_{xx} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{yy} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{xy} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad (6.1)$$

$$\sigma_{xx} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{yy} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{xy} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad (6.2)$$

$$\sigma_{xx} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{yy} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{xy} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad (6.3)$$

$$\sigma_{xx} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{yy} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{xy} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad (6.4)$$

$$\sigma_{xx} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{yy} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{xy} = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad (6.5)$$

* Espesor del contrafuerte	: $b = 0.5 \text{ m}$
* Ancho de la cabeza	: $B = 14.0 \text{ m}$
* Peso volumétrico del concreto	: $\gamma_c = 2.4 \text{ Ton/m}^3$
* Peso volumétrico del agua	: $\gamma_a = 1.0 \text{ Ton/m}^3$

#### VI.2.2. Solución.

Ya que el método de Pigeaud considera que el nivel del agua coincide con la cota de la corona, o sea con el vértice superior del triángulo y despreciando el peso de los pequeños volúmenes de concreto existentes en la corona, se harán los análisis en base al método descrito con anterioridad y sujeta a la única condición de carga que es el agua hasta el NAME.

Los esfuerzos en un punto dado estarán en función de los parámetros  $a, b, c, d$  y de las coordenadas  $(x, y)$ , quedando definidos como siguen:

1. Esfuerzos axiales en plano horizontal:

$$\sigma_x = \alpha y + \beta d$$

$$\sigma_y = \alpha x + \beta b - \gamma c$$

$$\sigma_z = \beta c - \gamma d$$

2. Esfuerzos principales en dirección:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tau_{xy}$$

Para valuar los esfuerzos axiales hay que encontrar el valor de los parámetros a, b, c, y d de la siguiente manera:

$$a = \frac{m-n}{(m+n)^2} \gamma c = \frac{2-3mn-n^2}{(m+n)^3} W$$

$$b = \frac{2mn}{(m+n)^2} \gamma c + \frac{-2m^2n+m-n}{(m+n)^3} W$$

$$c = \frac{mn(m-n)}{(m+n)^2} \gamma c + \frac{mn(2-mn+m^2)}{(m+n)^3} W$$

$$d = \frac{-2m^2n^2}{(m+n)^2} \gamma c + \frac{m^2(2mn^2+3n-m)}{(m+n)^3} W$$

siendo:

$$m = n = 0,15$$

$$W = \gamma a S ; S = \frac{R}{\bar{\gamma}} = \frac{11}{0,5} = 2,1538$$

$$\therefore W = (11)(2,1538) = 2,1538$$

$$\gamma c = 2,1 \text{ Ton/m}^2$$

Substituyendo los datos anteriores en cada una de las ecuaciones de los parámetros, encontramos los siguientes valores:

$$a = 5,5159$$

$$b = 0,664$$

$$c = 1,196$$

$$d = 1,7109$$



Para facilitar el cálculo de los esfuerzos en el contrafuerte fué necesario elaborar un programa para utilizarse en una calculadora HP-41 cuyo listado es el siguiente:

01	LBL	"PTG	11	STO	22	82	RCL	06
EAUD"			12	7PRTX		83	ST+	01
02	LBL	10	13	RCL	00	84	RTN	
03	LBL	A	14	5		85	LBL	12
04	7DSP	4	15	Y+X		86	LBL	C
05	/		16	2		87	RCL	06
06	STO	02	17	*		88	ST-	04
07	RDN		18	RCL	00	89	RCL	01
08	STO	00	19	1		90	X<0?	
09	2.1		20	*		91	GTO	00
10	STO	01	21	-		92	LBL	02
11	RCL	00	22	RCL	00	93	RCL	05
12	X12		23	8		94	ST-	03
13	1		24	*		95	RCL	03
14	*		25	/		96	ABS	
15	2		26	RCL	02	97	RCL	02
16	-		27	*		98	X<Y	
17	LASTX		28	RCL	00	99	X>Y?	
18	RCL	00	29	X12		100	GTO	01
19	*		30	RCL	01	101	RCL	03
20	5		31	*		102	RCL	22
21	Y+X		32	2		103	*	
22	/		33	/		104	RCL	04
23	RCL	02	34	1		105	RCL	23
24	*		35	STO	23	106	*	
25	STO	20	36	7PRFX		107	+	
26	7PRFX		37	ADY		108	STO	07
27	RCL	01	38	RTN		109	RCL	21
28	2		39	LBL	11	110	RCL	01
29	/		40	LBL	B	111		
30	RCL	02	41	STO	06	112	RCL	04
31	1		42	RDN		113	*	
32	/		43	STO	05	114	RCL	20
33			44	RDN		115	RCL	03
34	STO	21	45	STO	04	116	*	
35	7PRFX		46	RCL	00	117	+	
36	RCL	01	47	*		118	STO	08
37	1		48	STO	07	119	RCL	03
38	/		49	RCL	05	120	RCL	21
39	RCL	00	50	*		121	*	
40	2		51	STO	03	122	RCL	01

123	RCL	22	171	2	219	Ø	
124	*		172	/	220	7DSP9	
125	+		173	X-Ø2	221	7PRTX	
126	CHS		174	GTO	ØØ	222	RTN
127	STO	Ø9	175	/	223	STOP	
128	Ø		176	CHS	224	END	
129	7DSP9		177	ATAN			
130	PSE		178	2			
131	RCL	Ø3	179	/			
132	7DSP5		180	7PRTX			
133	7PRTX		181	ADY			
134	RCL	Ø4	182	GTO	Ø2		
135	7PRTX		183	LBL	Ø1		
136	ADY		184	RCL	Ø1		
137	RCL	Ø7	185	RCL	Ø6		
138	1Ø		186	-			
139	/		187	RCL	ØØ		
140	PRX		188	*			
141	RCL	Ø8	189	STO	Ø2		
142	1Ø		190	RCL	Ø5		
143	/		191	+			
144	PRX		192	STO	Ø3		
145	RCL	Ø9	193	GTO	12		
146	1Ø		194	RTN			
147	/		195	LBL	15		
148	PRX		196	LBL	4		
149	ADY		197	RCL	Ø7		
150	1		198	RCL	Ø8		
151	7DSPØ		199	+			
152	PSE		200	2Ø			
153	7DSP5		201	/			
154	NEQ	15	202	RTN			
155	NEQ	16	203	LBL	16		
156			204	LBL	6		
157	7PRTX		205	RCL	Ø7		
158	2		206	RCL	Ø8		
159	7DSPØ		207				
160	PSE		208	-			
161	7DSP5		209				
162	NEQ	18	210	*			
163	NEQ	16	211	RCL	Ø9		
164	*		212	*			
165	7PRTX		213	+			
166	7DSP4		214	2Ø1			
167	RCL	Ø9	215	1Ø			
168	RCL	Ø8	216				
169	RCL	Ø	217	RTN			
170	1Ø		218	LBL	ØØ		

Este programa toma en cuenta el sentido de las abscisas hacia la derecha como positivo y a partir del vértice superior del contrafuerte (en este caso quedó en el centro), en tanto que a las ordenadas las considera hacia abajo y desde el mismo punto como las abscisas. El análisis que desarrollará este programa es a cada 10.0 m tanto horizontalmente como verticalmente, cuyos resultados son expresados en la tabla No. 1.

Para todos aquellos puntos que no caen dentro de los rangos de análisis del programa se expresan en la tabla No. 2.

Con los valores de los esfuerzos de las tablas 1 y 2 se elaboraremos sus respectivas gráficas tanto para el nivel de desplante (160.0 m) como a la mitad (80.0 m); de igual forma tendremos las isostáticas de los esfuerzos principales, así como la magnitud y dirección de estos, distribuidos en todo el contrafuerte.

Las gráficas se muestran en el anexo.

TABLA NO. 1

COORDENADAS		SIGMA - X	SIGMA - Y	TAU - XY	SIGMA - I	SIGMA - IT	ANGULO
X (mts)	Y (mts)	$\sigma_x$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_y$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\tau_{xy}$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_I$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{IT}$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\theta$ (GRADOS)
0.0	00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	00.0000
4.5	10	-0.672	-3.321	1.194	-3.993	0.000	34.3278
9.0	20	-1.345	-6.641	2.389	-7.986	0.000	24.2777
-1.0	20	-2.541	-5.125	2.327	-5.179	0.188	-41.4244
13.5	30	-2.017	-9.962	4.185	-11.970	0.000	24.2778
3.5	30	-3.214	-6.416	3.824	-8.979	0.684	33.5384
-6.5	30	-4.410	-2.950	-3.160	-6.916	0.125	38.4080
18.0	40	-2.690	-13.252	5.977	-15.972	0.000	24.2777
8.0	40	-3.886	-9.767	5.516	-12.904	0.752	-50.3264
-2.0	40	-5.083	-6.281	4.654	-10.357	0.976	-41.4244
12.0	40	-6.279	-2.735	-3.992	-8.272	0.139	33.0344
22.5	50	-5.362	-16.603	7.171	-13.965	0.000	24.2778
12.5	50	-3.359	-13.987	6.816	-16.835	0.788	-28.9729
2.5	50	-5.755	-9.971	6.448	-14.404	1.276	-36.3707
-7.5	50	-6.952	-6.465	5.487	-11.909	0.949	-42.6648
17.5	50	-8.148	-2.940	4.525	-10.907	0.237	29.1172
27.0	60	-4.033	-19.914	8.962	-22.965	0.000	24.2778
17.0	60	-5.231	-16.408	8.504	-25.830	0.840	-28.1036
7.0	60	-6.428	-12.893	7.642	-23.705	1.767	-33.5384
-3.0	60	-7.624	-9.376	6.781	-21.580	3.164	-41.4244
13.0	60	-8.821	-5.860	5.919	-19.454	0.850	38.4080
23.0	60	-10.017	-2.344	5.057	-17.327	0.636	27.9296
31.5	70	-1.707	-23.744	10.173	-37.974	0.000	24.2777
21.5	70	-3.506	-19.729	9.716	-40.900	0.812	-28.1036
11.5	70	-5.305	-15.714	8.854	-38.825	1.740	-41.4244
1.5	70	-7.103	-11.698	7.992	-36.750	3.137	-49.3104
-8.5	70	-8.902	-8.183	7.130	-34.675	4.534	-57.2064
18.5	70	-10.700	-4.667	6.268	-32.600	5.931	-65.1024
28.5	70	-11.896	-1.151	5.406	-30.525	7.328	-73.0084

X(mts)	Y(mts)	$\sigma_x$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_y$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\tau_{xy}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_z$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\tau$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma$ (GRAHOS)
36.0	80	-5.579	-26.565	-11.951	-71.944	0.000	-24.2277
26.0	80	-6.576	-23.049	-11.293	-28.790	-0.855	-26.9171
16.0	80	-7.773	-19.533	-10.631	25.802	-1.504	-30.5261
6.0	80	-8.969	-16.017	-9.970	25.067	-1.919	-35.2665
-4.0	80	-10.166	-12.501	-9.308	20.715	-1.953	-41.1241
-14.0	80	-11.362	-8.985	-8.646	18.907	-1.446	-41.0870
-24.0	80	-12.559	-5.470	-7.985	17.751	-0.278	-53.0514
-34.0	80	-13.755	-1.954	-7.323	17.260	1.550	-55.5099
10.5	90	-6.052	29.887	-13.118	35.957	0.000	24.2277
30.5	90	-7.248	-26.370	-12.787	32.775	-0.815	26.6075
20.5	90	-8.445	-22.854	-12.125	29.734	-1.515	29.6412
10.5	90	-9.642	-19.338	-11.464	26.947	-2.043	35.7384
0.5	90	-10.838	-15.822	-10.802	24.416	-2.514	38.5030
-9.5	90	-12.035	-12.306	-10.141	22.517	-2.929	41.6167
-19.5	90	-13.231	-8.790	-9.479	20.847	-1.775	38.4050
-29.5	90	-14.428	-5.274	-8.818	19.786	-0.081	34.7813
-39.5	90	-15.624	-1.758	-8.156	19.396	2.013	24.8177
15.0	100	-6.724	33.206	-11.943	39.930	0.000	24.2277
35.0	100	-7.921	-29.690	-11.381	36.767	-0.819	26.3457
25.0	100	-9.117	-26.174	-10.620	33.713	-1.576	28.9770
15.0	100	-10.314	-22.658	-9.958	30.859	-2.153	35.2600
5.0	100	-11.511	-19.143	-9.297	28.205	-2.534	36.2790
-5.0	100	-12.707	-15.627	-8.635	25.959	-2.144	41.4144
-15.0	100	-13.904	-12.111	-7.974	24.041	-1.997	41.6649
-25.0	100	-15.100	-8.595	-7.312	22.560	-1.639	36.2461
-35.0	100	-16.297	-5.079	-6.650	21.820	-0.474	28.9177
-45.0	100	-17.493	-1.563	-5.989	21.378	2.182	24.2277
19.5	110	-7.397	36.757	-16.137	43.923	0.000	24.2277
39.5	110	-8.593	-33.241	-15.773	40.760	-0.854	26.3457
29.5	110	-9.790	-29.725	-15.111	37.684	-1.691	28.4637
19.5	110	-10.986	-26.209	-14.450	34.604	-2.507	31.2770
9.5	110	-12.183	-22.693	-13.791	32.041	-2.907	34.2760
-9.5	110	-13.380	-19.177	-13.129	29.956	-2.742	35.2647
-19.5	110	-14.576	-15.661	-12.468	28.539	-2.579	41.4144
-29.5	110	-15.773	-12.145	-11.806	27.877	-1.997	41.6649
-39.5	110	-16.969	-8.629	-11.145	27.413	-1.446	34.7813
-49.5	110	-18.166	-5.113	-10.483	27.187	0.887	24.2277

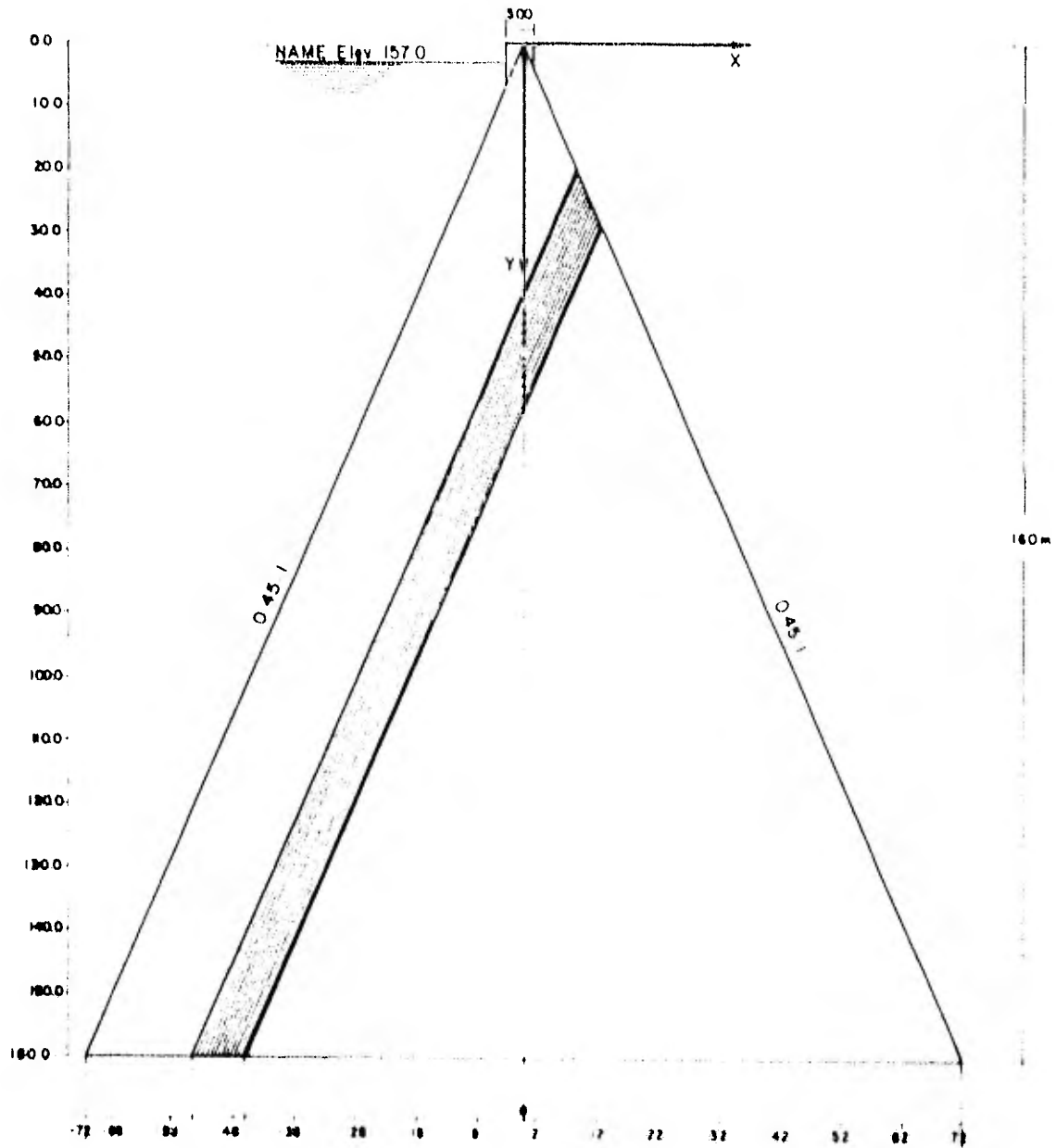
X(mts)	Y(mts)	$\sigma_x$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_y$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{xy}$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_z$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_s$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\theta$ (GRADOS)
54.0	120	-8.069	-59.847	-17.931	-47.916	0.000	-24.2277
44.0	120	-9.266	-56.551	-17.270	-44.759	0.858	-25.9586
54.0	120	-10.462	-52.816	-16.608	-41.658	-1.620	-28.0505
24.0	120	-11.659	-29.300	-15.947	-38.703	-2.356	-30.5261
14.0	120	-12.855	-25.784	-15.285	-35.915	-2.724	-33.5581
4.0	120	-14.052	-22.268	-14.624	-33.350	-2.970	-37.1546
-6.0	120	-15.249	-18.752	-13.962	-31.072	-2.929	-41.4211
-16.0	120	-16.445	-15.236	-13.301	-29.155	-2.526	-45.6988
-26.0	120	-17.642	-11.720	-12.639	-27.667	-1.700	-50.4080
-36.0	120	-18.838	-8.204	-11.977	-26.626	0.417	-55.0513
-46.0	120	-20.035	-4.688	-11.316	-26.051	1.310	-59.9296
58.5	150	-8.747	-13.198	-19.126	-41.309	0.000	-34.8277
48.5	150	-9.958	-9.682	-18.764	-38.729	0.861	-38.5115
58.5	150	-11.155	-6.166	-18.402	-36.255	-1.636	-42.6361
28.5	150	-12.351	-2.650	-17.441	-32.972	-2.299	-47.9078
18.5	150	-13.548	0.864	-16.779	-29.815	-2.817	-53.5506
8.5	150	-14.744	3.388	-16.418	-27.165	-3.118	-59.6876
-1.5	150	-15.941	5.913	-15.456	-24.556	-3.257	-66.5776
-11.5	150	-17.138	8.437	-14.495	-22.649	-3.025	-74.6077
-21.5	150	-18.334	10.961	-14.134	-21.092	-2.450	-83.6975
-31.5	150	-19.531	13.485	-13.472	-19.839	-1.467	-94.433
-41.5	150	-20.727	16.009	-12.810	-18.822	0.061	-107.818
-51.5	150	-21.924	18.533	-12.149	-18.144	1.217	-124.1879
65.0	140	-9.111	-16.488	-20.575	-33.907	0.000	-34.7877
55.0	140	-10.311	-12.972	-19.913	-31.418	0.864	-38.9367
45.0	140	-11.507	-9.456	-19.251	-29.014	-1.649	-43.5997
35.0	140	-12.704	-5.940	-18.589	-26.710	-2.326	-48.6366
25.0	140	-13.901	-2.424	-17.927	-24.615	-2.899	-54.0187
15.0	140	-15.097	1.092	-17.265	-22.746	-3.284	-60.0004
5.0	140	-16.294	3.616	-16.603	-21.107	-3.481	-66.7211
-5.0	140	-17.490	6.140	-15.941	-19.706	-3.417	-74.2211
-15.0	140	-18.687	8.664	-15.279	-18.543	-3.047	-82.5274
-25.0	140	-19.883	11.188	-14.617	-17.616	-2.487	-91.6846
-35.0	140	-21.080	13.712	-13.955	-16.915	-1.750	-101.7271
-45.0	140	-22.276	16.236	-13.293	-16.426	-0.875	-112.6902
-55.0	140	-23.473	18.760	-12.631	-16.135	0.130	-124.6082

X(mts)	Y(mts)	$\sigma_x$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_y$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\tau_{xy}$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_1$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_2$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\theta$ (GRADOS)
67.5	150	-10.086	-19.809	22.411	-59.895	0.000	-24.2277
57.5	150	-11.283	-46.293	-21.755	-56.709	-0.867	-25.5875
47.5	150	-12.480	-42.777	-21.094	-53.596	-1.661	-27.1558
37.5	150	-13.264	-39.261	-20.429	-50.573	-2.564	-28.9729
27.5	150	-14.873	-35.746	-19.768	-47.665	-2.955	-31.0841
17.5	150	-16.069	-32.230	-19.106	-44.894	-3.405	-33.5381
7.5	150	-17.266	-28.714	-18.445	-42.302	-3.677	-36.3797
-2.5	150	-18.462	-25.198	-17.783	-39.930	-3.731	-39.6382
-12.5	150	-19.659	-21.682	-17.122	-37.822	-3.519	-43.3095
-22.5	150	-20.856	-18.166	-16.460	-36.030	-2.996	-47.6648
-32.5	150	-22.052	-14.650	-15.799	-34.578	-2.125	-52.4080
-42.5	150	-23.239	-11.134	-15.137	-33.496	0.887	-57.4956
-52.5	150	-24.413	-7.619	-14.476	-32.775	0.711	-62.9172
-62.5	150	-25.642	-4.103	-13.814	-32.388	2.644	-68.0298
-72.0	160	-10.759	-53.150	23.903	-63.888	0.000	-24.2277
62.0	160	-11.955	-19.644	23.247	-60.700	0.860	-25.4968
52.0	160	-13.151	-46.068	-21.895	-57.579	-1.670	-26.9474
42.0	160	-14.347	-42.492	-21.524	-54.544	-2.390	-28.6112
32.0	160	-15.543	-38.916	-21.152	-51.604	-3.008	-30.5264
22.0	160	-16.742	-35.340	-20.781	-48.797	-3.600	-32.7315
12.0	160	-17.938	-31.764	-20.410	-46.135	-3.858	-35.2665
2.0	160	-19.135	-28.188	-20.038	-43.607	-3.980	-38.1605
-8.0	160	-20.331	-24.612	-19.667	-41.219	-3.905	-41.3244
-18.0	160	-21.528	-21.036	-19.296	-38.967	-3.565	-44.8674
-28.0	160	-22.724	-17.460	-18.925	-36.907	-2.892	-48.8870
-38.0	160	-23.921	-13.884	-18.554	-35.180	-1.906	-53.4072
-48.0	160	-25.117	-10.308	-18.183	-33.704	0.206	-58.4644
-58.0	160	-26.314	-6.732	-17.812	-32.487	1.110	-64.0624
-68.0	160	-27.511	-3.156	-17.441	-31.529	3.004	-70.2690

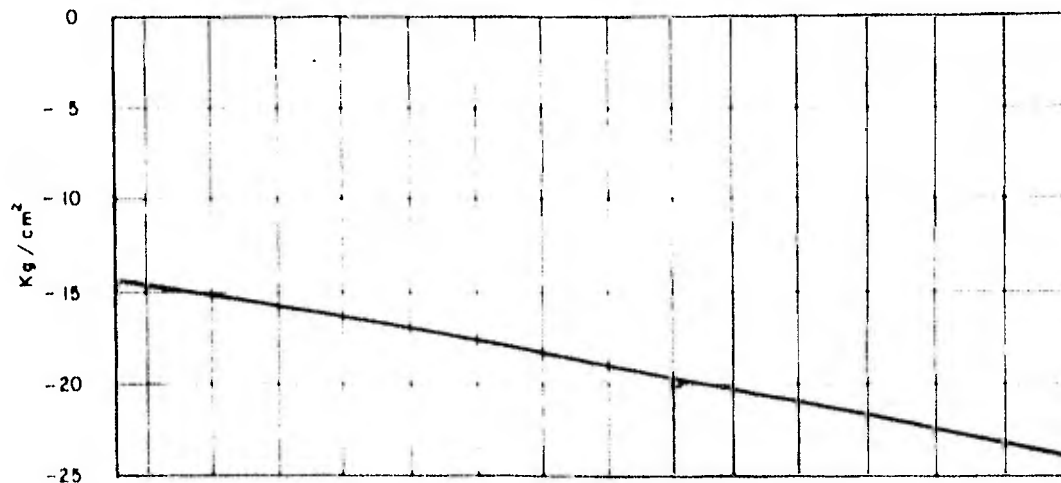
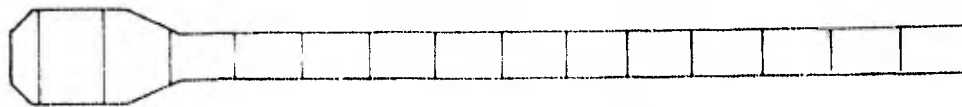
TABLE NO. 2

X (mts)	Y (mts)	$\sigma_x$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_y$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{xy}$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_z$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_r$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\theta$ (GRADOS)
-4.5	10	-1,749	-0,156	-0,899	-2,155	0,246	-24,2298
-9,0	20	-5,499	-0,515	-1,798	-4,308	0,496	-24,2298
-13,5	30	-5,248	-0,469	-1,697	-6,462	0,745	-24,2298
-18,0	40	-6,997	-0,625	-3,596	-8,615	0,993	-24,2298
-22,5	50	-8,747	0,782	-1,195	-10,770	1,241	-24,2298
-27,0	60	-10,496	0,938	-5,595	-12,923	1,489	-24,2274
-31,5	70	-12,245	-1,094	0,293	-15,076	1,737	-24,2275
-36,0	80	-15,995	-1,751	-7,191	-17,231	1,985	-24,2278
-40,5	90	-15,744	1,407	-8,090	-19,385	2,234	-24,2280
-45,0	100	-17,494	1,563	-8,989	-21,539	2,482	-24,2273
-49,5	110	-19,243	1,720	-9,888	-23,693	2,730	-24,2283
-54,0	120	-20,992	1,876	-10,787	-25,846	2,978	-24,2285
-58,5	130	-22,742	2,032	-11,687	-27,999	3,227	-24,2270
-63,0	140	-21,491	2,189	-11,586	-30,153	3,475	-24,2283
-67,5	150	-20,241	2,345	-11,485	-32,306	3,723	-24,2284
-72,0	160	-21,990	2,501	-11,384	-34,460	3,971	-24,2283

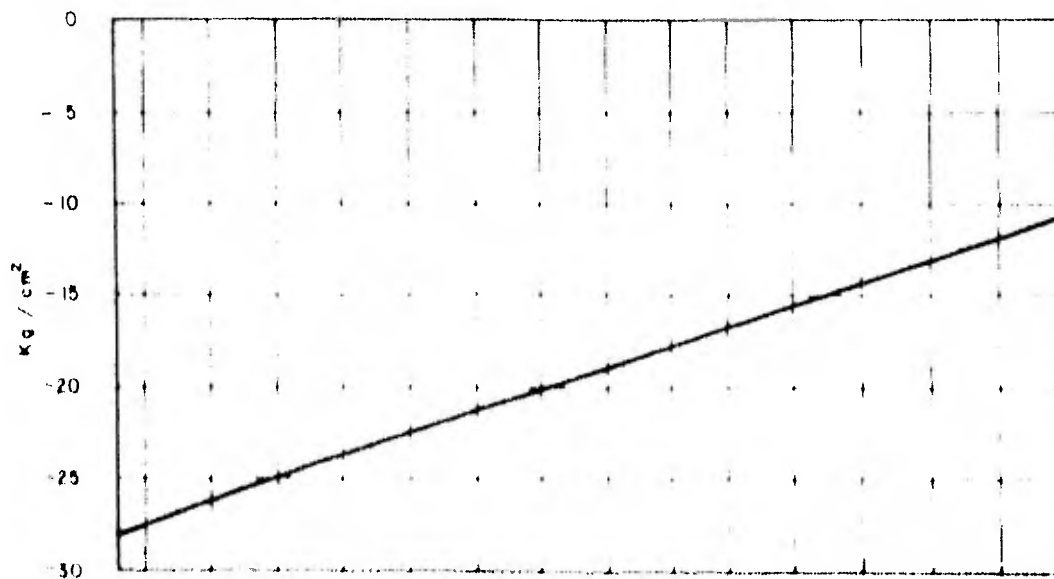




CORTE DE UN CONTRAFUERTE A NIVEL DE DESPLANTE

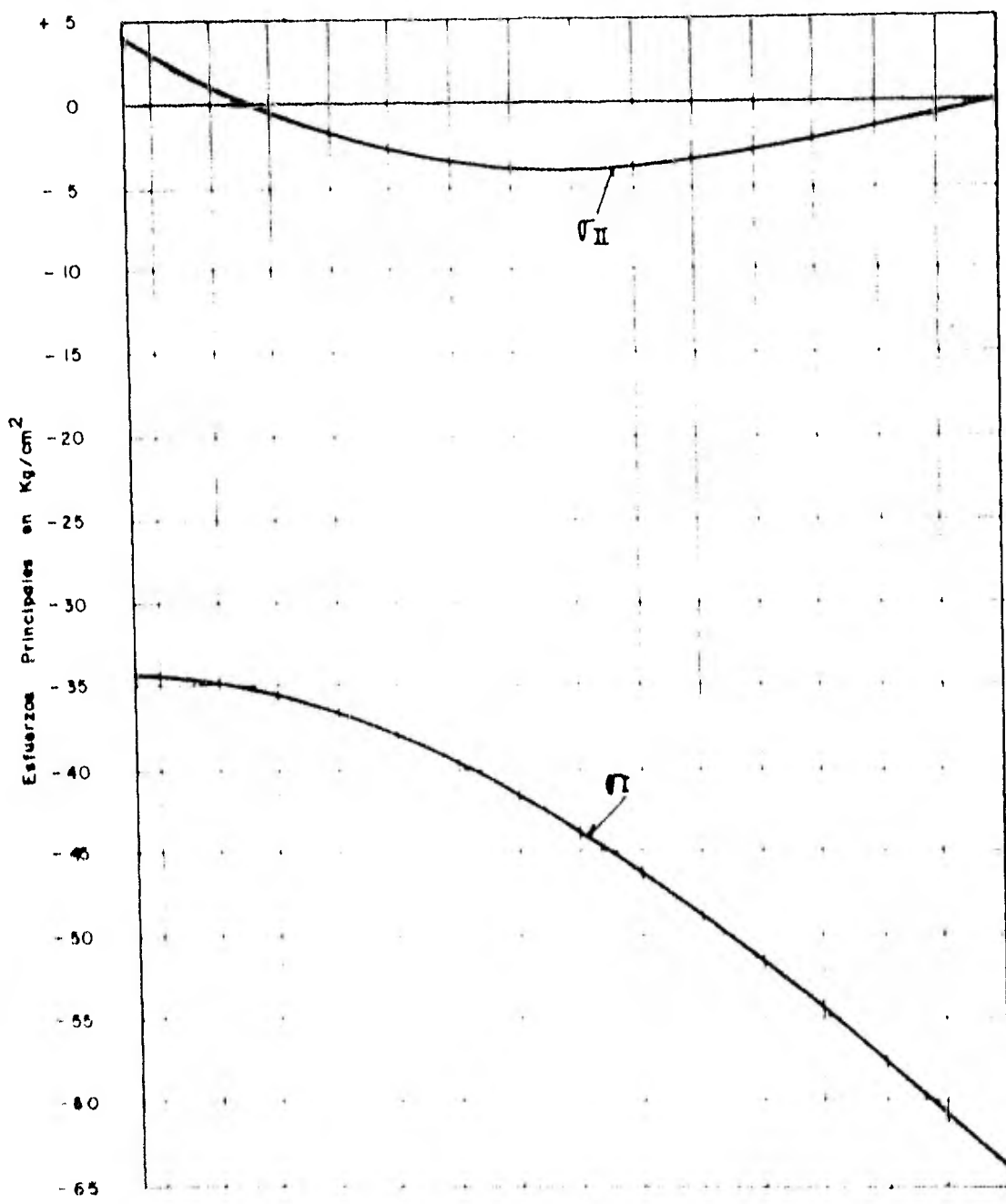
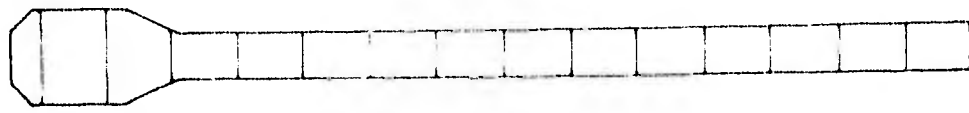


ESFUERZOS TANGENCIALES  $T_{xy}$

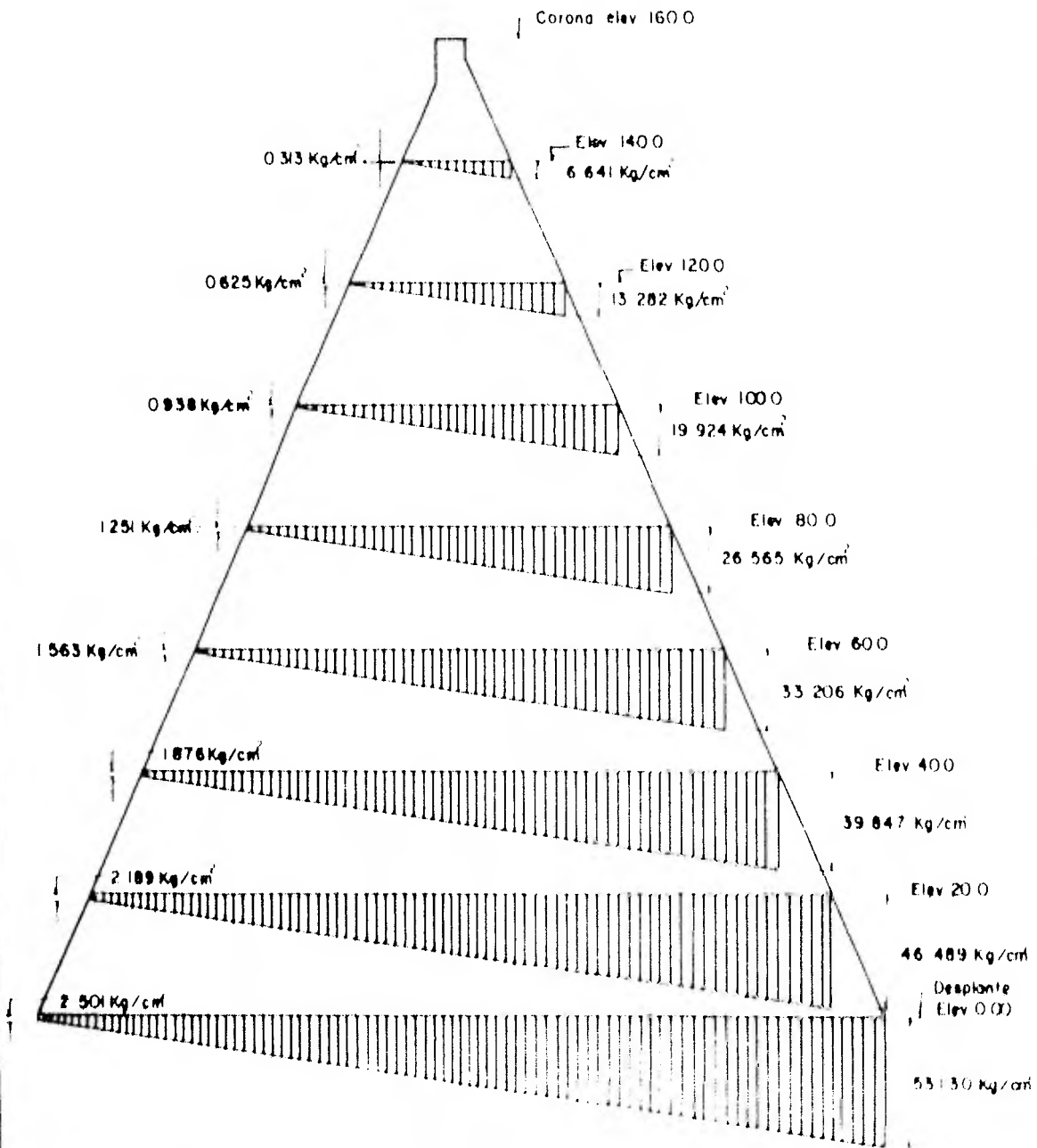


ESFUERZOS HORIZONTALES  $F_h$

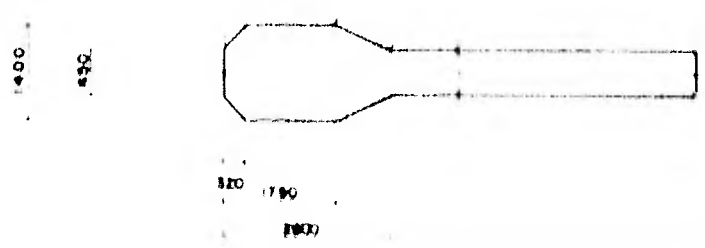
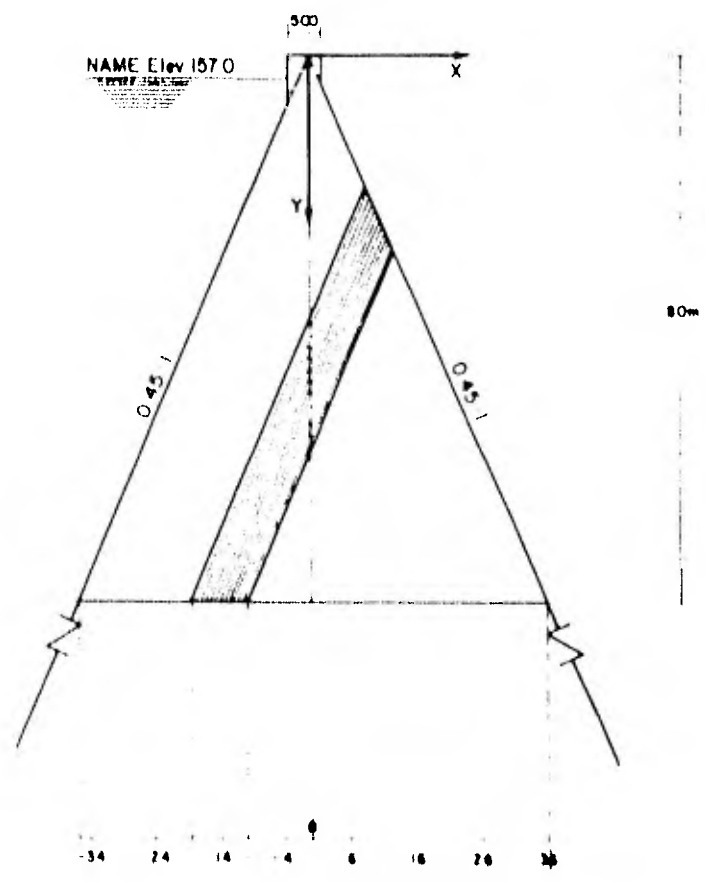
VARIACION DE ESFUERZOS CON AGUA AL NAME Y AL NIVEL DE DESPLANTE



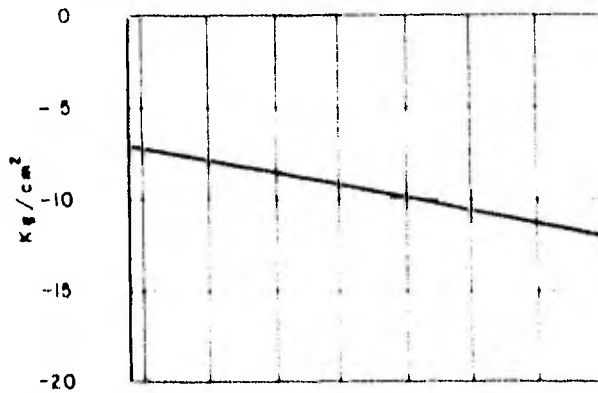
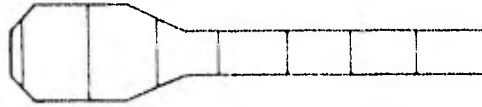
ESFUERZOS PRINCIPALES  $\sigma_I$  Y  $\sigma_{II}$  CON CONDICIONES DE CARGA DE AGUAS AL NAVE Y AL NIVEL DE DESPLANTE



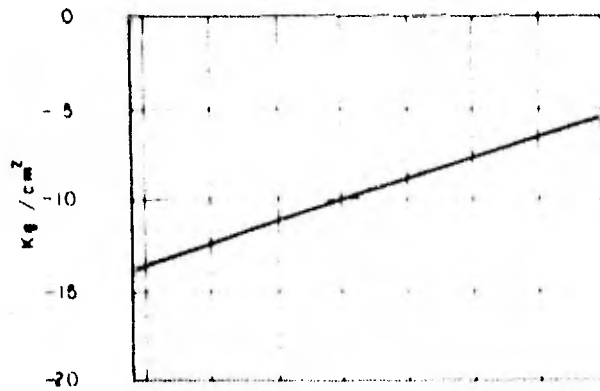
DISTRIBUCION DE ESFUERZOS VERTICALES  $\sigma_v$  AGUA AL NAME



CORTE A LA MITAD DE LA SECCION DEL CONTRAFUERTE

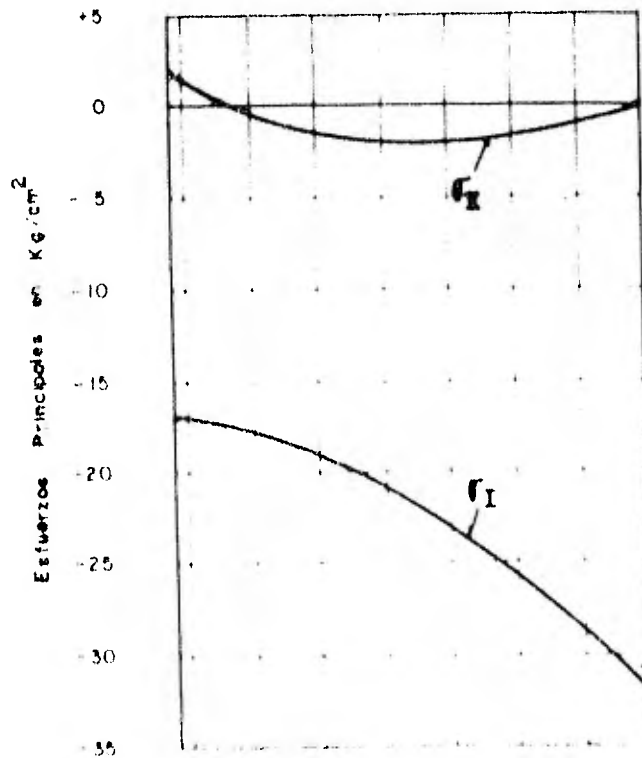


ESFUERZOS TANGENCIALES  $T_{xy}$

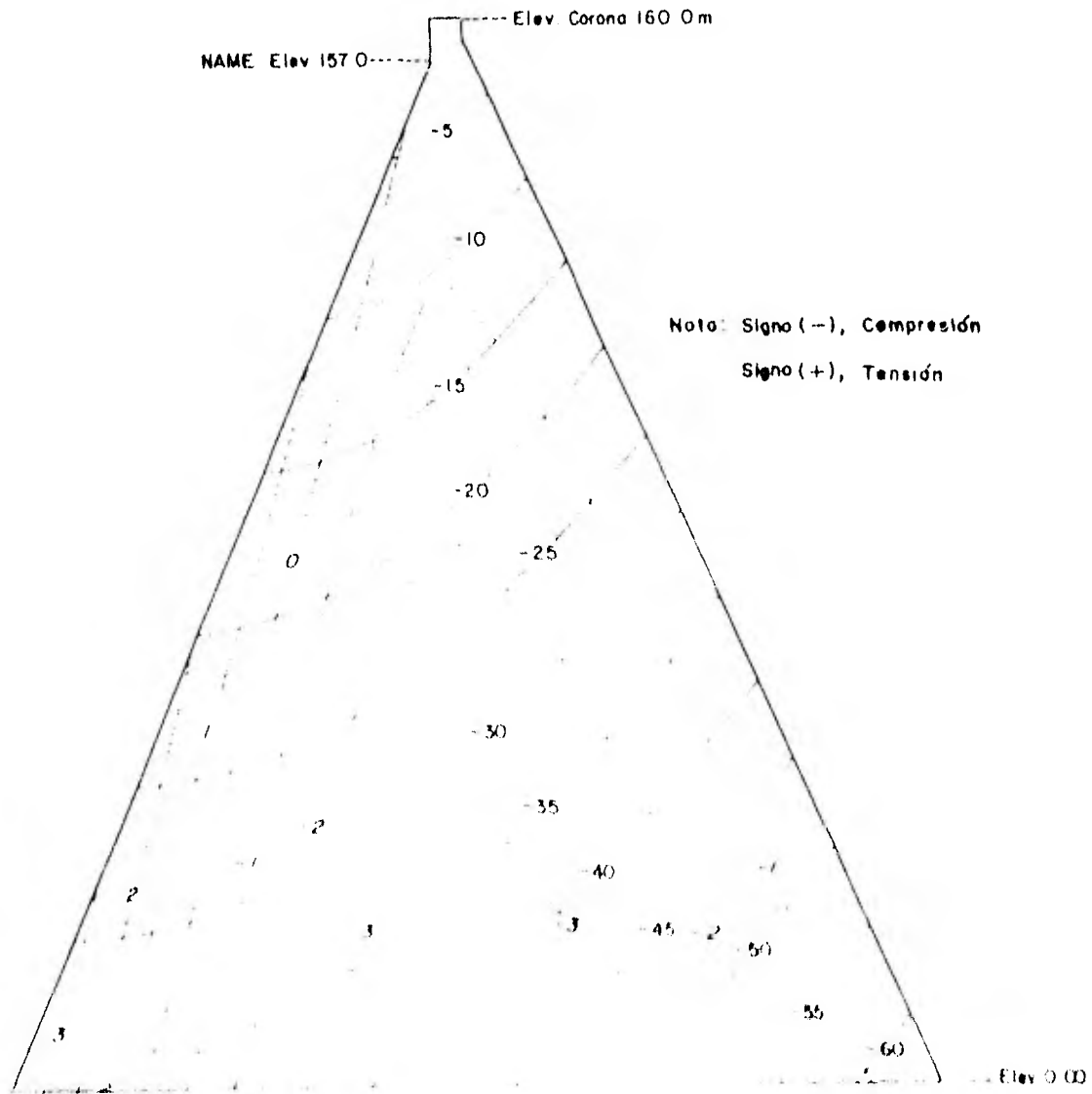


ESFUERZOS HORIZONTALES  $\sigma_x$

VARIACIONES DE ESFUERZOS CON AGUA AL NAME Y A LA COTA DE 800m

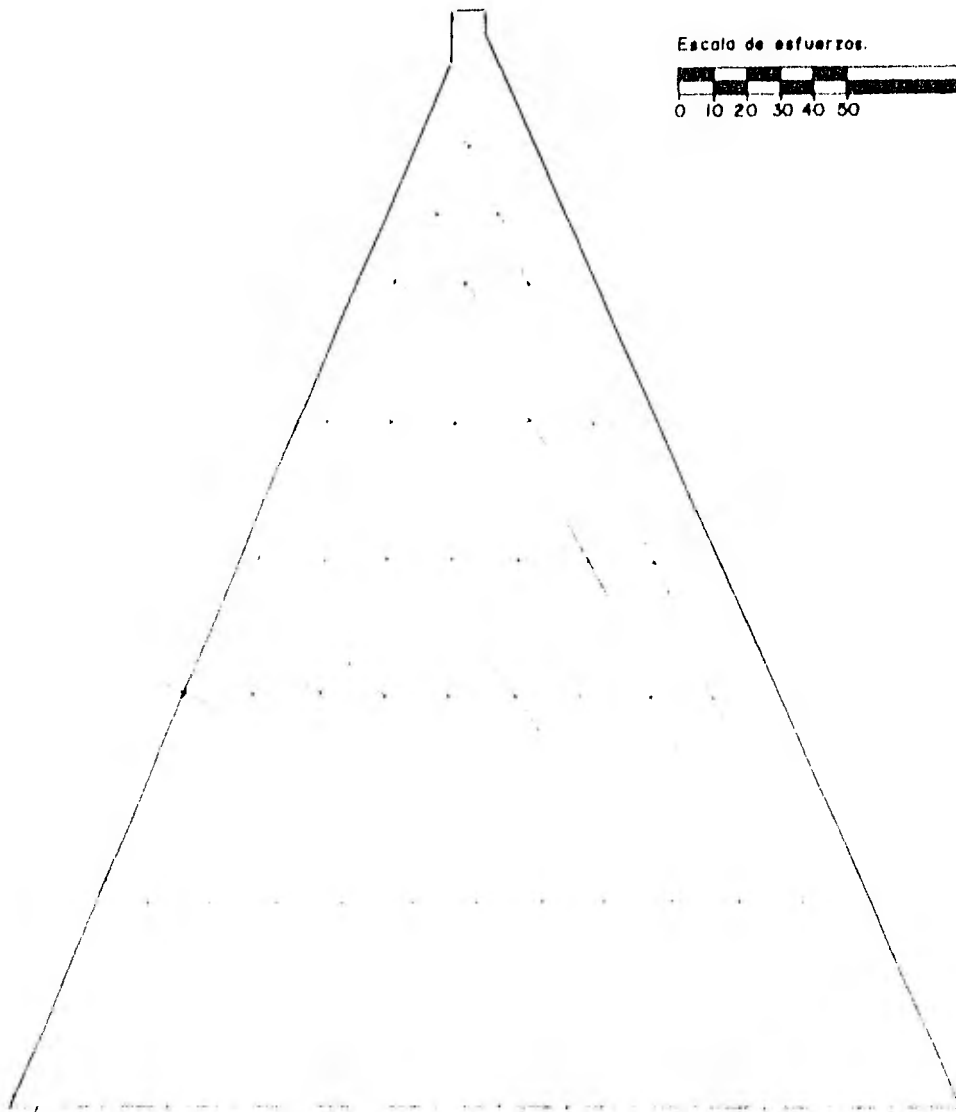


ESFUERZOS PRINCIPALES  $\sigma_I$  Y  $\sigma_{II}$  CON CONDICIONES DE CARGA  
AGUAS AL NAME Y A LA COTA DE 80 0 m

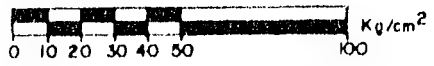


ISOSTATICAS DE ESFUERZOS PRINCIPALES AGUA AL NAME





Escala de esfuerzos.



DIRECCION Y MAGNITUD DE ESFUERZOS PRINCIPALES ( $\sigma_1, \sigma_2$ )  
CON AGUA AL NAVE

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSIONES

El análisis estructural hecho a la sección ilustrada en la página 70 mediante la aplicación del método de PLGAUD, se obtienen las distribuciones de esfuerzos en el cuerpo del contrafuerte de una manera preliminar y muy aproximada, ya que el problema es tratado bidimensionalmente en virtud de las características geométricas de dicha sección y de las condiciones de éste método; así como con el de SHEFFO y el de CLAUDIO MARCELLO, obteniéndose resultados muy semejantes los cuales nos servirán para tener una idea bastante confiable en un primer intento de análisis y saber en que orden pueden andar los esfuerzos a que estará sometida la estructura; Estos métodos son fáciles de aplicar ya que actualmente se tienen programas en calculadoras portátiles, como es el caso del desarrollado en el ejemplo expuesto en el capítulo VII.

Sin embargo, cuando existen diferencias muy marcadas entre las propiedades elásticas del concreto y la cimentación, la inclusión de un mayor número de variables, es recomendable utilizar métodos más completos como es el caso del método del elemento finito, ya que este método permite con la aplicación de dicho método, obtener resultados más detallados.

al gran consumo de tiempo en computadora electrónica que involucra, la cual solo será costeable en el caso de analizar proyectos definitivos.

## BIBLIOGRAFIA.

- 1.- Davis, C.V. y Sorensen, K.E. (editores) Handbook of applied hydraulics, Mc. Graw Hill, Nueva York, 1969.
- 2.- Marcello, C. Artículos varios reproducidos en los - Scritti di Claudio Marcello. Comité Nacional Italiano de Grandes Presas, Roma, 1970.
- 3.- Marsal, R.J., y Reséndiz, D. Presas de tierra y enrocamiento. Limusa, México, 1975.
- 4.- Tamez, E. Principios del diseño y construcción de - presas de tierra. S.R.H. México, 1964.
- 5.- U.S.B.R. Design of small dams, U.S. Gov. Print off- Washington, 1960.
- 6.- Vega R.O. y Arreguín C.J. Presas de almacenamiento y derivación. División de Estudios de Postgrado, I.I. U.N.A.M.
- 7.- Zienkiewicz, O.C. The finite element method in engineering science. Mc. Graw Hill.