Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE ECONOMIA

ECONOMIA Y METODOS NUMERICOS: SOLUCION DE PROBLEMAS CON COMPUTADORA

T E S I S

Que para obtener el Título de
LICENCIADO EN ECONOMIA

p r e s e n t a n

Rafael Gerardo García Prieto
Georgina Adriana Jiménez Anduiza

México, D. F. 1 9 8 6

INDICE

El hombre se ha encontrado en una sola generacibn compartiendo el mundo con una nueva y extraña especie: las computadoras y otras màquinas de càlculo. Ni la Historia, ni la Filosofìa, ni el sentido comùn nos diràn como nos afectaràn estas màquinas, porque ellas no "trabajan" como las de la revoluciòn industrial. En vez de tratar con materia o energìa, se nos dice que manejan procesos de "control" e "informaciòn" y aùn "intelectuales". Son muy pocos los individuos que hoy en dìa dudan que las computadoras y sus afines se estàn desarrollando ràpidamente, en capacidad y complejidad, y que èstas màquinas estàn destinadas a jugar importantes papeles (aùn no se sabe hasta donde) en el futuro de la sociedad. Aunque sòlo algunos tratamos directamente con las computadoras, todos estamos cayendo bajo la sombra de su siempre creciente esfera de influencia, es por ello que todos necesitamos comprender sus capacidades y sus limitaciones.

Marvin L. Minsky

Computation: Finite and Infinite Machines

1967

INTRODUCCION

Este trabajo es un reflejo de nuestro paso por la Facultad de Economía de la UNAM y en particular por el Seminario de Métodos Cuantitativos, así como de nuestra trayectoria profesional en el área de cómputo electrónico en distintos centros de cómputo, en particular el Centro de Procesamiento Arturo Rosenblueth (CPAR) dependiente de la Secretaria de Educación Pública.

El objetivo básico de este trabajo es el de proporcionar una visión global de lo que el economista puede esperar de esa moderna y poderosa herramienta que es la computación electrónica, aplicada a la solución de los problemas típicos a los que se enfrenta, mediante el empleo de métodos numéricos. Como es de esperar en un trabajo de esta naturaleza, sólo es posible cubrir una parte mínima de los muchos métodos que desde hace algunas décadas se han desarrollado para la exploración científica, desarrollo tecnológico y la planificación de proyectos industriales, así como para el estudio y control de sistemas económicos complejos. Como es de suponer, todos esos métodos se basan en alguna técnica de las matemáticas aplicadas, entre las que se cuentan algunas tan antiguas como la resolución de sistemas de ecuaciones y otras tan recientes como la teoría de los conjuntos borrosos desarrollada a mediados de los años sesenta por Lotfi Zadeh.

Desafortunadamente se observa que en ocasiones estas técnicas no se emplean o peor aún se hace uso de ellas de manera errónea; que esto sea así se puede deber a un dogmatismo inconsciente, al desconocimiento real o incluso al temor. En cuanto a esto es importante tener presente dos cosas:

1) Que el campo de acción de tales métodos no reconoce fronteras ideológicas, pues como se sabe dichas fronteras son inherentes al investigador más no a las técnicas en si. Un ejemplo claro de ello lo constituye la programacion lineal, desarrollada por el matemático soviético Leonid Kantorovich al final de los años treinta, con el fin de resolver los problemas de planificación de la producción de la URSS. No obstante su origen, la programación lineal ha sido y es ampliamente aprovechada en los países capitalistas para resolver una gran variedad de problemas, entre ellos la asignación de recursos en la producción industrial.

2) Que la actividad científica actualmente es multidisciplinaria, por lo que casi siempre es conveniente contar con la asistencia de un especialista capaz de manejar correcta y eficazmente tal o cual herramienta e incluso de inventar una nueva en caso necesario y de ser posible.

Ahora bien, la utilización práctica de algunas de esas técnicas requiere en una o más de sus fases de la participación de una computadora, debido a que presentan serias dificultades para ser resueltos mediante procedimientos tradicionales y la computadora puede resolverlos rápida y eficientemente. Considérese a manera de ejemplo la inversión de la matriz de Leontief del modelo de insumo producto de México para 1970, con sólo 72 sectores, se requieren alrededor de 380 mil operaciones elementales que efectuadas manualmente consumirían varios meses y que en una computadora pequeña toma unos cuantos minutos. Desde luego, esto no implica que el economista tenga que ser un experto programador de computadoras, pero si es recomendable que tenga una cultura mínima acerca de lo que es la computación electrónica, de lo que son las computadoras y lo que puede esperar de ellas, puesto que hoy en día tarde o temprano enfrentará la disyuntiva de usar o no una técnica computacional. Situación que se le puede presentar tanto en la investigación como en la práctica diaria sea ésta en el sector público o en el privado. Esto es, el conocimiento y la aplicación de métodos matemáticos en conjunción con la computación digital es sólo una opción. Sin embargo, debido a la creciente complejidad de los problemas que enfrenta el economista es necesario considerar seriamente el empleo de las técnicas computacionales tanto en su formación como en su desempeño profesional.

En nuestro medio lograr lo anterior presenta algunas dificultades de orden práctico, éstas esencialmente son:

1) En el mercado existen muchas obras sobre métodos númericos y computación, pero orientadas hacia la solución de problemas propios de las ciencias de la ingeniería o hacia aplicaciones de tipo administrativo.

2) La falta de comunicación que existe entre aquellos economistas que encaminan sus esfuerzos por este camino.

Por lo que pensamos que este trabajo puede ser de utilidad a quienes deseen hacer uso de estas "herramientas" en el ámbito de la Ciencia Económica.

ORGANIZACION DEL TEXTO

Este trabajo consta de dos partes, la primera se dedica a exponer los principios de la computación con equipo electrónico digital. Es decir, se trata de la comunicación que existe desde hace algunas décadas entre los seres humanos y una clase especial de "máquinas": las computadoras. En tanto que en la segunda se presentan algunas aplicaciones de métodos numéricos a la Economía empleando computadoras.

En el capítulo uno se hace una breve reseña de la historia de la computación. En el capítulo dos se estudiará la "anatomía" de las computadoras. En el capítulo tres se da un vistazo a los principales temas del analísis numérico, presentando una pequeña colección de algoritmos clásicos.

En los capítulos cuatro a siete se tratan los problemas que pueden considerarse típicos en la microeconomía y en la macroeconomía, en cada caso además de una breve discusión del tema se incluyen los algoritmos y programas que se pueden utilizar en su solución por computadora. El capitulo cuatro se refiere a los elementos teóricos esenciales del análisis de insumo producto, el cinco se trata de la programación matemática, el capitulo seis describe las técnicas básicas de regresión empleadas en la econométría, mientras que el capítulo siete discute sobre la simulación de sistemas económicos en computadora digital. Finalmente se incluye un glosario con aquellos términos de la jerga computacional que pudieran resultar desconocidos o poco claros al lector.

Para los lectores interesados en conocer con más detalle los métodos y la aplicación de ellos utilizando computadoras, en la bibliografía se han marcado con un asterisco aquellas obras que a nuestro juicio pueden satisfacer dicho interés.

Por lo que toca a los programas se han escrito en el lenguaje de programación PASCAL, debido a que es un lenguaje estandarizado, de gran poder expresivo y de amplia disponibilidad en equipos de bajo costo.

Capítulo 1

BREVE HISTORIA DE LA COMPUTACION

A través de la historia, se observa que los seres humanos han desarrollado una enorme cantidad de métodos para contar y calcular cada vez de manera más rápida y eficiente. En las siguientes secciones se verán algunos de los hechos más relevantes en la historia de la computación (ver (17) y (44)). Historia que se inició hace miles de años con el uso de los dedos y que hoy continúa desarrollándose con las sorprendentes microcomputadoras.

1.1 DEDOS, MARCAS Y RUEDAS

El proceso de contar es tan familiar que suele parecer trivial; si se reflexiona un poco es posible percatarse de que en gran parte de las actividades diarias interviene dicho proceso, sea implícita o explícitamente. Esto se debe a que desde tiempo inmemorial los seres humanos han tenido la necesidad de conocer, comunicar y registrar el número de objetos, el tiempo o la distancia, es decir, han tenido la necesidad de contar. Esto lo realizaron probablemente de manera intuitiva empleando sus propios dedos, pero este sencillo método tiene un serio inconveniente, se sabe por experiencia propia, su alcance limitado. En otras palabras, contar con los dedos se complica de manera creciente cuando se tienen que contar cantidades mayores a la decena.

A medida que fué creciendo la necesidad de contar más allá de diez, el ingenio de los hombres hubo de aguzarse de tal manera que crearon otras técnicas, por ejemplo, haciendo pequeños cortes en una rama, trazos en una tablilla de arcilla fresca, nudos en una cuerda, entre otros. Esto permitió no sólo contar, sino tener al mismo tiempo, registros de la información en forma permanente. Sin embargo, conforme la civilización se fue desarrollando la necesidad de efectuar operaciones aritméticas se incrementó. Entonces surgió una de las tecnologias más importantes para la mecanización de los cálculos aritméticos: el ábaco.

El avance logrado con la invención del ábaco es muy significativo ya que, permitió mecanizar el proceso de contar y aún más, ejecutar las operaciones aritméticas de manera sencilla y eficiente. Sobre todo si se considera que en aquella época el uso de la notación no posicional para representar los números era de uso corriente, v. g. la numeración romana, donde sumar dos números como pueden ser MCMLXXXIV (1984) y MMDCCCXLVIII (2848) resulta toda una hazaña.

Es hasta el siglo IX cuando los hindués inventan la notación posicional, que no es otra cosa que un modelo simbólico del ábaco, usando por primera vez un simbolo para representar el concepto de cero. Con esta invención de los hindués al ser propagada por los árabes (por lo que se conoce como notación arábiga) se establecieron las bases lógicas para el desarrollo de verdaderas máquinas de cálculo.

A pesar de los avances que se derivaron de la invención de la notación posicional, el manipular números continuó teniendo varias limitaciones y no fué sino hasta 1642, aproximadamente 25 años después de que John Napier desarrolló el concepto de logaritmo, que Blas Pascal inventó una máquina para realizar las operaciones aritméticas. Ese dispositivo estaba constituido por una serie de ruedas dentadas montadas sobre ejes. Cada una de las ruedas tenía diez dientes, uno por cada dígito decimal (0-9). Aunque su funcionamiento mecánico no era todo lo bueno que el gran Pascal hubiera deseado, era efectivo y reducía el trabajo del empleado contable. Paradójicamente, esa calculadora mecánica no tuvo éxito, principalmente por su elevado costo, así como el temor, muy natural en los humanos, de ser desplazados del trabajo por una máquina. Hoy en día, ese mismo temor es la causa de la resistencia a la computarización. Por lo que, no sería raro que un día de éstos, hombres armados con palos y piedras destruyeran alguna computadora en el más puro estilo de la revolución industrial.

Años más tarde, el genial filósofo alemán, Gottfried Leibniz modificó la pascalina, añadiéndole una rueda con dientes de distinta longitud a fin de aligerar el trabajo necesario para el cálculo de las cuatro operaciones elementales y poder obtener además raices; actualmente la rueda escalonada de Leibniz se sigue utilizando, prácticamente sin ninguna modificación, en las modernas calculadoras electromecánicas.

Fué en los primeros años del siglo XIX a la luz de la revolución industrial que se inventó la tarjeta perforada, con la cual fué posible controlar los telares de manera que pudiera realizar en los tejidos los más diversos diseños. Pero no fué sino hasta fines de ese mismo siglo cuando la tarjeta perforada se usó por primera vez para la mecanización del cómputo, ésto ocurrió cuando Herman Hollerith desarrolló su máquina tabuladora para llevar a cabo el censo de población de los E. U. de 1890. Cabe mencionar que la empresa que fundó Hollerith fué la base para la creación del hoy todo poderoso "BIG BLUE", es decir, la International Business Machines Inc. (IBM).

1.2 EL SUEÑO DE CHARLES BABBAGE

En el siglo XIX el matemático e inventor inglés Charles Babbage motivado por la creciente necesidad de realizar cálculos cada vez más complejos y el alto grado de error que existía en la mayoría de ellos, ideó y construyó en 1822 un artefacto al que llamó la "máquina de diferencias", debido a que esta máquina era capaz de resolver ecuaciones polinomiales calculando las diferencias entre series de números.

Al idear Babbage la máquina de diferencias se propuso que además de efectuar los cálculos necesarios para construir las tablas las imprimiera en papel. Sin embargo, se encontró con serias dificultades de orden tecnológico, pues si bien, la máquina a pequeña escala funcionó, a escala mayor resultó un rotundo fracaso. Esto se debió principalmente a que cualquier desajuste, por pequeño que sea, es propagado y amplificado de tal manera por los sistemas mecánicos, que llega a impedir su funcionamiento.

Con el tiempo Babbage mejoró su idea y decidió construir otro tipo de máquina, a la que llamó la "máquina analítica"; una máquina que parecía poder hacer cualquier cosa (excepto funcionar). Grosso modo, en la máquina analítica Babbage conceptualmente contemplaba los cuatro componentes básicos de cualquier computadora actual:

- Mecanismos de entrada y salida que permitieran la comunicación entre los humanos y la máquina.

- Unidad aritmética, a la que Babbage llamó el "molino", donde se efectuarían las operaciones aritméticas y lógicas.

- Unidad de control para verificar que se realizarán correctamente las tareas y operaciones.

- Memoria o almacén donde guardar los datos y los resultados de las operaciones mientras se lleva a efecto una tarea.

Babbage nunca pudo ver materializado su sueño, debido en parte a que el Gobierno Inglés no quizo financiar el proyecto porque en los anteriores había fracasado y gastado demasiado dinero, y en parte a la falta de una tecnología apropiada, por ejemplo, relevadores electromecánicos.

Es importante destacar que las ideas y los proyectos de Babbage no contribuyeron al avance de la computación, pues por desgracia para Babbage y la Humanidad, sus escritos fueron ignorados por mucho tiempo. El mérito que tuvo y que hay que reconocer fué el haberse adelantado a su tiempo al diseñar una cuasi computadora.

Tuvieron que pasar más de cien años para que el sueño de Charles Babbage se realizara, lo que ocurrió cuando H. Aiken construyó la máquina electromecánica llamada MARK I, ésta realizaba las operaciones aritméticas mediante relevadores electromecánicos, utilizando cintas y bandas de papel perforadas para suministrar los datos, dar órdenes y almacenar la información. El esquema lógico de la MARK I correspondió en gran medida al diseño de la máquina analítica de Babbage; los inconvenientes que presentaba eran su tamaño físico y sobre todo el tener que programarla mediante cintas de papel perforadas, característica que complicaba la realización de procesos iterativos.

El término "computadora" fue acuñado por el lógico matemático Alan Turing en un artículo sobre la teoría de la computabilidad titulado "On computable numbers, with an aplication to the Entsheidungsproblem" publicado en 1936. En su escrito Turing define una clase de máquinas abstractas (que hoy llevan su nombre) sumamente sencillas y sin embargo increíblemente poderosas. De manera informal una máquina de Turing se compone de una cinta dividida en celdas capaces de almacenar un símbolo (datos e instrucciones), y un carro sobre la cinta capaz de leer el símbolo contenido por la celda sobre el que está ubicado, así como escribir un símbolo en sustitución de aquél. Es fácil ver que la cinta juega el papel de memoria y el carro de unidad de control, y que como se verá más adelante están presentes en cualquier computadora actual. Aún más, desde el punto de vista lógico una computadora es una colección de máquinas de Turing más o menos elaborada (ver (34)).

A mediados de los años cuarenta, J. Mauchly y P. Eckert construyeron la ENIAC (Electronic Numeric Integrator and Accounting Computer) utilizando por primera vez componentes electrónicos (tubos de vacío y líneas de retardo) para los circuitos y como medio de almacenamiento de la información. Esta máquina estaba destinada a una aplicación militar, la resolución de ecuaciones de balística; curiosamente la máquina terminó de ser construida más o menos un año después del fin de la segunda guerra mundial.

Más tarde J. von Neumann y un grupo de colaboradores diseñaron la EDVAC (Electronic Discrete-Variable Automatic Computer) también conocida como la IAS (Institute of Advanced Studies). Esta máquina fue la primera en que los datos y programas compartían una memoria común tal como lo hace una máquina de Turing; siendo también la primera que se basó en la hoy llamada arquitectura von Neumann, sentando así las bases teórico prácticas del diseño y construcción de las computadoras digitales.

En esos primeros y heróicos años de la computación electrónica parecía que sólo los gobiernos y fuerzas armadas de los países desarrollados podrían contar con máquinas computadoras. Sin embargo, en los primeros años de la década de los cincuentas P. Eckert y J. Mauchly diseñan y construyen la primera computadora para uso comercial la UNIVAC I (Universal Automatic Computer). Hecho que marcó el fin de la prehistoria de la computación y el inicio de una nueva era de incesante e increíble desarrollo tecnológico. Este ha sido estimulado esencialmente por tres motivos:

a) El armamentismo,
b) La carrera aeroespacial, y
c) La comercialización

Los requerimientos específicos de los dos primeros han impulsado la miniaturización y la fabricación en serie de toda clase de dispositivos. En tanto que la comercialización encontró una serie de mercados nuevos como son la automatización de oficinas, los video juegos y la instrucción asistida por computadora, entre otros.

1.3 GENERACIONES

La evolución de las computadoras convencionalmente se describe de acuerdo a las características de los componentes electrónicos que predominan en su construcción, a cada una de esas etapas suele llamárseles "generación". El cambio de una generación a otra se ha dado de manera contínua a una velocidad jamás lograda en rama alguna del quehacer humano. Por ejemplo, las máquinas de la primera generación llegaron a ocupar decenas de metros cuadrados, consumían exorbitantes cantidades de energía y costaron millones de dólares; en la actualidad una computadora de las llamadas PC (Personal Computer), cuestan menos de 5,000 dólares, ocupan parte de un escritorio común y su consumo de energía es menqr o igual al de una plancha eléctrica. Existen también las portátiles, no mayores que un portafolios, que funcionan con cuatro pilas de 1.5 voltios y su costo es menor a los 500 dólares. Todo ello en menos de treinta y cinco años. Que esto sea así, se debe principalmente a que las computadoras a diferencia de cualquier otro producto, incide directamente en el diseño y construcción de la siguiente generación de computadoras. Por ejemplo, con un torno mécanico, sin duda, se puede construir otro torno, quizá mejorado, pero difícilmente participará en el diseño de los nuevos tornos. En tanto que las computadoras y sus componentes (circuitos integrados a alta escala) son diseñados, construidos y probados mediante procesos asistidos por computadora.

Sin embargo, este desarrollo ha ido tomado de la mano de una estructura de mercado claramente oligopólica; a partir de los años cincuenta unas cuantas compañías gigantescas han dominado totalmente el mercado mundial de las computadoras. De ellas ocho son norteamericanas: IBM, Sperry/UNIVAC, Burroughs, Control Data Corporation, National Cash Register, Honeywell, Digital Equipment Corporation y Hewlett Packard; y tres europeas: Siemens

(Alemania), Olivetti (Italia) e ICL (Inglaterra). Entre ellas destaca la IBM, la que a partir de 1960 se adueñó del 70% del mercado consolidándose como el estándar comercial, es decir, los demás fabricantes se han visto forzados a ofrecer computadoras compatibles con las distintas computadoras IBM. En particular con las "vedettes" de las computadoras: -IBM 360- e -IBM PC-.

1.4 MACROS, MINIS y MICROS

Hasta hace unos diez o doce años el término computadora era empleado para denotar cualquier equipo dedicado al procesamiento electrónico de datos (EDP). Sin embargo, hoy en día el propio desarrollo de estos artefactos han hecho necesario agruparlos en tres clases de acuerdo a su capacidad y potencia:

1. Computadoras

Esta clase de equipos se caracterizan por su alta velocidad de operación y gran capacidad de almacenamiento de datos, lo que les permite atender decenas de usuarios en forma concurrente. Los equipos representativos de esta clase de computadoras son las series: IBM 33xx, IBM 43xx, CDC Cyber, Sperry 1100, y Burroughs 7900. Cada una de las cuales tiene varios modelos que abarcan una amplia gama de posibilidades en cuanto a potencia y capacidades se refiere.

Estos equipos son requeridos tanto en la gestión administrativa, como en la investigación científica y tecnológica. Como ejemplo de una aplicación científica considérese la capacidad de procesamiento y almacenamiento de información requerido para aprovechar los datos enviados por un satélite en órbita. También en la administración existen aplicaciones que sólo pueden ser llevadas a cabo por una gran computadora; un ejemplo claro de este tipo de aplicaciones es el procesamiento de un censo nacional de población.

2. Minicomputadoras

El término minicomputadora es engañoso; debido a que los equipos así denominados sólo son "mini" en lo que se refiere a precio y tamaño, pues en general prestan los mismos servicios que una computadora mediana. Incluso bajo una configuración de red pueden reemplazar con éxito un equipo grande, con la ventaja adicional de evitar la centralización al acercar el equipo al usuario final. Los equipos representativos de esta clase son: VAX/11 y PDP-11 ambos producidos por la firma Digital Equipment Corporation en varios modelos y HP 3000 de la Hewlett Packard.

De entre sus muchas aplicaciones se destacan las siguientes: control de procesos industriales, comunicaciones y sistemas de información.

3. Microcomputadoras

En la actualidad las microcomputadoras constituyen uno de los sectores más importantes en el mercado de bienes informáticos. Típicamente una microcomputadora está basada en un microprocesador, es decir, un circuito integrado capaz de dirigir, controlar y coordinar toda la actividad del sistema. Esta clase de computadoras se está empleando en muchas de las tareas que anteriormente eran cubiertas por minicomputadoras. Los equipos representativos de esta clase son los producidos principalmente por Apple, Tandy Radio Shack, IBM, Hewlett Packard y Commodore.

El número de aplicaciones cubiertas por esta clase de computadoras es extremadamente amplio, entre ellas se cuentan el procesamiento de textos, contabilidad, nóminas, inventarios, bases de datos, hojas electrónicas, instrucción asistida por computadora, juegos y muchas más.

En suma, los equipos de cada una de estas clases ofrece características ideales para los diferentes tipos de usuario, pues si bien a medida que se desciende en la escala aparecen equipos menos potentes, estos son más baratos y versátiles.

1.5 UNA NUEVA MENTALIDAD

Es difícil dudar que las computadoras han sumergido a la Humanidad, casi sin que ésta lo perciba, en lo que ya algunos llaman la Era de la Computación. Su aplicación repercute en todos y cada uno de los aspectos de la sociedad. Aspectos que necesariamente experimentarán, de hecho están experimentando, una transformación casi total, lo que implica la necesidad imperiosa de crear una nueva mentalidad, es decir, considerar no sólo el poder que implica la capacidad para manipular millones de datos, sino también la posibilidad de que las computadoras puedan hacer muchas de las cosas que requieren de inteligencia, esto es, que puedan llevar a cabo tareas que aún hoy pueden parecer sacadas de una novela de ciencia ficción (no necesariamente de la buena); por ejemplo, supervisar el desarrollo de los cultivos agrícolas, ayudar en los diagnósticos médicos e incluso sugerir el tratamiento, proporcionar enseñanza tutelar, diseñar computadoras y porque no, ayudar a planificar la economía.

Esto último a primera vista quizá suene utópico, sin embargo en la actualidad las computadoras ya intervienen en la planificación económica en distintos niveles de complejidad, sobre todo en la toma de decisiones donde el procesamiento de grandes volumenes de datos en forma precisa y oportuna es esencial. Desde el punto de vista computacional la mayoria de las herramientas (programas) empleadas para el procesamiento de información socieconómica se basa en algún método numérico. Por ejemplo, la inversión de matrices, el ajuste de curvas, la programación lineal, etc. Técnicas que sólo mediante el uso de computadoras es posible aplicar de manera efectiva a los problemas de la Ciencia Económica, debido a su gran complejidad y tamaño.

Capitulo 2

ANATOMIA DE LAS COMPUTADORAS

En la actualidad hablar de computadoras se ha vuelto un lugar común, toda clase de personas, en todo tipo de lugares hacen constante referencia a estos dichosos artefactos. Así que cabe preguntar ¿Qué es una computadora?, ¿Cuáles son sus partes?, ¿Cómo funcionan?. En este capítulo se trata de responder a éstas y algunas otras preguntas acerca de las computadoras. El enfoque es desde el punto de vista del usuario final, esto es, se estudiará su diseño y funcionamiento lógico. Quedando fuera del alcance de este trabajo la manera en que esto se realiza fisicamente, es decir, su diseño y funcionamiento electrónico. El lector interesado podrá obtener información más detallada en las obras de referencia {13}, {43}, {50} y {58} que se ofrecen en la bibliografía.

2.1 ORGANIZACION DE LAS COMPUTADORAS

Independientemente de su tamaño toda computadora está constituida de una unidad central de proceso, una memoria principal y uno o más dispositivos periféricos, la organización típica de estas máquinas se presenta en forma esquemática en la figura 2.1.

Figura 2.1 Estructura esquemática de una computadora

```
+-----------+     +-------------------+     +---------------+
| Memoria   |_____| UNIDAD    CENTRAL |_____| Dispositivos  |
| principal |     |    DE PROCESO     |     | periféricos   |
+-----------+     +-------------------+     +---------------+
```

Este esquema servirá para establecer la terminología mínima usualmente empleada para referirse a los componentes físicos de una computadora, en una palabra al "hardware".

UNIDAD CENTRAL DE PROCESO

La unidad central de proceso (CPU) o procesador central es el componente principal de cualquier computadora, por grande o pequeña que ésta sea. La CPU tiene como funciones interpretar y ejecutar las instrucciones que se le dan a la máquina, así como vigilar que esos procesos se lleven a cabo correctamente.

MEMORIA PRINCIPAL

La memoria principal o simplemente memoria, es el dispositivo en que residen todas las instrucciones (esto es el programa), así como la información (los datos) necesaria para que el proceso programado se efectué.

La manera en que la memoria está organizada puede ser fácilmente visualizada si se le considera como análoga a las cajas de apartado postal de cualquier oficina de correos, ahí cada una de las cajas tiene asociado un número único entre cero y n. A ese número se le llama dirección de la localidad de memoria. En cada una de esas localidades de memoria se tiene la capacidad para almacenar un patrón de señales binarias a las que se les dá el nombre de "palabra". Una palabra está constituida por un número fijo de dígitos binarios contiguos, a los que de ordinario se les llama bits. Un bit es la unidad mínima de almacenamiento en una computadora; al número de bits que forman una palabra se le denomina longitud de la palabra, la cual depende específicamente de la máquina que se trate. Las longitudes de palabra típicas son 8, 16 y 32 bits, aunque pueden encontrarse de 12, 36, 48, 60, 64 y 80 bits; esta característica es sumamente importante puesto que de ella depende la magnitud de los números enteros sin signo que pueden ser representados en la memoria directamente. Por ejemplo, en una máquina con palabras de 16 bits la magnitud máxima que puede ser representada es de 65535 = 2^{16} - 1, esto puede parecer una fuerte limitación, pero sólo lo es en apariencia, debido a que existe una variedad de métodos para representar no sólo los números sino cualquier otra clase de información.

En la figura 2.2 se muestra una representación de las unidades de almacenamiento más comunes y los tipos de datos asociados a ellas. Comenzando con la unidad de almacenamiento más pequeña: el bit.

Figura 2.2 Unidades de almacenamiento y tipos de datos asociados

Unidad de almacenamiento	Longitud en bits	Tipo de dato	Ejemplo
Bit	1	Lógico	Valores de verdad 0 = Falso 1 = Verdad
Byte	8	Caracteres	Letras, números y símbolos Aa Bb ... Zz 0 ... 9 ! @ # $ % , : ...()
Palabra	8 a 64	Números	Ordinales y enteros 1, 204, 12, 79, 6, 678 7, -5, -567, +5555, -1
Doble Palabra	16 a 80	Números	Reales 1.245, -345.5, 3.141592

A partir de estas unidades de almacenamiento simples es posible construir otras más elaboradas, por ejemplo, los números complejos pueden ser representados mediante una pareja de números reales almacenando cada uno de los componentes en una doble palabra.

DISPOSITIVOS PERIFERICOS

La comunicación entre los seres humanos y las computadoras se hace a través de ciertos dispositivos a los que genéricamente se les denomina periféricos; éstos son equivalentes en alguna forma a los órganos de los sentidos y a las extremidades de los seres vivos, pues es por medio de ellos que las computadoras intercambian información con los humanos, el medio ambiente u otras computadoras.

Estos dispositivos se pueden clasificar en tres grandes grupos:

De entrada. Reciben información del exterior, que puede provenir de los humanos o del medio ambiente en forma directa; ejemplos de éstos son: los teclados, las lectoras de tarjetas perforadas, los sensores de presión, los lectores ópticos, microfónos, etc.

De salida. A través de esta clase de dispositivos las computadoras proporcionan a los humanos la información resultante de los procesos efectuados; entre éstos se encuentran: las impresoras, las pantallas, los graficadores, sintetizadores de sonido y de voz entre muchos otros.

. De entrada y salida. Este grupo de dispositivos en ocasiones también llamado de memoria externa o masiva permiten almacenar, manejar e intercambiar grandes volumenes de información a gran velocidad. A diferencia de los dispositivos de los grupos anteriores, estos dispositivos permiten la lectura/escritura de información sobre algun medio, por lo general magnético; ejemplos de éstos son: cintas magnéticas, discos y tambores magnéticos, memorias de semiconductores, memorias de burbuja, entre otros.

2.2 PROGRAMAS DE COMPUTADORA

Hasta este punto se ha hablado únicamente de una de las dos partes esenciales de las computadoras: el hardware, o sea la parte física. En esta sección se hace una breve exposición de la parte intangible de las computadoras: el "software".

¿QUE ES EL SOFTWARE?

La palabra software nace en contraposición al término hardware, el cual, como se dijo antes, habitualmente se emplea para designar los componentes físicos de la computadora, es decir, al equipo. En tanto que software se emplea para denotar a un conjunto de instrucciones, programas, procedimientos y por extensión a la documentación asociada a la operación de un sistema de procesamiento de datos. Por ejemplo, compiladores, biblioteca de rutinas, manuales.

Aunque se ha definido el software como todos los programas utilizados por las computadoras, especificamente se trata del soporte lógico que utiliza la máquina para operar. Es mediante el software que los humanos emplean los recursos físicos de las computadoras para procesar la información.

Conforme ha pasado el tiempo la programación de computadoras ha evolucionado de manera sorprendente, si bien continúa siendo una extraodinaria mezcla de arte, ciencia e ingenio. Sin embargo, la manera en que actualmente se programa, dista mucho de lo que tuvieron que hacer los pioneros de la computación, quienes prácticamente se comunicaban con las máquinas en el lenguaje de éstas con todo el esfuerzo que ésto implíca. Para mostrar al lector en forma sucinta la evolución de la programación, en la figura 2.3 se presentan en forma esquemática ejemplos de los diferentes estadíos de los lenguajes de programación de computadoras cubiertos hasta la fecha.

Figura 2.3 El lenguaje natural y los lenguajes de programación

Lenguaje	Planteamiento del problema
Natural	
Español	¿Cuanto suman diez y dos?
De programación	
De máquina MIX	10100111000011 01100000010000 11001110001110
Ensamblador MIX AL	LDA 5(1:5) ; toma 10 ADD 6(1:5) ; suma 2 STA 7(1:5) ; resultado
Algebráico Fortran	x = 10.0 + 2.0
Lógico Prolog	Cual(x : SUMA (10 2 x))

Como se puede observar en la figura 2.3, la tendencia ha sido acercarse hacia la forma de expresión humana, siendo el paradigma el lenguaje natural, esto es, que las máquinas y los humanos se comuniquen directamente en el lenguaje humano, v. g. en Español.

DE PROGRAMAS A PROGRAMAS

Para facilitar la comunicación entre los humanos y las máquinas, actualmente existen diversas capas de especialización del software, correspondientes a los niveles de especialización de los humanos en computación. En el esquema de la figura 2.4 se muestran las distintas capas de software que existen entre el hardware y las personas. Sobra decir que esta clasificación es arbitraria y como ésta se pueden elaborar muchas otras.

Figura 2.4 Las distintas capas de software

```
                           PERSONAS
+------------------------------------------------------------+
|      PROGRAMAS DE          |    PAQUETES DE PROGRAMAS      |
|       APLICACION           |      ESPECIALIZADOS           |
+------------------------------------------------------------+
|      S O F T W A R E   D E   P R O P O S I T O             |
|                     G E N E R A L                          |
+------------------------------------------------------------+
|           S I S T E M A   O P E R A T I V O                |
+------------------------------------------------------------+
                           MAQUINA
```

PROGRAMAS DE APLICACION

Los programas que se escriben y utilizan para resolver un problema específico, por ejemplo, producir un informe en particular, calcular una nómina o simular un sistema económico, se les denomina programas de aplicación. Estos programas generalmente son escritos por el propio usuario (en el sentido más amplio del término), haciendo uso de uno de los lenguajes de propósito general, por ejemplo COBOL; o bien empleando un lenguaje de propósito específico como DYNAMO para la simulación de sistemas dinámicos. El problema que presenta esta clase de software es que para desarrollarlo se requiere de un conocimiento adecuado de las herramientas a usar, es decir, dominar las "ciencias y artes" de la programación de computadoras, v. g. estructuras de datos, organización de archivos, etc.

Es importante mencionar que los programas de aplicación, pueden ser tan complejos o más que el software de propósito general, por ejemplo, considérese la complejidad de los programas empleados para el control de una planta termonuclear.

PAQUETES DE PROGRAMAS ESPECIALIZADOS

Un paquete de programas especializados es una colección de procedimientos para llevar a cabo alguna función específica o cálculo útil a más de un usuario. Esta clase de programas es un punto intermedio entre el software de propósito general y los programas de aplicación; un ejemplo de esta clase lo constituye el SPSS (Statistical Package for the Social Sciences), que es uno de los paquetes más completos y de mayor uso en el mundo. El SPSS consiste de un conjunto de procedimientos estadísticos que cubren las siguientes áreas:

- Estadística descriptiva
- Confiabilidad de los estadísticos
- Confiabilidad de la diferencia entre estadísticos
- Tablas de contingencia
- Análisis de regresión múltiple.
- Análisis de varianza y covarianza
- Análisis factorial
- Análisis de discriminante
- Análisis de escalograma de Guttman

En la categoría de paquetes de programas especializados se pueden incluir muchos otros programas o colecciones de ellos, por ejemplo, los procesadores de textos o las populares hojas electrónicas de cálculo llamadas "spreadsheet"; sistemas de graficación y cientos de programas más.

La ventaja que tiene este tipo de paquetes es que pueden ser usados por personas con escasos conocimientos de programación. Sin embargo, debe advertirse que el hacer un uso racional de estos recursos de cómputo no es tan fácil como parece. Por lo que es conveniente que el usuario en potencia cuente con el apoyo y asesoría de personal especializado en el uso de estos paquetes.

SOFTWARE DE PROPOSITO GENERAL

La categoría de software de propósito general se refiere a aquellos programas que permiten desarrollar otros programas, es decir, en esta categoría están principalmente los programas compiladores de los lenguajes de programación como FORTRAN, COBOL, BASIC, PASCAL, LISP y PROLOG por sólo mencionar algunos. Con esta clase de software el programador tiene a su disposición elementos que le permiten desarrollar programas de aplicación o cualquier otra clase de software.

Es importante mencionar que para realizar esta clase de software se requiere de conocimientos de computación equivalentes a una maestria o doctorado en Ciencias de la Computación o en Informática.

SISTEMA OPERATIVO

El sistema operativo es la parte del software que permite explotar los recursos del sistema de cómputo de manera racional. Sin embargo, el alcance de un sistema operativo no se restringe al control de los recursos, sino que satisface una serie de requerimientos como son: la confiabilidad, la protección, la eficiencia, la predictibilidad del sistema de cómputo, etc. Los sistemas operativos actuales son el producto de árduo trabajo de muchos años de cientos de personas altamente calificadas en ciencias de la computación.

En resumen, el software es el componente lógico, que actuando sobre el hardware, permite que la computadora realice su trabajo en forma automática.

Capítulo 3

UN VISTAZO AL ANALISIS NUMERICO

En este capítulo se presenta una breve introducción a esa importante rama de las matemáticas aplicadas que es el Análisis Numérico. En ella se hace un esbozo de los principales temas de esta rama de las matemáticas y de los métodos clásicos empleados así como su tratamiento algorítmico.

3.1 ¿QUE ES EL ANALISIS NUMERICO?

El Análisis Numérico es la rama de las matemáticas a la que le compete el desarrollo, análisis y uso de algoritmos que simulan procesos físicos y sociales. En otras palabras, el análisis numérico permite obtener soluciones numéricas aproximadas (tanto como se desee) de modelos matemáticos de sistemas físicos o sociales, con propósitos de predicción o explicación de su comportamiento.

Es una de las ramas más antiguas de la ciencia matemática, su historia data de los tiempos en que la predicción precisa de los fenómenos celestes era crucial en el ciclo de vida de la mayoría de las civilizaciones de la antiguedad. Sin embargo, es sólo hasta hace unos dos o tres siglos que se empezó a desarrollar en forma sistemática. Muchos de los matemáticos más notables de los siglos XVIII y XIX, entre ellos Newton, Gauss y Euler, desarrollaron algoritmos que hoy en día se siguen usando ampliamente, por ejemplo: el método de eliminación de Gauss para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Quizás el punto culminante del análisis numérico clásico se alcanzó en los trabajos de Leonardo Euler, quién siempre tuvo en mente el uso numérico inmediato de sus fórmulas y algoritmos. Desafortunadamente, después de Euler el desarrollo del análisis numérico fué decreciendo lenta, pero firmemente, debido principalmente a las exigencias computacionales que los métodos constructivos presentaban a medida que los problemas sujetos a la investigación matemática aumentaban su alcance y generalidad; ésto condujo a los matemáticos a inclinarse cada vez más por los métodos lógicos en lugar de los constructivos, situación que prevaleció prácticamente hasta el advenimiento de las computadoras en la década de los cuarenta. Evento que ocasionó que el estudio y desarrollo del análisis numérico saliera del letargo en que se encontraba sumergido y que a la vez permitió lograr nuevos y grandes avances en la resolución de problemas de alta complejidad, tanto en la ciencia como en la tecnología.

Sin embargo, el uso de las computadoras también ha generado nuevos problemas para los matemáticos. Por una parte descubrir algoritmos que sean más rápidos, eficientes y estables desde el punto de vista computacional y por otra como adquirir un mayor conocimiento en el análisis de errores.

3.2 ERRORES DE REDONDEO E INESTABILIDAD NUMERICA

Los programas de computadora pueden ser vistos como modelos de situaciones del mundo real. Desafortunadamente, no todos los aspectos de estas situaciones reales pueden ser representados en una computadora con la precisión deseada debido a su capacidad finita para el manejo de los números reales; por ejemplo, cantidades decimales como 1.17 o 7659233.7295 es posible que tengan que ser almacenadas de manera aproximada en la memoria de una computadora binaria. Lo que puede ocasionar que las operaciones realizadas subsecuentemente con esos valores produzcan resultados no siempre válidos.

El meollo de este problema es la representación de los valores en la máquina, debido a que ésta se halla limitada por la longitud finita de una palabra de computadora, entonces la representación debe ser redondeada a la aproximación más cercana que sea posible de manera que se preserve el esquema de representación; de aquí el nombre de "error de redondeo". Por ejemplo, en una computadora con palabras de n bits, cuando se multiplican dos números, cada uno teniendo n bits, el producto resultante es un número de 2n bits, si este número es redondeado a n bits, entonces se genera un error de redondeo. Estos errores se propagan recurrentemente en formas por demás complicadas. El lector interesado podrá encontrar un tratamiento detallado de este tema en el libro de Ralston "Introducción al Análisis Numérico" (47).

Otro problema que aparece al usar computadoras es la inestabilidad numérica, que puede producirse a partir de los errores de redondeo introducidos en el conjunto desde cualquier fuente que se propagan de diferentes maneras. En algunos procesos algorítmicos estos errores tienden a crecer en forma exponencial con efectos computacionales desastrosos. Los algoritmos que exhiben tal comportamiento se dice que son numéricamente inestables, en otras palabras, sensibles a los errores de redondeo acumulados; de tal suerte que los analistas numéricos deben procurarse algoritmos no sólo rápidos y eficientes, sino también estables en cualquier ocasión.

3.3 TEMAS TRADICIONALES DEL ANALISIS NUMERICO

Los temas que tradicionalmente se estudian en un curso básico de analísis numérico son:

1. Determinación de raíces de ecuaciones
2. Interpolación
3. Solución de sistemas de ecuaciones lineales
4. Diferenciación numérica
5. Cuadratura o integración numérica
6. Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias

En las siguientes secciones se hace una breve discusión de los algoritmos "clásicos" de cada una de estas áreas. Se sugiere al lector interesado en mayores detalles, consultar alguna de las obras listadas en la bibliografía en especial las marcadas con los números {11}, {25} y {53}.

3.4 DETERMINACION DE RAICES DE ECUACIONES

La Economía, como otras ciencias, se apoya en las matemáticas para el estudio de diversos fenómenos. Durante esos estudios a menudo es necesario determinar las raíces de ecuaciones de una variable; algunos ejemplos de estas ecuaciones son:

$$x^3 - 4x - 1 = 0$$
$$\exp(x) - 2\cos(x) = 0$$
$$4x - 2\tan(x) = 0$$

Para las cuales, raramente es posible determinar sus raíces en forma análitica. Es en estos casos cuando se requiere considerar algún método que produzca una "solución aproximada". Donde "solución aproximada" quiere decir, un punto x^* para el cual una función $f(x) = 0$ se satisface aproximadamente, en otras palabras, un punto x^* que está "cercano a" una solución de $f(x)$.

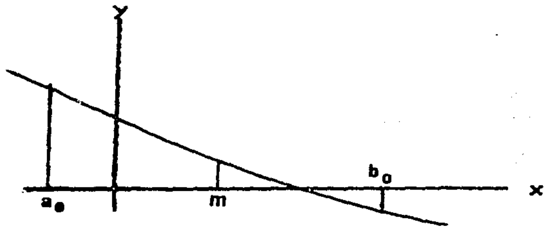
La lista de métodos disponibles para atacar este problema es larga y variada de manera que la elección del método a usar depende de las necesidades específicas del usuario potencial del método, esto es, si se necesitan todas las raíces de una ecuación en particular o sólo algunas, si las raíces son reales o complejas, simples o múltiples, etc.

METODO DE BISECCION

El método más simple para hallar un cero real simple de una función continua $f(x)$ es el método de Bolzano o de bisección (ver {25}). El proceso se inicia hallando un intervalo (a_0, b_0) en el que se encuentra el cero o raíz deseada. Si el cero es simple, entonces $f(a_0)$ y $f(b_0)$ deben ser de signo opuesto, la manera usual de probar ésto, se basa en la siguiente desigualdad:

$$f(a_0) * f(b_0) < 0 \qquad (3.1)$$

Figura 3.1 Método de bisección



El siguiente paso consiste en bisectar el intervalo $(a_0,\ b_0)$, es decir, cálcular el punto medio del intervalo: $m = 1/2\,(a_0 + b_0)$. Entonces se evalúa $f(m)$ y se forma el producto $f(a_0) * f(m)$. Si el producto es negativo, entonces el cero se encuentra en el intervalo $(a_0,\ m)$; en caso contrario, éste se encuentra en el intervalo $(m,\ b_0)$. Ahora bien, si $f(a_0) * f(m) = 0$, entonces m es el cero buscado, si no se procede a bisectar el nuevo intervalo, el cual se sabe que contiene el cero, y se repite enteramente el proceso hasta que se obtiene el cero con la precisión deseada. A continuación se presenta este procedimiento en forma algorítmica.

Algoritmo 3.1 Método de bisección

Dada una función $f(x)$ contínua en el intervalo $(a_0,\ b_0)$ tal que:

Si $f(a_0) * f(b_0) <= 0$ entonces

Para $n := 0, 1, 2...,$ hasta que se satisfaga, hacer

{$m := (a_n + b_n) / 2$;

if $f(a_n) * f(m) <= 0$, $a_{n+1} := a_n$; $b_{n+1} := m$;

en caso contrario, $a_{n+1} := m$; $b_{n+1} := b_n$;}

Entonces $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $(a_{n+1},\ b_{n+1})$.

La frase "hasta que se satisfaga" usada en el algoritmo 3.1 se debe precisar al programar el algoritmo en computadora, usualmente se emplea alguno de los siguientes criterios:

1) $\lvert a_n - b_n \rvert <= \varepsilon$	precisión absoluta en m
2) $\dfrac{\lvert a_n - b_n \rvert}{a_n} <= \varepsilon$	precisión relativa en m excepto para $a_n = 0$
3) $\lvert f(a_n) - f(b_n) \rvert <= \varepsilon$	valores pequeños de la función
4) Iterar un número predeterminado de veces	

Cual criterio elegir depende del problema que se esté atacando, en la práctica suele combinarse el cuarto criterio con alguno de los tres primeros.

Las principales ventajas de este método son: la sencillez con que se puede programar en cualquier lenguaje algebráico y la confiabilidad que se tiene en los resultados obtenidos, si se depende completamente del programa de computadora. Por lo que toca a desventajas, quizá la más relevante sea que es un método relativamente lento para convergir, lo cual puede volverlo "ineficiente" cuando la función $f(x)$ es muy complicada. Sin embargo, se puede decir que es un buen método con el cual siempre se puede localizar una raíz real simple.

3.5 INTERPOLACION

En la computación manual a menudo es necesario recurrir a tablas para averiguar el valor de una función , por ejemplo en las tablas de las funciones trigonométricas, y cuando no se encuentra el valor buscado tabulado es necesario interpolar entre dos valores. Hoy en día en pocas ocasiones es necesario interpolar en una tabla matemática gracias a las calculadoras de bolsillo; sin embargo, al manejar información de tipo económico o social dispuesta en forma tabular usualmente es necesario interpolar.

En su forma más simple la interpolación consiste en estimar el valor de una función de x, $f(x)$, en un punto x a partir de un conjunto de puntos tabulares $\{x_i\}$ $(i=0,1,...,n)$ dado. Para ello se elige usualmente un polinomio, $P(x)$, que coincida con $f(x)$ en los puntos tabulares, entonces evaluando $P(x)$ en el punto $x=x^*$ se obtiene la estimación deseada. Además, si se desea se puede determinar el tamaño del error en que se incurre al interpolar los valores.

Una de las técnicas más simples y conocidas es el llamado método de interpolación de Newton (ver {31}).

INTERPOLACION DE NEWTON

En muchas aplicaciones de tipo predictivo la interpolación lineal resulta insuficiente, por lo que es necesario hacer uso de un polinomio de grado superior. Lo razonable es obtener mejores resultados que cuando se emplea un polinomio de grado bajo. Esto es, dado un conjunto de n+1 puntos, $\{(x_i, f(x_i)\}$ $(i=0, 1, ..., n)$, se puede hacer pasar un polinomio de grado n a través de esos puntos, pudiéndose probar que si los n+1 puntos son distintos, los polinomios interpolantes de grado menor o igual a n son únicos. Los polinomios pueden ser expresados en muchas formas diferentes. Sin embargo, en la práctica la representación más conveniente es:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}). \quad (3.2)$$

En ésta forma los coeficientes dependen de los puntos dados. Asúmase, por simplicidad, que los x_i están regularmente espaciados con un espacio h igual entre los puntos de manera que $x_i = x + ih$ $(i = 0, 1..., n)$, entonces los coeficientes de la ecuación (3.2) pasan a ser:

$$a_k = \frac{\Delta_k f(x_0)}{k!h^k}$$

en donde $\Delta_k f(x_0)$ es la k-ésima diferencia adelantada de $f(x)$ con $x = x_0$. Si se define $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$, entonces el operador de diferencias adelantadas $\Delta_k f(x_0)$ de orden k se define como:

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$
$$\Delta 2f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta kf(x_0) = \Delta_{k-1} f(x_1) - \Delta_{k-1} f(x_0)$$

Entonces la ecuación (3.2) expresada en términos de diferencias adelantadas se convierte en:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta_2 f(x_0)}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \qquad (3.3)$$
$$+ \dots + \frac{\Delta_n f(x_0)}{n!h^n}(x_0 - x_n)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

La cual se conoce como fórmula o polinomio, de interpolación de Newton.

Dos características importantes del polinomio de interpolación de Newton son: 1) Se puede incrementar el grado del polinomio con sólo agregar términos que hagan falta, sin que se tengan que recalcular los coeficientes previamente obtenidos. 2) El error del polinomio interpolante de un grado dado puede ser estimado con sólo examinar el siguiente término.

Es importante mencionar que si bien para la mayoría de las funciones suaves el grado del polinomio interpolante aumenta, en la práctica es mejor usar un polinomio de grado bajo sobre un rango pequeño de puntos tabulares que usar un polinomio de alto grado sobre un gran rango. Este método se denomina interpolación por partes.

3.6 SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una de las herramientas matemáticas más útiles para los economistas ha sido el álgebra de matrices. Esto se debe, en gran medida a que muchos de los problemas económicos se pueden reducir al problema de resolver sistemas lineales de ecuaciones, además de que formularlos en notación matricial resulta no sólo práctico, sino conveniente, puesto que se dispone de una poderosa herramienta para obtener las relaciones fundamentales.

En términos generales, el problema de hallar la solución numérica de un sistema de ecuaciones lineales consiste en encontrar los valores x_1, $x_2, \ldots,$ x_n que satisfagan al conjunto de ecuaciones:

$$
\begin{array}{l}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n
\end{array}
$$

A diferencia de lo que ocurre con las ecuaciones no lineales, determinar la solución analítica de los sistemas de ecuaciones lineales no es problema, por ejemplo, la regla de Cramer proporciona tal solución. El problema surge en la computación de la solución, puesto que por pequeños que sean los sistemas se requiere una cantidad considerable de operaciones elementales. Por ejemplo, hallar el determinante de una matriz de orden 100 con el método de Cramer en la práctica resulta imposible, pues se requieren alrededor de $5 * 10^{144}$ años para realizar los cálculos necesarios, suponiendo que se cuenta con una computadora capaz de efectuar un millón de multiplicaciones y divisiones por segundo. Afortunadamente, se ha desarrollado una enorme colección de algoritmos para llevar a cabo esta tarea (ver (53)).

METODO DE ELIMINACION GAUSSIANA

El método de eliminación gaussiana es uno de los más antiguos y tal vez aún el mejor de los disponibles para el tratamiento de sistemas lineales. El procedimiento que involucra el método de Gauss es simple y directo, esencialmente se basa en tres operaciones elementales bien conocidas:

1) Intercambiar dos ecuaciones cualquiera
2) Multiplicar una ecuación por un número cualquiera distinto de cero
3) Sumar una ecuación un número determinado de veces a una segunda ecuación

Su objetivo es reducir la matriz de coeficientes a una forma triangular izquierda (3.4), mediante el reemplazo de ecuaciones por combinaciones adecuadas de ellas mismas.

$$
\begin{aligned}
x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n &= b'_1 \\
x_2 + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n &= b'_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \qquad (3.4) \\
x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b'_{n-1} \\
x_n &= b'_n
\end{aligned}
$$

Para ello se procede como sigue:

Se divide la primera ecuación por $a_{1,1}$ para hacer el primer coeficiente igual a 1. Se multiplica esta "nueva" primera ecuación por $a_{2,1}$ y se resta el resultado de la segunda ecuación, y se continua así. Entonces en n-1 pasos se obtendrán n-1 ecuaciones, las cuales tienen sólo las variables $x_2, x_3, \dots, x_n$. Enseguida se repite el proceso para eliminar x_2 en n-2 pasos y se continua así; hasta que finalmente se llega a una ecuación en x_n, la cual es fácil de resolver. Entonces se sustituye x_n en la ecuación que tiene sólo a x_n y a x_{n-1} y se resuelve para x_{n-1}. Es evidente que este proceso de sustitución hacia atrás produce la solución de una x_i a la vez, en la secuencia: x_n, $x_{n-1}, \dots$, x_1, lo que resuelve el sistema de ecuaciones. Expuesto de manera formal, el método de Gauss se presenta en el algoritmo 3.2.

Algoritmo 3.2 Método de Gauss

Dada una matriz M (n * n + 1), cuyas primeras n columnas contienen a la matriz de coeficientes A (n * n) y en su n-ésima columna al vector B de orden n.

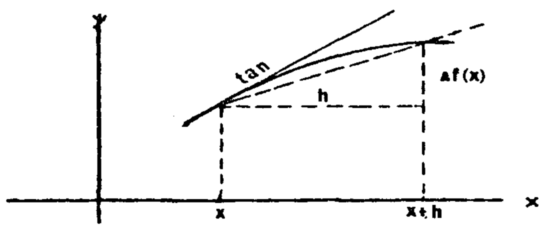
```
Para k := 1, 2,..., n - 1, hacer
    {r := k; g := |M[r, k]|;
     Para i := k + 1, k + 2,..., n, hacer
        {Si |M[i, k]| >= g, entonces g := |M[i, k]|, r := i}
     Si r <> k, entonces Intercambiar Renglones (r, k);
     Para i := k + 1, k + 2,..., n, hacer
        {c := M[i, k] / M[k, k];
         Para j := k + 1, k + 2,..., n + 1, hacer
            {M[i, j] := M[i, j]  c * M[k, j]}}
     Para i := k + 1, k + 2,..., n, hacer
        {M[i, k] := 0}}
X[n] := M[n, n + 1] / M[n, n];
Para i := n  1, n  2,..., 1, hacer
    {s := 0;
     Para j := i + 1, i + 2,..., n; hacer
        {s := s + M[i, j] * X[j]}
     X[i] := (M[i, n + 1] - s) / M[i, i]}.
```

3.7 DIFERENCIACION NUMERICA

Es frecuente en Economía encontrar problemas en los que es conveniente explicar la variación de una magnitud con respecto a otra magnitud empleando los conceptos medio y marginal. El primero de ellos expresa la relación por cociente entre la variación de (y) en un intervalo completo de valores de (x), por ejemplo, el coste medio expresa la relación por cociente entre el coste total de una determinada producción y esa producción. El segundo concepto se refiere a la variación o cambio de (y) en el margen, es decir para cambios muy pequeños en (x), a partir de un valor dado. Por ejemplo, el coste marginal significa el cambio que experimenta el coste cuando, en cierto nivel de producción, se produce un pequeño incremento. Es claro que el concepto marginal sólo tiene sentido cuando se considera como un límite, o sea, cuando el incremento de (x) tiende a cero; es decir, se debe interpretar como la derivada de la función que relaciona a (x) con (y).

Estas aplicaciones serian en extremo laboriosas si no fuera por que en el cálculo, la diferenciación es un proceso bien definido y sistematizado si la función a diferenciar está explícitamente dada. Sin embargo, si la función no está dada en forma explícita, por ejemplo cuando de f(x) puede sólo conocerse un conjunto de puntos tabulares, entonces para estimar la derivada en un punto se tiene que recurrir a un método de aproximación por diferencias finitas (ver (11)).

Figura 3.2 Diferenciación numérica de f'(x)



FORMULA DE DIFERENCIAS ADELANTADAS

La forma más simple de estimar la derivada en un punto consiste en hacer uso del cociente diferencial o "fórmula de diferencias adelantadas" dada por:

$$f'(x) \simeq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.5}$$

Que no es otra cosa que la derivada de f en x. Desde el punto de vista geométrico (ver figura 3.2), el cociente diferencial (3.5) es la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Se puede demostrar que el error en la fórmula de diferencias adelantadas es proporcional a h. Por lo tanto, la aproximación obtenida por (3.5) es por lo general pobre a menos que h sea muy pequeña. Sin embargo, si h es muy pequeña, entonces es posible que haya una pérdida seria de exactitud al efectuar la substracción de $f(x_o + h)$ y $f(x_o)$, debido a la representación de los números en la computadora.

Desafortunadamente, aún bajo las mejores circunstancias, la diferenciación numérica es un proceso inestable. Siendo por lo general difícil obtener una buena aproximación. En contraste, la integración numérica es un proceso muy estable.

3.8 INTEGRACION NUMERICA

La integración se puede interpretar de dos maneras distintas; como el procedimiento inverso a la diferenciación o como un método para hallar el área debajo de una curva. Ambas interpretaciones tienen numerosas aplicaciones en la Economía.

En el primer caso, si una función es diferenciada y luego se integra la función obtenida, el resultado es la función original, excepto por la constante de integración si es que no se conoce. En Economía este proceso puede usarse, por ejemplo, para hallar la función de ingreso total cuando se conoce la función de ingreso marginal.

En el segundo caso, la integración se define como el proceso de hallar el valor límite de una suma de términos, cuando el número de términos crece infinitamente y el valor de cada uno de ellos tiende a cero. Una aplicación obvia de la integración a la Economía, bajo esta interpretación, es la de obtener una función total a partir de una función marginal dada.

Sin embargo, las integrales de algunas funciones, incluidas las más sencillas, son con frecuencia muy difíciles de calcular debido a:

1) la función no puede ser integrada analiticamente;

2) la función puede ser integrada analiticamente, pero la expresión resultante es tan complicada que su evaluación requiere demasiado tiempo;

3) la función está definida por una tabla de valores.

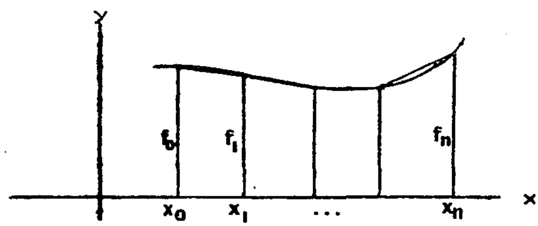
Es entonces cuando la integración se efectúa mediante un método numérico (ver [53]).

El problema de la integración o cuadratura numérica en su forma más simple consiste en calcular una aproximación a la integral definida:

$$I = \int_a^b f(x)\ dx \qquad (3.6)$$

Geométricamente, el problema de la integración puede ser interpretado como: hallar el área entre la curva de f(x) y el eje de las x sobre el intervalo [a, b] (ver figura 3.3).

Figura 3.3 Regla Trapezoidal



REGLA TRAPEZOIDAL

La fórmula más simple de integración numérica es la regla trapezoidal.

Si la función f(x) en el intervalo a <= x <= b se aproxima, por una línea recta que pase por los puntos extremos interpolando linealmente mediante la fórmula:

$$y(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a),$$

y se efectúa la integración de ésta como si se tratara de la función original, más algún manejo algebráico se obtiene

$$I = \int_a^b y(x)\, dx = \frac{b - a}{2} (f(a) + f(b))$$

que es simplemente la fórmula para hallar el área del trapezoide.

Por lo general, aproximar todo el intervalo con una sola línea no es suficiente, por ello en la práctica se procede a subdividir el intervalo [a, b] en n partes iguales, cada una de longitud h, de manera que nh = b - a, entonces:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h, \ldots,\ x_n = a + nh = b$$

Se obtiene así un conjunto de bandas, de forma trapezoidal y se calcula el área de cada una. El área de una de estas bandas, por ejemplo la primera, es:

$$T = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1))$$

Sumando las áreas de las n bandas se obtiene la fórmula trapezoidal compuesta:

$$T_n = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \quad (3.7)$$

3.9 SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

En muchos problemas de la Economía las relaciones entre dos o más variables se establecen como razones de cambio de una o más variables en función de las razones de cambio de otras variables. Por ejemplo, en la teoría económica neoclásica se supone que la tasa a la que el precio se acerca a su valor de equilibrio depende de la magnitud de la diferencia entre las cantidades de oferta y demanda.

En matemáticas las tasas de cambio pueden establecerse de dos maneras distintas. En una se considera que los cambios ocurren de forma continua, en este caso las tasas de cambio se consideran como derivadas y las ecuaciones que las contienen se denominan ecuaciones diferenciales. En tanto que en la segunda los cambios se consideran que ocurren de forma discreta o bien como cambios promedios en un período de tiempo, las tasas de cambio se enuncian como diferencias en los valores de las variables en distintos puntos en el tiempo y las ecuaciones que los contienen son las llamadas ecuaciones en diferencias. Es importante mencionar que las ecuaciones diferenciales son el caso límite de las ecuaciones en diferencias, cuando el período de tiempo entre los cambios o dentro del período en que se calcula el cambio promedio tiende a cero.

Las ecuaciones diferenciales pueden ser del tipo ordinario o parcial. Las ecuaciones diferenciales ordinarias son aquellas en las que la variable dependiente sólo es función de una variable independiente.

En muchas ocasiones, al igual que en el problema de la integración, ocurre que la solución analítica de la ecuación diferencial no existe o bien es tan complicado obtenerla que es preferible emplear métodos numéricos para encontrarla.

En esta sección se considera un método numérico para resolver en forma sencilla ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden sujetas a una condición inicial. Esto es, dada una ecuación que involucra una función $f(x)$ y su derivada

$$y' = f(x,y) \tag{3.8}$$

y un valor inicial tal que

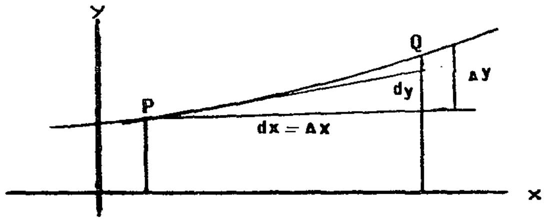
$$y'(x_o) = y_o \tag{3.9}$$

Se busca una función continua $F(x)$ la cual satisface la ecuación (3.8) sujeta al valor inicial (3.9).

METODO DE EULER

El método más simple y claro para resolver ecuaciones diferenciales de manera numérica es el de Euler (ver {11}). Desafortunadamente , este método puede resultar muy impreciso.

Figura 3.4 Método de Euler



Geométricamente el método de Euler consiste en encontrar un valor aproximado de y en x_{i+1}, extendiendo la tangente a F(x) en x_i hasta la línea $x = x_{i+1}$. Si la función F(x) tiene una curva suave, se sabe por sus definiciones que los diferenciales y los incrementos tienen las relaciones geométricas mostradas en la figura 3.4. Si Δx es lo suficientemente pequeño, entonces

$$\Delta y \simeq f(x_i, y_i)\Delta x$$

es una buena aproximación para Δy, y si ésta se evalúa en un punto particular (x_i, y_i), el siguiente valor de (y) se obtiene de:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x \qquad (3.10)$$

Y como la derivada está dada por la ecuación (3.8) se tiene que:

$$y'_i = f(x_i, y_i) \qquad (3.11)$$

Entonces a partir de los valores iniciales dados, es posible generar la función y = F(x) mediante un procedimiento iterativo como se muestra en el algoritmo 3.3.

Algoritmo 3.3 Método de Euler

Dada una ecuación diferencial de primer orden dy/dx=F(x,y), los valores iniciales x_0 y y_0, y el incremento ^x.

Para i := 0, 1, 2..., hasta que se satisfaga, hacer
$\{y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)^x\}$.

El principal problema que presenta este método es el llamado "error local" debido a que se basa en el supuesto de que los valores x_i y $f(x_i)$ se conocen exactamente. Estos errores cometidos en cada paso se propagan y el error total al final del proceso puede ser considerable.

Se ha presentado una síntesis muy breve del Análisis Numérico y solamente se ha discutido un pequeño número de los algoritmos existentes. Éstos trabajan correctamente para cierta clase de problemas, pero ninguno de estos algoritmos puede ser considerado el mejor para toda clase de problemas. Al usar un algoritmo es necesario estar atento para detectar cualquier indicio de que éste no funciona apropiadamente para el problema particular que se trata de resolver y si es así buscar el algoritmo apropiado, aquél que brinde la mejor solución.

Capítulo 4

ANALISIS DE INSUMO PRODUCTO

La necesidad de contar con herramientas que permitan realizar el análisis de la economía de un país, se hizo palpable desde mucho tiempo atrás. El problema de la consolidación de la economía, de hecho ha constituído la preocupación constante de los economistas, tanto teóricos como empíricos a lo largo del pensamiento económico. La cantidad y la naturaleza de las variables que influyen en el comportamiento de un sistema económico a nivel país ha significado una limitación para los estudiosos, por ello se han desarrollado varios esfuerzos para tratar de efectuar el análisis de manera simplificada. Uno de los más populares ha sido el uso de la matriz de insumo producto que tiene como finalidad probar los efectos de la política económica gubernamental sobre los distintos sectores de la economía.

Las primeras tablas describiendo el flujo de bienes y servicios entre los diferentes sectores, usando cifras censales, fue publicada en 1936. Estas tablas describían la economía de los Estados Unidos subdividiéndola en 44 sectores. Sin embargo, para el análisis de las cifras fue necesario agruparlas en diez sectores debido a las limitaciones en la capacidad de cómputo. El desarrollo de las computadoras permite a los economistas utilizar este método con más facilidad, actualmente se puede decir que su empleo sólo está limitado por la disponibilidad de información.

En este capítulo se presentan los elementos teóricos fundamentales del análisis de insumo producto (ver (7), (9) y

(55)), así como las rutinas (Listado 4.1) necesarias para obtener la solución numérica del modelo mismo (ver (30)).

4.1 EL MODELO DE LEONTIEF

El modelo de insumo producto propuesto por Wasily Leontief, es una formulación del equilibrio económico general en términos de sectores industriales, su principal objetivo es explicar las magnitudes de las corrientes interindustriales en función de los niveles de producción de cada industria. Es decir, describe la interdependencia estructural que existe entre los diversos sectores de una economía, haciendo énfasis en las relaciones que se materializan entre todos los agentes de la producción, agrupados con base a determinados criterios y poniendo de relieve que no pueden ocurrir cambios en una actividad productiva, sin que ello ocasione cambios directos o indirectos en el resto de las actividades. Esta característica permite que el modelo sea utilizado no sólo para describir históricamente las relaciones estructurales, sino también como una herramienta de planificación, por ejemplo, permite a los planificadores identificar aquellas industrias que pueden provocar un estrangulamiento en la oferta.

Si bien el modelo de insumo producto se originó en los trabajos de W. Leontief, tras él subyacen ideas que pueden ser ubicadas con basta anterioridad en la historia del análisis económico. Como es el caso del Tableau économique de Quesnay, publicado en 1758, en el cual se incluye una descripción de las relaciones entre los agentes de la producción. Merecen también mencionarse los modelos de equilibrio económico general desarrollados por la corriente neoclásica, principalmente el de Walras.

Es importante hacer notar que aún cuando los modelos de equilibrio general de tipo neoclásico constituyen fundamentos teóricos relevantes del modelo de insumo producto, en sí tienen origen y finalidades distintas. Por ejemplo, en el modelo de equilibrio general de Walras, concebido con un alto nivel de abstracción, una de las categorías centrales del análisis la constituyen los precios, en tanto que en el modelo de insumo producto, resultado de una investigación empírica, el efecto de los precios sobre la oferta de los recursos productivos y las demandas intermedias y finales no se consideran; por el contrario, los ajustes de esas variables se operan en relación con las interdependencias estructurales que se dan entre todos los sectores productivos.

4. 2 MATRIZ DE TRANSACCIONES INTERINDUSTRIALES

La principal fuente de información para el análisis de insumo producto son las cuentas nacionales, en particular la cuenta del producto e ingreso nacionales, la cual registra como crédito toda la corriente real de bienes y servicios, o sea, corresponde a los ingresos recibidos por las entidades productoras, en tanto que en el débito se registra la corriente de ingresos financieros, es decir, los gastos corrientes de dichas entidades. A partir de esa información es posible construir una matriz de transacciones intersectoriales (figura 4.1), que es una representación total de la economía expresada en términos cuantitativos o en valor monetario.

Figura 4.1 Matriz de transacciones intersectoriales

P\C	S_1	...	S_j	...	S_n	DI	I	C	G	E	DF	OT	IMP	VBP
S_1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	W_1	I_1	C_1	G_1	E_1	Y_1	Z_1	M_1	X_1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S_i	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}	W_i	I_i	C_i	G_i	E_i	Y_i	Z_i	M_i	X_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S_n	x_{n1}	...	x_{nj}	...	x_{nn}	W_n	I_n	C_n	G_n	E_n	Y_n	Z_n	M_n	X_n
TIP	U_1	U_2	U_j	...	U_n	<2>					<1>			
VAB	V_1	...	V_j	...	V_n	<3>	V_I	V_C	V_G	V_E	<4>	V		V
VBP	X_1	...	X_j	...	X_n		I	C	G	E	Y	Z	M	X

La organización lógica de la matriz de transacciones se deriva de la división que se hace del consumo: intermedio y final; así como de los insumos en primarios y producidos. Esta separación conduce a la formación de cuatro tipos de transacciones, cada uno de esos tipos tiene asociada una partición de la tabla.

La partición <1> es la que registra las transacciones de consumo final de los bienes y servicios que a su vez se subdivide en cuatro vectores, a saber:

- -Inversión (I)
- -Consumo de las familias (C)
- -Consumo del gobierno (G)
- -Exportaciones (E)

La suma de ellos, (Y) en la columna DF, constituye aproximadamente el 90% del producto nacional bruto (PNB).

La partición <2> registra las transacciones de compra venta que los sectores realizan entre sí. Esto es, cada asiento x_{ij} denota la cantidad del bien i que es consumida por el sector j. Como se verá más adelante en esta partición radica el elemento esencial del análisis de insumo producto.

La partición <3> registra el empleo de insumos primarios, es decir, los que no se producen dentro del sistema, por ejemplo el trabajo. Usualmente se emplea el término valor agregado bruto (VAB) para indicar el consumo total de insumos primarios por un sector dado.

La partición <4> registra el insumo directo de factores primarios en el consumo final, por ejemplo, los empleos en el gobierno federal. Por lo general estas transacciones sólo se incluyen para mantener la compatibilidad con los totales nacionales.

4.3 ESTRUCTURA DE LA MATRIZ DE TRANSACCIONES

La estructura formal de la matriz de transaciones se puede expresar simbólicamente mediante las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$Z_i = M_i + X_i = \sum_j x_{ij} + Y_i = W_i + Y_i \qquad (4.1)$$

$$(i = 1,2,...,n)$$

$$X_j = \sum_i x_{ij} + V_j = U_j + V_j \qquad (4.2)$$

$$(j = 1,2,...,n)$$

Donde:

Z_i = oferta total del bien i-ésimo
X_i = producción total del bien i-ésimo (renglón)
X_j = producción total del j-ésimo sector (columna)
x_{ij} = cantidad del bien i consumida por el sector j
Y_i = demanda final del bien i
W_i = demanda intermedia del bien i
U_j = insumos totales empleados por el sector j
V_j = consumo total de insumos primarios en el sector j
M_i = importaciones del sector i-ésimo

La ecuación (4.1) expresa que la oferta total de cada bien es igual a la demanda total, que está compuesta por la suma de la demanda final más la demanda intermedia; en tanto que, la ecuación (4.2) expresa que el producto total de un sector es igual a la suma del valor de los insumos adquiridos y consumidos por dicho sector más el valor agregado en ese sector.

Si se aceptan las ecuaciones (4.1) y (4.2) como la definición de la demanda final (Y_i) y del valor de los insumos primarios (V_j) respectivamente, entonces la demanda final es la diferencia que que existe entre la oferta total de un bien y la cantidad consumida en el proceso productivo:

$$Y_i = Z_i - W_i$$

En forma similar el valor de los insumos primarios es la diferencia que existe entre el valor de la producción de un sector y el valor de los pagos por los insumos comprados a los otros sectores:

$$V_j = X_j - U_j$$

Como puede observarse, estos conceptos para fines prácticos, son equivalentes a los conceptos empleados en el análisis del ingreso nacional: producción final y valor agregado. Dicha equivalencia se demuestra a continuación.

De la ecuación (4.1)

$$\sum_i X_i = \sum_i \sum_j x_{ij} + \sum_i Y_i - \sum_i M_i$$

esto es, la producción total de un bien es igual al consumo total del mismo bien, más la demanda final del bien menos las importaciones de dicho bien, necesarias para lograr el equilibrio.

Por otra parte de la ecuación (4.2):

$$\sum_j X_j = \sum_j \sum_i x_{ij} + \sum_j V_j$$

que representa el consumo total en una situación de equilibrio, se tiene que la oferta total debe ser igual al consumo total, por lo que:

$$\sum_i \sum_j x_{ij} + \sum_j Y_i - \sum_i M_i = \sum_j \sum_i x_{ij} + \sum_j V_j$$

Como:

$$\sum_i \sum_j x_{ij} = \sum_j \sum_i x_{ij}$$

se tiene que

$$\sum_i Y_i - \sum_i M_i = \sum_j V_j$$

que corresponde a la igualdad básica de las cuentas nacionales.

4.4 ECUACION FUNDAMENTAL DEL MODELO DE INSUMO PRODUCTO

En una formulación cruda del modelo de insumo producto, cada industria emplearía varios factores primarios y produciría diversos bienes intermedios y finales, existiendo superposición entre las producciones de distintas industrias. Sin embargo, como todo modelo económico formal, el modelo de insumo producto establece un conjunto de supuestos acerca del comportamiento económico de las variables consideradas en el análisis. Estos supuestos son:

- Las actividades productivas de la economía pueden ser agrupadas de tal manera que cada uno de los sectores o actividades resultantes de esa agrupación tenga una sola función de producción.

- Cada sector produce un bien homogéneo sobre la base de la aplicación de una tecnología única y que el bien no es producido por ningún otro sector.

- La cantidad de cada uno de los insumos utilizados en la producción por un sector, es totalmente determinada por el nivel de producción de dicho sector.

Este conjunto de supuestos permite formular una ecuación para la demanda, x_{ij}, como una función de su propio nivel de producción (X_j), la cual se denomina función de insumo y se expresa formalmente como:

$$x_{ij} = \overline{X}_{ij} + a_{ij}X_j \qquad (i = 1, 2, ..., n; \; j = 1, 2, ..., n)$$

donde $\overline{X}_{ij}$ son los costos fijos de producción, los cuales por simplicidad se suponen iguales a cero con lo que se tiene:

$$x_{ij} = a_{ij}X_j \qquad (i = 1, 2, ..., n; \; j = 1, 2, ..., n) \qquad (4.3)$$

En la que a_{ij} representa el coeficiente de insumos de bienes intermedios producidos por el sector j. En la práctica, por razones de cómputo y conveniencia estadística, estas funciones se se suponen lineales, por lo tanto, los coeficientes de la misma son constantes, es decir, se trata de relaciones lineales de proporcionalidad directa.

De la misma manera, tomando en consideración el vector de importaciones, se puede definir M_i como una función del nivel de producción del bien i-ésimo (X_i), que simbólicamente se expresa como:

$$M_i = m_i X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1,2,\ldots,n) \qquad (4.4)$$

Donde m_i denota al coeficiente de importación.

Entonces sustituyendo en la ecuación contable (4.1) x_{ij} por $a_{ij}X_j$ y M_i por $m_i X_i$ se obtiene:

$$X_i - \sum_j a_{ij} X_j = Y_i - m_i X_i \qquad (4.5)$$

y agrupando los términos se obtiene:

$$(1 + m_i) X_i - \sum_j a_{ij} X_j = Y_i \qquad (4.6)$$

que constituye la ecuación fundamental del modelo de insumo producto en el caso general. Esencialmente se basa en una división de las variables, las que cambian con el nivel de producción en cada sector (X_i, M_i) y las que no se modifican. Conceptualmente esta es una manera de determinar los niveles de producción en cada sector en función de un conjunto dado de demandas autónomas. Es decir, la ecuación (4.5) es una función de producción en una economía simplificada.

4.5 MATRIZ DE LEONTIEF

Esta consideración de los insumos respecto a la producción permite plantear la fomulación del modelo, y en particular, el contenido de la partición <3> de la matriz de transacciones intersectoriales como un sistema de ecuaciones lineales, según se muestra a continuación:

$$
\begin{array}{l}
(1 + m_1)X_1 - a_{11}X_1 + \ldots a_{1j}X_j + \ldots + a_{1n}X_n + Y_1 = X_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(1 + m_i)X_i - a_{i1}X_1 + \ldots a_{ij}X_j + \ldots + a_{in}X_n + Y_i = X_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(1 + m_n)X_n - a_{n1}X_1 + \ldots a_{nj}X_j + \ldots + a_{nn}X_n + Y_n = X_n
\end{array}
\qquad (4.7)
$$

El sistema de ecuaciones (4.7), puede ser reescrito en función de las demandas finales referidas, con lo que se tendrá:

$$
\begin{array}{l}
X_1 - [(1 + m_1)X_1 + a_{11}X_1 + \ldots a_{1j}X_j + \ldots + a_{1n}X_n] = Y_1 \\
X_i - [(1 + m_i)X_i + a_{i1}X_1 + \ldots a_{ij}X_j + \ldots + a_{in}X_n] = Y_i \\
X_n - [(1 + m_n)X_n + a_{n1}X_1 + \ldots a_{nj}X_j + \ldots + a_{nn}X_n] = Y_n
\end{array}
\qquad (4.8)
$$

Luego factorizando el primer miembro de cada una de las ecuaciones de (4.8) respecto al valor bruto de la producción (X_i) correspondiente, se tiene:

$$
\begin{array}{l}
(1 + m_1 - a_{11})X_1 - \ldots a_{1j}X_j - \ldots - a_{1n}X_n = Y_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-a_{i1}X_1 - \ldots + (1 + m_i - a_{ij})X_j - \ldots - a_{in}X_n = Y_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}X_1 - \ldots a_{nj}X_j - \ldots + (1 + m_n - a_{nn})X_n = Y_n
\end{array}
\qquad (4.9)
$$

Sistema que a su vez se puede expresar en términos matriciales como sigue:

$$
\begin{vmatrix}
(1 + m_1 - a_{11}) & \ldots & -a_{1j} & \ldots & -a_{1n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-a_{i1} & \ldots & (1 + m_i - a_{ij}) & \ldots & -a_{in} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-a_{n1} & \ldots & -a_{nj} & \ldots & (1 + m_n - a_{nn})
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix} X_1 \\ \ldots \\ X_i \\ \ldots \\ X_n \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} Y_1 \\ \ldots \\ Y_i \\ \ldots \\ Y_n \end{vmatrix}
\qquad (4.10)
$$

Como puede observarse, el sistema ahora se compone de una matriz cuadrada de orden n, a la que se le da el nombre de matriz de Leontief, que es la diferencia existente entre la suma de la matriz unitaria (I) y la matriz de coeficientes de importación

(M) ambas de orden n y la matriz de coeficientes técnicos de insumos intermedios nacionales (A), así como dos vectores columna: el de los valores brutos de la producción (X) y el de las demandas finales correspondientes (Y). Para simplificar la manipulación algebraica el sistema (4.10) se puede escribir empleando la notación matricial abreviada de la siguiente manera:

$$[I + M - A]\,[X] = [Y] \qquad (4.11)$$

Este tipo de sistemas usualmente se resuelve empleando alguno de los métodos iterativos de eliminación de variables existentes, por ejemplo el método de Gauss presentado en el capítulo tres. Sin embargo, debido a que la necesidad principal de los economistas en el análisis interindustrial es la de poseer un conocimiento de la naturaleza de los efectos de las interdependencias sectoriales, es preferible obtener la solución general o matriz inversa del sistema de ecuaciones. En términos generales, este procedimiento es mucho más complicado que los métodos iterativos para efectuarse sin la participación de una computadora.

4.6 SOLUCION GENERAL DEL MODELO

La solución del modelo de insumo producto esencialmente consiste en resolver un sistema de ecuaciones lineales que expresado en notación matricial toma la forma (4.11) y que para mayor claridad se reproduce a continuación:

$$[I + M - A]\,[X] = [Y]$$

entonces para obtener el vector de los valores brutos de la producción (X) es necesario transformar la expresión (4.11) en:

$$[X] = [I + M - A]^{-1}\,[Y] \qquad (4.12)$$

esto es, el valor bruto de la producción se expresa en términos de la premultiplicación del vector de las demandas finales por la inversa de la matriz de Leontief, o sea, el valor bruto de la producción se obtiene a partir de un conjunto de parámetros conocidos y constantes: los coeficientes técnicos de insumos nacionales y de importaciones. Además, la expresión (4.10) muestra la forma en que suele plantearse la resolución del modelo con fines de planificación de la actividad económica, al disponer de las magnitudes correspondientes del conjunto de los coeficientes técnicos de insumo producto, considerando como exógenos los valores de la demanda final y así determinar endógenamente los valores de la producción de cada sector.

La utilidad de la solución general se pone de manifiesto al considerar el hecho de que se pueden variar cualquiera de los valores los vectores de demanda final (Y) o de valor bruto de la producción (X) y obtener una nueva solución calculando de manera muy simple las restantes variables. Aún más, permite determinar por separado el efecto de cada una de las demandas finales. En tanto que la principal desventaja es que cualquier cambio en los coeficientes de insumo nacionales o de importación afectará los elementos de la solución.

4.7 MATRIZ DE REQUERIMIENTOS DIRECTOS E INDIRECTOS

La inversa de la matriz de Leontief desempeña un importante papel en el análisis de insumo producto. Sea:

$$[I + M - A]^{-1} = [R] = \begin{vmatrix} r_{11} & \dots & r_{1j} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{i1} & \dots & r_{ij} & \dots & r_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{nn} & \dots & r_{nj} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.13)$$

Donde los r_{ij} son los coeficientes de requerimientos directos e indirectos de producción por unidad de demanda final nacional, su significado económico está referido en forma directa al concepto de interdependencia estructural que es la base sobre la que descansa el modelo. Es decir, estos coeficientes indican las magnitudes de los requerimientos directos e indirectos que la demanda final nacional causa sobre la producción de los distintos sectores, dada la interdependencia estructural.

Debe notarse que la demanda final de un sector productor cualquiera, repercute directamente sobre la producción del mismo sector, pero como dicha producción requiere insumos del resto de los sectores crea una serie de requerimientos indirectos sobre el resto de las actividades productivas de la economía dentro del marco de interdependencias estructurales. Esto queda expresado formalmente por los coeficientes de la diagonal principal de la matriz [R] que deben de ser mayores a uno, debido a que cuantifican los requerimientos directos e indirectos de producción, de cada uno de los sectores por unidad de demanda final producida por el propio sector. Por lo tanto, los componentes de la expresión matricial (4.13) representan al conjunto de requerimientos intersectoriales, directos e indirectos, que se generan por unidad de demanda final dentro de la estructura productiva.

Para apreciar con mayor claridad el significado de los coeficientes de requerimientos así como de sus relaciones con la demanda final se desarrolla la expresión (4.10) en forma extendida, en ella los valores de la producción bruta se expresan en términos de los coeficientes de requerimientos directos e indirectos y de las demandas finales correspondientes a cada sector, como se muestra a continuación:

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ .. \\ X_i \\ .. \\ X_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{11} & \ldots & r_{1j} & \ldots & r_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{i1} & \ldots & r_{ij} & \ldots & r_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{nn} & \ldots & r_{nj} & \ldots & r_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y_1 \\ .. \\ Y_i \\ .. \\ Y_n \end{vmatrix}$$

de donde es fácil establecer

$$\begin{aligned} X_1 &= r_{11}Y_1 + \ldots r_{1j}Y_j + \ldots r_{1n}Y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_i &= r_{i1}Y_1 + \ldots r_{ij}Y_j + \ldots r_{in}Y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= r_{n1}Y_1 + \ldots r_{nj}Y_j + \ldots r_{nn}Y_n \end{aligned}$$

En donde las r_{ij} representan los requerimientos directos e indirectos que el sector i-ésimo origina por cada unidad de demanda final nacional del sector j-ésimo. Debido a ello, la producción de cada uno de los sectores es el resultado de todo el conjunto de requerimientos que originan las demandas finales de la producción sectorial. Esto es, cada una de estas unidades origina directamente una unidad de producción a la que hay que agregarle la producción exigida por toda la serie de requerimientos indirectos generados por cada unidad de la demanda final nacional. De donde se desprende que la sumatoria de los elementos que conforman la columna j-ésima, representa el incremento total necesario, en terminos de la produccion global, para cubrir el incremento unitario de la demanda final del sector j-ésimo. Lo que simbólicamente se escribe como sigue:

$$R_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij} \qquad (4.14)$$

De manera similar la sumatoria de los elementos del renglón i representan el incremento total requerido por el sector i-ésimo para hacer frente al incremento unitario de la demanda final de cada uno de los sectores. Lo que simbólicamente se escribe

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \qquad (4.15)$$

4.8 RECOMPOSICION DEL MODELO

Una vez determinados los valores brutos de la producción correspondientes a las demandas finales nacionales dadas, es factible recomponer los elementos del modelo en términos de la matriz de transacciones intersectoriales. Esto se hace multiplicando los coeficientes técnicos de insumos intermedios nacionales por los valores brutos de la producción que han sido determinados. Lo que expresado en términos matriciales toma la forma:

$$
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & X_i & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & X_n \end{vmatrix}
$$

en donde, la matriz que contiene los valores brutos de la producción (X_i), es una matriz diagonal de orden n que permite obtener los resultados buscados al premultiplicarse por la matriz de coeficientes técnicos de insumos intermedios nacionales.

Procediendo de manera similar es posible calcular las importaciones de los insumos intermedios para cada sector. Así, en términos matriciales se tiene que:

$$
\begin{vmatrix} M_1 \\ \cdots \\ M_i \\ \cdots \\ M_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & X_j & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & X_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_1 \\ \cdots \\ m_i \\ \cdots \\ m_n \end{vmatrix}
$$

donde la matriz que contiene a los valores brutos de la producción, premultiplica al vector de coeficientes técnicos de insumos importados. Lo que permite determinar el volumen total de importaciones.

Finalmente el valor agregado bruto de cada sector se determina a partir de las diferencias entre los valores brutos de la producción sectorial y los volumenes totales de insumos intermedios empleados por cada sector. Además, si se dispone de los coeficientes técnicos de los insumos primarios, es posible obtener los valores correspondientes a cada uno de ellos mediante cálculos similares a los aplicados para obtener los insumos intermedios.

4.9 MEDICION DEL GRADO DE INTERDEPENDENCIA SECTORIAL

Entre las múltiples aplicaciones que tiene el modelo de insumo producto se encuentra la medición del grado de interdependencia sectorial. Es decir, la cuantificación de los efectos que una rama productiva provoca ya sea por requerir los abastos necesarios para su producción (efecto hacia atrás), o bien al ser requerida como abastecedora de insumos para el proceso productivo global (efecto hacia adelante). Esta cuantificación se hace através de los llamados índices de interdependencia sectorial, cuyo cómputo se efectúa a partir de la información contenida tanto por la matriz de coeficientes técnicos [A], como por la matriz de requerimientos directos e indirectos [R] (ver (54)).

INDICES DE INTERDEPENDENCIA SECTORIAL

Los índices de interdependencia sectorial son medidas diseñadas con el propósito de cuantificar los efectos "hacia adelante" y "hacia atrás", que la variación en la producción induce en el sistema productivo. Estos índices son de dos tipos: 1) Directos y 2) Directos e indirectos.

Los índices de interdependencia directa permiten conocer los requerimientos inmediatos o directos de la producción a partir de los coeficientes técnicos (a_{ij}). Entre ellos se encuentra el índice de interdependencia directa hacia atrás (b_j), que mide la proporción de insumos nacionales (U_j) por unidad de producto del sector j-ésimo (X_j), lo que simbólicamente se expresa como sigue:

$$b_j = \frac{U_j}{X_j} = \sum_{i}^{n} a_{ij} \qquad (4.16)$$

Donde n es el número de sectores del sistema.

El índice de interdependencia hacia adelante (f_i), que es la relación que existe entre la demanda intermedia (W_i) y la demanda total (X_i), lo que en símbolos se escribe:

$$f_i = \frac{W_i}{X_i} \qquad (4.17)$$

Es importante mencionar que los índices de interpendencia directa, por lo general, resultan insuficientes para medir el efecto total, debido a que sólo consideran los requerimientos directos, sin embargo, para algunas aplicaciones pueden ser convenientes.

Ahora bien, aunque de mayor dificultad en su obtención, en la práctica resulta más conveniente emplear los índices de interdependencia directa e indirecta, ya que incorporan en la medición tanto los efectos directos como los indirectos, en otras palabras, estos índices toman en cuenta la composición de las cadenas de requerimientos de insumos.

Lo anterior se debe básicamente a que los índices de interdependencia directa e indirecta se construyen a partir de la matriz de coeficientes de requerimientos directos e indirectos [R] o inversa de la matriz de Leontief. Cuyos elementos característicos, r_{ij}, se interpretan como la producción del sector i-ésimo, por unidad de demanda final del sector j-ésimo. De donde se desprende, como se dijo antes, que la sumatoria de los elementos sobre renglón i representan el incremento total requerido por el sector i-ésimo para hacer frente al incremento unitario de la demanda final de cada uno de los sectores. Lo que simbólicamente se escribe:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \qquad (4.18)$$

Lo que constituye el índice de interdependencia directa e indirecta hacia adelante.

De manera semejante, la sumatoria de los elementos, r_{ij}, sobre la columna j constituye el índice de interdependencia directa e indirecta hacia atrás, es decir, representa el incremento total necesario (en términos de la producción global) para cubrir el incremento unitario de la demanda final del sector j-ésimo. Lo que simbólicamente se escribe como sigue:

$$R_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij} \qquad (4.19)$$

INDICES DE INTERDEPENDENCIA PROMEDIO

A partir del los índices de interdependencia directa e indirecta hacia adelante (R_i) y hacia atrás (R_j) definidos por las expresiones (4.18) y (4.19), se construyen los índices de interdependencia promediados, estos índices toman la forma de series de promedios para cada sector, de manera que el índice promedio hacia adelante del sector i-ésimo se escribe como sigue:

$$n^{-1}(R_i) \qquad (4.20)$$

Que se interpreta como la demanda promedio al sector i-ésimo ejercida por cada uno de los sectores del sistema, cuando sus demandas finales tienen incrementos unitarios.

De manera semejante, el índice promedio hacia atrás para el sector j-ésimo se expresa como sigue:

$$n^{-1}(R_j) \qquad (4.21)$$

cuyo significado económico se define como la producción promedio de los sectores del sistema que genera un incremento unitario de la demanda final del sector j-ésimo.

Sin embargo, para efectuar las comparaciones interindustriales con mayor facilidad es conveniente relacionar los índices promedios con el promedio total, cuya definición está dada por la siguiente expresión:

$$n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} = n^{-2} \sum_{i=1}^{n} R_i = n^{-2} \sum_{j=1}^{n} R_j \qquad (4.22)$$

De manera que ya se tienen ahora los elementos necesarios para construir los índices de interdependencia promedio normalizados hacia adelante F_i (forward) y hacia atrás B_j (backward).

El índice de interdependencia hacia adelante normalizado (F_i), expresa la medida en que el sector i-ésimo se ve afectado por un incremento en la demanda del sistema, es decir, mide que tanto pesa el sistema sobre el sector i-ésimo. La forma de calcularlo a partir del índice promedio hacia adelante (4.20) y el promedio total (4.21) está dada por la siguiente expresión:

$$F_i = \frac{R_i}{n^{-1} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}} \qquad (4.24)$$

Cuando un F_i es mayor que la unidad significa, desde el punto de vista económico, que el sector i-ésimo deberá de incrementar su producción por arriba del promedio.

El índice de interdependencia hacia atrás normalizado (B_j), esencialmente describe el peso relativo que un aumento en la demanda final del sector j-ésimo tiene en el sistema. En otras palabras, que tanto afecta un incremento en la producción del sector j-ésimo al sistema. Su forma de cálculo a partir del índice de interdependencia promedio hacia atrás (4.21) y el promedio total (4.22) se expresa símbolicamente a continuación:

$$B_j = \frac{R_j}{n^{-1} \sum_{i=1}^{n} r_{ij}} \qquad (4.23)$$

Cuando un B_j para una j cualquiera es mayor a uno significa, que se requiere un incremento en la producción global por arriba del promedio, de manera que se satisfaga el incremento unitario en la demanda final del sector j-ésimo.

Con el propósito de concretar una aplicación del modelo de insumo producto, en este apartado se desarrolla brevemente un análisis de la evolución de la interdependencia sectorial de tres ramas de la economía mexicana en el periodo 1950 a 1970. Las ramas elegidas son:

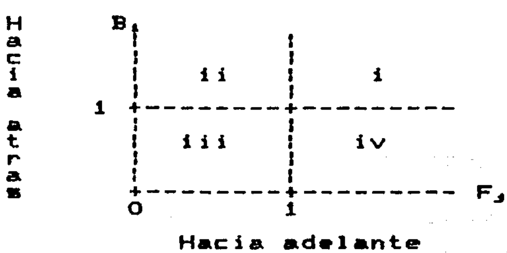
1) Agricultura
2) Petróleo y coque
3) Comercio

Su elección se debe a que se considera son representativas de los tres sectores productivos.

Para llevar a efecto dicho análisis se hace uso de una representación gráfica de los índices de interdependencia promedio, F_i y B_j, calculados con base en las matrices de insumo producto domésticas de México para 1950, 1960 y 1970 homogeneizadas a 30 sectores (ver (54)).

Para realizar el analisis de la interdependencia y el poder intersectorial resulta conveniente considerar los valores de las series de índices promedio normalizados, F_i y B_j, como el conjunto de puntos $\{(B_j, F_i)\}$ para toda $j = i$, lo que hace factible construir una gráfica, cuya estructura se muestra en la figura 4.2 (a).

Figura 4.2 Cuadrantes de interdependencia sectorial



(a)

i) $F_j > 1$ y $B_i > 1$
ii) $F_j < 1$ y $B_i > 1$
iii) $F_j < 1$ y $B_i < 1$
iv) $F_j > 1$ y $B_i < 1$
para toda $j = i$

(b)

Como es fácil ver la abscisa representa al índice de interdependencia promedio hacia adelante normalizado (F_j), en tanto que la ordenada representa al índice de interdependencia promedio hacia atrás normalizado (B_i). Además se hacen pasar por el punto formado por los valores promedio de los índices, el punto de coordenadas (1, 1), una recta paralela al eje de las F y otra al eje de las B, se forman cuatro zonas o cuadrantes cuyo significado en términos de los índices de interdependencia aparecen en la figura 4.2 (b).

Figura 4.3 Tabla de índices de interdependencia directa e indirecta promedio

	Efecto directo e indirecto promedio hacia atrás B_i			hacia adelante F_j		
RAMAS	50	60	70	50	60	70
1) AGRICULTURA	.822	.800	.769	1.459	1.402	1.266
2) PETROLEO Y COQUE	.961	1.060	1.202	1.240	1.716	1.668
3) COMERCIO	.890	.740	.766	3.201	2.572	2.701

Fuente: Secretaría de Programación y Presupuesto

Con el fin de visualizar la evolución de la interdependencia y el poder sectorial, con una razonable independencia del efecto que el cambio de precios pudiera tener, se han preparado a partir de los datos de la tabla de índices de interdependencia (figura 4.3) la tabla de crecimiento relativo que aparece en la figura 4.4, así como la gráfica de la figura 4.5.

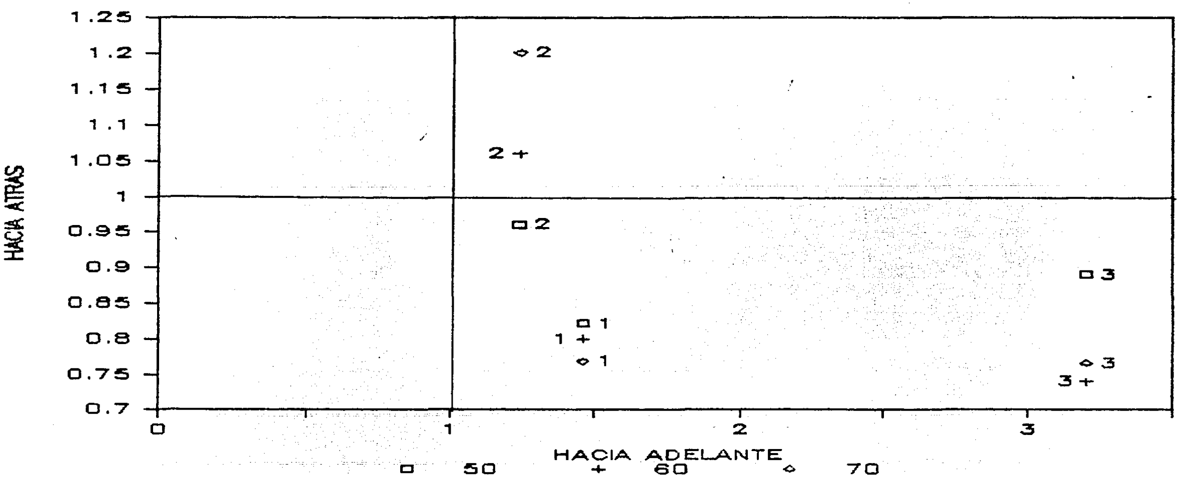
Figura 4.4 Crecimiento relativo de la interdependencia

	Interdependencia Hacia adelante		Hacia atrás	
	<u>50</u>-60	<u>60</u>-70	<u>50</u>-60	<u>60</u>-70
1) AGRICULTURA	-2.68	-3.88	-3.91	-9.70
2) PETROLEO Y COQUE	10.30	13.40	38.39	-2.80
3) COMERCIO	-16.85	3.51	-19.65	5.02

Nota: El año base aparece subrayado.

FIG. 4.5

INDICES DE INTERDEPENDENCIA



Una vez contruidas la gráfica y la tabla de crecimiento relativo de los índices de interdependencia es sencillo observar la evolución de la interdependencia y del poder sectorial. Por ejemplo, la agricultura (rama 1) si bien en las tres observaciones se halla en el cuadrante iv, ha ido perdiendo de manera continúa su importancia tanto como abastecedora (hacia adelante), como su peso relativo sobre el sistema (hacia atrás). Lo que se puede confirmar observando la tabla de la figura 4.4.

A diferencia de lo ocurrido con la agricultura la rama 2 (petróleo y coque) ha evolucionado de manera positiva. Esto es, en 1950 se encontraba en el cuadrante iv, lo que significa que su peso relativo sobre el sistema era menor que el promedio. En cambio, en 1960 y 1970 se encuentra en el cuadrante i, lo que significa que aumentó sus exigencias sobre el sistema por arriba del promedio. En tanto que su importancia como abastecedora no solo se mantuvo sino que creció de manera sostenida.

Por último, al considerar la rama 3 (comercio) es fácil ver que los tres puntos aparecen en el extremo derecho del cuadrante iv, lo que significa que es la más requeridá como abastecedora, aún cuando su peso relativo sobre el sistema es menor que el promedio.

En suma, el uso de los índices de interdependencia para el análisis de la evolución y comportamiento del poder intersectorial, pese a su sencillez, resulta una herramienta muy poderosa y fácil de obtener, ya sea por medio de un programa de computadora escrito exprofeso o mejor aún de manera interactiva a través de una hoja de cálculo electrónica.

Listado 4.1 Programa para la solución general del Modelo de Insumo Producto

```
Program ModeloDeInsumoProducto;

Const
  NSec = 10;

{**
   NOTA TECNICA 1
   Este programa lee los  datos  de entrada del archivo

                       MIP.TXT

   que tiene la siguiente estructura:

       - Matriz de transacciones por renglones
       - Vector columna de los niveles de produccion
       - Vector columna de los insumos de importacion
       - Vector columna de las demandas finales
         proyectadas

      Ejemplo:

         0    0    3   19   27    1    0    0    0   49    4
         3    0    3    8    2    2    3    2    1   49    0
         9    3    0    4    1    5    4   10    3   67   14
        30    5   17    0   12    6   11   12    2   28   20
         3    0    4    5    0    2    0    4    1    2   11
         6    0    4    5    4    0    0    3    3   41   26
         0    1   22    2    0    2    0   47   18    2   14
         2    1   15    0    1    1    1    0    5   19   44
         6    0   10    2    0    1    0   20    0    4   15
        80    4   67   23   30   14   12   15   39    0   70
        22    4   22   30   21   21   15   39   14   82    0
       467
        79
       375
       217
       183
       141
       117
       316
        94
      1358
       261
        28
         0
         3
         9
         5
         8
         6
         1
         1
         5
         1
       480
        98
       395
       245
       190
       149
       127
       357
       104
      1569
       322
```

```
     NOTA TECNICA 2
     Para modificar el tama~o de las matrices y vectores
     se debe cambiar el valor de la constante  NSec, por
     ejemplo,

                     NSec = 72;

     No obstante lo anterior el tama~o de las  matrices  y
     vectores  esta  limitado  por

       1) La cantidad de memoria  principal  que tenga  la
          computadora

       2) La manera  en que maneje el compilador usado los
          arreglos estaticos

       3) La cuota autorizada por el sistema operativo
                                                          **}

Type
  Txt = String[80];
  Matriz = Array [1 .. NSec, 1 .. NSec] of Real;
  Vector = Array [1 .. NSec] of Real;

Var
  MIP: Text;
  A: Matriz;
  M,X,Y,Z: Vector;

Procedure Print(Texto: Txt);
Begin
  Writeln;
  Writeln(Texto);
  Writeln
End;

Procedure EscribeMatriz(M: Matriz);

Procedure Skip(s: Integer);
Begin
  For s := 1 To s Do
  Writeln
End;

Var
  i, j: Integer;

Begin
  For i := 1 To NSec Do
     Begin
       Writeln('Renglon ',i:2);
       Writeln;
       For j := 1 To NSec Do
         Begin
           Write(M[i, j]:8:4);
           if j mod 8 = 0 Then Skip(2);
         End;
       Skip(2);
       End
End;

Procedure LeeMatriz(Var M: Matriz);

Var
  i, j: Integer;

Begin
  For i := 1 To NSec Do
    For j := 1 To NSec Do
      Read(MIP,M[i, j]);
    EscribeMatriz(M)
End;
```

```
Procedure EscribeVector(V: Vector);

Var
  i: Integer;

Begin
  For i := 1 To NSec Do
    Begin Write (V[i]:8:2); If i mod 8 = 0 Then writeln End
End;

Procedure LeeVector(Var V: Vector);

Var
  i: Integer;

Begin
  For i := 1 To NSec Do
    Readln(MIP,V[i]);
  EscribeVector(V)
End;

Procedure CalculaCoeficientesTecnicosDeInsumosNacionales
            (Var M: Matriz; V: Vector);

Var
  i, j: Integer;

Begin
  Writeln;
  For i := 1 To NSec Do
    For j := 1 To NSec Do
      M[i,j] := M[i,j] / V[j];
    EscribeMatriz(M)
End;

Procedure CalculaCoeficientesTecnicosDeInsumosImportados
            (Var M, V: Vector);

Var
  i, j: Integer;

Begin
  For i := 1 To NSec Do
    M[i] := M[i] / V[i];
    EscribeVector(M)
End;
Procedure ConstruyeMatrizDeLeontief(Var M: Matriz; V: Vector);

Var
  i, j: Integer;

Begin
  For i := 1 To NSec Do
    For j := 1 To NSec Do
      If i = j Then
        M[i,j] := 1 + V[i] - M[i,j]
      Else
        M[i,j] := 0 - M[i,j];
  EscribeMatriz(M)
End;
```

```
Procedure InvierteMatriz(Var A: Matriz);
Const Epsilon: Real = 5E-11;
Var
  P:        Array [1 .. NSec] Of Integer;
  Ind:      Array [1 .. NSec] Of Record
                                   Ren,
                                   Col: Integer
                                 End;
  Pivote: Array [1 .. NSec] Of Real;
  Col, Ren:     Integer;
  i,j,k,l,m,n:  Integer;
  Det,t: Real;

Procedure Alarma;
Begin
  Writeln('La matriz es singular !A! = 0'); Halt
End;

Procedure BuscaPivote;
Begin
  t := 0.0;
  For j := 1 To n Do
    If P[j] <> 1 Then
      Begin
        For k := 1 To n Do
          If (P[k] - 1 < 0) And (Abs(t) < Abs(A[j,k])) Then
            Begin
              Ren := j;
              Col := k;
              t := A[j,k]
            End
        End;
  P[Col] := P[Col] + 1
End;

Procedure PonerPivoteSobreLaDiagonal;
Begin
  If Ren <> Col Then
    Begin
      Det := -Det;
      For l := 1 to n Do
        Begin
          t := A[Ren,l];
          A[Ren,l] := A[Col,l]; A[Col,l] := t
        End
    End;
    Ind[i].Ren := Ren; Ind[i].Col := Col; Pivote[i] := A[Col,Col];
    Det := Det * Pivote[i];
    If Abs(Det) < Epsilon Then Alarma;
    A[Col,Col] := 1;
    For l := 1 to n Do A[Col,l] := A[Col,l] / Pivote[i]
End;

Procedure IntercambiaColumnas;
Begin
  For i := 1 To N Do
    Begin
      l := n - i + 1;
      If Ind[l].Ren <> Ind[l].Col Then
        Begin
          Ren := Ind[l].Ren; Col := Ind[l].Col;
          For k := 1 To n Do
            Begin
              t := A[k,Ren];
              A[k,Ren] := A[k,Col];
              A[k,Col] := t
            End
        End
    End
End;
```

```
Procedure ReduceRenglones;
Begin
  For m := 1 To n Do
    Begin
      If m <> Col Then
        Begin
          t := A[m,Col]; A[m,Col] := 0.0;
          For l := 1 To n Do A[m,l] := A[m,l] - A[Col,l] * t
        End
    End
End;

Begin
  n := NSec; Det := 1.0;
  For i := 1 To n Do P[i] := 0;
  For i := 1 To n Do
    Begin
      BuscaPivote; PonerPivoteSobreLaDiagonal; ReduceRenglones
    End;
    IntercambiaColumnas; EscribeMatriz(A);
    Writeln; Writeln('Determinante = ',Det:8:3)
End;

Procedure Inicializa;
Begin
  Writeln('Modelo de insumo producto');
  Print('Configurado para matrices de orden ');
  Writeln(NSec,' X ',Nsec);
  Assign (MIP,'MIP.TXT');      {Abre el archivo de datos}
  Reset (MIP);
  Print('Matriz de Transacciones ([A]) ');
  LeeMatriz(A);    {Transacciones}
  Print('Vector de niveles de produccion (X[j])');
  LeeVector(X);    {Niveles de produccion}
  Print('Importaciones ([M] Solo diagonal principal)');
  LeeVector(M);    {Importaciones}
  Print('Demanda final proyectada ([Y])');
  LeeVector(Y);    {Demanda final proyectada}
  Close(MIP);
End;

Procedure Termina;
Begin Print('Termina M I P'); Close(MIP) End;

Procedure CalculaNivelesDeProduccion(Var A: Matriz; Y: Vector);

Var
  Z: Vector; i,j,k: Integer;

Begin
  For i := 1 To NSec Do
       Begin
         Z[i] := 0;
         For k := 1 To NSec Do Z[i] := Z[i] + A[i,k] * Y[k]
       End;
  Print('Niveles de produccion calculados'); EscribeVector(Z)
End;

Begin{Programa principal}
  Inicializa;
  Print('Coeficientes tecnicos de insumos nacionales X[i,j]');
  CalculaCoeficientesTecnicosDeInsumosNacionales(A,X);
  Print('Coeficientes tecnicos de insumos importados [M]');
  CalculaCoeficientesTecnicosDeInsumosImportados(M,X);
  Print('Matriz de Leontief [I + M - A]');
  ConstruyeMatrizDeLeontief(A,M);
  Print('Inversa de matriz de Leontief [R]');
  InvierteMatriz(A);
  CalculaNivelesDeProduccion(A,Y);
  Termina
End.
```

Listado 4.2 Resultados de la ejecución del programa Modelo de Insumo Producto.

```
Modelo de insumo producto

Configurado para matrices de orden

10 X 10

Matriz de Transacciones ([A])

Renglon  1
  0.0000  0.0000  3.0000 19.0000 27.0000  1.0000  0.0000  0.0000
  0.0000 49.0000

Renglon  2
  4.0000  3.0000  0.0000  3.0000  8.0000  2.0000  2.0000  3.0000
  2.0000  1.0000

Renglon  3
 49.0000  0.0000  9.0000  3.0000  0.0000  4.0000  1.0000  5.0000
  4.0000 10.0000

Renglon  4
  3.0000 67.0000 14.0000 30.0000  5.0000 17.0000  0.0000 12.0000
  6.0000 11.0000

Renglon  5
 12.0000  2.0000 28.0000 20.0000  3.0000  0.0000  4.0000  5.0000
  0.0000  2.0000

Renglon  6
  0.0000  4.0000  1.0000  2.0000 11.0000  6.0000  0.0000  4.0000
  5.0000  4.0000

Renglon  7
  0.0000  0.0000  3.0000  3.0000 41.0000 26.0000  0.0000  1.0000
 22.0000  2.0000

Renglon  8
  0.0000  2.0000  0.0000 47.0000 18.0000  2.0000 14.0000  2.0000
  1.0000 15.0000

Renglon  9
  0.0000  1.0000  1.0000  1.0000  0.0000  5.0000 19.0000 44.0000
  6.0000  0.0000

Renglon 10
 10.0000  2.0000  0.0000  1.0000  0.0000 20.0000  0.0000  4.0000
 15.0000 80.0000

Vector de niveles de produccion (X[j])

     4.00    22.00  467.00    79.00   375.00   217.00   183.00   141.00
   117.00   316.00

Importaciones ([M] Solo diagonal principal)

    94.00  1358.00  261.00    28.00     0.00     3.00     9.00     5.00
     8.00     6.00

Demanda final proyectada ([Y])

     1.00     1.00    5.00     1.00   480.00    98.00   395.00   245.00
   190.00   149.00
```

Coeficientes tecnicos de insumos nacionales X[i,j]

Renglon 1
0.0000 0.0000 0.0064 0.2405 0.0720 0.0046 0.0000 0.0000
0.0000 0.1551

Renglon 2
1.0000 0.1364 0.0000 0.0380 0.0213 0.0092 0.0109 0.0213
0.0171 0.0032

Renglon 3
12.2500 0.0000 0.0193 0.0380 0.0000 0.0184 0.0055 0.0355
0.0342 0.0316

Renglon 4
0.7500 3.0455 0.0300 0.3797 0.0133 0.0783 0.0000 0.0851
0.0513 0.0348

Renglon 5
3.0000 0.0909 0.0600 0.2532 0.0080 0.0000 0.0219 0.0355
0.0000 0.0063

Renglon 6
0.0000 0.1818 0.0021 0.0253 0.0293 0.0276 0.0000 0.0284
0.0427 0.0127

Renglon 7
0.0000 0.0000 0.0064 0.0380 0.1093 0.1198 0.0000 0.0071
0.1880 0.0063

Renglon 8
0.0000 0.0909 0.0000 0.5949 0.0480 0.0092 0.0765 0.0142
0.0085 0.0475

Renglon 9
0.0000 0.0455 0.0021 0.0127 0.0000 0.0230 0.1038 0.3121
0.0513 0.0000

Renglon 10
2.5000 0.0909 0.0000 0.0127 0.0000 0.0922 0.0000 0.0284
0.1282 0.2532

Coeficientes tecnicos de insumos importados [M]

23.50 61.73 0.56 0.35 0.00 0.01 0.05 0.04
0.07 0.02

Matriz de Leontief [I + M - A]

Renglon 1	24.5000	0.0000	-0.0064	-0.2405	-0.0720	-0.0046	0.0000	0.0000	0.0000	-0.1551
Renglon 2	-1.0000	62.5909	0.0000	-0.0380	-0.0213	-0.0092	-0.0109	-0.0213	-0.0171	-0.0032
Renglon 3	-12.2500	0.0000	1.5396	-0.0380	0.0000	-0.0184	-0.0055	-0.0355	-0.0342	-0.0316
Renglon 4	-0.7500	-3.0455	-0.0300	0.9747	-0.0133	-0.0783	0.0000	-0.0851	-0.0513	-0.0348
Renglon 5	-3.0000	-0.0909	-0.0600	-0.2532	0.9920	0.0000	-0.0219	-0.0355	0.0000	-0.0063
Renglon 6	0.0000	-0.1818	-0.0021	-0.0253	-0.0293	0.9862	0.0000	-0.0284	-0.0427	-0.0127
Renglon 7	0.0000	0.0000	-0.0064	-0.0380	-0.1093	-0.1198	1.0492	-0.0071	-0.1880	-0.0063
Renglon 8	0.0000	-0.0909	0.0000	-0.5949	-0.0480	-0.0092	-0.0765	1.0213	-0.0085	-0.0475
Renglon 9	0.0000	-0.0455	-0.0021	-0.0127	0.0000	-0.0230	-0.1038	-0.3121	1.0171	0.0000
Renglon 10	-2.5000	-0.0909	0.0000	-0.0127	0.0000	-0.0922	0.0000	-0.0284	-0.1282	0.7658

Inversa de matriz de Leontief [R]

Renglon 1
0.0429 0.0007 0.0006 0.0131 0.0035 0.0023 0.0005 0.0022
0.0021 0.0095

Renglon 2
0.0008 0.0160 0.0001 0.0014 0.0005 0.0003 0.0003 0.0006
0.0005 0.0003

Renglon 3
0.3481 0.0081 0.6555 0.1583 0.0329 0.0400 0.0131 0.0563
0.0485 0.1093

Renglon 4
0.0606 0.0559 0.0239 1.1349 0.0320 0.1036 0.0182 0.1264
0.0772 0.0750

Renglon 5
0.1699 0.0198 0.0484 0.3679 1.0346 0.0430 0.0318 0.0834
0.0375 0.0679

Renglon 6
0.0118 0.0067 0.0044 0.0731 0.0360 1.0254 0.0099 0.0530
0.0527 0.0265

Renglon 7
0.0284 0.0076 0.0121 0.1381 0.1207 0.1389 0.9820 0.0887
0.1993 0.0295

Renglon 8
0.0526 0.0361 0.0175 0.6980 0.0782 0.0895 0.0881 1.0720
0.0796 0.1125

Renglon 9
0.0208 0.0134 0.0084 0.2444 0.0376 0.0663 0.1278 0.3409
1.0303 0.0393

Renglon 10
0.1481 0.0094 0.0049 0.1374 0.0256 0.1470 0.0277 0.1126
0.1899 1.3521

Determinante = 1577.867

Niveles de produccion calculados

4.52 0.69 67.99 90.91 551.84 148.74 523.66 376.53
360.46 303.09

Termina M I P

Capitulo 5

PROGRAMACION MATEMATICA

El análisis de actividades es otro método que permite estudiar la distribución de los recursos en la producción dentro del contexto del equilibrio económico general. Este tipo de análisis, a diferencia del análisis de insumo producto, supone que:

1) Es factible producir el mismo bien de diferentes maneras. Es decir, incluye fuentes alternas de abastecimiento como actividades separadas y su nivel de utilización es una de las variables del modelo.

2) Que las opciones de una parte de la economía por lo general dependen de las decisiones tomadas en otra parte. O sea, se establece un criterio que permite elegir una solución sobre otra en función de los niveles de actividad.

Usualmente las técnicas matématicas empleadas para resolver esta clase de problemas se conocen bajo el nombre genérico de programación matemática (ver (16), (23), (25) y (42)). El término "programación matemática" se refiere a la teoría de la optimización (i.e, maximización o minimización de una función), y como tal nada tiene que ver con la programación de computadoras; sin embargo, la resolución de problemas de programación matemática reales se lleva a cabo empleando una computadora para que en ella se efectúen todas las operaciones aritméticas que de otra forma resultarían humanamente imposibles.

5.1 EL PROBLEMA DE LA PROGRAMACION MATEMATICA

El problema de la programación matemática consiste en optimizar el valor numérico de una función de una o más variables sujeta a cero o más restricciones como se muestra a continuación:

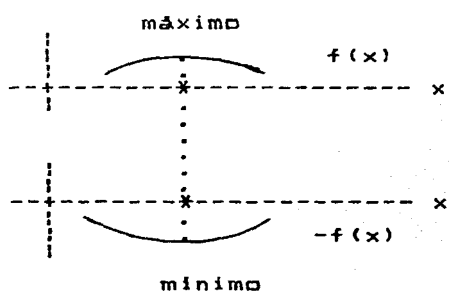
$$\text{Minimizar:} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.1}$$

$$\text{Sujeta a:} \quad \begin{array}{ll} r_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0 & (i = 1, 2, \ldots, k) \\ r_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 & (i = k+1, \ldots, m) \end{array} \tag{5.2}$$

En donde $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es la función objetivo sujeta a las m restricciones (5.2). Las que además pueden requerir que los valores de las x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) formen un conjunto propio de aquel que satisfaga las restricciones. Por ejemplo, para algunas variables se puede requerir que sólo tomen valores enteros. Además, si $m = 0$, entonces el problema no está restringido.

Es importante notar, como dicen los matemáticos, que no hay pérdida de generalidad al tomar sólo el problema de minimización, dado que maximizar f es lo mismo que minimizar −f (figura 5.1).

Figura 5.1 Minimización y maximización de una función



La formulación anterior es común a una amplia gama de problemas de diferentes campos, de manera que la programación matemática proporciona métodos para enfocar la solución de éstos de manera unificada. Por ejemplo, en las ciencias físicas es frecuente que se usen ajustes de curvas y modelos estadísticos no lineales cuya resolución requiere minimizar sumas de cuadrados o maximizar funciones de probabilidad. En tanto que los economistas, analistas de investigación de operaciones y planificadores tienen que enfrentar problemas de asignación de recursos limitados, sea en el ámbito económico, social o industrial. Generalmente los modelos empleados para la solución de esta última clase de problemas son lineales y la técnica de optimización correspondiente es la llamada programación lineal.

5.2 PROGRAMACION LINEAL

El caso más simple de programación matemática es cuando la función objetivo y las restricciones son funciones lineales de x, de ahí el nombre de programación lineal. Esta, como se dijo antes, se usa para resolver problemas de asignación de recursos donde el empleo de un recurso en diferentes actividades tiene tasas de retorno constantes y proporcionales. Por ejemplo, si para producir un bien cualquiera se requieren cinco unidades de un recurso, entonces para producir dos unidades del mismo bien se requieren diez unidades de dicho recurso. De manera similar, cada unidad del bien producida contribuye en la misma cantidad para cubrir las utilidades y los gastos generales.

Los modelos de programación lineal corresponden en lo general a una representación de algunos procesos de toma de decisiones, en los que el decisor busca escoger, dentro de todas las alternativas posibles, la que resulte mejor con base a un criterio predeterminado. Este criterio puede expresarse en términos tales como maximizar el beneficio o utilidad, o minimizar el costo, tiempo o riesgo.

La solución al problema de asignación de recursos, también conocido como análisis de actividades o mezcla de productos, tiene algunas derivaciones aplicables a la solución del problema del transporte, transbordos, incorporación y planeación. La programación lineal permite así resolver una gran diversidad de problemas que se le presentan al economista en el sector privado y en el sector público. Problemas tales como la selección de cultivos en la agricultura, la asignación de enfermeras en un hospital, asignación de recursos financieros a las diversas áreas de una organización, selección de rutas y formas de transporte, selección de procedimientos de manufactura, determinación de la mezcla óptima de ingredientes en diversos productos, programación de producción y control de inventarios, son sólo algunos de los muchos que se pueden resolver por medio de la programación lineal.

El problema general de la programación lineal consiste en resolver un sistema de desigualdades lineales de la forma:

$$
\begin{array}{ll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n >= c_1 & (\text{ó} <= c_1) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n >= c_2 & (\text{ó} <= c_2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n >= c_m & (\text{ó} <= c_m)
\end{array}
\qquad (5.3)
$$

donde se tiene que $n >= m$ (ó $n <= m$), y un número infinito de soluciones. De manera que para elegir la solución óptima entre todas las posibles es necesario introducir dos condiciones adicionales:

$$\text{Minimizar:} \qquad z = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n \qquad (5.4)$$

$$x_i >= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5.5)$$

donde a, b y c son coeficientes conocidos. Esta forma se conoce como forma estándar de minimización.

En la terminología de la programación lineal el conjunto de desigualdades (5.3) se conoce como las restricciones del sistema; en tanto que la ecuaciones (5.4) y (5.5) se denominan función objetivo y condición de no negatividad respectivamente.

Las restricciones del sistema (5.3) es un conjunto de expresiones lineales que involucran desigualdades, las que pueden ser eliminadas con sólo sumar o substraer una nueva variable, con tal de que ésta no sea negativa. Estas variables se conocen como variables de holgura. De manera que el conjunto de restricciones (5.3) se puede reescribir como:

$$
\begin{array}{lr}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = c_1 & \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \qquad x_{n+2} \qquad = c_2 & (5.6) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \qquad\qquad x_{n+m} = c_m &
\end{array}
$$

Ahora el problema de programación lineal se puede establecer de manera que se determinen las

$$x_i >= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n = m) \qquad (5.7)$$

tales que

$$z = [B]\,[X] \qquad (5.8)$$

sea un mínimo y

$$[A]\,[X] = [C] \qquad (5.9)$$

Donde [A] es una matriz de m renglones y n + m columnas; [X] y [C] son vectores columna de orden n + m y m respectivamente; y [B] es un vector renglón de orden n + m.

Si se examina el sistema de ecuaciones (5.6) es fácil ver que se trata de un sistema subdeterminado, es decir, tiene más variables que ecuaciones y por lo tanto un número infinito de soluciones. Sin embargo, eligiendo n variables y asignándoles un conjunto particular de valores es posible determinar las m restantes variables en forma única. En particular si se asigna arbitrariamente el valor cero a las n variable elegidas, se tendrán

$$\frac{(n + m)!}{n!\,(m)!}$$

soluciones posibles, las cuales se conocen como soluciones básicas, dado que satisfacen el conjunto de restricciones y la condición de no negatividad. Entonces para resolver el problema de programación lineal basta con enumerar todas las soluciones básicas y elegir la que sea óptima entre las factibles, aquella en que todas sus x_j sean mayores o iguales que cero.

Sin embargo, en la práctica la manera usual de resolver el problema de programación lineal es mediante el método simplex (primal) propuesto por Dantzig en 1947 o bien por el método simplex dual desarrollado en 1953 por Lemke. La esencia de ambos métodos es un procedimiento iterativo. En el primero se genera una secuencia monótona de soluciones básicas factibles del problema, asegurándose que en cada paso los valores de la función objetivo se reducen o en el peor de los casos no crecen; en tanto que en el segundo se genera una secuencia monótona de soluciones básicas factibles del problema, pero en este caso asegurando que en cada paso los valores de la función objetivo aumentan o al menos no disminuyen.

Cabe hacer mención que a cada problema de programación lineal le corresponde un segundo problema llamado el dual. Esto es, cuando el problema inicial o primal es la minimización de una función objetivo, su dual trata la maximización de una función objetivo, es decir, son simétricos. Por lo tanto, la solución de cualquiera de ellos proporciona la información completa para resolver el otro. Luego si un problema de programación lineal, escrito en forma, estándar es:

Minimizar: $z = [C]\ [X]$

Sujeto a: $[A]\ [X] >= [B]$

$x_i >= 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n = m)$

entonces su dual es:

Maximizar: $z_d = [B]\ [Y]$

Sujeto a: $[A']\ [X] <= [C]$

$y_i >= 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n = m)$

La dualidad es un concepto muy importante por si mismo ya que cuando se enfrenta la solución de un problema de programación lineal, las molestias de cómputo están más relacionadas con el número de renglones (restricciones) que con el número de variables involucradas. Esto es, el tamaño de la base está determinado por el número de renglones y ese tamaño determina la cantidad de cómputo a efectuar al pivotear en el algoritmo simplex. Este esfuerzo puede ser excesivo y es entonces cuando la solución del dual puede ser la mejor opción. Si el dual contiene menos renglones que el primal ($n < m$) es más práctico resolver el dual. Las reglas de construcción de los pares dual-primal pueden resumirse en:

Primal	Dual
n variables, m restricciones	m variables, n restricciones
constantes en el lado derecho de la igualdad	coeficientes de la función objetivo
coeficientes de la función objetivo	constantes en el lado derecho de la igualdad
columnas de la matriz de restricciones	renglones de la matriz de restricciones
renglones de la matriz de restricciones	columnas de la matriz de restricciones
variables no negativas	relaciones de desigualdad
relaciones de desigualdad	variables no negativas
relaciones de igualdad	variables irrestrictas en signo
variables irrestrictas en signo	relaciones de igualdad

La teoría de la dualidad, que trata con los pares primal-dual de problemas de programación lineal, juega un papel muy importante en el análisis de sensibilidad que está diseñado para evaluar cuan sensible es una solución a cambios en uno o más parámetros en el modelo (o sistema de ecuaciones) original, sin tener que resolver nuevamente el modelo.

Para efectuar el análisis de sensibilidad se trabaja con base en el supuesto de que la solución de programación lineal óptima está asociada a una base óptima donde se manifiestan las dos siguientes propiedades:

1) Al cambiar uno o más de los coeficientes de la función objetivo: La base permanece óptima siempre y cuando las condiciones de optimalidad permanezcan satisfechas, o sea que la base actual seguirá siendo óptima siempre y cuando el problema dual continue factible.

2) Al cambiar uno o más de los valores de las constantes del lado derecho: La base actual seguirá siendo óptima siempre y cuando las condiciones de factibilidad sigan satisfaciéndose, o sea que la base actual seguirá siendo óptima siempre y cuando las condiciones duales de optimalidad se satisfagan.

5.3 EL METODO SIMPLEX

En la sección anterior se describió el método simplex como un procedimiento iterativo que pasa de una solución básica factible a otra adyascente, de forma tal que el valor de la función objetivo nunca disminuya. Esencialmente el algoritmo del método simplex, consiste en ir cambiando las variables que pertenecen a la base en forma sistemática y resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante mediante la aplicación del método de Gauss-Jordan hasta optimizar la función objetivo.

Para resolver un problema de programación lineal a través del método simplex, empleando o no computadora, es necesario llevar a cabo los siguientes pasos:

1) Transformar las desigualdades en igualdades empleando variables de holgura de acuerdo con el siguiente esquema:

Tipo de desigualdad	Acción
<=	sumar una variable de holgura
>=	restar una variable de holgura

2) Si la desigualdad es del tipo >=, entonces agregar tantas variables artificiales como sean necesarias de manera que se obtenga un conjunto de m vectores columna unitarios, linealmente independientes, en la matriz de coeficientes del sistema de m ecuaciones.

3) Como las variables de holgura y artificiales se añaden al sistema de ecuaciones con el fin de obtener una solución inicial factible, es necesario asegurar que valgan cero en la solución óptima. Esto se logra asignándoles a la función objetivo coeficientes de acuerdo a los siguientes criterios:

- Si x_i es una variable de holgura, entonces se asigna un coeficiente igual a cero.

- Si x_i es una variable artificial y se está minimizando, se asigna un coeficiente negativo cuya magnitud asegure que será excluida de la solución final.

- Si x_i es una variable artificial y se está maximizando, entonces se le asigna un coeficiente positivo cuya magnitud asegure que será excluida de la solución final.

4) A partir de los coeficientes de la función objetivo y de las restricciones construir una matriz de la forma mostrada en la figura 5.2.

Figura 5.2 Tableau simplex

C_j	-->	*****	C_1	C_2	...	C_n	C_{n+1}	C_{n+2}	...	C_{n+m}
v	*****	B	X_1	X_2	...	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	...	X_{n+m}
0	X_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0
0	X_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	X_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{2m}	...	a_{mn}	0	0	...	1
val de z		0	z_1	z_2	...	z_n	z_{n+1}	z_{n+2}	...	z_{n+m}
evaluador		*****	e_1	e_2		e_n	e_{n+1}	e_{n+2}		e_{n+m}

5) Obtener la primera solución factible básica con las m variables que tengan coeficiente unitario positivo y sólo aparezcan en una ecuación. El resto de las variables, es decir, las que no forman parte de la base tienen valor cero.

Una vez efectuados los pasos anteriores se aplica el siguiente procedimiento:

a) Analizar los evaluadores netos e_j para toda j a fin de determinar si la función objetivo fue o no optimizada. Esto ocurre cuando se cumple que todo $e_j <= 0$ (j =1, 2,..n+m), entonces se detiene el proceso y el valor de las variables que forman la base es la solución óptima. En caso contrario continuar.

b) Examinar los $e_j > 0$ y determinar como columna del elemento pivote la columna que coincida con el máximo e_j.

c) Para asegurar la factibilidad de la nueva solución, el renglón del elemento pivote será aquél para el cual se tenga mínimo valor b_k / a_{kj} donde $a_{kj} > 0$.

d) Introducir en la base la variable X_j, es decir, hacer que X_k y C_k tomen los valore X_j y C_j respectivamente.

e) Aplicar el método de Gauss-Jordan a la matriz de coeficientes empleando como pivote el elemento a_{kj} para obtener los nuevos valores b_j correspondientes a la solución básica de las vanto a_{kj} para obtener los nuevos valores b_j correspondientes a la solución básica de las variables que están en la base. Las variables no básicas serán nulas.

f) Repetir el paso a).

Las condiciones para el algoritmo simplex establecen que todos los valores de los evaluadores (e_j) deben ser menores o iguales a cero para problemas de maximización, o no negativos en problemas de minimización. Por la forma en que se construyen los pares primal-dual las condiciones descritas para un problema de maximización son negativas en la minimización dual y viceversa. Además las condiciones de factibilidad primas son equivalentes a las condiciones de optimalidad dual.

Cabe hacer mención sobre la posibilidad de que el problema sea cíclico o degenerado, lo cual en la práctica es remoto que ocurra. Sin embargo, es conveniente cubrir tal eventualidad estableciendo un número máximo de iteraciones al programar el método, usualmente se emplean 4m iteraciones donde m es el número de restricciones. Esto se debe a que se requieren alrededor de 2m cambios de base para llegar a la solución óptima.

Listado 5.1 Programa Método Simplex

```
Program MetodoSimplex;

Const
     MaxRen = 35;
     MaxCol = 85;
     Epsilon = 0.0001;

{**
   NOTA TECNICA 1
   Este programa lee los  datos  de entrada del archivo

                           PL.TXT

   que tiene la siguiente estructura:

      - En  el primer  renglon del archivo el numero
        total  de ecuaciones (incluyendo  la funcion
        objetivo) y el numero total de renglones del
        tableau.
      - La matriz [A] dispuesta por renglones donde
        el primero corresponde a la funcion objetivo
        y los restante a las restricciones.
      - Finalmente los indices de las columnas de las
        variables de holgura en cada renglon.

    Ejemplo:

      4  6
     -10.0   -11.0    0.0    0.0    0.0   0.0
       3.0     4.0    1.0    0.0    0.0   9.0
       5.0     2.0    0.0    1.0    0.0   8.0
       1.0    -2.0    0.0    0.0    1.0   1.0
       0.0     0.0    0.0    0.0    0.0   0.0
      3 4 5

    NOTA TECNICA 2
    Para modificar el tama~o de las matrices y vectores
    se debe  cambiar el valor de la constante  MaxRen y
    MaxCol por ejemplo,

                     MaxRen = 50;
                     MaxCol = 26;

    No obstante lo anterior el tama~o de las  matrices  y
    vectores  esta  limitado  por

      1) La cantidad de memoria  principal  que tenga  la
         computadora

      2) La manera en que maneje el compilador  usado los
         arreglos estaticos

      3) La cuota autorizada por el sistema operativo       **)
Type
  Matriz = Array [1 .. MaxRen, 1 .. MaxCol] of Real;

Var
  IPT: Text;
  A:   Matriz;
  L:   Array [2 .. MaxRen] of Integer;
  W:   Array [1 .. MaxRen] of Real;
  ii: Integer;                      {numero de ecuaciones}
  jj: Integer;                      {numero de columnas}
  iii: Integer;
  kkk: Integer;
  i, j, k, jk, kj: Integer;
  x, xmin: Real;
  ok, hecho: Boolean;
```

```
Procedure Inicializa;
Begin
   Writeln('Metodo Simplex'); Writeln;
   Write('Configurado para procesar ');
   Write('hasta ', MaxRen - 1,' restricciones y ');
   Writeln(MaxCol - 1,' variables'); Writeln;
   {Asigna el archivo de datos al programa}
   Assign(IPT,'PL.TXT'); Reset(IPT);
   {Lee el numero de renglones y el de columnas del Tableau}
   Read(IPT, ii, jj);
   iii := ii + 1;
   For i := 1 To iii Do Begin W[i] := 0; L[i] := 0 End;
   {Lee los elementos del Tableau Simplex renglon por renglon}
   Writeln('Tableau Simplex');  Writeln;
   For i := 1 To iii Do
      Begin
         For j := 1 To jj Do
            Begin
               Read(IPT, A[i, j]);
               Write(A[i, j]:8:2)
            End;
         Writeln
      End;
   Writeln;
   {Lee los subindices de las variables de holgura}
   Writeln('Subindices de las variables de holgura');
   Writeln;
   For i := 2 To ii Do Begin Read(IPT, L[i]); Write(L[i]:5); End;
   Writeln; Writeln;
   {Cierra el archivo de datos}
   Close(IPT);
   kkk := 0;
End;

Procedure ImprimeSolucion;
Begin
   Writeln;
   Writeln('Funcion objetivo',A[1,jj]:10:4);
   Writeln;
   Writeln('Variable       Valor');
   Writeln;
   For i := 2 To ii Do Writeln(L[i]:8,A[i, jj]:10:4);
   hecho := True;
   Writeln;
   Writeln('Matriz final');
   Writeln;

   For i := 1 To iii Do
      Begin
         For j := 1 To jj Do Write(A[i, j]:8:2);
         Writeln
      End;
   Writeln;
End;

Procedure Termina;
Begin
   Writeln;
   Write('Termina Metodo Simplex satisfactoriamente')
End;

Procedure Simplex;
Begin{Simplex}
   i := 2;
   While i < iii Do
      Begin
         If L[i] = 0 Then
            For j := 1 To jj Do
               If A[i, j] <> 0 Then
                  A[iii, j] := A[iii, j] -  A[i, j];
         i := i + 1;
      End;
```

```
    k := iii;
    hecho := False;
    Repeat
    j := 1;
    W[k] := 0;
    L[k] := 0;
    While j < jj Do
      Begin
        If (A[k, j] < 0) Or (W[k] > A[k, j]) Then
          Begin W[k] := A[k, j]; L[k] := j End;
        j := j + 1
      End;
  If L[k] <> 0 Then
      Begin
        kj := L[k]; ok := False;
        For i := 2 To ii Do If A[i, kj] > 0 Then ok := True;
       If ok Then
         Begin
           jk := 0; i := 2;
           While i <= ii Do
             Begin
               If A[i, kj] > 0.0 Then x := A[i, jj] / A[i, kj];
               If jk = 0 Then Begin xmin := x; jk := i End;
               If x < xmin Then Begin xmin := x; jk := i End;
               i := i + 1;
             End;
           x := A[jk, kj]; L[jk] := kj;
           For i := 1 To iii Do W[i] := A[i, kj];
           For i := 1 To jk - 1 Do
             For j := 1 To jj Do
               If Not((A[jk, j] = 0.0) Or (W[i] = 0.0)) Then
                 A[i, j] := A[i, j] - W[i] * (A[jk, j] / x);
            For i := jk + 1 To iii Do
              For j := 1 To jj Do
               If Not((A[jk, j] = 0.0) Or (W[i] = 0.0)) Then
                 A[i, j] := A[i, j] - W[i] * (A[jk, j] / x);
            For j := 1 To jj Do A[jk, j] := A[jk, j] / x;
            kkk := kkk + 1; Writeln(kkk:9,A[k, jj]:12:4,L[k]:11);
         End
      Else
         Begin
           Writeln('*** Solucion no acotada ***':40);
           ImprimeSolucion; Halt
         End
     End
   Else
     Begin
       If k > 1 Then
         Begin
           For j := 1 To jj - 1 Do
             If A[k, j] > Epsilon Then
               Begin
                 Writeln('Insatisfasible');  ImprimeSolucion; Halt
               End;
           Writeln('Satisfacible');
           Writeln('                              Nueva');
           Writeln('                Funcion       varbl.');
           Writeln('Iteracion       objetivo      basica'); Writeln;
           For j := 1 To jj Do A[iii, j] := 0.0;
           k := 1; kkk := 0;
         End
       Else ImprimeSolucion;
   End;
   Until hecho;
End;

        {Programa Principal}
Begin Inicializa; Simplex; Termina End.
```

Listado 5.2 Resultados del programa Método Simplex

```
Metodo Simplex
Configurado para procesar hasta 34 restricciones y 34 variables
Tableau Simplex

  -10.00   -11.00     0.00     0.00     0.00     0.00
    3.00     4.00     1.00     0.00     0.00     9.00
    5.00     2.00     0.00     1.00     0.00     8.00
    1.00    -2.00     0.00     0.00     1.00     1.00
    0.00     0.00     0.00     0.00     0.00     0.00

Subindices de las variables de holgura

    3     4     5

Satisfacible
                                  Nueva
                Funcion           varbl.
Iteracion       objetivo          basica

        1        24.7500               2
        2        26.5000               1

Funcion objetivo    26.5000

Variable         Valor

       2      1.5000
       1      1.0000
       5      3.0000

Matriz final

    0.00     0.00     2.50     0.50     0.00    26.50
    0.00     1.00     0.36    -0.21     0.00     1.50
    1.00     0.00    -0.14     0.29     0.00     1.00
    0.00     0.00     0.86    -0.71     1.00     3.00
    0.00     0.00     0.00     0.00     0.00     0.00

Termina Metodo Simplex satisfactoriamente
```

Capítulo 6

TECNICAS DE REGRESION

La econometría es la aplicación de los métodos estadísticos al estudio de las relaciones entre variables económicas con el objetivo de descubrir la fuerza y fiabilidad de esas relaciones, de manera que puedan ser utilizadas, con fines de predicción y diseño de políticas económicas en una gama muy amplia de situaciones, desde pequeñas empresas manufactureras hasta la economía de un país. Los métodos empleados usualmente son las regresiones simples y múltiples. El lector interesado podrá encontrar mayor información acerca de estas técnicas en las referencias (24), (25) y (47).

6.1 METODOLOGIA DE LA ECONOMETRIA

La Econométria tiene como objeto la estimación y verificación de los modelos económicos. Es decir, la econométria se emplea para predecir los valores a futuro de ciertas variables económicas con base en los valores conocidos o esperados en el futuro de algún otro conjunto de variables. Una investigación de tipo econométrico consta por lo general de los siguientes pasos:

- Desarrollar un modelo econométrico de la teoría que se pretende verificar.
- Obtener una muestra de los datos de las variables que pretenden describir el fenómeno
- Estimar los parámetros del modelo
- Aplicar los criterios que permitan establecer si las estimaciones obtenidas verifican la teoría. Usualmente esta

verificación de la teoría se lleva a cabo mediante la técnica de la inferencia estadística conocida como prueba de hipótesis.

En el caso que los resultados obtenidos sean compatibles con la teoría se pueden efectuar predicciones o pronósticos acerca del comportamiento del fenómeno económico que se estudia. En caso contrario, como en cualquier otra disciplina, es necesario revisar tanto las especificaciones del modelo como la teoría misma.

6.2 MODELOS ECONOMETRICOS

Los modelos econométricos a diferencia de los modelos de la economía matemática suponen que las relaciones estructurales que los forman no se cumplen estrictamente, sino que existe una serie de factores no determinísticos, tales como perturbaciones de tipo aleatorio y errores de medición, así como la supresión de ciertas variables, debido a la imposibilidad de explicar mediante relaciones sencillas el complejo comportamiento humano. A manera de ejemplo, considérese la función de consumo keynesiana en su forma más simple.

MODELO KEYNESIANO DE CONSUMO

En el modelo keynesiano de consumo las ecuaciones estructurales y las variables son:

Ecuaciones estructurales

$Y = C + I \quad (6.1); \quad C = a + b(Y - t) \quad (6.2)$

Variables exógenas

I: Inversión

Variables endógenas

Y: Ingreso; C: Consumo

Parámetros

a: Nivel de consumo cuando el ingreso es igual a cero $(a > 0)$

b: Propensión marginal al consumo $(0 < b < 1)$

t: Impuesto

Como se puede ver el modelo propuesto es: lineal, puesto que las ecuaciones son de primer grado; determinado, porque el número de ecuaciones y de variables endógenas es el mismo y estático, dado que los valores de las variables endógenas se consideran referidas a un mismo instante de tiempo, es decir, no están en función del tiempo.

Si se sustituye en la ecuación (6.1) la variable C por el miembro derecho de la ecuación (6.2), se obtiene:

$$Y = a + b(Y - t) + I \tag{6.3}$$

Haciendo algunas operaciones algebraicas resulta:

$$Y = \frac{a - bt + I}{1 - b} \tag{6.4}$$

Luego sustituyendo (6.4) en (6.2) se tiene:

$$C = \frac{a - bt + bI}{1 - b} \tag{6.5}$$

Estas dos últimas ecuaciones se conocen como la forma reducida del modelo. En esta forma las ecuaciones no describen el comportamiento de los agentes económicos, sino expresan las consecuencias de ese comportamiento. Como puede observarse en las ecuaciones (6.4) y (6.5) el ingreso y el consumo dependen únicamente de los parámetros, es decir, dichas variables están completamente determinadas. Sin embargo para el economista esta clase de modelos es poco interesante, puesto que en la práctica, a pesar de las definiciones matemáticas, el comportamiento de los agentes económicos no se cumple exactamente. Es decir, existen discrepancias estadísticas más o menos graves.

Para tener en cuenta estas discrepancias es necesario incluir en las ecuaciones, variables aleatorias (o estocásticas) con propiedades probabilísticas bien definidas. Estas variables representan fuerzas que, de una u otra manera, influyen en el comportamiento de la variable dependiente, pero que no es posible identificar o medir de manera explícita. Por ejemplo, estas variables pueden representar una crisis internacional, o un incidente político. Aunque por lo general estas variables representan aquellas influencias que resultan imperceptibles, si se consideran aisladamente, pero su suma puede ser significativa y se comporta como una variable aleatoria. Supuesto que es respaldado por el teorema central del límite.

Convencionalmente el elemento estocástico en una ecuación de comportamiento, se trata agregando un error aleatorio o término de perturbación. De esta manera la ecuación (6.2), se transforma en el siguiente modelo econométrico:

$$C = a + bY + U \qquad (6.6)$$

Desde el punto de vista econométrico la ecuación (6.6) plantea la hipótesis de que la variable dependiente (C) está relacionada linealmente con la variable explicatoria (Y), aunque no de manera exacta, puesto que está sujeta a variaciones individuales representadas por la variable aleatoria (U). En tanto que desde el punto de vista de la estadística matemática, se trata de un modelo de regresión lineal como se verá más adelante.

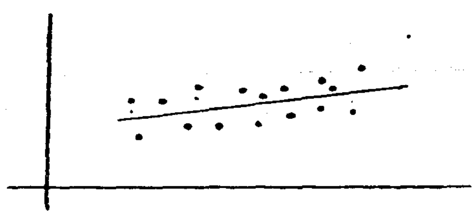
Ahora cabe preguntar, ¿De qué manera se estiman los parámetros?. La respuesta a esa pregunta es: mediante la aplicación de las técnicas proporcionadas por el análisis de regresión. Cuál de ellas se debe emplear para efectuar la estimación de los parámetros y cuáles deben ser las propiedades de los estimadores, depende: de las características propias del problema a tratar, de los supuestos que se hagan acerca de los términos de perturbación del modelo y de las variables predeterminadas, así como de la aplicabilidad del método de estimación a la forma en que se halla el modelo, es decir, si el modelo se halla o no en su forma reducida.

6.3 ANALISIS DE REGRESION

El término regresión tiene su origen en el estudio que Francis Galton realizó en torno a la distribución de las estaturas en una población. En su estudio Galton observó que aun existiendo la tendencia de que los padres altos tengan hijos altos y que los padres bajos procreen hijos bajos, la estatura promedio de una población no varia substancialmente de generación en generación. Su explicación mostraba que había una tendencia natural en la población a moverse o regresar a la estatura promedio. Lo que fue confirmado posteriormente por Karl Pearson mediante un estudio empírico.

Sin embargo, el término regresión en una interpretación moderna tiene un significado un poco diferente. En términos generales el análisis de regresión consiste en estimar o predecir la media poblacional de una variable (dependiente) con base en los valores conocidos de una o más variables (explicatorias). La regresión puede ser vista como una herramienta de tipo descriptivo con la que es posible descomponer y sumarizar la dependencia de una variable en término de otras, o bien como una herramienta inferencial mediante la cual se evalúan las relaciones existentes en una población a partir de muestras.

Figura 6.1 Linea de regresión



Geométricamente el problema de la regresión consiste en hacer pasar una curva suave lo más cerca posible de todos los puntos, aunque no necesariamente pase sobre de ellos (figura 6.1). Esta "cercania" usualmente se obtiene mediante la imposición del criterio de los mínimos cuadrados que es la base del método de los mínimos cuadrados desarrollado por Gauss, el cual es tratado a continuación con cierto detalle.

6.4 METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS

Esencialmente el método de los mínimos cuadrados consiste en hacer una aproximación polinómica a una función, dada en forma tabular, de manera que minimice los cuadrados de los errores. Es decir, se trata de obtener los valores de los coeficientes de la función:

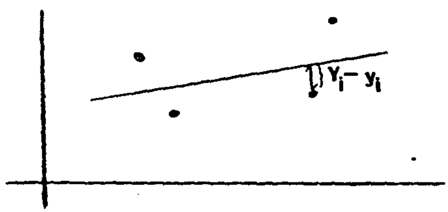
$$Y = f(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \ldots + a_mx^m \qquad (6.7)$$

de manera que se satisfaga el criterio de los mínimos cuadrados el cual requiere que:

$$S = \sum (Y_i - y_i)^2 \qquad (6.8)$$

sea mínima, donde Y_i es el valor resultante de evaluar la ecuación (6.7) y los valores $Y_i - y_i$ son llamados residuos (figura 6.2).

Figura 6.2 Residuos en ajuste de curvas



Para obtener el valor mínimo de S es necesario primero igualar a cero las primeras m + 1 derivadas parciales con respecto a todos y cada uno de los parámetros, para luego derivar con respecto a cada una de las a_j ($j = 0, 1, \ldots m$) con lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones normales:

$$\begin{aligned}
a_0n + a_1\sum x + a_2\sum x^2 + \ldots a_m\sum x^m &= \sum y \\
a_0x + a_1\sum x^2 + a_2\sum x^3 + \ldots a_m\sum x^{m+1} &= \sum xy \\
a_0x^2 + a_1\sum x^3 + a_2\sum x^4 + \ldots a_m\sum x^{m+2} &= \sum x^2y \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0x^m + a_1\sum x^{m+1} + a_2\sum x^{m+2} + \ldots a_m\sum x^{m+m} &= \sum x^my
\end{aligned} \qquad (6.9)$$

6.4 METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS

Esencialmente el método de los mínimos cuadrados consiste en hacer una aproximación polinómica a una función, dada en forma tabular, de manera que minimice los cuadrados de los errores. Es decir, se trata de obtener los valores de los coeficientes de la función:

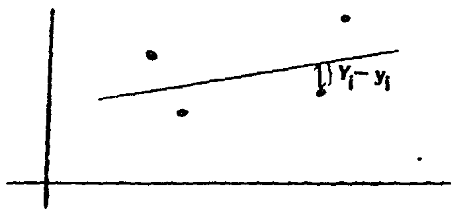
$$Y = f(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \dots + a_mx^m \qquad (6.7)$$

de manera que se satisfaga el criterio de los mínimos cuadrados el cual requiere que:

$$S = \sum (Y_i - y_i)^2 \qquad (6.8)$$

sea mínima, donde Y_i es el valor resultante de evaluar la ecuación (6.7) y los valores $Y_i - y_i$ son llamados residuos (figura 6.2).

Figura 6.2 Residuos en ajuste de curvas



Para obtener el valor mínimo de S es necesario primero igualar a cero las primeras m + 1 derivadas parciales con respecto a todos y cada uno de los parámetros, para luego derivar con respecto a cada una de las a_j ($j = 0, 1, \dots m$) con lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones normales:

$$\begin{array}{l}
a_0n + a_1\sum x + a_2\sum x^2 + \dots a_m\sum x^m = \sum y \\
a_0x + a_1\sum x^2 + a_2\sum x^3 + \dots a_m\sum x^{m+1} = \sum xy \\
a_0x^2 + a_1\sum x^3 + a_2\sum x^4 + \dots a_m\sum x^{m+2} = \sum x^2y \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_0x^m + a_1\sum x^{m+1} + a_2\sum x^{m+2} + \dots a_m\sum x^{m+m} = \sum x^my
\end{array} \qquad (6.9)$$

Donde (n) es el número de puntos tabulados y el símbolo $\sum$ es la sumatoria para i desde 1 hasta m.

Por razones de orden práctico es conveniente reescribir el sistema de ecuaciones normales (6.9) en notación matricial como sigue:

$$[x][a] = [b] \qquad (6.10)$$

Es importante hacer notar que el vector [a] de coeficientes de regresión, se puede obtener aplicando el método de Gauss-Jordan o mediante la inversión de la matriz [a] como se muestra en el programa Mínimos Cuadrados (listado 6.1).

Listado 6.1 Programa Minimos Cuadrados

```
Program MinimosCuadrados;

Const
   MaxP = 10;

{**
   NOTA TECNICA 1
   Este programa lee los  datos  de entrada del archivo
                           MC.TXT

   que tiene la siguiente estructura:

      - Numero de puntos y el grado del polinomio de
        ajuste
      - Los pares ordenados correspondientes a los n
        puntos (uno por renglon)

      Ejemplo:

      9 2
      1.0    2.0
      3.0    7.0
      4.0    8.0
      5.0   10.0
      6.0   11.0
      7.0   11.0
      8.0   10.0
      9.0    9.0
      10.0   8.0

    NOTA TECNICA 2
    Para modificar el tama~o de las matrices y vectores
    se debe cambiar el valor de la constante  MaxP, por
    ejemplo,

                  MaxP = 15;

    No obstante lo anterior el tama~o de las  matrices  y
    vectores  esta  limitado  por

      1) La cantidad de memoria  principal  que tenga  la
         computadora

      2) La manera en que maneje el compilador  usado los
         arreglos estaticos

      3) La cuota autorizada por el sistema operativo


      NOTA TECNICA 3
      Es importante mencionar que aun existiendo memoria
      suficiente el maximo grado del polinomio que puede
      ser determinado esta limitado por la precision  de
      la aritmetica real de la computadora o del compi--
      lador con que se trabaje.
                                                          **}

Type
   Matriz =  Array [1 .. MaxP, 1 .. MaxP] Of Real;
   Vector =  Array [1 .. MaxP] Of Real;

Var
  A, C: Matriz;
  B, X, Y: Vector;
  i,j,k,l, m, xm, n, ii: Integer;
  Datos: Text;
```

```
Procedure Inicializa;
Begin
  Write('Ajuste polinomial por el');
  Writeln(' metodo de minimos cuadrados'); Writeln;
  Assign(Datos,'MC.TXT'); Reset(Datos);
  {Lee el # de puntos y el grado del polinomio a ser ajustado}
  Readln(Datos, n, m);
  Writeln('Puntos':18);
  Writeln('X':12, 'Y':10); Writeln;
  For i := 1 To n Do
    Begin
      Readln(Datos,X[i],Y[i]);
      Writeln(i:2,X[i]:10:4,Y[i]:10:4);
    End;
  Writeln;
  Write(n:4,' puntos seran ajustados a un polinomio ');
  Writeln('de grado ',m); Writeln;
  Writeln('Ecuacion del polinomio de ajuste');
  xm := m + 1;
End;

Procedure Coeficientes;
Begin
  For i := 1 To n Do C[i,1] := 1.0;
   For j := 2 To m + 1 Do
     For i := 1 To n Do C[i,j] := C[i, j - 1] * X[i];
   For i := 1 To m + 1 Do
     For j := 1 To m + 1 Do
       Begin
         A[i, j] := 0.0;
         For k := 1 To n Do
           A[i, j] := A[i, j] + (C[k, i] * C[k, j]);
       End;
End;

Procedure Constantes;
Begin
   For i := 1 To m + 1 Do
     Begin
       B[i] := 0.0;
       For k := 1 To n Do B[i] := B[i] + C[k, i] * Y[k];
       End;
End;

Procedure InvierteMatriz(Var A: Matriz);

Const Epsilon: Real = 1E-10;

Var
  P:       Array [1 .. MaxP] Of Integer;
  Ind:     Array [1 .. MaxP] Of Record Ren, Col: Integer End;
  Pivote:  Array [1 .. MaxP] Of Real;
  Col, Ren, i,j,k,l,m,n: Integer;
  Det,t: Real;

Procedure Alarma;
Begin
  Writeln('La matriz es singular |A| = 0'); Halt
End;

Procedure BuscaPivote;
Begin
  t := 0.0;
  For j := 1 To n Do
    If P[j] <> 1 Then
      Begin
        For k := 1 To n Do
          If (P[k] - 1 < 0) And (Abs(t) < Abs(A[j,k])) Then
            Begin Ren := j; Col := k; t := A[j,k] End
      End;
  P[Col] := P[Col] + 1
End;
```

```
Procedure PonerPivoteSobreLaDiagonal;
Begin
   If Ren <> Col Then
     Begin
       Det := -Det;
       For l := 1 to n Do
         Begin
           t := A[Ren,l]; A[Ren,l] := A[Col,l]; A[Col,l] := t
         End
     End;
     Ind[i].Ren := Ren; Ind[i].Col := Col;
     Pivote[i] := A[Col,Col];
     Det := Det * Pivote[i];
     If Abs(Det) < Epsilon Then Alarma;
     A[Col,Col] := 1;
     For l := 1 to n Do A[Col,l] := A[Col,l] / Pivote[i]
End;

Procedure IntercambiaColumnas;
Begin
  For i := 1 To N Do
    Begin
      l := n - i + 1;
      If Ind[l].Ren <> Ind[l].Col Then
        Begin
          Ren := Ind[l].Ren;
          Col := Ind[l].Col;
          For k := 1 To n Do
            Begin
              t := A[k,Ren];
              A[k,Ren] := A[k,Col];
              A[k,Col] := t
            End
        End
    End
End;


Procedure ReduceRenglones;
Begin
  For m := 1 To n Do
    Begin
      If m <> Col Then
        Begin
          t := A[m,Col];
          A[m,Col] := 0.0;
          For l := 1 To n Do
            A[m,l] := A[m,l] - A[Col,l] * t
        End
    End
End;


Begin
  n := xm;
  Det := 1.0;
  For i := 1 To n Do P[i] := 0;
  For i := 1 To n Do
    Begin
      BuscaPivote;
      PonerPivoteSobreLaDiagonal;
      ReduceRenglones
    End;
    IntercambiaColumnas;
    Writeln;
End;
```

```
Procedure Multiplica(Var A: Matriz; Y: Vector);

Var
   Z: Vector;
   i,j,k: Integer;

Begin
   For i := 1 To xm Do
         Begin
           Z[i] := 0;
           For k := 1 To xm Do
              Z[i] := Z[i] + A[i,k] * Y[k];
         End;

   Write('y =   ',Z[1]:5:3);
   For i := 2 To xm Do
      Begin
        If i < 3 Then
          Write(' + ',Z[i]:5:3,'X')
        Else
          Write(' + ',Z[i]:5:3,'X^',i-1:1);
        if i mod 5 = 0 Then
         Begin
           Writeln;
           Writeln;
           Write(' ':3)
         End;
      End;
   Writeln;
End;

Procedure Termina;
Begin
   Writeln;
   Writeln('Termina MC');
End;

Begin{Progrma Principal}
   Inicializa;
   Coeficientes;
   Constantes;
   InvierteMatriz(A);
   Multiplica(A,B);
   Termina;
End.
```

Listado 6.2 Resultados del programa Mínimos Cuadrados ajuste solicitado a una recta

Ajuste polinomial por el metodo de minimos cuadrados

	Puntos X	Y
1	1.0000	2.0000
2	3.0000	7.0000
3	4.0000	8.0000
4	5.0000	10.0000
5	6.0000	11.0000
6	7.0000	11.0000
7	8.0000	10.0000
8	9.0000	9.0000
9	10.0000	8.0000

9 puntos seran ajustados a un polinomio de grado 1

Ecuacion del polinomio de ajuste

y = 4.902 + 0.602X

Termina MC

Listado 6.3 Resultados del programa Mínimos Cuadrados ajuste solicitado a una parabola

Ajuste polinomial por el metodo de minimos cuadrados

	Puntos X	Y
1	1.0000	2.0000
2	3.0000	7.0000
3	4.0000	8.0000
4	5.0000	10.0000
5	6.0000	11.0000
6	7.0000	11.0000
7	8.0000	10.0000
8	9.0000	9.0000
9	10.0000	8.0000

9 puntos seran ajustados a un polinomio de grado 2

Ecuacion del polinomio de ajuste

y = -1.460 + 3.605X + -0.268X^2

Termina MC

Capítulo 7

SIMULACION

En los últimos años se ha popularizado la simulación entre los economistas y estudiosos de la administración como un medio para analizar el comportamiento de sistemas económicos complejos, en los que es imposible o poco práctico: efectuar experimentación controlada sobre los sistemas económicos (que pueden ser una empresa, una rama o sector industrial, la economía de un país o la del mundo entero), o por carecer de datos representativos para realizar experimentos de un sistema económico o porque los datos contienen errores aleatorios excesivos.

Conforme los sistemas económicos han crecido en complejidad por el número de variables endógenas, variables exógenas, parámetros y relaciones que existen entre ellas, así como los instrumentos normativos, su estudio en muchos casos sólo es factible mediante técnicas de simulación, las que a su vez se apoyan en los métodos numéricos y por ende en las computadoras.

En este capítulo se presenta una introducción a las técnicas de simulación. En ella se describen los conceptos básicos empleados en la simulación con computadora digital. En seguida se desarrolla la simulación de un modelo macroeconómico sencillo basado en el acelerador y multiplicador, cuyo objetivo es evaluar los efectos que cinco políticas estabilizadoras tendrán sobre el ingreso nacional de una economía hipotética. Esto se hace con el fin de ilustrar el uso de las técnicas de simulación en computadora digital aplicadas a problemas económicos.

7.1 ¿QUE ES LA SIMULACION?

La simulación es la representación de ciertas características del comportamiento de un sistema físico o social por el comportamiento de otro sistema. En computación, la simulación se refiere concretamente al empleo de un proceso computacional para estudiar el funcionamiento de un sistema o fenómeno dinámico a través de un modelo. Usualmente la simulación se realiza con propósitos de medición experimental o para predecir el comportamiento de un sistema, así como para el entrenamiento de personas para el manejo de equipo complejo, por ejemplo: volar un nuevo tipo de avión.

El concepto de simulación, desde luego, es anterior a la aparición de las computadoras, sean éstas analógicas o digitales, pues desde tiempos remotos se han empleado modelos físicos en una gran variedad de investigaciones científicas y de ingeniería. Desafortunadamente este método no puede ser aplicado con facilidad a los sistemas sociales; sin embargo, con la simulación mediante computadoras los científicos sociales tienen a su alcance los medios de "observación y experimentación" que durante mucho tiempo han sido la base de los métodos de los científicos físicos (ver (19) y (20)).

7.2 SIMULACION DIGITAL

El concepto de simulación digital le es atribuido por varios autores a John von Neumman, quien visualizó la aplicación de las computadoras para la generación de datos estadísticos acerca del fenómeno modelado. Este tipo de simulación se conoce bajo el nombre genérico de análisis de Monte Carlo, debido a que involucra en la solución de un problema matemático no probabilístico, un proceso estocástico cuyas distribuciones de probabilidad satisfacen las relaciones matemáticas del problema planteado.

Entre las primeras aplicaciones de la simulación digital se cuenta la ubicación y distribución de recursos para los procesos de producción, en estos casos la aplicación de la simulación se justifica plenamente, puesto que experimentar directamente con el sistema resulta prohibitivo, tanto desde el punto de vista económico como desde el lógistico. Otras situaciones donde la simulación se emplea son aquellas en las que el sistema no está disponible, que impliquen la destrucción del sistema o bien resulten demasiado peligrosas.

7.3 TIPOS DE SIMULACION

En la práctica la simulación digital se divide en dos tipos: discreta y contínua. Cada una tiene su propio conjunto de procedimientos para la conceptualización del modelo, se basa en diferentes áreas de las matemáticas y resuelve diferentes tipos de problemas.

La simulación discreta trata principalmente con sistemas de colas. Esto es, aquellos sistemas en que un "cliente" arriba a una estación de servicio y si todos los servidores están ocupados, entonces el cliente aguardá en la línea o cola de espera hasta que recibe el servicio para, finalmente salir de la estación al ser completado su servicio. Un ejemplo típico de esta clase de sistemas es el control de tráfico áereo, en el que un avión (cliente), llega a un aereopuerto (estación de servicio) y estará en cola de espera hasta que haya una pista (servidor) libre para aterrizar (servicio).

Como puede observarse el principal interés de los sistemas de colas es el rápido despacho de los clientes. Dado que el tiempo de arribo y el tiempo de servicio de un cliente en particular son por lo general eventos aleatorios, el modelo matemático subyacente en los sistemas de colas está ligado con la probabilidad y la estadística. Puesto que las preguntas concernientes al tiempo promedio de arribo, al tiempo empleado en atender a un cliente y el número de clientes en la cola sólo pueden ser contestadas cuando se conocen o se suponen las distribuciones de probabilidad que gobiernan los patrones de arribo y servicio, por lo general la única manera económica de responder anticipadamente a estas preguntas es mediante la simulación.

Los sistemas de colas, tienen dos importantes propiedades que gobiernan la solución del problema por simulación de tipo discreto, éstas son:

- En un lapso largo de tiempo el estado del sistema subyacente no cambia.
- El movimiento de las unidades dentro del sistema es medido en enteros.

Esto significa que las llegadas y salidas de los clientes ocurren de manera unitaria en instancias discretas, así que el número de clientes en la estación de servicio puede ser representado por un entero en cualquier momento.

En contraste, la simulación contínua trata con sistemas que cambian continuamente con respecto al tiempo y su medición no se restringe a los enteros. Un ejemplo de esta clase de sistemas lo constituye la trayectoria de un proyectil en vuelo; en él no hay un instante donde la posición del proyectil no cambie.

El interés principal de los sistemas contínuos es la variación en el comportamiento de diversas cantidades (variables) en el sistema. Debido a que los patrones de comportamiento son generalmente gobernados por tasas de cambio, el modelo matemático para sistemas contínuos se basa en conjuntos de ecuaciones diferenciales, que de ordinario sólo es posible resolver mediante integración numérica (ver (20)).

Es importante mencionar que no siempre es claro cual tipo de simulación se debe de usar para resolver un problema en particular. Por ejemplo, el crecimiento de la población de un país parece ser un candidato ideal para la simulación de tipo discreto. Puesto que puede ser modelada como un sistema de colas de autoservicio donde las personas son los clientes y a la vez los servidores; los nacimientos son las llegadas y las muertes las salidas. Sin embargo, en la práctica se emplea la simulación continua, debido a que ésta resulta más económica en recursos computacionales (tiempo y memoria) que la actualización de los archivos de colas cada que ocurre un arribo.

7.4 MODELOS

Los modelos con frecuencia son clasificados en tres grandes grupos:

- Icónicos. Un modelo icónico es áquel que luce "idéntico" al sistema que representa; un ejemplo es el modelo a escala de un avión para conocer el comportamiento aerodinámico del diseño.

- Analógicos. Un modelo analógico actuá como el sistema que representa aunque en apariencia sean diferentes. Por ejemplo, un sistema eléctrico es el modelo de un sistema mecánico de resortes y viceversa.

- Abstractos. Un modelo abstracto es un conjunto de ecuaciones matemáticas que expresan el comportamiento del sistema representado. Por ejemplo la ecuación (7.1) es la de equilibrio de un circuito eléctrico.

$$E - \frac{1}{C} \int_0^t i\, dt - Ri - L \frac{di}{dt} = 0 \qquad (7.1)$$

En cierto sentido la simulación discreta emplea modelos analógicos, esto es, la mayoría de los componentes del sistema simulado es representada por datos (cifras) en un archivo, los cuales son manipulados de acuerdo a los patrones establecidos por el modelador para imitar el comportamiento del sistema simulado.

En cambio, los modelos abstractos son la base de todo proceso de simulación contínua. Por lo general estos modelos abstractos son consecuencia directa de principios físicos, tales como las leyes de movimiento de Newton. Desafortunadamente este tipo de principios no existen dentro de las ciencias sociales, sin embargo, a partir de los trabajos de J. Forrester en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) a fines de los cincuenta se ha desarrollado una metodología aplicable a los problemas de la Economía, la Sociología y la Ecología. Dicha metodologia genéricamente se conoce como Dinámica de Sistemas, cuyo representante más conocido y discutido es el denominado WORLD 3, desarrollado por Dennis Meadows y sus colaboradores del MIT a principios de los setenta.

Existen varios trabajos que utilizan la simulación para estudiar el comportamiento de sistemas macroeconómicos a nivel regional, nacional o mundial, baste mencionar los trabajos de futurología de la organización RAND, los modelos macroeconómicos de la Brookings Institution, el modelo OBE (Office of Business Economics) de los E. U. y el modelo Wharton que se usa regularmente para hacer predicciones sobre el empleo, producto nacional bruto y otros factores económicos (ver (36)).

En la actualidad la simulación se aplica en una amplia gama de casos tanto micro como macroeconómicos, puesto que es un método sobresaliente para probar los efectos que tienen las políticas alternativas sobre el comportamiento de los sistemas económicos y para facilitar el proceso de toma de decisiones.

En un nivel más ambicioso se deben ubicar los modelos globales como el ya mencionado WORLD 3, desarrollado bajo el patrocinio del Club de Roma y publicado en el libro "Los límites del crecimiento" o el trabajo de J. Forrester en "Urban Dynamics". En estos ejemplos se utilizan varios cientos de ecuaciones que permiten estudiar los fenómenos de terminación de los recursos no renovables, explosión demográfica mundial, el deterioro del medio ambiente y el crecimiento urbano, entre otros.

Cada modelo cuando se corre en la computadora, puede producir una nueva hipótesis histórica y es posible aprender de las historias producidas para examinar los futuros posibles y determinar en principio los mejores cursos de acción, o los que mayores probabilidades tienen de éxito.

7.5 METODOLOGIA DE LA SIMULACION

La simulación, al igual que otras formas de investigación científica, comprende una serie de pasos sujetos a un procedimiento de refinamiento sucesivo, que va desde la formulación del problema hasta la solución final. Los pasos a seguir, de acuerdo con Naylor (35) y (36), en la simulación de sistemas económicos son:

- Formulación del problema.
- Formulación del modelo matemático
- Elaboración del programa de computadora
- Validación
- Diseño de los experimentos de simulación
- Análisis de los resultados

A continuación se da una breve descripción de cada paso:

FORMULACION DEL PROBLEMA

Para resolver un problema mediante simulación, como por cualquier otro método, es necesario comprender el problema de manera que sea posible dar una definición exacta de los objetivos que se desean alcanzar, ya que simular por la simulación misma carece de sentido. Los objetivos generalmente toman alguna de las siguientes formas:

- Preguntas que se deben responder
- Hipótesis que se han de comprobar
- Resultados que deben evaluarse

FORMULACION DEL MODELO MATEMATICO

Una vez que se ha formulado el problema, la siguiente etapa del procedimiento es formular un modelo matemático que relacione las variables endógenas con las variables controladas y con las exógenas, bajo ciertas consideraciones. Es decir, el modelo matemático no sólo debe describir al sistema sino también los objetivos de éste.

El modelo matemático formulado, deberá incluir las variables endógenas controladas y exógenas que participan en el sistema, sin olvidar aquellas exógenas que afecten a una o más variables endógenas, también es necesario estimar los valores de los parámetros del modelo. Antes de continuar con el procedimiento es conveniente hacer una evaluación inicial para determinar lo adecuado del modelo al problema y al tipo de experimentos que se van a efectuar con él.

ELABORACION DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA

La preparación de un programa para computadora que permitirá ejecutar los experimentos de simulación del sistema requiere de la realización cuidadosa de la siguiente serie de actividades:

- Definir los datos de entrada y condiciones iniciales
- Definir los resultados a obtener y su forma
- Seleccionar las técnicas que se emplearán para la generación de datos
- Construir un diagrama de flujo que muestre la secuencia lógica de los procedimientos que debe ejecutar la computadora
- Escribir el programa en algún lenguaje de programación, sea éste de propósito general FORTRAN, ALGOL, PL/1 o PASCAL o específico DYNAMO, GPSS o SIMSCRIPT
- Depurar y hacer pruebas preliminares del programa.

Esta etapa proporciona una ayuda adicional al investigador, ya que gracias a la naturaleza de las computadoras, es obligado a construir un modelo explícito y sin ambigüedades.

VALIDACION

La validación es quizá el aspecto más perturbador dentro de la metodología de la simulación, debido a que implica una serie de complejidades de orden práctico, teórico, estadístico e incluso filosófico (ver (49)). La prueba en lo general consiste, en determinar el grado de precisión que tienen las predicciones del modelo de simulación respecto al sistema real en periodos posteriores, con base en la comparabilidad de los valores simulados de las variables endógenas y los datos históricos conocidos.

Se debe hacer notar que las técnicas de simulación son sólo instrumentos que permiten alcanzar un grado de certidumbre muy alto más no absoluto, dado que se fundan en la teoría de la probabilidad y no de la certeza.

DISEÑO DE LOS EXPERIMENTOS DE SIMULACION

Esta etapa está en función del propósito de la simulación de un sistema. Dado que el propósito puede ser la exploración o descripción de la superficie de respuesta sobre alguna región del sistema que interese en el ámbito factorial o bien la optimización de la respuesta sobre alguna región de operabilidad en el espacio factorial. En otras palabras, una variable en el modelo puede ser un factor o una respuesta, dependiendo del papel que se le asigne;, el diseño de los experimentos tiene que ver con el análisis de las relaciones supuestas entre las variables consideradas como factores (variables exógenas o relaciones normativas) y las variables endógenas o de salida consideradas como respuestas.

Existen ya diseños experimentales asociados a cada propósito enunciado, que tienden a otorgar cierta economía en el número de pruebas experimentales y de las cualidades adicionales, como estimaciones de varianza mínima, medición de la pertinencia del modelo, patrones de confusión deseados y facilidad de computación.

ANALISIS DE LOS RESULTADOS

Esta etapa del proceso de simulación consiste en efectuar el análisis estadístico de los resultados recolectados en el proceso de simulación. Usualmente se emplean el análisis de varianza y el análisis de regresión. El primero es apropiado cuando predominan los factores cuantitativos sobre los cualitativos sin que esto signifique que los excluya. En tanto que el análisis de regresión permite realizar el análisis de los resultados utilizando las propiedades numéricas de los factores cuantitativos. No obstante, la gran mayoría de los autores prefieren el análisis de varianza bajo la forma de análisis factorial.

7.6 EXPERIMENTOS DE SIMULACION

De los modelos macroeconómicos dinámicos basados en el multiplicador y acelerador, uno de los más conocidos es el ideado por Samuelson en 1939 y desarrollado por Hicks en 1950. Se trata de un modelo relativamente sencillo que sirve para demostrar entre otras cosas que la mera interacción del multiplicador y el acelerador es capaz de generar endógenamente fluctuaciones cíclicas, cosa que puede ser demostrada analíticamente sin muchas dificultades (ver (10)). Sin embargo, su versión estocástica presenta algunas de las características de los modelos econométricos que no pueden ser resueltos en forma analítica directamente. Por lo que se considera apropiado para ilustrar las técnicas de simulación. La variante que aquí se presenta, así como los parámetros y valores iniciales usados en los experimentos fueron tomados del libro de Naylor "Experimentos de simulación en computadoras" (36).

FORMULACION DEL PROBLEMA

Se desea evaluar los efectos que cinco diferentes políticas económicas de estabilización puedan tener sobre el ingreso nacional. Es decir, se quiere determinar si los efectos sobre el ingreso nacional difieren o no de una política a otra.

FORMULACION DEL MODELO MATEMATICO (SAMUELSON Y HICKS)

Parámetros

b:	Coeficiente de aceleración.
c_1:	Propensión marginal al consumo en el periodo $t-1$; $0 < c_1 < 1$.
c_2:	Propensión marginal al consumo en el periodo $t-2$; $0 < c_2 < 1$.
g_o	Parámetro gubernamental.

Variables exogenas

u_t, v_t:	Variables aleatorias con una distribución de probabilidad conocida, con un valor esperado igual a cero y desviación estándar dada.

Variables endógenas

C_t:	Consumo en el período t.
I_t:	Inversión en el período t.
G_t:	Gasto gubernamental en el período t.
Y_t:	Ingreso nacional en el período t.

Características operacionales

$$C_t = c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2} + u_t \tag{7.2}$$

$$I_t = b(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + v_t \tag{7.3}$$

$$G_t = g_o Y_{t-1} \tag{7.4}$$

Identidades

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \tag{7.5}$$

Dado que lo que interesa es comparar la trayectoria del ingreso nacional en el tiempo (Y_t), se sustituye en la ecuación (7.5), las variables C_t, I_t y G_t por los terminos derechos de las ecuaciones (7.2) a (7.4) respectivamente y con un poco de álgebra se obtiene:

$$Y_t = w_t - a_1 Y_{t-1} - a_2 Y_{t-2} \qquad (7.6)$$

Donde:

$$w_t = u_t + v_t \qquad (7.7)$$

$$a_1 = -(c_1 + b + g_o) \qquad (7.8)$$

$$a_2 = b - c_2 \qquad (7.9)$$

Entonces la ecuación (7.6) determina la trayectoria de Y_t, bajo el supuesto de que el ingreso nacional se mide en función de las desviaciones de su valor de equilibrio.

ELABORACION DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA

-Datos de entrada

Longitud del horizonte de planificación (lhp)

$t = 1,2,\ldots,200$

Valores iniciales para el ingreso nacional

$Y_o = 7.5$

$Y_{t-1} = 2.0$

Propensión marginal al consumo en el periodo t-1

$c_1 = 0.375$

Propensión marginal al consumo en el periodo t-2

$c_2 = 0.300$

Valores esperados y varianzas de las variables exógenas

	ut	vt	wt
Valor esperado	0	0	0
Varianza	13.69	4.84	18.53

Política monetaria: asignar el valor particular correspondiente al coeficiente de aceleración (b) de acuerdo a la tabla de la figura 7.1.

Política fiscal: asignar el valor particular correspondiente al parámetro gubernamental (g_o) de acuerdo a la tabla de la figura 7.1.

Figura 7.1 Tabla de coeficientes de aceleración, parámetros gubernamentales y varianzas del ingreso nacional.

Política	Coeficiente de aceleracion (b)	Parámetro gubernamental (g_o)	Varianza de la muestra (var(Y))
1	1.05	.250	504.9473
2	1.10	.125	245.2498
3	1.15	.050	242.6402
4	1.15	.150	370.4739
5	1.15	.225	634.8269

-Resultados a obtener y su forma

Trayectorias de tiempo en forma tabular de las variables endógenas: Y, C, I, y G.

Varianza del ingreso nacional: Y, C, I y G.

Gráficas de las trayectorias de tiempo de la variable endógena: Y

-Diagrama de flujo.

Figura 7.2 Diagrama de flujo del modelo Samuelson y Hicks

```
                             +----------------+
                             ! Samuelson Hicks !
                             +----------------+
                                     !
                                     v
                       +----------------------------+
                       !      Poner parametros      !
                       !    y valores iniciales     !
                       +----------------------------+
            +------------------------->!
            !                          v
            !                   +----------+ si
            !                   !  t > lhp  !------------>(-ALTO-)
            !                   +----------+
            !                          ! no
            !                          v
            !          +----------------------------+
            !          !     Generar los valores    !
            !          !            u y v           !
    +-----------+      +----------------------------+
    ! t = t + 1 !                      !
    +-----------+                      v
            ^          +----------------------------+
            !          !  Ct = c1Yt-1 + c2Yt-2 +ut  !
            !          !  It = b(Yt-1 - Yt-2) + vt  !
            !          !  Gt = goYt-1               !
            !          !  Yt = Ct + It + Gt         !
            !          +----------------------------+
            !                          !
            !                          v
            !          +----------------------------+
            +----------!    Imprimir los valores    !
                       !        Y, C, I e G         !
                       +----------------------------+
```

VALIDACION

Debido a que se conocen por completo las propiedades teóricas del modelo Samuelson y Hicks los resultados obtenidos en la simulación pueden ser validados comparándolos con los resultados obtenidos analíticamente. O bien, calculando el valor teórico de la varianza de Y_t mediante la siguiente fórmula:

$$\operatorname{var}(Y) = \frac{(1 + a_2)}{(1 - a_2)((1 + a_2)^2 - a_1^2)} \operatorname{var}(w) \qquad (7.10)$$

donde como antes

$$w_t = u_t + v_t$$
$$a_1 = -(c_1 + b + g_0)$$
$$a_2 = b - c_2$$

Sin embargo como se anotó antes la validación por lo general, consiste en determinar el grado de precisión que tienen las predicciones del modelo de simulación respecto al sistema real en periodos posteriores, con base en la comparabilidad de los valores simulados de las variables endógenas y los datos históricos conocidos. Pero dado que este caso es meramente hipotético y de tipo pedagógico, la manera de comprobar la validez de los resultados de la simulación es comparándolos con los obtenidos a través de la fórmula (7.10), que aparecen en la columna tres de la tabla de la figura 7.1.

EXPERIMENTO

El experimento de simulación en la computadora consiste de cinco corridas, una por cada política, por un periodo de 200 unidades de tiempo (longitud del horizonte de planeación), luego se calcula la varianza del ingreso nacional para dicho periodo. Este proceso se repite 50 veces, emplendo en cada una de ellas una nueva semilla en el generador de números pseudoaleateorios. Es importante mencionar que tanto el horizonte de planeación como el número de repeticiones se establecierón mediante las técnicas estadísticas usuales para la estimación del tamaño de muestras (ver (52)).

Para llevar a cabo el experimento de simulación se escribió un programa (ver listado 7.1), que genera en forma tabular, las trayectorias en el tiempo de las variables Y, I, C y G a partir de los valores iniciales y de los parámetros de cada política en particular.

El programa se utiliza cinco veces, una por cada política, para calcular partir de los parámetros y valores iniciales el consumo, la inversión, el gasto gubernamental y el ingreso nacional para cada una de las 200 unidades del horizonte de planificacion, que puede ser cualquier unidad de tiempo (días, semanas, meses, años, etc.). Para luego calcular la varianza de cada una de las cuatro series de tiempo obtenidas en la corrida.

Como ejemplo se muestra a continuación los parámetros para la política 1 y en la figura 7.4 un extracto de las trayectorias en el tiempo de las variables Y, I, C y G. No se recomienda obtener los listados completos, tanto por su extensión como porque lo que interesa, es conocer la varianza de cada variable en el período.

El ingreso nacional obtenido en el horizonte de planificacion por el efecto de cada una de las cinco políticas, se muestra en las gráficas de las figuras 7.5 a 7.9, en ellas se puede observar el comportamiento típico de cada política.

Figura 7.4 Extracto de las trayectorias en el tiempo de las variables Y, C, I y G para la política 1.

Modelo de Samuelson y Hicks

Politica 1

Parametros de la corrida

b: coeficiente de aceleracion = 1.0500

c1: propension marginal al consumo en t-1 = 0.3750

c2: propension marginal al consumo en t-2 = 0.3000

c0: propension marginal global al consumo = 0.6750

g0: parametro gubernamental = 0.2500

a2: coeficiente de inversion reducida = 0.7500

s: propension marginal al ahorro = 0.3250

r1: (1 + sqrt(s))^2 = 2.4652

r2: (1 - sqrt(s))^2 = 0.1848

longitud del horizonte de planeacion = 200

La trayectoria temporal teorica de Y[t] sera oscilatoria y amortiguada, r2 < a2 < 1

t	Y	C	I	G
1	14.00	5.45	6.68	1.88
2	11.18	2.14	5.55	3.50
3	9.40	8.23	-1.62	2.80
4	7.52	8.07	-2.89	2.35
5	2.78	-1.01	1.90	1.88
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
196	0.53	2.96	-1.32	-1.11
197	6.64	2.24	4.26	0.13
198	6.70	1.47	3.57	1.66
199	1.91	2.93	-2.70	1.67
200	0.75	6.98	-6.70	0.48
Var	674.14	327.24	58.51	42.15

FIG 7.5

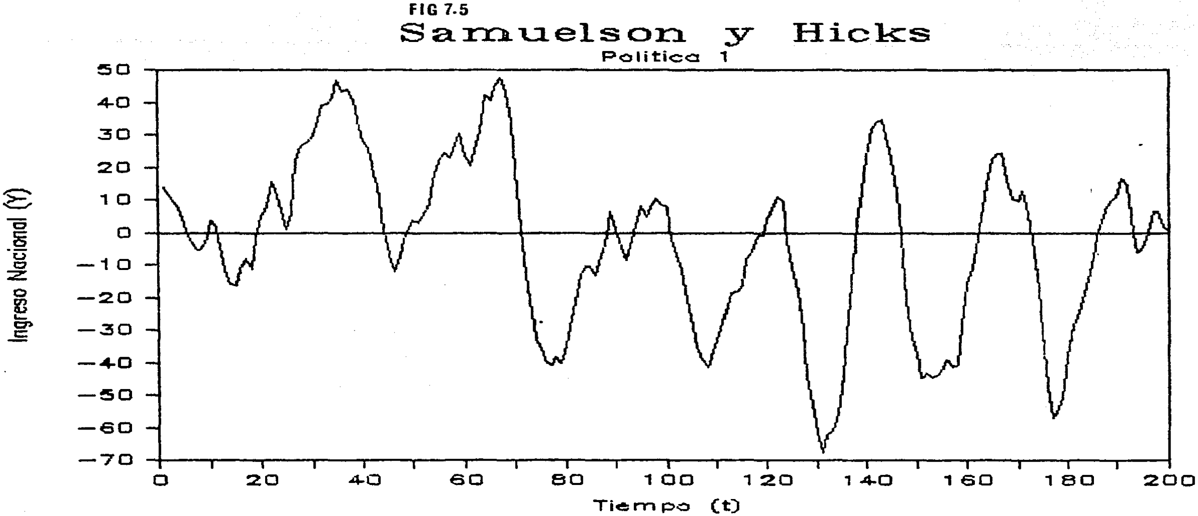

Samuelson y Hicks
Politica 1
Ingreso Nacional (Y)
50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−70
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Tiempo (t)

FIG 7-6

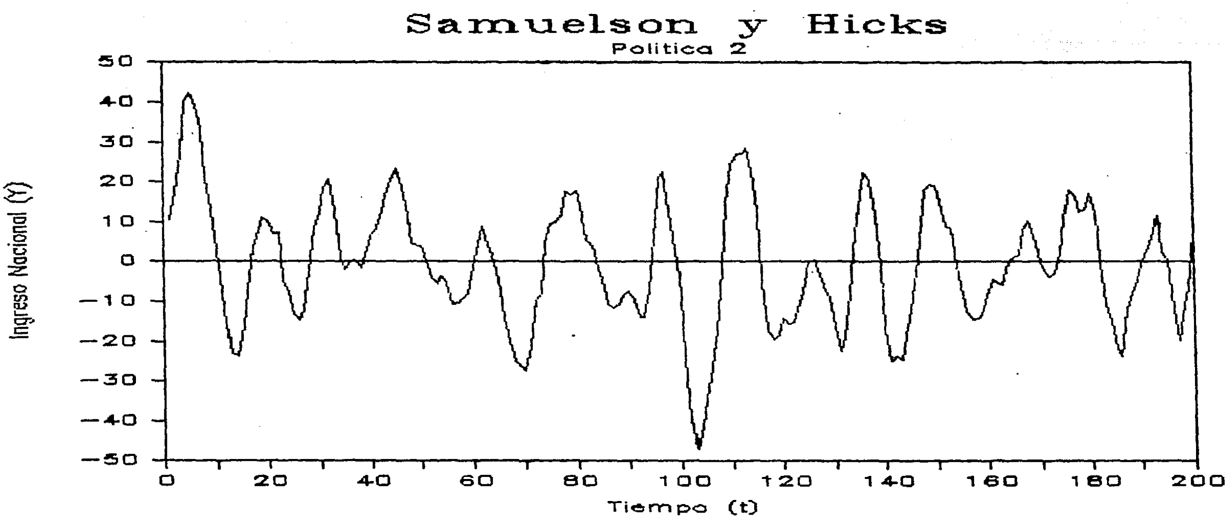

Samuelson y Hicks
Politica 2
50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
Ingreso Nacional (Y)
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Tiempo (t)

FIG 7.7

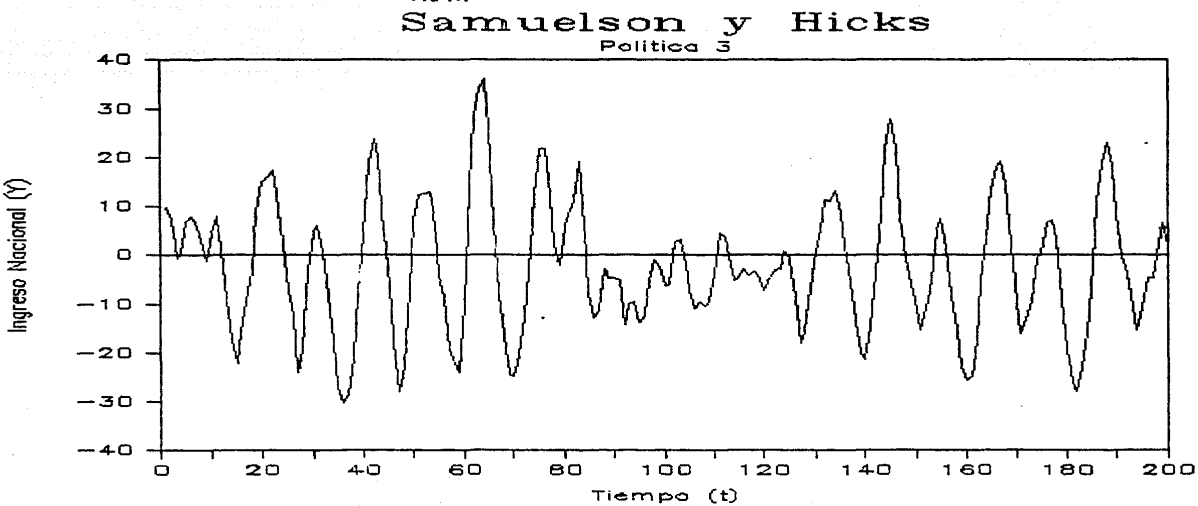

Samuelson y Hicks
Politica 3
Ingreso Nacional (Y)
Tiempo (t)
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200

FIG 7. 8

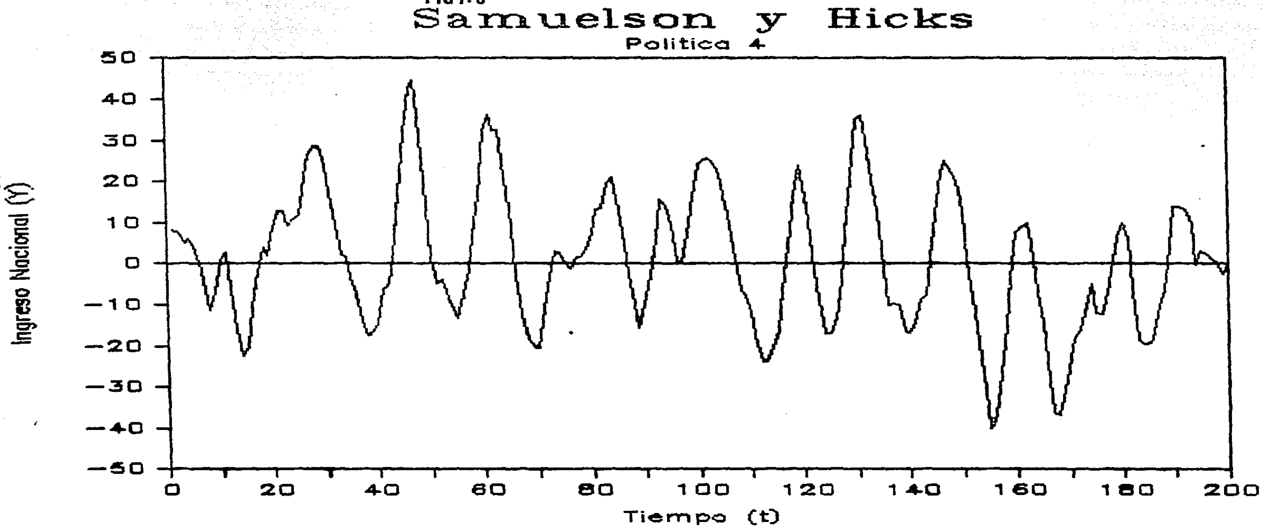
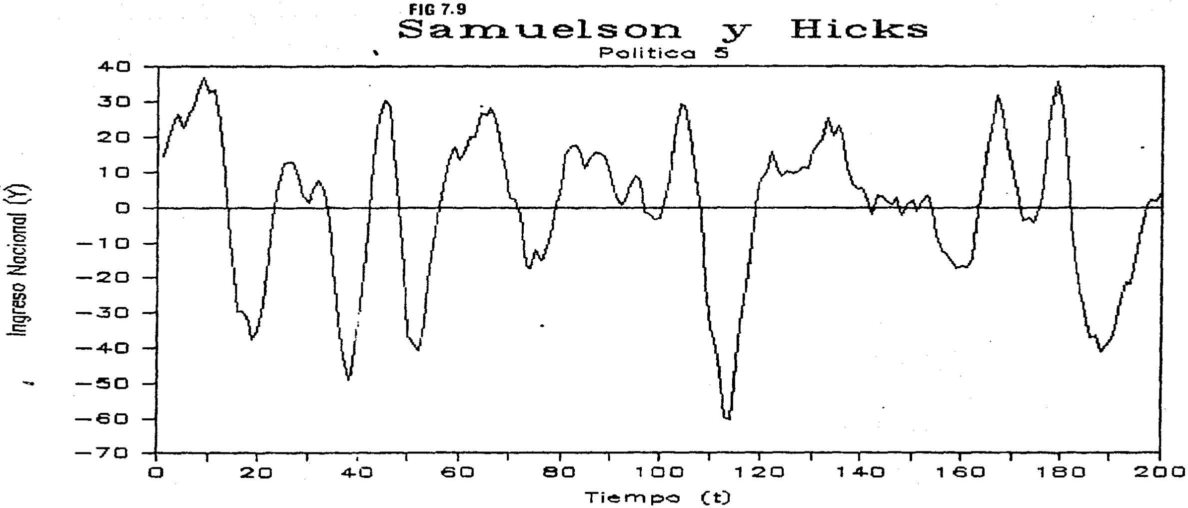

Samuelson y Hicks
Politica 4
Ingreso Nacional (Y)
50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Tiempo (t)

FIG 7.9


Samuelson y Hicks
Politica 5
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−70
Ingreso Nacional (Y)
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Tiempo (t)

ANALISIS DE LOS RESULTADOS

Para efectuar el análisis de la varianza de manera más conveniente, debe aplicarse a los datos la transformación logarítmica propuesta por Schefé, Bartlett y Kendall (ver (36)), la cual consiste en tomar el logaritmo natural de la varianza del ingreso nacional, lo que en símbolos se expresa:

$$EX = Ln(var(Y)) \tag{7.10}$$

Las ventajas que se obtienen al realizar esta transformación son tres: primera, X se distribuye de manera más normal que var(Y); segunda, la varianza de X no depende de su media y tercera la magnitud de los números que resultan de la transformación ayuda a evitar los errores de redondeo.

Para el análisis de varianza se preparó el programa del listado 7.2, con el se realizaron 50 repeticiones de cada una de las corridas de simulación correspondientes a las cinco políticas bajo estudio, de acuerdo con las especificaciones dadas en el apartado Experimentos, y se obtuvieron los resultados que aparecen en la figura 7.10, su transformación logarítmica aparece en la figura. 7.11 y en forma gráfica en la figura 7.12.

Figura 7.10 Tabla de varianzas de las muestras

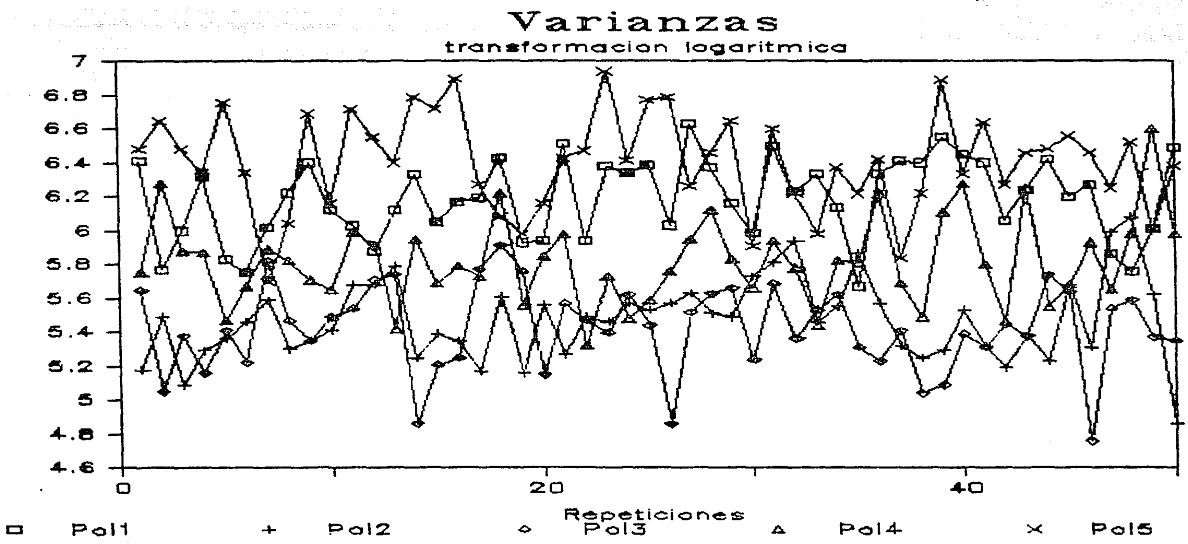
Rep	Politica 1	Politica 2	Politica 3	Politica 4	Politica 5
1	606.82	178.43	285.48	314.33	650.70
2	319.17	241.91	156.16	532.96	768.97
3	402.56	161.87	217.09	357.84	654.81
4	557.19	197.91	173.40	354.60	568.69
5	341.99	212.56	223.38	238.27	859.78
6	314.35	234.48	185.01	291.44	564.78
7	410.12	268.49	338.35	363.04	299.54
8	504.14	200.95	236.72	337.49	418.93
9	600.62	210.61	210.00	302.60	803.04
10	456.66	223.26	241.20	283.19	474.56
11	417.12	293.85	254.79	399.78	824.80
12	358.11	293.13	303.32	373.38	700.77
13	457.03	325.76	310.12	225.75	601.94
14	562.18	191.48	129.42	384.86	885.52
15	423.68	218.13	183.28	297.05	831.26
16	480.41	211.40	190.98	327.66	994.53
17	488.76	176.13	321.29	308.24	527.67
18	619.07	273.59	370.01	502.17	435.16
19	375.91	173.49	316.33	260.82	397.22
20	381.19	260.67	171.79	346.79	474.72
21	668.64	194.50	263.39	396.84	619.25
22	380.63	241.57	238.18	204.16	643.92
23	589.50	235.72	220.64	308.28	1037.70
24	567.88	262.11	277.03	239.52	608.89
25	597.64	251.93	230.28	268.44	875.22
26	414.23	262.76	129.10	316.81	887.28
27	757.89	279.46	248.82	381.96	523.80
28	584.00	248.02	277.98	456.80	639.03
29	473.75	242.30	286.25	339.56	772.00
30	398.91	307.82	189.35	286.64	370.13
31	663.76	335.20	294.95	381.46	737.08
32	509.25	381.15	212.77	324.85	502.14
33	562.27	234.38	252.29	231.02	396.27
34	462.51	258.42	275.03	336.44	586.11
35	290.28	352.85	201.38	334.89	504.16
36	560.91	263.21	186.98	501.49	614.25
37	610.93	204.63	224.35	295.72	343.36
38	604.52	189.83	154.95	242.00	503.01
39	701.14	198.42	161.94	450.59	979.71
40	630.05	253.02	219.08	532.39	563.79
41	602.91	203.39	202.91	329.43	768.43
42	429.44	179.30	232.12	234.06	530.09
43	513.98	216.76	217.24	518.20	638.49
44	612.98	186.64	311.74	257.05	649.93
45	492.19	291.76	281.82	291.73	704.21
46	527.82	203.20	117.12	374.60	641.44
47	352.09	398.62	254.45	285.17	515.60
48	317.83	435.81	267.01	396.92	675.22
49	409.49	276.85	215.29	732.51	406.78
50	658.26	128.38	210.23	395.88	592.54

Figura 7.11 Transformación logarítmica de las varianzas

Rep	Politica 1	Politica 2	Politica 3	Politica 4	Politica 5
1	6.41	5.18	5.65	5.75	6.48
2	5.77	5.49	5.05	6.28	6.65
3	6.00	5.09	5.38	5.88	6.48
4	6.32	5.29	5.16	5.87	6.34
5	5.83	5.36	5.41	5.47	6.76
6	5.75	5.46	5.22	5.67	6.34
7	6.02	5.59	5.82	5.89	5.70
8	6.22	5.30	5.47	5.82	6.04
9	6.40	5.35	5.35	5.71	6.69
10	6.12	5.41	5.49	5.65	6.16
11	6.03	5.68	5.54	5.99	6.72
12	5.88	5.68	5.71	5.92	6.55
13	6.12	5.79	5.74	5.42	6.40
14	6.33	5.25	4.86	5.95	6.79
15	6.05	5.39	5.21	5.69	6.72
16	6.17	5.35	5.25	5.79	6.90
17	6.19	5.17	5.77	5.73	6.27
18	6.43	5.61	5.91	6.22	6.08
19	5.93	5.16	5.76	5.56	5.98
20	5.94	5.56	5.15	5.85	6.16
21	6.51	5.27	5.57	5.98	6.43
22	5.94	5.49	5.47	5.32	6.47
23	6.38	5.46	5.40	5.73	6.94
24	6.34	5.57	5.62	5.48	6.41
25	6.39	5.53	5.44	5.59	6.77
26	6.03	5.57	4.86	5.76	6.79
27	6.63	5.63	5.52	5.95	6.26
28	6.37	5.51	5.63	6.12	6.46
29	6.16	5.49	5.66	5.83	6.65
30	5.99	5.73	5.24	5.66	5.91
31	6.50	5.81	5.69	5.94	6.60
32	6.23	5.94	5.36	5.78	6.22
33	6.33	5.46	5.53	5.44	5.98
34	6.14	5.55	5.62	5.82	6.37
35	5.67	5.87	5.31	5.81	6.22
36	6.33	5.57	5.23	6.22	6.42
37	6.41	5.32	5.41	5.69	5.84
38	6.40	5.25	5.04	5.49	6.22
39	6.55	5.29	5.09	6.11	6.89
40	6.45	5.53	5.39	6.28	6.33
41	6.40	5.32	5.31	5.80	6.64
42	6.06	5.19	5.45	5.46	6.27
43	6.24	5.38	5.38	6.25	6.46
44	6.42	5.23	5.74	5.55	6.48
45	6.20	5.68	5.64	5.68	6.56
46	6.27	5.31	4.76	5.93	6.46
47	5.86	5.99	5.54	5.65	6.25
48	5.76	6.08	5.59	5.98	6.52
49	6.01	5.62	5.37	6.60	6.01
50	6.49	4.86	5.35	5.98	6.38

Varianzas

FIG 7.12



Prueba F

Para determinar si el efecto sobre el ingreso nacional de cada una de las cinco polìticas, difiere o no de las otras, se debe comprobar la hipótesis nula H_o de que las varianzas del ingreso nacional de cada una de las cinco políticas de estabilización son iguales, lo que simbólicamente se escribe como sigue:

$$H_o: (var(Y))_1 = (var(Y))_2 = (var(Y))_3 = (var(Y))_4 = (var(Y))_5$$

que expresada en términos de la transformación logarítmica se escribe:

$$H_o: EX_1 = EX_2 = EX_3 = EX_4 = EX_5$$

Empleando la prueba F, el criterio para aceptar o rechazar la hipótesis nula es el siguiente:

$$\text{Si } F \begin{cases} >= F(a, m-1, m(n-1)); & H_o \text{ se rechaza} \\ < & \text{En cualquier otro caso } H_o \text{ se acepta} \end{cases}$$

donde:

a: es el nivel de significancia de la prueba F, para este caso se considera igual al 5%.

m: es el número de políticas: 5.

n: es el número de repeticiones: 50.

El resultado del análisis aparece en la figura 7.13.

Figura 7.13 Estadísticas del análisis de varianza

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado Medio
Entre clases	53.82	4	13.46
Intra clases	16.25	245	0.07
Total	70.07	249	
Estadística F	202.864		

Como es fácil ver los resultados obtenidos por los experimentos de simulación y su análisis estadístico no apoyan la hipótesis nula (H_o) de que las varianzas del ingreso nacional de cada una de las cinco políticas de estabilización son iguales, puesto que el valor crítico de F(0.5, 4, 245) = 2.21 es sobrepasado claramente por el valor de F obtenido en el análisis de varianza que es de 202.864. Lo que indica que se debe rechazar la hipótesis nula. Lo que puede ser ratificado al observar las varianzas del ingreso nacional que aparecen en la columna tres de la tabla de la figura 7.1.

En conclusión, este ejemplo de simulación permite analizar el resultado que se obtendría de la aplicación de las cinco políticas alternativas que se someten al juicio del responsable de tomar una decisión. El procedimiento permite estudiar sus efectos en el tiempo y mejorar la calidad de la decisión que se toma.

Listado 7.1 Programa Trayectorias en el Tiempo

```
Program TrayectoriasEnElTiempo;

Function Normal(Xbar, Dstd: Real): Real;

{Genera un numero aleatorio con distribucion normal}
{ con media Xbar y desviacion estandar Dstd}

Var
   s: Real;
   i: Integer;
Begin
   s := 0;
   For i := 1 To 12 Do  s :=  s + Random;
   Normal := Dstd * (6 - s) + Xbar;
End;

Procedure SamuelsonHicks(lhp:Integer;b,c1,c2,g0,Y0,Y1,
                         Xbaru, Dstdu,Xbarv, Dstdv: Real);

Type
    Serie = Array [-1 .. 200] Of Real;

Var
   t:   Integer;          {tiempo}
   u:   Real;             {variable estocasticas consumo}
   v:   Real;             {variable estocasticas inversion}
   a2:  Real;             {coeficiente de inversion}
   c0:  Real;             {propension marginal global al consumo}
   s:   Real;             {propension marginal al ahorro}
   C:   Serie;            {consumo en el periodo t}
   I:   Serie;            {inversion en el periodo t}
   G:   Serie;            {consumo gubernamental en el periodo t}
   Y:   Serie;            {ingreso nacional en el periodo t}
   r1:  Real;             {variables auxiliares}
   r2:  Real;
   sY, sC, sI, sG: Real;

Procedure ValoresIniciales;
Begin
   Y [-1] := Y1;
   Y [ 0] := Y0;
   c0 := c1 + c2;
   a2 := b - c2;
   s := 1 - c0;
   r1:=Exp(Ln(1 + Sqrt(s)) * 2);
   r2:=Exp(Ln(1 - Sqrt(s)) * 2);
End;

Procedure ImprimeDatosDeEntrada;
Begin
   Writeln('Parametros de la corrida':40); Writeln;
   Writeln('b:  coeficiente de aceleracion =', b:8:4); Writeln;
   Writeln('c1: propension marginal al consumo en t-1 =',c1:8:4);
   Writeln;
   Writeln('c2: propension marginal al consumo en t-2 =',c2:8:4);
   Writeln;
   Writeln('c0: propension marginal global al consumo =',c0:8:4);
   Writeln;
   Writeln('g0: parametro gubernamental =',g0:8:4); Writeln;
   Writeln('a2: coeficiente de inversion reducida =',a2:8:4);
   Writeln;
   Writeln('s:  propension marginal al ahorro =',s:8:4); Writeln;
   Writeln('r1: (1 + sqrt(s))^2 =',r1:8:4); Writeln;
   Writeln('r2: (1 - sqrt(s))^2 =',r2:8:4);  Writeln;
   Writeln('longitud del horizonte de planeacion = ',lhp);
   Writeln;
End;
```

```
Procedure PrediccionTeorica;
Begin
  Writeln('La trayectoria temporal teorica de Y[t] sera');
  If (a2 < r2) Then
    Writeln('no oscilatoria y amortiguada, a2 < r2')
  else If (r2 < a2) and (a2 < 1) Then
    Writeln('oscilatoria y amortiguada, r2 < a2 < 1')
  else if (1 < a2) and (a2 < r1) Then
    Writeln('oscilatoria y explosiva, 1 < a2 < r1')
  else  if (r1 < a2) Then
    Writeln('no oscilatoria y explosiva, r1 < a2');
  Writeln;
End;
Begin{Ssamuelson y Hicks}
  Randomize; {Siembra la semilla del generador random}
  ValoresIniciales;
  ImprimeDatosDeEntrada;
  PrediccionTeorica;
  Writeln('Trayectorias en el tiempo':40); Writeln;
  Writeln('t':3,'Y':12,'C':12,'I':12,'G':12); Writeln;
  sY := 0.0; sC := 0.0; sI := 0.0; sG := 0.0;
  For t := 1 To lhp Do
   Begin
    u := Normal(Xbaru,Dstdu);     {genera valores aleatorios}
    v := Normal(Xbarv,Dstdv);
    C[t] := (c1 * Y[t-1]) + (c2 * Y[t-2]) + u;
    I[t] := b * (Y[t-1] - Y[t-2]) + v;
    G[t] := g0 * Y[t-1];
    Y[t] := C[t] + I[t] + G[t];
    sY := sY + (Y[t] * Y[t]); sI := sI + (I[t] * I[t]);
    sC := sC + (C[t] * C[t]); sG := sG + (G[t] * G[t]);
    Writeln(t:3,Y[t]:12:2,C[t]:12:2,I[t]:12:2,G[t]:12:2);
   End;
  sY := sY / lhp; sC := sC / lhp; sI := sI / lhp; sG := sG / lhp;
  Writeln; Writeln('Var',sY:12:2,sC:12:2,sI:12:2,sG:12:2);
End;
Procedure Politica(Id,lhp:Integer;b,c1,c2,g0,Y0,Y1,
                   Xbaru, Dstdu,Xbarv, Dstdv: Real);

Begin
  Writeln('Modelo de Samuelson y Hicks':42);
  Writeln;
  Writeln('Politica':30,id:2);
  Writeln;
  SamuelsonHicks(lhp,b,c1,c2,g0,Y0,Y1,Xbaru,Dstdu,Xbarv,Dstdv);
End;

Begin{TrayectoriasEnElTiempo}
  Politica( 1,          {Id}
            200,        {lhp}
            1.05,       {b}
            0.375,      {c1}
            0.300,      {c2}
            0.250,      {g0}
            7.5,        {Y1}
            2.0,        {Y2}
            0.0,        {Xbaru}
            3.7,        {Dstdu}
            0.0,        {Xbarv}
            2.2);       {Dstdv}
End{TrayectoriasEnElTiempo}.
```

Listado 7.2 Programa para la prueba de varianzas

```
Program PruebaDeVarianzass;

Const
   MaxC =  50;         {Numero de repeticiones}
   MaxP =   5;         {Numero de politicas}
   lhp  = 200;         {longitud del horizonte de planeacion}

Type
    Serie = Array [-1 .. lhp] Of Real;

Var
   Xbars: Array [1 .. MaxP] Of Real;
   Vars: Array [1 .. MaxC, 1 .. MaxP] Of Real;
   Nc, Np: Integer;
   t:  Integer;           {tiempo}
   u:  Real;              {variable estocasticas consumo}
   v:  Real;              {variable estocasticas inversion}
   s:  Real;              {propension marginal al ahorro}
   C:  Serie;             {consumo en el periodo t}
   I:  Serie;             {inversion en el periodo t}
   G:  Serie;             {consumo gubernamental en el periodo t}
   Y:  Serie;             {ingreso nacional en el periodo t}
   sY: Real;              {Variable auxiliar}
   d:  Real;              {Variable auxiliar}
   Xbart: Real;           {Media total para Prueba F}

Function Normal(Xbar, Dstd: Real): Real;

{Genera un numero aleatorio con distribucion normal}
{ con media Xbar y desviacion estandar Dstd}

Var
   s: Real;
   i: Integer;

Begin
   s := 0;
   For i := 1 To 12 Do  s :=  s + Random;
   Normal := Dstd * (6 - s) + Xbar;
End;

Procedure PoliticaSH(Id,lhp:Integer;b,c1,c2,g0,Y0,Y1,
                     Xbaru, Dstdu,Xbarv, Dstdv: Real);
Begin{Ssamuelson y Hicks}
   Randomize; {Siembra la semilla del generador random}

   Y [-1] := Y1;      {Valores Iniciales};
   Y [ 0] := Y0;
   sY := 0.0;


   For t := 1 To lhp Do
    Begin
     u := Normal(Xbaru,Dstdu);      {genera valores aleatorios}
     v := Normal(Xbarv,Dstdv);
     C[t] := (c1 * Y[t-1]) + (c2 * Y[t-2]) + u;
     I[t] := b * (Y[t-1] - Y[t-2]) + v;
     G[t] := g0 * Y[t-1];
     Y[t] := C[t] + I[t] + G[t];
     sY := sY + exp(ln(Abs(Y[t])) * 2);
    End;
  Vars[Nc, Id] := sY / lhp;
End;
```

```
Procedure ImprimeVarianzas;
Begin
    Writeln;
    Writeln('Varianzas de las muestras':42);
    Writeln;
    Write  ('Rep':3,'Politica 1':12,'Politica 2':12);
    Write  ('Politica 3':12,'Politica 4':12);
    Writeln('Politica 5':12);
    Writeln;
  For Nc := 1 To MaxC Do
  Begin
    Write(Nc:3);
    For Np := 1 To MaxP Do
        Write(Vars[Nc, Np]:12:2);
    Writeln;
  End;
End;

Procedure TransformacionLogaritmica;
Begin
    Writeln;
    Writeln('Transformacion logaritmica':42);
    Writeln('de las Varianzas de las muestras':45);
    Writeln;
    Write  ('Rep':4,'Politica 1':12,'Politica 2':12);
    Write  ('Politica 3':12,'Politica 4':12);
    Writeln('Politica 5':12);
    Writeln;
  For Np := 1 To MaxP Do Xbars[Np] := 0;
  Xbart := 0;
  For Nc := 1 To MaxC Do
  Begin
    Write(Nc:3);
    For Np := 1 To MaxP Do
    Begin
        Vars[Nc, Np] := Ln(Vars[Nc, Np]);
        Xbars[Np] := Xbars[Np] + Vars[Nc, Np];
        Write(Vars[Nc, Np]:12:2);
    End;
    Writeln;
  End;
    Writeln;
    Write('Xbar');
    For Np := 1 To MaxP Do
    Begin
        Xbart := Xbart + Xbars[Np];
        Xbars[Np] := Xbars[Np] / Nc;
        Write(Xbars[Np]:12:2);
    End;
  Xbart := Xbart / (MaxC * MaxP);
  Writeln;
  Writeln;
  Writeln('Media Total',Xbart:12:2);
  Writeln;
End;
```

```
Procedure PruebaF;
Var
   scm: Real; sce: Real;
   s21: Real; s22: Real;
   sct: Real; F:   Real;
   i, j : Integer;

Begin
   Writeln;
   Writeln('Prueba F':32);
   Writeln;
   scm := 0.0;
   sce := 0.0;
   For Nc := 1 To MaxC Do
   For Np := 1 To MaxP Do
   Begin
      d := Vars[Nc, Np] - Xbart;
      scm := scm + (d * d);
   End;
   For Np := 1 to MaxP Do
   For Nc := 1 To MaxC Do
   Begin
      d := Vars[Nc, Np] - Xbars[Np];
      sce := sce + (d * d);
   End;
   sct := scm + sce;
   s21 := scm / (MaxP - 1);
   s22 := sce / (MaxP * (MaxC - 1));
   Writeln('Fuente de':12,'Suma de':12,'Grados de':12,'Cuadrado':12);
   Writeln('variacion':12,'cuadrados':12,'libertad':12,'Medio':12);
   Writeln;
   Writeln('Entre clases',scm:12:2,MaxP - 1:12,s21:12:2);
   Writeln('Intra clases',sce:12:2,(MaxP * (MaxC - 1)):12,s22:12:2);
   Writeln;
   Writeln('    Total     ',sct:12:2,(MaxP * (MaxC - 1)) + MaxP - 1:12);
   Writeln;
   F := s21 / s22;
   Writeln('Estadistica F  ',F:12:3);
   Writeln;
End;
Begin{PruebaDeVarianzas}
   Writeln('Modelo de Samuelson y Hicks':42);
   For Nc := 1 To MaxC Do
   Begin
      PoliticaSH(1,              {Id}
                 lhp,           {lhp}
                 1.05,            {b}
                 0.375,          {c1}
                 0.300,          {c2}
                 0.250,          {g0}
                 7.5,            {Y1}
                 2.0,            {Y2}
                 0.0,         {Xbaru}
                 3.7,         {Dstdu}
                 0.0,         {Xbarv}
                 2.2);        {Dstdv}

      PoliticaSH(2,              {Id}
                 lhp,           {lhp}
                 1.10,            {b}
                 0.375,          {c1}
                 0.300,          {c2}
                 0.125,          {g0}
                 7.5,            {Y1}
                 2.0,            {Y2}
                 0.0,         {Xbaru}
                 3.7,         {Dstdu}
                 0.0,         {Xbarv}
                 2.2);        {Dstdv}
```

```
PoliticaSH(3,                {Id}
           lhp,              {lhp}
           1.15,             {b}
           0.375,            {c1}
           0.300,            {c2}
           0.050,            {g0}
           7.5,              {Y1}
           2.0,              {Y2}
           0.0,              {Xbaru}
           3.7,              {Dstdu}
           0.0,              {Xbarv}
           2.2);             {Dstdv}

PoliticaSH(4,                {Id}
           lhp,              {lhp}
           1.15,             {b}
           0.375,            {c1}
           0.300,            {c2}
           0.150,            {g0}
           7.5,              {Y1}
           2.0,              {Y2}
           0.0,              {Xbaru}
           3.7,              {Dstdu}
           0.0,              {Xbarv}
           2.2);             {Dstdv}
PoliticaSH(5,                {Id}
           lhp,              {lhp}
           1.15,             {b}
           0.375,            {c1}
           0.300,            {c2}
           0.225,            {g0}
           7.5,              {Y1}
           2.0,              {Y2}
           0.0,              {Xbaru}
           3.7,              {Dstdu}
           0.0,              {Xbarv}
           2.2);             {Dstdv}
ImprimeVarianzas;
TransformacionLogaritmica;
PruebaF;
End{PruebaDeVarianzas}.
```

CONCLUSIONES

En la actualidad, es creciente el número de instituciones que adoptan el empleo de computadoras de muy diverso tamaño y costo, que están siendo utilizadas por los estudiosos e investigadores en el desarrollo de su quehacer profesional. Los economistas no pueden permanecer ajenos, no por que se trate de artefactos novedosos sino porque pueden brindarle un apoyo relevante en el ejercicio de sus actividades profesionales.

En este trabajo se ha tratado sólo un pequeño número de aplicacciones de los métodos numéricos a la Economía, como es fácil ver, éstas se han ilustrado con ejemplos sumamente sencillos. No obstante, algunos de los métodos proporcionados en los distintos capítulos son aplicables a la solución de muchos de los problemas que cotidianamente enfrenta el economista en su actividad profesional, tanto en el sector público como en el privado.

El énfasis que se ha puesto en los diferentes métodos presentados no significa que éstos sean los mejores, ni que la Economía se tenga que tratar forzosamente mediante métodos matemáticos y computadoras, sino por el contrario la utilización de estas herramientas se debe considerar detenida y cuidadosamente, ya que es frecuente dejarse atrapar por la vieja y seductora trampa de creer que por el simple hecho de emplear métodos que impliquen la utilización de una computadora, el problema a resolver deja de serlo automáticamente, lo que es totalmente falso. En general, resulta más conveniente entender el uso de la computadora en el mismo sentido que se entiende el uso del lápiz y el papel.

Es importante destacar que las computadoras brindan al economista y a otros profesionales ayuda más amplia que la mencionada en este trabajo. Por ejemplo, los servicios de consulta a Bases o Bancos de Datos, o sea, sistemas computarizados que permiten almacenar en forma organizada una gran cantidad de información de muy diversos tipos, que posteriormente puede ser recuperada y representada en una gran variedad de formas. En nuestro país el servicio de consulta a Bases de Datos de los más variados temas lo proporciona el Servicio de Consulta a Bancos de Información (SECOBI) dependiente del CONACYT. En particular sobre Economía es posible hacer consultas entre otras, a las Bases de Datos "Economics Literature Index" y "Economics Abstracts International".

Finalmente consideramos que después de analizar las posibilidades que nos ofrecen la computación, parece conveniente sugerir la inclusión en el curriculum básico del primer semestre de la licenciatura un curso introductorio a las ciencias sobre el tratamiento de la información (Informática) con aplicaciones a la Economía, cuyo objetivo fundamental sea proporcionar a los estudiantes los elementos que llegado el momento les permita:

1) Hacer uso de paquetes estadísticos como el SPSS y el BASIS o de métodos numéricos como los incluidos en el MATH/PACK, así como hojas de cálculo, procesadores de palabra y manejadores de bases de datos relacionales en el desarrollo de sus trabajos e investigaciones académicas o bien para la experimentación numérica de los modelos estudiados en los demás cursos.

2) Decidir si es o no apropiado emplear una computadora para resolver un problema económico y dado el caso poder comunicarse adecuadamente con los especialistas en computación.

3) Determinar la conveniencia de aprender a programar computadoras.

Es importante señalar que el curso sugerido es de Informática aplicada a la Economía y no de programación de computadoras, puesto que en ese caso seria duplicar esfuerzos con respecto al Programa Universitario de Cómputo (PUC).

GLOSARIO DE TERMINOS DE COMPUTACION

Algoritmo. Conjunto de reglas bien definidas o procesos para la solución de un problema en un número finito de pasos en un tiempo finito.

Aplicación. Uso especifico de la computadora para el cual a sido programada.

Bit. Digito binario (0 y 1), unidad elemental para la representación de información.

Byte. Conjunto de 8 bits contiguos que bajo una interpretación dada representan números, letras, símbolos o instrucciones.

Circuito Integrado. Unidad funcional formada por una pequeña placa de silicio sobre la que se depositan, mediante técnicas fotolitográficas, oxidos de distintos metales para construir cientos y aún miles de componentes electrónicos. El rango de estos circuitos abarca desde las simples compuertas lógicas hasta los más avanzados microprocesadores.

Compilador. Programa que traduce un programa escrito en un lenguaje de alto nivel al lenguaje de máquina de una computadora particular.

Computadora. Máquina que permite la manipulación automatizada de la información que se le suministra, siguiendo las instrucciones que recibe a través de un programa.

Configuración. La forma en que cada máquina, equipo o sistema están conectados para trabajar como una unidad.

Cultura computacional. Conocimiento y comprensión sobre el funcionamiento de las computadoras y sistemas de información, de sus aplicaciones, principios fundamentales, así como su impacto en la sociedad.

Dato. Números, letras o símbolos que al ser procesados dan lugar a la información.

Dirección. Número que identifica la ubicación de una celda de memoria de la computadora.

Entrada / Salida. Designación genérica del equipo utilizado para comunicarse con la computadora. Información que recibe o proporciona una computadora.

Hardware. El equipo físico, por ejemplo, los dispositivos mecanicos, magnéticos, eléctricos o electrónicos.

Informática. Ciencia que estudia la información como un recurso de la organización o administración.

Instrucción. Declaración especifica a una computadora de la operación que debe ejecutar, así como sus operandos.

Lenguaje artificial. Lenguaje basado en un conjunto de reglas establecidas formalmente que preescriben la manera en que debe ser usado. Por ejemplo, los lenguajes de programación.

Lenguaje natural. Lenguaje cuyas reglas reflejan y describen su uso actual en vez de prescribir su uso. Por ejemplo, el Español o el Inglés.

Lenguaje de programación. Lenguaje usado para prepara programas de computadora. Por ejemplo, PASCAL, FORTRAN, PL/1, etc.

Memoria principal. Es el dispositivo en que residen todas las instrucciones (el programa), así como la información necesaria para que un proceso se lleve a cabo.

Palabra. Conjunto de digitos binarios (bits) que conforman una celda o localidad de la memoria principal.

Periféricos. Dispositivos o aparatos separados de la unidad central de proceso que realizan funciones de entrada, salida y entrada/salida de información.

Programa. Conjunto de instrucciones que dirigen la operación de una computadora para realizar el procesamilento de información.

Software. Es el conjunto de instrucciones, programas, procedimientos y por extensión la documentación asocíada a la operación de un sistema de procesamiento de datos.

Unidad central de proceso. Es el componente de la computadora que incluye los circuitos de control e interpretación de las instrucciones.

Usuario. Cualquier persona que requiera los servicios de un sistema de cómputo.

BIBLIOGRAFIA

Los libros que se señalan con un asterisco (*) son los que a nuestro juicio permitirán al lector interesado conocer con más detalle los temas de Computación y Análisis Numérico, así como sus aplicaciones en distintas disciplinas.

1. Allard, R. — Introducción a la Econometría. Limusa, México 1980

2. Allen, R. — Análisis matemático para economistas. Aguilar S. A., Madrid 1978

3. Allen, R. — Economía matemática. Aguilar S. A., Madrid 1967

4. Allen, R. — Teoría Macroeconómica. Aguilar S. A., Madrid 1974

5. Ames, E. — Macroeconomía. Interamericana, México 1972

6. Asimov, I. — El reino de los números. Diana, México 1979

7. Astori, D. — Enfoque crítico de modelos de contabilidad social. Siglo XXI, México 1980

8. Balfour, A. — Análisis numérico básico con FORTRAN. CECSA, México 1978

9. Chenery, H. / Clark, P. — Economía interindustrial. El Fondo de Cultura Económica, México 1964

10. Chiang, A. — Fundamental methods of mathematical economics. McGraw Hill, Nueva York 1984

*11. Conte, S. / Boor, C. — Análisis numérico elemental. McGraw Hill, México 1981

12. Dagum, C. / Bee, E. — Introducción a la econometría. Siglo XXI, México 1976

*13. Donovan, J. — Systems programing. McGraw Hill, Nueva York 1972

14. Dowling, E. — Matemáticas para economistas. McGraw Hill, México 1982

15. Draper, J. / Klingman, J. — Matemáticas para la Administración y la Economía. Harla, México 1977

16. Espinosa, H. — Programación lineal; aplicaciones a la Economía. Editorial Pax-México, México 1980

17. Evans, C. — El fabuloso microprocesador. Argos-Vergara, Barcelona 1981

18. Fenves, S. Métodos de computación en ingeniería civil
Limusa, México 1976

19. Forrester, J. Industrial Dynamics
The M.I.T. Press, Cambridge Mass. 1969

20. Forrester, J. Principles of systems
Wright Allen, Cambidge Mass. 1968

21. García, A. Apuntes de econometria
UNAM, México 1960

22. Gellert, W. et al. The VNR concise encyclopedia of mathematics
Van Nostrand Reinhold, Nueva York 1977

23. Greig, D. Optimisation
Longman, Londres 1980

24. Gujarati, D. Econometría básica
McGraw Hill, México 1981

*25. Hamming, R. Introduction to applied numerical analyisis
McGraw Hill. Nueva York 1971

26. Henrici, P. Elementos de análisis numérico
Trillas, México 1980

27. Huang, D. Introducción al uso de la matemática en el análisis económico
Siglo XXI, México 1976

28. James, M. et al. Métodos numéricos aplicados a la computación digital con FORTRAN
Representaciones y servicios de ingeniería
Mexico 1967

*29. Jansen, K. Wirth, N. Pascal: user manual and report
Springer-Verlang, Nueva York 1978

*30. Kuo, S. Computer applications of numerical methods
Addison Wesley, Readings Massachusetts 1972

31. Luthe, R. et al. Métodos numéricos
Limusa, México 1984

32. McCraken, D. Dorn, W. Métodos numéricos y programación FORTRAN
Limusa, México 1982

33. Meier, R. Técnicas de simulación en Administración y Economía
Trillas, México 1975

*34. Minski, M. Computation: Finite and Infinite Machines
Prentice Hall, Englewood Cliff NJ 1967

35. Naylor, T. et al. Técnicas de simulación en computadoras
Limusa, México 1977

36. Naylor, T. et al. Experimentos de simulación en computadoras con modelos de sistemas económicos
Limusa, México 1977

38. Nie, N. et al. Statistical Package for the Social Science
McGraw Hil, Nueva York 1975

39. Nieto, J. Métodos numéricos en computadora digital
Limusa, México 1980

40. Ord-Smith, R. Stephenson, J. Computer simulation of continuos systems
Cambidge University Press, Cambridge 1975

41. Polya, G. — Como plantear y resolver problemas
Trillas, México 1982

42. Prawda, J. — Métodos y modelos de la investigación de operaciones (vol. I)
Limusa, México 1979

*43. Presser, L. et al. — Ciencias de la computación
Limusa Wiley, México 1972

*44. Pylyshyn, Z. — Perspectivas de la revolución de los computadores
Alianza Universidad, Madrid 1975

*45. Pékelis, V. — Mezcla cibernética
MIR, Moscú 1973

46. Pékelis, V. — Pequeña enciclopedia de la gran cibernética
MIR, Moscú 1977

*47. Ralston, A. — Introducción al análisis numérico
Limusa Weily, México 1970

48. Robinson, J. — Aplicación de la teoría macroeconómica
Siglo XXI, Madrid 1975

49. Rosenblueth, A. — El método científico
La Prensa Médica Mexicana, México 1977

*50. Sammet, J. — Programing Languajes
Prentice Hall, Englewod Cilff NJ 1969

51. Saracho, A. — Predicción científica en ciencias sociales
UNAM, México 1977

52. Shao, S. — Estadística para economistas y administradores de empresas
Herrero Hnos, México 1970

53. Sheid, F. — Análisis numérico
McGraw Hill, México 1982

54. S.P.P. — Homogeneización de las matrices de 1950, 1960 y 1970.
S.P.P., México 1981

55. Turner, J. — Matemática moderna aplicada
Alianza Universidad, Madrid 1979

56. Vuskovic, P. — Los instrumentos estadísticos del análisis económico
CIDE, México 1984

57. Wallis, K. — Introducción a la Econometría
Alianza Universidad, Madrid 1979

58. Watt, D. — Programación Pascal
Fondo de Cultura Interamericana, México 1984

59. Westwater, F. — Electronic Computers
St. Paul's House, Londres 1972

60. Williams, F. — Razonamiento estadístico
Interamericana, México 1982

61. Yamane, T. — Matemáticas para economistas
Ariel, Barcelona 1972