Universidad Nacional Autónoma de México

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

MODELOS MATEMATICOS Y LENGUAJES SIMBOLICOS EN EL BACHILLERATO

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el título de

MATEMATICO

Presenta:

Jesús Lechuga Anaya

1986

2 ej
18

Aunque el presente trabajo está firmado por un sólo autor, este jamás hubiera podido concluirse sin la valiosa ayuda de -- muchas personas que desinteresadamente contribuyeron en su realización. Menciono especialmente al Maestro en Ciencias Alejandro Bravo Mojica, quien además de hacer una minuciosa revisión de los manuscritos, contribuyó con valiosas y variadas sugerencias.

Así como la profesora Mat. Elisa A. González del Valle y C. Jefa del área de matemáticas del CCH Plantel Oriente. Quien --- apoyó y ayudó en todo momento, no sólo con trámites administrativos, sino fundamentalmente con asesoría profesional, señalando mejoras sustanciales de forma y contenido.

Finalmente deseo expresar mi agradecimiento a la secretaria Enriqueta Valencia por el excelente trabajo profesional desarrollado, al pasar a máquina los manuscritos del presente trabajo.

I N D I C E

I N D I C E

INTRODUCCION

1.- INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está dirigido a los alumnos que llevan un primer curso de matemáticas en el bachillerato, dentro del -- sistema CCH (Colegio de Ciencias y Humanidades).

Uno de los objetivos fundamentales que se persiguen en --- este curso es que el alumno adquiera un conocimiento real, con-- creto y desmistificado del quehacer de las matemáticas dentro de las actividades ordinarias del ser humano.

Esto deberá traer como consecuencia que el alumno se de - cuenta que las matemáticas son algo útil, y no un mero cúmulo de fórmulas y procedimientos, por demás tediosos y aburridos, que - deberá aprender y memorizar.

Significa esto que el alumno comprenda que las matemáticas no son algo difícil de entender y asimilar, que estas no sólo son aplicables a los conocimientos científicos, estrictos y rigurosos, dentro de los cuales él es un mero espectador.

Por el contrario hacerle sentir que puede ser partícipe de este mundo matemático, que no tiene nada de mágico ni divino y -- que sin embargo le puede ser muy útil, no solamente en la adquisición de un lenguaje simbólico o un método de razonamiento formal, sino también como una herramienta, para la comprensión y transformación de su realidad y entorno social.

Significa también que las matemáticas, son el producto del- esfuerzo colectivo de muchos hombres y mujeres que a traves de la historia han contribuido y contribuyen aún a su desarrollo, crecimiento y aplicación práctica.

Lo cual nos permite afirmar que las matemáticas no son algo - rígido estricto e inmutable, sino por el contrario son flexibles, elásticas y cambiantes, ya que su propio desarrollo hace que ---- estén en continua transformación. De ahi que el propio alumno ---

puede y debe contribuir a elaborar su "matemática", de acuerdo a sus necesidades.

Iniciamos este curso con el tema modelos matemáticos, proponiendo una serie de problemas resueltos, señalando en cada --- caso el procedimiento para llegar a la obtención de un modelo -- matemático que lo resuelve, para pasar en algunos casos a la generalización de dicho modelo. Dejamos tambien ejercicios y problemas propuestos, donde el alumno por si mismo o con asesoría - de su maestro llegue a elaborar sus propios modelos matemáticos.

Pasamos posteriormente al tema de lenguajes simbólicos donde destacamos que las matemáticas "descansan" en un lenguaje que ella misma va creando, con la finalidad de facilitar su entendimiento y operatividad.

Estos lenguajes simbólicos tienen sus propias reglas gramaticales (Sintáxis del lenguaje), así como su significado específico para cada frase o expresión simbólica (semántica del lenguaje).

En los últimos capítulos desarrollamos los lenguajes simbólicos de la lógica y de los conjuntos. Empezando en cada uno de - ellos con un problema que para poder resolver, se vea la necesidad de desarrollar la teoría y su lenguaje respectivo.

Con esto se pretende no solo tener constancia de la aplicación práctica de los lenguajes simbólicos, sino que el alumno --- adquiera cierta destreza en su manejo y utilización, para resolver algún tipo de problemas.

Hemos intentado mantener a lo largo de los capítulos, el -- esquema de que, a partir de una supuesta realidad o de un problema emanado de ella, llegar a la elaboración de un modelo simbólico que lo represente. Modelo simbólico apoyado en su lenguaje respectivo, de tal forma que pueda ser manipulable u operable, para que mediante sus reglas de transformación se puede llegar por ---

pasos sucesivos a la obtención de la solución del problema planteado.

Estamos seguros que para la lectura y comprensión de estas notas, no se requiere mas allá de la aritmética y el álgebra elemental, de manera no muy profunda, ya que a lo más se manejan -- ecuaciones lineales en algunos problemas.

2.- MODELOS.

El ser humano en su actividad diaria, se enfrenta a un gran número de problemas que debe ir sorteando y superando.

Problemas y dificultades que surgen como consecuencia de la multitud de relaciones que guarda con el medio que le rodea. El hombre al estar inmerso en una realidad cambiante, sufre el impacto de una variedad cada vez mas grande de estímulos de toda índole. Estímulos que le motivan a la superación de los problemas que se le presentan, estos pueden ser de carácter, social, económico, ambiental, de salud, políticos etc.

Muchos problemas se pueden atacar con la ayuda de las matemáticas como pueden ser:

a) Ganancia en la venta de un artículo.
b) Impuestos por pagar en una empresa.
c) Número de kilómetros por litro de gasolina en un automovil.
d) Fuerza mínima que se debe aplicar a un objeto para moverlo.
e) Distancia mínima para desplazarse de un punto a otro.
f) Flujo de tránsito en una ciudad.
g) Red telefónica en una población.

En la medida que el hombre avanza en la superación de sus problemas, aumenta la experiencia y el conocimiento que tiene del medio que le rodea; esto hace que cada vez tenga que utilizar con mas frecuencia las matemáticas, para un mejor entendimiento y comprensión de ésta realidad.

Problemas de carácter aparentemente alejados de la matemática, como pueden ser los de salud, de ecología, de lenguaje, de relaciones humanas etc., necesitan cada vez con mas frecuencia del auxilio que aquella les puede proporcionar, para un entendimiento mas cabal y profundo de ellos, y así estar en mejor forma-de poderlos atacar y resolver. Por ejemplo:

a) Diseño y dimensiones de una válvula cardiaca.
b) Red del sistema de recolección de basura en una urbe.
c) Buscar un método para decifrar códices mayas.
d) Diseño de un conjunto urbano.
e) Red de agua potable, drenaje y telefónica en una ciudad.

Penetrar al mundo de las matemáticas, es penetrar al mundo del conocimiento, ya que las matemáticas son el camino mas idóneo, que tiene el ser humano, para interpretar el cúmulo de información que recibe del medio que le rodea.

Información de una realidad compleja, cambiante y escurridiza. En la medida que la conocemos, parece volverse mas compleja, por esto el ser humano debe tener la capacidad de crear los medios mas acertados para poder interpretarla.

Los modelos son en cierta medida el medio que el ser humano utiliza en cualquier rama del conocimiento, como un instrumento para decifrar y conocer la naturaleza.

2.1.- ¿QUÉ ES UN MODELO?

Para comprender lo que es un modelo, supongamos la siguiente situación que posiblemente ya nos haya ocurrido anteriormente.

Pensemos que nos encontramos con un objeto completamente nuevo y desconocido para nosotros, objeto que pudiese ser grande o pequeño. Como consecuencia de la curiosidad innata del ser humano y de nuestro afán de conocimiento, nos acercamos, tal vez cautelosos, al objeto. Nuestra mente empieza a trabajar, tratando de asociar el objeto con alguno ya conocido anteriormente, con lo cual nos formamos un "esquema mental" primario del objeto, como consecuencia de la apreciación sensorial del objeto. Resaltado con esto propiedades tales como: forma, tamaño, textura, color, olor, peso, volumen, etc.

En este primer encuentro con el objeto nos hemos formado un "Modelo mental" en una primera etapa, generalizando las propiedades básicas de ese objeto, como producto del conocimiento, meramente sensorial que de él hemos obtenido.

Debemos destacar que en alguna medida hemos modificado al objeto, tal vez en mínima parte, respecto a su situación original, ya que al irrumpir en su entorno, lo modificamos. Pero lo que es más importante aún, el objeto nos ha modificado o cambiado a su vez a nosotros mismos, ya que ahora poseemos en nuestra conciencia un nuevo conocimiento, aunque elemental, pero que no teniamos anteriormente.

En la medida que avanzamos en nuestra curiosidad, manipulamos al objeto, lo tocamos, lo sacudimos, lo oimos, lo sentimos en general y nuestro "Modelo-mental" se va modificando hasta alcanzar una segunda etapa interpretativa de esa realidad.

Descubrimos tal vez que por la dureza o resistencia del objeto (El objeto lucha y se defiende, pero nosotros insistimos en conocerlo) que necesitamos de alguna herramienta o instrumento que nos sirva como "llave", para penetrar al conocimiento interno o mas profundo del objeto. Herramienta que bien puede ser desde una simple piedra, garrote o cuchillo, hasta el más sofisticado instrumento de precisión, como puede ser un microscopio electrónico, o un acelerador de partículas elementales.

Al llegar a este nivel ya poseemos otro "modelo" más refinado que el anterior y pasamos a otra etapa del conocimiento del objeto, más aproximada a la realidad.

Posteriormente para comunicar nuestro hallazgo, descubrimiento o simple conocimiento, obtenido, del objeto, podemos hacer dibujos, esquemas, anotaciones de sus características más relevantes, tratando de conjuntar y sistematizar toda la información obtenida, para finalmente poder tener la mas "fiel" interpretación del objeto, enmarcada dentro de la realidad que le es propia.

El llegar a esta etapa, no significa que hemos obtenido realmente la mas fiel y exacta interpretación del objeto, sino que hemos llegado tal vez a un conocimiento del objeto que nos dure cierto tiempo, pero que tendrá que sufrir modificaciones en el futuro, como producto del avance de otros conocimientos y de contar cada vez con nuevos y mejores instrumentos.

El anterior caso hipotético ilustra someramente lo que es un modelo, como una mera aproximación a la realidad. Modelo que en un principio es Modelo mental, pero que al transcribirlo en el papel ya sea con dibujos, esquemas, gráficas, fórmulas, expresiones o garabatos en general, se convirtió en Modelo simbólico.

Modelo simbólico que tiene un doble propósito. Por un lado que podamos leer paso a paso y recordar lo que hicimos para obtener el modelo, y así obtener nuevamente sus características principales. Por otro lado, como información a otras personas interesadas en el conocimiento del objeto, para que a su vez puedan modificar o aumentar este modelo.

Resumiendo podemos destacar que un modelo en general es la interpretación de la realidad, que se plasma en símbolos, esquemas, gráficas, maquetas, expresiones o todo aquello que pretenda representar algún rasgo, o característica del objeto, fenómeno o proceso de la realidad.

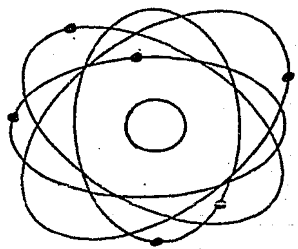
2.2.- MODELOS CIENTÍFICOS.

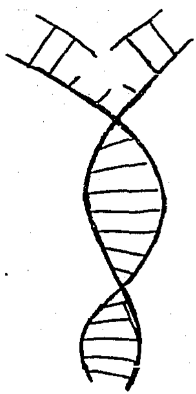
Debemos resaltar que un modelo interpretativo de la realidad, no es algo fijo acabado y perfecto, sino que es un mero reflejo de ella, que se debera ir modificando en la medida que conozcamos más y mejor a esa realidad.

Los modelos son aplicables a todas las ramas del conocimiento humano, en especial al conocimiento científico, ésto significa que cuando el investigador o el científico se enfrenta, en su afán por desentrañar los misterios de la naturaleza y del medio que le rodea, a un nuevo problema, lo que hace, apoyado en el método científico, es un modelo que represente lo mas cercano a la realidad el problema u objeto, parte de su estudio.

Algunos ejemplos de modelos que los científicos han creado, dentro de la ciencia en general, son los siguientes:

1.- Modelo atómico de Bohr.





2.- DNA

3.- Segunda ley de la dinámica $F = ma$
4.- Modelo de bolas de billar para gases ideales.
5.- Modelo corpuscular de la luz.
6.- Modelo ondulatorio de la luz.

Para profundizar en el estudio de los modelos, el Hombre -- crea las teorías, que no son otra cosa que el estudio formal y - sistemático del comportamiento y propiedades de los modelos un - tanto alejados de la realidad. Esto es, haciendo abstracción ---- (separación) de aquellas partes o elementos de la realidad, que- se cree no influyen de manera decisiva en los hechos que se --- desean representar en el modelo, por ejemplo, el color de un --- automovil no influye en el consumo de gasolina, pero no podemos- asegurar lo mismo de su peso o volúmen.

Los modelos y las teorías, nacen, crecen y se reproducen, - como un ejemplo de esto tenemos a la mecánica de Galileo, la --- mecánica de Newton y la mecánica relativista. O en otro campo - también tenemos como ejemplo a la geometría egipcia, la geometría griega y las geometrías no euclideanas.

2.3.- MODELOS MATEMÁTICOS.

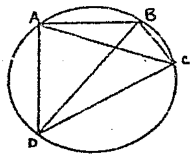
Si bien los modelos en general se utilizan dentro de la Química, Física, Biología, Sociología, Economía, Astronomía, etc. - lo que a nosotros nos interesa directamente son los modelos matemáticos, entendiendo por estos a aquellos que representan a la - realidad o parte de ella, empleando símbolos, signos, operaciones etc. O bien puntos, lineas, curvas, superficies etc.

Algunos ejemplos de modelos que se emplean en matemáticas - son:

1.- $a^2+b^2=c^2$ ———— Teorema de Pitágoras en Geometría.
2.- $2x^2+5x+6=0$ ———— Ecuación en Algebra.

3.- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ ——————Identidad de Trigonometría.

4.- $A = \frac{bh}{2}$ ——————Fórmula de Geometría.

5.- 

Gráfica en Geometría

6.- $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ ——————— función en Cálculo Integral.

Uno de los aspectos mas difundidos y utilizados de los modelos matemáticos, son la cuantificación o medición de los fenómenos, procesos u objetos de la realidad, para un mejor conocimiento y comprensión de estos. Un ejemplo sencillo de esto es asociarle un número -su área- a un terreno, y así poder compararlo con otros terrenos. Claro que no basta solo el area, sino que se le asocian otros números al mismo terreno, como puede ser su perímetro, su ancho, su largo, la longitud de cada diagonal, su pendiente, si es que está en un cerro o loma, etc.

Por ejemplo, si deseamos calcular el area de un terreno triangular, que tiene 15 metros de base y 8 metros de altura, simplemente empleamos el modelo matemático o fórmula siguiente.

Area = base por altura sobre dos

Simbólicamente tenemos.

A = Area, b = base, h = altura, de donde, queda:

$A = \frac{bh}{2}$ y efectuando las operaciones, tenemos:

$$A = \frac{(15m)(8m)}{2} = 60\ m^2.$$

Otro ejemplo es, si deseamos conocer el número de saludos -- (apretón de manos) que se efectuarían entre nueve personas, que - asisten a una reunión, sabiendo que todos se saludaron una sola - vez. Para ésto utilizamos al modelo matemático.

Total de saludos = número de personas por número de personas ---- menos una, entre dos

Simbólicamente

T = Total de saludos , n = número de personas, Por lo tanto

$T = \frac{n(n-1)}{2}$. Efectuando operaciones, tenemos:

$T = \frac{(9)(8)}{2} = 36$ saludos.

EJERCICIOS

I.- Contesta brevemente cada pregunta.

1.- ¿Qué es un modelo en general?

2.- ¿Qué es un modelo científico?

3.- ¿Qué es un modelo matemático?

4.- ¿Los modelos representan fielmente a la realidad?¿Por qué?

5.- ¿La realidad representa fielmente a los modelos?¿Por qué?

6.- ¿Por qué un modelo debe sufrir cambios?

7.- Supón que careces del sentido de la vista (invidente de - nacimiento)¿Qué sería para tí un árbol?¿una flor?¿Un elefante?¿El mar?¿Qué modelos te formarías de cada uno de -- estos objetos?

8.- Si eres sordo, mudo o careces del sentido del tacto¿Qué - modelos tendrías de los objetos anteriores?

9.- Supón ahora que posees un sentido extra, mas poderoso que la vista, pero diferente de ella ¿Como serían tus modelos de los objetos anteriores?

10.- Dá dos ejemplos de modelos en general y dos ejemplos de modelos matemáticos en particular.

11.- Describe brevemente que es una teoría.

12.- ¿El hombre crea los modelos por necesidad, por su afán de conocimiento o por diversión?

13.- ¿Qué finalidad persigue el hombre en la creación de los modelos?
Son un mero instrumento de contemplación y conocimiento de la realidad o como transformación y utilización de la naturaleza.

II.- Utilizando los siguientes modelos, calcula lo que se pide en cada caso.

1.- Modelo $A = l^2$. Area de un cuadrado , A= area, l= lado
Calcular A, si $l= 3$, $l= 9$, $l= 8.5$, $l= \frac{1}{3}$, $l= \sqrt{2}$

2.- Modelo I= CRT. Interés simple. I= interés, C= capital, R= rédito, T= tiempo.

Calcular I, si C= 10000 , R= 0.72 y T= 5

Calcular I, si C= 7450 , R= $\frac{2}{3}$ y T= $\frac{7}{2}$

3.- Modelo $s = \frac{gt^2}{2}$. Distancia recorrida por un objeto en caída libre. g= constante de gravedad, t= tiempo.

Calcular s, si g= 9.8 y t= 3
Calcular s, si g= 9.75 y t= 4.55
Calcular s, si g= 10 y t= $\frac{5}{2}$

4.- Modelo $y = x^3 - 2x^2 + 1$. Función cúbica, x= variable independiente
y= variable dependiente.

Calcular y, si $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$

2.4.- Obtención de Modelos Matemáticos.

Como ya sabemos, una de las utilidades (no la única ni la - principal) de los modelos matemáticos es la aplicación práctica- y concreta de las fórmulas en ellas representados, para la obtención de algún resultado particular que nos interese.

Sin embargo surge la duda ¿como se obtienen o crean los modelos matemáticos o fórmulas? en particular ¿Por qué la fórmula- $A = \frac{bh}{2}$ para calcular el área de un triángulo?

Esto nos induce a pensar que un modelo matemático es como - una "caja negra", o un mecanismo que sabemos manejar, pero que - no conocemos como fué construido.

Es como saber conducir u operar un automovil, aparato electrónico o una computadora, pero desconocer completamente su mecanismo interno, ¿cómo fué construido, qué partes lo componen, --- cuáles son sus elementos principales, qué modificaciones se le - pueden hacer para mejorarlo, etc. ?

Sí, simplemente nos conformamos con ser operadores, tal vez muy capaces de la gran tecnología, estamos condenados a ser consumidores subdesarrollados, hasta lograr conocer los mecanismos- internos de la "caja negra", y ser productores de tales mecanismos.

Análogamente en el campo de las matemáticas y de la ciencia en general, debemos ser capaces no solo de conocer y poder trabajar como un modelo matemático o fórmula, sino lo más importante, crear los modelos y las fórmulas.

2.4.1.- Construcción de un Modelo Matemático Sencillo.

Para obtener algunos modelos matemáticos, empezaremos con el planteamiento de algunos problemas.

Problema 1.-

Estamos organizando un torneo de ajedréz, donde se han inscrito 100 jugadores. Si el sistema de juego es "Round Robin", es decir, cada jugador jugará exactamente una sola partida contra cada uno de los restantes. Queremos saber antes de empezar el torneo ¿Cuántos partidos habrá en total a lo largo de todo el torneo?

Antes de intentar resolver el problema, debemos establecerlo siguiente:

a) Como cada participante jugará un solo partido con cada uno de los otros participantes, significa, que cada jugador le tocan en total 99 partidos.

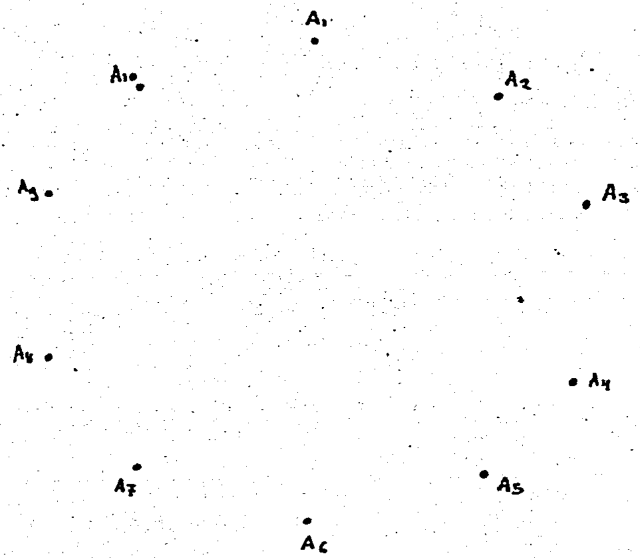
b) Dos jugadores hacen un sólo partido. O sea, decir que Pedro juega con Luis es igual a decir que Luis juega con Pedro.

c) Sólo son 100 jugadores.

Hecho lo anterior, no debemos creer simplemente que, como son 100 jugadores y cada uno juega 99 veces, entonces:

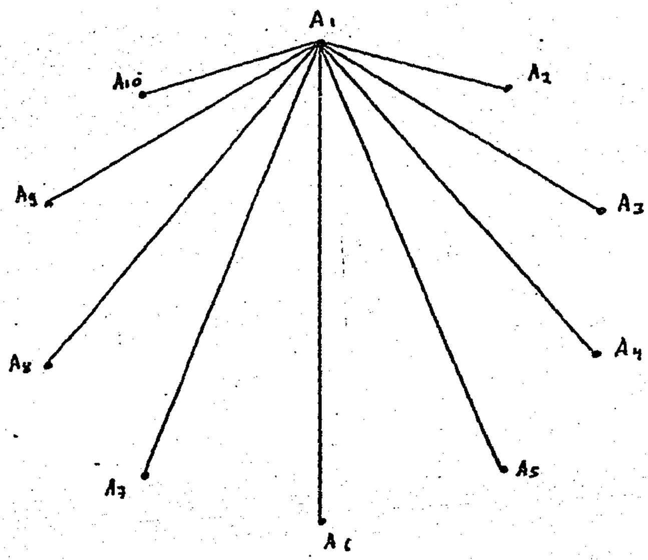
Total de partidos = (100)(99)= 9900. Esto sería incorrecto.

Empecemos por simplificar el problema. Supongase que en vez de 100 jugadores, solo son 10 jugadores, los cuales vamos a representar con los símbolos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10} que colocamos en círculo.

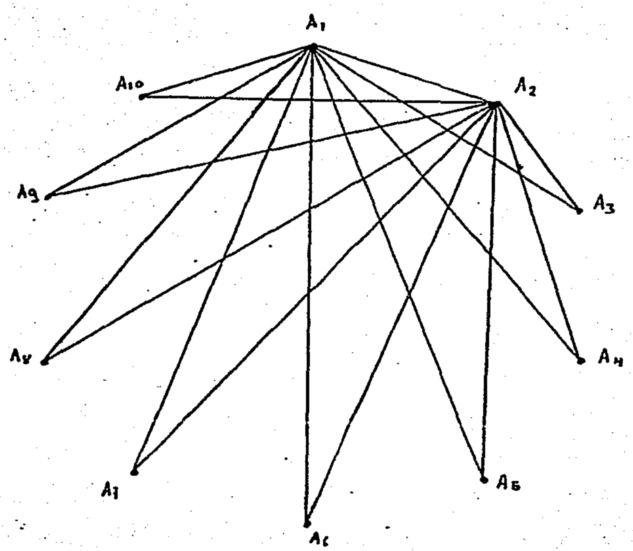


Para denotar que dos jugadores se han enfrentado (que han -- jugado uno contra el otro) trazaremos el segmento que une los puntos correspondientes.

Así la siguiente gráfica representa los nueve partidos que jugará A_1



Donde cada segmento representa un sólo partido, con esto -- vemos que A_1 agotó sus juegos. Seguimos en orden ahora con A_2, que tambien deberá jugar 9 partidos, pero ya está representado - el que jugó contra A_1 (o A_1 contra A_2), sólo resta representar - los otros 8 partidos que jugará A_2, para obtener la siguiente -- gráfica.



Con esto, tanto para A_1 como para A_2 se han representado -- todos sus partidos por jugar. Observando ésta última gráfica, - vemos que tanto de A_1 como de A_2 salen 9 lineas o segmentos, en cambio de los restantes salen sólo dos lineas, ésto representa - dos partidos para estos jugadores. Es decir los jugadores ----- A_3, A_4, A_5,..., A_{10} se han representado ya 2 partidos- - - - - - (contra A_1 y A_2)

Procediendo con el sistema anterior seguiriamos con A_3 que ya tiene representados dos juegos y sólo le restan 7. Después -- para A_4, ya tendría representados 3 juegos (contra A_1,A_2 y A_3) y le restarían 6 y así sucesivamente hasta completar la gráfica -- anterior. Todo ésto lo resumimos en la siguiente tabla numérica.

Jugador	Número de partidos que le faltan (lineas)
A_1 ———	9
A_2 ———	8
A_3 ———	7
A_4 ———	6
A_5 ———	5
A_6 ———	4
A_7 ———	3
A_8 ———	2
A_9 ———	1
A_{10} ———	0

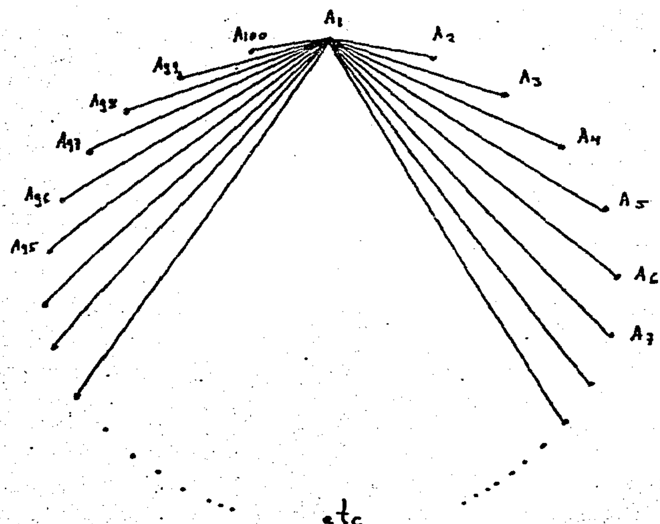
En el último caso, A_{10}, ya no le faltaría partido por representar ya que todos habrían jugado contra él. Con lo cual tendríamos la gráfica completa y cada linea representa un y sólo un partido. Esto significa que el total de partidos para los 10 -- jugadores, es el total de lineas en la gráfica completa. Sumando estas lineas tenemos:

Total de partidos = 9+8+7+6+5+4+3+2+1+0 = 45

Compruebalo haciendo la gráfica completa y contando las lineas

Llegando a ésta etapa no debemos precipitarnos a querer - generalizar el problema para el caso original de 100 jugadores y pensar que, si para 10 jugadores son 45 juegos, entonces --- para 100 jugadores serán (45)(10) = 450 juegos. Esto es inco-- rrecto.

Lo que debemos hacer en considerar ahora una gráfica com- pleta con 100 jugadores y contar todas las lineas. Procedien- do como el caso anterior tenemos:



Observamos de ésta gráfica, que para A_1 le restarían 99 partidos para A_2 98, para A_3 97, para A_4 96 y así sucesivamente para $A_5, A_6, A_7 \ldots$ hasta llegar a A_{100}. Resumiendo en la tabla tenemos:

Jugador	número de partidos (lineas)
A_1	99
A_2	98
A_3	97
A_4	96
A_5	95
.	.
.	.
.	.
A_{97}	3
A_{98}	2
A_{99}	1
A_{100}	0

Lo cual significa que el total de partidos para los 100 jugadores será el total de lineas en la gráfica completa. Esto es:

$$\text{Total de partidos} = 99+98+97+96+ \ldots +3+2+1+0$$

$$= 0+1+2+3+ \ldots +96+97+98+99$$

Con lo cual vemos que el problema se resuelve realizando esta "sumota". De este modo el problema original se ha reducido a efectuar esta operación que ya sabemos como hacer, con lo cual podemos decir que hemos obtenido un modelo matemático que resuelve este problema y que se puede representar asi:

$T = 0+1+2+3 \ldots +97+98+99$, donde T = total de partidos.

Surge ahora un nuevo problema ¿Cómo realizar esta suma sin equivocarnos? Aún con la ayuda de una calculadora de bolsillo podemos equivocarnos. Trata de realizar esta suma antes de continuar.

Existe un procedimiento sencillo para efectuarla, debido al gran matemático C.F. Gauss, que lo realizo cuando aún era niño. Consiste en sumar por parejas de números, empezando por el primero con el último, despues el segundo con el penúltimo y así sucesivamente. Observando que la suma de cada pareja siempre es 99.

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 96 + 97 + 98 + 99$$

$$2 + 97 = 99$$

$$1 + 98 = 99$$

$$0 + 99 = 99$$

Como de 0 a 99 hay 100 sumandos. Observamos que hay 50 parejas, donde cada una suma 99. Dichas parejas son a saber:

$$
\begin{array}{rcl}
0 & + & 99 = 99 \\
1 & + & 98 = 99 \\
2 & + & 97 = 99 \\
3 & + & 96 = 99 \\
4 & + & 95 = 99 \\
 & \vdots & \vdots \\
49 & + & 50 = 99
\end{array}
$$

Y con esto la suma es igual a

$$0+1+2+3+ \ldots +97+98+99 = 99+99+99+ \ldots + 99 = 50 \text{ veces } 99$$

Pero 50 veces 99 es una multiplicación, por lo tanto la suma original y con esto el total de partidos es:

$$T = (50)(99) = 4950$$

Supongamos ahora que en lugar de 100 jugadores fueran 1000, 2000, ó tal vez un número mayor. Sabemos por el procedimiento anterior, que en el caso de 1000 participantes, para calcular el total de partidos, bastará realizar la suma.

Total de partidos = 0+1+2+3+ . . . . +996+997+998+999.

En el caso que fueran 2000 jugadores tendriamos que hacer la suma total = 0+1+2+3+. . . +1997+1998+1999

Con esto nos damos cuenta de que tenemos un procedimiento efectivo y seguro para evaluar el total de partidos no importando el número de participantes. El problema es realizar la suma sin equivocarnos, y aunque ya sabemos como efectuarla rapidamente, estamos en el momento de dar un paso más en el desarrollo de nuestro modelo, que consiste en preguntar ¿Qué pasa en general para n jugadores? donde n puede ser 100,150,175,200,2000,40, 7, o cualquier número de jugadores que deseen participar. Queremos encontrar la forma o fórmula como un modelo matemático en general para n jugadores.

Sabemos que para n jugadores, el total de partidos es Total = 1+2+3+ . . . +n-3+n-2+n-1, que es el modelo original por ejemplo si n= 7. Es decir si, solo son 7 jugadores, el total de partidos es.

T = 1+2+3+4+5+6 = 21 partidos.

Para llegar a obtener la fórmula o modelo en general, procedamos a efectuar la suma como lo hicimos para 100 jugadores.

$$T = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n-4 + n-3 + n-2 + n-1$$

$$3 + n-4 = n-1$$

$$2 + n-3 = n-1$$

$$1 + n-2 = n-1$$

$$0 + n-1 = n-1$$

Vemos que la suma siempre es n-1, y como los tomamos por pares (primero con último, segundo con penúltimo, etc.), esto lo -- hacemos en general $\frac{n}{2}$ veces*ya que hay n sumandos, incluido el cero por lo tanto tenemos que el total es

$$T = \frac{n}{2} \text{ veces } (n-1) \text{ de donde } T = \frac{n}{2}(n-1) \text{ ó } T = \frac{n(n-1)}{2}$$

Con esto hemos llegado a obtener un modelo matemático que -- generaliza el problema original a cualquier número de participantes'

Probemos este modelo para algunos números

1.- $n = 1$

$$T = \frac{1(1-1)}{2} = 0 \text{ partidos}$$

2.- $n = 2$

$$T = \frac{2(2-1)}{2} = 1 \text{ partidos}$$

3.- $n = 3$

$$T = \frac{3(3-1)}{2} = 3 \text{ partidos}$$

4.- $n = 7$

$$T = \frac{7(7-1)}{2} = 21 \text{ partidos}$$

5.- $n = 10$

$$T = \frac{10(10-1)}{2} = 45 \text{ partidos}$$

6.- $n = 100$

$$T = \frac{100(100-1)}{2} = 4950 \text{ partidos}$$

* Aquí suponemos que n es par, en caso de que n sea non, simplemente se elimina al cero de la suma y tendríamos $\frac{n-1}{2}$ veces la suma de n . Es decir n+n+n+ . . . + n ($\frac{n-1}{2}$ veces), lo - que nos dá la misma fórmula $T = \frac{n(n-1)}{2}$.

Con esto hemos obtenido a partir de un problema sencillo, un modelo matemático que generaliza no sólo para cualquier número de jugadores de ajedréz, sino para cualquier juego o evento donde --- intervengan por parejas, jugadores o elementos en general, por -- ejemplo, Pin pon, futbol, tenis, o bien, saludos, abrazos, llamadas telefónicas etc.

Ejercicios

1.- En una reunión de celebración de"fin de año" hay 17 personas donde "todas abrazaron a todas". Es decir cada uno dará un abrazo a los demás ¿Cuál es el total de abrazos?

2.- En un torneo de futbol hay 15 equipos, cada uno jugará dos - juegos contra los otros (uno como local y otro como visitante) -- Calcula el total de partidos a lo largo del torneo.

3.- Haz una gráfica para el problema anterior pero solo con 5 -- equipos y cuenta las lineas que trazaste.

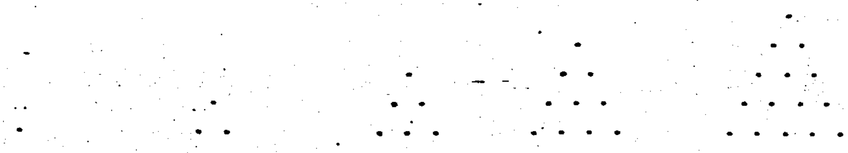
4.- Un sistema de telecomunicaciones consta de 18 satélites, si- todos estan comunicados entre sí ¿Cuántas lineas de comunicación- entre ellos hay en total?

5.- En un sistema hay 8 satélites y 5 estaciones terrenas. Si no existe comunicación entre los satélites, ni entre las estaciones- terrenas pero hay comunicación de cualquier satélite con cualquier estación ¿Cuántas lineas de comunicación hay en total?

6.- Generaliza el problema anterior para n satélites y m estaciones terrenas. Encuentra el modelo matemático.

7.- En una fiesta hay 12 muchachos y 14 muchachas. ¿Cuántas parejas de baile (hombre - mujer) diferentes se pueden formar en total?

8.- Considera los siguientes montones de puntos en forma triangu lar.



1 2 3 4 5 etc.

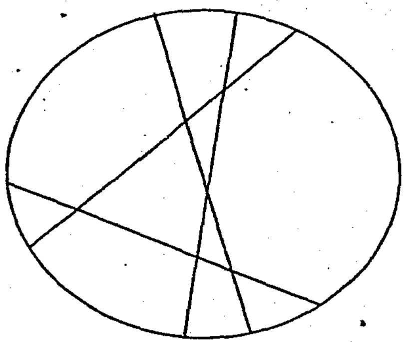
Donde cada número representa el total de puntos en la base - del triángulo. Cuenta el total de puntos en cada montón. Comple- ta la siguiente tabla y encuentra el modelo que generaliza para n puntos en la base

Puntos en la base	Total de puntos en el triángulo
1	
2	
3	
4	
5	
10	
20	
100	
n	

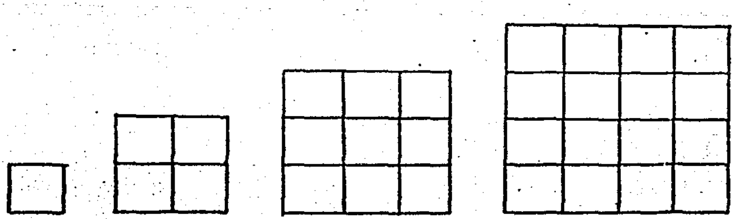
9.- Traza n cuerdas dentro de una circunferencia, donde cual- quiera de ellas corte a todas las demás, pero donde tres cuerdas- no pasen por el mismo punto. Obten una fórmula o modelo matemáti co que calcule el total de regiones ajenas que se forman dentro - de la cicunferencia, para las n cuerdas.

Puedes empezar con una cuerda y contando las regiones, después dos cuerdas, con tres, cuatro etc. hasta llegar a n cuerdas.

Por ejemplo para n= 4 cuerdas, tenemos 11 regiones ajenas-



10.- Considera las siguientes figuras, donde cada número representa el total de divisiones en cada lado del cuadrado.



1 2 3 4

Cuenta el total de cuadrados de todos tamaños en cada figura y completa la siguiente tabla. Formúla un modelo matemático para n

Divisiones por lado	Total de cuadrados en la figura
1	1
2	5
3	14
4	⋮
5	
6	
n	

PROBLEMA 2.

Una muchacha va a un pozo con tres recipientes cuyas capacidades son de 3, 5 y 8 litros respectivamente ¿Cómo puede obtener 4 litros exactamente?

Por principio debemos establecer lo siguiente:

a) Los recipientes no estan graduados, ni tiene marcas o señales, de tal forma que no podemos decir simplemente, llenamos el recipiente de 8 litros a "la mitad" y con esto se resuelve el problema.

b) No conocemos la forma de los recipientes, podrían ser cántaros o jarras de formas no regulares.

c) Cada recipiente completamente lleno tiene las capacidades antes indicadas.

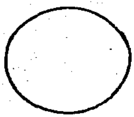
Una vez conocido lo anterior, lo primero que se nos ocurre es empezar a manipular los recipientes, llenandolos y vaciandolos unos con otros hasta obtener la cantidad deseada. Con esto estariamos empleando el método directo en la solución de éste problema.

Sin embargo deseamos emplear símbolos que representen los elementos importantes del problema, para tener un modelo simbólico o matemático de él.

Una forma de hacerlo es mediante las figuras.

△ = recipiente de tres litros.

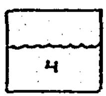
= recipiente de cinco litros



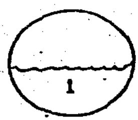
= recipiente de ocho litros

Además podemos indicar si cada recipiente está vacío, lleno o con alguna cantidad, empleando la simbología.

= El recipiente de 3 litros -- contiene 2 litros.

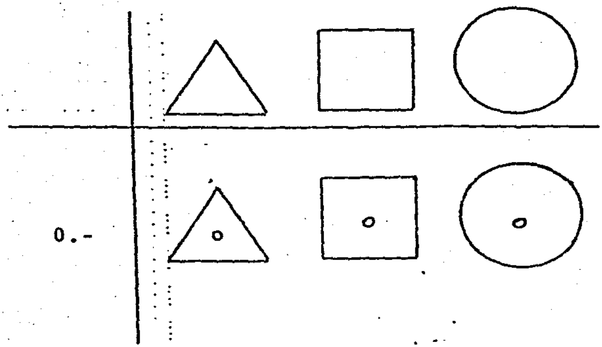


= El recipiente de 5 litros -- contiene 4 litros.



= El recipiente de 8 litros -- contiene 1 litro.

Con esto estamos en disposición de crear nuestro modelo de - la siguiente forma:

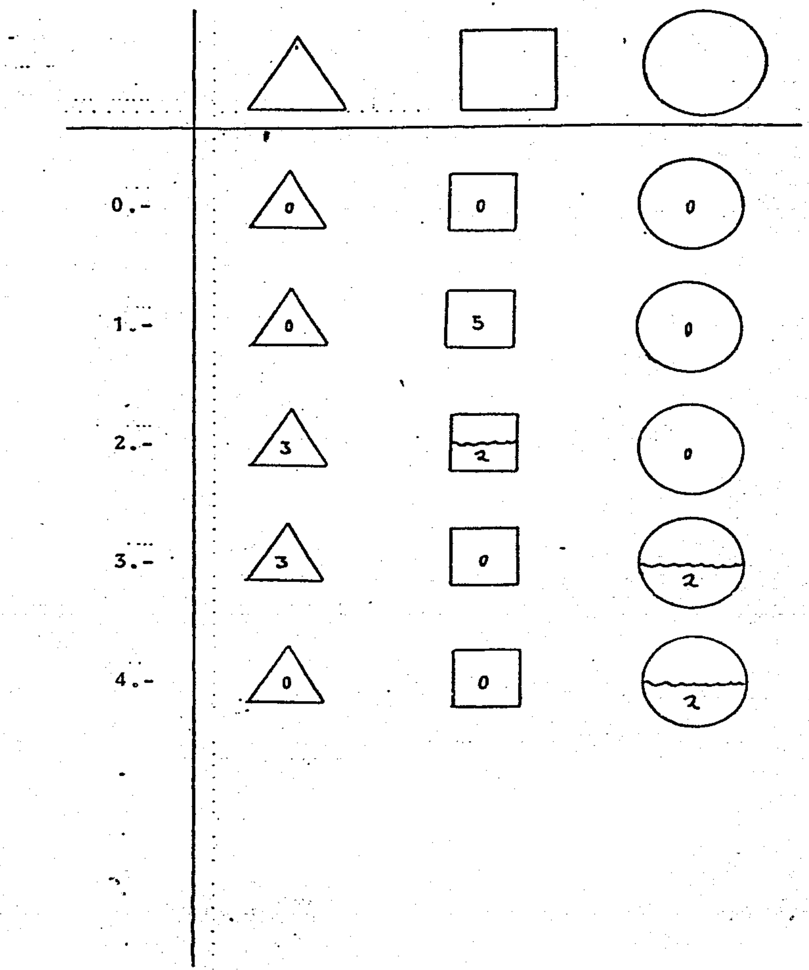


Con esta tabla se está simbolizando nuestro modelo, con el - cual podemos empezar a "trabajar", hasta llegar a la solución.

En el primer renglón de la tabla estan señalados los lugares que ocuparan cada recipiente, según nuestro modelo.

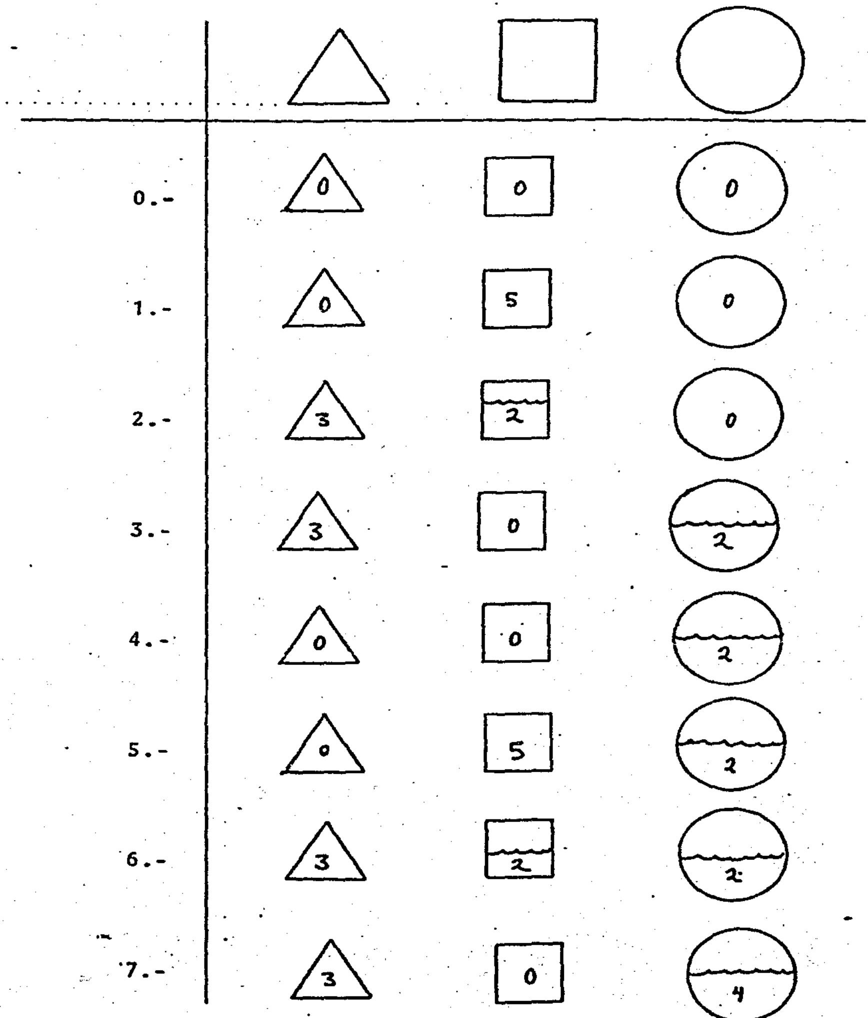
En el segundo renglón (indicado con el cero) representa que- cada recipiente está vacio, significa que es el inicio del pro-- blema, antes de empezar a manipular los recipientes, por lo cual- <u>no</u> hemos efectuado movimiento aún.

Tratando de resolver el problema procedemos de la forma -- siguiente:



Podemos observar de la lectura de la tabla anterior, que --- para el tercer renglón de la tabla (indicado con el número 1) --- hemos efectuado el primer paso o movimiento, llenando el recipiente de 5 litros □ . En el paso 2, vaciamos el agua del recipiente □ al recipiente △ , hasta llenarlo, quedando 2 litros en el recipiente □ , y así -- sucesivamente, hasta llegar al paso cuatro, en el que estan ---- vacios los recipientes △ y □ pero el recipiente ○ contiene 2 litros.

Continuando con ésta solución al problema, quedará finalmente así.



Solución que podemos leer paso a paso o, renglón por renglón, hasta verificar que efectivamente es una solución del problema.

Debemos mencionar que cada renglón es una frase u oración de nuestro lenguaje simbólico y representa un "estado" o "posición" y son dos renglones consecutivos los que "representan" un movimiento al deducir como de una posición se obtiene la otra.

Podemos hacer una simplificación del lenguaje anterior, cambiando los símbolos y eliminando otros, para hacer más operativa la escritura y la lectura del modelo, pero a la vez mas abstracta. Representamos ahora los recipientes por las letras.

A = recipiente de 3 litros

B = recipiente de 5 litros

C = recipiente de 8 litros

Con lo cual la solución dada anteriormente, quedará con este nuevo lenguaje más simplificada en la siguiente tabla.

	A	B	C
0.-	0	0	0
1.-	0	5	0
2.-	3	2	0
3.-	3	0	2
4.-	0	0	2
5.-	0	5	2
6.-	3	2	2
7.-	3	0	4

Surge sin embargo una duda ¿Será la única solución a éste problema? A la cual respondemos que no, ya que existen otras soluciones diferentes a la anterior, como son las siguientes.

	A	B	C
0.-	0	0	0
1.-	3	0	0
2.-	0	3	0
3.-	3	3	0
4.-	1	5	0
5.-	0	5	1
6.-	0	0	1
7.-	3	0	1
8.-	0	0	4

	A	B	C
0.-	0	0	0
1.-	0	0	8
2.-	3	0	8
3.-	0	3	8
4.-	0	5	6
5.-	3	2	6
6.-	3	0	6
7.-	0	3	6
8.-	0	5	4

Tenemos aún otra duda ¿Cuántas soluciones diferentes tiene éste problema? La respuesta es que, teóricamente existen infinidad de soluciones, para ello basta darse cuenta que podemos estar dando "pasos en falso" en alguna de las soluciones anteriores o repitiendo "cíclicamente" algunos de los pasos ya elaborados en la misma solución.

Supongamos ahora en este mismo problema, que la muchacha que va al pozo, al estar llenando y vaciando los recipientes, se le resbala uno y se rompe ("tanto va el cántaro al agua hasta que se rompe")

Nosotros no sabemos que recipiente se quebró, y nos surge una nueva duda ¿Se podrá resolver el problema con sólo dos recipientes? y de ser así ¿Cuáles deben ser estos? o lo que es lo mismo ¿Qué recipiente puede faltar?

Sólo vamos a señalar que se puede prescindir del recipiente de 8 litros, trasladando el resto del problema al estudiante.

Siguiendo la simbología anterior y con el mismo lenguaje, - donde sabemos que:

A = recipiente de 3 litros
B = recipiente de 5 litros

Y como el recipiente "C" de ocho litros no lo podemos ya -- ocupar tenemos que una solución es:

	A	B	C
0.-	0	0	0
1.-	0	5	0
2.-	3	2	0
3.-	0	2	0
4.-	2	0	0
5.-	2	5	0
6.-	3	4	0

Esto es equivalente a lo siguiente

	A	B
0.-	0	0
1.-	0	5
2.-	3	2
3.-	0	2
4.-	2	0
5.-	2	5
6.-	3	4

Observamos que ésta solución con solo dos recipientes, resulta ser mas corta a las anteriores.

E J E R C I C I O S

1.- Resuelve el problema de los recipientes de 3, 5 y 8 litros, - pero ahora utilizando solo dos de ellos; el de 3 litros y el de 8 litros.

2.- Resuelve nuevamente el problema anterior, pero ahora con los- recipientes de 5 y 8 litros.

3.- ¿Cómo puedes obtener 3 litros exáctamente, con dos recipien-- tes cuyas capacidades son de 5 y 7 litros?

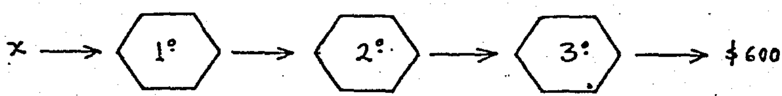
4.- Un repartidor de leche desea vender 3 litros, pero solo posee dos recipientes con capacidades de 2 y 7 litros ¿Cómo debe -- hacerle?

5.- Una balanza de platillos cuenta con dos pesas de 3 y 5 kg. -- respectivamente. De un costal de azúcar queremos obtener 4 - kg. exáctamente. Plantea un modelo simbólico y resuelve éste problema.

PROBLEMA 3.

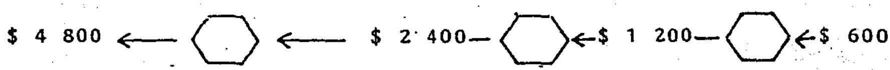
Un ama de casa va de compras a un tianguis. En el primer -- puesto gasta la mitad de lo que llevaba, en el segundo puesto -- gasta la mitad de lo que le quedó, ya para salir gastó la mitad- de lo que aún le restaba y regresó a casa con $ 600.00 ¿con ---- cuánto dinero llegó al tianguis?

Este problema se puede resolver de una manera muy simple, - haciendo una gráfica o representación geométrica que los simboli ce, de la forma.



Significa que entra al tianguis con X cantidad de dinero y - sale con $ 600.00.

Haciendo el recorrido inverso, ya que fué gastando la - mitad de lo que iba quedando, tenemos:



Ya que si pensamos que, si la señora se arrepiente de las -- compras y le regresan lo que pagó en cada puesto, se irá dupli-- cando la cantidad recibida. Por lo tanto X = $ 4 800, es la solución.

Aunque esta solución se basa en un análisis gráfico o geomé trico del problema, teniendo en cuenta las relaciones numéricas.

Existe otro camino o método para resolverlo, más directo y - estrictamente algebráico, esto es:

Entra al tianguis con la cantidad X

Gastó en el primer puesto $\frac{x}{2}$

Gastó en el segundo puesto $\frac{x}{2} \div 2 = \frac{x}{4}$

Gasto en el tercer puesto $\frac{x}{4} \div 2 = \frac{x}{8}$

Como la suma de lo gastado más lo que le sobró debe ser igual a lo que llevaba, tenemos:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 600 = X$$

Esto representa el modelo matemático que resuelve el proble ma. Observamos que este modelo es una ecuación de primer grado - o ecuación lineal con una sola variable, la cual ya debes saber - resolver ¡ Resuélvala !

Finalmente, una forma más simple que la anterior es considerar, no lo que gastó en cada puesto, sino lo que le quedó, teniendo lo siguiente:

Sale del primer puesto con $\frac{x}{2}$

Sale del segundo puesto con $\frac{x}{4}$

Sale del tercer puesto con $\frac{x}{8}$.

Pero como sabemos que del tercer puesto sale tambien del mercado, y le sobran \$ 600. Por lo tanto.

$$\frac{x}{8} = 600$$

La cual es una ecuación mucho más simple a la anterior ¡ Resuélvala para llegar a la solución !

Ejercicios

Encuentra un modelo matemático, gráfico o algebráico, y resuelve cada problema.

1.- Un obrero distribuye su sueldo diario de la manera siguiente. la mitad para comida, la cuarta parte para renta, la quinta-parte para luz y los últimos $ 900 para gastos varios ¿cuál- es su sueldo diario?

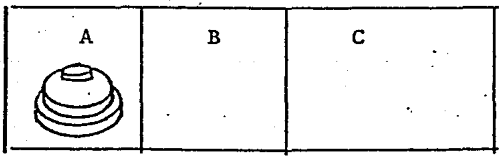
2.- Un número es igual al doble de sí mismo menos tres unidades- ¿Cuál es ese número?

3.- El doble de mi dinero más la tercera parte de éste mismo más $ 300 suman $ 17 800 ¿Cuánto dinero tengo?

4.- Un creyente, con cierta cantidad de dinero, entra a un templo donde hay tres santos "milagrosos"; se dirige al primero y le dice: "Si me duplicas mi dinero, te doy $ 2 000", el santo se lo concedió, dirigiendose al segundo y después al tercer santo, les propuso lo mismo, y tambien se lo concedieron, pero al salir del templo se dió cuenta que salió sin dinero ¿ Con cuánto entró al templo?

PROBLEMA 4

Tenemos tres monedas de diferentes tamaños, una encima de la otra de mayor a menor en el espacio A. Trata de pasar las monedas, una a una, a la posición C. Las monedas tambien pueden colocarse en B, con la restricción de que ninguna moneda mayor puede colocarse encima de una menor, ni tomar mas de una moneda a la vez. Puede hacerse en siete pasos o movimientos.



Analizando el problema observamos que las reglas o condiciones que él mismo establece son:

a) Cada paso o movimiento consite en llevar una sola moneda de un espacio (A, B ó C) a otro.

b) Al llevar una moneda a un espacio ocupado por otra, se debe colocar encima de la que ya estaba.

c) No se debe colocar una moneda mayor encima de otra menor.

d) No colocar monedas fuera de los espacios reservados A, B ó C.

Una vez establecido lo anterior nuestro modelo simbólico será:

	1 =	moneda chica
Símbolos	2 =	moneda mediana
	3 =	moneda grande

Modelo

	A	B	C
0.-	1 2 3		

Solución:

	A	B	C
0.-	1 2 3		
1.-	2 3		1
2.-	3	2	1
3.-	3	1 2	
4.-		1 2	3
5.-	1	2	3
6.-	1		2 3
7.-			1 2 3

Este modelo tiene la ventaja de leer renglón por renglón, los pasos efectuados y verificar si es correcta la solución.

Otro modelo más corto pero más abstracto es escribir la solución así:

1.- 1 a C
2.- 2 a B
3.- 1 a B
4.- 3 a C
5.- 1 a A
6.- 2 a C
7.- 1 a C

Debemos observar que el número mínimo de pasos o movimientos es de siete y no se puede hacer en menos. Pero si se puede ---- hacer en más de siete pasos, basta repetir pasos anteriores o -- regresarse.
Trata de resolverlo en más de siete pasos.

Ejercicios

1.- Resuelve el problema anterior, pero ahora con 4 monedas de - diferentes tamaños y con los mismos espacios y las mismas - condiciones. Puedes hacerlo primero en forma directa sacando tus monedas.

2.- Resuelve el problema, usando esta vez 5 monedas. Escribe la solución.

3.- ¿Cuál es el número mínimo de pasos para resolverlo con cuatro monedas?, con cinco?

4.- Se puede ver fácilmente que el mínimo de pasos para resolver el problema anterior, con una moneda, es de un paso; y que para dos monedas, el mínimo es de tres. Completa la - siguiente tabla observando la sucesión que se forma y ---- obten el modelo matemático o fórmula general para n monedas.

número de monedas	mínimo de pasos
0	0
1	1
2	3
3	7
4	
5	
6	
7	
8	
10	
n	

5.- Una caja de Petri contiene bacterias cuya población se duplica cada minuto. Si la caja se satura por la población en una hora. ¿En qué minuto las bacterias estan a la mitad de la saturación?

6.- Un comerciante vende lápices a $ 30 y decide vender cada lápiz a solo $ 10 con la condición de que el comprador al entregar los $ 10 no se le dá el lápiz de inmediato sino dos boletos, para que los venda a $ 10 cada uno y así recibir el lápiz a cambio del dinero de la venta de los boletos. Así que el comerciante realmente recibió $ 30 por --

cada lápiz, pero el comprador solo pagó $ 10 y la molestia de vender los boletos. Al que adquiría un boleto de estos tenia el derecho de ir con el comerciante y este le entregaba a cambio del boleto otros tres iguales, que al venderlos recibía $ 30, para ir por el lápiz y así le costaba -- realmente $ 10, que fué lo que pagó por su boleto. y así - sucesivamente.

Si el comerciante recibe $ 30 por cada lápiz, -- pero cada comprador solo paga $ 10 y la molestia de vender los boletos. ¿ De dónde sale el dinero?

7.- Si una persona te propone darte $ 100 000 diarios durante- 30 días a cambio de que el primer día le des un centavo, - el segundo día el doble o sea dos centavos; el tercer día- el doble o sea cuatro centavos; el cuarto día el doble o - sean ocho centavos y así sucesivamente hasta completar los 30 dias. ¿ Te conviente el trato?

En este capítulo hemos visto como a partir de una supuesta realidad o problemas emanados de ella, se llega a la construcción de modelos simbólicos que los representan, que además estos modelos deber ser manipulables u operables, para que utilizando ciertas reglas de transformación, que cada problema establece por -- sus propias características, podamos llegar por pasos sucesivos- a la solución de cada problema.

Hemos hecho tambien observaciones laterales a cada problema, como el caso de que falte o sobre tal o cual elemento, queriendo con esto dar mayor generalidad y profundidad a cada uno,- englobando con esto a un conjunto de problemas similares, que -- aparecen como problemas propuestos.

Finalmente debemos destacar que dentro del campo de las -- matemáticas existen fundamentalmente los modelos algebráicos y - los geométricos, habiendo empleado en algunos problemas ambos modelos. Señala en que problemas se empleo un modelo algebráico o modelo geométrico.

3. LENGUAJES

En la construcción y desarrollo de los modelos simbólicos que para cada problema hemos desarrollado, ha sido necesario utilizar símbolos, tales como letras A,B,C,...; números 1,2,3,...., signos +,-,x....; o garabatos en general #, ∼, →, ⬡, etc.

Símbolos que han servido para representar algún elemento del problema o bien alguna relación que guarden los elementos entre sí. Por ejemplo en el problema 1 utilizamos los símbolos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{100}$ para representar a cada jugador en el torneo de ajedréz.

Esto significa que en la elaboración de cada modelo simbólico que hagamos, necesariamente se están desarrollando, paralelamente a éste, un lenguaje simbólico. Lenguaje que utilizamos no solamente para poder escribir y desarrollar nuestro modelo simbólico, hasta obtener la solución deseada; sino básicamente para establecer comunicación con otras personas interesadas en la solución de dichos problemas, o simplemente para que nosotros podamos leer y repasar paso a paso lo desarrollado en la solución de cada problema.

Debemos establecer claramente que los lenguajes simbólicos surgen a partir de la <u>necesidad</u> que tenemos de comunicar a nuestros semejantes o a otros seres, lo que pensamos, creemos o hemos encontrado.

En el problema 2 del capítulo anterior hemos hecho uso de un lenguaje simbólico que para ese problema se ha desarrollado, en el transcurso de su solución. Empleamos los símbolos A,B y C para representar a cada recipiente con capacidades de 3,5 y 8 litros respectivamente, y utilizamos ternas o tercias de números como por ejemplo.

3, 2, 0
3, 0, 2
0, 0, 2

En donde la posición que ocupa cada número respecto a los demás indica el contenido de cada recipiente.

Este lenguaje simbólico tiene sus reglas de trasformación, que aunque no han sido establecidas formalmente, si han sido utilizadas.

Una de estas reglas es aquella que establece que el número de la izquierda en cada terna no puede ser mayor que 3, el de enmedio no mayor que 5 y el de la derecha no mayor a 8. Ya que sabemos que esto representa la capacidad de cada recipiente. Con esto sabemos que no es correcto escribir lo siguiente

4, 3, 6   6   3, 0, 9   etc.

Otra regla es la que establece que cualquier número puede pasar a ocupar otro lugar en la terna, en forma completa o des-componiendose en dos partes, siempre y cuando una parte complete a su "tope máximo" al otro número. Por ejemplo

0, 5, 6
3, 2, 6
3, 5, 3

Con lo cual es incorrecto escribir lo siguiente:

0, 5, 6
2, 3, 6

3.1 SINTAXIS Y SEMANTICA DE UN LENGUAJE

Todo lenguaje simbólico aspira a comunicar ciertos conocimientos, con toda claridad y precisión, libre de ambigüedades y confusiones. Esto significa que la escritura de dicho lenguaje debe ser lo mas correcta, exacta y precisa que sea posible, y esto es précisamente lo que llamamos sintáxis de un lenguaje. Es decir:

La sintáxis es el conjunto de reglas y procedimientos para escribir correctamente un lenguaje.

Por medio de la sintáxis nos damos cuenta si cualquier expresión esta bien escrita, o si es correcto pasar de una expresión a otra.

En la construcción de los lenguajes formales existen reglas que establecen como construir expresiones "bien formadas" a partir de ciertos elementos "primitivos" (símbolos utilizados) y como pasar de expresiones bien formadas a otras expresiones bien formadas, mediante la aplicación de reglas de transformación.

Todo este conjunto de reglas y procedimientos constituye la sintáxis del lenguaje. Por ejemplo en el lenguaje del álgebra elemental es válido pasar de la expresión a la expresión:

$$3x - 5 = 2x + 1$$
$$3x - 2x = 5 + 1$$

Pero no es correcto pasar de la expresión a la expresión:

$$\frac{3x}{2} + 1 = x$$

$$3x + 1 = 2x$$

Ahora bien las expresiones bien formadas de cualquier lenguaje simbólico, deben tener un significado o interpretación en la realidad.

Podemos leer una cadena o lista de expresiones de un lenguaje simbólico, verificando que esten bien escritas y cumplan con todas las reglas del lenguaje, pero resultaría muy árido o abstracto si no le damos un significado real o una interpretación dentro de la realidad.

Es precisamente el significado que le damos a las expresiones en cada lenguaje, lo que llamamos semántica del lenguaje.

Sin embargo debemos tener presente que cualquier expresión en un lenguaje simbólico, puede tener distintas interpretaciones en la realidad. Por ejemplo la expresión:

$$2x^2 + 1 = 10$$

Puede corresponder a muchos problemas o situaciones reales- que conduzcan a ella.

Esto es debido a la generalidad de los modelos simbólicos, que una vez representado un problema, puede servir para represen tar muchos otros que sean análogos a él.

Debemos destacar que dos problemas que puedan conducir al - mismo modelo, son iguales en cuanto a su modelo simbólico y en - cuanto al lenguaje que se desarrolle para resolverlo, pero esto- no significa que los problemas sean tambien iguales. De hecho -- pueden ser problemas muy distintos en la realidad y simplemente- iguales en la abstracción, a lo mas que podemos atrevernos a ase gurar de dichos problemas es que son equivalentes. Estableciendo con esto que pertenecen a la clase de problemas que tienen en -- común su modelo simbólico.

Problema:

Analicemos el siguiente lenguaje:

Símbolos : A,I,O,M,D,R

Expresiones: Una expresión bien formada es una sucesión de solo cuatro simbolos, que se pueden repetir.

Regla de transformación: Consiste en cambiar un y solo un - símbolo por cualquier otro. .

Escribir una lista o cadena de expresiones bien formadas -- para pasar de la expresión AMOR a la expresión ODIO.

Antes de resolver este problema, vemos que algunas expresiones bien formadas son:

M O D A

A R A M

A A R A

M M M M

Pero sin embargo las siguientes expresiones <u>no</u> estan bien - formadas

R A M I R O

M I O

R O S A

Como la regla de transformación permite pasar de una expre- sión a otra cambiando solo un símbolo la respuesta al problema - es:

A M O R

O M O R

O D O R

O D I R

O D I O

Debemos señalar que no es la única respuesta, sino que hay otros caminos o respuestas como la siguiente

A M O R

A M O O

A M I O

A D I O

O D I O

¿Cuántos caminos diferentes hay?

El anterior problema es sólo un ejemplo muy sencillo de lo que puede ser un lenguaje simbólico (desde el punto de vista formal y abstracto). Esto no significa que todos los lenguajes simbólicos son así de sencillos y limitados, ya que tenemos por --- ejemplo el lenguaje de la Química o del Algebra que son complejos, versátiles y que se nutren con la misma realidad.

Por último debemos señalar que en éste lenguaje simbólico - solo manejamos la sintáxis del mismo independientemente de su -- semántica, es decir, la interpretación que se le quiera dar.

E J E R C I C I O S

1.- Señala los símbolos utilizados en cada problema del capítulo 2.

2.- Escribe dos reglas para formar expresiones bien formadas -- del problema 4 en el capítulo 2.

3.- Escribe dos expresiones <u>mal</u> formadas de cada problema del - capítulo 2.

4.- Consideremos el siguiente lenguaje:

Símbolos: a,b,c

Expresiones: Una expresión bien formada es una sucesión de símbolos tal que:

1.- Todos los símbolos aparecen en élla.

2.- Ningún símbolo aparece mas de una vez.

Regla de transformación: consiste en permutar o cambiar el orden de dos símbolos, siempre y cuando esten uno seguido - de otro (adyacentes).

i) Escribe todas las expresiones bien formadas de este -- lenguaje.

ii) Escribe una lista o cadena de expresiones bien forma-- das para pasar de la expresion abc a la expresión cba

5.- Lo mismo que el problema 4 pero ahora los símbolos son: a,b,c,d . Escribir una cadena de expresiones bien formadas para pasar de la expresión abcd a la expresión dcba.

6.- Considerando el problema de la sección 3.1 cuyos símbolos -- son A,I,O,M,D,R. Encuentra una lista o cadena de expresiones para pasar de la expresión ROMA a la expresión MIDO.

El anterior problema es sólo un ejemplo muy sencillo de lo que puede ser un lenguaje simbólico (desde el punto de vista formal y abstracto). Esto no significa que todos los lenguajes simbólicos son así de sencillos y limitados, ya que tenemos por ejemplo el lenguaje de la Química o del Algebra que son complejos, versátiles y que se nutren con la misma realidad.

Por último debemos señalar que en éste lenguaje simbólico solo manejamos la sintáxis del mismo independientemente de su semántica, es decir, la interpretación que se le quiera dar.

E J E R C I C I O S

1.- Señala los símbolos utilizados en cada problema del capítulo 2.

2.- Escribe dos reglas para formar expresiones bien formadas -- del problema 4 en el capítulo 2.

3.- Escribe dos expresiones mal formadas de cada problema del - capítulo 2.

4.- Consideremos el siguiente lenguaje:

Símbolos: a,b,c

Expresiones: Una expresión bien formada es una sucesión de símbolos tal que:

1.- Todos los símbolos aparecen en élla.

2.- Ningún símbolo aparece mas de una vez.

Regla de transformación: consiste en permutar o cambiar el orden de dos símbolos, siempre y cuando esten uno seguido - de otro (adyacentes).

i) Escribe todas las expresiones bien formadas de este -- lenguaje.

ii) Escribe una lista o cadena de expresiones bien forma-- das para pasar de la expresion abc a la expresión cba

5.- Lo mismo que el problema 4 pero ahora los símbolos son: a,b,c,d . Escribir una cadena de expresiones bien formadas para pasar de la expresión abcd a la expresión dcba.

6.- Considerando el problema de la sección 3.1 cuyos símbolos -- son A,I,O,M,D,R. Encuentra una lista o cadena de expresiones para pasar de la expresión ROMA a la expresión MIDO.

7.- ¿ Cuántas expresiones bien formadas se pueden escribir con los símbolos del problema de la sección 3.1 ? No las escribas todas solo calcula cuántas son.

Sugerencia:

Supón que para los símbolos A,I,O,M,D,R . Cada expresión -- bien formada consta primero de un solo símbolo. Luego supón que cada expresión consta de solo dos símbolos y cuenta --- todas las expresiones diferentes, y así generaliza para los cuatro símbolos.

4.- LENGUAJE SIMBÓLICO DE LA LÓGICA.

En los capítulos anteriores vimos los modelos simbólicos y a los lenguajes que dan origen. Analizamos también, como a partir de problemas extraidos de la realidad, mediante un proceso de abstracción, obtuvimos sus modelos matemáticos simbólicos.

Tambien observamos que se desarrollaba paralelamente al modelo, un lenguaje simbólico que lo representaba, y a partir de la manipulación de los símbolos llegabamos a la solución del problema. Esta manipulación simbólica se hizo en función de reglas que cada problema establecía. Básicamente para construir un modelo matemático se debe contar con lo siguiente:

a) Seleccionar los símbolos adecuados y convenientes que den una representación clara y sencilla de cada uno de los elementos y relaciones importantes del problema.

b) Contar con la posibilidad de señalar claramente las reglas para formar las expresiones bien formadas del modelo, así como las reglas de transformación de dichas expresiones.

Esto significa que para poder llegar a la solución de un problema, mediante un modelo matemático, se necesita presentar al modelo simbólico de forma clara y lo más objetiva posible, de tal manera que se pueda entender sin confusiones o ambiguedades, se puedan operar los símbolos que lo componen, mediante las reglas de transformación hasta llegar a la solución que se busca.

Además se debe seguir paso a paso (se puede leer) sin confusiones cada una de las expresiones que conducen a la solución del problema.

En muchos problemas, no es fácil lograr lo anterior, pues resulta difícil determinar los elementos importantes del problema.

En segundo término, una vez encontrados dichos elementos y - símbolos adecuados para representarlo, debemos verificar que nues tro modelo, está libre de ambiguedades, de tal forma que al comunicar nuestra solución a cualquier persona, entienda exactamente lo que queremos decir y no otra cosa, o simplemente se confunda - en algunos detalles.

Surge ahora un problema ¿ cómo desarrollar lo anterior o mediante que medios se pueden evitar estas confusiones?

4.1.- LOS LENGUAJES NATURALES.

Dentro de la naturaleza existen una gran variedad de seres - vivos, de distintas clases y especies, que no viven aislados unos de otros, sino que todos estan en íntimas relaciones de equilibrio, como se demuestra en Biología. (A menos que se rompa dicho equilibrio y sobrevengan las catástrofes ecológicas).

En consecuencia cada ser vivo tiene muchas clases de relaciones desde que nace, hasta que muere. Estas relaciones son de muy variados tipos. Además el número de relaciones de cada especie - va en aumento en razón directa a su grado de desarrollo evolutivo, por ejemplo:

Los animales tienen mas relaciones que las plantas; el hombre tiene mas relaciones que los demás animales.

En virtud de esto se puede asegurar que en cada relación --- existe una forma de comunicación entre dos o mas seres. Por ejemplo cuando algún animal nace, inmediatamente establece comunicación con su madre y viceversa; es decir; su madre con él. Decimos que esta comunicación es de los mas natural. Tal comunicación se reduce a querer satisfacer sus necesidades mas inmediatas, --- como, alimentación, cariño, afecto, protección etc.

A medida que crece y se desarrolla, su necesidad de comunicación tambien crece en función de que va conociendo nuevas formas de vida.

De ésto se deduce que la comunicación nace a partir, de las relaciones entre los seres, y mas aún, por la necesidad de mantener dichas relaciones.

En general se llama lenguaje al medio o camino, para establecer cualquier tipo de comunicación, y, para cada tipo de comunicación debe existir un lenguaje adecuado a ella.

Los seres vivos para comunicarse poseen sus propios lengua-- jes, lenguajes que la naturaleza ha creado, ya que los animales - que viven en sociedad elaboran sus propios elementos de signaliza ción (signos), para comunicarse entre sí; signos que pueden ser - de carácter fónico (sonidos) o mímico (señas o ademanes) o ambos.

Estos tipos de lenguajes son de caracter natural y les llama mos Lenguajes Naturales. Pero a medida que las sociedades se --- vuelven mas complejas, su comunicación debe ser mas precisa y se- deben desarrollar a la par lenguajes mas claros y complejos.

4.2.- LOS LENGUAJES HUMANOS.

Las distintas clases de sociedades humanas poseen lenguajes- propios, para satisfacer sus necesidades de comunicación.

Mas aún el hombre crea medios o lenguajes para establecer -- comunicación, con otras especies vivientes, o incluso inventa los lenguajes para comunicarse con las máquinas, que el mismo produce (calculadoras, computadoras, etc.). Tenemos por ejemplo, que la - mas avanzada tecnología, ha creado los medios más adecuados para- establecer comunicación con los satélites que navegan al rededor- de la tierra, o en el espacio exterior.

En la medida que el hombre avanza en el conocimiento científico y en su tecnología, se ve en la necesidad de reforzar, ampliar o mejorar sus medios de comunicación y así poder diversificar sus lenguajes, de tal manera que pueda comprender y comunicar a sus - semejantes lo que va creando y descubriendo.

El hombre moderno posee distintos lenguajes (Idiomas, dialectos, lenguajes simbólicos etc). El lenguaje está intimamente relacionado con el pensamiento, así el hombre hace uso de éste para - comunicar sus ideas o pensamientos, ya sea de forma oral o escrita.

Si alguna persona dice:

"Tengo hambre", "Tengo frio" ó "Me siento mal". Está tratando de comunicar una sensación de malestar que le aqueja; pero si la persona dice:

"Los árboles producen oxígeno". Está comunicando un pensamiento, respecto a su conocimiento de la realidad. Además sabemos que esta afirmación (que puede ser falsa o verdadera) está -- enmarcada dentro de un lenguaje que posee una sintáxis y una ---- semántica con lo cual suponemos la frase es clara y libre de ambiguedades.

4.3.- Necesidad de un Lenguaje Formal.

Es común que en la utilización de cualquier lenguaje común, para comunicar nuestras ideas o pensamientos, existen palabras o frases, en las cuales no se entiende claramente lo que se afirma o la información recibida es confusa para el que escucha, por ejemplo la frase:

"Fué una reunión muy agradable"

Tiene un significado de carácter subjetivo (depende del sujeto) y por lo tanto es poco claro lo que se desea comunicar, ya que lo que para una persona es agradable, para otra puede ser terriblemente aburrido. En este caso decimos que la idea de "agradable" es ambigua, ya que puede tener más de un significado.

Pero no solo existen ideas o conceptos ambiguos, tambien hay frases con significado poco preciso por ejemplo cuando alguien afirma:

" No se nada "

Está queriendo decir o comunicar que nada sabe, que es lo contrario de la frase anterior. Ya que si analizamos con detenimiento la frase, "No saber nada" significa "Saber algo". Simplemente "No conozco nada" es diferente a "Conozco nada", que son equivalentes a las frases anteriores cambiando el verbo saber por el verbo conocer.
Análogamente "No tener ningún centavo" es distinto a "Tener ningún centavo" aunque es común confundirlas.

Aunque debemos señalar que los usos y costumbres que el propio lenguaje impone al través del tiempo hace que se acepte a tal o cual frase con un significado, que muchas veces es lo contrario.

Hay otro tipo de frases cuyo significado o mensaje aparentemente claro y preciso, nos conducen a impresiciones en cuanto a ser falsas o verdaderas. A tales frase les llamamos Paradojas.

Por ejemplo la paradoja del mentiroso:

Supongamos que una persona que siempre dice falsedades al -- cual le llamamos mentiroso, afirma lo siguiente:

"Yo soy un mentiroso"

¿Cómo es esta frase falsa o verdadera? Analicemos ambos casos.

Si es falsa, no sería mentiroso con lo cual la afirmación -- tendría que ser verdadera.

Si es verdadera, dice la verdad y por lo tanto miente, con - lo cual sería falsa.

En ambos casos nos conduce a una contradicción, con lo cual- aseguramos que la frase no es ni falsa ni verdadera.

Existen muchas paradojas, frases ambiguas, e ideas confusas- dentro del lenguaje común que utilizamos a diario, esto conduce a veces a dificultades en la comunicación, es por esto que debemos- ser precisos y cuidadosos al comunicar nuestras ideas y pensamientos.

4.4.- La Lógica como un Lenguaje Formal.

Sabemos que hay distintas especies de animales que crean sus propios medios de signalización para comunicarse entre ellos. El hombre tambien ha creado idiomas y lenguajes para llevar a cabo ésta comunicación. Comunicación que muchas veces se ve distorsionada, ya por informalidad del lenguaje, ya por falta de precisión de éste mismo, por lo cual es necesario crear un lenguaje formal, libre de ambiguedades y confusiones (en la medida de lo posible).

La lógica en este caso y en especial la lógica simbólica (que es una abstracción de la lógica formal mediante el uso de símbolos) nos ayuda en nuestros procesos de razonamiento y sistematiza tales procesos. De esta forma y con la ayuda de ella tratamos de evitar lo mas posible, los errores en el razonamiento y las ambiguedades o confusiones en la comunicación.

Así podemos asegurar que el lenguaje formal de la lógica es un "lenguaje simbólico" con sus símbolos y reglas de transformación. Así como su sintáxis y su semántica, como ya vimos en el capítulo tres, que todo lenguaje simbólico debe poseer.

Iniciemos el estudio de este lenguaje simbólico de la lógica con un problema.

Supongamos que un compañero de nuestro salón al que solo conocemos de vista, hace el siguiente razonamiento.

"Estudio medicina o Administración de empresas. Si estudio medicina, seré felíz. Si gano dinero, no seré felíz, pero quiero ganar dinero por lo tanto tendré que estudiar Administración de empresas".

Con base en este conjunto de afirmaciones que hace este muchacho y solo con base en ello, deseamos determinar si su razonamiento es correcto.

Para lo cual necesitamos hacer un estudio, sistemático y detallado del problema, para poder comprobar si su conclusión es -- correcta o si hay otras conclusiones. Mas aún queremos ampliar el estudio a cualquier problema de este tipo, con lo cual iniciaremos por entender que es una proposición.

4.4.1.- Proposiciones Lógicas.

En cualquier lenguaje hay varios tipos de frases:

Interrogativas —— son todas las preguntas, expresan una duda

Imperativas —— son órdenes, expresan un mandato

Exclamativas —— expresan estados de ánimo

Declarativas —— afirman o niegan algo de alguien

Analizando el problema anterior observamos que hay frases u oraciones en este caso declarativas, que se repiten, como las siguientes:

a) Estudio Medicina

b) Estudio Administración de empresas

c) Seré felíz

d) Gano dinero

Las cuales son proposiciones lógicas. En general tenemos:
<u>Definición</u>: Una proposición lógica es una frase u oración declarativa la cual es falsa o verdadera, pero no ambas a la vez.

Por lo cual como ya se dijo, las frases anteriores son proposiciones lógicas.

Veamos otros ejemplos de proposiciones lógicas.

1.- El problema ecológico del Valle de México es soluble.

2.- La tierra es del que la trabaja y la habitación es de quien la habita.

3.- La biblioteca tiene un acervo de libros que solo se utiliza en un veinte por ciento.

4.- Si el exámen es difícil, entonces difícilmente lo pasaré.

5.- La actividad académica en la UNAM está por encima de toda actividad política.

En cambio las frases siguientes no son proposiciones lógicas.

1.- El caballo blanco de Napoleón

2.- El arbolito roto en el camellón

3.- ¡ Viva México !

4.- Debes estudiar, para superarte.

5.- El doble de un número más la mitad de otro número.

Ya que ninguna de estas frases cumple con la definición.

Ejercicios

I.- Señala de las frases siguientes las que sean proposiciones.

1.- La lejana estrella azul del firmamento

2.- $3 + 5 = 9$

3.- ¡ Tierra y Libertad !

4.- ¿ A qué hora vas por el pan ?

5.- $5(6-2) = (3+2)4$

6.- $(7+5) \div (6-1)$

7.- El rio Rhin cruza Londres

8.- ¡ No destruyas el medio ambiente !

9.- La salud no es gratuita

10.- ¿ Me quieres o no me quieres, y para que me quieres?

II.- Escribe tres frases que sean proposiciones lógicas y - tres frases que no lo sean.

III.- ¿ Son las paradojas proposiciones lógicas? ¿Por qué?

4.4.2.- CONECTIVOS LÓGICOS O TÉRMINOS DE ENLACE

Observemos las proposiciones lógicas siguientes

1.- No destruiré a la naturaleza.
2.- Me prepararé académicamente y podré ser útil a la sociedad
3.- Se dan alternativas viables o el caos nos consumirá
4.- Si no tengo conciencia, entonces cometeré muchos errores
5.- Yo vivo sano si y solo si hago deporte

Podemos ver en cada una de ellas que hay palabras clave, o términos que enlazan, conectan o unen a dos proposiciones a excepción de la primera que solo niega a una proposición. Pero por ejemplo en la número cinco tenemos las proposiciones:

Vivo sano
Hago deporte

Unidas, enlazadas o conectadas por los términos "Si y solo si". En las demás proposiciones destacamos a los términos

No
Y
O
Si..., entonces...
Si y solo si

A los cuales les llamaremos conectivos lógicos o términos de enlace. Por ejemplo con las proposiciones lógicas

Yo estudio
Yo trabajo

Se pueden utilizar para formar otras proposiciones como:

Yo no estudio
Si no estudio, entonces trabajo
Estudio o trabajo
Estudio si y solo si trabajo

Cada una de estas últimas proposiciones tiene su propio significado.

Mas aún, existen muchas proposiciones con varios conectivos lógicos como por ejemplo la proposición:

"Si estudio y persevero, entonces triunfaré o seré buen profesionista"

Está compuesta de varios conectivos lógicos ¡Dí cuales son!

Es común en el lenguaje ordinario, utilizar palabras equivalentes o sinónimos a los conectivos mencionados por ejemplo:

"Voy al cine y salgo tarde" . . . es igual a:

"Voy al cine pero salgo tarde"

O bien la condicional'

"Si n es par, entonces n es múltiplo de 2"...es igual a:

"Si n es par, es múltiplo de 2"

"Cuando n es par, es múltiplo de 2"

"n es múltiplo de 2, si n es par" etc.

4.4.3.- PROPOSICIONES SIMPLES Y PROPOSICIONES COMPUESTAS.

<u>Definición</u>: Se llama proposición simple a aquella proposición lógica que <u>no</u> tiene conectivos lógicos.

Ejemplos de proposiciones simples

1.- El cinco es mayor que cero
2.- $2 + 5 = 7$
3.- El area de un rectángulo es base por altura.
4.- x es un múltiplo de y
5.- La lejana estrella azul del firmamento pertenece a la vía láctea.

<u>Definición</u>: Proposición compuesta es aquella proposición lógica que tiene uno o más conectivos lógicos.

Ejemplos de proposiciones compuestas.

1.- Hoy no hace calor.
2.- Si llueve o hace frío, entonces me mojo o me resfrío.
3.- Terminaré pronto si y solo si me ayudan o no estorban.
4.- Si no me pagan, entonces no trabajo.
5.- $2x-4>0$ siempre y cuando $x>2$ ($>$ es "mayor que")

Ejercicios

I.- De las siguientes proposiciones señala que conectivos utilizan.

1.- Si estudio y trabajo, entonces aprenderé o ganaré dinero.
2.- Haré la tarea y veré el futbol si y solo si no me molestan.
3.- Si llueve, habrá cosecha, pero si no llueve, no habrá maíz.
4.- Si x es mayor o igual a cero, x es no negativo.
5.- Cuando corro, me canso.

II.- Separa las proposiciones simples y las compuestas.

1.- Pierdo el tiempo u obtengo conocimientos.
2.- Luis y Lupe se aman.
3.- La degradación del medio ambiente es consecuencia de la ignorancia de los habitantes.
4.- El análisis de cualquier fenómeno, ya sea, Social, Físico Químico o Biológico debe ser objetivo.
5.- La realidad es dura, pero seguiré el camino.
6.- Si analizo lo que aprendo, comprenderé mas lo que sé.
7.- $3x - 12 = 3$, cuando $x = 3$
8.- Gano dinero e invierto en libros.
9.- $x = 0$ ó $x = 1$, si $x^2 = x$
10.- Blanco y negro
11.- $2(3+5) \div 4 = 3 + 2$

12.- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

13.- $3(x+y)=3$, si $x=0$ y $y=1$

14.- $x^2 > 1$, cuando x es número entero.

4.5.- SIMBOLIZACIÓN DE PROPOSICIONES.

Emplearemos letras mayúsculas del alfabeto español para representar a las proposiciones lógicas ya sean simples o compuestas.

Ejemplos.

A= El mar de Cortés pertenece a México.
B= Si salgo tarde, entonces no me esperaran.
C= Ayer no estudié y mañana tengo exámen.

Donde las letras A,B y C simbolizan a las proposiciones -- arriba citadas, de las cuales A es simple y B,C son compuestas.

Tambien emplearemos letras minúsculas, para simbolizar solamente proposiciones simples.

Ejemplos

a= Pedro tiene 16 años.
b= México es país Americano.
c= $16 > 15$

Debemos destacar que siempre que utilicemos una letra minúscula para simbolizar una proposición, estamos seguros que esta es proposición simple. Sin embargo al emplear una letra mayúscula,- para simbolizar una proposicón, no interesa si es simple o compuesta y solo nos importa que sea proposición lógica.

4.5.1.- SIMBOLIZACIÓN DE CONECTIVOS LÓGICOS.

Los concectivos lógicos, como ya sabemos son:

NO, Y, O, Si...Entonces, y Si y solo Si. A los que simbolizamos así:

Conectivo		Símbolo
NO	————————	$\sim$
Y	————————	$\wedge$
O	————————	$\vee$
Si...Entonces	————————	$\rightarrow$
Si y solo si	————————	$\leftrightarrow$

Estos conectivos como ya sabemos sirven para formar nuevas proposiciones a partir de las ya conocidas, por ejemplo con las proposiciones simples.

a= Llueve en primavera
b= Florece el campo
c= Crece la milpa

Podemos formar las proposiciones compuestas.

1.- $\sim a$

2.- $\sim b \wedge \sim c$

3.- $a \wedge b \rightarrow c$

4.- $\sim c \rightarrow \sim a \vee \sim b$

5.- $\sim (a \wedge \sim b)$

Estas proposiciones, las podemos leer simbólicamente como:

1.- No.a

2.- No b y no c

3.- Si a y b, entonces c

4.- Si no c, entonces no a o no b

5.- No sucede que, a y no b

Las cuales en el lenguaje habitual significan.

1.- No llueve en primavera.

2.- No florece el campo y no crece la milpa.

3.- Si llueve en primavera y florece el campo, crece la milpa.

4.- Si no crece la milpa, entonces no llueve en primavera o no florece el campo.

5.- No sucede que, llueve en primavera y no florece el campo.

Veamos otro ejemplo de simbolización, pero ahora a la inversa. Es decir dada una proposición compuesta, simbolizarla, empleando los conectivos y las proposiciones simples que la forman.

Sean las proposiciones compuestas.

1.- Mañana no voy al campo.

2.- Mañana voy al campo y monto a caballo.

3.- Voy al campo o asisto a la fiesta.

4.- Si mañana voy al campo y monto a caballo, entonces no asisto a la fiesta, o, si mañana no voy al campo, entonces asisto a la fiesta.

Primero simbolizamos a las proposiciones simples que las componen, a saber:

p= Mañana voy al campo.

q= Monto a caballo.

r= Asisto a la fiesta.

En seguida procedemos a simbolizar cada proposición compuesta, quedando:

1.- $\sim p$

2.- $p \wedge q$

3.- $p \vee r$

4.- $(p \wedge q \rightarrow \sim r) \vee (\sim p \rightarrow r)$

Observamos que al simbolizar la proposición 4, utilizamos paréntesis para separar, ya que el conectivo, "o", es el que une o "liga" a toda la proposición. Es el "conectivo principal" de esta proposición.

Sin embargo no se ha definido al conectivo principal.

Vemos que existe un orden, jerarquía o prioridad de un conectivo sobre otro, en una misma proposición.

El orden o jerarquía de menor a mayor es.

1º No

2º Y, O

3º Si, entonces

4º Si y solo si

Esto significa que el conectivo "NO" que es el de menor jerarquía, solo afecta o alcanza a la proposición que niega, por ejemplo.

$\sim p \wedge q$ solo niega a p. A q ya no le afecta la negación.

En cambio el conectivo "Si y solo si" que tiene la mayor jerarquía, alcanza a conectar a toda la proposición, por ejemplo la proposición:

$$\sim p \wedge q \rightarrow s \leftrightarrow \sim q \vee \sim s$$

Está formada, o conectada por las proposiciones

$$\sim p \wedge q \rightarrow s$$

$$\sim q \vee \sim s$$

Unidas por el conectivo si y solo si. De esta forma el conectivo principal es el que le da significado a toda la proposición. Es decir es el conectivo con mayor jerarquía. Ejemplos:

1.- $\sim p \vee \sim q$ ———————— conectivo principal "o"

2.- $p \rightarrow \sim p \vee s$ ———————— conectivo principal "Si..entonces

3.- $p \rightarrow \sim q \wedge t \leftrightarrow m$ ———— conectivo principal "Si y solo si

4.- $\sim (p \wedge q)$ ———————— conectivo principal "No"

Ejercicios

I.- Escribe el significado en lenguaje común de cada proposición compuesta donde:

p = Hoy es domingo.

q = Paseo en bicicleta.

r = Voy con mi novia.

1.- $\sim p$

2.- $\sim q$

3.- $\sim p \wedge \sim q$

4.- $\sim p \wedge \sim q \longrightarrow \sim r$

5.- $p \longleftrightarrow q \wedge r$

6.- $\sim q \vee \sim r \longrightarrow \sim p$

7.- $\sim (p \wedge q)$

8.- $(p \rightarrow q) \vee (\sim p \rightarrow r)$

9.- $\sim r \longrightarrow q$

10.- $\sim (r \longrightarrow \sim p)$

II.- Simboliza cada proposición, empleando las proposiciones simples que la componen.

1.- Voy al cine o voy al teatro.

2.- Si estudio Física, no estudio matemáticas, ó, si no estudio Física, entonces estudio matemáticas.

3.- Si $x=3$ y $y=4$, entonces $x+y= 7$ ó $xy= 12$

4.- Es animal racional si y sólo si es ser humano.

5.- Si es año bisiesto, entonces Febrero tiene 29 dias, y si -- febrero no tiene 29 dias, entonces no es bisiesto.

4.6.- TIPOS DE PROPOSICIONES COMPUESTAS.

Las proposiciones compuestas se pueden dividir o clasificar en cinco clases diferentes.

Negación, Conjunción, Disyunción, Condicional y Bicondicional según sea el conectivo principal que utilizen, que puede ser respectivamente, No, y, O, Si... entonces, si y solo si.

4.6.1- NEGACIÓN DE UNA PROPOSICION.

Cualquier proposición se puede negar, no importante si es simple o compuesta, basta anteponer el conectivo No a la proposición. Simbólicamente tenemos:

$\sim P$ es la negación de P.

$\sim P$ se puede leer simbólicamente de varias formas equivalentes

No P

No sucede P

No ocurre P

No es cierto que P

Por ejemplo las proposiciones.

1.- Juan y María se aman.

2.- La luna no es planeta.

Se pueden negar así:

1.- No sucede que Juan y María se amen.

2.- No es cierto que la luna no es planeta.

Pero tambien se pueden negar mas explícitamente.

1.- Juan y María no se aman.

2.- La luna es un planeta.

Debemos destacar que para negar la proposición:

"El elevador sube"

Utilizamos solo las formas ya mencionadas anteriormente y no creer que al decir:

"El elevador baja"

Ya con esto la negamos, porque la negación correcta debe ser

"El elevador no sube"

Lo que significa que o bien baja o está quieto.

Ejercicios

Niega <u>explícitamente</u> cada proposición

1.- La tarea esta bien hecha.

2.- El pizarrón no es blanco.

3.- Este número es positivo.

4.- Pedro sube la escalera.

5.- Carmen apaga la luz.

6.- Gabriela desconecta la cafetera.

7.- El semestre dura hasta que se acaba.

8.- El siete es menor que nueve.

4.6.2.- CONJUNCIÓN DE PROPOSICIONES.

A la unión de dos proposiciones con el conectivo "y" se le llama conjunción de proposiciones. Simbólicamente

$P \wedge Q$ es la conjunción de P con Q

Se lee simplemente P y Q

Ejemplos de conjunciones

Los perros tienen pulgas y las vacas garrapatas

Si voy al cine, me duermo, y, si no voy al cine, tambien me duermo.

Observamos de estos ejemplos que la conjunción puede ser -- entre proposiciones simples o proposiciones compuestas. También es factible decir que una conjunción es una proposición compuesta cuyo conectivo principal es "y"

Ejercicio

I.- Dá tres ejemplos de conjunciones que se compongan de proposiciones simples, y tres ejemplos de conjunciones que se -- compongan de proposiciones compuestas.

II.- Señala a las proposiciones que son conjunciones.

1.- Luis y Lupe se casan, si no hay impedimento.

2.- El gran oso polar blanco y la indefensa foca.

3.- Pedro y Juan me invitaron a la fiesta.

4.- Verónica es trabajadora e Ines es inteligente.

5.- Voy rápido pero llego tarde.

4.6.3.- DISYUNCIÓN DE PROPOSICIONES.

Si unimos dos proposiciones con el conectivo "o", se obtiene una nueva proposición llamada disyunción. Simbólicamente

$P \vee Q$ es disyunción de P con Q

Se lee P ó Q

Ejemplos

Apruebo o repruebo el exámen.

Abro la puerta o cierro la puerta.

Alicia trae a su hermana o a su prima.

Se ponchó la llanta o se desinfló.

Analizando cada proposición, vemos que las dos primeras indican que puede ocurrir una cosa, la otra, pero no ambas a la vez. No puedo aprobar y reprobar el mismo examen, como tampoco puedo abrir y cerrar la puerta al mismo tiempo.

En cambio en las dos últimas, el sentido de estas indica, que puede suceder una cosa, la otra o ambas a la vez. Alicia puede traer a su hermana y a su prima. Así tambien se pudo haber ponchado y desinflado la llanta.

De donde podemos resaltar que el conectivo "o" posee dos sentidos o significados diferentes a los que llamaremos exclusivo e inclusivo

Significados del conectivo "o"

- Exclusivo: sucede una cosa o la otra pero no ambas.
- Inclusivo: sucede una cosa, la otra o ambas

En lógica simbólica se emplea el "o" <u>inclusivo</u> que es más - amplio. Así cuando hablemos de la disyunción, sabemos que es -- con significado <u>Inclusivo</u>

Ejercicio

De las siguientes proposiciones señala el sentido exclusivo o inclusivo en cada una.

1.- Obtengo MB en Física o saco NA.
2.- Camino rapido o camino despacio.
3.- Ver y oir, o, no ver y hablar.
4.- Se acabó la gasolina o se tapo el carburador.
5.- Murió envenenado o de muerte natural.
6.- Viene con su mamá o no viene a la fiesta.
7.- Tengo sueño o ganas de dormir.
8.- La tradición nos arraiga al pasado o el pasado forma - parte de nuestra idiocincracia.

4.6.4.- Proposición Condicional o Implicación.

Una proposición compuesta cuyo conectivo principal es Si..., entonces, se llama condicional. Esto significa que al unir dos proposiciones por medio del conectivo Si..., entonces, se obtiene una condicional.

Ejemplos de condicionales

1.- Si me baño, entonces me mojo.
2.- Si $x > 0$, entonces x es positivo
3.- Si veo a tu hermana, entonces le doy tu recado.
4.- Si $x^2-4=0$, entonces $x=2$ ó $x=-2$

En general una proposición condicional puede representarse simbólicamente en la forma:

$$A \longrightarrow B \quad \text{(Si A, entonces B)}$$

Donde la proposición A es el antecedente o hipótesis de la condicional y la proposición B es el consecuente o tésis de la condicional.

De los ejemplos anteriores los antecedentes o hipótesis son:

1.- Me baño.
2.- $X > 0$
3.- Encuentro a tu hermana.
4.- $x^2-4 = 0$

Y los consecuentes o tésis respectivas son:

1.- Me mojo.
2.- x es positivo.
3.- Le doy tu recado.
4.- $x=2$ ó $x=-2$

Ejercicio

Señala el antecedente y el consecuente de cada condicional.

1.- Si $X < 3$, entonces $x < 10$
2.- Cuando trabajo, me pagan.
3.- Como bien, si tengo hambre.
4.- Basta que me enferme, para no trabajar.
5.- Siempre que seas honrado, te respetaran.
6.- Voy al cine, si tengo dinero.
7.- Si salgo temprano, llegaré temprano a casa.
8.- Es un polígono de tres lados, si es un triángulo.
9.- Si A es hermano de B, y C es hijo de B, entonces A es tio de C.
10.- Los ángulos no se hacen mayores, si se prolongan su lados.
11.- $P \longrightarrow Q$
12.- Q si P
13.- P sólo si Q
14.- Cuando Q, P

4.6.5.- PROPOSICIÓN BICONDICIONAL.

La bicondicional es una proposición compuesta, cuyo conectivo principal es "si y sólo si". Esto significa, que al unir dos proposiciones cualesquiera con el conectivo, si y sólo si, obtenemos una bicondicional.

Ejemplos de bicondicionales

1.- Dos partículas se atraen, si y sólo si, tienen signos contrarios.
2.- X es par, si y sólo si, X es múltiplo de dos.
3.- Voy al cine, si y sólo si, me acompañas.
4.- Un átomo es estable, si y sólo si tiene valencia par.

Simbólicamente podemos representar a cualquier proposición bicondicional por la forma:

$A \longleftrightarrow B$ ... se lee, A si y sólo si B.

Esta bicondicional significa en general, que para que ocurra A, es necesario y suficiente que ocurra B. Es decir que A ocurre, cuando B ocurre y si A no ocurre, entonces B tampoco ocurre.

Del ejemplo uno arriba mencionado tenemos que significa:

- Si dos partículas se atraen, entonces son de signos contrarios, y, si son de signos contrarios, entonces se atraen.

Con esto se establece que la condicional es tambien la conjunción de dos condicionales. Simbólicamente:

$$A \longleftrightarrow B \quad \text{es} \quad (A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)$$

Ejercicio

Expresa las bicondicionales como conjunción de dos bicondicionales.

1.- Como, si y sólo si, tengo hambre.
2.- $X=0$, si y sólo si, $X + X= 0$
3.- Hay humo, si y sólo si, hay combustión.
4.- Te pago, si y sólo si, tengo dinero.
5.- Duermo, si y sólo si, tengo sueño.

4.7.- VALORES DE VERDAD DE UNA PROPOSICION.

Como ya vimos anteriormenqe. Una proposición cualesquiera, no importando si es simple o compuesta, será falsa o verdadera, pero no ambas a la vez. Es decir si es verdadera, no puede ser falsa, e inversamente.

El valor de verdad de una proposición simple, depende de - lo que afirme y de lo que ocurra en la realidad. Si lo que --- afirma es congruente con la realidad, la proposición simple -- será verdadera, en caso contrario será falsa, por ejemplo:

1.- La ballena es el animal mas grande.
2.- El sol es una estrella.
3.- La luna es un planeta.
4.- 2 + 8 = 6

Las dos primeras proposiciones son verdaderas y las dos -- últimas son falsas.

En cambio el valor de verdad de una proposición compuesta, va a depender de dos elementos:

a) Los valores de verdad de sus proposiciones simples.
b) Los conectivos que la compongan.

Por ejemplo la proposición compuesta
El sol es una estrella y la luna es un satélite.
Es una proposición verdadera, ya que, es conjunción y las proposiciones simples:

El sol es una estrella
La luna es un satélite

Son verdaderas.

4.8.- TABLAS DE VERDAD.

Llamamos tabla de verdad, de una proposición, a un esquema que resume los valores de verdad que asume ésta, dependiendo de sus conectivos y de los valores de verdad de sus proposiciones-componentes.

Como ya vimos sólo hay dos valores de verdad, que simbolizamos

V = verdadero

F = falso

4.8.1.- TABLA DE VERDAD DE LA NEGACIÓN.

Sea A una proposición cualquiera, entoneces el esquema

A	$\sim$ A
V	F
F	V

Se llama tabla de verdad de la negación. Nos indica que si A es verdadera, su negación es falsa, y si A es falsa, su negación es verdadera.

4.8.2.- TABLA DE VERDAD DE LA CONJUNCIÓN.

Sean A y B dos proposiciones cualesquiera, entonces

A	B	A $\wedge$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Es la tabla de verdad de la conjunción, donde vemos que -- sólo es verdadera cuando A y B sean tambien verdaderas, eñ los- demás casos es falsa.

Esto significa que si alguno de sus componentes (A ó B) es falsa, entonces la conjunción será falsa.

Ejemplo:

Hacer la tabla de verdad de las proposiciones compuestas

① $\sim p \wedge q$

② $\sim p \wedge \sim q$

③ $\sim (p \wedge q)$

Solución:

1.-

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

2.-

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

3.-

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

De este ejemplo observamos que sólo empleamos las tablas de verdad de la negación y la conjunción; empezando siempre por el - esquema:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Ya que sólo son dos proposiciones - que las componen (p y q)
Siendo 4 todos los casos posibles - para las combinaciones de V y F
(renglones del segundo al quinto)

4.8.3.- TABLA DE VERDAD DE LA DISYUNCIÓN.

SI A Y B son dos proposiciones cualesquiera (simples o compuestas), entonces, el siguiente esquema.

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Se llama tabla de verdad de la disyunción. Como ya vimos anteriormente (4.6.3) la disyunción tiene significado inclusivo, por lo cual sólo es falsa cuando sus componentes (A y B) son falsas, en los otros casos es verdadera.

Comparando las tablas de verdad de la conjunción y la disyunción, observamos que:

La conjunción ($A \wedge B$) sólo es verdadera cuando ambas componentes (A y B) son verdaderas.

La disyunción ($A \vee B$) sólo es falsa cuando ambas componentes (A y B) son falsas.

Ejemplo.

Hacer la tabla de verdad de las proposiciones compuestas

① $\sim p \vee \sim q$

② $\sim (p \vee q)$

③ $\sim p \wedge (p \vee q)$

Solución:

1.-

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

2.-

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

3.-

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \wedge (p \vee q)$
V	V	F	V	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Podemos observar de este tercer ejemplo, que la proposición $\sim p \wedge (p \vee q)$ es verdadera sólo cuando P falsa y q verdadera.

En estos tres ejemplos, hemos empleado las tablas de verdad de la negación, conjunción y disyunción, para llenar cada columna de cada tabla de verdad.

4.8.4.- TABLA DE VERDAD DE LA CONDICIONAL.

Si A y B son dos proposiciones cualesquiera, entonces ---- A $\longrightarrow$ B se llama condicional o implicación, donde A es el antecedente o hipótesis y B es el consecuente o tésis.

La tabla de verdad de la condicional es:

A	B	A $\longrightarrow$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

De donde podemos observar que la condicional es falsa sólo cuando el antecedente (A) es verdadero y el consecuente (B) es - falso, en los demás casos es verdadera.

Por ejemplo si hago la afirmación.

- "Si me saco la lotería, entonces te regalo un coche".

Solo será falsa cuando me sáque la lotería y no regale coche

En los demás casos se considerará verdadera. Es decir:
Me saqué la lotería y regalé coche, la afirmación anterior es verdadera.
No me saqué la lotería pero regalé coche, aún así la afirmación - es verdadera.
No me saqué la lotería y no regalé coche, tambien es verdadera.

Ejemplo.

Hacer la tabla de verdad de las proposiciones compuestas.

① $\sim p \longrightarrow \sim q$

② $p \wedge \sim q \longrightarrow \sim p \vee q$

③ $\sim p \longrightarrow \sim p \vee (q \wedge p)$

④ $\sim (p \wedge \sim q) \longrightarrow q$

Solución:

1.-

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \longrightarrow \sim q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

2.-

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \wedge \sim q \longrightarrow \sim p \vee q$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

3.-

p	q	$\sim p$	$q \wedge p$	$\sim p \vee (q \wedge p)$	$\sim p \longrightarrow \sim p \vee (q \wedge p)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V

4.-

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$	$\sim (p \wedge \sim q) \rightarrow q$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	F

En cada ejemplo debemos tener cuidado en distinguir el antecedente y el consecuente, de cada condicional, por esto en el --- ejemplo 4 al final de la condicional resulta falsa, ya que su antecedente que es $\sim (p \wedge \sim q)$ es verdadero y su consecuente que es q es falso (último renglón de la tabla).

4.8.5.- TABLA DE VERDAD DE LA BICONDICIONAL.

Sean A y B dos proposiciones cualesquiera, entonces

A	B	$A \longleftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Es la tabla de verdad de la bicondicional, de ella observamos que si A y B tienen igual valor de verdad (ambas falsas o -- ambas verdaderas) la bicondicional es verdadera, pero si A y B tienen valores diferentes, la bicondicional es falsa.

Por ejemplo la afirmación

"Soy asalariado si y sólo si me pagan

Es verdadera cuando:

Sea asalariado y me paguen

No sea asalariado y no me paguen

Es falsa cuando:

Sea asalariado y no me paguen
No sea asalariado y me paguen

Ejemplo:

Hacer la tabla de verdad de las proposiciones compuestas.

① $\sim p \longleftrightarrow \sim q$

② $p \longrightarrow \sim q \longleftrightarrow p$

③ $p \longleftrightarrow \sim (p \wedge (q \longrightarrow \sim p))$

Solución

1.-

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \longleftrightarrow \sim q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

2.-

p	q	$\sim q$	$p \longrightarrow \sim q$	$\sim p$	$p \longrightarrow \sim q \longleftrightarrow \sim p$
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

3.-

p	q	$\sim p$	$q \longrightarrow \sim p$	$p \wedge (q \longrightarrow \sim p)$	$\sim (p \wedge (q \longrightarrow \sim p))$	$p \leftrightarrow \sim (p \wedge (q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F

Debemos destacar que al efectuar la tabla de verdad de cada proposición compuesta, es importante señalar el conectivo principal, para saber si lo que tenemos es negación, conjunción, etc.

Hasta el momento solo hemos dado ejemplos de proposiciones compuestas de dos proposiciones simples (p y q), pero se pueden hacer con una, dos, tres, cuatro etc. proposiciones simples, -- por ejemplo

Hacer la tabla de verdad de las proposiciones compuestas

① $p \rightarrow \sim p$

② $p \wedge \sim p$

③ $p \wedge \sim q \rightarrow q \vee \sim r$

solución

1.-

p	~ p	p ⟶ ~ p
V	F	F
F	V	V

2.-

p	~p	p ∧ ~ p
V	F	F
F	V	F

3.-

p	q	r	~q	p ∧~q	~ r	q v ~ r	p ∧ ~q ⟶ q v ~ r
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V	V

Observamos que el número de renglones en la tabla de verdad, depende del número de proposiciones simples que la componen - - - (número de letras diferentes, p, q, r etc.)

Lo anterior lo podemos resumir en la siguiente tabla de --- valores

Número de proposiciones simples	Número de renglones en la tabla
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
.	
.	
.	
n	2^n

De esta forma, al hacer la tabla de verdad de la proposición compuesta

$$p \wedge \sim q \longrightarrow \sim s \wedge t$$

Necesitamos 16 renglones

Ejercicios

I.- Sabiendo que una proposición compuesta es falsa o verdadera, y que esto depende, de los valores de verdad de sus -- componentes, y de los conectivos lógicos que utilice. Contestar las siguientes preguntas.

1.- ¿Cuándo la negación es verdadera y cuando es falsa?

2.- ¿Cuándo la conjunción es verdadera y cuando es falsa?

3.- ¿En qué caos la disyunción es falsa o verdadera?

4.- ¿Cuándo la condicional es verdadera y cuando es falsa?

5.- ¿En que casos la bicondicional es falsa y en qué casos es verdadera?

II.- Si p es una proposición falsa, Q es verdadera y R es --- falsa ¿cuál es el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas?

1.- $\sim P$

2.- $\sim Q$

3.- $\sim R$

4.- $P \wedge Q$

5.- $Q \vee R$

6.- $\sim P \wedge Q$

7.- $\sim P \wedge \sim R$

8.- $P \rightarrow Q$

9.- $Q \rightarrow P$

10.- $\sim P \rightarrow Q$

11.- $\sim P \wedge Q \rightarrow R$

12.- $(\sim P \wedge Q \rightarrow R) \longleftrightarrow (R \longrightarrow Q) \wedge P$

13.- $\sim (P \vee \sim Q \longrightarrow R)$

14.- $\sim(\sim(\sim P))$

15.- $P \wedge Q \wedge R$

III.- Efectua la tabla de verdad de las siguientes proposiciones

1.- $\sim P \vee Q$

2.- $\sim Q \longrightarrow \sim P$

3.- $P \longrightarrow P$

4.- $\sim P \vee P$

5.- $P \rightarrow P \wedge \sim P$

6.- $P \wedge Q \longrightarrow P$

7.- $(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$

8.- $(P \longrightarrow \sim q) \wedge q \longrightarrow \sim p$

9.- $q \longleftrightarrow \sim (p \wedge (\sim P v q)) \longrightarrow p \vee q$

10.- $\sim (p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow \sim s$

IV.- Escribe el total de casos diferentes (renglones en la tabla), respecto a la combinación total de valores, que se requieren para hacer la tabla de verdad de una proposición compuesta - con:

a) Cuatro proposiciones simples diferentes (cuatro letras)

b) cinco proposiciones simples diferentes (cinco letras)

4.9.- Tautologías, Contradicciones y Contingencias.

Los valores de verdad que puede asumir una proposición compuesta, dependiendo de los valores de verdad de sus componentes, divide a las proposiciones compuestas en tres categorias diferentes, tautologías, contradicciones y contingencias.

<u>Definición</u>: Tautología es una proposición compuesta, siempre verdadera, independientemente del valor de verdad de sus componentes. Es decir su tabla de verdad tendrá como resultado ---- final solo V's.

Ejemplo

Las proposiciones son tautologías

1 $p \rightarrow p$

2 $p \vee \sim p$

3 $p \rightarrow p \vee q$

Ya que sus tablas son respectivamente

1.-

p	p	$p \rightarrow p$
V	V	V
F	F	V

2.-

p	p	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

3.-

p	q	$p \vee q$	$p \longrightarrow p \vee q$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Por lo cual las tres proposiciones son tautologías.

Definición: Contradicción es una proposición compuesta, siempre falsa, independientemente del valor de verdad de sus componentes esto significa que su tabla de verdad presentara al final --- como resultado solo F's.

Ejemplo

Las proposiciones son contradicciones.

(1) $p \wedge \sim p$

(2) $\sim (p \longrightarrow p)$

(3) $p \wedge \sim (p \vee q)$

Ya que sus tablas de verdad son:

1.-

p	p	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

2.-

p	p	$p \longrightarrow p$	$\sim (p \longrightarrow p)$
V	V	V	F
F	F	V	F

-3.-

p	q	p v q	~(p v q)	p ∧ ~(p v q)
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

Con lo cual se prueba que son contradicciones.

<u>Definición</u>: Contingencia es una proposición compuesta, que no es ni tautología, ni contradicción. Esto es, su tabla de verdad tendrá como resultado final, tanto V's como F's. (al menos -- una).

Ejemplo

Las proposiciones son contingencias

① $\sim p \wedge q \longrightarrow \sim q$

② $p \longrightarrow \sim p$

Ya que al hacer sus tablas de verdad obtenemos:

1.-

p	q	~p	~p ∧ q	~q	~p ∧ q ⟶ ~q
V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V

2.-

p	~p	p ⟶ ~p
V	F	F
F	V	V

Podemos observar que la negación de una tautología es una -- contradicción, la negación de una contradicción es una tautología, y la negación de una contingencia, sigue siendo una contingencia.

Ejercicio

Determina de las siguientes proposiciones, las tautologías, las contradicciones y las contingencias.

1) $p \wedge (p \longrightarrow q) \longrightarrow q$

2) $\sim (p \longrightarrow \sim p)$

3) $\sim (p \wedge \sim p)$

4) $p \wedge q \longrightarrow q$

5) $(p \wedge q) \wedge \sim q$

4.10.- PROPOSICIONES LOGICAMENTE EQUIVALENTES.

Al analizar las proposiciones compuestas

1.- Apruebo el examen o repruebo el examen.

2.- Si no apruebo el examen, entonces repruebo el examen.

Vemos que realmente significan lo mismo o que expresan la -- misma idea, que además si una es verdadera, lo es tambien la otra y si una es falsa, tambien la otra. Decimos que ambas tienen --- igual valor de verdad y significado, con lo cual seran logicamente equivalentes.

Al simbolizar estas proposiciones tenemos:

p = apruebo el examen

q = repruebo el examen

1.- $p \vee q$

2.- $\sim p \longrightarrow q$

Y haciendo sus tablas de verdad

1.-

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

2.-

p	q	$\sim p$	$\sim p \longrightarrow q$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

Observamos que los resultados en sus tablas de verdad son iguales.

Por lo cual llegamos a la definición siguiente:

<u>Definición</u>: Dos proposiciones son logicamente equivalentes si y sólo si:
sus tablas de verdad conducen al mismo resultado.

Ejemplo

Como ya vimos

$p \vee q$ es logicamente equivalente a $\sim p \longrightarrow q$

Simbolicamente lo escribimos así

$$p \vee q \equiv \sim p \longrightarrow q$$

Donde el símbolo $\equiv$ significa "logicamente equivalente a"

Las siguientes proposiciones tambien son logicamente equivalentes.

- $p \equiv \sim(\sim p)$
- $p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$
- $\sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$

Ya que al hacer sus tablas de verdad

1.-

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

2.-

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$p \to q$	$\sim q \longrightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

3.-

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$\sim p \vee q$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Vemos que en cada caso sus tablas de verdad son iguales, por lo cual son lógicamente equivalentes y por lo tanto tienen igual significado.

Existen una serie de propiedades y leyes de las proposiciones equivalentes. A continuación mencionamos las más importantes, así como los nombres con que se conocen.

Si A,B y C son proposiciones lógicas, entonces

Ley de identidad

1.- $A \equiv A$

Ley de doble negación

2.- $A \equiv \sim(\sim A)$

Leyes de idempotencia

3.- $A \wedge A \equiv A$ 4.- $A \vee A \equiv A$

Leyes conmutativas

5.- $A \wedge B \equiv B \wedge A$ 6.- $A \vee B \equiv B \vee A$

Leyes asociativas

7.- $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ 8.- $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

Leyes distributivas

9.- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ 10.- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Leyes de D'Morgan

11.- $\sim(A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$ 12.- $\sim(A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$

Ley contrapuesta

13.- $A \rightarrow B \equiv \sim B \longrightarrow \sim A$

Podemos verificar la validéz de cualquiera de ellas mediante las tablas de verdad. Hagamos por ejemplo la comprobación de una de las leyes D'Morgan.

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \vee B$	$\sim(A \vee B)$	$\sim A \wedge \sim B$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Sus tablas de verdad son iguales y por lo tanto son lógica-- mente equivalentes

<u>Definición 1</u>.- Una condicional es equivalente a una disyun- ción esto es $A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$

<u>Definición 2</u>.- Una bicondicional es la conjunción de dos -- condicionales es decir $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Una aplicación de las leyes de equivalencia así como de las definiciones anteriores, es para demostrar si dos proposiciones -- son equivalentes

Ejemplo

Demostrar las equivalencias lógicas

1.- $\sim(P \wedge \sim q) \equiv p \rightarrow q$

2.- $p \wedge q \rightarrow \sim q \equiv p \rightarrow \sim q$

3.- $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

Solución:

1.- $\sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee (\sim (\sim q))$ ———— Ley de D'Morgan

$\equiv \sim p \vee q$ ———— doble negación

$\equiv p \rightarrow q$ ———— definición

2.- $p \wedge q \longrightarrow \sim q \equiv \sim(p \wedge q) \vee \sim q$ ———— definición

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee \sim q$ ———— Ley de D'Morgan

$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee \sim q)$ ———— asociativa

$\equiv \sim p \vee \sim q$ ———— idempotencia

$\equiv p \longrightarrow \sim q$ ———— definición

3.- $\sim(p \longleftrightarrow q) \equiv \sim((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ ———— definición

$\equiv \sim(p \rightarrow q) \vee \sim(q \rightarrow p)$ ————Ley de D'Morgan

$\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)$ ———— definición

$\equiv (\sim(\sim p) \wedge \sim q) \vee (\sim(\sim q) \wedge \sim p)$ — Ley de D'Morgan

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ ———— doble negación

Observamos que en cada ejercicio empezamos con la proposición de la izquierda y aplicando las leyes la transformamos a la proposición de la derecha, con lo cual se demuestra que son logicamente equivalentes. Esto también se puede verificar haciendo la tabla de verdad de cada pareja de proposiciones equivalentes.

<u>Advertencia:</u> Las leyes de D'Morgan

$$\sim(A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$$

$$\sim(A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$$

Nos indican como negar una conjunción y una disyunción respectivamente. Y <u>no</u> debemos creer que lo siguiente es cierto ---
$\sim(A \wedge B) \equiv \sim A \wedge \sim B$ ó $\sim(A \vee B) \equiv \sim A \vee \sim B$

De ésta forma las negaciones de las siguientes proposiciones:

- Estudio en la mañana y trabajo en la tarde
- Estudiaré medicina o estudiaré Ingeniería
- No estudio y no trabajo

Son, respectivamente, aplicando las leyes de D'Morgan

1.- No estudio en la mañana ó no trabajo en la tarde

2.- No estudiaré medicina y no estudiaré ingeniería

3.- Estudio ó trabajo

Análogamente para negar una proposición condicional o una -- proposición bicondicional, procedemos a las leyes de equivalencias.

1.- Negación de la condicional

$$\begin{aligned} \sim(A \rightarrow B) &\equiv \sim(\sim A \vee B) && \text{—— definición} \\ &\equiv \sim(\sim A) \wedge \sim B && \text{—— Ley de D'Morgan} \\ &\equiv A \wedge \sim B && \text{—— doble negación} \end{aligned}$$

Por lo cual $\sim(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \sim B$

Ejemplo:

Para negar la condicional "Si me baño, entonces me resfrío" aplicamos la equivalencia anterior y resulta "Me baño y no me --- resfrío"

2.- Negación de la bicondicional

$$\begin{aligned} \sim(A \leftrightarrow B) &\equiv \sim((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) && \text{—— definición} \\ &\equiv \sim(A \rightarrow B) \vee \sim(B \rightarrow A) && \text{—— Ley de D'Morgan} \\ &\equiv \sim(\sim A \vee B) \vee \sim(\sim B \vee A) && \text{—— definición} \\ &\equiv (\sim(\sim A) \wedge \sim B)) \vee (\sim(\sim B) \wedge \sim A) && \text{—— Ley de D'Morgan} \\ &\equiv (A \wedge \sim B) \vee (B \wedge \sim A) && \text{—— doble negación} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sim(A \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \sim B) \vee (B \wedge \sim A)$

Ejemplo

La negación de la bicondicional "Termino si y sólo si me -- apuro" es "Termino y no me apuro, o me apuro y no termino"

Ejercicio

Negar cada proposición:

1. Si es automovil, entonces contamina
2. Si no hago ejercicio, entonces no seré sano
3. Trabajo si y sólo si recibo salario
4. Es hombre si y sólo si no es mujer

Solución

1.- Es automovil y no contamina

2.- No hago ejercicio y soy sano

3.- Trabajo y no recibo salario, o recibo salario y no - trabajo.

4.- Es hombre y es mujer, o no es mujer y no es hombre (No debemos olvidar que la negación de una proposi-- ción verdadera, resulta falsa).

Ejercicios

I.- Verifica mediante las tablas de verdad las leyes de equivalencias lógicas.

II.- Aplicando las leyes de equivalencia demuestra que:

1.- $\sim(\sim p \wedge \sim q) \equiv p \vee q$

2.- $\sim(\sim p \vee \sim q) \equiv p \wedge q$

3.- $\sim(\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim p \longrightarrow q$

4.- $\sim(\sim p \vee q) \equiv \sim(p \longrightarrow q)$

5.- $\sim(\sim(\sim(\sim p))) \equiv p$

6.- $p \longrightarrow \sim p \vee q \equiv p \longrightarrow q$

7.- $p \wedge \sim q \longrightarrow q \equiv p \longrightarrow q$

8.- $\sim p \longleftrightarrow \sim q \equiv p \longleftrightarrow q$

III.- Niega cada proposición compuesta

1 Trabajo mucho y gano poco

2 No estudio y gano dinero

3 Si voy de paseo me divierto

4 Salgo tarde o salgo temprano

5 No llueve y hace calor

6 Si tardo en regresar, no me esperen

7 Eres animal racional si y sólo si razonas

8 No es estrella si y sólo si no tiene luz propia

9 Si estudio y trabajo, entonces progresaré

10 Si contaminas, entonces te enfermarás o sufrirás

4.11.- PROPIEDADES DE TAUTOLOGIAS Y CONTRADICCIONES.

Simbolizaremos a una tautología y a una contradicción por medio de las letras mayúsculas.

T = tautología y C= contradicción

Se pueden verificar con las tablas de verdad las siguientes equivalencias lógicas, donde A es una proposición cualquiera

1.- $\sim T \equiv C$

2.- $\sim C \equiv T$

3.- $A \wedge \sim A \equiv C$

4.- $A \vee \sim A \equiv T$

5.- $A \wedge T \equiv A$

6.- $A \wedge C \equiv C$

7.- $A \vee T \equiv T$

8.- $A \vee C \equiv A$

Verificaremos la número ocho con la tabla de verdad

A	C	A V C
V	F	V
F	F	F

Donde observamos que la primera y tercera columnas resultaron iguales y por lo tanto son equivalentes

Estas propiedades se pueden utilizar conjuntamente con las leyes de proposiciones logicamente equivalentes, para simplificar una proposición compuesta.

Ejemplo:

Simplificar las siguientes proposiciones lógicas

1.- $\sim p \rightarrow p \vee q$

2.- $\sim(\sim p \rightarrow q) \vee q$

3.- $\sim((q \rightarrow p) \wedge (\sim p \rightarrow q))$

Solución

1.- $\sim p \rightarrow p \vee q \equiv \sim(\sim p) \vee (p \vee q)$ —————— definición

$\equiv p \vee (p \vee q)$ —————— doble negación(2)

$\equiv (p \vee p) \vee q$ —————— asociativa (8)

$\equiv p \vee q$ —————— idempotencia (4)

2.- $\sim(\sim p \rightarrow q) \vee q \equiv \sim(\sim(\sim p) \vee q) \vee q$ —————— definición

$\equiv \sim(p \vee q) \vee q$ —————— doble negación(2)

$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee q$ —————— Ley de D'Morgan (12)

$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$ —————— distributiva (10)

$\equiv (\sim p \vee q) \wedge T$ —————— propiedad (4)

$\equiv \sim p \vee q$ —————— propiedad (5)

$\equiv p \rightarrow q$ —————— definición

3.- $\sim((q \rightarrow p) \wedge (\sim p \rightarrow q)) \equiv \sim((\sim q \vee p) \wedge (\sim(\sim p) \vee q))$ —— definición

$\equiv \sim((\sim q \vee p) \wedge (p \vee q)$ —————— doble negación (2)

$\equiv \sim((p \vee \sim q) \wedge (p \vee q))$ —————— conmutativa (6)

$\equiv \sim(p \vee (\sim q \wedge q))$ —————— distributiva (10)

$\equiv \sim(p \vee C)$ —————— propiedad (3)

$\equiv \sim P \wedge \sim C$ —————— Ley de D'Morgan (12)

$\equiv \sim P \wedge T$ —————— propiedad (2)

$\equiv \sim p$ —————— propiedad (5)

Se puede comprobar con la tabla de verdad que, en el caso del ejemplo tres.

$$\sim((q \rightarrow p) \wedge (\sim p \rightarrow q)) \equiv \sim p$$

Ejercicios

I.- Aplicando las leyes de proposiciones logicamente equivalentes asi como las propiedades de tautologias y contradicciones, reducir cada proposición compuesta.

1.- $\sim p \rightarrow p$

2.- $\sim(\sim p \longrightarrow \sim p)$

3.- $p \wedge \sim(p \wedge \sim q)$

4.- $\sim q \vee \sim(p \vee \sim q)$

5.- $\sim p \wedge \sim(p \vee q)$

6.- $q \vee (q \vee \sim p)$

7.- $\sim(p \vee \sim(p \vee q))$

8.- $p \wedge (p \rightarrow q)$

9.- $\sim(\sim p \vee \sim(p \rightarrow q))$

10.- $(p \vee q) \wedge (q \longrightarrow p)$

II.- Demostrar lo siguiente, mediante las leyes de equivalencia y las propiedades de tautologías y contradicciones.

1.- $p \wedge (\sim p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q) \equiv p \wedge q$

2.- $\sim((q \rightarrow p) \wedge (\sim p \rightarrow q)) \equiv \sim p$

3.- $p \wedge q \rightarrow q \equiv T$

4.- $p \wedge q \rightarrow s \equiv p \rightarrow (q \rightarrow s)$

4.12.- DEDUCCION LOGICA.

La deducción lógica es uno de los aspectos importantes dentro de la lógica, ya que por medio de ella se puede avanzar en el proceso del conocimiento. Es decir, se pueden encontrar proposiciones verdaderas a partir, de otras proposiciones ya conocidas como verdadera. Así de las proposiciones verdaderas

Si la luna es un satélite, entonces gira alrededor de un planeta.

La luna es un satélite.

Se conluye o deduce la proposición

La luna gira al rededor de un planeta.

A las dos primeras proposiciones se les llama premisas y a la tercera conclusión, las tres forman un razonamiento deductivo o simplemente raciocinio.

Un raciocinio o argumento lógico, es un conjunto de proposiciones llamadas premisas y un conjunto de proposiciones llamadas conclusiones.

Las premisas son proposiciones lógicas, las cuales se presume són verdaderas. Tambien las premisas se pueden llamar hipótesis.

Las conclusiones se obtienen de las premisas por medio de las reglas de inferencia o por las leyes de equivalencia lógica.

Una regla de inferencia es un procedimiento, mediante el cual a partir de una o mas premisas se obtiene una sola conclusión, para formar un raciocinio válido.

Un raciocinio es válido si no puede ocurrir que siendo las premisas verdaderas, resulta la conclusión falsa.

Ejemplo de raciocinio no válido

Si es caballo, entonces bebe agua........... premisa

Juan bebe agua.............................. premisa

Juan es caballo.............................conclusión

Del ejemplo se observa que a pesar de ser las premisas verdaderas se obtiene una conclusión falsa (a menos que Juan sea --caballo). Por lo cual este raciocinio no puede admitirse como -válido

Ilustraremos un raciocinio en general, con el esquema.

$$\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c}P_1\\ P_2\\ P_3\\ P_4\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ P_n\end{array}\right\}\text{Premisas}\\ \hline \left.\begin{array}{c}C_1\\ C_2\\ C_3\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ C_m\end{array}\right\}\text{Conclusiones}\end{array}\right\}\text{Raciocinio lógico}$$

4.12.1.- REGLAS DE INFERENCIA

Como se mencionó anteriormente, una regla de inferencia es-un procedimiento o instrumento lógico, para obtener conclusiones en los razonamiento válidos o correctos.

Existen varias reglas de inferencia, pero solo estudiaremos las mas importantes a saber.

i) Modus Ponendo Ponens

ii) Modus Tollendo Tollens

iii) Modus Tollendo Ponens

4.12.2.- MODUS PONENDO PONENS

Veamos el raciocinio válido

1.- Si hay lumbre, entonces hay oxígeno.

2.- Hay lumbre.

En consecuencia

3.- Hay oxígeno

Simbolizando este raciocinio tenemos:

A = Hay lumbre

B = Hay oxígeno

1.- $A \longrightarrow B$

2.- A

3.- B

Donde las dos primeras son premisas y la tercera es la conclusión

Modus Ponendo Ponens son las palabras del Latín que significan literalmente "Modo de afirmar afirmando".

Pero como regla de inferencia es el procedimiento, mediante el cual obtenemos el consecuente de una condicional, afirmando su antecedente. Esquemáticamente. Sean A y B dos proposiciones

$A \longrightarrow B$

A Premisas

B conclusión

Abreviaremos Modus Ponendo Ponens por "MP"

Ejemplos

I.-

1.- Si trabajo y no estudio, entonces no progresaré.

2.- Trabajo y no estudio.

3.- No progresaré . . . . MP (1,2)

Lo que aparece a la derecha de la conclusión significa que ésta se obtuvo como consecuencia del Modus Ponendo Ponens de -- las premisas 1 y 2.

II.-

1.- Si está lloviendo, me quedo en casa.

2.- Si me quedo en casa, leo un libro.

3.- Está lloviendo.

4.- Me quedo en casa . . . . MP (1,3)

5.- Leo un libro . . . . MP (2,4)

III.-

1.- $\sim p \vee \sim q \rightarrow R \wedge T$

2.- $\sim p \vee \sim q$

3.- $R \wedge T$ . . . . MP (1,2)

IV.-

1.- $p \vee \sim Q \rightarrow S \wedge \sim T$

2.- $p \vee \sim Q$

3.- $S \wedge \sim T \longrightarrow m$

4.- $S \wedge \sim T$ . . . . .MP(1,2)

5.- m . . . . .MP(3,4)

V.-

1.- Si no estudio, no termino una carrera

2.- Si no termino una carrera, perdí varios años

3.- No estudio

4.- No termino una carrera . . . . MP (1,3)

5.- Perdí varios años . . . . MP (2,4)

Observese sin embargo que de las premisas siguientes:

$$A \longrightarrow B$$
$$\underline{\;B\;}$$

No hay conclusión, y no debe concluirse A

4.12.3.- MODUS TOLLENDO TOLLENS

Son las palabras del Latin que dicen literalmente "Modo de negar negando"

Del raciocinio válido

1.- Si es una estrella, entonces tiene luz propia

2.- No tiene luz propia

En consecuencia

3.- No es una estrella

Simbolizandolo

A= Es una estrella

B= Tiene luz propia

1.- $A \longrightarrow B$

2.- $\sim B$

3.- $\sim A$

Vemos que la segunda premisa ($\sim B$) niega al consecuente de la primera ($A \longrightarrow B$). Obteniendose por conclusión la negación del antecedente ($\sim$ A) de la primera premisa.

Modus Tollendo Tollens es la regla de inferencia, en virtud de la cual obtenemos como conclusión la negación del antecedente de una condicional, al negar su consecuente. En general

Sean A y B dos proposiciones

$$\begin{array}{ll} A \longrightarrow B & \\ \underline{\sim B} & \text{Premisas} \\ \sim A & \text{Conclusión} \end{array}$$

Abreviaremos Modus Tollendo Tollens por "MT"

Ejemplos

I.- 1.- Si no veo el fut bol, entonces no estoy en el estadio.

2.- Estoy en el estadio

3.- Veo el fut bol . . . . MT (1,2)

II.- 1.- Si salgo temprano, llego temprano a casa

2.- Si llego temprano a casa, hago la tarea.

3.- No hago la tarea

4.- No llego temprano a casa . . . . MT (1,2)

5.- No salgo temprano . . . . MT (1,4)

III.- 1.- Si voy al cine o al teatro, no fuí a la fiesta.

2.- Fuí a la fiesta.

3.- No fuí al cine y no fuí al teatro. . . . MT (1,2)

Esta conclusión, tambien se puede escribir como

3.- No fuí al cine ni al teatro . . . . .MT (1,2)

Donde el têrmino <u>ni</u> es la contracción de los conectivos "y no"

IV.- 1.- $p \vee \sim Q \rightarrow R \wedge S$

2.- $\sim (R \wedge S)$

3.- $\sim (p \vee \sim Q)$. . . . . . . MT (1,2)

V.-

1.- $\sim p \longrightarrow \sim S$

2.- $\sim s \rightarrow t$

3.- $\sim t$

4.- S . . . . MT (2,3)

5.- P . . . . MT (1,4)

VI.-

1.- $P \rightarrow Q$

2.- $\sim P \rightarrow S$

3.- $\sim S$

4.- P . . . . MT (2,3)

5.- Q . . . . MP (1,4)

Nótese que en este ejemplo se aplicaron ambas reglas - MT y MP.

VII.-

1.- $P \rightarrow Q$

2.- $Q \rightarrow S$

3.- $\sim p \rightarrow T$

4.- $\sim T$

5.- P . . . . MT (3,4)

6.- Q . . . . MP (1,5)

7.- S . . . . MP (2,6)

Obsérvese que de las premisas siguientes

$A \rightarrow B$

$\sim A$

No hay conclusión, y no se debe tratar de concluir $\sim B$

4.12.4.- MODUS TOLLENDO PONENS

Palabras del latín que significan literalmente "Modo de afirmar negando".

Esta regla de inferencia se refiere al método u operación -- del razonamiento, mediante el cual al descartar una posibilidad - de dos, permanece la otra, por ejemplo.

Supongase que al observar un animal, estamos interesados en saber si es hembra o macho, y por alguna circunstancia, nos damos cuenta de que no puede ser macho, entonces de ahí concluimos que el animal debe ser hembra.

Veamos otro ejemplo

1.- Apruebo este exámen o repruebo este examen

2.- No reprobé este exámen

En consecuencia

3.- Aprobé este exámen

En general esta regla que representada por el esquema

Sean A y B dos proposiciones

$$\begin{array}{ll} A \vee B & \\ & \text{Premisas} \\ \sim A & \\ \hline B & \text{Conclusión} \end{array}$$

O bien de la forma análoga

$$\begin{array}{ll} A \vee B & \\ & \text{Premisas} \\ \sim B & \\ \hline A & \end{array}$$

Simbolizaremos a la regla Modus Tollendo Ponens por "TP"

Ejemplos

I.-

1.- Salgo temprano o salgo tarde

2.- No salgo temprano

3.- Salgo tarde . . . . TP (1,2)

II.-

1.- Estudio administración y trabajo, o estudio -- medicina.

2.- No estudio medicina

3.- Estudio administración y trabajo . . TP (1,2)

III.-

1.- Existen areas verdes y se reducen los automovi les, o hay contaminación.

2.- No hay areas verdes o no se reducen los automo viles.

3.- Hay contaminación . . . . .TP (1,2)

IV.-

1.- Estudio o trabajo

2.- Si trabajo, gano dinero

3.- No estudio

4.- Trabajo . . . . .TP (1,3)

5.- Gano dinero . . . . MP (2,4)

V.-

1.- x = y ó x = z

2.- Si x = z, entonces x = 6

3.- No es x = 6

4.- No es x = z . . . . MT (2,3)

5.- x = y . . . . TP (1,4)

VI.-

1.- $x = 0$ ó $x = 1$

2.- Si $x = 1$, entonces $x = z$

3.- $x \neq z$

4.- $x \neq 1$ . . . . MT (2,3)

5.- $x = 0$ . . . . TP (1,4)

VII.-

1.- $(p \wedge q) \vee \sim s$

2.- $\sim S \longrightarrow t$

3.- $\sim (p \wedge q)$

4.- $\sim S$ . . . . TP (1,3)

5.- t . . . . MP (2,4)

VIII.-

1.- $p \longrightarrow q$

2.- $s \longrightarrow \sim q$

3.- $s \vee t$

4.- $\sim t$

5.- S . . . . TP (3,4)

6.- $\sim q$ . . . . MP (2,5)

7.- $\sim p$ . . . . MT (1,6)

IX.-

1.- $p \wedge \sim q \longrightarrow S \vee \sim t$

2.- $\sim S \wedge t$

3.- p

4.- $\sim (S \vee \sim t)$ . . . . equivalente a (2)

5.- $\sim (p \wedge \sim q)$ . . . . MT (1,4)

6.- $\sim p \vee q$ . . . . equivalente a (5)

7.- q . . . . TP (3,6)

Nótese que de las premisas

$A \vee B$

A

No hay conclusión y es erróneo concluir B.

Con lo estudiado hasta el momento, estamos en posibilidad de analizar el razonamiento planteado casi al inicio de este capítulo (4.4 pag.) que a la letra dice.

1.- Estudio medicina o estudio administración de empresas.

2.- Si estudio medicina, seré felíz.

3.- Si gano dinero, no seré felíz.

4.- Quiero ganar dinero.

En consecuencia

5.- Estudio administración de empresas.

Para verificar o comprobar que esta última proposición es conclusión del razonamiento, simbolizamos el razonamiento y aplicaremos las reglas de inferencia estudiadas.

Sean las proposiciones simples

m = estudio medicina

a = estudio administración de empresas

f = seré felíz

g = gano dinero

De donde

1.- $m \vee a$

2.- $m \rightarrow f$

3.- $g \longrightarrow \sim f$

4.- g

5.- $\sim f$ . . . . MP (3,4)

6.- $\sim m$ . . . . MT (2,5)

7.- a . . . . TP (1,6)

Donde al observar la última conclusión de este razonamiento vemos que es efectivamente "Estudio administración de empresas", por lo cual podemos asegurar que el razonamiento de este muchacho es correcto, pero además hemos obtenido más información, como son las conclusiones 5 y 6.

Ejercicios

I.- Simboliza los siguientes razonamientos y verifica si son correctos.

1.- Si trabajo el domingo, entonces no voy a la excursión.

Si no voy a la excursión, entonces no me divertiré.

Trabajaré el domingo. En consecuencia no me divertiré.

2.- Si $x > 5$, entonces $x > 3$

Si $x \not> 5$, entonces $x \leq 5$

$x \nleq 5$. Por lo tanto

$x > 3$

3.- Si tres divide a diez, entonces tres divide a veinte

Si tres no divide a diez, entonces tres divide a nueve.

Tres no divide a veinte. Luego

Tres divide a nueve.

4.- Si la enmienda no fué aprobada, entonces la constitución queda como estaba.

Si la constitución queda como estaba, entonces no - podemos añadir nuevos miebros al comité.

Añadimos nuevos miembros al comité o el informe se retrasará un mes.

El informe no se retrasará un mes. Por lo tanto.

La enmienda fué aprobada.

5.- O esta roca es ignea o es sedimentaria.

Esta roca es granito.

Si esta roca es granito, entonces no es sedimentaria.

En consecuencia.

Esta roca es ignea.

II.- En los ejercicios siguientes, las premisas ya estan simbolizadas. Aplicando las reglas de inferencia obtener la conclusión que se pide.

a) obtener q

1.- $s \rightarrow (p \vee q)$

2.- s

3.- $\sim p$

b) obtener $\sim(p \wedge q)$

1.- $p \wedge q \rightarrow r \vee s$

2.- $r \vee s \rightarrow \sim t$

3.- t

e) obtener s

1.- $t \rightarrow r$

2.- $\sim r$

3.- $t \vee s$

f) obtener S

1.- $\sim t \vee r$

2.- t

3.- $\sim s \rightarrow \sim r$

c) obtener S

1.- $p \vee q$

2.- $\sim q$

3.- $p \longrightarrow s$

d) obtener $\sim q$

1.- $t \vee \sim s$

2.- s

3.- $q \longrightarrow \sim t$

g) obtener r

1.- $\sim p \wedge q \longrightarrow \sim s \wedge t$

2.- $p \vee \sim q \longrightarrow r$

3.- $s \vee \sim t$

h) obtener q

1.- $p \wedge \sim q \longrightarrow \sim t$

2.- $t \vee s$

3.- $\sim s$

4.- p

III.- Obtener la conclusión que se pide, aplicando las reglas de inferencia.

a) obtener $y > z$

1.- $x = y \longrightarrow x = z$

2.- $x \neq y \longrightarrow x < z$

3.- $x \nless z \vee y > z$

4.- $x \neq z$

b) obtener $x < 3$

1.- $x + 2 > 5 \longrightarrow x = 4$

2.- $x = 4 \longrightarrow x + 4 \nless 7$

3.- $x + 4 < 7$

4.- $x + 2 > 5 \vee x < 3$

Se ha mencionado anteriormente que un raciocinio es válido, si no puede ocurrir que siendo las premisas verdaderas, resulte la conclusión falsa. Pero no se ha dado hasta el momento un procedimiento efectivo para decidir si un raciocinio dado de antemano, es o no válido.

Existe un mecanismo para decidir si un raciocinio es válido o si no lo es, y es mediante el uso de las tablas de verdad. Esto es.

$$\text{Si}\quad \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \\ \hline C \end{array}$$

Es un raciocinio, donde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son las premisas y C es laconclusión, entonces el raciocinio es válido cuando $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow C$ es una tautología.

En otro caso el raciocinio no es válido.

$$\text{Ejemplo}\quad \begin{array}{ll} 1.- & \sim p \rightarrow q \\ 2.- & \sim q \\ \hline 3.- & p \end{array}$$

Es raciocinio válido, ya que la proposición compuesta $(\sim p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow p$ es una tautología (compruébalo)

De esta forma se pueden comprobarlas reglas de inferencia como raciocinios válidos.

c) obtener $x = w$

1.- $x = y \longrightarrow x = z$

2.- $x = z \longrightarrow x = w$

3.- $x = y$ ó $x = 0$

4.- $x = 0 \longrightarrow x + u = 1$

5.- $x + u \neq 1$

d) obtener $x \neq 0$

1.- $x = y \longrightarrow x = z$

2.- $x = z \longrightarrow x = 1$

3.- $x = 0 \longrightarrow x \neq 1$

4.- $x = y$

5.- CONJUNTOS

En el presente capítulo trataremos a los conjuntos, como -- lenguaje simbólico que tiene alguna utilidad en sí mismo.

Los conjuntos han pasado a ocupar un lugar importante en el estudio de las matemáticas y cada vez se situan más en el lugar- que les corresponde. No es como se creía en los primeros años,- la "panacea universal" y que toda la matemática giraba en torno- a los conjuntos, pero tampoco debemos negar la poca o mucha im-- portancia que tienen, principalmente en el aspecto formativo del estudiante. Es en los conjuntos donde concurren los modelos al- gebráicos y modelos geométricos, de gran utilidad no solo didác- tica sino también práctica y operativa para resolver algunos problemas.

Por ejemplo supongamos que en nuestro grupo de clase hay 50 alumnos entre los cuales 17 practican gimnasia, 16 practican atletismo, 13 practican danza, 7 practican gimnasia y danza, 8 practican danza y atletismo, 5 gimnasia y atletismo, si además sabemos que 21 alumnos no practican ninguna de éstas actividades.
Queremos saber ¿cuántos alumnos practican las tres actividades - gimnasia, atletismo y danza?

Para resolver este problema, podemos intentar elaborar un - modelo, pero vamos a enfrentarnos con algunas dificultades, por- lo cual vemos necesario, desarrollar un estudio más detallado y profundo de éste, para así estar preparados no sólo para resolver el problema sino muchos otros.

5.1.- ¿QUÉ ES UN CONJUNTO

Del problema planteado anteriormente, observamos que existen dentro del salón de clase ciertos "tipos" o "clases" de alumnos - como son: -

a) alumnos que practican gimnasia

b) alumnos que practican atletismo

c) alumnos que practican danza

Más aún creemos que existen muchas otras "clases" de alumnos en éste mismo salón según alguna característica particular que -- los identifique, como podrían ser: estudiar inglés, jugar futbol, ser menores de 16 años, ser hombres o ser mujeres, vivir en Iztapalapa o en el Estado de México etc.

Con ésto establecemos que la idea de conjunto es algo puramente intuitivo, algo no definido, algo entendido por cada persona, como producto de su experiencia.

Lo que podemos decir de un conjunto es que es una "colección" de objetos bien definidos. A estos objetos les llamamos miembros o elementos del conjunto. Por ejemplo.

1.- Los libros de la biblioteca

2.- Las letras a,e,i,o,u

3.- Los árboles de la escuela

4.- Los conectivos logicos

5.- Los habitantes del D.F.

6.- Los números dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

7.- Las proposiciones lógicas

8.- Los números primos 2,3,5,7,11,13,17,19,23,...

5.2.- NOTACIÓN

Es usual representar a los conjuntos por letras mayúsculas - A,B,C,.. etc. ó mayúsculas con subíndices como A_1, A_2, B_1, B_2, etc.

Los elementos o miembros de los conjuntos se simbolizan por- letras minúsculas a,b,c,d,.... etc.

Al escribir un conjunto lo podemos hacer por "enumeración" - de sus elementos o por "comprensión" de estos, encerrando al conjunto en llaves $\{\ \}$ y separando sus elementos por comas. Por -- ejemplo.

$A_1 = \{x \mid x \text{ es libro de la biblioteca}\}$

$A_2 = \{a, e, i, o, u\}$

$A_3 = \{x \mid x \text{ es árbol de la escuela}\}$

$A_4 = \{\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

$A_5 = \{x \mid x \text{ es habitante del D.F.}\}$

$A_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A_7 = \{x \mid x \text{ es una proposición lógica}\}$

$A_8 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$

De estos ejemplos los conjuntos pares A_2, A_4, A_6, A_8 estan - representados por "enumeración de sus elementos". Los nones A_1, A_3, A_5 y A_7 por "comprensión" o "propiedad común" de sus elemnetos.

Cuando escribimos $A_1 = \{x \mid x \text{ es libro de la biblioteca}\}$ --- significa que A_1 es el conjunto de todos los elementos x tales - que, x es libro de la biblioteca. Observamos que la linea vertical "$|$" se lee "tales que"

En general cuando escribimos un conjunto "por comprensión" - es de la forma

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

Donde P(x) es una proposición abierta, y A es el conjunto de todos aquellos elementos que hacen verdadera ésta proposición.

Si un objeto x es miembro o elemento del conjunto A, esto se representa por

$x \in A$ Donde $\in$ es la letra épsilón

que se lee como x es miembro de A, x está en A ó x pertenece a A.

x no es miembro del conjunto A, se simboliza por:

$$x \notin A$$

Por ejemplo Si A= $\{a,b,c,d,e,f\}$, entonces $a \in A, d \in A, g \notin A, m \notin A$

5.3.- CONJUNTO VACÍO.

Es muy útil introducir el concepto de conjunto vacío o conjunto nulo, como aquel conjunto que carece de elementos o aquel conjunto que no tiene algún elemento. El conjunto vacío lo representaremos por $\{\}$ ó por el símbolo ϕ

El conjunto vacío es en los conjuntos algo parecido al número cero en los números.

Ejemplos

$\phi = \{x \mid x \neq x\}$ ya que nada es diferente de sí mismo

$\phi = \{x \mid x$ es número dígito mayor de 10$\}$

Debemos destacar sin embargo que no hay dos o más conjuntos vacíos. El conjunto vacío es único. (no hay dos)

Si imaginamos a un conjunto como un costal o una caja con objetos dentro, entonces el conjunto vacío es un costal o caja vacía, pero sigue siendo un conjunto.

5.4.- SUBCONJUNTOS.

Analizando los conjuntos $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{0,1,2,3,4\}$, observamos que cualquier elemento de A, pertenece a B. Esto significa que todos los elementos de A, tambien estan en B, entonces decimos que A es subconjunto de B ó que A esta contenido en B. Se denota esta relación por.

$A \subseteq B$ se lee A contenido en B

Esta relación se define en forma más precisa por:

$A \subseteq B$ si, y sólo si, $x \in A$ entonces $x \in B$. (para cualquier x).

Simbólicamente esta definición quedará:

$$A \subseteq B \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in B) \ldots \text{para cualquier } x.$$

Ejemplos

1.- El conjunto $A_1 = \{x \mid x \text{ es vocal}\}$ es subconjunto de $B_1 = \{x \mid x \text{ es letra.}\}$

2.- El conjunto $A_2 = \{x \mid x \text{ es par}\}$ es subconjunto de $B_2 = \{x \mid x \text{ es número}\}$

3.- El conjunto $A_3 = \{x \mid x \text{ es mexicano}\}$ es subconjunto de - $B_3 = \{x \mid x \text{ es americano}\}$

De los conjuntos $P = \{0,1,2,3\}$ y $Q = \{3,4,5,6\}$, no podemos- asegurar que $P \subseteq Q$ o que $Q \subseteq P$ con lo que decimos que P no es subconjunto de Q, ni Q subconjunto de P, y se denota por.

$$P \not\subseteq Q \quad y \quad Q \not\subseteq P$$

En general si un conjunto A no es subconjunto de B significa que hay algún elemento en A que no está en B. es decir

$$A \not\subseteq B \longleftrightarrow a \in A \wedge a \notin B \text{ (para algún elemento a)}$$

<u>Observación</u>.- El conjunto vacío $\emptyset$ se considera subconjunto de - cualquier conjunto A. Es decir $\emptyset \subseteq A$.

Ya que de no ser así, debería haber un elemento del $\emptyset$ que - no pertenezca a A, pero ésto es imposible, ya que $\emptyset$ no tiene elementos, y así $\emptyset \subseteq A$.

5.5.- SUBCONJUNTO PROPIO.

Por la definición anterior cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo. Sin embargo diremos que A es subconjunto propio-de B, si A es subconjunto de B pero A no es igual a B. Esto es - A subconjunto propio de B si.

$$A \subseteq B \quad y \quad A \neq B$$

Ejemplos

1.- A= $\{1,2,3\}$ es subconjunto propio de B= $\{1,2,3,4,5\}$

2.- D= $\{x \mid x$ es duranguense $\}$ es subconjunto propio de -- M= $\{x \mid x$ es mexicano $\}$

Aquí debemos destacar que dos conjuntos son iguales, si tienen los mismos elementos. Es decir A igual a B, si cada elemento de A pertenece a B y cada elemento de B pertenece a A.

Simbílicamente

$$A = B \longleftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Ejemplo

Sean P= $\{x \mid x^2-5x+6=0\}$, Q= $\{2,3\}$, R= $\{2,2,3,3\}$, Resulta que P=Q=R

5.6.- CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS.

Intuitivamente un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos. Es decir si pudieramos contar sus elementos, este proceso de contar acaba o tiene un fin, en otro caso - se dice que el conjunto es infinito.

Ejemplos

1.- M= $\{x \mid x$ es mes del año$\}$, M es finito

2.- P= $\{x \mid x$ es número par$\}$, P es infinito

3.- A= $\{x \mid x$ es árbol de la tierra$\}$, A es finito

4.- F= $\{x \mid x$ es frase del idioma español$\}$, F es infinito.

5.7.- CONJUNTO UNIVERSAL.

En todo problema o estudio relacionado con los conjuntos, - seran estos subconjuntos de un conjunto dado. Este conjunto se- llamará conjunto universal. Esto significa que el conjunto uni-- versal es aquel al que pertenecen todos los elementos que intervienen en un problema o estudio particular y se denotará por $\mathcal{U}$

Ejemplos

1.- En un censo de la población mexicana, el conjunto uni-- versal son todos los mexicanos.

2.- Al analizar cualidades o características de los alumnos en una escuela, el conjunto universal son todos los --- alumnos de esa escuela.

Es importante destacar que el conjunto universal, contiene- a todos los demás conjuntos del problema o estudio que se realiza.

5.8.- CONJUNTOS EQUIVALENTES Y CARDINALIDAD.

Cuando los elementos de un conjunto se pueden asociar con - los elementos de otro conjunto de modo que cada elemento de cada conjunto tenga asociado uno, y solo uno del otro conjunto, entonces decimos que existe una correspondencia "uno a uno" entre --- ambos conjuntos.

De aqui decimos que dos conjuntos A y B son <u>equivalentes</u>, - si se pueden poner en correspondencia uno a uno entre si. Cuando A y B son equivalentes, se escribe $A \sim B$.

Ejemplos

1.- Los conjuntos $S=\{a,b,c,d\}$ y $T=\{1,2,3,4\}$ son equiva-- lentes ya que se pueden poner en correspondencia uno a uno, a continuación se muestran dos de estas correspondencias.

a	b	c	d
1	2	3	4

a	b	c	d
1	3	4	2

pero, claro existen otras correspondencias.

2.- El conjunto de los números pares P= {2,4,5,8,10, ... } y el conjunto de los nones I= {1,3,5,7,9,11,. . . . } son equivalentes ya que se pueden poner en correspondencia uno a uno por ejemplo

2	4	6	8	10	12	14	. . .
1	3	5	7	9	11	13	. . .

Llamaremos <u>cardinalidad</u> de un conjunto finito A, al número de sus elementos y lo denotamos por n (A)

Ejemplos

1.- Sea $P=\{a,b,c,d,e,f\}$, entonces $n(P)=6$

2.- Sea $V=\{x \mid x \text{ es vocal}\}$, entonces $n(V)=5$

3.- Sea $Q=\{0, \phi, \{\phi\}\}$, entonces $n(Q)=3$

La cardinalidad de $\emptyset$, el conjunto vacío, es 0

4.- Cuando los asientos en un salón estan todos ocupados y nadie está sin asiento, entonces el conjunto de asientos y el conjunto de personas en el salón son equivalentes y por lo tanto tienen la misma cardinalidad. Si de antemano conocemos el número de asientos, sabremos el número de personas aún sin contarlas.

5.9.- CONJUNTOS DISJUNTOS O AJENOS.

Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, es decir, si ningún elemento de A está en B y ningún elemento de B --

está en A, entonces diremos que A y B son disjuntos o ajenos.

Ejemplos

1.- Sean $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{g,h,i,j\}$, A y B son disjuntos

2.- Sean $P = \{2,4,5,8\}$ y $Q = \{1,3,5,7\}$, P y Q <u>no</u> son -- disjuntos ya que 5 pertenece a ambos conjuntos.

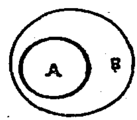
3.- Sean $S = \{x \mid x < 5\}$ y $T = \{x \mid x > 6\}$, S y T son -- disjuntos

5.10.- DIAGRAMAS DE VENN

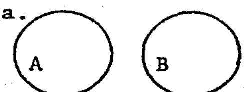
Es importante una representación gráfica o geométrica de los conjuntos y de las relaciones entre estos, ya que ello nos proporciona una visión más intuitiva del problema. Esto lo logramos --- mediante los diagramas de Venn, que representan a un conjunto por una area plana delimitada por una curva cerrada o simplemente un círculo.

Ejemplos.

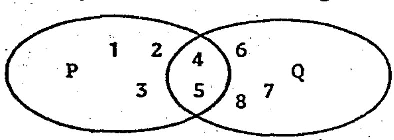
1.- $A \subseteq B$, se representa por el diagrama



2.- A y B son conjuntos disjuntos o ajenos, se describe por- el diagrama.

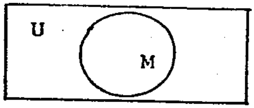


3.- Sean $P = \{1,2,3,4,5\}$ y $Q = \{4,5,6,7,8\}$. Se ilustran --- estos conjuntos con un diagrama de Venn de la forma.



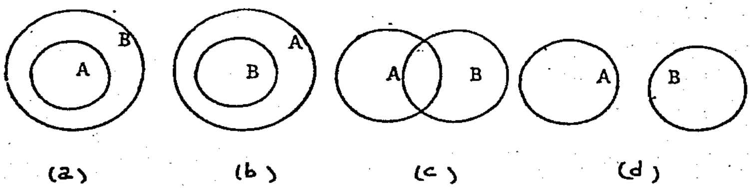
4.- Es usual ilustrar al conjunto universal con un rectángulo, por ejemplo si $U = \{x \mid x \text{ es ser humano}\}$ y $M = \{x \mid x$ - es mujer$\}$, entonces esto se ilustra por el diagrama de-

Venn.



ya que $M \subseteq U$

5.- Si A y B son dos conjuntos que no son iguales, entonces debe ocurrir solo una de las cuatro posibilidades, re-- presentadas por los siguientes diagramas.



Ejercicios

1.- Escribe los siguientes conjuntos por enumeración.

$A_1 = \{x \mid x \text{ es vocal}\}$

$A_2 = \{x \mid x \text{ es mes del año}\}$

$A_3 = \{x \mid x \text{ es múltiplo de tres}\}$

$A_4 = \{x \mid x \text{ es entero mayor que 3 pero menor o igual a } 10\}$

2.- Escribe cada conjunto siguiente por comprensión.

$B_1 = \{$Lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sabado, domingo$\}$

$B_2 = \{2,3,4,5,6,7,8\}$

$B_3 = \{-1, 1\}$

$B_4 = \{0,4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,44,\ldots\}$

3.- Sea $A = \{p, q, r\}$. Determina cuáles afirmaciones son incorrectas y porqué.

a) $p \in A$

b) $p \subseteq A$

c) $\{p\} \subseteq A$

d) $\{q\} \in A$

4.- Sean $P = \{1,2,3\}$, $Q = \{1,2,3,4\}$, $R = \{3,4\}$. Señala las afirmaciones incorrectas y por qué.

a) $P \subset P$

b) $P \subseteq P$

c) $P \subset Q$

d) $P \subseteq Q$

e) $Q \subseteq R$

f) $R \subseteq Q$

g) $P \in Q$

h) $3 \subseteq P$

5.- Señala los conjuntos finitos

a) $\{x \mid x$ es día de un año$\}$.

b) $\{1,2,3,4,5,\ldots, 1000\}$

c) $\{x \mid x$ es impar$\}$

d) $\{x \mid x$ es animal que vive en la tierra$\}$

e) $\{x \mid x$ es número natural$\}$

6.- ¿Cuáles conjuntos son iguales?

a) $A= \{x \mid x$ es letra de la palabra "isaias"$\}$

b) $B= \{x \mid x$ es letra de la palabra "asi"$\}$

c) $C= \{a,i,s\}$

7.- Escribir todos los subconjuntos de $S= \{a,b,c\}$, Hay ocho.

8.- ¿Cuántos subconjuntos tiene $T= \{a,b,c,d,e\}$?

9.- Sean A,B y C tres conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ ¿podemos asegurar que $A \subseteq C$? por qué.

10.- De los que siguen ¿qué conjuntos son diferentes?

$\{0\}$, $\{\emptyset\}$, $\emptyset$, $\{\}$.

11.- Escribir tres distintas correspondencias uno a uno entre $\{1,2,3\}$ y $\{x,y,z\}$

12.- En la "cola" para comprar tortillas hay un conjunto de hombres y un conjunto de mujeres formadas en una linea, alterna damente hombre y mujer. Si la cola empieza con una mujer y termina en un hombre, ¿Podemos asegurar que estos conjuntos de hombres y mujeres son equivalentes?

13.- En un salón todos los alumnos estan sentados, ¿podemos asegurar que el conjunto de alumnos es equivalente al conjunto de asientos en el salón? ¿Por qué?

14.- Sea $M = \{a,b,c,d\}$

a) Escribir todos los subconjuntos de M de cardinalidad uno llamar A al conjunto de dichos subconjuntos.

b) Escribir todos los subconjuntos de M de cardinalidad tres llamar B al conjunto de dichos subconjuntos.

c) ¿Son equivalentes A y B? Hallar n(A) y n(B)

15.- Encontrar la cardinalidad de cada conjunto.

a) $A_1 = \{x \mid x$ es letra del alfabeto español$\}$

b) $A_2 = \{x \mid x$ es conectivo lógico$\}$

c) $A_3 = \{x \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$

d) $A_4 = \{x \mid x$ es número entero entre 2 y 9$\}$

e) $A_5 = \{x \mid x$ es página de estas notas$\}$

f) $A_6 = \{x \mid x$ es número par entre 5 y 29$\}$

16.- Sean A,B y C tres conjuntos donde $B \subseteq A$, $C \subseteq A$ pero $B \neq C$. Haz un diagrama que represente ésta relación.

17.- Sean los conjuntos $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $P = \{0,2,4,6,8\}$, $Q = \{1,3,5,7,9\}$ y $R = \{5,6,7,8\}$. Hacer un diagrama de Venn que represente a los cuatro conjuntos.

18.- Hacer un diagrama que simbolice los siguientes conjuntos

$U = \{x \mid x \text{ es mexicano}\}$, $M = \{x \mid x \text{ es menor de 18 años}\}$.

$H = \{x \mid x \text{ es hombre}\}$ y $E = \{x \mid x \text{ es estudiante}\}$

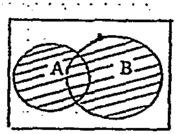
5.11.- OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS.

Así como existen las operaciones de suma, multiplicación y diferencia entre los números, existen las operaciones de unión, intersección y diferencia entre los conjuntos.

5.12.- UNIÓN.

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B, y se denota por AUB. Se lee "A unión B"

Esto se representa por el diagrama de Venn.



Ejemplos:

1.- Sean $P = \{1,2,3,4\}$ y $Q = \{3,4,5,6\}$, entonces
$P \cup Q = \{1,2,3,4,5,6\}$

2.- Sean $E = \{x \mid x \text{ es estudiante}\}$ y $B = \{x \mid x \text{ es burócrata}\}$, entonces $E \cup B = \{x \mid x \text{ es estudiante ó burócrata}\}$

Brevemente la unión de A con B se puede definir asi:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

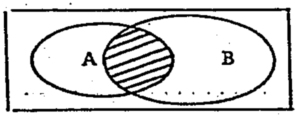
5.13.- INTERSECCIÓN

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B.

Es decir todos aquellos elementos que pertenecer a A y que tambien pertenecen a B. Se denota la intersección de A y B por

$A \cap B$ que se lee "A intersección B"

Esta operación queda representada por el diagrama de Venn.



Ejemplos:

1.- Sean los conjuntos $P = \{1,2,3,4\}$ y $Q = \{3,4,5,6\}$, entonces $P \cap Q = \{3,4\}$

2.- Sean $E = \{x \mid x \text{ es estudiante}\}$ y $B = \{x \mid x \text{ es burócrata}\}$ entonces $E \cap B = \{x \mid x \text{ es estudiante y burócrata}\}$

3.- Si $A = \{2,4,6,8,...\}$ y $B = \{3,6,9,...\}$, entonces

$A \cap B = \{6,12,18,24,...\}$.

4.- Si $M = \{x \mid x \text{ es mujer}\}$ y $A = \{x \mid x \text{ es hombre}\}$, entonces

$M \cap H = \emptyset$

La intersección de A y B se puede definir asi:

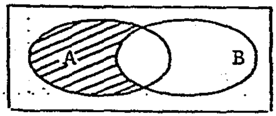
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

5.14.- DIFERENCIA.

La diferencia de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A pero que no pertenecen a B. La diferencia de A y B se denota por.

$A - B$ ó $A \setminus B$ que se lee "A menos B"

La representación de esta operación en un diagrama es:



Ejemplos:

1.- Sean los conjuntos $P=\{1,2,3,4\}$ y $Q=\{3,4,5,6\}$, entonces $P \setminus Q=\{1,2\}$ y $Q \setminus P=\{5,6\}$

Obsérvese que esta operación no es conmutativa

2.- Sean $E=\{x \mid x \text{ es estudiante}\}$ y $B=\{x \mid x \text{ es burócrata}\}$, entonces

$E \setminus B=\{x \mid x \text{ es estudiante pero no es burócrata}\}$

$B \setminus E=\{x \mid x \text{ es burócrata pero no es estudiante}\}$

3.- Si $P=\{2,4,6,8,\ldots\}$ pares y $N=\{1,3,5,7,\ldots\}$ nones, entonces

$P \setminus N=\{2,4,6,8,\ldots\}$ y $N \setminus P=\{1,3,5,7,\ldots\}$

La diferencia de A y B se puede definir concisamente como:

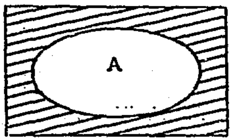
$A \setminus B=\{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$

5.15.- COMPLEMENTO.

El complemento de un conjunto A es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto universal U, pero que no pertenecen al conjunto A. Es decir el complemento de A es la diferencia de U y A. Se denota el complemento de A por

A' se lee "complemento de A"

Esta operación se representa por el diagrama de Venn.



Ejemplos:

1.- Sea $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ conjunto universal y - - - -
$A=\{0,1,2,3\}$ entonces

$$A'=\{4,5,6,7,8,9\}$$

2.- Si $U=\{x \mid x$ es letra del alfabeto$\}$ es conjunto universal y
$B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, entonces
$B'=\{h,i,j,k,l,m,\ldots,x,y,z\}$

3.- Si $U=\{x \mid x$ es habitante del D.F.$\}$ es conjunto universal
y $P=\{x \mid x$ es habitante de Iztapalapa$\}$, entonces
$P'=\{x \mid x$ no es habitante de Iztapalapa$\}$.

El complemento de A se puede definir así:

$$A'=\{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\} = U \setminus A$$

La unión, intersección, diferencia y complemento, son las operaciones básicas de los conjuntos. Veamos un ejemplo.

Sea $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ conjunto universal
$A=\{0,1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6,7\}$ y $C=\{5,6,7,8,9\}$, entonces

1.- $A \cup B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$
2.- $A \cup C=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
3.- $A \cap B=\{3,4\}$
4.- $A \cap C=\emptyset$
5.- $A' =\{5,6,7,8,9\}$
6.- $B' =\{0,1,2,8,9\}$
7.- $(A \cup B)'=\{8,9\}$

8.- $(A \cup C)' = \emptyset$.

9.- $(A \cap B)' = \{0,1,2,5,6,7,8,9\}$

10.- $A \setminus B = \{0,1,2\}$

11.- $A \setminus C = \{0,1,2,3,4\}$

12.- $B \setminus C = \{3,4\}$

13.- $A' \cup B' = \{0,1,2,5,6,7,8,9\}$

14.- $A' \cap B' = \{8,9\}$

15.- $A \cap B' = \{0,1,2\}$

16.- $A \cup B \cup C = U$

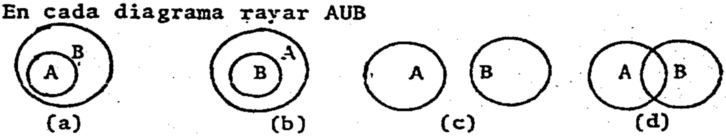
17.- $A \cap B \cap C = \emptyset$.

18.- $(A \cup B)' \setminus (A \cap B)' = \emptyset$

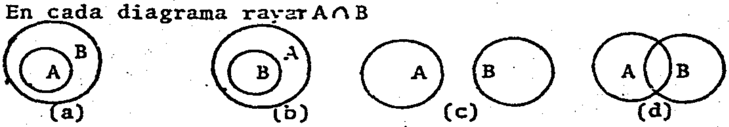
Observación. Si A y B son dos conjunto disjuntos o ajenos, entonces $A \cap B = \emptyset$.

Ejercicios

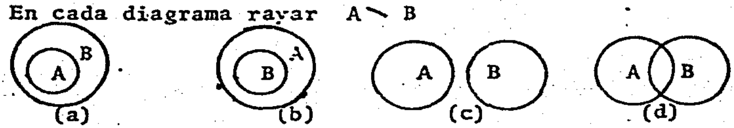
1.- En cada diagrama rayar $A \cup B$



2.- En cada diagrama rayar $A \cap B$



3.- En cada diagrama rayar $A \setminus B$



$Q = \{d, e, f\}$ y $R = \{f, g\}$,
Hallar.

a) $P \cup Q$

b) $Q \cup R$

c) $P \cap Q$

d) $P \cap \tilde{R}$

e) $P \cup P$

f) $Q \cap Q$

g) $P \cup Q \cup R$

h) $P \cap Q \cap R$

i) $P \setminus Q$

j) $P \setminus P$

5.- Si $U = \{x \mid x \text{ es estudiante}\}$ es conjunto universal, $A = \{x \mid x \text{ es mujer}\}$ y $B = \{x \mid x \text{ es menor de 18 años}\}$. Hallar.

a) A'

b) B'

c) $A \cup B$

d) $A \cap B$

e) $A \setminus B$

f) $B \setminus A$

g) $A' \cup B'$

h) $A' \cap B'$

6.- Sean $U=\{a,e,i,o,u\}$ conjunto universal, $M=\{a,e\}$, $N=\{e,i\}$, $R=\{e,o,u\}$. Hallar.

a) M'

b) N'

c) $M \cup N$

d) $N \cup R$

e) $M \cap N$

f) $N \cap R$

g) $M \setminus N$

h) $N \setminus R$

i) $(M \cup N) \cap (N \cup R)$

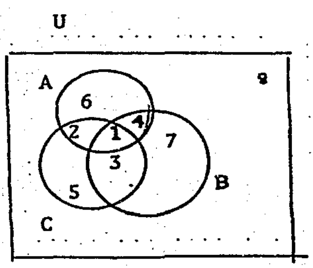
j) $(M \setminus N) \cup (N \setminus R)$

k) $((M' \cup N') \setminus R)'$

7.- Consideremos el diagrama de Venn de los conjuntos U, A, B y C.

Donde cada número representa el área de cada región ajena.

Es decir podemos imaginar el diagrama como el mapa de un continente, donde cada número del 1 al 7 son países y el 8 es el océano. Se desea anotar en cada conjunto las regiones que ocupa.



Ejemplo

Conjunto	Regiones
A	(1,2,4,6)
$A \cup B$	(1,2,3,4,6,7)
$B \cap C$	(1,3)

Hallar las regiones para cada conjunto.

	Conjunto	Regiones
1.-	B	______________
2.-	$B \cup C$	______________
3.-	$A \cup C$	______________
4.-	$A \cap B$	______________
5.-	$A \cap C$	______________
6.-	$A \setminus B$	______________
7.-	$B \setminus C$	______________
8.-	A'	______________
9.-	B'	______________
10.-	$A \cup B \setminus B \cap C$	______________
11.-	$A \setminus B \cup C$	______________
12.-	$(A \cup B \cup C)'$	______________
13.-	$A \cap B \cap C$	______________
14.-	$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$	______________
15.-	$(A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B \cap C')$	______________

8.- Lo mismo del ejercicio anterior (7) pero ahora lo haremos -- a la inversa. Es decir se dan las regiones y se pide anotar el conjunto.

	Regiones	Conjunto
1.-	(1,3,4,7)	______________
2.-	(4,6,7,8)	______________
3.-	(4,6)	______________
4.-	(2,3,4,5,6,7,8)	______________
5.-	(3,5,7)	______________
6.-	(1,2,3)	______________

7.- (1,3,4) ________________

8.- (6) ________________

9.- (5,8) ________________

10.- (2,3,4) ________________

11.- (5,6,7) ________________

12.- (1,8) ________________

5.16.- LEYES DE LAS OPERACIONES.

Las operaciones entre conjuntos (Unión, intersección, complemento y diferencia) al igual que las proposiciones lógicas, estan sujetas a las siguientes leyes:

Sean A, B y C conjuntos cualesquiera de un mismo universo

Idempotencia

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

Conmutativa

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

Asociativa

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Distributiva

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

D'Morgan

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $\qquad$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Estas leyes son los axiomas básicos para el desarrollo del Algebra de conjuntos.

La diferencia entre conjuntos es tambien la intersección de conjuntos, de la forma:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\} = A \cap B'.$$

Observación 1. El complemento del conjunto vacío es el -- conjunto universal y viceversa. Es decir

$$\emptyset' = U \qquad y \qquad U' = \emptyset$$

Observación 2. El complemento del complemento de A, es A. esto es.

$$(A')' = A$$

Observación 3. La unión de A con A' es el universo y la -- intersección de A con A' es vacio. Es decir

$$A \cup A' = U \qquad y \qquad A \cap A' = \emptyset$$

Observación 4. La unión de A con $\emptyset$, es A y la intersección de A con $\emptyset$, es $\emptyset$. O sea.

$$A \cup \emptyset = A \qquad y \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$

Observación 5. La unión de Acon U, es U y la intersección de A con U, es A. brevemente

$$A \cup U = U \qquad y \qquad A \cap U = A$$

En base a estas observaciones y a las leyes escritas anteriormente, se puede reducir algebráicamente

Por ejemplo

Reducir las expresiones

a) $A \cap (A' \cup B)$

b) $A' \cup (A' \cup B')'$

c) $A \cup (A \cup B)'$

d) $(A \cup (B \cap A')) \setminus A$

e) $(A \cup B)' \setminus A'$

Solución:

a) $$\begin{aligned} A\cap(A'\cup B) &= (A\cap A')\cup(A\cap B) \\ &= \emptyset\cup(A\cap B) \\ &= A\cap B \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} A'\cup(A'\cup B')' &= A'\cup(A''\cap B'') \\ &= A'\cup(A\cap B) \\ &= (A'\cup A)\cap(A'\cup B) \\ &= U\cap(A'\cup B) \\ &= A'\cup B \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} A\cup(A\cup B)' &= A\cup(A'\cap B') \\ &= (A\cup A')\cap(A\cup B') \\ &= U\cap(A\cup B') \\ &= A\cup B' \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} (A\cup(B\cap A') \setminus A &= ((A\cup B)\cap(A\cup A')) \setminus A \\ &= ((A\cup B)\cap U) \setminus A \\ &= (A\cup B) \setminus A \\ &= (A\cup B)\cap A' \\ &= (A\cap A')\cup(B\cap A') \\ &= \emptyset \cup (B\cap A') \\ &= B\cap A' \\ &= B\setminus A \end{aligned}$$

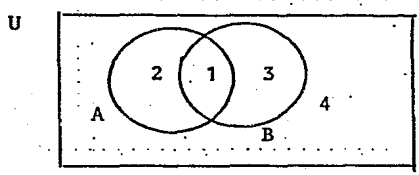
e) $$\begin{aligned} (A\cup B)'\setminus A' &= (A\cup B)'\cap A'' \\ &= (A\cup B)'\cap A \\ &= (A'\cap B')\cap A \\ &= (B'\cap A')\cap A \\ &= B'\cap(A'\cap A) \\ &= B'\cap\emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Se puede verificar estas igualdades (no demostrar) mediante un diagrama de Venn. Utilizando el siguiente principio

Principio: Dos conjuntos son iguales en un diagrama de Venn si, y solo sí ocupan la misma región

Verificación del ejemplo "a". Donde se obtuvo que:

$$A \cap (A' \cup B) = A \cap B$$



Del diagrama de Venn, donde se han separado las regiones -- ajenas, tenemos:

	Conjunto	Región
1.-	A	(1,2)
2.-	B	(1,3)
3.-	A'	(3,4)
4.-	$A' \cup B$	(1,3,4)
5.-	$A \cap (A' \cup B)$	(1)
6.-	$A \cap B$	(1)

Comparando estos dos últimos conjuntos 5 y 6, observamos que ocupan exactamente la misma región y por lo tanto son iguales. -- Análogmante se pueden verificar las demás igualdades. -

5.17 CARDINALIDAD DE LAS OPERACIONES.

En la parte 5.8 llamamos cardinalidad de un conjunto A finito, al número de sus elementos y lo representamos por n (A), queremos ahora saber la cardinalidad de los conjuntos compuestos -- por operaciones.

a) Cardinalidad de la unión.

Si A y B son conjuntos de un mismo universo, entonces

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Ejemplo

Si $A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ y $B = \{c,d,e,f,g,h,i,j,k\}$, entonces como $A \cap B = \{c,d,e,f,g\}$ y $n(A) = 7$, $n(B) = 9$, $n(A\ B) = 5$ tenemos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7 + 9 - 5 = 11$$

b) Cardinalidad del complemento.

Si A es un conjunto cuyo conjunto universal es U, entonces

$n(A') = n(U) - n(A)$

Ejemplo

Sea $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y $A = \{1,3,5,7,9\}$, entonces

$n(U) = 10$, $n(A) = 5$ y $n(A') = n(U) - n(A) = 10 - 5 = 5$

c) Cardinalidad de la diferencia.

Cuando A y B son conjuntos del mismo universo, entonces

$n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$

Ejemplo

Sean $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ y $B = \{d,e,f,g,h\}$, entonces

$n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B) = 6 - 3 = 3$

d) Cardinalidad de conjuntos ajenos o disjuntos.

Sabemos que dos conjuntos A y B son disjuntos, si no tienen elementos en común (5.9), esto es $A \cap B = \emptyset$

Si A y B son conjuntos disjuntos, diremos que son mutuamente excluyentes. Esto es si elegimos un elemento de A, es imposible que tambien sea elemento de B y viceversa.

Cuando A y B son disjuntos o mutuamente excluyentes, la cardinalidad de su unión es.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

ya que $A \cap B = \emptyset$ y $n(\emptyset) = 0$

Ejemplo

Sean $A = \{0,2,4,6,8\}$ y $B = \{1,3,5,7,9\}$

Vemos que $A\ B = \emptyset$, por lo cual son ajenos y

$n(A) = 5$

$n(B) = 5$

Por lo tanto

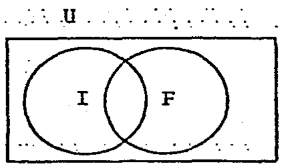
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$
$$= 5 + 5$$
$$= 10$$

Las fórmulas anteriores de cardinalidad, son útiles en la solución de algunos problemas.

Ejemplo 1.-

En un grupo de 100 estudiantes 50 estudian inglés, 30 estudian francés y 40 no estudian idioma alguno ¿ Cuántos alumnos estudian ambos idiomas?

Haciendo el diagrama de Venn tenemos:



donde

$n(U) = 100$

$n(I) = 50$

$n(F) = 30$

$n((I \cup F)') = 40$

$I = \{x \mid x \text{ estudia inglés}\}$

$F = \{x \mid x \text{ estudia francés}\}$

Lo que queremos saber es $n(I \cap F)$

Aplicamos la cardinalidad del complemento para encontrar $n(I \cup F)$.

$$n((I \cup F)') = n(U) - n(I \cup F)$$

de donde

$$n(I \cup F) = n(U) - n((I \cup F)')$$
$$= 100-40$$
$$= 60$$

Como $n(I \cup F) = n(I) + n(F) - n(I \cap F)$.

Sustituyendo valores tenemos

$$60 = 50 + 30 - n(I \cap F)$$

despejamos $n(I \cap F)$ tenemos:

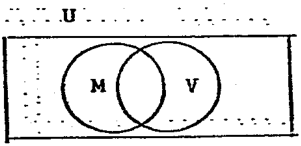
$$n(I \cap F) = 50+30-60$$
$$n(I \cap F) = 20$$

Por lo tanto el número de alumnos que estudian ambos idiomas es de 20.

Ejemplo 2.

En una encuesta hecha a 50 alumnos del último año de bachillerato, 25 desean estudiar Medicina, 35 desean estudiar Veterinaria y 5 no desean estudiar estas carreras ¿Cuántos alumnos --- desean estudiar solamente medicina?

El diagrama de Venn queda así:



donde

$M = \{x \mid x$ estudio med.$\}$

$V = \{x \mid x$ estudio vet.$\}$

$n(U) = 50$

$n(M) = 25$

$n(V) = 35$

$n((M \cup V)') = 5$

Se desea saber $n(M \setminus V)$ y como

$n(M \setminus V) = n(M) - n(M \cap V)$, debemos encontrar primero $n(M \cap V)$,

Por la cardinalidad del complemento tenemos:

$$n(M \cup V) = 50 - 5 = 45$$

Como

$$n(M \cup V) = n(M) + n(V) - n(M \cap V)$$

tenemos que:

$$45 = 25 + 35 - n(M \cap V)$$

despejamos $n(M \cap V)$ y tenemos

$$n(M \cap V) = 25 + 35 - 45 = 15$$

Por lo cual la respuesta al problema es

$$n(M \setminus V) = n(M) - n(M \cap V) =$$

$$= 25 - 15$$

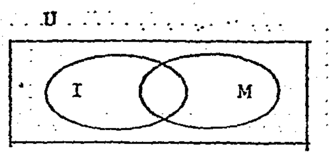
$$= 10$$

Por lo tanto 10 alumnos desean estudiar sólo medicina.

Ejemplo 3

La clase de primer año en una universidad está formada por 100 estudiantes. De estos 40 son mujeres, 73 estudian Inglés y 12 mujeres no estudian inglés ¿Cuántos hombres no estudian ---- Inglés?

Diagrama de Venn



donde $n(U)= 100$

$n(I)= 73$

$n(M)= 40$

$n(M \setminus I)= 12$

$I= \{x \mid x \text{ estudia inglés}\}$
$M= \{x \mid x \text{ es mujer}\}$

Se desea saber $n((I \cup M)')$ y como

$n((I \cup M)')= n(U)-n(I \cup M)$. Debemos encontrar $n(I \cup M)$

Como $n(M \setminus I)= n(M)-n(M \cap I)$ tenemos que:

$$12 = 40 - n(M \cap I)$$

De donde.

$$n(M \cap I)= 40-12= 28$$

Y como

$$n(M \cup I)= n(M)+n(I)-n(M \cap I)$$

entonces

$$n(M \cup I)= 40+73-28= 85$$

De ahi que.

$$n((I \cup M)')= n(U)-n(I \cup M)$$

$$= 100 - 85$$

$$= 15$$

Por lo tanto el número de hombres que no estudian inglés es - de 15.

Estamos en condiciones de extender la cardinalidad de la --- unión de dos conjuntos, a tres conjuntos. Esto es.

$$n(A \cup B \cup C)$$

Para encontrar la fórmula o modelo para calcular éste número, recordemos que la cardinalidad para la unión de dos conjuntos es:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

De ahí que al aplicar ésta fórmula tres veces, junto con las propiedades asociativa, distributiva y de idempotencia, tenemos:

$$\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C) &= n(A \cup (B \cup C)) \\
&= n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C)) \\
&= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) - n((A \cap B) \cap (A \cap C))] \\
&= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la cardinalidad para tres conjuntos es:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo

Si $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{d, e, f, g, h, i\}$ y $C = \{c, e, f, g, h, j, k\}$ como $A \cap B = \{d, e, f\}$, $B \cap C = \{e, f, g, h\}$, $A \cap C = \{c, e, f\}$ y $A \cap B \cap C = \{e, f\}$,

entonces $n(A) = 6$, $n(B) = 6$, $n(C) = 7$, $n(A \cap B) = 3$, $n(B \cap C) = 4$, $n(A \cap C) = 3$ y $n(A \cap B \cap C) = 2$

Por lo tanto

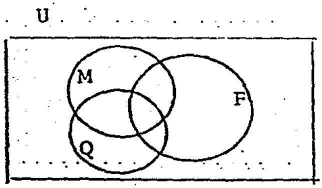
$$\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\
&= 6 + 6 + 7 - 3 - 4 - 3 + 2 = 11
\end{aligned}$$

De ahí que $n(A \cup B \cup C) = 11$

Ejemplo 4

En un grupo de 30 alumnos de Bachillerato, 20 obtuvieron MB en matemáticas, 23 obtuvieron MB en química, 18 obtuvieron MB en física, 15 obtuvieron MB en matemáticas y en química, 12 obtuvieron MB en matemáticas y en física y 14 obtuvieron MB en química y en física. No hubo ninguno sin MB. ¿Cuántos de ellos obtuvieron MB en los tres cursos?

Diagrama de Venn.



$M = \{x \mid x \text{ obtuvo MB en matemáticas}\}$

$F = \{x \mid x \text{ obtuvo MB en física}\}$

$Q = \{x \mid x \text{ obtuvo MB en química}\}$

Como:

$n(M) = 20$

$n(F) = 18$

$n(Q) = 23$

$n(M \cap F) = 12$

$n(F \cap Q) = 14$

$n(M \cap Q) = 15$

$n(U) = 30$

Aplicando la fórmula de la cardinalidad de la unión

$$n(M \cup F \cup Q) = n(M) + n(F) + n(Q) - n(M \cap F) - n(F \cap Q) - n(M \cap Q) + n(M \cap F \cap Q)$$

Sustituyendo valores y reduciendo operaciones, tenemos

$$30 = 20 + 18 + 23 - 12 - 14 - 15 + n(M \cap F \cap Q)$$

$$30 = 20 + n(M \cap F \cap Q)$$

Despejamos $n(M \cap F \cap Q)$ y obtenemos.

$$n(M \cap F \cap Q) = 10$$

Por lo cual 10 alumnos obtuvieron MB en los tres cursos.

Ejemplo 5

En una encuesta realizada a 80 familias en un día cualquiera, se obtuvo la siguiente información: 42 familias consumieron tortilla, 41 familias consumieron pan, 34 familias consumieron carne, 18 consumieron pan y tortilla, 20 consumieron pan y carne, 16 tortilla y carne, además 5 familias no consumieron alguno de estos alimentos ¿Cuántas familias consumieron en ese dia:

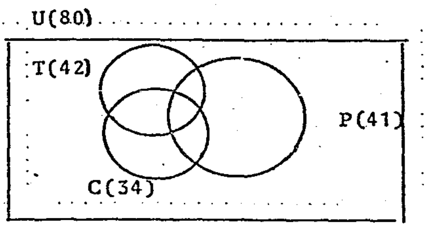
a) Pan, tortilla y carne?

b) Sólo uno de los alimentos?

c) Sólo dos de los alimentos?

d) No más de dos alimentos?

diagrama



$T = \{x \mid x \text{ consume tortilla}\}$

$P = \{x \mid x \text{ consume pan}\}$

$C = \{x \mid x \text{ consume carne}\}$

$n(T) = 42$ $\quad n(P \cap T) = 18$ $\quad n((P \cup T \cup C)') = 5$

$n(P) = 41$ $\quad n(P \cap C) = 20$

$n(C) = 34$ $\quad n(T \cap C) = 16$

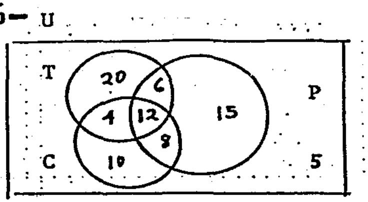
Solución

a) $n(P \cup T \cup C) = n(U) - n((P \cup T \cup C)') = 80 - 5 = 75$

$$n(P \cup T \cup C) = n(P) + n(T) + n(C) - n(P \cap T) - n(P \cap C) - n(T \cap C) + n(P \cap T \cap C)$$

$$75 = 42 + 41 + 34 - 18 - 20 - 16 + n(P \cap T \cap C)$$

Por lo cual $n(P \cap T \cap C) = 12$. Es decir 12 familias consumen los tres alimentos. Con esto completamos el diagrama, escribiendo en cada región su cardinalidad.



b) "Sólo uno de estos alimentos" significa, que, si una familia consumió tortilla, no consumió pan ni carne, o si consumió pan, no consumió tortilla ni carne, o si consumió carne, no consumió tortilla ni pan. En el lenguaje simbólico de los conjuntos es.

$$(T\cap P'\cap C')\cup(T'\cap P\cap C')\cup(T'\cap P'\cap C)$$

Observando el diagrama obtenemos

$$n(T\cap P'\cap C')= 20$$

$$n(T'\cap P\cap C')= 15$$

$$n(T'\cap P'\cap C)= 10$$

Como estos conjuntos son mutuamente excluyentes, entonces

$$n((T\cap P'\cap C')\cup(T'\cap P\cap C')\cup(T'\cap P'\cap C))= 20 + 15+10= 45$$

Por lo cual 45 familias consumieron sólo uno de los alimentos.

c) "Solo dos alimentos", en lenguaje de conjuntos es:

$$(T\cap P\cap C')\cup(T\cap P'\cap C)\cup(T'\cap P\cap C)$$

Del diagrama obtenemos que:

$$n(T\cap P\cap C')= 6$$

$$n(T\cap P'\cap C)= 4$$

$$n(T'\cap P\cap C)= 8$$

Por ser mutuamente excluyentes estos conjuntos, se obtiene que.

$$n((T\cap P\cap C')\cup(T\cap P'\cap C)\cup(T'\cap P\cap C))= 6+4+8= 18$$

De ahí que 18 familias consumieron sólo dos de los alimentos

d) "No más de dos alimentos", significa que no consumieron los tres alimentos el mismo día. En términos del lenguaje de conjuntos

$(T \cap P \cap C)'$

A lo cual

$$n((T \cap P \cap C)') = n(U) - n(T \cap P \cap C)$$
$$= 80 - 12$$
$$= 68$$

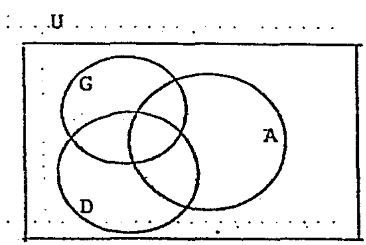
Por lo tanto 68 familias no consumieron los tres alimentos (más de dos)

Es oportuno resolver el problema planteado al inicio de éste capítulo, ya que contamos con los elementos para hacerlo. Recordando el problema, menciona que:

En nuestro grupo de clase hay 50 alumnos, entre los cuales - 17 practican gimnasia, 16 practican atletismo, 13 practican danza, 7 practican gimnasia y danza, 8 practican danza y atletismo, 5 gimnasia y atletismo, si además sabemos que 21 alumnos no practican alguna de estas actividades ¿Cuántos alumnos practican las tres actividades?

Solución:

Diagrama de Venn



$G = \{x \mid x \text{ practica gimnasia}\}$

$A = \{x \mid x \text{ practica atletismo}\}$

$D = \{x \mid x \text{ practica danza}\}$

Como:

$n(G)= 17$

$n(A)= 16$

$n(D)= 13$

$n(G\cap A)= 5$

$n(A\cap D)= 8$

$n(G\cap D)= 7$

$n(U)= 50$

Así 21 alumnos no practican alguna de estas actividades, --- entonces

$$n((G\cup A\cup D)')= 21$$

Como $n((G\cup A\cup D)')= n(U)-n(G\cup A\cup D)$

$$21 = 50-n(G\cup A\cup D)$$

De donde

$$n(G\cup A\cup D)= 50-21= 29$$

Deseamos saber cuantos alumnos practican gimnasia, atletismo y danza, es decir queremos conocer $c(G\cap A\cap D)$.

Utilizando la cardinalidad de la unión de G,A y D, tenemos:

$$n(G\cup A\cup D)=n(G)+n(A)+n(D)-n(G\cap A)-n(A\cap D)-n(G\cap D)+ n(G\cap A\cap D)$$

Sustituyendo valores tenemos.

$$29= 17+16+13-5-8-7+n(G\cap A\cap D)$$

Despejamos $n(G\cap A\cap D)$ y tenemos que:

$$n(G\cap A\cap D)= 3$$

Por lo tanto 3 alumnos practican las tres actividades.

Ejercicios

1.- Reduce los siguientes conjuntos.

a) $A' \cap (A \cup B')$

b) $(A' \cap B) \cup B'$

c) $A \cup (A \cup B')'$

d) $(A' \cap B)' \cap B$

e) $A \setminus (A \cap B)$

f) $A \cup B \setminus A$

g) $A \cup B \setminus A \cap B$

h) $(A' \cap (A' \cap B)')'$

i) $((A \cup B) \cap C) \cup ((A \cup B) \cap C')$

2.- Verifica las siguientes igualdades, empleando [illegible] Venn.

a) $(A \cup B')' = A' \cap B$

b) $(A \setminus B)' = A' \cup B$

c) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$

d) $A \setminus (A \cap B)' = A \cap B$

e) $A \cap (B \setminus C) = A \cap B \setminus A \cap C$

3.- Sea U el conjunto universal A y B conjuntos con las cardinalidades siguientes. $n(U) = 100$, $n(A) = 40$, $n(B) = 50$ y $n(A \cup B) = 75$ Calcular.

a) $n(A \cap B)$

b) $n(A \cup B)'$

c) $n(A' \cap B')$

d) $n(A' \cup B')$

e) $n(A' \cap B)$

f) $n(A' \cup B)$

g) $n(A \setminus B)$

4.- De un grupo de 70 alumnos que eligieron las materias optativas Matemáticas, Biología y Economía, en la forma siguiente. 26 eligieron Matemáticas, 19 Biología, 36 Economía, 9 Matemáticas y Biología, 6 Biología y Economía, 10 eligieron Matemáticas y Economía, y 4 eligieron las tres materias ¿Cuántos alumnos eligieron.

a) sólo economía?

b) exclusivamente dos materias?

c) ninguna de estas materias?

5.- De 150 soldados que participaron en una batalla, 80 perdieron un ojo, 70 perdieron una oreja y 20 escaparon ilesos ¿ Cuántos soldados perdieron simultáneamente un ojo y una oreja?

6.- De 150 soldados que participaron en una cruenta batalla, 80 perdieron un ojo, 70 perdieron una oreja, 50 perdieron una pierna, 20 perdieron un ojo y una oreja, 25 un ojo y una pierna, 30 una oreja y una pierna, y 10 perdieron un ojo, una oreja y una pierna. ¿Cuántos escaparon ilesos?

7.- Una encuesta basada en 100 estudiantes de bachillerato reveló la información siguiente de su ingreso a los cursos de matemáticas, Biología y Ciencias políticas.

26 estudian matemáticas

65 estudian ciencias políticas

65 estudian Biología

14 estudian matemáticas y ciencias políticas

13 estudian matemáticas y biología

40 estudian ciencias políticas y biología

8 estudian matemáticas, ciencias políticas y biología

a) ¿Cuántos estudiantes llevan matemáticas como único curso?

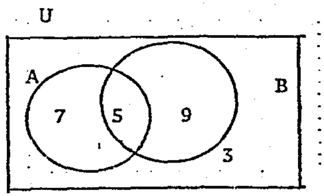
b) ¿Cuántos no siguen ninguno de los tres cursos?

c) ¿Cuántos llevan matemáticas y biología pero no ciencias políticas?

8.- En un grupo de 33 personas hay solamente dos tipos de personas, especialistas en estadística y mentirosos. Si 21 son especialistas en estadística y 19 son mentirosos, ¿Cuántos son a la vez mentirosos y especialistas en estadística?

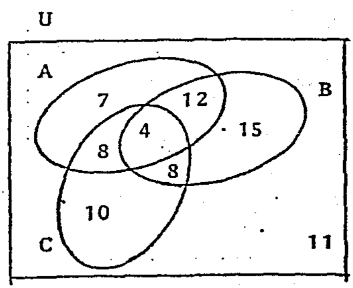
9.- Usando la información dada en la figura. Hallar.

a) $n(A)$
b) $n(B)$
c) $n(A \cup B)$
d) $n(A \setminus B)$
e) $n(B \setminus A)$
f) $n(A' \cup B')$
g) $n(A' \cap B')$
h) $n(A')$



10.- Un distribuidor tiene 75 automoviles, de los cuales los de (A) son automáticos, los de (B) son compactos y los de (C) son de tracción delantera. Usando la información de la figura. Calcular

a) $n(A)$
b) $n(B)$
~~c)~~ $n(C)$
d) $n(A \cap B)$
e) $n(A \cap C)$
f) $n(A \cap B \cap C)$
g) $n(A \cup B)$
h) $n(B \cup C)$
i) $n(A' \cup B' \cup C)$
j) $n(B \cap (A \cup C))$



BIBLIOGRAFIA

1.- Modelos Matemáticos

Santiago López de Medrano

ANUIES

2.- Lenguajes Simbólicos

Santiago López de Medrano

ANUIES

3.- Teoria y Realidad

Mario Bunge

Ariel No. 75

4.- Introducción a la Lógica Matemáticas

P. Suppes S. Hill

Reverté

5.- Antología de Lógica Matemática

José Alfredo Amor Montaño

Cuadernos de Filosofía de las Ciencias UNAM

6.- Matemáticas Recreativas

Y. I. Perelman

Editorial Paz. Moscú.

7.- Algebra

Florence M. Lovaglia

Harla

8.- Introducción a las Matemáticas

Bruce E. Meserve. Max A. Sobel

Reverté