18
2 ej

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

EL LOGICISMO DE FREGE: LOS CONCEPTOS BASICOS EN LA FUNDAMENTACION DE LA ARITMETICA DE GOTTLOB FREGE

T E S I S

Que para optar por el Grado de:

Licenciada en Filosofía

p r e s e n t a :

Mayahuel Serratos Franco

México, D. F. Enero de 1987

Introducción

A lo largo de mis estudios profesionales procuré unificar dos inquietudes que se me habian manifestado durante mi educación media, por una parte mi interés hacia la filosofía y por otra hacia las ciencias formales. Fue natural entonces que mi mayor actividad en la facultad se centrara en la lógica, filosofía de la lógica y de las matemáticas.

Al elegir tema de tesis ya tenía en mente una línea de investigación en torno a una problemática específica de filosofía de las matemáticas: estudiar las teorías con las cuales se procuró fundamentar esta ciencia formal durante este siglo y, simultáneamente, analizar en que consisten las visiones filosóficas subyacentes a cada una de dichas teorías. Mi objetivo último es investigar las ideas más recientes que tratan de dar respuesta a una cuestión que me parece fundamental: cómo se relacionan la lógica y la matemática con la realidad. Esta tesis representa el primer paso de tal programa, en ella trato de plasmar una exploración de las ideas básicas del logicismo temprano, el de Gottlob Frege hacia 1903. Mi punto de partida es procurar ver con ojos modernos que era lo que contenía potencialmente la teoría clásica de conjuntos; Cantor, su creador, no intentó usar su teoría para fundamentar la matemática, pero proporcionó un aparato teórico para el cual otros autores encontraron esa aplicación.

En las primeras páginas de este escrito trato de formular las ideas esenciales de la teoría de conjuntos cantoreana en una teoría de orden 1 siguiendo aportes de otros autores, algunos del Prof. Raúl Orayen y mios propios en lo que respecta a la elaboración y sistematización lógica. Después de plasmar la teoría en orden 1, trato de desarrollarla no en la dirección principal en la que lo hizo Cantor quien estaba especialmente interesado en descubrir propiedades de los números infinitos tanto ordinales como cardinales sino, en establecerla como una teoría "madre" de la matemática, es decir, como una teoría que buscara fundamentar dicha ciencia. Intento pues, desarrollar la teoría de conjuntos para poner de manifiesto como tomándola como base se pueden llevar adelante aplicaciones que el mismo Cantor ignoró y de las cuales se percataron tanto Frege como Russell.

Las teorías de estos dos últimos autores son, sin embargo, más complicadas que la de Cantor en el sentido de que, por ejemplo, en el primero sus ideas están insertas en un sistema lógico-ontológico universal, y en el segundo las teorías que produjo eran ya concientes del problema de las antinomias e incluían complicaciones teóricas para evitarlas.

He querido analizar primero cual era la formulación más sencilla de los hallazgos fregeanos y, por ello me pareció preciso señalar en tal dirección la teoría intuitiva cantoreana para descubrir en su forma más simple como se podía fundamentar la aritmética en ella. Este tema se encuentra comprendido en el primer capítulo.

Los capítulos posteriores tratan de explicar de manera general el sistema conceptual y ontológico básico en el que Frege intentó alojar las ideas de G. Cantor. En particular, en el segundo capítulo pretendo dar un marco general, mientras que el tercero está dedicado al análisis de como este marco permite obtener la noción de número, siguiendo en lo esencial ideas que pueden expresarse en la teoría intuitiva, pero que reciben aquí una manifestación más acabada debido a que se encuentran insertas en un sistema conceptual mucho más completo.

Este trabajo ha sido facilitado y estimulado por el apoyo que he recibido del personal del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM: tanto sus autoridades como personal administrativo e investigadores nunca escatimaron su ayuda para con esta labor por lo cual, pongo de manifiesto aquí mi total agradecimiento.

En particular deseo expresar mi infinita gratitud al Prof. Raul Orayen quien con sus enseñanzas me ha hecho comprender, trabajar y amar el maravilloso mundo de la lógica, y a la Maestra Lourdes Valdivia por sus pertinentes observaciones.

Finalmente doy gracias a la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM porque, primero como alumna y luego como docente siempre tiene algo que enseñarme.

He divisado, desde las páginas de Russell, la doctrina de los conjuntos, la Mengenlehre, que postula y explora los vastos números que no alcanzaría un hombre inmortal aunque agotara sus eternidades contando, y cuyas dinastías imaginarias tienen como cifras las letras del alfabeto hebreo. En ese delicado laberinto no me fue dado penetrar.

J.L. Borges

I. TEORIA INTUITIVA DE CONJUNTOS

Contenido: ¿Qué es una teoría intuitiva de conjuntos?
Motivaciones de Cantor para la formulación de su teoría.
Potencialidades que vieron los matemáticos en la teoría de conjuntos cantoreana.
Potencialidades que vieron los filósofos en dicha teoría.

Actualmente se da el nombre de teoría intuitiva (en el sentido en que explicaré adelante) o clásica de conjuntos (TCC) a la teoría de conjuntos tal como fue ideada por George Cantor 1/ a fines del siglo pasado.

Para comprender por qué se llamó teoría intuitiva de conjuntos es necesario estudiar de cerca la manera en que este filósofo y matemático concibió la noción de conjunto.

Basado en el hecho de que podemos formar colecciones agrupando objetos, Cantor pensó en disponer de las colecciones mismas como entidades elementales. A las colecciones las llamó conjuntos y a los objetos incluídos en ellas los llamó miembros o elementos de los conjuntos.

El pensaba que lograr concebir al conjunto como un concepto, era un acto sencillo del intelecto humano.

Posteriormente consideró que si se asignaba a cada elemento del conjunto un número entero positivo (comenzando por el número 1, siguiendo sin

1/ Cantor, George. Eminente filósofo y matemático alemán, n. en San Petersburgo en 1845. Estudió en Zurich, Berlín y Gotinga, graduándose en 1869 en la Universidad de Halle, de la cual fue profesor de matemáticas desde 1879. Se le deben numerosos trabajos sobre las aplicaciones del cálculo diferencial, siendo el fundador de la teoría de conjuntos, que dió a conocer en su célebre memoria *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (leipzig, 1883). También se distinguió notablemente en sus estudios sobre series trigonométricas, habiendo enunciado por primera vez el teorema que lleva su nombre.

omitir ningún número y sin dar a un mismo miembro números diferentes) estableciendo una correspondencia exacta entre elementos y números, uno podía enterarse de cuántos elementos comprendía un conjunto notando simplemente cuál era el número alcanzado por el último miembro.

Si se tratara de trabajar con un esquema de orden, sólo sería necesario considerar a cualquier elemento x como el primero, a cualquier otro elemento y como el segundo y así hasta agotar la colección. En seguida podríamos hacer corresponder al elemento x el número uno que, a su vez, opera como primer elemento de la serie de los números enteros positivos. Al elemento y el número 2 que opera como segundo elemento de la serie aludida.

Al contar se ordena.

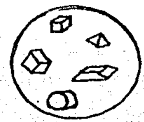
Como puede observarse, la aplicación del método bosquejado en el párrafo anterior permite, a todo aquel que conozca la serie de los números positivos, obtener información acerca de cuántas unidades hay en un conjunto finito.

El número de unidades comprendidas en un conjunto S, fue llamado por Cantor "número cardinal del conjunto S".

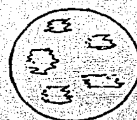
Es relevante notar que una vez que hablamos de un conjunto y de su cardinal, la idea de lo que son sus elementos carece de interés, en vista de lo cual, es perfectamente admitible que dos o más conjuntos puedan tener un mismo cardinal.

Cantor decía algo como lo siguiente: el cardinal de un conjunto es el concepto general que, con el auxilio de la inteligencia, alcanzamos al hacer la doble abstracción de:

Primero, no pensar en el acomodo de las cosas que hay en el conjunto



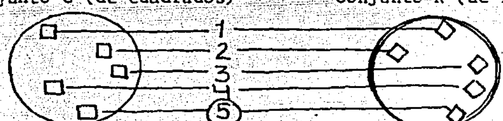
Segundo, no pensar en la naturaleza de esas cosas.



Una vez considerado lo anterior parece, como decíamos antes, natural el que dos o más conjuntos compartan un mismo cardinal.

Por ejemplo:

Conjunto C (de cuadrados) Conjunto R (de rombos)



Cardinal del conjunto C = 5 = cardinal del conjunto R.

En el ejemplo anterior puede verse cómo, finalmente, el conjunto C y el conjunto R tienen el mismo cardinal: el número 5, no obstante que C es una colección de cuadrados y R una de rombos.

Digamos que cuando logramos concebir a la colección como un todo, y nos olvidamos de qué es lo coleccionado y su orden, obtenemos un cardinal.

Dos conjuntos son semejantes cuando se puede armar una correspondencia ⟨1-1⟩ (como en el ejemplo) entre sus miembros, que conservan las relaciones.

C y R son semejantes pues de hecho si consideraramos la serie de los enteros colocada entre entre el uno y el otro como un puente, podríamos relacionar directamente a sus individuos. Para cada miembro de C habría un miembro de R y para todo miembro de R habría también uno en C, y nunca se daría el caso de que algún c se relacionara con dos r o viceversa.

También puede decirse que dos conjuntos son equivalentes cuando hay una correspondencia 1-1 entre sus miembros.

Sin embargo no toda colección se puede agotar al ponerse en correspondencia con un segmento inicial de los números positivos, a estas colecciones se les llama infinitas en contraposición a las del tipo que comprende a las que si se agotan, estas ultimas son llamados finitas.

Decir que una colección o conjunto es infinito no es lo mismo que decir que tiene muchos elementos, sino que sus elementos aumentan indefinidamente (sin repetirse) de manera que no es posible dar con un último miembro.

El conjunto de los números naturales es de este tipo, por tanto jamás podríamos expresarlo gráficamente o verbalmente en absoluto; ante esta imposibilidad se adoptó una notación como la siguiente $\{1,2,3...etc\}$ donde los puntos suspensivos y el 'etc' juegan el papel de marcar la formación indefinida del conjunto.

Cuando Cantor dice que un conjunto es infinito, utiliza la palabra 'infinito' no en un sentido potencial, sino en un sentido actual y esto, lo lleva a observar a tal conjunto como toda una entidad.

Los matemáticos contemporáneos a Cantor no tenían una idea como la anterior al hablar de infinito en conjuntos, ellos consideraban que ésta era simplemente una terminología.

Al tratar al infinito en relación a conjuntos los matemáticos no tenían en mente a dichos conjuntos como entidades actuales.

Por ejemplo, la consideración que se hace del infinito en la teoría de series y en el cálculo infinitesimal aparece frecuentemente el término "infinito" utilizado justamente de una manera no cantoreana. En el enunciado:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

ocurre el signo '∞', pero ello no significa que al expresar y entender esto, los matemáticos aceptaran una entidad. Así, en:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

> "...asserts nothing about infinity (as the ominous sign ∞ seems to suggest) but is just an abbreviation for the sentence: can be made to approach zero as closely as desired by sufficiently increasing the positive integer " 2/

A diferencia Cantor propuso, como decíamos, al infinito como algo actual. Un conjunto infinito puede ser visto entonces como una entidad infinita actualmente.

Resumiendo, la definición del concepto de conjunto de Cantor es la siguiente:

> " A Set is a collection into a whole of definite, distinct objects of our intuition or of our thought. The objects are called the elements (members) of the set". 3/

Hasta aquí puede notarse como para lograr la noción de conjunto cantoreana, no es necesario sino una definición estructural y no por axiomas, por esto, la teoría de conjuntos de Cantor se conoce como teoría intuitiva a diferencia de la mayoría de las teorías que nacieron posteriormente.

2/ Cfr. Fraenkel Abraham A. Abstract Set Theory. North-Holland Publishing Company. Amsterdam 1961. Editors, L.E.J. Brouwer, E.W. Beth, A. Heyting. v.p.6.
3/ Ibid.v.p.9.

Con Cantor vio la luz una idea que haría de su teoría un sistema cuyas potencialidades de aplicación nunca antes se habían tenido.

El pensamiento de que *con objetos cualesquiera* se puede formar un conjunto es de gran valor pues, al no postularse de entrada un dominio restringido de acción, lo que se acepta es justamente conjuntos cuyos miembros bien pueden ser objetos físicos, nociones psicológicas, objetos matemáticos, ideas, sentimientos, planetas, seres vivos, plantas, números, etc. Así pues, el alcance, proyección y fuerza de la teoría cantoreana radica, entre otras cosas, en la no postulación sobre un tipo de objetos específicos aun cuando, como sabemos, la preferencia por el manejo de objetos matemáticos es más común a ella.

La teoría clásica de conjuntos (TCC) fue desarrollada por Cantor principalmente en el último cuarto del siglo pasado, como ya mencionábamos y, en ella podemos encontrar aspectos que la hacen diferir de las teorías de conjuntos recientes. Uno de los aspectos más importantes que distinguen a TCC es, que no fue formulada axiomáticamente.

Se dice que una teoría está formulada axiomáticamente cuando tiene un conjunto de términos primitivos y, otro de axiomas, que pertenecen a la teoría han sido seleccionados como puntos de partida de toda la teoría y, tales conjuntos se explicitan en el principio del desarrollo de manera que, o bien cualesquiera otros términos técnicos se introducen por definición a partir del conjunto mencionado en (1), o bien cualesquiera otras afirmaciones de la teoría se deducen a partir del conjunto de los axiomas.

Lo de término primitivo y axiomas, enfatiza la división entre los conjuntos de partida y los conjuntos que se explicitan posteriormente.

Podemos encontrar en general tres tipos de teorías matemáticas de conjuntos:

1er tipo: teoría de conjuntos no axiomatizada.

2do tipo: teoría de conjuntos axiomática en la que no se especifican:

a) vocabulario lógico.

b) verdades lógicas.

c) reglas de inferencia.

3er tipo: teoría de conjuntos totalmente formalizada.

La teoría cantoreana pertenece al primer tipo, la teoría russelliana pertenece al segundo tipo en tanto que la quineana se podría incluir en el tercero.

Otro rasgo esencial que diferencia a TCC de teorías de conjuntos posteriores como las de Russell, Frege o Quine, es que ella no fue ideada como una teoría de conjuntos madre, donde por "teoría madre" se entiende aquella que busca poder ser capaz de construir algo parecido a la matemática.

Al formular TCC Cantor presupuso la matemática clásica pues, él simplemente buscaba que su teoría funcionara como un instrumento dentro de esta disciplina; un instrumento que permitiera obtener información acerca de cuestiones relativas al infinito, la matemática ordinal, etc.

Cantor no se interesaba por reconstruir la matemática sino por cosas como series discretas, densas, continuas, etc.

Algunas teorías de conjuntos posteriores a TCC como las mencionadas, además de ser más formales, no presuponen la matemática pues su finalidad es justamente permitir construir un edificio cuyas aplicaciones sean similares a las de la matemática.

Decir que las teorías de conjuntos posteriores a TCC permiten construir una estructura cuyas aplicaciones son similares a las de la matemática, es diferente a decir que permiten obtener a la matemática misma.

Esta sutil diferencia es importante, ya que no hay ninguna prueba de que los números que se construyen con las teorias de conjuntos sean los mismos que los que se estudian en la matemática clásica.

Se puede decir que, en general, las diferencias entre TCC y teorias de conjuntos fundacionistas nacieron a partir de las motivaciones y fines que perseguían sus autores, ya hemos dicho que las cosas que le interesaban a Cantor no se relacionaban con el asunto de cómo obtener la matemática. Sin embargo los pensadores que concibieron teorías de conjuntos madres las armaron justamente para lograr ese fin. Estas teorías constituyen lo que se conoce generalmente, no siempre, como programas logicistas.

Para poder observar qué tipo de potencialidades encontraron filósofos como Frege y Russell en TCC, hay que analizar algunos datos sobre las observaciones que los matemáticos hicieron acerca de esta teoría.

Primero, se mostró que toda la matemática era obtenible a partir de la teoría de los números naturales en conjunción con la teoría de conjuntos cantoreana, en seguida se vió en los estudios de Peano que la primera de estas teorías (la de los números naturales), podía deducirse a partir de tres primitivos y cinco postulados; posteriormente a todo este trabajo matemático , los filósofos de tendencias logicistas se preguntaron si no sería posible definir y obtener a partir de términos únicamente conjuntisticos la teoría de Peano. Frege de una manera muy peculiar y Russell más convencionalmente, mostraron que esto podía hacerse. Despu es de idear teorías de conjuntos axiomatizadas y que no presuponían la matemática.

Pero antes de analizar más de cerca lo llevado a cabo por Russell y específicamente por Frege, ampliemos el resumen del trabajo matemático expresado en el párrafo anterior.

Alrededor del siglo XIX los matemáticos realizaron un desarrollo teórico que se conoce como " Aritmetización del Análisis" o " Aritmetización de la Matemática ". Este desarrollo logró mostrar que algunos números podían entenderse como conjuntos "armados" a partir de otros números.

Estrictamente se probó que, con base en el conjunto de los números naturales podían construirse todas las demás categorías de números (enteros, racionales, reales, complejos).

> "*En el proceso de aritmetización del análisis quedó mostrado que los números de cada uno de estos conjuntos....... podían definirse como ciertos conjuntos de números, o de pares ordenados de números, de la categoría anterior*". 4/

Los enteros son conjuntos de pares ordenados de naturales.
Los fraccionarios son conjuntos de pares de enteros.
Los irracionales son conjuntos de racionales.
Los imaginarios son pares ordenados de reales.

La aritmetización del análisis fue muy relevante para los posteriores desarrollos de la filosofía matemática, ya que, al parecer, una vez aceptada esta construcción tenía que admitirse que lo único sobre lo que versaba la aritmética eran los números naturales, conjuntos de números naturales, conjuntos de conjuntos de números naturales, etc. y, en consecuencia, la respuesta a la cuestión de ¿cuál es la naturaleza de las entidades a las que se

4/ Cfr. Orayen, Raúl A. La ontología de Frege. Cuaderno 3 del Instituto Nal. para el mejoramiento de la enseñanza de las ciencias. Argentina. v.p.10. (v. Bibliografía General).

refiere la aritmética? se simplificó notablemente ya que, no requirió el estudio de todos los tipos de números, sino sólo de los naturales.

Como puede verse, en la aritmetización del análisis se encuentra manifiesta la utilización que hicieron los matemáticos de la teoría intuitiva de conjuntos pues, la aritmetización justamente consiste en obtener toda la matemática con base e teoría de números naturales y teoría de conjuntos.

Poco tiempo después, Peano 5/ trabajó para encontrar cuáles eran las nociones básicas de la teoría de los números naturales misma, logrando finalmente mostrar cómo toda esta teoría podía obtenerse a partir de tres conceptos primitivos y cinco postulados.

Una vez hecha la aritmetización y esta prueba de Peano se tenía en resumen que: toda la matemática podía obtenerse a partir de tres primitivos, cinco postulados y teoría intuitiva de conjuntos.

Llegado este punto, filósofos como Frege y Russell pensaron que quizás aún los tres primitivos y los cinco postulados podían obtenerse de la teoría intuitiva (o lo que en esa época se consideraba lógica), pero para ello era necesario hacer una serie de modulaciones en la teoría cantoreana que permitieran:

1- lograr una teoría de conjuntos axiomatizada

y

2- lograr que dicha teoría no presupusiera en absoluto la matemática clásica.

Tanto Frege como Russell alcanzaron este objetivo.

5/ G.Peano. Matemático italiabo contemporáneo,n. en Cureo en 1858. Cursó los estudios de la facultad de ciencias, y fué nombrado profesor de cálculo infinitesimal de la Universidad de Turín. Sus trabajos fueron importantes en número y calidad, versan sobre las diferentes ramas de las ciencias exactas y sobre la lógica matemática, de la cual fue durante muchos años el representante más autorizado de Italia.

Frege, ideando una estructura axiomática capáz de cumplir las mismas funciones que la teoría intuitiva de conjuntos pero, sin presuponer la matemática.

Russell, ideando su teoría de tipos, que no sólo evitaba las paradojas a las que llevaba la teoría intuitiva de conjuntos sino que cumplía perfectamente con las dos condiciones mencionadas.

A grandes rasgos, así fue como se realizaron los dos primeros programas logicistas cuya única finalidad era la de lograr obtener una fundamentación de toda la matemática a partir de la lógica o lo que en ese tiempo era considerado lógica.

A continuación veremos cuáles fueron, en general, los motivos que impulsaron tanto a Frege como a Russell a emprender su complicada tarea.

Desde muy joven Gottlob Frege había decidido que las matemáticas constituían el area que despertaba su mayor interés.

Al llegar a la Universidad de Jena, su profesor Ernst Abbe reconoció ya en él un gran talento matemático.

Tiempo después Frege publicaría su *Begriffsschrift*, obra en la que expone su nueva lógica.

Al trabajar más y más en matemáticas pensó que era una necesidad urgente la de dar un buen fundamento a esta disciplina pues, muchas de las cuestiones interesantes que surgían en ella así lo apuntaban. Cuestiones como ¿qué son los números? ¿cuál es la naturaleza del mundo contable y medible? ¿cómo podemos conocer la verdad de las proposiciones matemáticas? ¿cuál es el método de prueba propio de las matemáticas? ¿qué es una definición matemática? etc.

> *"Given Frege's belief in 'the urgent need for better foundations' in mathematics, we should ask what kind of need he perceived and where*

he hoped to find better foundations. It turns out that his considerations are closely connected to the foundational issues that other mathematicians and philosophers were facing in nineteenth-century mathematics ". 6/

El análisis del infinito realizado por Bolzano 7/ para la investigación sobre las paradojas del infinto estaba sucediendo entonces, además de que eran generadas las teorías de números irracionales de Dedekind y Cantor al igual que ciertas reflexiones atinentes al concepto de función. También nacían las teorías de Cantor sobre puntos múltiples (manifolds) y, generalizando, la teoría de conjuntos.

" The theory of natural numers, on the other hand, was at first considered unproblematic; its foundational problems were left to Peano, Frege, and Russell." 8/

El gran interés que tenía Frege respecto a los fundamentos de la matemática lo llevó incluso a cuestiones relacionadas con la ontología mediante la cual deseaba, justamente, obtener una teoría adecuada acerca de los fundamentos de la aritmética. Se supone que, una teoría de este tipo debía dar respuesta a una pregunta tan fundamental como la que antes mencionábamos: ¿cuál es la naturaleza de las entidades a las que se refiere la aritmética?.

Pero esta cuestión, pese a las apariencias, no tenía una respuesta sencilla porque era necesario apreciar una multiplicidad de géneros de entidades.

6/ Cfr. Sluga, Hans D. Gottlob Frege. Routledge & Kegan Paul. London, Boston and Henley; 1980. v.p.42.

7/ Bolzano, Bernhard. filósofo y matemático checoslovaco, de ascendencia italiana, n. y m. en Praga (1781-1848). Contribuyó a la sistematización de la teoría de funciones y demostró algunos teoremas que pueden ser considerados como base de la moderna teoría de conjuntos. Dentro de su obra más importante, *Paradojas del infinito* (1850), se reconoce por vez primera la necesidad de demostrar muchas proposiciones (evidentes en apariencia) que se refieren a las funciones continuas. La más importante de estas proposiciones es el teorema que lleva su nombre.

8/ Cfr. Sluga. Gottlob Frege. Op.cit.v.p.43.

Por fortuna, como ya vimos, gracias a la aritmetización del análisis el problema se simplificó considerablemente.

Por otra parte los estudios sobre filosofía de la matemática de Russell tomaron la misma interesante dirección cuando, en 1900 conoció a Giuseppe Peano quien había formulado un sistema propio de lógica matemática. Dicho sistema constituyó el instrumento de análisis lógico que Russell había buscado por mucho tiempo. Aún cuando la notación de Peano fue modulada por Russell quien la encontraba muy engorrosa, puede decirse que el desarrollo de Peano abrió a Russell la posibilidad técnica de realizar una reducción de la matemática a la lógica (teoría de conjuntos).

Después de estudiar y ampliar las nociones de Peano, Russell se dedicó a observar los términos fundamentales de la matemática, iniciando con ello su libro titulado *Los Principios de la Matemática* que

> *"Todavía en la actualidad constituye un hito en la historia de esta temática."* 9/

y cuya tesis fundamental: que la matemática y la lógica son idénticas, fue de tal índole que Russell nunca tuvo una buena razón para modificarla.

Para sostener esta tesis, Russell necesitaba readaptar la lógica y teoría intuitiva de conjuntos; labor para la que solicitó la cooperación de su viejo tutor A.Whitehead 10/ y, juntos se dispusieron a construir el sistema lógico plasmado en los *Principia Mathematica*. En sus inicios el proyecto marchaba favorablemente pero después, encontraron dificultades que serían resueltas con base en la invención de la Teoría de Tipos russelliana (1906). Hecho lo anterior, todo se redujo a trabajo mecánico (desarrollo de teoremas) que casi realizó en su totalidad Russell.

9/ Cfr. Ayer.A.J.Russell. Ed.Grijalbo. México-Barcelona. 1973. v.p. 15.

10/Whitehead, Alfred N. Matemático inglés, n. en 1861. Estudió en el Trinity College de Cambridge, después fué profesor de matemáticas y mecánica en la University College de Londres, y de 1914 a 1924 fue profesor de matemáticas aplicadas del Colegio Imperial de Ciencias. Entre sus escritos se encuentran: Treatise on Universal Algebra, Axioms of Geometry, Principia Mathematica (con Russell) etc.

Un dato interesante acerca de la publicación de los *Principia Mathematica* es recreado por Ayer en las siguientes líneas:

> *"Cuando el libro estuvo terminado, los Síndicos de la Cambridge University Press consideraron que su publicación acarrearía una pérdida de 600 libras, de las cuales ellos estaban dispuestos a aportar tan sólo la mitad. La Royal Society, a la que tanto Russell como Whitehead pertenecían en calidad de miembros investigadores, acordó contribuir con otras 200; a los autores no les quedó otra posibilidad que aportar las 100 libras restantes. De este modo la remuneración económica por esta obra maestra que les había costado diez años de trabajo fue el pago de 50 libras."* 11/

Russell reconoció con indudable acierto que su obra sobre lógica matemática era, lo más valiosos de su producción; nadie duda sin embargo, que también hizo grandes contribuciones en el área de la filosofía de la lógica.

Como puede verse, la teoría intuitiva de conjuntos era considerada en época de Russell, lógica.

Russell observó la aritmetización hecha por los matemáticos y, posteriormente, al encontrar los estudios de Peano, formuló que una reducción de la matemática a la lógica podía ser algo plausible y, finalmente la elaboración de los *Principia Mathematica* constituyen la mejor prueba de que este filósofo puede considerarse, junto con Frege y Quine autor de uno de los programas logicistas que por su elegancia es un clásico.

Hemos dicho que la teoría intuitiva o clásica de conjuntos carecía totalmente de una sistematización axiomática y que, no fue formulada como una teoría de conjuntos cuyo fin fuera construir una estructura teórica de aplicaciones similares a las de la matemático, pero pue de tratar de formularse una teoría axiomática que reproduzca sus ideas fundamentales y sea usada para obtener la matemática.

Sin embargo gracias a las potencialidades que observaron los matemáticos en TCC y gracias a los objetivos logicistas de los filósofos matemáticos, finalmente estos últimos se enfrentaron al problema de ofrecer una versión de teoría de

11/ Cfr. Ayer. Russell. Op. cit. v. pp. 15 y 16.

conjuntos intuitiva que estuviera axiomatizada y que no presupusiera a la matemática clásica.

La solución de este problema no es sencilla puesto que para lograrla es indispensable ordenar el contenido de TCC ofreciendo ciertos axiomas que conserven las ideas iniciales que el mismo Cantor había postulado de manera informal y además, para que la nueva formulación alcanzara el status de teoría de conjuntos madre, se requería un movimiento sumamente complicado, había que arreglárselas para eliminar las partes de la matemática clásica presupuestas por Cantor conservando lo añadido por TCC a la matemática.

Finalmente la solución al problema se reduce a axiomatizar lo que Cantor había agregado a la matemática; esta reconstrucción es aproximadamente lo que suele llamarse "Cálculo Ideal". La forma en que tal sistematización es aquí expuesta, parte de dos nociones primitivas básicas (términos que son el punto de partida), dos axiomas (afirmaciones específicas iniciales), el lenguaje lógico será el de la teoría cuantificacional generalizada con identidad recorriendo un dominio cuyos únicos valores serán conjuntos cuando no se utilice el primitivo correspondiente a ellos.

Es prudente mencionar aqui que manejaremos una teoría matemática de conjuntos del segundo tipo, es decir, en la cual no se especifica ni vocabulario lógico, ni verdades lógicas, ni reglas de inferencia.

Nociones primitivas:

1- predicado binario $\in$.

2- predicado monádico M .

El primero expresa una relación entre un individuo y un conjunto del cual se dice que es miembro, o elemento, ese individuo.

El segundo es el predicado "ser conjunto".

En realidad hay dos maneras posibles de eliminar M:

i) definiendola en términos del predicado binario:

$$Mx =def. (\exists y)\ y \in x$$

ii) fabricando o presuponiendo un dominio lógico que corra únicamente sobre conjuntos.

Hay problemas, sin embargo, con ambas formas de eliminación pues, si lo que deseamos es tratar de parafrasear de una manera ordenada las postulaciones de Cantor, ni (i) ni (ii) pueden admitirse.

Cantor nunca hubiera aceptado la definición de 'M' en términos de predicado binario porque implícitamente sería el rechazo del conjunto vacío que, en realidad, fue de mucha utilidad al desarrollar toda la teoría de conjuntos.

Por otra parte, tampoco sería correcto eliminar 'M' suponiendo el manejo de un dominio cuyos individuos son conjuntos porque, los escritos de Cantor muestran que él hablaba de cosas diferentes a conjuntos, por ejemplo: puntos, números, figuras, líneas.

Obsérvese que el manejar un dominio restringido de entrada, no da una posición semánticamente mejor o peor, lo único que sucede es que un dominio general exige que, cuando se quiera hablar específicamente de conjuntos, se utilice una formula condicional como la siguiente:

$$(x)\ (Mx \supset \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

en la cual parece más explícito a qué nos estamos refiriendo con las variables.

Un dominio que presupone solamente conjuntos nos hace menos clara la denotación aun cuando, sintácticamente hay más elegancia por el ahorro de notación.

El primer axioma que postularemos será el llamado de *extensionalidad o identidad de conjuntos* que se expresa de la siguiente forma:

$$A1.\ (x)(y)(Mx \ \& \ My. \supset .x=y \leftrightarrow (z)(z \in x \leftrightarrow z \in y))$$

y dice que "*Two sets which contain the same members are equal*" 12/

12/ Cfr. Fraenkel. Op.cit. v.p.14.

El axioma resulta falso si le son retiradas las M_s del antecedente, es decir, sólo funciona con verdad para individuos que son conjuntos.

El predicado M es esencial al axioma 1, no obstante, nótese que en el bicondicional externo, el condicional de izquierda a derecha no lo es, gracias a que presuponemos una lógica con identidad. Es pues, suficiente el condicional de derecha a izquierda.

A continuación trataremos algunas consecuencias filosóficas interesantes de este primer axioma.

(A1) manifiesta una clara diferencia entre conjuntos y propiedades. Las propiedades no cumplen el axioma paralelo donde interpretamos el predicado binario como "tiene" o "tener".

$$(x)(y)(Px \;\&\; Py . \supset . \; x=y \leftrightarrow (z)(z \in x \leftrightarrow z \in y))$$

El primer axioma expresa, por tanto, la diferencia matemática entre conjuntos y propiedades lo cual es, filosóficamente, importante, pues se ha observado que cuando uno tiene las condiciones de identidad de una familia de objetos, ello es esencial para el manejo de los mismos.

De las propiedades, nadie ha dado condiciones de identidad respecto de las que exista un acuerdo general.

Carnap ha propuesto cierto criterio; el de que dos propiedades son las mismas cuando en toda circunstancia posible son poseídas por las mismas cosas, pero filósofos como Quine tienen razones para rechazar términos modales, además de no simpatizar con la idea de una lógica de propiedades que, en su opinión, presupone una ontología obscura.

Otras consecuencias filosóficas que encontramos en este primer axioma son, por ejemplo, que implica cierta perversión metafísica pues conduce a la aceptación de entidades abstractas: conjuntos.

Filósofos como N.Goodman y Quine tuvieron que abandonar sus tendencias a aceptar únicamente objetos materiales, por causa del axioma.

La Teoría de conjuntos está en medio, por así decirlo, de las opciones aludidas:

i) ontologías de propiedades obscuras.

ii) teorías de conjuntos.

iii) ontologías materialistas.

Nuestro axioma también tiene, por otra parte, consecuencias conceptúales menores como la de que no tiene sentido decir que en un conjunto hay repeticiones de elementos o la de que, a ciertos miembros se los ha considerado en un cierto orden.

También garantiza que la frese *el conjunto cuyos elementos son* $a_1 \ldots\ldots a_n$ tiene una denotación unívoca, ya que si decimos cuáles son los elementos de un conjunto , la denotación, si la hay, es determinada.

Hasta aquí, si bien la palabra *conjunto* no ha sido definida estrictamente, al igual que la noción de $\in$, el axioma uno garantiza la manera de operar de ambos y sus condiciones de manejo.

El segundo axioma que postularemos es el llamado de *comprensión o de existencia de conjuntos* que, como su nombre lo indica, se compromete con la existencia de este tipo de entidades a diferencia de A1.

Las ideas intuitivas cantoreanas que recoje este axioma presuponen algunas dificultades de formalización. La primera de estas ideas dice:

> "... *all those entities which fulfil a given condition always constitute another antity, a class, and only one class, since any two classes which have all their members in common are identical.*" 13/

Una idea principal es la de que, objetos cualesquiera pueden formar un conjunto. Expresar dicha idea formalmente tanto para conjuntos finitos como para

13/ Cfr. Fraenkel, Foundations of Set Theory, Bar-Hillel. A.Levi.,v.p 155.

conjuntos infinitos sin hablar de propiedades es algo sumamente complejo pues, de entrada parece ser necesario superar un cálculo de primer orden.

La otra idea presente en este segundo axioma es la de que, dada una propiedad hay un conjunto tal que los elementos de ese conjunto son únicamente los individuos que tienen ese propiedad.

Como en cálculos lógicos de primer orden no se trata con propiedades, entonces se requeriría, como señalábamos, un cálculo de orden superior.

Para un conjunto finito no son necesarias las propiedades, bastaría postular el conjunto agotando todos los objetos que quisieramos incluir en él, pero en el caso de conjuntos infinitos esto no es posible y, por tanto, hay que recurrir a propiedades.

Una primera formulación del axioma dos (A2) en lógica superior sería la siguiente:

$$(P)\ (\exists x)(Mx\ \&\ (y)(Py \leftrightarrow y \in x))$$

La primera cuestión a observar , además de que no es una fórmula de orden 1, es que presupone justamente propiedades que es algo que deseamos evitar puesto que, nos compromete con una ontología difícil de aclarar.

Y, por último, si observamos detenidamente, una aparición de P en la fórmula actúa como variable mientras que la otra actúa como predicado (la primera de izquierda a derecha es variable y la segunda predicado).

Tanto el primer problema como el segundo podrían resolverse si usamos dos primitivos más:

1- $P(x) = def.$ —— x es una propiedad.

Donde P es el predicado *ser una propiedad*, es decir, P actúa no como variable de predicado sino como predicado mismo.

2- $xTy = def.$ —— x tiene y.

Lo que tenemos realmente en (1) y (2) son definiciones informales que expli can cuál es el sentido en el que se las va a usar.

La formulación simbólica de la idea intuitiva cantoreana que estamos estudiando quedaría entonces así:

$$(x)(Px \leftrightarrow (\exists y)(My \,\&\, (z)(z \in y \leftrightarrow zTx)))$$

En esta formulación el primer problema se elimina gracias a la defінción de $P(x)$ mientras que el segundo problema se elimina por la definidión de xTy, pues expresamos la idea de que alguien posee la propiedad no por las posiciones en la formula, sino por el empleo del predicado relacional *tener una propiedad*.

A continuación buscaremos formular la idea intermedia de que una propiedad origina un conjunto en un axioma que cumpla funciones similares a las que hemos tratado de plasmar pero, mediante una estructura cuyas sustituciones den como resultado axiomas, esto es, postularemos un axioma esquema en el cual si bien se tratan predicados no aparece la noción de propiedad.

Por ejemplo, para el predicado *ser rojo* aplicado a un determinado individuo, nos daría algo como lo siguiente:

$$(\exists x)(My \,\&\, (x)(x \in y \leftrightarrow x \textit{ es rojo}))$$

Justo para evitar hacer una postulación como la anterior para cada predicado es que postulamos un axioma esquema:

$$\text{A2. } (\exists y)(My \,\&\, (x)(x \in y \leftrightarrow A(x)))$$

donde $A(X)$ es una fórmula que se puede sustituir por cualquier predicación.

En lugar de $A(x)$, en cada caso particular debe cumplirse que:

1- x debe aparece libre en $A(x)$.

2- y no debe aparece libre en $A(x)$.

3- por supuesto que otras variables distintas de x e y pueden aparecer libres en $A(x)$.

Así, finalmente hemos logrado reflejar en nuestro segundo axioma el supuesto intuitivo que tenía Cantor de que con cosas cualesquiera se puede tener un conjunto.

Una primera consecuencia de A2. es el teorema que comienza con el $(\exists y)!$,esta notación expresa que existe un y y a lo sumo uno, o no más que uno.

$$T1. \quad (\exists y)!\,(My \;\&\; (x)(x \in y \leftrightarrow A(x)))$$

La prueba de este teorema es la siguiente:

Para $(\exists y)(Hy \,\&\, (x)(x \in y \leftrightarrow A(x)))$ (sin la unicidad) la prueba se hace por el axioma 2 mismo.

Para $(\exists y)!(Hy \,\&\, (x)(x \in y \leftrightarrow A(x)))$:

Supongamos que en lugar de haber uno y a lo sumo uno, hay dos: $(\exists y_1)By_1$, $(\exists y_2)By_2$ donde $By_1 = (Hy_1 \,\&\, (x)(x \in y_1 \leftrightarrow A(x)))$ y $By_2 = (Hy_2 \,\&\, (x)(x \in y_2 \leftrightarrow A(x)))$.

i) $Hy_1 \,\&\, (x)(x \in y_1 \leftrightarrow A(x))$

ii) $Hy_2 \,\&\, (x)(x \in y_2 \leftrightarrow A(x))$.

simplificando $Hy_1 \,\&\, (x)(x \in y_1 \leftrightarrow A(x))$ nos queda:

iii) $(x \in y_1 \leftrightarrow A(x))$

simplificando $Hy_2 \,\&\, (x)(x \in y_2 \leftrightarrow A(x))$ nos queda:

iv) $(x \in y_2 \leftrightarrow A(x))$

de (iii) y (iv) obtenemos:

v) $x \in y_1 \leftrightarrow x \in y_2$

de (v) por A1 tenemos que:

$$y_1 = y_2$$

De esta manera para cada predicado hay un conjunto formado por las cosas que tienen ese predicado y sólo por ellas.

La teoría es completamente neutral acerca de propiedades.

Como consecuencia del teorema uno (T1) tenemos que, dado un $A(x)$ hay solamente un conjunto que le satisface.

Cuando definimos un conjunto de esta manera se dice que se está definiendo por comprensión o intensión.

Un conjunto también puede se definido por extensión o enumeración, es decir, enumerando a todos sus individuos, pero este tipo de definición presenta problemas obvios para el caso de conjuntos infinitos.

Las definiciones por enumeración son reducibles a las definiciones por comprensión que no presentan problemas ni para conjuntos infinitos ni para los finitos.

> *"Una clase o conjunto puede ser definida de dos maneras, las que, a primera vista, parecen completamente diferentes. Podemos enumerar sus elementos, como cuando decimos: 'El grupo que considero se compone de Juan, Pedro y Diego'. También podemos mencionar una propiedad determinada, como cuando hablamos del 'genero humano' o de los 'habitantes de Londres'. La definición que enumera se llama definición por 'extensión', y la que menciona una propiedad característica se llama definición por 'comprensión'. De estos dos tipos de definiciones, el último es lógicamente más fundamental. Esto se deduce de dos consideraciones: 1° La definición por extensión puede reducirse siempre a otra por comprensión; 2° La definición por comprensión, generalmente no puede reducirse a otra por extensión ni aún teóricamente..."* 14/

Por otra parte, la teoría de conjuntos, en general, logró formular para toda expresión que los matemáticos usaban, una denotación en términos puramente conjuntísticos.

El conjuntista dió un significado preciso a cosas que carecían de él preser

14/Cfr.Russell, Bertrand. Introducción a la filosofía matemática. Losada-Bs.As. v.pp. 25 y 26.

vando las funciones interesantes de dichas cosas.

Por ejemplo, la definición matemática de par ordenado era el simple manejo de algo como $\langle a,b \rangle$ en lo que se entendía que el primer individuo del par era a y el segundo individuo era b. Lo que muy posteriormente sería la definición conjuntistica de par sería expresada como $\{\{a,b\}, \{a\}\}$, esta definición nos dice cuáles son los miembros del par y cual es el primero de ellos. Así, tenemos notaciones más explícitas que las de los matemáticos pues, con algo que carece de orden (un conjunto), fabricamos algo perfectamente ordenado (un par); obsérvese cómo con esta nueva notación conjuntística incluso es fácil apuntar la diferencia de dos pares manejando solamente conjuntos:

primer par $\langle a,b \rangle$	segundo par $\langle b,a \rangle$
$\downarrow$	$\downarrow$
expresión correspondiente en teoría de conjuntos.	expresión correspondiente en teoría de conjuntos.
$\{\{a,b\}, \{a\}\} = A$	$\{\{b,a\}, \{b\}\} = B$

estos dos conjuntos son diferentes pues si bien el elemento de la izquierda de ambos es el mismo, el elemento de la derecha es otro, al conjunto A pertenece $\{a\}$ y no $\{b\}$ y al conjunto B pertenece $\{b\}$ y no $\{a\}$, luego A es diferente de B si recordamos, oportunamente, nuestro A1.

Lo que hicieron los conjuntistas fue encontrar una entidad cuya función fuera idéntica a la de la entidad matemática y, sin embargo, ambas entidades no son ellas mismas, idénticas entre si. El siguiente esquema expresa claramente lo anterior:

entidad matemática	$\neq$	entidad conjuntistica
$\downarrow$		$\downarrow$
función de la entidad matemática.	$=$	función de la entidad conjuntística.

Asi fue como los conjuntistas pusieron en relación biunívoca un conjunto de nociones, con las que tenían los matemáticos lo cual permitió que, cada vez que uno deseara hablar de y recurriera a x donde: y = entidad matemática que se encuentra en correspondencia con x que es una entidad conjuntística. Por supuesto que el conjunto al cual pertenece y tiene el mismo número de elementos que el conjunto al cual pertenece x.

El ejemplo de lo que sucedió con el concepto de par ordenado, ilustra cómo en verdad lo ofrecido por los conjuntistas fue casi siempre innovador.

Cuando el matemático hablaba de par ordenado jamás pensaba en algo como $\{\{a,b\},\{a\}\}$ pues de hecho no podía tener en mente conjuntos.

Con casi toda noción matemática sucedió lo mismo en relación a teoría de conjuntos, sin ambargo, vale decir que para todo propósito práctico, lo que hicieron los conjuntistas era innecesario. a pesar de esto, teoría de conjuntos dió una unificación conceptual de la matemática.

Cierto argumento dice que antes de la teoría de conjuntos uno tenía que postular muchas cosas y, después de ella era sólo necesario postular conjuntos.

El anterior argumento es peligroso asi como la misma teoría de conjuntos; el riesgo queda graciosamente expresado en la siguiente analogía hecha por Raúl Orayen: " es como si nos ofrecieran un insecticida para moscas,

un insecticida para cucarachas, un insecticida para
polillas, etc. y llegara alguien diciendo: eso no le
hace falta, tenga, yo le doy la bomba atómica!".

A fin de ver cuán rica, cuán vasta es teoría de conjuntos, definamos ciertas nociones relevantes.

Una *relación binaria=def.* a un conjunto de pares ordenados.

El *dominio de una relación binaria=def.* al conjunto de todos los primeros elementos de los pares de la relación.

El *codominio de una relación binaria*=def .al conjunto de todos los segundos elementos de los pares de la relación.

Una *relación inversa o conversa* $\breve{R}$=def $\alpha, \hat{x}\hat{y}\ (\langle y,x\rangle \in R)$

El *producto relativo* R/S *es igual a* $x\ R/S\ y$=def. $(\exists z)\ (x\ R\ z\ \&\ z\ S\ y)$

Una *función monádica* es una relación* tal que no existen en ella dos pares que comiencen con el mismo individuo.

Ura *función biunívoca* es una función .cuya conversa también es una función.

Una *correspondencia biunívoca* entre dos conjuntos $c\langle 1-1\rangle$ entre A,B =def. $f\langle 1-1\rangle$ cuyo dominio es A y cuyo codominio es B.

Estos han sido unos de los principales conceptos manejados por la teoría de conjuntos.

Pasaremos ahora al desarrollo de cómo obtener la teoría de los números cardinales a partir de conjuntos, la necesidad de este desarrollo se verá claramente al finalizar el capítulo.

La obtención de los números cardinales estará centrada en la obtención específica de cardinales finitos ya que estos se identifican con los números naturales y, como antes se decía, para concluir que toda la matemática se deduce a partir de pura teoría de conjuntos, es necesario mostrar que aquello a lo que según la aritmetización se reduce toda la matemática (la teoría de los números naturales) es obtenible justamente a partir de conjuntos. Tenemos que mostrar entonces, que los números naturales, o cardinales finitos, pueden manejarse conjuntísticamente.

Definición intuitiva previa: el *cardinal de un conjunto* es el número de individuos incluídos en ese conjunto.

Definición formal: *un conjunto es equinumeroso con otro* cuando existe una correspondencia biunívoca entre ellos.

Cantor parece haber sido el primero que tuvo la idea de equinumerosidad que,

* binaria.

se expresa así:

$$A \sim B =_{def.} (\exists f) \quad f \text{ es una } C \langle 1\text{-}1 \rangle \text{ entre } A \text{ y } B.$$

La idea de equinumerosidad es además interesante porque, como ya veíamos, hubo definiciones conjuntísticas que no describían en absoluto lo que los matemáticos consideraban anteriormente a ellas (par ordenado).

Los conjuntistas tomaban simplemente palabras o términos matemáticos cuyo significado analizaban hasta alcanzar un grado de precisión antes ausente.

En el caso de la noción de equinumerosidad puede defenderse la idea de que tal término fue retomado, conservando absolutamente su significado original. Esto último debe entenderse en el sentido de que toda oración obtenida poniendo el predicado de *equinumerosidad* antiguo tiene las mismas condiciones de verdad que cualquier oración obtenida poniendo el nuevo predicado conjuntístico.

Dicho de otra forma, las oraciones nacidas de la aplicación del predicado introducido por la nueva definición, son oraciones cuyo valor de verdad es idéntico al referido por oraciones compuestas a partir del predicado de *equinumerosidad* en su acepción previa a la teoría de números, es decir, en una acepción dada a nivel del puro lenguaje natural.

La diferencia en el sentido y la denotación existentes entre los antiguos conceptos matemáticos y las nuevas nociones conjuntísticas, se manifiesta o bien porque los antiguos conceptos tenían una denotación obscura y diferente a la nacida posteriormente, o bien, porque la noción más vieja simplemente carecía de denotación.

En el caso del par ordenado, lo que sucedió fue lo primero.

Con la noción de equinumerosidad lo que sucedió fue que, conservó más parecido con lo anterior ya que para ella no se dieron sino condiciones de operatividad, la denotación nunca es expuesta.

En base a la idea de equinumerosidad podemos obtener nuestros siguientes teoremas.

T2. $A \sim A$

T3. $(A \sim B) \rightarrow (B \sim A)$

T4. $((A \sim B) \,\&\, (B \sim C)) \rightarrow (A \sim C)$

Estos tres teoremas manifiestan las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad para la relación de equinumerosidad.

T2 se prueba mediante la operación idéntica con dominio en A y codominio en A, esto es, para cada miembro de A hay un a (el mismo). Esta relación de todos los miembros de A con ellos mismos permite formar una correspondencia biunívoca de A con A; dada esta correspondencia y, de acuerdo con la definición de equinumerosidad, se puede decir que A es equinumeroso consigo mismo, esto es:

$$A \sim A$$

T3 se prueba mostrando la conversa de la relación cuyo dominio es A y cuyo codominio es B, asi R tiene como dominio a B y como codominio a A. Considerando que hay una $A \frown R \frown B$ que es una correspondencia biunívoca, pues de hecho suponemos que A es equinumeroso con B (el antecedente), tenemos que admitir que la conversa, esto es $B \frown R^* \frown A$ también es biunívoca y, por lo tanto B también es equinumeroso con A.

T4 se prueba tomando como antecedente el que, A mantiene una correspondencia biunívoca con B, $A \frown R \frown B$, y B mantiene una correspondencia biunívoca con C, $B \frown R^* \frown C$, de manera que aquí puede existir un producto relativo R/R* que permita finalmente decir que $A \frown R \frown C$, lo cual significa que hay entre ambos conjuntos equinumerosidad.

$\overline{\overline{A}}$ significa el número cardinal del conjunto A, o más brevemente, la cardinalidad de A.

En '$\overline{\overline{A}}$', 'A' es un nombre de conjunto o variable de conjunto.

En seguida vamos a introducir entidades con aplicaciones totalmente diferentes a las anteriores; objetos que funcionen como números cardinales.

Para cada conjunto asignaremos un objeto de estos:

Conjuntos ⟶ A B C D E

Objetos que se comportan como números cardinales de los conjuntos. ⟶ $\bar{\bar{A}}$ $\bar{\bar{B}}$ $\bar{\bar{C}}$ $\bar{\bar{D}}$ $\bar{\bar{E}}$

Basándonos en lo anterior tenemos que llegar a aceptar la siguiente condición:

$$\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}} \leftrightarrow A \sim B$$

Si bien aún no sabemos qué es precisamente un número cardinal, a raíz de esta condición tenemos un dato importante: *que dos conjuntos son equinumerosos es lo mismo que decir que poseen el mismo cardinal.*

Finalmente pasamos a que *el cardinal de* A *es igual al conjunto de todos los* C *tales que* C *es equinumeroso con* A.

Definición: $\bar{\bar{A}} = def. \hat{C}\ C \sim A$, donde $\hat{C}\, C \sim A$ significa el conjunto de todos los conjuntos que son equivalentes a A.

Demostración de $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}} \leftrightarrow A \sim B$

1]
1. $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$ supuesto
2. $\hat{C}\, C \sim A = \hat{C}\, C \sim B$ definición de $\bar{\bar{A}}$, de $\bar{\bar{B}}$, reemplazo en 1.
3. $A \sim A$ T2.
4. $A \in \hat{C}\, C \sim A$ de 3.
5. $A \in \hat{C}\, C \sim B$ de 4, 2 y axioma de extensionalidad.
6. $A \sim B$

2] 1. $A \sim B$ supuesto
hay que mostrar $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$, o sea $\begin{cases} x \in \bar{\bar{B}} \rightarrow x \in \bar{\bar{A}} \quad (2.2) \\ x \in \bar{\bar{A}} \rightarrow x \in \bar{\bar{B}} \quad (2.1) \end{cases}$

(2.1) 1'. $x \in \bar{\bar{A}}$ supuesto.
2. $x \in \hat{C}\, C \sim A$ (de 1', x def $\bar{\bar{A}}$)
3. $x \sim A$ (de 2)
4. $x \sim B$ (3, 1, transitividad)
5. $x \in \hat{C}\, C \sim B$ (de 4)
6. $x \in \bar{\bar{B}}$ (de 5 def. de $\bar{\bar{B}}$)

(2.2) 7. $x \in \bar{\bar{B}}$ supuesto
8. $x \in \hat{C}\, C \sim B$ (de 7, x def $\bar{\bar{B}}$).
9. $x \sim B$ (de 8)
10. $B \sim A$ (de 1, simetría)
11. $x \sim A$ (de 10, 11, por transitividad).
12. $x \in \hat{C}\, C \sim A$ (11)
13. $x \in \bar{\bar{A}}$ (de 12, por def. $\bar{\bar{A}}$).

Asumiremos a nuestra formula $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}} \leftrightarrow A \sim B$ como el quinto teorema (T5).

* $\hat{x}$ - significa el conjunto de todas las x tales que cumplen con la propiedad que se especifica en seguida.

Expresado en términos de predicado monádico, el *ser cardinal* (C) ,queda definido de la siguiente forma: $Cx =def. (\exists A)\ x = \overline{\overline{A}}$.

Ahora sí tenemos definido lo que es un número cardinal.

Un cardinal es todo aquello que es cardinal de algo, a saber, de algún conjunto.

Una vez tratadas las nociones de equinumerosidad, cardinal de un conjunto y cardinal, podemos comprender el significado de nuestro sexto teorema:

T6. $Cx \rightarrow x \neq \Lambda$

ningún cardinal es vacio, lo cual se demuestra así:

1. Cx supuesto
2. $(\exists A)\ x = \overline{\overline{A}}$ por la definición de cardinal
3. $x = \overline{\overline{A'}}$ I.E.
4. $x = \hat{C}C \sim A'$ reemplazo del cardinal de A' por todos los conjuntos que son equinumerosos con A'.
5. $A' \in \hat{C}C \sim A'$ porque $A' \sim A'$
6. $A' \in x$ por la igualdad de (4) y la pertenencia de (5)
7. $(\exists A)\ A \in x$ G.E.

y, si hay por lo menos un A, tal que $A \in x$ entonces, x no puede ser vacio, esto es:

8. $x \neq \emptyset$

Nociones auxiliares:

$Atc =def.$ a decir que el conjunto A tiene el cardinal c. Esto es

$$Atc = def.\ c = \overline{\overline{A}}$$

T7. $Atc \leftrightarrow A \in c$

El teorema séptimo nos dice que un conjunto tiene un cardinal si y sólo si pertenece a ese cardinal, lo cual se demuestra de la siguiente forma:

1) $Atc \longrightarrow A \in c$ (si A tiene el cardinal c entonces, le pertenece).
2) $A \in c \longrightarrow Atc$ (si A pertenece a un cardinal entonces, lo tiene).

T7 se puede expresar de manera más completa así: $(c)(Cc \rightarrow . Atc \leftrightarrow A \in c)$

1) I. Atc supuesto

II. $c = \overline{\overline{A}}$ (de I por la definición de t)

III. $c = \hat{C}C\sim A$ (de II por definición de $\overline{\overline{A}}$)

IV. $A \sim A$ (T2)

V. $A \in c$ (de 3 y 4).

2) VI. c es un cardinal — supuesto. 1

VII. $A \in c$ — supuesto. 2

VIII. $c = \overline{\overline{A'}}$ — (definición de cardinal, VI, especificación existencial e instanciación existencial).

IX. $\overline{\overline{A'}} = \hat{C}C\sim A'$ — (definición de =)

X. $A \in \hat{C}C\sim A'$ — (transitividad, supuesto 2 y A1)

XI. $A \sim A'$ (de X)

XII. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}}$ (de XI y T2)

XIII. $c = \overline{\overline{A}}$ (reemplazo en VII por XII)

XIV. Atc (definición de t)

De los teoremas que hemos visto, Cantor únicamente postuló de alguna manera
T5. los demás son o bien russellanos o bien fregeanos.

Hasta ahora, como puede notarse, en ningún momento hemos restringido la palabra *cardinal* a cardinales finitos por ello, puede decirse, que tan sólo hemos hecho una teoría general, aunque no completa, de cardinales.

Para continuar, aludamos a lo que es intuitivamente un número cardinal.

Un número cardinal es la respuesta que uno da a la pregunta ¿ cuántos individuos tiene este conjunto?.

En términos más matemáticos se dice que, un número cardinal, es la medida de la cardinalidad de individuos que hay en un conjunto.

La relación existente entre cardinales y naturales es, como decíamos, la de que todo natural es un cardinal finito, es decir, un cardinal que se aplica a conjuntos finitos. Así, los números naturales son cardinales, tales que, cuando un conjunto tiene a uno de ellos, el conjunto es, indudablemente, finito.

Obtendremos la teoría de los números naturales como parte de la teoría general (no completa) de los cardinales que hemos desarrollado hasta aquí.

Como demostró Peano, la teoría de los números naturales podía obtenerse a partir de tres primitivos y cinco postulados, ahora bien, para poder decir que la teoría de los números naturales es parte de la teoría general de los cardinales, podemos utilizar las nociones que hemos introducido a fin de obtener los tres primitivos y cinco postulados.

Reduciremos la parte de la teoría de los cardinales correspondiente a los naturales, esto es, la parte de los cardinales finitos a pura teoría de conjuntos.

<u>Sistematización de Peano</u>

<u>Nociones primitivas</u>: 0, ', N .

Por el manejo que hacia Peano de estas nociones primitivas puede observarse que estas nociones tenían únicamente categoría gramatical aunque no un significado.

'0' es un término singular, lo definiremos como el cardinal de la clase nula.

"'" es una operación monádica que consiste en sumar uno.

'N' es un conjunto: el de los números naturales.

<u>Postulados</u>:

P-1) $0 \in N$

P-2) $(n)\ n' \in N$

P-3) $(m)(n)(m' = n' \rightarrow m = n)$

P-4) $(n)\ 0 \neq n'$

P-5) $(P)(((P0\ \&\ (n)(Pn \rightarrow Pn')) \rightarrow (n)Pn)$

El primer postulado nos dice que 0 es un número natural.

El segundo postulado manifiesta que el sucesor de un natural es también un natural.

El tercero, expresa que la operación ' es biunívoca.

El cuarto, refleja que el número 0 no es sucesivo de nadie.

Y el quinto postulado nos dá a conocer el principio de inducción tal como fue ideado por Peano; aún cuando Russell lo expresaría de manera más débil ya que esta formulación requiere algo más que una lógica de orden uno.

Obtención de los conceptos primitivos de Peano

en términos únicamente conjuntísticos.

Definición $0 =_{def.} \overline{\overline{\Lambda}}$

Cero es igual por definición al cardinal de la clase nula.

T8. $0 = \{\Lambda\}$

El T8 es obtenible una vez dada la definición de 0 y una vez probado que sólo hay un conjunto vacio lo cual se demuestra como sigue:

Por reduccion al absurdo.

1. $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$ (los 2 son vacíos)
2. Recordemos que $\emptyset_1 = \emptyset_2 \leftrightarrow (x)(x \in \emptyset_1 \leftrightarrow x \in \emptyset_2)$ A1
3. $\emptyset_1 \neq \emptyset_2 \leftrightarrow \sim(x)((x \in \emptyset_1 \rightarrow x \in \emptyset_2) \& (x \in \emptyset_2 \rightarrow x \in \emptyset_1))$ Definición del bicondicional. de 2 y de que $p \leftrightarrow q = \sim p \leftrightarrow \sim q$.
4. $\emptyset_1 \neq \emptyset_2 \leftrightarrow \sim[(x)(x \in \emptyset_1 \rightarrow x \in \emptyset_2) \& (x)(x \in \emptyset_2 \rightarrow x \in \emptyset_1)]$ Distribucion del cuantificador.
5. $\emptyset_1 \neq \emptyset_2 \leftrightarrow [\sim(x)(x \in \emptyset_1 \rightarrow x \in \emptyset_2) \vee \sim(x)(x \in \emptyset_2 \rightarrow x \in \emptyset_1)]$ De Morgan
6. $\emptyset_1 \neq \emptyset_2 \leftrightarrow [(\exists x)\sim(x \in \emptyset_1 \rightarrow x \in \emptyset_2) \vee (\exists x)\sim(x \in \emptyset_2 \rightarrow x \in \emptyset_1)]$ Intercambio de Cuantificadores.
7. $\emptyset_1 \neq \emptyset_2 \leftrightarrow [(\exists x)\sim\sim(x \in \emptyset_1 \& \sim x \in \emptyset_2) \vee (\exists x)\sim\sim(x \in \emptyset_2 \& \sim x \in \emptyset_1)]$ Definición del Condicional.
8. $\emptyset_1 \neq \emptyset_2 \leftrightarrow [(\exists x)(x \in \emptyset_1 \& x \notin \emptyset_2) \vee (\exists x)(x \in \emptyset_2 \& x \in \emptyset_1)]$ Dobles negaciones y traducción de '$\sim$' aplicado a la pertenencia.
9. Pero el segundo elemento de este último bicondicional es una disyunción compuesta por dos extremos absurdos pues, en cada uno de ellos se afirma o con '$x \in \emptyset_1$' o con '$x \in \emptyset_2$' que hay algo en el vacío y esto por definición de la clase vacía nunca puede ser.

Una vez definido el número 0, pasaremos a la definición de la operación ' (prima), es decir, a la operación de sumar uno, por ejemplo:

$8' = 9$

$10' = 11$

$32' = 33$

Elaboraremos lo que se llama una definición por casos. Hay ocasiones en las que definimos una operación aplicada a cierto tipo de objetos y luego, la definimos aplicada a otro tipo de objetos, de manera que, en el primer caso obtenemos un resultado diferente al del segundo caso.

Séa x' donde x tiene como dominio todo el universo:

Primer caso: caso en que x es un número cardinal:

$$Cx \rightarrow .x' = def. \hat{B}\ (\exists A)(\exists y)(A \in x\ \&\ y \notin A\ \&\ B \sim A \cup \{y\})$$

Segundo caso: caso en el que x no es un número cardinal:

$$\sim Cx \rightarrow x' = x$$

El procedimiento que Frege y Russell inventaron para hacer una definición recursiva, rigurosa y explícita continuando asi a partir de lo anterior el desarrollo teorico es muy interesante, pero antes de pasar a él daremos un ejemplo de definición de este tipo (recursiva) que nos introduzca en el contexto específico de la importante definición de conjunto inductivo.

Uno podría definir los N de la siguiente forma:

a) $0 \in N$

b) $x \in N \rightarrow x' \in N$

c) sólo pertenecen a los N , x que se puedan obtener mediante sucesivas aplicaciones de (a) y (b).

Como podemos observar, las cláusulas (a) y (b) son las condiciones suficientes que se tendrían que llenar para pertenecer al club N, esto es, o bien ser el número 0, o bien, ser pariente ' (primo) de uno del club.

En tanto, la tercera cláusula nos dice que únicamente los que cumplen (a) y (b) son miembros honorarios de N, lo cual es una condición necesaria.

Esta definición de los N es al parecer intuitiva y por ello pretende sencillez pero, las apariencias nos engañan pues, en realidad, nuestra inocente definición conduce a problemas graves.

i) Si uno desea tomar esta definición como definición de los N comete un círculo vicioso pues utiliza N mismo al definir (todas las definiciones recursivas hacen lo mismo).

ii) Nadie sabe cómo formalizar la condición necesaria o sea (c).

A este último respecto, si dijéramos que $(x)(x \in N \rightarrow .x=0 \vee (\exists y)(y \in N \mathbin{\&} x=y')$ es la formalización, no estaríamos implicando que todo natural se puede obtener por aplicación de (a) y (b), esto es, no describiríamos que el natural y, se obtuvo por una sucesiva aplicación de ', a partir de 0. Esta falla permitiría que entraran al club N sujetos indeseables, por ejemplo:

- suponiendo que h fuera un cardinal infinito, la operación prima dejaría lo mismo. h' = h y entonces nuestra formalización de (c) no sirve.
- suponiendo que una taza quisiera entrar al club N también le estaría permitido por la simbolización de (c).

Ahora bien, como de hecho no sabemos de antemano qué son los N más bien, nuestra simbolización se tornaría en lo siguiente:

$$(x)(x \in J) \rightarrow . \ x=0 \ \vee \ (\exists y)(y \in J \mathbin{\&} x = y')$$

La cuestión es entonces: hacer una formalización rigurosa de la cláusula (c) y deshacernos del circulo vicioso.

Russell y Frege dieron un rodeo y lograron solucionar la primera parte de nuestro problema. Con su porcedimiento se puede hacer o decir que tenemos una definición rigurosa y explícita de N.

Definimos un conjunto M dado:

i) $A \subseteq M$

ii) operaciones o relaciones f^1, f^2, R^1, R^2, R^3, etc 15/ tales que $(x,y) \in M \rightarrow f^2xy \in M$

$x \in M$ y $xRy \rightarrow y \in M$.

Este procedimiento es generalizable.

En nuestro intento de obtener una satisfactoria definición de los naturales lo que hemos visto en realidad es cómo se podría definir un *conjunto inductivo* lo cual significa, un conjunto que cumpla con las cláusulas (a) y (b) aludidas arriba.

Propondremos ahora la siguiente definición:

$$I(A) =_{def.} 0 \in A \;\&\; (x)(x \in A \rightarrow x' \in A)$$

Donde I es el predicado *ser un conjunto inductivo.*

Nótese que esta definición de conjunto inductivo, a diferencia de la que intentábamos hacer con N se aplica o pretende aplicarse a un número infinito de conjuntos y no sólo a N, con el predicado I.

A continuación nos apartaremos un poco de lo que Russell realizó en su *Introducción a la filosofía matemática.*

$N =_{def.}$ a la intersección de todos los conjuntos inductivos (dicho intuitivamente).

$N =_{def.} \hat{x}\,(A)(I(A) \rightarrow x \in A)$* (dicho rigurosamente).

La definición que intentábamos hacer de N en (a),(b) y (c) es parecida a ésta, pero la anterior* es aún más general.

Ahora introduzcamos nuestro noveno teorema:

$$T9. \quad I(N)$$

T9. dice que la intersección de todos los conjuntos inductivos, o sea N es un conjunto inductivo.

0 pertenece a todo conjunto Inductivo pues $0 \in N$ y N es la intersección de los inductivos. Así pues, se cumple (a).

15/el exponente en este tipo de expresiones indica el o los lugares de argumento(s).

Hay ahora que probar que

$$x \in N \rightarrow x' \in N$$

Prueba condicional:

1) $x \in \mathbb{N}$ supuesto.
2) X pertenece a todo conjunto inductivo porque $\mathbb{N} = \hat{x}(A)(I(A) \rightarrow x \in A)$
3) como todo conjunto inductivo está cerrado para la operación ' entonces, $x' \in$ a todo conjunto inductivo.
4) y como la introducción de todo conjunto inductivo es $\mathbb{N}$
5) $x' \in \mathbb{N}$.

Hasta acuī hemos demostrado ya, dos postulados de Peano el P-1 y el P-2

Recordemos ahora que el postulado quinto de Peano (P-5) es

$$(P)\ ((P0\ \&\ (n)(Pn \rightarrow Pn')) \rightarrow (n)\ Pn)$$

Sacando de este condicional una regla deductiva obtenemos el siguiente esquema:

$$\left.\begin{array}{l} P0 \\ (n)(Pn \rightarrow Pn')\ /\therefore\ (n)\ Pn \end{array}\right\} \varphi$$

No obstante nosotros no podemos mostrar directamente esta regla, asi que introduciremos una paralela que, simultãneamente operarã como nuestro décimo teorema.

$$\left.\begin{array}{l} T\ 10.\ P0 \\ \qquad (x)(Px \rightarrow Px')\ \ /\therefore\ N \subseteq \hat{x}Px \end{array}\right\} \Psi$$

Con la prueba de $T\ 10$ estaremos demostrando indirectamente P-5.

φ y Ψ tienen la misma primera premisa pero, la segunda premisa Ψ tiene un enunciado universal mucho mãs informativo, ya que su dominio no son ũnicamente, como en φ , nũmeros naturales sino objetos cualesquiera del universo.

En cuanto a las conclusiones de φ y Ψ tienen la misma, expresada, claro, de diferente forma, esto es, decir que $(n)Pn$: para todo nũmero natural ẽl tiene la propiedad , es lo mismo que decir $N \subseteq \hat{x}Px$: el conjunto de los nũmeros naturales es un subconjunto de todos los tales que tiene la propiedad.

Veamos con detenimiento como es que $P0$ y $(x)(Px \rightarrow Px')$ pueden ofrecer apoyo para deducir $N \subseteq \hat{x}Px$

Pensemos primero que se cumple que $P0$.

Segundo que, para todo individuo del universo si él tiene la propiedad y se le aplica la operación prima ('), lo que se obtenga de dicha aplicación también tendrá la propiedad. En otras palabras, el conjunto de todos los individuos que tienen la propiedad es un conjunto inductivo. Ahora bien, si los números naturales son por definición la intersección de todos los conjuntos inductivos, entonces podemos deducir que $N \subseteq \hat{x}Px$.

Si los habitantes de N están en todo conjunto inductivo, entonces n está en $\hat{x}Px$.

La hipótesis del $T10$ facilita las cosas diciendo que P está cerrada bajo la operación prima, esta es una importante diferencia a notar entre $T9$ y $T10$ donde no tenemos que P este cerrada para ' sino que dejamos abierta la posibilidad de que P no sea inductiva.

Demostración de $T10$:

$$* \begin{cases} 1)\ P0 & \text{Supuesto} \\ 2)\ Pn \rightarrow Pn' & \text{Supuesto (con variables especializadas).} \end{cases}$$

$$Pn \equiv Px \,\&\, x \in \mathbb{N}$$

$$3)\ \widehat{Pn} \rightarrow Pn'$$

4) $Px \,\&\, x \in \mathbb{N} =_{def.} Qx$ 'P' es una variable de propiedades, de manera que introducimos en su lugar una propiedad cuyo signo es 'Q' tal que Q se aplica a un dominio restringido, a saber, el de los números naturales, así que si bien no estábamos seguros de que P fuera inductiva, si podemos estarlo de que Q lo es.

5) Vamos a probar que Q cumple con $\begin{cases} P0 \\ y \\ (x)(Px \rightarrow Px') \end{cases}$

1) Qo Sustitución Po/Qo
Po por supuesto (1) v. * p 37.
$0 \in \mathbb{N}$ sale porque $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, es decir:
$\mathbb{N} =_{df} \hat{x}(A)(I(A) \rightarrow x \in A)$
e
$I(A) =_{df} 0 \in A \,\&\, (x)(x \in A \rightarrow x' \in A)$

2) $Qx \rightarrow Qx'$ $\quad Px \rightarrow Px' / Qx \rightarrow Qx'$ sustitución
Qx suponemos
$Px \,\&\, x \in \mathbb{N}$ por definición de Qx, es decir $Qx =_{df} Px \,\&\, x \in \mathbb{N}$

Px' porque $Px \,\&\, x \in \mathbb{N} \rightarrow Pn'$ por supuesto (2) v. p 37 *
$x' \in \mathbb{N}$ porque $\mathbb{N}$ es inductivo.
así $Px \,\&\, x \in \mathbb{N} \rightarrow Px' \,\&\, x' \in \mathbb{N}$
$Qx \rightarrow Qx'$
Q se comporta como P en T10.
$\mathbb{N} \subseteq \hat{x}Qx$ $\quad P/Q$ en T10.
$(x)[x \in \mathbb{N} \rightarrow (Px \,\&\, \cancel{x \in \mathbb{N}})]$ retiramos lo redundante
$(x)[x \in \mathbb{N} \rightarrow Px]$
$(n)\, Pn$

Hasta aquí hemos logrado definir tres primitivos de Peano y tres postulados han sido demostrados.

En una prueba rigurosa, el cuarto postulado de Peano en unión con el primero, segundo y quinto permiten mostrar que la serie de los números naturales comienza con 0. A continuación haremos la prueba del postulado cuarto:

$$(n)\ 0 \neq n'$$

n puede ser cualquier natural, el conjunto N está incluído en los cardinales pero siendo que no hemos probado que los N sean efectivamente cardinales, tenemos que enfrentarnos a un dilema.

a) si n no es cardinal entonces $n = n'$ y entonces $n' \neq 0$ ya que, por método indirecto, tenemos que suponer que $0 = n'$, por transitividad de la igualdad $0 = n$, pero n no puede ser igual a 0 porque ya sabemos que 0 es el cardinal de la clase vacia (por definición) y, n no es cardinal por hipótesis.

b) si n es cardinal entonces se cumple lo siguiente:

$$n' = \hat{C}\,(\exists B)(\exists y)(B \in n \ \&\ y \notin B \ \&\ C \sim B \cup \{y\})$$

Para demostrar lo anterior hagamos nuevamente una prueba indirecta:
Supongamos que $0 = n'$ (ya que lo que hay que probar es que $0 \neq n'$)
$0 = \hat{C}(\exists B)(\exists y)(B \in n \,\&\, y \notin B \,\&\, C \sim B \cup \{y\}) = \varphi$
$0 = \varphi$ vale
Sabemos por A1 que dos conjuntos son iguales únicamente si tienen los mismos elementos.
Si $\emptyset \in 0 \rightarrow \emptyset \in \varphi$ (0 es cardinal de la clase $\emptyset$ $\therefore 0 = \{\emptyset\}$ y $\emptyset \in 0$).

Así, la clase vacía tendrá la propiedad que se adjudica a C, y nos queda: $(\exists B)(\exists y)(B \in n \;\&\; y \in B \;\&\; \emptyset \sim B \cup \{y\})$

$(B \in n \;\&\; y \in B \;\&\; \emptyset \sim B \cup \{y\})$ Instanciación existencial con la misma variable.

$\emptyset \sim B \cup \{y\} \;\&\; B \in n \;\&\; y \notin B$ Conmutación.

$\emptyset \sim B \cup \{y\}$ Simplificación.

Si esto último es cierto entonces hay alguna $f(x)$ biunívoca tal que:

Dominio de $f(x) = \emptyset$

Codominio de $f(x) = B \cup \{y\}$

entonces debe haber algún par, tal que $\langle a, y \rangle$ donde $a \in \emptyset$. Pero esto último es absurdo porque el primer componente del par no existe ya que, el $\emptyset$ no tiene individuos. Luego $0 = n'$ puesto que lo contrario nos llevó a un absurdo.

Tercer postulado:

$$(m)(n)(m' = n' \rightarrow m = n)$$

Si el universo fuera fínito entonces, este postulado sería falso, veamos que resulta de suponer tal cosa.

1. $\bar{\bar{V}} = n$ Supuesto.
2. $\bar{\bar{V}} = 10$ de 1 sustición $n/10$, 10 es un cardinal natural.
3. $10' = \hat{C}(\exists B)(\exists y)[B \in 10 \;\&\; y \in B \;\&\; C \sim B \cup \{y\}]$ esta línea se obtienes de acuerdo con la definición de sucesor para cardinales.
4. $10' = \hat{C}(\exists y)[V \in 10 \;\&\; y \notin V \;\&\; C \sim V \cup \{y\}]$ instanciación existencial (I.E) de (3). Sabemos que hay un sólo B que cumple con el conjunto $B \in 10$, ese $B = V$ (ver línea (2)). De decir que $(\exists x)fx$ y saber que sólo hay un individuo a tal que tiene fx se puede pasar a fa.
5. $10' = \hat{C}(\exists y)[y \notin V \;\&\; C \sim V \cup \{y\}]$ Simplificación de (4). Viendo lo que dice esta línea, especialmente en el primer conyunto, notamos que manifiesta una propiedad vacía pues, por definición de clase universal, no puede darse el caso de que exista un y tal que, no este en la clase universal. Basta, entonces, que cualquier conyunto sea falso para que toda la conjunción lo sea, en tal caso podemos sustituir la parte derecha de la igualdad por el de la clase vacía a la cual denota.
6. $10' = \emptyset$ De (5) por las razones expuestas. Ahora vale preguntar ¿$\emptyset$ es un cardinal?. No; ya que sabemos por nuestro teorema 3 que los cardinales nunca son vacios. Así, parece que $10'$ tampoco es un cardinal.

7. $10' = 10''$ esta línea se justifica porque si $10'$ no es cardinal entonces, su sucesor y ella misma son el mismo individuo.
$n = n'$ sustituyendo $^{n}/_{10'}$.

8. $10 = 10'$ obtendríamos esto de (7) si el tercer postulado de Peano fuera verdadero pero, no es así ya que, de (2) sabemos que 10 es cardinal y de (6) sabemos que $10'$ no es cardinal. Un cardinal no puede ser idéntico a un no cardinal.

Ahora bien, de (8) pasamos a la siguiente fórmula condicional del argumento:

Si falla el postulado 3 por finitud $\Longrightarrow$ Existe al menos un natural que no es cardinal.

$\sim(\exists n)\sim Cn$ $\Longrightarrow$ Postulado 3 no falla por finitud*

por intercambio de cuantificadores

$(n)Cn$ $\Longrightarrow$ Postulado 3 no falla por finitud.

Vemos como la idea de un universo infinito va ligada a la idea de que $(n)Cn$. De (8) pasamos a que si no es verdad que $10 = 10'$ por contraposición el postulado 3 también sería falso.

Moraleja: el desastre se produjo cuando la serie de los cardinales tuvo un accidente que le impidió continuar su secuencia justo ahí donde la clase V encontraría su finitud y si V es finita, algún natural no puede seguir siendo cardinal, así, ese número es igual al vacio.
El postulado 3 se refuta si por carencia de materia prima en el universo, en algún punto de la serie de los naturales un individuo no puede ser cardinal. (Si el postulado 3 falla por finitud un natural dejo de ser cardinal).

Observaciones filosóficas:

Tal vez habría manera de definir la operación prima (') en una forma en la que el postulado no se arruinara aun cuando el universo fuera finito pero, un estudio en abstracto de los postulados muestra que tienen que aplicarse a un universo sin fin pues, cualquier significado que se les asignara a los primitivos haría verdaderos los postulados únicamente bajo la interpretación de un universo infinito, esto es, los postulados serían verdaderos solamente cuando se hablara de una cantidad infinita de cosas.

En TCC tal cual, se puede probar que hay clases infinitas y, por ello, no cabe la posibilidad de refutar el postulado tercero. Por ejemplo, una clase cuya existencia es demostrable en TCC es la siguiente:

$$\{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\{\Lambda\}\} \ldots etc\}$$

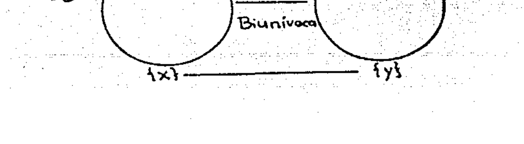
Es interesante notar como la reformulación o la nueva teoría de conjuntos realizada por Russell, impide la existencia de clases como la mencionada. Russell postula diferentes niveles para clases de mayor o menor complejidad y, con ello, cierra la posibilidad de existencia de algo como $\{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\{\Lambda\}\} \ldots etc\}$ obligandose simultáneamente a introducir la noción de infinito ni más ni menos que como un axioma, que manifiesta la infinidad de individuos del primer nivel.

También cabe mencionar que las definiciones tienen de entrada cierta consecuencia, por ejemplo, el postulado tercero es falso si el universo es finito pero además, también, con cualesquiera otras definiciones alternativas, si no hay universo infinito, alguno de los otros postulados siempre se falsifica.

Una vez tratadas estas interesantes implicaciones del postulado 3 de Peano, pasaremos a su demostración formal para la cual se requiere la previa consideración de un lema.1. (L1) para probar que $m' = n' \rightarrow m = n$

$(A \cup \{x\} \sim B \cup \{y\}\ \&\ x \notin A\ \&\ y \notin B \rightarrow A \sim B)$

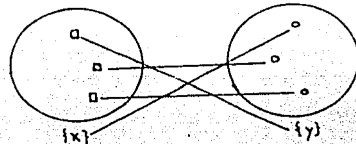
Caso **A**.



En este caso no hay ningún problema. (Restando el conjunto $\{\langle x,y\rangle\}$ se obtiene, como expresa el esquema una $C\langle 1\text{-}1\rangle$).

Caso **B**

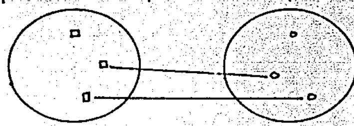
Conjunto $\mathcal{A}$



Conjunto $\mathcal{B}$

remite al siguiente problema: si quitamos los pares correspondientes a x e y nos queda:

$\mathcal{A}$



$\mathcal{B}$

ya no es correspondencia biunívoca entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ porque el dominio debería ser todo $\mathcal{A}$ y, el codominio $\mathcal{B}$.

Para solucionar el Caso **B** tenemos que hacer lo siguiente:

Si en el caso **A** tenemos:

$$\mathcal{A}\cup\{x\} \xrightarrow{f^*} \mathcal{B}\cup\{y\}$$ no hay problema.

Si en el caso **B** tenemos:

$a \in \mathcal{A}$ supuesto $\quad \underset{a}{\mathcal{A}}\cup\{x\} \xrightarrow{f^{**}} \underset{b}{\mathcal{B}}\cup\{y\} \quad$ $b \in B$ supuesto

Lo único que hay por hacer es a a lo retiramos del par $\langle a, y\rangle$ y lo trasladamos al par $\langle a, b\rangle$ y a b lo retiramos del par $\langle x, b\rangle$ mandándolo al par $\langle a, b\rangle$; y así, quitando x e y, nos resulta lo que deseábamos: $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$

Prueba condicional de $(m)(n)(m' = n' \rightarrow m = n)$

(Aquí usaremos que $(n)Cn$, por tanto m como n son cardinales).

1. $m' = n'$ supuesto.
2. $m' = \hat{C}\,(\exists B)(\exists y)(B \in m \;\&\; y \notin B \;\&\; C \sim B\cup\{y\})$ (2.1)
   $n' = \hat{C}\,(\exists A)(\exists z)(A \in n \;\&\; z \notin A \;\&\; C \sim A\cup\{z\})$ (2.2)
3. m' es natural
4. m' es cardinal

   por el supuesto (1) y el postulado (2) de (3) y de $(n)Cn$. [Es prudente ver aquí la utilización del $(n)Cn$ lo cual, supone un universo infinito].
5. m' no es vacio — De (4) y T3 que expresa que un cardinal no puede ser vacío.
6. $(\exists c)(c \in m' \;\&\; c \in n')$ de (5) y supuesto (1)
7. $c \in m' \;\&\; c \in n'$ I.E de (6)
8. $(\exists B)(\exists y)(B \in m \;\&\; y \notin B \;\&\; C \sim B\cup\{y\})$ de (7) y (2.1)
9. $(\exists A)(\exists z)(A \in n \;\&\; z \notin A \;\&\; C \sim A\cup\{z\})$ de (7) y (2.2)
10. $(B \in m \;\&\; y \notin B \;\&\; C \sim B\cup\{y\})$ I.E de (8).
11. $(A \in n \;\&\; z \in A \;\&\; C \sim A\cup\{z\})$ I.E. de (9).
12. $(C \sim B\cup\{y\} \;\&\; B \in m \;\&\; y \notin B)$ Conmutación de la conjunción en (10)

13.	$(C \sim A \cup \{z\} \,\&\, A \in n \,\&\, z \in A)$	
14.	$C \sim B \cup \{y\}$	Conmutación de la conjunción en (11)
15.	$C \sim A \cup \{z\}$	Simplificación en (12)
17.	$A \cup \{z\} \sim C$	Simplificación en (13)
		Simetría de la equinumerosidad en 15. (T3).
18.	$(A \cup \{z\} \sim C) \,\&\, (C \sim B \cup \{y\})$	Conjunción (17) y (14).
19.	$A \cup \{z\} \sim B \cup \{y\}$	Por transitividad de la equinumerosidad en (18)
20.	$(y \notin B \,\&\, B \in m \,\&\, C \sim B \cup \{y\})$	Conmutación de la conjunción en (10)
21.	$(z \notin A \,\&\, A \in n \,\&\, C \sim A \cup \{z\})$	Conmutación de la conjunción en (11).
22.	$y \notin B$	Simplificación (20)
23.	$z \notin A$	Simplificación (21)
24.	$A \sim B$	Por Lema 1 (19), (23), (22): a) $(A \cup \{x\} \sim B \cup \{y\} \,\&\, x \notin A \,\&\, y \notin B \rightarrow A \sim B)$ b) $(A \cup \{z\} \sim B \cup \{y\} \,\&\, z \in A \,\&\, y \notin B \rightarrow A \sim B)$ Sustitución en el Lema de x/z.
25.	$B \sim A$	Reflexividad de la equinumerosidad en (24).
26.	$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$	Por T5.
27.	$B \in m$	Simplificación de (10).
28.	$A \in n$	Simplificación de (11).
29.	$B\,t\,m$	Por teoréma que nos dice: $B \in m \leftrightarrow B\,t\,m$. de (27)
30.	$A\,t\,n$	Por teorema que nos dice: $A \in n \leftrightarrow A\,t\,n$ (28)
31.	$\overline{\overline{B}} = m$	Por definición de 't' en (29)
32.	$\overline{\overline{A}} = n$	Por definición de 't' en (30)
33.	$m = n$	De (26), (31) y (32).

Con la demostración de este último postulado hemos logrado ver cómo *las tres nociones primitivas de Peano y sus cinco postulados son obtenibles a partir de teoría de conjuntos.*

II. LOS CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA LOGICISTA DE FREGE

Contenido:
- Función
- Distinción entre un símbolo y lo que simboliza.
- Introducción informal de la noción de *denotar*.
- Expresión funcional.
- Signos de argumento: variables y constantes.
- Argumentos.
- Nombre propio.
- Curso de valores
- Cómo expresar un curso de valores.
- Cómo expresar una igualdad entre cursos de valores.
- Valor de una función.
- Concepto
- Qué significa 'caer bajo un concepto'.
- Igualdad entre extensiones de conceptos.
- Relaciones.
- Introducción más precisa de las nociones de: signo, sentido y denotación.

La postulación de los entes situados a nivel ontológico fue hecha por Frege a través del estudio de sus expresiones lingüísticas correspondientes, de tal menera que cierto análisis a nivel lingüístico de una expresión proporcionaba datos sobre el referente de la misma, así como también una clasificación general de expresiones proporcionaba una clasificación general de entidades.

Claro que tanto el caso en el cual una expresión carece de referencia, como la situación opuesta: cuando algo situado en el universo ontológico no tiene una expresión en el lenguaje, fueron conocidos por Frege, de modo que él no pensaba que había una correspondencia biunívoca entre nombres y denotados.

Esta manera de proceder estuvo basada, entre otras cosas, en que el filósofo suponía como válido que de propiedades de expresiones podían derivarse propiedades análogas para sus denotados. Ejemplos de este tipo son: la completitud (saturación) o la incompletitud (no saturación). Pues, según si algo del universo lingüístico u ontológico poseía o la una o la otra propiedad era catalogado como: expresión funcional, nombre propio, función u objeto. Y con estas cuatro categorías, en opinión de Frege, se agotaban ambos universos.

Una vez mencionado el supuesto de que un análisis lingüístico nos puede informar sobre lo que se encuentra situado a nivel ontológico, supuesto que, por otra parte, acompaña patentemente a toda la filosofía de Frege, podemos pasar a un trato directo con su trabajo, en la inteligencia de que esta idea deberá mantenerse siempre presente.*

En las siguientes páginas me propongo elucidar algunos pensamientos fundamentales de Frege procurando ofrecer, hasta donde sea posible, una clara exposición.

La palabra 'función', al igual que muchos de los términos utilizados en ciencias formales, ha servido para expresar diferentes cosas. Una manera de llevar a cabo un análisis concienzudo acerca de la función consiste en: por una parte, no rebasar el ámbito de las funciones más simples, es decir, de las funciones de un sólo argumento y, por otra, en estudiar al menos una de las respuestas que se dieron a la pregunta: ¿qué es una función? (de un argumento). En lo sucesivo simbolizaré la anterior interrogante como ¿F1?; 'F' resumiendo el: 'qué es una función' y, '1' porque nos referimos estrictamente a funciones de un argumento.

Frege comienza analizando la siguiente respuesta a ¿F1?.

Al parecer la primera contestación que se dió a la pregunta, fue muy sencilla: una función de x será cualquier expresión matemática que incluya a la letra x.

* Una mayor y más precisa información acerca de esta cuestión se encuentra en el texto *Las categorías semánticas y ontológicas de Gottlob Frege*, de María de Lourdes Valdivia. Tesis de licenciatura. UNAM. Facultad de Filosofía y Letras.

La anterior definción podría parafrasearse de la siguiente forma: para toda E, si E cumple las condiciones de ser matemática y contener a x, entonces podemos decir que E es una función de x.

Pero, ¿qué es E?, pues una expresión, en este caso un conjunto de símbolos matemáticos entre los cuales figura la letra x.

Así, nuestra pregunta ¿F1? recibe para x la respuesta: conjunto de símbolos matemáticos entre los cuales aparece justamente la letra x.

Muchas personas aún hoy quedarían satisfechas con la respuesta mencionada, pero Gottlob Frege observó en ella algo muy peculiar, algo que, en su opinión, la hacia insatisfactoria, inaceptable.

> *"This answer cannot satisfy us, for here no distinction is made between form and content, sign and thing signified..."* 1/

Para Frege responder ¿F1? aludiendo simplemente a una expresión no podía constituir la esencia del asunto, sino, más bien, aquello que significaba la expresión.

Definir lo que significaban las palabras 'función de x' mediante las palabras 'conjunto de símbolos matemáticos entre los cuales figura x' era, si no quedarse en las mismas quedar peor, pues lo que sin duda subyacía a esta manera de definir era una confusión entre el significado de las palabras y las palabras mismas.

Si algún extranjero nos preguntara ¿qué entienden ustedes por la palabra 'perro'? y respondiéramos: por tal palabra entendermos la serie de los siguientes símbolos: 'mamífero','carnívoro','doméstico','del','cual','existen','infinidad','de','variedades'; la idea

1/Cfr. "Function and Concept" en Geach,P. & Black,M.(eds.),Traslations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege.v.pp 21 y 22.

con la que nuestro interlocutor se quedaría es: cuando alguien diga 'perro' debo comprender que quiere nombrar la serie de esas nueve palabras. Pero con esta especificación no habríamos transmitido al extranjero lo que entendemos cuando decimos 'perro', en consecuencia, si nuestro amigo escuchara exclamar ' ¡¡¡el perro me correteó, me mordió y me rasgó el vestido!!!' seguramente se preguntaría ¿pues qué clase de país es éste en el que las palabras corren, muerden y rasgan la ropa?.

Frege pensaba que una confusión parecida sufriríamos si aceptáramos la respuesta vista para ¿F1?, así que había que analizar cómo evitarla. Lo primero que él propuso fue distinguir nítidamente entre el símbolo y lo simbolizado por el símbolo, ya que entre ambos hay una gran diferencia. El símbolo, la palabra 'perro' por ejemplo, es algo muy diferente al animal que corre, muerde y rasga la ropa. La utilidad del símbolo 'perro' consiste en denotar a dicho animal. De la misma forma, la utilidad de la palabra 'función' consiste, según Frege, en denotar algo muy diferente a un conjunto finito de símbolos matemáticos.

La distinción símbolo/lo simbolizado por el símbolo, es una distinción que siempre estará vigente en el aparato conceptual fregeano.

Por ejemplo, el símbolo 'Derek Jackovish' tiene la propiedad de que uno de sus ejemplos está sobre esta hoja frente a nosotros, no obstante, sería un sin sentido decir que un ejemplo del hombre cuyo nombre es 'Derek Jackovish' está sobre esta hoja y también frente a nosotros.

Entre los símbolos que Frege estudió se encuentran los NOMBRES PROPIOS (un tipo de ellos son los numerales), los símbolos de argumento (variables y constantes), las EXPRESIONES FUNCIONALES, etc. Y correspondientemente entre los denotados tenemos a seres humanos, ciudades, ríos, países, números, argumentos, funciones, etc.

Pero para continuar ordenadamente con la secuencia que habíamos empezado, en seguida veremos cómo basándose en algunos de los datos que arriba hemos expuesto, Frege procuró evitar la confusión que implicaba la respuesta a ¿F1?.

Tomó expresiones matemáticas como:

$$(i)\ 2 \cdot 1^3 + 1$$

$$(ii)\ 2 \cdot 2^3 + 2$$

$$(iii)\ 2 \cdot 4^3 + 4$$

y, examinándolas detenidamente notó que en ellas había algo constante y había algo que cambiaba, ¿cómo saber qué es lo constante y qué lo variable?, para captarlo es suficiente observar.

En todos los ejemplos lo primero que aparece de izquierda a derecha es el numeral '2', a continuación el operador de la multiplicación '.', pero, aunque la potenciación al cubo también se presenta en las tres expresiones, los numerales afectados por ella varían; el signo de adición '+' también está en los tres ejemplos, pero el numeral que le sigue varía. Y, por último, poniendo mayor atención captamos que el numeral afectado por la potenciación al cubo y el numeral que sucede al signo de adición es en cada expresión, el mismo.

Tenemos entonces:

1)Como signos constantes en (i),(ii) e (iii) de izquierda a derecha: el numeral '2', el operador de multiplicación '.', el operador de potenciación '3' y el signo de adición '+'.

2) Como signos que cambian entre expresión y expresión de izquierda a derecha tenemos:

-en (i) el numeral '1' en su primera aparición y el numeral '1' en su segunda aparición.

-en (ii) el numeral '2' en su primera aparición y el numeral '2' en su segunda aparición.

-en (iii) el numeral '4' en su primera aparición y el numeral '4' en su segunda aparición.

3) Como puede deducirse de (2), el signo que se modifica de expresión a expresión siempre se repite en cada una de ellas al menos dos veces.

Habiendo visto esto, Frege pensó: como cuando los matemáticos ven estas tres expresiones, reconocen en ellas la misma función, seguramente lo que sucede es que, la parte constante de las expresiones denota la misma cosa en la ontología (es decir, denota la misma función) y ¿cuál es la parte constante de las expresiones?, con los datos anotados en (1) podemos obtenerla:

$$2 \cdot \quad ^{3} +$$

Ahora cualquiera se puede dar cuenta al ver la expresión que hemos armado que es una secuencia de símbolos que tiene huecos, lugares en blanco, lugares vacíos, como cuando miramos desde arriba un auditorio en el cual uno o más lugares no han sido ocupados.

Esta característica (la de tener huecos) va a ser, según Frege, la propiedad esencial de una expresión funcional. Dicho de otra forma: E es una expresión funcional si y sólo si contiene huecos 2/.

Hasta aquí hemos visto lo que para Frege constituye una expresión

2/ evidentemente la noción de hueco es una noción técnica.

funcional, pero aún no tenemos la respuesta del filósofo a ¿F1?, pues si aceptamos su distinción entre el símbolo y lo simbolizado por el símbolo, tenemos que aceptar que responder la cuestión ¿qué es una función? (lo simbolizado), no es lo mismo que responder la cuestión; ¿qué es una expresión funcional? (el símbolo).

Lo único que quizás podríamos contestar a ¿F1? es: una función es lo denotado por una expresión funcional, pero esto no fue lo único que Frege dijo respecto a ¿F1?, su estudio de las expresiones funcionales fue más profundo, lo cual le permitió dar una respuesta mucho más completa para ¿F1?. Continuemos pues con dicho estudio.

Teniendo la expresión funcional:

$$2\ .\ \ ^3 +$$

encontramos que matemáticamente lo concerniente a esta función se expresa de manera equivalente así:

$$2\ .\ x^3 + x$$

Aquí se ha introducido un signo muy especial con la letra 'x', esta letra se encuentra colocada en los lugares donde había huecos, su tarea es aludir indeterminadamente todos y ningún número en especial; las letras 'u','v','w','x','y' y 'z' son llamadas signos de argumento variables.

Los signos de argumento no pertenecen a la expresión funcional

$$2\ .\ \ ^3 +$$

no obstante en

$$2\ .\ x^3 + x$$

los huecos han sido señalados por el signo de argumento variable 'x'. Digamos que el signo de argumento variable expresado por la letra 'x' ayuda a la expresión funcional marcando el lugar o lugares donde ésta tiene huecos, pero a la expresión no le es indispensable.

Nosotros habíamos visto en (i),(ii) e (iii) que lo que variaba de expresión a expresión eran los numerales '1','2' y '4' y no 'x' o 'y' o 'z', lo que sucede es que hay dos tipos de signos de argumentos:

a) signos de argumento variables, como los ya mencionados : 'x','y','z', etc.

y

b) signos de argumento contantes, como por ejemplo cualquier numeral, en particular teníamos: '1', '2' y '4'.

Los signos del primer tipo son más generales en el sentido de que pueden ser sustituidos por una infinidad de signos del segundo tipo gracias a su naturaleza indeterminada.

El nuevo signo al que llamamos SIGNO DE ARGUMENTO VARIABLE, de aquí en adelante SAV, denota ambiguamente un argumento (un número en estos casos) y el signo que llamamos SIGNO DE ARGUMENTO CONSTANTE de aquí en delante SAC determina un objeto o número en estos casos.

De la misma manera en que un signo de argumento no pertenece a la expresión funcional; a nivel ontológico un argumento no pertenece a la función, pero con ella forma un todo completo al ocupar sus huecos.

Una función es lo denotado por una expresión funcional y al igual que esta última, la función en cierto sentido contiene huecos, es decir, es algo en la ontología que parece no estar completo.

> "*The peculiarity of function signs, which we here called 'unsaturatedness', naturally has something answering to it in the functions themselves. They too may be called*

> *'unsaturated', and in this way we mark them out as fundamentally diferent from numbers."3/*

Así como una expresión funcional combinada con un SAC, que no forma parte de ella, constituye un todo que es un nombre de objeto, de la misma manera, a la función se pueden encontrar adheridos argumentos que, si bien no forman parte de la función, la complementan constituyendo un objeto, pues ella por sí misma, es algo no saturado.

Esto nos permite comprender por qué los matemáticos reconocen la misma función en:

(i) $2 . 1^3 + 1$

(ii) $2 . 2^3 + 2$

(iii) $2 . 4^3 + 4$

Tenemos diferentes expresiones cuya forma nos revela esencialmente la estructura:

$$2 . x^3 + x$$

donde el signo de argumento variable es en (i) sustituído por el SAC '1', obteniendo una expresión que es el nombre propio del número 3.

En (ii) el SAV es sustituído por el SAC '2' permitiéndonos obtener una expresión que es el nombre propio del número '18', y en (iii) la sustitución del SAV es hecha por el SAC '4' lo cual nos da el nombre propio del número 132.

La expresión matemática ha sido separada en:

1) expresión funcional.

y

3/ Op.cit.Translations from the...., p 115.

2) signos de argumento:

2.1-variables

o

2.2-constantes.

La separación obedece a la diferente naturaleza entre una función y un argumento. La primera es algo no saturado mientras que la segunda es (en este caso) un número, algo saturado, completo, sin huecos.

> *"For instance, if I say 'the function 2 . x^3 + x ', x must not be considered as belonging to the function; this letter only serves to indicate the kind of supplementation that is needed; it enables one to recognize the places where the sign for the argument must go in"* 4/

Frege llama valor de la función para un argumento a lo que resulta de complementar la función con ese argumento. Por ejemplo, como ya veíamos el valor de la función:

$$2 \cdot x^3 + x$$

bajo el argumento 1 es igual a 3, bajo el argumento 2 es igual a 18 y bajo el argumento 4 es igual a 132.

Hay funciones cuyo valor siempre es el mismo, no importa que argumento se les una, por ejemplo:

$$2 + x - x$$

El curso de valores de una función está constituído por las relaciones existentes entre determinados argumentos y el valor de la función para esos argumento.

Hemos estudiado a grandes rasgos lo que se entendía por 'función' en un principio, la objeción que Frege encontraba en tal definición,

4/ Op.cit. Translations from the...., p. 25.

como disipó él con su distinción entre el símbolo y lo simbolizado por el símbolo, el problema, como define lo que es una expresión funcional, el papel que juegan en este tipo de expresiones tanto el signo de argumento variable como el signo de argumento constante, también hemos visto que es para Frege una función, su relación con el argumento, como la naturaleza de la función es esencialmente distinta a la naturaleza del argumento pero, no obstante, ambos pueden, al unirse, formar un todo completo ,sabemos qué es el valor de una función para un determinado argumento y en que consiste el curso de valores de una función.

Una vez introducida la noción de función es fácil pasar a otra noción ontológicamente fundamental en el aparato conceptual fregeano: la noción de objeto.

Para Frege objeto es todo lo que no es una función y, como la característica definicional de una función es su incompletitud, se sigue que los objetos además de agotar la ontología, son completos.

De acuerdo con el relativo paralelismo que postula Frege entre el lenguaje y la ontología, también se sigue que los objetos no pueden ser nombrados por expresiones funcionales, entonces ¿con qué clase de expresiones podríamos denotar a los objetos? pues con expresiones que carezcan de huecos, ya que los huecos caracterizan a las expresiones funcionales.

> "...*the question arises what it is that we are here calling an object. I regard a regular definition as impossible, since we have here something too simple to admit of logical analysis. It is only possible to indicate what is meant. Here I can only say briefly: An object is anything that is not a function, so that an expression for is does not contain any empty place.*" 5/

5/ Op.cit. Translations from the..., v.p. 32

plano lingüístico	plano ontológico
expresión funcional (con huecos).	función (incompleta, denotación de la expresión funcional)
nombre propio (sin huecos)	objeto (completo, denotación del nombre propio)

Para no caer en confusiones debemos aclarar que 'nombre propio' es un concepto más amplio que el de 'expresiones que denotan un objeto' pues, Frege reconoce que expresiones sin huecos como 'Ulises' aunque son nombres propios no denotan.

En la sección siguiente analizaremos sistemáticamente las relaciones lógicas que se dan entre las expresiones técnicas más importantes que hemos introducido.

Ya estudiamos que hay una diferencia esencial entre expresiones funcionales y nombres propios y que, sin embargo, pueden combinarse ya que es posible utilizar como signos de argumento nombres propios.

Por ejemplo, teniendo la expresión funcional:

$$x + 2$$

podemos hacer lo siguiente:

i) Expresión funcional tal cual: $x + 2$

ii) Sustitución del SAV por el SAC '4':

$$4 + 2$$

Aquí gracias a la introducción del nombre propio del número 4, es decir, del numeral '4', nuestra expresión funcional:

$$x + 2$$

fue convertida en un nombre propio.

En la misma forma, a nivel ontológico hay un abismo entre funciones y objetos pero, de alguna manera se pueden combinar las funciones con los argumentos y, el resultado son objetos.

Dice Frege:

> *"I am concerned to show that the argument does not belong with a function, but goes together with the function to make up a complete whole; for a function by itself must be called incomplete, in need of supplementation, or 'unsaturated'"* 6/

Se sigue de las explicaciones precedentes que se dan las siguientes relaciones entre los conceptos estudiados:

expresión funcional---------R1---------nombre propio

función--------------------R2----------objeto

expresión funcional---------R3----------función

nombre propio---------------R4----------objeto

función--------------------R5---------nombre propio

objeto---------------------R6----------expresión funcional

Estas relaciones se pueden expresar de la manera siguiente:

R1 = Una expresión funcional es una expresión no saturada mientras que un nombre propio es una expresión saturada (que no contiene huecos). Esta relación se da a nivel lingüístico.

R2 = Una función es una cosa incompleta mientras que un objeto es algo completo. Esta relación se da a nivel ontológico.

R3 = Una expresión funcional es un signo no saturado cuya denotación es algo llamado función. Esta relación se da del nivel lingüístico al nivel ontológico.

R4 = Un nombre propio es un signo completo o saturado cuya denotación es algo completo que llamamos objeto. Esta relación se da nuevamente del nivel lingüístico al nivel ontológico.

6/ Op.cit. Translations from the.... v.p 24

R5 = Una función nunca es la denotación de un nombre propio. Esta relación se da del nivel ontológico al nivel lingüístico 7/

R6 = Un objeto es aquello que nunca es la denotación de una expresión funcional. Esta relación se da nuevamente del nivel ontológico al nivel lingüístico 8/.

En base a la determinación de las relaciones manifiestas arriba, podemos comprender que Frege pensó las categorías más importantes de los dos niveles (el lingüístico y el ontológico) como mutuamente excluyentes.

Una expresión funcional nunca puede ser un nombre propio y viceversa.

Una función nunca puede ser un objeto y viceversa.

Se podrían dar las siguientes definiciones que ya estaban implícitas en las relaciones mencionadas.

Una función es aquello que en el nivel ontológico es incompleto.

Un objeto es aquello que en el nivel ontológico es completo.

Por tanto, siendo que en la ontología de Frege sólo hay o cosas completas o incompletas, una función es todo lo que no es un objeto y viceversa.

Una expresión funcional es un signo completo que en el nivel lingüístico es no saturado o contiene por lo menos un hueco, y se utiliza para denotar en el nivel ontológico a una función.

Un nombre propio es un signo que en el nivel lingüístico esta sa-

7/ Sin embargo no podemos decir que algo es una función si y sólo si no es denotación de ningún nombre propio porque hay objetos no denotados por ningún nombre propio que no son funciones.

8/ De manera análoga, tampoco se puede decir que algo es un objeto si y sólo si no es denotación de ninguna expresión funcional ya que, hay funciones no denotadas por ninguna expresión funcional y no por ello son objetos.

turado o lo que es lo mismo, no contiene un sólo hueco y se utiliza para denotar en el nivel ontológico lo que es un objeto.

Por lo tanto siendo que el nivel lingüístico de Frege esta compuesto únicamente por signos completos o saturados y signos incompletos o no saturados, una expresión funcional es todo signo que no es un nombre propio y viceversa.

Un argumento es algo en el plano ontológico que puede, uniendose a una función, convertirla en objeto.

Es conveniente advertir la diferencia entre lo que para los formalistas era una función y lo que era para Frege. Mientras para los primeros una función era una expresión que contenía una o varias variables para Frege es el denotado de una expresión que contiene huecos.

En opinión de Frege nosotros podemos colocar en uno o más huecos de una expresión funcional un signo de argumento variable el cual, no hace sino señalar, como hemos visto, justamente uno o unos huecos en la expresión funcional.

Los huecos de una expresión funcional pueden señalarse o marcarse con un signo de argumento variable (SAV), pero no sólo tenemos este tipo de signos de argumento, también contamos con nuestros signos de argumento constantes (SAC). Cuando colocamos en un hueco o en lugar de un signo de argumento variable un signo de argumento constante, podemos obtener un signo que denote el valor de la función para el argumento denotado por dicho SAC. Por ejemplo, en la expresión funcional:

____ + 5

tendríamos:

1) ____ + 5 expresión funcional con hueco.

2) x + 5 expresión funcional con un hueco marcado por el SAV 'x'.

3) 3 + 5 nombre propio que denota a un número, el nombre propio ha sido obtenido sustituyendo el SAV por el SAC '3'.

Según el resultado que se observa en la línea (3) nos está permitido decir que la expresión funcional:

$$x + 5$$

unida al signo reemplazado por 'x' : '3', denota al número 8. Esto es, una expresión funcional puede denotar diferentes números (si es matemática) según sea(n) sustituído(s) su(s) signo(s) de argumento variable(s) por diferentes signos de argumento constantes.

Hemos visto ya como una misma expresión funcional puede aludir a diferentes valores bajo diferentes signos de argumento, como esos valores son lo que ontológicamnete conocemos como valores de la función bajo los argumentos aludidos por los signos de argumento constantes y, como ya que el signo de argumento y la expresión funcional no son de la misma especie ni, paralelamente en la ontología, el argumento mismo y la función lo son entonces, al obtener bajo un determinado argumento un valor de la función, es erróneo identificar ese valor con la función misma.

En su artículo "Función y Concepto" Frege menciona cómo la geometría analítica ofrece un medio para hacer intuitivos los valores de una función para diferentes argumentos.

Tomemos la función

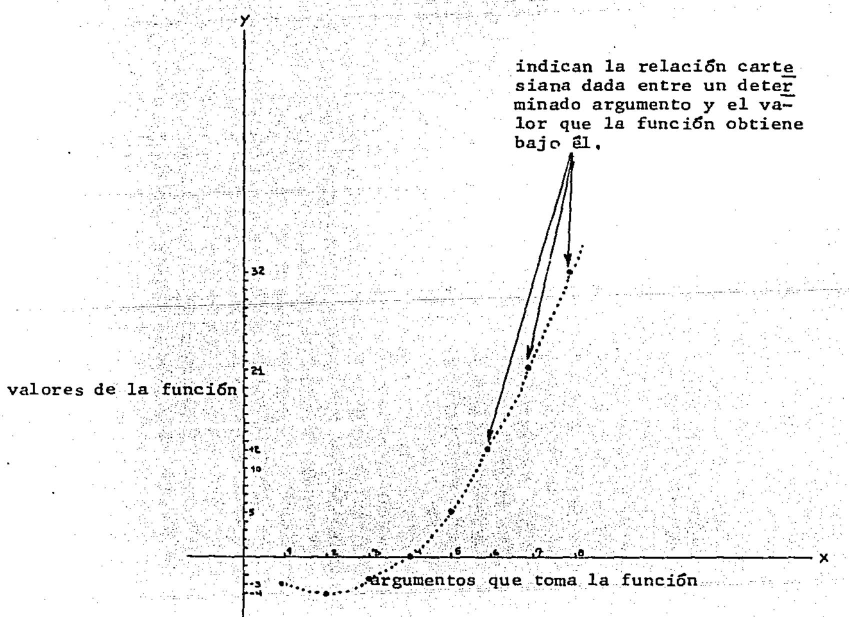
$$y = x^2 - 4x$$

donde 'y' indica el valor de la función en la línea de las ordenadas y 'x' indica el argumento en la línea de las absisas.

Veamos que obteneamos.

Función con el SAC '1' = $(1)^2 - 4(1) = -3$
Función con el SAC '2' = $(2)^2 - 4(2) = -4$
Función con el SAC '3' = $(3)^2 - 4(3) = -3$
Función con el SAC '4' = $(4)^2 - 4(4) = 0$
Función con el SAC '5' = $(5)^2 - 4(5) = 5$
Función con el SAC '6' = $(6)^2 - 4(6) = 12$
Función con el SAC '7' = $(7)^2 - 4(7) = 21$
Función con el SAC '8' = $(8)^2 - 4(8) = 32$

Una vez realizadas las operaciones plasmamos el resultado de cada una en el plano cartesiano de la siguiente manera:

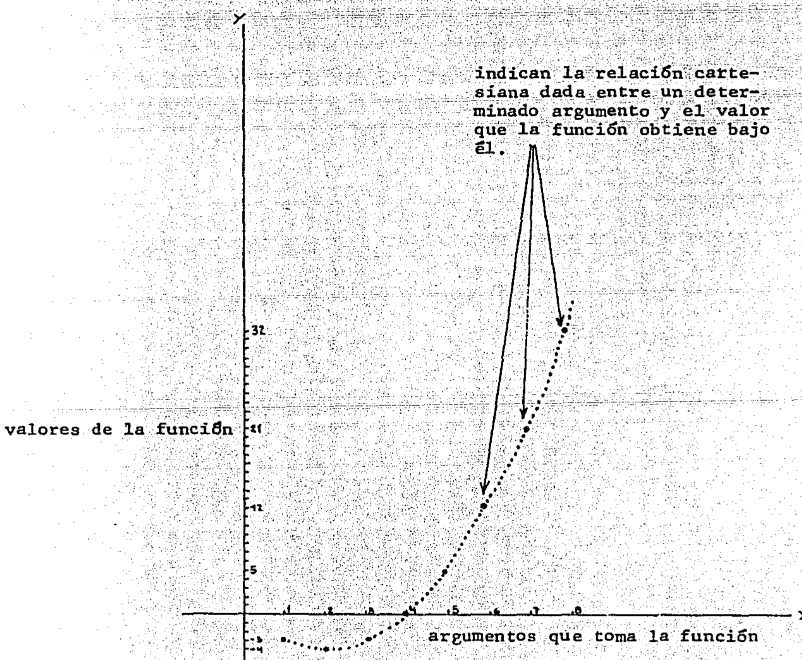


Averiguemos también que sucede en el plano cartesiano con la función:

$$x\ (\ x - 4\ )$$

Función con el SAC '1' = 1 (1 - 4) = -3
Función con el SAC '2' = 2 (2 - 4) = -4
Función con el SAC '3' = 3 (3 - 4) = -3
Función con el SAC '4' = 4 (4 - 4) = 0
Función con el SAC '5' = 5 (5 - 4) = 5
Función con el SAC '6' = 6 (6 - 4) = 12
Función con el SAC '7' = 7 (7 - 4) = 21
Función con el SAC '8' = 8 (8 - 4) = 32

El plano cartesiano nos queda en este caso de la manera siguiente:



Encontramos que la función:

$$x^2 - 4x$$

y la función:

$$x (x - 4)$$

tienen los mismos valores bajo los mismos argumentos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Así, la parábola dibujada en el primer plano cartesiano es la misma que la dibujada en el segundo, lo cual significa para Frege que ambas funciones tienen el mismo curso de valores, esto se escribiría primeramente así:

$$x^2 - 4x = x (x - 4)$$

y por ello debe entenderse que en ambas funciones subsiste la misma relación entre argumento y valor de la función bajo tal argumento, relación presentada gráficamente por la parábola.

Es importante notar que nuestra igualdad:

$$x^2 - 4x = x (x - 4)$$

no sólo expresa igualdad bajo los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 sino bajo cualquier valor, de manera que con ella expresamos una generalidad de igualdad cuyo significado es justamente que el curso de valores de la función que tenemos del lado izquierdo es el mismo que el curso de valores de la función que tenemos del lado derecho.

Frege introduce una notación breve para expresar el curso de valores de una función. Seguramente él insertó esta medida para que en la práctica no nos confundiéramos cuando aludimos a una función como:

$$x (x - 4)$$

y cuando aludimos al curso de valores de dicha función.

La medida consiste en:

(1) Adoptar e introducir una vocal griega en todos

aquellos lugares en los que aparece el signo de argumento variable.

(2) Encerrar el resultado de (1) entre paréntesis.

(3) Poner precediendo al resultado de (2) la misma letra griega que introducimos, con una pequeña comilla arriba a la derecha.

Tenemos hasta ahora tres métodos cada uno de los cuales nos permite obtener algo diferente de una misma expresión funcional. El primero de ellos (I) hace posible mediante ciertos cambios, que de una expresión incompleta obtengamos una completa.

(II) Nos permite que de una expresión funcional, también mediante ciertos cambios o sustituciones, obtengamos una expresión que se refiera no ya a una función sino al curso de valores de la misma.

(III) Nos permite establecer una expresión que manifieste la generalidad de una igualdad entre los cursos de valores de dos funciones.

Veamos los dos primeros métodos con los ejemplos particulares de las funciones:

$$x^2 - 4x \quad y \quad x(x - 4)$$

Aplicación del primer método en ambas expresiones funcionales:

Obtendremos de la expresión:

$$x^2 - 4x$$

una expresión completa.

(I.a) Sustitución del primer SAV por un SAC:

$$1^2 - 4x$$

sustitución del segundo SAV por un signo de argumento constante que tiene que ser el mismo que se introdujo arriba ya que, el signo de argumento variable era el mismo

$$1^2 - 4(1)$$

Tenemos ya una expresión completa, un nombre propio.

Obtendremos de la expresión:

$$x (x - 4)$$

una expresión completa.

(I.a) Sustitución del primer signo de argumento variable por un signo de argumento constante, insertaremos el mismo que para la expresión anterior:

$$1 (x - 4)$$

sustitución del segundo signo de argumento variable por un signo de argumento constante que tiene que ser el mismo como antes vimos:

$$1 (1 - 4)$$

Tenemos ya una expresión completa, un nombre propio.

Aplicación del segundo método a ambas expresiones funcionales:

(II.a) $x^2 - 4x$ se convierte en 'α' $(\alpha^2 - 4\alpha)$'

(II.a) $x (x - 4)$ se convierte en 'ε' $(\varepsilon (\varepsilon - 4))$'

Las nuevas expresiones obtenidas no se refieren ya a las funciones que estudiábamos sino a los cursos de valores de las mismas.

Cabe mencionar aquí, aunque seguramente por el desarrollo del punto II ya nos veníamos dando cuenta, que las comillas entre las cuales encerramos a la expresión, paso a paso se deben ir recorriendo para abarcar al todo de la expresión.

El tercer método supone una realización de los dos anteriores que, como ya veíamos con las gráficas, nos llevan por último a componer la expresión cuyo significado es que ambas funciones tienen un mismo curso de valores

$$\alpha' (\alpha^2 - 4\alpha) = \varepsilon' (\varepsilon (\varepsilon - 4))$$

Observese que se eligieron para manifestar el curso de valores de: $x(x-4)$ y x^2-4x

las letras griegas α y ε con ello quise hacer notar que, aunque el signo de argumento variable en la primera expresión funcional, esto es 'x' es el mismo que el que aparece en la segunda expresión, esto no obliga a adoptar también la misma letra griega.

A diferencia de la expresión:

$$x^2 - 4x = \quad (x - 4)$$

que teníamos primeramente para manifestar la igualdad entre el curso de valores de las dos funciones, nuestra nueva expresión:

$$\grave{\alpha}(\alpha^2 - 4\alpha) = \grave{\varepsilon}(\varepsilon(\varepsilon - 4))$$

manifiesta una igualdad cuyo lado derecho e izquierdo tienen un significado completo en sí mismos.

$$\grave{\alpha}(\alpha^2 - 4\alpha)$$

remite exactamente al curso de valores de la función:

$$x^2 - 4x, \text{ y}$$

$$\grave{\varepsilon}(\varepsilon(\varepsilon - 4))$$

remite exactamente al curso de valores de la función:

$$x(x - 4)$$

Mientras que, por otra parte,

$$x^2 - 4x = x(x - 4)$$

no puede fracturarse permitiéndonos tomar individualmente a uno u otro lado de la igualdad pues:

$$x^2 - 4x$$

no es una expresión que sola pueda referirse, sin ninguna confusión, al curso de valores de la función a la cual denota. Lo mismo ocurre con

$$x\,(\,x - 4\,)$$

he aquí, el porque Frege introduce y desarrolla los métodos II y III arriba expuestos.

En algunas de las próximas páginas estudiaremos un poco más como consideró Frege la expresión:

$$\grave{\alpha}(\alpha^2 - 4\alpha) = \grave{\varepsilon}(\varepsilon(\varepsilon - 4))$$

para lo cual introduciremos la información de su artículo "Sobre el Sentido y la Denotación", por ahora creo que con lo anterior basta para seguir adelante sin dificultad.

De la misma forma en que podemos expresar una generalidad de números por medio de una variable como 'x' también podemos indicar una generalidad de funciones por medio de los signos 'f' y 'F'; de tal forma que en:

$$f\,(\,x\,)$$

y

$$F\,(\,x\,)$$

la 'x' será reemplazada por el signo de argumento constante, pero, si en lugar de reemplazar la 'x' por un SAC la cambiamos por una vocal griega y luego anteponemos a esto la misma vocal griega con una comilla arriba a la derecha, lo que obtendremos es una expresión que indica el curso de valores de una función que se deja indeterminada: $\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$

Esto resulta paralelo a lo que hicimos con los métodos I, II y III.

Frege también admite como símbolos que pueden ayudar a construir una expresión funcional, símbolos como:

$$= \quad > \quad <$$

así que bien podemos citar como expresiones funcionales las siguientes:

$$x^2 = 1$$

$$x > 7$$

$$6 + 5 < x$$

donde la 'x' es sustituida de la manera antes vista por SAC como: 5, 6, 7, 8, etc.

Recordando nuestro método I tomemos la segunda expresión y veamos qué sucede al sustituir:

$$5 > 7$$

$$6 > 7$$

$$7 > 7$$

$$8 > 7$$

$$9 > 7$$

$$10 > 7$$

Notamos que las tres primeras expresiones son falsas en tanto que las demás son verdaderas. De esta manera, Frege pasa a considerar que el valor de las funciones aludidas con estas expresiones es un valor de verdad; o bien el valor de verdad de Lo Falso, como en el caso de las tres primeras, o bien el valor de verdad de lo verdadero, como en el caso de las tres últimas.

Según lo anterior algo como:

$$1^2 = 1$$

remite a lo verdadero, en tanto que algo como:

$$2^2 = 1$$

remite a lo falso.

La expresión:

$$6 + 5 < 12$$

nuevamente significa lo verdadero, mientras que:

$$6 + 5 < 10$$

significa lo falso. En este sentido, dice Frege,

$$8 > 7$$

$$1^2 = 1$$

$$6 + 5 < 12$$

significan lo mismo: Lo verdadero; y

$$6 > 7$$

$$2^2 = 1$$

$$6 + 5 < 10$$

también significan lo mismo: Lo falso. Por lo anterior, cuando ponemos algo como:

$$(8 > 7) = (1^2 = 1)$$

$$(1^2 = 1) = (6 + 5 < 12)$$

$$(6 > 7) = (2^2 = 1)$$

$$(2^2 = 1) = (6 + 5 < 10)$$

lo que tenemos son igualdades correctas.

Es prudente notar como para Frege una igualdad en el significado no implica una igualdad en el pensamiento expresado por el símbolo, es decir, la igualdad:

$$(8 > 7) = (1^2 = 1)$$

se limita a dar cuenta de que ambos miembros de la igualdad tienen un valor de verdad común, no nos dice nada sobre si cuando aprendemos la información de que el número 8 es mayor que el número 7, aprendemos que el número 1 al cuadrado es igual al número 1. Esta diferencia entre la denotación de una expresión y el pensamiento o sentido transmitido por ella constituye otra de las distinciones esenciales fregeanas que desarrollaremos detalladamente más adelante.

Hemos estudiado como el valor de una función siempre será o lo verdadero o lo falso cuando la expresión funcional que la denota contiene signos relacionales como: $=$, $>$ y $<$.

Ahora bien, cuando encontramos un argumento que hace que la función aluda al valor de verdad de lo verdadero, decimos que tal argumento tiene la propiedad implícita manifestada por la expresión funcional, por ejemplo:

$$x^2 = 1$$

pongamos el argumento 1 a la anterior función

$$1^2 = 1$$

como la igualdad anterior expresa una verdad, podemos decir que nuestro argumento tiene la propiedad de que su cuadrado es el número 1 o, más brevemente, que tal argumento cumple con ser una raíz cuadrada del número 1 o, que dicho argumento cae bajo el concepto: raíz cuadrada de 1.

En el caso particular de la función:

$$x^2 = 1$$

tendríamos que los argumentos:

$$1 \text{ y } -1$$

hacen que la función tenga el valor de verdad de Lo verdadero pues,

$$1^2 = 1$$
$$-1^2 = 1$$

son dos expresiones verdaderas, dos nombres propios que justamente remiten a Lo verdadero y, por ello decimos que 1 y -1 caen bajo el concepto: raíz cuadrada de 1.

Pero ¿qué sucedería en este caso con argumentos como 3, 8, 10, etc? pues siendo que:

$$3^2 = 1$$

$$8^2 = 1$$
$$10^2 = 1$$

son expresiones completas pero falsas, esto es, que significan Lo falso, diremos que 3, 8 y 10 no cae bajo el concepto: raíz cuadrada de 1.

Ahora podemos comprender porque Frege define como concepto aquello que es una función cuyo valor es siempre un valor de verdad.

Cuando tenemos una función:

$$f\ (x)$$

que contiene signos relacionales como los vistos tal que, al sustituir su signo o signos de argumento variable por un SAC nos resulta una expresión completa (nombre propio) que es verdadera, entonces decimos que ese signo de argumento constante cae bajo el concepto de lo que manifiesta el nombre propio o se relaciona de una manera satisfactoria de acuerdo con el signo relacional.

El grado de complejidad de las funciones puede ir aumentando, por ejemplo, podríamos tener en lugar de:

$$x^2 = 1,$$
$$(x + 1)^2 = 2\ (x + 1)$$

pero en tanto siempre tengan como valor un valor de verdad entonces, aparecerá la noción de concepto.

Podemos encontrar relaciones y expresiones nuevas con la ayuda de todo cuanto hemos aprendido.

Pongamos la expresión funcional compleja:

$$(x + 1)^2 = 2\ (x + 1)$$

apliquémosle nuestro método II.

$$\alpha'((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1))$$

Como el método I practicado reiterativamente nos dice que nuestra expresión:

$$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

tiene el mismo valor (o lo verdadero o lo falso) para el mismo argumento que la expresión:

$$x^2 = 1$$

veámoslo con el argumento 1:

$$\begin{aligned} (1 + 1)^2 &= 2(1 + 1) \\ 2^2 &= 2(2) \\ 4 &= 4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

tenemos que, introduciendo este argumento y realizando las operaciones nos quedó respectivamente:

$$4 = 4 \qquad \text{y} \qquad 1 = 1$$

y como ambas expresiones son verdaderas, es decir, como el valor de la función:

$$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

es el mismo que el valor de la función:

$$x^2 = 1$$

para el argumento 1 y -1, esto es: Lo verdadero y, para cualquier otro argumento sería: Lo falso, podemos decir que estas dos funciones conllevan a un mismo curso de valores y, para expresar esto no hay que hacer mas que recordar nuestro método III, que nos permitirá obtener de la expresión funcional:

$$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

la expresión:

$$\alpha' ((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1))$$

y de la expresión:

$$x^2 = 1$$

la expresión:

$$\varepsilon'(\varepsilon^2 = 1)$$

las cuales finalmente igualamos en:

$$[\alpha'((\alpha+1)^2 = 2(\alpha+1))] = [\varepsilon'(\varepsilon^2 = 1)]$$

quitando las comillas que acompañan a signo de igualdad.

En lógica esta última expresión se entiende como una igualdad e la extensión de dos conceptos puesto que,

$$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

sólo es verdadera cuando ponemos como signos de argumento '1' o '-1', esto es, 1 y -1 son los únicos argumentos que caen bajo el concepto de la función que denota esta expresión. Y:

$$x^2 = 1$$

también sólo es verdadera cuando ponemos como signo de argumento o bien '1' o bien '-1', esto es, 1 y -1 son los únicos argumentos que caen bajo el concepto de la función que denota la expresión funcional:

$$x^2 = 1$$

de manera que como los argumentos que caen bajo el concepto de una función son exactamente los mismos que los que caen bajo el concepto de la otra, podemos establecer una igualdad entre la extensión de los conceptos.

Obviamente de que el argumento(s) que caen bajo el concepto(s) manifiesto en dos expresiones funcionales son el (o los) mismo(s) no se sigue que las funciones sean iguales. Frege nunca creyó en la identidad entre funciones sino solamente en la identidad entre cursos de valores de funciones y entre la extensión de conceptos de funciones.

Una identidad entre cursos de valores se da cuando dos funciones tienen para los mismos argumentos como resultado, el mismo valor de verdad o sencilla mente el mismo valor, por ejemplo:

i) $x(x - 4)$

tendrá para los mismos argumentos que sustituyan a x, el mismo valor que

ii) $x^2 - 4x$

ya que, por ejemplo, tomando a 6 por argumento, nos queda en (i)

$6(6 - 4)$

que es 12, y en (ii):

$6^2 - 4(6)$

que también es igual a 12.

Una identidad o igualdad en la extensión de dos conceptos se da cuando al completar dos expresiones funcionales*, con diferentes signos de argumento sucesivamente, notamos que al resultarnos una de ellas verdadera bajo un signo de argumento, la otra también lo es o, cuando una de ellas resulta falsa bajo otro signo de argumento la otra igual, es decir, que la serie de signos de argumento bajo los cuales una de las expresiones funcionales se convierte en nombre propio de la verdad o de la falsedad, es idéntica a la serie de los signos de argumento constantes bajo los cuales la otra expresión funcional es o verdadera o falsa.

La identidad entre cursos de valores alude a valores numéricos, la identidad en la extensión de conceptos alude a valores de verdad.

Aquellos que conozcan el Cálculo Proposicional pueden encontrar cierta analogía entre cuando la extensión de dos conceptos es la misma y cuando dos fórmulas son equivalentes.

Dos fórmulas son equivalentes lógicamente en el Cálculo cuando tienen bajo las mismas combinaciones de valores de verdad el mismo valor de verdad final bajo la conectiva principal (si son moleculares). Además, llevando más adelante la analogía, de la misma manera en que en el Cálculo Proposi-

* que contienen signos relacionales.

cional,no confundimos una fórmula con su valor de verdad final, también en el sistema fregeano no debemos confundir un concepto con su extensión.

Según todo lo anterior, Frege introduce como definición de la extensión de un concepto al curso de valores de una función cuyo valor para cada argumento es un valor de verdad.

Aplicando esto al nivel lingüístico, tenemos hasta ahora dos tipos de expresiones funcionales: aquellas que cuando sustituímos sus SAV por SAC se convierten en nombre propio de algún número y, aquellas en las que cuando sustituímos sus SAV por SAC se convierten en una oración cuyo denotado es o el valor de verdad de Lo verdadero o, el valor de verdad de Lo falso, ejemplos de las primeras son:

$$x^2$$

$$2x + 1$$

$$\frac{6}{x} \cdot 2$$

y ejemplos de las segundas son:

$$2x = 6$$

$$7 > x$$

$$\frac{1}{2} < x$$

Las expresiones del primer tipo remiten a funciones que tienen cursos de valores cuyos compuestos son las relaciones entre un argumento constante y el valor de la función para ese argumento, mientras que las expresiones del segundo tipo, remiten a funciones que tienen cursos de valores cuyos compuestos son las relaciones entre un argumento constante y el valor de verdad al que apunta la función bajo ese argumento.

Podemos establecer identidades entre cursos de valores de funciones de la primera clase con expresiones como:

$$\text{(a)}\quad \varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \alpha'(\alpha(\alpha - 4))$$

y también podemos establecer identidades entre los cursos de valores de funciones de la segunda clase expresándolas con signos como:

$$\text{(b)}\quad \varepsilon'(\varepsilon^2 = 1) = \alpha'((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1))$$

Los denotados de expresiones como: (a) y (b) no son ya funciones sino cursos de valores, esto está claro, y no son cursos de valores del mismo tipo ya que se encuentran constituídos por elementos de diferente neturaleza; es esta diferente naturaleza lo que permitirá a Frege ampliar la noción de función más allá de ámbito lógico matemático, ello se encuentra ya anunciado en la introducción de la categoría de concepto pues, cuando Frege dice que concepto es un tipo de función cuyo valor es siempre un valor de verdad, lingüísticamente acepta que hay expresiones funcionales que contienen signos relacionales y que al completarse se transforman ya no en nombres propios sino en oraciones que, o bien son verdaderas o bien son falsas, esto según el pensamiento que expresen.

Así, el pensamiento o sentido de una oración, esto es, lo expresado por ella puede ser o verdadero o falso, mientras que la denotación de una oración simplemente o es o no es.

Pero ¿dónde está la ampliación de la categoría de función más allá del campo lógico matemático?. Pues está en que cuando aludimos a oraciones cuyos cursos de valores son grupos que se constituyen de argumentos y de valores de verdad, ya no sólo consideramos oraciones como:

$$2(1) = 6$$

o como:

$$7 < 1$$

o como:

$$\frac{1}{2} > 1$$

sino a oraciones de nuestro lenguaje cotidiano como:

Celia es madre de Silvia.

La Tierra es un planeta.

Juan es generoso.

Esto es, oraciones que podemos dividir en sujeto y predicado; donde el sujeto es un nombre propio y el predicado es una expresión no saturada.

Las expresiones predicativas que tan comúnmente atribuímos y manejamos en nuestro lenguaje cotidiano son para Frege un tipo de expresiones funcionales o nombres de función, por ejemplo:

____________ descubrió el continente americano.

____________ fue una de las grandes figuras de la ciencia mundial.

____________ es el perro de mi amiga.

Y las expresiones como:

Crístobal Colón.

Newton.

Fido.

son para Frege un tipo de signos de argumento.

Además, hay aquí un gran parecido en el comportamiento de las expresiones matemáticas con el de las expresiones del lenguaje cotidiano, por ejemplo, sean:

$x > 4$ y ______ fue una de las grandes figuras de la ciencia mundial.

dos expresiones funcionales fregeanas cualesquiera y, también sean:

2 Juan de los Palotes.

3 Pepe Pérez.

5	Newton,
6	Maria Curie.

8 signos de argumento constantes cualesquiera.

Introduzcamos sucesivamente los signos de argumento en las expresiones funcionales:

$2 > 4$	Juan de los Palotes fue una de las grandes figuras de la ciencia mundial.
$3 > 4$	Pepe Pérez fue una de las grandes figuras de la ciencia mundial.
$5 > 4$	Newton fue una de las grandes figuras de la ciencia mundial.
$6 > 4$	Maria Curie fue una de las grandes figuras de la ciencia mundial.

Notemos como de igual manera en que unos signos de argumento hacen que la expresión matemática exprese una verdad y otros hacen que exprese una falsedad, unos signos de argumento hacen que nuestra expresión ordinaria sea verdadera mientras que otros hacen que sea falsa.

Así, los predicados del lenguaje natural son un tipo de nombres de conceptos.

A estas alturas nos será de mucha ayuda observar de manera gráfica algo que ilustra aproximadamente lo que sucede en el sistema fregeano, ese es el fin del plano presentado en la tabla siguiente:

Nivel lingüístico → Nivel ontológico

1)Signos de argumento:

1.1)variables: 'u', 'v', 'w', 'x', 'y' y 'z'. → objetos (denotados ambiguamente)

1.2)constantes: '1', '2', '3', etc. → 1 2 5

'10 − 1' → 9

'4 + 5' → 9

'Bertha' →

'La Tierra' →

'Newton' →

'Ulises' → Nada

'Odiseo' → Nada

2)Expresiones funcionales:

2.1)matemáticas: 'x^2' → función*

'$y_2 + 2$' → función**

'$x^2 = 6$' → función***

'$4 > x$' → función***'

'$8 < y$' → función***''

2.2)Del lenguaje ordinario:

_____es el perro de Luis. → función****

_____es maestra de español. → función****'

3)Nombres propios:

3.1) signos de argumento constantes SAC.

3.2)oraciones del lenguaje natural

3.3)oraciones de lenguajes formales (interpretadas y con variables libres).

Ejemplos de 3.2:

Alejandro es hermano de Arturo. → La verdad(objeto)

La naturaleza es perfecta. → La verdad(objeto)

El Sol brilla de noche. → La falsedad(objeto)

Perla vive en Londres. → La falsedad(objeto)

Ejemplos de 3.3:

$-(p \vee -p)$ → La falsedad(objeto)

$p \,\&\, -p$ → La falsedad(objeto)

$((p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ → La verdad(objeto)

$((p \rightarrow q) \,\&\, p) \rightarrow q$ → La verdad(objeto)

[donde 'p' tiene la interpretación de 'la madrugada es bella', 'q' tiene la interpretación de 'el día será caluroso' y 'r' 'la Luna es un satélite'; y '→' es la implicación lógica].

Notamos como a partir de nombres de funciones que únicamente tienen como signos operadores como el de '+', '−', '.' o '÷' Frege introduce un nuevo tipo de nombres de función en los cuales figuran signos relacionales como son: '=', '>', '<', etc.

La diferencia entre expresiones funcionales como las primeras y expresiones funcionales como las segundas se conserva aún cuando ya han si do saturadas, pues los nombres propios obtenidos denotan objetos muy distintos.

La figuración de un signo relacional en un nombre propio contribuye para formar, como ya vimos, lo que comúnmente reconocemos como una oración, es decir, un trozo de lenguaje (ya sea de lenguaje ordinario o matemático) que se conforma esencialemente a partir de un sujeto y un predicado.

No es sencillo, a primera vista, saber cuál es el sujeto o el predicado de una oración escrita en lenguaje matemático incluso, es importante mencionar que para Frege no había un único sujeto o un único predicado detrás de una oración; ello se debe a que él creía que una misma oración era susceptible de ahuecarse de diversas formas, por ejemplo:

$$4 = 2^2$$

podría ahuecarse como:

1) $x = y$

2) $x = 2^2$

3) $4 = 2^x$

4) $4 = x^2$

Y en cada una de estas expresiones funcionales encontramos predicados y sujetos diferentes. En (1) el predicado sería:'ser un número idéntico a otro número (no necesariamente diferente al primero)'. En (2) el predicado sería:'ser un número idéntico al número 2 elevado al cuadrado'. En (3) el predicado sería:'ser un número potencia que al aplicarse a dos nos da como resultado cuatro'. Y en (4) el predicado sería:'ser un número que elevado al cuadrado es idéntico a cuatro'.

Vemos como una oración puede propiciar diferentes nombres de función; sin embargo, cuando tenemos un nombre de función, por ejemplo:

$$4 = x^2$$

con signos relacionales; el predicado aparece, por así decirlo, obscurecido por algún signo de argumento variable.

En:

$$4 = x^2$$

el sujeto es 4 y el predicado comienza a partir del signo relacional (incluyéndolo).

Una primera traducción al lenguaje natural nos daría como resultado lo siguiente:

4 es idéntico a algún número
elevado al cuadrado.

Donde 4 opera como sujeto y 'es idéntico a algún número elevado al cuadrado' como predicado.

Sin embargo esta primera traducción no expresa lo que Frege creía que había en:

$$4 = x^2$$

pues la aparición en el predicado de las palabras 'algún número' sugieren que subyace a la expresión funcional algo como esto:

$$(\exists x)(4 = x^2)$$

Es decir, que '$4 = x^2$' debe entenderse como un nombre de función cuyo signo de argumento variable se encuentra ligado por un cuantificador existencial. Entonces '$4 = x^2$' expresaría algo verdadero pues, es cierto que existe al menos un número que elevado al cuadrado es igual a 4; pero esto no es, de ninguna manera lo que Frege quería, él pensaba que de la saturación de '$4 = x^2$' se obtenía unas veces una oración verdadera y otras una falsa mas no que '$4 = x^2$' expresara de entrada algo o verdadero o falso.

Así, una paráfrasis más natural del predicado inmerso en la expresión:

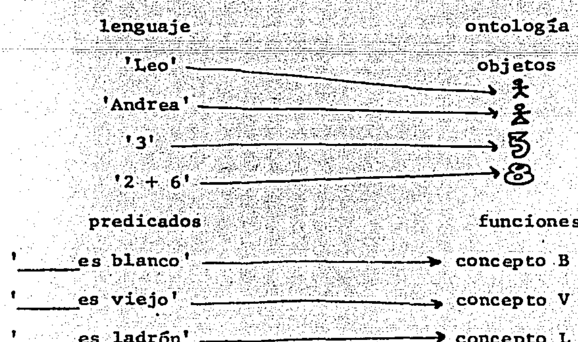
$$4 = x^2$$

es la de:

> ser un número que elevado al cuadrado es idéntico a (cuatro).

Aún cuando los nombres propios de entidades matemáticas como: '4', '1', '2 + 5', '6 − 3', '$\frac{5}{1}$' etc., generalmente no son considerados como nombres propios a la manera de 'Leo', 'Juan', 'Andrea' etc., y aún cuando las oraciones compuestas en lenguaje matemático como '3 = 2 + 1', '5 > 10', '3 < 4' etc., tampoco son generalmente consideradas como las oraciones del lenguaje natural 'El arbol es verde', 'La imprudencia cuesta cara' etc., Frege no postuló según hemos visto, ni entre nombres matemáticos y nombres ordinarios, ni entre oraciones matemáticas y oraciones ordinarias ninguna diferencia muy relevante.

Otro rasgo peculiar en el sistema fregeano es aquello de que los conceptos son un tipo especial de funciones. Para llegar un poco más lejos a este último respecto tratemos el siguiente esquema:



Cotidianamente formamos cientos de oraciones como por ejemplo:

El vecino es muy religioso,

en las cuales figuran sujetos y predicados. Cuando no tenemos intención de mentir, buscamos que el predicado se aplique con verdad al sujeto, esto es, si sabemos que el vecino es ateo, no decimos:

El vecino es muy religioso.

Frege buscó la manera de reflejar en su teoría, tanto lingüísticamente como a nivel ontológico, la relación sujeto-predicado o objeto-concepto y, lo hizo de la manera siguiente.

A nivel lingüístico, una relación sujeto-predicado da lugar a una oración verdadera sí, a nivel ontológico, hay una relación objeto* --R--concepto* tal que : el objeto* es el denotado del sujeto de la oración y el cóncepto* es el denotado del predicado de la misma y tal denotado del sujeto cae bajo el denotado del predicado.

En los párrafos anteriores hemos introducido un elemento delicado para toda la teoría: la verdad. Dijimos bajo qué condiciones Frege considera verdadera una oración, sin embargo, esto último no es lo mismo que decir qué es La Verdad para Frege. A fin de aclarar esta cuestión tendremos que decir que Frege consideraba a las oraciones un tipo específico de nombres propios, expresiones saturadas y, que además, a dichos nombres corresponde algo en la ontología, pero ¿qué?, no puede ser únicamente el denotado del sujeto y mucho menos el concepto denotado por el predicado pues, tanto el uno como el otro se excluyen mutuamente; recordemos que el denotado del sujeto es un objeto mientras que el denotado del predicado, el concepto, es un tipo de función, pero entonces ¿cuál, es el denotado de la oración?,

Frege dirá que si la oración es verdadera su denotado será La Verdad o Lo verdadero y, si la oración es falsa, esto es, si el denotado del sujeto no cae bajo el concepto denotado por el predicado entonces, la oración será un nombre propio de La Falsedad o Lo falso.

De esta manera finalmente podemos decir algo que ya desde páginas anteriores implícitamente manejábamos: los conceptos son un tipo de funciones que en caso de ser completados, o pasan a formar parte de ese objeto peculiar llamado Verdad, o pasan a formar parte de ese otro objeto llamado Falsedad.

A las relaciones que se dan entre funciones, argumentos y números o valores de la función bajo los argumentos Frege los llamó: 'cursos de valores' mientras que a las relaciones que se dan entre función, argumento y valores de verdad las llamó: 'extensiones de conceptos'.

Así como un concepto es un tipo de función, la extensión de un concepto es un tipo de curso de valores, y de la misma manera en que se puede expresar una igualdad entre cursos de valores de funciones simples como:

$$\varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \alpha'(\alpha(\alpha - 4))$$

también es posible formular igualdades entre cursos de valores de funciones más complejas como:

$$\varepsilon'(\varepsilon^2 = 1) = \alpha'((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1))$$

y este último tipo de expresión debe entenderse como una igualdad entre el curso de valores de la función:

$$x^2 = 1$$

y el de la función:

$$(x + 1) = 2 (x + 1),$$

y también como una igualdad en la extensión de conceptos.

En base a lo anterior tenemos ahora la siguiente tabla-esquema:

lenguaje	ontología
$\overset{K}{\varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)} = \overset{J}{\alpha'(\alpha(\alpha - 4))} \longrightarrow$	curso de valores de K $=$ curso de valores de J

$$\overset{L}{\acute{\varepsilon}(\varepsilon^2=1)} = \overset{M}{\acute{\alpha}((\alpha+1)^2=2(\alpha+1))} \longrightarrow \text{extensión del concepto } L = \text{extensión del concepto } M$$

Por otra parte, Frege cree conceptos a funciones denotadas por expresiones funcionales en las que aparece* un sólo signo de argumento variable; nótese que no digo una sóla ocurrencia de signo de argumento variable, es decir, que lo denotado por una expresión funcional como '$x + 3 > y$', no denota un concepto. Sin embargo las funciones denotadas por expresiones como la anterior fueron incluídas en el sistema de este filósofo con el nombre de <u>relaciones</u>.

1.Lenguaje y ontología en Frege. La noción de denotar.

Para finalizar el capítulo pasaremos al estudio de las consideraciones esenciales acerca de una de las relaciones que, según este autor, había entre el significado de los signos y la ontología; dicho enlace ha venido manejándose en todo lo anterior más implícita que explícitamente, ahora nos ocuparemos detenidamente de él.

La relación aludida se conoce en el marco del sistema fregeano como la relación de DENOTAR 1/,así pues, a continuación veremos qué entendió Frege por dicho término.

El desarrollo del parágrafo se iniciará en el plano lingüístico pues esto nos permitirá seguir de cerca la metodología fregeana que consistía en hacer inferencias ontológicas en base a observaciones lingüísticas.

Asumiremos que el método de Frege opera en dos escalas:

a) la comprensión a nivel lingüístico de una expresión proporciona datos sobre el denotado de la misma.

b) una clasificación general de expresiones nos da una clasificación general de entidades.

1/ Cabe mencionar que hay también otra relación: la que se establece entre un signo y su sentido, es decir, la de significación; sin embargo en el nivel primario en el que nos encontramos lo mejor será omitirla para,posteriormente, cuando manejemos más nociones teóricas ocuparnos de ella debidamente.

* Además de otras cosas.

No obstante, la fuerte tendencia a buscar conexiones entre los planos lingüístico y ontológico nunca culminó en una declaración de isomorfismo absoluto 2/, de manera que sólo podemos atribuir a Frege la creencia en una relativa analogía entre el universo de los signos y el universo de las entidades.

Para empezar a tratar las diferentes relaciones lingüístico-ontológicas, introduciremos a continuación de manera intuitiva la noción de *denotar*.

Consideremos, por ejemplo, la expresión 'Nixon', que se relaciona con algo en el universo ontológico, esto es, con un individuo que fue presidente de E.U.. Frege diría que, en este caso, el signo 'Nixon' denota a ese individuo, esto es, que el denotado de la palabra 'Nixon' es ese individuo que fue presidente. Pero ¿qué sucede con palabras como 'Pegaso'?, ¿correspondería o no a esta expresión alguna entidad?, pues, a menos que se admita una ontología especialmente dotada se dice que, en un sentido normal, a 'Pegaso' no corresponde ninguna entidad.

Frege asume que la palabra 'Pegaso' no denota, pues no hay en el universo ontológico un individuo que actúe como su denotado.

Ahora bien, así como se dan expresiones que no tienen denotado, de la misma forma podemos pensar que en la ontología hay entidades a las cuales no corresponde nada en el plano lingüístico, pedir un ejemplo singular de estas sería un absurdo. Por último, también es posible, dice Frege, Hallar que diferentes expresiones pueden relacionarse con una misma entidad; por ejemplo: 'El autor de Hamlet' , 'El autor de Romeo y Julieta' , 'William Shakespeare' etc.' son signos cuya diferencia lingüística no afecta el hecho de que todos se relacionan con una misma entidad 3/.

2/ Esto habría significado que a toda expresión lingüística debía corresponder una y sólo una entidad en la ontología e inversamente(que a dos expresiones distintas les corresponderían entidades distintas), así como también habría implicado que para toda relación entre elementos del plano lingüístico podríamos encontrar otra relación análoga dada entre elementos del plano ontológico. Lo anterior constituye una explicación informal del isomorfismo estructural, veremos enseguida que no se da nisiquiera la primera condición.

3/ Podría alguien preguntar en qué sentido 'El autor de Hamlet' tiene el mismo denotado que 'William Shakespeare' cuando sabemos que la entidad denotada ya no existe, y ¿qué diferencia hay entonces entre 'William Shakespeare' y 'Pegaso'? La cuestión es que el verbo 'denotar' se usa de modo intemporal.

Frege se percató de estas peculiaridades y por ello jamás declaró una identidad estructural absoluta (isomorfismo total) entre el nivel lingüístico y el ontológico.

Haciendo un resumen de las peculiaridades mencionadas tenemos:

caso i-caso en el que un signo (entidad lingüística) tiene éxito en denotar, es decir, tiene un denotado (entidad ontológica), ejemplos:

'Luis' ⟶

'H_2O' ⟶

caso ii- caso en el que un signo fracasa en denotar, es decir, carece de denotado, ejemplos:

'Odiseo' ⟶ NADA

'El Minotauro' ⟶ NADA

'La Cenicienta' ⟶ NADA

caso iii- caso en que una entidad carece de signo que la denote.

caso iv- caso en el que diferentes signos denotan una misma entidad, ejemplos:

'Lord Byron' ⟶

'George Gordon' ⟶

'El poeta inglés autor de Childe Harold' ⟶

'El poeta inglés autor de Don Juan' ⟶

Hemos aludido a la relación de denotar que se da entre el lenguaje y la ontología pero, no hemos profundizado sobre qué tipo de relación es ésta y en qué consiste exactamente. Para hacerlo volvamos al ejemplo de 'Nixon'. Dijimos que 'Nixon' se relaciona con algo en el universo ontológico, a saber, con un expresidente, esto significa que nuestra singular relación radica en: tomar una expresión, ver qué es de lo que hablamos cuando la usamos y, una vez que sabemos cuál es la entidad aludida (el denotado) decimos que la relación (de denotación) se da entre esta expresión y esa entidad.

La relación de denotar fregeana se puede dar partiendo del plano lingüístico al ontológico de dos maneras:

de un signo a una entidad

de más de un signo a una entidad

O puede simplemente no darse por dos razones:

porque un signo puede no denotar nada

porque una entidad puede no tener un signo que la denote

Gráficamente podríamos verlo de la siguiente forma:

Universo lingüístico		Universo ontológico
subconjunto W de signos que tienen éxito en denotar:		subconjunto Y de las entidades con signos que las denotan:
signo A	———	entidad a
signo B	———	entidad bcd
signo C	———	entidad bcd
signo D	———	entidad bcd
subconjunto X de los signos que fracasan en denotar		
signo E	———	NADA
		subconjunto Z de las entidades carentes de signo que las denote:
NADA	———	entidad n

Hasta aquí hemos tomado ejemplos que denotan entidades, por asi decirlo, simples, sin embargo no todos los signos denotan este tipo de entidades 4/.

Para explicar con mayor detalle lo anterior es necesario introducir brevemente algo acerca de la forma como Frege consideró las expresiones lingüísticas.

Cuando Frege analizó el lenguaje, lo segmentó en expresiones 5/ que siempre se comportan como términos singulares en un contexto dado, es decir, términos que cuan

4/El lector puede advertir que en todos los ejemplos dados hasta ahora, cuando una expresión tiene éxito en denotar algo, denota siempre una sola cosa,lo cual se debe a que Frege, usa precisamente así la noción de denotar; es decir, cuando una expresión denota algo en un cierto contexto,jamás denota más de una cosa.

5/de mayor o menor complejidad, por ejemplo: 'Dofy' es un signo simple o atómico y 'El auto de Tomás' es un signo complejo o molecular.

do denotan se ve claramente como denotan única y exclusivamente un individuo. Por ejemplo, la expresión 'Alejandro' denota en cada contexto a un individuo en la ontología y, la mayoría de las veces en que yo la utilizo me refiero a mi hermano.

Sin embargo, cabría preguntar qué sucede en otro tipo de casos más complejos, como, por ejemplo, cuando utilizamos el término 'Ser Humano' o 'Mamífero' o 'Planeta' etc., parece que en estos casos aquello que se denota no es una entidad como Alejandro, sino un sinnúmero de entidades: hombres, mujeres, niños, jóvenes (entre los cuales está justamente mi hermano).

Frege encontraba una diferencia entre expresiones como:

'Alejandro' y 'Ser humano'

esta diferencia no era la que ocurre entre un término singular y uno general.

Ambos denotan por su parte a una única entidad pero lo que, en opinión de Frege varía, es el tipo de entidad denotada en cada caso, veremos más acerca de este punto adelante, pero es importante aclara que en general esta consideración no fue aceptada por todos los autores posteriores a Frege, por ejemplo, Quine hace una distinción entre los términos a los que llama *términos categóricos o generales absolutos* como 'Ser Humano' y términos a los que da el nombre de *términos singulares* como 'Alejandro' 6/.

La diferencia estriba en que, mientras un término singular denota única y exclusivamente a un individuo, un término categórico denota indistintamente a diversos individuos.

Para puntualizar la diferencia entre un término singular y uno categórico, Quine dice que el primero denota (utiliza este término más o menos a la manera fregeana) a un único individuo y, en tanto, el segundo, por ejemplo en el caso de 'Ser Humano', se dice que es verdadero de los seres humanos.

6/ Aún cuando hay muchos otros filósofos que hacen la distinción entre términos singulares y términos generales, aquí aludo intencional y exclusivamente a Quine, a fin de que se noten ciertas diferencias entre las consideraciones de un logicista como Frege y las de otro como Quine.

Del término 'Ser Humano', diría Quine, hay que decir: *es verdadero de* más de una entidad, a saber, de todos los que somos seres humanos.

Es importante no interpretar la distinción quineana como que 'Ser Humano' es verdadero o de la cualidad de humanidad o de la clase de entidades que son seres humanos, sino como que es verdadero de cada entidad que es un ser humano tomada individualmente.

> "...*evidentemente 'perverso' es verdadero no de la cualidad perversidad, ni de la clase de personas perversas, sino de cada persona perversa tomada individualmente.*" 7/

Y es que para Quine el denotado de un término general no es el conjunto de entidades de las cuales es verdadero el término, ni de una propiedad común, sino que, el denotado de un término categórico es, por separado, cada entidad de la cual es verdadero el término; en este sentido podríamos decir que un término categórico no tiene un único denotado a diferencia de un término singular 8/.

Por otra parte es importante advertir que Quine no hace ninguna identificación entre términos singulares y términos concretos o entre términos categóricos y términos abstractos, pues un estudio más cuidadoso al respecto puede revelar que hay:

a-singulares abstractos, por ejemplo: 'La Piedad' (es una sola entidad abstracta)

b-singulares concretos, por ejemplo: 'Sócrates' (es una sola entidad concreta)

c-categóricos abstractos, por ejemplo: 'Virtud' (es una clase de entidades abstractas a las que denominamos virtudes).

d-categóricos concretos, por ejemplo: 'Ser Humano' (es una clase de entidades concretas).

Ahora bien, como Frege nunca hizo la distinción entre términos singulares y generales sino que, únicamente segmentó el lenguaje en expresiones que se comportan

7/ Cfr. Quine, W.V.O. Los métodos de la lógica. Col. Zetein; España. p. 111.

8/ Salvo casos excepcionales, por ejemplo: 'habitante de la isla llamada Juan Fernández en el s.XVIII'.

como los primeros, entonces para ser coherente con esta medida tuvo que admitir que ciertas entidades de su ontología, los denotados de expresiones como 'Ser Humano' , 'Planeta' , 'Isla' etc., eran un tipo de entidades abstractas complejas. Esto último lo llevó a tratar a sus términos singulares a veces como singulares abstractos, a veces como singulares concretos en el sentido quineano antes visto.

Universo Lingüístico — Universo Ontológico

relación de denotar

subconjunto W de signos que tienen éxito en denotar: — subconjunto Y de las entidades que tienen signos que las denotan:

signo A → entidad*
'Alejandro' →
signo B → entidad**
'Ser Humano' → indibujable.
signo C →
signo D → entidad cde
signo E →

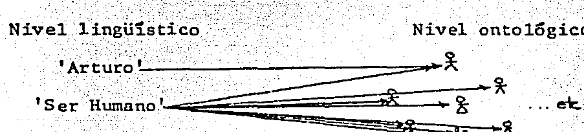
subconjunto X de los signos que no tienen éxito en denotar:

signo F → NADA

subconjunto Z de las entidades carentes de signo que las denote:

NADA → entidad n

Vemos que una diferencia entre Quine y Frege es que el primero no trató a los términos categóricos como expresiones que denotan una única entidad, sino como expresiones que pueden ser verdaderas de muchas entidades.



Pero volvamos nuevamente a lo que nos ocupaba. El estudio de la naturaleza de la relación de igualdad llevó a Frege a postular categorías interesantes entre las cuales figuran las nociones de signo, sentido y denotación que ya hemos citado.

La cuestión de ¿qué tipo de relación es la igualdad, relación entre objetos o entre nombres de objetos? y el porque de la respuesta que dió Frege a ella(relación entre nombres de objetos) valen la pena de ser analizadas detenidamente.

i) a = a y ii) a = b

son dos oraciones en las que se encuentra presente un signo de igualdad:'='. El valor cognoscitivo de ambas es diferente. (i) es una oración que vale a-priori y es analítica mientras, (ii) no puede siempre establecerse a-priori, oraciones como (ii) -dice Frege- contienen a menudo ampliaciones muy valiosas de nuestro conocimiento.

Si uno considera la relación de igualdad como algo que se da entre las denotaciones de los signos 'a' y 'b'

> *"...con un signo...está conectado,...lo designado por él, que puede llamarse la denotación del signo,...l"* 9/

entonces, parece que (i) no difiere de (ii) cuando esta última es también verdadera, sin embargo la información obtenida de la segunda es mucho más abundante ya que en tanto (i) nos habla de la relación de una cosa con ella misma, (ii) nos hace recapacitar sobre algo que sucede en el plano ontológico,a diferencia del linguístico, esto es, mientras que en el nivel del lenguaje tenemos en nuestra segunda oración dos signos diferentes, a saber 'a' y 'b', el que veamos entre ellos el signo '=' y el suponer que 'a=b' es verdadera,

9/Cfr. "Sobre el sentido y la denotación" en Semántica filosófica problemas y discusiones., Artículo de G.Frege; Comp.T.M.Simpson.v. p 5. s.XXI .

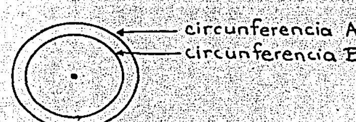
nos conduce a la suposición de que a nivel ontológico hay algo, una cosa que funciona como denotación de ambos signos. Así, mientras el plano ontológico ofrece una denotación para los signos, el plano linguístico ofrece dos signos dieferentes para tal denotación. Es interesante observar como la aparición del signo que denota la relación de igualdad entre dos signos diferentes nos provee de valiosa información respecto al plano ontológico.

La interrelación que implícitamente manejaba Frege entre el lenguaje y la ontología puede verse ya aquí pues, como arriba mencionábamos, una relación entre signos como la de igualdad se da únicamente cuando estos denotan algo, esto es, cuando en el plano ontológico hay algo que es su denotación.

> *"Pero esta relación se daría entre los nombres o signos sólo en la medida en que ellos nombraran o designaran algo."* 10/

También toma parte en la cuestión el interés que se tiene en manifestar por medio de oraciones del tipo (ii) un conocimiento genuíno ajeno a arbitrariedades personales, por ejemplo, no se va a dar el caso en que para mi el denotado de 'a' sea algo diferente a lo que habitualmente se toma por su denotado.

Podemos ahora notar como una diferencia entre signos como 'a' y 'b' no implica una diferencia en la denotación de ellos. No obstante una diferencia en el modo de presentación de lo que es designado. Por ejemplo si en base al siguiente esquema:



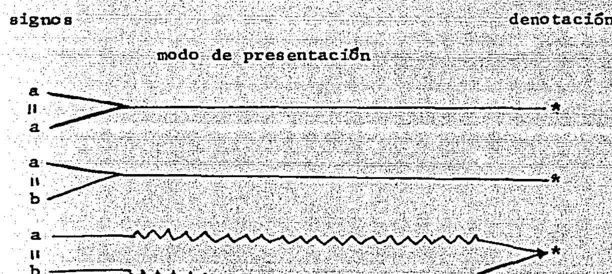
10/Ibidem.v. p 4.

hablamos de que el centro de la circunferencia A es el mismo que el centro de la circunferencia B, lo que tenemos son dos modos de presentación diferentes de un mismo punto, por lo cual, la siguiente oración:

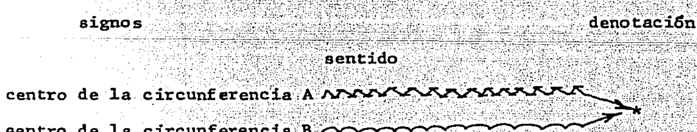
(ii)' centro de la circunferencia A=centro de la circunfrencia B

expresa un conocimiento genuino.

Hasta ahora mantenemos un esquema general donde se manifiestan las siguientes cosas:



El modo de presentar lo que es designado por el signo fue incluído por Frege en lo que llamó el *sentido del signo*, de manera que, siguiendo nuestro ejemplo y nuestro esquema general, tenemos:



Frege manifiesta la total posibilidad de que dos signos diferentes que tengan un modo de presentar a su denotado también diferente, y por tanto un sentido diferente, compartan, sin embargo la misma denotación.

Podemos , por fin, introducir las mismas palabras con las que Frege expresó su idea de lo que consideraba como signo, en relación a la denotación.

> *"...por 'signo' y 'nombre' entiendo cualquier designación que sea un nombre propio, cuya denotación es, por lo tanto, un determinado objeto (entendiendo esta palabra en su sentido más amplio)...La designación de un objeto particular puede, a su vez, estar formada por varias palabras u otros signos. En mérito a la brevedad, llamaremos nombres propios a tales designaciones."* 12/

En cuanto al sentido de un nombre propio

> *"...es aprehendido por todo aquel que tiene suficiente familiaridad con el lenguaje o con la totalidad de las designaciones de las que el nombre propio es parte; pero esto sólo echa luz sobre un aspecto particular de la denotación suponiendo que tal nombre tenga alguna."* 13/

La última parte de esta cita nos provee de información para pasar a considerar otra de las posibles combinaciones entre los conceptos de signo, sentido y denotación. Cuando Frege postula:

> *"...el sentido...echa luz sobre la denotación, suponiendo que tal nombre tenga alguna."* 14/

es decir, que bien puede haber sentido sin denotación, lo cual ciertamente observamos en casos como: 'el duende' , 'pegaso' , etc.; los cuales al ser escuchados son comprendidos no por una asociación inmediata con una denotación de la cual carecen sino, justamente porque poseen en cambio un sentido preciso dentro de nuestro lenguaje. Esta última posibilidad puede ser expresada en el esquema general así:

signo sentido denotación

'el duende' ⟶ NADA

11/Op.cit.Semántica filosófica.p 5
12/Ibid.
13/ "

"Puede admitirse, quizá, que toda expresión gramaticalmente bien formada que sea un nombre propio tenga siempre un sentido; pero esto no quiere decir que al sentido corresponda también una denotación." 15/

Pasaremos ahora a considerar otra de las posibles combinaciones entre signo y denotación.

También puede darse el caso en que diversos signos conduzcan a una denotación, por ejemplo:

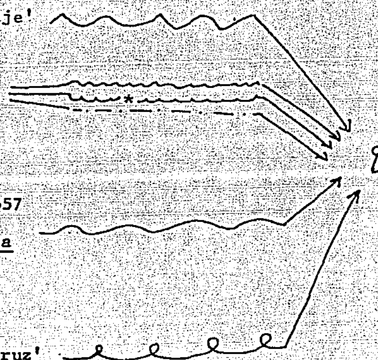
signo | sentido | denotación

'Juana Ramírez de Asbaje'

'La mujer llamada décima musa'

'La mujer que entre 1657 y 1658 escribió la <u>Loa Eucarística</u>'

'Sor Juana Inés de la Cruz'



* Por otra parte encontramos que un mismo signo puede cargar con diferentes sentidos rasgo que, para Frege, manifiesta la imperfección de nuestro lenguaje natural al mostrarse incapáz de mantener un sentido constante bajo cualquier contexto.

Cuando deseamos hablar de los sentidos de las palabras o de ellas mismas, no las estamos utilizando de la manera habitual. Al decir: el sentido de la palabra 'cínico' en la oración:

Pinochet es un cínico

no estamos hablando <u>con</u> la palabra cínico sino que, estamos hablando <u>de</u> la

14/ <u>Op.cit</u>. <u>Semántica Filosófica</u>.p 6. *De aquí que el aprehender un sentido no nos asegure aprender una denotación.*

palabra misma.

Frege diferenció entre el uso común de las palabras y este uso extraño en el cual utilizamos expresiones para hablar de expresiones aceptando así, que los signos pueden tanto figurar en el plano ontológico como denotaciones, es decir, como aquello de lo que se habla, como figurar en el plano linguístico como signos, es decir, como aquello con lo que se habla.

A fin de evitar confusiones entre el uso normal y el extraño, para este último se ideó el recurso de poner las palabras entre comillas.

Cuando quiero referirme a la palabra Oso diciendo de ella que tiene tres letras, entonces debo ponerla entrecomillada: 'Oso'; de manera que la denotación de mis palabras no es el animal sino, justo la expresión misma: 'Oso'.

Cuando quiera hablar de la denotación habitual, hago un uso común de la palabra (sin comillas) y así me refiero al animal.

El discurso que contiene palabras entrecomilladas se llama discurso directo y áquel en donde se cita sin comillas se llama discurso indirecto.

El discurso indirecto permitió hablar del sentido de las palabras sin dar paso a equívocos que entorpecían los estudios a este nivel.

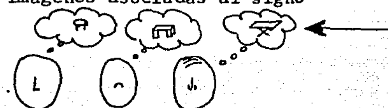
Frege se esmeró mucho en evitar que se confundieran la denotación y sentido de un signo, con la imagen asociada a él. La imagen difiere de la denotación en que si bien ésta última es perceptible y compartible objetivamente con otros seres humanos, la imagen es subjetiva.

En cuanto al sentido, un mismo sentido puede estar asociado a diferentes imágenes aún en la misma persona.

> "...la denotación de un signo es un objeto perceptible por medio de los sentidos, mi imagen de él es algo interno que surge de recuerdos de impresiones sensoriales que he tenido...la imagen se distingue esencialmente del sentido del signo, que puede ser propiedad común de muchos y que, en consecuencia, no es parte o modo de la mente individual...De acuerdo con esto no debemos tener escrúpulos en hablar sencillamente de el sentido, mientras que en el caso de una imagen, uno deba agregar, ...,a quien pertenece y en que momento." 16/

signo — imágenes asociadas al signo — subjetividad individual

'mesa'



Aún cuando se dijera que dos personas tiene la misma imagen

ello, de cualquier forma, no conduce a pensar que comparten una misma imagen de la manera en que pueden compartirse el sentido o la denotación pues, cuda uno de los individuos tiene su propia imágen mental, es decir

> "no podemos tener ambas imágenes juntas en la misma conciencia." 17/

La diferencia entre la denotación y la imágen asociada a un signo parece ser más evidente que la diferencia entre el sentido y la imagen, ello se debe a que el sentido aparentemente se encuentra entre lo que suele ser más claramente accesible y lo que simplemente no lo es.

15/ Op.cit. Semántica Filosófica.p 8.
16/ Loc.cit.

> *"La denotación de un nombre propio es el objeto mismo que designamos por medio de él; la imagen que tenemos en tal caso es totalmente subjetiva; entre ellos está el sentido, que no es subjetivo como la imagen pero que, sin embargo, no es el objeto mismo."* 18/

Para volver nuevamente al signo, sentido y denotación, analicemos la siguiente cita que, por lo comentado hasta aquí, nos es ahora comprensible:

> *"...Un nombre propio (una palabra, un signo, una combinación de signos, una expresión) expresa un sentido y denota o designa su denotación. Por medio de un signo expresamos su sentido y designamos su denotación."* 19/

El pasage anterior se refiere en su primera línea a expresiones, palabras o signos llamados nombres propios; pero Frege también analizó al sentido y a la denotación de oraciones aseverativas, esto es, de trozos del lenguaje que contienen pensamientos completos. Una de las preguntas que Frege trató de responder en torno a este punto fue la de si deben considerarse estos pensamientos como el sentido o como la denotación de las oraciones. Pongamos la siguiente oración:

a) La estrella matutina es un cuerpo iluminado por el Sol

Supongamos que dicha oración aseverativa tiene una denotación o un sentido.

Al reemplazar una expresión de la oración por alguna otra que tenga la misma denotación, notemos que, finalmente la oración conserva su denotación aunque no así su sentido. Por ejemplo, cambiando 'la estrella matutina' por la expresión 'la estrella vespertina' nos resulta:

17/ Op.cit. Semántica Filosófica p 9.
18/ Loc.cit.

b) La estrella vespertina es un cuerpo iluminado
por el Sol

y, obviamente el sentido de la oración (b) es muy diferente al sentido (a). De lo anterior se deduce que el pensamiento contenido en una oración debe identificarse no con la denotación de la misma sino con su sentido (porque también el pensamiento ha cambiado).

En cuanto a la denotación de la oración puede decirse lo que ya antes hemos visto: es posible que una oración tenga o no denotación. El primer caso se da cuando el nombre propio que actúa como sujeto tiene denotado, en tanto que el segundo se da cuando el nombre carece de denotado.

Oración aseverativa que ejemplifica el primer caso:

Reagan atacó Libia

Oración aseverativa que ejemplifica el segundo caso:

Pegaso voló majestuosamente

Ambas oraciones tienen sentido aún cuando la segunda no tiene denotación pues el nombre propio que actúa como sujeto carece de denotado.

Oraciones como

Pegaso voló majestuosamente

no son, a juicio de Frege, ni verdaderas ni falsas; cualquiera que atribuyera un valor de verdad, implícitamente estaría aceptando que 'Pegaso' posee denotación y que el predicado de 'volar mejestuosamente' se aplica o no con verdad a tal denotación.

El pensamiento o sentido manifiesto en

Pegaso voló majestuosamente

es algo que perdura tengan o no denotación las palabras componentes de la oración, pero, preguntamos por la denotación de una oración en la me dida en que nos comienza a interesar el valor de verdad de la oración.

> " *Es la busqueda de la verdad lo que nos conduce del sentido a la denotación.*" 20/

El que la denotación de una oración se busque aludiendo a la denotación de sus partes, caso en el cual nos preguntamos sobre el valor veritativo, lleva a Frege a aceptar dicho valor como la denotación misma de la oración, entendiendo por valor veritativo:

> "*...la circunstancia de que sea verdadera o falsa.*" 21/

> "*Toda oración aseverativa, en la que nos interesan las denotaciones de sus palabras, debe ser considerada, en consecuencia, como un nombre, y su denotación (si es que tiene alguna), es o bien lo Verdadero o bien lo Falso.*" 22/

Así, los valores veritativos pasan a formar parte de la ontología fregeana como objetos que operan como denotación de cierto tipo de oraciones aseverativas..

> "*Un valor veritativo no puede ser parte de un pensamiento,...,porque no es un sentido sino un objeto...todas las oraciones verdaderas tienen la misma denotación y lo mismo ocurre con todas las oraciones falsas.*" 23/

19/ Op.cit. Semántica Filosófica. p 11
20/ Loc.cit.
21/ Ibidem. p 12
22/ " pp 12 & 13.

III. EL CONCEPTO DE NUMERO EN FREGE

Frege consideró incompletas las explicaciones dadas por autores anteriores a él acerca de los números individuales, por ello dedicó una parte de sus *Fundamentos de la Aritmética* 1/ a un análisis estricto que da principio justamente en la distinción entre el concepto general de número y los números individuales.

Las explicaciones mencionadas, si bien proveían de una derivación más cabal de los números en base al *uno* y al *incremento consecutivo en uno*, no dilucidaban este punto de partida lo cual llevó a Frege a concluir que dichas explicaciones eran aún insuficientes.

Además de observar que era necesaria la utilización de proposiciones generales, de leyes para la derivación de las definiciones de los números individuales y que tales leyes, precisamente por su generalidad, no podían seguirse de las consideraciones acerca de los números individuales, Frege también puntualizó la presencia y necesidad de un estudio acerca del *concepto general de número*.

Resumiendo, las postulaciones acerca de números encontraban fundamento en base tanto a la noción de uno e incremento consecutivo en uno, como en la utilización de leyes que por su generalidad parecían seguirse más del concepto total de número que de las postulaciones acerca de números individuales.

Lo anterior condujo a Frege a estudiar críticamente la noción de uno, e incremento en uno partiendo de la diferenciación entre número(s) individual(es) y concepto general de número.

1/Cfr. Frege,Gottlob.Los fundamentos de la Aritmética.Trad.Hugo Padilla. Universidad Nacional Autónoma de México,Intituto de Investigaciones Filosóficas, 1972.(v. Bibliografía General).

Newton, por ejemplo, concibió al número geométricamente como una relación abstracta de una cierta magnitud respecto de otra del mismo tipo tomada como unidad.

Pero esta forma de ver al concepto de número, si bien ofrece una descripción adecuada y amplia pues, incluye tanto a números fraccionarios como irracionales, presupone las nociones de magnitud y relación entre magnitudes que, por otra parte, parecen ser importantes ya que incluso Euclides requirió en su descripción de la identidad de dos radios entre longitudes el concepto de equimultiplicidad que conduce justamente a la identidad numérica.

No obstante cabría preguntarse -dice Frege- que relación habría entre el concepto de número definido de la manera enterior y el concepto de número que utilizamos en la vida cotidiana, parece que este último carecería de todo vínculo con la ciencia.

Frege consideraba muy importante el que la definición científica de número ofreciera puntos nodulares para cada aplicación de los números pues, en su opinión:

> *"Incluso, los cálculos cotidianos deben encontrar el fundamento de sus procedimientos en la ciencia."* 2/

Ante la insuficiencia de la investigación newtoneana en torno al concepto de número, Frege propone una pregunta radical:

¿Será el número definible?

Autores como Hankel proponían que por la simplicidad extrema de lo que significa 'poner un objeto una vez, dos veces, tres veces...' no es posible definirlo.

Pero Frege discrepa en este punto pues para él la cuestión no es tanto

2/ Op.cit. Los fundamentos... p 134.

el concepto de 'poner' sino el significado de 'una vez, dos veces, tres veces...' que en realidad no esta siendo aclarado.

Por su parte Leibniz, vió al número como una idea adecuada tan clara, que cuanto en ella sucede es claro a la vez.

Pero este tipo de respuestas o intentos por iluminar el concepto general de número no lograron convencer a Frege quien, por último, pronunció que la inclinación a sostener la indefinibilidad del número era producto más de intentos fallidos que de impedimentos intrínsecos.

Cantor y E.Schröder mantienen al respecto del concepto general de número una opinión parecida.

Cantor consideró que el concepto de número podía ser colocado junto al de color ya que, la mayor parte de las veces, los números aparecen en forma adjetiva y atributiva al igual que palabras como 'duro', 'rojo','ligero' que, denotan propiedades de cosas externas; así, el concepto de número parecería ser una propiedad, pero cabría preguntar entonces: ¿cómo debemos entender a los números individuales?.

Por su parte Schröder también veía el concepto de número como una abstracción que bien podía ser colocada dentro del parámetro de nociones como las de color, forma etc., a las cuales admitía como propiedades de las cosas.

Esta concepción tampoco convenció a Frege pues, como señalábamos arriba, no provee de una información suficiente acerca de como comprender a los números individuales, ¿acaso cada número es una propiedad?, ¿hay entonces, infinitas propiedades?, ¿qué cosas poseerán la propiedad de un número particular?, ¿todas las cosas tienen la propiedad del número uno?.

Baumann expuso diversas razones por las cuales no era muy prudente admi tir al número como una propiedad. Estas razones fueron también consideradas por Frege en *Los fundamentos de la Aritmética*.

Las cosas externas no parecen proponer unidades rigurosas, ello es una libertad propia del ser humano que bien puede atender, por ejemplo, una manada de vacas como unidad (en su conjunto) o como algo plural, prestando atención a cada elemento. Así, podemos cambiar nuestros pensamientos a voluntad lo cual, no es posible en cuanto al color, dureza, altura de algún objeto.

Un ejemplo ilustrativo puede ser el siguiente: si tenemos un paquete de cien hojas blancas, sin ningún problema podemos atribuir a cualquiera de ellas la propiedad de ser blanca pero, ¿sería natural atribuirle la propiedad de ser cien?.

Parece que si admitieramos al número como propiedad, requeriríamos la simultánea especificación del modo tan peculiar de operar de dicha propiedad en casos particulares, un modo que, por supuesto, no traicionara el uso natural del predicado.

Esto último fue lo que, aproximadamente, intentó postular Mill para quien el nombre de un número señalaba una propiedad atribuible a un agregado de cosas que llevaría entonces ese nombre y,esa propiedad sería la forma característica en la que el agregado se compondría o podría ser aislado en sus partes.

Mill concibe al número como algo físico, algo presente en una unidad o agregado de cosas. Y pone como ejemplo lo siguiente: dos manzanas son diferentes de tres manzanas, por ello constituyen un fenómeno visible y tangiblemente diferente.

Frege tampoco encuentra satisfactorio este acercamiento ya que, no hay, en principio,una forma característica en la que se componga un agregado sino muchas, además de que él no creyó que de la aceptación de un fenómeno visible y tangiblemente diferente, pudiera inferirse que la dosidad y la tresidad fueran algo físico.

Otro motivo que observó Frege por el cual no debía considerar al número como propiedad a la manera de Mill,fue que éste(el número) posee, en realidad,una aplicabilidad mucho más amplia.

Locke observó que el número puede aplicarse tanto a seres humanos, como a ángeles, actos, pensamientos y, en general a todo lo existente o imaginario.

Paralelamente Leibniz sostuvo que el número era aplicable a cosas incorpóreas e,incluso,pensaba al número como una figura incorpórea surgida de la unión de cualesquiera cosas, como algo tan general que debía pertenecer a la metafísica.

> *"No puede pesarse lo que no tiene fuerza y potencia; lo que no tiene partes, por tanto no tiene medida; pero nada hay que no admita al número. Así, en cierto modo, el número es una figura metafísica."* 3/

Vemos como, a diferencia de Mill. Locke y Leibniz aceptan al número como existente en idea.

Al respecto encontramos una interesante observación fregeana:

> *"...sería asombroso que una propiedad abstraída de las cosas externas se pudiera trasladar, sin cambiar el sentido, a sucesos, a ideas y a conceptos. Sería como si se quisiera hablar de sucesos licuables, de ideas azules, de conceptos salados o de juicios viscosos.*
> *Sería absurdo que lo que es sensible según su propia naturaleza ocurriera en lo no-sensible."* 4/

Una opinión similar a la suya encuentra Frege en el siguiente pasaje de Berkeley:

> *"...se debe considerar que el número...no es nada fijo y establecido que exista en las cosas mismas.*

3/Op.cit.Los fundamentos....p 138.
4/Loc.cit.

> *Es por completo una creatura de la mente que considera una idea en sí misma o una combinación de ideas a las que da un nombre y, así, las hace pasar por unidad. De acuerdo a como la mente combine variadamente sus ideas, la unidad varía; y como varíe la unidad, lo hará también el número, que no es otra cosa que una colección de unidades..."*5/

En esta línea de pensamiento -dice Frege-, fácilmente se llega a considerar al número como algo subjetivo relacionado directamente con el tema de la manera en que se origina el número en nosotros que es, más una cuestión psicológica; pero Frege reacciona inmediatamente contra la idea de conducir nuestro estudio por este camino ya que, no cree que nos provea de ideas certeras acerca de la construcción de números.

> *"Tal descripción del proceso interno que precede a la realización de un juicio numérico, aún cuando pudiera ser justa, jamás podría sustituir una genuina determinación del concepto. Jamás podría ser aducida como prueba de una proposición aritmética; por medio de ella no adquirimos conocimiento de ninguna propiedad de números. De esta suerte, el número es tan escasamente un objeto de la psicología o un producto de los procesos psíquicos, como podría serlo, por caso, el Mar del Norte...De la misma manera, el número es también algo objetivo."*6/

El drástico rechazo de Frege por la opción de explicar y definir al concepto de número a partir de estados o procesos internos está basado pues, en su aceptación de *el número como algo absolutamente objetivo*, independiente de nuestras ideas; en este sentido él admite una cierta semejanza entre el número y el color que no consiste, como diría Mill, en que ambos sean sensiblemente perceptibles en las cosas externas, sino en que ambos son objetivos.

La pregunta que se nos presenta oportunamente es: ¿qué entiende Frege por 'objetivo'?. Seguramente no es para él: tangible, observable como cual

5/ Op.cit.cita que recoge Frege en Los Fundamentos... p 139.
6/ Ibidem.p 140.

quier objeto espacial o real, si así fuera carecería de sentido su distinción signo - denotado o, más específicamente, numeral - número, A un numeral se le puede tocar, observar, ocupa un lugar espacial e, incluso, podemos decir que nace y se destruye al paso del tiempo, un numeral puede estar hecho de tinta, madera, alambre etc. Sin embargo, Frege jamás admitiría decir todo lo anterior acerca del número que, si bien es objetivo, no es tangible, espacial, real, temporal,etc.

En este punto Frege parece dar criterios parecidos ,a los que A. Meinong sostenía en su vasta ontología.

Frege dice: las intuiciones psicológicas individuales no son susceptibles de compararse para propiciar la intersubjetividad, sin embargo, por ejemplo, todo el mundo reconoce los mismos axiomas geométricos.

> *"...,objetivo es lo que es regulable, lo que es conceptuable, lo que es enjuiciable, lo que se deja expresar en palabras. Lo puramente intuitivo no es comunicable."7/*

> *"...por objetividad entiendo una independencia de nuestro tener sensaciones, de nuestro intuir e imaginar, de construir imágenes internas a partir de los recuerdos de sensaciones anteriores; pero no una idependencia de la razón,..."8/*

Un autor con el cual también discrepa Frege es Schloemilch, quien llama al número representación del lugar de un objeto en una serie. Pero, Frege objeta estö con lo siguiente:

> *"...si el número fuera una representación, la aritmética sería psicología."9/*

Aceptar al número como representación equivale a admitir que la aritmética no se ocupa de los números mismos sino de las representaciones pertenecientes a quienes las concibieran, así, si veinte personas tivieran repre-

7/Op.cit. Los Fundamentos... p 141.
8/Ibid.p 142.
9/Loc.cit.

sentaciones del número seis, habría que admitir que dicho número estaría dividido y se podría hablar de mi seis, tu seis, un seis, todos los seises. Si se aceptaran representaciones latentes o inconscientes -dice Frege- se tendrían también seises inconscientes que con posterioridad volverían a ser conscientes.

Este camino tampoco atrajo en absoluto a Frege quien a estas alturas concluye respecto a todos los autores aludidos que:

> *"...el número ni es algo espacial y físico, como los montones de piedrecillas y de galletas de jenjibre de Mill, ni tampoco es algo subjetivo como las representaciones, sino que es algo no-sensible y objetivo.*
> *El fundamento de la objetividad no puede estar en las impresiones sensoriales que como afecciones anímicas son completamente subjetivas, sino que, por lo que alcanzo a ver, sólo puede estar en la razón. Sería asombroso que la ciencia más exacta tuviera que apoyerse en la todavía insegura y tentaleante psicología."* 10/

Por último Frege cita la explicación de número en términos de conjuntos, a la cual encuentra el inconveniente de carecer de una aproximación satisfactoria para los números 0 y 1 y también él de acercarse y depender cada vez más del significado de palabras como: 'montón', 'grupo', 'agregado' que es, si no igual, más indeterminado que el de la palabra 'número'. Además, aquí parece estar implícita la noción de un complejo espacial que Frege no pretendería aceptar.

Hasta este punto puede comprenderse que Frege acepta a los números como entidades abstractas pero objetivas, cosas que existen independientemente de nosotros y además verdaderamente.

Al comenzar el presente capítulo aludimos a la importancia que tenían para este filósofo tanto la noción de *uno* como el *concepto general de número*; a continuación pasaremos a considerar el estudio que hizo Frege de la

10/ Op.cit. Los Fundamentos... p 143.

primera noción en *Los Fundamentos de la Aritmética.*

La cuestión de la que partiremos es: *¿expresa la palabra 'uno' una propiedad de los objetos?*.

Ya desde la antiguedad -dice Frege- el mismo Euclides es sus *Elementos* parece haber topado con la dificultad de determinar con precisión el significado de la expresión 'μονάς' pues, con ella refería unas veces a un objeto numerable, otras a una propiedad del mismo y, finalmente al número uno.

Por lo común se termina traduciendo 'μονάς' por 'unidad' y no porque esta última palabra refleje el significado exacto del cual, como vemos, la misma expresión griega carece, sino porque 'unidad' de alguna manera oscila entre los múltiples significados de 'μονάς'.

El vaivén e indecisión entre las nociones de unidad y número se puede observar en estas palabras de Schroder:

"cada una de las cosas numerables será llamada unidad." 11/

Frege se pregunta por qué relacionar a las cosas con el concepto de unidad en lugar de con el concepto de número. Parece -dice- como si esta medida pudiera llevarnos a una determinación más exacta que consistiera correspondientemente en hablar de unidad respecto a algún objeto y de uno como la propiedad atribuible a ese objeto.

Pero, como hemos visto, hay diversas razones que se oponen a considerar a número como una propiedad de las cosas, a tales razones pueden añadirse las siguientes:

¿No es acaso extraño aceptar una propiedad que sea poseída por cada cosa? y, además de extraño nuevamente sería muy poco preciso el significado y la atributividad de tal propiedad.Frege añade que:

11/Op.cit. Los Fundamentos...p 144.

> *"El contenido de un concepto disminuye cuando aumenta su extensión; si ésta lo abarca todo, el contenido se debería perder por completo."* 12/

La forma en que operan los términos alusivos a propiedades en nuestro lenguaje ordinario es muy diferente a como operaría la palabra *uno*, por ejemplo, podemos decir:

'Aristóteles fue filósofo','Platón fue filósofo'

por tanto, 'Aristóteles y Platón fueron filósofos'

pero, ¿cómo admitir lo siguiente?, es más ¿cómo entenderlo?:

'Aristóteles fue uno' , 'Platón fue uno'

por tanto, 'Aristóteles y Platón fueron uno'

Seguramente, relacionada con las anteriores limitaciones se encuentra la imposibilidad de dar una definición satisfactoria de la propiedad *uno*, una definición cuyo contenido no conlleve, sobre todo, a consideraciones personales, esto es, que no dependa del punto de vista de cada quien; la subjetividad que implícitamente aceptamos al admitir una definición en estos términos es algo sencillamente detestable para Frege cuya preocupación hallamos reflejada en esta cita:

> *"Sobre un concepto tan impreciso ¿cómo puede descansar una ciencia que busca su prestigio en la mayor determinación y exactitud?."* 13/

Baumann, por ejemplo, opinó que el concepto de *uno* se apoyaba en la intuición interna y que, era lo indivisible y determinado pero, para Frege estas dos últimas caracterizaciones si bien podrían arrojar luz, no son lo esencial al concepto.

Vemos pues, como el tratar de aclarar la noción de *uno* como propiedad y de ver las cosas a las cuales es atribuible como *unidades*, no nos lleva a ningún lado.

12/Op.cit.Los Fundamentos... p.144.
13/Ibid.p145.

Frege propone plantear la cuestión de la manera siguiente: ¿por qué llamar unidades a las cosas , cuando decir *unidad* es otra manera de decir *cosa*?.

Schröder respondería que ello se debe a la posibilidad de poner en igualdad los objetos que al numerarse son considerados precisamente como unidades, pero entonces nuevas cuestiones se nos presentan: ¿por qué establecer igualdad entre los objetos a numerarse?, ¿realmente son iguales o les atribuimos una igualdad que sobrepasa a la que verdaderamente les corresponde?.

Muchos autores llaman iguales, sin limitación, a las unidades -dice Frege- y, entre ellos cita a Hobbes:

> "*En sentido absoluto, el número en matemáticas presupone unidades iguales entre sí, con las cuales se forma.*"14/

Hume, por su parte, expone que:

> "*...las partes componentes de la cantidad y del número son totalmente del mismo tipo.*"15/

Thomae:

> "*Las unidades son iguales unas con respecto a otras.*"16/

Sin embargo, Frege no puede salir de la perplejidad en que lo hunde la pregunta de lo que significa esa pretendida igualdad.

> "*No se logra hacer iguales cosas distintas por medio sólo de operaciones conceptuales,...*"17/

En este punto Frege también retoma a W.Stanley Jevons quien en su opinión, muestra especial penetración por medio de estas palabras:

> "*El número no es sino otro nombre para la diversidad. La identidad exacta es unidad, y con la diferencia surge la pluralidad...Frecuente-*

14/Op.cit.Los Fundamentos...p148.
15/Loc.cit.
16/Loc.cit.
17/Loc.cit.

temente se ha dicho que las unidades son unidades en razón de ser perfectamente similares unas respecto a otras; pero aunque puedan ser perfectamente similares en algunos aspectos, deben ser diferentes al menos en un punto, de otra manera no admitirían la pluralidad..."18/

Podríamos pensar entonces que, la diversidad de las unidades es una mejor forma de ver las cosas pero, no obstante, el punto de vista que se inclina en esta dirección también se encuentra plagado de problemas. Por ejemplo, siguiendo al mencionado Jevons, encontramos explicada la unidad por sí misma:

"Llamamos al objeto otro objeto, justo sólo porque lo podemos distinguir de los primeros."19/

Y siguiendo a autores como Locke, Leibniz y Hesse encontramos nuevamente una gran vinculación entre el significado de la palabra 'unidad' y el de la palabra 'uno'.

Leibniz -cita Frege- nos expresa que:

"lo abstracto de uno es la unidad"20/

mientras que Locke y Hesse usan ambas palabras indistintamente.

Para evitar caer nuevamente en las discusiones acerca de 'uno' y 'unidad' Frege propone establecer una distinción estricta y comienza considerando al número uno así:

"Se dice 'el número uno', y con el artículo determinado se indica un objeto peculiar, determinado, de la investigación científica. No hay diversos números uno, sino sólo uno. En 1 tenermos un nombre propio que, en cuanto tal, es asi mismo incapaz de plural a la manera de 'Federico el Grande' o 'el elemento químico oro'. No es accidental, y no es un modo inexacto de notación, que se se escriba 1, sin adiciones diferenciales...el número no es una acumulación de cosas. La aritmética se anularía, si en lugar de uno, que siempre es el mismo, se quisieran introducir diversas cosas, aunque fuera con símbolos semejantes; que por iguales que fueran no lo serían sin defecto. No se puede suponer que el más profundo requisito

18/Op.cit.Los Fundamentos..p 149.
19/Loc.cit.
20/Ibid.p 150.

de la aritmética sea una escritura fallida. Por tanto, es imposible considerar al 1 como símbolo para diversas cosas,..."21/

"Sólo de palabras para conceptos es posible un plural. Por tanto, si se habla de 'unidades', entonces no se puede utilizar esta palabra con igual significado que el nombre propio 'uno', sino como una palabra para concepto.
Si 'unidad' significa 'objeto numerable', entonces número no se puede definir como unidades."22/

Por otra parte, a Frege le parece absurdo tratar de hacer igual a lo diferente llamándolo sencillamente unidad; quizá esta cuestión encontrara algún auxilio aludiendo al espacio y al tiempo en el siguiente sentido.

En cuanto al espacio, habría que considerar por sí mismos a puntos, rectas, planos, cuerpos congruentes, áreas, segmentos que no fueran diferenciables en absoluto, sino cuando estuvieran juntos en una intuición total. Aquí, -dice Frege- parece unirse la igualdad con la indiscernibilidad.

En cuanto al tiempo, se haría algo parecido pero, ¿acaso lo numerable se limita a lo espacio-temporal?.

Leibniz refutó en este punto a los escolásticos que sostenían que el número nacía como la división del continuo.

Baumann puntualizó la diferencia entre número y tiempo.

En cuanto a Stanley Jevons -cita Frege- se postula de la manera siguiente:

"En muchos casos, ni el espacio ni el tiempo son base para una diferencia, sino que interviene sólo la pura cualidad...Todo medio de diferenciación puede ser una fuente de pluralidad."23/

A Frege mismo le parece que el concepto de unidad sería pensable sin el tiempo.

21/Op.cit.Los Fundamentos...p 151.
22/Ibid.p 152.
23/Ibid.p 154.

> *"...si los objetos numerados realmente no se siguen unos a otros, sino que solamente son numerados unos después de otros, entonces el tiempo no puede ser la base de su diferenciación. Ya que si podemos numerarlos unos después de otros, debemos de tener ya criterios diferenciales. El tiempo es sólo un requerimiento psicológico para el numerar, pero no tiene nada que ver con el concepto de número. Si se representan objetos inespaciales e intemporales por medio de puntos espaciales o temporales, entonces esto quizá puede ser de utilidad para afectuar la numeración; pero fundamentalmente se presupone con esto la aplicabilidad del concepto de número respecto a lo inespacial e intemporal."* 24/

No obstante, sin ningún criterio diferencial fuera del espacial y temporal, tampoco es posible -dice Frege- el propósito de unir discernibilidad e igualdad.

Finalmente vemos como:

> *"La más amplia o la más estricta similitud de los objetos no afecta para nada el asunto, si finalmente deben aquellos mantenerse separados unos respecto a otros...Todas estas son relaciones que nada tienen que ver con el número en sí. En todo esto se cuela algo particular, sobre lo cual el número, según su generalidad, está muy por encima. Aun un momento aislado tiene algo particular que lo distingue, digamos, de un punto espacial, y de lo cual no aparece nada en el concepto de número."* 25/

Igualmente problemática resulta la opción de sustituir la ordenación espacial o temporal por el concepto de serie pues, las series implican relaciones entre los objetos que se ordenan y, tales relaciones requieren de la diferenciación entre dichos objetos.

E.Schröder piensa que cada símbolo 1 representa a uno de los objetos

24/Op.cit.Los Fundamentos... p 154.
25/Ibid.pp 154 y 155.

numerados pero, esto lo lleva únicamente a lograr definir el símbolo numérico y no el número.

> *"para Schroder, el número es un símbolo..., por la palabra 'uno', él entiende el símbolo 1, no su significado...cero, según esto, se expresaría no escribiendo nada."*26/

Hasta el momento hemos visto que el número no se abstrae (de la misma forma que el color, peso y dureza), de las cosas, no es en este sentido una propiedad. Pero sabemos que se dice algo en las declaraciones acerca de números.

El número no es ni una representación, ni algo físico o subjetivo. No nace de la suma de una cosa a otra y no cambia nada el dar un nuevo nombre después de cada adición.

Tratar de definir el número por medio de términos como 'multiplicidad','conjunto'o'pluralidad' es una empresa condenada al fracaso en vista de que tales términos carecen de determinación.

En cuanto al uno y la unidad sabemos que reinan en torno suyo un sin número de puntos de vista que tienen muy velada la distinción entre uno y muchos y que, aunque en el caso del uno recurren a nociones como la delimitación, indivisibilidad e inseparabilidad, esto, finalmente, no ayuda mucho.

Por otra parte, si llamamos unidades a las cosas que deseamos numerar, entonces es falso aceptar incondicionalmente que las unidades son iguales.

Valió también establecer una distinción entre uno y unidad, punto en el cual Frege se pronunció así:

> *"La palabra 'uno' es, como nombre propio de un objeto de la investigación matemática, incapaz de admitir plural."*27/

26/Op.cit.Los Fundamentos...p 156.
27/Ibidem.p 159.

A continuación, tratando de aclarar el punto donde nos encontramos situados veremos lo que pasa con el número cuando aparece en un juicio su modo originario de aplicación.

Al estudiar fenómenos externos prestando atención en cada caso a uno y el mismo, podemos decir con verdad expresiones como:

'éste es un grupo de árboles'

'éstos son cinco árboles'

'aquí están cinco compañías'

'aquí están cincuenta hombres'

En cada ejemplo lo única que varía es nuestra denominación. Frege dirá que ésto es sólo el indicio de la sustitución de un concepto por otro y que, entonces para la cuestión de ¿qué se afirma en las declaraciones acerca de números? tenemos por respuesta lo siguiente:

> *"...el contenido de un enunciado de números es una afirmación sobre un concepto."*28/

Incluso el número cero sale victorioso bajo esta aproximación pues, por ejemplo, al decir:

'Venus tiene 0 lunas'

se afirma en términos poco usuales que:

'Venus no tiene lunas'

o que acerca de Venus no hay luna(s) alguna(s) de la(s) cual(es) puede afirmarse algo. Así, -dice Frege-

> *"al concepto de 'luna venusina' se le ha adscrito, con ello, una propiedad, a saber, la de no tener cosa alguna bajo de sí."*29/

Vale mencionar que para Frege un concepto no es algo subjetivo parecido a las representaciones.

> *"Que una declaración que mencione números exprese*

28/ Op.cit.Los Fundamentos...p159
29/ Loc.cit.

algo fáctico independientemente de nuestro punto de vista, sólo puede asombrar a quienes tienen al concepto por algo subjetivo semejante a las representaciones. Pero esta concepción es falsa...si los conceptos fueran subjetivos, también la subordinación de unos bajo otros, como relación entre ellos, sería algo subjetivo a la manera de relación entre representaciones." 30/

"...si el concepto es algo objetivo, entonces una afirmación acerca de él puede contener algo fáctico." 31/

Aunque algunos pasajes anteriores pudieron sugerirnos la idea de que los objetos son portadores del número, las anteriores disertaciones nos conducen rápidamente a los verdaderos portadores: los conceptos.

"Vemos también ahora cómo se llega a querer obtener el número por abstracción de las cosas. Lo que con ello se obtiene es el concepto en que se descubre el número." 32/

Dice Frege, la gran aplicabilidad del número no tiene lugar en las declaraciones respecto a números, sino en los conceptos bajo los que se pone lo externo e interno, lo espacial y lo temporal, lo no-espacial y lo no-temparal.

Frege piensa que es incorrecto considerar que un término conceptual general es el nombre de una cosa pues, de ser así el número podría asumirse justamente como la propiedad de una cosa; opción que, como hemos visto, es inaceptable para este filósofo que veía en tal tipo de término a la expresión que designa un concepto, por esta razón FRege dirá que no es que un objeto aparezca repetidamente, sino que más de un objeto cae bajo un concepto y, en el pasaje en el cual alude a esta cuestión retoma una idea de Spinoza:

"...un concepto no sólo se produce por abstracción de las cosas que caen bajo él." 33/

30/Op.cit. Los Fundamentos ... p 160.
31/Loc.cit.
32/Loc.cit.
33/Ibid.p 162.

Y añade:

> *"...un concepto no deja de ser concepto por que bajo él sólo caiga una cosa, la cual se encuentra plenamente determinada bajo él. A tales conceptos (por ejemplo, satélite de la Tierrra), pertenece justamente el número 1 ...En relación a un concepto, la cuestión es siempre si hay alguna cosa, y qué cosa, que caiga bajo él."34/*

Así, el número viene apareciendo como algo adscribible a los conceptos.

> *"...con la palabra 'cuatro' predicamos algo de un concepto."35/*

En el caso particular y peculiar de el número 0 le adscribimos tal número a un concepto cuando no existe algo, sea lo que fuere, que caiga bajo dicho concepto.

> *"En efecto, la afirmación de la existencia no es otra cosa que la negación del número cero."36/*

En base a todo lo anterior parece que ahora nos es posible definir a la unidad como un concepto en relación al número al cual corresponde y no sólo eso, sino que también podemos dar un significado más preciso a aquello de que la unidad es separable de lo circundante e indivisible ya que:

> *"...el concepto al que se asigna el número de modo determinado, en general delimita lo que cae bajo él."37/*

así, la proposición que habla de la delimitabilidad e indivisibilidad de la unidad puede expresarse en los siguientes términos:

> *"Unidad en relación a un número finito, sólo puede serlo un concepto tal que determine y delimite lo que caiga bajo él y que no dé lugar a una división discrecional."38/*

Dimos principio a este capítulo aludiendo a la necesidad que veía Fre

34/Op.cit. Los Fundamentos...p162.
35/Ibidem,p 163.
36/Loc.cit.
37/Ibidem.p 164.
38/Loc.cit.

ge de un estudio respecto de la unidad y de otro, no por cierto muy ajeno al primero, acerca del concepto general de número. Hasta aquí hemos tratado brevemente aquellas observaciones que hiciera este autor en sus *Fundamentos de la Artmética* para constituir el primero de los estudios mencionados. A continuación nos referiremos al segundo, es decir, aunque de manera escueta, analizarémos lo que Frege dilucidó acerca del concepto general de número.

*"Cada número individual es un objeto independiente"*39/

Con ésta proposición da principio la sección dedicada al concepto de número y, como en ella se manifiesta, el número para Frege no es ya algo que se atribuya a un concepto sino un objeto independiente. Pero, veamos como es que se llegó a esto.

Sabemos que:

> *"...una declaración que habla de números contiene una aserción acerca de un concepto..."*

ahora, a fin de lograr acceder a una definición de los números individuales, comenzaremos estudiando las del 0 y 1.

> *"...a un concepto corresponde el número 0 cuando ningún objeto cae bajo él."*40/

o, dicho en términos más precisos:

> *"...a un concepto corresponde el número 0 cuando en general vale la proposición de que a no cae bajo este concepto, sea lo que fuera a. De parecida manera se podría decir: a un concepto F corresponde el número 1 cuando no vale en general que a no cae bajo F, sea lo que fuera a, y cuando de las proposiciones*
> *'a cae bajo F' y 'b cae bajo F'*
> *se sigue en general que a y b son lo mismo."*41/

De manera coherente con lo anterior, diremos que al paso de un número a su sucesor se formula en los siguientes términos:

39/Op.cit. Los Fundamentos...p 165.
40/Loc.cit.
41/ "

cuando un objeto *a* cae bajo F (que es un concepto)

y bajo el concepto *cae bajo F pero no es a* cae n

entonces decimos que a F corresponde el número n+1

Parecería que estas tres definiciones:

a) cuando a un concepto corresponde el número 0.

b) cuando a un concepto corresponde el número 1.

c) cuando a un concepto corresponde el número n + 1.

deberían satisfacernos pero, recapacitando cuidadosamente en cada uns de ellas, notamos cierta obscuridad conceptual, por ejemplo, refiriendonos a (c), nos es tan desconocido en ella el significado de la proposición:

'al concepto G corresponde el número n'

como el de la proposición:

'al concepto F corresponde el número n+1'

ni siquiera sabemos a ciencia cierta qué debemos aprobar como número y qué no, o cuando dos números son iguales, en consecuencia no tenemos aún nuestras deseadas definiciones sino, simple y sencillamente hemos asegurado el sentido de las expresiones:

'el número 0 corresponde a'

y

'el número 1 corresponde a'

lo cual, de ninguna manera nos permite concluir que 0 y 1 son objetos reconocibles independientemente.

Para rebasar este problema debemos conceder atención más cercana a nuestra conocida expresion:

i) 'al concepto F corresponde el número 0'

en la cual, es fácil aceptar como sujeto a:

'el concepto F'

y como predicado a:

'corresponde el número 0'

pero, vemos pues que, 0 es sólo una parte del predicado, no es todo el predicado, no es el predicado mismo, por ello Frege no lo considerará ya como la propiedad de un concepto, ni al 0, ni al 1, ni a ningún número y afirmará:

> *"El número individual, precisamente porque constituye sólo una perte de la afirmación, aparece como objeto independiente."42/*

Al querer referirnos al número 1 pronunciamos o escribimos:

'el 1'

en la cual el artículo definido hace aparecer al número como objeto.

Por otra parte, cuando engañosamente una expresión presenta a un número como propiedad atributiva con respecto a algo, ella siempre puede ser parafraseada de manera clara en una nueva aserción donde se disipa todo equívoco.

Decir:

'Juan tiene dos hermanos'

no es lo mismo a decir:

'Juan tiene flojera'.

La primera expresión se puede reformular así:

'El número de hermanos de Juan es 2'

donde la partícula:

'es'

se utiliza en un sentido especial:

> *"Aquí 'es' tiene el sentido de 'es igual', 'es lo mismo que' "43/*

Recordando lo tratado en el segundo capítulo, entendemos con Frege que si aceptamos al 'es' como portador de identidad, entonces estamos obligados

42/Op.cit. Los Fundamentos...p 166.
43/Ibidem.p 167.

a aceptar que la expresión:

'El número de hermanos de Juan'

y la expresión:

'2'

denotan un mismo objeto.

Una posible objeción a las anteriores consideraciones podría integrarse en base a la idea de que no es posible tener representación alguna independiente de los objetos denotados por los nombres propios:

'En número de hermanos de Juan'

y

'2'

a tal objeción Frege respondería bajo el siguiente criterio:

> *"La irrepresentabilidad del contenido de una palabra no es razón alguna para negarle todo significado o para excluirla del uso. El falso brillo del contraargumento surge de que consideramos a las palabras aisladas y preguntamos por su significado, tomándolo por una representación. Así, parece que una palabra carece de contenido si falta una imagen interna que le corresponda. Pero siempre se debe tener a la vista una proposición completa. Sólo en ella tienen las palabras propiamente un significado...Basta que la proposición, como un todo, tenga sentido; de este obtienen tanbién su contenido las partes."44/*

> *"La independencia, que tomo como una exigencia para el número, no tiene que significar que un término numérico designe algo fuera del contexto de una proposición, sino que con ello sólo excluyo su uso como predicado o atributo, con lo cual se cambia algo su significado."45/*

No cabe duda que las consideraciones realizadas por Frege en torno al concepto general de número vistas detenidamente nos permiten acceder de una

44/Op.cit. Los Fundamentos... p 168.

45/Ibid.p. 169.

manera muy original a tal cuestión.

Frege dirá asemejándose un poco a A. Meinong, sólo un poco, que un número nunca es un objeto espacial y que, sin embargo, es un objeto; a causa de lo anterior, a un número no se le puede aplicar un predicado espacial pues, no está en parte alguna y no obstante no hay en lo anterior ninguna contradicción.

> *"No todo lo objetivo tiene una ubicación."* 46/

Pero entonces, siguiendo a Frege, podemos preguntarnos: ¿cómo se nos ha de dar un número, si no podemos tener de él ninguna representación o intuición?.

La respuesta a esta interrogante se encontraba implícita ya en líneas anteriores:

> *"Sólo en el contexto de una proposición significan algo las palabras."* 47/

De manera que tendremos que aclarar el sentido de una proposición en la cual aparezca un término numérico, una proposición que exprese un reconocimiento de aquello que hemos dicho que son objetos independientes; incluso deberemos comprender una expresión como:

> *'el número que corresponde al concepto F es el mismo que el número que corresponde al concepto G'*

para lo cual, necesitamos un criterio que nos haga distinguir, como antes decíamos, si b y a son lo mismo y, por supuesto, en tal empresa no podemos utilizar los mismo términos:

> 'el número que corresponde al concepto F'

ya que nos son igualmente obscuros.

Por lo pronto comenzaremos diciendo que como la relación de igualdad

46/Op.cit. Los Fundamentos...p 169.
47/Loc.cit.

no aparece únicamente entre números, entonces no tiene que ser definida especialmente para tal caso.

Frege da principio a la tarea introduciendo la proposición geométrica:

a) 'la recta a es paralela a la recta b'

(a//b)

pues hace notar que tal proposición puede transformarse en:

b) 'la dirección de la recta a es igual a la dirección de la recta b'.

(dirección de recta a = dirección de recta b)

en la cual figura la noción de igualdad, permitiendonos denotar un nuevo concepto.

También se ve aquí que podemos acceder al concepto de <u>dirección</u> a partir del paralelismo. No obstante, si tomáramos a (b) como una definición del concepto de dirección tendríamos que admitir que, si bien en apariencia, determina la relación de igualdad, no logra por otra parte introducir suficientemente el significado de la expresión:

'la dirección de la recta a'

siendo así, tendríamos problemas con nuestra supuesta definición y con las leyes de identidad que Frege desarrolla en base al concepto mismo de verdades analítica.

De manera que para justificar la definición del concepto de dirección de una recta tendríamos que mostrar que:

'la dirección de a'

en general puede ser sustituída por:

'la dirección de b'

sin que cambie el valor de verdad del contexto donde figuran estas expresiones y ello no sería muy difícil ya que, en principio, no se afirma nada de la di rección de una recta como no sea su concordancia con la dirección de otra.

Pero aún aparece una tercer objeción - dice Frege- en contra de la definición propuesta y es que en nuestra expresión (b), la dirección de a aparece como objeto y el medio que poseemos para reconocer si este objeto se presenta de diferente modo (como dirección de b),no es suficiente para todas las cosas, esto es, nuestra definición no habla acerca de si:

c) 'la dirección de a es igual a q'

debe afirmarse o negarse cuando q no está propuesta como :

'la dirección de b'

Este problema lo único que manifiesta es que, requerimos necesariamente ni más ni menos que el concepto de dirección que nos llevaría fácilmente a decir:

si q no es una dirección, (c) debe negarse,y si q es una dirección entonces su afirmación queda determinada en función de la definición original que aún no tenemos.

Una vez llevada a este extremos la opción anterior, Frege decide analizar la siguiente vía;

> *"Si la recta a es paralela a la recta b, entonces la extensión del concepto 'recta paralela a la recta a' es igual a la extensión del concepto 'recta paralela a la recta b'; a la inversa:si las extensiones de los conceptos aludidos son iguales, entonces a es paralela a b."* 48/

A patir de lo anterior llegamos a que:

-La dirección de la recta a es la extensión del concepto 'paralela a la recta a'.

o por ejemplo:

-La forma del triángulo t es la extensión del concepto 'semejante al triángulo t.

48/Op.cit. Los Fundamentos...pp 174 y 175.

De manera que cuando queramos aplicar lo anterior, pondremos conceptos y no rectas o triángulos y, *coordinaremos biunívocamente* los objetos que caigan bajo un concepto con los que caigan bajo el otro en lugar de hacer un paralelismo o semejanza.

Por supuesto, ahora la pregunta más natural es:¿cuándo dos conceptos son equinuméricos?. Pues precisamente cuando podemos armar una correspondencia biunívoca entre los objetos que caen bajo un concepto y los que caen bajo el otro.

En consecuencia tenermos:

> *"el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto 'equinumérico respecto al concepto F' "* 49/

Esencialmente podemos decir acerca de las extensiones de los conceptos que son iguales o desiguales o, que una extensión comprende más que alguna otra aún cuando, no podemos decir que un número es más comprensivo que otro, ahí utilizaremos mejor la aserción un número es mayor que otro.

A continuación veremos si nuestra definición de número es apropiada para permitirnos obtener de sí las propiedades más simples de los números, pero antes diremos que por equinumerosidad entendemos formalmente *una coordinación o relación unívoca* y cabe mencionar que para Frege:

> *"El concepto de relación, tanto como el concepto simple, pertenece a la lógica pura:"* 50/

pues en ellos no cuenta en contenido de la relación sino su forma lógica, por eso incrementando nuestra información acerca de la equinumerosidad tenemos que, es posible expresarla fregeanamente mediante el siguiente grupo de proposiciones:

'a cae bajo el concepto F'

y

49/Op.cit. Los Fundamentos...p 175.
50/Ibidem. p 178.

'b cae bajo el concepto G'

y

'a esta en la relación $\emptyset$ respecto a b'

y

'cada objeto que cae bajo F, está en la relación

$\emptyset$ respecto a un objeto que cae bajo G'

así:

"los objetos que caen bajo los conceptos F y G se coordinan mutuamente por medio de la relación $\emptyset$. Sólo que aquí esta coordinación es biunívoca. Por ello entiendo la validez de las siguientes proposiciones:
1.si d está en la relación $\emptyset$ respacto a <u>a</u>, y si d está en la relación $\emptyset$ respecto a <u>e</u>, entonces resúlta en general que, sean lo que fue<u>e</u>ren <u>d</u>,<u>a</u> y <u>e</u>, <u>a</u> es ~~lo~~ lo-mismo que <u>e</u>.
2.si d está en la relación de $\emptyset$ respecto a <u>a</u>, y si b está en la relación $\emptyset$ respecto a <u>a</u> entonces resulta en general que, sean lo que fueren <u>d</u>, <u>b</u> y <u>a</u>, d es lo mismo que b." <u>51/</u>

Ahora sabemos con precisión qué significado tiene dentro del sistema fregeano la expresión:

'el concepto F es equinumérico o equinumeroso respecto al concepto G'

y entendemos que ese significado sea el mismo que el de la expresión:

'hay una relación $\emptyset$ que coordina biunívocamente a los objetos que caen bajo el concepto F con los que caen bajo G'

Ahora bien, si de igual manera la expresión:

'n es un número'

significa lo mismo que la expresión:

'hay un concepto de tal tipo que n, es el número que

<u>51/</u> <u>Op.cit</u>. <u>Los Fundamentos</u>..., p 179.

le corresponde'

podemos ahora comprender mejor qué quiere decir que:

'el número que corresponde al concepto F, es la extensión del concepto 'equinumérico respecto al concepto F'

Para mostrar cuándo el número que corresponde al concepto F es igual al número que corresponde al concepto G hay que aludir a las respectivas extensiones de los conceptos:

'equinumérico respecto al concepto F'

'equinumérico respecto al concepto G'

y ver si éstas son iguales cuando F y G son equinuméricos.

O igualmente hay que probar que son verdaderas las proposiciones:

A) Si el concepto H es equinumérico respecto al concepto F, entonces, también es equinumérico respecto al concepto G.

B) Si el concepto H es equinumérico respecto al concepto G, entonces, también es equinumérico respecto al concepto F.

Gráficamente podemos verlo así:

$$H \psi F \phi G$$

donde ϕ es una relación que coordina biunívocamente a los objetos que caen bajo el concepto F con los que caen bajo G y, donde ψ coordina de la misma forma a los que caen bajo H con los que caen bajo F.

De manera análoga se puede probar (B).

Y, por fin, podemos acceder a las definiciones de los números individuales.

"Defino por qué nada cae bajo el concepto 'no igual a sí mismo': 0 es el número que corresponde al concepto 'no igual a sí mismo'."52/

"Como definición del 0, podría haber tomado cualquier otro concepto bajo el cual nada caiga. Pero se trata de elegir uno de tal modo que esto se pueda probar en él sobre bases puramente lógicas; y, para esto, el más adecuado parece ser 'no igual a sí mismo'"53/

Cabe mencionar que la palabra 'igual' tiene el significado asumido antes implícitamente, pero que se encuentra en la definición de Leibniz:

Eadem sunt, quorum unum potest substitui
alteri salva varitate

que Frege retoma en sus *Fundamentos* 54/

Una vez que Frege prueba que cada concepto bajo el cual no cae nada es equinumérico respecto a cualquier otro concepto bajo el cual, igualmente, no cae nada y únicamente respecto a estos y que, por tanto, 0 corresponde a dichos conceptos y que no hay objeto alguno que caiga bajo el concepto si 0 le corresponde; pasa a definir la relación en la que se encuentran mutuamente dos miembros adyacentes de la serie de los números naturales, es decir, busca definir cuándo un número es sucesor en la *serie de los naturales*, de otro número.

Aclaremos el significado de la proposición:

'n sigue en la serie de los números naturales
inmediatamnete a m'

En vista de que ya tenemos la definición del número 0, ésta nos puede ser de gran utilidad para llegar a la de 1 pero, para esto, primeramente hay que probar que hay algo en la serie de los naturales que sigue a 0.

La prueba hecha por Frege refleja gran penetración lógica y conceptual,

52/Op.cit.Los Fundamentos...p 181
53/Ibid.p 182.
54/v.p 172.

sigamoslo pues, en este punto:

> "Consideremos al concepto -o, si se prefiere, el predicado- 'igual a 0'. Bajo éste cae el 0. Bajo el concepto 'igual a 0, pero no igual a 0', por el contrario, no cae objeto alguno, de suerte que 0 es el número que corresponde a este concepto. Según esto, tenemos un concepto 'igual a 0' y un objeto 0 que cae bajo él, para los cuales vale:
>
> el número que corresponde al concepto 'igual a cero', es igual al número que corresponde al concepto 'igual a 0';
> el número que corresponde al concepto 'igual a 0, pero no igual a 0', es el 0.
> Por tanto, según nuestra definición, el número que corresponde al concepto 'igual a 0', sigue inmediatamente a 0 en la serie de los números naturales.
>
> Si ahora definimos:
> 1 es el número que corresponde al concepto 'igual a 0'
> podemos expresar la última proposición como sigue:
> 1 sigue, en la serie de los números naturales, inmediatamente a 0." 55/

Hasta ahora tenemos ya la definición de 0 y la definición de 1, en cuanto a estas definiciones y refiriéndose a la relación de sucesor en la serie de los números naturales tenemos que:

> "1. Si a sigue a 0, en la serie de los números naturales, entonces a=1.
> 2. Si 1 es el número que corresponde a un concepto, entonces, hay un objeto que cae bajo el concepto.
> 3. Si 1 es el número que corresponde a un concepto F; si el objeto x cae bajo el concepto F, y si y cae bajo el concepto F, entonces x=y, esto es, x es lo mismo que y.
> 4. Si un objeto cae bajo un concepto F, y si de que x cae bajo el concepto F e y cae bajo el concepto F, se puede inferir que x=y, entonces 1 es el número que corresponde al concepto F.
> 5. La relación de m a n que se establece por medio de la proposición:
> 'n sigue inmediatamente a m, en la serie de los números naturales'
> es biunívoca." 56/

> "Aparte del 0, en la serie de los números naturales cada número sigue inmediatamente a un número." 57/

Para probar que en la serie de los números naturales, no sólo 0 sino cada miembro n tiene su sucesor debemos introducir un concepto que determine

55/Op.cit. Los Fundamentos... p 184.
56/Ibid.p 185.
57/Loc.cit.

al sucesor o bajo el cual caigan los sucesores:

'perteneciente a la serie de los números naturales que temina con n'

o con mayor precisión:

"si cada objeto que está en la relación respecto a x, cae bajo el concepto F, y si de que d cae bajo el concepto F, sea lo que fuera d, se sigue en general que cada objeto que está en la relación respecto a d, cae bajo el concepto F, entonces y cae bajo el concepto F, sea F el concepto que fuere." 58/

dicho brevemente:

En la serie ϕ , y sigue a x y x precede a y.

Claro que para Frege el que en la serie ϕ , y siga a x, no tiene nada que ver con nuestra atención, es algo fáctico que según ha sido definido quedá determinado objetivamente.

Especificando:

si ahora consideramos a ϕ como una relación establecida entre m y n y, obedeciendo:

'n sigue inmediatamente a m en la serie de los números naturales'

entonces, introduciremos en lugar que serie ϕ 'serie de los naturales'.

Así, definimos:

'en la serie ϕ ,y sigue a x o y es lo mismo que x'

esto es:

'y pertenece a ϕ ,que principia con x'

y

'x pertenece a ϕ ,que termina con y'

58/Op.cit. Los Fundamentos...p 186

Finalmente Frege explica el curso de la prueba de que el número correspondiente al concepto:

'perteneciente a la serie de los números naturales que termina con n'

sigue inmediatamente a n en la serie aludida pues, realizada esta prueba se pasa inmediatamente a la aserción de que la serie de los naturales es infinita.

CONCLUSION

Teoría clásica de conjuntos (TCC) nació pretendiendo agregar al conocimiento matemático información sobre temas no comprendidos en él hasta entonces, particularmente Cantor inauguró las matemáticas del infinito.

Así, dicha teoría, en la cual su autor empezó a trabajar sistemáticamente a lo largo de la última mitad del siglo pasado, no fue ideada como una "teoría de conjuntos madre", es decir, como un aparato conceptual que buscara ser capaz de construir un sistema teórico análogo al de la matemática.

El hecho de que los principales logicistas, Frege y Russell, hicieran teorías o alternativas o inspiradas en TCC, se debe a que ellos encontraron una aplicación de las nociones conjuntísticas que Cantor simplemente ignoró.

Sin embargo, que el trabajo de Frege y Russell permita ver la reducibilidad de la aritmética a la teoría de conjuntos no es claro ni en un caso ni en otro.

Frege no hizo algo que pudiéramos llamar propiamente una reducción a la teoría de conjuntos, sino que, inventó una teoría alternativa mucho más rica que tiene como parte, algo parecido a una teoría de conjuntos: la teoría de los cursos de valores de conceptos.

Russell en cambio usa una "no class theory"(teoría sin clases) pues, observando las contradicciones a las que conducía la teoría de Cantor y, fiel a sus propios supuestos ontológicos, ideó una nueva teoría cuya similitud con la teoría de conjuntos clásica dista de ser evidente.

Sin embargo, a pesar de la carencia de obviedad, los hallazgos que hicieron los autores citados en sus respectivas teorías, permiten ver que

TCC puede, en efecto, tener alcances de los cuales, como ya decíamos, su autor no se percató.

En el primer capítulo de este trabajo procuro mostrar en detalle cómo, aun cuando los intereses de G. Cantor distaban mucho de los logicistas, su teoría permite fundamentar la aritmética. Para ello me fue necesario traducir las ideas intuitivas presentes en TCC a un cálculo de primer orden con identidad y desarrollarlo axiomáticamente hasta obtener los postulados de Peano.

La tarea realizada en el primer capítulo* requirió la utilización de: la formulación del Cálculo Ideal que se encuentra en A.A. Fraenkel, Y. Bar Hillel, Foundations of Set Theory, 2° edición con coautoría de A. Levy y colaboración de Dirk Van Dalen; algunas ideas de B.Russell, desarrollos en clase del Profesor Raul Orayen y, deducciones y sistematizaciones propias.

Así mismo, este capítulo se limita a expresar la utilidad conceptual de la TCC, por ello no abordo ni el problema de sus dificultades y limitaciones (paradojas), ni el tema de las medidas teóricas que tomaron diferentes autores (Fraenkel, Von Newman, Quine, Russell, Gödel) para evitar que sus teorías de conjuntos llevaran a problemas similares. Además, estos dos últimos puntos constituyen históricamente una etapa posterior (alrededor de 1900) a la considerada en mi trabajo.

La teoría clásica de conjuntos puede POR TANTO, vertirse en el marco de un cálculo lógico de primer orden con identidad y, alcanzar como objetivo la fundamentación de la aritmética que Frege llevó a cabo con una teoría similar a ella.

Como hemos visto, el sistema conceptual que utiliza Frege para su fundamentación de la aritmética es aun más vasto y complejo que el manifiesto en TCC. Su riqueza radica en que, además de las nociones del cálculo de

*Tarea que no se encuentra en detalle en la bibliografía acerca de TCC.

primer orden (conectivas, cuantificadores, etc.) y los dos primitivos adicionales '$\in$' y 'M', la teoría incluye como puntos básicos ideas como la de función, objeto, curso de valores, sentido, denotación, etc.

Una vez que Frege tiene todo este material, lo aplica de manera que le permita primero, obtener tanto la definición de número como otras relacionadas y segundo, llegar a los postulados de Peano.

En la teoría de los cursos de valores de conceptos (a los que Frege identifica con extensiones de conceptos que a su vez identifica con conjuntos) puede, en efecto, observarse que son formalmente análogos a los conjuntos expresados en el cálculo ideal. Por ejemplo, en dicho cálculo dos conjuntos son idénticos si y sólo si tienen los mismos miembros, es decir:

$$A1.\ (x)(y)(Mx \,\&\, My .\supset. x=y \leftrightarrow (z)(z\in x \leftrightarrow z\in y))$$

Simultáneamente, dentro de la teoría fregeana, los cursos de valores de conceptos son idénticos si y sólo si, bajo los conceptos caen exactamente los mismos objetos (ley básica quinta).

Ahora bien, si identificamos 'caer bajo un concepto' con 'pertenecer al curso de valores correspondiente' podemos ver que la ley básica quinta expresa lo mismo que A1.

Así mismo, 'caer bajo un concepto o propiedad' viene siendo, en TCC, lo mismo que 'pertenecer al conjunto correspondiente'.

El siguiente esquema muestra tanto lo contenido en la teoría cantoreana y su equivalente en la teoría de Frege (TF), como la notación que cada autor usó para expresarlo:

TCC $\longrightarrow$ $A1.\ (x)(y)(Mx \,\&\, My .\supset. x=y \leftrightarrow (z)(z\in x \leftrightarrow z\in y))$

TF $\longrightarrow$ $(\alpha' F\alpha = \alpha' G\alpha) \leftrightarrow (x)(Fx \leftrightarrow Gx)$, ó bien

$(\alpha F\alpha = \alpha G\alpha) \leftrightarrow (x)(x\in \alpha F\alpha \leftrightarrow x\in \alpha G\alpha)$

En cuanto al segundo axioma de TCC.

$$A2.\ (\exists y)(My \,\&\, (x)(x\in y \leftrightarrow \Lambda(x)))$$

que dice que a cada propiedad corresponde un conjunto, tiene también su análogo en la teoría fregeana bajo el supuesto de que a cada función de un argumento corresponde un curso de valores:

TCC $\quad Fx \longrightarrow \hat{x}Fx$

TF $\quad Fx \longrightarrow \alpha\text{'}F\alpha$

De esta manera podemos observar cómo aquello que Frege utilizó directamente en su programa logicista es un grupo de elementos conceptuales que forman parte de todo su sistema y que son análogos a una teoría de conjuntos.

BIBLIOGRAFIA

1. Benacerraf,Paul.Logicism,Some Considerations,(Ph.D.Thesis,Princeton University, 1960).
2. Frege,Gottlob.Begriffsschrift (Chapter I),en Geach,P. & Black,M.(eds.) Translations From the Philosophical Writings...(ver)p.p 1-20.Incluído también en versión española completa, Padilla, Hugo (Comp. y trad.),Gottlob Frege: Con ceptografía,los fundamentos de la Aritmética,(ver)p.p 7-104.
3. Frege,Gottlob."Comments on Sense and Meaning" en Hermes,H.et.al (eds.),Frege Posthumous Writings (ver) p.p 118-125.
4. Frege,Gottlob."Frege-Hilbert Correspondence Leading to 'On the Foundations of Geometry' " en Kluge,(ed.),Gottlob Frege: On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic(ver),p.p 6-21.
5. Frege,Gottlob."Illustrative Extracts From Frege's Review on Husserl's Philosophie Der Arithmetik",en Geach,P. & Black,M. (ver), p.p 79-85.
6. Frege Gottlob. "Logic", en Gottlob Frege,Posthumous Writings (ver),p.p 126-151.
7. Frege Gottlob. "On Concept and Object"/Uber Begriff und Gegenstand/,en Geach,P. & Black,M.,Translations From...(ver) p.p 42-55.
Incluído también en Padilla,H.(comp. y trad.),Gottlob Frege: Conceptografía.... (ver) p.p 236-250.
8. Frege Gottlob. On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic. Traducción y edición de Eike-Henner W. Kluge, New Haven and London, Yale University Press,1971.
9. Frege Gottlob."Sobre el sentido y la denotación"/"Uber Sinn und Bedeutung"/en Simp son,Thomas M (comp.) Semántica Filosófica:problemas y discusiones (ver)p.p 3-28. Incluído también en Geach,P. & Black,M.,Translations From... (ver) p.p 56-78.
10. Frege Gottlob.The Basic Laws of Arithmetic/Grundgesetze Der Arithmetik/ Traducido y editado por Montgomery Furth,University of California Press,Berkeley y Los Angeles,1964.
11. Frege Gottlob.The Foundations of Arithmetic/Grundlagen Der Arithmetik/Traducido al inglés por J.L. Austin,Basil Blackwell,Oxford,1950;también incluído en Padilla H.(comp. y trad.) Gottlob Frege: Conceptografía... (ver) p.p 107-206.
12. Frege Gottlob. "What is a Function"/Was ist eine Funktion?/,en Geach,P. & Black,M. (eds.),Translations From...(ver) p.p 107-116. Incluído también en Padilla,H.(comp. y trad.)Gottlob Frege:Conceptografía.
13. Geach,P. y Black,M.(eds.). Translations From the Philosophycal Writings of Gottlob Frege,Philosophical Library,Nueva York,1952.

14.Orayen Raul.La Ontología de Frege.Cuadernos # 3 y #4 del Instituto de Lógica y Filosofía de las Ciencias. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación,Universidad Nacional de la Plata, La Plata Argentina,s/d.

15.Padilla Hugo.(comp. y trad.).Gottlob Frege: Conceptografía, Los Fundamentos de la Aritmética y Otros estudios filosóficos,UNAM-IIF,México,D.F., 1972.

16.Quine,W.V.O.Desde un punto de vista lógico,Ed.Ariel,Barcelona,1962.

17.Quine,W.V.O.Philosophy of Logic,Pretice-Hall,1970.

18.Robles José Antonio."La generalidad múltiple y la cuantificación en la lógica de Frege",en Episteme,Revista de las Academias de Filosofía del IPN,Año 2,N°4, Julio-septiembre,1980.

19.Simpson Thomas M.Formas Lógicas,realidad y significado,Editorial Universitaria de Buenos Aires,Bs.As.,1964 (1975).

20.Simpson Thomas M.'Oraciones,nombres propios y valores veritativos en la teoría de Frege"/Apéndice I/en Simpson,T.M.,Formas lógicas,realidad y significado,(ver) p.p 217-219 (de la segunda Ed.)

21.A.A. Fraenkel,& Y.Bar Hillel,Foundations of Set Theory, 2°edición 1973,con coautoría de A. Levy y colaboración de Dirk Van Dalen;

22. Valdivia, Dounce, Maria de Lourdes. Las categorías semánticas y ontológicas de Gottlob Frege. Tesis presentada para optar por el título de Licenciado en Filosofía. UNAM. Facultad de Filosofía y Letras.

INDICE

Introducción i

CAPITULO I. TEORIA INTUITIVA DE CONJUNTOS. 1

¿Qué es una teoría intuitiva de conjuntos?
Motivaciones de Cantor para la formulación de su teoría.
Potencialidades que vieron los matemáticos en la teoría de conjuntos cantoreana.
Potencialidades que vieron los filósofos en dicha teoría.

CAPITULO II. LOS CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA LOGICISTA DE FREGE 44

Función.
Distinción entre un símbolo y lo que simboliza.
Introducción informal de la noción de denotar.
Signos de argumento: variables y constantes.
Argumentos.
Nombre propio.
Curso de valores.
Cómo expresar un curso de valores.
Cómo expresar una igualdad entre cursos de valores.
Valor de una función.
Concepto.
Qué significa 'caer bajo un concepto'.
Igualdad entre extensiones de conceptos.
Relaciones.
Introducción más precisa de las nociones de: signo, sentido y denotación.

CAPITULO III. EL CONCEPTO DE NUMERO EN FREGE 101

CONCLUSION 133

BIBLIOGRAFIA 137