

86  
2 Gen 1

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

# Análisis y Diseño de una Estructura Hiperestática con Distintos Grados de Libertad Lineales

## Observaciones:

a) Análisis por Computadora.  
Método de las Rigideces.

b) Diseño con los Reglamentos  
en Vigor.

T E S I S

Que para obtener el título de:

Ingeniero civil

presenta:

GERMAN JIMENEZ GONZALEZ



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

CAPITULO	HOJA
I. INTRODUCCION -----	1
II. ESTRUCTURA PROPUESTA -----	4
III. METODO DE LAS RIGIDECES -----	6
III.1) Definiciones -----	6
III.2) Estudio del método -----	7
IV. ANALISIS DEL MARCO -----	21
IV.1) Matriz de Continuidad -----	23
IV.2) Matriz de Rigideces -----	27
IV.3) Matriz de Fuerzas -----	32
IV.4) Desarrollo del programa -----	42
IV.5) Paquete "CECAFI/MATRICES/2" -----	45
IV.6) Registro de Resultados -----	50
IV.7) Diagramas finales -----	52
V. DISEÑO DEL MARCO -----	60
V.1) Elementos principales -----	60
V.2) Envolventes Totales -----	61
V.3) Teoría del Diseño Plástico -----	71
V.4) Diseño de Trabe -----	81
V.5) Diseño de Columna -----	92
V.6) Apéndice -----	105
VI. COMENTARIOS -----	110
VII. BIBLIOGRAFIA (REFERENCIAS) -----	112

## I . I N T R O D U C C I O N

En México, como en otros países, en los últimos años se ha generalizado el uso de las máquinas computadoras, que vienen a ser fuerte apoyo al desarrollo de la ciencia y la técnica en nuestro país.

Dichas máquinas fueron tomando parte importante en el estudio y solución de numerosos problemas en distintas áreas de la actividad profesional, tal situación es tan palpable, que en la actualidad no podría vislumbrarse una institución mediana o grande de carácter estatal o privada, productora de servicios, de educación, financiera, etc., que no se ayude en la solución de sus problemas técnicos, de administración o de organización por el uso de computadoras.

En el campo de la ingeniería civil tampoco se ha apartado el uso de dichas computadoras, por el contrario, cada día viene a ser de vital importancia en la solución de problemas ingenieriles. Dentro de ésta área de la ingeniería son factor importante en la solución de ecuaciones y sistemas de álgebra superior, en el estudio y análisis de matrices, en la aplicación de métodos para la solución de estructuras de obras civiles, en la elaboración de gráficas, etc.

Las computadoras, en general revisten su importancia por el hecho de venir a simplificar y a modificar la forma de solución de las estructuras civiles, conjuntamente al aspecto fundamental de la rapidez con que se pueden efectuar los procesos ma

temáticos, ya que lo que regularmente se hace en semanas e incluso en meses, con el auxilio de computadoras se hacen en minutos o incluso en segundos.

En este trabajo se presenta la solución estructural (análisis y diseño) de un marco con diferentes grados de libertad lineales, un marco hiperestático cuya solución en forma tradicional daría muchas horas de trabajo, se resolverá en el aspecto del análisis con ayuda de computadora - método de las rigideces - aplicando en la solución métodos matriciales, que como se verá representa un proceso muy rápido, práctico y exacto, algo muy poderoso en la solución de este tipo de estructuras.

El diseño se hace por métodos usuales, tomando en cuenta los reglamentos actuales del ACI (Instituto Americano del Concreto) principalmente, y del RDDF (Reglamento del Departamento del Distrito Federal).

Se efectúan revisiones y se hacen las gráficas detalladas relativas a la distribución y colocación del acero de refuerzo en elementos principales de la estructura propuesta.

Se considera que la estructura no tiene problemas de cimentación, y por lo tanto el trabajo se avoca principalmente al análisis y el diseño; también se debe hacer notar que no se consideran deformaciones por fuerzas axiales (normales), ni por cortante.

Este trabajo se efectúa con la intención de servir de ejemplo o base para la solución de los dos pasos más importantes en la elaboración y desarrollo de un proyecto estructural, proble-

ma básico entre los estudiantes de semestres avanzados de ingeniería civil.

Cabe hacer notar que el método matricial usado en la solución de este trabajo es el paquete CECAFI/MATRICES/2, obra que en su oportunidad se comentará y en el desarrollo del trabajo - se indicará así mismo la forma de usarse.

## II. ESTRUCTURA PROPUESTA

La estructura propuesta (FIGS. II. 1, 2 y 3) y las cargas verticales y por sismo son completamente hipotéticos y sólo se intenta que resulte comparable a las que se presentan en la práctica real.

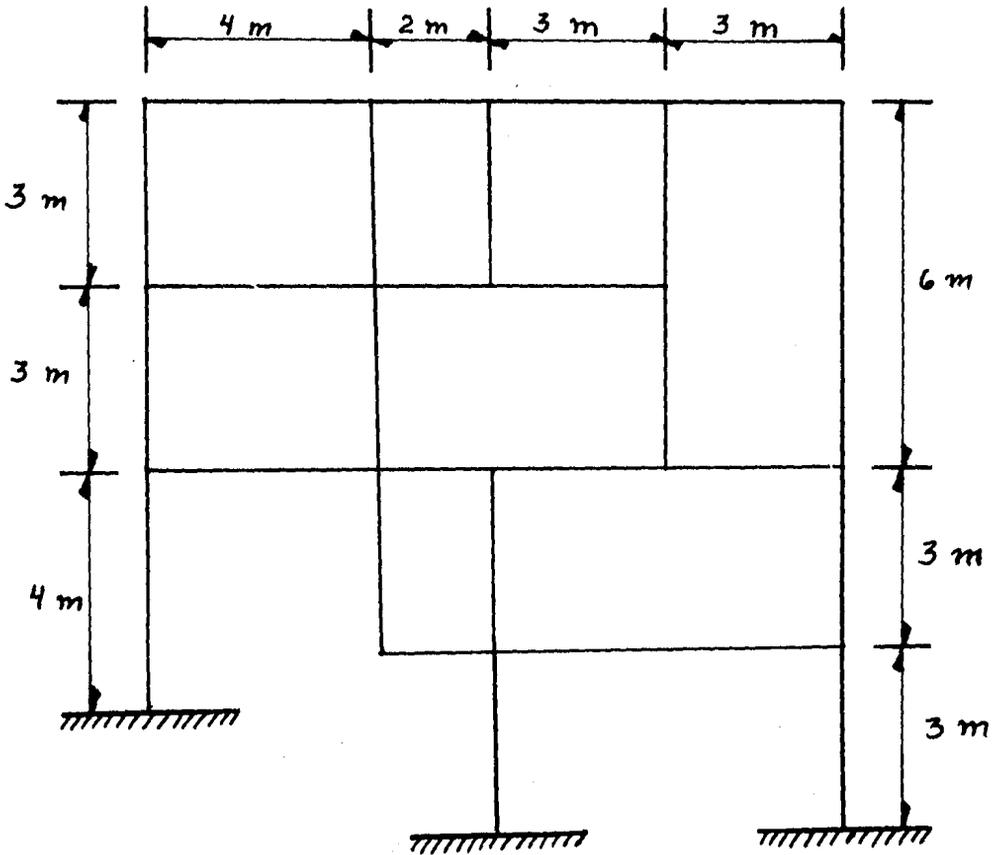


FIGURA II. 1

CARGAS VERTICALES O GRAVITACIONALES

(Carga muerta + Carga viva)

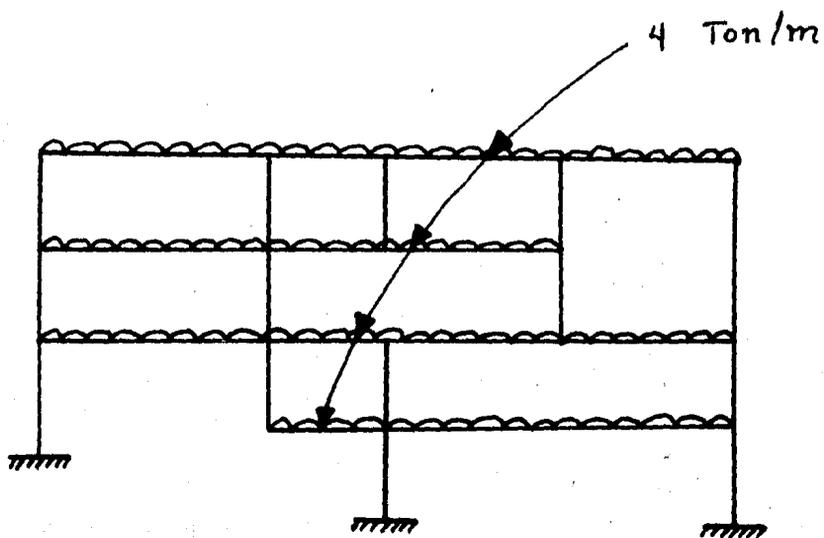


FIGURA II.2

CARGAS HORIZONTALES [Ton]

(Por sismo derecho)

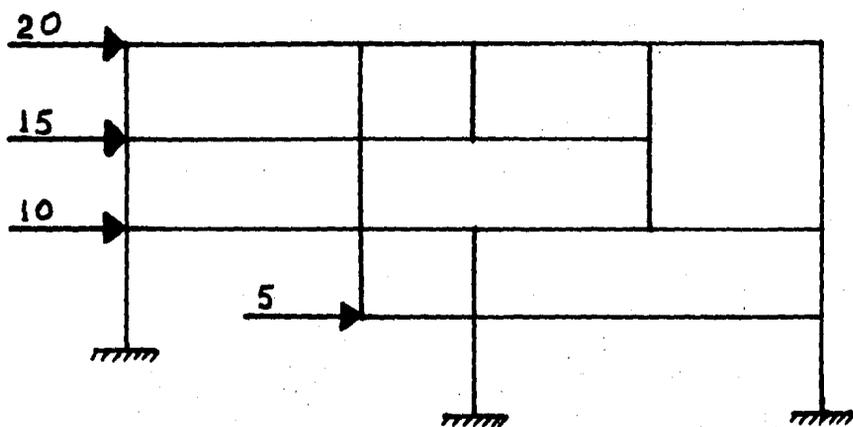


FIGURA II.3

### I I I . M E T O D O D E L A S R I G I D E C E S

Este método es llamado también método de las deformaciones, por basarse en las condiciones de deformación de una estructura, las deformaciones o **desplazamientos** están en función de la rigidez de la estructura (la rigidez se define como el esfuerzo debido a un desplazamiento unitario de cada grado de libertad) (REF. 2). Combina tres principios fundamentales para llegar a la solución de una estructura hiperestática, estos tres principios son los siguientes: a) Principio de Continuidad; b) Ley de Hooke y - c) Ecuación de equilibrio.

#### I I I . 1 ) . D E F I N I C I O N E S

a) **PRINCIPIO DE CONTINUIDAD.** Este principio establece lo siguiente: "Existe una relación lineal entre las deformaciones y los giros (y desplazamientos) de una estructura". (REF. 6).

b) **LEY DE HOOKE.** Se supone un comportamiento lineal del material; ésta ley dice: "Existe una relación lineal entre las fuerzas en las barras y las deformaciones de éstas. (REF. 6).

c) **ECUACION DE EQUILIBRIO.** Las fuerzas externas (fzas. en los nudos) dependen linealmente de las fuerzas internas (fzas. en las barras). (REF. 6).

**N O T A :** Al hablar de fuerzas, se refiere a fuerzas y momentos.

### III.2 ) . ESTUDIO DEL METODO

Se presenta en ésta parte del capítulo los puntos más importantes del Método de las Rigideces de acuerdo a lo establecido en las clases que de dicho tema se dan en la Facultad de Ingeniería de la UNAM (REF. 6).

Sea un pórtico cualquiera con cierta condición de carga -- (figura III. 1).

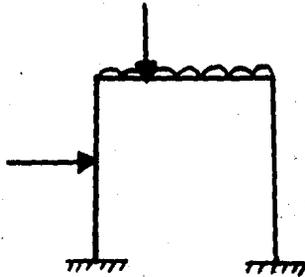


FIGURA III.1

Se supone que no existen cargas a lo largo de las barras, - lo que implica que todas las fuerzas están aplicadas en los nodos, que es semejante a transportar los efectos de las sollicitaciones intermedias a los extremos (figura III. 2).

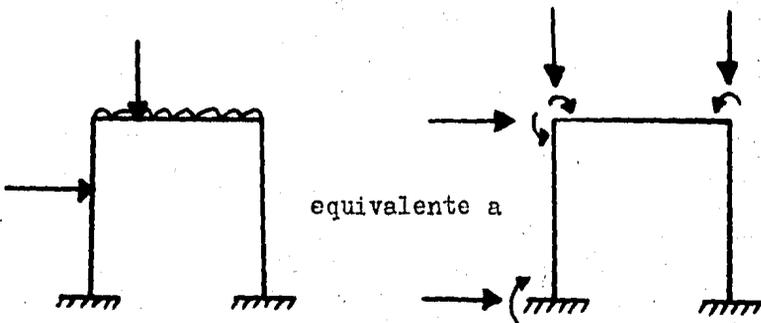


FIGURA III.2

a)- PRINCIPIO DE CONTINUIDAD -

Sea una barra cualquiera  $\lambda$  de una estructura sujeta a solicitaciones externas (figura III. 3).

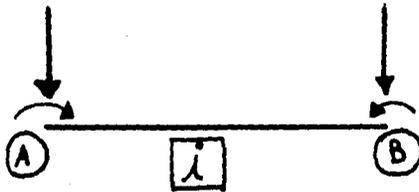


FIGURA III.3

Para efectos de flexión las fuerzas cortantes en los extremos A y B de la barra no actúan.

Supóngase la siguiente configuración de deformaciones en una barra de longitud  $L$  (figura III. 4).

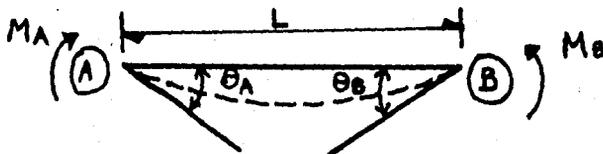


FIGURA III.4

$\theta_A$  y  $\theta_B$  son por definición las deformaciones angulares por flexión.

Considérese que el sistema de cargas es positivo y que las deformaciones  $\theta_A$  y  $\theta_B$  son también positivas (figura III. 5a y b).

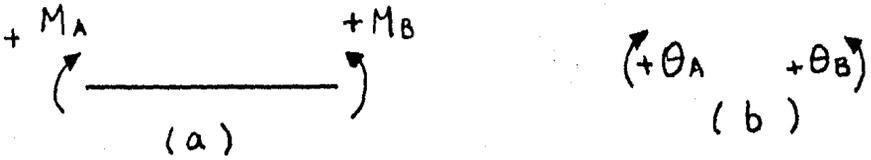


FIGURA III.5

Sea  $\varphi_j$  el giro del nudo  $j$  producido por fuerzas externas y  $\Delta$  un incremento diferencial en la barra  $[j]$  con las convenciones indicadas (figura III. 6a y b)

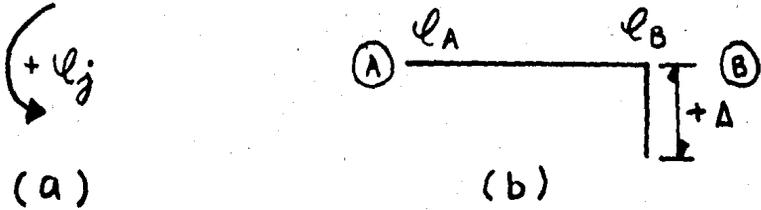


FIGURA III.6

Es obvio que:

- i) Si  $\Delta = 0$  y  $\varphi_B = 0$ ,  $\therefore \theta_A = -\varphi_A$  (figura III. 7)

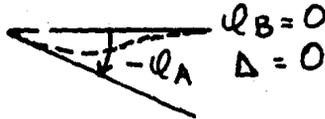


FIGURA III.7

- ii) Si  $\Delta = 0$  y  $\varphi_A = 0$ ,  $\therefore \theta_B = +\varphi_B$  (figura III. 8)

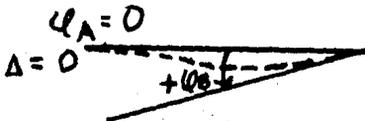


FIGURA III.8

iii) Para  $\Delta \neq 0$ ,  $\varrho_A \neq 0$  y  $\varrho_B \neq 0$  se tendría una configuración como la que se muestra en la figura III. 9

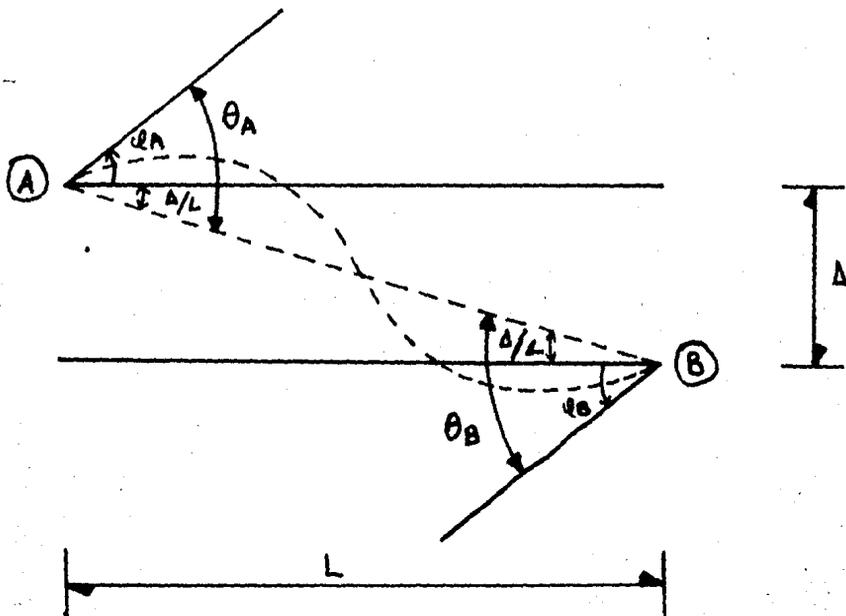


FIGURA III.9

De la figura III. 9 se observa que (tomando en cuenta las convenciones para signos de deformaciones y giros):

$$\begin{cases} \theta_A = -\varrho_A - \Delta/L \\ \theta_B = +\varrho_B + \Delta/L \end{cases}$$

que es la expresión analítica del Principio de Continuidad.

En forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & -1/L \\ \hline 0 & +1 & +1/L \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \Delta \end{Bmatrix}$$

La matriz  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1/L \\ 0 & +1 & +1/L \end{bmatrix}$  se denomina Matriz de Continuidad  $[a]$

La matriz  $[a]$  relaciona las deformaciones con los giros y desplazamientos, es de orden  $(2n_B \times n_G)$ , donde  $n_B$  es el número de barras del marco y  $n_G$  es el número de desplazamientos y giros (llamados éstos últimos grados de libertad lineales y angulares; que en total corresponden a la suma de nudos y desplazamientos de la estructura propuesta).

Llamando  $\{e\}$  a la matriz que representa a las deformaciones  $\theta_A$  y  $\theta_B$  de la barra  $[i]$ , para un marco cualquiera se tendrá:

$$\{e\} = [a]\{d\} \text{ -----Ecuación III. 1}$$

siendo  $\{d\}$  la matriz de desplazamientos y giros.

b) - LEY DE HOOKE -

Considérese una viga hiperestática libremente apoyada en un extremo y empotrada en el otro (figura III. 10 a), se trata de establecer la deformación en el extremo apoyado al aplicar un momento  $M$  mediante el primer teorema del área de momentos que dice: "El ángulo de las tangentes A y B es igual al área del diagrama de momentos flexionantes entre esos dos puntos divididos por el producto  $EI$ ". El teorema se expresa analíticamente mediante la ecuación:

$$\theta = \int_A^B \frac{M dx}{EI}$$

Donde:

$E$  = Módulo de Elasticidad de la barra

$I$  = Momento de Inercia de la sección

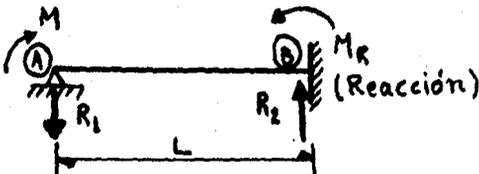
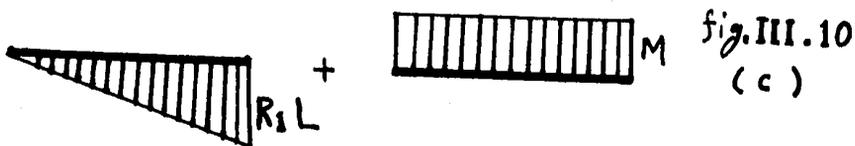


fig. III.10  
(a)

La anterior estructura es una viga hiperestática que es equivalente a



Se tienen los siguientes diagramas de momentos flexionantes



Que equivalen a

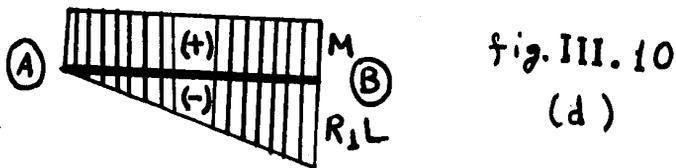


FIGURA III.10(a), (b), (c) y (d)  
Tomando en cuenta la figura III. 10 a, por estática se tiene

$$\begin{aligned}
 -R_1 L + M - M_R &= 0 & \text{--- Ec. } \alpha \\
 -R_1 + R_2 &= 0 & \text{--- Ec. } \beta
 \end{aligned}$$

Por el segundo teorema del área de momentos que dice: "La distancia en vertical entre el punto A, de la elástica de una viga y la tangente trazada a la curva en un punto B es igual al momento respecto a la vertical por A del área del diagrama de momentos entre A y B divididos por EI"; como el desplazamiento de A desde la tangente en B es nulo, se tiene:

$$ML\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}(-R_1L)(L)\left(\frac{2}{3}L\right) = 0,$$

Simplificando

$$\frac{ML^2}{2} - \frac{R_1L^3}{3} = 0$$

$$3ML^2 - 2R_1L^3 = 0,$$

de donde

$$R_1 = \frac{3ML^2}{2L^3} = \frac{3M}{2L}$$

$$\therefore R_1 = \frac{3M}{2L}$$

Tomando en cuenta la ecuación  $\beta$ ,

$$\therefore R_2 = \frac{3M}{2L}$$

Sustituyendo  $R_1$  en la ecuación  $\alpha$

$$-\frac{3M}{2L} \cdot L + M - M_R = 0$$

Simplificando

$$-\frac{3M}{2} + M = M_R = -\frac{3M}{2} + \frac{2M}{2} = -\frac{M}{2}$$

$$\therefore M_R = -\frac{M}{2}$$

El signo menos indica que  $M_R$  es en sentido contrario al -  
cual se supuso.

Los resultados anteriores se establecen en el siguiente es-  
quema (figura III. 11)

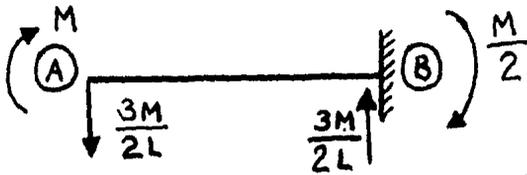


FIGURA III.11

El momento flexionante en el tramo A-B es

$$M_x = -\frac{3M}{2L}x + M$$

Sustituyendo en la ecuación del primer teorema del área de momentos (con  $EI = \text{constante}$ )

$$EI\theta = \int_0^L \left( -\frac{3M}{2L}x + M \right) dx$$

Desarrollando e integrando

$$EI\theta = -\int_0^L \frac{3M}{2L}x dx + \int_0^L M dx$$

$$EI\theta = -\frac{3M}{2L} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^L + M \left[ x \right]_0^L$$

$$EI \theta = -\frac{3M}{2L} \frac{L^2}{2} + ML$$

$$EI \theta = \frac{-3ML}{4} + \frac{4ML}{4} = \frac{ML}{4}, \text{ o sea}$$

$$EI \theta = \frac{ML}{4}, \text{ despejando } M:$$

$$M = \frac{4EI}{L} \theta$$

La anterior expresión indica que para lograr una deformación  $\theta$ , se tiene que aplicar un momento de  $\frac{4EI}{L} \theta$ .

Sintetizando, se podría establecer la siguiente conclusión en la figura III. 12 a y b

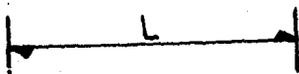
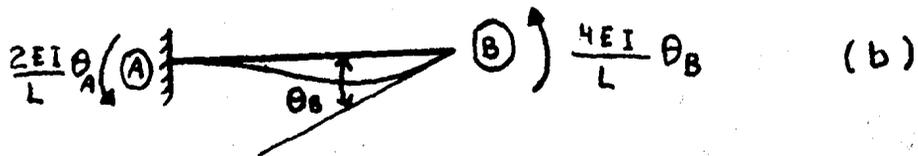


FIGURA III.12

Tomando en cuenta las convenciones de signos marcado en la figura III. 5, se tiene de la figura III. 12 a y b respectivamente:

$$\begin{cases} M_A = \frac{4EI}{L} \theta_A - \frac{2EI}{L} \theta_B \\ M_B = -\frac{2EI}{L} \theta_A + \frac{4EI}{L} \theta_B \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{2EI}{L} \\ -\frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix}$$

que es la expresión analítica - matricial de la Ley de Hooke.

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{2EI}{L} \\ -\frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \text{ es la matriz de rigidez} = [k]$$

$[k]$  relaciona fuerzas internas y deformaciones de cada barra.

Llamando  $\{p\}$  a la matriz  $\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}$ ,

$(2n_b \times 1)$   $(2n_b \times 2n_b)$   $(2n_b \times 1)$

$$\{p\} = [k] \{e\} \text{ ----- Ecuación III.2}$$

c)- ECUACION DE EQUILIBRIO -

Sean  $M_A$  y  $M_B$  pares exteriores actuando en los extremos de la barra  $[i]$  (figura III. 13)

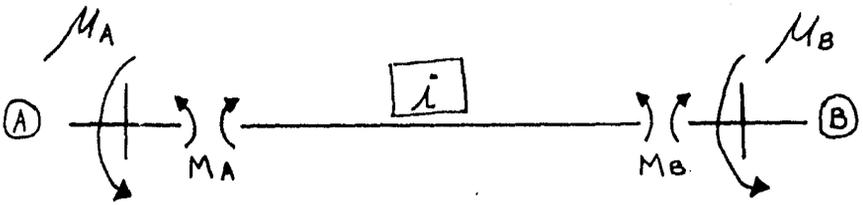


FIGURA III.13

Recordando la convención de signos en la figura III. 14



FIGURA III.14

De la figura III. 13, se observa que  $\mu_A + M_A = 0$ , por lo tanto  $\mu_A = - M_A$  ----- (a)

Por otro lado se ve que  $\mu_B - M_B = 0$ , o sea que:  
 $\mu_B = + M_B$  ----- (b)

Sea F una fuerza aplicada en el extremo (B) de la viga - **i** (figura III. 15), siendo V el cortante que resulta de los pares internos  $M_A$  y  $M_B$ .

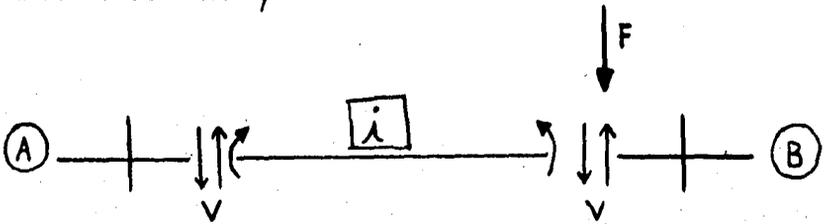


FIGURA III.15

Sabemos que  $V$  no es independiente, sino que depende de  $M_A$  y  $M_B$ ; por estática, suponiendo la viga  $\boxed{i}$  como libremente apoyada con pares  $M_A$  y  $M_B$  actuando en los extremos, se deduce que:

$$V = \frac{M_B - M_A}{L}$$

También se observa que  $F - V = 0$ , lo que implica que

$$F = V = \frac{M_B - M_A}{L} \quad \text{----- (c)}$$

Reuniendo las anteriores expresiones (a), (b) y (c), se tiene:

$$\begin{cases} M_A = -M_A \\ M_B = +M_B \\ F = \frac{M_B}{L} - \frac{M_A}{L} \end{cases}$$

Las anteriores expresiones representan la condición analítica de la Ecuación de equilibrio, teniéndose en forma matricial:

$$\{F_{ext.}\} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \\ -1/L & +1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}$$

La matriz  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \\ -1/L & +1/L \end{bmatrix}$  es la transpuesta de la matriz de -

Continuidad, o sea es  $[a]^T$ , que relaciona las fuerzas externas  $\{F \text{ ext.}\}$  con las internas  $\{p\}$ .

Simplificando, para un marco cualquiera, se tendría:

$$\{F_{\text{ext.}}\} = [a]^T \{p\} \text{ ----- Ecuación III.3}$$

$(n_G \times 1) \quad (n_G \times 2n_B) \quad (2n_B \times 1)$

Pudiéndose establecer que  $n_G = n_N + n_D$ , en donde  $n_N$  es el número de nudos de la estructura y  $n_D$  es el número de desplazamientos lineales.

Las ecuaciones matriciales III.1, 2 y 3 representan el proceso analítico del método de las rigideces y cualquier marco hiperestático se puede resolver con la combinación adecuada de las expresiones anteriores, teniéndose lo siguiente

DATOS	INCOGNITAS
$[a]$	$\{e\}$
$[k]$	$\{d\}$
$[F_{\text{ext.}}]$	$\{p\}$

## I V .   A N A L I S I S   D E L   M A R C O

Supóngase que las dimensiones de las columnas son de 60 X 60 [cm.] y que las dimensiones de las traves son de 40 cm. (base) por 60 cm. (peralte), figura IV. 1.

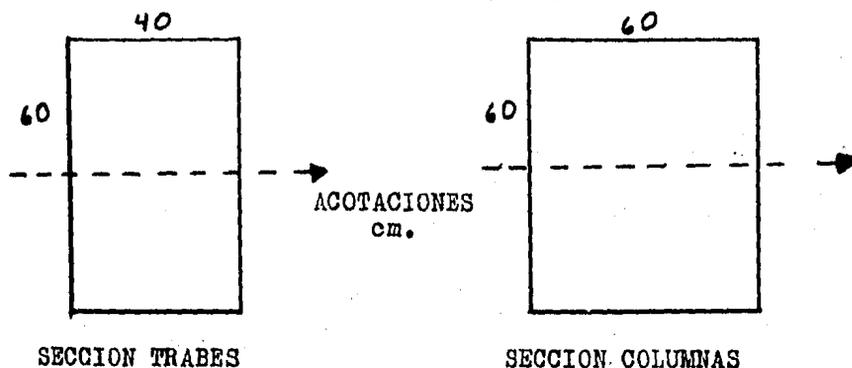


FIGURA IV.1

Tomando el módulo de Elasticidad del concreto (según el Reglamento del Departamento del Distrito Federal, para el Valle de México) como  $10\,000 \sqrt{f'_c}$ , para un concreto de  $f'_c = 225$  Kg/cm<sup>2</sup> se tendría  $E = 10\,000 \sqrt{225} = 150\,000$  Kg/cm<sup>2</sup>, o sea, se usará un valor para  $E$  de 1 500 000 T/m<sup>2</sup>.

Los momentos de inercia de las secciones serán:

$$i) \text{ Traves. } I_T = \frac{b h^3}{12} = \frac{(0.40)(0.60)^3}{12} = 0.0072 \text{ m}^4$$

$$ii) \text{ Columnas. } I_c = \frac{l^4}{12} = \frac{(0.60)^4}{12} = 0.0108 \text{ m}^4$$

Nombrando cada barra, nudos y desplazamientos de la estructura propuestas, de acuerdo a la figura IV. 2, se puede establecer que:

$$I_{\text{TRABE } i} = I_{4,5,9,10,11,12,17,18,19,24,25,26,27} = 0,0072 \text{ m}^4$$

$$I_{\text{COL. } i} = I_{1,2,3,6,7,8,13,14,15,16,20,21,22,23} = 0,0108 \text{ m}^4$$

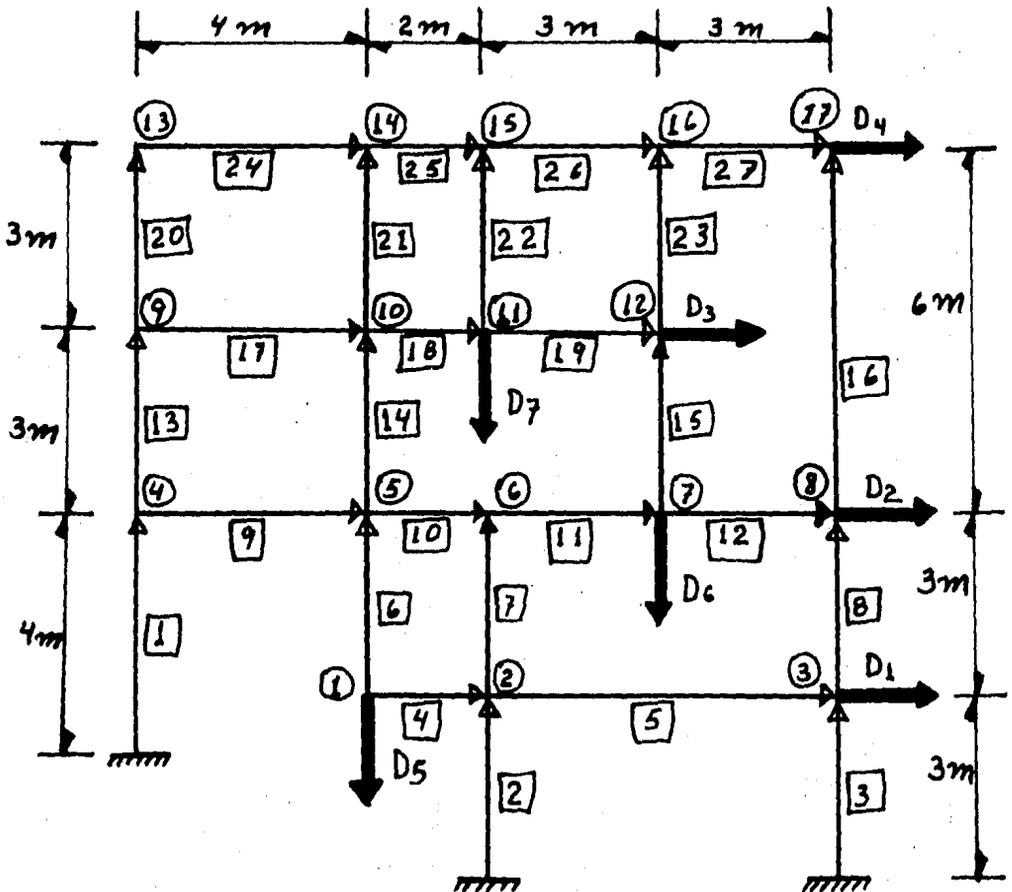


FIGURA IV.2

#### IV.1) - MATRIZ DE CONTINUIDAD -

La matriz de Continuidad  $[a]$  es de orden  $(2n_6 \times n_6)$  ,  
si  $n_6 = 27$ ,  $n_N = 17$  y  $n_0 = 7$ , entonces  $[a]$  es de orden  
 $(54 \times 24)$  . Tomando en cuenta la figura IV. 2 y sabiendo  
que  $\begin{cases} \theta_A = -u_A - \Delta/L \\ \theta_B = +u_B + \Delta/L \end{cases}$  para cada barra, se formaría la siguien

te matriz:



MATRIZ DE CONTINGENCIA

25

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>6</sub>	D <sub>7</sub>	D <sub>8</sub>	D <sub>9</sub>	D <sub>10</sub>	D <sub>11</sub>	D <sub>12</sub>	D <sub>13</sub>	D <sub>14</sub>	D <sub>15</sub>	D <sub>16</sub>	D <sub>17</sub>	D <sub>18</sub>	D <sub>19</sub>	D <sub>20</sub>	D <sub>21</sub>	D <sub>22</sub>	D <sub>23</sub>	D <sub>24</sub>	
250 <sub>h13</sub>			-1																+3333	-3333					
260 <sub>h13</sub>								+1											-3333	+3333					
270 <sub>h14</sub>				-1															+3333	-3333					
280 <sub>h14</sub>									+1										-3333	+3333					
290 <sub>h15</sub>						-1													+3333	-3333					
300 <sub>h15</sub>										+1									-3333	+3333					
310 <sub>h16</sub>							-1												+1666		-1666				
320 <sub>h16</sub>																+1			-1666		+1666				
330 <sub>h17</sub>								-1														-25			
340 <sub>h17</sub>									+1													+25			
350 <sub>h18</sub>										-1												+5		-5	
360 <sub>h18</sub>										+1												-5		+5	
370 <sub>h19</sub>											-1												-3333	+3333	
380 <sub>h19</sub>												+1											+3333	-3333	
390 <sub>h20</sub>							-1												+3333	-3333					
400 <sub>h20</sub>													+1						-3333	+3333					
410 <sub>h21</sub>								-1											+3333	-3333					
420 <sub>h21</sub>														+1					-3333	+3333					
430 <sub>h22</sub>										-1									+3333	-3333					
440 <sub>h22</sub>															+1				-3333	+3333					
450 <sub>h23</sub>											-1								+3333	-3333					
460 <sub>h23</sub>																+1			-3333	+3333					
470 <sub>h24</sub>												-1										-25			
480 <sub>h24</sub>													+1									+25			

MATRIZ DE CONTINUIDAD

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>6</sub>	D <sub>7</sub>	D <sub>8</sub>	D <sub>9</sub>	D <sub>10</sub>	D <sub>11</sub>	D <sub>12</sub>	D <sub>13</sub>	D <sub>14</sub>	D <sub>15</sub>	D <sub>16</sub>	D <sub>17</sub>	D <sub>18</sub>	D <sub>19</sub>	D <sub>20</sub>	D <sub>21</sub>	D <sub>22</sub>	D <sub>23</sub>	D <sub>24</sub>	
49 E <sub>125</sub>																									
50 E <sub>125</sub>																									
51 E <sub>116</sub>																									
52 E <sub>126</sub>																									
53 E <sub>127</sub>																									
54 E <sub>127</sub>																									

IV.2) - MATRIZ DE RIGIDECES -

Se había encontrado que la rigidez de cada barra  $\boxed{i}$  era

$$[R]_i = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{2EI}{L} \\ -\frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \frac{EI}{L}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta los valores de E, de I y de L se obtiene

$$[R]_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \frac{(1500000)(0.0108)}{4} = \begin{bmatrix} 16200 & -8100 \\ -8100 & 16200 \end{bmatrix}$$

$$[R]_{\substack{2,3,6,7,8 \\ 13,14,15,20 \\ 21,22,23}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \frac{(1500000)(0.0108)}{3} = \begin{bmatrix} 21600 & -10800 \\ -10800 & 21600 \end{bmatrix}$$

$$[R]_{4,10,18,25} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \frac{(1500000)(0.0072)}{2} = \begin{bmatrix} 21600 & -10800 \\ -10800 & 21600 \end{bmatrix}$$

$$[R]_5 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \frac{(1500000)(0.0072)}{6} = \begin{bmatrix} 7200 & -3600 \\ -3600 & 7200 \end{bmatrix}$$

$$[R]_{9,17,24} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \frac{(1500000)(0.0072)}{4} = \begin{bmatrix} 10800 & -5400 \\ -5400 & 10800 \end{bmatrix}$$

$$[R]_{11,12,19,26,27} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \frac{(1500000)(0.0072)}{3} = \begin{bmatrix} 14400 & -7200 \\ -7200 & 14400 \end{bmatrix}$$

$$[R]_{16} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \frac{(1500000)(0.0108)}{6} = \begin{bmatrix} 10800 & -5400 \\ -5400 & 10800 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a los resultados anteriormente obtenidos, se forma la siguiente matriz de rigideces de la estructura propuesta de acuerdo a la figura IV. 2, dicha matriz es de orden  $(2n_B \times 2n_B)$  y por lo tanto la matriz  $[R]$  es de orden  $(54 \times 54)$ .

MATRIZ DE RIGIDEZES [K] (54 x 54)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	16200	-8100								
2	-8100	16200								
3			21600	-10800						
4			-10800	21600						
5					21600	-10800				
6					-10800	21600				
7							21600	-10800		
8							-10800	21600		
9									7200	-3600
10									-3600	7200

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	21600	-10800								
12	-10800	21600								
13			21600	-10800						
14			-10800	21600						
15					21600	-10800				
16					-10800	21600				
17							10800	-5400		
18							-5400	10800		
19									21600	-10800
20									-10800	21600

MATRIZ DE RIGIDEZES

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
21	14400	-7200								
22	-7200	14400								
23			14400	-7200						
24			-7200	14400						
25					21600	-10800				
26					-10800	21600				
27							21600	-10800		
28							-10800	21600		
29									21600	-10800
30									-10800	21600

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
31	10800	-5400								
32	-5400	10800								
33			10800	-5400						
34			-5400	10800						
35					21600	-10800				
36					-10800	21600				
37							14400	-7200		
38							-7200	14400		
39									21600	-10800
40									-10800	21600

MATRIZ DE RIGIDEZES

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
41	21600	-10800								
42	-10800	21600								
43			21600	-10800						
44			-10800	21600						
45					21600	-10800				
46					-10800	21600				
47							10800	-5400		
48							-5400	10800		
49									21600	-10800
50									-10800	21600

	51	52	53	54
51	14400	-7200		
52	-7200	14400		
53			14400	-7200
54			-7200	14400

MATRIZ DE RIGIDEZES

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
41	21600	-10800								
42	-10800	21600								
43			21600	-10800						
44			-10800	21600						
45					21600	-10800				
46					-10800	21600				
47							10800	-5400		
48							-5400	10800		
49									21600	-10800
50									-10800	21600

	51	52	53	54
51	14400	-7200		
52	-7200	14400		
53			14400	-7200
54			-7200	14400

#### IV.3 ) - M A T R I Z D E F U E R Z A S -

Se consideran fijos los nudos, lo que equivale a suponer - cada barra como empotrada en ambos extremos. El problema esencial consiste en calcular el vector de fuerzas  $\{F\}$  que actúan sobre el marco, el proceso de cálculo de dicho vector es mediante las tres etapas siguientes:

PRIMERA ETAPA.- Cálculo de las fuerzas de empotramiento, que forman el "Estado 1".

SEGUNDA ETAPA.- Cálculo de las fuerzas de fijación (fuerzas para que las barras no giren ni se desplacen) en los nudos y grados de libertad lineales, que forman el "Estado 2 Relativo"

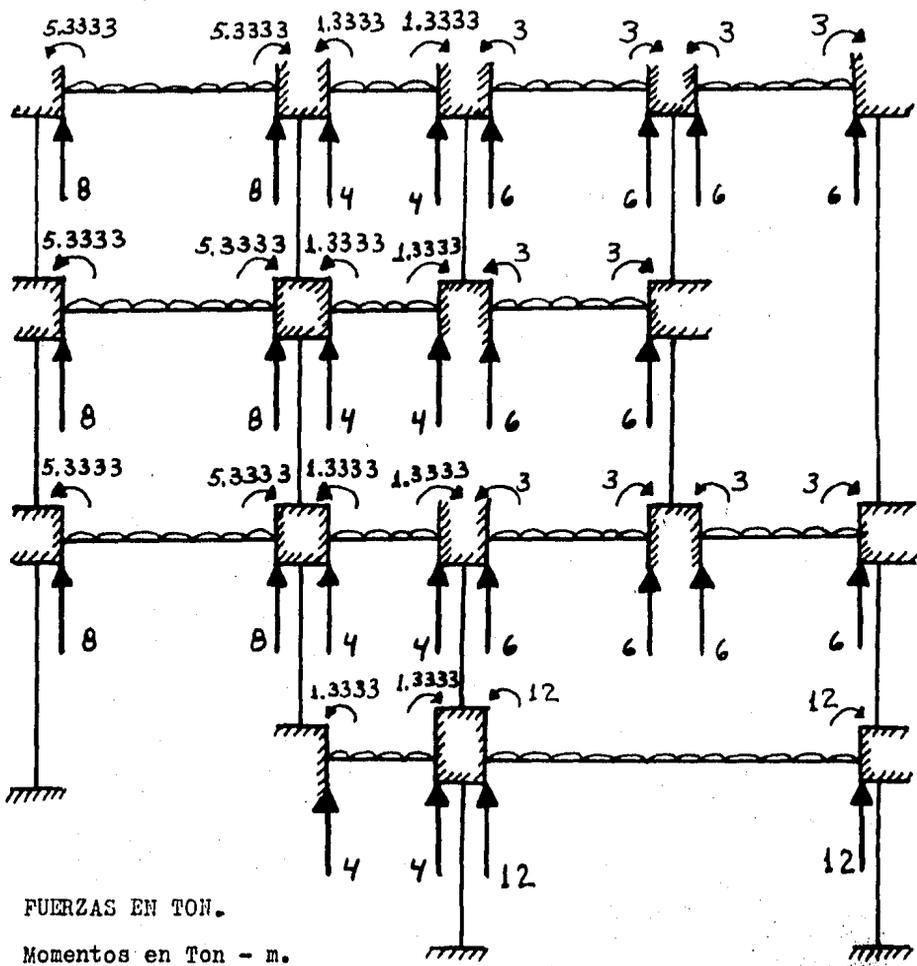
TERCERA ETAPA.- Cálculo de las fuerzas efectivas (fuerzas actuantes), que son de sentido contrario a las fuerzas de fijación. - El marco se resuelve con este vector de fuerzas efectivas  $\{F\}$  afectivas ("Estado 2 Real").

En las figuras IV. 3, IV. 4 y IV. 5 se muestran estas etapas y se dan las matrices - vectores que representan a los Estados "1" y "2 Real".

PRIMERA ETAPA ("Estado 1")

- Fzas. de Empotramiento -

Recordando que en una viga empotrada en ambos extremos con carga uniformemente repartida las reacciones son iguales entre si y la fuerza tiene un valor de  $\frac{wl}{2}$  y los momentos en los empotramientos son de valor  $\frac{wl^2}{12}$ , para una carga lineal  $w$  (Ton/m) de acuerdo a los valores de carga propuestos (CAPITULO - II).



FUERZAS EN TON.

Momentos en Ton - m.

FIGURA IV.3

Los momentos de empotramiento en los extremos de cada barra forman la matriz de fuerzas en el "Estado 1" ( $\{p\}$  ESTADO 1) y es de orden  $(2n_0 \times 1)$ . De acuerdo a las figuras IV. 2 y IV. 3 se tendrá:

	1
7	-1.3333
8	-1.3333
9	-12
10	-12
17	-5.3333
18	-5.3333
19	-1.3333
20	-1.3333
21	-3
22	-3
23	-3
24	-3
33	-5.3333
34	-5.3333
35	-1.3333
36	-1.3333
37	-3
38	-3
47	-5.3333
48	-5.3333
49	-1.3333
50	-1.3333
51	-3
52	-3
53	-3
54	-3

$\{p\}_{ESTADO 1} =$

2  
"VALORES NULOS"



2a. CONDICION DE CARGA  
(FZAS. HORIZONTALES)



1a. CONDICION DE CARGA  
(CARGAS VERTICALES)

SEGUNDA ETAPA

-"Estado 2 Relativo"- (Fzas. de Fijación)

Del "Estado 1" anterior, se deducen las fuerzas que actúan en los nudos y grados de libertad lineales para que las barras no giren y dan lugar al "Estado 2 Relativo".

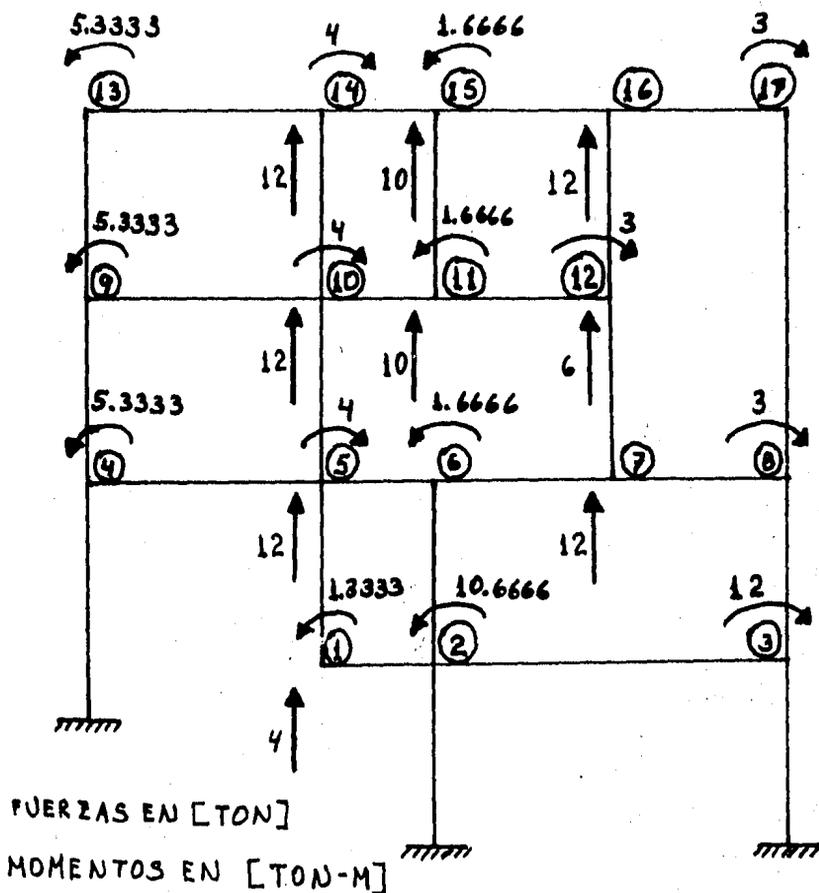


FIGURA IV.4

TERCERA ETAPA

-"Estado 2 Real"- (Fuerzas efectivas)

Tal como se había mencionado, las solicitaciones o fuerzas efectivas para resolver el marco son de sentido contrario a las fuerzas de fijación del "Estado 2 Relativo", por lo tanto, el "Estado 2 Real" será el mostrado en la figura IV. 5

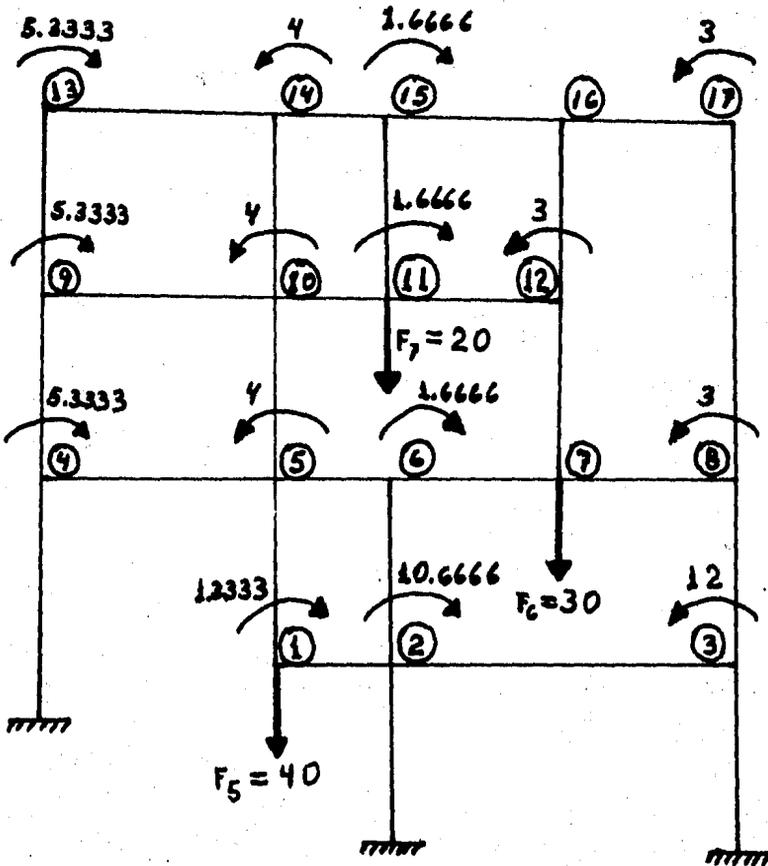


FIGURA IV.5

Recordando nuevamente el criterio de signos, que dice que giro y par externo son positivos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y que desplazamiento y fuerza externa son positivos "hacia la derecha" y "hacia abajo" (figura III. 14), se forma la siguiente matriz de fuerzas efectivas, de orden  $(n_N + n_D \times 1)$ , o sea de orden  $(24 \times 1)$ .

1a. CONDICION  
(CARGAS VERTICALES)

		1
{F} EFFECTIVAS = (24 x 1)	M <sub>1</sub> 1	-1.3333
	M <sub>2</sub> 2	-10.6666
	M <sub>3</sub> 3	12
	M <sub>4</sub> 4	-5.3333
	M <sub>5</sub> 5	4
	M <sub>6</sub> 6	-1.6666
	M <sub>8</sub> 8	3
	M <sub>9</sub> 9	-5.3333
	M <sub>10</sub> 10	4
	M <sub>11</sub> 11	-1.6666
	M <sub>12</sub> 12	3
	M <sub>13</sub> 13	-5.3333
	M <sub>14</sub> 14	4
	M <sub>15</sub> 15	-1.6666
	M <sub>17</sub> 17	3
	F <sub>5</sub> 22	40
	F <sub>6</sub> 23	30
F <sub>7</sub> 24	20	

NOTA : Para el análisis por sismo (sólo fuerzas horizontales) no se tendrían valores en los "Estados" - "1" y "2" Relativo" y el marco se resuelve con - la matriz  $\{F\}$  EFECTIVAS siguiente de acuerdo a las fuerzas propuestas en el CAPITULO II.

2a. CONDICION  
(F2AS. HORIZONTALES)

$$\begin{array}{l}
 \{F\} \\
 \text{EFECTIVAS} \\
 \text{POR SISMO} \\
 (24 \times 1)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 F_1 \ 18 \\
 F_2 \ 19 \\
 F_3 \ 20 \\
 F_4 \ 21
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 2 \\
 \left[ \begin{array}{l} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \end{array} \right]
 \end{array}$$

## RESUMEN

Se había encontrado que:

$$\{e\} = [a] \{d\} \quad \text{----- (a)}$$

$$\{p\} = [k] \{e\} \quad \text{----- (b)}$$

$$\{F\} = [a^T] \{p\} \quad \text{----- (c)}$$

Sustituyendo (a) en (b)

$$\{p\} = [k][a] \{d\} \quad \text{----- (d)}$$

Sustituyendo (d) en (c)

$$\{F\} = [a^T][k][a] \{d\} \quad \text{----- (e)}$$

Si  $[a^T][k][a] = [R]$ ,  $\therefore$

$$\{F\} = [R] \{d\} \quad \text{---- (e')}$$

donde  $[R]$  es la matriz que nos relaciona fuerzas externas con desplazamientos y giros, y se llama Matriz de Rigidez Total del Marco.

De la "ecuación matricial" (e'), se despeja  $\{d\}$  y se obtienen los valores de  $\{d\}$ , o sea

$$[R^{-1}] \{F\} = \{d\} \quad \text{----- (f)}$$

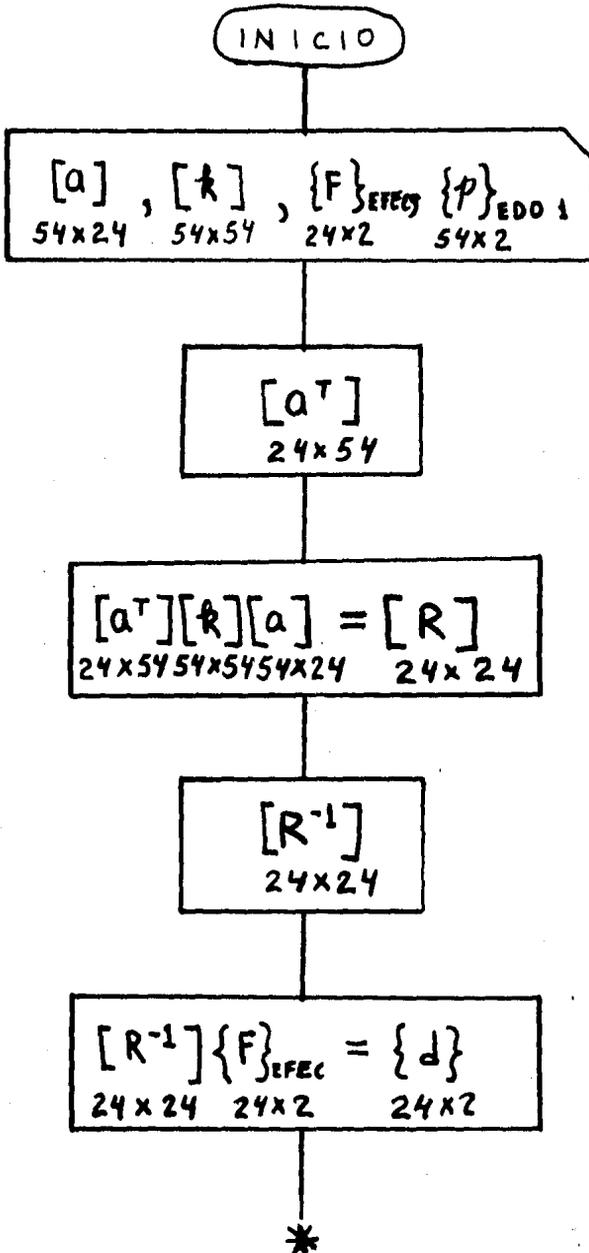
Sustituyendo los valores de  $\{d\}$  en (a) se encuentran los de  $\{e\}$ , y con estos valores se obtendrán al sustituirlos en (b) los momentos que forman la matriz  $\{p\}$ .

Al resolver con la matriz de fuerzas  $\{F\}$  EFECTIVAS, los momentos internos resultantes serán  $\{p\}$  EFECTIVOS y para obtener los momentos finales (o totales), se suman los "efectivos" con los de "empotramiento" del "Estado 1"; dicha matriz de momentos finales se denominará  $\{p\}$  FINALES.

N O T A : Para emplear una sola "corrida" del programa, se pueden conjuntar en una sola matriz las dos condiciones para las fuerzas de análisis, la matriz de fuerzas por carga vertical y la matriz de fuerzas por sismo, dando una matriz de fuerzas efectivas  $\{F\}$  EFEC de orden (24 X 2); teniendo en cuenta, desde luego que la matriz de fuerzas en el -- "Estado 1" para el análisis por sismo es nula, -- quedando dicha matriz  $\{p\}$  EDO 1 de orden (54 X 2) así, los valores por sismo en la segunda columna -- serán nulos.

IV.4) - DESARROLLO DEL PROGRAMA -

El diagrama de flujo del programa podría establecerse de la siguiente forma:



\*

$$\begin{array}{l} [a] \{d\} = \{e\} \\ 54 \times 24 \quad 24 \times 2 \quad 54 \times 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} [R] \{e\} = \{P\}_{EFEC} \\ 54 \times 54 \quad 54 \times 2 \quad 54 \times 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \{P\}_{EFEC} + \{P\}_{EDD1} = \{P\}_{FINAL} \\ 54 \times 2 \quad 54 \times 2 \quad 54 \times 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \{P\}_{FINAL} \\ 54 \times 2 \end{array}$$

FIN

" SIMBOLOGIA Y REPRESENTACION "

En el programa se usarán los siguientes nombres para las matrices usadas.

MATRIZ	ORDEN	NOMBRE
de Continuidad, $[a]$	54 X 24	CONTIN
de Rigideces, $[k]$	54 X 54	MRIGID
de Fzas. Efectivas, $\{F\}_{EFEC}$	24 X 2	FZASEF
de Momentos (Estado I), $\{P\}_{EDO 1}$	54 X 2	ESTAD1
transpuesta de Continuidad $[a^T]$	24 X 54	TRANSP
producto de $[a^T][k]$	24 X 54	TRANXR
de Rigidez total, $[R]$	24 X 24	RTOTAL
inversa de $[R]$ , $[R^{-1}]$	24 X 24	RINVER
de Desplazamientos, $\{d\}$	24 X 2	DESPLA
de Deformaciones, $\{e\}$	54 X 2	DEFORM
de Momentos efectivos, $\{P\}_{EFEC}$	54 X 2	MOMEFE
de Momentos finales $\{P\}_{FINAL}$	54 X 2	MOMFIN

#### IV. 5 ) - P A Q U E T E " C E C A F I / M A T R I C E S / 2 "

##### a) Descripción del paquete.

El paquete "CECAFI/MATRICES/2" es una versión actualizada del paquete "CECAFI/MATRICES", su precedente; ambos fueron desarrollados en el Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería de la U N A M para apoyo de las materias de Análisis Matricial de Estructuras y de Circuitos, pero puede usarse en otras ramas de la Ingeniería y en todo tema que implique el uso de matrices.

El paquete está clasificado actualmente en la biblioteca de computadora BURROUGHS B- 6700 del Programa Universitario de Cómputo (P U C). La información para el uso del paquete es por tarjetas perforadas o por terminal y los resultados se dan por la impresora de papel y también por terminal.

El programa del paquete "CECAFI/MATRICES/2" está formado por una serie de instrucciones que identifican las operaciones que se hacen; el programa se efectúa en el orden de las instrucciones --leídas y en el listado de resultados se escribe una copia de cada instrucción. Si una instrucción origina un error, éste es indicado y la corrida abortada, listando las tarjetas que no fueron procesadas.

El paquete consta de: Ordenes por ejecutar, Nombres de las matrices y Datos numéricos; el número máximo de caracteres de una orden o instrucción es 6; la longitud máxima de los parámetros numéricos es 18 caracteres que pueden formarse con cifras 0 a 9, la letra E (que indica " por 10 a la... "), los signos "+", "- " y el punto decimal " .". Las matrices pueden clasificarse propor--

cionando los elementos de la matriz en forma directa o por medio de una instrucción que genere a dicha matriz.

El número máximo de matrices que se pueden tener clasificadas a la vez es 200, siempre que la suma de todos los elementos no sea mayor de 40 000. Los nombres de las matrices se forman de hasta 6 caracteres alfanuméricos ( el primero alfabético).

La separación entre los parámetros es con un espacio en blanco (por lo menos) o con una coma (por lo menos), llamados -separadores. Cuando un parámetro ocupe el número máximo de caracteres, no es necesario que entre ese parámetro y el siguiente haya separador, igual sucede cuando dos parámetros inmediatos son, el primero numérico y el segundo alfabético.

El fin con una serie de datos es con uno o más asteriscos o con la presencia de la siguiente instrucción(los asteriscos - pueden o no ser precedidos por separadores). Los datos o parámetros que ocupen más de una tarjeta deberán estar completos, o sea es error proporcionar un parámetro o dato en las últimas columnas de una tarjeta y parte en las primeras de la siguiente.

#### b) Instrucciones.

El programa reconoce 42 instrucciones, algunas de las cuales son:

INSTRUCCION	SIGNIFICADO
LEE	Lee matriz real
LEEC	Lee matriz compleja
LEELEM	Lee matriz real por elementos

LEELEC	Lee matriz compleja por elementos
LEESIM	Lee matriz simétrica real
LEESIC	Lee matriz simétrica compleja
IMP	Imprime matriz
IMPHN	Igual que IMP y previo salta 6 renglones
NOTA	Imprime notas y comentarios
TIEMPO	Imprime tiempos de ejecución
TRAS	Traspone matriz
SIM	Simetriza matriz
DUPLICA	Duplica matriz
MULTES	Multiplica matriz por escalar real
MULTEC	Multiplica matriz por escalar complejo
INVELS	Obtiene inversos de los elementos de una matriz
MULT	Multiplica matrices
SUMA	Suma matrices
RESTA	Resta matrices
INV	Invierte matriz
QUITA	Desclasifica matriz
INICIA	Inicia nueva corrida

c) Ejemplos.

- i) Se quiere clasificar la matriz "A" de nombre "MAR", de orden "N1" por "N2".

$$M A R = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 4 \times 10^5 \\ 0 & 1.5 & -0.19 \end{bmatrix}$$

Se emplea la instrucción LEE, que lee por renglones los elementos de la matriz "A" de "N1" renglones por "N2" columnas.

Se podría usar la siguiente tarjeta:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35...  
 LEE MAR 2, 3 3 -8 4 5 0 1.5 -0.19\*

ii) Se tiene previamente clasificada la matriz NUM2 y se quiere calcular su transpuesta.

La instrucción TRAS clasifica la matriz "A" como la transpuesta de la matriz "B". Si se quiere transponer la matriz NUM2 en una nueva matriz llamada SISTEM, se lograría así:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20...  
 TRAS SISTEM NUM2

iii) Se quiere imprimir la matriz FZA, clasificada como:

$$FZA = \begin{bmatrix} 2.36 & -21 \\ 34 & 10^{-3} \end{bmatrix}$$

La instrucción IMP imprime la matriz FZA usando "N1" cifras significativas y con encabezado de las siguientes "N2" tarjetas. Si se quiere en la precisión de la matriz FZA 4 cifras significativas de sus elementos, se usarán las siguientes tarjetas:



IV.6)-REGISTRO DE RESULTADOS -

La matriz " MOMFIN" da los momentos en los extremos (A) y (B) de cada barra. Se obtiene: momento en (A), barra [1] (MA1); momento en (B), barra [1] (MB1); momento en (A), barra [2] (MA2); momento en (B), barra [2] (MB2); etcétera.

INICIO DE CORRIDA \*\*CECAFI/MATRICES\*\*

*LEELEM*CONTIN*	RENGLONES	54,	COLUMNAS	24.
*LEELEM*MRIGID*	RENGLONES	54,	COLUMNAS	54.
*LEELEM*FZASEF*	RENGLONES	24,	COLUMNAS	2.
*LEELEM*ESTAD1*	RENGLONES	54,	COLUMNAS	2.
*TRAS *TRANSP*CONTIN*				
*MULT *TRANXR*TRANSP*MRIGID*				
*MULT *RTOTAL*TRANXR*CONTIN*				
*INV *RINVER*RTOTAL*				
*MULT *DESFLA*RINVER*FZASEF*				
*MULT *DEFORM*CONTIN*DESPLA*				
*MULT *MOMEFE*MRIGID*DEFORM*				
*SUMA *MOMFIN*MOMEFE*ESTAD1*				
*IMP *MOMFIN*	RENGLONES.	54,	COLUMNAS	2.

MATRIZ DE MOMENTOS FINALES

PRIMERA COLUMNA: ANALISIS POR CARGAS VERTICALES.  
 SEGUNDA COLUMNA: ANALISIS POR SISMO DERECHO.  
 -UNIDADES EN TONELADAS-METROS-

	1	2
MA1 1	1.14122E+01	-4.24770E+01
MB1 2	-1.24046E+01	-2.83781E+01
MA2 3	-2.16796E+00	-3.43197E+01
MB2 4	6.82275E+00	1.97598E+01
MA3 5	-2.12897E+00	-3.05562E+01
MB3 6	6.74476E+00	1.22327E+01
MA4 7	1.20080E+01	-1.53220E+01
MB4 8	-2.11663E+01	-1.73849E+01

MA5 9	-1.66418E+01	-1.58145E+01
MA5 10	-7.37120E+00	-1.70690E+01
MA6 11	-1.20080E+01	-1.53220E+01
MA6 12	6.61211E+00	-1.64458E+01
MA7 13	2.29810E+00	-1.34306E+01
MA7 14	-2.52506E+00	-1.88697E+01
MA8 15	-6.26440E+01	-4.83626E+00
MA8 16	3.44101E+00	-1.29535E+01
MA7 17	-1.69577E+01	-3.05431E+01
MA9 18	9.82796E+00	-2.68305E+01
MA10 19	2.30268E+01	-7.64450E+00
MA10 20	-2.70162E+01	-5.41109E+00
MA11 21	-2.95413E+01	-1.34686E+01
MA11 22	1.94086E+01	-1.05253E+01
MA12 23	1.62261E+01	-1.49386E+01
MA12 24	-1.60920E+01	-1.28599E+01
MA13 25	4.55307E+00	-2.16493E+00
MA13 26	-5.55161E+00	-1.28055E+01
MA14 27	-6.58677E+00	-1.80293E+01
MA14 28	-4.49314E+00	-2.22588E+01
MA15 29	3.18232E+00	-2.54638E+01
MA15 30	-1.46606E+00	-1.71528E+01
MA16 31	-1.26510E+01	-5.64592E+00
MA16 32	-1.26755E+01	-8.62921E+00
MA17 33	-1.04192E+01	-1.77877E+01
MA17 34	-1.75122E+00	-1.72807E+01
MA18 35	-1.41745E+01	-1.12840E+01
MA18 36	6.92272E+00	-3.45173E+00
MA19 37	3.28617E+00	-6.94715E+00
MA19 38	-7.18965E+00	-1.53970E+01
MA20 39	4.86760E+00	-4.98222E+00
MA20 40	-8.28031E+00	-1.04482E+01
MA21 41	-7.93016E+00	-6.70582E+00
MA21 42	-5.38253E+00	-1.00530E+01
MA22 43	-3.63645E+00	-1.03991E+01
MA22 44	-3.18405E+00	-3.85876E+00
MA23 45	-8.65571E+00	-3.75486E+00
MA23 46	1.19660E+01	-7.37839E+00
MA24 47	-8.28031E+00	-1.04482E+01
MA24 48	-9.09940E+01	-1.08005E+01
MA25 49	-6.29247E+00	-7.47448E+01
MA25 50	3.66029E+00	-2.74648E+00
MA26 51	6.76135E+01	4.11227E+00
MA27 52	-2.47438E+00	-6.47119E+01
MA27 53	9.49150E+00	-6.93127E+00
MA27 54	-1.26755E+01	-8.62921E+00

\*TIEMPO\*

TIEMPO DE PROCESADOR 8.13 SEGUNDOS. TIEMPO DE E/S 0.78 SEG

FIN DE CORRIDA \*\*CEGAFI/MATRICES\*\*

TIEMPO TOTAL DE PROCESADOR 8.13 SEGUNDOS. TIEMPO TOTAL DE E/S

#### IV.7) - DIAGRAMAS FINALES -

##### a) 1a. CONDICION DE CARGA: CARGAS VERTICALES.

Los resultados obtenidos en las hojas de impresión de la computadora dan los momentos en los extremos de cada barra, para obtener los diagramas finales de cada barra es necesario superponer el diagrama isostático de cada una de ellas con el diagrama de los resultados del análisis hiperestático (los resultados del análisis hiperestático son los resultados del análisis por computadora, punto 6 de este capítulo: "REGISTRO DE RESULTADOS").

Se sabe que en una viga isostática con carga uniformemente repartida ( $\omega$ ), el momento máximo aparece en el centro del claro y es de valor  $M_{m\acute{a}x. (+)} = \frac{\omega l^2}{8}$ .

Tomando los datos que se presentan en el capítulo II, "ESTRUCTURA PROPUESTA", para las vigas de igual longitud se tendrá:

1) vigas de longitud  $l = 4$  mts.

$$M_{m\acute{a}x (+)} = \frac{\omega l^2}{8} = \frac{4(4)^2}{8} = 8 \text{ Ton-m}$$

2) vigas de longitud  $l = 2$  mts.

$$M_{m\acute{a}x (+)} = \frac{\omega l^2}{8} = \frac{4(2)^2}{8} = 2 \text{ Ton-m}$$

3) vigas de longitud  $l = 3$  mts.

$$M_{m\acute{a}x (+)} = \frac{\omega l^2}{8} = \frac{4(3)^2}{8} = 4.5 \text{ Ton-m}$$

4) viga de longitud  $l = 6$  mts.

$$M_{m\acute{a}x (+)} = \frac{\omega l^2}{8} = \frac{4(6)^2}{8} = 18 \text{ Ton-m}$$

Con la identificación que se plantea en la figura IV. 2, - se tendrían los siguientes diagramas de momento flexionante para la la. condición de carga (por cargas gravitacionales o verticales), figura IV. 6

MOMENTO FLEXIONANTE (M) [Ton - m]  
 (Por cargas verticales)

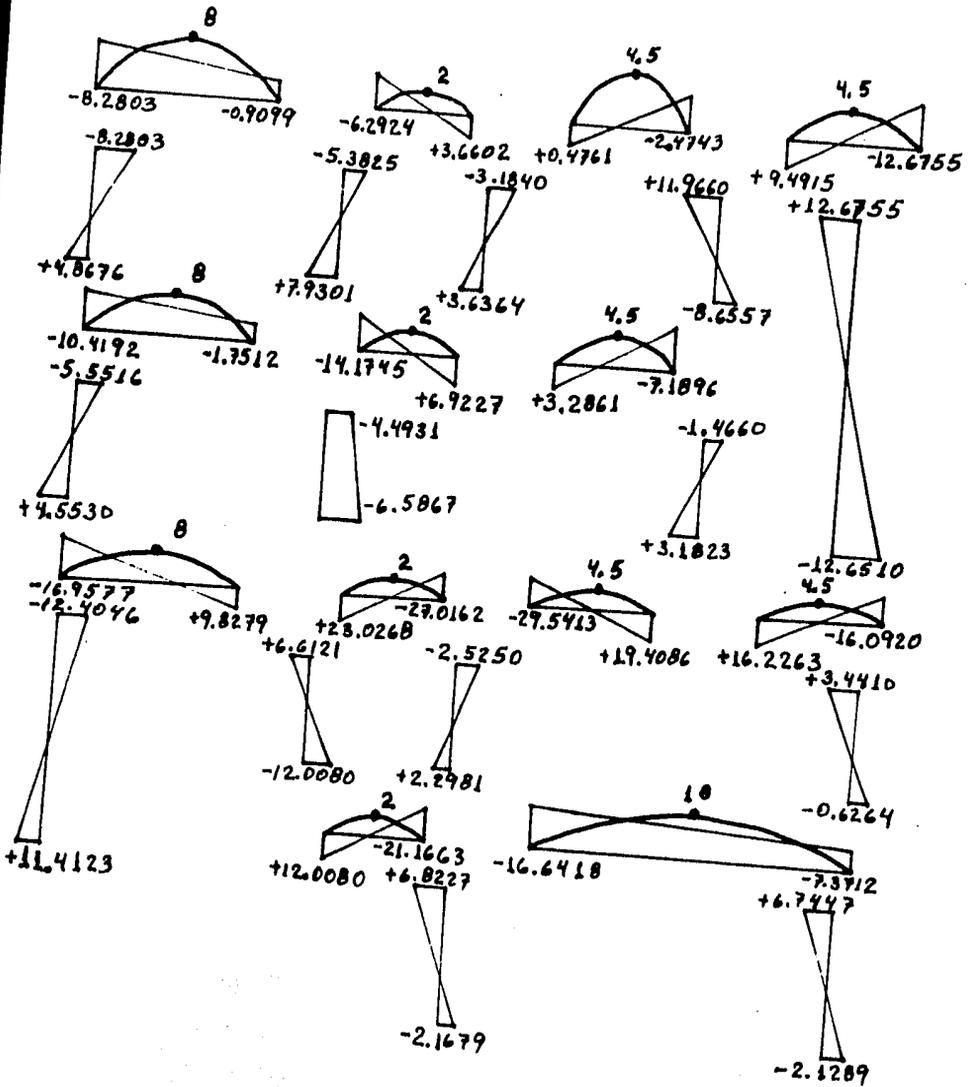


FIGURA IV.6

## Fuerzas Cortantes

Para el cálculo de las fuerzas cortantes de cada elemento, se sabe que el cortante depende de los momentos en los extremos, pudiéndose calcular con la expresión  $V = \frac{M_B - M_A}{L}$ . El diagrama total de cortante es el resultado de la superposición del cortante calculado con la expresión anterior con el diagrama de cortante isostático.

Por ejemplo, el diagrama de cortante para la trabe identificada con el número 24 es:

De la figura IV. 6 es obvio que

$$M_A = -8.2803 \quad \text{y} \quad M_B = -0.9099,$$

$$\therefore V_{24} = \frac{-0.9099 - (-8.2803)}{4} = +1.8426 \text{ Ton.}$$

Conclusión

$V = +1.8426 \text{ Ton.}$  es el cortante que resulta de los pares aplicados en los extremos (A) y (B) de la viga [24], dicho valor se superpone al diagrama que resulta de dicha trabe que presenta un cortante de 8 Ton. en el extremo (A), valor que disminuye linealmente hasta el valor de -8 en el extremo (B). Los resultados de la superposición de diagramas de cortante del elemento [24] y de todos los demás se presentan en la figura IV. 7.

FUERZA CORTANTE (V) [Ton]  
 (Por cargas verticales)

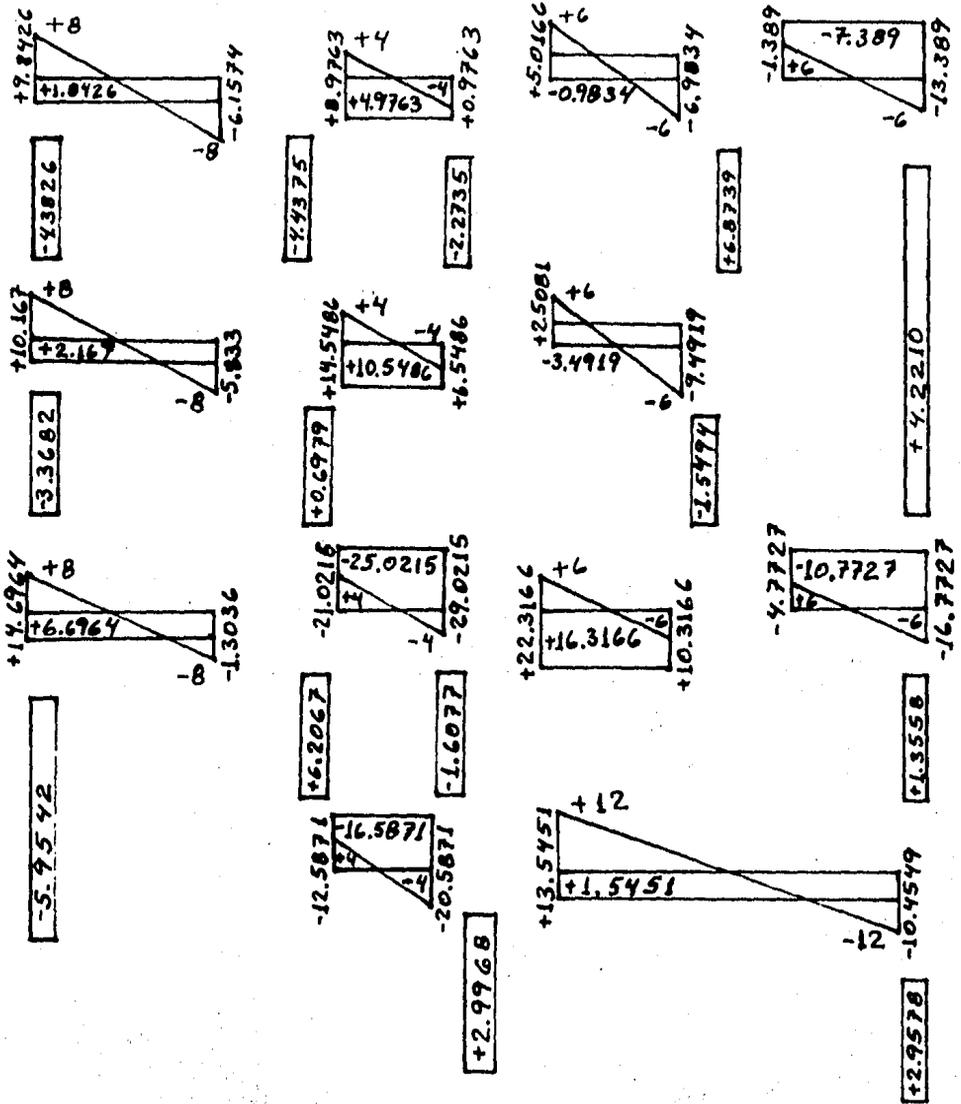


FIGURA IV.7

b) 2a. CONDICION DE CARGA: SISMO DERECHO

En esta condición sólo se presentan cargas horizontales, - por lo tanto se supone que no hay cargas en las barras y entonces los diagramas isostáticos de cada elemento serían nulos.

Los valores de los momentos en los extremos que se obtienen en el registro de resultados (2a. columna) se vacian directamente para formar los diagramas de momento flexionante. En la figura IV.8 se muestran diagramas para sismo derecho, para efectos de sismo izquierdo se obtendrían los mismos valores pero de signo contrario.

Con los valores marcados en la figura IV.8 se aplica la expresión  $V = \frac{M_B - M_A}{L}$  para el cálculo de los valores de los cortantes de cada barra, y como el diagrama isostático de cada barra es nulo también, los diagramas totales de cortantes son los que resultan de la aplicación de dicha expresión; se obtienen los diagramas de fuerza cortante para sismo derecho indicados en la figura IV.9, para efectos de sismo izquierdo, se obtienen los mismo valores pero de signo contrario.

MOMENTO FLEXIONANTE (M) [Ton - m]  
 (Por sismo derecho)

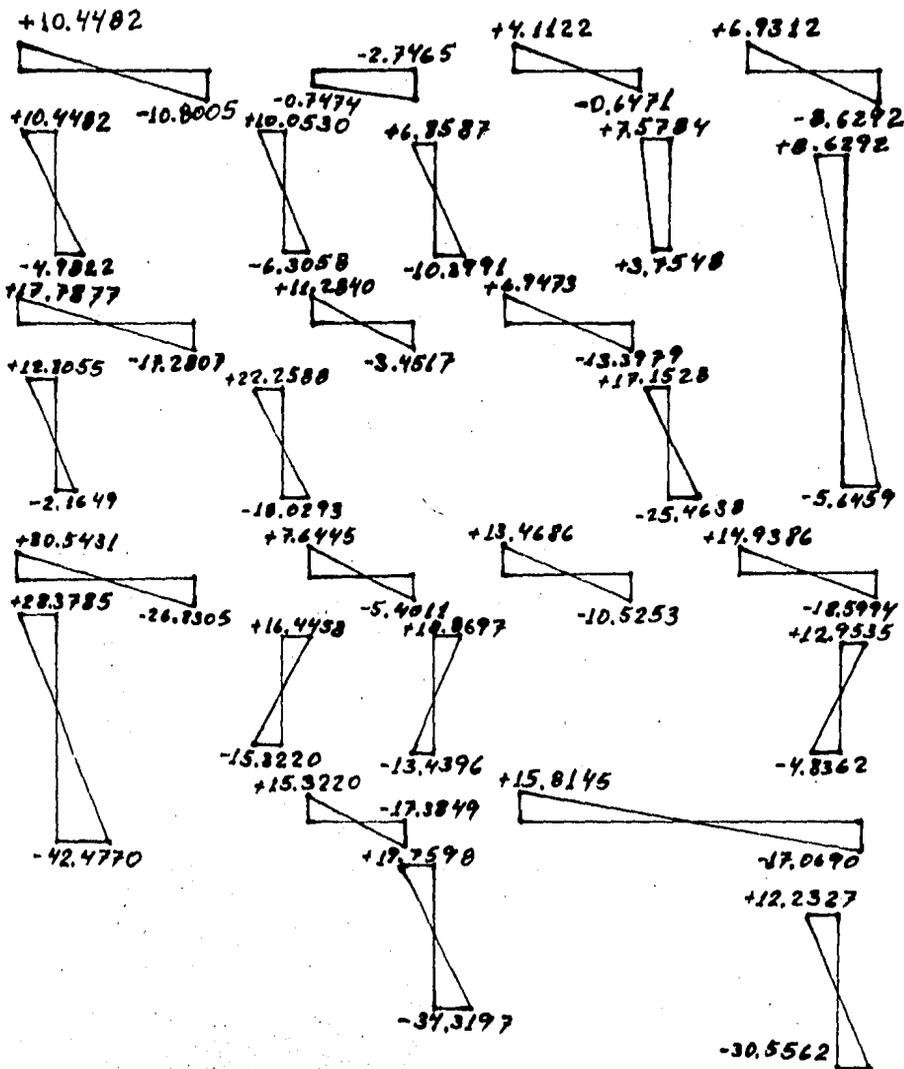


FIGURA IV.8

FUERZA CORTANTE (V) [ Ton ]

(Por sismo derecho)

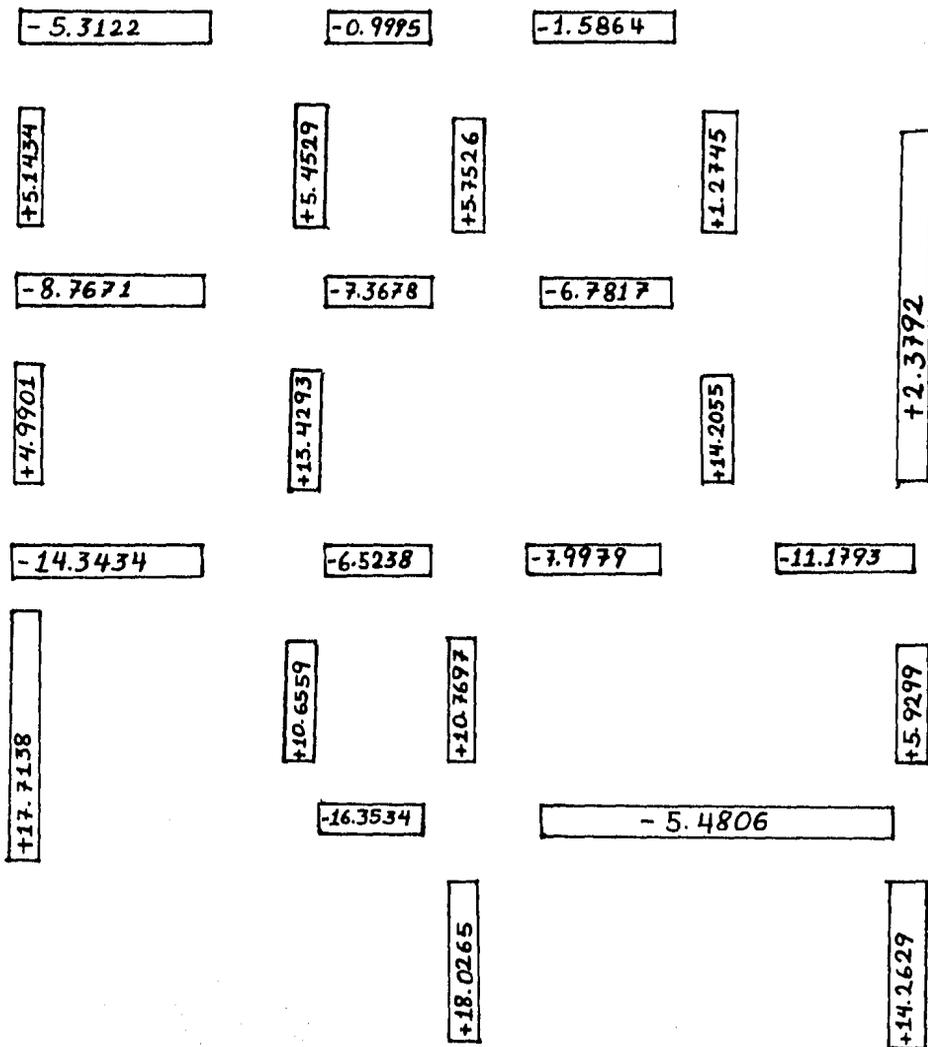


FIGURA IV.9

FUERZA CORTANTE  $\text{\textcircled{V}}$  [ Ton ]  
 (Por sismo derecho)

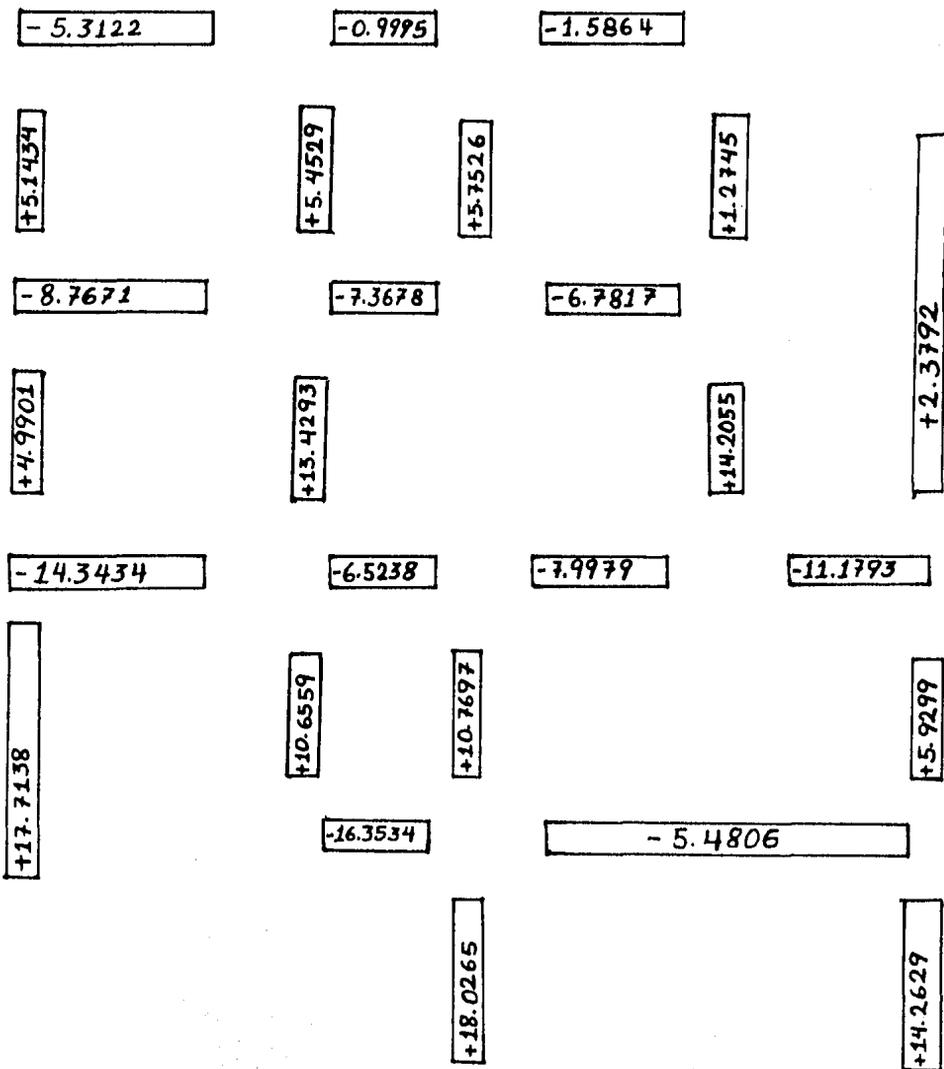


FIGURA IV.9

## V. DISEÑO DEL MARCO

El diseño de la estructura propuesta se hará en base a las normas del A C I , para lo cual se desarrollarán los siguientes puntos, que son los pasos importantes en un proyecto de ésta naturaleza, se conocen los diagramas de los elementos mecánicos - necesarios (momento flexionante y fuerza cortante).

### V.1) -ELEMENTOS PRINCIPALES-

Este punto es de vital importancia en cualquier proyecto estructural, ya que es aquí donde se toman decisiones que influirán en el proceso de diseño y construcción de la estructura y desde luego en su vida útil; lo primero será la elección de los elementos principales de la estructura, que generalmente son los que presentan el estado mecánico más desfavorable, con esto se podría llegar a un diseño similar para todos los elementos parecidos o se podría establecer un diseño para cada elemento en forma totalmente individual.

En forma por demás arbitraria, pero considerando los comentarios anteriores, se eligen como elementos principales la columna identificada con el número **1** y la trabe con el número **5** (figura IV. 2) que son de los elementos más representativos de la estructura.

## V.2) -ENVOLVENTES TOTALES-

Para realizar el diseño final de la estructura, se requiere saber de los momentos y cortantes que actúan por cargas verticales o gravitacionales (CM + CV) simultáneamente con la acción del sismo, ello se logra calculando las envolventes totales de los elementos escogidos para el diseño.

Se tomará un factor de carga de 1.4 para cargas gravitacionales únicas y de 1.1 para las envolventes finales (superposición de cargas gravitacionales más sismo derecho e izquierdo) y se tomará para efectos del diseño los resultados más desfavorables.

### a) Diagramas de Trabe

Los diagramas de la trabe identificada con el número [5] son los mostrados en las figuras V.1 y V.2

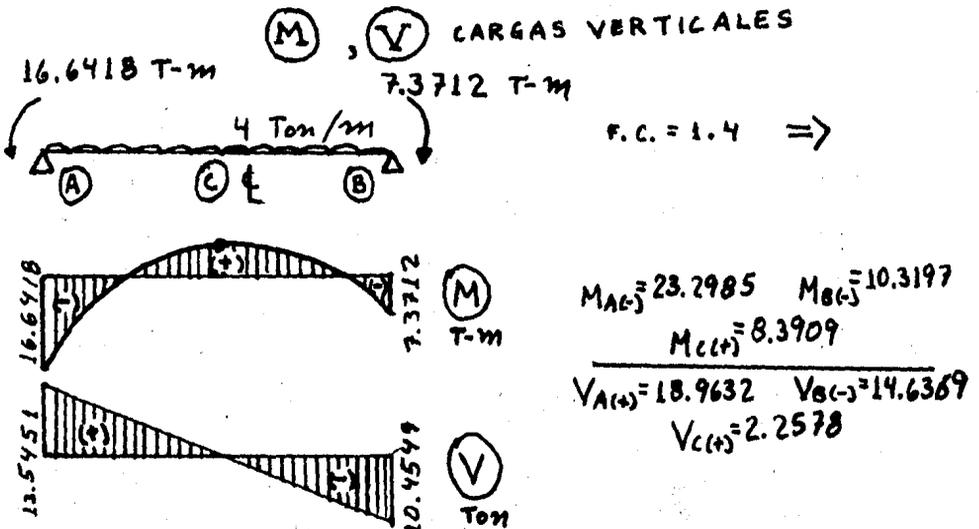


FIGURA V.1

Como existe alternancia de cargas sísmicas, los diagramas de la trabe para sismo izquierdo serán los mismos que los establecidos para sismo derecho, sólo que de sentido contrario (lo que implica cambio de signo en los valores de M y V).

(M) , (V)  
SISMO DERECHO

(M) , (V)  
SISMO IZQUIERDO

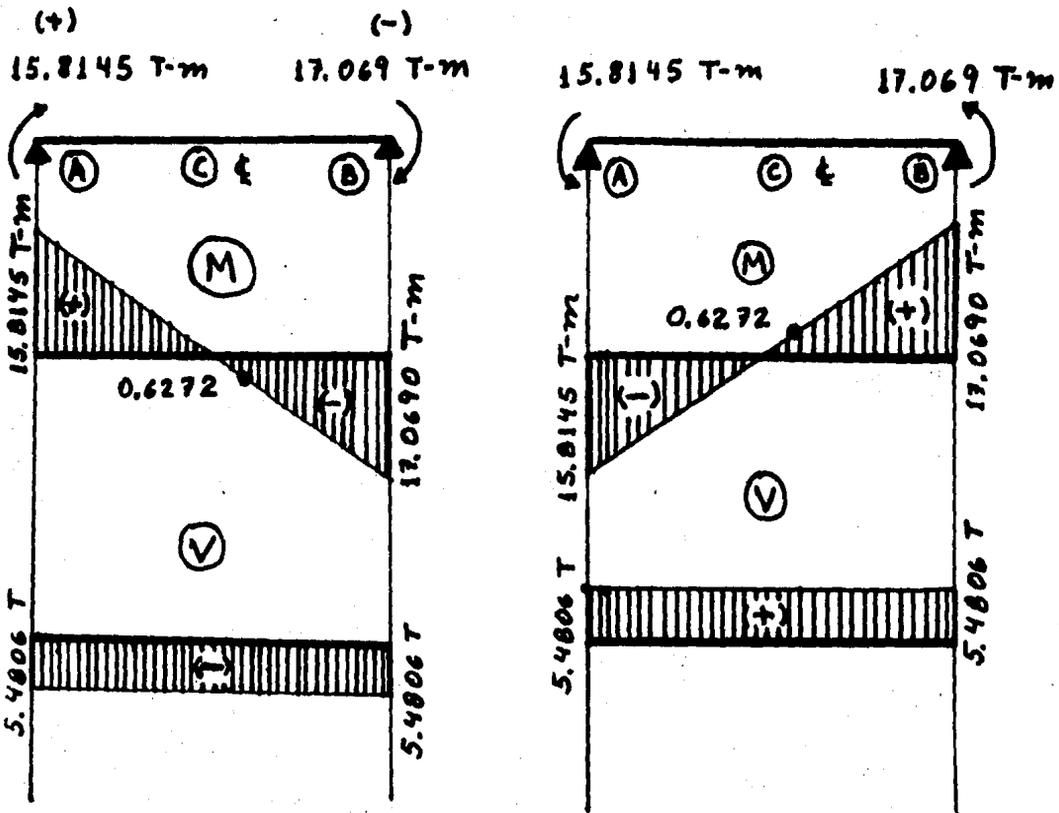


FIGURA V.2

Diagramas finales:

Al superponer los diagramas de cargas verticales y sismo y afectarlos del factor de carga F.C. = 1.1, se obtienen los diagramas finales para la trabe. Momento flexionante, figura V.3, Fuerza cortante, figura V.4

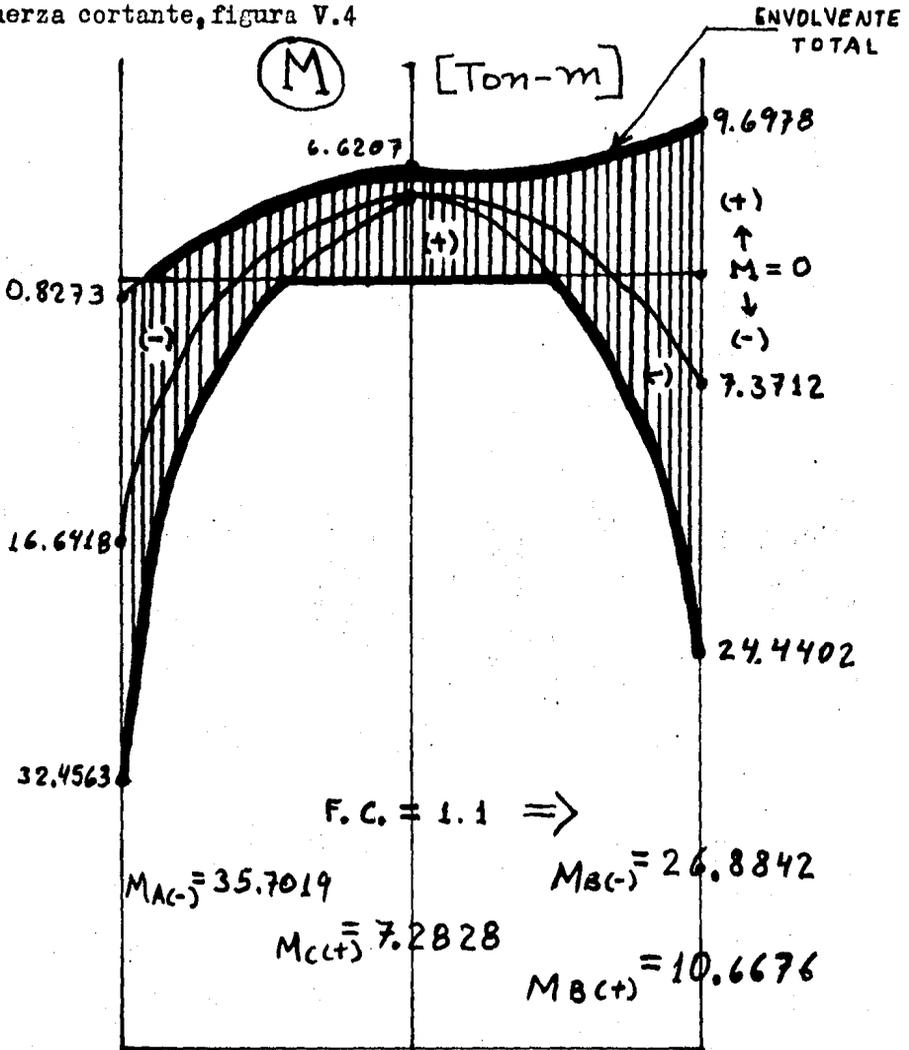


FIGURA V.3

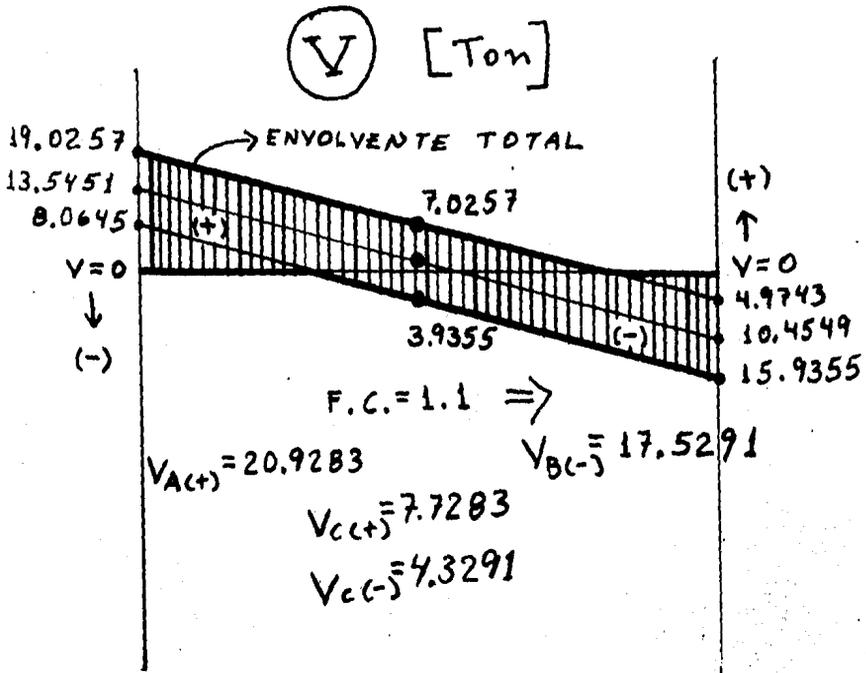


FIGURA V.4

Datos de diseño:

Tomando la situación más desfavorable, se tendrá finalmente como datos de diseño real lo siguiente:

(M)  
T-m

$M_{A(-)} = 35.7019$      $M_{C(+)} = 8.3909$      $M_{B(-)} = 26.8842$   
 $M_{B(+)} = 10.6676$

(V)  
Ton

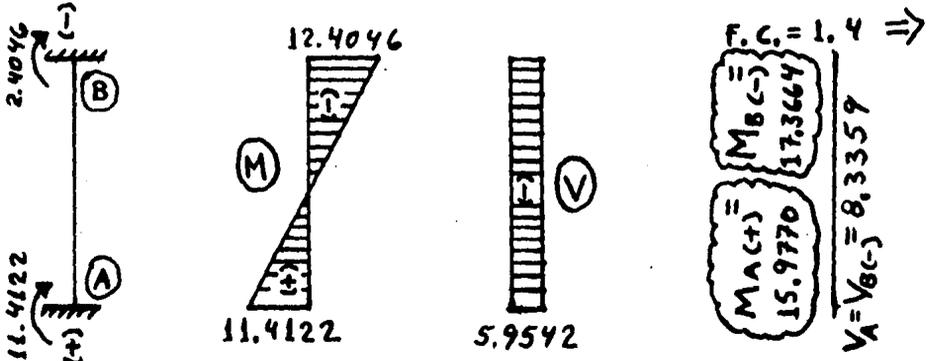
$V_{A(+)} = 20.9283$      $V_{C(+)} = 7.7283$      $V_{B(-)} = 17.5291$   
 $V_{C(-)} = 4.3291$

"DATOS DE DISEÑO DE LA TRABE"

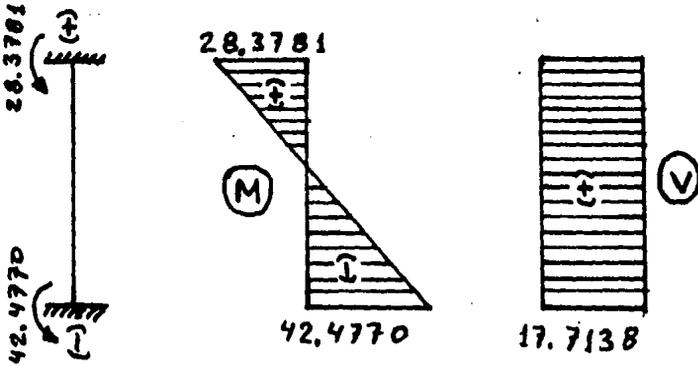
b) Diagramas de Columna

Los diagramas del elemento identificado con el número 1 son los siguientes:

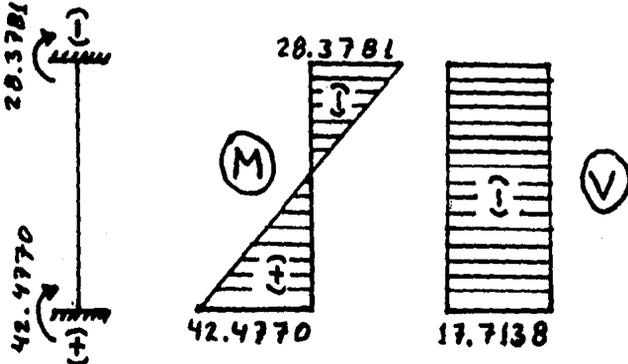
CARGAS VERTICALES



SISMO DERECHO



SISMO IZQUIERDO



$M \rightarrow [\text{Ton-m}]$   
 $V \rightarrow [\text{Ton}]$

FIGURA V.5

## ANÁLISIS DE FUERZAS NORMALES

Por ser de interés primordial las fuerzas que obran en la columna identificada con el número **[1]**, se efectúa sólo el análisis de fuerzas normales en la sección de la estructura que influye directamente en la columna elegida.

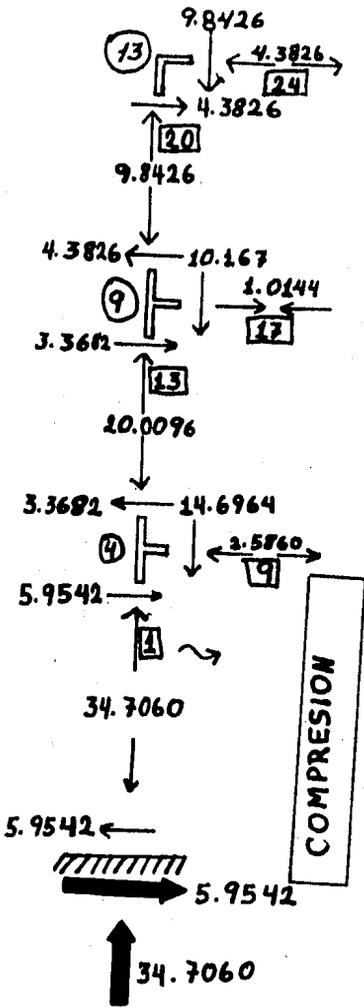
Con base en los diagramas de fuerzas cortantes obtenidas en la figuras IV.7 (por cargas verticales) y IV.9 (por sismo de recho), la trabe número **[24]** descarga en el nudo **(13)** con un cortante positivo ( $\uparrow \downarrow$ ) de 9.8426 Toneladas, lo que implica una fuerza hacia abajo de 9.8426 Ton.; el nudo **(13)** forma un sistema en equilibrio, por estática la columna **[20]** responde con una fuerza hacia arriba de la misma magnitud; por actuar a compresión, la columna **[20]** proyecta una fuerza hacia abajo de 9.8426 Ton. sobre el nudo **(9)**. El nudo **(9)** forma un sistema en equilibrio con 2 fuerzas hacia abajo, que son la aplicada por la columna **[20]** y la descargada por el cortante positivo de la trabe número **[17]** (10.167 Ton.), fuerzas que deben ser equilibradas con la reacción que presenta la columna **[13]** con una fuerza de compresión de  $9.8426 + 10.167 = 20.0096$  Ton.

En el nudo **(4)** se tendría en consecuencia un sistema en equilibrio con 2 fuerzas hacia abajo, una de ellas, la aplicada por la columna **[13]** y la otra por la descarga del cortante positivo de la trabe **[9]** (14.6964 Ton.), fuerzas que tienen que ser equilibradas con la reacción que presenta la columna número **[1]** en forma de compresión con un valor de  $20.0096 + 14.6964 = 34.7060$  Ton. sobre el nudo **(4)** y sobre el empotramiento que fox

ma en el sistema de piso, o sea, sobre el suelo (situación que implica el diseño de una cimentación adecuada que no se analiza en el presente trabajo). Se tendría entonces, una reacción sobre la columna, de 34.7060 Ton., ya que el empotramiento también forma un sistema en equilibrio.

En conclusión, la columna [1] actúa con una fuerza de ----- 34.7060 Ton. a compresión. Un análisis similar se hace para el caso de sismo derecho, los resultados se marcan en las figuras V.6 y V.7.

ANALISIS DE FUERZAS NORMALES (COLUMNA No. 1)



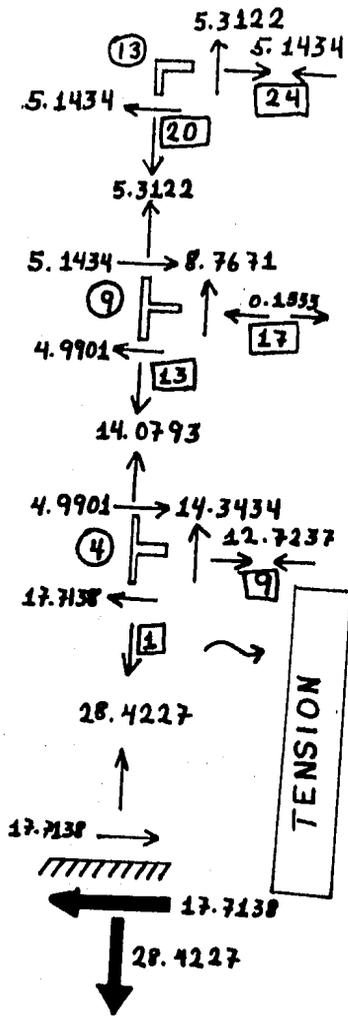
CARGAS VERTICALES

COLUMNA 1:  $F_{COMP} = 34.7060$

F.C. = 1.4,  $\Rightarrow F_{COMP} = 48.5884$

[Ton]

FIGURA V.6



SISMO DERECHO

$F_{TENSION} = 28.4227$ , F.C. = 1.4  $\Rightarrow$

$F_{TENSION} = F_{COMP} = 28.4227$

[Ton]

FIGURA V.7

Diagramas finales:

Realizando nuevamente la superposición de diagramas como en el caso de la trabe y afectando del factor de carga F.C. = 1.1, - se obtienen los diagramas mostrados (figura V.8).

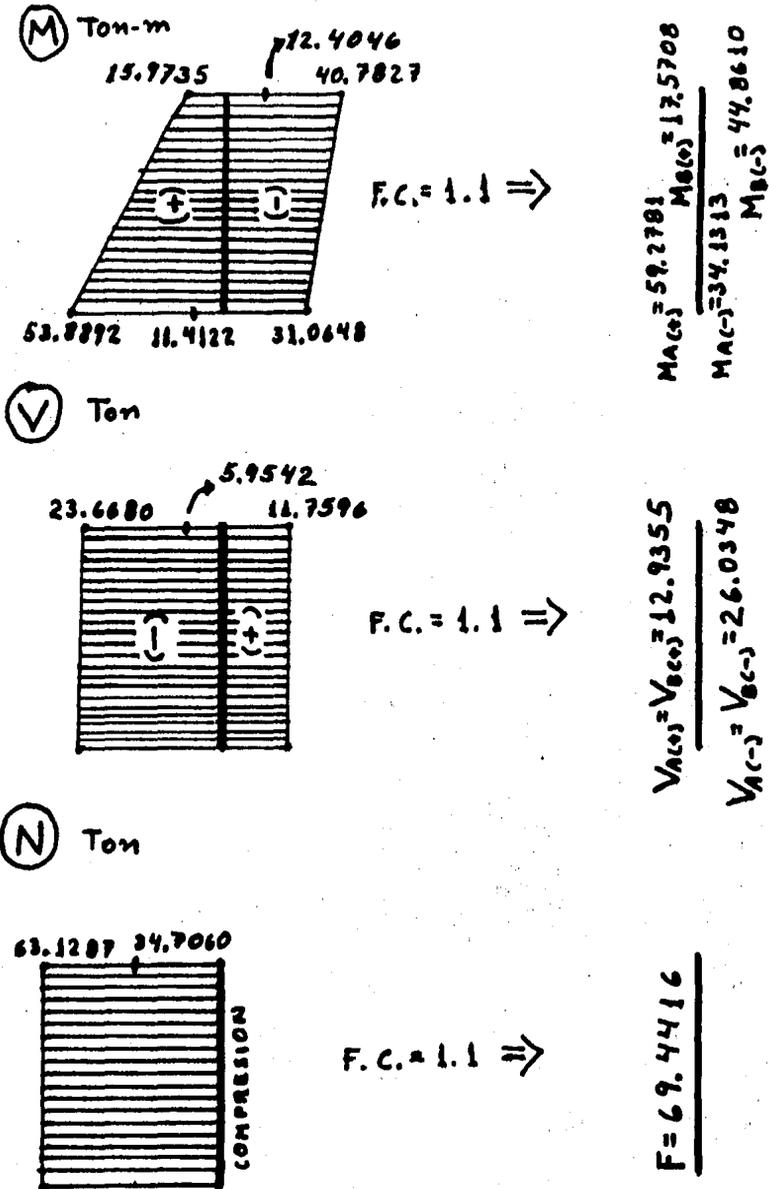


FIGURA V.8

Datos de-diseño:

Con los datos obtenidos de los diagramas y tomando los más desfavorables, obtenemos como datos de diseño real lo siguiente:

$$\begin{array}{l} \textcircled{M} \\ [T-m] \end{array} \left| \begin{array}{l} \textcircled{B} \\ \textcircled{A} \end{array} \right. \begin{array}{l} M_{B(+)} = 17.5708 \\ M_{B(-)} = 44.8610 \\ M_{A(+)} = 59.2781 \\ M_{A(-)} = 34.1313 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{V} \\ [Ton] \end{array} \left| \begin{array}{l} \textcircled{B} \\ \textcircled{A} \end{array} \right. \begin{array}{l} V_{B(+)} = 12.9355 \\ V_{B(-)} = 26.0348 \\ V_{A(+)} = 12.9355 \\ V_{A(-)} = 26.0348 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{N} \\ [Ton] \end{array} \left| \begin{array}{l} \textcircled{B} \\ \textcircled{A} \end{array} \right. \begin{array}{l} F_{comp} = 69.4416 \end{array}$$

" DATOS DE DISEÑO DE LA COLUMNA "

V.3) -TEORIA DEL DISEÑO PLASTICO-  
(FLEXION),(REF. 1)

Para efectos de dimensionamiento y diseño de elementos de concreto reforzado, el procedimiento más empleado es el denominado "plástico", "de resistencia" o "de resistencia última". El procedimiento consiste en definir las acciones internas correspondientes a las condiciones de servicio y multiplicarlas por factores de carga para obtener las resistencias de dimensionamiento y diseño.

Según la cantidad de acero de refuerzo longitudinal de un elemento, dicho refuerzo puede o no fluir antes de alcanzar la carga máxima. Si el acero fluye, el comportamiento de la pieza es dúctil y se producen deflexiones considerables antes del colapso, en este caso se dice que el miembro es subreforzado. Si la cantidad de acero de tensión es grande, éste no fluye antes del aplastamiento y se dice que el elemento es sobrerreforzado. Si la pieza alcanza su resistencia máxima cuando el acero empieza a fluir, se dice que el elemento es balanceado.

El elemento alcanza su resistencia a una cierta deformación unitaria máxima útil del concreto  $\epsilon_c$ , experimentalmente se ha encontrado que para un intervalo amplio de valores de  $\epsilon_c$ , el momento flexionante no varía; por esto, los reglamentos recomiendan valores de  $\epsilon_c$  que van de 0.003 a 0.004.

### V.3.1) HIPOTESIS FUNDAMENTALES DEL DISEÑO PLASTICO (REF. 1)

- a) La sección plana antes de la deformación permanece plana después de la deformación; esto implica que las deformaciones son proporcionales a su distancia al eje neutro y siguen una ley de variación lineal.
- b) Dentro de los esfuerzos de trabajo, al llegar a la capacidad límite, los esfuerzos y las deformaciones no son proporcionales y su variación no es lineal; esto implica que el diagrama de esfuerzos puede tener cualquier figura teórica (rectangular, parabólica, etc.), se definen diagramas idealizados de los esfuerzos de compresión de tal manera que el área del diagrama de esfuerzos y la posición de la resultante de compresión sean semejantes a las que corresponderían a una distribución real.
- c) La adherencia entre el concreto y el acero se supone es perfecta y sus deformaciones son proporcionales a su distancia al eje neutro.
- d) Las tensiones serán tomadas totalmente por el acero y son aplicadas en el centro de gravedad de éste. El despreciar la magnitud de los esfuerzos de tensión que toma el concreto no influye de manera importante en las resistencias de cálculo.

e) El conjunto de fuerzas interiores y exteriores -  
forma un sistema en equilibrio.

### V.3.2) DISEÑO PLÁSTICO -NORMAS ACI-

(REF. 1)

El Instituto Americano del Concreto (ACI) y el Departamento del Distrito Federal, en su reglamento (R D D F), presentan hipótesis simplificadoras para efectos del cálculo de la distribución de esfuerzos de compresión y deformaciones en una sección de una viga sujeta a flexión. Los dos reglamentos anteriormente citados suponen conocida la distribución de esfuerzos en la zona de compresión mediante distribuciones simplistas con las cuales se obtienen valores similares muy aproximados a los que corresponderían a una distribución real. Los dos reglamentos aceptan una distribución real de deformaciones con una deformación unitaria máxima ( $\epsilon_c$ ) en la fibra extrema en compresión de  $\epsilon_c = 0.005$

Ambos reglamentos proponen una distribución rectangular de esfuerzos (bloque de esfuerzos) en lugar de la distribución real. Las diferencias fundamentales entre el Reglamento del ACI y el Reglamento del D D F son que el ACI emplea un bloque reducido de esfuerzos disminuyendo la profundidad de dicho bloque y el RDDF lo hace disminuyendo el valor del esfuerzo máximo; otra diferencia básica es que el ACI usa las resistencias nominales de los materiales  $f'_c$  y  $f_y$ , en vez de las resistencias reducidas  $f'_c$  y  $f_y$  usadas por el DDF.

Para el DDF,  $f'_c = \alpha f'_c (1 - \nu)$

$$f_y = \gamma f_y$$

donde:  $V$  = Coeficiente de variación del concreto.

$\alpha$  y  $\gamma$  Coeficientes que dependen del tipo de carga.

El Reglamento de mayor empleo es el Reglamento del ACI, es de uso internacional, es aplicable a secciones de cualquier forma y para su empleo no se requiere de estudios especiales del concreto ni del acero, es ésta la razón que lo hace práctico y se presenta con mayor frecuencia en textos afines, todas éstas razones influyen para que se elija como método de dimensionamiento y diseño para el presente trabajo.

El Reglamento del Instituto Americano del Concreto (ACI-318-71), en lugar de la distribución real de esfuerzos propone una distribución rectangular de dichos esfuerzos con una profundidad del bloque reducido de esfuerzos de  $\beta_1$  veces la profundidad del eje neutro y una longitud igual a  $\beta_3 f_c$  ( $\beta_3 = 0.85$ ) - en el área reducida del bloque de esfuerzos, el parámetro  $\beta_2$  indica la posición de la resultante de compresión, que por tratarse de una distribución rectangular, dicha resultante cae en el punto medio de la profundidad del bloque de esfuerzos (figura - V.9).

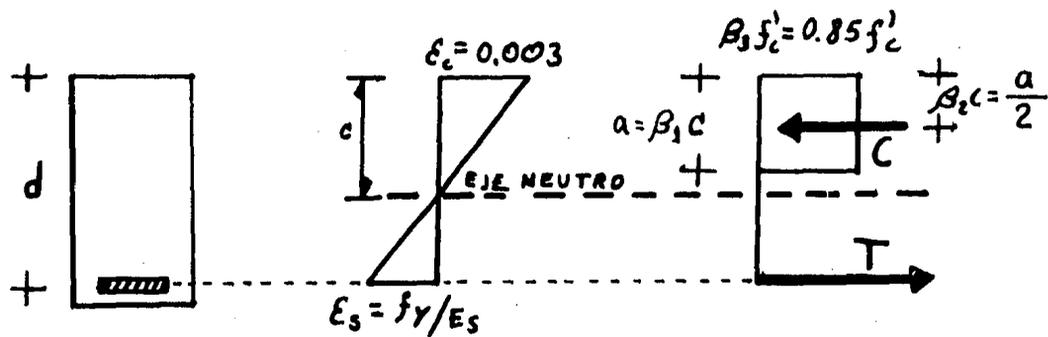


FIGURA V.9

para el ACI:

$$\beta_1 = \left[ 1.05 - \frac{f'_c}{1400} \right] \leq 0.85$$

$f'_c$  está en  $\text{Kg/cm}^2$

El valor de  $\beta_1$  es constante e igual a 0.85 para todo valor de  $f'_c \leq 280 \text{ Kg/cm}^2$

Las recomendaciones del ACI indican que los valores del momento resistente ( $M_r$ ) deben reducirse multiplicándolos por un factor de carga ( $\phi$ ) que toma en cuenta las variaciones en las resistencias de los materiales y en las dimensiones usuales en la construcción, el momento reducido se llama Momento de diseño o Momento último ( $M_u = \phi M_r$ ). Para el caso de flexión, el valor de  $\phi$  es de 0.90.

DETERMINACION DEL MOMENTO RESISTENTE DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR SIMPLEMENTE ARMADA.

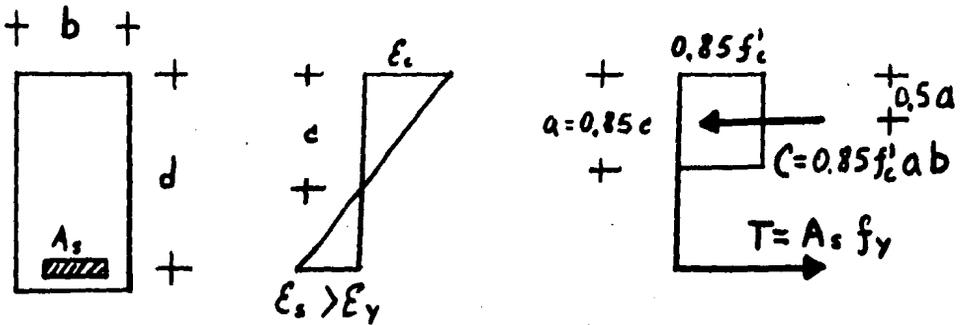


FIGURA V.10

De la figura V.10,

Por equilibrio de fuerzas horizontales:

$$C = T, \text{ o sea}$$

$$0.85 f'_c ab = A_s f_y \text{ -----(i)}$$

Si  $p$  es el porcentaje de acero de la sección efectiva,

$$p = \frac{A_s}{bd}, \text{ o sea } A_s = pbd.$$

Sustituyendo  $A_s$  en (i) y despejando "a":  $0.85 f'_c ab = pbd f_y$

$$\therefore a = p \frac{f_y}{0.85 f'_c} d$$

Tomando momentos respecto al acero de tensión

$$M_r = C \left[ d - \frac{a}{2} \right] = 0.85 f'_c ab \left[ d - \frac{a}{2} \right]$$

Sustituyendo "a" en la expresión anterior

$$\begin{aligned} M_r &= 0.85 f'_c ab \left( d - \frac{a}{2} \right) \\ &= 0.85 f'_c p \frac{f_y}{0.85 f'_c} d b \left( d - p \frac{f_y}{2 \times 0.85 f'_c} d \right) \\ &= p f_y d b \left( d - \frac{p f_y d}{1.70 f'_c} \right) \\ &= b d^2 p f_y \left( 1 - \frac{0.588 p f_y}{f'_c} \right) \end{aligned}$$

Si llamamos  $q = \frac{p f_y}{f'_c}$  (denominado índice de resistencia) y tomando  $0.588 \approx 0.59$

$$M_r = b d^2 f'_c q (1 - 0.59 q) \text{ ----- Ec.3.2.1}$$

Considerando el factor de carga por flexión ( $\phi$ ), queda final

mente:

$$M_u = \phi b d^2 f'_c q (1 - 0.59 q) \text{ ----- Ec.3.2.2}$$

Expresión que da el momento de diseño de una sección con refuerzo de tensión únicamente.

DETERMINACION DE LA SECCION BALANCEADA

Tomando en cuenta la figura V.10 y sabiendo que  $\epsilon_c = 0.003$  y

$$\epsilon_s = \frac{f_y}{E_s}, \text{ por triángulos semejantes:}$$

$$\frac{c}{0.003} = \frac{d}{0.003 + \epsilon_s}$$

Si se toma  $E_s = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$  y despejando "c",

$$c = d \frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{2 \times 10^6}} = d \frac{0.003}{\frac{6000 + f_y}{2 \times 10^6}}$$

$$c = d \left( \frac{0.003 \times 2 \times 10^6}{6000 + f_y} \right) = d \left( \frac{6000}{6000 + f_y} \right)$$

Por equilibrio horizontal (para la sección balanceada)

$$P = P_b$$

$$T = P_b \quad b d f_y = C$$

$$P_b \quad b d f_y = 0.85 f'_c \beta_1 c b$$

$$P_b \quad d f_y = 0.85 f'_c \beta_1 c$$

despejando  $P_b$ ,

$$P_b = \frac{0.85 f'_c \beta_1 c}{d f_y}$$

sustituyendo "c" en  $P_b$

$$P_b = \frac{0.85 f'_c \beta_1 d \left( \frac{6000}{6000 + f_y} \right)}{d f_y}, \text{ o sea}$$

$$P_b = \frac{\beta_1 0.85 f'_c}{f_y} \frac{6000}{6000 + f_y} = E_c \cdot 3.23$$

Expresión que da el porcentaje de acero para la condición balanceada de una sección rectangular simplemente armada.

En la anterior expresión se sabe que:

$$\beta_1 = \left( 1.05 - \frac{f'_c}{1400} \right) \leq 0.85, \quad f'_c \text{ con Kg/cm}^2$$

El ACI recomienda valores del porcentaje ( $p$ ) de acero para una sección simplemente armada de:

$$p_{\min} = \frac{14}{f_y}, \text{ donde } f_y \text{ está en Kg/cm}^2 \text{ y } 0.50 p_b \leq p_{\max} \leq 0.75 p_b$$

#### V.4).- DISEÑO DE TRABE

Con las anteriores expresiones se tiene la base para efectuar el diseño de la trabe escogida. Se supone fija la sección de 40 X 60 cm. y entonces el problema es el cálculo del acero conocida la sección, los materiales son:

Acero,  $f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$

Concreto,  $f'_c = 250 \text{ Kg/cm}^2$

Estribos del número 2,  $f_y = 2300 \text{ Kg/cm}^2$

Sección total (40 X 60) cm.

Restricción Acero longitudinal,  $p_{m\acute{a}x} = 0.75 p_b$

#### CALCULOS PRELIMINARES

$$p_{m\acute{i}n} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4000} = 0.0035$$

$$\underline{p_{m\acute{i}n} = 0.0035}$$

$$p_b = \frac{\beta_1 0.85 f'_c}{f_y} \frac{6000}{6000 + f_y} = \frac{0.85 \times 0.85 \times 250}{4000} \frac{6000}{6000 + 4000}$$

$$= \frac{180.625}{4000} \frac{6000}{10000} = 0.027094$$

$$\underline{p_b = 0.027094}$$

$$p_{m\acute{a}x} = 0.75 p_b = 0.75 (0.027094) = 0.02032$$

$$\underline{p_{m\acute{a}x} = 0.02032}$$

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS Y ARMADO

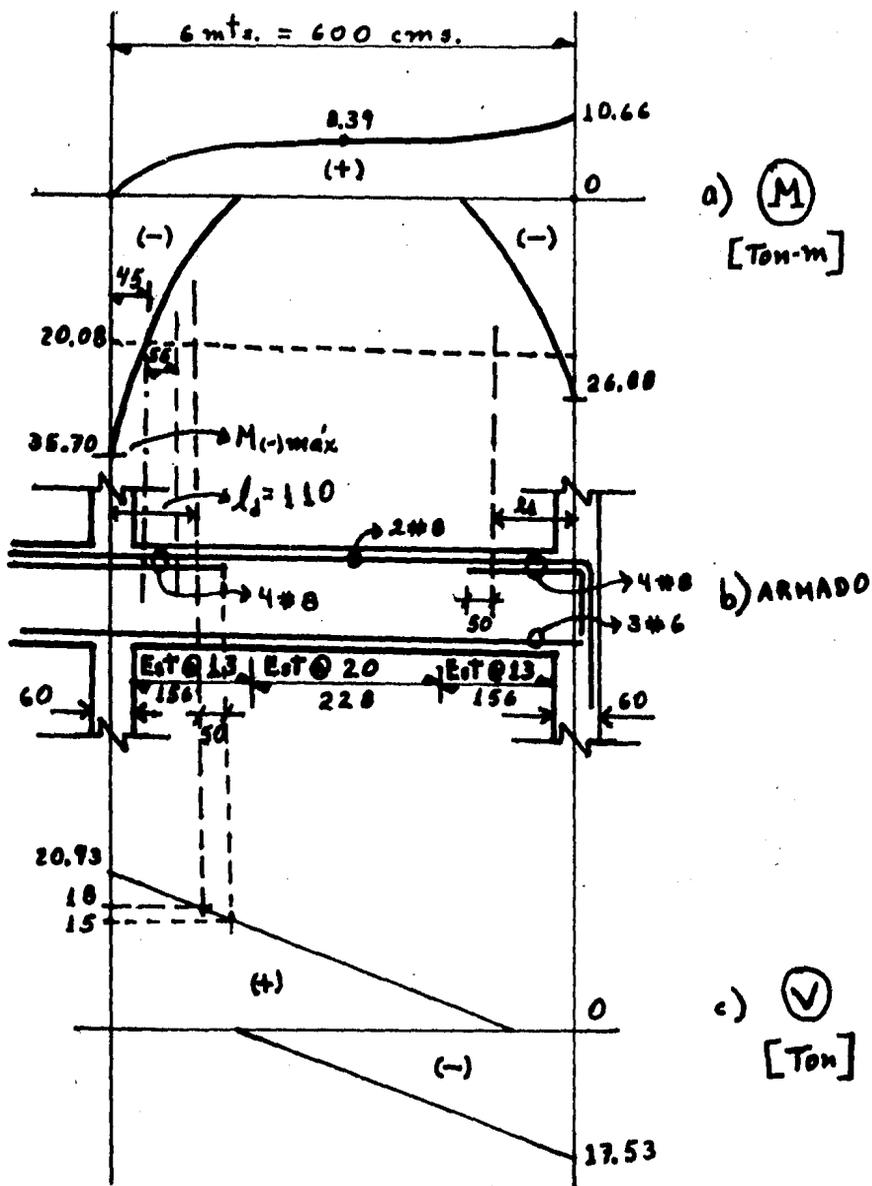


FIGURA V.11

## PROCEDIMIENTO DE CALCULO

### V.4.1) REFUERZO LONGITUDINAL

#### a) Momento Flexionante Negativo

Datos:

$$b = 40 \text{ cm}, d = 55 \text{ cm}, h = 60 \text{ cm}$$

$$f'_c = 250 \text{ Kg/cm}^2, f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$M_{(-)\text{máx}} = 35.70 \text{ Ton - m}$$

Se sabe que el momento de diseño  $M_u$  es  $M_u = \Phi M_T = 0.9 M_T, \therefore$

$$M_T = \frac{M_u}{0.9} = \frac{35.7}{0.9} = 39.66 \text{ Ton - m}, \text{ o sea que el momento re-}$$

sistente para efectos de cálculo es de  $M_T = 39.66 \text{ Ton - m}$ .

La ecuación 3.2.1 establece que

$$M_T = bd^2 f'_c q (1 - 0.59 q), \text{ sustituyendo datos,}$$

$$39.66 \times 10^5 = (40)(55)^2 (250) q (1 - 0.59 q)$$

$$39.66 \times 10^5 = 302.5 \times 10^5 q (1 - 0.59 q)$$

$$39.66 = 302.5 q - 178.47 q^2$$

$$178.47 q^2 - 302.5 q + 39.66 = 0$$

Resolviendo la anterior ecuación de 2o. grado, se tienen -

$$\text{las soluciones } q_1 = 1.55$$

$$q_2 = 0.14$$

$q$  es un parámetro tal que  $0 < q < 1$ ,  $\therefore q$  toma el valor de 0.14

Se sabe que  $q = \frac{p f_y}{f'_c}$ , despejando  $p$ ,

$$p = \frac{q f'_c}{f_y} = \frac{0.14 \times 250}{4000} = 0.00875$$

y el porcentaje de acero es  $p = 0.00875$

REVISION

$$P_{\min} = 0.0035 < p = 0.00875 < P_{\max} = 0.02032$$

La cantidad de acero será:

$$A_s = pbd = 0.00875 \times 40 \times 55 = 19.25 \text{ cm}^2$$

$$\underline{\underline{A_s = 19.25 \text{ cm}^2}}$$

Se escogen 4 varillas del No. 8; área de la varilla No. 8 =  $5.07 \text{ cm}^2$ ,  $\therefore$

$$A_{\text{TOTAL}} = 5.07 \times 4 = 20.28 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{A_s(\text{real}) = 20.28 \text{ cm}^2}$$

$$P_{\text{real}} = \frac{20.28}{40 \times 55} = 0.0092 < P_{\max}$$

b) Momento Flexionante Positivo

$$\text{Momento máximo (al paño de la columna)} = M_{(+)\max} = 10.66 \text{ Ton-m}$$

Se supone un brazo (Z) del par resistente de 0.9 - valor usual - y como el par resistente es el producto de la fuerza de tensión

o de compresión por el brazo Z, entonces  $M_{\max} = A_s f_y Z$ ; despejando

$$A_s, \quad A_s = \frac{M_{\max}}{f_y \cdot Z} = \frac{10.66 \times 10^5}{4000 \times 0.9 \times 55} = 5.38 \text{ o sea, el acero positivo necesario es } \underline{\underline{A_s = 5.38 \text{ cm}^2}}$$

Si se escogen 3 varillas del No. 5, el área real es  $1.98 \times 3 = 5.94 \text{ cm}^2$

REVISION

$$p = \frac{5.94}{40 \times 55} = 0.0027 < P_{\min}$$

Por tanto, es necesario tomar para el acero positivo el porcentaje mínimo o más.

$$\therefore P_{\text{real}} \gg P_{\min} = 0.0035 \Rightarrow A_s = 0.0035 \times 40 \times 55 = 7.70 \text{ cm}^2$$

Finalmente el acero positivo es de  $7.70 \text{ cm}^2$ , se escogen 3 - varillas del No. 6, entonces el área es de  $2.85 \times 3 = 8.55$

$$\Rightarrow \boxed{A_s(\text{real}) \quad 8.55 \text{ cm}^2}$$

REVISION

$$P_{\text{real}} = \frac{8.55}{40 \times 55} = 0.0039 > P_{\text{mín}}$$

RESUMEN

Momento Negativo: 4  $V_8$  # 8 (20.28  $\text{cm}^2$ )

Momento Positivo: 3  $V_8$  # 6 (8.55  $\text{cm}^2$ )

c) Corte de Varillas

Suponiendo que se cortan 2 barras del Momento negativo, que dan resistiendo 2; de Momento positivo no se cortan varillas por que se trabajó con el porcentaje mínimo. El momento resistente para 2 barras negativas del No. 8 es:

$$M_{R2\#8} = A_s f_y Z = 2 \times 5.07 \times 4000 \times 0.9 \times 55 = 2007720 \text{ Kg-cm},$$

o sea  $M_{R2\#8} = 2007720 \text{ Kg-cm} = 20.08 \text{ Ton-m}$

Dicho momento resistente (20.08 Ton-m) se presenta a una distancia de 50 cm. del centro de la columna (determinado de la gráfica del diagrama de momentos).

El ACI establece distancias mínimas que se deben prolongar las varillas más allá del punto donde son necesarias, y recomienda que sea la mayor de las siguientes cantidades --- (en cm.)

d (peralte efectivo) ó 12 db	}	d = 55
(12 veces el diámetro de la barra)		12 $d_b = 12 \times 2.54 = 30.5$

rige  $d$ , o sea, las varillas de corte negativo se prolongan 55 cm.

#### LONGITUD DE DESARROLLO O ANCLAJE

Experimentalmente se han obtenido expresiones para estimar en distintos casos las longitudes de desarrollo donde actúan esfuerzos de adherencia que equilibran las fuerzas de tensión de la varilla. Para el caso tratado se debe proporcionar longitud de desarrollo en la sección donde se corta el acero (en general se debe proporcionar en secciones críticas: las de momentos máximos y donde se corta o se dobla el acero).

Para el caso de varillas de lecho superior (acero negativo) se propone que la longitud de desarrollo sea

$$l_d = 1.4 \times 0.06 A_b f_y / \sqrt{f'_c} \gg 0.0057 d_b f_y$$

sustituyendo datos

$$l_d = 1.4 \times 0.06 \times 5.07 \times 4000 / \sqrt{250} = 1703.52 / 15.8114 \\ = 107.74 \text{ cm}$$

$$\text{Checando } 0.0057 \times 2.54 \times 4000 = 57.914$$

$$\therefore \text{rige } l_d = 107.74 \text{ cm} \approx 1.10 \text{ mts}$$

En este caso rige como distancia para corte de varillas la longitud de desarrollo  $l_d = 110$  cm sobre la distancia total del punto de corte y su prolongación ( $45 + 55 = 100$  cm).

## V.4.2) REFUERZO TRANSVERSAL

### a) Especificaciones

Debido a la dificultad para valuar la resistencia a efectos de cortante, la mayoría de los reglamentos establecen fórmulas sencillas con ciertas limitaciones como resultado de análisis empíricos y experiencias acumuladas en los últimos años. Las recomendaciones esenciales del ACI, del RDDF y del Comité Europeo están contenidas en el trabajo del Comité ACI - 326 y sólo difieren entre sí en detalles. La fórmula propuesta por el Comité 326 para valuar el esfuerzo cortante nominal correspondiente a la carga que produce el agrietamiento inclinado (agrietamiento inicial bajo una carga, tal que al aumentar de dicha carga produce el colapso con una carga considerablemente mayor que la del agrietamiento inicial) para miembros sin refuerzo transversal es:

$$v_c = 0.5 \sqrt{f'_c} + 180p \frac{V_r d}{M_r} \leq 0.90 \sqrt{f'_c}$$

donde

$v_c$  = esfuerzo cortante nominal que resiste el concreto en Kg/cm<sup>2</sup>

$f'_c$  = índice de resistencia del concreto a la compresión en Kg/cm<sup>2</sup>

$p$  = relación de acero longitudinal ( $A_g/bd$ )

$A_g$  = área de acero longitudinal de la sección

$V_r$  = fuerza cortante en la sección

$M_r$  = Momento flexionante en la sección, si  $M_r$  es menor que  $V_r d$ , se toma igual a este producto.

Para efectos prácticos, de manera aproximada puede calcularse el valor de  $v_c$  como:

$$v_c = 0.5 \sqrt{f'_c} \quad \text{en Kg/cm}^2$$

Para elementos con refuerzo transversal, se considera que la resistencia total a cortante es la suma de la resistencia del concreto más la contribución del refuerzo del alma. El ACI presenta la expresión que se deduce de los estudios de Ritter en 1899 --- (Analogía de la armadura), ésta simplificación es:

$$A_v = \frac{(V_r - V_c)S}{f_y d (\text{Sen } \alpha \text{ Cos } \alpha)}$$

donde

$A_v$  = área total de refuerzo en el alma en una distancia  $S$ , -  
medida en dirección paralela al refuerzo longitudinal.

$V_r$  = fuerza cortante externa en la sección considerada co--  
rrespondiente a la carga de diseño.

$V_c$  = fuerza cortante que toma el concreto,  $V_c = V_c b d$

$S$  = separación de estribos o barras dobladas, medida en di-  
rección paralela a la del refuerzo longitudinal.

$\alpha$  = ángulo entre las barras o estribos de refuerzo en el -  
alma y el eje longitudinal del miembro.

En el caso de estribos perpendiculares,  $\alpha = 90^\circ$  y la -  
anterior ecuación se reduce a

$$A_v = \frac{S(V_r - V_c)}{f_y d}$$

El ACI impone ciertas limitaciones al corte de varillas en las zonas de tensión, ya que originan y propician el desarrollo de grietas por la tensión diagonal, la condición más sencilla de observar, y usual en la práctica es la que indica que: "la fuerza cortante en la zona de corte de varillas - no debe ser mayor que los dos tercios de la fuerza cortante permisible (disponible), incluido el efecto del refuerzo --- transversal en el alma.

### b) Cálculo

Con las aclaraciones anteriormente expuestas, para el miembro en diseño se tendría:

$$\text{Esfuerzo cortante } \mathcal{V}_c = 0.5 \sqrt{f'_c} = 0.5 \sqrt{250} = 7.90 \text{ Kg/cm}^2$$

∴ Cortante que resiste el concreto:

$$V_c = \mathcal{V}_c b d = 7.90 \times 40 \times 55 = 17380 \text{ Kg} = \underline{17.38 \text{ Ton}}$$

Del Diagrama de fuerzas cortantes, se toma para diseño, Cortante máximo  $V_T = \underline{20.93 \text{ Ton}}$

$$\text{De la ecuación } A_v = \frac{S(V_T - V_c)}{f_y d} \Rightarrow S = \frac{A_v f_y d}{V_T - V_c}$$

Con estribos (no corrugados) del No. 2, área de la varilla del No. 2 =  $0.32 \text{ cm}^2$ , si se forman estribos cerrados, se tienen 2 ramas, y el área total de estribos es  $A_v = 0.64 \text{ cm}^2$

El acero es  $f_y = 2300 \text{ Kg/cm}^2$

∴ Separación de estribos:

$$S = \frac{0.64 \times 2300 \times 55}{20930 - 17380} = \frac{80960}{3550} = \underline{22.80 \text{ cm} \approx 20 \text{ cm}}$$

El ACI establece como separación máxima en una distancia  $2d$  de la cara de la columna al menor de los tres valores siguientes:

$$S_{\text{máx}} = \frac{d}{4} = \frac{55}{4} = 13.75 \text{ cm.}$$

$$S_{\text{máx}} = \frac{A_v d}{0.15 A'_s} = \frac{0.64 \times 55}{0.15 \times 10.14} = 23.14 \text{ cm.}$$

$$S_{\text{máx}} = \frac{A_v d}{0.15 A_B} = \frac{0.64 \times 55}{0.15 \times 8.55} = 27.45 \text{ cm.}$$

Rige como separación máxima en una distancia  $2d = 2 \times 55 = 110 \text{ cm}$ ,  $S = 13.75 \text{ cm}$ , redondeando,  $S_{\text{máx}} = \underline{13 \text{ cm}}$

En el resto de la viga la separación máxima es

$$S_{\text{máx}} = \frac{d}{2} = \frac{55}{2} = 27.5 \text{ cm} \doteq \underline{25 \text{ cm}}$$

Rige en el resto de la viga,  $S = 22.80 \text{ cm}$ ,  $S \doteq 20 \text{ cm}$

$$\underline{S = 20 \text{ cm}}$$

### c) Revisión

De acuerdo a la restricción del ACI en cuanto a que el cortante externo es  $\leq 2/3$  del cortante permisible (disponible), en la longitud del corte de varillas, en dicha sección actúa un cortante  $V_{\text{ext.}} = 18 \text{ Ton}$  (determinado graficamente).

El  $V_r$  disponible es:

$$V_r \text{ disp.} = V_c + \frac{A_v f_y d}{S}$$

donde  $\frac{A_v f_y d}{S}$ , se deduce de  $A_v = \frac{SV}{f_y d}$

$$\begin{aligned} \therefore V_{r \text{ disp.}} &= 17380 + \frac{0.64 \times 2300 \times 55}{55} \\ &= 17380 + 6627.69 = 23607.69 \text{ Kg} \doteq \underline{23.61 \text{ Ton}} \end{aligned}$$

$$V_r \text{ ext.} = 18 > \frac{2}{3} (23.61) = 15.70$$

Por lo tanto, conviene disminuir la separación de estribos en la distancia  $2d$  o prolongar las varillas longitudinales.

Redondeando el  $V_{r \text{ disp.}}$  a 15 Ton, graficamente se presenta a una distancia de 150 cm del centro de la columna, lo que implica prolongar la longitud de las varillas negativas 40 cm más allá - del punto que indica la longitud de desarrollo,  $l_d = 110 \text{ cm}$ , entonces, se tendrá como longitud total de desarrollo o anclaje,

$$\underline{l_{d2} = 150 \text{ cm}}$$

d) Conclusión

A partir del paño de cada columna hay que poner estribos

@ 13 cm en una distancia de 156 cm (156 es el menor múltiplo de 13 necesario), en el resto de la viga se colocará estribos @ 20 cm.

V.4.3) DETALLES DE COLOCACION

En la figura V.12 se establece graficamente el armado respectivo (secciones críticas):

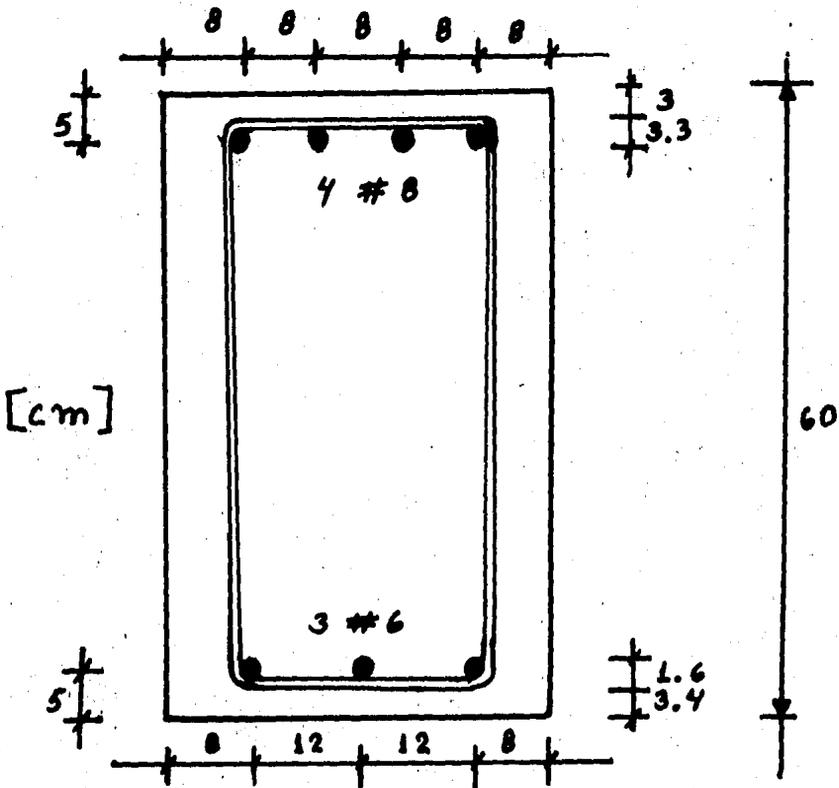


FIGURA V.12

V.5).- DISEÑO DE COLUMNA -

Para efectos de diseño de la columna, se toman los datos necesarios anteriormente calculados y que se resumen en la siguiente gráfica de acciones internas, figura V.13

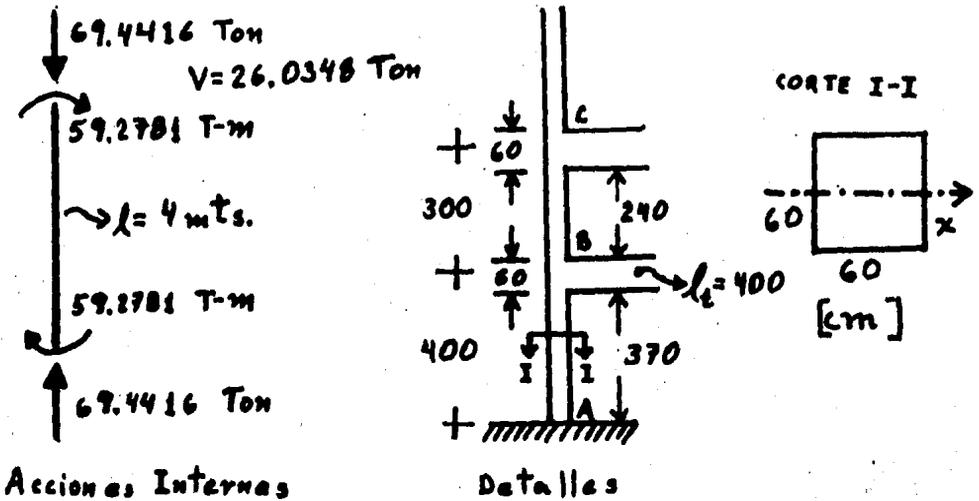


FIGURA V.13

El reglamento ACI - 1983 recomienda que se tomen en cuenta efectos de esbeltez en columnas en las que el término  $(\lambda l_u / r)$  es mayor que 22, donde  $\lambda l_u$  es la longitud efectiva de pandeo y  $r$  es el radio de giro de la columna (para simplificar, el ACI recomienda tomar  $r$  como 0.30 veces el lado menor de la columna).

$(\lambda l_u)$  depende del grado de restricción de la columna en sus extremos, dicho grado de restricción depende a su vez de la relación entre las rigideces de las columnas y del sistema de piso,

que puede definirse 
$$\psi = \frac{\sum K_{\text{cols.}}}{\sum K_{\text{piso}}}$$

$\Sigma K_{\text{cols.}}$  es la rigidez de las columnas que concurren en un nudo, y  $\Sigma K_{\text{piso}}$  es la rigidez del sistema de piso, no se toman en cuenta las rigideces de las trabes perpendiculares al marco,  $K$  es la rigidez  $EI/L$ , que contiene al elemento  $E$  (módulo de elasticidad) y que por ser factor de numerador y denominador se puede cancelar y por lo tanto calcular  $K$  como  $I/L$ .

PROCEDIMIENTO DE CALCULO PARA DETERMINAR SI SE TOMAN EN CUENTA EFECTOS DE ESBELTEZ.

RIGIDECES

i) NUDO A:  $\psi_A = 0$ , Por tratarse de empotramientos ya que  $\Sigma K_{\text{piso}}$  es infinito y por lo tanto  $\psi = \frac{\Sigma K_{\text{cols.}}}{\infty} = 0$

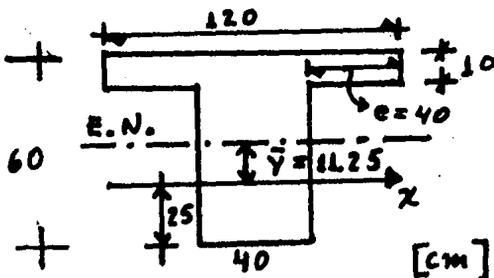
MOMENTOS DE INERCIA:

Según el ACI:

$e = 4t$  ó  $40 \text{ cm}$ ,

Si  $t = 10 \text{ cm} \Rightarrow$

$e = 4 \times 10 = 40 \text{ cm}$



Centroide:

FIGURA V.14

$\bar{Y} = \frac{10 \times 120 \times 30}{40 \times 50 \times 120 \times 10} = 11.25 \text{ cm}$

Momento de Inercia Centroidal:

$I_t = \frac{120 \times 10^3}{12} + 120 \times 10 \times 18.75^2 + \frac{40 \times 50^3}{12} + 40 \times 50 \times 11.25^2 = 10\ 000 + 421\ 875 + 416\ 666 + 253\ 125 = 1\ 101\ 666 \text{ cm}^4$

$\therefore I_t = 1\ 101\ 666 \text{ cm}^4$

Columna:

$$I_{AB} = I_{BC} = \frac{60 \times 60^3}{12} = 1\,080\,000 \text{ cm}^4$$

$$\therefore \underline{I_{BC} = I_{AB} = 1\,080\,000 \text{ cm}^4}$$

ii) NUDO B:

Rigidez del sistema de piso:

$$K_{trabe} = \frac{I_t}{l_t} = \frac{1\,101\,666}{400} = \underline{2754 \text{ cm}^3}$$

Rigidez de columnas:

$$K_{BC} = \frac{I_{BC}}{l_{BC}} = \frac{1\,080\,000}{240} = \underline{4500 \text{ cm}^3}$$

$$K_{AB} = \frac{I_{AB}}{l_{AB}} = \frac{1\,080\,000}{370} = \underline{2920 \text{ cm}^3}$$

iii) CALCULO DE  $\psi_B$ :

$$\psi_B = \frac{K_{cols}}{K_{piso}} = \frac{4500 + 2920}{2754} = 2.6943$$

$$\therefore \underline{\psi_B = 2.7}$$

LONGITUD EFECTIVA DE PANDEO:

Con  $\psi_A = 0$  y  $\psi_B = 2.7$  del monograma mostrado en la figura V.15, se tiene que  $k = 1.3$ . Longitud efectiva de pandeo, -----

$$(k l_u) = 1.3 \times 370 = \underline{481 \text{ cm}}$$

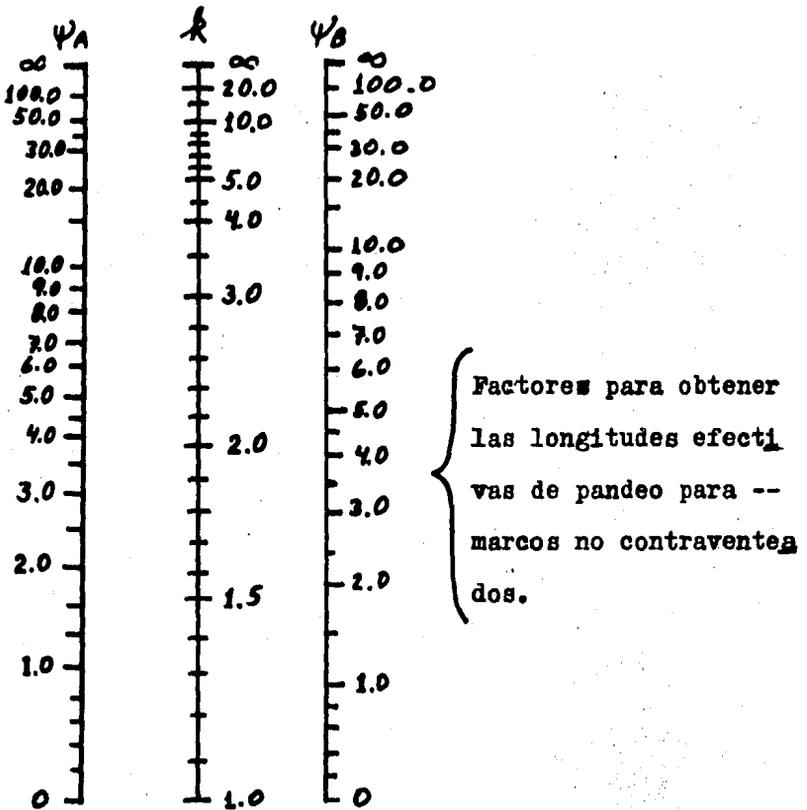


FIGURA V.15

RADIO DE GIRO:

$$r = (0.30) (60) = 18 \text{ cm}$$

$$\frac{k l_u}{r} = \frac{481}{18} = 26,72, \text{ Como } \frac{k l_u}{r} > 22 \Rightarrow$$

"SE DEBEN TOMAR EN CUENTA EFECTOS DE ESBELTEZ"

## MOMENTO FLEXIONANTE AMPLIFICADO

El ACI presenta un método elemental para calcular el momento amplificado que se debe utilizar como dato de diseño cuando se toman en cuenta los efectos por esbeltez, dicho momento, que se denomina momento flexionante amplificado  $M_A$ , es  $M_A = \delta M_0$ ; --- donde  $\delta$  es el factor de amplificación y  $M_0$  es el momento máximo en la columna.

El factor  $\delta$  depende de la carga axial y de la carga crítica de Euler y se define como:

$$\delta = \frac{C_m}{1 - (P/P_c)}$$

donde:

$C_m$  es un término que toma en cuenta los momentos en los extremos y que se define como  $C_m = 0.4 + 0.6 (M_1/M_2)$  para marcos contraventeados, y para marcos con posibilidad de desplazamiento lateral  $C_m = 1$ .

$P$  es la carga axial y

$P_c$  es la carga crítica de Euler.

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(K l_u)^2}$$

se puede aplicar a elementos de concreto reforzado, aunque no sean de comportamiento lineal si  $EI$  se calcula con la expresión

$$EI = \frac{E_c I_g / 2.5}{1 + \beta_d}$$

En  $EI = \frac{E_c I_g / 2.5}{1 + \beta_d}$ ,  $I_g$  es el momento de inercia de la sección del concreto y  $\beta_d$  es la relación entre el momento por carga y el momento total en la columna, se puede tomar aproximadamente como 0.10 para este tipo de elementos.

#### CALCULOS PRELIMINARES

a) Cálculo de EI

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} = 10\,000 \sqrt{250} = 158\,114 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{Se usará } E_c = \underline{158\,000 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$I_g = \frac{60 \times 60^3}{12} = 1\,080\,000 \text{ cm}^4, \quad I_g = 1\,080\,000 \text{ cm}^4$$

$$\beta_d = 0.10, \quad \text{De acuerdo a } EI = \frac{E_c I_g / 2.5}{1 + \beta_d}$$

$$EI = \frac{158\,000 \times 1\,080\,000}{2.5 (1 + 0.10)} = \frac{1.7064 \times 10^{11}}{2.75} \Rightarrow$$

$$EI = \underline{6.20509 \times 10^{10} \text{ Kg-cm}^2}$$

b) Cálculo de la carga crítica

$$P_c = \frac{2EI}{(L_u)^2} = \frac{(3.1416)^2 \times 6.2051 \times 10^{10}}{(481)^2}$$

$$= 2647039.42 \text{ Kg, o sea } P_c = \underline{2647 \text{ Ton}}$$

c) Factor de Amplificación

$$\delta = \frac{C_m}{1 - \frac{P_r}{P_c}} = \frac{1}{1 - \frac{69.4416}{2647}} = \frac{1}{1 - 0.0262341}$$

$$= 1.02694, \quad \underline{\delta = 1.027}$$

d) Momento Amplificado

$$M_A = \delta M_o = 1.027 \times 59.2781, \Rightarrow$$

$$M_A = 60.8786 \text{ Ton} - \text{m}$$

NOTA: Para el diseño de la columna se usarán las gráficas para elementos en flexocompresión (diagramas de interacción) que se presentan al final de este capítulo, figuras B - 1, --- B - 2, B - 3 y B - 4 (punto 6, apéndice). Estos diagramas son parte del material contenido en la REFERENCIA No. 1.

REORDENAMIENTO DE DATOS

Con los ajustes que resultan de los cálculos anteriores, se tienen como datos de dimensionamiento y diseño lo indicado en la figura V.16

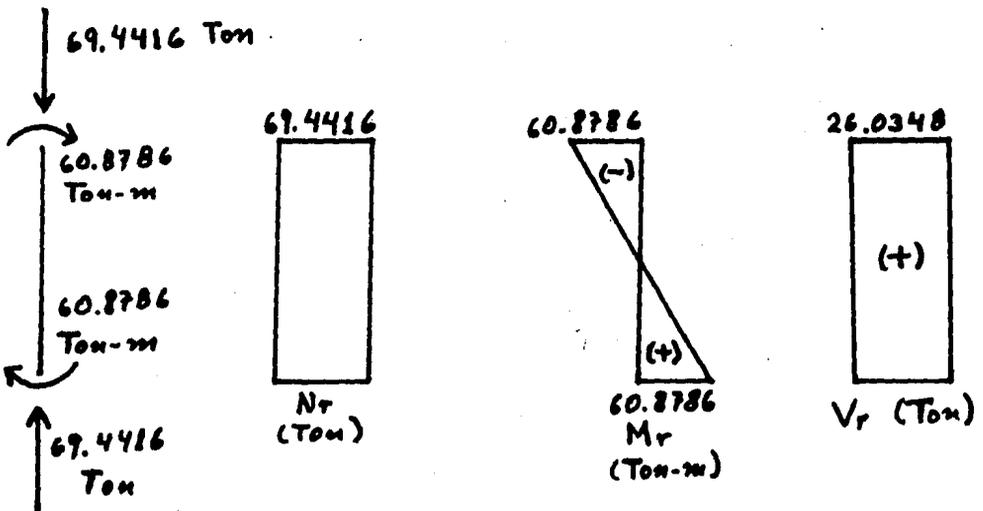


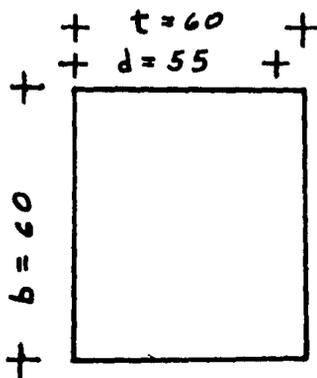
FIGURA V.16

MATERIALES:

$$f'_c = 250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$$

V.5.1) DIMENSIONAMIENTO POR FLEXION



Sección propuesta:

$$b = 60 \text{ cm}$$

$$t = 60 \text{ cm}$$

$$d = 55 \text{ cm}$$

FIGURA V.17

$$\frac{d}{t} = \frac{55}{60} = 0.9166 \doteq 0.9$$

Como  $\frac{d}{t} = 0.9$ , se toman los datos de la figura B - 2, ---  
apéndice (teoría del ALI).

$$\text{Si } \alpha = \frac{N_r}{bt \beta_3 f'_c}, \quad \alpha = \frac{69\,440}{60 \times 60 \times 0.85 \times 250} = 0.09 \doteq 0.1$$

$$\text{Si } \beta = \frac{M_r}{bt^2 \beta_3 f'_c}, \quad \beta = \frac{6087 \times 10^5}{60 \times 60^2 \times 0.85 \times 250}$$

$$= 0.113 \doteq 0.11$$

Con  $\omega = 0.10$  y  $\beta = 0.11$  se obtiene de la figura B - 2 un valor de  $\omega$  de 0.18 (se recuerda que  $\omega = q$ , donde  $q$  es el índice de resistencia).

Se sabe que  $p = \frac{A_s}{bd}$  y que  $\omega = \frac{f_y}{\beta_3 f'_c}$

$$\therefore p = \frac{\omega \beta_3 f'_c}{f_y} = \frac{0.18 \times 0.85 \times 250}{4000} = 0.0096$$

o sea  $p \doteq 0.01$

Existe la limitación por reglamento del refuerzo mínimo del 1% ( $p_{mín} = 0.01$ ) y del refuerzo máximo del 8% ( $p_{máx} = 0.08$ ),  $p$  calculada para el diseño es 0.01, que es exactamente el valor --  $p_{mín}$  ( $p_{diseño} = p_{mín} = 1\% = 0.01$ )

#### Cálculo del Acero

$$A_s = pbt = 0.01 \times 60 \times 60 = 36 \text{ cm}^2, \underline{A_s = 36 \text{ cm}^2}$$

Se usarán 8 varillas del No. 8,  $A_{\#8} = 5.07$ ,

$$A_{TOTAL} = 5.07 \times 8 = 40.56, \underline{A_{TOTAL} = 40.56 \text{ cm}^2}$$

Revisión acero máximo y mínimo

$$p = \frac{40.56}{60 \times 60} = 0.012$$

Si  $p_{mín} = 0.01$  y  $p_{máx} = 0.08$

$$p_{mín} = 0.010 < p_{diseño} = 0.012 < p_{máx} = 0.08$$

y si se está dentro de los límites exigidos.

### V.5.2) DIMENSIONAMIENTO POR CORTANTE

$$\text{Esfuerzo cortante, } V_c = 0.5\sqrt{f'_c} = 0.5\sqrt{250} = 7.9057$$

$$\therefore \underline{V_c = 7.90 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$\text{Fuerza cortante, } V_c = V_c bd = 7.90 \times 60 \times 55$$

$$\therefore \underline{V_c = 26070 \text{ Kg} \approx 26 \text{ Ton}}$$

$$V_r - V_c = 26.0348 - 26 = 0.0348 \text{ Ton}$$

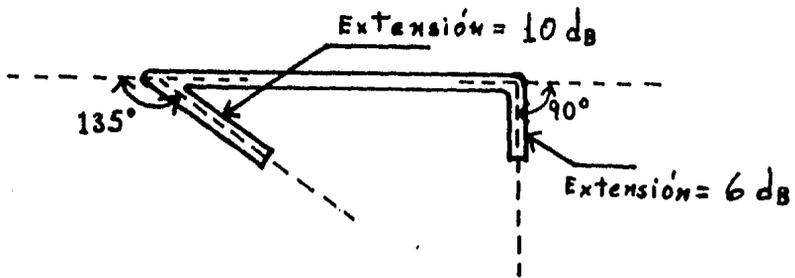
$$\underline{V_r - V_c \approx 0.04 \text{ Ton}}$$

$$\text{De } A_v = \frac{(V_r - V_c)S}{f_y d}, \quad S = \frac{A f_y d}{V_r - V_c}$$

Entonces, para calcular la separación de estribos se usará

$$S = \frac{A f_y d}{V_r - V_c}$$

OBSERVACION: Según el ACI, para proporcionar refuerzo al efecto de la fuerza cortante (Refuerzo transversal) se pueden emplear anillos sencillos o traslapados, también se pueden emplear amarres transversales del mismo tamaño de varilla y espaciados igual que los anillos. Cada extremo del amarre transversal debe enlazar una varilla periférica del refuerzo longitudinal, los extremos del amarre transversal deben alternarse a lo largo del refuerzo longitudinal. Un amarre transversal debe detallarse de acuerdo como lo indica la fig. V.18



Amarre transversal (ganchos)

FIGURA V.18

### Cálculo

Usando varilla del No. 3, intercalando un amarre transversal resistente al cortante (3 ramas en total en la sección: dos del anillo cerrado y uno del amarre transversal) y empleando acero con índice  $f_y = 3000 \text{ Kg/cm}^2$ , se tendría (agregando dos varillas longitudinales del No. 4 para enlazar el amarre transversal):

$$\text{Si } A_{\nu\#3} = 0.71 \text{ cm}^2, A_{\nu} = 3 \times 0.71 = 2.13 \text{ cm}^2$$

$$\therefore S = \frac{2.13 \times 3000 \times 55}{40} = 8786.25$$

$$\text{o sea, } S_{\nu\#3} = 8786 \text{ cm}$$

Este valor absurdo resulta por la pequeña fuerza cortante (40 Kg) que le corresponde resistir al acero; es necesario colocar estribos por acero mínimo al cortante. Según el ACI, el espaciamiento de los anillos no debe exceder  $d/2$  en elementos de concreto no presforzados, ni de  $1/2$  de la menor dimensión de la sección del elemento, ni de 48 veces el diámetro de la varilla de los anillos, ni 16 veces el diámetro de las varillas longitudinales. Se tendría:

$$d/2; \quad \frac{d}{2} = \frac{55}{2} = \underline{27.5 \text{ cm}}$$

$$\text{Menor dimensión} = b = t = 60 \text{ cm}, \quad \frac{b}{2} = \frac{60}{2} = \underline{30 \text{ cm}}$$

$$\text{Varilla de los anillos; } 48 \times 9.5 = 456 \text{ mm} = \underline{45.6 \text{ cm}}$$

Varilla longitudinal: promedio de los diámetros de las varillas.

$$(12.7_{\#4} + 25.4_{\#8}) \div 2 =$$

$$38.1 \div 2 = 19.05 \text{ mm}$$

$$16 \times 19.05 = 304.8 \text{ mm} = \underline{30.5 \text{ cm}}$$

Rige  $d/2$  ( $\frac{d}{2} = 25 \text{ cm}$ ), así, queda la separación de estribos del #3 a cada 25 cm.

o sea Estribos # 3 @ 25 cm.

Revisión

El ACI establece el área mínima de acero por cortante como

$$(A_v)_{\min} = 3.5 \frac{bs}{f_y}, \text{ entonces } (A_v)_{\min} = \frac{3.5 \times 60 \times 25}{3000} =$$

$$1.75 \text{ cm}^2 \quad \therefore (A_v)_{\min} = 1.75 \text{ cm}^2$$

$$\text{Como } (A_v)_{\text{empleada}} = 2.13 \text{ cm}^2 \Rightarrow$$

$$(A_v)_{\min} < (A_v)_{\text{empleada}}$$

$$\text{o sea, } 1.75 \text{ cm}^2 < 2.13 \text{ cm}^2$$

2.13 cm<sup>2</sup> es correcto

- En cuanto al porcentaje longitudinal,

$$P_{\min} < P_{\text{diseño}} < P_{\max}$$

$$P_{\min} = 0.01 \text{ y } P_{\max} = 0.08$$

$$P_{\text{diseño}} = \frac{A_{\text{TOTAL}}}{bt} = \frac{40.56 + 2 \times 1.37}{60 \times 60} = 0.0119 = 0.012$$

∴ y si checa,  $0.01 < 0.012 < 0.08$

### V.5.3) CROQUIS DE ARMADO

La figura que detalla la colocación del armado de la columna es la figura V.19

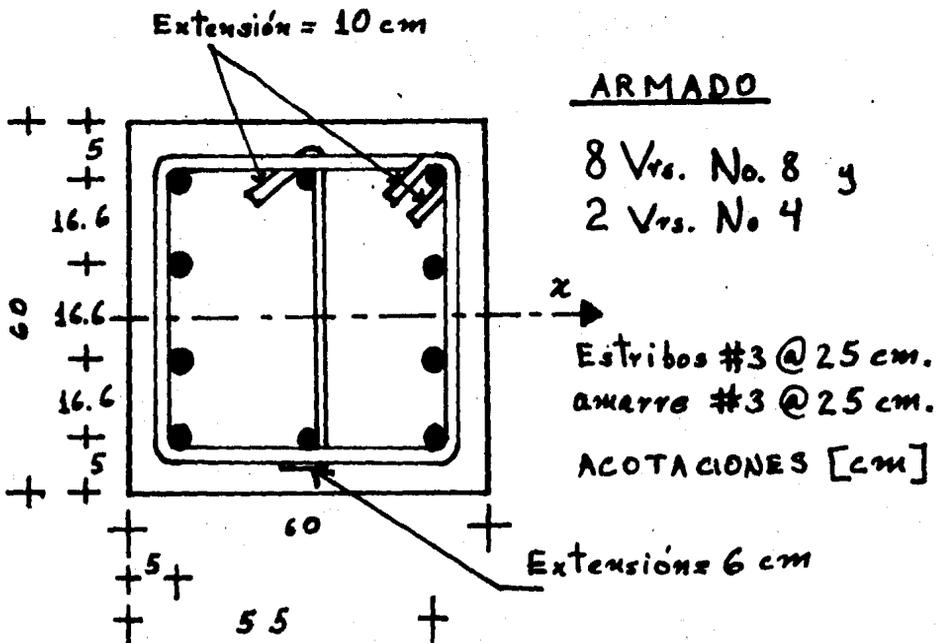


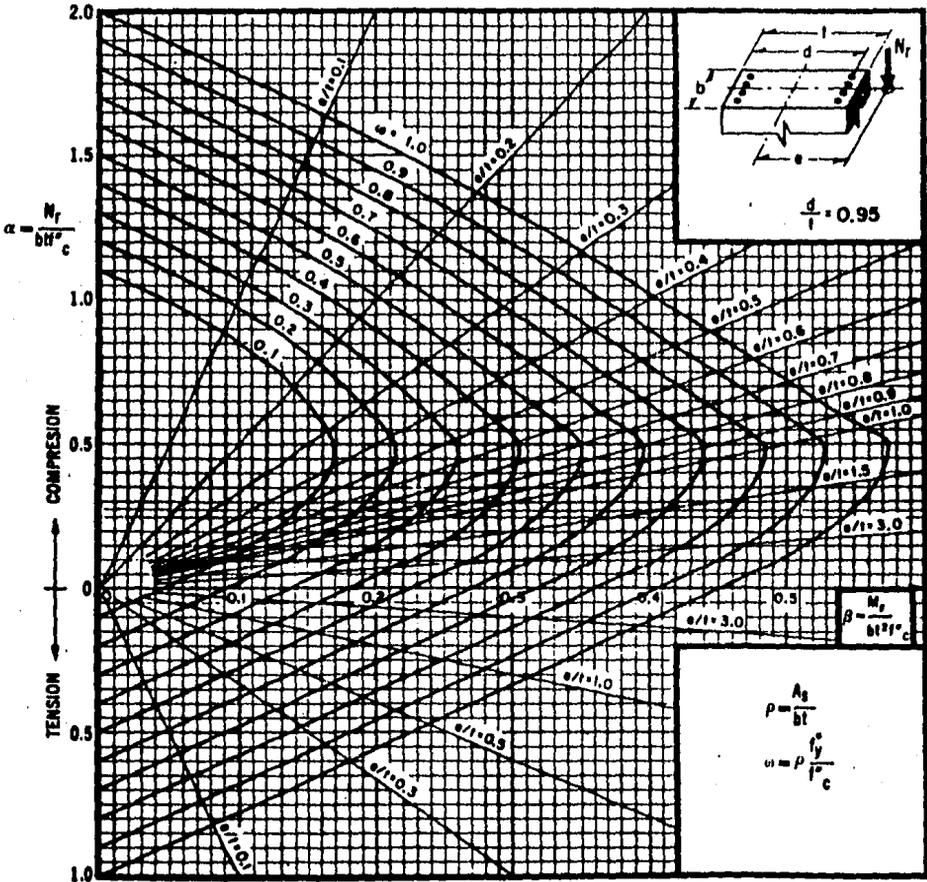
FIGURA V.19

## V.6).- APENDICE

En la Referencia No. 1 se establece que los diagramas de interacción se han calculado en base a las hipótesis del Reglamento del D.F., pero pueden utilizarse con el Reglamento ACI sustituyendo el término  $f'_c$  por  $\beta_3 f'_c$  y  $f_y^*$  por  $f_y$ .

$$\beta_3 = 0.85, \text{ si } f'_c \leq 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\beta_3 = \left( 1.05 - \frac{f'_c}{1400} \right), \text{ si } f'_c > 280 \text{ Kg/cm}^2$$



$A_s$  = área total de refuerzo

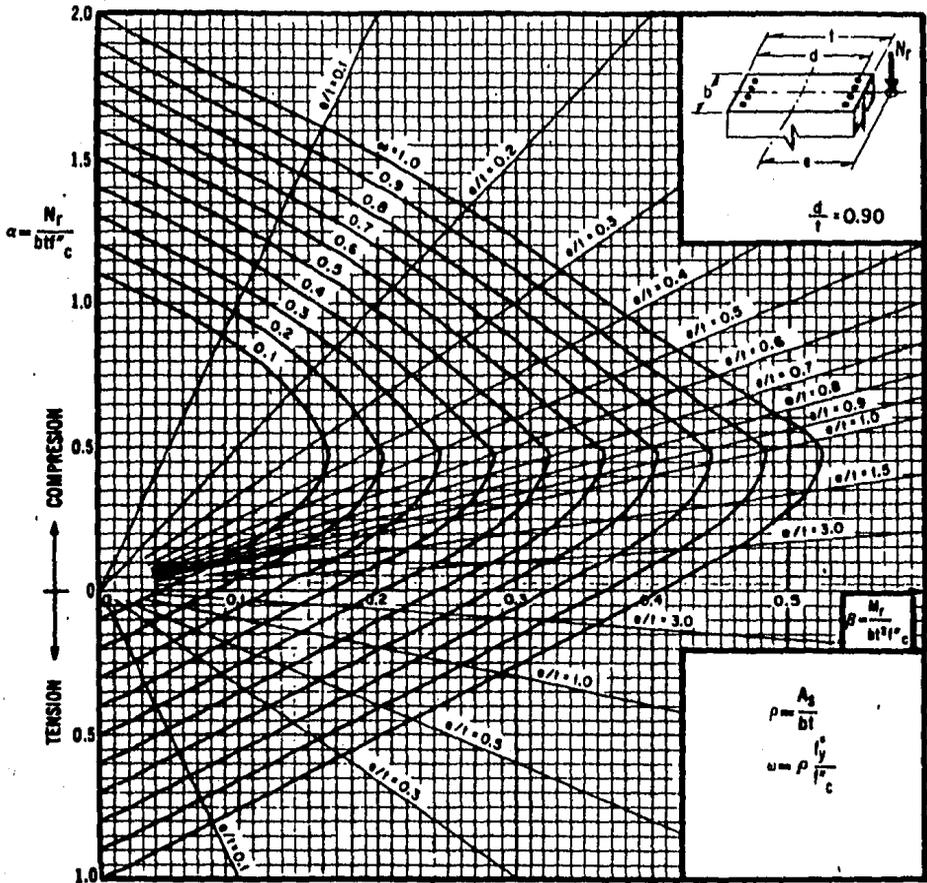
$$f'_o = 0.85 f'_c, \text{ si } f'_c \leq 280 \text{ kg/cm}^2; f'_o = \left(1.05 - \frac{f'_c}{1400}\right) f'_c,$$

si  $f'_c > 280 \text{ kg/cm}^2$

$M_r$  = momento flexionante último

$N_r$  = carga axial última

Figura B-1



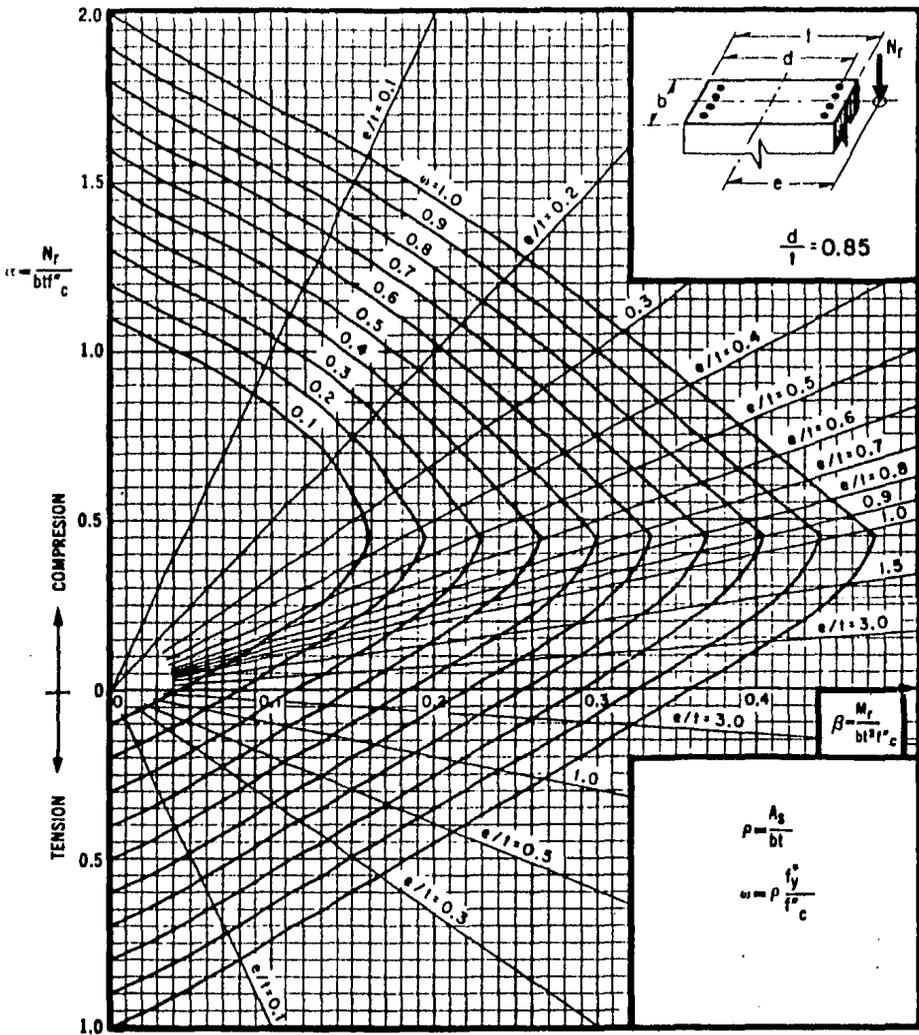
$A_s$  = área total de refuerzo

$$f'_c = 0.85 f'_c \text{ si } f'_c \leq 280 \text{ kg/cm}^2; f'_c = \left(1.05 - \frac{f'_c}{1400}\right) f'_c \text{ si } f'_c > 280 \text{ kg/cm}^2$$

$M_r$  = momento flexionante último

$N_r$  = carga axial última

Figura B.2



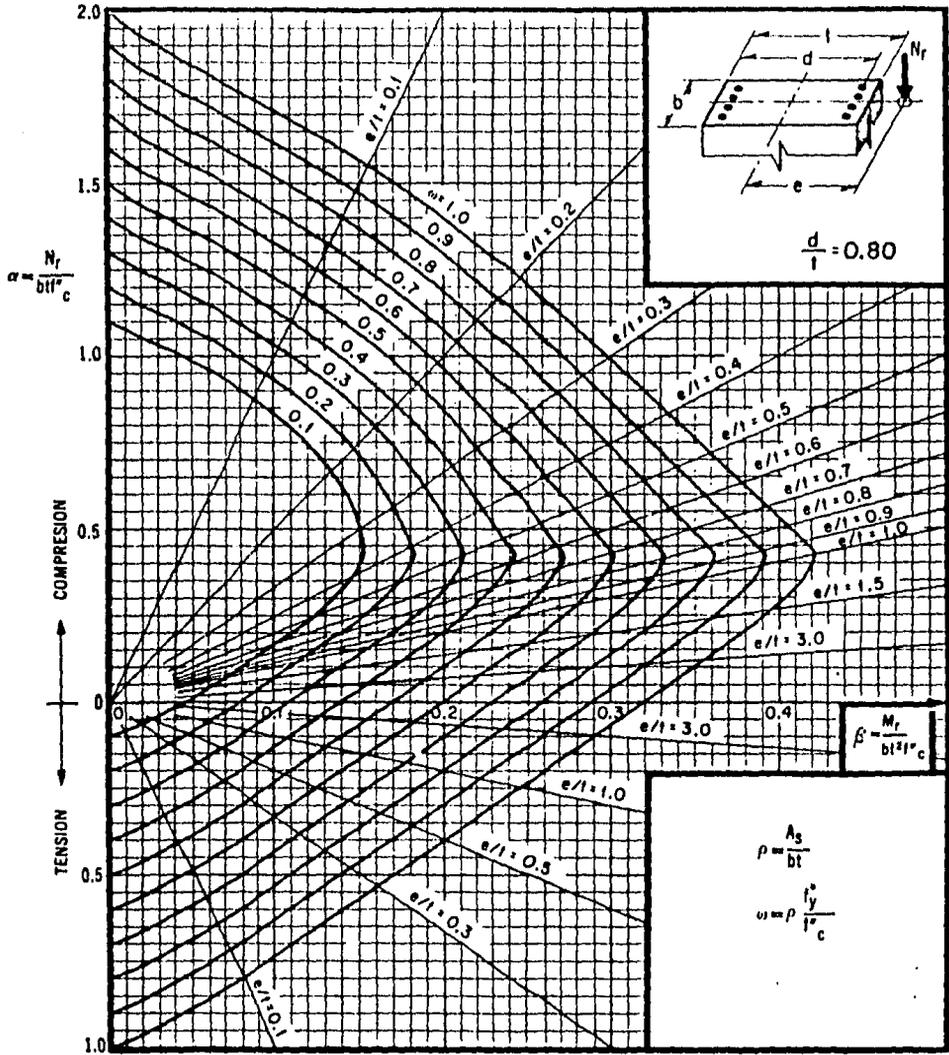
$A_s$  = área total de refuerzo

$$f'_c = 0.85 f'_c, \text{ si } f'_c \leq 280 \text{ kg/cm}^2; f'_c = \left(1.05 - \frac{f'_c}{1400}\right) f'_c, \text{ si } f'_c > 280 \text{ kg/cm}^2$$

$M_r$  = momento flexionante último

$N_r$  = carga axial última

Figura B-3



$A_s$  = área total de refuerzo

$$f'_c = 0.85 f''_c, \text{ si } f''_c \leq 280 \text{ kg/cm}^2; f'_c = \left( 1.05 - \frac{f''_c}{1400} \right) f''_c, \text{ si } f''_c > 280 \text{ kg/cm}^2$$

$M_r$  = momento flexionante último

$N_r$  = carga axial última

Figura B-4

## VI. COMENTARIOS

Se presentó, como se mencionó al principio, el análisis y el diseño de dos de los elementos estructurales vitales en un proyecto de Ingeniería civil como lo son trabes y columnas, el trabajo se refiere precisamente a ésta parte de un proyecto de este tipo; pero no hay que olvidar que hay otros puntos de similar importancia como el diseño de losas cimentación, instalaciones hidráulica y eléctrica, sistema de alcantarillado, etcétera; sin pasar por alto el estudio de precios y costo de construcción. El trabajo -- que se ha desarrollado es el estudio de un marco de un edificio -- con ciertas características estructurales especiales como lo son el tener desplazamientos lineales verticales (una de las principales intenciones de ésta tesis), amén de los horizontales y los angulares.

No se hace análisis alguno en cuanto al estudio económico -- de la obra, ya que el marco analizado es sólo una parte mínima de una estructura mucho más complicada y de la cual no se especifican más datos ni se da mayor información, el marco es teórico.

Se efectúa un breve estudio del método empleado para el análisis (Método de las Rigideces, usando computadora para efectuar las operaciones matriciales) y el diseño (diseño por flexión para la trabe y flexocompresión para la columna), sobre todo con las normas del A C I , aunque se emplean en algunos casos fórmulas y especificaciones del D D F .

Otro objetivo primordial es el de resaltar el uso de las máquinas computadoras en los proyectos de Ingeniería civil, lo que

evita procedimientos laboriosos de análisis y evita a la vez mucho trabajo de escritorio, ya que en unos cuantos segundos se -- realizaron operaciones que de otra forma hubieran necesitado de muchas horas. El paquete o programa empleado fué el denominado -- "CECAFI - MATRICES", que es un método desarrollado en la propia facultad de Ingeniería de la UNAM (paquete para realizar opera-- ciones con matrices) y todas sus instrucciones son sencillas, -- claras y en español.

Sin la intención de ser un texto, se realizó con la idea -- de servir de base para el desarrollo del análisis (por computado -- ra) y diseño de barras en un proyecto estructural, ya que se po -- drían omitir los estudios teóricos presentados y tomar sólo las aplicaciones convenientes, lo que simplificaría aún más un traba -- jo de este tipo.

VII. BIBLIOGRAFIA

(REFERENCIAS)

La información en textos o notas que sirvieron de base para la elaboración de ésta tesis fueron:

a) REFERENCIA NUMERO 1:

"ASPECTOS FUNDAMENTALES DEL CONCRETO REFORZADO"

Oscar M. González Cuevas

Francisco Robles F.V.

Juán Casillas G. de L.

Roger Díaz de Cossío

Editorial Limusa

b) REFERENCIA NUMERO 2:

"ANALISIS ESTRUCTURAL"

Jan J. Tuma

Compendios Shaum

c) REFERENCIA NUMERO 3:

"RESISTENCIA DE MATERIALES"

William A. Nash

Compendios Shaum

d) REFERENCIA NUMERO 4:

NOTAS DE LA CLASE "ESTRUCTURAS DE CONCRETO" DE LA FACULTAD DE INGENIERIA DE LA UNAM.

Profr. Ing. Claudio Merrifield C.

e) REFERENCIA NUMERO 5:

NOTAS DE LA CLASE DE "DISEÑO ESTRUCTURAL" DE LA FACULTAD DE INGENIERIA DE LA UNAM.

Profr. Ing. Francisco de Pablo Galán

f) REFERENCIA NUMERO 6:

NOTAS DE LA CLASE DE "ANALISIS AVANZADO DE ESTRUCTURAS" DE LA FACULTAD DE INGENIERIA DE LA UNAM.

Profr. Ing. Julio Dany Ríos

g) REFERENCIA NUMERO 7:

FOLLETO "CECAFI - MATRICES"

(Instrucciones para el uso del paquete  
"Cecafi - Matrices")

Centro de Cálculo - UNAM

h) REFERENCIA NUMERO 8:

"REGLAMENTO DE LAS CONSTRUCCIONES DE CONCRETO REFORZADO (ACI318-83) Y COMENTARIOS"

INSTITUTO MEXICANO DEL CEMENTO Y DEL  
CONCRETO, A.C.