9
2ej.

Universidad Nacional Autónoma de México

PRINCIPIOS DE METAGEOFISICA

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el título de:

Ingeniero Geofísico

Presentan:

Juan Machín Ramírez

y

Hugo Molina Pérez

México, D.F. 1987

I N D I C E

PROLOGO

"El afán constante de la ciencia, lo mismo que el de las artes, es el de ampliar la similitud que buscamos a tientas bajo los hechos. Cuando descubrimos una similitud más amplia ya sea entre el espacio y el tiempo, entre el bacilo, el virus y el cristal, ampliamos el orden del universo, pero más que eso, ampliamos su unidad. Y es la unidad de la naturaleza viva e inerte lo que pretende captar nuestro pensamiento. Este es un pensamiento más profundo que la idea de que la naturaleza ha de ser uniforme. Pretendemos encontrar que la naturaleza es una y coherente... La ciencia es un proceso que consiste en crear nuevos conceptos que unifiquen nuestra comprensión del mundo y hoy dicho proceso es mucho más osado y de más envergadura, más triunfal, aún en el gran umbral de la Revolución Científica."[1]

La presente tesis encuadra en este afán de la ciencia: es un intento de ampliar la unidad que encontramos en la realidad, es decir, en los hechos que observamos en el mundo y en el laboratorio, y que da origen a la formación de conceptos claves como los de evolución, materia, onda, tiempo, etc. que constituyen los materiales de nuestra visión de la realidad y que son los hilos con los cuales tejemos, a semejanza de las Parcas, nuestra vida, ya que, como atinadamente señala Ortega y Gasset, la vida es quehacer y hoy por hoy la ciencia es una guía de la acción, llegando a afirmar William Clifford que es "aquello sobre lo que podemos actuar sin temor" y que es "el progreso humano mismo".[2]

La unidad que buscamos en el mundo existe en la ciencia misma y se manifiesta en las similaridades estructurales de las distintas ramas de la ciencia: vemos cómo conceptos, modelos y leyes semejantes surgen una y otra vez en campos diversos y, por ende, de hechos y observaciones distintos; vemos cómo el pensamiento emplea las mismas categorías y el mismo lenguaje; vemos cómo existen principios generales, leyes que trascienden diferencias al parecer insuperables. Es en el descubrimiento de esta unidad donde nace la Teoría General de Sistemas (TGS), siendo "un intento de formulación de principios válidos para 'sistemas' en general, sea cual fuere la naturaleza de los elementos componentes y las relaciones entre ellos"[3] sólo atendiendo a leyes isomorfas, es decir, a las leyes generales aplicables a cualquier sistema de determinado tipo.

La unidad no existe sólo en el dominio de la ciencia sino que es común a todas las actividades humanas que intentan realizar valores, es más, toda acción humana comparte un sistema de valores y crea esos valores; este tipo de unidad axiológico, no buscado explícitamente por los científicos, es hoy en día más urgente: el hombre ya no debe ser un hombre dividido. La ciencia contribuye a la unificación del hombre al ampliar la perspectiva de lo que es igual, superando las divisiones que la ignorancia y el egoísmo crean. Superación de divisiones que exigen el arte, la filosofía y la religión: "Ya no hay judío ni griego; ni esclavo ni libre; ni hombre ni mujer ya que todos sois uno"[4], "del mismo modo que el cuerpo es uno, aunque tiene muchos miembros, y todos los miembros del cuerpo, no obstante su pluralidad, no forman más que un solo cuerpo"[5].

Nuestra tesis, aplicando algunos conceptos y formulaciones de la TGS, intenta contribuir a ampliar la unidad que encontramos en tres niveles de la investigación científica: primero, en cuanto al fenómeno en estudio; segundo, el referente a la forma como se manipulan las mediciones y observaciones, y, por último, en cuanto a la forma de interpretar dichas observaciones. Proponemos la formulación de nuevos conceptos y modelos más generales, intentamos fundamentar dicha formulación y hacer ver las ventajas y consecuencias que trae consigo. Concretamente aplicamos estas ideas a la Geofísica, siendo ésta una disciplina propicia para unificar debido a que es un campo donde se da una estrecha interacción entre ciencia e ingeniería, donde es muy clara su interdependencia y donde es difícil señalar límites claros entre ciencia pura y aplicada. Es, además, una actividad manifiestamente interdisciplinaria, en íntima relación con la Física, la Geología, la Matemática, etc.

La tesis pretende establecerse como una guía tanto heurística como formativa. Heurística en tanto siente una metodología en la formulación de nuevas hipótesis dentro de la Geofísica o en otras áreas, y formativa en tanto muestre las ventajas y los caminos de la unificación, "formando" una inclinación o una opción por formular teorías generalizadoras, como opuesta a la creciente especialización impuesta por el caudal de información de que se dispone actualmente, así como por la complejidad y alto desarrollo de las técnicas y estructuras teóricas dentro de las diversas disciplinas científicas. Para ello hacemos uso de la TGS, cuyo tema es la formulación y derivación de aquellos principios generales que rebasan la especificidad de un campo determinado de estudio y cuya utilidad, podemos decir, ha sido demostrada en muchas ramas de la ciencia, notándose un interés creciente por su aplicación. Sin embargo, en Geofísica no se ha hecho uso explícito de la TGS, aunque sí de algunos de los enfoques análogos o relacionados con ella. Ejemplos, los tenemos en la aplicación de la Teoría de la Información al procesamiento de datos sísmicos (por el proyecto de análisis geofísico del MIT en 1953)[6] y la aplicación del Filtraje lineal digital en la interpretación de los sondeos de resistividad (señalado por Kunetz en 1966)[7] En la tesis intentamos explicitar el uso de la TGS en la Geofísica mostrando algunos lineamientos generales.

El título de la tesis merece una pequeña explicación.'Meta'es un prefijo de etimología griega que significa: después, a continuación, más allá, y se emplea para hacer una distinción entre un objeto determinado que constituye materia de estudio y un raciocinio acerca de dicho objeto, o de dicho estudio. La igualdad: 2+2=4, es objeto de estudio de la Matemática; pero, el enunciado: "'2+2=4' es una igualdad aritmética", concierne a la Metamatemática. Así, nuestra tesis no es propiamente *de* Geofísica, sino *sobre* Geofísica, por lo tanto, de Metageofísica. Como dice el editor del Geophysical Prospecting, con motivo de la aceptación del primer trabajo de carácter especulativo en esa revista, "puede ser que la Geofísica de Exploración haya madurado lo suficiente como para que esté indicada la introspección y el autoanálisis"[8], es decir, la Metageofísica. Pues, "no es algo inaudito que, después de mucho estudiar una ciencia, cuando se piensa con admiración lo mucho que se ha avanzado en ella, se le ocurra a alguien preguntar si tal ciencia es posible y, en general, cómo es posible"[9].

Debido a su carácter metacientífico pensamos que la tesis será de interés para personas ajenas a la Geofísica (filósofos, médicos, artistas, etc.), por lo que definiremos conceptos que son familiares para los geofísicos, pero quizá no para los demás. Esperamos que no ocurra que los geofísicos, al ver expresiones como 'escolástica', 'categorías', etc., digan: *Metaphysica sunt, non leguntur!* , y los filósofos, artistas, etc., al ver una fórmula, piensen:

Mathematica sunt, non leguntur!. Siendo en ocasiones no sólo necesario leer sino indispensable hacerlo.

Por último, mencionaremos el plan básico de la exposición: el primer capítulo, como lo indica su nombre ('Prolegómenos'), establece las bases generales sobre las que se fundamenta todo el desarrollo posterior. Define explícitamente el marco de referencia dentro del cual se tratará todo el discurso, dicho marco de referencia queda determinado por tres conceptos clave (la Aplicación, la Analogía y la Simetría), que serán analizados en detalle. Con estos conceptos, como nuevo paradigma, pensamos se debe construir la Metageofísica. El capítulo segundo constituye una revisión de la Teoría de Modelos, una somera introducción a la TGS y, por último los esbozos de una Teoría Generalizada de Campos y de una Teoría de Criptosistemas. Cada una de estas teorías se relaciona con las otras y forman un conjunto de herramientas, metas científicas con las cuales es posible analizar la Geofísica. El tercer capítulo, que cierra la tesis, está dedicado al Análisis Metacientífico del aparato matemático empleado en Geofísica, haciendo énfasis en el Análisis de Señales y el Diseño de Filtros.

CAPITULO PRIMERO

PROLEGOMENOS DE TODA METAGEOFISICA DEL PORVENIR

"Estos prolegómenos no sirven para la exposición de una ciencia preexistente sino, ante todo, para la invención de la Ciencia misma".

Immanuel Kant

1.1 PLAN DEL CAPITULO

Este capítulo pretende sentar los fundamentos sobre los que se erigirá la tesis. Estos fundamentos son como las señales del camino a seguir, más bien que el camino mismo. No pretendemos enseñar una ciencia sino cómo hacer ciencia, parafraseando a Kant, y para ello nos basaremos precisamente en el trabajo de quienes hacen ciencia.

Al estudiar las distintas ciencias y la forma de pensar de los científicos descubrimos que existen tres conceptos clave, una tríada de categorías (categorías en el sentido kantiano de que expresan los aspectos y relaciones esenciales de la realidad, o al menos de la realidad como el hombre la piensa) a partir de las cuales se hace ciencia. Dichos conceptos forman una unidad, un cierto marco de referencia conceptual dentro del cual el hombre piensa y actúa; si bien no son a priori en el sentido kantiano estricto, son a priori en cuanto a determinadas por una cierta organización psicofísica del hombre, condicionada por factores biológicos, culturales y por la naturaleza misma. Estos conceptos-categorías son la aplicación, la analogía y la simetría. Cada uno de ellos será tratado en las siguientes secciones, veremos sus definiciones, sus bases matemáticas y lo fructífero que es su uso sistemático, a fin de captar cómo esas categorías dominan todos los ámbitos del pensamiento y son el fundamento de la Teoría General de Sistemas.

En base a esos conceptos pensamos deberá construirse la metageofísica y la metaciencia. Se verá en primer término la aplicación, pues es la categoría más general, y para ello se enunciarán algunas definiciones básicas y y fundamentales a las que se estará aludiendo en el tratamiento de la tríada de categorías.

1.2 LA APLICACION

1.2.1 BASE MATEMATICA

Nos referiremos primero a los conceptos de conjunto y aplicación, pues la moderna matemática se viene construyendo sobre el cimiento de esas dos ideas esenciales. El concepto de conjunto es tan fundamental que es imposible dar una definición en función de conceptos más básicos, sin embargo, la etimología de la palabra (coniungere=unir o juntar) nos da idea de lo que significa y, además, todos poseemos una noción intuitiva de lo que es un conjunto, conocemos un sinnúmero de ejemplos: un cardumen, una orquesta, un medio estratificado, etc. El concepto mismo de sistema, tan importante para nuestra tesis, corresponde a un tipo especial de conjunto.

Definamos ahora la primera categoría de nuestra tríada, la aplicación:

Definición 1 : Sean dos conjuntos A y B. Una <u>aplicación</u> de A en B es una regla, ley o criterio que asocia a todo elemento de A un elemento de B.

Existen muchos sinónimos de "aplicación", entre ellos tenemos: mapeo, transformación, correspondencia, función, operador, etc. Estos términos se usan indistintamente o de acuerdo a la idea que susciten; por ejemplo, "mapeo" reviste ciertas connotaciones topográficas, y "transformación" se asocia fácilmente a la idea de cambio, etc.

Notación : Usualmente se denotan las aplicaciones por letras minúsculas griegas o por letras relacionadas con el nombre empleado para la aplicación. En lugar de decir que T es una aplicación de A en B, se escribe:

$$T: A \to B$$

Si T asigna el elemento a de A al elemento b de B se indica como: $a \to b$. Se dice que b es la imagen de a por T, denotándose la imagen b como T(a), Ta, a^T. El elemento b también se conoce como el valor que la aplicación asume o toma para el argumento a. Podemos decir también que T envía a hacia b, que mapea a sobre b o que transforma a en b. El conjunto de todos los elementos de T(a), cuando varía sobre todos los elementos de A, se conoce como el campo de valores de la aplicación, recorrido, imagen, rango, codominio, conjunto de llegada, etc. La colección de todos los elementos a de A que tienen por imagen el elemento b de B se denomina imagen recíproca o preimagen del elemento b y se denota $T^{-1}(b)$. El conjunto A se denomina campo de definición de la aplicación, dominio, conjunto de partida, etc., y se denota $T^{-1}(B)$.

Hemos así introducido al lector a las dos ideas esenciales de conjunto y aplicación. Ahora veremos algunos tipos importantes de aplicación que son necesarios para todo el desarrollo posterior.

Definición 2 : Una aplicación G se dice que es <u>sobre</u> si todo elemento del campo de valores de la aplicación es un valor de la aplicación. Se dice también que es una aplicación sobreyectiva, exhaustiva o simplemente una sobreyección.

Definición 3 : Una aplicación H se dice que es <u>en</u> o inyectiva si elementos distintos de A tienen imágenes distintas de B por H. Se dice también que es una inyección, inclusión o encaje.

Definición 4 : Las aplicaciones que son tanto inyectivas como sobreyectivas se llaman aplicaciones <u>biyectivas</u> o biyecciones.

Definición 5 : La aplicación <u>identidad</u> (denotada por I) se define como la aplicación $I: A \to A$, tal que $I(a)=a \ \forall a \in A$.

Definición 6 : Sean $F: X \to Y$ y $G: Y \to Z$, dos aplicaciones tales que el codominio de la primera coincida con el dominio de la segunda. Queda así así definida una aplicación de X en Z, que se denomina aplicación <u>compuesta</u> de F con G, e indicada como $F \bullet G$ ó FG.

Definición 7 : Sea una aplicación $T: X \to Y$. A la aplicación $T^{-1}: Y \to X$ tal que $T^{-1}(T(x))=x \ \forall x \in X$ y $T(T^{-1}(y))=y \ \forall y \in Y$, se le llama aplicación <u>inversa</u> de T.

1.2.2 APLICACIONES DE LA APLICACION

Veremos a continuación cómo la idea de aplicación es la base de un sinnúmero de disciplinas, un concepto a partir del cual se hace ciencia y se resuelven problemas. Sobra decir que la matemática[1] se construye sobre esta idea y que todas las ciencias intentan matematizarse.

En la Ingeniería se emplea de manera sistemática el concepto de aplicación: las distintas clases de cálculo (diferencial e integral, vectorial, tensorial, funcional, de variable compleja, etc.) se reducen al estudio de algunos tipos de aplicaciones; el concepto de campo, las transformadas de Laplace, Z y de Fourier, la modelación geofísica, el mapeo conforme, por mencionar algunos ejemplos familiares al geofísico, son esencialmente aplicaciones y el ingeniero difícilmente puede prescindir de ellas.

El proceso mismo de contar es, en esencia, una aplicación y B. Russell intentó derivar los números mismos de estructuras de conjuntos y aplicaciones[2].

También, la aplicación biyectiva es parte fundamental del tratamiento revolucionario de G. Cantor[3] y del famoso teorema de Gödel[4].

Tres son las aplicaciones más importantes de la aplicación: su uso como concepto de relación, como "transformación" de un problema difícil y como fundamento de la analogía y la simetría.

a) La aplicación como concepto de relación nos remite a terrenos de la Filosofía. Todas las "categorías" aristotélicas, kantianas, de Hartmann, etc. se pueden reducir al concepto de aplicación, pues son conceptos que expresan los aspectos y relaciones esenciales de la realidad. Y, aunque en el empirismo lógico moderno las categorías se reducen a "reglas" convencionales de carácter lingüístico, no pierde valor la aplicación, sólo que se reduce a relaciones simbólicas. Es principalmente bajo este aspecto de "relación" como la aplicación es la base de la matemática y la ciencia, pues todas las ciencias se reducen, según señaló Schopenhauer[5], a relaciones. Por ejemplo, el principio fundamental de la lingüística moderna (debida al trabajo de F. de Saussure[6]) es el de que la lengua forma un *sistema* compuesto por elementos formales, definidos por el conjunto de *relaciones* que sostiene con las demás y que constituye una estructura definida que da su "significación" a las partes . La historia para Foucault[7] encuentra en su campo metodológico la determinación de las relaciones que permiten caracterizar un conjunto como histórico y supone que entre todos los acontecimientos de un área espaciotemporal bien definida se debe poder establecer un sistema de relaciones homogéneas (causalidad, analogía, significación, etc.).

b) En algunas ocasiones, al tratar de resolver un problema en un determinado dominio, su solución se facilita si "pasamos" el problema a otro dominio, también se puede pensar que "transformamos" un problema difícil a otro fácil. Para ello, se transforma primero el problema de un dominio a otro y, después de resolverlo en ese dominio, se realiza una transformación inversa para tener el resultado en el dominio original.

En el siguiente diagrama mostramos (con un ejemplo del uso de la transformación para resolver una división laboriosa) la relación general entre los procedimientos de análisis convencional o por medio de la transformación:

$$\begin{tikzcd}
Y = X \div Z \arrow[r] \arrow[d] & \begin{array}{c}\text{Transformación}\\ \log Y = \log X - \log Z\end{array} \arrow[d] \\
\begin{array}{c}\text{División}\\ \text{manual larga}\end{array} \arrow[d] & \begin{array}{c}\text{Observación en}\\ \text{tablas y substracción}\end{array} \arrow[d] \\
\begin{array}{c}\text{Solución}\\ \text{del problema}\end{array} & \begin{array}{c}\text{Transformación inversa}\\ \text{antilogaritmos}\end{array} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

c) Cuanto veamos del uso de los conceptos de analogía y simetría se puede atribuir a la aplicación, pues ambos conceptos son en última instancia aplicaciones.

En los siguientes apartados veremos algunas aplicaciones de la aplicación. El lector que ya esté convencido de la utilidad y generalidad de la aplicación puede pasar a la sección 1.3.

1.2.2.1 APLICACIONES EN GEOMETRIA SINTETICA

Uno de los métodos más útiles aprovechados por los geómetras de la era moderna es la de transformar hábilmente una figura en otra que sea más adecuada para una investigación geométrica. Así, tenemos a la transformación por reflexión, que quizá sea la más útil para simplificar figuras planas y que fue independientemente explotada por varios autores. Kelvin, por ejemplo, en 1845 utilizó la reflexión para dar demostraciones geométricas de algunas proposiciones difíciles de la teoría matemática de la elasticidad y de la teoría del potencial.[8]

La importancia de las transformaciones geométricas radica en que a menudo se ha reducido la Física a Geometría, aparte de la importancia que éstas tienen para la Geometría misma.

1.2.2.2 GEOMETRIA ANALITICA

La Geometría Analítica no es sino un método geométrico que transforma curvas en ecuaciones, es un proceso de traducción por medio del cual se utiliza una interpretación algebraica para resolver problemas y establecer teoremas de Geometría. Equivale a analizar un estudio geométrico mediante un conjunto distinto de imágenes mentales en un lenguaje diferente, y después hacer la traducción de los resultados del análisis a la forma geométrica original. Nos permite emplear un campo de estudio en el que nos desenvolvemos mejor para obtener información acerca de otro campo de estudio diferente en el que tenemos mayor dificultad. La esencia de la idea aplicada al plano es establecer una correspondencia entre pares ordenados de números reales y puntos del plano, permitiendo así una correspondencia entre curvas del plano y ecuaciones con dos variables, de modo que para cada curva del plano hay una ecuación $F(x,y) = 0$, y a cada una de esas ecuaciones le corresponde una determinada curva del plano. En forma análoga se establece una correspondencia entre las propiedades algebraicas y analíticas de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva relacionada.

La tarea de demostrar un teorema de Geometría se cambia hábilmente a la de demostrar un teorema algebraico correspondiente, o sea, se cambia de dominio. Pero el método es aún más profundo, pues el obtener un resultado algebraico puede conducir al descubrimiento de un resultado geométrico nuevo e inesperado. Así el método de la aplicación es notablemente fértil, tanto para resolver problemas como para descubrir nuevos resultados en el dominio original.

Por otro lado, fácilmente, al movernos en un campo que dominamos mejor, podemos generalizar conceptos o resultados. Por ejemplo, una circunferencia se transforma en una ecuación cartesiana de la forma $x^2 + y^2 = r^2$, y una esfera en una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. En el dominio geométrico difícilmente podríamos llegar a obtener una generalización, una "hiperesfera", que en el dominio algebraico es fuertemente sugerida por el proceso mismo de generalizar de una circunferencia a una esfera, agregando una variable 'z', ¿por qué no agregar otra variable, o n variables más? Obtenemos así una ecuación del tipo $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = r^2$, sin ningún problema. Así, una demostración o estudio se extiende fácilmente a una situación más general o a espacios de más dimensiones, siendo la generalización la esencia del conocimiento y el origen de la ciencia, como afirma Reichenbach[9].

"La Geometría de Descartes, además de su carácter eminente de universalidad, se distingue de la Geometría antigua en ... que establece, por una sola fórmula, propiedades generales de familias enteras de curvas; de tal modo que no se podría descubrir por esta vía ninguna propiedad de una curva sin que ésta hiciera descubrir al mismo tiempo propiedades similares o análogas en una infinidad de líneas"[10]. Siendo este carácter generalista la "superación" cartesiana de la Geometría antigua, análogo al carácter generalista de la TGS y de nuestra tesis.

Otro triunfo del método de transformación en la Geometría Analítica es la existencia de una gran diversidad de sistemas de coordenadas, el que podamos inventar cuantos sistemas deseemos y necesitemos. De hecho, "un" sistema coordenado se define como una aplicación del conjunto de puntos del espacio con el conjunto de números ordenados, llamados coordenadas de los puntos.

1.2.2.3 PROGRAMACION LINEAL

Uno de los empleos inesperados de la Geometría Analítica, debido a su generalidad, ha sido en la Economía, especialmente en los problemas de programación lineal; en general, son problemas que requieren la determinación de las incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ que hagan máxima o mínima una expresión lineal dada, $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n$ y que estén sujetas a un conjunto finito de condiciones en forma de desigualdades lineales. Se introduce una terminología geométrica: llamando *punto* (en un espacio euclidiano n-dimensional) a una n-ada de números reales ordenados $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Los puntos que satisfagan las condiciones se llaman *puntos factibles*, y un punto factible que haga máxima o mínima la expresión lineal dada se dice que es un *punto óptimo*. De esta forma problemas de Economía bastante complicados se resuelven fácilmente mediante la idea de aplicación, en concreto, con la ayuda de la Geometría Analítica elemental. La programación lineal es una herramienta importante en la investigación de operaciones y se ha aplicado a una extensa variedad de problemas económicos.

1.2.2.4 TEORIA PLÜCKERIANA DE LA DIMENSION

De la consideración de que un sistema de coordenadas es una aplicación podemos fácilmente generalizar, como lo hizo Plücker en 1829, y en lugar de considerar como campo de definición los puntos de un plano, tomamos cualquier entidad geométrica (una recta, una circunferencia o lo que queramos). Si elegimos la recta como elemento fundamental, podemos determinar una recta del plano que no pase por el origen de un marco de referencia cartesiano fijo del mismo, registrando, por ejemplo, los segmentos del origen a los puntos de intersección de dicha recta con los ejes X y Y, o sea, las coordenadas de la recta dada. Ideas como las expuestas condujeron a una amplia generalización de la Geometría Analítica, y, en 1865, permitieron a Plücker desarrollar una teoría de la dimensión: definió una *variedad* de elementos geométricos por el conjunto de éstos que puede marcarse o señalarse como un sistema de coordenadas real y continuo, entonces la *dimensión de la variedad* es el número de coordenadas necesario para determinar un elemento general del conjunto. Según este concepto, el plano es bidimensional en puntos, o sea, como conjunto de puntos, y también de rectas, pero es tridimensional como conjunto de circunferencias. Si se escogiese la totalidad de todas sus secciones cónicas como la variedad el plano sería de cinco dimensiones. Así, la dimensión no depende sólo del 'espacio', sino también de los elementos fundamentales que lo forman. Por primera vez, se habían definido espacios perceptibles de más de tres dimensiones.

1.2.2.5 GEOMETRIA REPRESENTACIONAL

La Geometría Representacional es otro ejemplo muy útil de la poderosa técnica 'transformar-resolver-invertir': consiste en establecer teoremas de una geometría demostrando ciertos teoremas relacionados de una segunda geometría; ésto es posible porque tenemos una aplicación de la primera geometría en la segunda. Este tipo de procedimiento recibió un fuerte estímulo de la teoría de la dimensión de Plücker. Supongamos, por ejemplo, que deseamos estudiar la geometría de cierta variedad n-dimensional de elementos geométricos. Estableciendo una aplicación biyectiva continua de esta variedad n-dimensional y los de alguna segunda variedad k-dimensional familiar, tendremos una buena probabilidad de descubrir y establecer teoremas en la geometría de la primera variedad demostrando sus equivalentes en la geometría familiar de la segunda.

Otro ejemplo, es la representación de las Geometrías No Euclidianas mediante un modelo euclidiano.

El plano riemanno se convierte en la superficie de una esfera euclidiana mediante una aplicación punto por punto, donde los puntos del plano mapean puntos de la esfera, las líneas rectas del plano mapean en círculos máximos, cada postulado riemanno se traduce entonces en un teorema de Euclides. La geometría de Lobachevsky se representa mediante el modelo euclidiano de Poincaré, en el cual el plano lobachevsquiano se mapea en una circunferencia fija, S, en el plano euclidiano, un punto en un punto interior de S y una recta en la parte interior a S de cualquier 'circunferencia' (recta o circunferencia) ortogonal a S.

Gracias a estos modelos representacionales la compatibilidad de una geometría se reduce a la cuestión de demostrar que la Geometría Euclídea sea compatible; a su vez, esta compatibilidad se refiere a la compatibilidad del sistema de números reales, que es una cuestión aún abierta.

1.2.2.6 GEOMETRIA PROYECTIVA

La Geometría Proyectiva es el estudio de las propiedades descriptivas de las figuras geométricas, y surge principalmente debida al trabajo de Desargues y Poncelet. Las propiedades descriptivas son aquellas en las que sólo se trata la relación de las posiciones de los elementos geométricos entre sí, a diferencia de las propiedades métricas, en las que intervienen las medidas de las distancias y de los ángulos.

Podría afirmarse que la Geometría Proyectiva nació de las necesidades del arte, en particular de la Pintura y la Arquitectura, y constituye, según Bronowski, "el nuevo concepto que actualmente revivifica la matemática"[11]. Considérese, por ejemplo, la técnica de Durero de dibujar lo que se ve por un vidrio : cuando el pintor mira a la persona a la cual va a retratar, los rayos de luz que parten de ésta son cortados por el vidrio interpuesto y forman una colección de puntos. Esta colección es la que el artista debe pintar en su lienzo, para que un observador de la pintura 'vea' a la misma persona, es decir, que reciba la misma impresión o imagen que recibiría si mirara directamente al retratado. Esa colección que forma la 'imagen', corresponde al codominio de una biyección entre los puntos que forman la imagen que percibe el pintor y el conjunto de puntos que plasma el artista en su lienzo. Esa aplicación se denomina proyección.

Existen muchísimas aplicaciones de la idea de proyección en Geología, Astronomía, Cartografía, Arquitectura, Dibujo, etc.

En Mineralogía, una proyección es una forma de representar los cristales, siendo de especial utilidad las llamadas proyecciones clinográficas; tales proyecciones son un tipo tal de perspectiva que parecen una fotografía bidimensional de un cristal tridimensional, pero es superior a una fotografía en que conserva toda la información del cristal, minimizando la importancia de la forma y el tamaño de las distintas caras, ya que son accidentes del proceso de crecimiento. Con el fin de situar las caras de acuerdo con sus relaciones angulares y sin consideración de su forma o tamaño, se usa muy a menudo la proyección esférica, la cual es también de utilidad en Astronomía. Sin embargo, la proyección más usada es la denominada estereográfica, ya que reduce la proyección esférica a una superficie plana, preservando la relación angular. Esta proyección es utilísima en Geología Estructural debido a la reducción de una dimensión (un hemisferio se reduce a un plano, un plano a una línea y una línea a un punto), gracias a la facilidad de visualización que, como afirma Ragan, "jamás se ponderará en todo lo que vale por más que se destaque su importancia", y a la gran rapidez y suficiente precisión con que se obtienen soluciones de los más variados problemas estructurales. La proyección estereográfica también es la base para hacer mapas geográficos y es una forma elegante y rápida de obtener las fórmulas de trigonometría esférica a partir de las de trigonometría plana. Las proyecciones esféricas se emplean, además, en Geología de Campo para estudiar estructuras en forma estadística, cuando no se las puede levantar a escala. [12]

1.2.2.7 VARIABLE COMPLEJA

Hamilton introdujo en 1853 un concepto de número complejo, desde un punto de vista estrictamente lógico, definiéndolo como sigue:

Un número complejo $z = a + bi$ es una pareja ordenada (a,b) de números reales a y b sometida a ciertas definiciones operacionales. El primer elemento se denomina parte real y se indica $R(z)$, el segundo elemento se denomina parte imaginaria y se indica $I(z)$. Las operaciones definidas son la igualdad, la suma y el producto.

Igualdad: $(a,b) = (c,d)$ sí y sólo sí $a = c$, $b = d$

Suma : $(a,b) + (c,d) = (a + c,\ b + d)$

Producto: $(a,b)\,(c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$

$m(a,b) = (ma,\ mb)$

$\forall\ a, b, c, d, m \in R$

Como existe una biyección entre parejas ordenadas de números reales y números complejos, fácilmente surge la idea de representar dicho número complejo como un punto en un plano cartesiano, donde la parte real queda representada en el eje X, y su parte imaginaria en el eje Y, por lo que se les denomina respectivamente eje real y eje imaginario. Se puede considerar dicho plano (de Wessel-Argand-Gauss) como una proyección estereográfica de una esfera, por lo que es frecuente hablar del plano complejo como de una esfera compleja, la esfera de Riemann. La representación geométrica de Wessel-Argand-Gauss ejerció influencia positiva en tiempos en que los complejos se consideraban como número ficticios o, dicho con términos de Euler, "no eran nada, ni menos que nada, lo cual necesariamente los hace imaginarios, o imposibles", como diría Leibniz eran "una especie de anfibio entre ser y no ser".[13]

La Geometría Analítica que resulta de la representación de Wessel es particularmente elegante y fecunda. Al asignársele un punto ideal único en el infinito, el plano complejo se convierte en un plano reflexivo, haciendo de su Geometría Analítica la más admirable herramienta analítica ideada hasta ahora para la investigación de la Geometría Reflexiva Plana. También ha demostrado ser muy fructífera en representar convenientemente algunas de las nociones más importantes de la Física, en virtud de las propiedades especiales del número i : una multiplicación por i es una rotación de 90°, la multiplicación por i^4, equivale a una rotación de 360°, por tanto representa periodicidad. Debido a este carácter rotatorio se emplea la representación de ondas como funciones complejas, para señalar cambios de fase, por ejemplo, o para indicar dependencia armónica del tiempo y también para representar cantidades vectoriales, debido a que indican sentido.

Aunque quizá la mayor fertilidad de la variable compleja se ha encontrado en relación con la teoría del potencial y en relación con la transformada Z, como veremos a continuación.

1.2.2.8 TRANSFORMADAS Z, DE FOURIER, LAPLACE Y OTRAS

Cuando un científico realiza una serie de mediciones de un fenómeno, mientras el tiempo transcurre, puede aplicar el conjunto de sus mediciones con ciertos instantes del tiempo. Ahora bien, el científico establece así una aplicación de un conjunto discreto (las medidas) con otro discreto (los instantes t_0, t_1, t_2, ...). Pero se puede considerar, también, que es la aplicación de un conjunto continuo en otro conjunto continuo, pero aproximado por una serie, o muestreado. Si el muestreo se considera equiespaciado, se puede representar como una n-ada de número reales. Sin embargo, existe una forma muy útil de representar ese muestreo y es asociando cada muestra con una potencia de una variable denominada z, es decir, mediante un polinomio en z, llamado la transformada z. Así, la transformada z, también conocida como transformada geométrica, de una función f(k) se define como la suma desde k=0 hasta $k \to \infty$ de los productos $f(k)z^k$, donde k=0,1,2,3,... y z es una variable compleja, o sea, que está definida por la siguiente relación:

$$Z(f(k))=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^k \tag{1.1}$$

El significado de z es que físicamente el valor de la función se retrasa una unidad al ser multiplicado por z; es debido a esta interpretación por lo que es de gran utilidad en el procesamiento sísmico y en el análisis de las ondas, en general, simplemente porque las ondas toman un cierto tiempo para ir de un lugar a otro. Otra cualidad de la transformada z es que puede ser usada para cosntruir funciones más complicadas a partir de funciones más simples, o descomponer funciones complicadas en funciones simples. Esta idea es la esencia de la transformada de Fourier, estando relacionadas ambas transformadas. Si substituímos $z=e^{i\omega}$ la transformada z se convierte en la transformada de Fourier, de hecho tenemos que la transformada de Fourier no es sino la transformada z evaluada en el círculo unitario del plano complejo. Si tomamos límites podemos obtener la integral de Fourier, o sea, la transformada contínua de Fourier. la transformada z es siempre fácil de hacer, sólo se ajustan las potencias de z a los puntos de datos sucesivos, en cambio, la integral de Fourier es difícil o imposible de resolver en ocasiones, por lo que es importante tener presente la relación entre ambas. La transformada de Fourier se aplica en numerosas y diversas áreas: Sistemas Lineales, Antenas, Optica, Procesos Aleatorios, Probabilidad, Física Cuántica, Problemas de Valores en la Frontera, etc. Ahora bien, al definir a $z=e^{i\omega}$ vemos que el exponente de e es multiplicado por un número real, ω. ¿Qué pasa si definimos un exponente complejo? Por ejemplo $c=\omega+is$, entonces $z^k=e^{ick}$, será el kernel o núcleo de la transformación llamada de Fourier-Laplace. Cuando c es real tenemos la transformada de Fourier y cuando c es imaginaria tenemos la transformada de Laplace, que expresadas en forma integral:

Fourier-Laplace
$$f(c)=\int_a^b e^{ict}F(t)dt \tag{1.2}$$

Laplace
$$f(s)=\int_a^b e^{-st}F(t)dt \tag{1.3}$$

Fourier $$f(\omega)=\int_a^b e^{i\omega t}F(t)dt \tag{1.4}$$

La transformación de Fourier propiamente dicha se define con los límites de integración $(-\infty,\infty)$ y la transformación de Laplace propiamente dicha con los límites $(0,\infty)$. La transformación de Fourier-Laplace goza de muchas propiedades que le hacen muy útil para resolver problemas, pues transforma una ecuación complicada en otra más simple, en especial debido a que transforma la derivación en una multiplicación, reduce ecuaciones diferenciales parciales en ordinarias y la convolución en una multiplicación, constituyendo el llamado Cálculo Operacional, el cual es una de las ramas más útiles de las matemáticas aplicadas. Analizando las transformaciones anteriores podemos ver que poseen la forma general:

$$F(x)=\int_b^a k(x,t)f(t)dt, \tag{1.5}$$

esta expresión caracteriza a las transformaciones funcionales lineales, y se puede considerar que se mapea el conjunto T en el conjunto X, o como una transformación del espacio T al espacio X, y se pueden considerar a las funcionales f(t) y F(x) como vectores. El estudio de una expresión como la 1.5, llamada funcional, constituye el cálculo funcional, que es actualmente uno de los capítulos más importantes y fecundos del Análisis Matemático, siendo una generalización del concepto de función (por eso también se le llama función generalizada). Un tipo de funcional donde f(t)dt sea sustituído por una función del tipo dG(t), donde

$$G(t)=\int_{\infty}^{\tau} f(\tau)d\tau \tag{1.6}$$

se denomina integral de Stieltjes y para el caso particular de

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, dG(t), \tag{1.7}$$

con G como una función arbitraria de variación acotada en todo eje numérico, se llama transformación de Fourier-Stieltjes de la función G, que conserva muchas de las propiedades de la transformación habitual de Fourier y se emplea ampliamente en la Teoría de Probabilidades (método de funciones características) la propiedad de que la convolución de funciones se transforma en un producto.

Por último, veamos la transformada de Hilbert, definida como:

$$H(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\tau)}{t-\tau}\, d\tau \tag{1.8}$$

que no es sino la convolución de la función con $1/(\pi t)$. La transformada de Hilbert es una herramienta muy útil en el procesamiento de señales, debido a las siguientes propiedades:

a) Imparte un retraso en la fase de 90° sobre la función original.
b) Remueve la componente directa.
c) La transformada de Hilbert de funciones pares e impares son funciones impares y pares respectivamente.
d) La transformada de Hilbert aplicada dos veces a una función causa un cambio de polaridad.
e) Las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier de una función causal forman un par transformado de Hilbert.
f) Una onda de fase mínima posee inverso estable, y sus espectros de amplitud y fase forman un par transformado de Hilbert.
g) La Señal Analítica de una función real x(t) es definida como la función compleja:

$$z(t)=x(t) + i\, x_H(t) \tag{1.9}$$

o sea, que comprende la función original como su parte real y la transformada de Hilbert como su parte imaginaria. Esta Señal tiene aplicación directa en el análisis de señales de frecuencia modulada provee el prerrequisito para el cálculo de las funciones de frecuencia instantánea y 'envelope'.

1.2.2.9 ESPACIO DE FASE Y ESPACIO DE ESTADO

Un "estado" de un sistema es la colección más pequeña de números los cuales deben especificarse al tiempo $t=t_0$ en orden de poder predecir unívocamente el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t=t_n$ para cualquier entrada perteneciente al conjunto de entradas dado puesto que todo elemento del conjunto es conocido para $t=t_0$.

Tales números son llamados "variables de estado". El conjunto de entradas aquí es definido como el conjunto de todas las posibles entradas que pueden aplicarse al sistema. El estado de un sistema es determinado unívocamente al tiempo t_n por el estado al tiempo t_0 y la entrada conocida para t_0, y es independiente de los valores del estado y la entrada antes de t_0.

El conjunto mínimo de m variables de estado que se necesitan para describir correctamente el comportamiento de un estado dado, puede considerarse como las m componentes de un vector x, llamada vector de estado. Y un Espacio de Estado es definido como un espacio m-dimensional en el cual las x_i del vector x son coordenadas. El estado al tiempo t de un sistema definido por m ecuaciones diferenciales de primer orden puede ser representado entonces por un punto en un espacio m-dimensional, tal punto es llamado punto representativo. El locus de los puntos representativos para el intervalo $t=t_n-t_0$, es llamado la trayectoria de tal intervalo.

La ventaja principal del método de análisis de Espacio de Estado es que tratamos con un conjunto de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en lugar de una sola ecuación diferencial de n-ésimo orden, realizando una aplicación. El concepto de Espacio de Estado evolucionó a partir de los conceptos de Espacio de Fase de la Teoría Clásica de Dinámica de las Partículas y del Cuerpo Rígido, y constituye un método fundamental en las disciplinas de Dinámica de Sistemas Físicos, Control, etc. En la Geofísica se ha comenzado a utilizar esta poderosa herramienta matemática al diseño de sismogramas sintéticos [14].

1.2.2.10 Transformaciones en Biología

Terminaremos esta sección (1.2) mencionando tres llamativas aplicaciones de la transformación en Biología, todas ligadas al clásico libro de D'Arcy W. Thompson: "On growth and form".

D'Arcy [15] descubrió que se pueden relacionar las formas de distintos animales (filogenéticamente cercanos) mediante transformaciones geométricas simples. También se ha descubierto que el modelado de los tejidos de los embriones [16] y la percepción de la evolución filogenética y ontogenética del ser humano [17] se pueden describir mediante transformaciones sencillas.

1.3 LA ANALOGIA

1.3.1 GENERALIDADES

La analogía es una relación de semejanza entre conjuntos, es una aplicación en sentido matemático y, por tanto, está íntimamente ligada a los conceptos desarrollados en la sección anterior (1.2) siendo inseparables ambos conceptos y formando una tríada con el concepto de simetría que desarrollaremos en la última sección, una especie de tríptico con el que nos enfrentamos y recreamos la realidad.

La analogía es la clave para resolver un problema y es la clave también del razonamiento mismo, como dice Polya. "la analogía ocupa todo nuestro modo de pensar, tanto nuestras cotidianas conversaciones y nuestras más banales conclusiones como los medios de expresión artística y las más altas realizaciones científicas"[18]. La analogía aparece en todas las ciencias (es la base de la invención y la generalización)[19], en todas las artes (recuérdese la definición aristotélica del arte como 'mimesis', 'imitación[20], definición aceptada por filósofos tan distintos como Luckács[21] y Lévi-Strauss[22]) y en la filosofía (el mundo para Platón[23] es análogo al mundo de las Ideas y para Kant[24] la analogía es un principio puro del entendimiento). Wittgenstein[25] afirma que el conocimiento es posible porque hay una analogía entre el pensamiento y su objeto, el conocimiento mismo es ya una analogía del pensamiento con el objeto y es posible porque en lo real hay analogía. La Ciencia y la Filosofía aspiran a descubrir esa analogía de lo real; el Arte, por otro lado, trata de recrearla. El problema de la verdad se refiere en último grado a un problema de analogía: "*Veritas est adaequatio rei, et intellectus*"[26], según la definición escolástica. La correspondencia, o adecuación, del pensamiento con su objeto, que es el meollo de la definición de Santo Tomás, no puede sino consistir en una analogía. La Teoría de Modelos también se reduce a una Teoría de la Analogía, y la Ciencia, la Filosofía y el Arte pueden ser considerados como modelos: modelos que intentan establecer una correspondencia entre la realidad y nuestra forma de ver esa realidad.

A pesar de su importancia la analogía, a menudo, no está bien definida o es mal empleada, como podemos ver no sólo en la historia de la Ciencia (llegando a constituir verdaderos obstáculos epistemológicos, en el sentido dado por Bachelard, quien con demasiada premura concluye: "Por eso el espíritu científico debe incesantemente luchar contra las imágenes, en contra de las analogías" [27] sino en la Filosofía (Reichenbach ampliamente ha criticado su uso por las filosofías 'especulativas', especialmente las de Hegel y de Platón [28] y en la vida diaria. Por ello se hace necesario un estudio preciso de la analogía y definir claramente hasta dónde o cuándo son permisibles las analogías, es decir, una Crítica de la Razón Analógica, para tener de esta manera un fundamento sólido, partiendo del cual podamos resolver problemas y hacer Ciencia.

1.3.2 DESARROLLO HISTORICO Y FILOSOFICO

Analogía es una palabra de origen griego que significa proporción, semejanza, concordancia, correspondencia [29]. Su etimología está marcada fuertemente por la idea de repetición: 'ana' equivale al prefijo 're' en español.

Para los matemáticos griegos, la analogía equivalía a razón de proporcionalidad, referida a cantidades, magnitudes y relaciones entre puntos del espacio. Los pitagóricos desarrollaron la Teoría de las Proporciones en conexión con la Aritmética, la Geometría y la Música. La analogía era el fundamento de la armonía [30] (relación entre los intervalos musicales y el aspecto de los cuerpos celestes) en la cual se fusionaban la Ciencia y el Arte. Fue Pitágoras quien acuñó la expresión de Filosofía, 'amor a la sabiduría', con un sentido muy parecido al de nuestra Ciencia y también fue el primero que observó científicamente el hecho de que hay una relación determinada entre la longitud de una cuerda de lira, por ejemplo, y el tono que produce al vibrar, el hecho de que la armonía depende del número.

La relación de los números y la Naturaleza era tan coherente, tan análoga, que llegaron a la atrevida conclusión de que "el universo es armonía y números", de que "todo el Cosmos está regido por la armonía de la cuarta, de la quinta y de la octava" [31]. Los griegos fueron los primeros en concebir que el mundo es una unidad, un 'Cosmos', que existe una Ley Universal y que ésta es matemática. "Un paso en verdad trascendente se dió al sustituir esta etiología (mítica) por la suposición de que el mundo es un mecanismo comprensible... Por primera vez surge la idea de que debe ser posible remitir toda la multiplicidad de las apariencias a unos cuantos principios fundamentales, llamados después leyes de la Naturaleza... Esa fue una inmensa anticipación: fue el fundamento de las Ciencias"[32]. Pues toda la Ciencia se basa en el supuesto de que hay un "orden de la Naturaleza"[33] que el hombre puede descubrir. Sin tal supuesto, si no existiera tal orden, no habría Ciencia (y precisamente la esencia de la idea de 'orden' es la Simetría, como veremos en la sección 1.4). Podríamos decir que el credo que profesan todos los científicos es aquel "Credo Spatioso Numen in Orbe", con el que concluye el *Mysterium Cosmographicum* de Kepler.

El orden prevaleciente, que hacía del mundo un Cosmos, era matemático y las Matemáticas eran musicales, de ahí que los movimientos de los cielos fueran la música de las esferas. Hay que reconocer que son ideas apasionantes, ideas de un pueblo que se decía amante de la sabiduría, es decir, de filósofos y "lo más propio de los filósofos es el admirarse"[34], como afirman Platón y Aristóteles. La idea de que "la Naturaleza es una y coherente", que es el cimiento de la Ciencia como aseguran Bronowski, Schrödinger, Einstein y muchos otros, surge en el pensamiento griego al observar la estrecha analogía entre los números y la Naturaleza, y el afán constante de la Ciencia es el de ampliar la analogía, analogía que nos permite, a su vez, ampliar la unidad del mundo y que nos permite pasar del 'caos' al 'Cosmos'. Todavía Kepler, unos 2400 años después, halló la armonía pitagórica en la ruta de los planetas y llamó su obra fundamental: "Armonía del Mundo".

El concepto de analogía fue aplicado por Platón y Aristóteles a un tipo de realidades distintas de las matemáticas, con la idea de establecer 'comparaciones' entre ellas. Así, Platón comparó el Bien con el Sol, ya que el papel desempeñado por el Bien en el mundo inteligible es análogo al del Sol en el mundo sensible. Aristóteles, afirmó: "El ser se dice de muchas maneras" conociéndose esta afirmación como analogía del ente, *analogia entis*.[35] Además, siguiendo la formulación pitagórica, estableció comparaciones, tratando la analogía como una proporción, por ejemplo: pulmones/aire = branquias/agua, y establece, en su Etica Nicomaquea, la proporcionalidad como base para definir las virtudes, así en el libro V afirma: "Lo justo es lo proporcional" [36].

Los escolásticos tomaron la doctrina aristotélica pero referida especialmente a los términos, originando grandes polémicas y poniendo en evidencia la importancia de la analogía en la Metafísica y la Teología.

Para Kant[37], 'las analogías de la experiencia' son los principios puros del entendimiento correspondientes a las categorías de relación. Estas analogías demuestran:

a) La permanencia de la substancia a través de todos sus cambios (dicha permanencia es la esencia de la idea de simetría, como veremos en la sección 1.4): Principio de Permanencia.
b) Todos los cambios acontecen según una sucesión de causa y efecto: Principio de Producción (es la esencia de la noción de Ley Científica, sección 2.2.1).
c) Todas las substancias están unidas en una acción recíproca general: Principio de Comunidad.

Kant hace una distinción entre la analogía en Matemáticas y Filosofía, definiéndola como una igualdad de relaciones cuantitativa (Matemática) o cualitativa (Filosofía) y tiene un carácter constitutivo o regulativo, siendo esta distinción válida para el mal llamado razonamiento por analogía, que puede considerarse bajo dos aspectos:

1) Cuantitativo-Constitutivo: Determinación de un cuarto término conocidos los tres primeros de una proporción.
2) Cualitativo-Regulativo: Atribución de un carácter a un objeto por la presencia de este carácter en otros objetos semejantes, su esquema es: "S tiene el carácter p; S y S' tienen las notas a,b,c en común; por lo tanto, S' tiene *probablemente* la nota p".

Así, las inferencias analógicas del tipo 1 son fórmulas que expresan la igualdad de dos relaciones de magnitud y *siempre* constitutivamente, de suerte que dados tres miembros de la proporción, el cuarto es dado por ello. Este tipo de razonamiento produce juicios apodícticos, es decir del tipo "S es *necesariamente* p". Las inferencias del tipo 2 son mediatas (constan de dos premisas), amplificadoras (la conclusión rebasa el contenido de las premisas) y de certidumbre probable, por tanto no apodíctica. No debe arredrarnos el carácter probable de este tipo de analogía pues, como mencionaremos en el capítulo 2, la Ciencia misma sólo produce conocimientos probables: Ha sido desterrada la certeza del dominio científico y la flamígera espada de la incertidumbre le cierra toda posibilidad de retornar. Para darle más fuerza al razonamiento analógico se requieren ciertas condiciones: la existencia de notas abundantes, y esenciales, comunes a los objetos comparados; la mayor aproximación posible entre el nexo del carácter base de la inferencia y los caracteres comunes de los objetos observados; establecer correspondencias entre objetos sólo en su determinado nexo; establecer la semejanza de los objetos, por ello habrá de completarse la investigación, estudiándose las diferencias de esos objetos.

Además, el carácter de probable de la conclusión analógica no le resta valor científico pues, sobre todo, posee un marcado acento heurístico, que la deducción (en cuanto a única forma inferencial apodíctica) no tiene, pues sirve para orientar la investigación y ampliar los conocimientos, a diferencia del carácter -agudamente criticado por B. Russell[38]- estéril, en ese sentido, de la deducción, afirmándose que la invención está fundada en la analogía y no en la deducción.

Podríamos intentar reducir la inducción y la deducción a la inferencia analógica, pero sólo trataremos brevemente algunas ideas: para Bacon [39] el método inductivo de "La caza de Pan" es el método del descubrimiento mismo y si lo analizamos consiste principalmente en la consideración de las semejanzas, diferencias y variaciones de las experiencias, de hecho se basa en la analogía. Los métodos de Stuart Mill[40]: de la concordancia, de la diferencia, de la concordancia y la diferencia, de las variaciones concomitantes y de los residuos, al ser analizados denotan también que están formulados en términos analógicos. En cuanto al método de Galileo [41], reconocido y preconizado como 'el método científico', es posible gracias a la existencia de relaciones analógicas entre el sistema matemático y la naturaleza. Pues como dice De Solage: "Construir una Teoría Abstracta es construir un sistema de signos que sea análogo con el sistema de las cosas"[42], o, como mencionamos en las generalidades, el conocimiento es posible porque según Wittgenstein, hay una analogía entre el pensamiento y su objeto: esa analogía reside en un sistema de relaciones, que en el caso de Galileo, corresponde a las relaciones matemáticas y las relaciones fenoménicas de la naturaleza.

Newton sentencia: "No es lícito... dejar de lado la analogía de la naturaleza, pues ésta es simple y siempre concuerda consigo misma"[43], siendo que él llevó a su máxima expresión el método de formulación de modelos matemáticos hipotético-deductivos. En la deducción tenemos que la conclusión no puede ofrecer sino lo que está dado en las premisas, y precisamente el conocimiento dado en las premisas se obtiene por medio de la inferencia analógica, como dice Galeno: "Fuerza es que el hallazgo de las conocidas por demostración sea a partir de las antes conocidas... a partir de las que son afines a la que ha de ser demostrada"[44]. Sin embargo, no podemos menospreciar -como ha hecho B. Russell- al razonamiento deductivo, pues éste es el que da validez a la conclusión, y es la base del sistema matemático, el cual ciertamente no necesita apología.

El desarrollo histórico de la analogía que esbozamos termina con las sig. ideas de Bochenski, de Bertalanffy y de la presente tesis:

a) Bochenski intenta formalizar 'la analogía tomista' utilizando los medios de la lógica simbólica.

b) Bertalanffy distingue entre analogía e isomorfismo, considerando a la primera como una similitud superficial y a la segunda como una homología lógica. Por homología entiende una descripción de los fenómenos en la que los factores eficientes difieren, pero cuyas leyes respectivas son formalmente idénticas. Esto lo expresa así: "Si un objeto es un sistema, debe tener ciertas características de los sistemas, sin importar de qué sistema se trate"[45]. La existencia de estas características generales y de leyes de estructura idéntica permitirá que: en diferentes campos se empleen los mismos modelos o que se usen modelos más sencillos o mejor conocidos para fenómenos más difíciles; controlar y estimular la transferencia de principios deun campo de estudio a otro, y evitar el uso de analogías superficiales.

c) En cuanto a nuestra concepción de la analogía, cuyo fruto es la presente tesis, surgió de forma independiente de la expresada por Bertalanffy, sin embargo son concordantes en gran medida. Nuestra idea surgió al descubrir cómo fenómenos, al parecer muy distintos, eran expresados con las mismas ecuaciones y que dichas ecuaciones revelaban una relación más profunda entre los fenómenos, demostrando ser análogos a pesar de sus diferencias. Descubrimos que podían aplicarse modelos de alguna disciplina, sin gran dificultad, en varias, y pensamos que su uso sería fructífero, cosas que ya se han comprobado como veremos en el último capítulo. Vimos que había, además de las ecuaciones análogas, principios comunes a las distintas ramas de la Geofísica y que eran comunes a otras disciplinas, siendo asombroso el parecido, por ejemplo, entre algunos métodos biomédicos y geofísicos. Cuando conocimos las ideas de Bertalanffy ya habíamos desarrollado por nuestra cuenta una 'teoría' de la analogía y algunas de sus aplicaciones; coincidían en mucho nuestras concepciones y discrepábamos en algunos detalles sin mucha importancia, por ejemplo, el mal uso que hace Bertalanffy del término analogía (haciendo una división simplista de 'analogías' y 'homología'). Decidimos fundamentar y aplicar esas ideas. El fundamento, cuyo tema es este capítulo, nos lleva a considerar no sólo principios de sistemas en general, sino categorías del pensamiento mismo y, sobre todo, mostrar su fructífero carácter heurístico.

Una diferencia notable entre el enfoque TGS y el nuestro, es que Bertalanffy define principalmete a los sistemas en términos de ecuaciones diferenciales, aceptando otros enfoques matemáticos pero considerando que las ecuaciones diferenciales son la mejor vía de acceso al estudio de sistemas generales. Nosotros no le damos casi ningún peso al modelo matemático determinado que se use, sino que le damos más importancia a las relaciones de homomorfismo, así el lector encontrará que empleamos modelos contínuos y discretos, determinísticos y estadísticos, ecuaciones diferenciales y en diferencias, geometría, etc. Además, Bertalanffy, por ser de educación preferentemenrte biológica, da énfasis a los modelos aplicables a seres vivos (por ejemplo, los sistemas abiertos) y nosotros, por ser ésta una tesis de Metageofísica, damos énfasis a los aspectos físicos y criptosistémicos, pero ello es más por el objetivo de la tesis que por limitaciones inherentes de nuestro enfoque.

1.3.3 NIVELES DE ANALOGIA

En orden decreciente de rigurosidad, según la escolástica, tenemos términos unívocos, análogos y equívocos; a su vez, los unívocos pueden ser universales (prescinden de sus diferencias: géneros, especies) o trascendentales (no prescinden de sus diferencias: el término 'ser' respecto a todos los seres de cierta especie o a todas las substancias creadas); los análogos se aplican a seres distintos en un sentido, pero semejantes desde un aspecto determinado o desde una determinada proporción, puede ser, por tanto, analogía de atribución (el término se aplica a varios entes (analogados secundarios) por su relación con otro llamado primer analogado, por ejemplo, como dice Santo Tomás, "lo que se diga de Dios y de las criaturas, se dice en cuanto hay cierto orden de la criatura a Dios como a principio y causa en la que preexisten de modo más elevado todas las perfecciones de los seres"[46]) y analogía de proporción (el término puede ser atribuído a varios entes en una relación de semejanza), ésta puede ser, a su vez, metafórica (tiene carácter simbólico) o propia (expresa una semejanza real); en cuanto a los equívocos, son los términos que se aplican a varios seres con un sentido totalmente distinto (por ejemplo, el banco como mueble o como institución). Es obvio que los equívocos deben eliminarse de la ciencia, por ello todo estudio comienza definiendo términos, así mismo se deben eliminar las metáforas pues a menudo constituyen seudoexplicaciones que entorpecen el avance del conocimiento. En el caso de los equívocos no sólo se propone su eliminación de la Ciencia, considerada por Condilac como lenguaje[47], sino de todo lenguaje, ya que, como dice Bally, "la primera condición que la lógica impone al lenguaje es la de ser claro y evitar la ambigüedad. Para ello es necesario, en lo posible que cada signo no tenga más que un valor y que cada valor no esté representado más que por un signo"[48], es decir, que exista una biyección entre significante y significado (según la distinción que hace Saussure[49] entre los elementos del signo lingüístico). En el caso de los equívocos no hay un solo rasgo común entre las realidades que designa que pudiera justificar la igualdad en el hombre, por lo que deberían desaparecer mediante una convención. Cosa imposible, al parecer de Ortega y Gasset, para quien "el lenguaje es por naturaleza equívoco"[50].

En cuarto al uso metafórico debe proscribirse de la Ciencia y, según Reichenbach, de la Filosofía pero, para Reichenbach, no sólo debe eliminarse la analogía metafórica sino la analogía propia vaga y superficial ya que conducen a "huecos verbalismos y a peligrosos dogmatismos... da origen a ideas falsas y borra diferencias esenciales", y sentencia: "los errores perniciosos por falsas analogías han constituido la enfermedad del filósofo en todos los tiempos"[51]. Para Bachelard, la analogía constituye una plaga en el pensamiento precientífico y un obstáculo epistemológico[52].

El único tipo de analogía válido será la analogía propia, cuando ésta sea estricta y se refiera a relaciones profundas e inequívocas. La analogía propia se aplica a seres distintos pero expresa una relación idéntica entre las partes, por ejemplo cuando establecemos una proporción 1:2 :: 2:4, estamos definiendo una analogía propia. El 1 es distinto del 2, el 2 es distinto del 4 y, sin embargo, la relación entre 1 y 2 y entre 2 y 4 es la misma: el primer número es la mitad del segundo. Debe existir, pues, una igualdad de relaciones y de ese modo la analogía propia queda en función de relaciones de semejanza más estricta. Podría haber una relación metafórica o superficial entre fenómenos y, por lo mismo, no ser válidas. De este género son los simulacra vitae de la ciencia de otros siglos, por ejemplo, cuando se comparaba el crecimiento de un organismo con el de un cristal o el de una celda osmótica, o cuando se consideraba una biocenosis como un organismo. En este caso las relaciones (crecimiento y asociación, respectivamente) no implican semejanza estricta entre los factores causales, ni en las leyes específicas ni, mucho menos, identidad formal. Existe semejanza superficial pues "crecen" los cristales o están "asociados" los vegetales, pero no existe una igualdad en las relaciones que expresan el crecimiento o la asociación y por ello no son válidas.

1.3.4 RELACIONES DE ANALOGIA PROPIA

Veremos ahora algunas relaciones de analogía desde el caso más estricto, la identidad, hasta el de mayor utilidad para nosotros, el homomorfismo.

1.3.4.1 IDENTIDAD

La identidad es una aplicación que transforma un conjunto en sí mismo de forma que a cada elemento se hace corresponder a sí mismo como imagen (definición 5). La identidad se encuentra caracterizada por las siguientes propiedades:

1.- Transitiva por transferencia.
2.- Transitiva por equiparación.
3.- Simétrica.
4.- Reflexiva.
5.- Circular.
6.- Isodinámica.
7.- Coincidente.

NOTA: La definición de las propiedades anteriores se da en un apéndice.

La identidad es aplicable exclusivamente en dos casos: cuando el objeto es de tal manera singular que constituye el único de su clase (por ejemplo Cervantes), y cuando existen varios pero cada uno de ellos es indistinguible de los otros y, por ende, resulta imposible su identificación individual (por ejemplo, los electrones).

La identidad corresponde a la relación de semejanza más estricta, es la analogía absoluta: la total igualdad entre dos cosas. Tradicionalmente se formula con el principio "A es A", cuya formulación estrictamente lógica dice "Todo sujeto puede ser, en un juicio, predicado de sí mismo" y en forma ontológica "Todo ente es igual a sí mismo". Parece que sólo puede afirmarse de una relación entre una cosa y ella misma pero constituye uno de los tres principios lógicos supremos, que en la lógica tradicional se les considera los puntos forzosos de partida del pensamiento mismo y, por lo tanto, de todas las ciencias.

1.3.4.2 IGUALDAD, CONGRUENCIA, SEMEJANZA, ETC.

La igualdad posee las mismas propiedades que la identidad excepto la 7, es una analogía menos estricta, por tanto, que la identidad, pero más útil pues se puede aplicar a objetos diferentes, haciendo abstracción de sus diferencias. La igualdad es una correspondencia que representa una coincidencia parcial entre las propiedades de los objetos, y esto permite que sea posible igualar una propiedad o relación de un objeto con la de otro, igual a aquél. También podemos ejecutar ciertos cambios en objetos iguales, sin alterar su igualdad, siendo ésta la esencia del Algebra antigua, que no era sino una teoría de las ecuaciones, según lo expresa el axioma fundamental del Algebra.

La igualdad de figuras geométricas se denomina congruencia; dos figuras son iguales (congruentes) cuando tienen la misma forma (determinada por las relaciones de sus elementos) y sus dimensiones son las mismas. La congruencia es una transformación puntual del plano no ilimitado sobre sí mismo que transporta cada par de puntos A,B a un par A', B' de modo que A'B'= AB, también se cnoce como isometría pues conserva todas las longitudes iguales. Cuando la transformación no conserva las longitudes, pero conserva la forma se conoce como semejanza y la transformación es tal que A'B'= kAB, es decir, la isometría es un caso especial de la semejanza (cuando k=1). Sin embargo, la semejanza pierde la propiedad 6, la isodinamia, aunque conserva las propiedades de la 1 a la 5. Así, la semejanza es una analogía menos estricta que la congruencia y menos aún que la identidad, no existe una correspondencia de igualdad entre las dimensiones (no se conservan), pero si se conserva la forma y sus elementos están dispuestos siguiendo el mismo orden. De la relación de semejanza se desarrolló la geometría homotésica en la cual no son invariantes ante las diversas transformaciones algunas magnitudes como las longitudes y, por tanto, las áreas y los volúmenes. La equivalencia es la relación correspondiente a la semejanza cuando los conjuntos no son geométricos.

Cuando se conservan los ángulos bajo una transformación se denomina a ésta, transformación conforme y en las partes más pequeñas se conserva la escala. Las aplicaciones conformes son de gran utilidad en muchos dominios de las matemáticas aplicadas básicamente por dos hechos: Directamente de consideraciones geométricas y de la consideración de que mapeo conforme de funciones armónicas produce funciones armónicas.

Las aplicaciones más importantes de las transformaciones conformes en Física son: en el cálculo de potenciales (eléctrico, de temperatura, de velocidades, etc.) en cuerpos de formas complejas.

Viendo lo anterior se descubre que una razón viable para distinguir transformaciones consiste en comparar las diferentes propiedades que dejan invariantes, siendo ésta la esencia de la simetría como veremos en la sección 1.4. Una transformación rígida como la rotación o la traslación conser a los ángulos y las distancias entre los puntos da un objeto, una transformación afín conserva las líneas paralelas y una transformación reflexiva conserva la simetría bilateral respecto a un eje determinado.

1.3.4.3 HOMOMORFISMO

1.3.4.3.1 INTRODUCCION

Tal vez la relación de analogía más importante es el homomorfismo, la cual está en estrecha relación con las propiedades algebraicas de los conjuntos asociados y también, al igual que la transformación conforme o la transformación de semejanza, es una aplicación que conserva ciertas características, en el caso del homomorfismo se dice que es una aplicación que conserva la operación, el orden, la métrica, etc. según los conjuntos que relacione. Podemos decir, es una analogía a nivel matemático muy útil: pues, si tenemos dos conjuntos homomórficos toda la información algebraica que se tenga sobre la estructura de uno de los conjuntos se aplica a la estructura del otro conjunto. Según el tipo de aplicación que sea el homomorfismo recibe distintas denominaciones: si es una sobreyección se llama epimorfismo; si es una inyección, monomorfismo; si es multívoca, isologismo; si es biyectiva, isomorfismo; siendo esta última la más importante, pues al ser biyectiva ofrece la ventaja de que asegura la existencia de su inversa y se puede, gracias a ésta, obtener la solución al problema inverso (tan importante en Geofísica), y fundamenta y posibilita el empleo de modelos matemáticos para la resolución de problemas en otro dominio, ya sea éste matemático, físico, biológico, etc.

Antes de definir el homomorfismo (en forma de una aplicación que cumple una cierta propiedad de preservación) debemos definir lo que es una operación binaria y algunos tipos de conjuntos en relación a los cuales surgió la idea de homomorfismo. Estos conjuntos poseen características importantes desde nuestro punto de vista generalista, debido a que sus propiedades hacen posible el obtener principios o información de esos conjuntos sin importar la naturaleza o características de sus miembros particulares. Por ello, dedicaremos algo de atención a estos conjuntos antes de profundizar en el concepto de homomorfismo.

1.3.4.3.2 CONJUNTOS ANALOGOS

DEFINICION 8 : Una <u>operación binaria</u> sobre un conjunto M es una aplicación del conjunto $M^{(2)}$ en M.

La imagen del par ordenado (a,b) bajo la operación * se representa con a*b. Un ejemplo de operación binaria es la adición de dos enteros. De hecho, el concepto de operación binaria es una generalización de la suma.

DEFINICION 9 : Una operación binaria * definida en un conjunto S se dice que es asociativa si

$$\forall\ a,\ b,\ c \in S:\ a*(b*c) = (a*b)*c$$

DEFINICION 10 : Una operación binaria * en un conjunto S se dice que es conmutativa si

$$\forall\ a,\ b \in S:\ a*b = b*a$$

Cuando un conjunto está provisto de una o varias operaciones binarias se tiene un 'sistema algebraico'. Dicho sistema posee cierta 'estructura' que está determinada por las propiedades de las operaciones definidas en el conjunto.

Es posible que dos conjuntos formados por elementos de diferente naturaleza y provistos de operaciones distintas tengan, sin embargo, el mismo 'comportamiento algebraico'; es decir, que las operaciones obedezcan a las mismas leyes. Se dice en tal caso que ambos sistemas poseen la misma 'estructura algebraica'. Los sistemas que poseen dicha 'estructura' son análogos.

Ahora veremos unos tipos importantes de 'estructuras algebraicas':

DEFINICION 11 : Un grupo abstracto G es un conjunto de elementos junto con una operación binaria asociativa * sobre G tal que:

a) $a,\ b \in G,\ a*b \in G$
b) Hay un elemento $n \in G$ tal que $x*n = n*x = x,\ x \in G$
c) Para cada $a \in G$ hay al menos un elemento $a' \in G$ tal que $a*a' = n$.

El elemento único n se llama neutro de G y el elemento a' se llama simétrico de a en G.

DEFINICION 12: Un grupo se dice abeliano o conmutativo si la operación binaria es conmutativa.

La importancia de los grupos abstractos es que en su estudio se obtiene información únicamente de las propiedades del grupo y en tal virtud es aplicable a todo conjunto con estas propiedades. Es esta característica la que define, en cierto modo, a la TGS pues intenta formular principios generales aplicables a conjuntos análogos, como el grupo y los conjuntos que veremos después. Un ejemplo de uso del concepto de grupo en la Geofísica lo tenemos en la Sísmica. Sean los conjuntos $A = \{a_k | a_k$ es el valor al tiempo k de la ondícula de la fuente explosiva$\}$ y el conjunto $B = \{b_k | b_k$ es el valor al tiempo k de la respuesta impulsiva de la Tierra$\}$. Entonces tenemos que el sismograma S forma un grupo abstracto, con la operación binaria llamada convolución: $S = A*B$ donde $S = \{s_k | s_k$ es el valor al tiempo k del sismograma$\}$.

Como el estudio de grupos ha resultado tan fecundo, se ha visto como aconsejable generalizar el estudio del caso abstracto de un conjunto dotado de dos operaciones binarias. Lógicamente debe haber una regla o propiedad que relacione las dos operaciones, dicha propiedad se conoce como distributiva.

DEFINICION 13 : Un conjunto A con dos operaciones binarias, denotadas por * y +, es un anillo si cumple las siguientes propiedades:

a) A es un grupo abeliano con respecto a *.
b) A es cerrado con respecto a la operación asociativa +.
c) A cumple las leyes distributivas: $a + (b*c) = a+b * a+c$ y $(a*b) + c = a+c * b+c$ $\forall a,b,c \in A$, es decir, que + es distributiva por la izquierda y por la derecha sobre *.

DEFINICION 14 : Si en el anillo existe un elemento idéntico para la operación binaria + a dicho elemento se le llama elemento unidad y la estructura se denomina anillo con unidad. En caso de ser conmutativa la operación binaria + se llama anillo conmutativo.

DEFINICION 15 : Un campo o cuerpo es un anillo conmutativo con elemento unidad en el que todos los elementos, a excepción del elemento neutro de la operación binaria * tienen inverso para la operación +.

Muchos resultados principales del Análisis no tienen nada que ver con el hecho de que los números reales formen un Cuerpo, sino que se apoyan en aquellas propiedades de los números reales que están relacionadas con el concepto de distancia. Generalizando la interpretación de los números reales como un conjunto en el que se ha definido la distancia entre sus elementos, llegamos al concepto de espacio métrico, uno de los conceptos más importantes de la Matemática moderna.

"El concepto de métrica es una de las piedras angulares dentro de la Matemática creado por la necesidad de calcular la distancia que media entre dos 'puntos' dados. Pero este problema, en apariencia tan sencillo, no siempre puede resolverse tomando una regla o instrumento topográfico y haciendo las medidas correspondientes. Así, por ejemplo... si estamos interesados en desarrollar por series una función matricial y dicha serie es convergente, entonces el número de iteraciones depende de la aproximación deseada. Esta aproximación se puede determinar, desde luego, calculando la 'distancia' entre dos matrices"[53]. El lector seguramente encontrará ejemplos de 'distancias' generalizadas en su campo.

DEFINICION 16 : Un espacio métrico es un par (X,d), compuesto de un conjunto (espacio) X de elementos (puntos) y de una distancia, es decir una función d unívoca real tal que $d: X{\times}X \to R$ ($\times$ denota el producto cartesiano) definida para dos cualesquiera y,z de X y que verifica las cuatro condiciones siguientes:

1) $\delta(y,z)\geq 0 \ \forall y,z \in X$
2) $\delta(y,z)=0$ si y sólo si $y=z \ \forall y,z \in X$
3) $\delta(y,z) = \delta(z,y) \ \forall y,z \in X$ (axioma de simetría)
4) $\delta(y,z)\leq\delta(y,u) + \delta(z,u) \ \forall y,z,u\in X$ (axioma triangular)

El propio espacio métrico lo denotaremos mediante una letra: $u = (X,\delta)$, se dice que δ es una métrica en X.

Veamos dos ejemplos:

a) El conjunto $C(a,b)$ de todas las funciones reales continuas definidas en el segmento (a,b) con la distancia

$$\delta = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

es el espacio llamado de funciones continuas con métrica cuadrática.

b) Sea Δ_k un alfabeto compuesto de k símbolos distintos y X el conjunto de eneadas (n-tuples) formadas con elementos de Δ_k, es decir $X = \{(x_1, x_2, \ldots x_n): x_i \in \Delta_k, i = 1,2,3\ldots n\}$ y sea la función $\delta(x,y) = \sum_i D_0(x_i, y_i)$, donde $D_0(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Esta métrica es usada en la teoría de la información para cuantificar la distorsión que sufren los mensajes durante el proceso de transmisión.

Una generalización semejante a la que nos llevó a la definición de espacios métricos nos conduce a los espacios topológicos. "En Topología nunca preguntamos '¿qué longitud?' o '¿a qué distancia?', sino que inquirimos '¿dónde?', '¿entre qué?', '¿interior o exterior?'[54].

DEFINICION 17 : Sea X un conjunto cualquiera. Se llama topología en X a todo sistema τ de subconjuntos G de X que verifica dos condiciones:

1) El propio conjunto X y el conjunto vacío $\emptyset$ pertenecen a τ
2) La unión $\bigcup_a G_a$ de un número cualquiera (finito o infinito y la intersección $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ de un número finito de conjuntos de τ pertenecen a τ. El conjunto X junto con la topología definida en él, es decir, el par (X,τ) se llama espacio topológico. Los conjuntos, pertenecientes al sistema τ, se llaman abiertos.

Un espacio métrico está constituido por un conjunto de puntos y una métrica introducida en este conjunto; de la misma manera, un espacio topológico está constituido por un conjunto de puntos y una topología introducida en él. Por lo tanto, definir un espacio topológico significa definir un conjunto X y una topología en él, es decir, indicar aquellos subconjuntos que se consideran abiertos en X.

Como último ejemplo de conjuntos especiales definiremos los sistemas:

DEFINICION 18 : Un sistema es un conjunto ordenado de cosas relacionadas o conectadas en forma tal que constituyen una unidad o un todo, así, en esencia, un sistema es un complejo de elementos interactuantes. Interacción significa que elementos p están en relación R, de suerte que el comportamiento de un elemento p en R es diferente de su comportamiento en otra relación R'. Si los comportamientos en R y R' no difieren, no hay interacción, y los elementos se comportan independientemente con respecto a las relaciones R y R'.

Es posible definir un sistema de varias maneras, pero se prefiere siempre que sea en lenguaje matemático: en términos de sus entradas y salidas, en términos de su 'estado', en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas, etc. Veamos dos definiciones de este tipo:

DEFINICION 18.1 : Denotando alguna magnitud por Q_i del elemento p_i ($i = 1,2,\ldots n$), para un número n finito de elementos podemos definir un 'sistema' mediante ecuaciones de la forma

$$\frac{dQ_1}{dx} = f_1(Q_1,Q_2,\ldots Q_n)$$

$$\frac{dQ_2}{dx} = f_2(Q_1,Q_2,\ldots Q_n)$$

$$\ldots$$

$$\frac{dQ_n}{dx} = f_n(Q_1,Q_2,\ldots Q_n)$$

De forma tal que el cambio de cualquier magnitud Q_i es función de todas las magnitudes Q (de Q_1 a Q_n) y por el contrario, el cambio de cualquier Q_i acarrea el cambio en todas las demás Q y, por tanto, en el sistema en conjunto, siendo de esta forma patente la 'interacción'.

Esta definición de sistema fue empleada por Lotka con respecto a problemas demográficos, por Volterra y otros en problemas de biocenosis, por Spiegelman para estudiar la cinética de los procesos celulares y la teoría de la competencia dentro de un organismo[55].

DEFINICION 18.2 : Un sistema es una aplicación del conjunto C_f de entradas al conjunto C_y de salidas.

Cada sistema produce algunas funciones (respuestas o salidas) para unas ciertas funciones dadas (entradas) y se suele representar mediante un diagrama de bloque:

$$\underset{f(t)}{\text{ENTRADA}} \longrightarrow \boxed{\text{SISTEMA}} \longrightarrow \underset{y(t)}{\text{SALIDA}}$$

1.3.4.3.3 DEFINICION DEL HOMOMORFISMO

Hemos visto seis tipos de conjuntos que poseen propiedades tales que es posible obtener información únicamente de esas propiedades y se pueden definir, asimismo, principios 'generales' para cada tipo de conjunto sin importar la naturaleza o características concretas de sus miembros particulares. Mencionamos anteriormente que Bertalanffy expresa su concepción de la analogía diciendo que "Si un objeto es un sistema, debe tener ciertas características de los sistemas, sin importar de qué sistema se trate." Ahora bien, vemos (analizando los seis conjuntos que definimos más arriba) que los sistemas son un caso particular de uno más general, esto es, no sólo los sistemas poseen esa propiedad de tener principios 'generales', y de hecho nosotros sólo hemos mencionado esos ejemplos por cuestión de espacio, pero no porque tales conjuntos sean los únicos. El que existan principios generales se deriva en algunos casos de la estructura algebraica, pero en general es consecuencia de que los conjuntos son definidos como poseedores de ciertas propiedades; así, los conjuntos que poseen esas propiedades son análogos entre sí y, según las propiedades definidas, tendrán características comunes e independientes de sus elementos concretos. Por otro lado, el homomorfismo, como dijimos anteriormente, es un tipo especial de analogía muy estricta y sobre todo muy útil, íntimamente relacionada con los conjuntos anteriores. En el homomorfismo la analogía es más estricta por dos motivos: en primer lugar, se define dentro de conjuntos análogos, esto es, el homomorfismo se define especificando el tipo de conjunto en el cual se aplica la relación de homomorfismo, por ejemplo: homomorfismo entre grupos, entre anillos, etc. En segundo lugar, el homomorfismo es una analogía a nivel de una o varias propiedades esenciales del conjunto, estableciendo una igualdad de relaciones entre elementos de los conjuntos homomórficos. Por ejemplo, cuando hablamos de la proporción dijimos que existe una igualdad no entre los elementos sino entre las relaciones de los elementos, algo enteramente análogo sucede con los conjuntos relacionados por un homomorfismo, como veremos más adelante.

DEFINICION 19 : Sean $(S,+)$ y $(S',*)$ dos grupos. Una aplicación $f: S \to S'$ es un homomorfismo si: $f(a+b) = f(a) * f(b)$, $\forall a,b \in S$.

El definir el homomorfismo entre conjuntos análogos (en el sentido de ser grupos, espacios métricos, sistemas, etc.) y, sobre todo, el definirle en términos de un nexo esencial, de una relación entre sus elementos tan importante para los conjuntos, como lo es la operación binaria para un grupo (de hecho el grupo está definido en términos de dicha operación binaria), es lo que hace del homomorfismo un concepto tan fructífero y tan riguroso.

En el homomorfismo entre grupos, se dice que es una aplicación que conserva la operación, gracias a esta propiedad queda garantizado el llegar al mismo resultado empleando cualquiera de los siguientes procedimientos:

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r, "*"] \arrow[d, dotted, "f"'] & a*b \arrow[d, "f"] \\
(f(a),f(b)) \arrow[r, "+"] & \begin{matrix} f(a*b) \\ f(a)+f(b) \end{matrix}
\end{tikzcd}$$

Un espacio métrico puede ser homomórfico a otro, pero en este caso la propiedad qe se quiere conservar no es la operación sino la métrica entre los elementos. Así, si f es una aplicación del espacio métrico $R = (x,r)$ sobre el espacio métrico $R'=(x', r')$ se denominará homomorfismo entre los espacios métricos R y R', si $r(x_1,x_2) = r'(f(x_1), f(x_2))$ $\forall x_1,x_2 \in R$. También podríamos decir que son espacios homométricos.

Para el caso de sistemas la aplicación debe conservar las interacciones entre los elementos, que para el caso de la definición 18.1 implica que la expresión en ecuaciones diferenciales sea la misma. Las propiedades que hacen que un sistema sea lineal son la propiedad de homogeneidad y la de superposición, que expresan en el fondo el que la aplicación que es el sistema (definición 18.2) sea un homomorfismo; pero los sistemas lineales no son el único ejemplo de homomorfismo que maneja el geofísico, como dice Robinson, "el ingeniero usa homomorfismos continuamente y la abstracción de esos mapeos tiene grandes aplicaciones prácticas"[56]. Ejemplos de esas 'aplicaciones prácticas' son las transformadas z, de Laplace, de Fourier, etc; los operadores lineales de la diferenciación y la integración; la factorización espectral, etc.

1.3.4.3.4 ISOMORFISMO

Como dijimos antes una aplicación homomórfica que es biyectiva se conoce como isomorfismo y es este el concepto clave de la TGS y, en cierta forma de la Tesis.

El término isomorfismo se emplea porque 'iso' (ἴσος= igual) en griego denota una analogía más estricta que 'homo' (ὅμοιος= semejante, parecido). En el Algebra se usa para denotar la idea de que dos conjuntos son tan parecidos que pueden considerarse como el mismo y ofrece la ventaja sobre el homomorfismo de que, al ser biyectiva implica la existencia de su inversa y se puede así regresar al dominio original. Los ejemplos que señalamos anteriormente son posibles precisamente por ser isomórficos.

Un ejemplo de uso del isomorfismo que, quizá sin percatarse de ello, usan continuamente el ingeniero y el científico es el empleo de modelos matemáticos para representar fenómenos naturales o culturales:

$$\begin{tikzcd}
\text{ELEMENTOS FISICOS} \arrow[rr, shift left, "\text{operación física}"] \arrow[d, "\text{Modelo (f)}"'] & & \text{RESULTADO FISICO} \arrow[ll, shift left, "\text{problema inverso}"] \\
\text{ELEMENTOS MATEMATICOS} \arrow[rr, "\text{operación matemática}", "\text{problema directo}"'] & & \text{RESULTADO MATEMATICO} \arrow[u, "\text{Interpretación } (f^{-1}) \text{ del modelo}"']
\end{tikzcd}$$

Orellana[57] nos muestra el isomorfismo existente entre la difusión de corrientes eléctricas de intensidad constante y los campos electrostáticos producidos por cargas eléctricas, estableciéndo una correspondencia biunívoca entre las siguientes magnitudes: $Q \leftrightarrow I$, $P \leftrightarrow U$, $E \leftrightarrow E$, $D \leftrightarrow J$, $\varepsilon \leftrightarrow \sigma$. Donde Q = carga eléctrica puntual en un medio homogéneo de constante dieléctrica ε que crea un potencial electrostático P cuyo campo electrostático es E' y D el vector desplazamiento. U es el potencial electrocinético debido a un manantial puntual de intensidad I, y cuyo campo electrocinético es E, y J es la densidad de corriente, σ es la conductividad. También se puede establecer una correspondencia entre las relaciones de dichas magnitudes (son isomorfas):

$$E' = -\nabla P \leftrightarrow E = -\nabla U,\ D = \varepsilon E' \leftrightarrow J = \sigma E,\ \nabla \cdot D = 0 \leftrightarrow \nabla \cdot J = 0$$

$$P = Q/(4\pi\varepsilon r) \leftrightarrow U = I/(4\pi\sigma r).$$

En el último capítulo mostraremos como el isomorfismo descrito por Orellana es mucho más amplio. Una de las ventajas que tiene este isomorfismo es que para la resolución de un problema de distribución de corrientes continuas puede ya estar resuelto en algún tratado clásico de Electricidad, o viceversa.

1.3.5 APLICACIONES DE LA ANALOGIA

En esta sección mencionaremos algunas aplicaciones de la Analogía. Daremos ejemplos de varias disciplinas para mostrar lo amplio que es su dominio de aplicación. También veremos cómo es una idea esencial en el arte y en la ciencia. Ya en secciones anteriores hemos mencionado algunas de sus aplicaciones. Así mismo, hemos visto cómo la Analogía ha sido una idea clave en la Filosofía, desde la armonía pitagórica hasta la consideración kantiana de la Analogía como 'categoría de relación' o la consideración de Wittgenstein sobre la posibilidad del conocimiento gracias a la analogía entre objeto y pensamiento. En el Arte también es una idea esencial como veremos en la sección 1.3.5.6.

En cuanto a la Ciencia,"reúne fenómenos de los más diversos y descubre analogías ocultas que lo relacionan", según escribió Fourier en su Teoría Analítica del Calor.

1.3.5.1 ANALOGIAS EN FISICA

La Analogía ha servido como forma inferencial en la obtención de modelos en la Física, siendo interesantes e ilustradores muchos de ellos. Por ejemplo, la Teoría ondulatoria de la luz le fue sugerida a Huyghens por una comparación con las olas o, según se cuenta, a Glaser se le ocurrió la cámara de burbujas observando un tarro de cerveza. Maxwell descubrió que sus ecuaciones de campo conducían a una ecuación isomórfica con la conocida ecuación de onda de la Mecánica, y con seguridad pudo predecir la existencia de las ondas electromagnéticas.

La Analogía sirve también como base en la explicación de fenómenos nuevos a partir de fenómenos conocidos. Así, el efecto Compton se pudo explicar gracias a la similitud existente entre dos ecuaciones. Una, la relación experimental de Compton, y otra, la ecuación del choque de dos partículas. "La similitud entre ambas ecuaciones es sorprendente, va más allá de una mera similitud algebraica. Ambas ecuaciones se aplican a un proceso de choque en su sentido más general"[58]. También se puede explicar el efecto fotoeléctrico partiendo de la analogía entre las ecuaciones de energía de una partícula y la ecuación de energía de una onda electromagnética.

Se pueden dilucidar los orígenes de la ecuación de Schrödinger por procedimientos de analogía: en la Mecánica Cuántica la función de onda $\Psi(x,y,z)$ tiene un papel semejante al de la amplitud $\xi(x,y,z)$ de una onda estacionaria. Para un movimiento ondulatorio de longitud de onda λ y de carácter estacionario, su amplitud ξ satisface la ecuación diferencial de Helmholtz:

$$\nabla^2 \xi + k^2 \xi = 0 \qquad (1.10)$$

Donde $k = 2\pi/\lambda$, es el número de onda de la onda estacionaria.

Para la Mecánica Cuántica $p = \hbar k$, según las deducciones de De Broglie, de modo que podemos esperar que la función de onda satisfaga una ecuación similar de la forma

$$\nabla^2 \Psi + p^2/\hbar^2 \Psi = 0 \qquad (1.11)$$

Entonces, como la Energía Total que determina el estado dinámico de una partícula es

$$E = \underbrace{p^2/2m}_{\text{Energía Cinética}} + \underbrace{Ep\,(x,y,z)}_{\text{Energía Potencial}}, \qquad (1.12)$$

Podemos escribir

$$p^2 = 2m[E - Ep\ (x,y,z)], \tag{1.13}$$

Que sustituido en (1.12) se convierte en la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\Psi + Ep\ (x,y,z)\Psi = E\Psi \tag{1.14}$$

Por otra parte, la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger, la Matrizenmechanic de Heisenberg y la Teoría de Dirac son isomórficas, para las tres la relación esencial que produce la cuantificación es $pq - qp = h/(2\pi i)$. Para Heisenberg, p y q son matrices de elementos matriciales p_{mr}, q_{rn}; para Schrödinger q es un número y p es el operador diferencial $p = \frac{h}{2\pi i}\ \frac{\partial}{\partial p}$; para Dirac p y q son números especiales que se rigen por un Algebra no conmutativa. Las tres teorías son equivalentes, y en el caso de un problema concreto, los resultados son idénticos. Las tres teorías surgieron como consecuencia del hecho que la relación general de la Mecánica Cuántica fuera isomórfica con la expresión hamiltoniana de la Mecánica Clásica: "Uno podía elaborar las ecuaciones de la nueva Mecánica, todo lo que tenía que hacer era generalizar adecuadamente las ecuaciones clásicas expresadas en forma hamiltoniana"[59].

La ventaja de la ecuación de Schrödinger es precisamente a la analogía con las ondas estudiadas por los primeros fisicomatemáticos. "Es, de hecho, la ecuación típica de todos los movimientos ondulatorios: ondas acústicas, electromagnéticas, etc., son todas ellas tratadas mediante ecuaciones matemáticamente muy similares a la de Schrödinger"[60].

"El principio hamiltoniano demostró directamente que era la guía más segura y fidedigna"[61]. Debido a la íntima analogía entre este y el principio de Fermat; presumiendo, como lo hizo Schrödinger que manifiesta un mecanismo ondulatorio; Schrödinger emplea además la analogía de la óptica ondulatoria y la óptica geométrica (dos descripciones complementarias) para explicar la doble naturaleza (corpuscular y ondulatoria) de la materia.

La ecuación de Schrödinger (1.14) se puede escribir de la forma

$$\left[\frac{1}{2m}\left(h^2\nabla^2\right) + E_p\ (\overline{r})\right]\Psi(x,y,z) = E\ \Psi(x,y,z) \tag{1.15}$$

factorizando la función de onda $\Psi(x,y,z)$ como si fuera un factor común de las cantidades entre los corchetes, cada término del corchete debe operar sobre $\Psi(x,y,z)$ de acuerdo a su propia naturaleza. En lenguaje matemático podemos decir que la expresión que aparece entre los corchetes es un operador

$$H = \frac{1}{2m}(-h^2\nabla^2) + E_p(\bar{r}) \tag{1.16}$$

Así, se puede escribir la ecuación 1.15 en la forma simbólica

$$H\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z) \tag{1.17}$$

El operador H se llama operador hamiltoniano del sistema. En Mecánica clásica la energía total se denomina el hamiltoniano cuando se expresa en función del momentum y de las coordenadas del sistema. Para una partícula con movimiento en tres dimensiones el hamiltoniano clásico es

$$H_c = \frac{1}{2m}p^2 + E_p(\bar{r}) \tag{1.18}$$

donde $\bar{r}$ es el vector de posición de la partícula y $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$. Podemos correlacionar los hamiltonianos clásicos y cuánticos de una manera muy simple

$$p_x \to -ih\frac{\partial}{\partial x},\quad p_y \to -ih\frac{\partial}{\partial y},\quad p_z \to -ih\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.19}$$

o en la forma más compacta

$$\bar{p} \to -ih\nabla \tag{1.20}$$

Basándonos en la relación 1.20 podemos establecer el Primer Principio de la Mecánica Cuántica como sigue:

1. A cada cantidad física $A(\bar{r},\bar{p})$, que sea una función de la posición y del momentum de una partícula, corresponde un operador cuántico, que se obtiene reemplazando $\bar{p}$ por $-ih\nabla$; esto es, $A(\bar{r},-ih\nabla)$.

La siguiente tabla resume los operadores cuánticos para varias cantidades físicas.

MAGNITUD	DEFINICION CLASICA	OPERADOR CUANTICO
Posición	$\overline{r}$	$\overline{r}$
Momentum	$\overline{p}$	$-ih\nabla$
Momentum angular	$\overline{r} \times \overline{p}$	$-ih\overline{r} \times \nabla$
Energía cinética	$\overline{p}^2 / 2m$	$-(h^2 / 2m)\nabla^2$
Energía total	$\overline{p}^2 / 2m + E_p(\overline{r})$	$-(h^2 / 2m)\nabla^2 + E_p(\overline{r})$

Para terminar mencionaremos algunos isomorfismos muy usados en Física e Ingeniería:

Un isomorfismo bien conocido por todos los estudiantes de Física es el existente entre la Ley de la Gravitación Universal y la Ley de Coulomb, por consiguiente podemos aplicar para la Ley de Coulomb muchos resultados matemáticos demostrados para la Ley de Newton o visceversa. Otro ejemplo son las correspondencias matemáticas entre sistemas mecánicos y eléctricos. La principal ventaja es que los sistemas eléctricos son más fáciles de manufacturar e interconectar con sistemas mecánicos, y un voltaje es medido más fácilmente que el desplazamiento de un objeto en movimiento. Otra ventaja es que toda la tecnología de las líneas de transmisión puede aplicarse a sistemas mecánicos.

El Análisis Dimensional, que es una rama de la Física Matemática desarrollada por Gauss que se basa en el llamado Principio de Similitud, que implica una equivalencia entre dos sistemas físicos diferentes es posible gracias al isomorfismo.

Las computadoras analógicas en las cuales los números se convierten en magnitudes medibles, tales como longitudes o voltajes, que son isomórficas con las operaciones deseadas. En la misma máquina se construye un problema físico isomórfico al problema matemático que se pretende resolver. Cuando, por ejemplo, se trata de hallar la solución de una ecuación diferencial, se construye un circuito en el que una magnitud física obedece a la misma ecuación diferencial.

La Teoría de la Información, en el sentido de Shannon y Weaver, se basa en el concepto de información, definido por una expresión isomorfa con la entropía negativa de la termodinámica. La Teoría de la Información ganó importancia en Ingeniería de Comunicaciones y posteriormente se aplicó en Geofísica.

El método de construcción y análisis de analogías elaborado por L. I. Mandelstam y desarrollado posteriormente por Rítov y Gorélik, que consiste en lo siguiente: "En primer lugar, se examina detalladamente un fenómeno físico y se construye su modelo matemático simplificado. A continuación se investigan las facultades del modelo construido y se aclaran otros fenómenos físicos que se definen, con ciertas idealizaciones, por el mismo modelo o uno semejante. Como resultado se obtiene un sistema de fenómenos distintos por su naturaleza, descritos por las mismas ecuaciones y, bajo este concepto, análogos entre sí. Esto da la posibilidad de apoyarse en las propiedades conocidas de un fenómeno al estudiar otro... Este método es el más apropiado para la sistematización de los fenómenos referentes a distintos dominios de la Física. Este método posee notables posibilidades heurísticas... Con ayuda del método de las analogías es posible establecer propiedades de los fenómenos físicos a estudiar. Permite pronosticar regularmente la posibilidad de observar nuevos hechos en una región basándose en los hechos conocidos de otra esfera". Este método ha sido usado de manera muy fructífera, por ejemplo en el campo de la Optica y la Radiotécnica, construyendo un sistema de analogías entre las ondas y las oscilaciones.[62]

1.3.5.2 ANALOGIAS EN CIENCIAS DEL HOMBRE

En la Lingüística podemos ver dos aplicaciones muy importantes de la Analogía, la primera en cuanto a la analogía entre el sistema de significantes y el sistema de significados que da validez a la lengua (la cual a su vez es un sistema de signos, y éstos son análogos por naturaleza). La segunda, en cuanto al papel de la analogía en favor de la regularidad y unificación de los procedimientos de formación de nuevas palabras: "Es, junto con los cambios fonéticos, el gran factor de la evolución de las lenguas, el procedimiento por el cual pasan de un estado de organización a otro"[63]. La Analogía es el principio de las creaciones de la lengua y ocupa un lugar preponderante en la Teoría de la Evolución Lingüística y constituye un principio tanto de renovación como de conservación: "Ya se trate de la conservación de una forma compuesta de varios elementos, ya de una redistribución de la materia lingüística e nuevas construcciones, el papel de la Analogía es inmenso: es ella la que siempre está en juego"[64].

En la Sociología el enfoque holístico se está imponiendo y, por tanto, la Analogía es un concepto imprescindible. Por ejemplo de la consideración de la sociedad como un 'todo que funciona' o como un 'sistema que opera', según palabras de Chinoy [65], se desprende la utilidad de concebir a la sociedad como un organismo biológico (Spencer) o como un organismo contractual (Fouillée)[66]. De especial importancia para la Sociología es el criterio comparativo: comparación sistemática de distintas sociedades, presentes y pasadas, y la comparación siempre es sobre semejanzas[67].

Freud uso de la Analogía frecuentemente: un caso muy claro es la suposición de la existencia de energía psíquica (impulsos que mueven al individuo a actuar), análoga al concepto de energía física, definida como la capacidad de realizar un trabajo [68]. La Teoría psicoanalítica actual, por su parte, según Peterfreund, parece basada en una analogía hidrodinámica simple: "La idea de concebir la sexualidad o la agresión a manera de fluidos es muy natural"[69]. Para Piaget, la Psicología Infantil es enteramente análoga a la Embriología y, por tanto, al desarrollo filogenético (del cual hablaremos más en la siguiente sección). Pero no sólo eso: La Epistemología Genética es también análoga a la Psicogénesis, y ésta a ciertas formas de equilibrio dinámico físico: "En efecto, hay por lo menos 5 analogías estrechas entre estas 'estructuras disipativas' (estudiadas por Prigogine) y lo que nosotros consideramos como equilibraciones y equilibrios cognoscitivos... Se trata de equilibrios dinámicos que implican intercambios con el exterior y que son distintos de los equilibrios sin intercambio... Son estos intercambios los que por medio de reglajes internos estabilizan las estructuras... La equilibración como tal está caracterizada en ambos casos por una 'auto-organización'... Los estados que tienen lugar en un instante dado no pueden ser comprendidos sino a partir de su historia pasada. Finalmente y sobre todo, la estabilidad de un sistema es función de su complejidad"[70].

1.3.5.3 ANALOGIA EN QUIMICA Y BIOLOGIA

En Química el uso de modelos es importantísimo, y gracias a la Teoría

Estructural que establece un sistema análogo con los compuestos químicos (las fórmulas estructurales) se puede saber cómo proceder para hacer un compuesto, qué propiedades físicas se pueden esperar de él (puntos de fusión y ebullición, densidad, el tipo de solventes en que se disolverá, aun si será coloreado o no), qué tipo de compuesto químico es de esperar, la clase de reactivos con los que reaccionará y el tipo de productos que formará, y si reaccionará rápida o lentamente. Se sabrá todo esto y más acerca de un compuesto que nunca antes hubiésemos conocido[71].

En la Biología la Analogía ha desempeñado un papel muy importante, pudiendo citar ramas enteras dedicadas a la búsqueda de analogías: Anatomía Comparada, Bioquímica Comparada, etc. También la esencia de los argumentos de la evolución se fundamentan en la Analogía: están basados en la existencia de órganos homólogos (semejantes en estructura, relaciones, desarrollo embrionario, inervación, etc.); las similitudes funcionales y químicas (por ejemplo, la semejanza fundamental entre las proteínas sanguíneas de los mamíferos), en similitudes embriológicas, similaridades genéticas, etc. Precisamente las similitudes embriológicas dieron origen a la Teoría de la Recapitulación, formulada por Darwin y Haeckel, que afirma que el embrión, en el curso de su crecimiento, repite la historia evolutiva de sus antecesores en forma abreviada, idea suscintamente expresada en la fórmula: "La Ontogenia es la recapitulación de la Filogenia" y cuyo origen se debe a la analogía entre las etapas sucesivas del desarrollo embrionario y las etapas evolutivas de sus antepasados (en su expresión moderna, afirma que los embriones recapitulan sucesivamente algunas formas embrionarias de sus antecesores), la Filogenia se establece buscando patrones de similitudes y "es tranquilizador saber que las relaciones evolutivas inferidas de los análisis bioquímicos... concuerdan notablemente con las relaciones evolutivas establecidas hace un siglo basándose en similitudes morfológicas"[72].

La base de las clasificaciones biológicas es analógica, así la clasificación de Linneo fue establecida sobre bases sistemáticas firmes en función de las semejanzas estructurales[73]. Los biólogos al determinar relaciones distinguen dos tipos de similitud en las estructuras: 'estructuras homólogas' son aquellas que surgen de rudimentos embrionarios similares, son análogas en plan y desarrollo estructurales básicos, y por tanto, reflejan una dotación genética común y una relación evolucionaria. 'Estructuras análogas' sólo son superficialmente similares y sirven para una función similar, pero tienen patrones de estructura y desarrollo básico muy diferentes.

"Una de las bases fundamentales de la Biología es que 'la vida sólo procede de la vida'"[74], base análoga al principio filosófico de que lo similar produce lo similar. La herencia es la tendencia de los individuos a ser semejantes a sus progenitores y una de las propiedades del gen más importantes, que el modelo de Watson y Crick del DNA explica perfectamente, es la de su capacidad de reproducirse exactamente, de hacer copias iguales a sí mismo, siendo la Analogía entonces el principio de conservación de la herencia al igual que lo es de conservación de la lengua. Y la Genética se define como "la rama de la Biología que se ocupa de los fenómenos de herencia y variación, y estudia las leyes que rigen las semejanzas y diferencias entre individuos con ascendientes comunes"[75].

Adolph Fick, quien publicó 'Die Medizinische Physik' (el primer texto de Biofísica), "desarrolló las leyes de difusión por analogía con las leyes que rigen el flujo de calor. Al poco tiempo se hicieron experimentos en el laboratorio que comprobaron que dicha analogía era cuantitativamente exacta"[76].

1.3.5.4 ANALOGIA EN ESTETICA

En la reflexión sobre el Arte ha imperado una idea: el Arte es imitación. ya Platón, en su República, fundamenta su rechazo a los poetas en que son 'imitadores' y "el imitador no sabrá ni podrá opinar debidamente acerca de las cosas que imita"[77]. Aristóteles, en su poética, asegura que la Poesía, el Teatro y la Música "son -todas y todo en cada una- reproducciones por imitación"[78]. Para Cennino Cennini, el Arte consiste principalmente en la imitación de la naturaleza, corrigiendo ésta mediante el estilo, y el estilo mediante la imitación de la naturaleza. Hugo de San Víctor asegura por su parte, que "se trata de imitar la naturaleza: imitanda natura... imitar su actividad, no su obra"[79].

En la Edad Media se considera que el artista imita a la naturaleza, pero porque la naturaleza es un ser viviente al servicio de Dios; imitar a la naturaleza equivale a rezar.

1.4 LA SIMETRIA

1.4.1 GENERALIDADES

La Simetría es el concepto que cierra nuestra triada, de categorías y, como veremos más adelante, depende de un tipo especial de Analogía y, por lo tanto, de una clase específica de Aplicación. Así, la Simetría es el concepto menos general y la Aplicación el más general. El sentido de poner a los tres conceptos en un nivel de igualdad en cuanto a categorías, no radica en su generalidad sino en su uso como marcos de referencia conceptual, en cuanto a que dentro de su contexto el hombre piensa. La Simetría, a pesar de su menor generalidad, es un concepto tan fundamental como la Aplicación o la Analogía, ya que constituye una herramienta heurística importantísima de la Ciencia, es más, la Simetría, forma el núcleo mismo de la Ciencia. Por su parte, el Arte siempre ha estado ligado a la Simetría y seguramente las primeras reflexiones sobre la Simetría surgieron en le seno de la Estética, y desde entonces giran en torno a este concepto. Sin embargo, la idea de Simetría se origina, según Ning Yang [80], de nuestras nociones cotidianas y se remonta a la más temprana historia del pensamiento humano. Para Piaget [81], los principios de Simetría no son a priori en sentido absoluto, pues el niño no desarrolla el uso de esta categoría sino hasta llegar a cierta edad. Por ejemplo, más o menos al año de edad encontramos en el niño la operación mental de Simetría relacionada con la conservación de los objetos y que está ligada estrechamente a la construcción de un 'grupo de desplazamientos', que Poincaré consideraba el origen de la elaboración del espacio sensomotor.

Quizá el tipo de Simetría más conocido es el relacionado con la reflexión especular, a partir del cual Kant [82], llegó por primera vez a su concepción del tiempo y del espacio como formas de intuición. Leibinitz [83], por su parte, llegó a su concepción de la relatividad del espacio y de la estructura causal del mundo en base a consideraciones de Simetría. Además, la Simetría constituye la esencia de ideas filosóficas tan importantes como Substancia (ιποκειvον), Orden, Equilibrio y Estructura.

Veremos a continuación un esbozo de la evolución que ha sufrido el concepto de Simetría en un orden cronológico aproximado.

1.4.2 BASE MATEMATICA DE LA SIMETRIA

1.4.2.1 LA SIMETRIA A PARTIR DE LOS GRIEGOS

La Simetría, del griego Σιμμετρια , connota la idea de una medida justa, un cálculo exacto y entre los griegos era un concepto muy asociado con la belleza (la cual consistía en último término de relaciones numéricas) y con el orden. Como ya mencionamos antes, la primera reflexión sobre Simetría surge seguramente en el dominio del Arte. Así, Aristóteles escribía en su 'Estética': "Las formas supremas de lo bello son la ταξια (conformidad con las Leyes), la συμμετρια (Simetría) y la ορισμενον (Determinación)". Dentro del contexto de la Estética tenemos así mismo las ideas de Adan Smith, para quien "La Simetría es la belleza" [84], de Santo Tomás [85], para quien la Simetría es una característica esencial de la belleza, y de Plotino, según el cual, "La belleza consiste menos en la simetría que en el esplendor que brilla en la Simetría" [86].

En un sentido general, un objeto se dice "simétrico si se compone de partes intercambiables, esto hace que sea algo bien proporcionado, bien equilibrado, y la Simetría define aquel tipo de concordancia por el cual diversas partes se integran en un todo" [87]. Es en este sentido que se entiende la Simetría en la Estética: "La belleza es una cierta concordancia (cocinnitas) mantenida en todas las partes" [88] . Así, en su origen las ideas de belleza, simetría y orden estaban íntimamente ligadas. Algo simétrico era algo bello y algo simétrico era algo ordenado. Y es que el espíritu humano, como descubrió Bacon, "se siente inclinado naturalmente a suponer en las cosas orden y semejanza, y ve por doquier simetría y similitud" [89] . Así que la concepción de la Simetría no es reciente, y a través de ella el hombre trata de crear y captar el orden y la belleza [90]. Se encuentra tan arraigada la Simetría en el pensamiento humano, que ya Schmarzov la concibe en forma semejante a una categoría de la naturaleza humana, junto con la proporción (que como ya vimos antes, no es sino una relación de Analogía) y con el ritmo (que no es sino Simetría temporal). "Las tres son Leyes sicológicas y fisiológicas que presiden la actividad creadora del hombre, que no es sino una de las maneras de entenderse con el mundo exterior" [91] .

Como ya mencionamos, la Simetría es aquel grupo de relaciones por el cual diversas partes se integran en un todo y su justificación plena como una ley sicológica (o como nosotros preferimos, 'categoría',) la encontramos en la Gestaltpsychologie. Gestaltpsychologie es un término alemán que se podía traducir como 'sicología de la forma o estructura'. 'Estructura' es más apropiado porque el término 'Forma' está filosóficamente cargado en exceso de sentido y es, por lo tanto, más impreciso. Estructura podría definirse como el conjunto de las relaciones existentes entre los diversos elementos que forman un todo en el que cada elemento depende de los otros y existe en función del todo (es decir, 'el todo' es un sistema), así que Estructura y Simetría son conceptos equivalentes. Si bien el término Simetría se asocia más con la idea de belleza, de un todo bien proporcionado, esto no debe restringir su generalidad. Ahora bien, la tesis fundamental de la Gestalpsychologie es que el conocimiento no se realiza partiendo de una captación de datos sensibles 'aislados', sino por una consideración del objeto como un 'todo', es decir, siemrpe se captan totalidades, estructuras. Esta idea es la base para nuestra consideración de la Simetría como Kernell o núcleo de la Ciencia, y como categoría del pensamiento humano. Además, como veremos más adelante esta idea no es fundamentada sólo por la Gestaltpsychologie sino también por las investigaciones neurofisiológicas,

La Simetría implica no sólo una cierta relación entre las partes sino cierto orden entre las mismas, y de éstas con el todo. Esta forma de entender la Simetría también proviene de los griegos, para quienes 'el orden' consistía en que las relaciones numéricas implicadas fueran proporcionales. Y así, Demócrito comparo al hombre con el Cosmos en cuanto 'organismos' (estructuras, diríamos en la terminología actual), pues ambos satisfacen ciertas relaciones 'ordenadas'; recordemos así mismo, la armonía pitagórica de los astros y los famosos cánones de las esculturas de Policleto y Licipo.

La idea de la Simetría como orden, concordancia o proporción justa la retoman en el Renacimiento, Leonardo y Durero quienes establecen nuevos cánones, es decir, correspondencias en las dimensiones del todo (el cuerpo) en función de las partes, (cabeza, brazos, etc.), quienes así mismo creían que la belleza y el orden radicaban en dichas relaciones proporcionales. [92]

Bamgarten, también "hace residir la belleza en un acuerdo entre diversos pensamientos, de acuerdo a una abstracción proveniente del orden en que se presentan y de los signos que sirven para expresarlos" [93]. Quizá una de las ideas de orden más fructíferas es la de Equilibrio, que puede ser visualizada fácilmente usando una imagen sencilla: la balanza. Los brazos de la balanza son simétricos respecto a su centro de rotación. De la idea de Equilibrio derivan conceptos tan importantes como el axioma fundamental de las ecuaciones ('Algebra' derivó de la obra árabe: 'Kitab almuhtasar fi hisab al-gabr wa-al-muqabala'; al-gabr significa ecuación o restauración y al-muqabala son los términos que hay que agregar o quitar para que la igualdad no se altere); todas las ecuaciones de continuidad y sus aplicaciones (ecuación de Bernoulli, el principio de D'Alembert, principios de conservación de la materia y la energía, teorema de Torricelli) ; la concepción moral de Ciceron (mediocridad aúrea) y de Aristóteles ("la virtud moral ([illegible]) es un término medio (μεσότης)");[94] las ideas pitagóricas clásicas sobre salud ("la armonía en el interior del cuerpo era condición de la salud, más aún esencia misma de ella y era llamada equivalencia de los supuestos.....en el arte de curar.... procuraron en primer lugar determinar bien los caracteres del justo equilibrio en la bebida, la comida y el reposo") [95] ; en el concepto ético de Demócrito de Eutimia, "la serena paz del alma, que se alcanza por la justa mesura de los factores vitales ....y que llega a los hombres por la templanza del placer y la simetría del vivir" [96]. La Simetría rige así, las acciones morales, las disposiciones físicas y el Universo mismo. Apuntando las nociones filosóficas griegas hacia las ideas de orden y finalidad.

Otra idea filosófica recurrente, y de origen simétrico, es la coincidentia oppositorum, que es el meollo de la filosofía del gran Nicolás de Cusa [97], idea que encontramos ya en Heráclito [98].

Pero no sólo entre los griegos la Simetría, como Equilibrio, constituye una idea esencial. Así tenemos, por ejemplo, a L. P. Boff definiendo el proyecto social de San Francisco de Asís como el de la creación de una sociedad simétrica [99]; en la Fisiología moderna el concepto de homeostasis, acuñado por Bernard, es una transposición de la balanza al interior del organismo vivo, con la adición de que es una balanza autorregulada. Esta idea de la homeostasis ha sido tomada a su vez por otras disciplinas como la Cibernética de Wiener, la teoria piagetiana de "equilibraciones" psicogenéticas y epistemológicas,[100] la psicopatología de Menninger [101] y de Freud (con su principio de estabilidad) y la Ecología; el análisis compsositivo que es posible realizar en el arte, en términos de equilibrio de momentos de giro [102], y la relación entre forma y comportamiento manifiesta como Simetría si hay equilibrio en las tensiones que determinan dicho comportamiento. Siendo este un principio útil que se manifiesta, a través de toda la materia organizada: organismos, drómenas, rocas, etc. y que marca una diferencia funcional entre la estructura simétrica y la asimétrica.

1.4.2.2 SIMETRIA COMO INVARIANCIA

Puede entenderse la Simetría como una aplicación o transformación que deja invariante la forma de un diseño o un objeto, siendo esta Simetría la más familiar: la Simetría geométrica. En un cubo podemos descubrir que las rotaciones de 90° son trasformaciones que dejan invariante la figura que el cubo nos presenta; un copo de nieve es invariante bajo rotaciones de 60°, y una esfera es invariante bajo cualquier rotación alrededor de un eje que pase por el centro (se dice que posee Simetría continua porque una rotación de cualquier ángulo la deja invariante). Si bien el concepto de Simetría tiene su origen en la Geometría, se ha vuelto lo bastante general para abarcar invariancias de otro tipo con respecto a transformaciones de otras clases. Así, en las teorías físicas lo que permanece invariante bajo una transformación no es un dibujo o una forma, sino en las leyes matemáticas de la teoría. Un ejemplo de Simetría no geométrica, en este caso de Simetría física, es la Simetría de carga del electromagnetismo. Supongamos una cierta configuración de partículas cargadas eléctricamente y supongamos que se han medido todas las fuerzas que actúan entre pares de partículas si se invierte la polaridad de todas las cargas, las fuerzas siguen siendo las mismas, es decir, son invariantes ante la inversión de polaridad de carga. Otras Simetrías no geométricas, tomadas éstas del dominio de la Astrofísica, son: el llamado principio Cosmológico que implica la idea de que el Universo es homogéneo e isótropo. es decir, "los caracteres en gran escala del Universo tendrían el mismo aspecto para un observador en cualquier Galaxia independientemente de la dirección en que mirase" [103], el principio Cosmológico perfecto que establece la isotropía tanto espacial como temporal [104], y el principio Cosmológico de Alfvén que propone una Simetría exacta entre materia y antimateria [105].

En la Física clásica dos de las Simetrías más usadas y más simples son la isotropía y la homogeneidad del espacio, cruciales en cualquier desarrollo teórico de un modelo físico. Una de las piedras angulares de la física newtoniana, la constituye una Simetría un poco más complicada, reconocida desde tiempos de Galileo, es la invariancia de las leyes físicas ante una transformación de coordenadas que se mueven con velocidad uniforme (invariancia ante las transformaciones galileanas). Las consecuencias de estos principios de Simetría fueron muy fructuosas para los físicos de los siglos anteriores, constituyen las piedras angulares de la mecánica newtoniana y produjeron muchos resultados importantes. Por ejemplo, el teorema que establece que en un sólido isotrópico sólo existen dos constantes elásticas. Otro ejemplo de las consecuencias de las leyes de Simetría, es que un principio de Simetría da origen a una ley de conservación. Así, tenemos que la invariancia de las leyes físicas ante una transformación espacial, trae aparejada la conservación de la cantidad de movimiento, y que la invariancia de las mismas ante una rotación espacial trae como consecuencia la conservación de la cantidad de momento angular.

En las teorías de la relatividad de Einstein las leyes de Simetría adquirieron más importancia y en la mecánica cuántica su papel se ha incrementado enormemente, tanto en profundidad, como en alcance y, como dice Chen Ning Yang, "difícilmente sería posible poner de relieve en forma adecuada la importancia que tienen los principios de Simetría en la mecánica cuántica"[100]. Por ejemplo, los números que representan las simetrías del sistema son idénticos a los números cuánticos que indican los estados del sistema. Así mismo, la estructura general de la tabla periódica de los elementos es, en esencia, una consecuencia de la Simetria de la Ley de Coulomb, que implica que la fuerza de Coulomb ejercida por el núcleo sobre el electrón tiene la misma magnitud en todas direcciones, es decir, es isotrópica. Por otra parte la teoría de Dirac que implicaba la existencia de antipartículas (que fueron descubiertas tres años después) fué establecida como consecuencia de la Simetría relativista de las leyes físicas con respecto a las transformaciones de Lorentz. Como dice Ning Yang, respecto a los dos ejemplos anteriores: "en ambos casos, la naturaleza parece haber aventajado a las simples representaciones matemáticas de las leyes de Simetría. Cuando uno se detiene a considerar la elegancia y la bella perfección del razonamiento matemático implicado, y las contrastan con las consecuencias físicas complejas y de mayor alcance, no se puede evitar que surja un profundo sentimiento de respeto hacia el poder de las leyes de Simetría" 107.

El trabajo por el cual Ning Yang recibió el Premio Nóbel en 1957 está relacionado con la investigación de otro principio de Simetría tan antiguo como la civilización humana: la Simetría entre izquierda y derecha. La Ley de Simetría derecha-izquierda fué utilizada como ya vimos antes por Kant, Leibinz y en la física clásica, pero no tuvo en ella una gran importancia práctica, debido a que es una Simetría discreta. Con la introducción de la mecánica cuántica la Ley de Simetría derecha-izquierda conduce a una ley de conservación: la conservación de la paridad. La Ley de la Conservación de la Paridad, es una Simetría discreta relacionada con la invariancia ante la reflexión de las fuerzas electromagnéticas del átomo. El proceso de reflexión, según descubrió Ning Yang, es una transformación combinada: si se efectúan una reflexión especular y al mismo tiempo se transforma toda la materia en antimateria, entonces se mantienen invariantes las leyes físicas. Este tipo de transformaciones combinadas es bien conocida en las artes decorativas, lo encontramos tanto en los arabescos de la Alahambra como en la obra de Escher.

Otras leyes de Simetría que han sido estudiadas inténsamente son las tres invariancias discretas a la reflexión, a la conjugación de carga y a la inversión temporal conectadas por el llamado teorema C-T-P (carga-tiempo-paridad), así como la Ley de Simetría que da orígen a la conservación del spin isotópico y que produce un notable orden empírico entre los fenómenos relativos a las partículas extrañas.

Por otra parte, del estudio de la Simetría de un sistema se pueden obtener conclusiones importantes de las leyes físicas, partiendo del marco de referencia matemático de la teoría, conjuntamente con el postulado de una Ley de Simetría (el mejor ejemplo de esto es la derivación de las leyes de conservación correspondientes a la cantidad de movimiento lineal y angular, pero también a la energía y al movimiento del centro de masa, ya sea con base en el marco de referencia de Lagrange de la mecánica clásica o en el espacio de Hilbert de la mecánica cuántica); nos ayuda a simplificar nuestros problemas (ver sección 1.4.3), y, como nos señala Wigner (Premio Nóbel 1963) sirven como piedras de toque para someter a prueba las leyes de la naturaleza, como lo ha hecho Pasteur y P. Curie.[108] Y, por si fuera poco, la elegancia intrínseca, la belleza y perfección del razonamiento matemático que implican las leyes de Simetría, y la complejidad, utilidad y profundidad de sus consecuencias físicas, constituyen una de las más grandes fuentes de estímulo para el científico y el artista, siendo este 'sentido estético' el que Poincaré señala como fuente del descubrimiento, resultando así, sin duda, una forma heurística muy refinada, pues, "difícilmente podría suceder, que, por un accidente, la naturaleza llegara a traicionar, como no lo ha hecho en otros casos, su parcialidad hacia la belleza del razonamiento matemático"[109]. Además, gracias a estas leyes aprendemos a esperar, como los griegos, que la naturaleza posea un orden y podemos aspirar a comprenderlo. Este pensamiento, como afirma Schrödinger, es el origen del pensamiento científico propiamente dicho, y queda expresado en la concepción griega del mundo como un Cosmos (principios de Metageofísica).

Existen dos tipos principales de Simetrías:

a) Simetrías globales; 'global' significa que sucede por doquier y al mismo tiempo, y una Simetría global es aquella en la que la transformación se aplica uniformemente a todos los puntos del espacio y en el mismo instante de tiempo.

b) Simetrías locales; por su parte, en las Simetrías locales la transformación puede aplicarse de forma independiente, en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo.

La Simetría global parece un concepto más amplio y el término 'local' sugiere, quizás, algo más modesto que global, pero las Simetrías locales imponen condiciones más exigentes para la construcción de una teoría y revelan unidades más profundas en la naturaleza. Para la Simetría global, la ley matemática debe permanecer invariante cuando se aplican la misma transformación en el mismo instante y en todo lugar y para la Simetría local, la ley debe ser invariante (es decir, mantener su validez) aún cuando tenga lugar una transformación distinta en cada punto del espacio y del tiempo. Para que una teoría resulte invariante con respecto a una transformación local debe añadirse algo, en la Física lo que se añade es una fuerza. El ejemplo de invariancia a la inversión de polaridad que escribimos arriba es un ejemplo de Simetría global. Otro ejemplo de Simetría global asociado con una distribución arbitraria de cargas es la invariancia del campo eléctrico respecto a la suma o resta de un potencial constante arbitrario, la razón de ello es que el campo eléctrico viene determinado exclusivamente por las diferencias de potencial eléctrico y no por el valor absoluto del potencial.

La Simetría global de la teoría del campo eléctrico debe convertirse en una Simetría local si ha de afrontar no sólo las distribuciones estáticas de cargas sino también las cargas en movimiento. Si el campo eléctrico fuera el único que actuara entre las partículas cargadas, no existiría la Simetría local, pero tenemos que cuando las partículas cargadas no son estáticas, la variación del campo eléctrico origina el campo magnético que restaura la Simetría local. El sistema de campos duales e interconectados tiene una Simetría local exacta: cualquier cambio local en el potencial eléctrico puede combinarse con un cambio compensador en el potencial magnético, de forma que el campo electromagnético es invariante, esta teoría física de Simetría local es la teoría de Maxwell del electromagnetismo. La teoría de Maxwell se dice que es de Simetría gauge local. Simetría de gauge es un término introducido por Hermann Weyl en 1920 y se aplica a las Simetrías donde el valor absoluto de una magnitud no importa pero debe elegirse un valor particular (convención del gauge). Weyl habló de 'EichInvarianz' que se tradujo al inglés como 'gauge invariance' que es la palabra que se ha impuesto. Precisamente la primera teoría física con Simetría gauge local fué la teoría de Maxwell formulada en 1868.

La Simetría puede ser abeliana o no abeliana dependiendo de que las transformaciones que se aplican sean o no conmutativas. Ahora bien, la mayoría de los físicos tienen la convicción de que las Simetrías desempeñan un papel vital en nuestra concepción de la naturaleza [110], y de que todas las fuerzas de la naturaleza vienen gobernadas por teorías gauge no abelianas [111].

1.4.2.3 LA SIMETRIA COMO UN GRUPO DE AUTOMORFISMOS

Si recordamos, en la sección 1.3 definíamos al homomorfismo como una transformación que conservaba, es decir, dejaba invariantes ciertas características (la operación binaria, el orden, la forma, etc.). Si la aplicación era biyectiva teníamos un isomorfismo, y cuando el isomorfismo era sobre el mismo conjunto se denomina automorfismo. Tenemos así que la Simetría está íntimamente ligada al concepto de automorfismo.

DEFINICION : Un isomorfismo de un concepto S sobre sí mismo se llama automorfismo de S.

La aplicación Identidad I es siempre un automorfismo de S. Si S es abeliano la aplicación $f(x) = x$ es siempre un automorfismo de S. En particular, la aplicación $f(x) = -x$ es un automorfismo del grupo aditivo de los enteros (se llama a $-x$, el simétrico aditivo de x). Weyl define al automorfismo como una biyección que conserva la estructura del espacio.

DEFINICION : La Simetría de ς está definida por el grupo Γ de automorfismos de ς.

La definición de ς depende del dominio en que nos movamos, puede ser, por ejemplo, que ς sea una configuración espacial o una ley, física, biológica, económica, sicológica, etc.

Leibniz reconoció que el automorfismo era la idea en que se basa el concepto geométrico de semejanza y que la reflexión en un plano es un automorfismo. Así para Leibniz derecha e izquierda, junto con todos los puntos y todas las direcciones del espacio, son equivalentes, automórficos. Posición, dirección, izquierda y derecha son conceptos relativos.

Como veremos más adelante la idea central de las teorías de la relatividad de Einstein radica en una consideración de Simetría (la invariancia de Poicaré) que está implícita en las ideas de Leibniz sobre automorfismos.

La geometría según el Programa de Erlangen se reduce al estudio de la Simetría, considerada como un grupo de automorfismos, como analizaremos en la sección 1.4.3.3

1.4.3 APLICACIONES DE LA SIMETRIA

1.4.3.1 LA SIMETRIA EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS

La Simetría es una herramienta mental muy útil en la resolución de problemas y es bastante empleada aunque tal vez sin caer en la cuenta de que se usa. Polya [112] nos da algunas pautas en el planteamiento y la solución de problemas relacionadas con la Simetría, pautas que son muy útiles y que podemos enumerar como sigue:

a) Si un problema es simétrico bajo ciertos aspectos, puede ser ventajoso buscar sus elementos intercambiables y tratar del mismo modo aquellos elementos que desempeñan el mismo papel.

b) Se debe tratar de modo simétrico lo que es simétrico y no destruir la Simetría natural.

c) La Simetría puede servir para verificar un resultado.

Otra pauta [113], pero que no menciona Polya, para el empleo de la Simetría como herramienta en la solución de problemas es que se debe tratar de obtener información de las Simetrías existentes en un problema, por ejemplo la conservación de una magnitud (consecuencia de alguna Ley de Simetría) es un conocimiento valioso en la solución de muchos problemas físicos y, a menudo, es la única información necesaria y/o disponible. "Las consideraciones de Simetría son a menudo una gran ayuda para el físico que desea obtener cierta clase de información útil sin tener que recurrir a un cálculo efectivo. Por ejemplo, en el movimiento de un péndulo (o en cualquier movimiento armónico simple), la posición de equilibrio es un centro de simetría. Por consiguiente, cuando el péndulo está en posiciones simétricas tales como A y A', su velocidad y aceleración deben ser iguales en módulo; el tiempo que se requiere para moverse entre A y O (posición de equilibrio) debe ser el mismo que el que emplea para moverse entre A' y O; la variación de velocidad, o de energía cinética, o de energía potencial en ir desde A hasta O deberá ser la misma que la variación experimentada en ir desde A' hasta O y así sucesivamente..... En mecánica cuántica, las consideraciones de Simetría son aún más importantes que en mecánica clásica. Por ejemplo, cuando el problema es tal que la energía potencial tiene un centro de Simetría, lo cual requiere que la partícula esté en el mismo estado dinámico en posiciones simétricas, la probabilidad de encontrar la partícula en estas posiciones simétricas debe ser la misma" [114].

También la existencia de Simetría en el planteamiento de un problema conduce generalmente a la solución o limita las soluciones posibles [115]. La Simetría se usa especialmente para simplificar los problemas: así, el uso de la Simetría en la solución de problemas geométricos es bien conocida. También lo es el uso de las propiedades de la Simetría de la forma de onda en el análisis de Fourier para simplificar los problemas, sobre todo en el cálculo de los coeficientes de Fourier. Por ejemplo, la serie de Fourier de cualquier función periódica que tiene Simetría de media onda, contiene armónicos impares solamente, y una que tiene Simetría de cuarto de onda par, consta de armónicos impares de términos del coceno, etc. Debido a su utilidad se aconseja el estudiar la Simetría de la función en cuestión, pues frecuentemente la Simetría no es evidente debido a la presencia de un término constante y se recomienda una adecuada selección del orígen (mediante un desplazamiento en el tiempo o la frecuencia) para poder explotar las propiedades de Simetría. [116]

Existe además, dentro de la teoría del análisis armónico un par de teoremas de Simetría (uno para el dominio contínuo y otro para el discreto) muy útiles para obtener, por ejemplo, pares transformados de Fourier pudiéndose eliminar así muchos desarrollos matemáticos complicados. Dichos teoremas son:

TEOREMA (caso contínuo): Si $h(t)$ y $H(f)$ son un par transformado de Fourier entonces $H(t) \leftrightarrow h(-f)$.

TEOREMA (caso discreto): Si $h(k)$ y $H(n)$ son un par transformado discreto de Fourier entonces $\frac{1}{N} H(k) \leftrightarrow h(-n)$

En la Física, en general, y en la Geofísica, en particular, se emplea generalmente como presupuesto la especificación de las condiciones y características de un problema dado, la existencia de dos principios de Simetría: la homogeneidad y la isotropía [117].

La homogeneidad es el principio de Simetría que implica la invariancia de las propiedades físicas respecto al elemento de volumen que se considere (invariancia a una translación de coordenadas).

La isotropía es el principio de Simetría que implica invariancia de las propiedades físicas vectoriales o tensoriales respecto a la dirección que se considere (invariante a la rotación de coordenadas).

La ausencia de isotropía en la mayoría de los cristales es de gran utilidad en la clasificación de los minerales de acuerdo a las propiedades vectoriales que estudia la mineralogía física, tales como los índices de refracción, el tornasolado, la exfoliación, la dureza, etc.[118] Pero no sólo la isotropía, sino la Simetría geométrica es esencial en la cristalografía, y constituye la base de los sistemas cristalinos.

La anisotropía de la permeabilidad y otras propiedades es fundamental en las consideraciones del modelo matemático de la simulación numérica de yacimientos y en los sondeos eléctricos verticales.

En general, a mayor Simetría mayor simplicidad, por lo que se parte usualmente del supuesto de que el medio es homogéneo e isótropo para dar mayor simplicidad a la formulación de nuestro modelo. En el caso de la sismología y la ultrasonografía, un medio infinito homogéneo e isótropo garantiza la existencia de solamente ondas P y S. En la Geofísica es común considerar a la tierra como un medio homogéneo e isótropo, pero en el desarrollo de modelos más apegados a la realidad (un medio estratificado, por ejemplo) la Simetría se reduce a la homogeneidad e isotropía de ciertas regiones (los estratos o el regional y el residual), también se puede considerar un medio anisótropo pero con Simetría semielíptica, en vez de esférica, o una Simetría cilíndrica. Así, por ejemplo, es común que en las formaciones geológicas las propiedades físicas (la resistividad, la permeabilidad, etc.) son las mismas en todas direcciones a lo largo y ancho de cada estrato pero tiene un valor diferente en la dirección perpendicular a la estratificación [119]. Debido a la presencia del mar en algunos casos se reemplaza el concepto de una tierra homogénea por dos semiespacios homogéneos [120].

En la mayoría de los casos el uso de la consideración de Simetría nos permite facilitar la resolución de problemas; por ejemplo, en la solución de la ecuación de Laplace cuando existe Simetría azimutal nos conduce a una solución en términos de los polinomios de Legendre [121], los cuales son ortogonales. O cuando existe Simetría axial la ecuación de Laplace queda en términos de las funciones de Bessel [122].

Un caso muy común en la Geofísica es el de un cambio contínuo de una propiedad con la profundidad, que podría estudiarse como un caso de Simetría local [123].

A continuación enumeramos algunos ejemplos en los que se aplican principios de Simetría en la Geofísica:

a) En la resolución del problema directo para medios estratificados el primer método empleado, fué propuesto por Maxwell y se basa en una consideración de Simetría especular, por lo que se le conoce como método de las imágenes[124]. La esencia del método es la inclusión de fuentes simétricas ficticias (imágenes especulares de las fuentes originales). Dicho método todavía, se emplea para el cálculo de las curvas teóricas de resistividad aparente para cortes no estratificados con una discontinuidad lateral .

b) Existe en la prospección eléctrica un principio que se basa en la Simetría global del campo electrostático, conocido como principio de reciprocidad [125], que afirma que en cualquier red compuesta por elementos lineales si la aplicación de una diferencia de potencial ΔV entre dos terminales determinados produce una corriente I en cierta rama del circuito, entonces la aplicación de la misma ΔV en los extremos de esta rama hace circular la misma intensidad I entre los dos primeros terminales. Es decir, que es invariante ante un intercambio de los electrodos de corriente con los de potencial.

c) El uso de dispositivos simétricos en la prospección eléctrica facilita el cálculo del coeficiente de los dispositivos [126].

d) Se emplea una imagen especular (igual y opuesta) de tensión para la anulación de corrientes parásitas [127].

e) La Ley de Simetría de cortes recíprocos que cumplen las curvas de Dar Zarrouk , de resistividad verdadera y de la función característica [128]. Estas, en su representación logarítmica, se transforman en sus simétricas respecto del eje de abscisas y = 1 cuando se trocan las resistividades por sus valores recíprocos. La curva de resistividad aparente no cumple la Ley de Simetría y "este hecho tiene gran importancia en la teoría e interpretación de sondeos eléctricos" [129].

f) La consideración de la 'anomalía geofísica' como una ruptura de Simetría[130].

g) El uso de las propiedades de Simetría, en el método de mínimos cuadrados, de la matriz de coeficientes de un filtro, en el algoritmo de Levinson [131], por ejemplo.

h) La Simetría del tensor de esfuerzo es la razón básica para la existencia de ejes principales, cuyo conocimiento es obviamente útil, porque ayuda a visualizar el estado de esfuerzo en cualquier punto. De hecho, es tan importante que en la solución de problemas en mecánica del medio contínuo rara vez nos detenemos antes de que la respuesta final esté reducida a ejes principales. Y otros tensores simétricos tienen también ejes principales, aún cuando sean matrices de un número infinito de dimensiones. Además, la Simetría del tensor hace que se simplifiquen todos los cálculos[132].

i) Las funciones de autocorrelación, cros-correlación y cros-asociación son procesos de análisis de Simetría muy usados en los análisis de datos (en todas las ramas de la Ciencia). [133]

1.4.3.2 FORMULACION DE HIPOTESIS

El científico al formular una hipótesis es posible que no pueda explicar por qué formuló dicha hipótesis, por qué la prefirió a otras y en dicha preferencia seguramente encontraremos un principio de Simetría [134].

En ocasiones, los mismos científicos han hecho explícito el uso de la Simetría como principio heurístico, es el caso de la teoría ondulatoria de De Broglie o las predicciones de Dirac de la existencia de antimateria y monopolos:

a) Monopolos.- La teoría del campo electromagnético de Maxwell que lograa la unificación de la electricidad y el magnetismo sería estéticamente más agradable si el papel de los campos eléctrico y magnético fuera simétrico. La ausencia de monopolos es la causante de la asimetrí entre ambos campos. Paul Dirac partiendo de esa consideración de Simetría postuló la existencia de monopolos y dedujo las consecuencias de esa hipótesis. Descubrió que la existencia, aunque fuera de un solo monopolo en el Universo, permitiría dar una explicación de la cuantificación de la carga eléctrica. Y hasta nuestros días, "no se ha dado con una razón para la cuantificación de la carga eléctrica que de forma directa o indirecta no impliquen la existencia de monopolos"[135]. La existencia de monopolos tiene otra consecuencia de gran importancia: la Simetría en las ecuaciones de Maxwell entre la electricidad y el magnetismo implica también una Simetría entre las dos estadísticas cuánticas (la de Bose-Einstein, que obedecen los bosones, y la de Fermi-Dirac, que cumplen los fermiones) haciendo que fermiones puedan estar formados sólo por bosones, o que los bosones puedan formarse con sólo fermiones[136].

Así, "los monopolos simetrizan totalmente al electromagnetismo, cuantificando la carga, pueden ser portadores de cargas fraccionarias (como son los quarks) y ponen en pie de igualdad como constituyentes los bosones y los fermiones. Esto nos hace creer con Dirac, que 'bajo estas circunstancias sería sorprendente que la naturaleza no hubiese hecho uso de ellos'".[137] De hecho, en varias ocasiones se ha afirmado ya el descubrimiento de monopolos.[138]

b) Propiedades ondulatorias de las partículas.- De Broglie, basado en una expectación intuitiva de que la naturaleza es simétrica[139], aventuró la hipótesis de que las partículas poseen carácter ondulatorio; revolucionaria hipótesis, simétrica al descubrimiento de las propiedades de partícula que poseen las ondas, aventurada sin una base experimental sólo aludiendo al carácter simétrico de la naturaleza sugerido por su descripción matemática. Necesitándose dos décadas para que un físico se atreviera a formularla y tres años para probar su acierto.

c) Las teorías de la relatividad.- Como afirmó el mismo Einstein "todo el contenido de la teoría de la relatividad restringida queda encerrada en este postulado: las leyes de la naturaleza son <u>invariantes</u> con respecto a las transformaciones de Lorentz"[140]. Y el principio de la relatividad general se refiere a que: "todos los sistemas de coordenadas de Gauss, cualquiera que sea su estado de movimiento, son equivalentes para la descripción de la naturaleza (o sea, para la formulación de las leyes generales de la naturaleza)"[141].

Estas son unas condiciones matemáticas precisas que las teorías de la relatividad imponen a las leyes generales de la naturaleza, convirtiéndose en un valioso auxiliar heurístico en la investigación de dichas leyes. Siendo ambos principios, principios de Simetría que afirman la invariancia de las leyes de la naturaleza. Dichos principios se basan en la llamada invariancia de Poincaré que afirma explícitamente la hipótesis de que las leyes de la naturaleza son las mismas siempre y en todo lugar: "afirma, de una manera más precisa, que todas las leyes de la física tienen la misma forma en cualquier par de sistemas coordenados, aún cuando estén desplazados, girados y moviéndose uno con respecto al otro, con tal de que la velocidad sea constante"[142]. La invariancia de Poincaré es global, la cual se torna local al exigir que las leyes de la naturaleza conserven la misma forma cuando las coordenadas de cada punto se transforman independientemente (movimiento acelerado). Einstein mostró que las leyes de la física permanecen invariantes si se introduce el campo gravitatorio: el resultado es la teoría general de la relatividad. Así, la teoría general de la relatividad, posee Simetría local.

En la teoría especial de la relatividad Einstein percibió que la invariancia de las ecuaciones de Maxwell ante las transformaciones de Lorentz era más improtante que la visión newtoniana, o de sentido común del movimiento. Como guías para la elaboración de la teoría general de la relatividad, Einstein eligió dos principios de Simetría: el principio de equivalencia y el principio de covarianza general. El primero afirma que ningún experimento puede manifestar diferencia alguna entre la masa gravitatoria y la masa inercial. El segundo afirma que las ecuaciones de la física deberán expresarse de tal manera que todos los sistemas de coordenadas espacio-temporales estuvieran en condiciones de igualdad.

d) El análisis tensorial.- El análisis tensorial, puesto que opera con entes abstractos (los tensores) cuyas propiedades son independientes de los sistemas de referencia, constituye una herramienta ideal para el estudio de las leyes naturales. Y verdaderamente si una deducción lógica basada en un conjunto de hechos observados merece el nombre de ley natural, está frecuentemente determinada por la generalidad de tal deducción y por su validez en una variedad de sistemas de referencia suficientemente alta. Esto está íntimamente ligado con la posibilidad de formular la deducción en forma de ecuación tensorial, porque tales ecuaciones son invariantes respecto a una categoría dada de transformaciones de coordenadas [143].

Debido a esta invariancia el análisis tensorial sirvió perfectamente a las necesidades de Einstein, permitiéndole descubrir la entidad matemática que le permitiera representar la gravitación: el tensor métrico. El cual expresa a la gravitación no como fuerza sino como una curvatura intrínseca del espacio-tiempo.

e) Teorías gauge y supersimetría.- "La teoría electromagnética de Maxwell y la teoría general de la relatividad de Einstein deben mucho de su belleza a su Simetría gauge local; sus éxitos han sido fuente de inspiración para los físicos teóricos" [144]. Así, Ning Yang y Robert L. Mills (independientemente y al mismo tiempo R. Shaw aventuró una propuesta parecida), inspirados por el éxito de esas y otras teorías gauge locales que partían de una Simetría global ya existente, se preguntaron qué consecuencias tendría el volver local la Simetría del spin isotópico (esta simetría establece que las interacciones fuertes de la materia permanecen invariantes cuando se intercambian protones por neutrones). Por ser la teoría de Yang-Mills más complicada que las teorías anteriores, deben añadirse seis nuevos campos vectoriales para pasar de la Simetría global a una local. Al igual que la teoría general de la relatividad, la teoría de Yang-Mills es no abeliana y "ha resultado tener una importancia monumental" [145]

Las teorías gauge han contribuído enormemente al conocimiento de las partículas elementales y sus interacciones. Su vigor radica en que bastan 18 constantes de la naturaleza para explicar todas las fuerzas conocidas. Pero no se ha podido dar una explicación del por qué esas constantes asumen esos valores. La explicación no puede provenir de las teorías gauge existentes, sino de una teoría más general y para buscar esa teoría es natural que los físicos apliquen una vez más un procedimiento que ya ha demostrado su utilidad: "buscar Simetrías globales y explotar las consecuencias derivadas de su conversión en Simetrías locales" [146]. Se ha hecho patente que es preciso hallar una Simetría más general de la naturaleza y recientemente se ha postulado una forma distinta y más ambiciosa de realizar la unificación en la teoría de la supergravedad. La supergravedad está basada en una nueva Simetría tan notable incluso a nivel global, que se le ha dado el nombre de supersimetría. Esta supersimetría relaciona partículas con diferentes spines, los fermiones y los bosones. En la supergravedad, la supersimetría se extiende del nivel global al local y esta extensió conduce a la incorporación de la fuerza gravitatoria, sugiriendo la posibilidad de unificar la gravitación con las otras fuerzas, siendo "tremendamente atractivos puesto que en ellos la unificación de distintas interacciones sería total" [147]

1.4.3.3 SIMETRIA COMO KERNELL DE LA CIENCIA

Ahora veremos cómo la noción de invariancia es la esencia o núcleo (kernell) de la Ciencia, y esto es debido a que "todo lo que para el cerebro humano tiene un significado está encuadrado dentro de la estructura rítmica que se lo confiere"[148] Al referirnos a una estructura rítmica, inmediatamente hacemos uso del concepto de invariancia y, por tanto de Simetría, debido a que tanto los conceptos de estructura como de ritmo se reducen a esa categoría. El ritmo es una "delimitación periódica de momentos discontinuos que se perciben como una unidad en el espacio y en el tiempo"[149], y precisamente, la Simetría define aquel tipo de concordancia por el cual diversas partes se integran en un todo, es decir, forman una unidad 'para nosotros', es decir, la percibimos como unidad. Además, la Simetría es la esencia de la idea de periodicidad. Un todo, un pattern según la terminología de W. Grey, se define como: "cualquier secuencia de acontecimientos en el tiempo o cualquier conjunto de objetos en el espacio distinguibles o comparables con otras secuencias y disposiciones"[150]. La alternancia del día y la noche tal vez fué el primer pattern que surgió en el cerebro humano como conocimiento científico (precisamente la crítica de Hume a la Ciencia emplea la salida del sol como ejemplo). El hombre busca (la Ciencia) y construye (el Arte) patterns. Por ejemplo el lenguaje, las constelaciones, las clasificaciones, etc.

Una característica importante de los patterns es que puede ser memorizado y comparado (recuérdese la cross-correlación). Y es, por lo tanto, la materia prima del orden, porque el caos, el desórden no se puede recordar ni comparar. Constituyendo así, la esencia de la idea del Universo como Cosmos. Esta es una característica no sólo de la Ciencia sino de todo el conocimiento del hombre, según defienden Köhler y Koffka en la Gestaltpsychologie, el cual se realiza partiendo de una consideración global del objeto como un todo, como una estructura que condiciona a las partes. Y para el estructuralismo cada realidad humana es considerada como una totalidad estructurada y significativa: "un simulacro (modelo) del objeto empírico" [151]

Así, la Simetría es la esencia de la Ciencia, la cual busca lo que se repite (como leemos en un libro de Sociología: "buscar las pautas, regularidades o uniformidades del mundo que nos rodea" [152]), las invariantes. Pues, como menciona Schrödinger, la esencia de una ley científica es la invariancia (o permanencia) de la vinculación [153]

En algunas disciplinas científicas es aún más patente cómo la Simetría constituye su esencia:

Si analizamos la historia de la Geometría, por ejemplo, vemos que la invariancia es la idea fundamental de las distintas 'geometrías'. Los 'elementos' de Euclídes ("que son, sin duda, la contribución más grande a la metodología de la Ciencia hecha por la antigüedad" [154] y que para Newton son el modelo mismo de la construcción de una teoría científica), es una combinación de dos geometrías más básicas: la geometría métrica plana euclideana, que es "el estudio de aquellas propiedades de las figuras de un plano limitado que son invariantes ante las isometrías planares" [155], y la geometría plana equiforme, que es "el estudio de aquellas propiedades que son invariantes para el grupo de semejanzas planares" [156].

La geometría proyectiva plana es el estudio de aquellas propiedades de las figuras de un plano ilimitado que permanecen invariantes cuando dichas figuras son sometidas a las llamadas transformaciones proyectivas.

Félix Klein, en 1872, al considerar ésto presentó "una definición sorprendente, áltamente fructífera y muy general de 'una geometría' definición que abrió nuevos campos a la investigación geométrica y que introdujo armonía y elegancia en el caos existente entonces en la información geométrica"[157]. Dicha definición y sus implicaciones han recibido el nombre de programa de Erlangen que "es sin duda, la más clara y precisa reformulación de la geometría que se haya realizado jamás":[158] "una geometría es el estudio de aquellas propiedades de un conjunto S que permanecen invariantes cuando los elementos de S se someten a las transformaciones de un cierto grupo de trnasformaciones, Γ , tal geometría se representa por $G(S,\Gamma)$"[159].

Así, 'una geometría' quedó con Klein definida como el estudio de la Simetría de un conjunto. Y lo mismo que se hizo con la geometría puede realizarse con cualquier disciplina científica. Así por ejemplo muchos matemáticos se lanzaron a la búsqueda de las propiedades que permanecen invariantes por transformaciones lineales. "La búsqueda de propiedades geométricas se convirtió en la búsqueda de invariantes algebraicos....Pero el hecho de que los invariantes de ciertas formas algebraicas fueran, a su vez, formas algebraicas con invariantes, condujo a formular un problema más general: encontrar un sistema completo de invariantes para una forma dada...problema resuelto definitivamente por Hilbert"[160].

CAPITULO SEGUNDO

INSTAURATIO MAGNA

"Debe abrirse un camino para el entendimiento humano totalmente distinto de los conocidos hasta ahora, y suministradas otras ayudas para que la mente ejerza sobre la naturaleza de las cosas la autoridad que es propiamente suya".

Francis Bacon

2.1 PLAN DEL CAPITULO

Este capítulo consta de tres partes: la primera constituye una revisión de la teoría de modelos, la cual se impone debido a que la presente tesis propone la formulación de nuevos y más generales modelos y debido a que la Teoría General de Sistemas no es sino un modelo. La segunda es una sinopsis histórica en la que mostramos algunos puntos críticos donde se tuvo que cambiar de enfoque en la ciencia, y tiene por objeto situar a la TGS desde la perspectiva de la evolución del pensamiento científico, como un nuevo paradigma. La tercera parte es una revisión de la TGS, la cual es un modelo y un cambio de enfoque, justificando las dos primeras partes. La revisión de la TGS tiene por objeto dar una visión general y sumaria de las principales ideas que se manejan en dicha teoría, pues nuestra tesis propone el uso de la Teoría General de Sistemas en la Geofísica. A semejanza de la aplicación de la Teoría de la Información en 1953 por el Proyecto de Análisis Geofísico del MIT (Masachussets Institute of Technology) o como la propuesta de Parasnis, en la 42ª reunión de la EAEG en Estambul en 1980, sobre la aplicación del criterio popperiano de demarcación científica en la Geofísica (como veremos en la sección 2.2.4.3 nuestros modelos siguen dicho criterio).

En el capítulo anterior definimos tres categorías que constituyen un armazón sobre el cual el hombre construye su pensamiento. La segunda de ellas, la analogía, es la categoría esencial de la Teoría de Modelos y de la TGS.

2.2 TEORIA DE MODELOS

2.2.1 DEFINICION

Los modelos podrían ser definidos, en un sentido no muy estricto, como construcciones intelectuales que representan en forma simplificada ciertos aspectos de la realidad. Las propiedades del modelo son objetivamente análogas a ciertas propiedades relevantes del fenómeno en estudio, llamado 'original', y constituye así un estudio de la realidad en el que se intenta crear un conjunto isomórfico con el conjunto de las características en estudio. El concepto de modelo de esta forma definido abarca desde las pinturas de Altamira hasta las modernas teorías gauge, siendo clave en los dominios del Arte, de la Filosofía y de la Ciencia; pues se puede considerar que todos los sistemas filosóficos, todos los productos y teorías estéticos y todas las leyes y teorías científicas, no son sino modelos o conjuntos de modelos. Podríamos extrapolar la idea de Cassirer[1] y afirmar que la formación de modelos es la función propiamente espiritual de la conciencia, o definir al hombre como animal que modela[2], pues sólo en él se da la capacidad de abstracción necesaria para la creación de modelos, o llegar a proponer como sentido del saber un pasar de lo real (incluyendo entes ideales) a su modelo.

La alegoría platónica de la caverna[3] es un modelo que representa, en forma analógica, las limitaciones de los sentidos, la inercia psicológica del común de los seres humanos y el papel del filósofo, así como ejemplificar las relaciones entre el mundo de las ideas y la realidad; se podría considerar la idea nietzscheana del eterno retorno como de un modelo que afirma que "todas las cosas retornan eternamente, y nosotros mismos con ellas, que nosotros ya hemos existido infinitas veces, y todas las cosas con nosotros",[4] debido a que las combinaciones de la energía del mundo son finitas y, en cambio el tiempo es infinito, modelo que en el fondo es una repetición del pensamiento pitagórico; podríamos oponer al modelo nietzscheano el modelo dialéctico de Hegel o de Heráclito, éste con su modelo del devenir expresado en la sentencia: "al que se sumerge en el mismo río lo azotan distintas aguas siempre"[5], condensada por la antigüedad con la frase: Παντα ῥέι ("todo fluye"), y aquél con su ley universal del devenir mediante la contradicción y la Aufherben ('superación')[6], en sus etapas sucesivas de tesis, antítesis y síntesis; tenemos, por otro lado, el modelo de Kierkeegard del existencialismo[7] como opuesto al sistema esencialista hegeliano o su modelo de las tres etapas de la vida: la estética, la ética y la religiosa[8]; en fin, cada filósofo ha propuesto modelos para explicar el mundo, siendo otros tantas estudios analógicos que intentan representar, explicar y predecir.

Ningún fresco florentino del siglo XIV muestra intento alguno de perspectiva, ya que los pintores consideraban que debían representar los objetos no como se ven sino como son[9]. En cambio, los pintores renacentistas y los impresionistas tienen una intención diferente, apartándose deliberadamente de toda visión absoluta y abstracta: nos representan no tanto un lugar cuanto un momento, un punto de vista en el tiempo, más que en el espacio. Si bien sus técnicas son muy distintas: los renacentistas hacen uso de la perspectiva[10], y los impresionistas del color[11]. Picasso y los cubistas[12], por el contrario, rechazan el ilusionismo naturalista, que implica la representación de un punto de vista y de un momento determinados, buscan la conjunción de varios puntos de vista espacio-temporales, influídos por la física einsteiniana y la filosofía de Bergson: su intención es representar la realidad como el artista sabe que es. Los simbolistas, los románticos y los surrealistas, por su parte, no tienen ningún interés en representar la naturaleza trivial, terriblemente aburrida y totalmente falta de gusto, como escribiera Baudelaire[13], por lo que se dedican a exhaltar el mundo interno del hombre, el reino de la imaginación, la fantasía y el subconsciente. Así podríamos seguir analizando cómo las distintas corrientes pictóricas, y en general estéticas, estudian y recrean "la tierra y cuanto hay en ella, el orbe y los que en él habitan"[14], cada una definiendo y apologizando un modelo que nos invita a contemplar el mundo con los ojos del artista, desde una perspectiva teórica determinada, haciendo énfasis en ciertos aspectos del gran teatro del mundo.

Las leyes científicas son simplificaciones que implican una relación lógica de la forma: Si-entonces, que en términos de la Lógica Simbólica se expresa como: $p \rightarrow q$[15]. "Decir que p va *necesariamente* seguida de q viene a ser como decir que existe una regla general, manifiesta en una prolongada serie de casos observados, y no contradicha ninguno de ellos, según la cual todos los sucesos tales como p se siguen de sucesos tales como q"[16]. La relación $p \rightarrow q$, conocida como 'condicional' es la expresión más simple a que pueden reducirse todas las leyes que formulan los científicos, y su sentido es señalar que si la proposición antecedente es verdadera, también lo es la proposición consecuente, con la adición, para las leyes científicas, de que dicha relación es válida siempre. Además, una ley científica rebasa a las simples regularidades, en que establece relaciones más universales y abstractas, que se manifiestan en múltiples aplicaciones individuales de distintas clases[17], y en que la relación Si-entonces, en un contexto científico, no sólo nos explica la secuencia sino que pretende explicar cómo y por qué q sigue a p siempre[18]. De este modo, la ley científica constituye un modelo que predice la ocurrencia de cierto efecto q, dada cierta causa p; o que nos hace inferir que una cierta causa p se ha dado, si observamos cierto efecto q; o que nos explica la existencia de un cierto q al presuponer un cierto p. Teniendo así las características de ser predictiva, deductiva y explicativa, siendo descriptivas y no prescriptivas con una ley en el sentido del derecho, no son órdenes y el considerarlas así es un peligroso antropomorfismo[19]. Por otro lado, una teoría científica es, a su vez, un modelo que intenta englobar varias leyes.

Un ejemplo, bien conocido, de ley científica, lo encontramos expresado en el siguiente enunciado: "El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motora que se le imprime y tiene lugar en la dirección de la línea recta en la que dicha fuerza actúa"[20]. Esta es la famosa 2ª Ley de Newton, en una traducción casi literal de la *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Ahora bien, esta ley es susceptible de expresarse en forma matemática, conduciéndonos a un nuevo modelo, pudiendo tomar muchas formas:

$$F=ma \tag{2.1}$$

$$F=d(mv)/dt \tag{2.2}$$

$$\bar{F}=d(m\bar{v})/dt \tag{2.3}$$

$$F^i=m(d^2x^i/dt^2+\Gamma^i_{jk}\,dx^j/dt\;dx^k/\,dt) \tag{2.4}$$

y muchas formas más. Así, la 2ª Ley de Newton es un modelo que intenta explicar la realidad y que, a su vez, puede ser modelado matemáticamente de muchas formas, siendo cada modelo ventajoso para ciertos fines.

No tiene sentido hablar de que cierto modelo 'es el verdadero', pues muchos modelos pueden representar correctamente el fenómeno y aún siendo opuestos los principios, ser válidos todos. Así mismo, las leyes científicas, que no son sino modelos creados por los científicos, no son absolutas, como lo muestra la historia de la Física, por el contrario, van recibiendo nuevas formulaciones, se van construyendo modelos más generales en los que, a menudo, el modelo anterior resulta ser un caso límite o como dice B. Russell: "Cuando ocurre un cambio en la ciencia, como, por ejemplo, se pasa de la Ley de Gravitación de Newton a la Einstein, lo que se hace no es arrojar lo anterior, sino reemplazarlo por algo ligeramente más exacto"[21]. Siguiendo con el ejemplo de la Mecánica newtoniana, debido al desarrollo de la Física en los últimos 50 años se ha limitado su aplicación, siendo válidos sus modelos en general, para partículas de masas mayores que un microgramo, dimensiones mayores que una micra y velocidades menores que un megámetro/segundo[22], dentro de este rango sus modelos describen el universo de una forma bastante precisa. Para ampliar estos rangos se crearon nuevos modelos, que remediaban las discrepancias entre la Mecánica newtoniana y la naturaleza, estos modelos son la Teoría de la Relatividad, aplicable a velocidades muy grandes, y la Mecánica Cuántica, aplicable a objetos muy pequeños. Por ejemplo, el modelo de Einstein de la 2ª Ley de Newton está construido de tal manera que sus predicciones concuerden con el modelo de Newton en el límite adecuado, siendo ésta una pauta que se sigue en la ciencia y que Niels Bohr formuló en su 'principio de correspondencia', pudiéndose enunciar como sigue: "Modelos diferentes deben proporcionar descripciones convergentes del mismo fenómeno en los dominios de validez común"[23]. Así, el modelo einsteiniano se puede expresar como:

$$\bar{F}=d(\gamma m\bar{v})/dt, \tag{2.5}$$

donde $\gamma=1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$, término debido a la transformación de Lorentz, que en el límite para velocidades pequeñas corresponde perfectamente con la transformación de Galileo y el modelo de Newton, a pesar de partir de dos enfoques diametralmente distintos. En otras ocasiones los modelos son desechados, como en los casos del éter, el flogisto o la teoría de la generación espontánea.

2.2.2 CLASIFICACION

Los modelos generalmente se clasifican en formales y fácticos. Los modelos formales son de naturaleza ideal, abstracta, representando a la realidad mediante signos. El signo por su naturaleza o por convención evoca en nosotros la idea de otra cosa distinta. Así, un pez dibujado puede ser signo de un pez real, de una constelación astrológica o una confesión de fe del antiguo cristianismo, además de muchas otras cosas; un cráneo cruzado por dos huesos puede traernos a la mente nociones anatómicas o servirnos como advertencia de un peligro, y hasta recordarnos un personaje de pata de palo, un parche en el ojo y un loro en el hombro. Los signos pueden ser palabras, figuras, símbolos matemáticos o lógicos y un sinnúmero de cosas más.

Los modelos que usan figuras (conocidos como icónicos) no reproducen la naturaleza física del original, más bien nos sirven para explicar cómo funciona o cómo es, estableciendo una correspondencia a menudo topológica. Así es como trbajan el diagrama de un motor o un cuadro expresionista, por ejemplo, los cuales no guardan relación con los materiales o las características intrínsecas del objeto en estudio, pero nos ayudan a comprenderlo mejor dándonos una expresión más clara y directa de ciertas propiedades y relaciones, llevando a cabo una, por así decirlo, epojé fenomenológica, haciéndonos ver cómo es ya sea Van Gogh o el motor Wankel, por ejemplo. En el diagrama del motor se captan de una forma global las relaciones de las distintas partes entre sí, la disposición de cada una, las dimensiones relativas, etc. En su autorretrato de 1888 Van Gogh nos dice cómo es él interiormente, nos describe el mundo melancólico y apasionado que existe dentro de él, nos muestra la soledad en que vive, en fin es un modelo que nos habla de él mejor que su misma fotografía.

Los modelos verbales son descripciones construidas con palabras, como el enunciado de la Ley de Newton que escribimos anteriormente y que, mediante construcciones gramaticales, intentan describir, explicar o representar un cierto fenómeno. Son modelos muy usados en ciencias que, en ocasiones, sólo pueden crear modelos cualitativos como la Psicología (el modelo de Freud del subconsciente, el de Jung sobre el inconsciente colectivo, el modelo adleriano del complejo de inferioridad, etc.), la Biología y la Geología del siglo pasado (la ley de la superposición estratigráfica, la ley huttoniana del uniformitarismo, el modelo catastrófico de Cuvier, la teoría darwiniana de la selección natural, etc.). Sin embargo, los modelos verbales a menudo son susceptibles de ser expresados en forma matemática, como vimos en el modelo newtoniano.

Precisamente, el tipo de modelos que nos interesa, y al que intentan llegar todas las ciencias, es de naturaleza matemática, más concretamente, modelos matemáticos hipotético-deductivos, los cuales consisten de explicaciones de hipótesis matemáticas de las cuales se deducen los hechos observados, por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell o las leyes de Newton.

Un ejemplo claro y muy ilustrador de la aplicación y construcción de este tipo de modelos lo encontramos en la ley de la Gravitación elaborada por Newton, en el último libro de su *Philosophiae*. Esta ley constituye una hipótesis en forma de ecuación matemática, no obtenida ni accesible por observación directa pero inducida de las leyes de Kepler, y quizá sugerida por la lectura del *Dialogo sopra i due massimi Sistemi del Mondo* de Galileo [24]. De dicha ley se deducen los hechos observados por Galileo y Kepler sobre la mecánica celeste y terrestre, respectivamente, además de otros fenómenos como el de las mareas. Newton realizó con este modelo la primera gran unificación de la Física, modelo que surgió como una ley que explicase por qué caía una manzana y no caía la Luna, pero una vez formulado, debido a su carácter matemático deductivo, se obtuvieron consecuencias que, de ser cierta esta hipótesis, debían cumplirse y sirviendo así a nuevos hallazgos, "ilustra el método científico en la forma ideal. De la observación de hechos particulares llega a una ley general por inducción, y por deducción de la ley general son inferidos otros hechos particulares" [25]. Así en el descubrimiento de Neptuno, por el astrónomo alemán Galle, nos encontramos con uno de los ejemplos más emocionantes del carácter predictivo de los modelos matemáticos. Galle sólo tuvo que apuntar su telescopio hacia el sitio indicado por los cálculos del matemático francés Leverrier, basado en el modelo newtoniano, para descubrir un nuevo planeta [26].

2.2.3 FUNCIONES DE LOS MODELOS

Con el ejemplo de la ley de Gravitación es fácil ver cómo estos modelos han provisto a la Ciencia de su poder de predicción y, por ende, de su influencia en la vida cotidiana. La formulación de modelos constituye así una parte tan esencial del método científico como la observación y la experimentación. Otra de las ventajas que ofrecen los modelos es que, mediante la expresión matemática de los fenómenos, podemos 'simular' de forma muy precisa esos procesos con un mínimo de gasto y esfuerzo. Por ejemplo, en la Ingeniería de Yacimientos se usan desde hace tiempo modelos y "la enorme ventaja que se tiene al hacer uso de la simulación es que permite 'producir' un yacimiento varias veces y de varias maneras, con lo cual se pueden analizar diferentes alternativas y seleccionar una de ellas; en la que se obtenga por ejemplo, la máxima recuperación, mientras que físicamente el yacimiento puede producirse una sola vez" [27]. Siendo un modelo un método confiable de predecir el comportamiento del yacimiento y para obtener la sensibilidad de los resultados a las variaciones de determinadas propiedades, indicándonos la precisión con que se debe obtener la información, debiendo ser ésta proporcional a la sensiblidad de los resultados a variaciones de dicha información. Así, el modelo sirve para optimizar, es decir, determinar el valor que se debe dar a una o más cantidades sobre las cuales puede ejercerse control a voluntad, para lograr que otra cierta cantidad sea lo mayor o menor posible [28]. También se usan simuladores para entrenar personal y para estudiar de forma más cabal una planta nucleoeléctrica o un viaje espacial, siendo un medio excelente de evitar pérdidas materiales y humanas.

Pero la simulación no se restringe al uso de modelos matemáticos, es extensivo al proceso mismo de pensar y es, en cierta forma, lo que hace del hombre el Homo sapiens, como dice W. Grey: "Ningún animal está equipado para ser sapiens...el quid estriba en que cuando nos encontramos ante algo nuevo no tenemos, necesariamente, que reponder inmediatamente de una manera particular. Lo pensamos ('hacemos un modelo y simulamos'). Podemos imaginarnos a nosotros mismos efectuando una de entre varias respuestas posibles, y representárnoslo tan claramente que vemos, sin necesidad de ponernos en acción, que el resultado será un error si la llevamos a cabo. Podemos cometer errores en un pensamiento y enmendarlo en otro, sin que quede traza de error en nosotros"[25].

Además de las ventajas de la simulación, los modelos poseen un encanto especial cuando expresan en forma concisa y elegante fenómenos de la naturaleza que aparentemente no están relacionados entre sí, realizando un avance en la unificación soñada y frenéticamente buscada por los científicos, los artistas y los filósofos. Por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell que unifican en unos cuantos renglones todos los fenómenos eléctricos y magnéticos, en un solo fenómeno, el electromagnético. unificación que resultó más fructífera cuando se demostró la naturaleza electromagnética de la luz y la existencia de todo un espectro de ondas electromagnéticas, gracias al trabajo de Hertz. Otro ejemplo lo encontramos en la Magnetohidrodinámica[30] que realiza también una síntesis asombrosa, reuniendo fenómenos tan aparentemente distintos como las llamaradas, manchas y protuberancias solares, el origen del campo geomagnético, el cuarto estado de la materia, llamado por Langmuir plasma, y la generación de potencia eléctrica. Es debido a logros de este tipo por lo que los físicos contemporáneos intentan crear un modelo central único que incorpore todas las fuerzas de la naturaleza en una y todas las partículas elementales en una sola partícula. La historia de la Física, en cuanto a sus modelos, sugiere un acercamiento paulatino hacia esa unificación[31]. Pero no sólo la Física ha sufrido esa evolución, tenemos por ejemplo la Teoría de la Tectónica de Placas en la Geología[32] y el descubrimiento del código genético en Biología[33], síntesis grandiosas que han surgido en este siglo. Se puede comprender así que tienen los científicos por los modelos, debido a su carácter estético y unificador.

Por otro lado, los modelos sirven también para ayudar a la comprensión y a la resolución de problemas (de hecho la técnica 'transformar-resolver-invertir' es rica en ejemplos, como vimos en la sección 1.2.2, y que es el fundamento de los modelos), para facilitar la enseñanza y el aprendizaje. A modo de ejemplo considérese el modelo llamado 'diagrama de cuerpo libre', el cual "es una representación gráfica del objeto en estudio, en el cual se indican sus características geométricas así como todos los efectos externos que en él actúan... constituye una simplificación del problema que se plantea y ... facilitan o simplifican la interpretación del comportamiento de un fenómeno... con los modelos es posible entender aquello que la teoría intenta explicar"[34].

Otro ejemplo de las ventajas del uso de modelos lo encontramos en los diagramas lógicos... "los cuales son figuras geométricas de dos dimensiones cuyas relaciones espaciales son isomórficas con la estructura de un enunciado lógico... dentro de la lógica, un buen diagrama tiene varias virtudes. Hay muchas personas que piensan con muchísima mayor facilidad cuando pueden imaginarse un argumento de una manera gráfica y, con frecuencia, un diagrama le sirve para entender con claridad algo que puede ser difícil de comprender para ellos, cuando está expresado en forma verbal o algebraica"[35]. Pero estos diagramas lógicos no limitan su aplicación al ámbito de la lógica: son muy usados, por ejemplo, en el diseño de circuitos digitales, empleándose para simplificar circuitos (mediante el uso de mapas de Karnaugh)[36]. Otra aplicación de los diagramas la encontramos en los reogramas: "un reograma es un diagrama de las relaciones causales de un conjunto de variables. Las variables se representan con un símbolo llamado nodo y la relación causa-efecto con ramas etiquetadas ('transmisión') dirigidas entre pares de nodos. Los reogramas... hacen posible visualizar la estructura de conjuntos de ecuaciones... facilitando la simplificación de las relaciones causales entre variables independientes y dependientes"[37].

Resumiendo podemos señalar como algunas de las funciones de los modelos las siguientes: simulación, estudio analógico de la realidad, anticipación de resultados, facilitación de la resolución y comprensión de problemas, ayuda didáctica, vía unificadora y como base para la acción. La última función de los modelos que mencionamos es de suma importancia en la Geofísica y constituye en las distintas prospecciones su último fin. Podemos decir que la meta de la Geofísica de exploración es establecer un modelo del subsuelo que nos guíe en la elección de las distintas alternativas a seguir: ya sea perforar o no, construir aquí o allá, etc. Es una ayuda importantísima en la selección del camino o la acción más conveniente, siendo más barata una prospección geofísica que la exploración directa, constituyendo su más auténtica justificación.

2.2.4 PROCESO DE FORMULACION DE MODELOS

En esta tesis proponemos la introducción de nuevos modelos, modelos más generales y, en cierto sentido, multidisciplinarios. Dicha incorporación implica una revisión del proceso de formulación de modelos. Nuestro intento es proponer la formulación de modelos que conduzca a una mayor unificación de los distintos modelos usados por las diferentes prospecciones, a una mayor interrelación con disciplinas como Biofísica, Astrofísica y otras que se caracterizan por el análisis de sus áreas de estudio con un enfoque conceptual físico, es decir, son maneras de enfocar los problemas utilizando herramientas físicas [36]. (Caracterizadas por su índole de disciplinas indirectas, o sea, que intentan entender o describir un fenómeno que no es susceptible de observación directa).

Así, nuestros modelos intentan constituir una generalización como la realizada por Einstein en el dominio de la Mecánica y que tiene como caso límite el modelo newtoniano. Kant dice que su crítica es una revolución copernicana, nosotros podemos decir parafaseando a kant que la nuestra es una revolución einsteniana, constituyendo en última instancia, un cambio de perspectiva y una generalización, tendiendo como caso límite (siguiendo el principio de Bohr) los modelos actuales "especializados".

Una ventaja de los modelos que proponemos es de orden didáctico pues al ser más generales nos da una visión global y, en cierto modo, integradora de los fenómenos. También intentan simplificar el proceso de transferencia de información de un dominio científico a otro.

El proceso de formulación de modelos conlleva grosso modo cuatro grandes problemas: el problema de representación, el de medición, el de estimación y, por último, el de validación [39]. Siendo cada problema una etapa sucesiva y completamente necesaria del proceso de formulación de modelos. Veremos a continuación cada una de ellas.

2.2.4.1 PROBLEMA DE REPRESENTACION

El problema de representación trata de cómo ha de ser el modelo, es decir, trata de la elección del tipo de modelo a usar y su expresión en términos del tipo elegido. Anteriormente hemos señalado la clasificación usual de los modelos, describiendo algunos tipos, cada uno de los cuales sirve para determinados fines, para propósitos muy bien definidos. Así, tenemos que para expresar Van Gogh su modo de ver el mundo, su Weltangshauung, no le serviría un modelo fáctico porque el aspecto de la realidad que quiere describirnos no es de naturaleza material, es en cierta manera meta-físico y podría decirse, siguiendo a Mc Luhan, que en gran medida "el medio es el mensaje". Por otro lado, la interrelación, o mejor dicho, la unidad que expresan las Ecuaciones de Maxwell no podrían captarse cabalmente mediante un modelo descriptivo ni siquiera uno fáctico. Toda la belleza y toda la utilidad del modelo de Maxwell radica en su compacto expresión matemática; "la síntesis de las interacciones electromagnéticas que expresan las ecuaciones de Maxwell es uno de los mayores logros de la Física y es lo que coloca estas interacciones en una posición privilegiada. Son las mejor conocidas de todas las interacciones y las únicas que, hasta ahora, se pueden expresar en una forma matemática cerrada y compatible. Esto es bastante afortunado para la humanidad, puesto que gran parte de nuestra civilización ha sido posible gracias a esa comprensión".[40]

Como nuestros modelos están relacionados en su mayoría con la Física y como el lenguaje natural de la Física es la Matemática, todos nuestros modelos serán de naturaleza matemática. Siendo que existe gran variedad de modelos matemáticos es importante escoger adecuadamente el tipo que mejor se adapte al fenómeno en estudio. En Geofísica los modelos matemáticos más usados se clasifican en: estadísticos o determinísticos, estáticos o dinámicos, aleatorios o causales, continuos o discretos, en el dominio del tiempo o de la frecuencia, etc. En general, existen varios modelos que representan adecuadamente el fenómeno o, parafraseando a Reichenbach[41], un conjunto de hechos observados siempre se ajustará a más de un modelo; de hecho, Leibniz ha demostrado que cualquier número finito de observaciones puede adaptarse a un número indefinidamente grande de explicaciones distintas, tomándose por lo común el modelo más simple y más general, y podríamos sugerir siguiendo a Einstein, el más elegante. Ya Newton había enunciado como primera regla para el razonamiento científico: "No debemos admitir más causas de las cosas naturales que las que sean a la vez verdaderas y suficientes para explicar sus apariencias... Todo exceso es malo cuando con menos resulta suficiente; a la naturaleza la agrada la sencillez"[42].

Seguramente Newton pensaba en los Elementos de Euclides, que representan para Newton el modelo mismo de la construcción de una teoría científica. El mérito principal de Euclides está en la selección de un pequeño grupo de suposiciones iniciales[43], formulando el patrón de la axiomática material, "siendo la contribución más sobresaliente de los griegos a las Matemáticas"[44] y "el primer gran progreso en la historia del pensamiento"[45].

Como dice Hume: "Cuando prefiero un conjunto de argumentos por sobre otros, no hago sino decidir, sobre la base de mi sentimiento, acerca de la superioridad de su influencia"[46]. Este "principio de elección", que podríamos relacionar con el de Bohr sobre correspondencia es el que ha guiado a la Física en la elección de sus modelos, siendo una de las razones por las que ha adoptado a la Matemática como lengua oficial, ya que "las fórmulas matemáticas simplifican el relato (de la Física)... y aunque Faraday y Volta escribieron grandes Físicas sin utilizar lenguaje matemático formal, los dos pensaban matemáticamente, y su ignorancia de la Matemática standard los hizo menos -y no más- inteligibles"[47]. Dicho "principio de elección" es equivalente al principio filosófico de Occam (también conocido como navaja de Occam, porque "rasura" una teoría hasta sus elementos fundamentales) que afirmaba que "*essentia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*" o sea, "las entidades no deben multiplicarse más de lo necesario"[48], y al principio de acción menor de Fermat, "que quizás sea el principio más profundo del mundo físico, biológico y moral"[49], pudiendo resumirse en la convicción del adagio latino: *simplex sigillum veri*.

Un ejemplo de la aplicación del "principio de elección", es decir, preferir escoger el modelo más simple y elegante, lo encontramos en la sustitución del modelo ptolomeico por el modelo de Copérnico. Desde el punto de vista de la Mecánica no existe en realidad ninguna base para preferir su sistema al de Ptolomeo; es más, "si hay dos cuerpos... ambos dan vueltas a un centro común"[50], tanto el Sol como la Tierra se mueven en torno a su centro de gravedad común, nos señala Newton. Cualquier punto del Universo puede ser el origen de nuestro sistema de referencia, no existe el movimiento absoluto, sólo existe el hecho de que la Tierra y el Sol se mueven uno respecto del

del otro. Pero el modelo de Copérnico es mucho más sencillo que el elaborado por Ptolomeo, por lo que se prefiere aquél. "Leibniz desarrolló una teoría del espacio basada en la idea de la relatividad del movimiento, en la que anticipó los principios lógicos de la relatividad de Einstein; vió con gran claridad que el sistema coperncano se diferencia del sistema de Ptolomeo sólo por ser una forma distinta de lenguaje" [51]. Como dice Bertrand Russell, el sistema heliocéntrico "es el modo más sencillo y breve de decir lo que sucede. Podríamos describirlo de otro modo y con otras palabras, que serían también correctas, pero menos convenientes"[52].

El mismo Russell nos da otro ejemplo de la aplicación de este principio, pero aplicado a la Física atómica; "Si se delimita en el universo físico una región... Y así, si la región contiene un átomo, dos cualesquiera teorías que den los mismos resultados con respecto a la energía que el átomo irradia o absorbe son empíricamente indistinguibles, y no puede haber razón, si no es la de mayor simplicidad, para preferir la una a la otra"[53].

2.2.4.2 PROBLEMAS DE MEDICION Y ESTIMACION

Una vez que se ha especificado la clase de modelo, las cantidades físicas involucradas deben medirse o estimarse, conduciéndonos a los problemas de medición y estimación, respectivamente. Generalmente se distinguen dos tipos de cantidades: las señales y los parámetros. A las señales usualmente se les define como aquellas cantidades que son funciones de la variable independiente del modelo, por ejemplo funciones del tiempo, de la frecuencia, del espacio, del número de onda o cualquier otra variable mensurable. Un parámetro, por su parte, expresa una relación entre señales y por lo común se le considera independiente respecto a la variable de la que es función la señal. Para ejemplificar las definiciones dadas arriba, consideremos el modelo de la segunda ley de Newton que establece que $F=m\,dv/dt$, con $F=F(t)$ y $v=v(t)$ como señales y m como parámetro. Para el reograma de la ley de Ohm: $\overset{I}{\circ}\xrightarrow{\;R\;}\overset{V}{\circ}$, $V+V(t)$ e $I=I(t)$ son las señales y R es el parámetro que, en términos de reogramas, se representa como rama dirigida. En la ecuación algebráica:

$$x(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} g_i f_i(\lambda) \qquad (2.6)$$

$f_i(\lambda)$ y $x(\lambda)$ son las señales, en este caso funciones de la variable λ, mientras que los g_i son los parámetros. A menudo somos nosotros los que definimos una cantidad como señal o como parámetro, según el problema. Podemos tener, por ejemplo, un sistema en el que la masa no es constante, es decir, que entra o sale masa del sistema, y si consideramos que v=constante, entonces tenemos que $F=v\,dm/dt$, donde $F=F(t)$ y $m=m(t)$ son las señales y v es el parámetro. Otro caso es cuando el cuerpo se mueve a velocidades relativistas.

Por otro lado, no todas las señales y cantidades son medibles, debiéndose en esos casos estimar sus valores. El problema de medición se refiere a cuáles cantidades físicas deben medirse. El problema de estimación, por su parte, se refiere a la determinación de aquellas cantidades que no pueden medirse de aquellas que pueden medirse. En el problema de medición nos encontramos que las medidas forzosamente involucran errores por lo que la obtención de un valor exacto es imposible: "Uno de los propósitos de las ciencias físicas ha sido el de proporcionar una imagen exacta del mundo material. Uno de los logros de la Física del siglo XX ha sido el probar que tal meta es inasequible"[54]. Llegamos así a la paradoja de que la Física ha demostrado de que el método del artista de explorar la realidad "es el único método de conocimiento"[55]. Por ejemplo, en la localización del epicentro de un terremoto, de una estrella o de un tumor habrá siempre una incertidumbre, expresada como (Δx, Δy, Δz) íntimamente relacionada con los errores en la medición y y con el tamaño del objetivo. En la medición de un cierto potencial de acción nervioso, de un cierto circuito eléctrico o de un dispositivo Wenner tendremos una cierta precisión expresada como Δv, en la medición de ondas sísmicas, electromagnéticas o de ultrasonido tendremos un cierto ancho de banda $\Delta\omega$. En fin, todo proceso de medición involucra cantidades tales como Δv, $\Delta\omega$,Δx que son una cierta medida de la inexactitud del proceso mismo de medición, siendo deseable hacer esas cantidades lo más pequeñas que sea posible. Sin embargo, hay ocasiones en que algunas de ellas están relacionadas de tal forma que al aumentar la precisión de medida de una, aumenta la imprecisión de medida de la otra. Resultando, pues, imposible medir exactamente a la vez dos características complementarias de ese tipo. A nivel atómico este hecho lo expresa el principio de incertidumbre de Heisenberg: "Es imposible conocer simultáneamente y con exactitud la posición y el momentum de una partícula"[56]. Dicho principio se puede escribir como: $\Delta x \Delta p \sim h$, donde h=constante de Planck. Además de la relación anterior entre una coordenada de una partícula en movimiento y su correspondiente momentum, hay una relación de incertidumbre entre el tiempo y la energía: $\Delta t \Delta e \sim h$. Una interpretación de esta relación es que si queremos definir el instante en que una partícula pasa por un punto debemos representar la partícula por un pulso, o sea, un paquete de ondas de duración Δt muy corta. Pero para construir ese pulso es necesario superponer campos que tienen frecuencias diferentes, con una amplitud apreciable sólo en un intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ centrado en la frecuencia ω y tal que $\Delta t \Delta\omega \sim 2\pi$, y como $e = h\omega/2\pi$ tenemos que disminuye nuestra información de la energía que tiene la partícula. Si por el contrario, tenemos una onda sinusoidal con una frecuencia perfectamente definida nos encontramos que se extiende sobre todo el eje del tiempo. Así un análisis matemático del principio de incertidumbre es un análisis que relaciona funciones con sus transformadas de Fourier.

Es tan importante este tema que Claerbout le dedica todo un capítulo en su libro "Fundamentals of Geophysical data processing"[57].

El teorema del límite central de probabilidad y estadística es quizás el más importante de ese campo. Y una derivación de ese teorema explica porqué la función de probabilidad gaussiana es encontrada tan frecuentemente en la naturaleza. Gauss, al analizar lo que nos indica la dispersión del error, inventó su famosa curva en la que nos indica que la dispersión (resulida por la desviación o extensión de la curva) nos marca un área de incertidumbre, dentro de la cual podemos esperar se encuentre la medición verdadera, pero nunca -nos advierte Russell[58]- podemos afirmar haber medido el valor verdadero o que poseemos la verdad exacta sobre algo, pues toda medida va siempre acompañada de error. Como dice Popper, "la concepción equivocada de la ciencia se traiciona a sí misma por su anhelo de certeza"[59].

2.2.4.3 PROBLEMA DE VALIDACION

El problema de validación se refiere a la demostración de la validez del modelo. En el caso de una ley científica, por lo común, se acepta que un modelo confirmado se convierte en ley, si bien ésta es susceptible de ser mejorada o desechada con el descubrimiento de casos no comprendidos en la ley. La confirmación [60] o demostración es un proceso lógico y empírico para establecer los principios científicos. Como afirma Piaget[61], la demostración o justificación exige la coherencia interna (del sistema total, desde el punto de vista de su lógica inherente) y la verificación experimental (desde el punto de vista de adecuación a la realidad). Este criterio para la justificación es muy semejante al criterio einsteniano para la formulación de modelos. Esta semejanza es comprensible porque el científico formula modelos que espera justificar. Sin embargo, la filosofía usual para determinar la validez de un modelo es enteramente pragmática: "Un modelo es verdadero en la proporción en que es instrumento efectivo para explicar la experiencia y realizar objetivos humanos"[62]. Que es el criterio seguido por Robinson: si un modelo da resultados favorables entonces es adecuado, es decir, se considera válido. Pero, como Hume demostró[63], ninguna cantidad de observaciones particulares, por grande que sea, es concluyente para decir que un modelo es verdadero. Nos encontramos con otro caso de certeza inasequible: la inducción no nos proporciona un conocimiento seguro sino sólo probable. Tal vez la concepción neopositivista de Reichenbach, "la idea de una causalidad estricta debe abandonarse y las leyes de probabilidad pasan a tomar su lugar... la causalidad debía formularse como una relación de la forma 'Si - entonces siempre'. La ley de la probabilidad es una relación de la clase 'Si - entonces en un cierto porcentaje'"[64]. Este cambio está íntimamente ligado con los problemas de medición que mencionamos anteriormente y, en cierta forma, es resultado del principio de incertidumbre de Heisenberg.

Por otro lado -asegura Russell- los modelos deben limitarse a predicciones en un futuro próximo inmediato, aun infinitesimal; por ello, en general, "las leyes científicas pueden expresarse solamente en ecuaciones diferenciales. Esto significa que aunque no podamos decir lo que vaya a suceder después de un tiempo finito, podremos decir, si el tiempo se reduce cada vez más, que lo que suceda se aproximará cada vez más a una determinada regla"[65].

Otro criterio para la justificación de un modelo es el propuesto por Teilhard: "En ciencia la gran prueba de la verdad es la coherencia y la fecundidad"[66]. Una teoría es cierta en la medida en que pone más orden en nuestra visión del mundo (coherencia), y en la medida en que es capaz de dirigir y mantener nuestros esfuerzos de búsqueda y construcción del mundo (fecundidad).

Pero si no podemos demostrar que un modelo es verdadero, sí podemos demostrar que es falso debido a la asimetría lógica entre la verificación y la falsación, conociéndose esta afirmación como criterio de Popper de falsación, que en términos de la lógica podría expresarse así: "Aunque ningún número de enunciados de observación de que 'p es q' nos autoriza a derivar un enunciado general del tipo 'Todo p es q' basta un sólo enunciado de observación, referido, claro está, a una observación de que al menos 'Algún p no es q' para que pueda concluir que 'No todo p es q'. Así no pueden ser verificables, pero si falsables"[67].

Para Popper un modelo se prefiere a otro en cuanto a su capacidad de ser puesto a prueba, pues de esta forma se demuestra, si no que es verdadero (ya que es imposible), sí que es falso. Si pasa la prueba no indica que sea verdadero (por el problema de Hume) pero al menos tenemos un modelo más útil que el que no pasa la prueba. Esta concepción popperiana surge del análisis del modelo de la Relatividad General: Einstein dedujo de su modelo cierta deflexión de la luz y Eddington realizó las observaciones necesarias y demostró que la desviación se producía en el valor esperado. Esto demostraba que la Mecánica newtoniana fallaba, pero no demuestra que la Teoría de la Relatividad fuese verdadera, al igual que las miles de observaciones que satisface el modelo de Newton no demuestra que sea verdadera; quizás se encuentre otra teoría que explique y contenga la de la Relatividad, del mismo modo que ésta explica y contiene la de Newton.

Con este criterio, Popper nos brinda también una guía para distinguir las teorías científicas de las que no lo son, pues una teoría científica debe brindar esas predicciones críticas que decidan sobre su falsedad. Ziolkowski, en el artículo que mencionamos en el prólogo, propone el uso de ese criterio para la formulación de modelos geofísicos, proposición digna de ser oída y practicada.

Nuestros modelos, como veremos en las conclusiones, predicen popperianamente y han pasado ya dos pruebas, justificando su existencia y su cientificidad.

2.2.4.4 PRINCIPIOS META-FISICOS

Los siguientes principios sintetizan nuestras consideraciones sobre el proceso de formulación de modelos y constituyen la base epistemológica y metodológica de la Ciencia, según creemos la ven los científicos que han meditado sobre ella. Estos principios conforman así mismo el esqueleto, por así decirlo, de la teoría de criptosistemas, que veremos en la sección 2.3.7.

I PRINCIPIO PRIMERO: Sobre el objetivo de la Ciencia.

El objetivo de la Ciencia es una comprensión tan completa como sea posible de la conexión entre las experiencias sensoriales en su totalidad y el logro de ese objetivo mediante el uso mínimo de conceptos primarios y de relaciones. La Ciencia, así, es un intento de lograr que la diversidad caótica de nuestras experiencias sensoriales corresponda a un sistema de pensamiento lógicamente uniforme[68].

II PRINCIPIO SEGUNDO: Sobre el Universo como criptosistema.

Entendemos por criptosistema (del griego κρυπτός - oculto) todo aquello que no es susceptible de conocimiento directo, es algo análogo al noúmeno kantiano; siendo así, 'todo' es criptosistema (para una definición matemática ver la sección 2.3.7):

1) Es indemostrable la existencia de un mundo físico o 'mundo exterior real'. "La creencia en un mundo exterior, independiente del sujeto perceptor, es la base de toda la ciencia natural. No obstante, dado que la percepción sensorial sólo brinda una información indirecta de ese mundo exterior, únicamente podemos captar a éste por medios especulativos. De aquí se concluye que nuestras nociones de la realidad física nunca serán definitivas"[69].

2) Es indemostrable que el Universo sea un 'Cosmos'. No sólo no sabemos si existe o no un mundo real exterior, sino que tampoco sabemos si éste es un 'Cosmos', es decir, un Universo donde existe 'orden'. Y no sólo no sabemos si existe o no 'orden' en el Universo, sino que su existencia queda más allá de toda demostración.

III PRINCIPIO TERCERO: La Opción Fundamental.

Aunque no podemos demostrar que existe el mundo físico y que este sea 'Cosmos', obramos como si existiese como 'Cosmos'. Esta opción es la base de toda Ciencia, Filosofía y Arte, y se origina en nuestra experiencia, gracias a la categoría de simetría. El que nosotros optemos por la existencia del 'Cosmos' es debido a la necesidad de tener una guía para actuar [70].

IV PRINCIPIO CUARTO: La comprensibilidad del mundo.

Donde existe orden existe significado, por lo tanto el Cosmos es inteligible. "La totalidad de nuestras experiencias sensoriales pueden ser puestas en orden mediante un proceso mental.......el mundo externo real carecería de sentido si careciera de comprensibilidad....(la cual) implica un cierto orden en las impresiones sensoriales; un orden que se produce por la creación de conceptos generales, de relaciones entre dichos conceptos y de relaciones bien definidas de cierta clase entre los conceptos y la experiencia sensorial. El hecho de que sea comprensible es un milagro". [71]

V PRINCIPIO QUINTO: Sobre la elección del Cosmos.

El 'Cosmos' (modelo del mundo) que elija el hombre está condicionado por los siugientes lineamientos, deducidos de las secciones anteriores (2.2.4).

1) Principio de Economía: el modelo escogido debe ser expresado como relaciones y conceptos fundamentales "tan simples y en ta corto número como sea posible, sin que por ello se tenga que renunciar a la representación de ninguno de los contenidos empíricos" [72]. Este modelo también debe ser construído en forma tal que intente "hallar una base teórica <u>unificadora</u> de todas (las ramas de la Ciencia).... de la que todos los conceptos y las relaciones de cada rama puedan ser derivados por un proceso lógico". [73]

2) Principio de falsación de Popper [74].

3) Principio de correspondencia de Bohr [75].

4) Principio de acción de Teilhard: el modelo escogido debe ser capaz de dirigir y mantener nuestros esfuerzos de búsqueda y construcción del mundo [76].

5) Principio antrópico de Dicke:[77] este principio establece la existencia de ciertas restricciones al 'Cosmos' que elijamos: aquellas restricciones que permitan la existencia de 'observadores' en el Universo.

VI PRINCIPIO SEXTO: Sobre la 'Verdad'

La 'verdad' (la elección del modelo 'verdadero') es inasequible debido al carácter criptosistémico del Universo mismo y a los siguientes principios:

1) Principio de equivalencia de Leibniz: un conjunto de hechos observados se ajusta a un sinnúmero de explicaciones distintas [78].

2) Principio de complementareidad de Bohr: dos magnitudes son complementarias cuando la medición de una de ellas impide la medición simultánea precisa de la otra (cf. principio de incertidumbre de Heisenberg) y dos conceptos son conmplementarios cuando uno de ellos impone limitaciones al otro (cf. onda-partícula, mecánica cuántica-mecánica relativista) [79].

3) Principio de Rosenthal: el observador afecta lo observado [80].

4) Principio de Nicolás de Cusa:[81] la verdad precisa es inaprehensible. Debido a que nuestra razón se comporta como el polígono respecto al círculo: mientras más ángulos tiene el polígono, más se asemeja al círculo. Sin embargo, nunca lo iguala porque no se pueden multiplicar los ángulos hasta el infinito.

2.3 SINOPSIS HISTORICA DE PARADIGMAS CIENTIFICOS

Los cambios producidos en la Historia de la Ciencia han sido muy singulares y han tenido lugar solamente en unas cuantas ocasiones. No nos referimos a los avances en los procesos científicos acaecidos periódicamente y con progresión contínua, sino más bien dedicaremos nuestra atención a aquellos casos en los cuales el hombre no solamente consiguió resolver un problema, sino que tuvo que *cambiar su mentalidad* para hacerlo o, cuando menos, descubrió posteriormente que la solución le obligaba a cambiar su enfoque mental de la ciencia.

De esta manera queremos presentar momentos críticos en los avances científicos y tecnológicos (como consecuencia), que tienen lugar a través de la Historia, para poder comprender los cambios que se están llevando a cabo en nuestros tiempos. Así podemos examinar las murallas infranqueables en períodos determinados, e incluso seguir las líneas del desarrollo científico que acababan en callejones sin salida, pero que ejercieron una influencia cierta sobre el progreso de la ciencia en general. Es necesario en cada momento que nos formemos una idea de los sistemas más antiguos, de los que pertenecían al tipo de ciencia que había de derrumbarse, tenemos que seguir la Historia de la Ciencia desde las etapas más antiguas hasta las más modernas, partiendo de las ideas que limitan el surgimiento de Galileo, a fin de darnos cuenta del modo en que un gran pensador operaba en los márgenes del pensamiento contemporáneo, o creaba nuevas síntesis, o completaba una línea de pensamiento que había sido ya comenzada.

Los cambios fueron producidos, no por nuevas observaciones, ni por pruebas de carácter nuevo e inusitado, sino por las transposiciones que estaban teniendo lugar en las mentes de los propios científicos. En relación con estos cambios, es pertinente e importante notar que de todas las formas de actividad mental, la más difícil de inducir es el arte de manejar un conjunto determinado de datos ya conocidos, pero situados en un nuevo sistema de relaciones entre sí, en una nueva estructura, todo lo cual significa, virtualmente, ponerse por un momento a pensar según líneas nuevas.

2.3.1 COPERNICO Y GALILEO

El problema del movimiento ha sido quizá la valla intelectual que se ha encontrado en su camino la mente humana que ha superado con el carácter más extraordinario, y el más formidable de todos, por lo que respecta a sus consecuencias, la que tal vez Galileo no llegó a superar, aunque quedase determinada en su forma definitiva poco después de su tiempo. Le fue difícil a la mente humana librarse a este respecto de las enseñanzas aristotélicas, precisamente porque llevaba un engranaje tan complicado de observaciones y explicaciones -es decir, porque formaba parte de un sistema que, ya de por sí, constituía una proeza del pensamiento. Incluso cuando el hombre ya estaba muy cerca de lo que podríamos llamar la 'verdad' respecto al movimiento, no consiguió discernir hasta sus últimas consecuencias, hasta que no llegó a percatarse y tener plena conciencia del hecho de que, en realidad, lo que estaba haciendo era transportar la cuestión a otro campo nuevo (transformándolo). No estaba ya discutiendo de cuerpos reales tal y como los vemos en el mundo perceptible, sino de cuerpos geométricos que se movían en un mundo en el que no había ni resistencias ni gravedad, se movían en el vacío infinito del espacio euclidiano que Aristóteles consideraba imposible. Por tanto, a la larga tenemos que reconocer que se trataba de un problema de carácter fundamental, y que no pudo ser resuelto por medio de la observación minuciosa dentro de la estructura del sistema antiguo de ideas; requirió una transformación mental. Una de las líneas de la narración histórica que nos concierne es el progreso realizado por la evolución del propio pensamiento escolástico. Pues el mundo moderno es, en cierto sentido, una continuación del mundo medieval; no puede ser considerado simplemente como reacción contra el primero. De esta manera, cualquier bosquejo introductorio a la opinión medieval sobre el cosmos ha de abordarse, ante todo, con la reserva de que, en este campo particular del pensamiento, había variantes, incertidumbres y controversias que no sería posible describir con detalle. Por tanto, en conjunto, quizá sea conveniente tomar como pauta la idea de Dante del universo. Este sistema nos permitirá contemplar de un solo golpe de vista las cimas de las múltiples objeciones que la teoría de Copérnico tardó unos 150 años en vencer. La tierra y los cielos estaban aislados el uno del otro y eran dos organismos separados, a pesar de que en un marco más amplio de ideas, se ensamblaban para formar un cosmos coherente. El sistema que describía el universo era completamente deductivo, no contemplaba más que las interacciones por contacto y no permitía la existencia del vacío, así que eran esferas concéntricas de material cada vez más etéreo, lo que formaba el universo. La belleza que tuvo en su origen se encontraba gravemente comprometida por los adelantos que se habían hecho en la observación astronómica desde los tiempos en que adquirió su forma original. Ptolomeo había pretendido seguir los principios de Aristóteles, reduciendo los movimientos de los planetas a combinaciones de movimientos circulares uniformes, introduciendo una artimaña que permitía hablar de un movimiento angular uniforme alrededor de un punto que no fuese el centro, y debió de ser cierto resentimiento contra aquella operación de prestidigitación lo que impulsó a Copérnico a cambiar todo el sistema.

Este cambio se había de reducir a imaginar a la Tierra en movimiento. Por tanto, hubo muchos factores que se combinaron para estimular la mente de Copérnico y provocar en él la duda en torno al sistema antiguo astronómico. Nadie se había preocupado por estudiar un sistema con la tierra en movimiento calculando los detalles de un modelo de esta clase y, hasta los tiempos de Copérnico, la Teoría Heliocéntrica no había sido nunca elaborada matemáticamente para poder ver si era capaz de concordar y explicar los fenómenos observados en la forma competente que el sistema ptoloméico había demostrado ser capaz de hacer. Solamente la Teoría de Ptolomeo había ofrecido hasta entonces las ventajas que el mundo moderno sabía valorar, el mérito de haber sido establecida en forma concreta, demostrando que explicaba los hechos en su conjunto y cuando se aplicaba a cada fenómeno en detalle.

Dondequiera que encontrase el comienzo, lo cierto es que Copérnico se impuso la tarea de descubrir el mecanismo exacto de los cielos según la nueva hipótesis y de construir las matemáticas del esquema. Los que no podían creer que la tierra se movía, no tenían más remedio que admitir que la Teoría de Copérnico ofrecía un método más sensible y más rápido de llegar a la predicción y al cálculo. En la Física aristotélica se precisaba de una fuerza colosal para hacer que se moviera la Tierra, pesada y voluminosa, mientras que los cielos estaban hechos de una substancia sutil que se suponía exenta de pesantez, lo que hacía muy fácil el moverlos; pero sobre todo si concedemos a Copérnico una cierta ventaja en cuanto a simplicidad geométrica, el sacrificio que había que hacer era por todos conceptos tremendo. Perderíamos toda la Cosmología relacionada con las teorías aristotélicas, todo el complicadísimo sistema de ensambladuras en la nobleza de los diversos elementos y su gradación jerárquica, todo maravillosamente ordenado. De hecho, lo que se necesitaba era echar por tierra toda la estructura de la Ciencia existente. De este sistema surgen dos problemas fundamentales: la dinámica y la cuestión de la gravedad, problemas que siguieron su curso hasta los tiempos de Newton. Entonces surge la idea de que no solamente la Tierra, sino también otros cuerpos, como el Sol y la Luna, tienen gravedad y que la Tierra ha dejado de ser el centro del universo.

El mundo comenzó a darse cuenta de que Aristóteles no dejó de tener sus rivales coetáneos, y el confrontar explicaciones contrarias y sistemas opuestos produjo dilemas importantes ante los que el hombre tuvo que decidirse por sus propios medios. El descubrimiento del Nuevo Mundo y el comienzo de los conocimientos de las regiones tropicales produjo una cascada de nueva información y de literatura descriptiva que, ya de por sí, había de tener un efecto estimulante. Sin embargo, la estructura esencial de la Ciencia no cambió. La imprenta y los medios relacionados con ella (las tallas en madera o los grabados de plancha de cobre) pusieron nuevos instrumentos a disposición de los hombres de ciencia. En nuestro tiempo las computadoras y la electrónica es un surgimiento importante de la tecnología contemporánea del que se esperan cambios similares pero en otro contexto de la historia.

Con la imprenta se produce la multiplicación de los textos y el intercambio de datos. A continuación se dejaba sentir la atracción del laboratorio de Galileo: sobre todo el arte de la observación empírica alcanzó un gran desarrollo y el hombre se percató de que, en última instancia, todo dependía de la observación y de la experiencia, de la teoría y del experimento.

2.3.2 WILLIAM HARVEY

En el aspecto biológico y médico, Galeno ocupaba el lugar de Aristóteles y William Harvey tomó el lugar de Galileo. Nos encontramos ante un sistema complejo de errores, respecto del cual hay que hacer notar que la doctrina era no solamente errónea en sí misma, sino que, hasta que fue corregida, formó una muralla infranqueable para todo adelanto fisiológico, ya que ninguna otra opinión podía ser cierta.

William Harvey empezó por determinar cuál era la dirección de la sangre y describió el aparato circulatorio; no podemos darnos cuenta de la grandiosidad de Harvey y de su obra mas que conociendo las dificultades y los obstáculos que existían en el siglo XVI (Bacon dijo que algunos descubrimientos científicos parecen ridículamente sencillos una vez que se han hecho. Así, a ciertas personas, algunas proposiciones de Euclides que parecían increíbles la primera vez que se veían, una vez demostradas parecían tan sencillas que sentían que las habían sabido siempre).

La revolución que produjo Harvey fue como la que hemos visto en el campo de la Mecánica o la que Lavoisier había de desencadenar en la Química, y se debió a la capacidad de contemplar todo el objeto dentro de una nueva estructura de volver a plantear los términos del problema en una forma que lo hacía manejable. Sin embargo, aunque la influencia de estos hombres hubiera sido tan importante como la gente suele imaginar, no lo fue tanto por el éxito obtenido con su nuevo sistema, sino por el estímulo que produjo. Se adoptaron los métodos de Galileo (matematizar un problema) y de Harvey, poniéndose de moda tanto en las universidades como fuera de ellas. El aparato matemático se empezaba a enriquecer y se sumaban a la Geometría de Euclides la Geometría Analítica de Descartes y el Cálculo de Leibniz y Newton, el cual no hubiera resuelto nunca el problema de la gravedad ni llegado a su grandiosa síntesis, sino hubiera podido apoyarse en estas herramientas. Así pues, sin los adelantos efectuados por los matemáticos no hubiera sido posible la Revolución Científica tal y como la conocemos.

2.3.3 DESCARTES

Se ha hecho la observación de que, al haber evolucionado por caminos separados el Algebra y la Geometría -la primera entre los hindúes y la segunda entre los griegos-, la reunión de ambas, constituyó el más importante de los adelantos hechos en el progreso de las Ciencias Exactas. Descartes adelantó la idea de que las ciencias que trataban del orden y de la medición estaban relacionadas con las matemáticas: "Por tanto, debería existir una Ciencia General. Las Matemáticas que deberían explicar todo cuanto pueda averiguarse acerca del orden y la medida"[92]. Afirmó que una ciencia así sobrepasaría en importancia y en utilidad a todas las otras ciencias que, en realidad, dependían de ella. Kepler decía que, igual que los oídos están hechos para el sonido y los ojos para el color, la mente humana está hecha para pensar en cantidades (para nuestro tiempo, en algoritmos), y que está perdida en cuanto se aleja del campo cuantitativo del pensamiento. Galileo decía que el Libro del Universo había sido escrito en lenguaje matemático, y que su alfabeto consistía en triángulos, círculos y demás figuras geométricas[93].

Tomando en cuenta estos argumentos, vemos por qué la Matemática, en las Ciencias Naturales, comenzaba entonces a adquirir una dirección definida.

2.3.4 CIENCIA Y TECNOLOGIA

Aunque uno se interese ante todo por la Revolución Científica en cuanto a la transformación de ideas que supuso, no podemos ignorar los cambios más profundos que produjo en el mundo y que afectaron el pensamiento humano o alteraron las condiciones en que estaba teniendo lugar aquél proceso mental. Estamos comenzando a darnos cuenta de que la historia de la Tecnología tiene un papel más importante en la evolución del movimiento científico de lo que creíamos en un primer momento y, de hecho, la historia de la Ciencia no podría ser completa si la limitamos a la historia de las Teorías Científicas. Una parte de la influencia ejercida por la Industria y la Ingeniería sobre el pensamiento científico es difícil de localizar y podría ser todavía más difícil demostrarlo. Pero aparte de la transferencia de ideas y de técnicas de trabajo, tiene que haberse producido un efecto considerable, de carácter sutil, en la manera en que se atacaban los problemas y en el modo de sentir el hombre las cosas. Es difícil deslindar actualmente los aspectos científicos de los tecnológicos, y cómo promueven los primeros avances en los segundos y al revés. En este aspecto de la técnica no cabe duda de la gran influencia de Arquímedes en el curso que siguió la revolución científica. Al principio no existía un abismo profundo entre el investigador práctico y el pensador teórico: los cartógrafos, los topógrafos, los ingenieros eran los que, ya desde mucho tiempo atrás, necesitaban las matemáticas; los navegantes habían necesitado de la Ciencia y habían contribuido a su desarrollo; así, Gilbert tenía relaciones con navegantes y Galileo habla de los problemas que surgían en las construcciones navales o con bombas de agua en las minas. Efectivamente, no nos equivocamos si pensamos en Galileo como un hombre en el que se combinaba el técnico y el científico, el artesano y el filósofo. La creación de nuevos instrumentos científicos, especialmente de nuevos instrumentos de medida, comienza a cobrar gran importancia en el siglo XVII. Es difícil darnos cuenta de lo complicado que debió ser el trabajo en los siglos anteriores, sin disponer de estos aparatos. El telescopio y el microscopio hacen su aparición ya a principios de siglo y se hace difícil no considerarlos como una derivación de las industrias del vidrio y del pulido de metales que existían en Holanda.

2.3.5 NEWTON

Acabamos de ver lo que parece ser la línea estratégica en la historia de la Revolución Científica del siglo XVII, y hemos visto de qué manera estaba relacionada de modo muy completo esta Revolución con el estudio del movimiento tanto en la Tierra como en el Cielo, de la evolución y perfeccinamiento de la Matemática y la Tecnología, y cómo dicha historia culmina en aquella síntesis de la Astronomía y la Mecánica que realizó el sistema de Newton. El momento que nos referimos destaca forzosamente como uno de los más altos en la historia de la existencia humana, porque los problemas no fueron resueltos hasta en el último detalle, sobresale de toda narración el hecho de que nos encontramos ante uno de aquellos períodos en que, al resolver ciertos problemas, el hombre adquiere nuevos métodos mentales, nuevos métodos de investigación; funda la ciencia moderna de una manera que podríamos llamar causal. Al reducir la Tierra y el Cielo a un solo sistema fundamental de leyes quedó abierta la posibilidad de cambiar de actitud frente a todo el universo. Ya hemos visto que se hicieron intentos de extender el sistema mecanicista en sí, así como los métodos científicos que tan excelentes resultados habían dado en la Física, para que alcanzacen hasta los fenómenos químicos e, incluso, los biológicos. También hemos visto que, en correspondencia enteramente conciente con el sistema mecanicista, se había quitado el polvo a las antiguas doctrinas atomistas, o se estaba comenzando a reformarlas según nuevos conceptos. No sucede con frecuencia que el tiempo pueda reunir en un grupo único una gama tan extensa de cambios intelectuales que constituyan, en conjunto, una transformación tan general de los puntos de partida del pensamiento humano.

2.3.6 LAVOISIER

Existe todavía otro aspecto en el cual los cambios intelectuales acaecidos bajo el reinado de Luis XIV atañen a la Historia de la Ciencia, especialmente por cuanto representan la difusión del método científico a otros campos del pensamiento humano. En este caso se trata de la política, y todos los historiadores lo anotan como un punto importante, por constituir el comienzo de una revolución que había de conducir a la Revolución Francesa. Nos encontramos ante un intento, conciente de sí mismo, de demostrar cómo el método científico podría ser aplicado más generalmente y podría ser transferido del examen de los fenómenos matemáticos puros al campo de lo que podríamos llamar estudios humanos.

En el momento de más confusión surgen siempre los hombres más valiosos, durante esta época, así en el caso de Lavoisier surge como uno de ellos, contemplando las piezas diseminadas del rompecabezas y disiumbra la imagen que se les ha de dar, supera con su estatura a cualquiera de los otros químicos contemporáneos suyos y que, en realidad, es uno de los de ese reducido grupo de gigantes que ocupan los lugares más altos de la historia de la Revolución Científica, y quien dijo que lo que se llevaba hecho hasta entonces en Química no constituía nada más que los eslabones aislados de una cadena que hacía necesario un gran número de nuevos experimentos dirigidos a establecer los puntos de enlace que faltaban y reunirlos en una unidad.

En el ámbito biológico las transposiciones surgen de todo lo imbuido en el ámbito científico y da un gran salto en el siglo XVIII con las Teorías Evolucionistas, en las cuales parecía que las ideas antiguas respecto a la inmutabilidad de las especies estaban condenadas a ser transformadas.

2.3.7 RELATIVIDAD Y MECANICA CUANTICA

Solamente nos falta bosquejar la crisis y la revolución de la Física al principio de este siglo.

La Física es la Ciencia más relacionada con la Filosofía, lo cual no ocurre de manera gratuita. La Física se ocupa, en su nivel y con sus propios medios, de problemas fundamentales, como la constitución de la materia, las relaciones entre la materia, el movimiento, el espacio y el tiempo, la causalidad y el determinismo, etc. Es significativo que los primeros filósofos materialistas de la antigua Grecia hayan sido casi todos físicos. Tampoco se debe a la casualidad que todos los grandes físicos, desde Galileo hasta Heisenberg se hayan ocupado sistemáticamente en mayor o menor grado de los problemas epistemológicos de su disciplina y de problemas filosóficos en el sentido más amplio del término.

Aunado al modelo mecanicista se ilumina una nueva concepción: la primera idea revolucionaria desde Galileo, la idea del campo electromagnético. Según las ecuaciones de Maxwell, la luz, y más generalmente la radiación electromagnética, se identifica con una realidad, el campo electromagnético, cuyas fuentes son los cuerpos radiantes, y que se propaga con una velocidad increíble pero finita.

Uno de los postulados más fundamentales de la Física clásica se había manifestado parcialmente erróneo, ya que en la naturaleza no existe interacción o velocidad infinita.

Finalmente, las ecuaciones de Maxwell habían transformado el concepto formal de campo en realidad independiente y material. Con las ecuaciones de Maxwell se tenía que lidiar con un nuevo tipo de ley que, contrariamente a las de tipo newtoniano, debía de relacionar los fenómenos en el tiempo y en el espacio de manera evolutiva.

Pero las ecuaciones de Maxwell no son invariantes con relación a las transformaciones de Galileo, contrariamente a las ecuaciones de la Mecánica clásica. Los contemporáneos de Maxwell eran seguidores de la concepción mecanicista, según la cual, las ecuaciones del campo electromagnético describen el movimiento oscilatorio de un medio hipotético, el éter. Pero se sabía que las ecuaciones de Maxwell eran invariantes con otra clase de transformaciones, las transformaciones de Lorentz, las cuales contenían implícitamente la relatividad y la unidad del espacio y el tiempo.

La contradicción debía desaparecer en un sistema espacio-temporal: el sistema de la relatividad especial. Einstein rechazó la noción del éter como sistema de referencia privilegiado, absoluto, relacionado con el espacio absoluto. Según la relatividad especial, el espacio y el tiempo tomados separadamente, son relativos y sólo su unión constituyen una dimensión absoluta. En este sistema cuadridimensional el electromagnetismo encuentra su lugar en forma más general. La relatividad general demostró 10 años más tarde la unidad del espacio, el tiempo y la materia. En adelante, los campos materiales no serán un medio inmerso en el espacio sino que forman una unidad con el espacio determinando su forma. Suprimiendo de esta forma la acción a distancia en el dominio de la gravitación, la última reliquia de la concepción mecanicista.

Otra de las grandes revoluciones fue la de la Física Cuántica, que dió el paso definitivo a la Física del discontinuo. Según la hipótesis de Planck, la luz no se emite de una manera continua sino en pequeñas cantidades discretas, el quanto.

La idea de la discontinuidad de los cambios energéticos forman la base de la microfísica moderna.

Entonces se prevee una crisis de la Física Mecanicista, porque en el siglo pasado la Mecánica era la que había llegado en cierto modo a un punto de remate. La Química era incipiente y la Biología estaba en mantillas. Esta exploración exclusiva de la Mecánica a fenómenos de la naturaleza Química y Orgánica, en las que, aunque rigen las leyes mecánicas, estas pasan a segundo plano ante otras, superiores a ellas (Bioquímica), ésto constituía una de las limitaciones específicas pero inevitables de su época. La segunda limitación consistía en la incapacidad para concebir el mundo como un proceso, como una materia sujeta a desarrollo histórico. Después tuvieron lugar los grandes cambios, que mencionamos antes, y el Nuevo Mundo de la Física se hizo incompatible con el mecanicismo.

La sistemática de la Física Mecanicista, no pudo soportar la eficacia de los nuevos descubrimientos. La crisis tenía que conducir a la revolución. Y las dos grandes revoluciones, la Teoría Cuántica y la de la Relatividad, vinieron de donde se encontraban las dos pequeñas nubecilas de Lord Kelvin: la Ley de Rayleigh-Jeans y el resultado negativo del experimento de Michelson-Morley.

Finalmente las ideas actuales nos llevan a un mundo en interacción lleno de factores físicos, actuando en evolución creciente. En lo que se ha dado en llamar la dialéctica de la naturaleza. Aquí es donde entra la TGS en escena.

2.4 TEORIA GENERAL DE SISTEMAS

2.4.1 PARADIGMA CIENTIFICO

Todas las ideas que hemos visto en los avances científicos y tecnológicos durante la Historia, están encaminados hacia cambios de enfoque producidos por una concepción específica. Los cambios que hemos marcado han producido una conciencia nueva en el investigador y han provocado una sistematización en los métodos de estudio. Hemos propuesto estos hechos, debido a que sentimos que se están promoviendo actualmente estos cambios en la Ciencia y en la Tecnología. El foco de nuestra atención se establece en la TGS porque tiene las características que preveen la transformación de las bases de la investigación futura. La TGS se establece como una herramienta mental poderosa que enmarca y resuelve los problemas que se proponen en la actualidad. Esta Teoría busca unificar y englobar a las Ciencias a un grado máximo de generalidad.

Se trata, más que nada, de una invención en Ingeniería en el sentido más amplio del vocablo, requerido por la aparición de nuevos avances, como el de las computadoras, así como por las dificultades de la organización y la complejidad de los sistemas en la Tecnología moderna. En este sentido, la Teoría de Sistemas es ante todo un campo matemático que ofrece técnicas, en parte novedosas, y orientado más que nada al imperativo de vérselas con un nuevo tipo de problemas.

La TGS es una reorientación que se ha vuelto necesaria en la Ciencia en general, en toda la gama de disciplinas que va de la Física y la Biología hasta las Ciencias Sociales, interviniendo en varios dominios y anuncia una nueva visión del mundo que tendrá repercusiones considerables. A lo que tiende esta Teoría es a vencer la actual superespecialización, unificando y elaborando en serie, los modelos y simulaciones generales de distintos campos de la Ciencia reduciéndolos a uno solo. En un nivel de mayor generalidad esta nueva Ciencia señala el paralelismo entre principios cognoscitivos generales en diferentes campos, y representa la llegada de un nuevo paradigma, que involucra a todas las Ciencias y las interrelaciona objetivamente, de acuerdo a modelos generales.

Están ingresando en la esfera del pensamiento científico entidades de naturaleza esencialmente nueva. En sus diversas disciplinas -ya fuera en la Química, la Biología o las Ciencias Sociales-, la Ciencia clásica procuraba aislar los elementos del universo observado -moléculas y átomos, enzimas, células, sensaciones elementales, etc.-, con la esperanza de que al volverlos a juntar (conceptual o experimentalmente) resultaría el sistema o totalidad -compuesto, organismo, mente-, y sería inteligible. Ahora hemos aprendido que para comprender no se requieren sólo los elementos sino las *relaciones* entre ellos o sea la interacción o los procesos, la estructura y la dinámica de los sistemas. Esto requiere la exploración de los numerosos sistemas de nuestro universo observado, con sus especificidades. Por añadidura, aparecen aspectos generales comunes a los 'sistemas'. Este es el dominio de la TGS; de hecho, tales aspectos generales comunes o isomorfismos aparecen inesperadamente en sistemas del todo distintos. De esta manera, la TGS es la exploración científica de 'todos' y 'totalidades' que no hace tanto se consideraban nociones metafísicas que salían de los lindes de la Ciencia.

Para la comprensión clara de lo que se pretende, requerimos conocer la Filosofía de los Sistemas, la reorientación del pensamiento y la visión del mundo resultante de la introducción del 'sistema' como nuevo paradigma científico, en contraste con los paradigmas analítico, mecanicista, unidireccionalmente causal, de la Ciencia clásica. Este cambio de visión se debe a que los problemas planteados y el tiempo de solución se exigen actualmente con un nivel de mayor eficiencia, siendo que la actual tecnología y la sociedad moderna se han vuelto tan complejas que los caminos y medios tradicionales no son ya suficientes, y se imponen actitudes de naturaleza holista, o de Sistemas, y generalista, o interdisciplinaria.

Lo que pretendemos en esta tesis, no es elaborar la TGS que en el punto en que nos encontramos en nuestros días, ya ha sido bien desarrollada a través de 30 años de evolución, investigación y avances tecnológicos. Nosotros sólo queremos hacer extensiva esta Teoría a un campo nuevo por desarrollar, ya que, a pesar de que existen ciertos conceptos que tienden a hacer propicias estas ideas, solamente existen de forma implícita y mediante enunciados muy vagos.

2.4.2 EVOLUCION Y DEFINICION DE LA TGS

Cada especialista en las diversas ramas de la Ingeniería, hace algún tiempo, sólo resolvería los problemas propuestos por su especialidad. Sin embargo, actualmente la Tecnología no piensa en términos de máquinas sueltas, sino en Sistemas. Esto se debe a la infraestructura actual, con la cual el hombre de Ciencia o de Ingeniería se las tiene que ver, de esta manera se plantean problemas de lanzamiento de proyectiles espaciales, elaboración de computadoras, problemas de tránsito, etc. y su solución depende de la aplicación heterogénea de conocimientos, siendo necesario, un enfoque de Sistemas.

De una u otra manera estamos forzados a vérnoslas con complejidades, totalidades o Sistemas, en todos los campos del conocimiento. Esto implica una fundamental reorientación del pensamiento científico.

Está siendo forjada una nueva visión del mundo, pero serán precisos mucha experiencia y controversia antes de que adquiera forma definitiva. Tendría que ser coherente, que esclarecer el nuevo conocimiento de las partículas fundamentales y sus complejos campos, que resolver la paradoja de la onda y la partícula, y deberá ser igualmente inteligibles el mundo interior del átomo y los más vastos espacios del universo. Deberá tener una visión distinta de todas las visiones del mundo previas; pero con ello se acoplarán naturalmente a las tendencias convergentes de las Ciencias Exactas a las Ciencias Biológicas, Económicas y Sociales.

Así como la Geofísica, la Biología se ha desarrollado especializándose en diversas ramas como la Genética, la Fisiología, etc., pero se está buscando un nuevo orden que analice en forma total a los seres vivos, es decir, de un modo organísmico fundamentado en los sistemas abiertos que se basan en principios físicos aplicados a los cuerpos vivos (Teoría Cinética de los Gases, Fisicoquímica, etc.). Quedó de manifiesto entonces otra generalización. En muchos fenómenos biológicos, pero también de las Ciencias Sociales y del Comportamiento, resultan aplicables expresiones y modelos matemáticos comunes. La similitud estructural entre modelos en diferentes campos es notoria. También es de causar asombro, cómo el mismo modelo con variables y factores totalmente distintos y producto de diferentes fenómenos se adaptan a la realidad. Tal es la idea de la TGS.

Cuando surgió la TGS fue tachada de fantástica y presuntuosa y fue recibida con incredulidad. Gradualmente fue viéndose que prosperaban las ideas de la TGS por lo que se intentó aplicar en campos donde antes no se había hecho, así como dar mayor generalidad en las que ya se había aplicado. La TGS responde a una secreta tendencia en varias disciplinas. Así, Boulding le dice a Bertalanffy que ha llegado a la misma conclusión que él, partiendo del rumbo de la Economía y las Ciencias Sociales, y no de la Biología.

2.4.3 EPISTEMOLOGIA DE SISTEMAS

Para la TGS los sistemas son conjuntos o metaconjuntos, como los sistemas conceptuales de la Lógica, la Matemática, etc. El mundo real que tratamos de reconstruir, a través de cuantificaciones y modelos ideales, no se trata de objetos de percepción u observación directa; son construcciones conceptuales. Lo mismo pasa hasta con los objetos de nuestro mundo cotidiano, que en modo alguno son sencillamente datos, como datos sensoriales o simples percepciones, sino que en realidad están construidos con innumerables factores mentales que van desde los procesos de aprendizaje hasta los factores culturales que determinan en gran medida lo que de hecho vemos. Así, la distinción entre objetos y sistemas reales dados en la observación, y construcciones y sistemas conceptuales, es imposible de establecer sin más que el sentido común. Uno de los casos más palpables es el de la naturaleza de la materia, que depende del contexto del problema para su solución. Los conceptos son imágenes mentales dentro de un cúmulo de ideas adaptadas a la realidad, con condiciones específicas para nuestro interés.

Lo mismo sucede con los sistemas conceptuales como las Matemáticas, en el nivel de las aproximaciones en nuestra imposibilidad de conocer la verdad última. Además, la percepción no es una reflexión de cosas reales, ni el conocimiento una mera aproximación a la verdad. Es una interacción entre sujeto y objeto, dependiente de múltiples factores de toda naturaleza. Teorías como la de la Relatividad o la de la Física Cuántica nos revelan el hecho de que la Naturaleza está constituída por contraposición de fuerzas, mediante factores interactuantes que forman en conjunto una entidad, un todo en evolución constante promoviendo cambios de estado continua y discretamente.

Entonces, la realidad no es otra cosa que una jerarquía de totalidades organizadas, sin embargo, para cada observador, cada hombre interesado en un sistema está sometido al cuadro interactuante, pertenece a él y lo modifica por su acción, y por tal motivo la imagen del hombre diferirá de la que le otorgue un mundo de partículas físicas gobernadas por el azar, como realidad última y sola verdadera.

Los supuestos básicos de nuestras tradiciones y las persistentes implicaciones del lenguaje que usamos, casi nos obligan a abordar todo lo que estudiamos como si estuviera compuesto de partes o factores separados, discretos, que debemos tratar de aislar e identificar como causas. De ahí derivamos nuestra preocupación por el estudio de la relación entre dos variables. Somos hoy testigos de una nueva búsqueda de nuevos enfoques, de conceptos nuevos y más amplios, y de métodos capaces de vérselas con grandes conjuntos de organismos y personalidades.

2.4.3.1 SOLUCION DE PROBLEMAS USANDO LA TGS

El problema de los sistemas es esencialmente el problema de las limitaciones de los procedimientos analíticos en la ciencia, en otras palabras, "el todo es más que la suma de sus partes", que tiene un sentido operacional claro. 'Proceder análitico' quiere decir que una entidad investigada es resuelta en partes unidas, a partir de las cuales puede, por tanto, ser reconstituido. Es éste el principio básico de la Ciencia Clásica; resolución en encadenamientos causales aislables, búsqueda de unidades 'atómicas' en los varios campos de la Ciencia. El progreso ha demostrado que estos principios clásicos, que Galileo y Descartes fueron los primeros en anunciar, tienen éxito espléndido en muchos tipos de fenómenos.

La aplicación del procedimiento analítico depende de dos condiciones: la primera es que no existan interacciones entre partes o que sean tan débiles que puedan dejarse a un lado. Sólo con esta condición es posible deslindar las partes real, lógica y matemáticamente y luego volverlas a juntar. La segunda condición es que las relaciones que describen el comportamiento de las partes sean lineales, sólo entonces queda satisfecha la condición de aditividad, o sea, los procesos parciales pueden ser superpuestos para obtener el proceso total.

Semejantes condiciones no las cumplen las entidades llamadas sistemas, o sea consistentes en partes en interacción. El prototipo de su descripción es un conjunto de ecuaciones diferenciales simultáneas, que en el caso general son no lineales. El problema metodológico de la TGS es vérsela con cuestiones que, comparadas con las analítico-aditivas de la Ciencia Clásica, son de naturaleza más general.

2.4.3.2 OBJETIVOS Y METAS

Hemos llegado a considerar, pues, como trivial el hecho de que existan modelos, principios y leyes aplicables a sistemas generalizados o a sus subclases, sin importar su particular género, la naturaleza de sus elementos componentes y las relaciones supuestas que imperan entre ellos. Ahora nos toca a los interesados en este enfoque, procurar una teoría no ya de sistemas de clases especiales, sino de principios universales aplicables a los sistemas en general. Podemos buscar principios aplicables en forma general si definimos bien el sistema, y no sólo principios sino modelos y leyes. La consecuencia de la existencia de estas propiedades generales es la aparición de isomorfismos en diferentes campos. En muchas ciencias fueron descubiertos principios idénticos, porque quienes trabajaban en un territorio no se percataban de que la estructura teórica requerida estaba ya adelantada en otro campo.

Por ello la TGS ha definido los siguientes objetivos:

1) Investigar el isomorfismo de conceptos, leyes y modelos en distintos campos y fomentar provechosas transferencias de un campo a otro.

2) Desarrollar modelos teóricos adecuados en los campos que carecen de ellos.

3) Minimizar la repetición de esfuerzo teórico en diferentes campos.

4) Promover la unidad de la Ciencia y la comunicación interdisciplinaria de las diferentes teorías.

La TGS en forma elaborada pretende ser una disciplina lógico-matemática, puramente formal en sí misma pero aplicable a las varias ciencias empíricas.

Esto pone de manifiesto las metas principales de la TGS:

1) Tendencia general hacia la integración de las disciplinas científicas.

2) Ser un recurso importante para buscar una teoría exacta en los campos no físicos de la Ciencia.

3) Elaborar principios unificadores que corran verticalmente por el universo de las ciencias, es decir, acercarse a la unidad de la Ciencia.

4) Formativa en la instrucción científica y tecnológica para conducir a la integración.

2.4.4 LA BUSQUEDA DE LA UNIDAD

La teoría que envuelve nuestro tema central es una teoría de implicaciones generales, interdisciplinaria, y que tiene una función integradora. Hasta nuestros días se ha considerado que la unificación de la Ciencia está ligada a la reducción de todas las ciencias a la Física, como resolución final de todos los fenómenos en acontecimientos físicos. Desde el punto de vista de la TGS, la unidad de la Ciencia adquiere un aspecto más realista. Una concepción unitaria del mundo puede basarse no ya en la esperanza de reducir todos los niveles de la realidad al de la Física, sino mejor, en el isomorfismo de las leyes de diferentes campos. Hablando de lo que se ha llamado el modo formal, esto significa uniformidad estructural en los esquemas que se están aplicando. El modo material, significa que el mundo, la totalidad de los acontecimientos observables, exhibe uniformidades estructurales que se manifiestan por isomorfismos de orden en los diferentes niveles o ámbitos. El principio unificador es que encontramos organización en todos los niveles. Llegamos a una concepción que en contraste con el reduccionismo, podemos denominar perspectismo.

Este enfoque promueve la investigación de investigadores generalistas de las ciencias. En el artículo "The education of scientific generalists" escrito por Bode en 1949, se manifiesta la necesidad de este enfoque: "Oímos con frecuencia que un hombre no puede ya cubrir un campo suficientemente amplio y que hay demasiada especialización limitada. Es necesario un enfoque más sencillo y unificado de los problemas científicos... en una palabra, necesitamos generalistas científicos" .

Todo grupo científico necesita de un generalista, trátese de una universidad, institución o industria. En un grupo de ingeniería al generalista le incumbirían naturalmente los problemas de sistemas.

Las exigencias educativas son de generalistas científicos y deben promover y exponer los principios básicos interdisciplinarios. No se trata de un simple programa, ni de ideales utópicos de estudiantes, ya que se está alzando una estructura teórica así en nuestros días, la TGS.

Resumiendo los principales resultados de la unidad buscada:

a) El análisis de los principios generales de los sistemas muestran que muchos conceptos que han sido tenidos por antropomórficos, metafísicos o vitalistas son susceptibles de formulación exacta. Son consecuencias de la definición de sistemas o de determinadas condiciones de sistemas.

b) Una investigación con este enfoque es muy útil para resolver problemas de la Ciencia o la Ingeniería. En particular, conduce a la clasificación de cuestiones que no son tenidas en cuenta en los esquemas de los campos especializados. O sea, que la TGS será un recurso importante en el desarrollo de nuevas ramas del conocimiento a la categoría de Ciencias Exactas.

c) Esta investigación es igualmente importante para la Filosofía de la Ciencia, algunos de cuyos principales problemas adquieren respuestas nuevas.

d) La TGS explica además el por qué de leyes, principios y modelos isomorfos aparecen en distintas ciencias.

Estas consideraciones tienen trascendencia con respecto a la cuestión de la unidad de la Ciencia. La unidad en la Ciencia está garantizada por el hecho de que todos los enunciados pueden, a fin de cuentas, ser expresados en un lenguaje matemático, formulado en forma de modelos isomorfos.

La realidad, como la concibe la TGS, se presenta como un orden jerárquico de entidades organizadas que va en superposición de numerosos niveles, de los sistemas físicos a los sociales. La unidad de la Ciencia no es asegurada por una utópica reducción de todas las ciencias a la Física, sino por las uniformidades estructurales entre los diferentes niveles de la realidad. La elaboración precedente de la TGS demostrará ser un paso de consideración hacia la unificación de la Ciencia.

2.4.5 PROGRESOS DE LA TGS

Los progresos de la TGS se remiten al subtema de los métodos de investigación, donde aparecen disciplinas tales como la Cibernética, la Teoría de la Información, la Teoría de los Juegos, etc.

Ya en la Teoría Organísmica de la Biología se ven progresos con la llamada Teoría de los Sistemas Abiertos y los Estados Uniformes, que es, resumidamente, una expansión de la Fisicoquímica, la Cinética y la Termodinámica ordinarias.

La TGS tiene como rama de Ciencia Aplicada, la llamada Ingeniería de Sistemas, la Investigación de Operaciones, la Ingeniería Humana, etc.

Ultimamente se está fomentando la esperanza de una mayor síntesis, que integre y unifique los varios enfoques presentes hacia una Teoría de la Totalidad y la Organización. En realidad, tales síntesis están siendo elaboradas poco a poco en el área de la Termodinámica Irreversible y la Teoría dela Información.

La cuestión decisiva es la del poder explicativo y predictivo de las nuevas Teorías que atacan el cúmulo de problemas en torno a la Totalidad y Teleología. El cambio de clima intelectual que le deja a uno ver problemas nuevos, pasados por alto antes, o ver problemas bajo otra luz, vale en un sentido más por sí mismo que ninguna aplicación especial. Así, la revolución de Copérnico fue más que la posibilidad de calcular algo mejor el movimiento de los planetas, la Relatividad algo más que la explicación de algunos fenómenos físicos, lo que contó fueron los cambios en el marco general de referencia. Con todo, la justificación de semejante cambio reside a fin de cuentas en logros específicos que no se hubieran obtenido sin la teoría nueva.

2.4.6 TGS EN GEOFISICA

Los problemas que se han resuelto en una disciplina específica, a menudo, han invadido otras ciencias y se han establecido como propios de ellas; tal es el caso de los conceptos de circuito, conexiones en serie y en paralelo, información, retroalimentación, estabilidad, etc. han ido mucho más allá de las especializaciones, y tienen naturaleza interdisciplinaria, resultando independientes de sus concreciones especiales, según lo muestran modelos isomorfos, por ejemplo de retroalimentación en sistemas mecánicos, hidrodinámicos, eléctricos, biológicos, etc.

Del mismo modo queremos proponer el empleo de nuevos modelos en Geofísica para que se enriquezca de nuevas disciplinas, así como la aplicación de sus modelos en otras ciencias, a fin de enriquecer a éstas.

De esta manera hemos inferido que es posible adaptar la estructura de la Geofísica a otros modelos, tal es el caso de la Teoría de Filtros Digitales que se ha desarrollado en Electrónica y en la Ingeniería de Comunicaciones preponderantemente y ha contribuido a la evolución de la Geofísica, así mismo la Geofísica se ha consolidado firmemente en el Análisis de Señales y tiene un rico aparato matemático en el procesamiento de datos que puede hacerse extensivo a muchas disciplinas (Medicina, Astrofísica, Economía, etc.).

La siguiente sección estará dedicada al análisis de los isomorfismos encontrados en la Geofísica, y su aplicación práctica.

2.5 TEORIA DE CRIPTOSISTEMAS

2.5.1 INTRODUCCION

Esta sección y la siguiente (así como todo el Capítulo III) está dedicada al estudio de los isomorfismos que encontramos a nivel de los modelos matemáticos que describen los fenómenos naturales (y culturales), en particular aquellos con los que se enfrenta el geofísico. Gracias a dichos isomorfismos podemos considerar ciertas las palabras de Leibniz: "de cualquier modo que hubiera creado Dios el mundo, habría sido siempre de una manera regular y con un cierto orden general. Pero Dios ha escogido el más perfecto, es decir, el que al mismo tiempo es más sencillo en hipótesis y más rico en fenómenos" [85]. Así, con pocas hipótesis y pocos modelos matemáticos podemos explicar una gran diversidad de fenómenos. Veremos algunas de dichas hipótesis básicas y algunos modelos matemáticos, así como isomorfismos en los conceptos y técnicas empleados en las disciplinas geofísicas, y que pueden englobarse en lo que hemos denominado: 'Teoría de Criptosistemas' y 'Teoría de Campos Generalizada' (TC y TCG respectivamente).

2.5.2. DEFINICION DE CRIPTOSISTEMA

Un Criptosistema puede definirse de la siguiente manera:

Sean S_e y S_s dos conjuntos de funciones tales que exista una regla de correspondencia T (o familia de reglas) que asigne a cada función $f_e \varepsilon S_e$ una función $f_s \varepsilon S_s$, $T: f_e \to f_s$. Se dice que la terna (T, f_s, f_e) es un criptosistema si:

1) T es desconocida; f_e y f_s conocidas.

2) f_e y T desconocidas; f_s conocida (es el caso más común en Geofísica).

3) f_s y T desconocidas; f_e conocida.

4) f_e y/o f_s desconocidas; T conocida.

Como podemos observar, no importa si los sistemas son o no lineales, discretos o continuos, etc. Sólo interesa que parte de la terna sea desconocida. Otra característica, que podemos adicionar a nuestro modelo de criptosistema, es la presencia de 'ruido', es decir, funciones que no suministran información sino que, más bien, la ocultan o la deforman, y en un caso extremo, destruyen parte de esa información. Esta situación la podemos representar como sigue

Donde hemos empleado T^k para representar al modelo k-ésimo (de la infinidad de modelos válidos que pueden representar al sistema (principio metafísico sexto)).

También podemos representar esa situación mediante un modelo convolucional, de la siguiente forma:

$$S_k = T_n E_{k-n} + R_k \qquad (2.7)$$

Donde S_k es el conjunto de funciones de salida, E_k es el conjunto de funciones de entrada T_n es el conjunto de funciones que representan al sistema y R_k es el conjunto de funciones que representan el ruido, y la ecuación 2.7 expresa así un modelo de un criptosistema que puede ser empleado en numerosas disciplinas científicas, como ya lo es de hecho por el método de reflexión sísmica, las comunicaciones, el análisis del habla, etc.

2.5.3 PRINCIPIOS BASICOS

La idea clave de un criptosistema es que existe información 'oculta' de interés que no es observable en forma directa. Esa información debe deducirse y obtenerse por métodos indirectos y, generalmente, gracias a la existencia de un contraste de propiedades entre la información deseada y el medio que la oculta. El contraste se puede provocar o puede ser natural, y para su descripción matemática es muy útil la teoría de campos que mencionaremos en la sección 2.4.8. La existencia de contraste (o, en la terminología geofísica, la 'anomalía') es una limitante universal que se impone a las disciplinas criptosistémicas, y, en última instancia, a todos los seres vivos (y a los instrumentos creados por el hombre), pues no se puede percibir nada que sea totalmente uniforme y homogéneo en su naturaleza con su medio (entonces 'es' tal medio). Sólo se puede percibir aquello que presenta alguna variación en el tiempo y el espacio; pero esa discontinuidad o contraste debe percibirse como un todo remitiéndonos de nuevo a la categoría de simetría y todas las consideraciones que sobre ella hicimos en la sección 1.4. En cierta forma, la discontinuidad debe formar un pattern, una región que difiera suficientemente de su medio en alguna propiedad de forma tal que pueda distinguirse y percibirse como una unidad [86]. La tendencia psicológica del hombre de reconocer (o crear) orden es la base de toda disciplina criptosistémica [87].

En Geofísica los contrastes no sólo son la base de la investigación sino que definen los distintos métodos: variaciones en las propiedades elásticas de las rocas en la Sísmica, variaciones en la conductividad eléctrica y en las corrientes naturales de la tierra, las tasas de decaimiento de las diferencias de potencial artificiales en la Eléctrica, cambios o variaciones en el campo gravitacional de la tierra, cambios locales de magnetismo o radioctividad; en la percepción remota se buscan variaciones locales de reflectancia o emitancia. En la Medicina, los sistemas de imágenes de resonancia magnética se basan en variaciones locales del tiempo de relajación, la densidad y el flujo de protones; la radiografía y la tomografía axial computarizada se basan en las variaciones de densidad (y por lo tanto la absorción de la radiación) del cuerpo humano; la electroforesis en la variación de las proteinas plásmicas en cantidad y calidad; la electroencefalografía y la electrocardiografía en las variaciones de la actividad eléctrica del cerebro y del corazón, respectivamente; en la Astrofísica se buscan las variaciones de las radiaciones estelares; en la tomografía de emisión de positrones en las variaciones de la tasa de asimilación de azúcar; la Termografía en las variaciones térmicas locales del cuerpo; la Ultrasonografía, en las variaciones de densidad y de reflexión de ultrasonido. Y así, podríamos analizar cada disciplina criptosistémica en base al tipo de contraste que busca y analiza. [88]

Para la detección u obtención e interpretación de la información oculta, nosotros nos basaremos en los principios metafísicos que establecimos en la sección 2.2.4.4: en primer lugar, suponemos la existencia de tal información oculta y la validez de las leyes científicas dentro del medio en estudio (principios tercero y cuarto). En segundo lugar, en la elección de nuestro modelo nos basaremos en el principio quinto, y, por último, siempre debemos tener en cuenta las limitaciones de nuestros modelos (principio sexto) sobre todo en la etapa de interpretación de los mismos.

2.5.4. NIVELES DE INVESTIGACION

Para la obtención de la información oculta, generalmente debe procesarse la información obtenida mediante observaciones indirectas, y, por último, interpretarse. Existen, así, tres niveles de investigación para mejorar la determinación de nuestras incógnitas:

El primer nivel, que consiste en la adquisición de la información disponible, depende directamente de la tecnología, mejorando cuando se perfeccionan los instrumentos de medición u observación. Así, en el caso de la Medicina, cuando se desarrollan ténicas nuevas o mejores tales como la Ultrasonografía, la Tomografía axial computarizada, la Resonancia magnética nuclear, etc. En la Geofísica cuando se desarrollan nuevos sismógrafos, magnetómetros, gravímetros, etc. o cuando se mejoran los existentes. En este nivel, la transferencia de un campo a otro se basa casi en su totalidad en la transferencia tecnológica (fabricantes de equipo, ingenieros electrónicos, etc.).

El segundo nivel, el de procesamiento de la información obtenida depende de la tecnología en menor grado (aunque sigue dependiendo en gran manera: recuérdese la revolución digital en la prospección sísmica, posible gracias al desarrollo de las cintas magnéticas y las computadoras) y más del aparato matemático. Aquí es posible gran cantidad de transferencia de técnicas de un campo a otro, pues son isomorfos en gran medida. El Capítulo III es una revisión, precisamente de algunas de esas herramientas matemáticas que pueden aplicarse a los criptosistemas.

El tercer nivel, el de interpretación, es el nivel clave pues el objetivo de deducir la información 'oculta' a partir de la información disponible aquí es patente, y, por ende, es evidente la naturaleza criptosistémica del problema. Aquí también es posible gran cantidad de transferencia de modelos y técnicas de un campo a otro. Para mayor claridad mencionaremos solamente algunas ideas sobre algunos aspectos generales de los niveles de investigación segundo y tercero: como mencionamos antes la información de que disponemos se encuentra 'enmascarada' por 'ruido', así que una gran parte del esfuerzo de investigación de criptosistemas consiste en la búsqueda de métodos de eliminación de ese ruido. Por ejemplo, el exitoso método de deconvolución predictiva empleado en la prospección del petróleo en el mar, para eliminar la reverberación. Además de la eliminación del ruido deben realizarse 'correcciones' a las mediciones para aproximarse al modelo teórico empleado (en realidad, las correcciones deben hacerse al modelo para que se aproxime a las mediciones efectuadas), es el caso de las correcciones topográficas en Gravimetría, Magnetometría, Eléctrica y Sísmica, el uso de filtros, etc. Existen, además, técnicas para realzar o mejorar la información deseada, por ejemplo, el método de segunda derivada en Gravimetría y Magnetometría, etc. Todas estas técnicas son isomórficas con el procesamiento genérico de imágenes [89].

Los datos obtenidos (la medición de potenciales biomédicos, la gravedad, el magnetismo, contenido fósil de una formación, composición litológica, y otros más) pueden representarse como variaciones sobre curvas, áreas e incluso hipersuperficies. Estas variaciones son importantes ya que de ellas se puede obtener la información oculta de interés. El término tendencia se usa para designar cualquier cambio sistemático notable en las representaciones de las variaciones, tales como tendencias estructurales, de variación de gravedad, de variación de velocidades sísmicas y otras más. Se ha desarrollado todo un aparato matemático de análisis de tendencias cuyo principal procedimiento consiste en separar la representación en dos o más partes, una asociada a cambios sistemáticos de gran escala (el regional); otra asociada a fluctuaciones de pequeña escala, sistemáticas en apariencia, que se sobreponen a los patrones de gran escala y que generalmente representan las zonas de contraste y por lo tanto de interés (el residual), y quizá en otra parte más, asociada al 'ruido' presente en la representación. Matemáticamente, el efecto de calcular un regional a partir de un grupo de datos, para dejar el residual, es equivalente al efecto de un filtro eléctrico, el cual pasará las componentes de ciertas frecuencias y excluirá las restantes. Y así, las sofisticadas técnicas de análisis para campos (analizadas en el Capítulo III) corresponden a operaciones de filtrado lineal, originalmente desarrollados en la Electrónica, la Electricidad y las Comunicaciones. Aquí es obvia la gran cantidad de transferencia de información de una disciplina a otra.

Básicamente, la interpretación consiste en construir un modelo de la realidad a partir de nuestra teoría de campos que sea compatible con las observaciones indirectas efectuadas (problema inverso). Dicho modelo no es único debido al principio metafísico sexto, y debe construirse según los lineamientos del principio quinto. Orellana menciona, por ejemplo, el principio de equivalencia y de supresión (consecuencias del principio sexto) como limitantes de la interpretación de sondeos eléctricos, lo mismo podemos decir para otras técnicas criptosistémicas. [90]

En la interpretación se construyen modelos y se calculan matemáticamente sus efectos; estos efectos se comparan con los datos adquiridos en el campo o en el laboratorio, es decir, se busca que sean análogos. Esto es posible, como ya vimos en la sección 1.3, al isomorfismo. En Prospección Eléctrica, por ejemplo, se calculan curvas de resistividad y se comparan con las obtenidas mediante las mediciones de campo. En Cristalografía (ya sea para identificar un mineral o la composición de una biomolécula) se comparan sus espectros con espectros patrón. Y así en las demás técnicas criptosistémicas. Actualmente se usan métodos de comparación por computadora, aunque en algunos casos complejos, como en los métodos electromagnéticos, se construyen modelos físicos, en vez de matemáticos, pero la idea sigue siendo la misma. Una técnica matemática que preveemos será de gran utilidad e importancia en la teoría de criptosistemas, sobre todo en el análisis de los datos, es la morfología matemática, nacida en 1964 bajo el impulso de Georges Matheron y Juan Serra [91].

2.5.5. JUSTIFICACION DE LA TEORIA DE CRIPTOSISTEMAS

Para comprender la necesidad de una teoría especial dedicada al estudio de los criptosistemas, podemos citar como ejemplo análogo la necesidad de una teoría dedicada al estudio de sistemas abiertos. Como ésta, la teoría de criptosistemas constituye "un principio unificador capaz de combinar fenómenos diversos y heterogéneos bajo el mismo concepto general" [92]. Hemos visto que la simetría es el concepto fundamental de la Ciencia, ahora bien, en la teoría de criptosistemas nos encontramos con un nuevo tipo de simetría: al pasar de una disciplina científica a otra ('transformación' científica) se 'conservan' ecuaciones, principios, modelos y métodos. De esta forma aumentamos la unidad que busca la Ciencia y esto es gracias al isomorfismo existente entre los distintos modelos científicos. Veremos a continuación dos ejemplos de cómo se pueden emplear estas reglas o principios de conservación gracias al isomorfismo entre distintas disciplinas científicas. Los casos que presentaremos se tratan del paso de técnicas de la Geofísica a la BioMedicina, y viceversa, donde es muy claro el carácter criptosistémico de los problemas y sus naturalezas isomórficas con otros problemas: partiendo de la analogía entre los sistemas de imágenes de resonancia magnética y de percepción remota, en el artículo "Multispectral Analysis of Magnetic Resonance Images" [93] se analiza la posibilidad de emplear los sistemas de procesado de imágenes desarrollados por la NASA (para imágenes de Satélite) en el análisis de imágenes de resonancia magnéti ca (empleados en Medicina). Aquí es clara la ventaja del enfoque criptosistémico, en cuanto a la transferencia de técnicas de un dominio (percepción remota) a otro (Medicina), pues, "la tecnología de procesamiento de imágenes de Satélite se puede adaptar a las imágenes médicas con un menor esfuerzo que el requerido para un desarrollo independiente. La sofisticación del hardware y software de computadora es suficiente para que un usuario que no conozca los detalles técnicos o la programación pueda analizar datos muy complejos con relativa facilidad.....la correspondencia entre las imágenes de resonancia magnética y las imágenes de Satélite multiespectrales es sorprendentemente cercana....demostrando que las técnicas de procesamiento de imágenes de Satélite pueden usarse con los datos de imágenes de resonancia magnética sin reprogramar los sistemas de computación para Satélite simplemente poniendo los datos de imagenes de resonancia magnética en una cinta magnética digital en un formato que pudiera leerse directamente....lo contrario de esto es probablemente cierto: la operación del software de computadora de procesamiento de imágenes de Satélite sobre un scanner de resonancia magnética se puede realizar con un esfuerzo menor que el requerido para producir originalmente los programas....el hallazgo más importante de este estudio surgió del análisis de unas imágenes de resonancia magnética de la cabeza. No se le dio en absoluto información a la computadora de cualquier parte de la imagen para una correcta clasificación....en menos de cinco minutos la computadora había computado el mapa de clasificación para cada una de las imágenes de resonancia magnética. El hallazgo más importante fué la correspondencia entre el resultado de la claisificación no supervisada y la evaluación subjetiva de los componentes de tejido....sin información previa la computadora fue capaz de separar el parénquima cerebral del hematoma, la piel del hueso, la grasa del aire y el CSF de sus contornos" [94]. Este artículo justifica plenamente nuestra propuesta del empleo de la Teoría de Criptosistemas, constituye así la prueba popperiana que mencionamos en la sección 2.2.4.3. La segunda prueba la encontramos en otro artículo (que es otra clara demostración de la utilidad del enfoque que proponemos), donde se menciona el paso de una técnica médica al campo de la Geofísica: la Tomografía Sísmica, que surge de la adaptación de la Tomografía axial computarizada a la tierra. "Como su análoga médica, la TAC, la Tomografía Sísmica combina la información procedente de gran número de ondas que se entrecruzan para construir imágenes tridimensionales del medio que los rayos han atravesado....la técnica analítica de ambas viene a coincidir" [95].

Otro ejemplo del enfoque de los criptosistemas, es precisamente el hecho de que varios de los dispositivos usados actualmente por los geofísicos se desarrollaron originalmente de los métodos usados para localizar cañones, submarinos y aviones durante las dos guerras mundiales.

Sintetizando las ventajas del enfoque de la TC tenemos:

a) La transferencia de técnicas, modelos y aún de paquetes de programas de computadora ya elaborados, de una disciplina a otra (como en los dos ejemplos arriba mencionados), lo cual lleva a una minimización de la repetición de esfuerzos en diferentes campos y facilitando el desarrollo de conceptos, leyes, modelos y técnicas en los campos que carecen de ellos.

b) Ayuda a la tendencia general hacia la integración de las disciplinas científicas, al descubrir los isomorfismos existentes en los modelos de distintos campos de la Ciencia, manifestando la unidad de la Ciencia.

c) Desarrollo de perspectivas globalizadoras y multidisciplinarias para la solución de problemas. Por ejemplo, los sistemas expertos (programas que reproducen la gestión de un experto humano frente a un problema de su competencia) trabajan sobre un modelo general, pudiendo aplciarse a la prospección minera lo mismo que al diagnóstico médico: "el sistema EMYCIN, concebido al principio para el diagnóstico de las enfermedades infecciosas, ha podido ser utilizado en diversos contextos....la Schlumberger lo aplica al análisis de registros geofísicos de pozos" [96]. Otro ejemplo de la perspectiva globalizadora lo consiste en todas las técnicas de 'pattern recognition', fundamental a la teoría de criptosistemas.

Para finalizar esta sección, mencionaremos algunos de los fenómenos susceptibles de ser estudiados con la TC: la tierra (Geofísica, Geología), el cuerpo humano (Medicina), los seres vivos (Biofísica, Bioquímica), los astros (Astrofísica), los compuestos químicos, el átomo y las partículas subatómicas (Cromatografía, Espectroscopía, Difracción, etc.), los criptogramas [97], la inteligencia (cf. la máquina de Turing), la sociedad (cf. 'Macrotendencias' y 'Análisis de contenido' de John Naisbitt [98]), etc.

2.6 TEORIA DE CAMPOS GENERALIZADA

2.6.1 INTRODUCCION

La Teoría de campos generalizada es una herramienta matemática muy poderosa que, como mencionamos antes, puede aplicarse a la Teoría de Criptosistemas debido a que es ideal para la construcción de los modelos matemáticos de los fenómenos criptosistémicos. No debe confundirse la TCG con la Teoría de campos unificada que buscaba Einstein, la TCG es más bien una formulación práctica, ingenieril, de forma que siguen caminos un tanto distintos de la Física teórica, aunque puede buscarse un mapeo entre ambas teorías (por ejemplo, gracias a los conceptos de Aplicación, Analogía y Simetría) igual que la Mecánica Cuántica lo hizo gracias al Hamiltoniano y a la ecuación de onda.

La TCG es, como su nombre lo implica, una generalización de la Teoría de campos. La generalización consiste básicamente en tres ideas esenciales, las cuales serán analizadas en los siguientes apartados: la primera idea es una definición generalizada de lo que es un campo; la segunda, la generalización de los operadores y los conceptos empleados en la descripción de los campos, y la última, es la introducción de nuevos operadores generalizados.

2.6.2 DEFINICION DE CAMPO

La Teoría de Campos identifica la idea de campo con 'campo físico'. La TCG, en cambio, generaliza la idea de campo (considerado sólo como un modelo matemático) de forma tal que abarque cualquier tipo de fenómenos, pudiéndose hablar de 'campos' económicos, sicológicos, etc. Con la ventaja de transferir todo el aparato matemático desarrollado en la Física y la Física matemática a otras disciplinas.

Podríamos definir un campo como una aplicación de un conjunto de entes matemáticos en un espacio (en el sentido abstracto dado en la sección 1.2). Dichos entes pueden ser análogos de propiedades cuantitativas y el espacio puede ser análogo del espacio físico, pero no necesariamente. Las propiedades de interés se representan mediante entes abstractos llamados tensores, y estar asociadas a cada punto del espacio (métrico o no) que representa el espacio en estudio (no necesariamente el espacio físico). La elección del tipo de tensor radica en el número de características (números) de la propiedad que son necesarias para representarla: así, en un espacio tridimensional, para representar completamente una propiedad como la temperatura o la presión se necesita sólamente un número (y su unidad correspondiente), mediante el cual queda perfectamente definida, en cambio, hay propiedades como la velocidad, la aceleración o la fuerza, que requieren de un mínimo de tres cantidades, u otras como la deformación que precisan de nueve números. La cantidad de números necesarios corresponden a una serie: 3^0, 3^1, 3^2, ...en un espacio tridimensional. Si el espacio fuera n-dimensional, se hubieran requerido: n^o, n^1, n^2, ... respectivamente para definir esas propiedades. Por ello, a las magnitudes del primer tipo se les denomina tensores de orden cero (escalares); a las del segundo tipo, tensores de orden 1 (vectores); a las del tercer tipo, tensores de orden dos (afinores), etc.

Como vimos en la sección 1.4, al formular los conceptos básicos y los teoremas concernientes a fenómenos naturales, es deseable enunciarlos en una forma invariante, es decir independientes del sistema escogido, el cual meramente proporciona un lenguaje para la descripción de las ideas. Así, en la Teoría de campos el énfasis está puesto en las propiedades invariantes de las funciones tensoriales. Más aún, la esencia de esos entes matemáticos, reside en la invariancia ante una transformación de coordenadas, es decir, sus propiedades son inalterables y no dependen de la representación coordenada que elijamos. El espacio no necesariamente es continuo, podemos tener espacios discretos. Dependiendo del conjunto numérico que asociemos a los puntos del espacio podemos tener, por ejemplo, espacios asociados a números naturales, enteros, reales o complejos, etc.

Un ejemplo interesante de aplicación de la generalización de la Teoría de campos lo tenemos en el modelo lineal de la Teoría de muestreo del estímulo (dentro de las teorías matemáticas del aprendizaje):

$$Pn+1 = \begin{cases} (1-T)Pn+T & \text{si } E1,n \\ (1-T)Pn & \text{si } E2,n \\ Pn & \text{si } E0,n \end{cases}$$

Que son un conjunto de ecuaciones en diferencias que expresan cómo una variable (P_n = probabilidad de que la respuesta en el ensayo n sea A_1) cambia su valor de un punto discreto del espacio (ensayo n) al siguiente punto del espacio (ensayo n+1). Donde T es la probabilidad de que un estímulo sea muestreado en cualquier ensayo dado y $E_{i,n}$ es el acontecimiento reforzante E_i que ocurre en el ensayo n.

2.6.3 DESCRIPCION DE CAMPOS

En la Teoría de campos generalizada las operaciones y los conceptos pueden representarse mediante operaciones y conceptos generalizados. Pues, una vez que hemos escogido el conjunto de entes matemáticos y su espacio correspondiente, el siguiente espacio consiste en la elección de los operadores matemáticos que al ser aplicados a la función del campo describan su comportamiento en distintos puntos del 'espacio'.

Los operadores que mayor utilidad han demostrado tener para la descripción de campos son el Cálculo diferencial e integral y sus generalizaciones. Por ejemplo, la derivada es un concepto de muchísima utilidad y que describe completamente un sinnúmero de campos, además, todo lo que se ha desarrollado matemáticamente para derivadas de un campo se pueden aplicar a los demás por ser isomórficos. Algunas de las interpretaciones de la derivada son: la pendiente de la tangente en un punto de una curva, la velocidad instantánea de una partícula, tasas de crecimiento económico, velocidad de reacción, velocidad de evaporación, etc. Todas estas interpretaciones se refieren a campos escalares, pero la derivada se ha generalizado para aplicarse a campos tensoriales de cualquier grado. También se ha generalizado para incluir a los números complejos, dando origen al cálculo de variable compleja.

Uno de los operadores matemáticos más útil en la descripción de campos es sin duda Nabla (o Del). Nabla no tiene en sí ningún significado, es una aplicación (operador diferencial), semejante al operador diferencial escalar derivada (de hecho, es una generalización de dicho operador) y necesita por tanto algo sobre qué operar. Es un operador de tipo vectorial y obedece todas las reglas formales del cálculo vectorial. Debido a su carácter vectorial, no implica una sola operación sino un conjunto ordenado de operaciones: obtener ordenadamente todas las derivadas parciales. Por ello, se puede representar (en coordenadas cartesianas) como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\, i + \frac{\partial}{\partial y}\, j + \frac{\partial}{\partial z}\, k . \qquad (2.8)$$

Con el operador nabla sonposibles las siguientes operaciones :

a) Sobre un escalar F :
Gradiente de F escalar

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k$$

b) Sobre un vector $\bar{F} = Fx\, i + Fy\, j + Fz\, k$:
Divergencia de $\bar{F}$

$$\nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial Fx}{\partial x} + \frac{\partial Fy}{\partial y} + \frac{\partial Fz}{\partial z}$$

Rotacional de $\bar{F}$

$$\nabla X\, \bar{F} = \left(\frac{\partial Fz}{\partial y} - \frac{\partial Fy}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial Fx}{\partial z} - \frac{\partial Fz}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Fy}{\partial x} - \frac{\partial Fx}{\partial y}\right) k$$

Gradiente de $\bar{F}$

$$\nabla \bar{F} = ii\frac{\partial Fx}{\partial x} + ji\frac{\partial Fx}{\partial y} + ki\frac{\partial Fx}{\partial z}$$

$$ij\frac{\partial Fy}{\partial x} + jj\frac{\partial Fy}{\partial y} + kj\frac{\partial Fy}{\partial z}$$

$$ik\frac{\partial Fz}{\partial x} + jk\frac{\partial Fz}{\partial y} + kk\frac{\partial Fz}{\partial z}$$

Dentro de una teoría <u>generalizada</u> tenemos que estas cuatro operaciones pueden representarse como un producto generalizado ($\circ$) que significa la operación de multiplicar en cualquiera de los cuatro tipos. Para un espacio tridimensional y en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \circ \phi = i\, \frac{\partial \phi}{\partial x} + j\, \frac{\partial \phi}{\partial y} + k\, \frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (2.9)$$

ó usando de la convención sumatoria:

$$\nabla \circ \phi = \nu_n \frac{\partial \phi}{\partial x_n}$$

donde ϕ es un tensor de cualquier orden apropiado a la multiplicación aplicada, ν_n es un vector unitario a lo largo de la coordenada x_n.

Generalizaciones de este tipo en los operadores y conceptos empleados en la descripción de campos pueden buscarse y realizarse, siendo esta tarea una de las más importantes de la teoría de campos generalizada.

2.6.4 EL MAXPLACIANO

En las dos secciones anteriores hemos analizado someramente dos de las ideas esenciales de la teoría de campos generalizada: la definición generalizada de campo y la generalización de operadores y conceptos de la teoría de campos, tales como la del producto generalizado (ecuación 2.9) o las generalizaciones del concepto 'derivada'. Ahora veremos una tercera idea: la introducción de nuevos operadores generalizados, mediante el ejemplo de un operador: el Maxplaciano. El maxplaciano es un operador que constituye una generalización y unificación de un conocido grupo de ecuaciones fundamentales de la Física Matemática. Siguiendo el principio de elección, proponemos este operador debido a la reducción y unidad que se obtienen al considerar un solo operador que describa satisfactoriamente dichas ecuaciones.

El maxplaciano de una función nos indica cómo varía (generalmente, su distribución y evolución espacio-temporal, o simplemente la variación espacial en el sentido generalizado), y dicha variación es la información más importante que manejamos, buscamos y, a menudo, es la única que necesitamos.

A) DEFINICION DEL MAXPLACIANO.-

Definiremos el maxplaciano como el operador M, tal que:

$$M = \nabla_d^2 - \alpha^2 \frac{\partial^n}{\partial x_{d+1}^n} \qquad (2.10)$$

$$\text{donde:-}\ \nabla_d^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \qquad (2.11)$$

- α es una constante característica de cada fenómeno y que depende de las propiedades de dicho fenómeno, en algunos casos, por ejemplo, significa la rapidez de propagación de una perturbación del campo. α^2 en otros casos se le llama difusividad (cuando $n=1$).
- n es un parámetro que nos indica el tipo de variación que experimenta el campo con respecto a la variable x_{d+1} (generalmente el tiempo) y puede tomar cualquier valor entero mayor o igual que cero (generalmente, $0 = n = 2$, $n \in Z$).
- d es un parámetro que nos indica el número de dimensiones del espacio (sin contar la variable x_{d+1} que tiene un papel singular y específico en la descripción del campo, como queda indicado

por el sustraendo de la definición 2.10 y ya que generalmente representa el tiempo).

Cuando se aplica el maxplaciano a una función U, esto es MU, produce una nueva función como resultado del conjunto de operaciones matemáticas explícitamente contenidas en la definición de M. El maxplaciano también se puede generalizar y definirse en forma compleja, tensorial o en forma discreta(con un operador en diferencias). Veremos en los 2 siguientes incisos dos propiedades muy importantes del maxplaciano: la linealidad y la superposición.

B)LINEALIDAD DEL MAXPLACIANO.-

Recordando que un operador T se dice lineal si T(au+bv)=aTu+bTv para todas las constantes a y b y todas las funciones u y v para las cuales Tu y Tv tienen sentido, se puede probar fácilmente que M es un operador lineal:

$$MW=\nabla_d^2 W - \alpha^2\frac{\partial^n W}{\partial x_{d+1}^n}$$, tomando W=au+bv:

$$MW=M(au+bv)= \nabla_d^2(au+bv) - \alpha^2\frac{\partial^n(au+bv)}{\partial x_{d+1}^n}$$. Puesto que la derivación es lineal tenemos:

$$MW= a\nabla_d^2 u + b\nabla_d^2 v - a\alpha^2\frac{\partial^n u}{\partial x_{d+1}^n} - b\alpha^2\frac{\partial^n v}{\partial x_{d+1}^n}$$. Factorizando

$$MW=a(\nabla_d^2 u - \alpha^2\frac{\partial^n u}{\partial x_{d+1}^n}) + b(\nabla_d^2 v - \alpha^2\frac{\partial^n v}{\partial x_{d+1}^n})$$

$MW= M(au+bv)=aMu + bMv$ Quod erat demonstrandum

La linealidad de M puede extenderse fácilmente a m funciones:

$$M(\sum_{i=1}^{m} C_i U_i)=\sum_{i=1}^{m} C_i MU_i \tag{2.12}$$

C)PRINCIPIO DE SUPERPOSICION DEL MAXPLACIANO.-

Este principio, que se sigue directamente de la linealidad de M, es fundamental para uno de los métodos más poderosos de resolución de las ecuaciones generadas por la aplicación del maxplaciano: el método de Fourier.

Enunciaremos el principio de superposición del maxplaciano como sigue:

Sean m funciones U_i y sean cada una de ellas, soluciones de $MU_i=0$. Entonces cualquier combinación lineal de esas funciones $U=C_1U_1 + C_2U_2+\dots + C_nU_n$(donde las m C_i son constantes arbitrarias), satisface MU=0. Si cada una de las m funciones satisface una condición lineal homogénea, entonces cualquier combinación lineal U satisface esa condición lineal.

La prueba se sigue de la linealidad del maxplaciano (ec. 2.12)

$$U=C_1U_1+C_2U_2+\dots+C_nU_n=\sum_{i=1}^{n} C_iU_i$$

por lo tanto, $MU=M(\sum_{i=1}^{n} C_iU_i)$

aplicando 2.12: $M(\sum_{i=1}^{n} C_iU_i)=\sum_{i=1}^{n} C_iMU_i$, y $MU_i=0\ \forall i(i=1,2,\dots,n)$ por hipótesis, por lo tanto $MU=0$ QED.

D)UTILIDAD DEL MAXPLACIANO.-

Cuando aplicamos el maxplaciano a una función escalar U, con sus parámetros definidos e igualamos a una constante o una función $F(x_k)$ arbitraria obtenemos las ecuaciones más importantes de la Física matemática, como veremos más adelante. Por lo tanto, un solo operador, M, al aplicarse a un campo da origen a todo un conjunto de ecuaciones fundamentales y ahí radica la utilidad del operador. A continuación veremos tres ejemplos de reducciones similares:

Proceso Politrópico.

El proceso politrópico es aquel proceso termodinámico que ocurre cuando la expansión o compresión de un gas perfecto no tiene una caracteristica especial; ninguna propiedad permanece constante y la relación entre las propiedades cumple la siguiente ecuación:

$$pv^n=cte. \qquad (2.13)$$

en donde n depende del proceso, es decir, tiene un papel similar al desempeñado por la n del maxplaciano. El proceso politrópico es el caso más general y asignando distintos valores a n podemos obtener los distintos procesos particulares. Así, si $n=0$ tenemos el proceso isobárico, $n=1$ indica el proceso isotérmico, $n=\gamma$ al proceso adiabático y si $n=\infty$ tenemos que el proceso es isométrico. Así con una sola ecuación(2.13) se obtienen todas las ecuaciones de los procesos particulares asignando el valor adecuado de n.

Secciones Cónicas.

'Secciones Cónicas' es el título del extraordinario y monumental trabajo de Apolonio que le ganó el título entre sus contemporáneos de 'el mayor geómetra'. En el libro I de sus 'Secciones', Apolonio reduce una serie de curvas (las 'cónicas') a distintos casos del corte de un cono recto arbitrario. Anteriormente a Apolonio, los geómetras griegos habían ya descubierto las secciones cónicas pero las deducían de tres tipos de conos de revolución. Las secciones cónicas son tres: la elipse(con el caso especial de la circunferencia), la parábola y la hipérbola. Usando de la generosa herramienta de la Geometría Analítica tenemos que la simplificación de Apolonio se puede expresar con el siguiente teorema:

La ecuación general de segundo grado, $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, representa una cónica del género parábola, elipse o hipérbola, según que el indicador $n=B^2-4AC$ (el discriminante en la fórmula general de las ecuaciones de 2^o) sea 0, negativo o positivo. Así, de una sola ecuación (la ecuación general de segundo grado) podemos obtener las ecuaciones particulares de cada cónica asignando al indicador n el valor adecuado.

Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Veamos, por último, la ecuación general en derivadas parciales lineales de segundo orden en U(x,y),

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D\frac{\partial U}{\partial x} + E\frac{\partial U}{\partial y} + FU=G \qquad (2.14)$$

donde A,B,...,G son constantes o funciones de x e y solamente, la cual es análoga a la ecuación de las cónicas. Es conveninete clasificar las ecuaciones del tipo 2.14 de acuerdo al signo del parámetro $n=B^2-4AC$, a semejanza de las cónicas: así, cuando n es negativo la ecuación se dice elíptica, con n=0 se le llama parabólica y cuando n es positivo se dice que es hiperbólica. De esta forma se pueden obtener de una sola ecuación general (2.14) muchas ecuaciones de la Física matemática. Por ejemplo, la ecuación de Laplace y de Poisson en U(x,y) se obtienen de la ecuación 2.14 cuando A=C=1, y B,D,E y F son cero. Por lo tanto estas ecuaciones son elípticas(n=-4). La ecuación del calor en una dimensión es parabólica (n=0), y la ecuación unidimensional de las ondas es hiperbólica ($n=a^2$). La ecuación general 2.14 en los casos elíptico, parabólico o hiperbólico tiene mucho en común con las ecuaciones correspondientes (Poisson, Laplace, del Calor y de Onda) y esa es la razón por la cual la clasificación es importante, además las condiciones de contorno que conducen a problemas estables, es decir, con significado físico, para ecuaciones de un tipo no conducen, por lo general, a problemas estables para ecuaciones de otro tipo.

El maxplaciano juega un papel similar a la ecuación 2.13, a la ecuación general de segundo grado y ala ecuación 2.14. Al igual que la ecuación 2.14, las ecuaciones maxplacianas(es decir, aquellas obtenidas al aplicar el maxplaciano) representan las principales ecuaciones de la Física matemática, pero con el maxplaciano tenemos dos ventajas: es mucho más general(todo lo general que se requiera) y más restringido(se refiere sólo a los casos de interés). Es mucho más general porque no se limita $U=U(x,y)$, sino que se generaliza $U=U(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$, pero a la vez se restringe el operador para obtener las ecuaciones más empleadas y, por lo tanto, es más práctico, ya que la ecuación general en derivadas parciales lineales crece de acuerdo a la relación $(m^2+3m+4)/2$, donde m es el orden de la ecuación. Así, cuando es de segundo orden (ecuación 2.14) consta de 7 términos, la de tercer orden consta de 11 términos, la de cuarto de 16, etc. Que, como se puede observar, crece rápidamente con el orden. En cambio el maxplaciano se reduce a las principales ecuaciones y fácilmente se pasa de una dimensión a otra sin que aumenten demasiado los términos (cuando mucho aumenta según la relación m+2). Así, si aplicamos el maxplaciano con $\alpha=0$ y D=3 e igualamos a cero, obtenemos la ecuación de Laplace en tres dimensiones.

Podemos decir que existen dos tipos de ecuaciones maxplacianas: las homogéneas(cuando se iguala a cero) y las no homogéneas(cuando se iguala a una constante o una función $F(x_{ii})$(por ejemplo, la ecuación de Poisson)). Para mayor claridad, nos limitaremos a las ecuaciones homogéneas, las cuales se muestran a continuación:

ECUACIONES MAXPLACIANAS HOMOGENEAS(HASTA D=3)

PARAMETROS		D=1	D=2	D=3	NOMBRE
$\alpha=0$		$\frac{d^2U}{dx^2}=0$	$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=0$	$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}=0$	EC.LAPLACE
$\alpha\neq0$	n=0	$\frac{d^2U}{dx^2}-\alpha^2U=0$	$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}-\alpha^2U=0$	$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}-\alpha^2U=0$	EC.HELMHOLTZ
	n=1	$\frac{d^2U}{dx^2}-\alpha^2\frac{\partial U}{\partial t}=0$	$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}-\alpha^2\frac{\partial U}{\partial z}=0$	$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}-\alpha^2\frac{\partial U}{\partial t}=0$	ECUACION DEL CALOR(FOURIER)
	n=2	$\frac{d^2U}{dx^2}-\alpha^2\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=0$	$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}-\alpha^2\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=0$	$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}-\alpha^2\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=0$	ECUACION DE ONDA(MAXWELL)

El maxplaciano de una función U surge, en la mayoría de los casos, de una simetría que da origen a una ley de conservación (la ley de conservación de la energía, por ejemplo): $\nabla X V=0$, donde V es el vector de campo. Debido a que V es conservativo tenemos que es igual al gradiente de un potencial, precisamente, nuestra función U del campo, multiplicado por una constante:

$$V=-k\nabla U \tag{2.15}$$

Debido a otra consideración de simetría (la 2a. ley de Newton, la ecuación de continuidad, la ley de Gauss,etc.) obtenemos la siguiente relación:

$$\nabla \cdot V=-k\frac{\partial^n U}{\partial t^n} \tag{2.16}$$

que, combinada con 2.15, conduce al maxplaciano.

Algunos de los fenómenos físicos que describe el maxplaciano son:

-Para $\alpha=0$ ó $\frac{\partial^n U}{\partial t^n}=0$, el flujo estacionario de fluidos, el flujo estacionario de calor, los potenciales gravitatorio, electrostático, electrocinético y magnetostático, una concentración estacionaria, la densidad estacionaria de corriente de momentum,etc.

-Para $\alpha\neq 0$ y $n=0$, obtenemos la ecuación de Helmholtz que se obtiene por separación de variables en la ecuación de onda o requiriendo dependencia armónica del tiempo. Esta ecuación además es isomórfica con la ecuación de Schrödinger.

-Para $\alpha\neq 0$ y $n=1$, tenemos que el maxplaciano describe fenómenos tales como los denominados fenómenos de transporte, en los cuales existe una transferencia neta de materia,energía o momentum. Algunos de los más importantes son: la difusión molecular y neutrónica, la conducción térmica, la viscosidad, los distintos casos de flujo de fluidos en medios porosos(U=presión, potencial de flujo o potencial de flujo de un gas), el flujo de salinidad, el flujo de electricidad en un cable, etc.

-Para $\alpha\neq 0$ y $n=2$, el maxplaciano describe aquellos fenómenos relacionados con la propagación de una situación descrita por un campo dependiente del tiempo(o de una variable x_{d+1}) tales como las ondas elásticas en una barra, las ondas de presión en una columna de gas, las ondas longitudinales en un resorte, las ondas transversales de una cuerda, las ondas en una superficie(una membrana elástica,por ejemplo), las ondas superficiales en un líquido, las ondas electromagnéticas(incluídas las ondas luminosas), las ondas gravitatorias, etc.

CAPITULO TERCERO
DISCURSO DEL METODO

"El método que enseña a seguir el orden verdadero, ... que de este modo simplifica la investigación y la amplía cada vez más al extender a otras cosas la aplicación de aquellas verdades matemáticas ciertas y evidentes".

René Descartes

3.1. PLAN DEL CAPITULO

La razón de que consideremos a este tipo de isomorfismos, como un capítulo completo, se debe a que existe toda una estructura en las Geociencias (desarrollada más específicamente en la Geofísica, por su relación con la Física aplicada). El hecho es que, en la actualidad, la cuantificación de datos para el estudio de la Tierra ha alcanzado una sistematización completa, haciedo uso de la computación y de los métodos numéricos para evaluar procesos geocientíficos. En este caso nos remitiremos a remarcar el esqueleto modular matemático de que se hace uso en Geomatemáticas, previendo las aplicaciones que se han venido haciendo en la Geología y en la Geofísica, para la manipulación y análisis de datos obtenidos de las mediciones hechas en campo.

Para estos problemas, las ciencias de la Tierra cuentan con herramientas como el análisis de datos, geoestadística, análisis de mapas y el análisis multivariable de datos.

Uno de los hechos más notables, para que se requiera la aplicación, investigación y estudio de nuevas técnicas asociadas con el procesamiento automático, es la cantidad de información necesaria para la solución de los complejos fenómenos proporcionados por los adelantos tecnológicos como es el caso del reconocimiento geológico por satélites, las técnicas de fotogrametría y las diversas ramas de la poderosa herramienta de la Geofísica. Por este motivo pensamos, que con el paso de los años van a existir especialistas en la solución de estos problemas en particular, dedicados por completo a la simulación geocientífica y el procesamiento de datos de esta índole.

Los métodos geomatemáticos son relativamente recientes, y su uso dependió de la necesidad de las ciencias híbridas de la Geoquímica, Geofísica y la Hidrología de tener un respaldo en matemáticas, las cuales surgieron como procedimientos derivados de patrones no geológicos. Similarmente, mineralogistas y cristalógrafos usaron las técnicas matemáticas de la física y de la química analítica.

Con la introducción de las computadoras se incrementaron los métodos matemáticos del análisis de datos, que se han desarrollado en todas las ciencias y la ingeniería y han sido aplicados a muchas facetas de las ciencias de la tierra; estas técnicas son las que nos conciernen ahora. La geofísica es por si misma responsable de algunos de los avances en la ciencia de las computadoras, mas notablemente en el área de las gráficas, incluyendo mapas y dibujantes de contorno (plotter). Sin embargo las Geociencias han beneficiado más que nada en la contribución del intercambio de técnicas cuantitativas.

Nuestro análisis se refiere a los varios tipos de datos que podemos adquirir en las Geociencias: datos colectados o muestreados transversalmente, datos muestreados sobre el área del mapa, datos multivariables en localizaciones de observación no consideradas, el procesamiento de señales y el análisis de sistemas.

La primer categoría contiene toda clase de problemas en los cuales los datos han sido captados a lo largo de una linea contínua (aeromagnetismo, datos meteorológicos, datos económicos, etc.), tanto en el tiempo como en la distancia. Esto incluye problemas de series de tiempo (como las usadas series de sismología, que se podrían hacer extensivas a otras áreas isomórficas), también incluye análisis de secciones estatigráficas, y de interpretación de cartas. La segunda categoría incluye problemas en los cuales las estaciones geográficas de muestreo son importantes: mapeos, análisis de tendencias de superficies, y problemas similares. La tercera categoría atañe a la agrupación, clasificación y análisis de cantidad de datos interrelacionados en los cuales la estación de muestreo en un mapa o sección no son considerados: Paleontología, Mineralogía y Geoquímica usan este tipo de datos. Las últimas categorías tienen que ver con la interpretación de los datos y con el mejoramiento de la resolución.

Las Geociencias incluyendo a la Geología tienen ahora modelos y aproximaciones cuantitativas que fundamentan las hipótesis del investigador y, en el análisis, existen métodos para evaluación númerica.

Los métodos de medición y el análisis de datos pueden encabezar la interpretación cuando no es obvia o es aparente, usando otros principios de investigación.

Los métodos multivariables, por ejemplo, pueden revelar agrupaciones de objetos que tienen variación con las clasificaciones acepatadas, o pueden enseñar relaciones entre variables donde no se esperaba.

3.2. NATURALEZA DE LAS MEDICIONES

Todas las técnicas cuantitativas usadas en las Geociencias que discutiremos en el capítulo pueden ser clasificadas como procedimientos Geoestadísticos, o bien quasiestadísticos o procedimientos protoestadísticos.

No existe un cuerpo teórico adecuado actualmente para los fenómenos geológicos, bológicos, etc. y de todas sus ramas, sin embargo han hecho uso de procesos estadísticos con éxito, así como de Geomatemáticas o Biomatemáticas según el caso, cuyas técnicas están basadas en la premisa de que la información acerca de que un fenómeno puede ser deducida de un exámen o investigación de una pequeña población coleccionada o adquirida de un cúmulo grande de muestras potenciales observables en el fenómeno.

Consideremos el perfil de sección transversal del subsuelo para una estructura determinada durante una exploración petrolera: los datos son derivados de pozos perforados específicos, esparcidos en una extensa área, los cuales permiten penetrar en los horizontes estatigráficos. La elevación de la cima de un horizonte medido en uno de esos agujeros constituye una observación individual. Obviamente, un infinito número de mediciones, de la cima de ese horizonte, podría hacer que perforáramos un ilimitado número de pozos. Esto no puede ser hecho; estamos restringidos a los agujeros que han sido perforados. Podemos aumentar nuestra información a través de la historia del subsuelo conforme la explotación avance. De estos datos debemos deducir la configuración de la cima del horizonte entre pozos perforados. El problema es análogo al análisis estadístico; pero la estadística no puede designar patrones de ubicación para perforar los pozos. En contraste en minería, los ingenieros han designado esquemas de muestreo y planes de perforación y sujetan sus observaciones a análisis estadísticos.

El ingeniero debe sujetarse a los datos con que cuente o que es posible extraer: así tenemos que las grabaciones en los registros petroleros son muy caras, porque su estación no se encuentra localizada dentro de la muestra designada; así mismo los paleontólogos deben contentarse con los fósiles que puedan obtener de una extensa región, etc.

Debemos ver la naturaleza del número de sistemas en los cuales las mediciones son hechas. El significado físico de las medidas, su valor aparente, su ajuste y nivel de aproximación son factores que hay que tomar en cuenta.

3.3 ANALISIS DE SECUENCIAS DE DATOS

3.3.1 MEDICIONES EN SECUENCIAS ESPACIADAS

Consideramos en esta sección la manera de examinar los datos que se caracterizan por su posición a lo largo de una simple línea. Esto es, la forma de una secuencia y la posición y el valor de cada punto que ocurre dentro de una sucesión es importante. Los datos dispuestos con estas características son comunes en Geofísica e incluyen mediciones de sucesiones magnéticas, sismológicas, eléctricas y gravimétricas; mientras que en Geología incluyen sucesiones litológicas, ensayos geoquímicos, o mineralógicas a lo largo de perfiles o agujeros perforados; así mismo es característico de los Registros Geofísicos de pozos observar secuencias de esta índole. En general en ciencias como Biofísica, Astrofísica y en cualquier ciencia donde exista la simulación digital aparecen este tipo de sucesiones.

En esta categoría las mediciones se caracterizan por una separación de tiempo o magnitud. Las técnicas de análisis de datos tienen importancia posicional tradicionalmente considerada parte del campo del análisis de series de tiempos.

De los ejemplos más representativos tenemos al registro de resistividad eléctrico, o bien la historia de producción de un pozo comercial de petróleo. La estructura de los datos en secuencia, permanece, pero las variables atribuidas son en ohms vs. pies, y en unidades monetarias o barriles de petróleo por día, respectivamente.

Otros problemas dados en secuencia, que se pueden presentar, son la aparición de variables indefinidas en secuencia, como ocurre frecuentemente en estatigrafía y se asigna un número en cada paquete; pero sin conocer su espesor (1, 2, 3, 4, ... , 3, 2, 1, ...). También existe el problema del análisis de una secuencia caracterizada por la presencia o ausencia de algunas variables en puntos a lo largo de una línea. Este problema se puede presentar en mineralogía en la sucesión de granos minerales encontrados en una sección transversal.

En simulación de yacimientos es común encontrar valores discretos en forma de secuencia para la presión o variables análogas que se asignan por compartimientos en bloques que corresponden a este tipo de análisis de secuencias de datos.

Los datos que se caracterizan por ser un arreglo continuo, tanto en tiempo como en espacio, son referidos por su estructura como una serie, secuencia, o cadena.

La naturaleza de los datos y la secuencia determinan las cuestiones que nosotros debemos considerar (por ejemplo en una secuencia estatigráfica no podemos extraer información acerca de los intervalos de tiempo, porque la escala de tiempo acompañando a la sucesión no es conocida, entonces se substituye la escala de tiempo, por una escala espacial).

En este capítulo discutiremos la siguiente clasificación de las técnicas de análisis de datos:

Naturaleza de la variable	Observaciones en espaciamientos irregulares	Observaciones igual y regularmente espaciados	Esparcimiento no considerados
Variable medida en escala del intervalo o radial	Procedimientos de igual esparcimiento Análisis de regresión	Análisis de regresión Análisis de tendencia de tiempo Autocorrelación cross-correlación Análisis de Fourier	Autocorrelación y cross-correlación
Variable medida en escala nominal u ordinal	Series de eventos	Autoasociación y cross-asociación Transición de matrices Pruebas corridas	Autoasociación y cross-asociación Transición de matrices Pruebas corridas

Una medición es un valor numérico asignado a una observación, la cual refleja la magnitud o cantidad de alguna característica. La manera en la cual los valores numéricos son asignados determina la escala de medición y de esta forma se determina el tipo de análisis que puede ser hecho con los datos. Hay tres escalas de medición (intervalo, radial, nominal u ordinal).

La escala nominal consiste en clasificar las observaciones dentro de exclusivas categorías de igual rango. Estas categorías pueden ser definidas por nombres o símbolos. La clasificación de fósiles es un ejemplo de esta escala de medición. Algunas observaciones pueden ser ubicadas en una jerarquía de hechos. La escala de dureza de Mohs es un ejemplo clásico encasillado en la escala ordinal. Los minerales se extienden del uno al diez incrementando su dureza, los pasos entre hechos sucesivos no son iguales. Similarmente, las rocas metamórficas se ubican a lo largo de una escala de grado de metamorfismo, cuyos efectos no representan una progresión de temperatura y presión.

La escala de intervalo es llamada así porque la magnitud de intervalos sucesivos es constante. Un ejemplo de ello es la escala de temperatura.

La escala radial no sólo tiene incrementos iguales entre cada paso, sino que además tiene un orígen o cero verdadero. Medidas de magnitud son de este tipo. La mayoría de estas mediciones Geofísicas caen dentro de esta escala. Las escalas radiales son las escalas de más alto nivel de medición. Todo tipo de operaciones matemáticas y estadísticas pueden ser ejecutadas con ella.

Para interpretar mejor la tabla anterior explicaremos los tipos de secuencias. En la primera, la distancia entre observaciones varía y debe ser especificada para cada punto. En la siguiente, los puntos son asumidos igual y regularmente espaciados; el valor numérico del espaciamiento no entra en los análisis excepto como una constante. Finalmente, el espaciamiento puede no ser considerado como totalidad, y sólo a la secuencia de las observaciones es importante.

Las técnicas también pueden ser clasificadas en el tipo de observacviones que ellas requieren. Algunas necesitan observaciones radiales o de intervalo: la variación debe ser medida en una escala y expresada en números reales.

Otros métodos aceptan datos nominales u ordinales, y las observaciones necesitan sólo ser puestas en la categoría de algún modo. En los métodos discutidos en este capítulo, las clases no son ubicadas; esto es A no es mayor o menor en algún sentido que B o C. Los datos nominales pueden ser representados por enteros, caracteres alfabéticos o símbolos.

Presentaremos en este capítulo una colección que no es exahustiva, de operaciones que proveen de valiosa información en la solución cuantitativa de problemas en las Ciencias de la Tierra. Existen más técnicas en las que debemos familiarizarnos, que han desarrollado la mayoría de la teoría de series de datos, y a las que los geofísicos podemos a su vez retroalimentar, como es el caso de la descripción y aplicación de la ingeniería del radar, teoría del muestreo, terapia del lenguaje y de la voz, biología celular, etc. Algunos de los métodos envuelven parámetros no estadísticos.

Otro de los métodos que usamos como modelo es la correlación que es una técnica que compara dos secuencias de datos.

La mayoría de las técnicas de comparación de dos o más secuencias puede ser agrupada dentro de dos grandes categorías: en una de ellas, la secuencia de datos son asumidos como pareja en una sola posición, y nosotros deseamos determinar el grado de similitud entre dos secuencias. Un ejemplo de esto lo tenemos en la comparación de dos trazas sísmicas, así como en el fenómeno de difracción de rayos X (en la carta que se obtiene con un conjunto de datos para determinar un mineral desconocido). La otra categoría Está representada por la autoasociación y la cross-asociación, que veremos más adelante.

3.3.2 SECUENCIAS DE DATOS

En esta sección lo que nos interesa es calcular efectos y describir funciones para variables bajo consideración, regularmente espaciadas, para obtener valores en intervalos irregulares. La estimación de puntos espaciados regularmente también es considerada en el tema de mapas. Los programas de contorno operan por creación de una rejilla regular de puntos de control estimados en las observaciones irregularmente espaciadas. El acabado del mapa depende de la apariencia y fidelidad de los valores en cada punto que a su vez están gobernados por la extensión, por la elegancia de la rejilla y el algoritmo usado para estimar valores en las intersecciones de la rejilla. Una analogía unidimensional con respecto al cálculo de mapas, la tenemos en el análisis de tablas para conocer valores intermedios, así como en el análisis de funciones para determinar valores donde no se conoce la respuesta de la función. Las técnicas que empleamos en las geociencias, son las tradicionales de interpolación y de aproximación de funciones. Su uso ha tenido una amplia difusión en Geoestadística, en el cálculo de proporciones porcentuales de cantidades geológicas a través de una extensa zona, en tablas de propiedades petrofísicas, en interpolación de propiedades geofísicas, en la aproximación de señales, en la discriminación de puntos para espectros, etc.

Dos de los métodos más conocidos en ciencias e ingeniería son los métodos de interpolación lineal e interpolación de Newton. Su uso se considera para la determinación de un valor aislado de la función causada por un cierto efecto:

i	X_i	Propiedad, efecto físico o concentración geológica.
0	X_0	Y_0
1	X_1	Y_1
2	X_2	Y_2
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	X_n	Y_n

La interpolación lineal es la más burda, y consiste en promediar un punto en medio de otros dos con respecto a una línea recta:

$$Y^1 = \frac{(Y_2 - Y_1)(X^1 - X_1)}{X_2 - X_1} + Y_1$$

La interpolación de Newton es un método más sofisticado, pero de mayor exactitud que consiste en aproximar la función a un polinomio de grado n:

$$f(x) = f(x_0 + \alpha h) = f(x_0) + \alpha\Delta f_o + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 f_o + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 f_o + \ldots + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n-1)}{n!}\Delta^n f$$

Para el uso adecuado de la ecuación es necesario recordar que h es el espaciamiento constante, $\alpha = \frac{x-x_o}{h}$ y Δf, $\Delta^2 f, \ldots \Delta^n f$ son las diferencias divididas de orden n.

La validez de los resultados está controlada por la densidad de los valores originales usados para hacer la rejilla. Una observación útil que podemos hacer, es que ninguna interpolación permite el refinamiento del análisis cuando hay limitaciones en los datos originales.

Otro método de interpolación polinomial es el siguiente:

$$f(x) = f(x_o) + (x-x_o)\, f[x_o,x_1] + (x-x_o)(x-x_1)\, f[x_o,x_1,x_2] + (x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$f[x_o,x_1,x_2,x_3] + \ldots + (x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})\, f[x_o,x_1,\ldots x_n].$$

Un resultado muy útil para la interpolación de datos con espaciamientos variables es el método de Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x-xi}{x_k-xi} \right) f(x_k)$$

Este es el método de más alto nivel, para extraer información funcional para una tabla de valores.

Todos los modelos de interpolación son válidos para una secuencia de datos o bien una tabla de valores discretos de la cual deseamos extraer información en puntos intermedios.

El valor de estos métodos se debe al extenso uso que se ha hecho en el análisis de tendencias (Gravimetría, Magnetometría, Geología, Análisis de firmas, Análisis de espectros, etc.), así como en el ajuste de valores.

3.3.3 APROXIMACION DE FUNCIONES

Este método resuelve problemas alternativos a los métodos de interpolación. Es un tema de gran importancia en todas las áreas de ingeniería, por la naturaleza de las mediciones y por las incógnitas que prevalecen y surgen en los fenómenos.

Su extensión comprende todas las áreas donde existen señales, ya sea Comunicaciones y Electrónica, Geofísica, Astrofísica, Física Aplicada, Biofísica e Industria Estadística aplicada.

Dentro del campo de las geociencias hemos visto aplicación en todos los métodos de prospección en los que intervienen curvas de campo, así como en el trazado de mapas y sus tendencias.

3.3.3.1 CLASIFICACION

La aproximación de funciones se puede dividir en:

1.- Fórmula de Taylor con residuo.
2.- Aproximación de funciones en forma polinomial.
3.- Aproximación por funciones ortogonales.
4.- Aproximación por polinomios de Legendre.
5.- Aproximación por serie de Fourier.

El problema que plantea la teoría de aproximaciones consiste en conocer una función aproximada, a partir de una serie de valores discretos en forma de tabla, o bien determinar el polinomio aproximado que le corresponde a una función determinada. El uso apropiado de cada técnica depende del nivel de aproximación que requiere el problema. A medida que avancemos en la descripción de los métodos, el refinamiento mejora.

1.- Fórmula de Taylor con residuo:

Esta ecuación sirve para aproximar funciones complicadas a polinomios simples del tipo $P(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$. El modelo general es en el dominio del tiempo:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

El residuo se calcula como:

$$R_n(t) = f(t) - f_a(t)$$

2.- La aproximación polinomial:

Su modelo es el siguiente:

$$f_a(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + \frac{a_2}{2!}(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1}$$

3.- Aproximación por funciones ortogonales:

A cada término parcial le corresponde un polinomio $g_i(t)$:

$$f_a(t) = a_0g_0(t) + a_1g_1(t) + \ldots + a_ng_n(t)$$

4.- Aproximación por polinomios de Legendre:

Se utiliza la aproximación anterior, usando en cada función ortogonal $g_i(t)$ un correspondiente polinomio de Legendre:

$$g_k(t) \quad \begin{cases} g_o = a_{oo} \\ g_1(t) = a_{o1} + a_{11}t \\ g_2(t) = a_{o2} + a_{12}t + a_{22}t^2 \\ \vdots \\ g_n(t) = a_{on} + a_{1n}t + a_{2n}t^2 + \ldots + a_{nn}t^n \end{cases}$$

El modelo general se expresa como:

$$f_a(t) = \sum_{k=0}^{n} A_kg_k(t)$$

Las funciones $g_k(t)$ son ortogonales en el intervalo t_1 a t_2 donde la aproximación tiene un mínimo error cuadrático medio. Estos polinomios satisfacen las condiciones indicadas en el intervalo $t_1 = -1$ a $t_2 = +1$ conocidos como polinomios de Legendre.

La demostración de estos polinomios, así como los valores a_{ij} se obtienen de la ecuación diferencial de Legendre:

$$(1-t^2)\frac{d^2}{dt^2}P_n(t) - 2t\frac{d}{dt}P_n(t) + n(n+1)P_n(t) = 0$$

Son polinomios cuya forma es:

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = t$$

$$P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

$$\vdots$$

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

Son otorgonales en $-1<t<1$. Por definición de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)\,P_m(t)dt = \frac{2}{2_n+1}\ \delta_{mn}$$

Donde d_{mn} es una función impulso:

$$\frac{2}{2_n+1}\,d_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2_n+1} & m = n \end{cases}$$

5.- Aproximación por serie finita de Fourier:

Es una de las más bellas y útiles aproximaciones de funciones que se han usado. Es posiblemente la aproximación de más alto nivel de abstracción, debido a su uso tan extendido y práctico, con los requerimentos y resultados deseables. Son funciones ortogonales; igual que las de Legendre, pero con la cualidad de que se utilizan funciones periódicas.

$$f_a\,(t) = C_o + \sum_{n=1}^{N} \left[A_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + B_k \text{ sen } \frac{2\pi k}{T} t\right]$$

En forma compleja se expresa como:

$$f_a\,(t) = \sum_{-N}^{+N} D_k\, e^{i\,\frac{k2\pi}{T}\,t}$$

3.3.3.2 TEORIA DE LOS ERRORES

Esta teoría se plantea como objetivo, encontrar la solución de las funciones aproximadas anteriores (3.3.3.1) con el mínimo error.

La definición más básica se expresa como la diferencia entre la función aproximante y la función aproximada:

$$E(t) = R_n(t) = f(t) - f_a(t)$$

Para juzgar la naturaleza del error en una aproximación se usa el error promedio:

$$E_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{E(t)\,\Delta t}{t_f - t_i}$$

O bien tomando límites para el caso continuo:

$$E_0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{E\,(t)}{t_2 - t_1}\, dt$$

Este proceso resulta inadecuado si no se toman los valores absolutos, ya que existe una cancelación no considerada de términos positivos y negativos que proporcionan resultados falsos.

Por este motivo se creó el modelo del error cuadrático medio:

$$E^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [E\,(t)]^2\, dt$$

Consideremos el primer caso para una función aproximada polinomial.

$$fa(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$$

En este caso el error cuadrático medio (E.C.M.) nos queda:

$$E^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[f(t)]^2\,dt - \int_{-1}^{1}(a_0+a_1t+a_2t^2)\,f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(a_0+a_1t+a_2t^2)^2\,dt.$$

Recurriendo al cálculo, sabemos que el mínimo error debe cumplir las condiciones:

$$\frac{dE^2}{da_k} = 0 \qquad y \qquad \frac{d^2(E^2)}{da_k^2} > 0$$

Por un procedimiento algebraico finalmente conocemos los valores más adecuados de a_k resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta:

$$k_1a_0 + k_2a_1 + k_3a_2 = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt.$$

$$C_1a_0 + C_2a_1 + C_3a_3 = \int_{-1}^{1} f(t)t\,dt.$$

$$r_1a_0 + r_2a_2 + r_3a_3 = \int_{-1}^{1} f(t)t^2\,dt.$$

Las constantes K_i, C_i, r_i son conocidas, así como $f(t)$.

Si queremos refinar la aproximación utilizamos polinomios de mayor grado

$$fa(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 +\ldots+ a_nt^n.$$

El cálculo del error para funciones ortogonales es el segundo caso de interés:

$$E^2 = \frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2}[f(t)]^2\,dt - 2\int_{t_1}^{t_2}f(t)\,fa(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2}[fa(t)]^2\,dt\right]$$

Usando las condiciones para que el error sea mínimo:

$$\frac{dE^2}{da_k} = 0 \qquad y \qquad \frac{d^2(E^2)}{da_k^2} \quad 0$$

$$\frac{d(E^2)}{da_k} = \frac{d}{da_k}\left\{ -\frac{2}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\ fa(t)\ dt + \int_{t_1}^{t_2} [fa(t)]^2\ dt \right]$$

Substituyendo apropiadamente las funciones ortogonales:

$$A_o\int_{t_1}^{t_2} g_o(t)\ g_k(t)\ dt + \ldots + A_k\int_{t_1}^{t_2}[g_k(t)]^2\ dt + \ldots + A_n\int_{t_1}^{t_2} g_n(t)\ g_k(t)\ dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\ g_k(t)\ dt.$$

De esta ecuación se tenemos $(n + 1)$ ecuaciones simultáneas cuya solución nos daría el resultado de los valores de $A_0, A_1, \ldots, A_n$ para los cuales la aproximación tiene el mínimo error cuadrático medio. Pero no es necesario resolver el sistema, si consideramos lo siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2 = (G_q)_k$$

Tomando en cuenta la ortogonalidad de las funciones:

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i\ g_k\ dt = 0 \quad \text{cuando } k \neq i$$

Finalmente la ecuación original nos queda:

$$A_k\int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2\ dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\ g(t)\ dt.$$

El término general para obtener los coeficientes de la función aproximada, sin necesidad de resolver el sistema es:

$$A_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, g_k(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2\, dt}$$

Donde $g_k(t)$ es un polinomio de Legendre.

Una manera sintetizada de expresar el error cuadrático medio para los dos casos anteriores es la siguiente:

$$E^2 = F^2 - [A_0^2\, G_0^2 + A_1^2\, G_1^2 + \ldots + A_n^2\, G_n^2]$$

Donde F^2 es llamado valor cuadrático medio:

$$F^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2\, dt.$$

El cuarto y último caso es el mínimo error cuadrático medio en la aproximación por serie de Fourier. Como habíamos mencionado, la serie de Fourier es una función aproximada mediante funciones ortogonales periódicas de senos y cosenos.

Por definición de ortogonalidad:

$$\int g_n(t)\, g_m^*(t)\, dt = d_{mn}$$

Recordando la definición de la serie compleja de Fourier:

$$fa(t) = \sum_{-N}^{N} D_k\, e^{i\frac{k2\pi t}{T}}$$

Las funciones g_k correspondientes sabemos que tienen los valores:

$$\left.\begin{aligned} g_k &= e^{ik2\pi\, t/T} \\ g_k^* &= e^{-ik2\pi t/T} \end{aligned}\right| \quad \int e^{ik2\pi t/T}\, e^{-ik2\pi t/T}\, dt = T$$

Utilizando el término general para obtener los A_k de las funciones ortogonales:

$$D_k = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\ [g_k(t)]^* dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} [g_k(t)][g_k(t)^* dt}$$

Substituyendo los resultados de las relaciones anteriores:

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\ e^{-ik2\pi t/T}\ dt$$

En forma sintetizada podemos escribir el error cuadrático medio de la siguiente manera:

$$E^2 = F^2 - D_0^2 - 2 \sum_{1}^{N} D_k^2$$

3.3.3.3 AJUSTE DE DATOS

La Filosofía de este método es análoga a la aproximación de funciones. El modelo está basado en la creencia de que los datos proporcionados f_n contienen una componente que varía despacio, la tendencia de, o la información acerca de f(x) y una componente que varía comparativamente más rápido, de amplitud menor, que es el error o ruido de los datos. La tarea consiste en aproximar o ajustar los datos por medio de alguna función F(x) de tal manera que F(x) contenga o representa la mayor parte (o toda) de la información acerca de f(x) contenida en los datos y poco del error o ruido.

La expresión más general de una función es:

$$F(x_n, c_1,\ldots,c_k) = c_1\ \emptyset_i\ (x_n) + c_2\ \emptyset_2\ (x_n) + \ldots + c_n\ \emptyset_n\ (x_n)$$

EL error se calcula como antes:

$$E = F^1\ \text{[valuado discretamente en forma de tabla]} - F(x_n,\ c_1,\ c_2,\ldots,c_n)$$

El error cuadrático que se calcula por la misma razón que en el caso de la aproximación de funciones es:

$$R = \sum_{n=1}^{N} E_n^2$$

$$R = \sum_{n=1}^{N} (f_n - F(x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n))^2$$

Usando las mismas condiciones anteriores para que el error sea mínimo.

$$\frac{dR}{dC_k} = 0 \qquad y \qquad \frac{d^2R}{dC_k^2} > 0$$

Obtenemos

$$\frac{dR}{dc_k} = -2 \sum_{n=1}^{N} (f_n - F(x_n, c_1, c_2, \ldots, c_k) \frac{d}{dc_i} F(x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Considerando que

$$\frac{dF}{dc_i} = \emptyset_i \ (x_n)$$

Usando la primera condición

$$-2 \sum_{n=1}^{N} (f_n - F(x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n)) \ \emptyset_i \ (x_n) = 0$$

Donde se debe entender la sustitución

$$F(x_n, c_1, \ldots c_n) = \emptyset_{1,2,\ldots,n}$$

Descomponiendo la sumatoria en términos parciales:

$$c_1 \sum_{n=1}^{N} \emptyset_i \ (x_n) \ \emptyset_1(x_n) + c_2 \sum_{n=1}^{N} \emptyset_i \ (x_n) \ \emptyset_2(x_n) + \ldots + c_k \sum_{n=1}^{N} \emptyset_i \ (x_n) \ \emptyset_k(x_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{N} f_n \ \emptyset_i \ (x_n) \ \forall \ i = 1,2,\ldots,k$$

Que es el modelo generador de cualquier ajuste deseado para cualquier polinomio de grado n.

3.4 ELEMENTOS DE LA TEORIA DE SEÑALES EN SISTEMAS DISCRETOS

3.4.1 IDEAS GENERALES

En los párrafos anteriores hemos descrito los métodos que se utilizan comunmente para delinear contornos de cualquier tipo de datos, en cualquier nivel (microscópico o macroscópico), para cualquier escala (en el sentido que se utiliza en el capítulo; ya sea nominal, ordinal, radial, etc.). Con ello podemos conocer el valor aproximado de determinada propiedad o medición en algún entorno o región de interés.

En adelante estudiaremos las respuestas que se obtienen de la tierra, a través de mediciones físicas y el tratamiento que nos concierne, para obtener el máximo de información de estas respuestas a las que les hemos llamado señales.

Una vez que nuestra respuesta, está representada por una secuencia o por una función analógica, es entonces susceptible de ser procesada por los métodos que se describen a continuación. Estos métodos tienen como objetivo limpiar las señales del ruido intrínseco del fenómeno que les atañe y conocer fielmente la respuesta. A esto es a lo que llamamos mejorar la resolución.

Finalmente desarrollaremos el tratamiento de las señales haciendo uso de la teoría de sistemas lineales, describiendo todas las herramientas con que cuenta esta teoría.

3.4.2 CONCEPTOS DE SISTEMAS LINEALES

El vocablo señal discreta o digital significará una secuencia de números representados con una letra con subíndice. El término sistema se refiere (como vimos en la sección 1.2) a dos conjuntos de objetos C_f y C_g que asignan de acuerdo con una regla a cada elemento f de C_f un elemento g de C_g. Esta regla define un sistema con entrada f y salida g. Así pues, un sistema S definido de esta forma es una correspondencia o transformación del conjunto de entrada C_f al conjunto de salida C_g; (esta correspondencia se lleva a cabo usando la transformada Z o geométrica, comunmente; aunque hay diversos métodos).

Si queremos hacer extensivo nuestro sistema a un plano, o bien si $f = f(x,y)$ y $g = g(x,y)$ son funciones de dos variables, entonces, S es un sistema bidimensional. Si f y g son vectores, entonces S es un sistema multi-entrada y multi-salida.

Otra forma alternativa de describir un sistema es por medio de ecuaciones diferenciales, o bien en términos de sus elementos, o sea, por medio de una combinación de sistemas simples definidos terminalmente.

Nuestros elementos de trabajo serán sistemas de datos que aparecen como un tren de pulsos en forma discreta, muestreados igualmente espaciados para un instante; y sistemas calculados digitalmente en donde las variables aparecen como una secuencia de números en forma discreta, igualmente espaciados en ciertos instantes de tiempo.

Un arreglo puede ser pues, tanto un tren de pulsos, como una secuencia de números.

Cada serie de datos, ya sean pulsos o números, en una secuencia de tiempo son llamadas series de tiempo; aunque puede ser una serie de variables de otro tipo, espacial por ejemplo, pero su estudio se conoce en particular como análisis de series de tiempo, por lo que en adelante hablaremos de series de datos.

Las series de datos ocurren en todos los ámbitos de la ciencia. Los datos económicos siempre aparecen en forma numérica como series de tiempo, algunos datos meteorológicos, como la temprreratura diaria, son series numéricas de tiempo. También en Geología se obtienen secuencia de números en porcentajes de cantidades minerales espaciadas de manera equidistante. Así mismo en Geofísica, aparecen secuencias en series de datos en todos los métodos de exploración.

En el caso de obtener señales continuas, podemos leer o medir el valor del parámetro a intervalos iguales, generando series de datos.

Una serie de datos representa una información limitada de la función contínua, cuya exactitud mejora, mientras el espaciamiento tiende a un valor muy pequeño; pero no puede ser cercano a cero porque el trabajo de muestreo y procesado de valores llega a ser muy complicado; más bien hay que seguir el teorema del muestreo para reconstruir una señal.

A menudo una serie de datos representa una señal continuada sobre todo el tiempo, desde el remoto pasado hasta el distante futuro. De tal manera que podemos decir que cada serie de tiempo tiene infinito tiempo de duración o para series de datos en general infinita magnitud. No se puede por tanto en ningua situación, obtener los valores de una serie de datos sobre un intervalo finito; porque un finito número de datos representa una muestra de una serie de datos de magnitud infinita, por lo que llamaremos a una porción finita como muestra de la serie.

Ondículas.- Una ondícula es una señal caracterizada por dos propiedades:

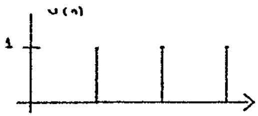
1) Escalamiento.- Una ondícula tiene un orígen definido (o arribo), es decir, todos los valores de la secuencia antes del orígen son cero.
2) Estabilidad.- Una ondícula tiene energía finita.

Por ejemplo, sea la señal definida por la siguiente secuencia: 4, 2, 1, 0, 0. Para los índices 0, 1, 2, 3, 4. Su representación sería $(b_0, b_1, b_2) = (4, 2, .1)$ y cuya energía es $P_n = b_0^2 + b_0^2 + \dots + b_n^2 = P_{n-1} + b_n^2$. Por lo tanto dicha señal es una ondícula pues satisface ambas propiedades.

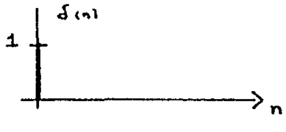
Para su representación gráfica empleamos puntos en el plano discreto:

Empleamos con frecuencia las señales especiales u(n) (escalón unitario) y $\delta(n)$ (impulso unitario), definidas como sigue:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



La misma señal del ejemplo anterior puede ser expresada por un tren de pulsos.

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, \delta(n-k) = 4\, \delta(n) + 2\, \delta(n-1) + \delta(n-2) + 0 + 0$$

Sistema discreto.- Un sistema discreto es una regla que asocia a cada secuencia $f(n)$ otra secuencia $g(n)$. De esta forma, un sistema discreto es una aplicación entre la secuencia $f(n)$ y la secuencia $g(n)$.

$$g(n) = L\, f(n)$$

El dominio $f(n)$ se designará por entrada y el codominio de la transformación $g(n)$ por salida o respuesta. La regla de transformación más adelante la conoceremos como filtro.

Para la determinación del valor de la salida $g(n)$ para un valor de n dado, debemos conocer, en general, la entrada $f(n)$ para toda n perteneciente al pasado y futuro. Sin embargo, dicho conocimiento no es siempre necesario:

1.- $[g(n) = f^2(n)]$.- Este sistema es no lineal y el valor presente de la salida $g(n)$ depende tan solo de $f(n)$. A este sistema se le llama de manera especial "sistema sin memoria".

2.- $[g(n) = nf(n)]$.- Es un sistema lineal, sin memoria y variante con la variable independiente n.

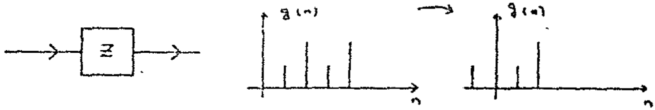
3.- $[g(n) = nf(n) + n^2 f(n-1)]$.- El valor presente $g(n)$ depende de $f(n)$ y del valor anterior $f(n-1)$. El sistema tiene memoria finita.

4.- $g(n) + 2g(n-1) = f(n)$.- La solución no depende sólo de $f(n)$ sino de la anterior ecuación de recurrencia $g(n-1)$ y para su solución tenemos un conjunto infinito de ecuaciones, una para cada n. Como se mostrará después, bajo ciertas condiciones (causalidad) estas ecuaciones tienen una solución única, por consiguiente definen un sistema (recurrente).

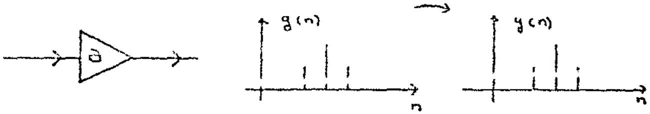
En los tres primeros ejemplos la salida sólo depende de $f(n)$.

Sistemas de interés especial.- Existen dos elementos fundamentales para la construcción de sistemas que son:

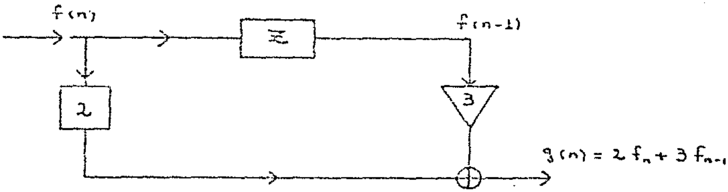
Elemento de retardo $\qquad g(n) = f(n-1)$



Multiplicador $\qquad g(n) = af(n)$



Ejemplo.- Sea g(n) una combinación de entradas: $g(n) = 2f(n) + 3f(n-1)$



Linealidad de un sistema.- Esta es una de las propiedades más importantes de los sistemas, ya que existe un aparato matemático que permite su análisis. Un sistema es lineal si se cumple que:

$$L\ [a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n)] = a_1 L_1\ [f_1(n)] + a_2 L\ [f_2(n)]$$

Sistema invariante en el tiempo.- Este es un sistema muy utilizado en el análisis de sistemas lineales y se expresa como sigue:

$$L\ [f(n-k)] = g(n-k)$$

Un desplazamiento en la entrada produce un desplazamiento igual a la salida, es decir, si es homomórfico.

3.4.3. FILTROS DIGITALES

3.4.3.1. FILTROS

Un filtro es una herramienta matemática que puede ser utilizada para todo tipo de señales, sin importar el origen o la índole del fenómeno.

Los filtros que nos interesan son principalmente digitales, ya que los datos que registramos los obtenemos en secuencias discretas. La aplicación de este tratamiento se extiende a todas las áreas que requieran el manejo de secuencias de datos, ondículas y series de tiempo.

El filtro digital se puede manejar convenientemente en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia. Un filtro digital es réepresentado por una frecuencia de números llamada coeficientes de los pesos.

El mecanismo de un filtro digital en el dominio del tiempo se describe con la ayuda de la teoría de la transformada discreta Z.

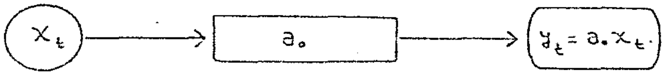
Un importante criterio para la clasificación de filtros digitales es la noción de retraso de mínima fase que veremos brevemente, más adelante.

3.4.3.2. FILTROS CAUSALES RECURSIVOS

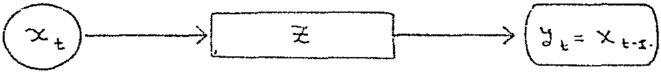
El primer paso para este tratamiento es contar con una secuencia de números. Si éste no es el caso, entonces a una señal continua que ha sido grabada en una curva dato vs variable independiente, la transformamos de una secuencia de números (ya sea arbitrariamente, con igual espaciamiento, o aplicando el criterio de la teoría del muestreo). Cada número de la secuencia representa la lectura, o la amplitud, de la señal en un específico valor de la variable independiente. Generalmente se escoge un incremento igualmente espaciado.

Un filtro digital es causal, si su salida es presente depende solamente de las entradas presentes y de las entradas pasadas (t, t-1, t-2, ...). El caso más simple posible es un filtro digital con un coeficiente constante a_0 llamado filtro constante.

La nomenclatura usada para este sistema es de acuerdo con el diagrama: x_t = entrada, a_0 = filtro, y_t = salida

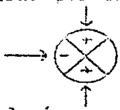


El filtro de retraso unitario es otro caso especial, que podemos representar de acuerdo al diagrama: Z = filtro de retraso unitario.

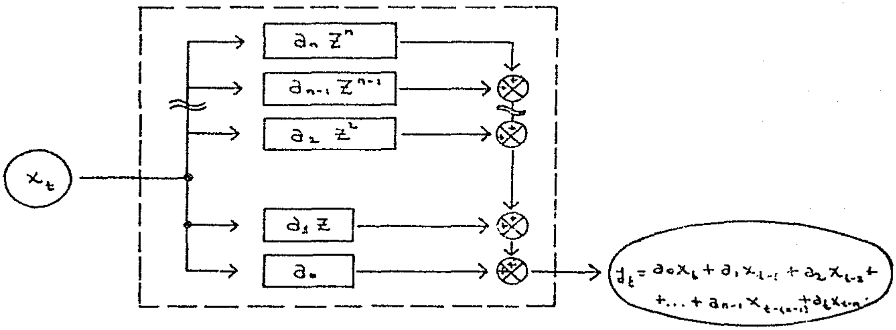


Al conectarlos en serie, actúan aumentando los retrasos, Z, Z^2, Z^3,..., Z^n, siendo Z^0 el filtro identidad.

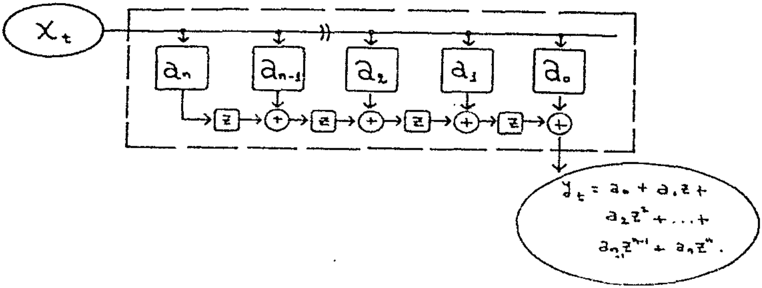
La salida resultante de los filtros conectados en paralelo es una serie de términos que se suman al pasar por un mezclador como el que se indica:



De esta manera se produce el más general filtro causal con un finito número de elementos de retraso:



O bien con retraso unitario:



A estos últimos filtros se les conoce con el nombre de filtros causales recursivos. Esto se debe a que sufren un proceso de retroalimentación.

De esta manera al polinomio de enésimo orden en Z dado por:

$$A(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots + a_n Z^n$$

Se le llama transformada Z de enésimo orden de un filtro recursivo causal con los coeficientes de los pesos constantes a_0, a_1, ... , a_n. Llamados también memoria de la función o función de respuesta al impulso del filtro.

Una notación más compacta de:

$$y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \ldots + a_n x_{t-n}$$

es:

$$\boxed{y_t = \sum_{s=0}^{n} a_s x_{t-s}} \qquad \text{para } t = 0, 1, 2, \ldots, m + n$$

Que es la operación conocida como convolución.

Podemos hacer una extensión análoga a filtros continuos o analógicos obteniendo una representación similar, operando en variable continua y resultando una integral, a través de un proceso de transformación equivalente a la transformada Z, usando la transformada de Fourier.

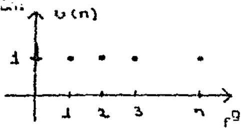
3.4.4 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Si tenemos una sucesión de números para cualquier función discreta f(n), multiplicando esa sucesión por la variable Z exponencial se tendrá:

$$f^{g}(Z) = f(0)Z^{0} + f(1)Z^{1} + f(2)Z^{2} + \ldots + f(n)Z^{n}$$

Donde $f^{g}(Z)$ = operador transformación, que en forma general se expresa: $f^{g}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{n}$. Para cualquier función discreta se puede calcular su correspondiente función generatriz: $f(n) \leftrightarrow f^{g}(Z)$.

Por ejemplo para la función escalón unitario, cuya representación gráfica se ve a continuación:



$$f^{g}(Z) = f(0)Z^{0} + f(1)Z^{1} + \ldots + f(n)Z^{n}$$

$$f^{g}(Z) = 1(1) + 1Z + 1Z^{2} + \ldots + 1Z^{n}$$

Cuya convergencia de la serie nos da:

$$f^{g}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{n} = \frac{1}{1-Z}$$

Otros ejemplos:

$$\delta(n) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(n-m) \leftrightarrow Z^{m}$$

$$u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-Z}$$

$$a^{n} \leftrightarrow \frac{1}{1-aZ}$$

La transformada Z cumple con las siguientes propiedades:

Linealidad.- $f^{g}(Z) = af^{g}(n) + bg^{g}(n)$

Convolución de dos funciones.- $f^g(Z) = f(n) * g(n)$

Multiplicación de dos transformadas.- $F^g(Z) = f^g(Z) \cdot g^g(Z)$

Estableciéndose

$f(n) * g(n) \leftrightarrow f^g(Z) \cdot g^g(Z)$ (Homomorfismo)

Cuyas propiedades son muy útiles debido a que la transformada Z representa el filtro recursivo causal de retraso y que además resultan análogas al caso continuo, en cuyo caso sabemos se utiliza la transformada de Fourier.

Al igual que en el caso continuo, también existe la transformada inversa para el operador Z discreto. Para encontrar la función discreta dada su transformada, utilizamos el proceso de antitransformar, que es equivalente a conocer la función de entrada a partir de una salida determinada. Este es uno de los problemas fundamentales en Geofísica.

Hasta aquí sólo hemos visto el uso directo que podemos hacer de la transformada Z como si fuera un filtro; pero existen más métodos que escribiremos más adelante, para resolver este tipo de problemas, sin recurrir directamente a la transformada Z.

Por el momento enunciaremos los métodos de antitransformación para Z:

1) Busqueda en tablas,
2) Por el método de fracciones racionales,
3) Desarrollo de Maclaurim.

Ejemplo:

$$f^g(Z) = \frac{5Z - 3}{6Z^2 - 3Z - 2Z + 1} = \frac{5Z - 3}{(1 - 2Z)(1 - 3Z)} = \frac{A}{1 - 2Z} + \frac{B}{1 - 3Z}$$

$$f^g(Z) = \frac{1}{1 - 2Z} - \frac{4}{1 - 3Z}$$

Que fue obtenido por fracciones racionales y a continuación buscamos en tablas:

$$\frac{1}{1 - 2Z} \leftrightarrow 2^n \qquad \frac{-4}{1 - 3Z} \leftrightarrow -4 \cdot 3^n$$

$$f(n) = 2^n - 4 \cdot 3^n$$

El desarrollo de Maclaurin consiste en que $f^g(Z)$ es la suma de las series de potencias cuyos coeficientes son f(n) para n = 0, 1, 2, 3, ... , de donde:

$$f(n) = \left(\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dZ^n} f^g(Z) \right)_{z = 0}$$

Ejemplo:

$$f^g(Z) = \frac{1}{1 - aZ}$$

$$\frac{d}{dZ} f^g(Z) = \frac{1 \cdot a}{(1 - aZ)^2}$$

$$\frac{d^2}{dZ^2} f^g(Z) = \frac{1 \cdot 2 \cdot a^2}{(1 - aZ)^3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n}{dZ^n} f^g(Z) = \frac{n! \cdot a^n}{(1 - aZ)^{n+1}}$$

Colocando este término en la fórmula general:

$$f(n) = \frac{1}{n!} \left(\frac{n! \cdot a^n}{(1 - aZ)^{n+1}} \right)_{z = 0}$$

$f(n) = a^n$ Como era de esperarse

Una antitransformada representa un filtro inverso que veremos más adelante bajo un tratamiento diferente. Pero ésta idea de antitransformada ayuda a aclarar el concepto de filtro inverso y a usar métodos alternativos de solución.

Una consecuencia importante de la descripción de sistemas lineales en el dominio de la transformada es que la operación convolución en el dominio original se convierte en una operación de multiplicación en el dominio de la transformada. El procedimiento es análogo al de reemplazar la multiplicación de dos números por la suma de sus logaritmos.El cálculo de la transformación discreta se hace comunmente en probabilidad en el método de generación de momentos.

El empleo de la convolución constituye un método de análisis, que se basa en la propiedad de superposición para los sistemas lineales. Esta operación nos da a conocer la respuesta o salida del sistema provocada por seÑales de entrada.

En general, se usa la convolución como un proceso de medición. El instrumento de observación siempre debe proporcionar un promedio ponderado de la cantidad física que se observa. El valor que proporciona el instrumento es la convolución de la función de ponderación del instrumento y la distribución (más que la cantidad misma) de la cantidad física.

3.4.5 FUNCION RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO

Este es uno de los conceptos más importantes en le teoría de filtros y es una consecuencia de la transformación de la función impulso unitario.

Sea el tren de pulsos:

$$f_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \quad \delta_{n-k}$$

Empleando la linearidad del sistema para calcular su salida, primero se calculan las salidas debidas a cada término de la entrada $f_k \; \delta_{n-k}$ y despues se sumarán todas las salidas para la respuesta total.

$$f_0 \delta_k \rightarrow f_0 \; h_k$$

$$f_1 \, \delta_{k-1} \rightarrow f_1 \; h_{k-1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_j \; h_{k-j}$$

$$L[\delta_k] = h_k$$

A esta última ecuación se le llama respuesta del sistema al impulso unitario. El empleo de la superposición y la respuesta de un sistema a un impulso es una caracterización más general que la que frecuentemente se usa empleando transformadas. Por ejemplo, si un sistema contiene coeficientes variables en el tiempo, el método que emplea transformadas deja de ser válido; sin embargo, es válida la caracterización en términos de la respuesta al impulso variable en el tiempo [h(k,n)] y de la suma o integral de superposición.

Otro ejemplo de la naturaleza general del método se presenta al estudiar los sistemas lineales exitados por señales aleatorias de entrada. Este caso particular se refiere a sistemas como los que se encuentran en métodos Geofísicos de fuentes naturales: Gravimetría, Magnetometría, Magnetotelúricos, De las corrientes telúricas, etc. Empleando la respuesta al impulso y la integral de superposición se puede estudiar una gama mayor de tipos de señales aleatorias de entrada con los métodos de transformadas.

En un problema de medición, como es el caso del problema inverso en los métodos geofísicos, biofísicos, astrofísicos, etc., tenemos el problema de determinar el estado real de lo que se mide basándose en una medición física. Debido a que los procesos de medición siempre deben regular o filtrar la cantidad física real que se mide, debe tomarse en cuenta este efecto de filtrado a fin de lograr una medición más exacta. Si se supone que el proceso de medición es lineal, entonces la solución es deconvolucionar el proceso lineal del instrumento de medición de la medición resultante. Con símbolos, el problema puede plantearse como sigue: sea $y(t) = h(t) * x(t)$.

Se conocen $y(t)$ que es el resultado del proceso de medición, como es el caso de los métodos geofísicos. También se conoce $h(t)$ que es la función del instrumento. El problema consiste en calcular $x(t)$, que es el fenómeno físico real.

Por la naturaleza de los datos, consideramos la versión discreta de este problema, es decir, dada y_k y h_k deseamos calcular x_k; a partir de:
$y_k = h_k * x_k$

A este problema se le llama Deconvolusión.

$$y_k = \sum_{n=0}^{k} x_n h_{k-n}$$

$$y_0 = x_0 h_0 \qquad \ldots(1)$$

$$y_1 = x_0 h_1 + x_1 h_0 \qquad \ldots(2)$$

$$y_2 = x_0 h_2 + x_1 h_1 + x_2 h_0 \ldots(3)$$

....
....

La primera ecuación puede despejarse para x_0, ya que se conocen tanto y_0 como h_0.

$$x_0 = \frac{y_0}{h_0}$$

La segunda ecuación también tiene solución, puesto que despejamos x_1 y substituimos el valor de x_0:

$$x_1 = [y_1 - \frac{y_0 h_1}{h_0}] \frac{1}{h_0}$$

Procediendo de la misma manera continuamos con toda la secuencia x_k.

Una de las propiedades prácticas más importantes que habíamos visto, de la transformada Z, es la convolución.

$$\begin{aligned} x_k &\leftrightarrow X(Z) \\ h_k &\leftrightarrow H(Z) \\ y_k = \sum_{n=0}^{k} x_n h_{k-n} &\leftrightarrow Y(Z) = X(Z)H(Z) \end{aligned}$$

Usando el principio de la transformada Z a continuación demostramos esta propiedad:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n h_{k-n}$$

$$Y(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n h_{k-n} Z^k$$

Distribuyendo apropiadamente la ecuación:

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n Z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{k-n} Z^{k-n}$$

Finalmente:

$$Y(Z) = X(Z) \quad H(Z)$$

A H(Z) se le denomina función de transferencia del sistema.

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$$

Esta relación es lo que caracteriza el sistema, es decir, si nosotros conocemos la función de transferencia nuestro sistema queda determinado. En seguida veremos cómo es posible encontrar dicha función. Sea la entrada de un sistema lineal una progresión geométrica:

$$x_n = r^n$$

Como puede deducirse de la propiedad conmutativa de la convolución:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{k-n} h_n = r^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k r^{-n}$$

también es una progresión geométrica multiplicada por el valor H(r) de la transformada Z:

$$H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k Z^{-k}$$

de la secuencia h_k.

Así, la respuesta a Z^k es igual a $H(Z)Z^k$.

$$L\ [Z^k] = H(Z)Z^k$$

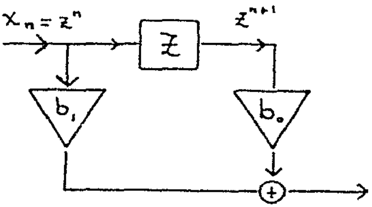
La función H(Z) será el coeficiente de Z^k en la respuesta que resulte. Para el elemento de retardo, $H(Z) = Z^{-1}$. En efecto, si $x_k = Z^k$, entonces $y_k = x_{k-1} = Z^{k-1} = Z^{-1}\ Z^k$.

Para el multiplicador, $H(Z) = a$. En efecto, si $x_k = Z^k$, entonces: $y_k = ax_k = aZ^k$.

Ejemplo: Sea la ecuación de recurrencia $6y_k + 5y_{k-1} + y_{k-2} = x_k$. Si $x_k = Z^k$, entonces $y_k = H(Z)\ z^k$. Substituyendo este valor por las y_k nos queda: $6H(Z)\ Z^k + 5H(Z)\ Z^{k-1} + H(Z)\ Z^{k-2} = Z^k$. Reagrupando: $H(Z)\ (6z^k + 5Z^{k-1} + Z^{k-2}) = Z^k$.

La función de transferencia del sistema será: $H(Z) = \dfrac{1}{6+5Z^{-1} + Z^{-2}}$

Ejemplo:



$$H(Z) = b_0 Z + b_1$$

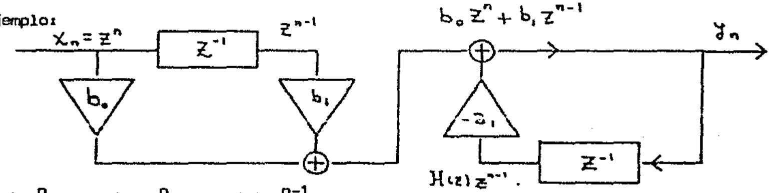
$$y_n = H(Z)\, Z^n = b_0 Z^{n+1} + b_1 Z^n$$

Ejemplo:

$$y_n = H(Z)\, Z^n = -a_1 H(Z)\, Z^{n-1} + b_0 Z^n + b_1 Z^{n-1}$$

$$H(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1}}{1 + a_1 Z^{-1}}$$

Ejemplo:



$$y_n = H(Z)\, Z^n = b_0 H_1(Z)\, Z^n + b_1 H_1(Z)\, Z^{n-1}$$

$$H_1(Z)\, Z^n = -a_1 H_1(Z)\, Z^{n-1} + Z^n$$

$$H\,(Z) = (b_0 + b_1\, Z^{-1})$$

$$H_1(Z) = \frac{b_0 + b_1\, Z^{-1}}{1 + a_1 Z^{-1}}$$

En el primer ejemplo tenemos un sistema no recurrente, ya que H(Z) se haya directamente siguiendo la traza de Z^n.

En el segundo ejemplo tenemos una combinación de un sistema recurrente con uno no recurrente (cascada).

En el tercero se hace necesaria la introducción de una salida auxiliar con función de transferencia $H_1(Z)$ y se resuelve un sistema de dos ecuaciones. Los ejemplos segundo y tercero son equivalentes ya que tienen la misma función de transferencia.

Sistemas en cascada.- Dos sistemas están conectados en cascada si la salida del primero es la entrada del segundo. Designamos H y H(Z) a la respuesta del pulso delta y función de transferencia respectivamente, concluyendo que:

$$h_n = h_{1n} * h_{2n}, \qquad H(Z) = H_1(Z)\, H_2(Z)$$

3.4.6 RESPUESTA AL IMPULSO

3.4.6.1 ANALISIS DE UN SISTEMA UTILIZANDO LA RESPUESTA AL IMPULSO

Hemos visto, que para conocer la función de transferencia o bien al calcular la suma de convolución para conocer la respuesta de un sistema lineal, es necesario evaluar la respuesta al impulso del sistema. El método más general que existe en el análisis de la respuesta del sistema, está basado en el conocimiento de las soluciones homogéneas de la ecuación de diferencia que modela el sistema. La cualidad del método estriba en que no se presenta el problema de divergencia, ya que la salida es siempre de forma cerrada.

En seguida presentamos el modelo de un sistema, expresado por una ecuación de diferencia.

$$L[Y_k] = Y_{k+n} + b_{n-1}Y_{k+n-1} + b_{n-2}Y_{k+n-2} + \dots + b_0 Y_k = X_k$$

Donde L representa el operador de diferencia

$$L = S^n + b_{n-1}S^{n-1} + b_{n-2}S^{n-2} + \dots + b_0.$$

Para S que representa un desplazamiento

$$S[Y_k] = Y_k + 1$$

$$S^2[Y_k] = Y_k + 2$$

$$\vdots$$

$$S^n[Y_k] = Y_k + n$$

Si la entrada es δ_k, obtenemos la secuencia respuesta al impulso. Al aplicar una secuencia de impulsos al segundo miembro de la ecuación general original, sabemos que $L[h_k] = 0$, $k > 0$, ya que para $k > 0$, $\{\delta_k\} = 0$. De este modo la respuesta a un impulso de secuencia $[h_k]$, debe satisfacer la ecuación de diferencia homogénea correspondiente a la ecuación original para $k > 0$. Con esto queremos decir que $[h_k]$ se expresa como una suma de n soluciones linealmente independientes $\{\emptyset_{1k}\}$, $\{\emptyset_{2k}\}$, ..., $\{\emptyset_{nk}\}$ de la ecuación $L\{\emptyset_k\} = 0$. O sea que, $h_k = c_1\emptyset_{1k} + c_2\emptyset_{2k} + \ldots + c_n\emptyset_{nk}$, $k > 0$.

Las constantes c_i, $i = 1,2,\ldots,n$; se evaluan basándose en las condiciones iniciales para h_k de la manera siguiente:

Hacemos en la ecuación original $k = -n$, para un impulso de entrada $x_k = \delta_{-n}$.

$$h_0 + b_{n-1}\, h_{-1} + b_{n-2}\, h_{-2} + \ldots + b_0\, h_{-n} = \delta_{-n} = 0.$$

Suponemos que el sistema está en reposo: $h_k = 0$, $k < 0$. O sea que $h_0 = 0$.

Ahora hacemos en la ecuación original $k = -n + 1$ para encontrar el valor de h_1:

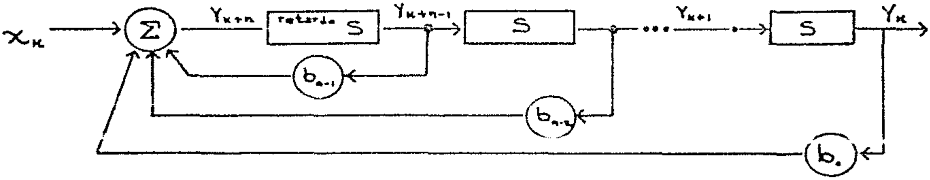
$$h_1 + b_{n-1}\, h_0 + b_{n-2}\, h_1 + \ldots + b_0\, h_{-n+1} = \delta_{-n+1} = 0$$

De donde obtenemos $h_1 = 0$.

Si operamos recursivamente, análogamente obtenemos las condiciones iniciales:

$$h_1 = h_2 = h_3 = \ldots = h_{n-1} = 0, \; h_n = 1$$

En un diagrama de bloques que represente a la ecuación original observaríamos lo siguiente:



En este diagrama apreciamos que para un impulso de entrada $[d_k]$, el valor unitario en k = 0 se retrasa n veces antes de aparecer en la salida. De este modo, cuando el sistema está en reposo, la primera salida diferente de cero ocurrirá para k = n y tiene valor 1. Que son las condiciones iniciales que habíamos obtenido.

La secuencia respuesta al impulso es:

$$hk = \begin{cases} c_1\phi_{1k} + c_2\phi_{2k} + c_3\phi_{3k} + \ldots + c_n\phi_{nk}, & k > 0 \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

El valor de las constantes c_i, i = 1,2,...,n se evaluan de las n ecuaciones que se obtienen con las condiciones iniciales:

$$c_1\phi_{1,1} + c_2\phi_{2,1} + \ldots + c_n\phi_{n,1} = 0$$

$$\vdots$$

$$c_1\phi_{1,n-1} + c_2\phi_{2,n-1} + \ldots + c_n\phi_{n,n-1} = 0$$

$$c_1\phi_{1,n} + c_2\phi_{2,n} + \ldots + c_n\phi_n = 1$$

De los métodos existentes, este método de clacular la secuencia respuesta al impulso de un sistema de tiempo discreto posiblemente es el más general y poderoso. Puede usarse inclusive para sistemas variables en el tiempo, siempre que sea posible calcular las soluciones homogéneas.

3.4.6.2 GENERALIZACION DEL MODELO DE ECUACION DE DIFERENCIA

En algunas aplicaciones, como en el cálculo (función composición), se pueden usar funciones de excitación que son funciones d x_k. Estas funciones se expresan como: $L_D[x_k]$. Por ejemplo, $x_{k+2} + 8x_{k+1}$ puede ser la secuencia de excitación en lugar de x_k; en tal caso la respuesta impulso del sistema $L[Y_k] = x_{k+2} + 8x_{k+1}$, no es la misma que la del sistema modelado por $L[Y_k]=x_k$.

Para explicar la colución de un sistema con entrada funcional $L[Y_k] = L_D[x_k]$, emplearemos el operador inverso L^{-1} para representar el sistema en el diagrama de bloque debido a que la salida Y_k se obtiene como $Y_k = L^{-1}[x_k]$. Implícitamente el operador inverso queda definido como $L^{-1}[L[Y_k]] = Y_k$.

$$x_n \longrightarrow \boxed{L^{-1}} \longrightarrow Y_k = L^{-1}[x_k]$$

$$L[Y_k] = x_k$$

$$L[Y_k] = L_O[x_k]$$

Aplicando a ambos miembros del sistema el operador inverso L^{-1}

$$Y_k = L^{-1}[L_D[x_k]]$$

$$x_k \longrightarrow \boxed{L_D} \xrightarrow{\hat{x}_k} \boxed{L^{-1}} \longrightarrow Y_k$$

En la figura $\hat{x}_k = L_D[x_k]$. Para sistemas lineales invariables en el tiempo, L_D y L^{-1} son conmutativas. La respuesta del sistema $L[Y_k] = L_D[x_k]$ al impulso se calcula analizando la respuesta al impulso de la primera parte del sistema, representada por $L[Y_k] = x_k$. A la que llamamos $\hat{h}_k$; tal y como planteamos la solución del problema original. Finalmente, para obtener la respuesta completa al impulso, se 'aplica' L_D a $\hat{h}_k$.

$$h_k = L_D[\hat{h}_k]$$

La respuesta al impulso de un sistema tal y como $L[Y_k] = L_D[X_k]$ puede alternativamente obtenerse convolucionando dos respuestas al impulso, una obtenida del sistema $L[Y_k]$ y la otra del sistema $L^{-1}{}_D[Y_k] = X_k$.

Ejemplo: Encontrar la respuesta al impulso del sistema:

$$Y_{k+2} - 5Y_{k+1} + 6Y_k = X_{k+2} - 3X_k$$

Primero se calcula la respuesta para el sistema:

$$Y_{k+2} - 5Y_{k+1} + 6Y_k = X_k.$$

Cuya ecuación característica nos da $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$, o sea que la respuesta al impulso parcial será:

$$\hat{h}_k = \begin{cases} c_1\, 3^k + c_2\, 2^k, & k > 0 \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

Si las condiciones iniciales son $h_1 = 0$ y $h_2 = 1$, evaluamos las c_i's:

$$\hat{h}_1 = 0 = 3c_1 + 2c_2$$

$$\hat{h}_2 = 1 = 9c_1 + 4c_2$$

Resolviendo el sistema para c_1 y c_2, obtenemos que $c_1 = \frac{1}{3}$ y $c_2 = \frac{-1}{2}$ quedando:

$$\hat{h}_k = \begin{cases} 3^{k-1} - 2^{k-1}, & k > 0. \\ 0, & k \leq 0. \end{cases}$$

Por las propiedades de la función escalón, podemos reducir la ecuación en:

$$\hat{h}_k = (3^{k-1} - 2^{k-1})\,[u_{k-2}]$$

donde $[u_k]$ es una secuencia de escalones unitarios.

La secuencia de la respuesta al impulso completa nos queda de la siguiente forma: (tomando en cuenta que $L_D = S^2 - 3$, ya que $(S^2 - 3)\,[X_k] = X_{k+2} - 3X_k$).

$$h_k = (S^2 - 3)\,[\hat{h}_k] = (S^2 - 3)\,[(3^{k-1} - 2^{k-1})\,[u_{k-2}]] = (3^{k+1} - 2^{k+1})\,[u_k] - 3(3^{k-1} - 2^{k-1})\,[u_k - 2]$$

$[u_k]$ puede representarse como:

$$[u_k] = [d_k] + [d_{k-1}] + [u_{k-2}]$$

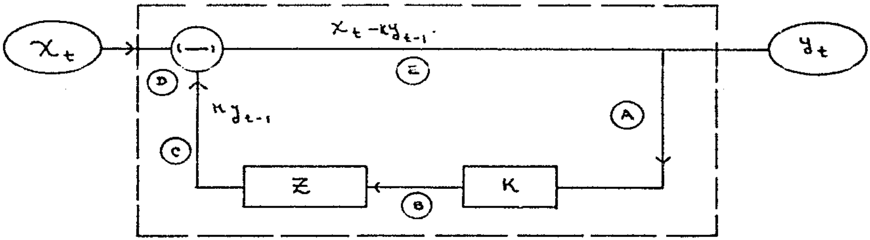
Sustituyendo y simplificando estos valores en h_k nos queda:

$$h_k = [d_k] + 5[\delta_{k-1}] + (2.3^k - 2^{k+1})\,[u_{k-2}]$$

3.4.7 FILTROS RECURSIVOS (SU ESTABILIDAD Y FUNCION DE TRANSFERENCIA)

Podemos aprender algo interesante acerca del concepto de mínimo retraso mediante este sistema. La entrada del sistema es la serie de datos X_t, donde t denota la variable independiente: tiempo en Sísmica, espacio en Gravimetría, etc. De acuerdo con nuestra convención, el índice t se toma en forma discreta espaciado una unidad aparte.

En el punto A de la figura vemos el filtro de salida Y_t, la memoria que se guarda a través de la primera caja es la ondícula (K, 0, 0, 0...) y su transformada Z es: $K + 0Z + 0Z^1 + 0Z^2 + \ldots = K$.



Si la magnitud de K es menor que 1 ($|k|<1$), esta caja produce una constante atenuación. De otra manera, si $|k|>1$ se produce una constante amplificación.

La siguiente caja de B a C constituye un retraso unitario. La función de memoria sería la ondícula (0, 1, 0, 0...) cuya transformada Z es
$0 + 1\cdot Z + 0\cdot Z^2 + 0\cdot Z^3 + \ldots = Z$.

A continuación el mezclador suma la entrada X_t y la señal retrasada KY_{t-1}.

$$Y_t = X_t - KY_{t-1}$$

que es la ecuación de este filtro recursivo.

En términos de la transformada Z:

$$Y(Z) = X(Z) - KZ\,Y(Z)$$

$$X(Z) = Y(Z) + KZ\,Y(Z) = (1 + KZ)\,Y(Z)$$

La función de transferencia del filtro recursivo se define como el radio de la transformada Z de Y(Z) del sistema de salida a la transformada Z de X(Z) del sistema de entrada. Así que la función de transferencia es:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1 + KZ}$$

La transformada Z de la ondícula de magnitud dos (1,K) es:

$$1 + KZ$$

Así que, la función de transferencia H(Z) del filtro recursivo es el recíproco de la transformada Z de la ondícula (1,K). Si en la ondícula (1,K), $|K|<1$ es de mínimo retraso, y de máximo retraso si $|K|>1$. Ahora estableceremos, porqué el filtro recursivo es estable si preveemos que la ondícula (1,k) sea de mínimo retraso e inestable si es de máximo restraso.

Ejemplo: $|K|<1$ es una atenuación:

$t = 3$ $$Y_3 = X_3 - KY_2$$

$$Y_2 = X_2 - KY_1$$

$$Y_3 = X_3 - K(X_2 - KY_1)$$

$$Y_1 = X_1 - KY_0$$

$$Y_3 = X_3 - KX_2 + K^2X_1 = K^3Y_0$$

Continuando obtenemos:

$$Y_3 = X_3 - KX_2 + K^2X_1 - K^3X_0 + K^4X_{-1} - K^5X_{-2} + \ldots$$

Cuando $|K| < 1$ los términos 1, $-K$, K^2, $-K^3$, K^4, $-K^5$ tienden a cero, siendo la serie convergente y estable.

Cuando $|K| > 1$ los términos 1, $-K$, K^2, $-K^3$, K^4, $-K^5$ tienden a valores muy grandes y la serie diverge y es inestable.

Si aplicamos en la caja en B un multiplicador (1/K) en lugar de K sucede lo contrario.

Así, la estabilidad de los filtros está íntimamente ligada a las nociones de convergencia, en general, de las sucesiones y series.

3.5 MAPAS

3.5.1 INTRODUCCION

Dentro del contexto de sistemas y bajo las consideraciones de la Metageofísica que hemos venido manejando, existe una teoría única que nos permite trazar mapas y analizar tendencias, sin importar el tipo de parámetros de que se trate. El tema de secuencias de datos y de aproximación de funciones está íntimamente relacionado con el tema de mapas, ya que como sabemos, la obtención de datos no es un fin por sí misma, sino que su objetivo es proveer una base para la acción.

3.5.2 CONCEPTOS GENERALES

En lo que se refiere a los recursos naturales en todas sus áreas, como en la petrolera, la geohidrología, la minería, etc., se requieren de mapas para la ubicación de zonas apropiadas para la explotación, así como de mapas que muestren variaciones de determinadas propiedades que son índices obtenidos por la exploración. Así tenemos que existen datos geofísicos como la medición de la gravedad, del magnetismo o de las corrientes telúricas que muestran ciertos cambios de los campos naturales de la tierra; o bien, existen datos como los de la resistividad aparente en los métodos eléctricos o los de velocidad en los métodos sísmicos, que permiten ver el contraste entre las formaciones, con lo cual es posible trazar un mapa. Así mismo, datos geológicos tales como el contenido fósil de una formación, su composición litológica o mineralógica, pueden representarse como variaciones sobre áreas.

En general, podemos decir que toda variación de alguna propiedad física o estadística sobre un área puede ser utilizada para trazar un mapa que refleje el comportamiento de un fenómeno.

Los mapas son variaciones sobre áreas que se muestran en configuraciones o mapas de contorno que representan valores de la variable estudiada. Las distorsiones son debidas a fluctuaciones locales; a este fenómeno se le conoce como ruido el cual, en ocasiones es necesario remover.

El concepto de tendencia es muy común en el tema de mapas y se usa para designar cualquier cambio sistemático notable en una configuración.

El procedismiento de análisis consiste en dividir el mapa en dos partes, una asociada a cambios sistemáticos de gran escala, llamado el regional, y otra asociada a fluctuaciones de pequeña escala, llamada el residual. Este método puede utilizarse para probar modelos, estudiando si los cambios sistemáticos observados concuerdan con las predicciones del modelo: puede usarse para producir los valores que se encontrarían en cualquier zona del mapa, y también para examinar las variaciones mostradas por un mapa, con el objeto de desarrollar modelos susceptibles de ser relacionados con condiciones geológicas específicas, conocidas o inferidas. Matemáticamente, el efecto de calcular un regional a partir de un grupo de datos, para dejar el residual, es equivalente al efecto de un filtro eléctrico, el cual pasará los componentes de ciertas frecuencias y excluirá las restantes.

3.5.3 METODOS PARA LA SEPARACION DEL REGIONAL

3.5.3.1 METODO GRAFICO

Los métodos gráficos son muy usados para separar los efectos regionales Actualmente se puede hacer este trabajo por computadora. El método gráfico consiste en trazar curvas suaves en los perfiles observados, o suavizar los contornos de los mapas. El campo se separa en dos partes, como habíamos visto, pero la selección del regional en este método es empírica. El residual es determinado por la diferencia encontrada gráficamente entre el regional propio y el mapa observado.

3.5.3.2 METODO NUMERICO

Este método consiste en operar numéricamente con los valores obtenidos de un mapa en puntos regularmente espaciados formando una rejilla. Hay dos tendencias para las rejillas, una empírica-numérica y otra analítica. El método numérico elemental utiliza los valores observados en puntos de la rejilla localizados sobre un círculo que define el regional. El residual en el centro del círculo es entonces, la diferencia entre el promedio calculado y el valor observado en el punto central. Existen rejillas de distintos números de puntos (4, 6, 8). El valor de los residuales, y la naturaleza del mapa obtenido, dependen del diámetro del círculo, de la abertura de la rejilla y del número de puntos que se promedian.

3.5.3.3 METODO ANALITICO

Los métodos analíticos son el resultado de la labor efectuada por la base matemática proporcionada al método de las rejillas mediante la teoría del potencial aplicada al cálculo de las derivadas de funciones potenciales. Estos métodos no proporcionan ni un regional ni un residual en el sentido estricto; pero existen algunas relaciones entre ellos y el regional y el residual. Este es el caso de un círculo-anillo susceptible de programarse para resolverse con computadora (Morones, 1965, muestra diversas fórmulas aplicables a este caso, así como el programa correspondiente).

3.5.4 POLINOMIOS Y SERIES DE POTENCIAS

Los métodos utilizados en Geofísica y Geología, y que además son susceptibles de aplicación en otras áreas (Biomedicina, Astrofísica, Biofísica, etc.), utilizan superficies polinómicas aproximadas por el método de mínimos cuadrados.

Los polinomios más utilizados son los polinomios en series de potencias X, Y, ajustados por mínimos cuadrados. Otros polinomios, como los octogonales (Chebyshev, Legendre, etc.) se utilizan con éxito. Además, las dobles series de Fourier en X, Y, se usan para representar superficies regionales con propiedades cíclicas (Dean, 1958).

Para polinomios generales la decisión difícil es determinar el grado de la ecuación que representará el regional.

La mayor ventaja del método de polinomios en series de potencias aproximados por mínimos cuadrados, es que los datos pueden estar distribuídos irregularmente, y por ello no es necesario interpolar valores para formar una rejilla. El grado del polinomio y el tamaño del área determina las características de longitud de onda de la tendencia regional y del residual resultante, pero es sólo mediante el uso de 'filtros de longitud de onda', tales como las dobles series de Fourier, que es posible conocer con exactitud las frecuencias que resultarán en los mapas.

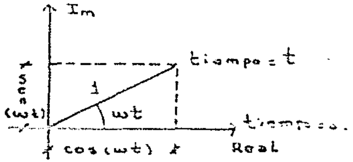
Los procesos de cálculo descritos, se pueden extender a 'hipersuperficies' que representan funciones de distintas variables independientes, o bien se puede interpretar como una regla que asocia a la propiedad en estudio y esas coordenadas.

3.6 DOMINIO EN LA FRECUENCIA Y FILTROS IMPORTANTES

3.6.1 AMPLITUD Y FASE CARACTERISTICOS DE FILTROS DIGITALES

Los filtros que hemos discutido en la sección previa operan en el dominio original: tiempo, espacio, frecuencia, número de onda, etc. De tal manera que los podemos llamar filtros digitales en el dominio original. Sin embargo, no todos los problemas tienen solución en este dominio, por lo que es necesario acostumbrarse a pensar en el filtrado en el dominio de la transformada. También se puede estudiar indistintamente o alternativamente la acción de los filtros, tanto en el dominio original como en el dominio de la aplicación, o combinar ambos. El escoger una aproximación en particular depende de la naturaleza del problema. A continuación procederemos a enunciar las relaciones que existen entreel dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia para los filtros.

El movimiento armónico simple es un movimiento sinusoidal en una frecuencia determinada con una velocidad angular constante.



Vector en el tiempo t = cos wt + isen wt = e^{iwt}

La función exponencial e^{iwt} representa un vector unitario con una velocidad angular w constante. Los componentes de este vector representan el movimiento armónico simple.

Ahora será para nosotros, esta función armónica la entrada de la mayoría de los filtros digitales que consideraremos. Primero consideremos el filtro constante a_o.

$$\boxed{X_t = e^{iwt}} \longrightarrow \boxed{a_o} \longrightarrow \boxed{Y_t = a_o e^{iwt}}$$

$$a_o e^{iwt} = a_o(\cos wt + i\,\mathrm{sen}\, wt)$$
$$= a_o \cos wt + ia_o \,\mathrm{sen}\, wt$$

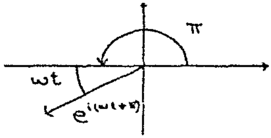
Así que la salida es también un vector en rotación, pero en lugar de tener magnitud unitaria, tiene una magnitud a_o.

Por ejemplo, para $a_o = \frac{1}{2}$ tanto la entrada como la salida forman el mismo ángulo wt con respecto al eje horizontal, por lo que decimos que X_t y Y_t están en fase. Si $a_o = -\frac{1}{2}$, la salida será $-\frac{1}{2}e^{iwt}$, que podemos escribir del siguiente modo:

$$-1 = e^{i\Pi}$$

$$\frac{1}{2}(-1)\, e^{iwt} = \frac{1}{2}\, e^{i\Pi}e^{iwt}$$

Con lo cual $\frac{1}{2}\, e^{i(wt\,+\,\Pi)}$ donde $\frac{1}{2}$ es la magnitud.



Regresando a nuestro ejemplo del filtro $a_o = -\frac{1}{2}$, podemos decir que el filtro de salida,

$$-\frac{1}{2}\, e^{iwt} = \frac{1}{2}\, e^{i(wt\,+\,\Pi)}$$

que puede ser graficado como un vector rotado de amplitud $\frac{1}{2}$ y fase Π radianes.

Si relacionamos la salida $\frac{1}{2}\, e^{i(wt\,+\,\Pi)}$ con la entrada e^{iwt}, obtenemos la función de transferencia del filtro.

$$H(w) = \frac{1/2\; e^{i(wt\,+\,\Pi)}}{e^{iwt}} = \frac{1}{2}\, e^{i\Pi}$$

Esta cantidad, que es en general compleja, puede ser descrita en términos de su magnitud y ángulo de fase. La magnitud de la función de transferencia se conoce como espectro de magnitud del filtro y su ángulo de fase, espectro de fase del filtro.

El siguiente filtro que consideramos, es el filtro de retraso unitario:

$$e^{iwt} \longrightarrow \boxed{Z} \longrightarrow e^{iw(t-1)}$$

Su función de transferencia es: $H(w) = \dfrac{e^{iw(t-1)}}{e^{iwt}} = e^{-iw}$

La función de transferencia de un filtro causal de enésimo orden será:

$$e^{iwt} \longrightarrow \boxed{a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n} \longrightarrow (a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n)\, e^{iwt}$$

$$\frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{a_0 e^{iwt} + a_1 e^{iw(t-1)} + \ldots + a_n e^{iw(t-n)}}{e^{iwt}}$$

$$= a_0 + a_1 e^{-iw} + \ldots + a_n e^{-iwn}$$

Nuestros resultados pueden ser tabulados de la siguiente forma:

Filtro recursivo causal		Correspondiente función de transferencia
a_0	$\longrightarrow$	a_0
Z	$\longrightarrow$	e^{-iw}
$a_1 Z$	$\longrightarrow$	$a_1 e^{-iw}$
$a_0 + a_1 Z$	$\longrightarrow$	$a_0 + a_1 e^{-iw}$
$\vdots$		$\vdots$
$a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n$	$\longrightarrow$	$a_0 + a_1 e^{-iw} + \ldots + a_n e^{-iwn}$

De tal manera que, la función de transferencia de cada filtro es formalmente obtenida por la substitución $e^{-iw} = Z$ en la transformada Z del filtro.

La función de transferencia en forma polar es $H(w) = |H(w)|\ e^{i\Psi(w)}$, para el filtro $a_0 + a_1 Z$

$$|H(w)| = \sqrt{(a_0 + a_1 \cos w)^2 + (a_1 \operatorname{sen} w)^2}$$

$$\Psi(w) = \tan^{-1} \frac{-a_1 \operatorname{sen} w}{a_0 + a_1 \cos w}$$

3.6.2 ESTABILIDAD

Un problema fundamental en el análisis de señales es incrementar la resolución en los eventos que tienen traslapes. Un método para atacar el problema es el uso de los filtros inversos digitales. Un filtro de estos puede tener la indeseable característica del crecimiento de la función de memoria ilimitadamente cuando aumenta la variable independiente, es decir, es divergente. Describiremos brevemente por este motivo la estabilidad de los filtros inversos.

La geometría de los ceros de un filtro en el plano complejo establece la convergencia de un filtro inverso.

Este problema también se resuelve con el filtro Wiener o de los mínimos cuadrados que veremos más adelante.

Este tema está relacionado con el método de la deconvolución. Es decir, tenemos una entrada determinada X_1, X_2, X_3,..., X_n y queremos obtener, por ejemplo, una salida que sea un spike de magnitud unitaria o bien un pulso unitario o una ondícula de la forma (1, 0, 0...0). Lo que necesitamos conocer es un filtro deseado que nos permita obtener a partir de una entrada determinada una salida determinada por su utilidad.

$$Y_t = \sum_{n=0}^{t} x_n\, h_{t-n}$$

$$Y(Z) = y_0 + y_1 Z + y_2 Z^2 + \ldots$$

Si la secuencia en y es la salida que deseamos y que hemos determinado por la ondícula (1, 0, 0... 0).

$$Y(Z) = 1Z^0 + 0Z^1 + 0Z^2 + \ldots$$

$$Y(Z) = 1$$

Así mismo

$$X(Z) = x_0 + x_1 Z + x_2 Z^2 + \ldots + x_n Z^n$$

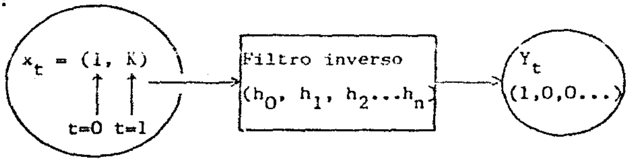
por el teorema de convolución para la transformada Z

$$Y(Z) = X(Z)\, H(Z)$$

$$H(Z) = \text{filtro deseado.}$$

$$h_0 + h_1 Z + h_2 Z^2 + \ldots = \frac{1}{x_0 + x_1 Z + x_2 Z^2 + \ldots + x_n Z^n}$$

Ejecutamos la división polinomial y obtenemos los coeficientes del filtro deseado:



$$h_0 + h_1 Z + h_2 Z^2 + \ldots = \frac{1}{1 + KZ}$$

$$X(Z) = 1Z^0 + KZ^1 + 0Z^2 + \ldots + 0Z^n = 1 + KZ$$

por el teorema del binomio:

$$\frac{1}{1 + KZ} = 1 - KZ + K^2Z^2 - K^3Z^3 + k^4Z^4 - \ldots$$

$$h_0 = 1,\ h_1 = -K,\ h_2 = K^2,\ h_3 = -K^3,\ h_n = K^n$$

$$(h_0,\ h_1,\ h_2,\ h_3 \ldots) = (1,\ -K,\ K^2,\ -K^3,\ \ldots)$$

Del valor de K depende la convergencia.

3.6.3 FILTROS NO CAUSALES

Estos filtros dependen del conocimiento de señales futuras. Para ello es necesario definir el operador filtro de adelanto unitario.

$$X_t \longrightarrow \boxed{Z^{-1}} \longrightarrow Y_t = X_t + 1$$

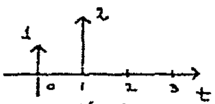
Por simetría podemos concluir, que el filtro Z^{-1} avanza la salida relativa a la entrada por una unidad de tiempo.

Por inducción el filtro Z^{-n} avanza n veces la salida relativa a la entrada en unidad de tiempo.

Por analogía el filtro recursivo no causal de enésimo orden general es:

$$a_{-n} Z^{-n} + a_{-(n-1)} Z^{-(n-1)} + \ldots + a_{-2} Z^{-2} + a_{-1} Z^{-1} + a_0.$$

Ejemplo:

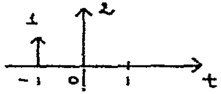


ondícula

$1 + 2Z$

causal

$Z^1(1 + 2Z) = Z + 2Z^2$



no causal

$Z^{-1}(1 + 2Z) = Z^{-1} + 2$

Por definición, un filtro no causal tiene un valor diferente de cero para la función de los pesos que están en tiempo negativo. Una interpretación de este fenómeno es que este filtro responde antes de que llegue el primer arribo de la señal, y esto es físicamente irrealizable. Por otro lado, el filtro causal tiene valor en sus coeficientes de los pesos sólo para $t \geq 0$, lo cual sí es realizable físicamente.

El filtro no causal sí es aplicable después de que ha sido grabada una señal, y decimos que se grabó en tiempo nominal.

El filtro causal es aplicable antes de recibir una señal y decimos que se utilizó en tiempo real.

El plano Z y singularidades del filtro digital:

El filtro causal de enésimo orden con memoria (a_0, a_1, a_2..., a_n) de la manera más general es factorizable en el plano Z de la forma:

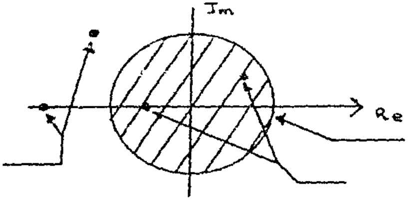
$$A(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots + a_n Z^n$$

$$= a_n (Z - Z_1)(Z - Z_2)\ldots(Z - Z_n)$$

$$= a_n \prod_{i=1}^{n} (Z - Z_i) \quad (a_n \neq 0)$$

Donde las raices pueden ser complejas $Z = Z_i$.

El círculo unitario nos revela si es un filtro de retraso mínimo o de máximo retraso, dependiendo de dónde caigan sus raices. Debido a la simplicidad de la determinación de la convergencia y, por ende, la estabilidad de los filtros en el dominio Z, se prefiere al dominio de Fourier, recordando la identidad que mencionamos en la sección 1.2.2.8, de que la transformada de Fourier no es sino la transformada Z evaluada en el círculo unitario del plano Z.



Un filtro de mínimo retraso también es de mínima fase.

3.6.4 DIFERENTES TIPOS DE FILTROS

3.6.4.1 FILTROS PASA TODO

Para estos filtros es interesante conocer el comportamiento de los filtros de retraso. Un filtro de máximo retraso no puede exceder nunca la curva de mínimo retraso debido a que la ondícula del segundo posee más energía. Un filtro de retraso mixto cae entre la curva de máximo retraso y la de mínimo retraso.

Para los filtros pasa todo interesan las series que tienen un espectro de magnitud igual, con propiedades útiles y diferenciables a simple vista; ya que tienen diferente espectro de fase.

Veamos el concepto de filtro de fase dirigida. Un filtro de este tipo, no altera el espectro de magnitud del filtro de entrada. Cada filtro de fase dirigida puede ser causal (o con memoria), el cual opera sólo en el presente y en el pasado de la señal de salida, o puede ser puramente no causal (o de anticipación), el cual sólo opera en el futuro de la entrada, o puede ser una combinación de ambos, operando en el pasado, presente y futuro de la entrada.

Debido a que un filtro de fase dirigida no altera el espectro de magnitud de la entrada, la magnitud del espectro $|P(\omega)|$ la podemos nivelar en un valor unitario, esto es, $|P(\omega)| = 1$.

1) Tipo 0 (cero) pasa-todo, o filtro trivial.
2) Tipo 1 (uno) pasa-todo, o filtro dispersivo.
3) Tipo 2 (dos) pasa-todo, o filtro de retraso puro.
4) Tipo 3 (tres) pasa-todo, o filtro de retraso impuro.

El filtro 3 (tres) es una curiosidad matemática, sin aplicación, que no será tratado. El filtro 0 (cero) es un filtro constante cuyos coeficientes de los pesos pueden ser tanto 1 ó -1, por lo que su transformada Z será $A(Z) = 1$ o $A(Z) = -1$. O sea que este filtro pasa de la entrada a la salida con un cambio de polaridad:

Tipo 0 $\quad x_t \longrightarrow (1,0,0,\ldots 0) \longrightarrow y_t = x_t$

$$x_t \longrightarrow (-1,0,0,\ldots 0) \longrightarrow y_t = x_t$$

Tipo 2 $\quad x_t \longrightarrow (0,0,\ldots 0,1,0,0\ldots) \longrightarrow y_t = x_{t-n}$

Tipo 1 $\quad \dfrac{x_t =}{1 + C\,Z} \longrightarrow D(Z) \longrightarrow \dfrac{y_t =}{C^* + Z}$

$$D(Z) = \frac{K^* + Z}{1 + CZ}$$

(1,C) y (C*,1) son ondículas de igual magnitud espectral.

$$\tan \varnothing_o = \frac{c \text{ sen } \omega}{1 + c \cos\omega}, \quad \tan \varnothing_1 = \frac{\text{sen } \omega}{c + \cos \omega}$$

$$\tan d(\omega) = \tan (\varnothing_1 - \varnothing_0)$$

$$d(\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{(1 - c^2) \text{ sen}\omega}{2c + (1 + c^2) \cos\omega} \right]$$

3.6.4.2 FILTRO DE WIENER. (USO DEL PRINCIPIO DE MINIMOS CUADRADOS.)

La teoría de la comunicación estadística provee invaluables implementos dentro de los cuales es posible formular y designar criterios y actualmente obtener soluciones para filtros digitales. Estos son aplicables en un amplio rango de problemas geofísicos, geológicos, astrofísicos y médicos. El modelo básico para el proceso de filtrado considerado aquí consiste en una señal de entrada, una señal de salida deseada, y una señal de salida actual. Si logramos minimizar la energía o potencia existente en la diferencia entre señal deseada y señal actual, será entonces posible obtener la solución óptima, o el filtro de mínimos cuadrados.

Las características de los filtros en este apartado se expresan en términos de su impulso unitario como respuesta a la función, esto es, en términos de las funciones de memoria de los filtros.

CONCEPTOS DEL FILTRO WIENER

La palabra señal es un término genérico que denota la variación de cualquier cantidad física con respecto al tiempo.

Las ondículas, se diferencian de las series de tiempo, en que su tiempo de inicio o arribo es mensurable y tienen energía finita. Otro importante tipo de señal son las series de tiempo estacionario. Las cuales son una serie de tiempo con propiedades estadísticas que no cambian con el tiempo.

Las series de tiempo son un fenómeno que se continúa sobre todo el tiempo, desde el remoto pasado, hasta el distante futuro; por tal motivo se dice que son de duración infinita o bien, de magnitud infinita. Debido a esto, nosotros obtenemos sólo segmentos de intervalos finitos de tiempo, que son sólo una muestra representativa de las series de tiempo.

Las series de tiempo estacionarias representan un fenómeno continuado, que puede ser llamado señal de potencia. La componente directa o valor medio de una señal de potencia puede ser removido, dejando la componente de alternancia. Esto es que todas las señales de potencia en nuestro análisis tendrán valores medios alrededor de cero.

Un importante parámetro de una señal de potencia, es llamada amplitud de la señal: ..., U_{-2}, U_{-1}, U_0, U_1, U_2, U_3,... (donde el subíndice es el índice de tiempo). La suma promedio del cuadrado de estas amplitudes es:

$$\frac{1}{2T+1}\left(U^2_{-T} + U^2_{-T+1} + \dots + U^2_{-1} + U^2_0 + U^2_1 + \dots + U^2_T\right)$$

donde T tiende al infinito. Este promedio es llamado la potencia de la señal; de acuerdo con lo que representa, es decir energía en unidad de tiempo.

El valor esperado E, es otro importante concepto que denota una operación promedio. Este símbolo tendrá dos diferentes significados, dependiendo si actúa sobre una señal de energía o sobre una señal de potencia.

La razón de esta dualidad de significados, permite tratar ambas señales de una manera unificada.

Para mayor claridad, distinguiremos una ondícula, que es una señal de energía con b_t de una muestra de serie de tiempo, que es una señal de potencia U_t, con los símbolos reseñados.

CORRELACION DE UNA SEÑAL

La correlación de una señal con otra se denomina correlación cruzada y se expresa como

$$r_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+k}\, b_i$$

La diferencia que existe con la convolución es que no se dobla la secuencia $\{Q_k\}$, y sigue los mismos pasos y métodos de solución de la convolución.

La correlación es una medida de la similitud que existe entre dos ondículas, es decir nos define su grado de dispersión de una secuencia con otra.

Cuando correlacionamos una ondícula con sí misma se denomina autocorrelación y se define:

$$r_k = \sum_{i=0}^{\infty} b_{i+k}\, b^*_i$$

donde b^*_i es el conjugado complejo de la ondícula.

Una ondícula reversible o inversa se define, si tenemos $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ que es finita, como $(b^*_n, b^*_{n-1}, \ldots b^*_1, b^*_0)$ llamada ondícula de regreso o hacia atrás. Por ejemlo (3,0,1) tiene su ondícula hacia atrás representada por (1,0,3), o bien (i, 1/2) tiene su correspondiente reversa (1/2, -i).

A partir de este concepto podemos decir que una autocorrelación de una ondícula de magnitud finita es meramente la convolución de la ondícula con su reversa o con la ondícula hacia atrás.

	b^*_2	b^*_1	b^*_0
b_0	$b_0b^*_2$	$b_0b^*_1$	$b_0b^*_0$
b_1	$b_1b^*_2$	$b_1b^*_1$	$b_1b^*_0$
b_2	$b_2b^*_2$	$b_2b^*_1$	$b_2b^*_1$

Para una ondícula cuya cantidad de energía se expresa por:

$$E\{b_t^2\} = \sum_{t=0}^{\infty} b_t^2 = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots$$

y para una serie de tiempo estacionaria, con una cantidad de potencia dada:

$$E\{U_t^2\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T + 1} (U_{-T}^2 + U_{-T+1}^2 + \ldots + U_{-1}^2 + U_0^2 + U_1^2 + \ldots + U_T^2)$$

La notación E{.} representa un promedio de los valores entre paréntesis; para una ondícula el promedio es la suma de los cuadrados, mientras que una serie de tiempo estacionario es el límite de la suma de los cuadrados dividido por el tiempo empleado cuando el tiempo se aproxima a infinito. Si correlacionamos una señal con una réplica de sí misma, desplazada en una cantidad τ a lo largo del eje del tiempo, llamada autocorrelación, la podemos expresar

$$\phi_{bb}(\tau) = \sum b_{t+\tau}\, b_t = E\{b_{t+\tau}\, b_t\}$$

o para una serie de tiempo

$$\phi_{uu}(\tau) = \sum u_{t+\tau}\, u_t = E\{u_{t+\tau}\, u_t\}$$

Para $\tau = 0$ la autocorrelación da la potencia o la energía respectivamente. La autocorrelación de todos los valores de τ da información de las cantidades de energía o potencia en las diferentes componentes de frecuencia de la señal. La correlación cruzada se expresa en esta notación como

$$\phi_{xy}(\tau) = E\{x_{t+\tau}\, Y\}$$

Una propiedad fundamental de una serie de tiempo estacionaria es su representación de ondícula. El principio establece que cualquier serie de tiempo estacionaria puede ser expresada como la convolución de una ondícula con el ruido blanco. El ruido blanco es una serie de tiempo estacionaria con autocorrelación igual a cero, excepto para el desplazamiento en el tiempo $\tau = 0$, donde la autocorrelación es simplemente igual a su potencia. Así que, todas las componentes de frecuencia del ruido blanco tienen la misma potencia, en analogía con la luz blanca ideal.

Supongamos que u_t es la serie de tiempo estacionaria, b_t es la ondícula característica, y E_t es el ruido blanco

$$u_t = b_0E_t + b_1E_{t-1} + b_2 E_{t-2} + \dots$$

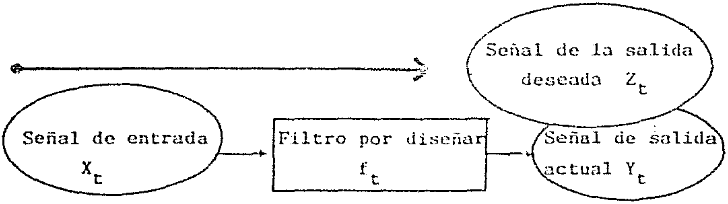
$$u_t = \sum_{s=0}^{\infty} b_s E_{t-s} \quad , \quad u_t = b_t * E_t$$

Tomando en cuenta que $E\{E_t\} = 0$ y $E\{E_sE_t\} = \begin{cases} P & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$

se puede demostrar que $\phi_{uu}(\tau) = P\phi_{bb}(\tau)$.

3.6.4.3 FILTRO GENERAL (DISEÑO DEL MODELO)

Antes que diseñemos el filtro, debemos adoptar un modelo. Un modelo muy usado y que es muy general se muestra a continuación.



Aquí se muestran tres señales: 1) la señal de entrada, 2) la señal de salida deseada y 3) la señal de salida actual.

Criterio de los mínimos cuadrados para diseñar el filtro:

El principio básico de este criterio es minimizar la energía o potencia (según el caso), que existe entre la salida deseada Z_t y la actual salida Y_t.

$$J = E\{(Z_t - Y_t)^2\}$$

En otras palabras, lo que buscamos son los coeficientes del filtro f_t de tal manera que el valor de J sea mínimo.

Sabemos que la salida Y_t es la convolución del filtro $\{f_t\}$ con la entrada X_t, esto es:

$$Y_t = X_t * f_t = \sum_{\tau=0}^{m} f\tau\, X_{t-\tau}$$

Así que el error

$$J = E\{(Z_t - \sum_{\tau=0}^{m} f\tau X_{t-\tau})^2\}$$

Esta cantidad es minimizada usando el concepto del mínimo, derivando parcialmente con respecto a cada uno de los coeficientes del filtro f e igualamos a cero.

$$\frac{dJ}{df_1} = E\{2(Z_t - \sum_{\tau=0}^{m} f\tau X_{t-\tau}) \frac{d}{df_1}(Z_t - \sum_{\tau=0}^{m} f\tau X_{t-\tau})\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{df_1} &= 2E\{(z_t - \sum_{\tau=0}^{m} f\tau X_{t-\tau})(-X_{t-1})\} \\
&= 2E\{-Z_t X_{t-1} + \sum_{\tau=0}^{m} f\tau X_{t-\tau} X_{t-1}\} \\
&= 2[-E\{Z_t X_{t-1}\} + \sum_{\tau=0}^{m} f\tau E\{X_{t-\tau} X_{t-1}\}] \\
&= 2[-\emptyset_{ZX}(1) + \sum_{\tau=0}^{m} f\tau \emptyset_{XX}(1-\tau)]
\end{aligned}$$

poniendo la derivada parcial igual a cero, obtenemos:

$$\sum_{\tau=0}^{m} f\tau \emptyset_{xx}(1-\tau) = \emptyset_{zx}(1)$$

De una manera similar, calculamos la parcial de J respecto a (f_j) para $(j= 0,1,2,\ldots,m)$. De esta manera obtendremos un sistema de (m+1) ecuaciones lineales simultáneas para los coeficientes desconocidos del filtro f_j, lo cual puede ser escrito:

$$\sum_{\tau=0}^{m} f\tau \emptyset_{xx}(j-\tau) = \emptyset_{zx}(j) \text{ para } j = 0,1,2,\ldots,m.$$

El método de este sistema está basado en el trabajo de Leviston (1947).

Introduciremos un cambio de notación: $\emptyset_{xx} = r$ y $\emptyset_{zx} = g$.

$$\sum_{\tau=0}^{m} f\tau r_{j-\tau} = g_j$$

En forma de sistema (m+1):

$$f_0 r_0 + f_1 r_1 + \ldots + f_m r_m = g_0$$

$$f_0 r_1 + f_1 r_0 + \ldots + f_m r_{m-1} = g_1$$

$$\ldots\ldots$$

$$f_0 r_m + f_1 r_{m-1} + \ldots + f_m r_0 = g_m$$

r y g son correlacionales de valores conocidos, mientras que f, son las coeficientes del filtro por conocer.

En notación matricial $R_m f = g$

Existe un método recursivo, para la solución de la matriz R_m que permite el cálculo rápido y convergente del sistema, llamado recursión de Toeplitz, pero que no enunciaremos por que no es el objetivo del tema.

3.7 ANALISIS DE SISTEMAS LINEALES

3.7.1 GENERALIDADES

Los sistemas lineales son una idealización de la realidad. Su aplicación tan propagada se debe a la solución práctica y simplificada de la mayoría de los fenómenos físicos.

Una vez localizado un sistema lineal, existen una variada estructura de métodos matemáticos, que nos permiten resolver el sistema. La mayoría de los textos se enfocan hacia un tipo particular de sistema como circuitos eléctricos, sistemas de control o sistemas de comunicaciones; pero en este caso plantearemos soluciones enfocadas hacia cualquier tipo de sistema. Trataremos los sistemas de tiempo continuo usuales y los sistemas de tiempo discreto. Todo lo concerniente a los temas anteriores se relaciona directamente con los métodos de los sistemas lineales. Sin embargo, en esta sección, nos interesa solamente la descripción y límites de cada técnica, así como la unificación de los métodos, observando las relaciones, los casos particulares y la estabilidad de los métodos, con sus gráficas.

El análisis de Sistemas puede dividirse en tres aspectos:

1.- Desarrollo del modelo matemático apropiado para el problema real de que se trate. En esta sección el análisis se dedica a la obtención de las "ecuaciones de movimiento", condiciones iniciales o de frontera, valores de parámetros y constantes adecuadas. En este proceso es donde el juicio, la experiencia y los experimentos se combinan para lograr el desarrollo de un modelo apropiado.

2.- Solución de las ecuaciones resultantes mediante métodos de diversas formas.

3.- Interpretación de los resultados en relación al problema real.

El estudio de un sistema particular se hace con mayor énfasis en la especialidad de donde procede el sistema. Ahí surge el modelo, se ejecuta y comprueba, y se utilizan diferentes técnicas para su solución, estableciéndose una base para su interpretación matemática. Esta es la secuencia y evolución que sigue un sistema lineal en la actualidad; pero hasta ahí termina la investigación.

Nosotros proponemos extender esta evolución del conocimiento de una manera sistemática y estructurada, mediante el estudio y la investigación de nuevos campos de aplicación una vez que haya surgido un modelo, en la determinación de un sistema.

Para ello es necesario crear especialistas e investigadores que estudien y controlen todos los aspectos formales para promover dichas transposiciones del conocimiento científico. Estos investigadores se encargarán de elaborar los axiomas y estructuras que permitan entender si es posible una transposición de conocimiento o no, o bien bajo qué cambios teóricos es posible llevar un conocimiento propio de una área a otra. Este aspecto se puede estudiar en los capítulos 1 y 2. Lo hemos recordado en esta sección debido a la importancia que tienen en ese sentido los sistemas lineales.

Los sistemas lineales surgen en forma natural como formulación apropiada para una gran variedad de fenómenos. A continuación, presentamos unos ejemplos tomados de diversas disciplinas:

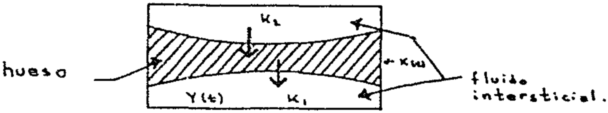
1.- Modelo de crecimiento de una población (donde la población es infinitamente grande, para poder considerar a t en forma continua).

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t) \qquad t>0$$

$$\text{Sol:} \quad P(t) = P_0 e^{kt}, \ t\geq 0$$

Siendo P_0 la población inicial, k la razón neta de crecimiento per capita y t el tiempo. Por supuesto que este modelo simplificado es exacto en un intervalo limitado de tiempo, ya que en última instancia, factores como suministro de alimento, defunciones, etc., limitarán la validez del modelo.

2.- En los huesos de los mamíferos, existe un intercambio constante de calcio entre el hueso y los fluidos intersticiales que lo rodean. Los huesos actúan como un depósito de calcio que emplea el resto del cuerpo. Una demostración experimental indica que este sistema hueso-calcio se puede modelar usando procesos con razón de primer orden: es decir, la velocidad de difusión del material es proporcional a la cantidad total de material existente.



En la figura $x(t)$ es la cantidad de calcio en el hueso en el tiempo t y $y(t)$ es la cantidad de calcio en los fluidos intersticiales en t. Sean k_1 y k_2 las razones de movimiento del calcio hacia afuera y hacia adentro del hueso. Suponiendo que el cuerpo no consume calcio:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_1x(t) - k_2y(t)$$

Esta ecuación es un modelo lineal que describe la variación del calcio dentro de los huesos y los fluidos intersticiales. Este modelo se ha empleado con éxito para caracterizar el movimiento del calcio en los huesos de las ratas.

3.- El modelo de una barra metálica a una temperatura T_0 en un cuarto a una temperatura constante T_c. Después de transcurrir el tiempo la barra cambia su temperatura a T_1. Determinar el tiempo que gasta la barra para llegar a 25^o F y la temperatura después de 10(min).

Su modelo es:

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0$$

Cuya solución es:

$$T = ce^{-kt}$$

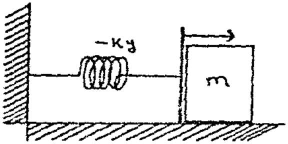
Aplicando condiciones iniciales, obtenemos:

$$\boxed{T = 100e^{-0.035t}}$$

Cuando T=25 t = 39.6 min.

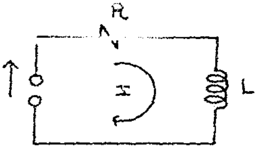
Cuando t=10 min. T=70.5^{o}F

4.- Modelo para un sistema mecánico como el de la figura:



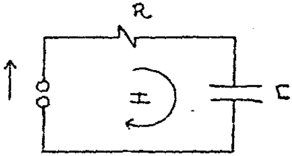
$$F = ma; \; M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -ky(t) \quad - R\frac{dy(t)}{dt}$$

5.- Modelo para un circuito RL:



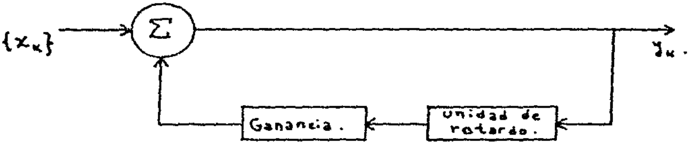
$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} = \frac{E}{L}$$

. Modelo para un circuito RC:



$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R} \; ; \qquad I = \frac{dq}{dt}$$

6.- Modelo digital para modelar un filtro RC analógico sencillo para regular señales de voltaje de entrada X(t).



$$Y_k = GY_{k-1} + X_k$$

7.- Modelo de conversión química simple:

Una substancia A se está transformando en otra; la velocidad de transformación de una cantidad X de substancia no transformada es proporcional a X.

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad , \quad x = ce^{-kt}$$

donde $x = x_0$ para $t = 0$

$$x = x_0 e^{-kt}$$

Podríamos continuar enumerando una lista de ejemplos simples, donde resultan sistemas lineales, en diversos campos de la ciencia; pero éste no es nuestro objetivo. Sin embargo nos podemos dar cuenta con estos ejemplos, cómo la naturaleza es susceptible de modelarse mediante un sistema lineal. El éxito de la solución del sistema también depende en gran medida, del hallazgo de métodos de simulación apropiados, así como de la solución numérica más conveniente, para el aprovechamiento de la capacidad de las computadoras actuales. El curso de Simulación de Yacimientos es un buen ejemplo de la evolución y el proceso a seguir para resolver apropiadamente los sistemas que surgen en ese campo.

A continuación enunciamos los métodos más comunmente usados en la solución de sistemas lineales, y sus relaciones.

Entre ellos tenemos principalmente los siguientes dominios de definición: la Convolusión, los métodos de transformada y los métodos de ECS Dif.

El uso del concepto de la convolusión es de gran valor didáctico para la solución de sistemas, pues revela una imágen mental del problema, de una manera muy adecuada. Este concepto ha sido desarrollado en el subtema anterior por lo que nos remitiremos a él en lo que sigue.

Los sistemas lineales han sido resueltos también con los métodos de transformadas, siendo las de empleo más común, la transformación de Fourier, Laplace y la transformada geométrica o transformada Z. Además existe una poderosa herramienta que amplía el rango de validez de los sistemas, que es el espacio y el estado.

Estos son pues los métodos que usamos al estudiar sistemas; pero normalmente no ubicamos los rangos de validez de cada método, o bien el uso alternativo de ellos, así como la facilidad que brindan los métodos en cada caso particular. En esta sección pretendemos generalizar los métodos citados con anterioridad, siendo útil para obtener una mejor visión en la solución de problemas.

3.7.2 LOS PLANOS S Y Z.

La representación de Z es de diversas formas: la forma binómica $Z=x+iy$, la forma polar $Z=A(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, o bien a través de la aproximación por serie de Taylor de la función e^{x} en la que se hace una generalización para los números complejos: $Z=Ae^{\theta i}$ conocida como fórmula de D'Moivre.

Si definimos a $Z=F(x,y)$ y al complejo conjugado $\bar{Z}=x-iy$ que representa una reflexión en el eje real, podemos llegar a las siguientes relaciones:

$$\frac{Z+\bar{Z}}{2} = \operatorname{Re}Z \quad \text{y} \quad \frac{Z-\bar{Z}}{2i} = \operatorname{Im}Z$$

Si $W = f(Z) = F(x,y)$

$$W = \frac{F(x,y) + \bar{F}(x,y)}{2} + i\frac{F(x,y) - \bar{F}(x,y)}{2i}$$

Entonces existen dos funciones U y V tales que:

$$U(x,y) = \frac{F(x,y) + \bar{F}(x,y)}{2}, \quad V(x,y) = \frac{F(x,y) - \bar{F}(x,y)}{2i}$$

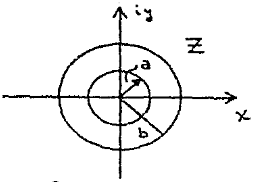
$$W = F(Z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$$

Un plano análogo a W, pero que se utiliza cotidianamente en el dominio de Laplace, es el plano S.

$$S = \sigma(x,y) + i\,\omega(x,y)\Omega$$

A la representación de Z en el plano complejo con su correspondiente relación en el plano S se conoce como mapeo conforme. Esta ambigüedad en las representaciones es muy útil para resolver problemas que resultan difíciles en un plano, traspasándolo al otro plano, tal y como vimos en la sección 1.2.2.

Ejemplo: Calcular la capacidad de un cable coaxil de 1 m de longitud. El conductor interior tiene un radio interior r=a[m] y un radio exterior r_e = b[m].



$$Z_a = ae^{i\theta} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\Pi$$

$$Z_b = be^{i\theta}$$

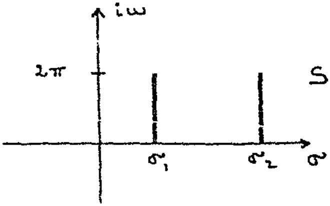
Si usamos la transformación $Z=e^S$:

$$ae^{i\theta} = e^{\sigma_1}e^{i\omega_1} \Rightarrow e^{\sigma_1} = a \quad ; \quad e^{i\omega_1} = e^{i\theta}$$

$$\sigma_1 = \ln(a) \quad , \quad \omega_1 = \theta$$

Análogamente $\qquad \sigma_2 = \ln(b) \quad , \quad \omega_2 = \theta$

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \quad , \quad \boxed{C = \frac{2\Pi\,\varepsilon}{\ln(\frac{b}{a})}}$$



3.7.3 FUNCIONES EN EL PLANO COMPLEJO

La siguiente representación gráfica, es una imágen mental, de gran valor, para entender la estructura espacial que existe en el plano complejo y las relaciones de Fourier y Laplace en cuanto a sus espectros, ya que sabemos que $S = \sigma + i\omega$ es un plano en Laplace y en el caso de Fourier $\sigma = 0$.

Supongamos que $F(S) = \frac{1}{S}$

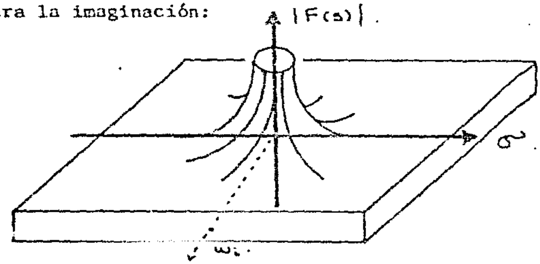
$$F(S) = \frac{1}{\sigma + i\omega}\,\frac{\sigma - i\omega}{\sigma - i\omega} \Rightarrow F(S) = \frac{\sigma - i\omega}{\sigma^2 + \omega^2} = \frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2} - \frac{i\omega}{\sigma^2+\omega^2}$$

$$|F(S)| = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\sigma^2+\omega^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2+\omega^2}{(\sigma^2+\omega^2)^2}}$$

$$|F(S)| = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}$$

($|F(S)|, \theta$) Son las componentes espectrales en el dominio de Laplace; y para el caso particular en el que $\sigma = 0$, en el dominio de Fourier.

A continuación se presenta la gráfica del fenómeno, que es de gran valor y utilidad para la imaginación:



3.7.3.1 SINGULARIDAD EN EL PLANO S

Para la función $F(S) = \frac{1}{S}$ la función no está definida en $S = 0$.

De la misma manera:

$$F(S) = \frac{1}{S(S-a)(S-b)\ldots(S-n)}$$

Contiene n singularidades conocidas como polos de la función F(S). El recíproco de la función anterior, contiene otro tipo de puntos especiales conocidos como ceros de la función.

Generalizando:

$$F(S) = \frac{\text{ceros}}{\text{polos}} \quad \frac{S^n + a_1 S^{n-1} + \ldots + a_n}{S^m + b_1 S^{m-1} + \ldots + b_m}$$

La función F(S) es un sistema que está caracterizado por la presencia de polos y ceros en muy diversos casos especiales, lo que determina la infinita cantidad de espectros de frecuencia y de amplitud en el dominio de Fourier o de Laplace.

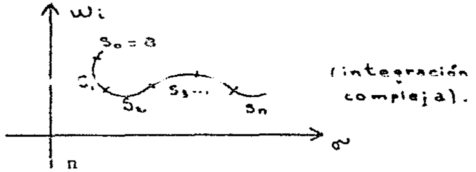
Para continuar con nuestro análisis de sistemas dentro de la teoría de las singularidades, veamos las siguientes definiciones:

3.7.3.2 TEOREMA DE CAUCHY-GOUSART

Si una función es analítica dentro y sobre el contorno cerrado c se cumple que:

$$\int_c f(z)\, dz = 0$$

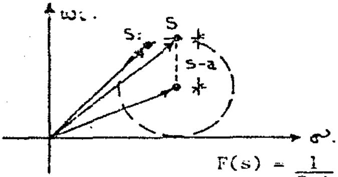
Sin embargo, si deja de ser analítica en un punto dentro de C, existe un número llamado residuo con el que cada uno de esos puntos contribuye al valor de la integral.



$$\lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=0}^{n} f(s_k)\, \Delta s_k = \int_c f(s)\, dS$$

3.7.3.3 INTEGRALES RELACIONADAS CON LOS POLOS

a) Integración alrededor de un polo.



$$F(s) = \frac{1}{S-A} \Rightarrow S-A = Ae^{i\theta}$$

$$\oint F(S)dS = \oint \frac{1}{S-A}\, dS = \int_0^{2\pi} \frac{1}{S-A}\, (iAe^{i\theta} d_\theta)$$

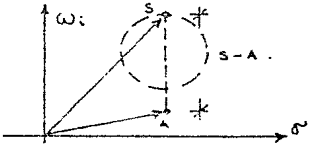
$$\oint F(S)dS = \int_0^{2\pi} \frac{iAe^{i\theta}}{Ae^{i\theta}}\, d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= i\, (\theta_2 - \theta_1)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

$$\boxed{\oint F(s)\, ds = 2\pi i.}$$

Este resultado nos proporciona la siguiente conclusión: Si la función F(s) contiene un polo, el valor de la integral es constante, sin importar el valor de los parámetros, y es igual a $2\pi i$.

b) Integración afuera del contorno.



$$\oint F(s)\, ds = \int \frac{ds}{S-A} \quad : \quad S-A = f(\theta)e^{i\theta}$$

$$ds = if(\theta)e^{i\theta}d\theta + e^{i\theta}df(\theta)$$

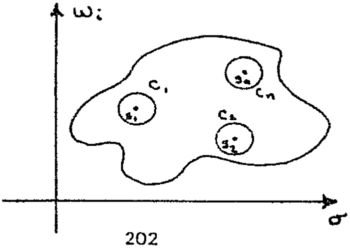
$$\oint F(s)\, ds = i\oint \frac{\cancel{f(\theta)e^{i\theta}}}{\cancel{f(\theta)}e^{i\theta}}\, d\theta + \oint \frac{e^{i\theta}}{f(\theta)e^{i\theta}}\, df(\theta)$$

$$= i\int_{\Psi}^{\Psi} d\theta + \int_{\Psi}^{\Psi} \frac{df(\theta)}{f(\theta)} = \operatorname{Ln} f(\theta)\Big|_{\Psi}^{\Psi} = 0$$

c) Integración alrededor de dos o más polos:

Teorema del residuo. Establezcamos que c sea un contorno cerrado simple dentro y sobre el cual una función f es analítica excepto para un número finito de puntos singulares $S_1, S_2, \ldots, S_n$, interiores a c. Si $B_1, B_2, \ldots B_n$, denotan los residuos de f en esos puntos se cumple:

$$\oint F(s)\, ds = 2\pi i\, (B_1 + B_2 + \ldots + B_n).$$



$$\int_{c} F(s)\, ds - \int_{c_1} F\ (s)\, ds - \int_{c_2} F(s)\, ds - \ldots \int_{c_n} F(s)\, ds = 0$$

$$Bi = \frac{1}{2\pi i} \int_{ci} F(s)\, ds$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } F(s) = \frac{1}{(s-a)} \frac{1}{(s-b)}, \quad F(s) = \frac{1}{s^2-sb-sa+ab}$$

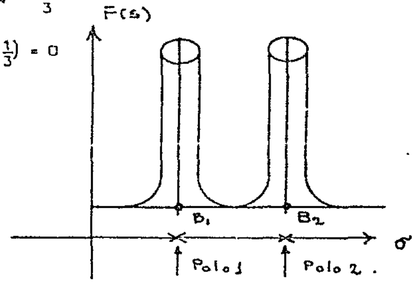
$$\text{Si } a=4 \text{ y } b=7, \quad F(s) = \frac{1}{s^2-11s+28}$$

$$\oint F(s)\, ds = \int_{c} F(s)\, ds = 2\pi i\ (B_1+B_2+\ldots+B_n)$$

$$B_1 = \frac{1}{s-4} \left. \frac{(s-7)}{(s-7)} \right|_{s=7} = \frac{1}{3}$$

$$B_2 = \frac{1}{s-7} \left. \frac{(s-4)}{(s-4)} \right|_{s=4} = -\frac{1}{3}$$

$$\oint F(s)\, ds = 2\pi i \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0$$



3.7.4 RELACION DE LA TRANSFORMADA Z CON LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE Y DE FOURIER

Es una relación muy importante, ya que permite hacer transferencias útiles de un estado continuo a uno discreto; las restricciones se verán más adelante.

En el caso de la función de transferencia de un sistema continuo, lo podremos estudiar en un sistema digital y observar los cambios que ocurren para fenómenos reales, mediante una simulación de filtros, que nos conduzcan a la solución óptima.

Sea f(t) la función del tiempo que se muestrea en los instantes de tiempo {..., -T,0,T,2T,...} donde T es el período. Habíamos visto que la versión muestreada se puede representar como un tren de pulsos:

$$fs(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \ \delta(t-nT)$$

Empleando la propiedad f(t) d(t) = f(0) d(t) para igualar f(t) d(t-nT) a f(nT) d(t-nT). Usando el operador de transformación de Laplace:

$$Fs(s) = Lb \{fs(t)\} = Lb \{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \ \delta(t-nT) \}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \ Lb \{ (t-nT) \}$$

Recordando $Lb\{\delta(t)\} = 1$ y por el teorema del desplazamiento en el tiempo $Lb\{\delta(t-nT)\} = e^{-snT}$.

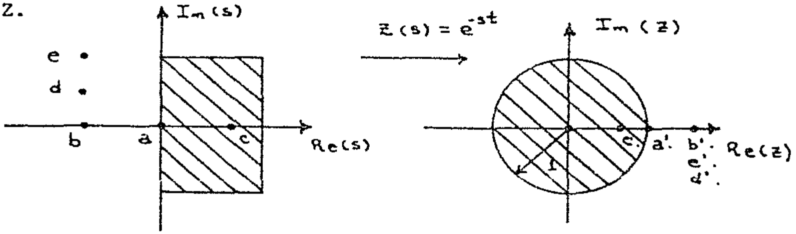
$$Fs(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-snT}$$

Si sustituimos convenientemente $Z = e^{-sT}$, la transformación de Laplace, usando la transformada geométrica Z, vemos que cumple la siguiente relación:

$$Fs(s)\Big|_{Z=e^{-sT}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \ Z^n = F(Z)$$

Con lo que comprobamos que F(s) y F(Z) están relacionadas.

D4e este análisis se desprende que la transformada Z se puede considerar como la transformada de Laplace de la función del tiempo f(t) muestreada (con el cambio devariable apropiado) o muy independientemente como la función generatriz de la secuencia {tn} que asume los valores f(nT) para n = ..., -2, -1, 0, 1, 2,... Se observa que con $Z = e^{-sT}$, el plano complejo S mapea en el plano complejo Z. Bajo este mapeo, el eje imaginario Re(s) = 0, mapea en el círculo unitario $|Z| = 1$. en el plano Z. Además, el semiplano izquierdo Re(s) 0, corresponde a la parte exterior del círculo unitario $|Z| = 1$. en el plano Z.



Si s se restringe al eje iw en el plano s, entonces Fs(s) se convierte en Fs(iw) que es la transformada de Fourier de la función muestreada fs(t).

$$Fs(iw) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-iwnT} = F(Z)\Big|_{Z=e^{-iwt}}$$

observemos que $Fs(iw) = Fs(iw + 2\pi/T)$: es decir, Fs(iw) es periódica, con período $2\pi/T$. Si ahora $s = iw$, en el plano Z se tendrá que $Z = e^{-iwT}$. Por tanto Fs(iw) se puede obtener evaluando F(Z) donde Z está restringida al círculo unitario.

3.7.5 ANALISIS DE SISTEMAS USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

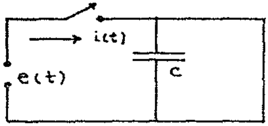
En el presente subtema, usaremos sistemas eléctricos simples para conocer conceptos útiles que surgen en el dominio de Laplace y que se relacionan fácilmente con otros dominios importantes.

Uno de los conceptos que aparecen más comunmente es el de la ganancia y el de impedancia. Su definición está íntimamente ligada al término función de transferencia. En suma lo que determinan es la característica intrínseca del sistema.

Aplicación de Laplace

Sea el sistema de la figura:

$$e(t) = \frac{1}{c}\int_0^t i(t)\,dt + a \Leftrightarrow E(s) = \frac{1}{c}\,\frac{I(s)}{\cdot s} + \frac{a}{s}$$



Sistema excitación <=> $\boxed{\text{Función de transferencia}}$ → respuesta

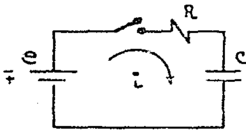
Función de transferencia <=> Respuesta al impulso unitario.
(dominio de la transformada) (dominio del tiempo)

Z_t = Función de Transferencia del Sistema eléctrico.

$$Z_t = \frac{e_{out}}{e_{in}} \; \frac{(\text{voltaje de salida})}{(\text{voltaje de entrada})}$$

Ejemplo:

Encontrar la corriente que circula en el circuito, si consideramos que el capacitor estaba cargado, en el tiempo t = to.



$$e_{in} = Ri(t) + \frac{1}{c}\int i(t)dt + e_{\phi}.$$

$$L\{e_{in}\} = L\{Ri(t)\} + L\{\frac{1}{c}\int i(t)dt\} + L\{e_{\phi}\}.$$

$$\frac{e_{in}}{s} = RI(s) + \frac{1}{c}\,\frac{I(s)}{s} + \frac{i(0)}{cs}$$

$$\frac{i(0)}{c} = v$$

$$\frac{e_{in} - v}{s} \quad I(s)\left(R + \frac{1}{cs}\right)$$

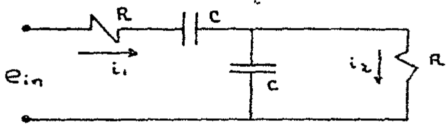
$$\frac{e_{in} - v}{s}\left(\frac{1}{R + \frac{1}{cs}}\right) = I(s)$$

$$L^{-1}\{I(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{e_{in} - v}{R}\left(\frac{1}{s - 1/cR}\right)\right\}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{e_{in} - v}{R} e^{-t/cR}}$$

Ejemplo:

Determinar la función de transferencia Z_t del sistema que se muestra.



$$e_{in} = Ri_1(t) + \frac{2}{c}\int i_1(t)dt - \frac{1}{c}\int i_2(t)dt$$

$$E(s) = RI_1(s) + \frac{2}{sc} I_1(s) - \frac{1}{cs} I_2(s) \ldots (1)$$

$$Ri_2(t) + \frac{1}{c}\int_0^t i_2(t)dt - \frac{1}{c}\int_0^t i_1(t)dt = 0$$

$$RI_2(s) + \frac{1}{cs} I_2(s) - \frac{1}{cs} I_1(s) = 0 \ldots (2)$$

(1) y (2) se resuelven simultáneamente:

$$\Delta = \left(R + \frac{2}{cs}\right)\left(R + \frac{1}{cs}\right) - \frac{1}{c^2s^2}$$

$$\Delta_{i2} = \begin{vmatrix} R + \frac{2}{cs} & E_{in} \\ -\frac{1}{cs} & 0 \end{vmatrix} = \frac{E_{in}}{cs}$$

$$\Delta I_2(s) = \frac{E_{in}/cs}{\left(R + \frac{2}{cs}\right)\left(R + \frac{1}{cs}\right) - \frac{1}{c^2s^2}}$$

$$I_2(s) = \frac{E_{in}(s)cs}{S^2R^2C^2 + 3SRC + 1}$$

$$\frac{E_0(s)}{E_{in}(s)} = Z_t = \frac{(1/RC)\ S}{S^2 + S(3/RC) + (1/R^2C^2)}$$

Existe un cero en el origen y dos polos:

$$S_1 = \frac{-RC}{2}(3 + \sqrt{5}) \quad y \quad S_2 = \frac{-RC}{2}(3 - \sqrt{5})$$

$E_0(s) = Z_t(s)\, E_{in}(s)$ es un producto de polos y ceros.

3.7.6 ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS LINEALES

En el análisis de los sistemas lineales, como hemos visto, un sistema se reduce en general a la siguiente ecuación:

$$Y(S) = \left[\frac{a_m S^m + a_{m-1} S^{m-1} + \dots + a_0}{b_n S^n + b_{n-1} S^{n-1} + \dots + b_0} \right] X(S)$$

En la formulación de la variable de estado, como veremos más adelante, se determina la estabilidad en base a los eigenvalores de la matriz A del sistema. Pero también la estabilidad en el dominio de S o de la frecuencia es posible determinarla. Habíamos visto que H(S) de un sistema es la transformada de Laplace de la respuesta h(t) al impulso, y que se conoce como función de transferencia. Además conocida H(S) ó h(t) se puede saber la salida producida por cualquier entrada. Por este motivo, debido a que la estabilidad de un sistema es una característica propia de él e independiente de la entrada, se puede emplear H(S) para determinar la estabilidad.

Si $H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)}$ de la ecuación original se puede hacer un análisis de polos y ceros para conocer dicha estabilidad. Así pues, un sistema es estable si su salida está limitada cuando la entrada también lo está.

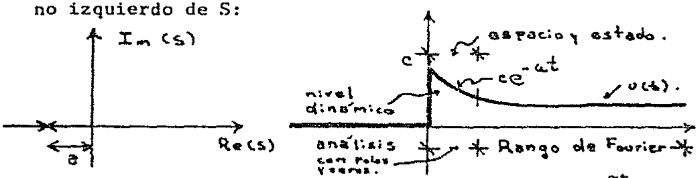
Existen tres casos especiales dependiendo de la naturaleza de la factorización de los polinomios:

1.- Polos simples de la forma $\frac{C}{S + a}$

2.- Polos complejos conjugados de la forma $\frac{C}{[(s+\alpha)^2 + \omega^2]}$

3.- Polos complejos conjugados de la forma $\dfrac{C}{(S^2 + W_0 2)}$

1.- Para la primera forma, le corresponde un polo simple en $S = -a$. Si a es positivo, el polo se localiza en el semiplano izquierdo de S:

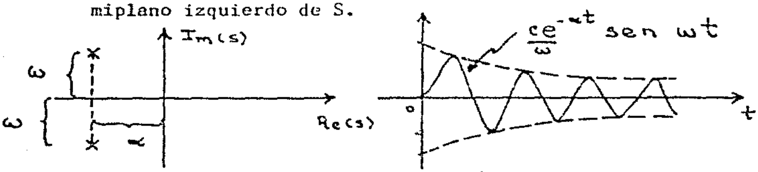


La respuesta en el tiempo correspondiente es $[ce^{-\alpha t}U(t)]$ y, a medida que t se incrementa, la respuesta en el tiempo tiende a cero. Si a es negativa, entonces el polo se localiza en el semiplano derecho de S y cuando t se incrementa, la respuesta en el tiempo crece ilimitadamente. Así, un sistema estable debe tener polos de H(S) real-valuados en el semiplano izquierdo de S.

2.- La expresión de la 2ª forma se puede expresar también como:

$$\frac{c_1}{(S + \alpha + iw)} + \frac{c_{1*}}{(S + \alpha - iw)}$$

De tal manera que representa un par de polos complejos conjugados. Si α es positiva, los polos se localizan en el semiplano izquierdo de S.



La respuesta en el tiempo es $\frac{c}{\omega}e^{-\alpha t}$senwt u(t). Si α es negativa, los polos se localizan en el semiplano derecho de S y entonces la función del tiempo es $\left(\frac{c}{\omega} e^{|\alpha| t}\right)$sen ωt u(t). Nuevamente observamos que a los polos de semiplano izquierdo le corresponden funciones del tiempo que tienden a cero cuando t se incrementa, mientras que a los polos del semiplano derecho corresponden funciones del tiempo que se incrementan ilimitadamente cuando t crece.

3.- Los términos de esta forma representan polos complejos conjugados en el eje $i\omega$. La función del tiempo correspondiente es $\left(\frac{C}{\omega_0}\right) \operatorname{sen} \omega_0 t$. En este caso no se presenta amortiguamiento exponencial y por tanto la respuesta no tiende a cero cuando t crece. A primera vista parece que la respuesta en el tiempo no se incrementa cuando se incrementa t. Sin embargo, si se excita el sistema con una función sinusoidal de la misma frecuencia ω_0, entonces se obtendrá un par de polos complejos conjugados y Y(S) tiene un término de la forma:

$$[1/(3^2 + \omega_0^2)]^2$$

Este término da lugar a una respuesta en el tiempo

$$[1/(2\ \omega_0^2)]\ [\operatorname{sen} \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t]$$

que crece ilimitadamente cuando t se incrementa. Físicamente se está excitando una resonancia natural del sistema con una entrada justo a la frecuencia de resonancia. La salida crece en forma ilimitada porque no existe ninguna pérdida asociada (= 0) a esta forma del sistema. Estas mismas consideraciones se aplican al caso de un polo simple en el origen. Este término da lugar a una función del tiempo que es un escalón. Si se excita este sistema con un escalón, entonces se obtendrá como salida una rampa.

Obsérvese que si H(S) tiene polos repetidos en el eje $i\omega$; entonces se presentan términos de la forma $[1/(S^2 + \omega^2)^2]$ que corresponden a funciones que crecen ilimitadamente.

Concluimos de los tres casos que la estabilidad ocurre sólo cuando todos los polos de H(S) están en el semiplano izquierdo de S. Además ahora sabemos que el análisis de Fourier es aplicable sólo en el caso de estado estacionario, y en caso contrario, queda el recurso del método de espacio y estado.

Observemos la estabilidad de un sistema con dos polos:

$$F(S) = \frac{1}{S+a} \cdot \frac{1}{S+b}$$

Recordamos que $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint F(S)\, e^{st} dS$.

Por el teorema de Cauchy calculamos los residuos:

$$G(S) = F(S)\, e^{st}$$

$$Ra = S + a \quad G(S) \Big|_{S = -a}$$

$$Ra = S + a \quad \frac{e^{st}}{(S+a)\ (S+b)} \Bigg|_{S = -a}$$

$$Ra = \frac{e^{-at}}{-a+b}$$

Análogamente:

$$Rb = \frac{e^{-bt}}{a-b}$$

$$\oint G(S) dS = 2\pi i \left[\frac{e^{-at}}{b-a} + \frac{e^{-bt}}{a-b} \right]$$

$$f(t) = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a - b}$$

Concluimos que el sistema es estable. En este caso los polos son negativos.

Un ejemplo que nos representa un sistema inestable es $F(S) = \frac{S + 6}{S - 3}$ ya que $f(t) = 9e^{3t}$.

Aquí los polos son positivos.

3.7.7 SOLUCION DE SISTEMAS PARA FUNCIONES QUE TIENEN POLOS DE ORDEN N

$$F(S) = \frac{(S-\alpha_1)\ (S-\alpha_2)\dots\ (S-\alpha_m)}{(S-\beta_1)\ (S-\beta_2)\dots\ (S-\beta_n)}$$

El residuo en forma general es entonces:

$$R_n = (S-\beta_n)\ F(S)\Big|_{S=\beta_n}$$

Se puede demostrar que la función generalizada es la siguiente:

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!}\ \frac{d^{n-k}}{dS^{n-k}}\ \left[(S + b)^n\ F(S)\right]\Big|_{S\,=\,-b.}$$

Podemos utilizar esta función en vez de las fracciones parciales o alternativamente, para conocer la función en el dominio del tiempo f(t). Así, si nuestra función en S fuera la siguiente:

$$F(S) = \frac{S + \alpha}{S(S+\beta)^n}$$

el camino a seguir sería:

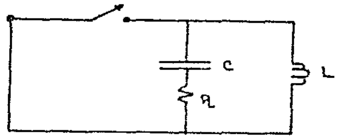
$$F(S) = \frac{B}{S} + \frac{A_1}{(S+\beta)} + \frac{A_2}{(S+\beta)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(S+\beta)^n}$$

Obtenemos los A_k y tenemos definida F(S) en fracciones parciales susceptibles de ser antitransformadas para conocer la función en el dominio temporal.

Casos de oscilación y resonancia en los sistemas lineales

Los filtros son dispositivos que tienen que oscilar, ya que tienen frecuencia de resonancia. Si los polos no tienen frecuencia de resonancia es porque no tienen componente imaginario.

Usemos el siguiente sistema para demostrar el uso del método de análisis:



Z_{in} = impedancia de entrada = $\dfrac{\text{voltaje de salida}}{\text{corriente}}$

Para este caso en especial sabemos que:

$$Z_{in} = \frac{(R + \frac{1}{SC}) \cdot SL}{(R + \frac{1}{SC}) + SL}$$

$$Z_{in}(S) = \frac{(RCS + 1) \cdot SL}{RCS + 1 + CLS^2} = \frac{S(RCLS + 1)}{CLS^2 + RCS + 1}$$

ceros

$S_1 = 0$

$S_2 = -\dfrac{1}{RCL}$

polos

$CLS^2 + RCS + 1 = 0$

$$S = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4CL}}{2CL}$$

$$S_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}$$

$$S_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}$$

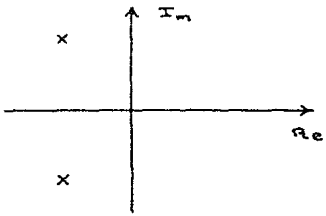
Del análisis de circuitos sabemos que la componente imaginaria de Si es la responsable de las oscilaciones, si ωi varía, entonces tendremos oscilaciones, en caso contrario S = Re, por lo que tenemos dos casos:

$\dfrac{R^2}{4L} - \dfrac{1}{CL} > 0$ es real y no hay oscilaciones, los polos quedan en el eje σ.

$\dfrac{R^2}{4L} - \dfrac{1}{CL} < 0$ es imaginario.

$$S_1 = -\frac{R}{2L} + i\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$S_2 = -\frac{R}{2L} - i\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$$



3.7.9 USO DE DISPOSITIVOS ELECTRONICOS

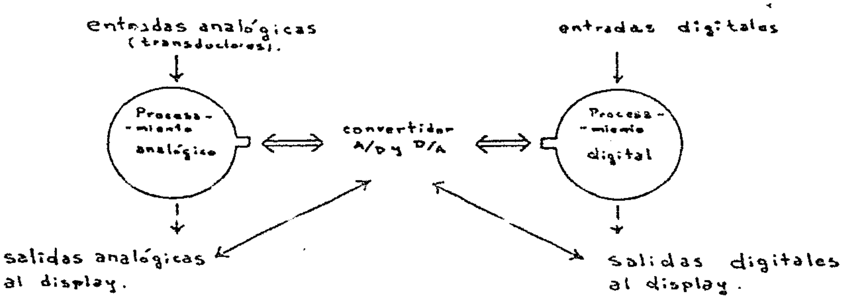
Habíamos visto que una señal es cualquier variable física que contiene información en alguna de sus características, por ejemplo, en su magnitud o en alguna variación con el tiempo. La información puede ser cualquiera: voz, música, imágenes, datos numéricos, etc.

En el caso de un sistema eléctrico las variables físicas que pueden contener variación son la corriente y el voltaje. Para este tipo de sistemas se ha desarrollado toda una teoría matemática para la manipulación de señales y han evolucionado considerablemente al especificarse, cada día más, los dispositivos y circuitos electrónicos. Así, tenemos que a cada circuito electrónico le corresponde un modelo matemático y un dispositivo físico. Sin embargo, en otros sistemas las variables portadoras de información pueden ser diferentes; en el caso de un sistema mecánico, la fuerza y la velocidad; en un sistema hidráulico, la presión y el gasto; en un sistema para un medio estratificado de parámetros eléctricos, la función transformada y la función de resistividad aparente, etc. Con mucha frecuencia estos sistemas y otros más, son susceptibles de modelarse con un sistema electrónico 'equivalente', de tal forma que un entendimiento claro de estos permite comprender y solucionar una gran variedad de fenómenos.

La principal virtud de este método consiste en que es posible diseñar y analizar sistemas de cualquier tipo, por complicados y costosos que parezcan, gracias a la trasformación de un modelo matemático, como ecuaciones en diferencias o diferenciales, en circuitos. Una vez lograda dicha transformación es posible experimentar, intercambiando elementos del circuito, siendo que en realidad probamos alternativas de diseño al variar las señales físicas que nos interesan. Sobra decir, que, a su vez, existen transformaciones de procesos analógicos en digitales y que estas últimas se procesan en computadora, evitando así el manejo de equipo e intercambio de elementos físicos reales.

Otras cualidades que podemos mencionar de este método, son por ejemplo que las señales pueden ser observadas en un osciloscopio y procesadas por la teoría de Fourier.

Cuando en la etapa de entrada existen cantidad de señales, debidas a la interconexión de componentes y dispositivos, y se efectúan sobre ellas operaciones para extraer o corregir información, y se presentan una o varias salidas en un tiempo y en una forma adecuada, tenemos entonces un sistema de procesamiento de señales. Para obtener las señales de interés a partir de los sistemas físicos, se usan transductores. Estos son dispositivos que convierten las variables físicas a otras de distinta índole (presión a voltaje, por ejemplo).



Como podemos observar, se cumple una vez más la unificación de los métodos para la manipulación de variables en la ciencia en general. Este método está ligado completamente a la teoría de las soluciones de modelos físicos por ecuaciones diferenciales o en diferencias, al modelo convolucional, a los métodos de transformadas de Fourier, Laplace y z o geométrica, y al método de espacio de estado. Nos encontramos con una convergencia total en las teorías que han surgido de manera independiente lo cual corrobora que la naturaleza es una y coherente y que teorías diferentes en fenómenos iguales son convergentes en los dominios de validez común (principio de correspondencia).

Este es un ejemplo más de lo fructífero que puede ser la aplicación reiterada de una ciencia como la propuesta, y es una demostración de que el nuevo paradigma se manifiesta como un accidente en cada eslabón que compone a la Metaciencia.

3.7.10 ESPACIO DE ESTADO

3.7.10.1 INTRODUCCION

En este subtema se analizará otra representación para sistemas lineales. La descripción con variable de estado. Esta se relaciona con el sistema considerado como un todo. Se toman en cuenta tanto las variables internas del sistema como las variables de entrada-salida. Para sistemas que manejan un número muy grande de variables, descritos por cantidad de información, resulta conveniente este método, para la manipulación compacta de los datos.

Es la caracterización más eficiente con que cuenta la ciencia, para la solución de sistemas cuyos componentes son una gran variedad de elementos en interacción.

La formulación con variable de estado para un sistema lineal es el modelo más completo en la solución de problemas.

La razón de todas estas cualidades del método de Espacio y Estado se debe a que es un concepto muy general y se puede emplear para describir tanto sistemas lineales como "no lineales". Es por ello que es una herramienta muy poderosa. Las representaciones no lineales solamente se pueden resolver con esta técnica matemática, o con modelos numéricos.

Es un método alternativo que seguramente se usará en la solución de modelos geocientíficos, como en el caso de la simulación de yacimientos o bien, en el sismograma sintético.

La seguridad que tenemos en la prosperidad de aplicación del Espacio de Estado se debe a que lo consideramos como el concepto de más alto nivel de abstracción para la manipulación de datos. Es el método de mayor unidad matemática, ya que es posible emplearlo en una gran variedad de sistemas y no se limita a aquellos que están modelados por ecuaciones de diferencia o diferenciales. Es un método que revela gran información, pues para determinar el modelo, puede ser necesario examinar el comportamiento no sólo de la entrada y la salida, sino de todas las señales importantes de un sistema. Se debe saber la magnitud de las variables internas para determinar si dichas variables permanecen dentro de los límites en que son válidas las aproximaciones lineales. Puede suceder que resulte inestable una variable interna que no se observe. Si para tal sistema sólo se empleara una caracterización de entrada-salida, no se detectaría la inestabilidad del sistema y los resultados del modelo no tendrían sentido. Con los métodos anteriores, las soluciones de M entradas y N salidas, provocarían MN sumas o integrales de convolución para calcular las salidas; pero seguiríamos ignorando lo que sucede dentro del sistema. Esto no quiere decir, que debamos usar únicamente el método de Espacio y Estado, ya que en ocasiones sólo nos interesa conocer la salida del sistema; por lo que por principio de simplicidad usaríamos los otros métodos alternativos.

En el caso de que sólo queramos conocer cualitativamente un sistema, la estabilidad, observabilidad, controlabilidad, parámetros importantes, tipos generales de salidas, etc. el espacio de estado proporciona respuestas concretas a estas ideas.

Además de todas estas aportaciones de la Teoría de Espacio de Estado existe una más, por demás importante: proporciona un método para el manejo del proceso de solución por computadora.

3.7.10.2 DESCRIPCION DEL METODO

Utilizaremos por conveniencia didáctica las ecuaciones discretas, pero haremos las analogías pertinentes para el caso continuo.

Un sistema discreto se describe por la siguiente ecuación en diferencias

$$Y(K) + b_1 Y(K-1) + \ldots + b_n Y(K-n) = a_0 U(K)$$

donde U(K) es una secuencia cualquiera (no necesariamente un escalón). Si recursivamente hacemos $X_1(K) = Y(K-n) \ldots X_n(K) = Y(K-1)$ obtenemos la ecuación de estado

$$X(K+1) = a_0 U(K) - b_1 X_n(K) - b_2 X_{n-1}(K) - \ldots - b_n X_1(K)$$

En forma matricial, la ecuación de estado es:

$$X(K+1) = C\ X(K) + D\ U(K)$$

Donde las matrices C y D están relacionadas con el último renglón de las matrices A y B.

Si se denominan de otra manera las salidas de las unidades de retardo es posible encontrar nuevas ecuaciones de variable de estado con otro conjunto de matrices.

$$q(K+1) = W\ X(K+1)\ldots\ (\alpha)$$

$$X(K+1) = A\ X(K) + B\ U(K)\ldots\ (\beta)$$

El número vector de estado es una transformación lineal no singular de $X(K)$, y existe siempre que exista W^{-1} de W.

Substituyendo β en α :

$$q(K+1) = W[A\ X(K) + B\ U(K)]$$

De la ecuación α

$$X(K) = W^{-1}\ q(K)$$

Por lo tanto

$$q(K+1) = W[A\ W^{-1}q(K) + B\ U(K)]$$

Simplificando

$$q(K+1) = WAW^{-1}q(K) + WB\ U(K)$$

$$Y(K) = C\ W^{-1}q(K) + D\ U(K)$$

Redefiniendo a las matrices:

$$\hat{A} = WAW^{-1}$$

$$\hat{B} = WB$$

$$\hat{C} = CW^{-1}$$

tenemos

$$q(K+1) = \hat{A}\, q(K) + B\, U(K)$$

$$Y(K) = \hat{C}\, q(K) + D\, U(K)$$

Para este par de ecuaciones $q(K)$ representa el vector de estado y $\hat{A}$ es la nueva matriz de estado. Con esta transformación lineal se observa que todas las elecciones del vector de estado son equivalentes en el sentido en que siempre es posible definir una elección en términos de otra; por ejemplo

$$q(K) = W\, X(K) \text{ y } X(K) = W^{-1} q(K)$$

Para sistemas multientradas-multisalidas el espacio de estado es un método conveniente y representa una verdadera ampliación en las formulaciones de sistemas.

Sea un sistema con r entradas y s salidas. Haciendo un reordenamiento en la naturaleza de las matrices y secuencias, se pueden usar las ecuaciones de estado originales:

$$X(K+1) = A\, X(K) + B\, U(K)$$

$$Y(K) = C\, X(K) + D\, U(K)$$

Pero ahora $X(K)$ es un vector de estado n-dimensional, $U(K)$ es un vector de entrada r-dimensional con entradas $U_1(K)$, $U_2(K), \ldots, U_r(K)$, y $Y(K)$ es un vector de salida s-dimensional cuyas componentes son las s salidas $Y_1(K)$, $Y_2(K), \ldots, Y_s(K)$. La matriz A tiene dimensiones n x n, la B n x r, la C s x n, y la D s x r.

3.7.10.3 SOLUCION DE LAS ECUACIONES CON VARIABLE DE ESTADO

El problema que se plantea es determinar la respuesta del sistema $Y(K)$ y la evolución del estado $X(K)$ en función de la secuencia $\{U(K)\}$.

Primero calculamos $X(K)$, partiendo de la condición inicial $X(0)$ y de que conocemos la secuencia $\{U(j)\}$, $j = 0, 1, \ldots, K$.

$$X(1) = A\ X(0) + B\ U(0)$$

$$X(2) = A\ X(1) + B\ U(1) = A^2\ X(0) + AB\ U(0) + B\ U(1)$$

$$\vdots$$

por tanto

$$X(K) = A^K X(0) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{K-1-m} B\ U(m) \ldots (\alpha^1)$$

$$Y(K) = CA^K X(0) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{K-1-m} B\ U(m) + D\ U(K) \ldots (\beta^1)$$

Estos últimos modelos son susceptibles de procesamiento por computadora. Si tomamos en cuenta que para un problema real, la cantidad de datos es muy grande, entonces se torna casi imposible el uso "manual" de estos modelos.

3.7.10.4 CONCEPTOS UNIFICADOS DE ESPACIO DE ESTADO

Estos modelos proporcionan la formulación más general para sistemas de cualquier tamaño, con un número de entradas y salidas suficientemente grande. El proceso de solución es fácil de programar en una computadora digital y proporciona cantidad de información adicional además de su salida.

En el último modelo que vimos, que es la conclusión del espacio de estado, notamos que el término $CA^{k-1}B$ representa, haciendo una analogía con el método de la respuesta al impulso que vimos en un subtema anterior (3.4), es justamente la secuencia de respuesta al impulso para obtener la salida debida a una secuencia de entrada, mientras que el resto del término $CA^{k-1-m}B$ corresponde a la secuencia respuesta al impulso desplazada que aparece en la suma convolución. El cálculo de A^n es fundamental para la resolución del sistema. Este cálculo se logra utilizando la teoría de funciones de matrices, obteniendo primero la ecuación característica $g(\lambda) = |A-\lambda I| = 0$ cuyas raíces cuyas raíces son los eigenvalores (valores característicos) de la matriz A. Después se aplica el teorema de Caley-Hamilton, que establece que toda matriz n x n satisface su ecuación característica. Obtenemos en dicho proceso cualquier potencia de A como una suma ponderada de matrices que incluya a A, expresada como:

$$f(A) = \sum_{m=0}^{n-1} \beta_m A^m$$

La solución del sistema será determinado por los valores de β_m para $m = 0,1,2,\ldots,n-1$. Con lo cual se resuelve el problema de espacio de estado planteado por (α^1) y (β^1).

3.7.10.5 OBSERVABILIDAD Y CONTROLABILIDAD

Se dice que un sistema es observable si se puede determinar el estado inicial basándose en las observaciones y en el sistema de matrices A y C. En general, el vector de salida $\underline{y}$ se emplea para recuperar el vector de estado del sistema $\underline{x}$.

$$Y(K) = C\,X(K) + D\,U(K)$$

Si la matriz C contiene una columna cero, por ejemplo la j-ésima columna, entonces x_j no aparecerá explícitamente en las ecuaciones para y. En ocasiones sucede que el sistema está interconectado de tal manera que aunque C tenga una columna cero, las otras columnas proporcionan la información acerca de este modelo natural. Pero en el caso de que el sistema se represente "desacoplado", de manera que sus modos naturales no interactúen, entonces la matriz C es suficiente para determinar la observabilidad. (El concepto de observabilidad se asocia con la determinación del vector de estado a partir del vector de salida).

Existe un concepto dual, que se refiere al control del vector de estado a partir del vector de entrada $X(K+1) = A\,X(K) + B\,U(K)$, llamado controlabilidad.

En general, los sistemas controlables, las componentes X_j del vector de estado están acopladas a la entrada U de la misma manera que las componentes de estado están acopladas a la salida y en los sistemas observables. (Se dice que un sistema es controlable si el vector inicial de estado se puede situar en el origen en un tiempo finito eligiendo la entrada {U(K)} correcta.

3.7.10.6 ESTABILIDAD

Los eigenvalores de la matriz de estado caracterizan la estabilidad del sistema. Un sistema de tiempo discreto será estable si y sólo si todos los eigenvalores tienen módulos menores que 1. Esto se comprende mejor viendo la teoría de la matriz de estado y sus cambios de base.

Caso continuo

El cálculo principal para evaluar la ecuación de estado y la salida en esta formulación es la determinación e^{At} (que es una función de una matriz). Por lo demás existen grandes analogías con el caso discreto.

3.7.11 UNIDAD EN LA SOLUCION DE SISTEMAS LINEALES, (USANDO TECNICAS DE TRANSFORMADA O DE RESPUESTA AL IMPULSO, ECUACIONES DIFERENCIALES Y ESPACIO DE ESTADO).

En forma resumida un sistema se representa por:

$$L[y] = x(t) \ldots\ldots (1)$$

Para el caso de las ecuaciones diferenciales.

$$L = b_n \frac{d^n}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + b_0 \ldots\ldots (2)$$

Para el caso de las ecuaciones en diferencias.

$$L = b_n S^n + b_{n-1} S^{n-1} + \ldots + b_0 \ldots\ldots (3)$$

Para el caso de los métodos de transformada L es el filtro y está relacionado con la respuesta al impulso unitario.

$$Y(S) = X(S)H(S)$$

Habíamos visto que L es un operador lineal. Así, si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones de $L[y] = 0$, entonces $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ también es una solución.

La solución de los sistemas lineales tiene dos componentes: 1) La solución (homogénea, complementaria, natural o transitoria) de fuente libre y 2) la componente resultante de la fuente (no homogénea, solución particular, de estado estable o forzada). La solución transitoria se obtiene de la homogénea correspondiente. Es decir, y_c debe satisfacer

$$L[y_c] = 0$$

Donde y_c puede ser tanto $y_c(t)$ como y_{c_k}. Para el caso especial de coeficientes constantes, se tienen las soluciones generales respectivas:

$$y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ldots + c_n y_n(t) \ldots\ldots (2^1)$$

$$y_{c_k} = c_1 y_k^{\,1} + c_2 y_k^{\,2} + \ldots + c_n y_k^{\,n}. \qquad k = 0,1,2 \ldots\ldots (3^1)$$

Las funciones y_i dependen de las raíces de la ecuación característica asociada

$$f(r) = b_n r^n + b_{n-1} r^{n-1} + \ldots + b_0 = 0$$

La solución resultante de la respuesta forzada es un poco más complicada. Se trata de encontrar un operador anulador L_A tal que

$$L_A[X] = 0$$

De esta forma la función solución será respectivamente:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t) + c_{p1} y_{p1}(t) + \ldots + c_{pr} y_{pr}(t)$$

$$y_k = c_1 y_k^{\,1} + \ldots + c_n y_k^{\,n} + c_{p1} y_{p1}^{\,1} + \ldots + c_{pr} y_{pr}^{\,r}$$

Las primeras n funciones solución satisfacen $L[y] = x$, estos términos sumarán cero y los únicos términos del segundo miembro serán las soluciones particulares que provienen de la función de excitación. Después se igualan coeficientes de términos semejantes en ambos miembros de la ecuación, siendo posible entonces determinar las constantes $c_{p1}, \ldots c_{pr}$, y así obtenemos la solución forzada.

Concluimos que la respuesta total de un sistema a cualquier función de excitación está compuesta por una parte transitoria e independiente de la fuente que es característica del sistema y una parte de estado estable que depende tanto del sistema como de la función de excitación. Ahora extenderemos estos conceptos del dominio del tiempo, ilustrando su concordancia en el dominio de la frecuencia, ampliando así la unidad del método.

Supongamos que aplicamos una entrada x(t) a un sistema cuya respuesta al impulso es h(t). La salida en el dominio de la transformada será entonces:

$Y(S) = X(S)\, H(S).$

Si la función de transferencia del sistema es

$$H(S) = \frac{N_2(S)}{D_2(S)} = \frac{N_2(S)}{(S-q_1)\,(S-q_2)\ldots(S-q_m)}$$

La combinación de la función de transferencia multiplicada por la entrada, nos da la salida:

$$Y(S) = \frac{N_1(S)\,N_2(S)}{(S-p_1)\ldots(S-p_n)\,(S-q_1)\ldots(S-q_m)}$$

Como sabemos, para obtener la salida en el dominio del tiempo, desarrollamos en fracciones parciales

$$Y(S) = \frac{c_n}{S-p_1} + \ldots + \frac{c_n}{S-p_n} + \frac{k_1}{S-q_1} + \ldots + \frac{k_m}{S-q_m}$$

Y posteriormente antitransformamos:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-p_i t} + \sum_{i=1}^{m} k_i e^{-q_i t} \ldots \quad (\alpha)$$

La primera suma del segundo miembro de esta ecuación (α) es la respuesta transitoria de y(t). Como podemos observar, estos términos se obtienen de las singularidades de H(S), conocidos como polos de la función. (En general, los coeficientes c_i dependen de H(S) y X(S).) La respuesta transitoria es una combinación lineal de términos oscilando a las frecuencias naturales del sistema.

3.7.12 SISTEMAS DE CONTROL

Habíamos visto que un sistema es un arreglo, conjunto o colección de cosas o componentes físicos conectados o relacionados de tal manera que forman una unidad o un todo. La palabra control ahora nos especificará regulación, dirección o comando. Por lo que un sistema de control se dirige a sí mismo o a otro sistema. En el sentido más abstracto es posible considerar cada objeto físico como un sistema de control. Cada cosa altera su medio ambiente de alguna manera, ya sea activamente o pasivamente. Así en la ingeniería y en la ciencia generalmente restringimos el significado de sistemas de control al aplicarlo a esos sistemas cuya función principal es comandar, dirigir o regular dinámicamente o activamente. Por lo expuesto hasta el momento podemos inferir que ya hemos tratado con este tipo de sistemas durante todo el capítulo; pero ahora sabremos que la teoría del control es la ciencia de mayor nivel de abstracción en la dinámica de sistemas por haber alcanzado la unificación de todos los conceptos anteriores, a través de la Teoría de Bloques, Teoría de Redes, Análisis de Sistemas Lineales y Análisis de Señales.

3.7.12.1 CLASIFICACION DE SISTEMAS DE CONTROL

Existen tres tipos básicos de sistemas de control:

a) Sistemas de control hechos por el hombre.
b) Sistemas de control naturales, incluyendo sistemas biológicos.
c) Sistemas de control cuyos componentes son 1) y 2).

Estos tipos básicos de sistemas de control entran en dos grandes categorías:

1) Sistemas de lazo abierto: Es aquel en el cual la acción del control es independiente de la salida.
2) Sistemas de lazo cerrado: Es aquel en el cual la acción del control es dependiente de la salida.

Los sistemas de lazo abierto están determinados por su calibración para ejecutar una acción con exactitud, (calibrar significa establecer o restable-

Los modos naturales del sistema conducen a la respuesta transitoria.

La segunda sumatoria de la ecuación (a) se denomina la parte de estado estable de la respuesta y(t). Estos términos se deben a las singularidades de X(S), y los coeficientes k_i dependen tanto de H(S) como de X(S), y los coeficientes k_i dependen tanto de H(S) como de X(S). En los sistemas estables, los términos de la primera suma tienden a cero cuando se incrementa t, mientras que la parte de estado estable puede contener términos que son distintos de cero indefinidamente. La respuesta h(t) al impulso se obtiene para un impulso de entrada que en el dominio de S representa una entrada X(S)=1. De esta manera, h(t) es una combinación lineal particular de los modos naturales del sistema. Las partes transitoria y de estado estable de y(t) corresponden a lo que se llamó las soluciones homogénea y no homogénea, respectivamente, de la ecuación diferencial que describe al sistema.

Se puede hacer un desarollo análogo para sistemas de tiempo discreto, sin cambios de fondo en esta unidad conceptual.

habíamos visto que la solución de las ecuaciones de variable de estado en general era una ecuación matricial de la forma:

$$X(k) = A^{k}X(O) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m}B\ U(m)$$

donde X(k) y U(m) son secuencias vectoriales; mientras que A y B son matrices. Las condiciones iniciales se representan por X(O). La matriz A^k es el producto giro de orden k, llamada matriz base o de transición del sistema. En la ecuación se observan dos clases de términos. Esta observación amplía aun más la unidad en la convergencia de las soluciones de los diversos métodos. Así tenemos que el primer término de la ecuación anterior $A^kX(O)$ representa una evolución de fuente libre del estado, que sería la solución homogénea. El segundo término, que es semejante a una suma convolución, corresponde a una respuesta forzada del estado. Dicha solución es propia de los sistemas más complejos: multientrada multisalida; pero es congruente con todo el análisis de sistemas.

cer una relación entre la entrada y la salida con el fin de obtener del sistema la exactitud deseada). Estos sistemas no tienen el problema de la inestabilidad.

Los sistemas de lazo cerrado se llaman comúnmente sistemas de control por retroalimentación (generalmente se dice que existe retroalimentación en un sistema cuando existe una secuencia cerrada de relaciones de causa y efecto entre las variables del sistema).

3.7.12.2 CARACTERISTICAS DE LA RETROALIMENTACION

a) Aumento de exactitud. (Por ejemplo, la habilidad para reproducir la entrada fielmente).
b) Sensibilidad reducida de la razón de la salida a la entrada, a las variaciones en las características del sistema.
c) Efectos reducidos de la no linealidad y de la distorsión.
d) Aumento del ancho de banda. (El ancho de banda de un sistema es ese intervalo de frecuencias (de la entrada) por sobre el cual el sistema responde satisfactoriamente).
e) Tendencia a la oscilación o a la inestabilidad.

3.7.12.3 EL PROBLEMA DE LA INGENIERIA DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

La naturaleza de la ingeniería de los sistemas de control es la consideración de dos problemas: El análisis y el diseño del sistema deseado.

El análisis es la investigación de las propiedades de un sistema existente. El diseño tiene que ver con la manera de escoger y arreglar los componentes del sistema de control para ejecutar una tarea específica. Existen dos métodos de diseño: 1)Diseño por análisis, y 2) Diseño por síntesis.

El diseño por análisis se lleva a cabo modificando las características de un sistema existente o de un modelo estándar del sistema y el diseño por síntesis, definiendo la forma del sistema directamente a partir de sus especificaciones.

depende tanto del sistema como de la función de excitación. Ahora extenderemos estos conceptos del dominio del tiempo, ilustrando su concordancia en el dominio de la frecuencia, ampliando así la unidad del método.

Supongamos que aplicamos una entrada $x(t)$ a un sistema cuya respuesta al impulso es $h(t)$. La salida en el dominio de la transformada será entonces:

$Y(S) = X(S)\,H(S)$.

Si la función de transferencia del sistema es

$$H(S) = \frac{N_2(S)}{D_2(S)} = \frac{N_2(S)}{(S-q_1)\,(S-q_2)\ldots(S-q_m)}$$

La combinación de la función de transferencia multiplicada por la entrada, nos da la salida:

$$Y(S) = \frac{N_1(S)\,N_2(S)}{(S-p_1)\ldots(S-p_n)\,(S-q_1)\ldots(S-q_m)}$$

Como sabemos, para obtener la salida en el dominio del tiempo, desarrollamos en fracciones parciales

$$Y(S) = \frac{c_n}{S-p_1} + \ldots + \frac{c_n}{S-p_n} + \frac{k_1}{S-q_1} + \ldots + \frac{k_m}{S-q_m}$$

Y posteriormente antitransformamos:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-p_i t} + \sum_{i=1}^{m} k_i e^{-q_i t} \ldots \quad (\alpha)$$

La primera suma del segundo miembro de esta ecuación (α) es la respuesta transitoria de $y(t)$. Como podemos observar, estos términos se obtienen de las singularidades de $H(S)$, conocidos como polos de la función. (En general, los coeficientes c_i dependen de $H(S)$ y $X(S)$.) La respuesta transitoria es una combinación lineal de términos oscilando a las frecuencias naturales del sistema.

Los modos naturales del sistema conducen a la respuesta transitoria.

La segunda sumatoria de la ecuación (α) se denomina la parte de estado estable de la respuesta y(t). Estos términos se deben a las singularidades de X(S), y los coeficientes k_i dependen tanto de H(S) como de X(S), y los coeficientes k_i dependen tanto de H(S) como de X(S). En los sistemas estables, los términos de la primera suma tienden a cero cuando se incrementa t, mientras que la parte de estado estable puede contener términos que son distintos de cero indefinidamente. La respuesta h(t) al impulso se obtiene para un impulso de entrada que en el dominio de S representa una entrada X(S)=1. De esta manera, h(t) es una combinación lineal particular de los modos naturales del sistema. Las partes transitoria y de estado estable de y(t) corresponden a lo que se llamó las soluciones homogénea y no homogénea, respectivamente, de la ecuación diferencial que describe al sistema.

Se puede hacer un desarollo análogo para sistemas de tiempo discreto, sin cambios de fondo en esta unidad conceptual.

habíamos visto que la solución de las ecuaciones de variable de estado en general era una ecuación matricial de la forma:

$$X(k) = A^k X(0) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} B\, U(m)$$

donde X(k) y U(m) son secuencias vectoriales; mientras que A y B son matrices. Las condiciones iniciales se representan por X(0). La matriz A^k es el producto giro de orden k, llamada matriz base o de transición del sistema. En la ecuación se observan dos clases de términos. Esta observación amplía aun más la unidad en la convergencia de las soluciones de los diversos métodos. Así tenemos que el primer término de la ecuación anterior $A^k X(0)$ representa una evolución de fuente libre del estado, que sería la solución homogénea. El segundo término, que es semejante a una suma convolución, corresponde a una respuesta forzada del estado. Dicha solución es propia de los sistemas más complejos: multientrada multisalida; pero es congruente con todo el análisis de sistemas.

3.7.12 SISTEMAS DE CONTROL

Habíamos visto que un sistema es un arreglo, conjunto o colección de cosas o componentes físicos conectados o relacionados de tal manera que forman una unidad o un todo. La palabra control ahora nos especificará regulación, dirección o comando. Por lo que un sistema de control se dirige a sí mismo o a otro sistema. En el sentido más abstracto es posible considerar cada objeto físico como un sistema de control. Cada cosa altera su medio ambiente de alguna manera, ya sea activamente o pasivamente. Así en la ingeniería y en la ciencia generalmente restringimos el significado de sistemas de control al aplicarlo a esos sistemas cuya función principal es comandar, dirigir o regular dinámicamente o activamente. Por lo expuesto hasta el momento podemos inferir que ya hemos tratado con este tipo de sistemas durante todo el capítulo; pero ahora sabremos que la teoría del control es la ciencia de mayor nivel de abstracción en la dinámica de sistemas por haber alcanzado la unificación de todos los conceptos anteriores, a través de la Teoría de Bloques, Teoría de Redes, Análisis de Sistemas Lineales y Análisis de Señales.

3.7.12.1 CLASIFICACION DE SISTEMAS DE CONTROL

Existen tres tipos básicos de sistemas de control:

a) Sistemas de control hechos por el hombre.
b) Sistemas de control naturales, incluyendo sistemas biológicos.
c) Sistemas de control cuyos componentes son 1) y 2).

Estos tipos básicos de sistemas de control entran en dos grandes categorías:

1) Sistemas de lazo abierto: Es aquel en el cual la acción del control es independiente de la salida.
2) Sistemas de lazo cerrado: Es aquel en el cual la acción del control es dependiente de la salida.

Los sistemas de lazo abierto están determinados por su calibración para ejecutar una acción con exactitud, (calibrar significa establecer o restablecer una relación entre la entrada y la salida con el fin de obtener del sistema la exactitud deseada). Estos sistemas no tienen el problema de la inestabilidad.

Los sistemas de lazo cerrado se llaman comúnmente sistemas de control por retroalimentación (generalmente se dice que existe retroalimentación en un sistema cuando existe una secuencia cerrada de relaciones de causa y efecto entre las variables del sistema).

3.7.12.2 CARACTERISTICAS DE LA RETROALIMENTACION

a) Aumento de exactitud. (Por ejemplo, la habilidad para reproducir la entrada fielmente).
b) Sensibilidad reducida de la razón de la salida a la entrada, a las variaciones en las características del sistema.
c) Efectos reducidos de la no linealidad y de la distorsión.
d) Aumento del ancho de banda. (El ancho de banda de un sistema es ese intervalo de frecuencias (de la entrada) por sobre el cual el sistema responde satisfactoriamente).
e) Tendencia a la oscilación o a la inestabilidad.

3.7.12.3 EL PROBLEMA DE LA INGENIERIA DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

La naturaleza de la ingeniería de los sistemas de control es la consideración de dos problemas: El análisis y el diseño del sistema deseado.

El análisis es la investigación de las propiedades de un sistema existente. El diseño tiene que ver con la manera de escoger y arreglar los componentes del sistema de control para ejecutar una tarea específica. Existen dos métodos de diseño: 1)Diseño por análisis, y 2) Diseño por síntesis.

El diseño por análisis se lleva a cabo modificando las características de un sistema existente o de un modelo estándar del sistema y el diseño por síntesis, definiendo la forma del sistema directamente a partir de sus especificaciones.

Representación del problema: El modelo.

Como objetivo principal, para la solución de un problema de sistemas, tanto las componentes como la configuración y la descripción del sistema, se deben poner en una forma adecuada de ser sometida a análisis, diseño y evaluación.

A continuación mencionamos los modelos de los componentes físicos y de los sistemas, más comúnmente usados en el estudio de los sistemas de control:

a) Ecuaciones diferenciales y otras relaciones matemáticas (convolución, respuesta al impulso unitario, transformadas, Análisis de polos y ceros, Espacio y estado, etc.).

Todos estos métodos son desarrollados en los temas antecedentes.

Los modelos matemáticos, en la forma de ecuaciones del sistema, se emplean cuando se requieren relaciones detalladas. Cada sistema de control se puede caracterizar teóricamente por ecuaciones matemáticas. la solución de estas ecuaciones representa el comportamiento del sistema. A menudo esta solución es difícil: en tal caso se deben hacer ciertas suposiciones, conducentes a simplificación, en la descripción matemática. Para un gran número de sistemas de control estas aproximaciones y simplificaciones conducen a sistemas que se pueden describir por medio del Análisis de Sistemas Lineales.

b) Diagramas en bloque.

c) Gráficas de flujo de señales.

Los diagramas en bloque y las gráficas del flujo de señales son acortamientos en forma de representaciones gráficas, ya sea de diagramas esquemáticos de un sistema físico o del conjunto de ecuaciones matemáticas que caracterizan las partes del sistema.

3.7.12.4 LA CIENCIA DEL CONTROL

Esta ciencia está dedicada con mayor énfasis al desarrollo de modelos matemáticos para representar situaciones físicas. Los principios comunes que existen entre matemáticas y física también se utilizan con el fin de entender las características de los sistemas de retroalimentación en la medida en que estos se relacionan con la transmisión o procesamiento de una cantidad abstracta llamada información. Por lo tanto la ingeniería de los sistemas de control abarca no solamente al campo completo de las ciencias de la ingeniería, sino también las ciencias biológicas y sociales.

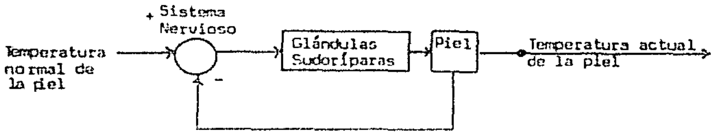
Estos aspectos adicionales han creado o planteado tantos problemas nuevos que el análisis de sistemas y su diseño se ha convertido virtualmente en una ciencia.

A continuación presentaremos una serie de ejemplos de problemas relacionados con áreas, que antes no se sometían a análisis matemático en rigor, como el caso de la Biología y de las Ciencias Sociales. Para el lector relacionado con estos temas, puede pasar al siguiente capítulo.

Ejemplos:

a) El sistema de transpiración es una parte del sistema de control de temperatura humano. Cuando la temperatura del aire exterior a la piel sube demasiado, las glándulas sudoríparas secretan en una mayor proporción provocando enfriamiento de la piel por evaporación. Las secreciones se reducen cuando se ha obtenido el efecto de enfriamiento necesario o cuando la temperatura del aie baja suficientemente.

La entrada de este sistema es la temperatura "normal" o confortable de la piel. La salida es la salida actual de la piel. Para este problema, la acción del control es igual a la diferencia entre la temperatura "normal" y la temperatura actual de la superficie de la piel.

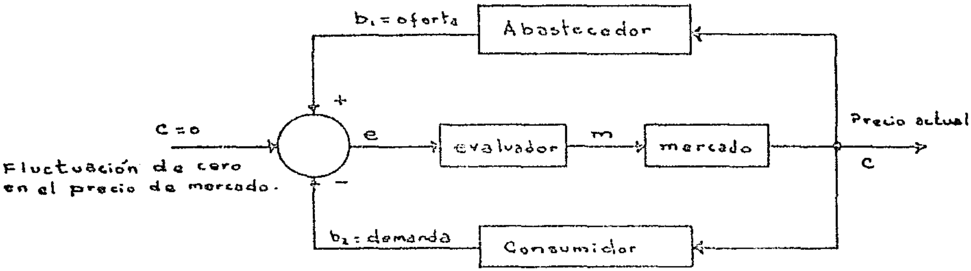


b) La ley de la oferta y la demanda se puede interpretar como un sistema de control por retroalimentación. El objetivo de este sistema es mantener la estabilidad en los precios. La ley se puede establecer de la siguiente manera:

La demanda del mercado por el artículo decrece a medida que su precio aumenta. La oferta del mercado generalmente aumenta cuando su precio disminuye. La ley de la oferta y la demanda dice que se logra un precio estable del mercado si la oferta es igual a la demanda.

La manera en que la oferta y la demanda regulan el precio se puede describir con los conceptos del control por retroalimentación. Escogemos los siguientes cuatro elementos básicos para nuestro sistema: El que ofrece, el que demanda, el que fija precios y el mercado donde el artículo se compra y se vende. Estos elementos generalmente representan procesos muy complicados. La entrada en nuestro sistema económico es la estabilidad de los precios. Una manera más conveniente de describir esta entrada es por fluctuación de cero en el precio. La salida es el precio actual en el mercado.

El sistema funciona como sigue: El que fija el precio recibe una orden (cero) para estabilidad del precio. Este calcula un precio para la transacción con la ayuda de la información en su memoria o registros de transacciones pasadas. Este precio obliga al que ofrece a producir u ofrecer cierto número de artículos y al que demanda, a pedir un número de artículos. La diferencia entre la oferta y la demanda es la acción de control para este sistema. Si la acción de control, no es cero, es decir, si la oferta no es igual a la demanda, el que fija el precio inicia un cambio en el precio del mercado en tal dirección que haga que la oferta iguale la demanda. Luego tanto el que ofrece como el que demanda se pueden considerar como la retroalimentación ya que ellos determinan la acción del control.



3.8 SIMULACION MATEMATICA DE FILTROS

3.8.1 GENERALIDADES

Esta sección está dedicada a un problema muy común en Geofísica, que es el diseño de filtros. El objetivo de este tema es proponer un método general de simulación de filtros, que sea estructurado y que se pueda incluir un procesamiento accesible y simplificado, para observar las ventajas y desventajas de unos filtros sobre otros, respecto al modelo (Geofísico, Astrofísico, Biofísico, etc.) particular que se esté manejando.

Así por ejemplo, en un problema de Geofísica, para diseñar un sistema general, necesitamos a través del modelo representado (medio estratificado horizontal, contactos inclinados, influencias laterales, ruido, etc) incluir filtros para modificar de alguna manera las diversas señales internas.

En el caso de los sistemas de comunicación, control y telemetría, se ha logrado formalizar cantidad de filtros analógicos, que es posible transferir problemas de naturaleza digital, como es el caso de la Geofísica y de todas las ciencias que emplean técnicas de muestreo.

El hecho de que sea necesario el procesamiento por computadora, le da al problema un carácter digital o discreto inherente a los sistemas, incluyendo a los sistemas de Geofísica, Electrónica, Comunicaciones, etc. Por ejemplo, en las comunicaciones, se hace uso extenso de los filtros pasa bajas, pasa altas, de paso a banda, de rechazo a banda, así como de otros filtros que sirven para confirmar el espectro. En los sistemas de control, se necesitan filtros de compensación para obtener la respuesta deseada del sistema. Para la sismología este es un problema crucial, habiendo tomado las ventajas desarrolladas en el control.

Por toda la gama de aplicaciones que hemos ennumerado es de gran importancia didáctica esta simulación porque fija las bases para investigaciones posteriores acerca de lan teoría de filtros. En lo que sigue, veremos la teoría del muestreo que es el fundamento para el diseño de los filtros, la elaboración del plan de simulación de filtros, las restricciones para su construcción, y por último, los métodos elementales de la construcción de dichos filtros.

El problema que intentamos resolver, consiste en transformar los filtros analógicos de mayor aceptación, en filtros digitales, para hacer una manipulación matemática de problemas físicos, como en el caso de la resolución de los modelos para medios estratificados cuya naturaleza de los valores de las propiedades físicas es discreto. Por lo que intentamos hacer una transformación de los filtros de diseño electrónico analógico, en filtros de diseño matemático digital; obteniendo las ventajas que en esta área se promueven y probando incesantemente su validez y mejoramiento, siendo el objetivo último en las ciencias de sistemas indirectos (criptosistémicas, o cajas negras) la optimización de la resolución.

Una vez desarrollado el método de simulación, entonces la Electrónica podrá tomar las ventajas propias, utilizando dicho método como análisis para sus diseños físicos, sin necesidad de construir los equipos, sino mediante operaciones meramente matemáticas.

El lugar que ocupa la Teoría del muestreo en el Análisis de Fourier es trascendente en el método de simulación, porque sienta las bases conceptuales para el manejo y procesamiento de la información. A continuación veremos estos conceptos.

La base en la que se fundamenta la teoría de señales, consiste en suponer que las funciones periódicas contienen dos componentes:

$$h(t) = \frac{h(t)}{2} + \frac{h(t)}{2}$$

Utilizando las definiciones de funciones pares o impares, sabemos que si $h_e(t) = h(-t)$ es una función par, mientras que si $h_o(t) = -h(-t)$ es una función impar. Por lo que descomponiendo las dos partes en que se había dividido la función:

$$h(t) = \left[\frac{h(t)}{2} + \frac{h(-t)}{2}\right] + \left[\frac{h(t)}{2} - \frac{h(-t)}{2}\right]$$

Que representan la parte par e impar de $h(t)$ respectivamente:

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t)$$

Así mismo sabemos que una función tiene unívocamente representada su transformada:

$$h(t) \Leftrightarrow H(f)$$

De la cual hemos observado que se descompone en dos componentes:

$$H(f) = R(f) + iI(f)$$

Lo que significa que cada parte tiene su correspondiente componente real e imaginaria:

$$R(f) + iI(f) = H_e(f) + H_o(f)$$

Cuyas representaciones integrales son:

$$H_e(f) = R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t)\cos(2\pi ft)dt$$

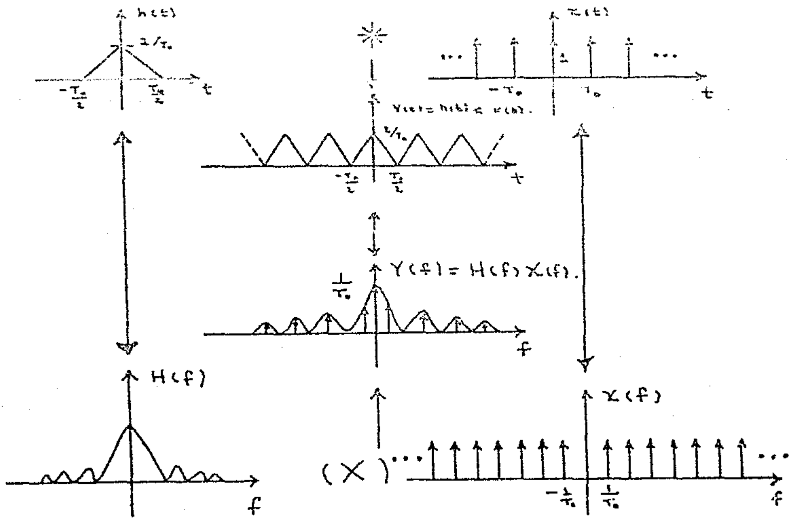
$$H_o(f) = I(f) = i\int_{-\infty}^{\infty} h_o(t)\,\mathrm{sen}(2\pi ft)dt$$

Lo cual es muy útil puesto que nos permite calcular sintetizadamente las transformadas de Fourier, desapareciendo una componente por lo regular.

3.8.2 UNIDAD EN LA SERIE DE FOURIER Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La unidad que aquí se propone, entre estos dos conceptos, proviene de la idea de que la serie de Fourier es en realidad un caso particular de la transformada de Fourier.

Para ello vamos a utilizar la siguiente figura:



En la figura podemos apreciar las relaciones que se indican:

$$Y(f) = H(f)\ X(f)$$

que es el resultado del teorema de convolución en frecuencia. La parte transformada de X(t) se desarrolla como:

$$X(f) = \frac{1}{T_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_o})$$

o sea que la salida quedaría, tomando en consideraciónque $f_n = \frac{n}{T_o}$

$$Y(f) = \frac{1}{T_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\frac{n}{T_o})\ \delta(f - \frac{n}{T_o})$$

De lo cual concluimos que la transformada de Fourier de una función periódica es una infinita secuencia de sinusoides (o una infinita secuencia de impulsos equidistantes) con complitudes de $H(\frac{n}{T_o})$. Por otro lado la serie de Fourier de una función periódica es una infinita suma de sinusoides con amplitudes dadas por D_k.

La unidad entre la serie y la transformada, proviene del hecho de que $h(t) = y(t)$ en el intervalo $-\frac{T_o}{2} < t < \frac{T_o}{2}$ como puede observarse en la figura anterior. Esta estrecha relación se expresa matemáticamente:

$$D_k = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} h(t)\ e^{-i2\pi nf_o t}\ dt$$

Siendo la parte interior del segundo miembro de la ecuación la función transformada de h(t):

$$D_k = \frac{1}{T_o} H(nf_o) = \frac{1}{T_o} H(\frac{n}{T_o})$$

Aquí los coeficientes de la serie como hemos demostrado, se obtienen de la transformada de Fourier y esos coeficientes son los mismos que los de la función periódica obtenidos por el método tradicional. En la última figura se puede ver que D_k es igual a los valores de la transformada de Fourier H(f) evaluada en $(\frac{n}{T_o})$ excepto por el valor $\frac{1}{T_o}$.

Este enfoque unificado es clave para entender la teoría de la distribución dentro de la Teoría de Fourier. En seguida presentaremos una discusión de la teoría del muestreo como idea unificadora para el modelo de la Transformada Discreta de Fourier, que a su vez determina el modelo de la transformada rápida de Fourier (T.R.F.), que a final de cuentas son las bases de la Simulación de Filtros.

3.8.3 TEORIA DEL MUESTREO

3.8.3.1 CONCEPTOS GENERALES

La teoría de Fourier ha evolucionado en dos estructuras separadas que son la teoría de funciones continuas y la teoría de pulsos de tiempo, ambas unidas estrechamente, pues resuelven el mismo problema alternativamente e interactúan los mismos factores descritos en forma diferente, ampliando con ello la Teoría de las distribuciones.

Estos son los fundamentos de la Teoría del muestreo que ha cobrado capital importancia en la ciencia actual, incursionando en la Teoría de la Probabilidad, la Estadística y el cálculo de problemas físicos y humanos. Esa evolución se debe a que la solución de los problemas no necesariamente debe ser analítica, sino que además existe la alternativa de lograr una aproximación numérica.

La teoría de Fourier de las funciones continuas y de los pulsos de tiempo es el punto de partida para las ondículas, series de tiempo y señales muestreadas que tanta importancia tienen en la solución de problemas Criptosistémicos (Geofísica, Biomedicina, Astrofísica, Electrónica), pero que pronto se sumarán a este conjunto de soluciones, ciencias como la Economía, Sociología, Psicología, etc.

Las señales son ahora un concepto universal, que se conciben como una perturbación de un fenómeno no necesariamente físico y entonces son susceptibles de cuantificarse creando conceptos nuevos propios del campo donde se aplican; así es como dentro de este contexto han surgido conceptos de conotación general que actualmente se estan manejando en la diversidad. Tales conceptos son por ejemplo el concepto de ruido, el de filtro, el de caja negra, correlación, series de tiempo, etc. cada uno de los cuales, al ser utilizado en particular en cada campo de la ciencia en estudio, propicia imágenes nuevas, proponiendo soluciones distintas y sumando ideas revolucionarias en esa ciencia específica donde se aplican. La teoría de señales es una ciencia rica a este respecto por su elegancia matemática y por su nivel de abstracción, habiendo sido ampliamente desarrollada en Ingeniería, Análisis de la voz, Teoría del Radar, Análisis de Espectros (médicos, geofísicos, astrofísicos) y últimamente se ha iniciado una evolución de ciencias como la Biología, la Sociología y la Economía, gracias a la Teoría de Señales.

La razón de que la teoría de Señales se haya extendido tanto es que los modelos digitales han adoptado técnicas de fácil manejo para el procesamiento de datos, en temas tales como el teorema del muestreo, la convolución, la correlacón y la Transformada Rápida de Fourier (T.R.F.).

El objetivo de la Teoría del muestreo es reconstruir señales analógicas mediante formas discretas apropiadamente (es decir, utilizar la mínima información posible de una señal con la finalidad de obtener una buena aproximación de la función discreta respecto de la función continua).

Por ejemplo en Sismología se ha utilizado la Teoría del muestreo en las ondículas obtenidas en los datos adquiridos, que para analizarlas, ha sido necesario hacerlo en partes y en forma discreta. Así mismo en Ciencias Humanas es posibleelaborar tablas de la naturaleza discreta acerca de una población para estudiar cierto fenómeno, en cuyo caso se aplica la teoría del muestreo para describir funcionalmente el sistema. En fin, que podemos comprobar su extendida aplicación y utilidad, y pensamos que habrá una gran prosperidad de esta técnica matemática en muchas áreas científicas donde todavía no se ha hecho.

Hemos estudiado con anterioridad los antecedentes suficientes como para investigar la teoría del muestreo y su interpretación.

Si la función $h(t)$ es contínua en $t = T$, entonces una muestra de la función h(t) en el tiempo igual al período T se expresa, usando los conceptos de la teoría de distribución como:

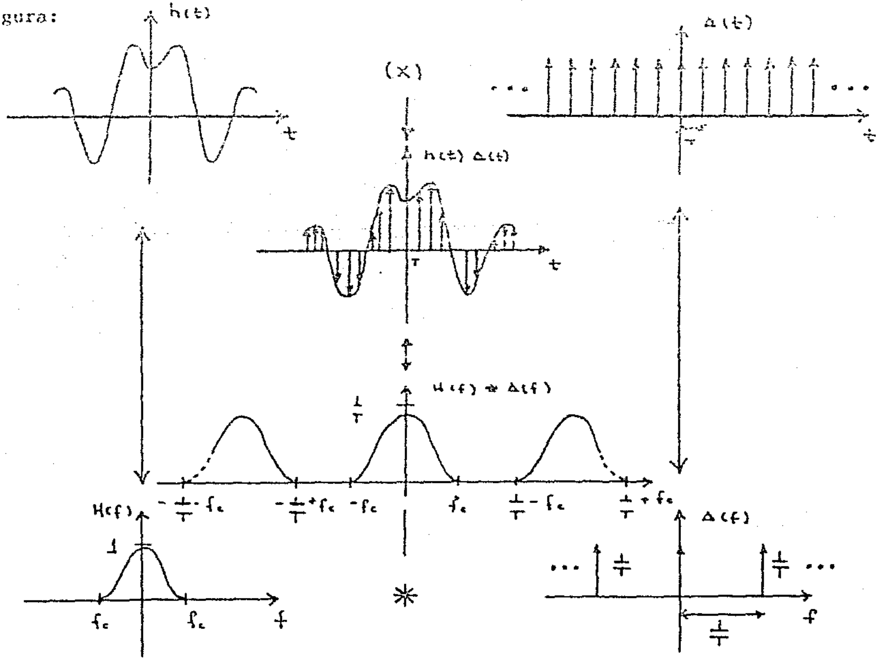
$$\hat{h}(t) = h(t)\ \delta(t-T) = h(T)\ \delta(t-T)$$

Generalizando para n muestras de la función h(t) encontramos la función de muestreo:

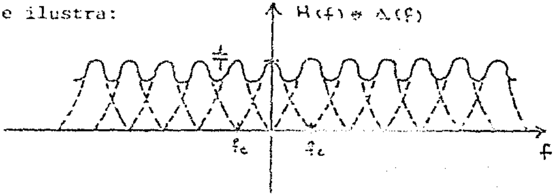
$$\hat{h}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\ \delta(t-nT)$$

para este caso T es el intervalo de muestreo. La función de muestreo $\hat{h}(t)$ es entonces una secuencia infinita de impulsos equidistantes, cada uno de los cuales con una amplitud dada por el valor de h(t) que le corresponde al tiempo de ocurrencia del impulso.

Para entender el concepto de muestreo es útil observar la siguiente figura:



La función $[h(t)\ \Delta(t)]$ es la función muestreada, siendo $\Delta(t)$ la función de muestreo (sampling). La transformada de Fourier de la función muestreada $[H(f) * \Delta(f)]$ es una función periódica donde un período es igual a una constante, para la transformada de Fourier de la función continua $h(t)$. Esto último es válido, sólo si el intervalo de muestreo T es suficientemente pequeño. Si T se escoge muy grande se obtiene un fenómeno en donde $\Delta(f)$ llega a tener espaciamientos más cortos; debido al decremento del espacio de los pulsos en frecuencia, su convolución con la función $H(f)$ resulta en la función traslapada que se ilustra:



Esta distorsión es conocida como aliasing. Para garantizar que la transformada de Fourier de la función no presente aliasing por observación sistemática de la relación de variadas funciones, se llegó a la conclusión de que $[H(f) * \Delta(f)]$ no presenta traslapes a menos que exista un incremento que desequilibre la relación $\frac{1}{T} = 2f_c$, donde f_c es la componente en frecuencia más alta posible, de la transformada de Fourier de la función continua $h(t)$. Esto es, si el intervalo de muestreo T se escoge igual a la mitad del recíproco de la componente de más alta frecuencia, el aliasing no ocurrirá. Este es un concepto en extremo importante para muchos campos de la ciencia; la razón de esto radica en el hecho de que necesitamos sólo retener muestras de la función continua que determinen una réplica de la transformada continua de Fourier.

3.8.3.2 TEOREMA DEL MUESTREO

Este teorema es una restricción de la teoría del muestreo, volviendo cero a $H(f)$ para todas las frecuencias mayores que la frecuencia de corte, por lo tanto la función $h(t)$ puede ser unívocamente determinada mediante el conocimieto de sus valores muestreados. Como habíamos visto

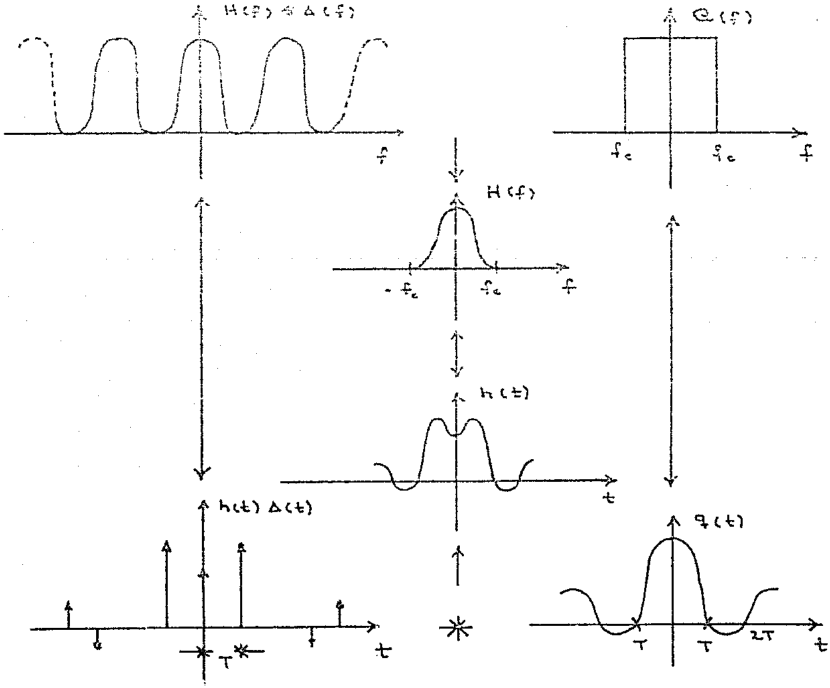
$$\hat{h}(t) = h(nT) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

donde $T = \frac{1}{2f_c}$. La función que hemos representado para h(t) es una función de distribución periódica que se expresa:

$$h(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \frac{\text{sen } 2\Pi f_c(t-nT)}{\Pi(t-nT)} .$$

Entonces el teorema del muestreo establece las condiciones para que una función pueda ser muestreada sin el fenómeno de aliasing. Lo cual ocurre si y sólo si las funciones en el dominio de las frecuencias son de banda limitada, esto es la transformada de Fourier es cero para $|f| > f_c$ y el espaciamiento de muestreo que se escoge cumple la relación $T \geq 1/2\ f_c$ comunmente conocido como intervalo de Nyquist.

Para comprobar la Teoría del muestreo debemos reconstruir h(t):



La última figura nos muestra cómo el producto $[H(f) * \Delta(f)]\, Q(f)$ nos da $H(f)$, que antitransformamos para obtener la señal deseada $h(t)$:

$$h(t) = [h(t)\, \Delta(t)] * q(t)$$

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [h(nT)\, \delta(t-nT)] * q(t)$$

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\, q(t-nT)$$

$$h(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \frac{\operatorname{sen}[2\Pi f_c(t-nT)]}{\Pi(t-nT)}$$

El teorema del muestreo en frecuencias es análogo:

$$h(t) = 0 \qquad |t| > T_c$$

Siendo

$$H(f) = \frac{1}{2T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{2T_c}\right) \frac{\operatorname{sen}[2\Pi T_c(f-n/2\, T_c)]}{\Pi(f-n/2\, T_c)}$$

La prueba es similar al teorema del muestreo en el dominio del tiempo.

3.8.4. DISEÑO DE FILTROS

3.8.4.1 GENERALIDADES

Habíamos dicho que una de las razones de elaborar un método de simulación de filtros es didáctica, la otra es unificadora, ya que se reunen la mayor parte de los conceptos que se han desarrollado en la Teoría de los Sistemas Lineales.

El filtro digital es un ejemplo vivo de lo que busca emprender la Teoría General de Sistemas (T.G.S.), ya que es un tipo cada vez más significativo en los sistemas lineales, debido a que se puede relacionar interdisciplinariamente en forma compartida sus usos, por ejemplo, entre varias componentes de una planta industrial, un sistema de control de cohetes, un sistema multicanal de comunicaciones o un sistema base de procesamiento de datos Geocientíficos.

Una de las ventajas más apreciadas del filtro digital consiste en su exactitud que depende de la capacidad de la máquina, más que de la tolerancia de los elementos físicos. También tienen la ventaja de desarrollar filtros complejos de orden superior, sin las limitaciones que imponen los elementos físicos no ideales. Por último, los filtros digitales se pueden modificar cambiando simplemente los coeficientes en el programa de una computadora digital a diferencia de los sistemas analógicos, los cuales deben reconstruirse físicamente.

3.8.4.2 CONDICIONES DE SIMULACION

Si tenemos un sistema analógico $Ha(\omega)$ con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$, queremos encontrar un sistema discreto $H(Z)$ tal que si su entrada $x(n)$ es igual a las muestras $x(nT)$ de $x(t)$, su salida $y(t)$ coincida con las muestras $y(nT)$ de $y(t)$.

Si existe tal sistema, diremos entonces que es un simulador digital de $Ha(\omega)$.

Como veremos después $y(n) = y(nT)$ no puede cumplirse en general para cualquier $x(t)$. La simulación sólo se hace posible si se limita la clase de entrada.

Teorema de simulación. Si $x(t)$ es de banda limitada, o sea, si $F(\omega)=0$ para $|\omega| > \tau$, $\tau = \frac{\pi}{T}$ y $H(Z)$ es tal que

$$Ha(\omega) = H(e^{i\omega T}) \text{ para } |\omega| < \tau$$

Entonces la condición de simulación $y(n) = y(nT)$ queda satisfecha.

Esta restricción del tipo de entrada se debe a que $H(e^{i\omega T})$ es una función periódica de ω, mientras que $Ha(\omega)$ no lo es.

Sabemos que: $H(Z) = H(e^{i\omega T})$

$$H(e^{i\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, e^{-in\omega T}$$

Del desarrollo en serie de Fourier:

$$h(n) = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} Ha(\omega)\ e^{in\omega T} d\omega$$

Con ello obtenemos los pesos h(n) y en el dominio discreto del sistema queda determinado por su función de transferencia:

$$H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\ Z^{n}$$

Siempre y cuando se cumpla que $H(e^{i\omega T}) = Ha(\omega)$ en $|\omega| < \tau$ quedando el sistema discreto unívocamente determinado.

Introduciendo la función de transferencia del sistema analógico

$$H\tau(\omega) = Ha(\omega)\ P\tau(\omega)$$

obtenida al truncar $Ha(\omega)$ para $|\omega| > \tau$. Llamamos $h\tau(t)$ a su respuesta impulsional, tenemos:

$$h\tau(t) = \frac{1}{2\Pi} \int_{-\tau}^{\tau} Ha(\omega)\ e^{i\omega T}\ d\omega$$

que nos da $h(n) = T\ h\tau(nT)$.

De lo anterior podemos concluir que para la determinación de un simulador discreto $\hat{H}(Z)$ de un sistema analógico $Ha(\omega)$ existen dos casos posibles:

1.- Especificamos H(Z) en función de sus valores en el círculo unidad o sea $H(Z) = Ha(\omega)$ para $|\omega| < \tau$, calculando **h(n).**

2.- Calculamos h(n) por muestreo de la respuesta impulsional $h\tau(t)$ del sistema truncado $H\tau(\omega)$.

Ejemplo:

$$Ha(\omega) = i\omega$$
$$H\tau(t) = \frac{1}{2\Pi} \int_{-\tau}^{\tau} i\omega e^{i\omega t} d\omega = \frac{\tau t \cos \tau t - \operatorname{sen} \tau t}{\Pi t^{2}}$$

$$h(n) = T\, hT(nT) = \frac{(-1)^n}{nT} \quad \text{para } n \neq 0 \text{ y } h(0) = 0$$

$$\boxed{H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nT} \; Z^n}$$

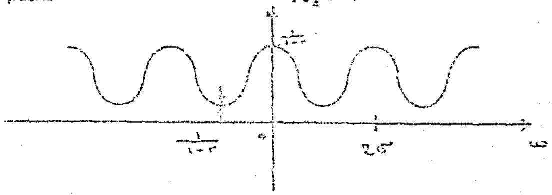
Diremos que un sistema analógico es un filtro en peine si su función de transferencia $Ha(\omega)$ es periódica.

$$Ha(\omega + c) = Ha(\omega)$$

Un sistema tal puede ser simulado digitalmente para cualquier entrada siempre que $T = \frac{2\pi}{c}$ o sea $T = \frac{c}{2}$.

Ejemplo: El sistema $Ha(\omega) = \frac{1}{1-re^{-i\omega c}}$

es un filtro en peine



Su solución digital será:

$$H(e^{i\omega T}) = \frac{1}{1-re^{-i\omega T}}$$

o bien:

$$H(Z) = \frac{1}{1-rz^{-1}}$$

Otro ejemplo de filtro en peine es $Ha(\omega) = (1 + e^{-i\omega T})^2$, $H(e^{i\omega T}) = (1 + e^{-i\omega T})^2$, directamente $H(Z) = (1-Z^{-1})^2$. Donde $h(n) = d(n) - 2\, d(n-1) + d(n-2)$.

En la mayoría de los problemas de electrónica, comunicaciones, control, o particularmente en los modelos de Geofísica, es deseable tener un sistema cuya función de transferencia $Ha(\omega)$ satisfaga ciertos requisitos de diseño. El sistema se realizará por medio de una combinación de varias componentes, concentrados o distribuidos, o por medio de un ordenador.

El primer enfoque conduce a técnicas de síntesis de redes, el segundo enfoque se basa en el Teorema de Simulación Digital.

3.8.4.3 SIMULACION INTEGRAL DE SISTEMAS ANALOGICOS

Hemos demostrado que cuando un sistema analógico $Ha(\omega)$ es una función de banda limitada ($BL - \tau\ f(t)$) se tiene que la salida resultante $y(t)$ puede expresarse como una suma convolución de la entrada con el filtro (función respuesta al impulso unitario).

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\ X(kT)\ h\tau(t-kT), \qquad T = \frac{\Pi}{\tau}$$

donde $h\tau(t)$ es la respuesta impulsional del sistema truncado $H\tau(\omega)$. Al tenerse que $H\tau(\omega) = Ha(\omega)\ P\tau(\omega)$, se desprende del teorema de convolución y de la teoría del muestreo que

$$h\tau(t) = ha(t) * \frac{\operatorname{sen} \tau t}{\Pi t}, \quad ha(t) \Longleftrightarrow Ha(\omega)$$

para $t = nT$ nos da

$$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\ X(kT)\ h\tau(nT-kT)$$

introduciendo las secuencias

$$x(n) = x(nT), \qquad \delta(n) = T\ h\tau(nT)$$
$$y(n) = y(nT)$$

obtenidas al muestrear las señales $x(t)$, $T\ h\tau(t)$ y $y(t)$ respectivamente, llegamos a la conclusión de que:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\ \delta(n-k)$$

Así tenemos que $y(n)$ es la salida de un sistema discreto con entrada $x(n)$ y respuesta delta $\delta(n)$.

La función de transferencia $D(Z)$ del sistema discreto así formado, está dada por

$$D(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)\, Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\, h\tau(nT)\, Z^{-n}$$

por lo tanto:

$$D(e^{i\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\, h\tau(nT)\, e^{-inT\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\tau\ (\omega+2n\tau)$$

por tal motivo concluimos que $D(e^{i\omega T})$ es periódica y coherente con $D(e^{i\omega T}) = H\tau(\omega) = Ha(\omega)$ para $|\omega| < \tau$.

Con las deducciones anteriores podemos elaborar otro problema que se resuelve bajo estos conceptos para la simulación de un sistema analógico. Se nos da una función de transferencia $Ha(\omega)$, generalmente mediante un conjunto de especificaciones, y la entrada $x(t)$, comunmente en tiempo real. Deseamos hallar la salida $y(t)$.

Para ello elaboramos un sistema discreto, ya sea en términos de su respuesta delta $\delta(n)$ determinada al muestrear la función $T\, h\tau(t)$, o en términos de su función de transferencia $D(Z)$ determinada por $D(e^{i\omega T}) = H\tau(\omega) = Ha(\omega)$ para $|\omega| < \tau$. La entrada que suministramos al sistema discreto es la secuencia de las muestras de $x(t)$ dada y obtenemos como salida las muestras de $y(n)$ de la $y(t)$ desconocida. Obviamente, $y(t)$ es de banda limitada ya que $Y(\omega) = X(\omega)\, Ha(\omega)$ y $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > \tau$, finalmente:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\, \frac{\operatorname{sen}\tau(t-nT)}{\tau(t-nT)}$$

Que es el resultado al que queríamos llegar y dándole solución completa al problema de simulación de filtros. Este último resultado es la señal de salida que reconstruimos en la teoría del muestreo con $h(t)$.

3.9 SIMULACION PARA UN MEDIO ESTRATIFICADO

3.9.1 MODELO ELECTRICO

3.9.1.1 Generalidades

El objetivo de la Simulación del Sondeo Eléctrico Vertical es lograr una relación biunívoca entre las formaciones geológicas y una función que represente las variaciones de resistividad con respecto a la profundidad.

La interpretación de las medidas se fundamenta en el supuesto de que el subsuelo está formado por una secuencia de distintas capas de espesor finito; siendo cada capa considerada eléctricamente homogénea e isotrópica y los planos en las fronteras entre capas son supuestamente horizontales. La derivación de la función potencial parte del hecho de considerar funa fuente puntual de corriente en la superficie de la Tierra para lograr funa simetría axial que simplifique el trabajo. La fuente de corriente es corriente directa. De las condiciones descritas se deduce que el potencial eléctrico satisface la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas sin variación angular:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

3.9.1.2 Solución analítica

La solución de la ecuación de Laplace es una combinación lineal de soluciones particulares. Por lo cual tomamos todo el rango de valores de λ (desde cero hasta infinito), y las constantes arbitrarias las hacemos variar como funciones de λ, para ganar generalidad:

$$V = \int_0^\infty \left\{ \Phi(\lambda) e^{-\lambda z} + \Psi(\lambda) e^{z\lambda} \right\} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

Donde posteriormente emplearemos las funciones de λ como núcleo de la transformación. Finalmente separamos el potencial generado por la fuente puntual y lo sumamos a las otras contribuciones, haciendo además independientes a las funciones Φ_i y Ψ_i ya que no son funciones de la misma capa del subsuelo necesariamente, por lo que la solución de la ecuación de Laplace bajo las condiciones descritas queda:

$$V_i = \frac{\rho_i I}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(e^{-\lambda z} + \Phi_i(\lambda) e^{-\lambda z} + \Psi_i(\lambda) e^{\lambda z} \right) J_o(\lambda r) d\lambda$$

Para la primera capa:

$$V = \frac{\rho_1}{2} \frac{I}{\pi} \int_0^{\infty} \left[1 + 2\Phi_1(\lambda) \right] J_o(\lambda r) d\lambda$$

Existe cierta dificultad en comprender el parámetro λ de esta solución, en la cual se presenta como una variable de integración. Para este caso – $\Phi_1(\lambda)$ sabemos que es una función, comunmente conocida como función kernel y que es controlada por los valores de resistividad de cada capa y por los valores de profundidad de los planos de frontera. La función kernel puede ser expresada mediante parámetros del subsuelo como un cociente de dos determinantes: $\Phi_1(\lambda) = D/P$. Donde D es el denominador de Kramer y P es el numerador de Kramer.

Para el caso de dos capas su expresión más conocida es la siguiente:

$$\Phi_1(\lambda) = \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1}}$$

3.9.1.3 FORMAS ALTERNATIVAS DE SOLUCION

Existen formas más convenientes de expresar la solución. Más comunmente se utiliza el kernel $K(\lambda) = 1+2\Phi(\lambda)$, que en esencia es el mismo resultado que en el método anterior. Pero al hablar de más conveniente, nos referimos a ciertas relaciones, que permiten dar solución al sistema de ecuaciones lineales; dichas relaciones se conocen como relaciones de recurrencia. El artificio consiste en dar una serie de valores iniciales correspondientes a una capa del subsuelo adicional, permitiendo una recurrencia que a cada paso logra mejorar la aproximación. Las relaciones de recurrencia que se usan son las de Flath y Pekeris. Su importancia se debe a que agilizan y simplifican las soluciones; pero sus métodos no son más que técnicas matriciales para la solución específica de este tipo de sistemas.

Pekeris utiliza una capa adicional, por encima de la superficie de la tierra, obteniendo la ecuación

$$K_{i+1}=(\rho_i K_i-\rho_i \operatorname{Tanh}(\lambda t_i))/(1-K_i \operatorname{Tanh}(\lambda t_i))$$

Esta relación es la más usada por su simple estructura y por la economía en el espacio de memoria en una computadora. Koefed ha introducido una leve modificación a esta relación de recurrencia:

$$T_{i+1}=(T_i- \;i \operatorname{Tanh}(\lambda t_i))/(1-T_i\frac{\operatorname{Tanh}(\lambda t_i)}{\rho_i})$$

Cuyo fin es la compatibilidad de la dimensión física de la resistividad. Donde T_i es la transformación de resistividad. Esta compatibilidad va más alla de la simple dimensión, provocando una ambigüedad muy útil entre las curvas de resistividad aparente y las curvas $(1/\rho\, t_i)$.VS. T_i/ρ_i). Lo que nos indica una relación entre la transformación de resistividad y la distribución de los parámetros de las capas del subsuelo.

Existe una relación lineal entre la resistividad aparente y la función transformación de resistividad, que permite llevar soluciones de un dominio a otro, y del conocimiento de esta relación depende la interpretación para el manejo de datos en los sondeos de resistividad. El avance de la Geofísica se debe a esta relación; aunque se hace una leve modificación reemplazando las variables independientes, tanto para las funciones de resistividad aparente, como para las funciones en el dominio de la transformada, mediante variables logaritmicas. Este artificio se debe a Gosh y es muy útil, ya que es el fundamento para la introducción de la teoría del filtraje lineal a la Geofísica. Los cambios de variable que se hacen son: $x=\ln(s)$, $y=\ln(1/\lambda)$.

Finalmente la expresión general para una configuración electródica simétrica y lineal es:

$$\rho ap=\frac{1-c^2}{2c}\int_{\infty}^{\infty}T(y)\left[Jo((1-c)e^{x-y})-Jo((1+c)e^{x-y})\right]e^{x-y}dy$$

3.9.1.4 FILTRADO DIGITAL

En el método del filtraje digital los valores de una de las funciones (de resistividad aparente o en el dominio e la transformada,) son obtenuidos como una expresión lineal determinados por los valores de las muestras de la otra función, siendo tomadas las muestras a un intervalo constante (V.Sección 3) a lo largo del eje de las abcisas. Los coeficientes en esta expresión son llamados coeficientes o pesos de los filtros.

Esta filosofía que ha llevado a Gosh y a Kunetz a revolucionar la interpretación en Geofísica, consistió en una transposición directa de la teoría del filtraje lineal a este campo, mediante la síntesis de una integral de convolución. Este es el aspecto esencial del paradigma científico que hemos venido manejando y que proponemos en la presente Tesis. En este sentido, todo lo que hemos desarrollado en los temas anteriores, tanto de análisis de sistemas, como de filtros, es aplicable.

El método usado por Gosh utiliza la teoría del muestreo para asegurar que el intervalo de muestreo sea suficientemente corto para evitar errores. Los teoremas de muestreo se utilizan para expandir en valores discretos la función en el dominio de la transformada T(y); los valores de la función son reconstruídos por el método de la teoría del muestreo en intervalos intermedios entre los puntos muestreados. Kunetz fué el que notó que la evaluación de la integral que relaciona la resistividad aparente con la función de transformación se puede llevar a cabo aplicando la convolución:

$$\rho apw.=\sum_{j=-\infty}^{\infty} fjT(yo+j\ y)$$

a los fj se les llama pesos del filtro, por los cuales los valores muestreados de la función transformada deben ser multiplicados para obtener los valores de la función resistividad aparente.

3.9.1.5 TIPOS DE FILTROS

Los filtros usados en el S.E.V. se aplican en los métodos de interpretación de las medidas de resistividad. Así tenemos los filtros indirectos que determinan los valores de la función transformada a partir de la función de resistividad aparente; o bien, los filtros directos que determinan los valores de resistividad aparente a partir de la función transformada; y finalmente, los filtros que transforman la función de resistividad aparente para una determinada configuración electródica en otra configuración electródica.

Los métodos de filtrado matemático están basados en el hecho de que una función original se compone de la función muestreada convolucionada con la función Sinc. Tal función representa la curva de resistividad aparente como la entrada del sistema y la función transformada como la salida del sistema, en cuyo caso hablamos del problema inverso. En el caso contrario nos referimos al problema directo.

La determinación de los filtros fj se puede efectuar por todos los métodos desarrollados en el análisis de señales:

1.- Integración directa. Este método puede ser consultado en las publicaciones de Bichara y Lakshmanan y los filtros de Bernardini y Cardarelli.

2.- Por transformada de Fourier. La teoría de la transformada de Fourier y la teoría de la convolución es la base de la teoría del filtraje lineal. El método ha sido empleado por Gosh y parte de la analogía existente entre la función convolución y la función de resistividad aparente de Schlumberger. Contrariamente a lo que se pudiera esperar los coeficientes del filtro deseado, no se derivan de los valores muestreados de la función filtro, sino más bien la función filtro debe ser convolucionada con la función Sinc, o más convenientemente, el espectro de frecuencias de la función filtro debe ser multiplicada por el espectro de frecuencias de la función Sinc.

3.- Por transformada Z. La transformada Z es aplicada como en el caso de la transformada de Fourier. En particular, la transformada Z de la función filtro puede ser encontrada por la división de la transformada Z de la función de salida entre la función de entrada. Una atractiva conclusión que ya habíamos obtenido. La forma de desarrollar un problema particular de S.E.V. es exactamente igual a la que se vió en el tema de transformada Z anteriormente.

4.- Por mínimos cuadrados. El uso de los mínimos cuadrados para determinar los coeficientes del filtro diseñado para convertir una función en otra, es completamente análogo a la aplicación que se hace en Sismología, es decir son isomórficos, y la teoria desarrollada para el filtro Wiener es la misma para este caso.

3.9.1.6 INTERPRETACION

El fundamento de la interpretación consiste en comparar las curvas de resistividad aparente, obtenidas mediante las observaciones hechas en campo, con curvas modelo de la resistividad aparente para un medio estratificado, previamente calculadas. Este procedimiento de interpretación es muy práctico y corresponde a los métodos exclusivamente gráficos. Sin embargo, el cálculo de las curvas modelo se hace usando la teoria del filtraje lineal descrita antes, y por lo tanto es posible hacer la interpretación mediante métodos numéricos, comparando los valores de la curva de campo con los valores calculados por cualquiera de los métodos desarrollados en la teoría de filtraje lineal para la curva modelo. El método general fué introducido por Gosh. Los métodos de fracciones parciales y el método de las imágenes tienen serias restricciones y no son universalmente reconocidos; lo mismo sucede con los métodos de integración directa.

3.9.1.7 CALCULO DE CURVAS MODELO

El procedimiento se divide en dos etapas: 1.- Cálculo de los valores de la función transformada para los parámetros de capa (para tal efecto usamos la relación de recurrencia de Pekeris en la forma de Koefoed). 2.- La segunda etapa consiste en determinar los valores de la resistividad aparente a partir de los valores de la función transformada mediante la aplicación de un filtro lineal.

3.9.1.8 METODOS ITERATIVOS DE INTERPRETACION

El método consiste en comparar los datos de campo con los datos derivados de un modelo estratificado obtenido por un método de aproximación. Este procedimiento se repite hasta que concuerdan suficientemnte el modelo y los datos de campo. En los métodos más conocidos esta concordancia la determinaba un intérprete, pero desde 1973 la interpretación de dicha concordancia es automática. Existen dos tipos de interpretación iterativa: En el primero se calculan los valores de resistividad aparente a partir del modelo y se comparan con los valores obtenidos en el campo. A este método se le conoce como método en el dominio de la resistividad aparente. En el segundo, primero derivamos los valores de las muestras de la función transformada a partir de los valores de resistividad aparente obtenidos en campo, y comparamos estos con los valores del modelo de la función transformada. A este tipo de interpretación se le conoce como método en el dominio de la función de transformación. El primer tipo de interpretación se lleva a cabo como lo describimos en la sección de cálculo de curvas modelo. El segundo de los cálculos es más conveniente hacerlo directamente usando la relación de recurrencia de Pekeris. El primero de los cálculos requiere que estén disponibles los filtros para convertir la resistividad aparente en la función transformada.

Si la comparación entre la curva modelo y la curva de campo es hecha en el dominio de la transformada, entonces tanto la interpolación como la extrapolación de los valores de resistividad aparente se hacen aplicando un filtro lineal. Si la comparación es hecha en el dominio de la resistividad aparente, entonces la extrapolación y la interpolación no es necesaria; pero en ocasiones se lleva a cabo la interpolación para que el tiempo de máquina se reduzca, ya que se utilizan intervalos equiespaciados.

3.9.1.9 METODOS DIRECTOS DE INTERPRETACION

En este tipo de métodos primero se determinan los valores de la función transformada a partir de los valores de resistividad aparente; lo cual se logra aplicando un filtro lineal, tal y como se hace en los métodos iterativos. Antes de la aplicación del programa, los valores de resistividad aparente obtenidos en campo deben ser interpolados en orden, para obtener los valores muestreados equiespaciadamente siguiendo un intervalo de muestreo; también la extrapolación de los valores obtenidos en campo se hace en varias direcciones.

Un método alternativo para la determinación de la función transformada a partir de la función resistividad aparente ha sido propuesto por Patella, cuyo fundamento consiste en evaluar la integral que expresa la función transformada en términos de la resistividad aparente en la configuración Schlumberger:

$$T(\lambda)= (\rho ap.schl./s)J1(\lambda s)ds$$

Los valores de ρap. son mucho más suaves que los de J1(s) por lo que Patella hace coincidir a ρap. con una función constante dentro de un intervalo entre cada par de puntos muestreados. Una vez que ha sido determinada la función transformada, entonces la parte restante del proceso de interpretación directa consiste en dos pasos alternativos: Primero, la obtención de los parámetros de la última capa, transponiendo la primera parte de la curva de la función transformada en la curva de dos capas de la función transformada (manualmente). Después se reduce la función transformada al plano de frontera más bajo mediante la aplicación de la ecuación de Pekeris modificada por Koefoed. Habíamos visto que el factor por el cual Ti debe ser multiplicado para obtener Ti+1 es una función de dos variables, expresados por (Ti/ρi) y (tiλ). Gráficamente (1/tiλ es usado como abcisa,(Ti/ρi) como ordenada y (Ti+1/Ti) como parámetro multiplicador.

Con lo cual se determinan totalmente las relaciones que interactúan en el fenómeno. Los métodos para mejorar la resolución continuarán evolucionando, pero la física de la exploración eléctrica seguirá siendo la misma.

3.9.2 SIMULACION DEL MODELO SISMOLOGICO

3.9.2.1. INTRODUCCION

Para la solución del problema sismológico en Geofísica de Exploración, se utiliza una ecuación diferencial parcial de manera análoga a lo que hemos visto en el método eléctrico. En lugar de utilizar la ecuación de Laplace, como en el modelo eléctrico, se aplica la ecuación de onda, que describe el comportamiento de las ondas elásticas viajando a una velocidad variable correspondiente a cada medio (rocas, por ejemplo). El principio consiste en determinar el tiempo de arribo de la energía reflejada o refractada por las discontinuidades entre las diferentes formaciones de rocas, en distintos puntos.

La ecuación de onda es aplicable en la Sismología por la misma unidad y simetría que se manifiesta en toda la Ciencia: la cuerda vibrante o la membrana, las vibraciones del sonido, las vibraciones de los átomos, las oscilaciones electromagnéticas o acústicas en una cavidad, pueden describirse todas en una forma que es matemáticamente idéntica a un 'sistema' de osciladores armónicos. La analogía permite resolver los problemas de un área dada usando las técnicas desarrolladas en otras áreas.

En Sismología los parámetros que se analizan provienen de un proceso de campo en el que se implementan una red de transductores (geófonos) que generan la información a través de señales, constituyendo un perfil sismológico. Las señales originales (deformaciones o aceleraciones), después son transformadas en señales eléctricas y son amplificadas, filtradas, grabadas por cabezas magnéticas y dibujadas en papel. Los datos grabados forman un grupo de trazas sísmicas mostrando cada una de ellas el movimiento y la variación con el tiempo de la energía después de que se ha ejecutado el tiro con dinamita. Los arribos de energía constituyen los eventos que varían sistemáticamente de traza en traza, los cuales representan la energía reflejada, siendo fácilmente identificados en las grabaciones. Los tiempos de arribo son eventos medidos en varios grupos de geófonos. La localización y la actitud de la interfase que resulta de cada evento de reflexión se calcula a partir de los tiempos de arribo. El resultado de varios tiros en diferentes localizaciones se combinan en secciones cruzadas y mapas de contorno, los cuales representan la estructura de las interfases geológicas que causan los eventos. La presencia o ausencia de hidrocarburos o de otros minerales se infiere de la información estructural, en donde los datos sísmicos no son apreciablemente afectados por cada acumulación.

3.9.2.2 MODELO CUALITATIVO

Los medios de propagación de ondas sísmicas están separados por una interfase entre dos formaciones geológicas que se consideran homogéneas e isotrópicas. Cada medio tiene diferentes propiedades elásticas, dando como resultado una refracción o reflexión particular, descritas por las Leyes de la Optica y la Acústica. Las condiciones de frontera son las siguientes:

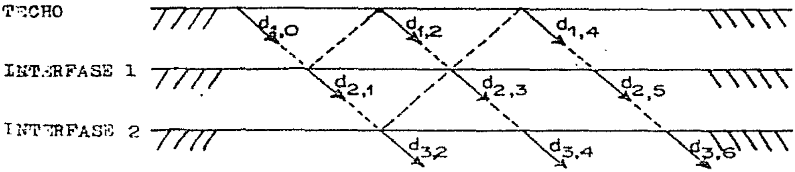
a) En la interfase los desplazamientos deben ser contínuos.

b) En la interfase los esfuerzos normales y tangenciales deben ser contínuos.

3.9.2.3 MODELO CUANTITATIVO

La teoría que se ha desarrollado para el fenómeno sismológico ha tomado dos caminos distintos, pero convergentes en el dominio de validez común. Uno de ellos utiliza como punto de partida consideraciones estadísticas y el otro, por su parte, tiene como punto de partida consideraciones deterministas, aplicando las leyes de la Optica y la Acústica. El primer método de solución es empleado por la Física aplicada y consiste en construir un sistema de ecuaciones lineales formadas a partir de las condiciones de frontera. Se asume primero que una onda plana P de amplitud Ao y que está incidiendo en la intefase. La Ley de Snell arregla los ángulos de reflexión y refracción, cuyas amplitudes son determinadas por cuatro condiciones de frontera. Sin embargo, para plantear cuatro ecuaciones debemos tener cuatro amplitudes desconocidas, así que cuatro ondas deben ser generadas en la frontera. La Ley generalizada de Snell se expresa como sigue:

$$\frac{\text{Sen } a1}{i1} = \frac{\text{Sen } a2}{i2} = \frac{\text{Sen } c1}{b1} = \frac{\text{Sen } c2}{b2} = n$$



El término generador del coeficiente de desplazamiento es $d_{k,k+2n-1}$

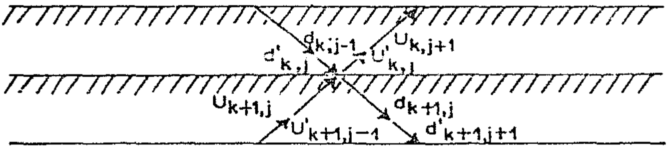
Para una capa en particular podemos obtener su transformada Z:

$$D_k(Z) = d_{k,k+2n-1} Z^{k+2n-1}$$

Si desplazamos una de las capas hacia arriba las transformadas sufren el siguiente cambio: $D'_k(Z) = Z D_k(Z)$ (5)

Para las ondas ascendentes procedemos análogamente: $U_k(Z) = ZU'_k(Z)$ (6)

Para plantear el modelo sismológico es necesario relacionar los coeficientes de reflexión y transmisión:



Donde: $U'_{k,j} = rd'_{k,j} + t'U_{k+1,j}$ ...(7) y $d_{k+1,j} = r'U_{k+1,j} + td'_{k,j}$ ...(8)

De la ecuación (6) obtenemos: $d'_{k,j} = \frac{1}{t}(d_{k+1,j} - r'U_{k+1,j})$ que sustituyendo en (5) da: $U'_{k,j} = \frac{r}{t}(d_{k+1,j} - r'U_{k+1,j}) + t'U_{k+1,j}$

FINALMENTE, desarrollando las ecuaciones y simplificando:

$tU'_{k,j} = rd_{k+1,j} + U_{k+1,j}$ ...(9) $td'_{k,j} = d_{k+1,j} + rU_{k+1,j}$ ...(10)

Tal sistema opera al tiempo k=j,j+2,j+4,... utilizando la transformada Z nos queda:

$$t\sum_j U'_{k,j}Z^j=r\sum_j d_{k+1,j}Z^j+\sum_j U_{k+1,j}Z^j \tag{11}$$

$$t\sum_j d'_{k,j}Z^j=\sum_j d_{k+1,j}Z^j+r\sum_j U_{k+1,j}Z^j \tag{12}$$

En términos de la transformada Z:

$$U_k(Z)=\frac{Zr_k}{t_k}D_{k+1}(Z)+\frac{Z}{t_k}U_{k+1}(Z) \tag{13}$$

Utilizando las ecuaciones (5), (6), (13) y (14) nos permite encontrar la relación que indica la dependencia entre las transformadas en Z de las ondas ascendentes y descendentes en el techo de una capa determinada k respecto a la capa k+1. Esta relación, es una transformación general en términos de una serie de matrices de comunicación:

$$\begin{matrix} D_k(Z) \\ U_k(Z) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{Z^{-1}}{t_k} & \frac{Z^{-1}r_k}{t_k} \\ \frac{Zr_k}{t_k} & \frac{Z}{t_k} \end{matrix} \quad \begin{matrix} D_{k+1}(Z) \\ U_{k+1}(Z) \end{matrix} \tag{15}$$

Para recuperar una señal des[illegible] y [illegible] de información se utiliza el proceso de deconvol[illegible] uso de toda la teoría de señales desarrollada en los [illegible]as anteriores.

La deconvolución en términos de su transformada será:

$$Y(Z)=X(Z)F(Z)=Q(Z) \tag{16}$$

Donde: $$X(Z)=Q(Z)P(Z) \tag{17}$$

A la señal Q(Z) se le asignan los valores de los coeficientes de reflexión del subsuelo y P(Z) son los datos perturbadores de la señal. Y(Z) a final de cuentas será la señal de salida limpia gracias a la acción de un filtro F(Z) que está diseñado para separar a Q(Z) de P(Z). En la ecuación (16), sustituímos la ecuación (17) y obtenemos:

$$Q(Z)=Q(Z)P(Z)F(Z)$$

$$1=P(Z)F(Z)$$

$$p_t\ f_t=1$$

O sea que la convolución de estas señales nos proporciona un impulso unitario de retardo cero.

3.9.3 COMPARACION DE MODELOS DE SIMULACION

El tratamiento empleado en las secciones anteriores para la solución de problemas de exploración geofísica sigue la línea que se ha desarrollado en los problemas de simulación. Por lo tanto creemos que se puede hacer una teoría única que provea a la Ciencia de una estructura y método para resolver problemas generales utilizando la simulación. Así mismo, al estudiar y analizar los procesos de cada área de ingeniería podemos transponer técnicas, conocimientos, software y hasta metodologías de un campo a otro; comparando las resoluciones siendo muy viable optimizar las alternativas.

La idea ha sido tomada de la simulación de yacimientos que divide el espacio en compartimientos, capas estratificadas, celdas, o lo que sea y determina los valores de los parámetros de un cierto fenómeno. Después considera las condiciones iniciales y de frontera para transformar la ecuación analítica en una ecuación recursiva que represente un sistema de ecuaciones lineales en las variables desconocidas que resuelvan el problema. Siendo factible utilizar este esquema o procedimiento en todas las áreas donde se requiere resolver un sistema con ecuaciones diferenciales parciales como es el caso de los modelos eléctrico y sismológico.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

PROLOGO

1.- Bronowski, Jacob. El Sentido Común de la Ciencia. Ediciones Península, 1a. Edición, España, 1978; pp. 144-6

2.- Idem p. 139

3.- Bertalanffy, Ludwig Von. Teoría General de Sistemas. Fondo de Cultura Económica. 1a. Edición, México, 1982; pp. 32-3

4.- Gal. 3, 28

5.- Rom. 12, 4-5

6.- Telford, et al. Applied Geophysics. Cambridge Universsity Press, G.B. 1980; p. 221

7.- Koefoed, Otto. Geosounding Principles, 1. Elsevier Scientific Publishing Co., Holanda, 1979; p. 51

8.- Ziolkowski, A. Further Thoughts on Popperian Geophysics. Geophysical Prospecting, 30, 165, 1982

9.- Kant, Manuel. Prolegómenos de toda Metafísica del porvenir. Porrúa, 2a. Edición, México, 1978; p. 21

10.- Chapa, Ma. Elena. Introducción a la Lógica. Editorial Kapeluz, 2a. Edición, México, 1979; p. 10

CAPITULO I

1.- Lewis, Donald. Introducción al Algebra. Ediciones Castilla, 1a. Edición, México, 1970; [illegible]

2.- Piaget, Jean. Psicología y Epistemología. Ariel, México, 1981; p. 51-7

3.- Kasner, E. y Newman J. Matemáticas e Imaginación. CECSA, 7a. Impresión, México, 1981

4.- Nagel, E. y Newman J. El Teorema de Gödel. CONACYT, México, 1981; p. 86

5.- Schopenhauer, Arthur. Fragmentos sobre Historia de la Filosofía. SARPE, España, 1984; p. 34

6.- Saussure, Ferdinand De. Curso de Lingüística General. Editorial Nuevo Mar, 2a. Edición, México, 1982

7.- Foucault, Michel. La Arqueología del Saber. Siglo XXI, 19a. Edición, México, 1984

8.- Kellog. Foundation of Potential Theory.

9.- Reichenbach, Hans. La Filosofía Científica. F.C.E., 2a. Edición, México, 1981; p. 15

10.- Piaget, J. y García, R. Psicogénesis e Historia de la Ciencia. Siglo XXI, 2a. Edición, México, 1984; p. 91

11.- Bronowski, Jacob. El Ascenso del Hombre. Fondo Educativo Interamericano, México, 1979; p. 179

Durero, Alberto. Instituciones de Geometría. UNAM, México, 1979; p. 227-48

12.- Philips, F. C. The use of Stereographyc Projection in Structural Geology. Edward Arnold Ltd., G. B., 1954

Hogan, Donald. Geología Estructural. Editorial Omega, España, 1980

Betancourt, Jorge. Elementos de Geometría Descriptiva. Editorial Arte y Técnica, México, 1969; p. 10

Compton, Robert. Geología de Campo. Editorial Pax, 1a. Edición, México, 1970; p. 299, 383, 414

Hurlbut, Cornelius. Manual de Mineralogía de Dana. Editorial Reverté, España, 1980; p. 35-43

13.- Kasner, E. Op.cit. p. 82

14.- Espacio de Estado y Sismograma Sintético, apuntes de Sistemas Lineales

15.- Bojórquez, Luis. Antología de Biología. UNAM, México, 1973; p. 241-7

16.- Gordon, Richard y Jacobson, Antone. El Modelado de los Tejidos de los Embriones. Investigación y Ciencia, No. 23, Agosto, 1978, España; p. 60-7

17.- Tod, James et al. La Percepción del Crecimiento Humano. Investigación y Ciencia, No. 43, Abril 1980, España; p. 92-101

18.- Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, México, 1984; p. 58

19.- Chapa, Ma. Elena. Op. cit. p. 83

Lara, Miguel. Antología de Matemáticas, Vol. II. UNAM, México, 1971; p. 113

20.- Aristóteles. Poética. UNAM, México, 1946; p. 1

21.- Sánchez, Adolfo. Antología de Estética. UNAM, México, 1982; p. 98

22.- Idem p. 115-6

23.- Platón. Diálogos. Porrúa, 14a. Edición, México, 1973; p. 679

24.- Kant, Manuel. Crítica de la Razón Pura. Porrúa, México, 1979; p. 113-5

25.- Chapa, Ma. Elena. Op. cit. p. 83

26.- Santo Tomás de Aquino. Suma Teológica, Tomo II. Editorial Universo 1a. Edición, Perú, 1970; p. 373

Es digna de mencionar la definición de San Agustín que cita Sto. Tomás antes de enunciar su propia definición: "la verdad es la perfecta semejanza con el principio". Y Santo Tomás dice, un poco antes, que "los seres naturales son verdaderos por cuanto alcanzan a tener semejanza con las especies que hay en la mente divina". Y Bertrand Russell define la verdad "como la correspondencia con un hecho" (Russell Bertrand. Los problemas de la filosofía. Ediciones selectas, México, 1982; p. 145).

27.- Bachelard, Gaston. La formación del Espíritu Científico. Siglo XXI, 11a. Edición, México, 1983; p. 45

28.- Reichenbach, Hans. Op. cit. p. 31, 77-83

29.- Pabón, José. Diccionario Manual Griego-Español. Bibliograf, 9a. Edición, España, 1975; p. 42

30.- Aristóteles, Metafísica. [illegible], 1975; p. 24

31.- Kranz, Walther. La Filosofía Griega I. UTEHA, 1a. Edición, México 1962; p. 37-51

32.- Schrödinger, Erwin. ¿Qué es una ley de la Naturaleza?. F.C.E., 1a. Edición, México, 1975; p. 49-50

33.- Chinoy, Eli. La Sociología. F.C.E., México, 1973; p. 14. Citando la obra de Alfred Whitehead, Science and the Modern World

34.- Aristóteles, Metafísica Op. cit. p. 15-7

35.- Idem, p. 72

36.- Aristóteles. Etica Nicomaquea. Porrúa, 6a. Edición, México, 1976; p. 61

37.- Kant, Manuel Op. cit. p. 113-31

38.- Russell, Bertrand. Fundamentos de Filosofía. Plaza & Janés, España, 1975; p. 173-4

Russell, Bertrand. Los Problemas de Filosofía. Op. cit. p. 154-5, 93-6

Reichenbach, Hans. Op. cit. p. 92

39.- Bacon, Francis. Novum Organum. Porrúa, México, 1980; p. 90-125

40.- Larroyo, Francisco. Lógica y Metodología de las Ciencias. Porrúa, México, 1975; p. 184-6

41.- Russell, Bertrand. Perspectiva Científica. Ariel, 4a. Edición, España, 1974; p. 13, 20

42.- Chapa, Ma. Elena. Op. cit. p. 83

43.- Newton, Isaac. El Sistema del Mundo. SARPE, España, 1984; p.12

44.- Galeno. Iniciación a la Dialéctica. UNAM, México, 1982; p.1

45.- Bertalanffy, Ludwig Von. Op. cit. p. 87

46.- Sto. Tomás, Op. cit. 59-61, 94 y sobre todo 99

47.- Ferrater, José y Leblanc, Hugues. Lógica Matemática. F.C.E. México, 1980; p. 9

48.- Alegría, Margarita. Variedad y Precisión del léxico (1). ANUIES, 1a. Edición, México, 1975; p. 9

49.- Saussure, Ferdinand De, Op. cit. 99-104

50.- Ortega y Gasset, Joše. Historia como Sistema. SARPE, España, 1984; p. 126

51.- Reichenbach, Hans, Op. cit. p. 21

52.- Bachelard, Gastón, Op. cit. p. 87-98

53.- Camacho, Abel. Espacios Métricos. UNAM, México, 1981; p. 1

54.- Kasner, E. Op. cit., p. 215

55.- Bertalanffy, Ludwig Von. Op. cit. p. 54-7

56.- Robinson, Enders y Silvia, Manuel. Deconvolution of Geophysical

Time Series in the Exploration of Oil and Natural Gas. Elsevier Scientific Publishing Co., Holanda, 1979; p. 110

57.- Orellana, Ernesto. Prospección Geoeléctrica en corriente contínua Editorial Paraninfo, España, 1972; p. 135-6

58.- Alonso, Marcelo, y Finn, Edward. Física Vol. II. Fondo Educativo Interamericano, E.U.A., 1976; p. 774

59.- Segré, Emilio. De los Rayos X a los Quarqs. Folios Ediciones, la. Edición, México, 1983; p. 173

60.- Idem, p. 175

61.- Schrödinger, Erwin, Op. cit. p. 123

62.- Zverév, A. Radióptica. Editorial MIR, Moscú, 1982

63.- Saussure, Ferdinand De, Op. cit. p. 221

64.- Idem, p. 332

65.- Chinoy. Eli. Op. cit. p. 85

66.- Idem, p. 105

67.- Idem, p. 59, 49

68.- Brenner, C. An Elementary Text Book of Psychoanalysis. Int. Universities Press, E.U.A., 1955; p. 27

69.- Peterfreund, E. y Schwartz, J. Información, Sistemas y Psicoanálisis. Siglo XXI, México, 1976; p. 92

70.- Piaget, Jean y García, Rolando, Op. cit. p. 252

71.- Morrison, Robert y Boyd, Robert. Química Orgánica. Fondo Educativo Interamericano, E.U.A., 1976; p. 5

72.- Villee, Claude. Biología. Ed. Interamericana, 7a. Edición, México, 1978; p. 641

73.- Idem, p. 108

74.- Idem, p. 20

75.- Idem, p. 562

76.- Peña, Antonio. La Biología Contemporánea. UNAM, México, 1983; p. 50

77.- Platón, Op. cit. p. 604-9

78.- Sánchez, Adolfo, Op. cit. p. 60

79.- Bayer, Raymond. Historia de la Estética. F.C.E., México, 1980; p. 94-8

80.- Ning Yang, Chen. Las partículas elementales. Ed. Grijalbo, México 1969; p. 81

81.- Piaget, Jean. Op. cit. p. 45-50, 23-27

82.- Kant, Manuel. Prolegómenos de toda Metafísica del Porvenir Op. cit. p. 44-5

83.- Leibniz, W. Discurso de Metafísica. Porrúa, México, 1977; p.47

84.- Bayer, Raymond. Op. cit. p. 49

85.- Idem, p. 236

86.- Idem, p. 91

87.- Polya, G. Op. cit. p. 189

Lara, Miguel, Op. cit. Vol. II p. 37, citando la "Simetría"de Herman Weyl

88.- Bayer, Raymond. Op. cit. p. 105 citando la "De Reaedificatoria" de Alberti.

89.- Bacon, Francis. Op. cit. p. 43

90.- Olea, Oscar. Estructura del Arte Contemporáneo. UNAM, México, 1979; p. 32

91.- Bayer, Raymond, Op. cit. p. 420

92.- Idem, p. 82

93.- Idem, p. 184

94.- Aristóteles. Etica Nicomaquea, Op. cit. p. 22-3

95.- Kranz, Walther. Op. cit. Tomo I p. 49

96.- Idem, p. 93

97.- Idem, p. 57

98.- Ibidem

99.- Boff, Leonardo. San Francisco de Asís, Ed. Sal Terrae. España, 1982; p. 91

100.- Piaget, Jean y García, R. Op. cit. p. 252

Piaget, Jean. La Equilibración de las Estructuras Cognitivas. Siglo XXI, la. Edición, México, 1978.

101.- Bertalanffy, Ludwig Von. Op. cit. p. 222 y 199

102.- Olea, Oscar. Op. cit. tomo I, p.49, 86-115

103.- Barrow, John y Silk, Joseph. Estructura del Universo Primitivo. Investigación y Ciencia, No. 19, Junio, 1980, España; p. 74

Bondi, et al. El Origen del Universo. F.C.E., México, 1977; p. 12

104.- Moles, Mariano. Cosmología y Observaciones. Investigación y Ciencia, No. 58, Julio 1981, España; p. 115-6

105.- Thuan, Trinh. El Big Bang hoy. Mundo Científico, No. 34, 1984, España; p. 340

106.- Ning Yang, Chen. Op. cit. p. 82-4

107.- Idem, p. 110-1

108.- Segré, Emilio. Op. cit. p. 45

109.- Ning Yang, Chen. Op. cit. p. 90

110.- Freedman, Daniel, y Van Nieuwen Hui Zen, Peter. Supergravedad y la Unificación de las Leyes de la Física. Investigación y Ciencia, No. 19, Abril 1978, España; p. 83

111.- Hooft, Gerard't. Teorías Gauge de las Fuerzas entre Partículas Elementales. Investigación y Ciencia, No. 47, Agosto 1980, España; p. 70

112.- Polya, G. Op. cit. p. 190

113.- De Gortari, Eli. La Simetría como Principio Heurístico. Día a Día, Año 14, No. 14, 1968; p. 143-52

114.- Alonso, Marcelo. Op. cit. p. 91

115.- De Gortari, Eli, Op. cit. p. 143-52

116.- Hsu, P. Análisis de Fourier. Fondo Educativo Interamericano, México, 1981

117.- Ning Yang, Chen, Op. cit. p. 108

Koefoed, Otto. Op. cit. p. 19

Orellana, Ernesto. Op. cit. p. 100

118.- Hurlbut, Cornelius. Op. cit. p. 134-8, 148, 154, 160-70

119.- Koefoed, Otto. Op. cit. p. 1

Telford, et al. Op. cit. p. 276-80, 235-8

Davis, John. Statistics and Data Analysis in Geology. John Wiley and Sonss, Inc., E.U.A.; p. 171, 298

Orellana, Ernesto. Op. cit. p. 104

Apuntes de Simulación Numérica de Yacimientos. UNAM; p. 35, 39 y 43

120.- Orellana, Ernesto, Op. cit. p. 100

121.- Levi, Enzo. Teorías y Métodos de las Matemáticas Aplicadas. UNAM, México, 1980; p.91-2,236

Churchill, Ruel. Series de Fourier y problemas de contorno. Mc-Graw Hill, México, 1976; p.208-32

122.- Koefoed, Otto. Op. cit. p. 19-22

Churchill, Ruel Op. cit. p. 172-94

123.- Telford, et al. Op. cit. p. 273

124.- Orellana, Ernesto. Op. cit. p. 163-5

Reitz, John, y Milford, Frederick. Fundamentos de la Teoría Electromagnética. UTEHA, México, 1981; p. 60-3

125.- Orellana, Ernesto. Op. cit. p. 111

126.- Idem, p. 109-12

127.- Idem, p. 238

128.- Idem, p. 183

129.- Idem, p. 187

130.- Idem, p. 108-9

131.- Robinson, Enders y Treitel, Sven. Geophysical Signal Analysis. Prentice Hall, E.U.A. 1980; p. 27, 163-9

132.- Huang. Mecánica del Medio Contínuo. p. 92

133.- Davis, John, Op. cit. p. 232-44, 247-8

Telford, et al. Op. cit. p. 380-4

134.- Lara, Miguel. Op. cit. Vol. II p. 113

135.- Pascual, Pedro y Tarrach, Rolf. Monopolos. Investigación y Ciencia, No. 43, Abril 1980, España; p. 111

136.- Idem, p. 4-13

137.- Idem, p. 13

138.- Naturaleza, Vol. 13, No. 4, México, Agosto 1982; p. 131

139.- Beiser, Arthur. Perspectives of Modern Physics. Mc. Graw Hill. E.U.A., 1981; p. 79

140.- Einstein, Albert. La Relatividad. Grijalbo, México, 1970; p.194, 64

Einstein, Albert. Sobre la Teoría de la Relatividad. SARPE, España, 1984; p. 181

141.- Einstein, Albert. La Relatividad. Op. cit. p. 130

142.- Freedman, Daniel. Op. cit. p. 83

143.- Sokolnikoff, I. S. Análisis Tensorial. LIMUSA, México, 1982; p. 68, 84

144.- Hooft, Gerard't. Op. cit. p. 69

145.- Idem, p. 70

146.- Idem, p. 76

147.- Ynduráin, Francisco José. Teorías Unificadas de las Interacciones Fundamentales. Investigación y Ciencia, No. 18, Marzo 1978, España; p. 15

148.- Olea, Oscar. Op. cit. p. 32

149.- Idem, p. 33

150.- Grey, Walter. El Cerebro Viviente. F.C.E., México, 1981; p.69

151.- Hilgard, Ernest y Bower, Gordon. Teorías del Aprendizaje. Trillas México, 1983; p. 289

152.- Chinoy, Eli. Op. cit. p. 25

153.- Schrödinger, Erwin. Op. cit. p. 16, 25, 67 y sobre todo 77

154.- Piaget, Jean y García, R. Op. cit. p. 88

155.- Eves, Howard. El Estudio de las Geometrías, Vol. II. UTEHA, México, 1969; p. 140

156.- Ibidem

157.- Idem p. 142

158.- Piaget, Jean y García, R. Op. cit. p. 101

159.- Eves, Howard. Op. cit. p. 142

160.- Piaget, Jean, y García, R. Op. cit. p. 150

CAPITULO II

1.- Cassirer, Ernest. Op. cit. p. 17

2.- Grey, Walter. Op. cit. p. 17-8

3.- Platón, Op. cit. p. 551-3

4.- Nietzsche, Friedrich. Así habló Zarathustra. Bruguera, España, 1974; p. 200

5.- Kranz, Walther. Op. cit. Tomo I, p. 59-60

6.- Hegel, G. W. F. Enciclopedia de las Ciencias Filosóficas. Porrúa, México, 1980; p. 58

7.- Kierkegaard, Sören. La Enfermedad Mortal. SARPE, España, 1984; p. 27, 140 y 57

Kierkegaard, Sören. Diapsalmata. Ed. Aguilar, Argentina, 1977; p. 13

8.- Kierkegaard, Sören. La Enfermedad Mortal. Op. cit. p. 121-2

Kierkegaard, Sören. Temor y Temblor. Editora Nacional España, 1975 p. 161-5, 197

9.- Bronowski, Jacob. El Ascenso del Hombre. Op. cit. p. 180

10.- Durero, Alberto. Op. cit. p. 231-55

11.- Martini, Alberto. Claude Monet. PROMEXA, México, 1981; p. 107

12.- Enciclopedia de las Bellas Artes, Edit. Cumbre, México, 1984; p. 1653

13.- Idem, p. 1624

14.- Sal. 24,1

15.- Ferrater, José. Op. cit. p. 287

Arnaz, José. Iniciación a la Lógica Simbólica. ANUIES, México, 1975; p. 25-8

16.- Russell, Bertrand. Fundamentos de Filosofía. Op. cit. p. 247

17.- Reichenbach, Hans. Op. cit. p. 657, 59

18.- Carnap, Rudolf. Fundamentación Lógica de la Física. Ed. Sudamericana, Argentina, 1969; p. 13-34

Piaget, J. y García, R. Op. cit. p. 12

19.- Russell, Bertrand. Fundamentos de Filosofía. Op. cit. p. 248

Magee, Bryan. Popper. Grijalbo, España, 1974; p. 23

20.- Sokolnikof, I.S. Op. cit. p. 246

21.- Russell, Bertrand. Perspectiva Científica. Op. cit. p. 55

22.- Katz, Robert. Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad Reverté, México, 1968; p. 43

23.- Ibidem

Segré, Emilio. Op. cit. p. 138

24.- Drake, Stillman. La Manzana de Newton y el Diálogo de Galileo. Investigación y Ciencia, No. 49, Octubre, 1980, España; p. 107

25.- Russell, Bertrand. Perspectiva Científica. Op. cit. p. 33

26.- Reichenbach, Hans. Op. cit. p. 113

Bunge, Mario. La Ciencia, su Método y su Filosofía. México, p. 53

27.- Ayala, Luis, y Serrano, [illegible] Apuntes de Simulación Numérica de Yacimientos. UNAM, México, 1979; p. 3

28.- Rascón, Héctor. Probabilidad y Estadística. UNAM, México

29.- Grey, Walter. Op. cit. p. 18-9

30.- Little, Noel. Magnetohidrodinámica. Reverté, México, 1971

31.- Yndurain, Francisco. Op. cit. p. 16

32.- Dewey, John. La Tectónica de Placas. 'El Redescubrimiento de la Tierra'. CONACYT, México, 1982; p. 166-180

33.- Frankel, Edward. DNA. Siglo XXI, México, 1981; p. 3-4, 76, 117

34.- Cortés, Eliseo. Mecánica I, UNAM, México, 1982; p. 45

Huang. Mecánica del Medio Continuo. p. 69

35.- Gardner, Martin. Máquinas Lógicas y Diagramas. Grijalbo, México, 1973; p. 49-50

36.- Tokheim, Roger. Principios Digitales. Mc. Graw Hill, México, 1982; p. 79-90

37.- Espinosa, Ismael. Sistemas Lineales Multivariables. UNAM, México, 1978; p. 21-2

38.- Peña, Antonio. Op. cit. p. 47

Hladik, Jean. La Biofísica. F.C.E., México, 1982; p. 9

39.- Robinson, Enders y Silvia, Manuel. Op. cit. p. 27

40.- Alonso, Marcelo. Op. cit. p. 682

41.- Reichenbach, Hans. Op. cit. p. 241

42.- Hoffman, Banech. Einstein. SALVAT, España, 1984; p. 167

43.- Eves, Howard. Op. cit. Vol. I, p. 19

44.- Piaget, J. y García, R. Op. cit. p. 88

45.- Eves, Howard. Op. cit. Vol. I p. 18

46.- Bunge, Mario. Op. cit. p. 39

47.- Segré, Emilio. Op. cit. p. 12

48.- Chapa, Ma. Elena. Op. cit. p. 171

49.- Nordmann, Carlos. Einstein y el Universo. Ediciones Españolas Hachete, España, 1922; p. 43

Villee, Claude. Op. cit. p. 4

50.- Cohen, Bernard. El Descubrimiento Newtoniano de la Gravitación. Investigación y Ciencia, No. 56, Mayo, 1981, España; p. 117

51.- Reichenbach, Hans. Op. cit. p. 118

52.- Russell, B. Fundamentos de Filosofía, Op. cit. p. 251

53.- Idem, p. 226

54.- Bronowski, Jacob. El Ascenso del Hombre, Op. cit. p. 353

55.- Ibidem

56.- Alonso, Marcelo. Op. cit. p. 41

57.- Claerbout, J. F. Fundamentals of Geophysical Data Processing. Mc. Graw Hill, E.U.A., 1976; Cap. IV

58.- Russell, Bertrand. Perspectiva Científica. Op. cit. p. 53-6

59.- Magee, Bryan. Op. cit. p. 37-51

60.- Segré, Emilio. Op. cit. p. 175

61.- Piaget, J. y García, R. Op. cit. p. 29, 31

62.- Magee, Bryan. Op. cit. p. 26-8

Robinson, Enders y Silvia, Manuel. Op. cit. p. 22

63.- Russell, Bertrand. Fundamentos de Filosofía. Op. cit. p.524-5

Reichenbach, Hans. Op. cit. ,p. 95-100, 252

Magee, Bryan. Op. cit. p. 26-28

64.- Reichenbach. Op. cit. p. 172-3

65.- Russell, Bertrand. Fundamentos de Filosofía. Op. cit. p. 248

66.- Faricy, Robert. Teilhard de Chardin. Ed. Verbo Divino, España, 1972; p. 59

67.- Magee, Bryan. Op. cit. p. 29

Popper, Karl. La Lógica de la Investigación Científica. Ed. Tecnos, Madrid, 1973; p. 32-3

68.- Einstein, Albert. Sobre la Teoría de la Relatividad. Op. cit. p. 102, 133

69.- Idem, p. 74

70.- Idem, p. 33, 59, 167

Bronowski, Jacob. El Sentido Común de la Ciencia. Op. cit. p. 65, 90, 110, 141

Ning Yang, Chen. Op. cit. p. 84

71.- Einstein, Albert. Sobre la Teoría de la Relatividad. Op. cit. p. 101

72.- Ning Yang, Chen. Op. cit. p. 97

Hoffmann, Banesh. Op. cit. p. 67

Nordmann, Carlos. Op. cit. p. 43

Villee, Claude. Op. cit. p. 4

Russell, Bertrand. Fundamentos de Filosofía, Op. cit. p. 226

73.- Einstein, Albert. Sobre la Teoría de la Relatividad, Op. cit. p. 134

74.- Magee, Bryan. Op. cit. p. 29

75.- Segré, Emilio. Op. cit. p. 138-9

Katz, Robert. Op. cit. p. 48

76.- Faricy, Robert. Op. cit. p. 59

77.- Gale, George. De Anthropic Principle. Scientific American, No. 6, Diciembre 1981, E.U.A.; p. 114-22

78.- Philips, John. Los Orígenes del Intelecto según Piaget. Edit. Fontanella, España, 1970; p. 23

79.- Segré, Emilio. Op. cit. p. 181-2

Hoffmann, Banesh. Op. cit. p. 165-6

Bronowski, Jacob. El Sentido Común de la Ciencia. Op. cit. p. 76-7

Einstein, Albert. La Relatividad. Op. cit. p. 104

80.- Bronowski, Jacob. El Sentido Común de la Ciencia. Op. cit. p. 112-3

81.- La Gaceta, No. 26, Febrero, 1973. F.C.E., México; p. 13-4

Kranz, Walther. Op. cit. Vol. I p. 92

82.- Descartes, René. Reglas para la dirección del Espiritu. Porrúa, México, 1981; p. 103

83.- Galilei, Galileo. El Ensayador. SARPE, España, 1984; p. 61

84.- Bode. La Educación de Generalistas Científicos

85.- Leibniz. Op. cit. p. 10

86.- Grey, Walter. Op. cit. p. 69

Olea, Oscar. Op. cit. p. 33

Telford, W. Op. cit. p. 2

87.- Bacon, Francis. Op. cit. p. 43

88.- Telford, W. Op. cit. p. 1

Isabelle, Didier y Veyre, Annie. La Imagen en Medicina. Mundo Científico, No. 27, 1983, España; p. 770-82

Frontiers of Science. National Geographic Society, E.U.A., 1982; p. 24-27

89.- Meisell, William. Computer-oriented approaches. New York Academic, E.U.A., 1972

Cannon, T. y Hunt R. Procesamiento de Imágenes por Ordenador. Investigación y Ciencia, No. 63, Diciembre 1981, España; p. 96, 108

90.- Neisser, Ulric. Indagación Visual. Psicología Contemporánea. Selección de Scientific American, España, 1978; p. 201-9

Gogel, Walter. El Principio de Adyacencia en la Percepción Visual. Investigación y Ciencia, No. 22, Julio 1978; p. 66-74

Rock, Irvin. Percepción Anortoscópica. Investigación y Ciencia. No. 56, Mayo 1981, España; p. 86-96

Y los articulos de Walker, Jearl de la Sección Taller y Laboratorio de la Revista Investigación y Ciencia en los Nos. 45 de Junio 1980 (p. 122); No. 46 de Julio 1980 (p. 116) y No. 52 de Enero, 1981 (p. 119-25)

91.- Serra, Juan. Imágenes y Morfología Matemática. Mundo Científico No. 27, 1983, España; p. [illegible]

92.- Bertalanffy, Ludwig Von. Op. cit. p. 155

93.- Vannier, Michaell; Butterfield, Robert; Jordan, Douglas, et. al. Multispectral Analysis of Magnetic Resonance Images. Radiology, Enero 1985, E.U.A.; p. 221-224

94.- Idem, p. 222-3

95.- Anderson, Don y Dziewonski, Adam. Tomografía Sísmica. Investigación y Ciencia, España; p. 34, 36

96.- Cordier, Marie-Odile. Los Sistemas Expertos. Mundo Científico No. 34, España, 1984; p. 241

97.- Jinich, Armando. Criptografía y Computadoras. Ciencia y Desarrollo No. 57, Julio-Agosto, 1984, México; p. 143-152

98.- Naisbitt, John. Macrotendencias. Edivisión, México, 1985; p.13

Hofstadter, Douglas. Temas Metamágicos. Investigación y Ciencia, No. 58, Julio 1981, España; p. 124-8

Levinson, Stephen y Liberman, Mark. Reconocimiento del Habla por medio de Ordenadores. Investigación y Ciencia, No. 57, Junio 1981, España; p. 47

FE DE ERRATAS

p. 7 Los conceptos de rango y codominio no son propiamente sinónimos. Remitimos al lector a un texto de Algebra para mayor información.

p. 31 Las propiedades no se han definido en ningún apéndice; remitimos al lector a Gortari, Eli. Propiedades del razonamiento por analogía. Diánoia, año XX, No. 20, 1974, p. 57-85 .

	Dice	Debe decir
p.4	...herramientas, metas científicas...	...herramientas metacientíficas...
p. 53	Bamgarten	Baumgarten
p. 60	...de un concepto S...	...de un conjunto S...
p. 65	...cros-correlación...	...cross-correlación...
p. 121	...lo consiste en...	...lo consisten ...
p. 124	...el siguiente espacio...	...el siguiente paso...
p. 130	...donde m es el orden de la ecuación...	...donde m es el número de dimensiones de la ecuación...
p. 130	...de segundo orden...	...de segundo orden en dos dimensiones...
p. 130	...la de tercer orden...	...la de segundo orden en tres dimensiones...
p. 130	...la de cuarto...	...la de cuatro dimensiones...
p. 130	...con el orden.	...con el número de dimensiones.