2ej
35

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

PROYECTO DE LIBRO DE TEXTO PARA LA MATERIA DE MATEMATICAS FINANCIERAS I

T E S I S

Que para obtener el Título de

A C T U A R I O

p r e s e n t a

MARIA DEL PILAR MIJARES MORAN

México, D. F. Mayo 1987

I N D I C E

INTRODUCCION

Hasta hace unos años las matemáticas financieras eran motivo de estudio para un grupo reducido de la población. Sin embargo en la actualidad, la evolución de la economía mundial y en especial la situación financiera de nuestro país, han orillado al grueso de la población a familiarizarse con conceptos de matemáticas financieras y a incorporar a su vocabulario cotidiano palabras netamente de ésta materia.

De éstas nuevas tendencias han surgido comentarios para hacer más extenso el programa de la materia de Matemáticas Financieras que actualmente se imparte.

Aunque a la fecha se ha optado por no modificarlo ya que los conceptos que conforman el programa vigente se considera de vital importancia, sobre todo porque deben ser asimilados perfectamente para fortalecer las bases necesarias para comprender las materias subsecuentes.

De ahí que el objetivo principal de ésta tesis sea el proporcionar al alumno una guía completa de todos los conceptos fundamentales de las matemáticas financieras, que le permitirán continuar con mejores técnicas dentro de ésta rama.

Cabe hacer notar que los ejercicios desarrollados en éste texto pretenden fijar la atención del alumno en el concepto, de ahí que se hayan tomado como tasas de interés para efecto del ejercicio, valores bajos que facilitan las operaciones; ya que en nuestro país las tasas actuales de interés fluctúan entre un 90% y un 130%, las cuáles corresponden a una economía inflacionaria cambiante, y por ende pueden variar radicalmente en pequeños períodos de tiempo.

CAPITULO I

CONCEPTOS PRELIMINARES

Es necesario iniciar con la presentación de los conocimientos mínimos necesarios para una mejor comprensión de la materia.

1.1 La Razón de dos cantidades expresadas en la misma unidad es su cociente.

$$\frac{x}{y} = q \qquad (\text{ q es la razón entre x y y}).$$

Ejemplo: Qué relación hay entre el largo de una habitación que mide 4 m y el ancho que mide 2 m ?

$$\frac{4}{2} = 2$$

La Proporción es la igualdad de dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

En ésta proporción a y d son los extremos mientras que b y c se denominan medios.

La propiedad de las proporciones es que el producto de los medios es igual al producto de los extremos. Por lo anterior se tiene que $ad = bc$.

Ejemplo: Obtener el valor de x en $\frac{15}{5} = \frac{10}{x}$

Por la propiedad de las proporciones tenemos que $15x = 5(10)$ despejamos x $\quad x = \frac{5(10)}{15} \qquad x = \frac{50}{15}$

$$x = 3.33$$

1.2 TEOREMA DEL BINOMIO

Binomio es una expresión algebráica que consta de dos términos.

Factorial de n es el producto de una serie de números enteros y consecutivos desde 1 hasta n y se denota por $n!$.

Ejemplo: El factorial de 7 es $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$

Nota: Se define $0! = 1$

El teorema del binomio nos permite determinar la potencia de expresiones algebráicas que se utilizan en el cálculo de intereses compuestos.

El desarrollo de la potencia n de un binomio tiene por expresión:

$$(a+b)^n = \frac{a^n}{0!} + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}a^0b^n$$

Propiedades:

i) El exponente de a en el primer término es n, en el segundo es n-1 y decrece en 1 en cada término sucesivo.

ii) La suma de los exponentes de a y b en cualquier término es n.

iii) El coeficiente del primer termino es 1, el del segundo término es n, el coeficiente de cualquier término posterior es igual al coeficiente del término precedente multiplicado por el exponente de a en ese mismo término y dividó entre el exponente de b aumentado en 1 de ese término.

En consecuencia el término de orden r+1 tiene por expresión:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\,a^{n-r}b^{r}$$

Ejemplos:

1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

2. $(x+y)^4 = x^4+4x^3y + \frac{4(4-1)}{1\cdot 2}x^2y^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{1\cdot 2\cdot 3}xy^3 + y^4$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

3. $(1+i)^n = 1 + ni + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}i^3 + \ldots + i^n$

4. Desarrollar y simplificar:

$$(2x + 3y)^5 = (2x)^5+5(2x)^4(3y) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(2x)^3(3y)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}(2x)^2(3y)^3$$

$$+ \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(2x)(3y)^4 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(3y)^5$$

$$= 32x^5+240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$

5. Encontrar el valor de $(1 + 0.02)^{-4}$ aproximado con 4 cifras decimales.

$$(1+0.02)^{-4} = 1^{-4} + (-4)(1^{-5})(0.02) + \frac{(-4)(-5)}{1\cdot 2}(1^{-6})(0.02)^2 + \ldots$$

$$= 1-0.08 + 0.004 - 0.00016 + 0.0000056 - \ldots$$

$(1.02)^{-4} = 0.9238456$

$(1.02)^{-4} = 0.9238$ aproximadamente

1.3 EXPONENTES Y LOGARITMOS

Exponentes. Se utiliza la expresión a^n para abreviar una multiplicación de n factores "a". Donde a es un número real y n un entero positivo.

Ejemplos: $a^2 = a \cdot a$

$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a$

En ésta expresión a es la base y n su potencia. Se lee "a" elevada a la potencia n.

Cuando n = 2 se lee a elevada al cuadrado.

Cuando n = 3 se lee a elevada al cubo.

Al elevar un número positivo o negativo, a una potencia par obtenemos un numero positivo. Si se eleva un número negativo a una potencia impar el resultado es un número negativo.

Ejemplos: $-7^3 = -7 \cdot -7 \cdot -7 = -343$

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

Leyes de los exponentes: Si n y m son números enteros positivos y "a" y "b" representan cualquier expresión algebráica $\neq 0$ cuando aparecen en el denominador, se tienen las sig. leyes:

1) El producto de dos factores que tienen la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Ejemplo: $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 3125$

2) Un factor x con exponente n elevado a la potencia m es igual al factor elevado a la potencia n·m.

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Ejemplo: $(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$

3) El cociente de dos factores que tienen la misma base, es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes, donde m es el exponente del numerador y m es el exponente del denominador.

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{n-m}$$

Ejemplo: $\frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$

4) El cociente de dos factores de distinta base, x/y con y ≠ 0, pero con el mismo exponente m, es igual a ese cociente elevado a la potencia n.

$$\frac{a^n}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Ejemplo: $\frac{10^2}{5^2} = \left(\frac{10}{5}\right)^2 = \frac{100}{25} = 4$

5) El producto de dos factores de distinta base, elevados a la misma potencia m, es igual al producto de sus bases elevado a la potencia m.

$$a^m \cdot b^m = (a\cdot b)^m$$

Ejemplo: $3^2 \cdot 5^2 = (3\cdot 5)^2 = 15^2 = 225$

6) Un factor a elevado a una potencia negativa es igual al recíproco de ese factor elevado a una potencia positiva.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0$$

Ejemplos: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

$$(1+i)^{-n} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Exponentes fraccionarios y exponente cero.

Se define $a^0 = 1 \quad a \neq 0$

$e^0 = 1 \quad e \neq 0$

Ejemplo: $5^0 = 1$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{(m y n enteros positivos).}$$

Ejemplo: $2^{4/2} = \sqrt[2]{2^4} = \sqrt{16} = 4$

Se define también $a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$ ($a\neq0$) (m y n enteros positivos).

Ejemplo: $4^{-2/3} = \frac{1}{4^{2/3}}$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$$

Logaritmos: Se utilizan para facilitar calculos matemáticos, ya que abrevian las operaciones. Las tablas de logaritmos permiten efectuar las multiplicaciones, divisiones, potenciaciones y radicaciones con rapidéz.

Un logaritmo es el exponente n al que hay que elevar un número b llamado base para obtener el valor de un número.

$$\left.\begin{array}{l} \log_b a = n \\ a = b^n \end{array}\right\rangle \text{ son equivalentes} \qquad a > 0 \qquad \begin{array}{l} b \neq 1 \\ b \neq 0 \end{array}$$

Ejemplo: $\log_5 125 = 3$ ya que $125 = 5^3$

$\log_{10} 1000 = 3$ ya que $1000 = 10^3$

Los sistemas de logaritmos se determinan de acuerdo a su base siendo más comunes los logaritmos de base 10 y de base e.

Los logaritmos de base 10 se denominan con el nombre de logaritmos decimales comúnes o de Briggs.

Se denotan $\log a = n$ en dónde $a = 10^n$

En estos logaritmos no se escribe la base b. Son los que más se utilizan en la mayoría de los cálculos de matemáticas financieras.

Tenemos por definición:

$$\begin{array}{llll} \log 1000 = 3 & \text{ya que} & 10^3 = 1000 \\ \log 100 = 2 & \text{ya que} & 10^2 = 100 \\ \log 10 = 1 & \text{ya que} & 10^1 = 10 \\ \log 1 = 0 & \text{ya que} & 10^0 = 1 \\ \log .1 = -1 & \text{ya que} & 10^{-1} = 0.1 \\ \log .01 = -2 & \text{ya que} & 10^{-2} = 0.01 \end{array}$$

Logaritmos de base e: En este sistema el valor de la base e es aproximadamente 2.71828. Se le llama logaritmo natural y se denota:

$$\ln a = n \quad \text{dónde} \quad a = e^n \quad y \quad e = 2.71828$$

Leyes de los logaritmos:

1) La base b de un sistema de logaritmos siempre es mayor que cero $\neq 1$

$b>0$

2) La función logaritmica es 0 para a = 1

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{ya que } b^0 = 1$$

3) El logaritmo de una cantidad igual a la base es 1

$$\log_b b = 1 \quad \text{ya que } b^1 = b$$

4) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_b A \cdot B = \log_b A + \log_b B$$

Ejemplo: $\log 10 \cdot 100 = \log 10 + \log 100 = 1+2=3$

$$\therefore \log 10 \cdot 100 = \log 1000 = 3$$

5) El logaritmo del cociente de dos cantidades es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$$

Ejemplo: $\log \frac{100}{10} = \log 100 - \log 10 = 2-1 = 1$

$$\therefore \log \frac{100}{10} = \log 10 = 1$$

6) El logaritmo de una potencia de una cantidad igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la cantidad.

$$\log_b A^n = n \log_b A$$

Ejemplo: $\log(10)^2 = 2 \log 10 = 2 \cdot 1 = 2$

$$\therefore \log (10)^2 = \log 100 = 2$$

7) El logaritmo de un radical es igual al cociente entre el logaritmo de la cantidad subradical y el índice.

$$\log_b \sqrt[r]{A} = \frac{1}{r} \log_b A$$

Ejemplo: $\log \sqrt[2]{100} = \frac{\log 100}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$$\therefore \log \sqrt[2]{100} = \log 10 = 1$$

El logaritmo (en base 10) de un número positivo consiste en 2 partes:

1) **Mantisa.-** Es la parte decimal del logaritmo de un número, el valor de las mantisas se encuentra en las tablas logarítmicas.

2) **Característica.-** Es la parte entera del logaritmo de un número.

La mantisa se refiere a las cifras significativas del número y la característica a la posición del punto decimal.

La mantisa siempre es positiva. La característica puede no ser positiva, entónces se conviene en anotar el signo negativo sobre el número que representa la característica.

Para números mayores que 1, la característica es igual al número de dígitos a la izquierda del punto decimal menos una unidad y es no negativa.

Para números menores que 1, la característica es igual al número de ceros que esté a la derecha del punto decimal hasta la primera cifra significativa mas uno y la característica es negativa.

Ejemplos: Obtener la característica de los sig. números.

586	tiene 3 dígitos menos uno = 2
6.21	tiene 1 dígito menos uno = 0
0.023	tiene 1 cero más uno = $\bar{2}$
0.00054	tiene 3 ceros más uno = $\bar{4}$

La mantisa la determinamos tomando solamente las cifras significativas y omitiendo el punto decimal.

La tabla proporciona la mantisa con seis cifras decimales de cualquier número con cuatro ó menos dígitos.

Para números de 5 dígitos se usan partes proporcionales para interpolar.

Para obtener la mantisa de un número por ejemplo 5340 buscamos en la columna N el número 534 y en el renglón del cero, dónde se cruzan éstos números encontramos el valor de la mantisa 0.72754. La característica es igual a 3 ya que 5340 tiene cuatro dígitos menos uno = 3. Por lo tanto el logaritmo de 5340 = 3.72754

Ejemplo: Obtener el logaritmo de 0.031172

Buscamos en las tablas el número 311 y en la intersección con el 7 obtenemos 493737, para la siguiente cifra en el renglón del 311 y en la columna de dif. encontramos el valor 139, entónces en la parte proporcional buscamos el número 139 y en la intersección del número 2 obtenemos 27.8 y esa cantidad hay que agregarla a la mantisa que habíamos obtenido, es decir, 493737 + 27.8 = 493764

$\therefore$ log 0.031172 = $\bar{2}$.493764

__Antilogaritmos.__- Es la función inversa del logaritmo, el cuál obtenemos siguiendo el proceso contrario del logaritmo.

$$\text{antilog}_b\ x = b^x = N$$

Para obtenerlo localizamos en el cuerpo de la tabla y vemos a que número corresponde.

Ejemplo: Encontrar el antilogaritmo de 1.574147

La mantisa 574147 corresponde al número 3751. La característica es 1 e indica que debe haber 2 dígitos a la derecha del punto decimal.

$\therefore$ antilog 1.574147 = 37.51

Ejemplo: Dado el log N = 5.073464 encontrar N

Tenemos que la menos mantisa más próxima a 073464 es 073352 que corresponde al número 1184. La diferencia 073464-073352 = 112 y la diferencia tabular 366.

Localizamos 366 en dif. en las partes proporcionales y encontramos 190.8 en la columna del 3 como el más próximo a 112. Por lo tanto los dígitos requeridos para N son 11843. Debe haber 6 dígitos antes del punto decimal.

$\therefore \quad N = 118430$

LOGARITMOS NEGATIVOS . Encontramos con frecuencia en problemas de interés compuesto y anualidades los logaritmos negativos. Si obtenemos una mantisa negativa se requiere hacerla positiva ya que en las tablas sólo son mantisas positivas. La hacemos positiva restando 1 a la característica y sumando uno a la mantisa.

Ejemplo: Encontrar el antilogaritmo de -0.52287

$$1-.52287= 0.47713+\bar{1} = \bar{1}.47713$$

Operaciones con logaritmos.- Conociendo como se determina el logaritmo y antilogaritmo de un número aplicando sus leyes podemos efectuar operaciones.

Primero se determinan los logaritmos que intervienen en la operación, después aplicamos las leyes de los logaritmos y finalmente se calcula el antilogaritmo.

Ejemplo: Obtener el valor de $A = \frac{965}{302}$

$$\log A = \log \frac{965}{302} = \log 965 - \log 302$$

$$\log A = 2.984527 - 2.480007$$
$$\log A = 0.504520$$
$$A = \text{antilog } 0.504520$$
$$A = 3.1953$$

Ejemplo: Obtener el valor de $A = {}^{3}\ 12.50$

$$\log A = \log {}^{n} a \quad = \quad \frac{\log_b a}{n}$$

$$\log A = \log \frac{12.50}{3} \quad = \quad \frac{1.096910}{3} \quad = \quad 0.365636$$

$A = \text{antilog } 0.365636$

$A = 2.3208$

1.4 PROGRESIONES

Una progresión es una serie de términos en los cuáles prevalece cierto orden.

Progresión Aritmética.- Es una sucesión de números, llamados términos que tienen una diferencia común constante denotada como d.

Si designamos al primer término por "a" y "d" a la diferencia común, la progresión será:

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ .\ .\ .\ ,\ a + (n-1)d$$

Al n-ésimo término se le designa como L y su expresión en función del primer término, el número de términos y la diferencia común está dada por:

$$L = a + (n-1)d$$

Tomamos a S como la suma de los términos de la progresión aritmética y tenemos que:

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (l-d) + l$$

$$S = l + (l-d) + (l-2d) + \dots + (a+d) + a$$

sumando los dos miembros tenemos

$$2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots + (a+l)$$

entónces $S = \frac{n}{2}(a+l)$

sustituyendo $L = a + (n-1)d$ obtenemos

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$\therefore$ Para calcular el último término de una progresión aritmética se utiliza la fórmula $L = a + (n-1)d$, y para calcular la suma de los n términos de una progresión arit. utilizamos $S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

Ejemplo: Encontrar la diferencia común en la sig. sucesión.

4,8,12,16

Restamos 2 números consecutivos de la sucesión 8-4=4 ó 16-12=4

$\therefore$ La diferencia común es 4

Ejemplo: Encontrar el término número 12 y la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética siguiente: 6,11,16,21

$a = 6$

$d = 5$

$n = 12$

$L = a + (n-1)d = 6 + (12-1)5 = 61$

$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{12}{2}(6+61) = 402$

Interpolación de medios aritméticos.- Si entre dos números se desea interpolar n términos, de modo que con los dos números dados formen una progresión aritmética se tendrá, designado por N_1 y N_2 los dos números dados.

Primer término $= N_1$

Ultimo término $= N_2$

Número de términos $= n + 2$

$N_2 = N_1 + (n+2-1)x$, siendo x la diferencia constante .

despejando x tenemos

$$x = \frac{N_2 - N_1}{n + 1}$$

Ejemplo: Interpolar entre 3 y 5, 4 términos de modo que formen una progresión aritmética.

$N_1 = 3$ $\quad N_2 = 5$ $\quad n = 4$

$$x = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}$$

$\therefore$ La progresión es $3,\ 3^{2/5},\ 3^{4/5},\ 4^{1/5},\ 4^{3/5},\ 5$

Progresión Geométrica.- Es una sucesión de números llamados términos en donde cada uno de ellos puede obtenerse del anterior, multiplicándolo por una cantidad constante llamada razón, la cuál se denota por r.

Tenemos que 3,9,27,... forman una progresión geométrica. La razón geométrica es 3 ya que 3x3=9; 9x3=27, etc.

Si designamos al primer término por "a" y a "r" la razón entónces la progresión es:

$$a \, , \, ar \, , \, ar^2, \, ar^3, \, . \, . \, . \, , \, ar^{n-1}$$

El n-ésimo término se designa:

$$L = ar^{n-1}$$

Tomamos a S como la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica.

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + . . . + ar^{n-1}$$

Si multiplicamos por "r" a ambos lados de la igualdad tenemos:

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + . . . + a^{rn}$$

Ahora restamos las dos últimas ecuaciones:

$$rS - S = ar^n - a$$

$$S(r-1) = ar^n - a$$

$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1}$$

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Por lo tanto para calcular el último término de una progresión geométrica utilizamos la fórmula:

$$L = ar^{n-1}$$

y para calcular la suma de los n términos de una progresión geométrica utilizamos:

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} \qquad \text{cuando } r>1 \text{ sustituimos} \qquad S = \frac{rL-a}{r-1}$$

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r} \qquad \text{cuando } r<1 \text{ sustituimos} \qquad S = \frac{a-rL}{1-r}$$

Ejemplos: Encontrar el 10° término y la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica siguiente:

$$4 \;,\; 8 \;,\; 16 \;,\; 32$$

Tenemos que $a = 4$, $r = 2$ y $n = 10$

$$L = ar^{n-1} \qquad L = 4(2)^9 = 2048$$

ahora $\frac{rL-a}{r-1} = \frac{2(2048)-4}{2-1} = 4092$

Encontrar la suma de los "n" primeros términos de la progresión:

$$1 \;,\; (1+i) \;,\; (1+i)^2 \;,\; (1+i)^3$$

$$S = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

<u>Interpolación de medios geométricos</u>.- La utilizamos para encontrar los valores intermedios entre el primer y último término de una progresión geométrica.

Para obtener la razón despejamos r de la fórmula $L = ar^{n-1}$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{L}{a}}$$

Ejemplo: Interpole 3 medios geométricos entre 2 y 32

$a = 2$

$L = 32$

$n = 5$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{L}{a}}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{32}{2}}$$

$$r = \sqrt[4]{16}$$

$$r = 2$$

∴ La progresión geométrica es:

$$2\ ,\ \underbrace{4\ ,\ 8\ ,\ 16}_{\text{medios geométricos}}\ ,\ 32$$

1.5 SERIES Y SUCESIONES

Una sucesión es un conjunto de términos formados de acuerdo con alguna regla establecida.

Ejemplo: 1 , 1/2 , 1/3 , 1/4 , 1/5 es una sucesión.

Una serie es la suma indicada de los términos de una sucesión. De la sucesión anterior obtenemos la serie:

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5$$

Una sucesión finita o una serie finita es aquella que tiene un número especificado limitado de términos.

Una sucesión infinita o una serie infinita es aquella cuyo número de términos no es limitado o especificado.

El término general ó n-ésimo término indica la regla de formación de los términos.

Si consideramos a n como una variable cuyo dominio sea el conjunto de los enteros positivos, la sucesión puede indicarse por $\{a_n\}$ así: $\{1/n\}$ representa la sucesión infinita de términos

$$1 , 1/2 , 1/3 , 1/4 , ... , 1/n , ...$$

Si bien una sucesión finita debe tener una suma finita, él límite de la suma de una sucesión infinita puede ser finito o infinito.

Sea S_n el símbolo que representa la suma de los primeros n términos de una sucesión infinita $u_1 , u_2 , ..., u_n , ... ,$

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

y sea S el símbolo que representa el límite de s_n a medida que $n \to \infty$.

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} u_n$$

Si el límite existe y es un número finito, la serie infinita es convergente y por lo mismo se dice que converge al valor S ; si el límite no existe en forma finita, la serie infinita es divergente. La divergencia puede ocurrir debido a que S_n llega a ser infinita a medida que $n \to \infty$ ó debido a que S_n oscila sin aproximarse a un límite.

Ejemplo: Para la serie geométrica de n términos

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

puede demostrarse que $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

La primera forma se utiliza generalmente si $|r|<1$; la segunda se utiliza si $|r|>1$.

Si $|r|<1$, entonces $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$ y $\lim_{n \to \infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$ y la serie es convergente.

Si $|r|>1$, entónces $\lim_{n \to \infty} r^n = \infty$ y $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$ y la serie es divergente.

Nota: si $r = -1$, la serie geométrica es $a-a+a-a+a-a+\dots$ y si n es impar, $S_n = a$. Si n es par $S_n = 0$. Tal tipo de serie no tiene límite y es por consiguiente divergente. Esta es considerada serie oscilante.

Serie de Potencias.-

Una serie de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ en la cuál los coeficientes $a_o, a_1, a_2, \dots$ son independientes de x, es denominada una serie de potencias en x.

Tales series pueden converger para todos los valores de x, ó para ningun valor de x excepto para $x = 0$; o bien puede ser convergente para algunos valores de $x \neq 0$ y divergente para otros valores.

En todos los casos los valores de x para los que la serie converge forman el campo de convergencia.

Serie de Maclaurin.- Una serie convergente de potencias de x es una función de x para todos los valores dentro del intervalo de convergencia.

Así podemos escribir:

(1) $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$

Entónces, si una función se representa por una serie de potencias, ¿Cuál será la forma de los coeficientes $a_o, a_1, \dots, a_n$, etc?

Hagamos $x = 0$ en (1). Se obtiene:

(2) $f(0) = a_o$ y ya se ha determinado a_o, el primer coeficiente de la serie (1).

Ahora supongamos que la serie (1) puede derivarse término a término y que admite derivadas sucesivas. Entonces tendremos:

$$\left.\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots\\
f''(x) &= 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots\\
f'''(x) &= 6a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \ldots\\
&\vdots\\
f^n(x) &= n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2a_n + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Haciendo $x = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
f(0) &= a_0\\
f'(0) &= a_1\\
f''(0) &= (2!)a_2\\
f'''(0) &= (3!)a_3\\
&\vdots\\
f^n(0) &= n!a_n
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\left.\begin{aligned}
a_0 &= f(0)\\
a_1 &= f'(0)\\
a_2 &= \frac{f''(0)}{2!}\\
a_3 &= \frac{f'''(0)}{3!}\\
&\vdots\\
a_n &= \frac{f^n(0)}{n!}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

sustituyende en (1) tenemos

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (5)$$

Esta fórmula expresa a $f(x)$ como una serie de potencias, y decimos que "la función $f(x)$ ha sido desarrollada en una serie de potencias en x". Esta es la serie de Maclaurin.

Es necesario para que $f(x)$ sea representada per (5) que ésta y todas sus derivadas estén definidas para $x = 0$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{n-1!} + R \qquad (0<x_1<x)$$

dónde $R = f^{(n)}(0)\dfrac{x^n}{n!}$ R es el término complementario e residue después de n términos.

Ejemplos: Desarrollar e^x en una serie de Maclaurin.

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$\vdots$

$f^n(x) = e^x$

$$e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

- Desarrollar $(1+x)^{1/2}$ en serie de Maclaurin alrededor de $x=0$

$f(x) = (1+x)^{1/2}$

$f'(x) = 1/2(1+x)^{-1/2}$

$f''(x) = -1/2^2(1+x)^{-3/2}$

$f'''(x) = 3/2^3(1+x)^{-5/2}$

$f^{iv}(x) = -3 \cdot 5/2^4(1+x)^{-7/2}$

$f^{v}(x) = 3 \cdot 5 \cdot 7/2^5(1+x)^{-9/2}$

$\vdots$

$$f^n(x) = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)(2n-5)\dots 1}{2^n}(1+x)^{-2n-1/2}$$

$$(1+x)^{1/2} = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x - \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{3}{2^2 \cdot 3!}x^3 - \dots + (-1)^{n+1}\frac{(2n-5)(2n-7)\dots 1}{2^{n-1}(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

1.6 DEPRECIACION

La depreciación es la pérdida de valor de un activo físico(edificios,autos,etc.), como consecuencia de su uso.

La depreciación total es la cantidad que resulta de restar al valor del activo físico en el momento de su compra (costo), el valor registrado al fin de su vida util (valor salvamento).

Costo = C

Valor de salvamento = VS

Depreciación total = DT

$$DT = C - VS$$

Para prevenir la necesidad de reemplazo de un determinado activo al fin de su vida util, cada año se traspasa una parte de las utilidades de una empresa a un fondo especial llamado Fondo de Depreciación (FD).

Los cargos por depreciación (CD) son los depósitos anuales en el fondo para depreciación. Se conoce como método de depreciación lineal.

$$CD = \frac{DT}{\text{vida probable}} = \frac{DT}{VP}$$

El valor en libros de un activo físico es la cantidad que resulta de restar al costo original del activo el fondo para depreciación acumulado (VL). $(VL) = C - FD$

Ejemplo: Un automovil cuyo costo ascendió a \$ 5'000,000.00 tiene un valor de salvamento de \$ 150,000.00. Cuál será la depreciación total del auto?

$DT = C - VS$

$$DT = 5'000,000 - 150,000.00$$
$$DT = 4'850,000.00$$

CAPITULO II

INTERES SIMPLE

Interés.- Es la cantidad que se paga por hacer uso de dinero solicitado como préstamo,o bien, la cantidad que se obtiene por la inversión de algún capital.

Por el dinero tomado en préstamo es necesario pagar un precio el cuál, se expresa por una suma a pagar por cada unidad de dinero prestada en una unidad de tiempo convencionalmente estipulada.

Tenemos:

C = Capital

S = Monto acumulado

$I = S - C$ = Interés

2.1 Función Acumulación y Función Monto.- Llamaremos el principal

al capital invertido, es decir, al monto inicial; el valor acumulado es el monto total recibido.

La diferencia entre el principal y el valor acumulado es el monto de interés ganado durante el periodo en que se invirtió.

Consideremos una inversión de un principal de $ 1.00 , definimos $a(t)$ como una función de acumulación la cuál, dá un valor acumulado al tiempo $t \geq 0$.

$a(t)$ tiene las siguientes propiedades:

$a(0) = 1$

$a(t)$ es a menudo una función continua.

$a(t)$ es generalmente una función creciente. (si fuera decreciente implicaria un interés negativo).

El principal original invertido generalmente no es \$ 1 sino una cantidad $k > 0$.

$A(t)$ se define como la función monto con la cuál obtenemos el valor acumulado al tiempo $t \geq 0$.

Tenemos :

$$A(t) = k \cdot a(t) \quad y \quad A(0) = k$$

$A(t)$ es creciente
$A(t)$ a menudo es continua

Denotamos el monto de interés ganado durante el n-ésimo año de la fecha de inversión por I_n.

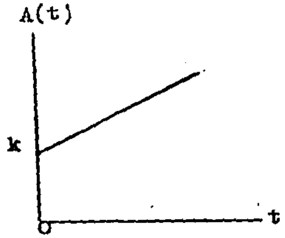
Entónces tenemos:

$$I_n = A(n) - A(n-1) \qquad \text{para } n \geq 1$$

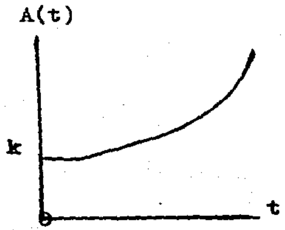
I_n involucra el efecto de interés sobre un período de tiempo.

La función de acumulación y la función monto pueden ser intercambiables en muchos casos.

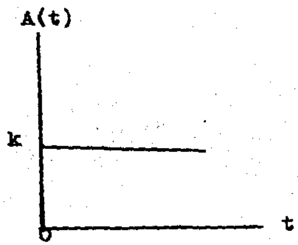
Por ejemplo:



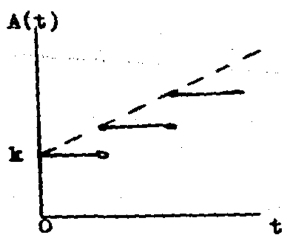
Función de monto lineal



Función de monto no lineal. En este caso es una curva exponencial.



Función de monto horizontal. Su pendiente es = 0. El principal no acumula interés.



Función de monto en la que el interés no se acumula contínuamente pero es acumulable en segmentos finitos sin interés acumulado entre fechas de pago de interés.

2.2 INTERES SIMPLE.- Es cuando los intereses que se pagan no se incorporan al capital para formar un nuevo capital.

La expresión del precio es la tasa de la operación comercial.

La unidad de tiempo denotada como t, es el número de períodos (años, meses, días, etc.), que permanece prestado ó invertido el capital.

La unidad de tiempo que se acostumbra utilizar es el año.

Ejemplo: Si $t = 15$ meses entónces $t = 15/12 = 5/4$.

La tasa es la cantidad que al multiplidarse por el capital inicial dá como resultado el interés devengado en un período de tiempo determinado. Se expresa en tanto por ciento y se denota por i.

2.3 Tasa efectiva de interés.- Es el monto de dinero que \$1 invertido al principio de un año ganará durante el año, dónde el interés es pagado al final de ese año.

En términos de la función de acumulación tenemos:

$$i = a(1) - a(0)$$

$$a(1) = 1 + i$$

En términos de la función de monto tenemos:

$$i = \frac{(1+i) - 1}{1} = \frac{a(1) - a(0)}{a(0)} = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)}$$

Entónces tenemos la sig. definición alternativa:

"La tasa efectiva de interés i es la razón del monto del interés ganado durante el año al monto del principal invertido al principio del año".

Sea i_n la tasa efectiva de interés durante el n-ésimo año de la fecha de inversión. Entónces:

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)} \qquad \text{para } n \geqslant 1$$

<u>Interés Simple</u>.- Tenemos que $a(0) = 1$ y $a(1) = 1 + i$. Hay un número infinito de funciones de acumulación que pasan a travéz de éstos 2 puntos. Unos de ellos son el interés simple y el compuesto.

Consideremos la inversión de \$1 tal que el monto de interés ganado durante cada año es constante.

El valor acumulado de \$1 al final del primer año es $1+i$, al final del segundo es $1+2i$, etc.

En general tenemos una función de acumulación lineal

$$a(t) = 1 + it \quad \text{para } t \geqslant 0$$

La acumulación de interés acordado en este modelo es llamado interés simple.

Sea i la tasa de interés simple y sea i_n la tasa efectiva de interés para el n-ésimo año.

Entónces $$i_n = \frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{[(1+i_n)] - [1+i(n-1)]}{1 + i(n-1)} = \frac{i}{1 + i(n-1)}$$

El interés simple sobre el capital C por t años a la tasa i está dado por la expresión:

$$I = Cit$$

El monto simple está dado por:

$$S = C + I = C + Cit = C(1+it)$$

Ejemplo: Determinar el interés simple sobre $1200 al 3% durante 1/2 año.

$C = 1200$
$i = 0.03$
$t = 1/2$

$I = Cit$
$I = 1200(0.03)1/2$
$I = 18$

¿Cuál es el monto?

$S = C+I \qquad S = 1200 + 18$
$S = \$\ 1218.00$

2.4 <u>Interés exácto e interés ordinario</u>.- Cuando el plaso de una transacción a interés simple viene dado en días y el tanto es anual, es preciso expresar los días como fracción del año para aplicar la fórmula. Cuando el divisor es 365, el interés es exácto. Cuando se trata de 360 días ,el interés es ordinario. El utilizar 360 días tiene como resultado el obtener un interés superior. Se usa para simplificar los cálculos.

Ejemplo: Determinar los intereses exácto y ordinario sobre un préstamo de $ 1000.00 al 8% a 60 días.

$C = 1000$
$i = 0.08$
$t = 60/365 = 12/73$ exácto
$t = 60/360 = 12/72$ ordinario

Interés exácto: $I = 1000(.08)(12/73) = 13.15$
Interés ordinario: $I = 1000(.08)(12/72) = 13.33$

2.5 Tiempo exácto y tiempo aproximado.- Conociendo las fechas, el número de días que ha de calcularse, el interés puede ser determinado de dos maneras:

Cálculo exácto del tiempo.- es el número exácto de días, tal como aparecen en el calendario. (Para determinar el número exácto de días entre dos fechas se pueden utilizar las tablas financieras en las que viene indicado el número de serie de cada día del año.

Cálculo aproximado del tiempo.- se hace suponiendo que cada mes tiene 30 días. Al número de meses completos incluidos en el plazo, se suma el número exácto de días correspondientes a los meses incompletos.

Ejemplo: Determinar en forma exácta y aproximada el tiempo transcurrido entre el 10 de junio y el 24 de septiembre.

a) Para determinar el tiempo exácto necesitamos el número de días restantes de junio, mas el número de días de julio a agosto, mas el número de días indicado para septiembre, es decir:

$20+31+31+24 = 106$ días

b) En la tabla observámos que el 24 de septiembre es el 267° día del año y el 10 de junio es el 161°. Por lo tanto el tiempo exacto es $267-161 = 106$ días.

Para obtener el tiempo aproximado contamos el número de meses completos entre el 10 de junio y el 10 de septiembre. Serían 3 lo que nos da $3x30 = 90$ días añadimos los 14 días que hay entre el 10 y el 24 de septiembre resultando $90+14 = 104$ días.

Ejemplo: Determinar el interés exácto y ordinario sobre $1000.00 al 5% del 20 de mayo al 15 de julio de 1970, calculando el tiempo en forma exácta y aproximada.

Tiempo exacto = 11+30+15 = 56
Tiempo aproximado = 30 + 10+15 = 55

Interés exácto:
a) $I = 1000(.05)(56/365) = \$ 7.67$
b) $I = 1000(.05)(55/365) = \$ 7.53$

Interés ordinario:
a) $I = 1000(.05)(56/360) = \$ 7.78$
b) $I = 1000(.05)(55/360) = \$ 7.64$

Teniendo dos clases de interés (exácto y ordinario) y otras dos de tiempo (exácto y aproximado), cuatro son las combinaciones a efectos de determinar el interés simple. El mas usual es el del interés ordinario con el número exacto de días, siendo éste el sistema utilizado por las instituciones bancarias, el cuál es el método que produce el mayor interés en cualquier transacción.

2.6 Pagaré.- Es un compromiso escrito de pago de un capital, con intereses o sin ellos, en una fecha dada .La persona que se compromete y firma el efecto es el deudor de la operación.

En un pagaré intervienen:

Valor Nominal.- Es la suma estipulada en el documento.
Fecha.- Es en la que se extiende el pagaré.

Fecha de vencimiento.- Es la fecha en la cuál debe ser pagada la deuda.

Valor de vencimiento.- La suma que debe ser pagada en la fecha del vencimiento más los intereses si los hubiera.

Plazo.- Es el tiempo a transcurrir entre la fecha en que el pagaré es extendido y la de su vencimiento.

Tanto.- Es el porcentaje sobre el que se calcula el interés.

Deudor.- Es la persona a la que se le extiende el pagaré.

Acreedor.- Es la persona a quién se debe el pagaré.

En un pagaré en el cuál no se estipulen intereses, el valor nominal es igual al valor de vencimiento.

Ejemplo: Determinar en el siguiente pagaré la fecha de vencimiento y el valor al vencimiento.

Suma nominal:	2000.00
Fecha:	1o. abril
Plazo:	3 meses
Tasa interés:	5%

La fecha de vencimiento es la que corresponde al 3^{o} mes después del 1o. abril, o sea el 1o. julio.

El valor de vencimiento : $S=C(1+it)$

$$S = 2000(1 + (0.05)(1/4)) = \$2025.00$$

2.7 VALOR PRESENTE .- El valor presente de una cantidad es el capital inicial que se requiere invertir durante cierto tiempo y a determinada tasa de interés, para producir cierto monto.

De la relación $S = C(1+it)$, despejamos C y obtenemos el valor presente a la tasa de interés i del monto S con vencimiento en t años.

$$C = \frac{S}{1+it}$$

La diferencia entre la cantidad a pagar en fecha futura y su valor actual es el descuento.

$$D = S - C$$

Ejemplo: Encontrar el valor presente de 3000.00 pagaderos dentro de 2 años si la tasa de interés es del 4% anual.

$S = 3000.00$
$i = 0.04$
$t = 2$

$$C = \frac{S}{1+it}$$

$$C = \frac{3000.00}{1+(0.04)2} = \frac{3000}{1.08} = 2777.78$$

Ejemplo: Un pagaré a 5 meses por \$ 2,000.00 al 5% es suscrito el día de hoy. Determinar su valor dentro de 3 meses con un rendimiento del 3%.

$$S = C(1+it)$$

El valor al vencimiento del pagaré es:

$$S = 2000(1+(0.05)(5/12)) = \$\,2041.67$$

Necesitamos determinar el valor presente de 2041.67 con vencimiento en 5-3=2 meses al 3%

$$C = \frac{S}{1 + it} = \frac{2041.67}{1+(0.05)(1/6)} = \frac{2041.67}{1.008} = \$2025.46$$

CAPITULO III

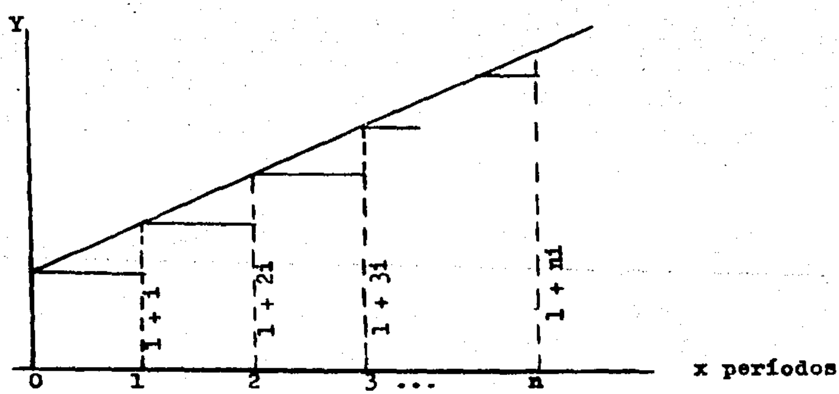
INTERES COMPUESTO

Cuando un capital inicial se invierte y en cada intervalo de tiempo convenido se agregan los intereses al capital y se reinvierten, se entiende que el capital inicial se invirtió a interés compuesto.

El interés puede ser convertido en capital anualmente, semestralmente, mensualmente, etc. El número de veces que el interés se convierte en un año se conoce como frecuencia de conversión.

El período de tiempo entre dos conversiones sucesivas se conoce como períóde de interés ó conversión.

El interés es una función directa del tiempo, en la capitalización a interés compuesto se produce un crecimiento contínuo en el tiempo.



3.1 En términos de función de acumulación para interés compuesto tenemos:

$$a(t) = (1+i)^t \qquad \text{para } t \geq 0$$

Sea i la tasa de interés compuesto y sea i_n la tasa efectiva de interés para el n-ésimo año.

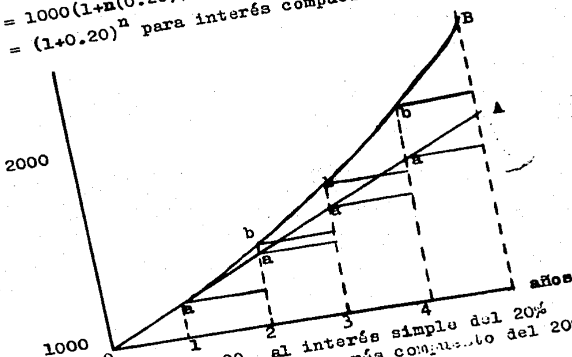
$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = \frac{(1+i) - 1}{1} = i$$

3.2 <u>Comparación entre interés simple e interés compuesto:</u>

Sea una tasa del 20% y un capital de 1000.00 dlls.

$S = 1000(1+n(0.20))$ para interés simple.

$S = (1+0.20)^n$ para interés compuesto.



a = monto de $1000.00 al interés simple del 20%

b = monto de $1000.00 al interés compuesto del 20%

A línea recta $S = 1000(1 + n(0.20))$

B función exponencial $S = 1000(1.20)^n$

El monto a interés compuesto crece en razón geométrica y su gráfica es una función exponencial; mientras que el monto a interés simple crece en progresión aritmética y su gráfica es una linea recta.

Período de capitalización.- Es el intervalo de tiempo convenido en la obligación para capitalizar los intereses.

3.3 Tasa efectiva de interés.- Es la que realmente actúa sobre el capital de la operación financiera. Está definida como la tasa actual de incremento por unidad invertida durante un período de tiempo. Se denota por i.

3.4 Tasa nominal.- Es el interés total pagado en un año sobre una unidad invertida al principio del año considerando que cualquier interés pagado durante el año no sea reinvertido.
Se denota por $i^{(m)}$.

Ejemplo: Para 16% con capitalización trimestral tenemos que:

$m = 4 \qquad i^{(m)} = 16/4 = 4\%$

La tasa efectiva anual es menor que la tasa nominal anual, debido a que el interés de ésta última se capitaliza m veces al año.

$$i < i^{(m)}$$

3.5 <u>Crecimiento Geométrico</u> .- El crecimiento geométrico va en función del tiempo. Lo podemos encontrar en el crecimiento de capitales a interés compuesto, en el crecimiento de vegetales, etc.

Consideremos el proceso natural de una rama de un árbol creciendo.

Sea $f(0)$ el largo inicial y $f(t)$ el largo después de un tiempo t.

La cantidad por la cuál el largo de la rama aumenta entre el tiempo t y $t+h$ es $f(t+h) - f(t)$.

La tasa de crecimiento por unidad de intervalo de tiempo es:

$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ y la tasa de crecimiento por cada unidad del largo de la rama de $f(t)$ es $\frac{f(t+h)-f(t)}{hf(t)}$.

La tasa instantánea de crecimiento por cada unidad de largo de la rama al tiempo t es :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{hf(t)} = \frac{1}{f(t)} \frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} \log_e f(t) = \delta_t$$

por integración entre los límites o y t

$$\log_e f(t) = \int_0^t \delta_t dt + \log_e f(0)$$

$$f(t) = f(0) \exp\left[\int_0^t \delta_t dt\right]$$

Si $\delta(t) = \delta$ constante entonces $f(t) = f(0)\, e^{\delta t}$

Si $f(0) = 1$ entónces $f(t) = e^{\delta t}$

Tomando en cuenta que una unidad con un crecimiento geométrico y con un incremento anual i es de la forma $f(t) = (1+i)^t$ entónces tenemos:

$$(1+i)^t = f(0) \exp\left[\int_0^t \delta(t)dt\right]$$

Si $\delta(t) = \delta$constante y $f(0) = 1$

$$(1+i)^t = e^{\delta t}$$

$$1+i = e^{\delta}$$ tomando logaritmos

$\log_e(1+i) = \delta$ que es la fuerza de crecimiento ó la fuerza de interes, la cuál es la tasa contínua con la que crece una unidad de capital bajo una operación de interés.

Ejemplo: Supongamos que la rama inicial de un árbol mide 10 mts., y después de un año la rama mide 10.6 mts , es decir, la tasa promedio de crecimiento es de 60cms. por año, o sea, 6% por año.

Si las ramas crecen contínuamente la tasa contínua de crecimiento por año es δt dónde

$$F(I) = 10.6 = f(0) \exp\left[\int_0^1 \delta t \, dt\right]$$

asumimos que la tasa contínua de crecimiento es δ dónde δ es constante durante el período, entónces:

$$\delta = \log_e 1.06$$

Por lo tanto la tasa efectiva de crecimiento es del 6% por año.

Hay que considerar que si el incremento en longitud en cualquier tiempo se corta, la rama original crecerá a la misma tasa que antes.

También que si el incremento es plantado, este crecerá a la misma tasa que la rama original de dónde fue cortado. Si el incremento se replanta es incapáz de crecer.

3.6 Relaciones entre tasas de interés efectiva, nominal y fuerza de interés. Tenemos que:

i = tasa efectiva de interés

$i^{(m)}$ = tasa nominal de interés pagadera m veces al año

δ = fuerza de interés

Queremos demostrar que:

$$e^{\delta} = (1+i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)$$

Tenemos que la tasa instantánea de crecimiento de cada unidad al tiempo t es:

$$\delta = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{hf(t)}$$

$$\delta = \frac{1}{f(t)} \frac{d}{d(t)} f(t) = \frac{d}{dt} \log_e f(t)$$

integrando tenemos que

$$\log_e f(1) = \int_0^1 \delta \, dt = \delta$$

como la cantidad de una unidad después de un año a una tasa efectiva de interés i anual es (1+i) entónces:

$$\delta = \log_e (1+i)$$

$$\log_e f\left(\frac{1}{m} \right) = \int_0^{1/m} \delta \, dt = 1/m \, \delta$$

$$= 1/m \log_e (1+i)$$

$$\therefore f(1/m) = (1+i)^{(1/m)}$$

Ahora obtendremos la relación entre una tasa efectiva y nominal. Consideremos el monto de $1 por un año a la tasa nominal de interés pagadera m veces al año.

En el primer m-ésimo de año tenemos ese monto de $1 mas su interés correspondiente:

$$1\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right) = \frac{i^{(m)}}{m}$$

Por lo tanto, el monto al final del primer m-ésimo de año es:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)$$

Para el segundo m-ésimo de año el capital inicial será:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) \text{ y su interes de } \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)\frac{i^{(m)}}{m}$$

Por lo tanto, al final del segundo m-ésimo de año es:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) + \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)\frac{i^{(m)}}{m} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^2$$

y así sucesivamente hasta el final del año que tenemos:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

El monto de $1 al interes efectivo anual es $1 + i$

El monto de $1 a la tasa $i^{(m)}$ por uno con m capitalizaciónes en el año, como lo obtuvimos anteriormente es $\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

Por lo tanto la ecuación de equivalencia entre los 2 montos es:

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

y como $(1 + i) = e^{\delta}$

entonces obtenemos la triple igualdad:

$$e^{\delta} = (1+i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

Despejando podemos obtener la tasa efectiva y la tasa nominal:

a) $i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$

b) $i^{(m)} = m\left[(1+i)^{1/m}-1\right]$

La fórmula del monto compuesto en n años sería:

$$(1+i)^n = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}$$

3.7 Problemas de Conversión de tasas.

- Encontrar la tasa efectiva de interés i equivalente a una tasa nominal del 5% convertible semestralmente.

$i^{(m)} = 0.05$

$m = 2$

$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$ sustituimos $i = \left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^2 - 1$

$i = (1 + 0.025)^2 - 1 = (1.025)^2 - 1 = 1.050625 - 1$

$i = .050625$

$\therefore$ la tasa efectiva es del 5.06%

Encontrar la tasa nominal convertible mensualmente equivalente a una tasa efectiva del 3%.

$i = 0.03$

$m = 12$

$$i^{(m)} = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right] \quad \text{sustituimos} \quad i^{(m)} = 12\left[(1+0.03)^{1/12} - 1\right]$$

$$i^{(m)} = 12\left[(1/12 \log(1.03)) - 1\right]$$

$$i^{(m)} = 12\left[1/12(0.012837)-1\right] \quad = \quad 12\left[(0.00106)-1\right]$$

$$i^{(m)} = 12(0.99894)$$

$$i^{(m)} = 11.9872$$

$\therefore$ la tasa nominal es del 11.98%

3.8 **Monte Compuesto**.- Es el valor del capital final ó capital acumulado después de sucesivas adiciones de los intereses.

Sea C un capital invertido a la tasa i por períodos de capitalización.

Sea S el monto compuesto de C al final de n períodos de capitalización.

Puesto que C produce Ci de interés durante el primer período de capitalización, al final de dicho período produce $C + Ci = C(1+i)$.

En consecuencia al final del segundo período de capitalización el capital es $C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$, al final del tercer período de capitalización el capital es $C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$ y así sucesivamente.

La sucesión de montos $C(1+i)$, $C(1+i)^2$, $C(1+i)^3$,... forma una progresión geométrica cuyo n-ésimo términos es:

$$S = C(1+i)^n$$

El factor $(1+i)^n$ corresponde al monto de $1 a interés compuesto en n períodos.

En la práctica se utilizan las tablas financieras en las que están calculados hasta diez decimales los valores de $(1+i)^n$. También podemos utilizar logaritmos ó teorema del binomio.

Ejempo: Calcular el monto a interés compuesto en 5 años de un capital de $ 6000.00 con una tasa del 10% convertible semestralmente.

$C = 6000.00$ $\qquad$ $m = 2$

$i^{(2)} = 0.10$ $\qquad$ $n = 5$

$$S = C\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}$$

$$S = 6000\left(1 + \frac{0.10}{2}\right)^{2\cdot 5} = 6000(1.05)^{10}$$

En las tablas financieras encontramos para 5% en 10 períodos el valor 1.62889463

$$S = 6000(1.62889463)$$

$$S = \$\ 9773.36$$

Ejemplo: Encontrar el valor de la fuerza de interés que corresponde al interés compuesto del 8%.

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1+0.08) = \ln(1.08)$$

$$\delta = 0.07695$$

$$\delta = 7.695\%$$

Ejempo: Encontrar el monto de $ 5,000.00 en 10 años a)a la tasa del 6% convertible cuatrimestralmente y b) a la tasa del 6% contínuo.

a) $C = 5000.00$ $\qquad$ $m = 3$

$i^{(3)} = 0.06$ $\qquad$ $n = 10$

$$S = C\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}$$

$$S = 5000\left(1 + \frac{0.06}{3}\right)^{3\cdot 10} = 5000(1 + 0.02)^{30} = 5000(1.02)^{30}$$

$$S = 5000(1.81136158)$$

$$S = \$\ 9056.80$$

b) Tenemos que $e^{\delta} = 1 + i$

$i = e^{\delta} - 1$ sustituimos

$S = C(1+i)^n \qquad S = 5000(e^{\delta})^n = 5000\, e^{n\delta}$

$S = 5000\, e^{10(0.06)}$

$S = 5000\, e^{0.6}$

Por medio de logaritmos calculamos $e^{0.6}$ y obtenemos que

$S = \$\ 9110.60$

3.9 **Monto compuesto con períodos de conversión fraccionados:** Al obtener la fórmula del interés compuesto supusimos, que el tiempo era un número entero de períodos de capitalización.

Al presentarse fracciones de períodos, la práctica usual es calcular el monto compuesto para los períodos enteros de capitalización y empleamos el interés simple para las fracciones de períodos.

Las tablas financieras que contienen los valores de $(1+i)^{1/p}$ son el monto de $1 a interés compuesto para fracciones de períodos.

Ejemplo: Cuál es el monto compuesto de $ 2000.00 al 4% convertible semestralmente al cabo de 3 años y 5 meses?

$C = 2000.00$ — 6 años períodos completos

$i^{(2)} = 0.04$ — 5 meses fracción de período

El monto compuesto al cabo de 6 años es:

$S = 2000(1+.02)^{12} = 2000(1.02)^{12} = 2000\,(1.268242)$

$S = \$\ 2,536.48$

Ahora el interés simple correspondiente a los 5 meses restantes es:

$2536.48 \times 5/6 \times 0.02 = 42.26$

$\therefore$ el monto compuesto es de $\$\ 2,536.48 + 42.26$

$S = \$\ 2,578.74$

Ejemplo: Encontrar el monto compuesto de \$ 5,000.00 en 5 años 3 meses al 6% anual.

$C=5000$ 5 años períodos completos
$i = 0.06$ 3 meses fracción de período

Utilizamos monto compuesto por 5 períodos e interés simple sobre el monto compuesto por 3 meses.

$$S = 5000(1.06)^5\left(1 + \frac{.06}{4}\right)$$

$$S = 5000(1.338225)(1.015)$$

$$S = \$\ 6791.49$$

3.10 <u>Cálculo de la tasa de interés</u>.- Para obtener la tasa de interés se utiliza en la ecuación de monto compuesto el método de interpolación, logarítmos o las tablas financieras.

Ejemplo: Encontrar la tasa de interés si \$ 1000.00 se acumulan a \$ 1418.50

$S = 1418.50$
$C = 1000.00$
$n = 6$

$$S = C(1+i)^n$$

$$1418.50 = 1000(1+i)^6$$

$$1.41850 = (1+i)^6$$

buscando en las tablas financieras de monto compuesto se ve que el monto 1.4185 está en la columna del 6%.

$$\therefore\ i = 6\%$$

Ejemplo: Encontrar la tasa de interés a la que \$ 100,000.00 se acumularán a \$ 190,071.20 en 11 años.

$S = 190,071.20$
$C = 100,000.00$
$n = 11$

$$S = C(1+i)^n$$

$$190,071.20 = 100,000(1+i)^{11}$$

$$\frac{190,071.20}{100,000.00} = (1+i)^{11}$$

$$1.9007120 = (1+i)^{11}$$

Buscando en las tablas encontramos correspondiendo a 11 años los valores de 1.898298 que corresponde al 6% y 1.999151 que corresponde al 6.5%.

Por lo tanto su valor lo encontraremos por medio de interpolación lineal.

al 6.5% le corresponde 1.999151	a 6% + x le corresponde 1.9007120
al 6% le corresponde 1.898298	a 6% le corresponde 1.8982985

0.005 es a 0.100852 como x es a 0.002413

$$\frac{0.005}{0.100852} = \frac{x}{0.002413}$$

$$\frac{0.005(0.002413)}{0.100852} = x$$

$$x = 0.00012$$

∴ la tasa de interés es del 6% + 0.012%

$$i = 6.012\%$$

Cálculo por medio de logaritmos:

De la fórmula de monto compuesto tenemos que $S = C(1+i)^n$

$$S/C = (1+i)^n$$

$$n \log (1+i) = \log S - \operatorname{Log} C$$

$$\log(1+i) = \frac{\log S - \log C}{n}$$

Del ejemplo anterior tenemos:

$S = 190{,}071.20$

$C = 100{,}000.00$

$n = 11$

$$\log (1+i) = \frac{\log S - \log C}{n}$$

$$\log (1+i) = \frac{\log 190{,}071.20 - \log 100{,}000.00}{11}$$

Tenemos que $\log 190,071.20 = 5.278916$

$\log 100,000.00 = 5.00000$

$$\log(1+i) = \frac{5.278916 - 5.00000}{11} = \frac{.278916}{11}$$

$$\log(1+i) = 0.025356$$

buscando el antilogaritmo de 0.025356 tenemos

$$(1+i) = 1.06012$$

$$i = 1.06012 - 1$$

$$i = 0.06012$$

$\therefore$ la tasa de interes es de 6.012 %

3.11 Cálculo del tiempo.- El tiempo lo obtenemos despejando n de la fórmula del monto compuesto.

Lo obtenemos utilizando las tablas financieras, por logaritmos ó interpolando.

$$S = C(1+i)^n$$

$$(1+i)^n = S/C$$

Ejemplo: Encontrar el tiempo n para que \$ 2000.00 se conviertan en \$ 3,500.00 con una tasa efectiva anual del 4%.

$S = 3,500.00$

$C = 2,000.00$ $\qquad (1+i)^n = S/C$

$i = 0.04$

$$(1 + 0.04)^n = \frac{3,500}{2,000} = 1.75$$

buscando los valores en las tablas tenemos que al 4% el valor de n está entre 14 y 15 años.

a 15 le corresponde 1.800943	a 14 + x le corresponde 1.750000
a 14 le corresponde 1.731676	a 14 le corresponde 1.731676
1 es a 0.069267	como x es a 0.018324

$$\frac{1}{0.069267} = \frac{x}{0.018324}$$

$$x = \frac{0.018324}{0.069267} = 0.264535$$

$n = 14 + 0.264535$
$n = 14.26$ años

Cálculo del tiempo mediante logaritmos:

$$S = C(1+i)^n$$

$$\log S = \log C + n\log(1+i)$$
$$\log S - \log C = n\log(1+i)$$

$$n = \frac{\log S - \log C}{\log (1+i)}$$

para $S = C\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}$

$$n = \frac{\log S - \log C}{m \log \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)}$$

Del ejemplo anterior tenemos:

$S = 3,500.00$
$C = 2,000.00$
$i = 0.04$

$$n = \frac{\log S - \log C}{\log (1+i)}$$

$$n = \frac{\log 3,500 - \log 2000}{\log (1.04)}$$

$$n = \frac{3.54407 - 3.30103}{0.01703} = \frac{0.24304}{0.01703}$$

$n = 14.27$ años

La diferencia se debe a que por interpolación se considera la función como una recta y por logaritmos como exponencial.

Ejemplo: ¿ En que tiempo se duplica un capital al 7% con capitalización semestral?

$S = 2C$
$i^{(m)} = 0.07$
$m = 2$

$$S = C\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}$$

$$2S = C(1 + 0.035)^{2n}$$

$$2 = (1 + 0.035)^{2n}$$

En las tablas encontramos en la columna del 3.5% que el valor de 2 está entre 20 y 21 períodos.

a 21 le corresponde 2.0594314	a 20 + x le corresponde 2.0000000
a 20 le corresponde 1.9897888	a 20 le corresponde 1.9897888
1 es a 0.0696426 como	x es a 0.0102111

$$\frac{1}{0.0694261} = \frac{x}{0.0102111}$$

$$x = \frac{0.0102111}{0.0696426} = 0.1466220$$

$$2n = 20 + x = 20 + 0.1466220 = 20.1466220$$

$$n = 10.073311$$
$$n = 10.073 \text{ años}$$

Calcular el monto compuesto en periódos enteros y para fracción de períodos a interés simple.

El valor más próximo es de 1.9897888 correspondiente a 20 períodos

$$2 = 1.9897888(1 + n(0.07))$$

$$1 + n(0.07) = \frac{2}{1.9897888} = 1.0051318$$

$$n = \frac{10.0733114}{0.07} = 0.0733114$$

$\therefore$ n = 20 períodos que serían 10 años + 0.0733114

n = 10años 26 días

CAPITULO IV

VALOR PRESENTE Y DESCUENTO

4.1 En las transacciones comerciales se presenta con mucha frecuencia la necesidad de determinar el valor presente de ciertos capitales con vencimiento en el futuro.

El valor presente a interés compuesto es el capital que tendrá en el mismo tiempo un monto equivalente a la suma de dinero que se recibirá en la fecha convenida.

La diferencia entre el monto futuro y su valor actual es el descuento compuesto.

0 1 2 . . . n años

C = valor presente S = monto por recibir

Para obtener el valor presente de un monto futuro despejamos C en la fórmula de interés compuesto.

$$S = C(1+i)^n$$

$$C = \frac{S}{(1+i)^n}$$

$$C = S(1+i)^{-n}$$

La cantidad $(1+i)^{-n}$ se denomina factor de descuento. Se designa mediante el símbolo v^n.

En las tablas financieras se dan valores para $(1+i)^{-n}$ para diferentes tasas y períodos.

Cuándo no es aplicable la tabla se utilizan logaritmos.

Para la tasa nominal tenemos la fórmula:

$$C = \frac{S}{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}} \qquad C = S\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn}$$

Ejemplo: Calcular el valor presente de \$ 8,000.00 pagaderos dentro de 5 años con un interés del 4% anual.

$S = 8{,}000.00$
$i = 0.04$
$n = 5$ años

$$C = S\,(1+i)^{-n}$$
$$C = 8{,}000(1+0.04)^{-5}$$
$$C = 8000(1.04)^{-5}$$

en las tablas financieras encontramos que $(1.04)^{-5}$ es $= 0.82192711$

$$C = 8000(0.82192711)$$
$$C = \$\ 6{,}575.42$$

Ejemplo: Calcular el valor presente de una deuda de \$5,000.00 a pagar dentro de 4 años con un interés del 8% anual convertible semestralmente.

$S = 5{,}000.00$
$i^{(2)} = 0.08$
$n = 4$ años
$m = 2$

$$C = S\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn}$$
$$C = 5000\left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{-(4\cdot 2)}$$
$$C = 5000(1.04)^{-8}$$
$$C = 5000(0.730690)$$
$$C = \$\ 3653.45$$

4.2 Valor presente a interés compuesto con períodos de capitalización fraccionarios.

Se puede obtener mediante la regla práctica o la regla teórica.

Regla práctica.- Calculamos a interés compuesto el valor presente para los períodos enteros y a interés simple para las fracciones de período y los sumamos.

Regla teórica.- Se calcula a interés compuesto para el tiempo incluyendo la fracción de período.

El valor presente será menor cuándo se calcula a interés simple para la fracción de período.

Ejemplo: Encontrar el valor presente de una deuda de $ 1000.00 que vence dentro de 3 años 8 meses al 6% convertible semestralmente.

Práctica: Retrocedemos 4 años, es decir, 8 períodos desde la fecha de vencimiento que es el mismo número de períodos necesario para cubrir el intervalo de 3 años 8 meses.

$S = 1{,}000.00$
$m = 2$
$n = 4$ años
$i^{(2)} = 0.06$

$$C = S\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn}$$

$$C = 1000\left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^{-(4\cdot 2)}$$

$$C = 1000(1.03)^{-8}$$

$$C = 1000(0.789409)$$

$$C = \$\ 789.40$$

Ahora aplicamos sobre este valor interés simple al 6% durante 4 meses.

$C = 789.40 \times 0.06 \times 1/3$
$C = 15.79$

$\therefore$ El valor presente es $789.40 + 15.79$
$C = \$\ 805.20$

Regla teórica.- utilizamos las tablas financieras.

$S = 1000.00$
$i = 0.03$
$n = 7$ semestres
le agregamos 1/3 de semestre que equivale a 2 meses

$$C = 1000(1.03)^{-7}\ (1.03)^{-1/3}$$

$$C = 1000(0.8130915)(.99006630)$$

$$C = \$\ 805.01$$

4.3 DESCUENTO.- El descuento compuesto verdadero es la diferencia entre el monto a pagar y su valor presente obtenido por medio de una tasa de interés compuesto.

$$D = S - C$$

sabemos que $C = S(1+i)^{-n}$ por lo tanto sustituimos

$$D = S - S(1+i)^{-n} \quad \text{factorizamos}$$

$$D = S\left[1 - (1+i)^{-n}\right]$$

Si la tasa de interés es nominal tenemos:

$$D = S - S\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn} \qquad \text{factorizamos}$$

$$D = S\left[1 - \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn}\right]$$

4.4 Tasa efectiva de descuento.- La tasa efectiva de descuento por unidad de tiempo y por unidad de capital que se recibirá, la obtenemos:

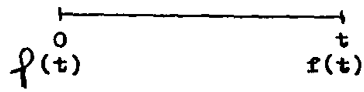
$$\frac{S - C}{S}$$

Por otro lado tenemos que :

$\rho(t) = \frac{1}{f(t)}$ es el valor presente de una unidad en el tiempo t.

como $f(t) = (1+i)^t$ entónces $\rho(t) = (1+i)^{-t}$

$$\therefore \rho(t) = v^t$$



Entónces si S = 1 y C = $\rho(1)$ obtenemos la tasa efectiva de descuento que es la diferencia entre la unidad y su valor presente en un período unitario de tiempo.

4.5 Fuerza de descuento.

Sea δ' la fuerza de descuento, y $\rho(t)$ el valor presente de \$1 en el instánte.

Por definición $\delta' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(t) - (t+h)}{h\ (t)}$

$$= -\frac{1}{\rho(t)} \frac{d}{dt} \rho(t) \qquad = -\frac{d}{dt} \log_e \rho(t)$$

Ahora si f(t) es el monto de una suma de \$1 después de un intervalo de tiempo t a su correspondiente tasa de interés, entónces tenemos:

$$\rho(t) = \frac{1}{f(t)}$$

$$\therefore \delta' = -\frac{d}{dt} \log_e \rho(t) \qquad = \frac{d}{dt} \log_e f(t) \quad = \delta$$

Por lo tanto la fuerza de interés es igual a la de descuento.

4.6 Tasas de descuento efectiva y nominal.

Sea δ la fuerza de descuento. En un año el descuento total es $1 - \rho(1)$.

pero $\delta = -\frac{d}{dt} \log_e \rho(t)$

$$\rho(t) = \exp\left[-\int_0^t \delta \, dt\right] = e^{-t\delta}$$

El descuento total es entónces $1 - e^{-\delta}$ y ésto es por definición la tasa efectiva de descuento, denotada por d.

$$d = 1 - e^{-\delta} \quad \text{de dónde} \quad e^{-\delta} = (1 - d)$$

El valor presente de $1 pagadero después de un tiempo t es $(1-d)^t$.

Para la tasa nominal de descuento usamos $d^{(m)}$, y la relación entre d y $d^{(m)}$ se establece de la siguiente forma:

Por definición $\frac{d^{(m)}}{m} = 1 - e^{-\delta/m} = 1 - (1-d)^{1/m}$

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

entónces $e^{-\delta} = 1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$

4.7 Relaciones entre tasas de interes y de descuento.

Cuando una tasa de interés efectiva i corresponde a una tasa de descuento d se dice que son equivalentes.

Una tasa de interés es la razón del pago a efectuar por el uso del dinero (d) con respecto al dinero realmente recibido (1-d), entónces tenemos: $i = \frac{d}{1-d}$ que expresa a i en función de d

despejamos d y tenemos $d = i(1-d) = i - id$

$i = d + di \qquad i = d(1+i) \qquad \therefore \quad d = \frac{i}{(1+i)}$ que expresa a d en función de i.

Esto es que la tasa de descuento es la razón del pago por uso del dinero (i) respecto al dinero devuelto al liquidar la operación (1+i).

Relaciones entre tasas de interés y de descuento

	fuerza de interés ó descuento	tasa efect. de interés	tasa nominal de interés	tasa efect. descuento	tasa nominal descuento
Monte de $1 después del tiempo t.	$e^{\ t}$	$(1+i)^{t}$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}$	$(1-d)^{-t}$	$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mt}$
Valor presente de $1 después t.	$e^{-\ t}$	$(1+i)^{-t}$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mt}$	$(1-d)^{t}$	$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt}$

Ejemplo: Cuál es el descuento compuesto de una tasa nominal del 6% convertible semestralmente sobre $5,000.00 para pagar dentro de 10 años?

$S = 5{,}000.00$
$i^{(2)} = 0.06$
$n = 10$ años
$m = 2$

$$D = S\left[1 - \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn}\right]$$

$$D = 5000\left[1 - \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^{-2\cdot 10}\right]$$
$$D = 5000\left[1 - (1+0.03)^{-20}\right]$$
$$D = 5000\left[1 - (0.55367575)\right]$$
$$D = 5000(0.446324)$$

$$D = \$\ 2231.62$$

Ejemplo: Sea una tasa de descuento del 6% anual, a que tasa efectiva de interés equivale ?

$$i = \frac{d}{1-d} \qquad i = \frac{0.06}{1-0.06} \qquad i = \frac{0.06}{0.94}$$

$$i = 0.06382$$

equivale a una tasa del 6.38%

Ejemplo: Sea una tasa de interés del 10% a que tasa de descuento equivale ?

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad d = \frac{0.10}{1+0.10} \qquad d = \frac{0.10}{1.10}$$

$$d = 0.09090$$

equivale a una tasa de descuento del 9.09%

Ejemplo: Probar que si $i^{(m)}$ y $d^{(m)}$ son respectivamente la tasa nominal de interés y de descuento convertibles m veces al año, y δ es la correspondiente fuerza de interés, entónces aproximadamente:

$$\delta = \frac{i^{(m)} + d^{(m)}}{2}$$

Tenemos que $e^{\delta} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}$ y $e^{-\delta} = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}$

entónces $1 + \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \dots = 1 + i^{(m)} + m(2)\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{2} + \dots,$

y

$$1 - \delta + \frac{\delta^2}{2!} - \dots = 1 - d^{(m)} + m(2)\left(\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{2} + \dots,$$

Sustrayendo la segunda ecuación de la primera y dejamos potencias de δ, $i^{(m)}$ y $d^{(m)}$ mas grandes que las primeras:

$$2\delta = i^{(m)} + d^{(m)}$$

$$\delta = \frac{i^{(m)} + d^{(m)}}{2} \quad \text{aproximádamente}$$

Encontrar el error con 8 decimales cuando m = 5 y la tasa de interés efectiva es del 3%.

$i^{(5)} = 5((1.03)^{1/5} - 1\ ) = .029646347$ por teorma binomio

$d^{(5)} = 5((1-(1.03)^{-1/5}) = 0.029471602$ por teorema binomio

$\delta = 0.29558975$

El verdadero valor de δ es $\log_e(1.03) = 0.029558802$

$\therefore$ el error es 0.00000017

CAPITULO V

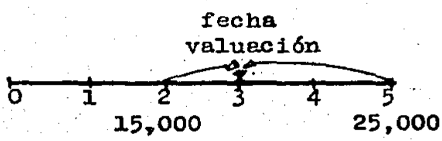
ECUACIONES DE VALOR

5.1 En las operaciones comerciales es necesario cambiar un paquete de obligaciones por otro conjunto de diferentes capitales disponibles en diferentes tiempos.

Para hacer esto es necesario trasladar todas las obligaciones a una fecha común llamada fecha de valuación. Obtendremos entónces una ecuación de valor que permite igualar el conjunto de obligaciones iniciales referidas al momento de referencia, al conjunto de nuevas obligaciones referidas así mismo a la fecha de valuación.

Para facilitar el planteamiento de éstas ecuaciones es conveniente graficar las obligaciones.

Ejemplo: Un señor debe $15,000.00, son pagaderos dentro de 2 años y $25,000.00 para un plazo de 5 años. Queda en efectuar un pago único al final de 3 años a la tasa del 8% convertible semestralmente. Calcular el valor del pago único.



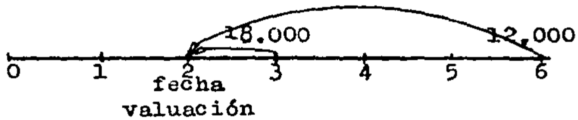
$$x = 15000(1+0.04)^2 + 25000(1+0.04)^{-4}$$

$$x = 15000(1.0816) + 25000(0.8548041)$$

$$x = 16224 + 21370.10$$

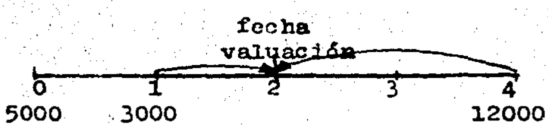
$$x = \$\ 37,594.10$$

Ejemplo: Tenemos una deuda de $12,000.00 que es pagadera dentro de 6 años y otra de \$ 18,000.00 que es pagadera dentro de 3 años. Si efectúa un sólo pago dentro de 2 años a una tasa del 12% anual. ¿Cuál será el monto de ese pago ?



$$x = 12000(1+0.12)^{-1} + 18000(1+0.12)^{-4}$$
$$x = 12000(0.892857) + 18000(0.635518)$$
$$x = 10714.30 + 11439.32$$
$$x = \$\ 22,153.62$$

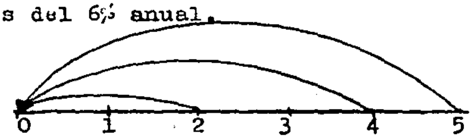
Ejemplo: Una persona debe \$ 3,000.00 que son pagaderos en un año y \$ 12,000.00 son pagaderos en 4 años. Si en este momento paga \$5,000.00 y lo restante en 2 años. ¿Cúanto tendrá que pagar al final de 2 años suponiendo una tasa del 5% convertible semestralmente.



$$5000(1 + \frac{0.05}{2})^{2\cdot 2} + x = 3000(1 + \frac{0.05}{2})^{2} + 12000(1 + \frac{0.05}{2})^{-(2\cdot 2)}$$
$$5000(1+0.025)^{4} + x = 3000(1+0.025)^{2} + 12000(1 + 0.025)^{-4}$$
$$5000(1.103812) + x = 3000\ (1.0506250) + 12000(0.9059506)$$
$$5,519.06 + x = 3151.87 + 10871.40$$
$$x = 3151.87 + 10871.40 - 5519.06$$
$$x = \$\ 8,504.14$$

5.2 Ecuaciones de valor en las que la incógnita es el tiempo.

Cuál será la fecha de vencimiento equivalente a las siguientes obligaciones: \$ 3,000.00 para un plazo de 2 años, \$8,000.00 a un plazo de 4 años y \$10,000.00 para un plazo de 5 años, si la tasa de interés es del 6% anual.



Designamos a t el tiempo equivalente en años, tomamos el momento actual como fecha de valuación. Por lo tanto la ecuación de valor es:

$$(3000+8000+10000)(1+0.06)^{-t} = 3000(1+0.06)^{-2} + 8000(1+0.06)^{-4} + 10000(1+0.06)^{-5}$$

$$21000(1.06)^{-t} = 3000(0.8899964)+8000(0.7920936)+10000(0.7472581)$$

$$21000(1.06)^{-t} = 2669.99 + 6336.75 + 7472.58$$

$$(1.06)^{-t} = \frac{16479.32}{21000}$$

$$(1.06)^{-t} = 0.7847295$$

Utilizamos el método de interpolación lineal. Encontramos en las tablas que para el 6% el valor de 0.7847295 se encuentra entre t = 4 y t = 5.

a 4 le corresponde 0.79209366	a 4 + x le corresponde 0.7847295
a 5 le corresponde 0.74725817	a 4 le corresponde .74725817

1 es a 0.0448355 como x es a 0.037471

$$\frac{1}{0.0448355} = \frac{x}{0.037471}$$

$$x = \frac{0.037471}{0.0448355} = 0.835743$$

de dónde $t = 4$ años $+ 0.835743$

$t = 4$ años 7 meses 4 días

También se puede calcular mediante logaritmos, es decir,

$$-t \log (1.06) = \log 0.784795$$

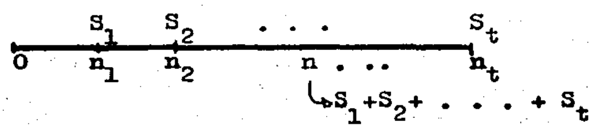
$$-t = \frac{\log 0.784795}{\log (1.06)} = \frac{\bar{1}.894720}{0.021189}$$

$$t = \frac{0.105280}{0.021189} = 4.96$$

$\therefore$ t = 4 años 7 meses 16 días

5.3 Fecha equivalente.

Tenemos las deudas $S_1, S_2, \ldots S_t$ pagaderas en $n_1, n_2, \ldots, n_t$ años, y deseamos una fecha equivalente, es decir, queremos cambiar las deudas por un único pago igual a la suma de las deudas $(S_1+S_2+\ldots+S_t)$ al final de n años.



Tomamos el momento actual como fecha de valuación.

$$S_1 v^{n_1} + S_2 v^{n_2} + \quad + S_t v^{n_t} = (S_1 + S_2 + \ldots + S_t) v^n$$

dónde $(1+i)^{-n} = v$

$$v^n = \frac{S_1 v^{n_1} + S_2 v^{n_2} + \ldots + S_t v^{n_t}}{S_1 + S_2 + \ldots + S_t}$$

$$n = \frac{\log(S_1 v^{n_1} + S_2 v^{n_2} + \ldots + S_t v^{n_t}) - \log (S_1 + S_2 + \ldots + S_t)}{\log v}$$

Ejemplo: Encontrar la fecha equivalente para que un señor liquide sus deudas que son las siguientes: \$1,000.00 son pagaderos dentro de 6 meses, \$1,500.00 son pagaderos dentro de un año y \$2,000.00 son pagaderos en 2 años; la tasa de interés es del 7% anual convertible semestralmente.

$$\begin{array}{cccc} & 1/2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1000 & 1500 & 2000 \end{array}$$

$$n = \frac{\log\left[1000(1.035)^{1} + 1500(1.035)^{2} + 2000(1.035)^{4}\right] - \log(1000+1500+2000)}{\log(1.035)^{-1}}$$

$$n = \frac{\log\left[1000(0.966184) + 1500(0.933511) + 2000(0.871442)\right] - \log 4500}{\log 0.966184}$$

$$n = \frac{\log(966.18 + 1400.26 + 1742.88) - \log 4500}{\log 0.966184}$$

$$n = \frac{\log 4109.32 - \log 4500}{\log 0.966184}$$

$$n = \frac{3.6137675 - 3.653213}{\bar{1}.985060} = \frac{-0.03944}{-0.01494}$$

$$n = 2.64$$

$\therefore$ **la fecha equivalente es 1 año 6 meses 14 días**

Para encontrar la fecha equivalente sin hacer tantos cálculos se utiliza una regla práctica que se enuncia así: súmense los productos obtenidos al multiplicar el valor de las obligaciones por sus respectivos plazos y divídase, por la suma de los valores de las obligaciones.

Sean $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ los valores y $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ los plazos e i la tasa de interés pagadera m veces al año.

$$(S_1 + S_2 + \ldots + S_k)(1+i)^{-mn} = S_1(1+i)^{-mn_1} + s_2(1+i)^{-mn_2} + \ldots + S_k(1+i)^{-mn_k}$$

sustituyendo los desarrollos binomiales, por sus valores aproximá dos a los dos primeros términos tenemos:

$$(S_1+S_2+\ldots+S_k)(1-mni) = S_1(1-mn_1 i)+S_2(1-mn_2 i) + S_k(1-mn_k i)$$

$$(S_1+S_2+\ldots+S_k)mni = S_1 mn_1 i + S_2 mn_2 i + \ldots + S_k mn_k i$$

de dónde

$$n = \frac{S_1 n_1 + S_2 n_2 + \ldots + S_k n_k}{S_1 + S_2 + \ldots + S_k} \qquad \text{(valor aproximado de n)}$$

Tomando el ejemplo anterior tenemos:

$$n = \frac{1(1000) + 2(1500) + 4(2000)}{1000 + 1500 + 2000}$$

$$n = \frac{1000 + 3000 + 8000}{4500}$$

$$n = \frac{12000}{4500}$$

$n = 2.66$ semestres

equivale a 1 año 6 meses 16 días

CAPITULO VI

ANUALIDADES

La expresión anualidad se emplea para indicar el sistema de pago de sumas fijas a intervalos iguales de tiempo. Anualidad no significa pagos iguales sino pagos a intervalos regulares de tiempo.

6.1 Definición.- Una anualidad es una serie de pagos períodicos liquidados a intervalos iguales de tiempo y generalmente del mismo monto, que se efectúan mientras persista cierta situación.

6.2 Clasificación.- Las anualidades las podemos clasificar en ciertas y contingentes.

Las anualidades ciertas son aquellas en que los pagos son hechos períodicamente independientemente de cualquier evento fortuito. Por ejemplo pago de hipotecas, de renta, etc.

Las anualidades contingentes son aquellas en que los pagos dependen de algún suceso cuya realización no puede fijarse. Por ejemplo el pago de las primas de un seguro de vida que están condicionados a la sobrevivencia de los individuos; los pagos que recibe un pensionista que son hasta su fallecimiento, etc.

En este texto veremos alguna parte de las anualidades ciertas ordinarias, anticipadas, diferidas y perpétuas.

Definiciones que son de importancia:

Renta.- Es el valor de cada pago períodico.

Renta anual.- Es la suma de los pagos hechos en un año.

Período de la renta.- Es el tiempo que se fija entre dos pagos sucesivos.

Plazo de una anualidad.- Es el tiempo que transcurre entre el comienzo del primer período de pago y el final del último período.

Tasa de una anualidad.- Es el tipo de interés para calcular el importe del pago correspondiente a un período de renta.

Las anualidades ciertas según la fecha de pago se clasifican en:

1) Anualidades ciertas ordinarias.- Son aquellas en las cuales los pagos son efectuados al final de cada intervalo de pago.
2) Anualidades anticipadas.- Son aquellas en las cuales los pagos son efectúados al comienzo de cada intervalo.
3) Anualidades diferidas.- Son aquellas en las cuales los pagos son efectuados, no en el momento presente, sino en una fecha futura, es decir, en forma diferida. Estas pueden ser anticipadas o vencidas de acuerdo al momento de pago.
4) Anualidades de rentas perpétuas.- Son aquellas en las que los pagos se efectúan en forma indefinida, es decir, nunca se terminan de realizar los pagos.

6.3 Monto y Valor presente de las anualidades ciertas ordinarias.

Símbolos que utilizaremos:

R = el pago períodico de una anualidad.

i = tasa efectiva de interés.

$i^{(m)}$ = tasa nominal de interés.

n = número de períodos de pago.

m = número de capitalizaciones en el año.

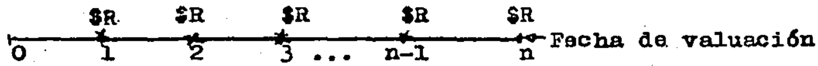
S = Monto de una anualidad.

A = Valor presente de una anualidad

Cálculo del monto.- El monto de una anualidad cierta ordinaria es el valor acumulado de una serie de pagos períodicos efectúados al final de cada intervalo de pago, cuya fecha de valuación se considera al término del plazo de la anualidad.

Los pagos R efectuados al final de cada período ganan interés compuesto hasta la fecha final.

Cada pago efectuado al final del período capitaliza los intereses en cada uno de los períodos que le siguen. El primer pago acumula durante (n-1) períodos, el segundo (n-2) períodos y así sucesivamente hasta el último pago que no gana intereses, ya que su pago coincide con la fecha de valuación.



gráfica del monto de una anualidad

Los montos respectivos comenzando por el último serán:

$$R \, , \, R(1+i) \, , \, R(1+i)^2 \, , \, \ldots \, , \, R(1+i)^{n-1}$$

Por lo tanto el monto total S de la anualidad es igual a la suma de los montos producidos por las distintas rentas R.

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-1}$$

$$S = R\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}\right]$$

Esta expresión representa la suma de los términos de una progresión geométrica de razón (1+i). Aplicando la fórmula para obtener la suma de una progresión geométrica tenemos:

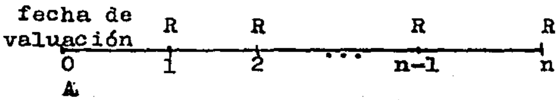
$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1} \qquad\qquad S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\right]$$

Si tenemos pagos períodicos de $1 al final de cada uno de n períodos anuales afectados por una tasa de interés efectiva anual i entónces, denotamos el monto de una anualidad al final del año n por $s_{\overline{n}|i}$.

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S = R\ s_{\overline{n}|i}$$

<u>Valor Presente</u>.- El valor presente A de una anualidad es el costo en el momento actual de una serie de pagos periódicos efectúados al final de cada intervalo de pago y cuya fecha de valuación se considera el principio del plazo de la anualidad.



Formando la ecuación de valor tenemos:

$$A\ (1+i)^n = S$$

$$A\ (1+i)^n = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$A = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^{-n}$$

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Si tenemos pagos periódicos de $1 efectuados al final de cada uno de n años. El valor presente de la anualidad al principio del plazo se denota por $a_{\overline{n}|i}$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$A = R\ a_{\overline{n}|i}$$

Los valores de $s_{\overline{n}|i}$ y $a_{\overline{n}|i}$ los podemos encontrar en las tablas financieras. Si los valores no figuran el las tablas se pueden calcular mediante logaritmos o por teorema del binomio.

Otra forma de calcular $s_{\overline{n|}i}$ se deriva de la observación de que la serie de pagos es la misma que la de $a_{\overline{n|}i}$, el único cambio es el punto de valuación.

$$a_{\overline{n|}i} = v + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n$$

$$s_{\overline{n|}i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i) + 1$$

entónces:

$$s_{\overline{n|}i} = (1+i)^n \, a_{\overline{n|}i}$$

$$\therefore a_{\overline{n|}i} = v^n s_{\overline{n|}i}$$

Ejemplo: Encontrar el monto de \$1,500.00 **anuales que son pagaderos durante 4 años efectúandose el primer pago un año despúes de hoy, con una tasa de interés anual del 6%.**

a) Tablas

$R = 1500$
$n = 4$
$i = 0.06$

$$S = R\, s_{\overline{n|}i}$$

$$S = 1500\, s_{\overline{4|}0.06}$$

$$S = 1500(4.37462)$$

$$S = \$\ 6,561.93$$

b) Mediante el teorema del binomio.

$$s_{\overline{4|}} = \frac{(1+0.06)^4 - 1}{0.06}$$

$$(1+0.06)^4 = (1)^4 + 4(1)^3(0.06) + \frac{4x3}{2!}(1)^2(0.06)^2 + \frac{4x3x2}{3!}(1)(0.06)^3 + (0.06)^4$$

$$(1.06)^4 = 1 + 0.24 + 6(0.0036) + 4(0.000216) + (0.0000129)$$

$$(1.06)^4 = 1 + 0.24 + 0.0216 + 0.000864 + 0.0000129$$

$$(1.06)^4 = 1.262477$$

$$s_{\overline{4|}} = \frac{1.262477 - 1}{0.06} = 4.374615$$

$$S = 1500(4.374615)$$

$$S = \$\ 6561.92$$

c) Mediante logaritmos.

$$\text{Sea } N = (1.06)^4$$

$$\log N = 4\log(1.06)$$
$$\log N = 4(0.025306)$$
$$\log N = 0.101224$$
$$N = \text{antilog}(0.101224)$$
$$N = 1.26247$$

$$s_{\overline{4}|} = \frac{1.262476 - 1}{0.06} = 4.3746$$

$$S = 1500(4.3746)$$

$$S = \$\ 6,561.92$$

d) **Mediante tablas con el factor $(1+i)^n$.**

$$S = R\left[\frac{(1+0.06)^4 - 1}{0.06}\right]$$

$$S = 1500\left[\frac{(1.2624769) - 1}{0.06}\right]$$

$$S = 1500(4.374615)$$

$$S = \$\ 6,561.92 \text{ dlls}$$

Ahora calcular el valor presente.

$$A = R\ a_{\overline{4}|\,0.06}$$

$$A = 1500(3.4651056)$$

$$A = \$\ 5,197.66$$

Ejemplo: Un señor vende un terreno con un pago **inicial de** \$ 4,000.00 **y 15 pagos mensuales de \$** 400.00 **con una tasa de interés del 15% que es** convertible mensualmente. ¿Cúal será el valor de contado ?

valor de contado = cuota inicial + valor presente de las mensualida

$$i = \frac{0.15}{12} = 0.0125 \qquad \text{v.c.} = \text{cuota inicial} + R\ a_{\overline{n}|\,i}$$

$$v.c. = 4000 + 400\, a_{\overline{15}|0.0125}$$

$$v.c. = 4000 + 400(13.600545)$$

$$v.c. = 4000 + 5440.22$$

$$v.c. = \$9440.22$$

Ejemplo: Obtener el valor presente de 20 pagos anuales iguales de $1,500.00 **pagaderos al final de cada año, a una tasa anual del 12%.**

$R = 1500$
$n = 20$
$i = 0.12$

$$A = R\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$A = 1500\left[\frac{1 - (1+0.12)^{-20}}{0.12}\right]$$

$$A = 1500\left[\frac{1 - 0.1036668}{0.12}\right]$$

$$A = 1500(7.4694433)$$

$$A = \$\ 11,204.17$$

6.4 Anualidades con tasa nominal de interés

Este caso es cuando la convertibilidad de la tasa nominal corresponde frecuentemente de los pagos (m=p).

Tomaremos como período fundamental el de la convertibilidad de la tasa tomando la correspondiente tasa efectiva y renta por periodo.

Tenemos para monto $S = \frac{Ra}{p} s_{\overline{mn}|\, i'}$ dónde $i' = \frac{i^{(m)}}{m}$

para valor presente $A = \frac{Ra}{p} a_{\overline{mn}|\, i'}$ $i' = \frac{i^{(m)}}{m}$

Ejemplo:

Una persona está ahorrando $50,000.00 cada tres meses al 8%, convertible trimestralmente. Cuanto dinero habrá ahorrado al final de seis años?

$\frac{Ra}{4} = \$50,000.00$ $S = \frac{Ra}{p} s_{\overline{mn}|\, i'}$ $i' = \frac{0.08}{4} = 0.02$

$i^{(4)} = 0.08$ $S = 50,000\ s_{\overline{6x4}|\, 0.02}$

$n = 6$ años $S = 50,000\ (30.421863)$

$m=p= 4$ años $S = \$\ 1'521,093.10$

Encontrar el valor de una deuda que va a ser liquidada semestralmente si la renta anual es de $12,000.00 a una tasa del 7% anual convertible semestralmente y el plazo es de 4 años.

$Ra = 12,000$ $A = \frac{Ra}{p} a_{\overline{mn}|\, i'}$ $i' = \frac{0.07}{2} = 0.035$

$i^{(2)} = 0.07$ $A = \frac{12,000}{2} a_{\overline{4x2}|\, 0.035}$

$n = 4$ años $A = 6,000(6.873955)$

$m=p= 2$ años $A = 41243.73$

6.5 **Formulas para valores no comprendidos en las tablas financieras.**

Muchas veces los valores de n del monto y valor presente de una anualidad no se encuentran en las tablas ya sea porque se encuentran entre dos cantidades o bien porque sobrepasan el valor límite de las tablas.

Por estas razones es conveniente encontrar un procedimiento que permita descomponer n en dos valores que si aparezcan en las tablas. Sean h y k estos valores, entónces $n = h + k$

Para obtenerlo en el monto, tenemos:

$S_{\overline{n}|i} = S_{\overline{h+k}|i} = \frac{(1+i)^{h+k} - 1}{i}$. Sumamos y restamos $(1+i)^h$ al numerador.

$$S_{\overline{h+k}|i} = \frac{(1+i)^{h+k} - (1+i)^h + (1+i)^h - 1}{i} = \frac{(1+i)^{h+k} - (1+i)^h}{i} + \frac{(1+i)^h - 1}{i}$$

$$= (1+i)^h \frac{(1+i)^k - 1}{i} + \frac{(1+i)^h - 1}{i}$$

$$S_{\overline{h+k}|i} = (1+i)^h S_{\overline{k}|i} + S_{\overline{h}|i}$$

Cuando tenemos valor presente:

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{h+k}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-(h+k)}}{i}$$

sumamos y restamos $(1+i)^{-h} = \frac{1 - (1+i)^{-h} + (1+i)^{-h} - (1+i)^{-(h+k)}}{i}$

$$= \frac{1-(1+i)^{-h}}{i} + \frac{(1+i)^{-h} - (1+i)^{-(h+k)}}{i} = a_{\overline{n}|i} + (1+i)^{-h} \left[\frac{(1-(1+i)^{-k})}{i} \right]$$

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{k+h}|i} = a_{\overline{h}|i} + (1+i)^{-h} a_{\overline{k}|i}$$

Ejemplo: Encontrar el valor de contado de una deuda dónde se abonan \$ 18,000.00 anuales pagaderos mensualmente durante 13 años si la tasa es del 9% convertible mensualmente.

$Ra = 18000$

$n = 13$

$i^{(12)} = 0.09$

$m=p = 12$

$$A = \frac{Ra}{p}\, a_{\overline{mn}|i'} \qquad \text{dónde} \quad i' = \frac{0.09}{12} = 0.0075$$

$$A = \frac{18000}{12}\, a_{\overline{12 \times 13}|0.0075}$$

$$A = 1500\, a_{\overline{156}|0.0075}$$

$$A = 1500(a_{\overline{100}|} + (1+0.09)^{-100} a_{\overline{56}|})0.0075$$

$$A = 1500\left[70.17462272 + (0.47369033)(45.58968926)\right]$$

$$A = 1500(70.17462272 + 21.595393)$$

$$A = 1500(91.770015)$$

$$A = \$\ 137,655.02$$

6.6 Cálculo de la renta anual.

Para determinar la renta que se debe pagar anualmente para acumular durante n años cierta suma de dinero colocada a una tasa efectiva de interés basta despejar R de la fórmula de monto.

Tenemos: $S = Rs_{\overline{n}|i}$ despejamos $R = \dfrac{S}{s_{\overline{n}|i}}$

$$R = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$$

de la fórmula $S = R\left[\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$ despejamos $R = \dfrac{Si}{(1+i)^n - 1}$

$\dfrac{1}{s_{n\,i}}$ recibe el nombre de factor del fondo de amortización. Su valor para las tasas que se utilizan con frecuencia lo encontramos en las tablas financieras para valores de n desde 1 hasta 100.

Cuando tenemos valor presente podemos obtener la renta anual despejándola de la fórmula

$$A = Ra_{\overline{n}|i} \qquad R = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}}$$

$$R = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$ recibe el nombre de factor de amortización. Este valor no se incluye en las tablas ya que $\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i$

Para tasa de interés nominal tenemos que:

$$S = \frac{R}{p}\, s_{\overline{mn}|i} \qquad R = \frac{Sp}{s_{\overline{mn}|i'}} \qquad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$A = \frac{R}{p}\, a_{\overline{mn}|i} \qquad R = \frac{ap}{s_{\overline{mn}|i'}}$$

Ejemplo: Una persona desea disponer de un capital de $500,000.00 dentro de 4 años, el cuál se forma mediante depósitos mensuales en un banco con un interés del 7% anual. Cuál será la renta anual para obtenerlo?

$S = 500000$
$i = 0.07$
$n = 4$ años

$$R = S\,\frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$$

$$R = 500000\,\frac{1}{s_{\overline{4}|0.07}}$$

$$R = \frac{500000}{4.439943}$$

$$R = \$\ 112,614.05$$

6.7 Cálculo del tiempo.

Para obtener el número de años requeridos para que una renta anual acumule cierta cantidad a una tasa de interés es necesario despejar n de las fórmulas de monto y valor presente.

Si el valor de n no corresponde a un valor exacto en las tablas lo podemos calcular por medio de logaritmos o de interpolación.

$$S = s_{\overline{n}|\, i} \qquad s_{\overline{n}|\, i} = \frac{S}{R}$$

si el valor no es exácto utilizamos la otra formula.

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$\frac{S}{R} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$(1+i)^n - 1 = \frac{Si}{R} \quad ; \quad \frac{Si}{R} + 1 = (1+i)^n$$

$$n \log (1+i)^n = \log\left(\frac{Si}{R} + 1\right)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{Si}{R} + 1\right)}{\log (1+i)}$$

Ejemplo: Se desea crear un fondo de pensión para los trabajadores de $1'000,000.00. Cuánto tiempo se necesitará para acumularlo si se depositan $15,000.00 al final de cada año a una tasa del 5% anual.

$S = 1'000,000$
$R = 15,000$
$i = 0.05$

$$n = \frac{\log\left(\frac{Si}{R} + 1\right)}{\log (1+i)}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{1000000(.05)}{15000} + 1\right)}{\log (1.05)} = \frac{\log(66.6666(.05) + 1)}{\log 1.05}$$

$$n = \frac{\log(3.3333 + 1)}{\log(1.05)} = \frac{\log(4.3333)}{\log (1.05)} = \frac{0.063682}{0.02119}$$

$$n = 30.05286$$

6.8 Cálculo de la tasa de interés.

Para determinar el interés con el que trabajan ciertos pagos periódicos de dinero, durante un número de años conocido, con el fin de acumular un monto o valor presente determinado, podemos despejar el valor de la tasa de interés i de las fórmulas de monto y valor presente.

$$S = Rs_{\overline{n|}\,i} \qquad s_{\overline{n|}\,i} = \frac{S}{R}$$

Si el valor de i no es exácto lo obtenemos por interpolación.

Ejemplo: Cuál será la tasa de interés para invertir $12,000.00 anuales y acumular un monto de $ 94,779.53 al finalizar 7 años?

$S = 94,779.53$

$R = 12,000$

$n = 7$

$$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{S}{R}$$

$$s_{\overline{7|}\,i} = \frac{9477953}{12000}$$

$$s_{\overline{7|}\,i} = 7.898294$$

a éste valor le corresponde un interés del 4%.

6.9 Anualidades Anticipadas.

Las anualidades en las que los pagos se efectúan al comienzo de cada período se denominan anticipadas.

Las anualidades ciertas ordinarias ó vencidas son en las que los pagos se efectúan un período después del momento de la operación.

La comparación gráfica entre anualidades anticipadas y las vencidas es la siguiente:

```
1   1   1   1          1
+---+---+---+----------+-----+        anticipada
0   1   2   3 . . .  n - 1   n

    1   1   1          1     1
+---+---+---+----------+-----+        vencida
0   1   2   3 . . .  n - 1   n
```

Todos los símbolos son iguales a los que se utilizan en las anualidades ordinarias..

Para designar el valor presente de una anualidad anticipada pagadera durante n años utilizamos: $\ddot{a}_{\overline{n}|}$

dónde $\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1}$

Recordando que el valor presente de una anualidad ordinaria es:

$$a_{\overline{n}|i} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^n$$

podemos observar que la anualidad anticipada se puede obtener multiplicando la anualidad anticipada por v, es decir,

$$v\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \qquad \text{y despejándo } \ddot{a}_{\overline{n}|} \text{ tenemos que:}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)a_{\overline{n}|}$$

Si los pagos son de una renta anual R tenemos que:

$$A = R + Rv + Rv^2 + \dots + Rv^{n-1}$$
$$A = R\,(1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1})$$
$$A = R\ddot{a}_{\overline{n}|}$$
$$A = R(1+i)a_{\overline{n}|}$$

Ejemplo: Obtener el valor presente de 6 pagos anuales de $25,700.00 cada uno. El primero se efectúa en el momento a una tasa del 7% **anual.**

$R = 25,700$
$i = 0.07$
$n = 6$

$$A = R(1+i)a_{\overline{n}|i}$$
$$A = 25,700(1+0.07)a_{\overline{6}|0.07}$$
$$A = 25,700(1.07)(5.58238144)$$
$$A = \$153,509.00$$

Para designar el monto de una anualidad anticipada utilizamos

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

dónde $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$

recordando que el monto de una anualidad vencida es:

$$s_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-1}$$

podemos ver que la anualidad anticipada la obtenemos multiplicando el monto de una anualidad vencida por el factor (1+i).

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)s_{\overline{n}|i}$$

si los pagos son de una renta anual, entónces:

$$S = R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^n$$

$$S = R\ (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^n$$

$$S = R\ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

$$S = R(1+i)s_{\overline{n}|i}$$

sustituyendo el valor de $s_{\overline{n}|i}$ tenemos:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = \frac{(1+i)^{n-1} - (1+i)}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - \frac{i}{i} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 = s_{\overline{n+1}|i} - 1$$

si los pagos son de una renta anual

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = Rs_{\overline{n+1}|} - 1$$

en caso de no contar con tablas financieras utilizamos:

$$S = R(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Ejemplo: Una empresa deposita al principio de cada año \$20,000.00 en una cuenta de ahorros que abona el 7%. ¿A cuánto ascenderán los depósitos al cabo de 5 años?

$$S = R(1+i)s_{\overline{n|}\,i}$$

$$S = 20000(1.07)(5.7507390)$$

$$S = \$\ 123,065.81$$

Para encontrar la renta R, el tiempo n ó la tasa de interés de una anualidad cierta anticipada, basta con despejar dicha incógnita de las fórmulas de monto y valor presente.

Renta anual: $R = \dfrac{S}{(1+i)s_{\overline{n|}\,i}}$ ó $R = \dfrac{Si}{(1+i)\left[(1+i)^{n} - 1\right]}$ para monto

$R = \dfrac{A}{(1+i)a_{\overline{n|}\,i}}$ ó $R = \dfrac{Ai}{(1+i)\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}$ para valor presente

Tiempo: $n = \dfrac{\log\left[\dfrac{Si}{R(1+i)} + 1\right]}{\log\,(1+i)}$ para monto

$n = -\dfrac{\log\left[1 - \dfrac{Ai}{R(1+i)}\right]}{\log\,(1+i)}$ para valor presente

Tasa de interés: $s_{\overline{n+1|}\,i} = \dfrac{S}{R} + 1$ para monto

$a_{\overline{n-1|}\,i} = \dfrac{A}{R} - 1$ para valor presente

6.10 Anualidades Diferidas.

Una anualidad diferida es una anualidad cuyo plazo comienza después de transcurrido un intervalo de tiempo.

El intervalo de aplazamiento es el tiempo que transcurre entre la fecha inicial ó fecha de valoración de la anualidad y la fecha del primer pago.

$$\overline{\underbrace{0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6}_{\substack{\text{intervalo de}\\ \text{aplazamiento}}}\underbrace{\quad 7\quad 8\quad 9\quad 10\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad n}_{\substack{\text{plazo de la}\\ \text{anualidad}}}}$$

comienzo del plazo

Para expresar las anualidades diferidas utilizamos:

$k|a_{\overline{n}|i}$ ó $k|s_{\overline{n}|i}$ para anualidades diferidas vencidas

y $k|\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ ó $k|\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ para anualidades diferidas anticipadas

Las fórmulas para anualidades diferidas van a ser las mismas que se emplearon para calcular anualidades vencidas y anticipadas, observando solamente sí el primer pago se efectúa al final o al inicio del plazo de la anualidad diferida.

Valor presente: formando una ecuación de equivalencia y utilizando como fecha focal el final del periodo k, se tiene siendo A el valor presente en la fecha inicial:

$$A(1+i)^{k} = Ra_{\overline{n}|i}$$

dónde $\quad A = R(1+i)^{-k}\,a_{\overline{n}|i}$

Monto: es el propio monto de la anualidad correspondiente al tiempo de pago.

Renta: $A = R(1+i)^{-k} a_{\overline{n}|i}$

$$R = \frac{A(1+i)^{k}}{a_{\overline{n}|i}}$$

Ejemplo: Una persona desea establecer un fondo de manera que un hospital que estará terminado en 5 años reciba para su funcionamiento una renta anual de \$ 25,000 durante 20 años. Hallar el valor del fondo si gana 8% de interés.

$$A = R(a_{\overline{n+k}|i} - a_{\overline{k}|i})$$

$$A = 25000(a_{\overline{25}|0.08} - a_{\overline{4}|0.08})$$

$$A = 25000(10.67477619-3.31212684)$$

$$A = \$184,066.23$$

6.11 Rentas Perpetuas.

Una renta perpetua es una anualidad cuyo plazo no tiene fin. Se utilizan los mismos símbolos que en los anteriores.

Se designará por : a_{∞}

Monto: Como los pagos de una renta perpetua nunca cesarán, resulta imposible calcular su monto.

Valor presente. Se considera que n crece indefinidamente.

$$R = Ai$$

$$A = R \cdot \frac{1}{i}$$

el factor $\frac{1}{i} = a_{\overline{\infty}|i}$ que es el valor presente de una renta perpetua por período a la tasa i por período.

Ejemplo: Un señor establece en su testamento que sus bienes sean invertidos de modo que el hospital de ancianos reciba a perpetuidad una renta de 1'000,000.00 cada fin de año. Hallar el Valor presente si la tasa es del 8%.

$$A = R \cdot \frac{1}{i} \qquad A = \frac{1'000,000}{0.08} = \$\ 12'500,000.00$$

CAPITULO VII

AMORTIZACION

7.1 Amortización es la forma de liquidar o reducir paulatinamente una deuda, mediante pagos períodicos, por lo general iguales, que cubren tanto un cierto interés, como salden realmente una parte del monto total de la deuda.

Estos pagos forman una anualidad y los problemas en la amortización de un adeudo son análogos a los tratados en las anualidades.

7.2 Tablas de amortización.

Una tabla de amortización es un instrumento que permite observar la división de cada aportación en interés y capital, contenido en el pago, así como el capital insoluto o deuda real, después de haberse efectuado dicho pago.

Consideremos que la deuda sea de un capital a_n , entónces la renta anual para liquidar éste adeudo sera la unidad.

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + . . . + v^{n-1} + v^n$$

Un año después de recibido el préstamo $a_{\overline{n}|i}$, los intereses que hay que pagar sobre el mismo serán $ia_{\overline{n}|} = 1-v^n$. Como la renta es la unidad la parte destinada al pago de capital será $1 - ia_{\overline{n}|} = 1 - (1-v^n) = v^n$, ya efectuado el pago unitario el capital que se adeuda se reduce quedando: $a_{\overline{n}|} - v^n$

El capital que se adeuda en cada período recibe el nombre de capital insoluto.

Suponemos una renta unitaria, en general, el primer paso consiste en determinar dicha renta y proceder a la elaboración de la tabla.

Entónces la tabla queda:

Tabla de Amortización

Número del pago	Capital insoluto al principio de período	Distribución del pago: Intereses contenidos en el pago	Distribución del pago: Capital contenido en el pago
1	$a_{\overline{n}\rceil}$	$1 - v^{n}$	v^{n}
2	$a_{\overline{n-1}\rceil}$	$1 - v^{n-1}$	v^{n-1}
3	$a_{\overline{n-2}\rceil}$	$1 - v^{n-2}$	v^{n-2}
.			
.			
.			
t	$a_{\overline{n-(t-i)}\rceil}$	$1 - v^{n-(t-1)}$	$v^{n-(t-1)}$
.			
.			
.			
n	$a_{\overline{1}\rceil} = v$	$1 - v$	v

De la tabla de amortización tenemos que:

- El capital insoluto al inicio de la operación es la deuda original.
- El capital insoluto después de efectuado el pago es igual al valor presente de todos los pagos que faltan por hacer.
- El capital insoluto al final de la operación es 0.
- El capital contenido en el pago es igual al monto del pago menos el interés contenido en el pago.
- El capital contenido en el pago forma una progresión geométrica de razón (1+i).

Para calcular el total de capital pagado después de efectuar el t-ésimo pago sería:

$$a_{\overline{n}|} - a_{\overline{n-t}|}$$

Para comprobar sabemos que la suma del capital contenido en el pago debe ser igual a la deuda.
La suma de capitales insolutos al principio del período se obtiene mediante:

$$\frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}$$

La suma de los intereses contenidos en el pago sera;

$$n - a_{\overline{n}|}$$

Ejemplo: Una deuda de \$ 5,000 va a ser amortizada mediante pagos semestrales iguales R en los próximos 3 años al 5% convertible semestralmente. Encontrar el pago y construir la tabla de amortización.

$A = 5000$

$n = 6$

$i = 0.025$

$$A = Ra_{\overline{n}|i}$$

$$R = A \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

$$R = 5000 \frac{1}{a_{\overline{6}|0.025}}$$

$$R = \frac{5000}{5.508125}$$

$$R = \$\ 907.75$$

Tabla de Amortización

Número del pago	Capital insoluto principio período	Intereses contenidos en el pago	Capital contenido en el pago	Total de capital pagado
1	5,000.00	125.00	782.75	782.75
2	4,217.25	105.43	802.32	1,585.07
3	3,414.93	85.37	822.38	2,407.45
4	2,592.55	64.81	842.94	3,250.39
5	1,749.61	43.74	864.01	4,114.40
6	885.60	22.14	885.61	5,000.01

Se puede obtener también el valor de un elemento o un renglón de la tabla de amortización, sin necesidad de construir toda la tabla, basandose en las sig. fórmulas:

- Capital insoluto $= Ra_{\overline{n-t}|i}$
- Total de capital pagado $= R\ a_{\overline{n}|i} - a_{\overline{n-t}|i}$
- Capital contenido en el pago $= Rv^{n-t+1}$
- Intereses contenidos en el pago $= R[1-v^{n-t+1}]$

Ejemplo: Obtener el renglon correspondiente al tercer pago del ejemplo anterior:

deuda =\$5000.00

renta =\$ 907.75

$n =$ 6 semestres

$i = 0.025$

- Capital insoluto $= 907.75\ a_{\overline{6-3}|\,0.025}$

$$= 907.75\ a_{\overline{3}|\,0.025} \qquad = 907.75(2.856023)$$
$$= 2{,}592.55$$

- Capital pagado acumulado $= 907.75(a_{\overline{6}|\,0.025} - a_{\overline{6-3}|\,0.025})$

$$= 907.75(5.508125-2.856023)$$
$$= 907.75\ (2.6521)$$
$$= 2{,}407.45$$

- Capital contenido en el pago $= 907.75\ v^{6-3+1}$

$$= 907.75\ v^4$$
$$= 907.75(0.905950)$$
$$= 822.38$$

- Interés contenido en el pago $= 907.75(1-v^{6-3+1})$

$$= 907.75(1-v^4)$$
$$= 907.75(1-0.905950)$$
$$= 907.75(0.09405)$$
$$= 85.37$$

CONCLUSIONES

En el capítulo I se vió en forma muy abreviada algunos conceptos algebráicos ya que el estudiante de Actuaría los verá en forma más extensa y profunda en los cursos de álgebra.

En el capítulo II se vió el interés simple aún cuándo no está en forma oficial en el programa de Matemáticas Financieras I, pero es necesario para poder explicar el interés compuesto en forma más clara.

En el capítulo III se expuso el interés compuesto, que es el tipo de interés que se aplica en la mayoría de los problemas prácticos.

En el capítulo IV vimos el valor presente que determina el valor de los bienes expresables en dinero que, por alguna condición se recibirán en fecha futura y el descuento que se utiliza en las operaciones financieras.

En el capítulo V se ven las ecuaciones de valor, las cuáles el alumno deberá recordar frecuentemente ya que en casi todos los problemas de Matemáticas Financieras por complicados que sean se plantea una ecuación de valor.

En los capítulos VI y VII damos una pequeña introducción de anualidades y amortización ya que estos temas se ven con mayor amplitud en los cursos posteriores de Matemáticas Financieras.

BIBLIOGRAFIA

The Theory of interest
Stephen G. Kellison
1970 Homewood Illinois

Compound Interest and Annuities Certain
D.W.A Donald.
Cambridge 1963

Matemáticas Financieras
Lincoyán Portus Goviden
Editorial McGraw-Hill
México D.F. 1982

Matemáticas Financieras
Benjamín de la Cueva
Editorial Porrúa
México D.F. 1977

Matemáticas Financieras
Mario A. Toledano y Castillo
Editorial C.E.C.S.A.
México D.F. 1981

Matemáticas Financieras Serie Schaum
Frank Ayres, J.R.
Editorial McGraw-Hill
México D.F. 1971

Tablas Financieras
Benjamín de la Cueva
Editorial Porrúa
México D.F. 1976

Cálculo Diferencial é Integral
William A Granville
Editorial Limusa
México 1981

Mátemáticas para administración y economía
Jesus E. Draper, James Klingman
Editorial Harla S.A. de C.V.
México 1976

Matemáticas Financieras
Robert. Cissell
C.E.C.S.A.