



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

28  
157

CÁMARAS DE OSCILACION

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO CIVIL

PRESENTA

HERMILO RAMIREZ LEON

MEXICO, D. F., SEPTIEMBRE 1984



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## PROLOGO

Cuando un líquido que fluye en una tubería es detenido bruscamente mediante el cierre total o parcial de una válvula la energía dinámica del fluido se transforma a una energía elástica, y se produce una sobrepresión; esta sobrepresión causada por la desaceleración de la masa del fluido es el origen del fenómeno de oscilación llamado golpe de ariete.

Si se diseñan las tuberías para resistir estas sobrepresiones pueden resultar espesores poco usuales y que además impliquen tuberías demasiado costosas: Esto ha llevado a buscar otro tipo de soluciones para que de alguna forma se aminoren o nulifiquen estas sobrepresiones.

En los casos en que las tuberías son cortas las sobrepresiones se pueden controlar en forma parcial por algunos dispositivos menores como lo son las válvulas de alivio; sin embargo, cuando se tienen tuberías de gran longitud (como en las plantas hidroeléctricas y de bombeo), es preferi-

ble el uso de las cámaras de oscilación. La selección final se basará en un balance económico entre el dispositivo a emplear y el refuerzo adicional para la tubería.

El presente trabajo trata acerca de las cámaras de oscilación; su objetivo es mostrar aspectos de funcionamiento hidráulico así como algunos criterios sobre su diseño.

En el capítulo primero se discuten los objetivos generales y se da una clasificación que trata de agrupar en forma general los tipos de cámaras usuales. En el capítulo segundo se destacan las ecuaciones fundamentales que describen este fenómeno transitorio, tomando como base un sistema hidroeléctrico simple, así como las condiciones iniciales y de frontera necesarias para su solución. En el capítulo tercero se describen los métodos para la solución de estas ecuaciones y que van desde las soluciones simples y con gráficas, hasta los métodos numéricos existentes; se discuten también aspectos importantes sobre la estabilidad hidráulica de las cámaras de oscilación. En el capítulo cuarto se dan las ecuaciones para algunos tipos de cámaras mencionadas en el primer capítulo. Se presenta además un proyecto de aplicación en el cual se hacen diseños con los tipos de cámaras más comunes y se hace una comparación entre ellos. Finalmente, en el capítulo cinco se mencionan algunos criterios de diseño.

## I N D I C E

PROLOGO	I
1. INTRODUCCION	1
1.1 Aspectos generales	1
1.2 Objetivos de las cámaras de oscilación	4
2.3 Tipos de cámaras	6
2. ECUACIONES FUNDAMENTALES, SUS CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA	16
2.1 Ecuaciones fundamentales	17
2.1.1 Ecuación dinámica	18
2.1.2 Ecuación de continuidad	23
2.2 Condiciones de frontera	25
MANIOBRAS DE RECHAZO DE CARGA	26
MANIOBRAS DE DEMANDA O TOMA DE CARGA	28
MANIOBRAS A POTENCIA CONSTANTE	29
MANIOBRAS A POTENCIA CONSTANTE CON RESTRICCIONES	30
3. METODOS DE SOLUCION. ANALISIS DE LA CAMARA SIMPLE	33
3.1 Solución para el caso de fricción nula. Cámara simple	33
3.2 Soluciones con gráficas	38
3.3 Métodos iterativos de integración	39
3.4 Métodos gráficos	42
3.5 Métodos de integración numérica	43
3.6 Análisis de estabilidad. Cámara simple sujeta a maniobras de potencia constante	47
3.6.1 Oscilaciones de pequeña amplitud	50
3.6.2 Oscilaciones grandes	52
3.6.3 Resumen y comentarios adicionales	53
3.7 Ejemplo. Cámara simple	65
4. ANALISIS DE LOS DISTINTOS TIPOS DE CAMARAS DE OSCILACION	65
4.1 Cámaras aguas abajo de la turbina	65
4.2 Cámara con origicio o estrangulada	67
4.3 Cámaras con expansiones	74
4.4 Cámara diferencial o Johnson	75
4.5 Cámaras múltiples	77

4.6	<i>Aplicaciones</i>	81
4.6.1	Resumen de datos y planteo del problema	81
4.6.2	Solución	82
5.	CRITERIOS DE DISEÑO	104
6.	REFERENCIAS	110
APENDICES		
I.	Comentarios sobre la solución numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	I.1
II.	Ecuación diferencial de las oscilaciones en cámara simple sujeta a maniobras de potencia constante	II.1

## I. INTRODUCCION

### 1.1 Aspectos generales

Entre las obras hidráulicas en que se conduce el agua a presión destacan las hidroeléctricas y los acueductos. Uno de los problemas fundamentales en el diseño de dichas obras lo constituye el análisis de los fenómenos transitorios. En los casos en que las tuberías son de longitud apreciable cuando hay un transitorio, se presentan sobrepresiones que pueden ser de gran magnitud; si se desea diseñar la tubería para resistir dichas sobrepresiones pueden resultar demasiado costosas. El fenómeno de estas ondas rápidas de presión se conoce como golpe de ariete. Su estudio es en sí mismo una disciplina y sale del alcance de este trabajo. El lector interesado puede ver por ejemplo los textos de Wylie y Streeter (1978), Chaudry (1979) o el trabajo clásico de Parmakian (1963). Un dispositivo eficaz para ayudar a controlar el golpe de ariete en instalaciones hidráulicas es la cámara de oscilación;

dicho en forma gruesa, transforma las ondas de presión en oscilaciones de masa mucho más lentas y con menor amplitud. Pueden colocarse cámaras de oscilación en instalaciones hidroeléctricas o de bombeo (fig 1.1).

Desde el punto de vista teórico, el funcionamiento de una cámara de oscilación en una instalación hidroeléctrica o en una de bombeo es el mismo; por ello, en este trabajo se hará mayor referencia a cámaras de oscilación en hidroeléctricas y solo se mencionarán los aspectos importantes del funcionamiento de cámaras de oscilación en sistemas de bombeo.

En la fig 1.2 puede verse un acomodo común de la cámara de oscilación en sistemas hidroeléctricos. Para entender el funcionamiento de la cámara de oscilación supóngase que, por razones de operación de la planta en un instante dado el anillo del distribuidor de las turbinas se cierra en forma más o menos rápida (por ejemplo, en unos 5 s). Esta acción crea una onda de presión que viaja hacia aguas arriba por la tubería de presión hasta el almacenamiento de donde se refleja para regresar a la turbina. El tiempo requerido por la onda de presión en ir y regresar es  $2L/a$  (en donde  $L$  es la longitud del conducto de presión y  $a$  es la velocidad de la onda, del orden de 1000 m/s); es decir, el tiempo varía proporcionalmente con la longitud del conducto. Si en un sistema hidroeléctrico se instala una cámara de oscilación y se supone que la masa de agua contenida en ella es apreciable, se reduce el período de la onda ya que en la superficie libre de la cámara se crea un punto de reflexión parcial.

Al presentarse un rechazo de carga, esto es, un cierre (ver cap 2.2) en un lapso muy corto, el flujo en la tubería a presión se interrumpe repentinamente; y el agua en la tubería se desacelera. Dicha desaceleración se transforma en una onda de presión que recorre el conducto. Mientras esto sucede, el régimen de flujo en el túnel de presión permanece prácticamente inalterado. Cuando la onda de presión llega a la cámara se completa la desaceleración de la masa de agua en la tubería de presión y el régimen establecido en el túnel comienza a alterarse. El agua, incapaz de fluir por la tubería a presión ya que el agua en esta está prácticamente inmóvil, es forzada a introducirse dentro de la cámara; consecuentemente la superficie libre del agua dentro de la cámara comienza a subir en el momento que la onda de presión arriba a ésta. El nivel del agua continuará subiendo en forma lenta (20 a 30s) y la masa en el túnel se va desacelerando gradualmente. Existirá un punto para el cual el nivel llega a un máximo y por tanto el flujo dentro del túnel queda en reposo. Para este máximo se crea un gradiente negativo con respecto al almacenamiento por lo que el sentido del flujo dentro del túnel comienza a invertirse hacia el almacenamiento, disminuyendo también el nivel en la cámara. Debido a la inercia de la masa de agua, el nivel continúa disminuyendo hasta llegar a un mínimo para volver a ascender y así sucesivamente. Si la cámara se diseña de manera adecuada estas oscilaciones serán atenuadas por las pérdidas de fricción en el conducto hasta llegar a establecer un nuevo nivel de equilibrio.

Por otro lado, cuando se tiene una demanda de carga, esto es, que el anillo del distribuidor se abre para admitir más gasto, el agua en la tubería se acelera rápidamente. La cámara de oscilación proporciona

en este caso el volumen de líquido que las turbinas requieren y el nivel de su superficie libre desciende. Esto provoca un gradiente de energía en el túnel que acelera gradualmente el líquido pero por su inercia se excede el valor necesario para el equilibrio, y por tanto, se crea un estado oscilatorio, hasta que, como en el caso anterior se tenga un nuevo equilibrio.

En la fig 1.3 se muestra la secuencia de la variación de niveles para el caso de rechazo de carga.

## 1.2 *Objetivos de la cámara de oscilación*

De la discusión anterior se pueden deducir las tres principales funciones de una cámara de oscilación en instalaciones hidroeléctricas.

1. Reducir la magnitud de las fluctuaciones de presión debidas al rechazo de carga (esto es, un cierre en el distribuidor de la turbina). Al colocar una cámara de oscilación en el conducto que comunica al almacenamiento con las turbinas, la longitud característica del golpe de ariete disminuye, reduciéndose así la sobrepresión.

Si no se instalara la cámara de oscilación, se tendría que diseñar el túnel de presión para que resistiera los efectos del golpe de ariete, considerando toda la longitud, lo que obviamente resultaría costoso.

Cabe mencionar aquí que las cámaras de oscilación no amortiguan totalmente las ondas de sobrepresión y que parte de estas viajan a través del túnel de presión. La magnitud de esta onda depende del arreglo espacial

en las juntas del túnel, la cámara de oscilación y la tubería de presión y también en gran parte, del valor relativo del área de la sección transversal del orificio que comunica al túnel con la cámara.

2. Mejorar las características de regulación de las turbinas. El tiempo de aceleración de las turbinas es función directa de la longitud del conducto a presión; por tanto al instalar una cámara, dicha longitud se reduce y también el tiempo de aceleración hidráulica de la turbina, lo cual mejora las características de regulación de la planta.

3. Proporcionar la masa de agua necesaria en maniobras de demanda de carga. Supóngase que en un sistema hidroeléctrico no hay cámara de oscilación. En un instante dado se abre al distribuidor (en una toma de carga, ver cap 2.2) en forma repentina para satisfacer la demanda. El agua en la tubería a presión se acelera rápidamente pero debido a que la inercia de la masa de agua en el túnel es significativamente pequeña, dicha masa no se acelera tan rápidamente. Esto provoca una onda de presión negativa que en algún punto de instalación puede provocar que el gradiente quede por debajo de la tubería pudiéndose presentar separación de la columna. Para evitar esto, puede colocarse una cámara de oscilación que proporciona el líquido necesario a la tubería de presión mientras se acelera el agua en el túnel evitando que el gradiente baje demasiado.

En una instalación de bombeo, las condiciones transitorias más desfavorables se presentan en un paro repentino; en este caso la carga disminuye rápidamente (pudiendo quedar el gradiente por debajo de la tubería) hasta que se invierte el flujo y empieza a aumentar. Una cámara de osci

lación, además de acortar la longitud de la tubería, suministra agua en forma tal que la carga no disminuya tanto.

### 1.3 Tipos de Cámaras

En los últimos 70 años se han desarrollado una gran variedad de cámaras de oscilación; la elección del tipo de cámara se determina buscando una solución óptima.

Uno de los aspectos más importantes es el económico. Se trata de diseñar una cámara para la cual los volúmenes de excavación y de concreto de revestimiento sean mínimos para buscar un costo mínimo. Dichos volúmenes son función de área de la sección transversal de la cámara y de la amplitud de las oscilaciones y como se verá más adelante una reducción en área de la cámara implica que la amplitud de las oscilaciones crezca.

A lo anterior hay que agregar que pueden existir ciertas limitaciones físicas al tamaño de una cámara. Por ejemplo, puede haber un límite para la oscilación máxima; la oscilación mínima debe ser tal que la cámara nunca se drene, ésto es que no debe bajar el nivel en forma tal que pueda entrar aire a la tubería de presión. Por otro lado, si la sección es demasiado pequeña pueden presentarse problemas de estabilidad hidráulica (ésto significa que las oscilaciones no se amortiguan e incluso que crezcan con el tiempo, ver cap 3).

Una clasificación que agrupa los diversos tipos de cámara es la siguiente

I. Correspondiendo a su posición relativa a la casa de máquinas.

1. Cámaras aguas arriba. Son las que se han tomado como base para ilustrar los conceptos anteriores; en general están colocadas en la unión de la tubería de presión con el túnel, lo más cerca posible a las turbinas (fig 1.2).

2. Cámaras aguas abajo. Se emplean cuando el túnel de desfogue es largo y descarga bajo presión; (fig 1.4 ); este diseño se justifica para:

- a) prevenir la separación de la columna de agua en el tubo de succión y/o en el túnel de desfogue en el caso de un cierre rápido.
- b) prevenir la presión excesiva en el tubo de succión y/o en el túnel de desfogue, en el caso de una apertura rápida.

II. De acuerdo a su diseño hidráulico

1. Cámara de oscilación simple

La cámara de oscilación simple es la cámara de sección uniforme. Debe ser capaz de contener la máxima oscilación sin derramar y la mínima sin permitir la entrada de aire al sistema (fig 1.2). La utilización en la práctica de esta cámara está limitada por razones económicas, ya que, al diseñarlas resultan cámaras demasiado grandes, y su empleo se reduce a sistemas con cargas bajas y a longitudes de túnel cortas.

No obstante, por ser la más sencilla será usada posteriormente como base

para el estudio del comportamiento hidráulico de la superficie del agua y posteriormente pasar a otras de diseño especial.

## 2. Cámaras especiales

### 2.1 Cámaras con galerías o expansiones (fig 1.5a)

Las cámaras con galerías se emplean cuando se tienen cargas estáticas altas (350 m, según Mozonyi (1965)) y se desean evitar oscilaciones excesivas.

En una cámara con galerías el área de la sección transversal de la cámara,  $A_g$  (fig 1.5a), se reduce hasta un límite tal que favorece los controles de gobernación de flujo de la turbina. Puede demostrarse además, que el flujo en el túnel se acelera o retarda más rápido, si el incremento o decremento del nivel de agua es rápido al principio de una maniobra o cambio en potencia.

Un arreglo de este tipo consiste básicamente en dos cámaras grandes conectadas entre sí por una cámara vertical de diámetro relativamente reducido. Como puede observarse en la fig 1.5a; la galería superior se encuentra localizada arriba del nivel de aguas máximas (NAME) y la inferior abajo del nivel de aguas mínimas (NAMINO) del embalse.

El funcionamiento puede resumirse como sigue: en un rechazo de carga, el nivel del líquido en la sección estrecha sube rápidamente hasta la cámara superior iniciando ésta su llenado; por el aumento de área, la oscilación se reduce. Esta variación rápida inicial del nivel en la cá-

Para produce la desaceleración inmediata de la masa líquida en el túnel. Por otro lado, en una toma de carga, el nivel en la cámara baja rápidamente hasta la cámara inferior favoreciendo la aceleración del líquido en el túnel; y al aumentar el área, la oscilación es menor y más lenta. Durante la operación normal y para pequeñas variaciones de carga, el nivel se encuentra siempre en el pozo intermedio.

Cuando se diseñan cámaras con una sola galería la función mencionada arriba se cumple por separado dependiendo de la colocación de la galería.

## 2.2 Cámaras con orificio

La unión entre la cámara y el conducto se encuentra restringida por un orificio cuyo objeto es reducir la amplitud y duración de las oscilaciones (lo que favorece la estabilidad) mediante las pérdidas que produce el estrangulamiento, fig 1.5b.

Las pérdidas en el orificio son proporcionales al cuadrado de la velocidad por lo que el estrangulamiento es muy útil cuando se tienen grandes variaciones de carga. Sin embargo cuando las variaciones de carga son pequeñas el efecto del orificio es poco notable y se comporta prácticamente como una cámara simple. Si el orificio es muy pequeño se pueden producir efectos contrarios al transmitirse ondas de presión al túnel de conducción; por ello, el estrangulamiento se debe de calcular en función del tipo de sistema para producir una atenuación eficiente del golpe de ariete.

Una cámara especial es la cámara diferencial o Johnson.

Puede considerarse que está formada por dos partes, un tubo central con orificios en su parte inferior y cuyo diámetro es aproximadamente igual al del túnel (80% como mínimo) y una cámara principal, fig 1.5c. Al presentarse un rechazo de carga, el nivel en el tubo central sube rápidamente produciendo la desaceleración requerida; mientras tanto, el líquido en la cámara principal responde lentamente. El tubo central puede verter a la cámara principal por su extremo superior manteniendo constante su carga en el túnel. Cuando la turbina toma carga el nivel en el tubo central cae rápidamente proporcionando una pronta respuesta al acelerar el líquido en la tubería de presión.

Para pequeñas demandas de carga la respuesta también es rápida, por la acción de la cámara principal.

### III. De acuerdo a su localización relativa al terreno

1. Excavadas, fig 1.2
2. Superficiales, fig 1.6a
3. Mixtas; fig 1.6b

### IV. Casos especiales

Hasta ahora solo se habían mencionado cámaras de oscilación únicas, lo que constituía el arreglo principal; sin embargo, existen arreglos más complejos, de entre los cuales se destacan los tres más importantes.

1. Instalación de varias cámaras en el túnel. Este caso se presenta por ejemplo al ampliar la capacidad de la planta y cuando el diseño de una sola cámara implique dimensiones muy grandes o cuando de alguna manera puedan obtenerse ventajas para su construcción (fig. 1.7a).
2. Instalación de dos cámaras, situando la turbina entre ambas, estos arreglos se emplean cuando se tienen túneles de presión y de desfogue largos (fig. 1.7b).
3. Sistema de conducción con dos embalses (fig. 1.7c).

La clasificación hecha anteriormente por tipo de cámaras no es exhaustiva; por ejemplo, pueden existir combinaciones de varios tipos de cámaras (fig. 1.8) pero todas diseñadas tomando en cuenta el funcionamiento, la economía y la estabilidad hidráulica.

Una observación adicional es que el espacio arriba de la cámara de oscilación no debe quedar cerrado completamente ya que, para tener una oscilación libre de la superficie del agua se requiere del paso de aire dentro de la cámara. Si el espacio entre la superficie libre del agua y la cámara se deja cerrado, se tendría una cámara neumática o cámara de aire. El funcionamiento de las cámaras de aire es complejo y sale del objetivo de este trabajo (ver ejemplo, Chaudry (1979)). En las cámaras excavadas deberán construirse ventilaciones con suficiente sección transversal en la parte superior de la cámara hacia la superficie del terreno para permitir el flujo de aire.

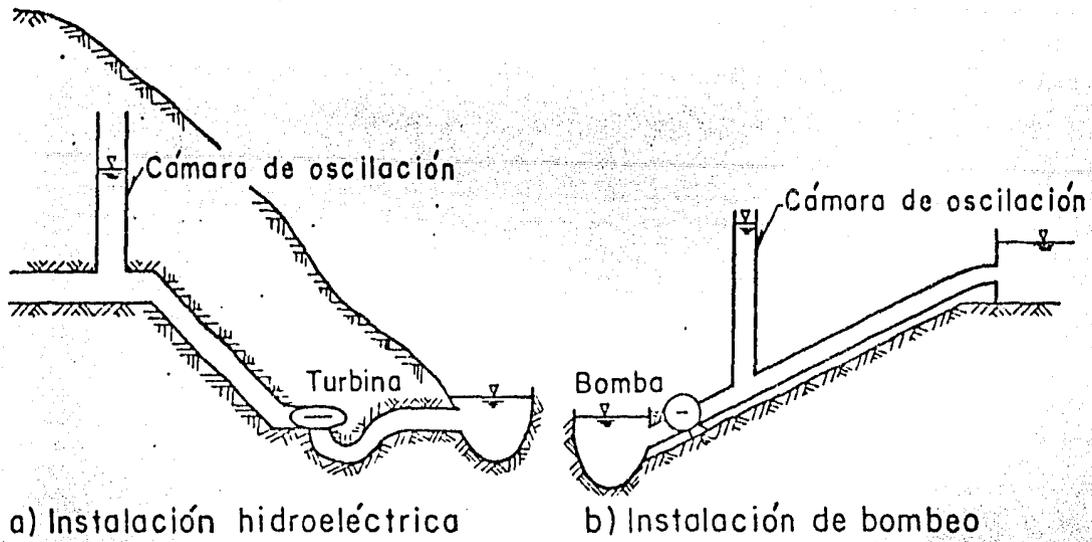


Fig 1.1 Tipos de instalación en que puede utilizarse cámara de oscilación

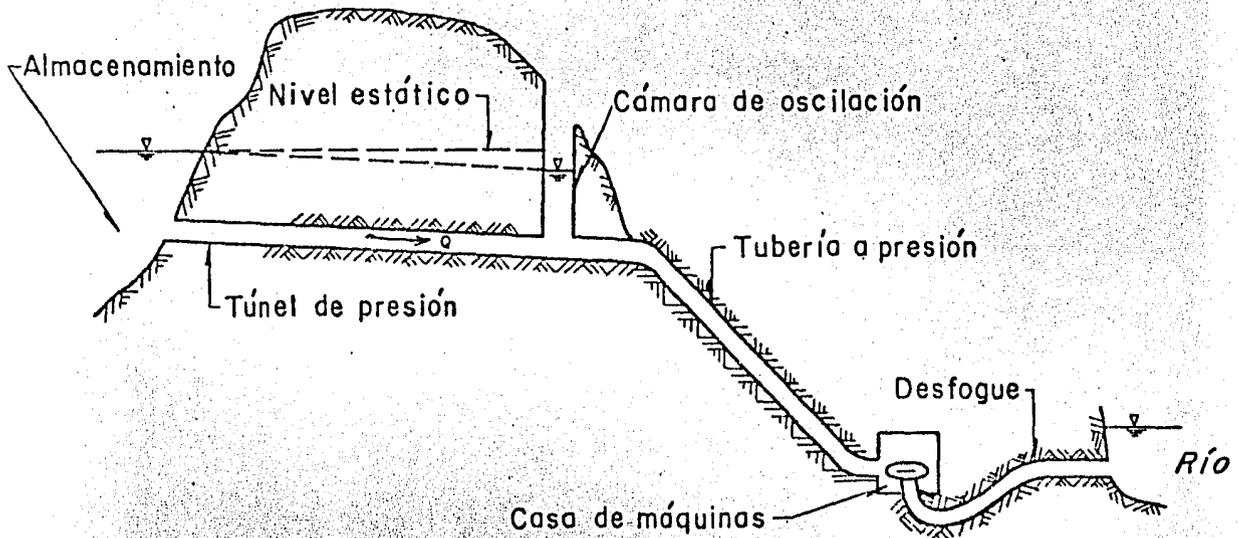


Fig 1.2 Esquema de un sistema hidroeléctrico

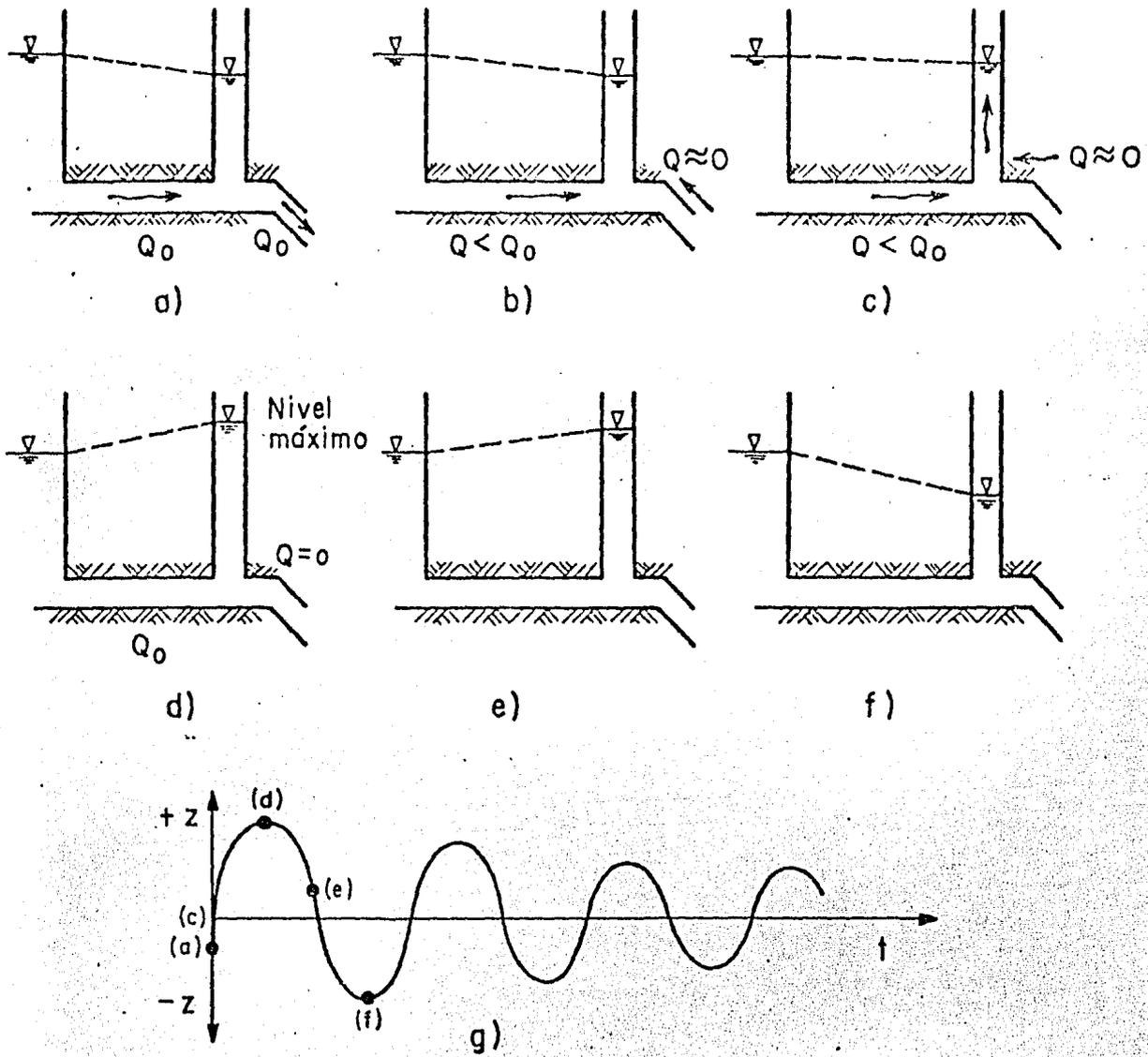


Fig 1.3 Variación de la superficie libre del agua en la cámara para el caso de rechazo (cierre rápido)

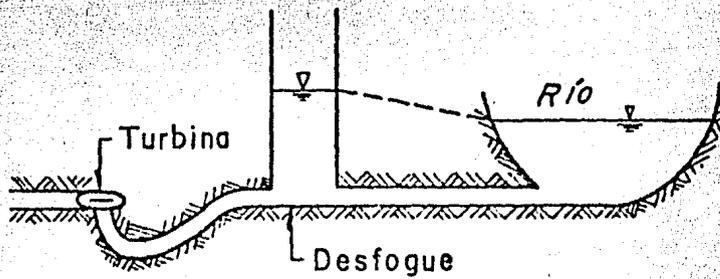
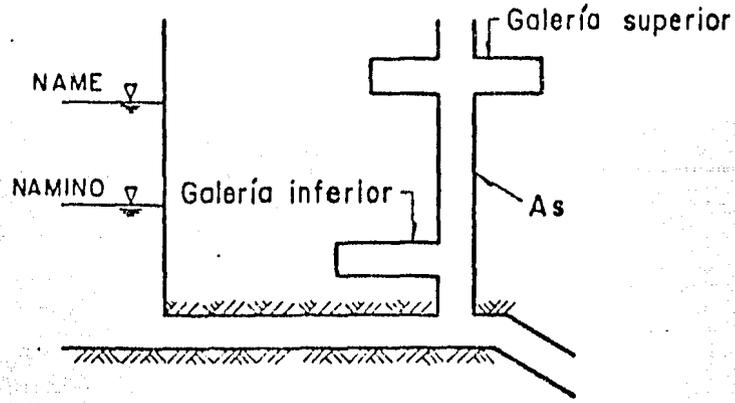
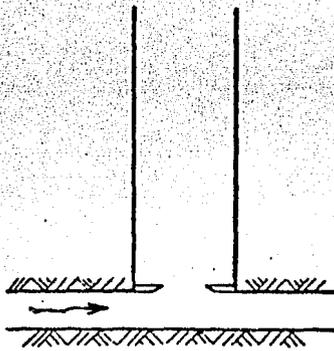


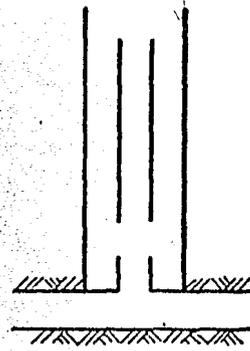
Fig 1.4 Cámara aguas abajo



a) Con galerías o expansiones

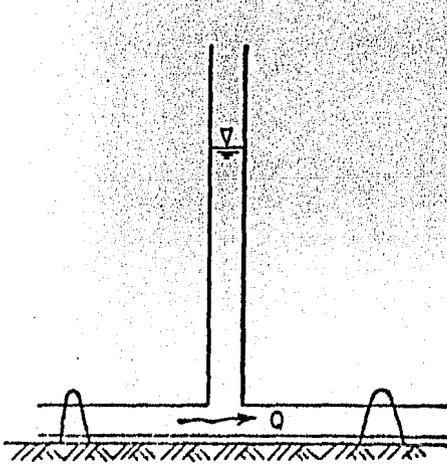


b) Con orificio

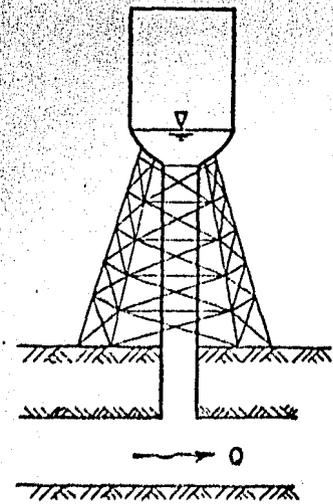
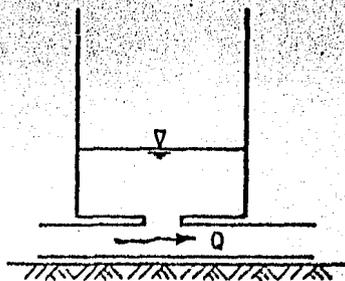


c) Johnson o diferencial

Fig 1.5 Cámaras especiales



a) Superficiales



b) Mixta

Fig 1.6 Clasificación según su posición relativa en el terreno

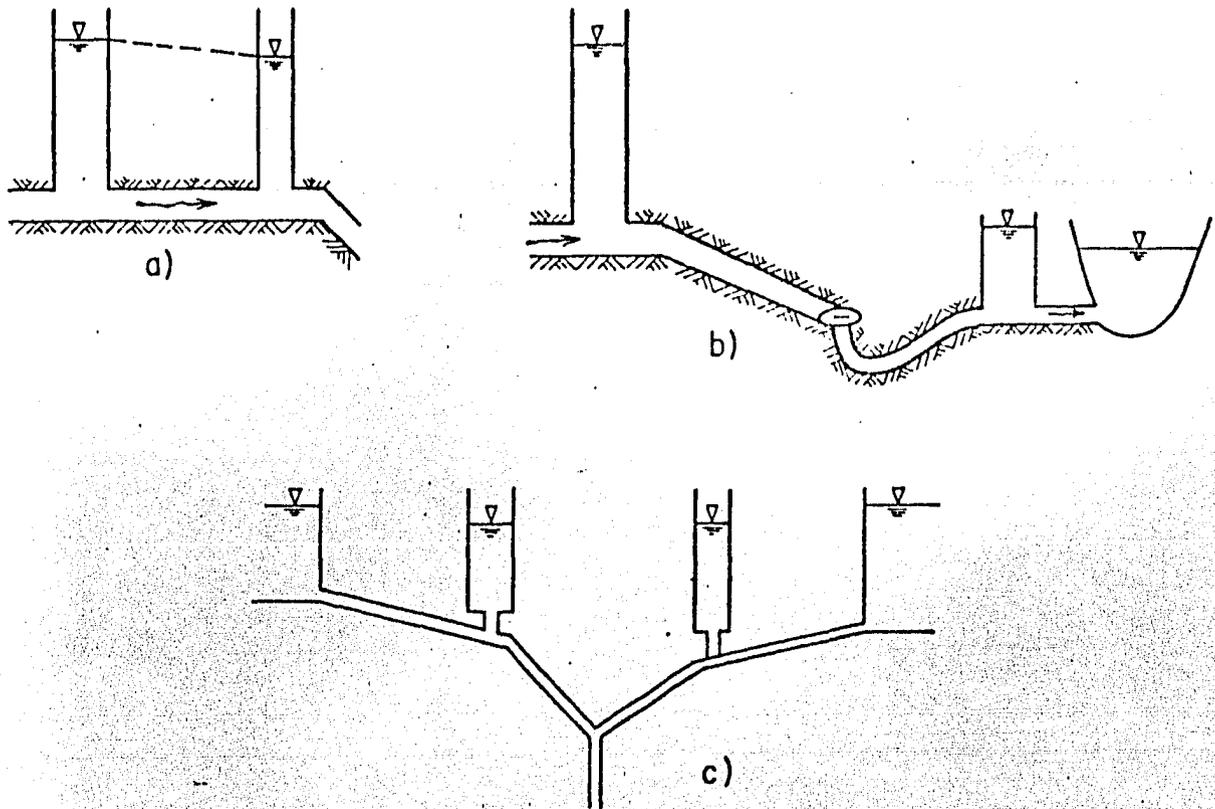


Fig 1.7 Cámaras múltiples

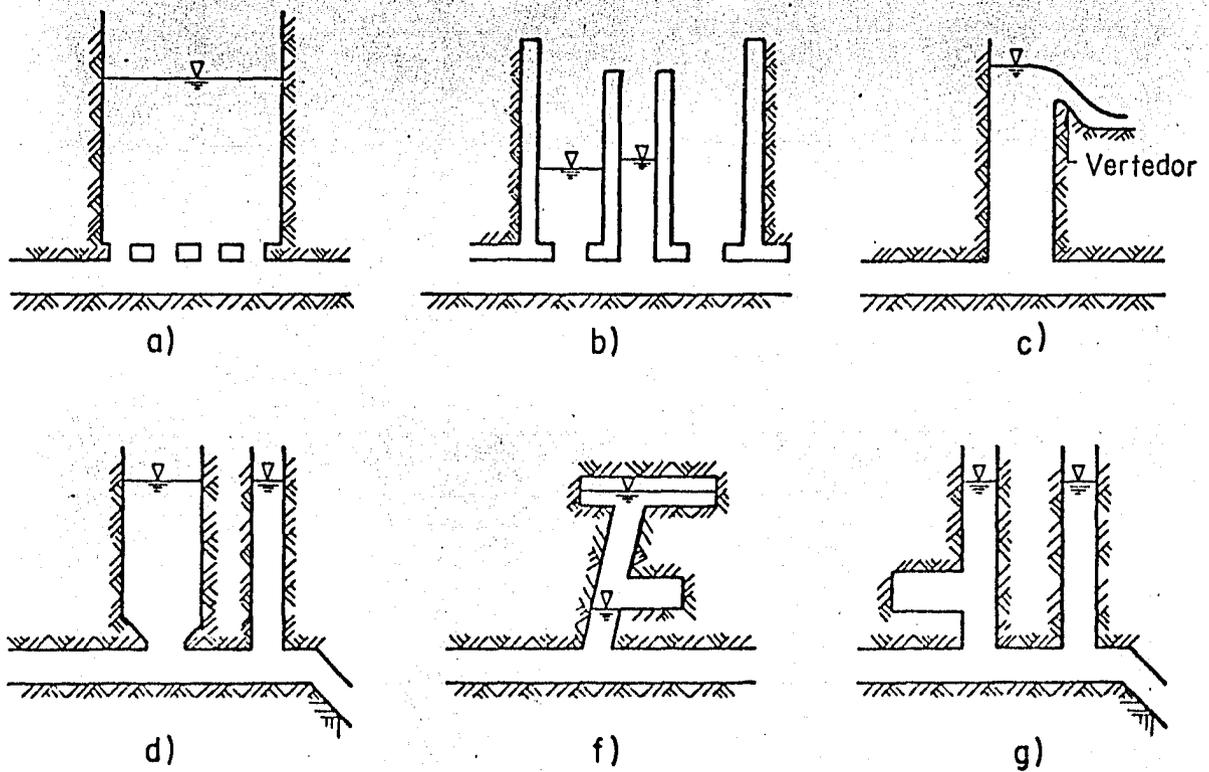


Fig 1.8 Otros tipos de diseños

## 2. ECUACIONES FUNDAMENTALES, SUS CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA

En este capítulo se obtienen las ecuaciones fundamentales que describen el fenómeno de las oscilaciones de masa descritas en el capítulo anterior. Para simplificar la discusión, se analiza el caso de un sistema hidroeléctrico con una cámara de oscilación simple (esto es, una cámara de área transversal constante); en capítulos subsecuentes se modifican las ecuaciones aquí obtenidas para los otros tipos de cámaras discutidas en el subcap 1.3 .

Las ecuaciones fundamentales constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales totales y para resolverlo, es necesario definir sus condiciones iniciales, así como la variación de algunas variables en el tiempo. Desde el punto de vista del fenómeno físico que se está estudiando, esto corresponde a las maniobras en la operación del sistema hidroeléctrico. Esto se discute en la segunda parte del capítulo.

## 2.1 Ecuaciones fundamentales

En la fig 2.1 se muestra un sistema hidroeléctrico con una cámara de oscilación simple, así como la definición de las variables principales. Para la obtención de las ecuaciones se considera

- a) Las paredes del túnel son prácticamente rígidas; ésto es, el cambio en área transversal del túnel ante un incremento de presión es nulo.
- b) El agua se comporta como un fluido incompresible; ésto es cierto dado que las oscilaciones en la cámara son mucho más lentas que las ondas de presión del golpe de ariete (donde si se considera la compresibilidad del agua).
- c) La masa de agua contenida en la cámara de oscilación es muy pequeña comparada con la del túnel y por tanto, puede despreciarse.
- d) Las pérdidas de energía por fricción o locales durante el transitorio se calculan con ecuaciones de flujo permanente.

Para la duración de los transitorios en este tipo de sistemas (menos de 10 min por ejemplo) se considera que el nivel del embalse no varía.

Por tanto se toma como eje para medir las oscilaciones el nivel del embalse, y son positivas hacia arriba y negativas en caso contrario. Para una cámara aguas arriba la velocidad (y el gasto) es positiva cuando va del embalse a la cámara.

### 2.1.1 Ecuación dinámica

Supóngase que en el sistema mostrado en la fig 2.1, en régimen estable o permanente fluye un gasto  $Q$ . Debido a las pérdidas de energía el nivel en la cámara de oscilación está por debajo del embalse; dicha diferencia corresponde a  $z_0$ . Por algún motivo, el gasto turbinado;  $Q_t$ , (igual a  $Q$  en condiciones establecidas), es disminuido rápidamente; la desaceleración de la masa en el túnel provoca que el nivel en la cámara suba; estos efectos pueden valuarse con la segunda ley de Newton aplicada en una dirección coincidente con el eje del túnel

$$\Sigma F = ma \quad (2.1)$$

Debido a la hipótesis c, la masa,  $m$ , que se desacelera corresponde solamente a la del túnel.

$$m = \rho \cdot V = \rho A_T L \quad (2.2)$$

donde

- $\rho$  densidad específica, en  $\text{kg/m}^3$
- $V$  volumen de agua en el túnel, en  $\text{m}^3$
- $A_T$  área transversal del túnel, en  $\text{m}^2$
- $L$  longitud del túnel, en  $\text{m}$

La desaceleración es la variación temporal de la velocidad, ésto es

$$a = \frac{dV}{dt} \quad (2.3)$$

donde  $V$  velocidad media en el túnel, en m/s .

El segundo miembro de la ec 2.1 queda por tanto

$$m a = \rho A_T L \frac{dV}{dt} \quad (2.4a)$$

$$= \rho L \frac{dQ}{dt} \quad (2.4b)$$

donde  $Q = A_T V$  , gasto en el túnel, en m<sup>3</sup>/s.

La desaceleración de la masa del túnel es balanceada con las fuerzas que actúan sobre dicha masa. Dichas fuerzas son las de presión, la componente del peso y la de resistencia al flujo por la fricción.

Las fuerzas de presión serían:

$$F_1 - F_2 = p_1 A_T - p_2 A_T = \rho g H_i A_T - \rho g (H_a + z) A_T$$

$$F_1 - F_2 = \rho g A_T (H_i - H_a - z) \quad (2.5)$$

donde  $p$  presión en N/m;  $g$  aceleración de la gravedad, en m /s, la  $z$  es el nivel de la oscilación (positiva hacia arriba) y tomará distintos valores conforme la masa se desacelere. Al inicio del transitorio vale  $-z_0$  .

La componente del peso en la dirección del movimiento será

$$W_x = \rho g A_T L \text{ sen } \alpha \quad (2.6a)$$

como  $\text{sen } \alpha = (H_a - H_i)/L$

$$W_x = \rho g A_T (H_a - H_i) \quad (2.6b)$$

Las pérdidas locales, así como la carga de velocidad en la cámara son pequeñas, comparadas con las pérdidas por fricción. Las fuerzas debido al frotamiento del flujo con las paredes pueden valuarse con el esfuerzo cortante o tangencial medio,  $\tau_o$ , sobre las paredes, ésto es

$$F_R = \tau_o p_m L \quad (2.7)$$

donde

$p_m$  perímetro de la sección del túnel

Puede demostrarse (Sotelo, 1976) que el esfuerzo cortante se expresa en función del gradiente de energía como

$$\tau_o = \rho g R_H S_f \quad (2.8)$$

donde  $R_H = A_T/p_m$  radio hidráulico

$S_f$  gradiente de energía

Sustituyendo 2.8 en 2.7 y simplificando

$$F_R = \rho g R_H S_f p_m L = \rho g A_T S_f L \quad (2.9)$$

Si se acepta el inciso d) enunciado al principio de este capítulo,  $S_f$  pue

de calcularse con las ecuaciones de Darcy-Weisbach o con la de Manning-Strickler. Si se utiliza la ec de Darcy-Weisbach (Sotelo, 1976)

$$S_f = \frac{h_f}{L} = \frac{f}{D_T} \frac{V^2}{2g} \quad (2.10a)$$

o bien

$$S_f = \frac{f}{D_T} \frac{Q^2}{2g A_T^2} \quad (2.10b)$$

donde

$h_f$  pérdida de energía por fricción, en m

$f$  coeficiente de Darcy-Weisbach, adimensional

$D_T$  diámetro del túnel, en m

con la ecuación de Manning-Strickler resulta

$$S_f = \left( \frac{nV}{R_h^{2/3}} \right)^2 = \frac{n^2 V^2}{R_h^{4/3}} \quad (2.11a)$$

$$S_f = \frac{n^2 Q^2}{A^2 R_h^{4/3}} \quad (2.11b)$$

sustituyendo por ejemplo 2.10 en 2.9

$$F_R = \frac{\rho g A_T L}{D_T 2g} f V^2 = \frac{\rho g f L}{D_T 2g A_T} Q^2$$

Dado que  $F_R$  se opone al movimiento, tendrá signo contrario a éste.

Para tomar en consideración que la velocidad cambia de signo, la ecuación anterior se escribe como

$$F_R = - \frac{\rho g A_T L f}{D_T 2g} V|V| = - \frac{\rho g f L}{D_T 2g A_T} Q|Q| \quad (2.12)$$

Así, si  $V > 0$ , el producto  $V|V|$  es positivo (y por tanto  $F_R$  es negativo) y si  $V < 0$ , dicho producto es negativo (y  $F_R$  positivo); lo anterior no puede discernirse tan fácilmente si se escribe  $V^2$  ya que  $F_R$  resulta siempre negativo.

Al agrupar las fuerzas de presión (ec 2.5), de peso (ec 2.6) y de fricción (ec 2.12) se tiene

$$\Sigma F = \rho g A_T (H_i - H_a - z) + \rho g A_T (H_a - H_i) - \frac{\rho g A_T f L}{D_T 2g} V|V|$$

Igualando con la ec 2.4a y dividiendo entre  $\rho g A_T$

$$(H_i - H_a - z) + (H_a - H_i) - \frac{f L}{D_T 2g} V|V| = \frac{L}{g} \frac{dV}{dt}$$

simplificando y reordenando

$$\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} = -z - \frac{f L}{D_T 2g} V|V| \quad (2.13)$$

La ec 2.13 se acostumbra escribir como

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{g}{L} (z + F V|V|) \quad (2.14)$$

Si en lugar de la velocidad, se usa como variable el gasto

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{g A_T}{L} (z + F_1 Q|Q|) \quad (2.15)$$

En las dos ecuaciones anteriores

$$F = f L / (2g D_T) \quad (2.16a)$$

(Darcy-Weisbach)

$$F = n^2 L / R_h^{4/3} \quad (2.16b)$$

(Manning)

$$y \quad F_1 = F / A_T^2 \quad (2.17)$$

Si las pérdidas locales fueran importantes, pueden incluirse en la F como

$$F = \frac{f L}{2g D_T} + \frac{1}{2g} \Sigma K_i \quad (2.18)$$

donde  $K_i$  coeficiente de pérdida local.

### 2.1.2 Ecuación de continuidad

Para la obtención de esta ecuación, se hace un balance de gastos en el nudo donde se unen el túnel, la cámara de oscilación y la tubería de presión (fig 2.1), ésto es

$$Q = Q_c + Q_t \quad (2.19)$$

donde

$Q$  gasto en el túnel en  $m^3/s$

$Q_c$  gasto hacia la cámara en  $m^3/s$

$Q_t$  gasto por la tubería de presión en  $m^3/s$

Se sabe que 
$$Q = A_T V \quad (2.20)$$

y además 
$$Q_c = \frac{d(A_s z)}{dt} \quad (2.21)$$

Si el área de la cámara es constante

$$Q_c = A_s \frac{dz}{dt} = A_T U \quad (2.22)$$

donde  $U$  velocidad del flujo en la cámara, en  $m/s$

El gasto  $Q_t$  (que es el que pasa por las turbinas), es el gasto que se modifica en las maniobras.

Sustituyendo las ecs 2.20 y 2.22 en la 2.19 resulta

$$V A_T = A_s \frac{dz}{dt} + Q_t$$

de donde

$$\frac{dz}{dt} = \frac{V A_T - Q_t}{A_s} \quad (2.23)$$

o también, empleando gastos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q - Q_t}{A_s} \quad (2.24)$$

Las ecs 2.14 y 2.23 (o sus homólogas 2.15 y 2.24) forman un sistema de ecuaciones diferenciales totales; su integración, con las condiciones iniciales y de frontera adecuadas, representan las oscilaciones en un sistema hidroeléctrico con cámara simple como el de la fig 2.1 .

## 2.2 Condiciones de frontera

Las plantas hidroeléctricas participan generalmente en sistemas hidroeléctricos mayores que deben generar energía siguiendo curvas de demanda. Los cambios en la demanda de potencia se satisfacen regulando el gasto de entrada a las turbinas abriendo o cerrando los álabes móviles del distribuidor. Si los mecanismos de regulación son eficientes, se considera que a una variación porcentual del gasto de admisión a la turbina corresponderá una variación porcentual igual en la potencia entregada por ella y viceversa. Los movimientos del distribuidor para ajustar la potencia entregada a la demanda se conocen como maniobras de demanda o de rechazo de carga.

Estas maniobras pueden presentarse durante la operación de la planta y pueden agruparse de distintas maneras.

Atendiendo al cambio impuesto en el gasto de admisión a la turbina las maniobras pueden clasificarse en maniobras de rechazo de carga (en las cuales el gasto de admisión se reduce) y en maniobras de demanda de carga (en las cuales el gasto de admisión crece).

Si se consideran los límites entre los cuales varía el gasto de admisión, puede hablarse de maniobras totales o maniobras parciales. En las primeras el gasto varía entre cero y un 100% de su valor de diseño.

Si lo que se toma en cuenta es el tiempo necesario para realizar las maniobras éstas podrán clasificarse en maniobras instantáneas y maniobras no instantáneas. En general el tiempo de maniobras definido con el período de las variaciones de la presión del golpe de ariete es muy pequeño comparado con el período de las oscilaciones en la cámara, por lo que las maniobras pueden considerarse prácticamente instantáneas. Sin embargo existen maniobras no instantáneas, en las cuales el gasto de admisión a la turbina aumenta o disminuye de alguna manera entre sus límites durante el tiempo de maniobra.

Antes de dar una clasificación que agrupe todas las maniobras posibles cabe aclarar que se considera que el nivel estático del almacenamiento aguas arriba se conserva constante durante el transitorio que genera cualquier tipo de maniobra.

#### MANIOBRAS DE RECHAZO DE CARGA

Variables empleadas

- $Q_0$  gasto en condiciones establecidas, antes del transitorio; generalmente se asocia al gasto de la turbina,  $Q_t$
- $Q_1$  gasto al final del transitorio
- $Q$  gasto en un instante cualquiera
- $t_0$  tiempo cualquiera para condiciones establecidas ( $Q = Q_0$ )
- $t_1$  tiempo al final del transitorio
- $t$  tiempo en un instante cualquiera

Las condiciones iniciales son las siguientes ( $t = t_0$ )

$$V_0 = Q_0 / A_T \quad \text{y} \quad z_0 = F V_0 |V_0|$$

### Rechazo total instantáneo

$$\begin{array}{ll} \text{para } t = t_0 & Q = Q_0 \\ \text{para } t = t_0 + \Delta t & Q = Q_1 = 0 \\ \Delta t \rightarrow 0 & \end{array}$$

### Rechazo total no instantáneo, fig 2.2a

$$\begin{array}{ll} \text{para } t = t_0; & Q = Q_0 \\ t = t_1; & Q = Q_1 = 0 \end{array}$$

La variación de  $Q$  con el tiempo puede obtenerse interpolando entre los puntos de la ley dada en la fig 2.2a .

### Rechazo parcial instantáneo

$$\begin{array}{ll} \text{para } t = t_0 & Q = Q_0 \\ t = t_0 + \Delta t & Q = Q_1 > 0 \\ \Delta t \rightarrow 0 & \end{array}$$

### Rechazo parcial no instantáneo, fig 2.2b

$$\begin{array}{ll} \text{para } t = t_0 & Q = Q_0 \\ t = t_1 & Q = Q_1 > 0 \end{array}$$

La variación de  $Q$  con el tiempo puede obtenerse interpolando de los puntos de la ley dada en la fig 2.2b .

#### MANIOBRAS DE DEMANDA O TOMA DE CARGA

Variables empleadas

$Q_1$  gasto antes de la maniobra,  $Q_1 \geq 0$  ,  $Q_1 = Q_t$

$Q_0$  gasto al final de la maniobra,  $Q_0 = Q_t$

$Q$  gasto en un instante cualquiera

$t_1$  tiempo asociado a  $Q_1$

$t_0$  tiempo asociado a  $Q_0$

$t$  tiempo en un instante cualquiera

En este caso las condiciones iniciales se definen con

$$V_1 = Q_1/A_T$$

$$z_1 = F V_1 |V_1|$$

Nótese que si  $Q_1 = 0$  (o sea que no hay flujo)

$$V_1 = 0 \quad \text{y} \quad z_1 = 0$$

#### Demanda total instantánea

para  $t = t_1$  ,  $Q = Q_1 = 0$  ;

para  $t = t_1 + \Delta t$   $Q = Q_0$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

Demanda total no instantánea, fig 2.2c

$$\text{para } t = t_1, \quad Q = Q_1 = 0 ;$$

$$\text{para } t = t_0, \quad Q = Q_0$$

Demanda parcial instantánea

$$\text{para } t = t_1, \quad Q = Q_1 \geq 0 ;$$

$$\text{para } t = t_1 + \Delta t \quad Q = Q_0$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

Demanda parcial no instantánea, fig 2.2d

$$\text{para } t = t_1, \quad Q = Q_1 \geq 0$$

$$t = t_0 \quad Q = Q_0$$

## MANIOBRAS A POTENCIA CONSTANTE

Para poder mantener una producción constante de la potencia el gobernador de la turbina regula la cantidad de gasto que se requiere durante el transitorio; el valor del gasto,  $Q$ , se obtiene de la ecuación para la potencia de la turbina. Si  $P$  es la potencia que se desea generar, para condiciones establecidas, antes del transitorio se tiene que

$$P = \rho g \eta_0 Q_0 H_0 \quad (2.25)$$

y para un instante cualquiera en el transitorio

$$P = \rho g \eta Q_t (H + z) = K Q_t (H + z) \quad (2.26)$$

H y z se definen en la fig 2.1 .

Como P se mantendrá constante igualando las dos ecuaciones anteriores y despejando  $Q_t$  resulta

$$Q_t = \frac{P}{K(H + z)} \quad (2.27)$$

Observando la ec 2.27 puede verse que si se quiere satisfacer una ley de potencia constante el gasto variará conforme se vaya presentando el transitorio, es decir, si z aumenta  $Q_t$  disminuye; esta disminución del gasto, semejante a la de un rechazo provoca a su vez que z aumente. Con esto se quiere decir que las oscilaciones tienen a crecer por la forma de la ley de potencia constante, siendo la fricción el parámetro que evita que dichas oscilaciones crezcan indefinidamente. Cuando las oscilaciones crecen de período a período se dice que el sistema es inestable. Esto se discute en el subcap 3.6 .

#### MANIOBRA A POTENCIA CONSTANTE CON RESTRICCIONES

En la maniobra anterior se consideró que la máquina es capaz de mantener constante la potencia entregada; ésto implica que los álabes del distribuidor son capaces de abrirse indefinidamente y admitir el gasto que sea necesario. Sin embargo, los álabes del distribuidor sólo pueden abrirse hasta un cierto límite para el cual ya no se satisface la ley de potencia constante; el funcionamiento puede aproximarse ahora al de un orificio.

Por tanto el funcionamiento del sistema es el siguiente: la máquina entregará potencia constante para cargas mayores que la establecida, pero a partir del momento en que la carga neta sobre la turbina caiga por debajo de ese valor, la potencia descenderá y el gasto estará gobernado por la ley del orificio.

La carga establecida coincidirá con el punto de bloqueo de los álabes del distribuidor, es decir, será la carga para la cual la máquina entrega su potencia máxima para la máxima apertura del distribuidor.

El funcionamiento anterior se describe con la ley siguiente

$$Q_t = C_d A \sqrt{2g (H + z)}$$

en donde  $C_d A$  es el área efectiva máxima del distribuidor.

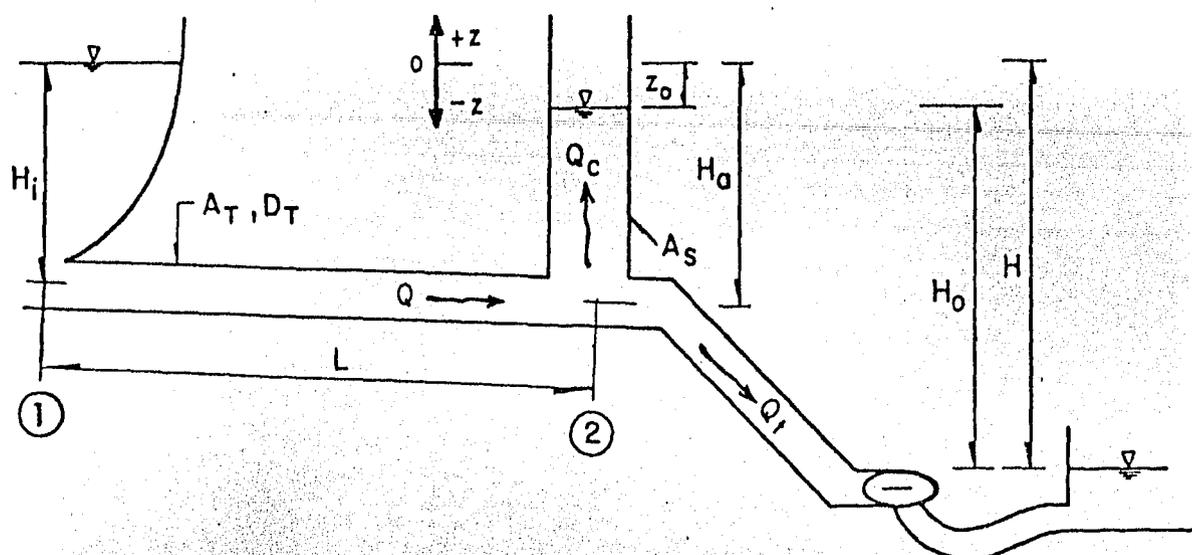
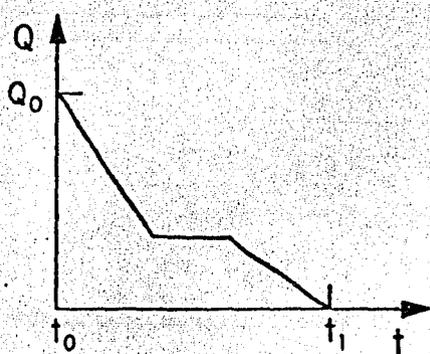
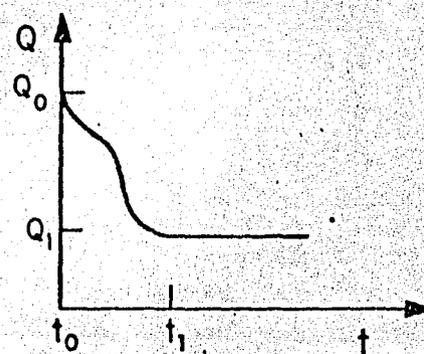


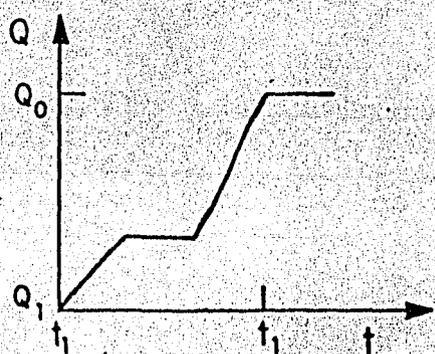
Fig 2.1 Definición de variables



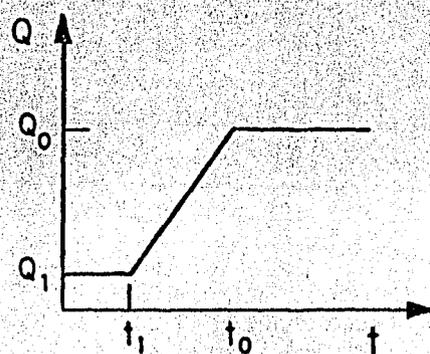
a)



b)



c)



d)

Fig 2.2 Algunos tipos de maniobras

### 3. METODOS DE SOLUCION. ANALISIS DE LA CAMARA SIMPLE

La integración directa de las ecuaciones fundamentales 2.14 y 2.23 sólo es posible en algunos casos particulares que además no son muy comunes en la práctica. Por ello se ha recurrido a otro tipo de métodos como los iterativos, los gráficos o los de integración numérica. En este capítulo se discuten algunos de los principales métodos. Al final del capítulo se resuelve un ejemplo para una cámara simple. Se discute también la estabilidad.

#### 3.1 *Solución para el caso de fricción nula. Cámara simple*

La integración de las ecs 2.14 y 2.23 es posible en el caso de que se desprecien las pérdidas por fricción en el túnel, ya sea en maniobras de rechazo o toma de carga, instantáneos. Al despreciar la fricción, la ecuación dinámica 2.14 se simplifica como

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{g}{L} z \quad (3.1)$$

y la ecuación de continuidad 2.23 como

$$\frac{dz}{dt} = \frac{A_T}{A_S} v \quad (3.2)$$

derivando la ec 3.2 con respecto al tiempo y sustituyendo en la 3.1 resulta

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A_S}{A_T} \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$\frac{L}{g} \frac{A_S}{A_T} \frac{d^2 z}{dt^2} + z = 0$$

que es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, con coeficientes constantes; su solución general es de la forma

$$z = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{L} \frac{A_T}{A_S}} t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{L} \frac{A_T}{A_S}} t \quad (3.3)$$

en la que  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración observando que la ec 3.3 es un argumento de las funciones seno y coseno y de la definición de período.

$$\frac{2\pi t}{T} = \sqrt{\frac{g}{L} \frac{A_T}{A_S}} t$$

de donde

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_S}{A_T}} \quad (3.4)$$

que es el período de las oscilaciones para el caso de fricción nula (llamado también período no amortiguado). Este período es el tiempo en tre dos máximos (o dos mínimos) sucesivos.

Para obtener el valor de las constantes de integración en la ec 3.3 se recurre a las condiciones iniciales y de frontera. Supóngase que en el sistema hay un flujo con velocidad  $V_T = V_0$ ; dado que la fricción es nu la  $z = 0$ . Para una maniobra de rechazo total instantáneo, en  $t = 0 + \Delta t$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , en la ec 3.3 resulta

$$z = 0 = C_1 \cos 0^\circ$$

de donde  $C_1 = 0$

por tanto

$$z = C_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

Considerando la forma de esta ecuación, puede verse que  $C_2$  corresponde a la semiamplitud de la oscilación no amortiguada que se define con la literal  $z_*$ . Por tanto la ecuación que representa las oscilaciones para el caso de fricción nula es

$$z = z_* \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t \quad (3.5)$$

Para obtener la semiamplitud  $z_*$  se deriva la ec 3.5 con respecto al tiem po, e igualando con la ec 3.2

$$\frac{dz}{dt} = z_* \left( \cos \frac{2\pi}{T} t \right) \frac{2\pi}{T} = \frac{A_T}{A_B} v$$

Para

$$t = 0, z = 0, V = V_0 \text{ y } \cos \frac{2\pi}{T} t = 1$$

y sustituyendo además el valor de T se obtiene

$$z_* = \frac{A_T}{A_S} V_0 \frac{T}{2\pi} = \frac{A_T}{A_S} V_0 \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_S}{A_T}}$$

finalmente

$$z_* = V_0 \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_T}{A_S}} \quad (3.6a)$$

o empleando gastos

$$z_* = Q_0 \sqrt{\frac{L}{g A_T A_S}} \quad (3.6b)$$

Sí se deriva ahora la ec 3.1 con respecto al tiempo y se utilizan las condiciones de frontera correspondientes puede obtenerse la siguiente expresión para la velocidad

$$V = V_0 \cos \frac{2\pi}{T} t \quad (3.7)$$

Se observa que la ec 3.5 es una senoide y la ec 3.7 una cosenoide desfasadas un cuarto de período, fig 3.1. Por tanto, cuando z es un máximo (o un mínimo), la velocidad es nula; por el contrario cuando la velocidad es máxima (o mínima) la z es nula.

En caso de apertura súbita de la válvula de la turbina en la cual  $Q_1$  se incrementa a  $Q_0$  se obtiene la ecuación

$$z = (V_1 - V_0) \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_T}{A_S}} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t \quad (3.8)$$

en donde  $V_1 < V_0$

Sí se considera un rechazo de carga no instantáneo, líneal, Calame y Gaden (1926) relacionaron las oscilaciones máximas con el tiempo de cierre, en forma adimensional, tabla 3.1

$\theta = \frac{t_c}{T}$	$z_{\text{máx}}/z_*$
0.00	1.00
0.18	0.98
0.50	0.63
0.75	0.43
1.00	0.32

Tabla 3.1

Nótese que si el tiempo de cierre adimensional es menor de  $\theta \leq 0.2$  en la práctica no tiene influencia sobre las oscilaciones máximas (por eso es común considerar que si  $\theta < 0.2$ , la maniobra es de rechazo total instantáneo). Por otro lado si se desean disminuir las oscilaciones aumentando el tiempo de cierre, hay que aumentarlo en forma considerable lo que puede resultar inconveniente en la práctica.

Aunque puede argüirse que la discusión de este subcapítulo es impráctica, dado que en todo sistema real la fricción si es importante, sirve para entender la mecánica de las oscilaciones e introducir las definiciones de período y semiamplitud no amortiguadas.

### 3.2 Solución con gráficas

No existe solución como la dada por la ec 3.5 para el caso de fricción no nula. Sin embargo, Calame y Gaden introduciendo parámetros relativos y variables adimensionales obtuvieron expresiones que permiten calcular el tamaño de las oscilaciones para maniobras de rechazo y toma de carga instantáneos. El manejo de la teoría de parámetros relativos es compleja y sale del objetivo de este capítulo. El lector interesado puede consultar el texto de Jaeger (1977) o los trabajos de Berezowsky y Aparicio (1981) y Autrique y Berezowsky (1982).

En la fig 3.2 se muestran las curvas para calcular las oscilaciones máximas en maniobras de rechazo total instantáneo de carga. La fig 3.3 corresponde a la maniobra de toma instantánea de carga. Los parámetros que se utilizan son

$$F_{ro} = F V_0^2 / z_* \quad ; \quad z_r = z_{\text{máx}} / z_* \quad (3.9)$$

Estas gráficas son muy útiles ya que permiten obtener los máximos y mínimos en forma rápida y precisa, sobre todo en las etapas preliminares de diseño cuando el dimensionamiento se hace en general por iteraciones. Una vez que se tiene el tamaño de la cámara, es necesario revisar su funcionamiento en forma completa por lo que deben de usarse métodos que integren las ecuaciones.

### 3.3 Métodos iterativos de integración

Son los métodos que se han usado tradicionalmente para el cálculo de oscilaciones. Existen varios métodos los más comunes son:

#### a) Método de Pressel

Las ecs 2.14 y 2.23 se escriben en diferencias finitas como

$$\Delta V = -g \Delta t (z_m + F V_m |V_m|) / L \quad (3.10)$$

$$\Delta z = (V_m A_T - Q_m) \Delta t / A_s \quad (3.11)$$

donde

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (3.12a)$$

$$z_m = z_i + \Delta z / 2 \quad (3.12b)$$

$$V_m = V_i + \Delta V / 2 \quad (3.12c)$$

$$Q_m = (Q_{ti} + Q_{ti+1}) / 2 \quad (3.12d)$$

Las ecs 3.10 y 3.11 se resuelven por iteraciones sucesivas. El procedimiento es el siguiente:

1. Se fija un incremento de tiempo,  $\Delta t$
2. Se supone  $\Delta V$  y se calcula  $V_m$  (ec 3.12c) y  $F V_m |V_m|$
3. Se calcula  $z_m$  de la ec 3.10

$$z_m = - \left[ \frac{L}{g} \frac{\Delta V}{\Delta t} + F V_m |V_m| \right]$$

4. Se calcula  $\Delta z = 2 (z_m - z_i)$  de la ec 3.12b
5. Se valua  $Q_{tm}$ , según el tipo de maniobra que se tenga (subcap 2.2)
6. Se calcula  $V_m$  de la ec 3.11

$$V'_m = - \frac{Q_{tm}}{A_T} + \frac{A_s}{A_T} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

7. Se calcula

$$\Delta V' = 2 (V'_m - V_i)$$

8. Si el  $\Delta V'$  del paso 7 es distinto al valor supuesto en el paso 2, se repiten los pasos 2 a 7 hasta que dichos valores sean aproximadamente iguales; en este caso, se pasa al siguiente instante de tiempo.

Una variante al método anterior consiste en suponer  $\Delta z$  en lugar de  $\Delta V$  (útil en el caso de cámaras con expansiones, donde se toma  $A_s$  como la media entre dos  $z$  sucesivas).

1. Se fija un  $\Delta t$
2. Se supone un valor de  $\Delta z$
3. Se calcula  $z_m$  en la ec 3.12b

En caso de que la cámara sea de sección variable, con  $z_i$  y

$z_{i+1} = z_i + \Delta z$ , se calculará  $A_{si}$  y  $A_{si+1}$  y  $A_{sm} = (A_{si} + A_{si+1})/2$

4. Se calcula  $Q_m$  dependiendo del tipo de maniobra
5. Con la ec 3.11 se obtiene  $V_m$

$$V_m = \frac{Q_m}{A_T} + \frac{A_{sm}}{A_T} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

6. Se calculan

$$\Delta V = 2 (V_m - V_i) \text{ y } F V_m |V_m|$$

7. De la ec 3.10 se obtiene

$$z'_m = - \left( \frac{L}{g} \frac{\Delta V}{\Delta t} + F V_m |V_m| \right)$$

8. Se calcula  $\Delta z' = 2 (z'_m - z_i)$

9. Se compara  $\Delta z'$  del paso 8 con el supuesto en el paso 3; si son suficientemente iguales, se pasa al siguiente incremento de tiempo; si no son iguales, se repiten los pasos 2 al 9.

Aunque algunos autores señalan que pueden usarse incrementos de tiempo,  $\Delta t$ , del orden de un décimo del período con los métodos anteriores, en realidad si se quiere lograr precisión y una convergencia más rápida, hay que usar  $\Delta t$  muy pequeños (del orden de un centésimo o cuando más un cincuentavo del período). Por otro lado el proceso iterativo requiere de cierta experiencia, sobre todo en el primer método expuesto ya que intuitivamente no se conoce la variación de la velocidad y por tanto es difícil suponer  $\Delta V$ . El segundo procedimiento es un poco mejor ya que se adquiere mejor idea de los valores que puede ir tomando la elevación de la superficie del agua. Para esto pueden ayudar también los valores obtenidos con las gráficas discutidas en el subcapítulo anterior.

### b) Método de Scimeni

Es una simplificación del método de Pressel en el que no se consideran valores medios. El procedimiento es el siguiente

1. Se obtiene  $Q_{i+1}$  de la ley de cierre

2. De la ec 3.11 se obtiene

$$\Delta z_i = (V_i A_T - Q_{i+1}) \Delta t / A_s$$

3. Se calcula la  $z$  al final del intervalo

$$z_{i+1} = z_i + \Delta z_i$$

4. Se calcula  $\Delta V_i$  con la ec 3.10

$$\Delta V_i = -g \Delta t (z_{i+1} + F V_i |V_i|) / L$$

5. Se obtiene  $V_{i+1} = V_i + \Delta V_i$  y se pasa al siguiente instante.

Para que con este método se obtengan resultados precisos es necesario usar incrementos de tiempo muy pequeños ( $\Delta t < T/200$ , aproximadamente) ya que las aproximaciones a las derivadas son de primer orden.

Existen otros métodos como los aquí descritos que pueden consultarse en el trabajo de Tirado (1978).

### 3.4 Métodos gráficos

Una forma de evitar las iteraciones, sobre todo cuando no se dispone de calculadora, es recurrir a métodos gráficos. Estos métodos, de los

cuales se destacan el de Schoklitsch (Jaeger, 1977) y el de construcción radial (Brown, 1958) fueron muy usados. Además de evitar las iteraciones tienen la ventaja de su relativa precisión y adaptabilidad a los varios casos de la práctica (ésto es a los distintos tipos de cámara). Tienen como desventaja que el procedimiento de cálculo se vuelve mecánico, y no es obvio la forma como las ecuaciones fundamentales se van resolviendo en el tiempo. En la actualidad los métodos gráficos ya no son muy usados dado que pueden sustituirse con ventaja por los métodos de integración numérica.

### 3.5 *Métodos de integración numérica*

Estos métodos han sido desarrollados con el objeto de dar una solución rápida y precisa a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por tanto podemos hacer uso de ellos para resolver las ecuaciones diferenciales que se presentan en los diversos sistemas con cámaras de oscilación.

Se han desarrollado una gran variedad de métodos numéricos, siendo unos más precisos que otros de acuerdo a su aproximación con la función verdadera. Los métodos que se usaran aquí para la solución de las ecs 2.14 y 2.23 son los debidos a Heun y Runge-Kutta, los cuales están clasificados como métodos directos de un paso (entendiéndose por ésto que con la información de un instante se puede calcular la del siguiente instante, sin necesidad de iterar).

En el Apéndice I se presenta una introducción a los métodos de integración numérica así como su interpretación geométrica. De los múltiples

métodos existentes se han elegido el de Heun (que es un método de segundo orden; comparable al de Pressel pero en el que no es necesario iterar) por su sencillez ya que puede usarse aún con calculadoras pequeñas (ver ejemplo al final de este capítulo) y el de Runge-Kutta (de cuarto orden).

Por su precisión y eficiencia. Este método es el que se usa en la práctica profesional hoy en día (como puede verse en el Chaudry (1979), en los caps A.2.5, Cámaras de oscilación (1981) y A.2.16, Métodos numéricos (1983), del manual de Diseño de Obras Civiles de CFE, etc) por su precisión y eficiencia, así como adaptabilidad a problemas complejos. Baste señalar aquí que considerando los métodos iterativos discutidos en el subcap 3.3, los métodos de Pressel son aproximadamente de segundo orden pero el proceso iterativo los hace mucho menos eficientes que el de Heun que se discute más adelante. El método de Schimeni es un método aproximadamente de primer orden, comparable al de Euler; por esta razón para poder obtener resultados precisos es necesario usar incrementos de tiempo muy pequeños. En este sentido el método de Runge-Kutta, por ser de cuarto orden es el más preciso y eficiente de todos los métodos anteriores y es con el que podrían usarse incrementos de tiempo mayores (el orden de un método es un indicador del orden del error al comparar la ecuación diferencial y el método numérico; baste señalar aquí que entre más alto es el orden del método su aproximación es mejor). La selección del incremento de tiempo  $\Delta t$  está en función del tipo de cámara a utilizar así como de la maniobra. Para cámaras simples se sugiere empezar con un  $\Delta t$  entre un décimo y un veinteavo del período no amortiguado. Se recomienda repetir el cálculo con un incremento de tiempo de la mitad y comparar los resultados obtenidos; si son parecidos puede usarse el primer

incremento de tiempo y si son distintos debe partirse el incremento de tiempo de nuevo a la mitad hasta que se obtengan resultados semejantes. Desde el punto de vista práctico conviene redondear hacia abajo el incremento de tiempo a fracciones enteras de segundo o minuto, según sea el caso así por ejemplo, si  $\Delta t = T/20 = 16.35$ , se escoge  $\Delta t = 15$  que es un cuarto de minuto, etc.

a) Método de Heun

Sea  $\bar{y}$  el vector de variables dependientes; en el caso de una cámara simple

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ó también} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} Q \\ z \end{pmatrix} \quad (3.13a \text{ y } b)$$

según se utilice las ecs 2.14 y 2.23 o las 2.15 y 2.24. El sistema de ecuaciones diferenciales puede escribirse vectorialmente como

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}) = \left( \frac{dv}{dt} \quad \frac{dz}{dt} \right)^T \quad (3.14a)$$

o también.

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}) = \left( \frac{dQ}{dt} \quad \frac{dz}{dt} \right)^T \quad (3.14b)$$

donde  $T$  indica el vector transpuesto,  $dv/dt$ ,  $dz/dt$  y  $dQ/dt$  están dados por las ecs 2.14 y 2.23 ó 2.15 y 2.24 respectivamente.

Supóngase que se conocen los valores del vector  $\bar{y}$  para un tiempo dado  $t_m$ , (por ejemplo la condición inicial)

$$\bar{y}(t_m = 0) = \bar{y}(0) = (v_0, z_0) \quad (3.15a)$$

o también

$$\bar{y}(t_m = 0) = \bar{y}(0) = (q_0, z_0) \quad (3.15b)$$

para avanzar la solución al tiempo  $t_m + \Delta t = t_{m+1}$ , en el método de Heun se utilizan las siguientes expresiones

$$\bar{k}_1 = \Delta t \bar{f}(t_m, \bar{y}_m) \quad (3.16a)$$

$$\bar{k}_2 = \Delta t \bar{f}(t_m + \Delta t, \bar{y}_m + \bar{k}_1) \quad (3.16b)$$

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)/2 \quad (3.17)$$

conocidos los valores del vector  $\bar{y}_{m+1}$ , se pasa al siguiente instante utilizando estos valores como conocidos. Para una explicación del significado de las ecs (3.16) y (3.17), ver el Apéndice I.

Al final de este capítulo se resuelve un ejemplo con este método.

#### b) Método de Runge-Kutta

Como en el método de Heun, partiendo de una condición inicial (ec 3.15), para alcanzar la solución del tiempo  $t_m$  al  $t_{m+1} = t_m + \Delta t$  se utilizan las siguientes expresiones

$$\bar{k}_1 = \Delta t \bar{f}(t_m, \bar{y}_m) \quad (3.18a)$$

$$\bar{k}_2 = \Delta t \bar{f}(t_m + \Delta t/2, \bar{y}_m + \bar{k}_1/2) \quad (3.18b)$$

$$\bar{k}_3 = \Delta t \bar{f}(t_m + \Delta t/2, \bar{y}_m + \bar{k}_2/2) \quad (3.18c)$$

$$\bar{k}_4 = \Delta t \bar{f}(t_m + \Delta t, \bar{y}_m + \bar{k}_3) \quad (3.18d)$$

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + (\bar{k}_1 + 2\bar{k}_2 + 2\bar{k}_3 + \bar{k}_4)/6 \quad (3.19)$$

para calcular  $\bar{y}_{m+2}$  se utiliza el valor de  $\bar{y}_{m+1}$  corriendo los índices en las ecs (3.18) y (3.19). En el Apéndice I se muestra la interpretación geométrica de las variables  $\bar{k}_1$  a  $\bar{k}_4$ .

En capítulos subsecuentes se utiliza la adaptación hecha en el cap.

A.2.16 : Métodos numéricos (subcap A.2.16.7 Cámaras de Oscilación) del manual de CFE, Berezowsky *et al* (1983) de la rutina dada por Carnahan Luther y Wilkes (1969) del método de Runge-Kutta. Se escogió esta versión por su eficiencia y por la facilidad con que es posible manejar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en forma vectorial. Por ejemplo, en el trabajo de Aguilar (1981) se utiliza con ventajas para el análisis de cámaras de oscilación múltiples.

### 3.6 *Análisis de estabilidad. Cámara simple sujeta a maniobras de potencia constante*

Cuando se altera un sistema hidráulico por cambio en el flujo de la turbina el nivel de agua dentro de la cámara comienza a oscilar. Estas oscilaciones son estables o inestables dependiendo de los parámetros de la planta y del tipo y magnitud de la alteración impuesta. Las oscilaciones son estables si se amortiguan en un tiempo razonable y son inestables si se incrementan con el tiempo, fig 3.4.

Para que una cámara de oscilación sea estable debe por sí misma amortiguar las oscilaciones debidas a cambios bruscos de carga, sean éstos grandes o pequeños. Conviene que el tiempo de amortiguamiento sea corto; esto equivale a que, la relación entre un máximo y el anterior (relación de amortiguamiento) sea pequeño. Las oscilaciones no deben ser tan

grandes respecto a la carga total que provoquen dificultad en establecer una nueva producción de potencia.

Existen dos criterios para estudiar la estabilidad; el criterio de Thoma para oscilaciones pequeñas y el de Jaeger para oscilaciones grandes.

Además de los métodos propuestos por los antes mencionados pueden usarse otros métodos, como el del plano fase (ver por ejemplo Chaudry (1979)), válido tanto para oscilaciones grandes como pequeñas.

Se consideran oscilaciones de pequeña amplitud cuando  $z_p$  (ec 3.6) es menor que el 10 por ciento de  $H$  ( $H$  se define en la fig 2.1).

De las maniobras descritas en el subcap 2.2, las cuatro siguientes son las de más interés desde el punto de vista de estabilidad.

1. Gasto constante
2. Abertura constante de la válvula
3. Potencia constante
4. Potencia constante combinada con apertura total de la válvula.

Frank y Shuller (1938) integraron gráficamente las ecuaciones fundamentales (ecs 2.14 y 2.23) demostrando que las oscilaciones son siempre estables en los casos 1 y 2 si se toman en cuenta las pérdidas por fricción en el túnel.

El caso 3 fue estudiado por Thoma quien linealizó las ecuaciones diferenciales (aceptando oscilaciones pequeñas) y demostró que las oscilaciones son inestables si el área de la cámara es menor que un área mínima conocida como área de Thoma.

Jaeger (1960 y 1977) entre otros analizaron el caso de oscilaciones grandes demostrando que en este caso no es válido el criterio de Thoma. Esto también fue demostrado por Marris y Sideriades (1980) utilizando el método del plano fase.

Ruus (1969) analizó el caso 4 y demostró que las oscilaciones pequeñas son mucho más críticas para la estabilidad de la cámara que las grandes. Chaudry y Ruus (1971) usaron el método del plano fase para investigar los cuatro casos mencionados anteriormente.

En lo que sigue se analiza únicamente la maniobra a potencia constante.

La ecuación diferencial de las oscilaciones en sistemas operando a potencia constante se obtiene de combinar las ecs 2.14, 2.23 y 2.27 (su deducción puede verse en el Apéndice II) y es de la forma

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \phi(t) \frac{ds}{dt} + \psi(t) s = 0 \quad (3.20)$$

donde

$$s = z - z_0 \quad (3.21)$$

$$\phi(t) = k_1 \frac{ds}{dt} + \frac{k_2}{H + z_0 + s} - \frac{k_3}{(H + z_0 + s)^2} \quad (3.22a)$$

$$\psi(t) = k_4 - \frac{k_5}{(H + z_0)^2} \left( \frac{2}{(H + z_0)} - \frac{3s}{(H + z_0)^2} + \dots \right) \quad (3.22b)$$

$$k_1 = g F A_r / L \quad (3.23a)$$

$$k_2 = 2g FC / A_T L \quad (3.23b)$$

$$k_3 = C / A_s \quad (3.23c)$$

$$k_4 = g / (L A_r) \quad (3.23d)$$

$$k_5 = g FC^2 / (L A_s A_T) \quad (3.23e)$$

$$A_r = A_s / A_T \quad (3.24a)$$

$$C = P / K \eta \quad (3.24b)$$

La ec (3.20) es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden; su solución depende de la forma de las funciones  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  (ecs 3.22) que como puede verse son bastante complejas. Sin embargo, el conocimiento de la ec (3.20) obtenido de la teoría de vibraciones o de circuitos eléctricos da una idea de la forma de la función solución (ver también el Apéndice II). A continuación se discuten algunos análisis de dicha ecuación.

### 3.6.1 Oscilaciones de pequeña amplitud

Thoma (1910) sugirió el siguiente análisis considerando que las oscilaciones sean pequeñas comparadas con la carga ( $z_* < 0.1 H$  aproximadamente). En este caso, los términos  $(ds/dt)^2$ ,  $s^2$ ,  $s^3$ , etc, son presumiblemente pequeños ( $s$  es pequeño comparado con  $H$ ). La ec (3.20) queda

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \left( \frac{k_2}{(H + z_o)} - \frac{k_3}{(H + z_o)^2} \right) \frac{ds}{dt} + k_4 \frac{(H + 3z_o)}{H + z_o} s = 0 \quad (3.25)$$

donde ahora los coeficientes son constantes. Esta ecuación es de la forma

$$a \frac{d^2s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + cs = 0 \quad (3.26)$$

que se discute en el Apéndice II. La constante  $c$ , que equivale a la constante del resorte en un sistema masa-resorte debe ser positiva

$$\frac{H + 3z_o}{H + z_o} > 0$$

y como

$$H + z_o > 0, \quad H + 3 z_o > 0$$

de donde

$$H - 3 z_o - 2 z_o > -2 z_o$$

y

$$-z_o = FV_o^2 \leq (H + z_o)/2 \quad (3.27)$$

Esta limitación en las pérdidas por fricción implica que hay un límite en la potencia que puede generarse.

Para que el sistema sea amortiguado, ésto es, que las oscilaciones disminuyan con el tiempo y por tanto el sistema sea estable, la constante  $b$  de la ec (3.26) debe ser mayor que cero de donde

$$\frac{k_2}{H + z_o} - \frac{k_3}{(H + z_o)^2} > 0$$

o bien

$$\frac{2g FC}{A_T L(H + z_o)} \geq \frac{C}{A_s (H + z_o)^2}$$

y por tanto

$$A_{\min} \geq \frac{V_o^2 L A_T}{2g FV_o^2 (H - FV_o^2)} = A_{th} \quad (3.28)$$

que es la condición de Thoma para la estabilidad de cámaras simples cuando las oscilaciones son de pequeña amplitud.

Si se consideran las pérdidas totales,  $h_{T_o}$ , y el gasto en régimen establecido, el área de Thoma se calcula como

$$A_{Th} = \frac{Q_o^2 L}{2g A_T h_{T_o} (H - h_{T_o})} \quad (3.29)$$

donde el índice cero indica régimen establecido al final del transitorio.

La desigualdad en la ec (3.28) se cambia por

$$A_s = n A_{Th}$$

donde  $n > 1$  es un factor de seguridad.

### 3.6.2 Oscilaciones grandes ( $z_* \geq 0.1 H$ )

En este caso el análisis de la ec (3.20) es bastante complejo Jaeger (1960), analizando el comportamiento de la función  $\phi(t)$  (ec 3.22), que debe ser mayor que cero, en el límite de estabilidad encontró que

$$n^* = \frac{A_s}{A_{Th}} = \left( 1 + 0.482 \frac{z_*}{H + z_o} \right) \quad (3.31)$$

Sean los parámetros adimensionales definidos por Vogt

$$\beta = FV_o^2/H \quad ; \quad \epsilon = \frac{L A_T V_o^2}{g A_s FV_o^2} = \frac{z_*^2}{(F V_o^2)^2} \quad (3.32)$$

Con estos parámetros la ec (3.31) puede escribirse como

$$\frac{\beta^*}{1 - \beta^*} + 0.482 \sqrt{\epsilon} \left( \frac{\beta^*}{1 - \beta^*} \right)^2 - \frac{2}{\epsilon} = 0 \quad (3.33)$$

Para asegurar la estabilidad de la cámara  $\beta < \beta^*$  para cualquier  $\epsilon$ . La ecuación de Thoma (ec 3.28) se escribe con estos parámetros como

$$\epsilon_{Th} = 2 (1 - \beta_{Th}) / \beta_{Th}$$

Frank y otros, analizando varios casos y con ayuda de métodos gráficos encontraron que la expresión (3.33) es válida sólo para  $\epsilon < 20$ ; los valo

res límites pueden verse en la tabla 3.2 y en la fig 3.5 .

$\epsilon$	100	50	40	30	20	10	6	2.5
$\beta$	0.0181	0.0344	0.0424	0.0545	0.075	0.1045	0.134	0.205

TABLA 3.2

### 3.6.3 Resumen y comentarios adicionales

No obstante las simplificaciones hechas en los análisis anteriores los resultados obtenidos son de gran utilidad en la práctica. Estas simplificaciones no se evitan en otros análisis (como el del plano fase) por lo que no se incluyen aquí. Por ello, se recomienda siempre verificar el diseño propuesto con cálculos hechos con métodos paso a paso (subcap 3.5) con las ecuaciones diferenciales completas.

En resumen si las oscilaciones son pequeñas ( $z_* < 0.1 H$ ) ó  $\epsilon > 50$ , el área mínima,  $A_{\min}$ , se calcula con la ecuación de Thoma. Para  $20 < \epsilon \leq 50$  puede usarse la ecuación de Jaeger y para  $\epsilon < 20$  los valores de Frank de la tabla 3.2 .

La mayoría de los autores opina que el área de cualquier sección de cámara debe ser mayor que el área mínima estable (incluida por ejemplo, la chimenea vertical entre las expansiones de una cámara con expansiones). Si en cámaras con orificio este es grande y las oscilaciones son pequeñas, el efecto del orificio no es importante en la estabilidad y por tanto debe tratarse como una cámara simple. En caso de que el tamaño del

orificio sea significativo, el área mínima puede reducirse (ver subcapítulo 4.2). Como se comentó, el cálculo debe verificarse con un método numérico.

Como es claro en las ecs (3.29) a (3.32) la estimación correcta de las pérdidas totales son determinantes en el cálculo del área mínima. Se recalca que además de las pérdidas por fricción, deben incluirse las pérdidas locales (regillas, entrada, cambios de dirección, etc) entre el almacenamiento y la cámara de oscilación; si existe duda en su cálculo es preferible sobrestimarlas.

El cálculo del área mínima debe hacerse para las condiciones más desfavorables en lo que respecta también al nivel del embalse. En general esto corresponde a la operación en el nivel mínimo llamado NAMINO.

El área de la cámara recomendada será

$$A_s = n A_{\text{mín}}$$

donde  $A_{\text{mín}}$  es el área mínima calculada según sea el caso

$n$  factor de seguridad,  $> 1$

En la práctica actual se utiliza  $1 < n < 1.5$  cuando el sistema tiene túnel muy largo y  $1.5 < n < 2$  en los otros casos.

En la determinación de  $A_s$ , debe preverse el drenado de la cámara, es decir la oscilación mínima que se presente no debe de llegar hasta el nivel del túnel ya que esto trae como consecuencia que se introduzca aire al sistema: de este modo el área debe de seleccionarse de acuerdo al nivel mínimo más desfavorable que se presente al producir las maniobras de

toma de carga a potencia constante y la de toma de carga total instantánea, salvaguardando un cierto nivel con respecto al del túnel; ambas maniobras se producen en el NAMINO del embalse.

Algunos factores que se han despreciado afectan la estabilidad. La estabilidad se incrementa por: a) la influencia de la carga de velocidad en el túnel; b) la variación de la eficiencia de la turbina,  $\eta$ , para una potencia menor que la que corresponde a la de máxima eficiencia y c) la interconexión de la planta con otras plantas estables. La estabilidad disminuye por a) la variación de la eficiencia para potencias mayores que las de eficiencia máxima y b) las pérdidas totales en la tubería de presión.

Por último, se comenta aquí que el diseño definitivo de la cámara de oscilación debe hacerse en conjunto con el de la turbina, tubería de presión, golpe de ariete, gobernador, etc. Así, debe tomarse en cuenta, la forma de las curvas de gastos - velocidad de giro - eficiencia de la máquina, el tiempo de aceleración de la misma, su inercia y la del gobernador, etc. Este diseño se hace en conjunto con ingenieros mecánicos, electricistas y de control y el lector interesado puede ver los textos del profesor Sánchez Bribiesca (1980 y 1983). Así mismo deberá estudiarse la posibilidad de que se presente resonancia en el sistema causado en general por el vórtice aguas abajo de la turbina, (llamado torcha); en este fenómeno es clave la localización de la cámara de oscilación (sobre el tema de resonancia, ver Guarga (1982)).

### 3.7 Ejemplo. Cámara simple

En un sistema como el de la fig 2.1 fluye un gasto  $Q$  de  $37.7 \text{ m}^3/\text{s}$  en

régimen establecido cuando por razones de operación de la planta el gasto debe rechazarse totalmente ( $Q = 0$ ) en forma instantánea ( $\Delta t \rightarrow 0$ ).

Calcular los efectos del transitorio que se producen debido a la maniobra indicada y verificar además si la cámara es estable. Los datos para el sistema son:  $D_T = 4.0$  m,  $A_S = 10 A_T$  m<sup>2</sup>,  $L = 1200$  m,  $H = 55$  m,  $Q = 37.7$  m<sup>3</sup>/s y  $F = 0.184$  (el cual incluye todas las pérdidas).

Solución:

a) Cálculos previos

$$A_T = \pi D_T^2/4 = \pi(4)^2/4 = 12.56 \text{ m}^2 \quad (A_S = 125.6 \text{ m}^2)$$

$$V_o = Q_o/A_T = 37.7/12.56 = 3.0 \text{ m/s}$$

para régimen establecido

$$z_o = -FV_o^2 = 0.184 \times 3^2 = -1.66 \text{ m}$$

el período (ec 3.4) y la semiamplitud máximo (ec 3.6a) no amortiguados son, respectivamente

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_S}{A_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{1200}{9.81} \times 10} = 2.20 \text{ s}$$

$$z_* = V_o \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_T}{A_S}} = 3.0 \sqrt{\frac{1200}{9.81} \frac{1}{10}} = 10.50 \text{ m}$$

a) Revisión de la estabilidad

Como  $z_* = 10.50 \text{ m} > 0.1 H = 5.5 \text{ m}$

implica oscilaciones grandes.

Con los parámetros de Voght (3.32)

$$\beta = FV_o^2/H = 1.66/55 = 0.0302$$

$$\epsilon = \frac{z_*^2}{(FV_0^2)} = (10.50/1.66)^2 = 40.0094$$

y la gráfica de la fig 3.5, se observa que la cámara es estable.

Y de la ec (3.31)

$$A_s = A_{th} \left( 1 + 0.482 \frac{z_*}{H + z_0} \right)$$

$$A_{Th} = \frac{V_0^2}{2g} \frac{L A_T}{FV_0^2 (H - FV_0^2)} \quad (\text{ec 3.28})$$

$$A_{Th} = \frac{9}{19.62} \frac{1200 \times 12.56}{1.66(55 - 1.66)} = 78.08 \text{ m}^2$$

$$A_s = 78.08 \left( 1 + 0.482 \frac{10.50}{55 - 1.66} \right) = 85.49$$

que es el área en el límite de la estabilidad; al compararla con el área propuesta en el ejemplo se obtiene un factor de seguridad

$$n = \frac{A_s}{A_s} = \frac{125.6}{85.49} = 1.47$$

b) Cálculo numérico del rechazo total instantáneo.

De las ecs fundamentales 2.14 y 2.23 se deducen las siguientes ecs de diferencias

$$\Delta V = - \Delta t (g/L(z + F V|V|))$$

$$\Delta z = \Delta t (V A_T - Q_t) / A_s$$

Para resolverlas por el método de Heun se establece la siguiente secuencia.

Condiciones iniciales  $V_m$  y  $Z_m$

Con éstas, se calcula  $\bar{k}_1$  (ec 3.53a)

$$k V1 = - \Delta t \left( g/L (z_m + F V_m |V_m|) \right)$$

$$k z1 = \Delta t (V_m A_T - Q_t) / A_s$$

Se incrementan las variables

$$V'_m = V_m + k V1$$

$$z'_m = z_m + k z1$$

y se calcula  $\bar{k}_2$  (ec 3.53b)

$$k V2 = - \Delta t \left( g/L (z'_m + F V'_m |V'_m|) \right)$$

$$k z2 = \Delta t (V'_m A_T - Q_t) / A_s$$

Finalmente, las variables al final del intervalo son

$$V_{m+1} = V_m + (k V1 + k V2) / 2$$

$$z_{m+1} = z_m + (k z1 + k z2) / 2$$

Se recomienda que en este tipo de sistemas el incremento de tiempo quede entre los límites

$$T/20 \leq \Delta t \leq T/10$$

en nuestro caso, al ajustarlos a incrementos manejables se obtiene

$$10 \text{ s} \leq \Delta t \leq 20 \text{ s}$$

El procedimiento de como se debe de aplicar el método puede verse a continuación, para estos cálculos se ha seleccionado  $\Delta t = 20 \text{ s}$ .

para  $t = 0$  seg  $V_0 = 3$  m/s y  $z_0 = -1.66$

para  $t = 20$  seg

$$\text{C.I. } V_0 = 3 \text{ m/s} , \quad z_0 = -1.66$$

$$KV1 = -20 \left( 9.81/1200 (-1.66 + 0.184 \times 3.0 \times |3.0|) \right) = 0$$

$$Kz1 = 20 (3.0 \times 12.56 - 0)/125.6 = 6.00 \text{ m}$$

$$V'_0 = 3.0 + 0 = 3.0 \text{ m/s}$$

$$z'_0 = -1.66 + 6.00 = 4.34 \text{ m/s}$$

$$KV2 = -20 \left( 9.81/1200 (4.34 + 0.184 \times 3.0 \times |3.0|) \right) = -0.98$$

$$Kz2 = 20 (3.0 \times 12.56 - 0)/125.7 = 6.00$$

$$V_{m+1} = V_1 = 3.00 + (3.0 - 0.98)/2 = 2.51$$

$$z_{m+1} = z_1 = -1.66 + (6.0 + 6.0)/2 = 4.34$$

En resumen

para  $t = 20$  s ;  $V = 2.51$  m/s,  $z = 4.34$  m

para  $t = 40$  seg

$$\text{C.I. } V = 2.51 \text{ m/s} , \quad z = 4.34 \text{ m}$$

$$KV1 = -20 \left( 9.81(4.34 + 0.184 \times 2.51 \times |2.51|)/1200 \right)$$

$$KV1 = -0.899$$

$$Kz1 = 20(2.51 \times 12.56 - 0)/125.6 = 5.020$$

$$V'_1 = 2.51 - 0.899 = 1.611$$

$$z'_1 = 4.34 + 5.020 = 9.360$$

$$KV_2 = -20 \left( 9.81 (9.360 + 0.184 \times 1.611 \times 1.611) / 1200 \right) = -1.608$$

$$Kz_2 = 20 (1.611 \times 12.56 - 0) / 125.6 = 3.222$$

$$V_2 = 2.51 + (-0.899 - 1.608) / 2 = 1.257$$

$$z_2 = 4.34 + (5.020 + 3.222) / 2 = 8.461$$

Este cálculo se continúa en la tabla 3.3 y se dibuja en la fig 3.6. En la misma tabla 3.3 puede verse el resumen de cálculos para  $\Delta t = 5$  s. Al comparar los resultados se nota una leve diferencia (1.49 por ciento en el primer máximo, por ejemplo). Ver también la fig 3.6.

Solución por medio de los parámetros de Calame y Gaden (ec 3.9)

$$F_{ro} = F V_o^2 / z_* = 0.184 (3)^2 / 10.50 = 0.158$$

$$z_r = z_{\text{máx}} / z_* ; \quad z_{\text{máx}} = z_r z_*$$

al introducir  $F_{ro}$  en la gráfica de la fig 3.2 se obtiene

$$\text{para el primer máximo} \quad z_r = 0.9$$

$$z_{\text{máx}} = 0.9 \times 10.50 = 9.45 \text{ m}$$

$$\text{para el primer mínimo} \quad z_r = -0.76$$

$$z_{\text{mín}} = -0.76 \times 10.50 = -7.98 \text{ m}$$

$$\text{para el segundo máximo} \quad z_r = 0.66$$

$$z = 0.66 \times 10.50 = 6.93 \text{ m}$$

que son resultados suficientemente aproximados a los obtenidos en la tabla 3.3. Mejor aproximación se obtiene al aplicar el método de Runge-Kutta (ya que es un método de cuarto orden); ésto se ve con más detalle en el capítulo siguiente.

t	$\Delta t = 20$ (s)		$\Delta t = 5$	
	z (m)	V (m/s)	z (m)	V (m/s)
0	- 1.66	+ 3.00	- 1.66	+ 3.00
5			- 0.16	+ 2.97
10			+ 1.31	+ 2.88
15			+ 2.72	+ 2.74
20	+ 4.34	+ 2.51	+ 4.05	+ 2.55
40	+ 8.46	+ 1.26	+ 8.08	+ 1.39
60	+ 9.54*	- 0.36	+ 9.40*	- 0.10
100	+ 2.58	- 2.52	+ 3.70	- 2.36
115			- 0.02	- 2.45
160	- 8.32**	- 0.02	- 7.86	- 0.23
165			- 7.90*	+ 0.10
220	+ 1.39	+ 2.15	+ 0.06	+ 2.09
260	+ 7.31*	+ 0.31	+ 6.32	+ 0.73
275			+ 6.80*	- 0.10
320	- 0.31	- 2.00	+ 1.69	- 1.80
330			- 0.14	- 1.82
380	- 6.44**	+ 0.60	- 5.97	- 0.15
385			- 5.98**	+ 0.10

\* elevaciones máximas

\*\* elevaciones mínimas

TABLA 3.3 Valores significativos de la elevación (z) y la velocidad (v) para el ejemplo.

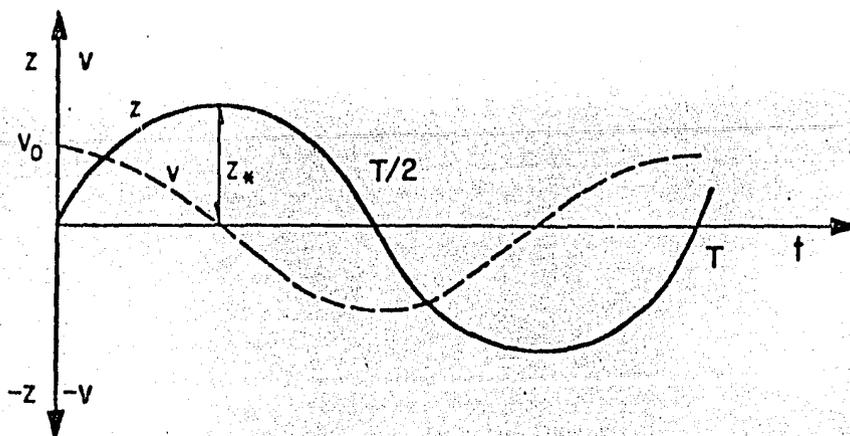


Fig 3.1 Oscilaciones. Rechazo total instantáneo y fricción nula

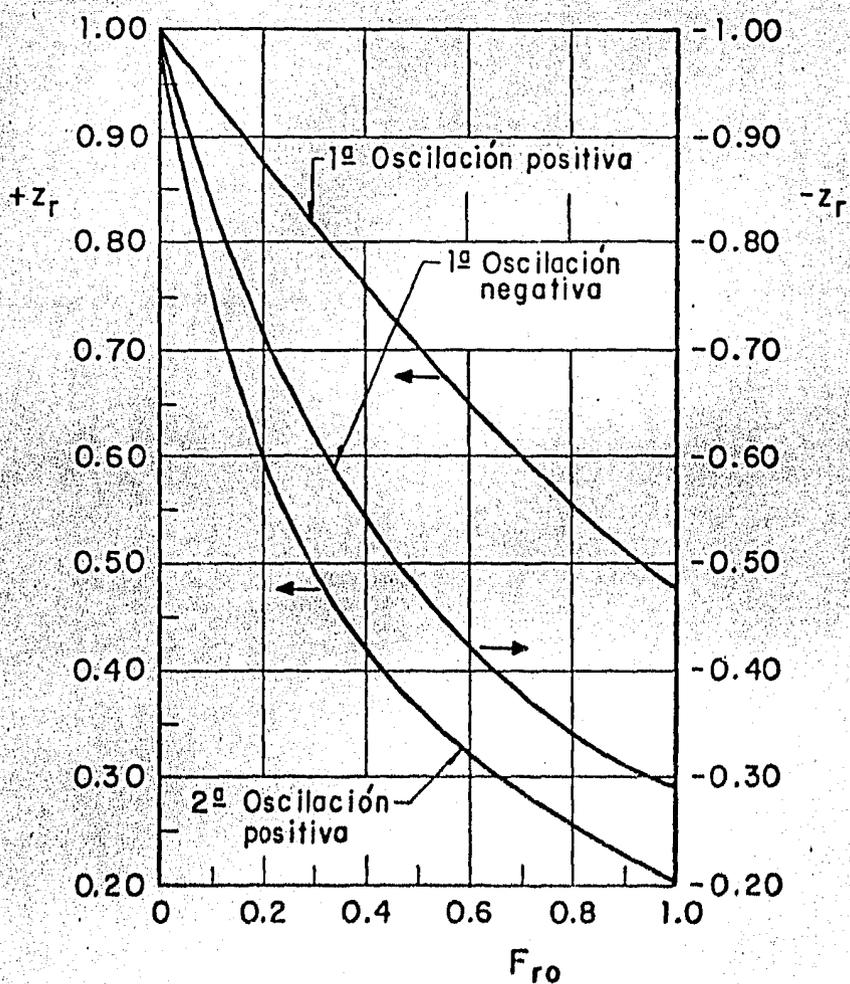


Fig 3.2 Máximos y mínimos para rechazo total instantáneo

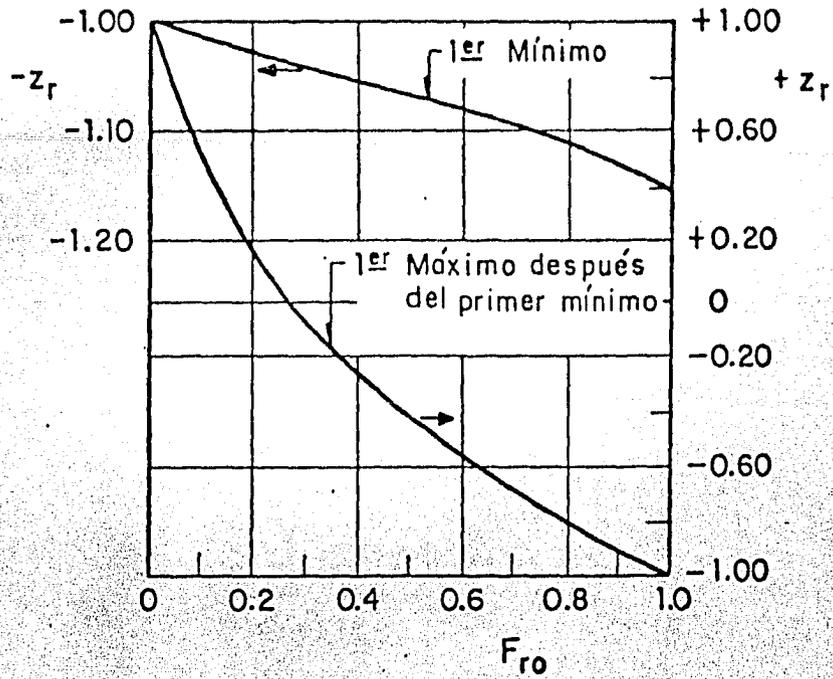


Fig 3.3 Primer mínimo y primer máximo para toma total instantánea

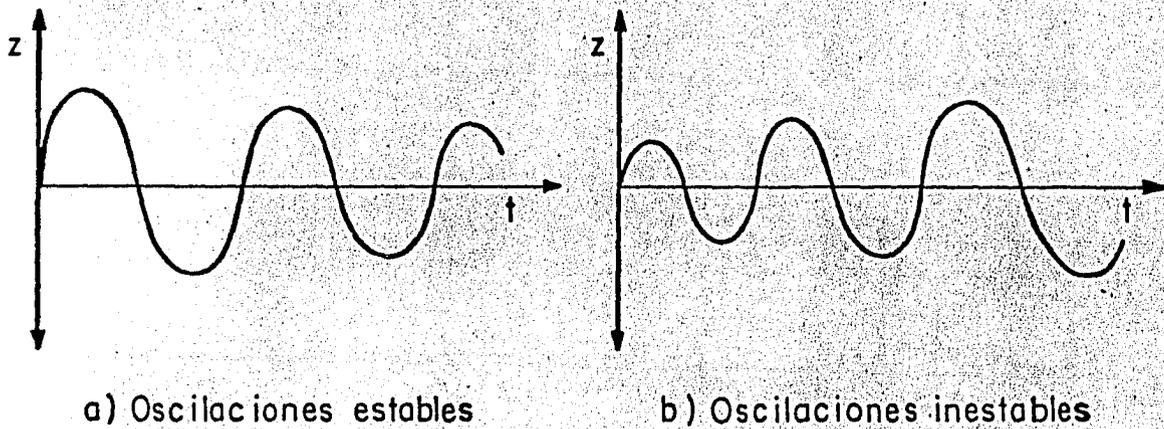


Fig 3.4

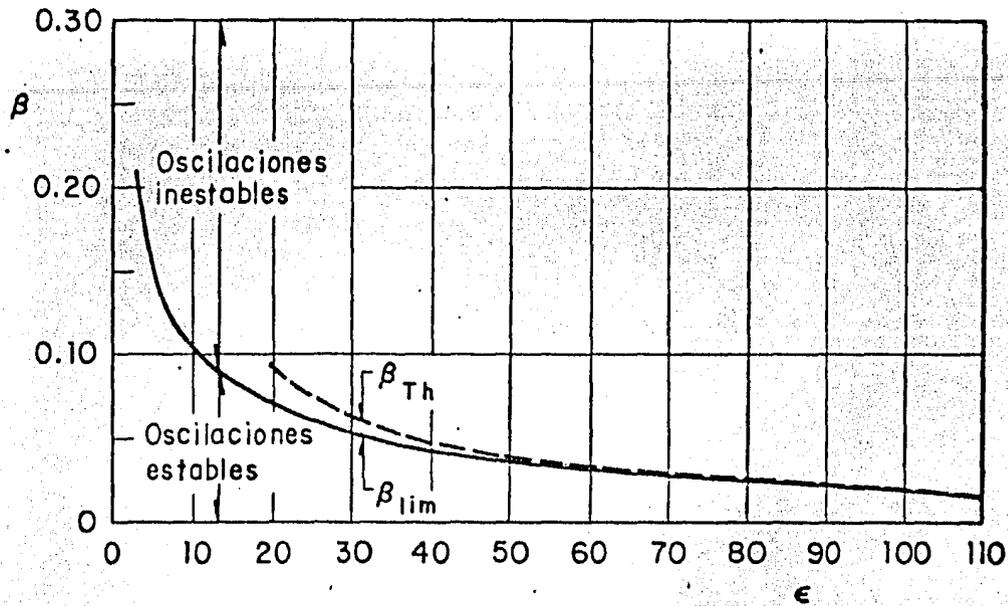


Fig 3.5 Gráfica de estabilidad. Condición límite según Frank

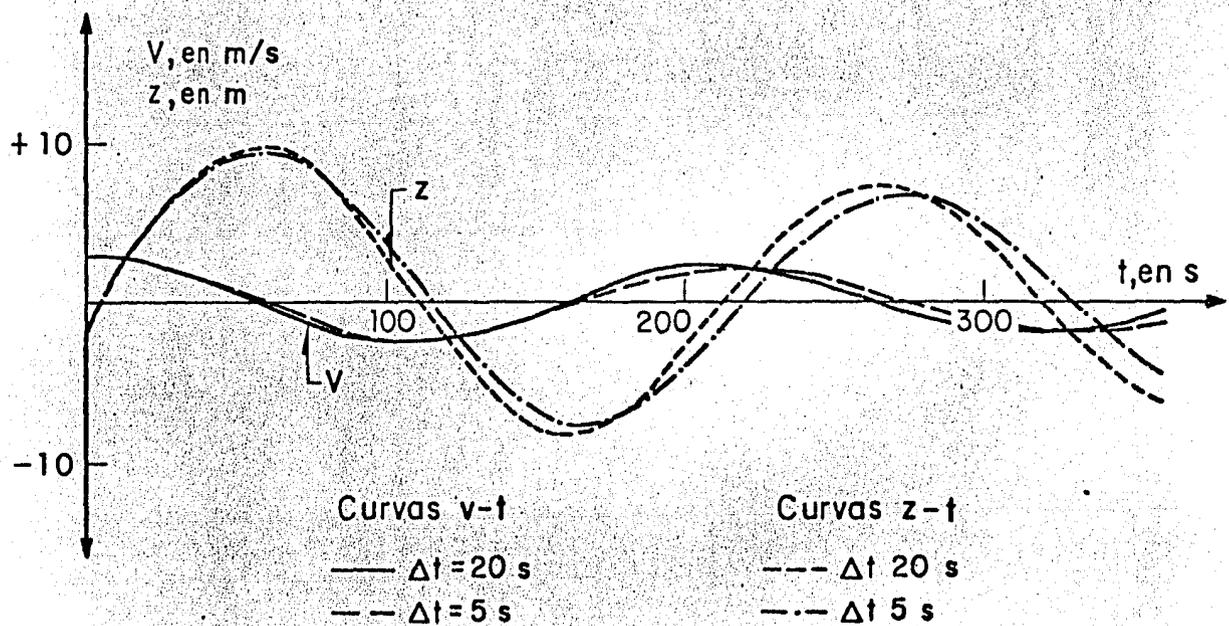


Fig 3.6 Oscilaciones calculadas en el ejemplo

#### 4. ANALISIS DE LOS DISTINTOS TIPOS DE CAMARAS DE OSCILACION

La discusión de los capítulos precedentes se ha enfocado al de una cámara de oscilación simple colocada aguas arriba de la turbina, fig 2.1 .

En este capítulo se analizan otros tipos de cámaras como las descritas en el cap 1. No se deducen las ecuaciones en cada caso pero el lector interesado puede comprobar las ecuaciones que aquí se plantean siguiendo un procedimiento semejante al discutido en el cap 2.

Al final del capítulo se discuten a manera de ejemplo aspectos de diseño para un proyecto hidroeléctrico.

##### 4.1 *Cámaras aguas abajo de la turbina*

Siguiendo la nomenclatura de la fig 1.4 y considerando que las oscilaciones son positivas hacia arriba, y que el signo positivo de la velocidad es de la cámara hacia el río, la ecuación dinámica se escribe como

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{L} (z - F V |V|) \quad (4.1a)$$

o también

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{g A_T}{L} (z - F_1 Q |Q|) \quad (4.1b)$$

y la ecuación de continuidad

$$Q_t = A_s \frac{dz}{dt} + A_T V \quad (4.2a)$$

o también

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q_t - Q}{A_s} \quad (4.2b)$$

En las ecs 4.1 F y  $F_1$  están definidas por las ecs 2.16 y 2.17.

Para el caso de un rechazo total instantáneo, las condiciones iniciales son

$$z_o = + F V_o |V_o| \quad ; \quad V_o = Q_o / A_T$$

Las condiciones iniciales para otras maniobras se obtienen en manera semejante a las discutidas en el capítulo 2.2.

Si se utilizan como métodos de solución los del tipo Runge-Kutta, se recomienda empezar los cálculos con un incremento de tiempo entre un veinteavo y un décimo del período (redondeado como se comentó en el cap 3.5), ésto es

$$T/20 \leq \Delta t \leq T/10$$

En este tipo de instalaciones puede suceder que para niveles muy bajos

en el río, el túnel funcione a superficie libre. En este caso, en el cálculo de los transitorios debe contemplarse el posible llenado y/o vaciado del túnel conforme las ondas causadas por la maniobra viajan entre las turbinas y el río. Este problema es bastante complejo por lo que puede convenir un modelo físico a escala de la instalación. El tratamiento analítico del mismo se basa en el análisis de las ecuaciones de Saint-Venant para el escurrimiento a superficie libre con alguna consideración para el tratamiento del llenado del túnel (ver Cunge y Wegner (1964), Luna (1983), y Berezowsky y Ríos (1982)). En caso de que la cámara tenga además un orificio, la onda de llenado en el túnel puede provocar presiones considerables debidas al impacto sobre la losa que forma el orificio (Echávez y Rosengaus (1979)).

Asimismo, en caso que el volumen de la cámara de oscilación sea comparable al del túnel, deberá corregirse la ecuación dinámica para considerar la inercia de la masa de la cámara.

#### 4.2 Cámara con orificio o estrangulada (fig 1.5b)

En algunos casos conviene retardar la aceleración del flujo en el túnel en rechazo de carga (o aumentarla en una toma) para mejorar el manejo de las turbinas. Lo anterior puede lograrse estrangulando la entrada a la cámara de oscilación con un orificio. Un efecto adicional del orificio es el de disminuir el tamaño de las oscilaciones, lo que puede representar un ahorro al disminuir el volumen de la cámara de oscilación.

La ecuación de continuidad no cambia, ésto es

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q_t - A_T V}{A_s} \quad (4.3)$$

Para considerar el efecto del orificio conviene recordar que en la deducción de las ecuaciones, la ec 2.5 representa la resultante de las fuerzas de presión. Si se considera que el punto 2 está en el túnel inmediatamente debajo del orificio. En caso de que no exista flujo por la instalación,  $V = 0$  y  $z = 0$ , la presión en el punto 2 corresponderá a  $\rho g H_a$ . Si la instalación tiene una cámara simple en el cap 2 se vió que  $p_2 = \rho g(H_a + z)$ . En caso de que se tenga un orificio, la presión en el punto 2 será

$$p_2 = \rho g(H_a + z + \Delta h) \quad (4.4)$$

donde  $\Delta h$  es la diferencia de presión (expresada en columna de agua) entre aguas abajo y aguas arriba del orificio y corresponde a la pérdida de carga provocada por el orificio.

Si se incluye la ec 4.4 en la ec 2.5, la ecuación dinámica queda

$$\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} + z + \Delta h + F V|V| = 0 \quad (4.5)$$

La pérdida de carga  $\Delta h$  puede calcularse de varias formas.

Sea  $C_d A_d$  el área efectiva del orificio. El flujo por el orificio será

$$Q_d = \pm C_d A_d \sqrt{2g \Delta h} \quad (4.6)$$

donde  $C_d$  coeficiente de descarga del orificio ( $C_d = 0.6$  a  $0.7$ ); además por continuidad  $Q_d = A_s dz/dt$ ; de la ec 4.6

$$\Delta h = \frac{1}{2g(C_d)^2} \left( \frac{A_s}{A_d} \right)^2 \left| \frac{dz}{dt} \right| \left| \frac{dz}{dt} \right| \quad (4.7)$$

La pérdida de carga será positiva, si el flujo es hacia la cámara ( $dz/dt > 0$ ) y negativa en caso contrario; ésto puede considerarse con el signo de valor absoluto en la ec 4.7. También es posible que el coeficiente de descarga del orificio tenga valores distintos en función del sentido del flujo puesto que puede estar diseñado para producir pérdidas mayores en un sentido que en otro.

Haciendo

$$R = \frac{1}{2g(Cd)^2} \left( \frac{A_s}{A_d} \right)^2 \quad (4.8)$$

la ec 4.5 se escribe como

$$\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} = - \left( z + R \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| + F V |V| \right) \quad (4.9)$$

Dado que la ec 4.9 contiene el término  $dz/dt$ , para que la solución numérica sea más precisa, a métodos de integración numérica, se recomienda que las ecuaciones deben ordenarse para su integración como 4.3 y después 4.9. En este caso el incremento de tiempo inicial sugerido debe estar comprendido entre

$$\frac{T}{50} < \Delta t \leq \frac{T}{20}$$

Como en el caso de cámara simple, Calame y Gaden obtuvieron soluciones adimensionales que permiten calcular el primer máximo en maniobras de rechazo total instantáneo o para el primer mínimo en toma para cámaras con orificio. Además de los parámetros (ver subcap 3.2) dados por las ecs 3.9

$$F_{ro} = F V_o^2 / z_* \quad ; \quad z_{rm} = z_{m\acute{a}x} / z_* \quad (3.9)$$

el efecto del orificio se toma con el parámetro

$$r_o = \Delta h_o / z_* \quad (4.10)$$

donde  $\Delta h_o$  se obtiene de la ec 4.6 suponiendo que todo el gasto fluye por el orificio, ésto es  $Q_d = Q_o$ .

En las figs 4.1 y 4.2 se dan los ábacos para determinar el primer máximo y el primer mínimo, respectivamente. Para el caso de rechazo, una buena aproximación para el primer máximo puede obtenerse por

$$z_{rm} = 1.0361 e^{-0.93763 F_{ro}} e^{-0.47958 r_o} \quad (4.11)$$

ecuación obtenida por Berezowsky y Aparicio (1981); en esta función el mejor ajuste se logra para  $F_{ro} \leq 0.5$  y  $r_o \leq 1.0$  que son los rangos más comunes en la práctica.

En algunas instalaciones en lugar de un orificio la unión entre el túnel y la cámara se logra con un tubo corto (fig 4.3a). Existen variantes tan complejas como la mostrada en la fig 4.3b, discutida por Gardel (1956) y por Hussain (1966).

Esto lleva a la dificultad para valuar el coeficiente de descarga del orificio (ec 4.6). En lugar de esta ecuación algunos autores proponen sustituirla por una del tipo de Borda; por tanto el coeficiente R de la ec 4.8 quedaría

$$R = \frac{1}{2g} \left( \frac{\Lambda_B}{\Lambda_d} - 1 \right)^2 \quad (4.12)$$

En caso de que la conexión entre el túnel y la cámara sea inclinada o

con diámetros distintos, etc, el coeficiente de pérdidas depende de las direcciones del flujo en la "T" y son difíciles de determinar. Pueden ayudar los valores reportados por Gardel (1956), resumidos por Jaeger (1977) o los dados en el cap A.2.3 Conducciones a presión del Manual de CFE, Collado y Camargo (1981).

Para el caso mostrado en la fig 4.3b, Gardel propone escribir la ecuación dinámica como

$$\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} - s = 0 \quad (4.13)$$

donde.

$$s = -z - (\xi_{1,2} + \zeta) \frac{V|V|}{2g} - \eta_{1,2} \left( \frac{A_s}{A_d} \right)^2 \frac{1}{2g} \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| + \\ + C \beta \frac{V_c |V_c|}{2g} + C \beta \frac{V_f |V_f|}{2g} - \frac{u^2}{2g} \quad (4.14)$$

donde  $\xi_{1,2}$  coeficiente de pérdida por entrada; Gardel recomienda

$$\xi = 0.1 \text{ a } 0.3 \quad \text{si } V > 0$$

$$\text{y } \xi = 0.4 \text{ a } 0.8 \quad \text{si } V < 0$$

$\zeta$  coeficiente de pérdida de fricción en el túnel (que corresponde a  $f L/D$  si se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach).

$\eta_{1,2}$  coeficiente de pérdida de carga entre el punto D y el E

$$C = 1 \quad \text{si } u > 0$$

$$C = 0 \quad \text{si } u < 0$$

$\beta$  coeficiente de pérdida en la T, entre C y D o entre F y D, según el valor de C.

$u = dz/dt$  carga de velocidad en la cámara de oscilación

Aunque algunos de los coeficientes anotados en las ecs 4.13 y 4.14 pueden encontrarse en las referencias ya citadas, en algunos casos es necesario construir un modelo físico a escala reducida que permita obtener dichos coeficientes en forma más precisa.

Como se mencionó en el cap 1, en las cámaras con orificio, la cancelación de las ondas de golpe de ariete en la cámara de oscilación no es perfecta; por tanto parte de las ondas de sobrepresión de la tubería de presión pasan al túnel. Mosony y Seth (1975a y b) presentan una figura que permite estimar el porcentaje de sobrepresión del golpe de ariete que pasa en cámaras con orificio como la de la fig 1.5b. En caso de tener una conexión más compleja o con un tubo corto (fig 4.3a) y cuando es necesario incluir la fricción para hacer los cálculos es necesario con siderar los efectos de compresibilidad del agua y paredes de tubería y túnel, ésto se hace resolviendo las ecuaciones del golpe de ariete inclu yendo el efecto de la cámara de oscilación con orificio (ver Berezowsky y Rosengaus (1981) y Berezowsky *et al* (1983) cap A.2.16.8) o también co nexión con un tubo corto (ver Wylie y Streeter (1978) y Chaudhry (1979). Este procedimiento es el que se emplea para el cálculo de sobrepresiones en instalaciones de bombeo donde se ha incluido una cámara de oscilación pequeña llamada de una sola vía, auxiliar para evitar presiones negativas, pero que deja pasar parte del golpe de ariete.

Desde el punto de vista de la estabilidad, es claro que para una cámara con el área de Thoma, al colocarse un orificio ésta sea más estable; siguiendo esta idea numerosos investigadores han estudiado el problema bus-

cando el área mínima para cámara con orificio. El problema es mucho más complejo que el expuesto en el cap 3, por lo que sólo se han encontrado soluciones aproximadas. Así, Escande (1981a y b) propone como área mínima

$$A_{es} = A_{Th} / \left( 1 + \frac{\Delta h}{2} \frac{H_o - 2 h_{To}}{H_o h_{To}} \right) \quad (4.15)$$

Jaeger (1977) discute que si se utiliza una cámara con área tal que  $A_{es} < A_s < A_{Th}$ , aunque estable, las oscilaciones tienden a ser estacionarias. En caso de que estas oscilaciones dificultaran la operación del sistema hidromecánico, entonces será necesario aumentar el área mínima de la cámara. Esto deberá ser confirmado con un cálculo numérico paso a paso (ver subcap 4.6).

En la ecuación de la potencia se debe incluir la pérdida en el orificio, ésto es

$$Q_t = \frac{P}{k(H + z + \Delta h)} \quad (4.16)$$

y es claro que si el orificio es grande el efecto de  $\Delta h$  es pequeño por lo que se llega a la condición de Thoma. Gardel (1956) propone incluir en lugar de  $z + \Delta h$  de la ec 4.16 a s dada por la ec 4.14. El análisis se complica bastante por lo que aquí sólo se incluye un resultado particular que corresponde al de la fig 4.3a

$$A_G = A_{Th} / \left( 1 + \frac{E_o}{h_T} \left( \lambda - \frac{E_o}{2 H_o} \right) \right) \quad (4.17)$$

donde  $E_o = V_{To}^2 / 2g$  energía cinética en el túnel para régimen establecido, en m.

La constante  $\lambda = 0.7$  para una conexión como la mostrada en la fig 4.3a; para otras formas de conexión (por ejemplo inclinadas) ver el Gardel (1956).

También en este caso, se recomienda verificar la estabilidad de un proyecto específico haciendo un cálculo numérico paso a paso.

#### 4.3 Cámaras con expansiones (fig 1.5a)

La ecuación dinámica se escribe como

$$\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} + z + F V|V| = 0 \quad (4.18)$$

y la de continuidad como

$$\frac{dz}{dt} = \frac{V A_T - Q_t}{A_s} \quad (4.19)$$

Se observa que  $A_s$  en la ecuación de continuidad ya no es constante sino que es una función de la superficie libre del agua;  $A_s = f(z)$  en este tipo de diseños se recomienda

$$\frac{T}{200} \leq \Delta t \leq \frac{T}{50}$$

El incremento de tiempo adecuado varía apreciablemente con la geometría de la cámara, pero en general será mucho más pequeño que en el caso de cámaras con área constante; se recomienda empezar con un incremento de tiempo  $\Delta t$  entre 1 y 2 s y verificar la exactitud de este resultado con un nuevo cálculo, pero ahora con la mitad del incremento hasta obtener resultados razonablemente iguales.

Las condiciones iniciales son

$$z_o = -F V_o |V_o| \quad , \quad V_o = Q_o / A_T$$

#### 4.4 Cámara diferencial o Johnson

La forma como opera una cámara diferencial permite reducir el área de la cámara exterior; en cuanto a la operación es mucho mejor que la simple y la de orificio, pero presenta problemas constructivos y de mantenimiento.

Basándonos en la fig 4.4 la ecuación dinámica para el túnel, resulta

$$\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} + z_2 + F V |V| = 0 \quad (4.20)$$

y la de continuidad como

$$A_T V = Q_1 + Q_2 + Q_t \quad (4.21)$$

donde

$$Q_2 = \pm A_2 \left( \frac{dz_2}{dt} \right) \pm C L (\Delta h)^{3/2}$$

$$Q_1 = A_1 \left( \frac{dz_1}{dt} \right) = \pm C_d A_o \sqrt{2g} \sqrt{|z_2 - z_1|} \pm C L (\Delta h)^{3/2}$$

en las que:

- C = coeficiente de descarga del vertedor
- L = longitud del vertido, que puede ser, no siempre, el perímetro de la cámara interior
- A<sub>o</sub> = área total efectiva de los orificios en la base del riser

La variación de los niveles en ambas cámaras se calculan con las siguientes ecuaciones, deducidas a partir de la ecuación de continuidad;

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{A_T V - (Q_1 + Q_t) \pm C L (h)^{3/2}}{A_2} \quad (4.22)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\pm C d A_o \sqrt{2g} \sqrt{|z_2 - z_1|} \pm C L (\Delta h)^{3/2}}{A_1} \quad (4.23)$$

Las ecs 4.20, 4.22 y 4.23 forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las ecs 4.22 y 4.23 varían según las condiciones en que se presenten las relaciones entre los niveles  $z_1$ ,  $z_2$  y  $y_c$ . En la fig 4.4 se observa que si  $y_c > z_2$ ,  $y_c > z_1$ ,  $z_2 > z_1$  y  $\Delta h = 0$  las ecuaciones, para este caso se simplifican a

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{A_T V - (Q_1 + Q_t)}{A_2}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{C d \sqrt{2g} \sqrt{|z_2 - z_1|}}{A_1}$$

si  $z_2 > y_c$ ,  $z_2 > z_1$ ,  $y_c > z_1$  y  $\Delta h = z_2 - y_c$ ,

las ecuaciones se escriben como

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{A_T V - (Q_1 + Q_t) - C L (\Delta h)^{3/2}}{A_2}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{C d A_o \sqrt{2g} \sqrt{|z_2 - z_1|} + C L (\Delta h)^{3/2}}{A_1}$$

sí  $z_2 > y_c$  y  $z_1 > y_c$  se presenta un comportamiento similar a la cámara simple, por lo que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q_1 + Q_2}{A}$$

donde  $A = A_1 + A_2$

Sí  $z_1 > z_2$ ,  $z_1 > y_c$ ,  $y_c > z_2$  y  $\Delta h = z_1 - y_c$

Las ecuaciones se escriben como

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{A_T V - (Q_1 + Q_2) + CL(\Delta h)^{3/2}}{A_2}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{-Cd A_o \sqrt{2g} \sqrt{|z_2 - z_1|} - CL(\Delta h)^{3/2}}{A_1}$$

Sí  $z_1 < y_c$ ,  $z_2 < y_c$ ,  $z_1 > z_2$

Las ecuaciones se escriben como

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{A_T V - (Q_1 + Q_2)}{A_2}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{-Cd A_o \sqrt{2g} \sqrt{|z_2 - z_1|}}{A_1}$$

#### 4.5 Cámaras múltiples

Primer caso: Instalación de dos o más cámaras sobre el túnel de conducción, fig 4.5 .

Las ecuaciones resultan:

Cámara 1

Ecuación de continuidad

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{A_{T1} V_1 - A_{T2} V_2}{A_{S1}}$$

y la ecuación dinámica

$$\frac{dV_1}{dt} = - \frac{g}{L} (z + F_1 V_1 |V_1|)$$

Cámara 2

La ecuación de continuidad resulta

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{A_{T2} V_2 - Q_t}{A_{S2}}$$

y la ecuación dinámica es

$$\frac{dV_2}{dt} = - \frac{g}{L} (z_2 - z_1 + F_2 V_2 |V_2|)$$

Estas cuatro ecuaciones describen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyas condiciones iniciales son

$$z_{0,1} = - F_1 V_{0,1}^2$$

$$z_{0,2} = - z_{0,1} - F_2 V_{0,2}^2$$

$$V_{0,1} = \frac{Q_0}{A_{T1}} ; V_{0,2} = \frac{Q_0}{A_{T2}}$$

Segundo caso: Una cámara aguas arriba y una aguas abajo de la turbina.

Las ecuaciones se deducen para una maniobra a potencia constante por ser

la más desfavorable para el sistema, ya que para otro tipo de maniobra total las cámaras se desacoplan y funcionan por separado. Este arreglo puede observarse en la fig 4.6 .

En este caso

$$Q_t = \frac{C}{H - z_1 - z_2}$$

donde

$$C = \frac{n_0}{n_1} Q_0 (H + z_{0,1} - z_{0,2})$$

Y las ecuaciones resultan:

Cámara aguas arriba

Ecuación dinámica

$$\frac{dV_1}{dt} = - \frac{L_1}{g} (z_1 + F_1 V_1 |V_1|)$$

Ecuación de continuidad

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{V_1 A_{T1} - Q_t}{A_{S1}}$$

Cámara aguas abajo

Ecuación dinámica

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{L_2}{g} (z_2 - F_2 V_2 |V_2|)$$

Y la continuidad es

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{Q_t - V_2 A_{T2}}{A_{S2}}$$

Para este caso las condiciones iniciales son

Para la cámara aguas arriba  $z_{0,1} = F_1 V_1 |V_1|$ ,  $V_1 = Q_t/A_1$

Para la cámara aguas abajo  $z_{0,2} = F_2 V_2 |V_2|$ ,  $V_2 = Q_t/A_2$

Tercer caso: Una cámara alimentada por n vasos, fig 4.7.

La ecuación de continuidad se escribe como

$$\frac{dz}{dt} = \frac{A_{T1} V_1 + A_{T2} V_2 + \dots + A_{Tn} V_n - Q_t}{A_s}$$

En este caso, existen n ecuaciones dinámicas

$$\frac{L_1}{g} \frac{dV_1}{dt} + z + F_1 V_1 |V_1| = 0$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{L_n}{g} \frac{dV_n}{dt} + z + F_n V_n |V_n| = 0$$

Con lo que se forma un sistema de n+1 ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las condiciones iniciales son

$$z_{0,i} = F_i V_i |V_i|, \quad V_i = Q/A_i$$

en donde i variará desde 1 hasta n

El análisis de estabilidad y otros aspectos importantes para cámaras múltiples sale del alcance de este trabajo, pero puede verse en el Jaeger (1977), y en Aguilar (1981).

## 4.6 Aplicaciones

A continuación se discute el diseño de una cámara de oscilación en un proyecto hidroeléctrico. Se proponen varios tipos de cámara, calculándose se el área mínima, y se comparan los volúmenes de excavación necesarios (entre los niveles de la oscilación máxima y de la mínima).

### 4.6.1 Resumen de datos y planteo del problema

#### 1. Resumen de datos

NAME = 200.00 msnm; NAMINO = 160.00 msnm;

Elev. desfogue = 100.00 msnm; Longitud del túnel 3500 m

Diámetro propuesto = 5 m

Gastos. Sí  $H_{\text{neta}} \geq 80$  m  $Q = 80 \text{ m}^3/\text{s}$

para  $H_{\text{mínima}}$   $Q = 70 \text{ m}^3/\text{s}$

Tiempo de cierre del distribuidor  $t_c = 5$  seg

Potencias

4 turbinas operando a 15 000 kw c/u para carga de diseño o mayor ( $H_d = 80$  m)

4 turbinas operando a 7 500 kw c/u para carga mínima

Pérdidas de energía totales en el túnel

Sí  $Q = 80 \text{ m}^3/\text{s}$   $h_T = \text{m}$

$Q = 70 \text{ m}^3/\text{s}$   $h_T = 3 \text{ m}$

#### 2. Restricciones

Por razones constructivas, la cámara de oscilación deberá diseñarse en forma tal que las oscilaciones queden contenidas entre las

elevaciones 148.00 y 210.50 msnm.

### 3. Maniobras

Por ser las más desfavorables, se propone estudiar

I. Rechazo total instantáneo en el NAME

II. Toma total instantánea en el NAMINO

III. Potencia constante en el NAMINO

### 4. Planteo de alternativas

4.1 Calcular el área mínima para que sea estable una cámara simple y determinar los máximos y mínimos para las maniobras I y II. Calcular el volumen de excavación.

4.2 Diseñar una cámara de oscilación simple que contenga las oscilaciones para las maniobras I y II y calcular el volumen de excavación.

4.3 Diseñar una cámara de oscilación con orificio que contenga las oscilaciones para las maniobras I y II y III. El diámetro mínimo del orificio por razones constructivas es 3.00 m. Calcular el volumen de excavación.

4.4 Diseñar una cámara con expansiones. Calcular el volumen de excavación.

4.5 Comparación de volúmenes de excavación obtenidos en los puntos anteriores.

#### 4.6.2 Solución

##### I. Cálculos previos

$$A_t = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4} (5)^2 = 19.635 \text{ m}^2$$

$$\text{Para } Q = 80 \text{ m}^3/\text{s} \quad V = \frac{Q}{A} = \frac{80}{19.635} = 4.074 \text{ m/s}$$

$$\text{Para } Q = 70 \text{ m}^3/\text{s} \quad V = \frac{70}{19.635} = 3.565 \text{ m/s}$$

$$A_d = \frac{\pi}{4} (3)^2 = 7.07 \text{ m}^2 \quad (\text{área del orificio})$$

$$C_d = 0.7 \quad (\text{en ambos sentidos})$$

## II. Análisis de la alternativa 4.1

### a). Area mínima estable

Con la ecuación de Thoma (ec 3.28)

$$A_{Th} = \frac{V_o^2}{2g} \frac{L A_T}{h_T (H - h_T)}$$

Para las condiciones en el NAME

$$A_{Th} = \frac{(4.074)^2}{19.62} \frac{3 \ 500 \times 19.635}{5(100 - 5)} = 122.391 \text{ m}^2$$

Para las condiciones en el NAMINO

$$A_{Th} = \frac{(3.565)^2}{19.62} \frac{3 \ 500 \times 19.635}{3(60 - 3)} = 260.329 \text{ m}^2$$

Se elige el área igual a 260.329 m<sup>2</sup>. (De aquí en adelante se considerará para el análisis de estabilidad la operación en el NAMINO por ser la más desfavorable).

Considerando un factor de seguridad  $n = 1.5$  el área de la cámara resulta

$$A_s = 1.5 \times 260.329 = 390.494 \text{ m}^2$$

que tendrá un diámetro  $D_s = 22.3 \text{ m}$

Con esta área calcularemos la semiamplitud no amortiguada

$$z_* = V_o \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_T}{A_s}} = 3.565 \sqrt{\frac{3\ 500}{9.81} \frac{19.635}{390.494}} = 15.10 \text{ m}$$

Como  $z_* = 15.10 > 0.1 H = 8 \text{ m}$  implica oscilaciones grandes. Para verificar la estabilidad de la cámara emplearemos el criterio de Jaeger (gráfica de Frank, fig 3.5). Así, para las condiciones en el NAMINO los parámetros de Voght (ecs 3.32) resultan

$$\beta = \frac{F V_o^2}{H} = \frac{h_T}{H} = \frac{3}{69} = 0.05$$

$$\epsilon = \frac{L A_T V_o^2}{g A_s h_T^2} = \frac{3\ 500 \times 19.635 \times (3.565)^2}{9.81 \times 390.494 \times 3^2} = 25.333$$

Con estos valores en la fig 3.5 se observa que la cámara resulta estable.

b) Máximos y mínimos para las maniobras I y II.

Se hara con las gráficas de Calame y Gaden, sea

$$z_* = V_o \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_T}{A_s}} \quad \text{y} \quad F_{ro} = \frac{F V_o^2}{H} = \frac{h_T}{H}$$

Para la maniobra I los parámetros resultan

$$z_* = 4.074 \sqrt{\frac{3\ 500}{9.81} \frac{19.635}{390.404}} = 17.256 \text{ m}$$

$$F_{ro} = \frac{F V_o^2}{z_*} = \frac{5}{17.256} = 0.290$$

De la fig 3.2  $z_r = 0.82$  para el primer máximo. La oscilación máxima resulta

$$z_{\text{máx}} = z_r z_* = 0.82 \times 17.256 = 14.150 \text{ m}$$

La elevación para esta oscilación es

$$\text{Elev} = \text{NAME} + z_{\text{máx}} = 200 + 14.15 = 214.15 \text{ msnm}$$

Para la maniobra II los parámetros resultan

$$z_* = 3.565 \sqrt{\frac{3 \cdot 500}{9.81} \frac{19.635}{390.494}} = 15.10 \text{ m}$$

$$F_{ro} = \frac{3}{15.10} = 0.199$$

De la fig 3.3  $z_r = -1.03$  para el primer mínimo; la oscilación mínima resulta

$$z_{\text{mín}} = z_r z_* = -1.03 \times 15.10 = -15.553 \text{ m}$$

y la elevación resulta

$$\text{Elevación mínima} = \text{NAMINO} + z_{\text{mín}} = 160.00 - 15.55 \text{ s} = 144.45 \text{ msnm}$$

Para calcular el volumen de excavación consideraremos la diferencia de las elevaciones multiplicada por el área de la cámara; así

$$V = h A_s = (214.15 - 144.45) 390.494 = 27,219 \text{ m}^3$$

Estas elevaciones se han verificado con un programa de computadora que utiliza el método de Runge-Kutta, publicado en el cap A.2.16.7 del Manual de CFE, en el cual se ha empleado un  $\Delta t = 10$  seg, obteniéndose las siguientes elevaciones

$$\text{Elev máxima} = 214.099 \text{ msnm}; (z_{\text{máx}} = 14.099)$$

$$\text{Elev mínima} = 144.596 \text{ msnm}; (z_{\text{mín}} = -15.400)$$

que implica practicamente el mismo volumen ya calculado.

## II. Análisis de la alternativa 4.2

Del inciso anterior se observa que las elevaciones máxima (214.15 m) y mínima (144.45) no cumplen las restricciones impuestas, teniéndose el caso más desfavorable para la maniobra II; por tanto se ajustará el área de la cámara para esta maniobra y luego se revisará para la maniobra I. Esto se hace por aproximaciones sucesivas empleando los parámetros relativos. Sea

$$z_* = 3.565 \sqrt{\frac{3 \cdot 500}{9.81} \frac{19.635}{A_s}} = 298.38 \sqrt{1/A_s}$$

$$F_{ro} = \frac{3}{z_*} \quad z_{mín} = z_r z_* \quad (z_r, \text{ de la gráfica 3.3})$$

$A_s$ m <sup>2</sup>	$z_*$	$F_{ro}$	$z_r$	$z_{mín}$ m	Elev msnm
600.00	12.18	0.246	-1.030	-12.54	147.46
700.00	11.28	0.270	-1.035	-11.67	148.33
660.52	11.61	0.260	-1.035	-12.00	148.00

Se observa que para  $A_s = 660.00$  ( $D_s = 29.0$  m) se cumple con la restricción.

Revisión para la maniobra I

$$z_* = 4.074 \sqrt{\frac{3 \cdot 500}{9.81} \frac{19.635}{660.52}} = 13.268 \text{ m}$$

$$F_{ro} = \frac{5}{13.268} = 0.38$$

de donde  $z_r = 0.77$

$$z_{\text{máx}} = 0.77 \times 13.268 = 10.22 \text{ m}$$

Elev máxima = 200.00 + 10.22 = 210.22 msnm que cumple con la restricción.

Estos cálculos se verificaron con ayuda del programa de computadora ya mencionado, donde se obtienen

$$\text{Elev máxima} = 210.161 \text{ msnm}; \quad z_{\text{máx}} = 10.161 \text{ m}$$

$$\text{Elev mínima} = 148.081 \text{ msnm}; \quad z_{\text{mín}} = -11.919 \text{ m}$$

donde puede verse la buena concordancia de ambos métodos. En la fig 4.8 se muestran las oscilaciones obtenidas con el programa, en donde se ha empleado  $\Delta t = 10 \text{ seg}$ .

El volumen de excavación de esta alternativa resulta

$$V = (210.22 - 148.00) 660.52 = 41\,098 \text{ m}^3$$

### III. Análisis de la alternativa 4.3

Como una primera aproximación el área mínima de la cámara con orificio se estima con la fórmula de Escande (ec 4.15)

$$A_{\text{es}} = \frac{A_{\text{Th}}}{1 + \frac{1}{2} h \frac{H_o - 2h_T}{H_o h_T}}$$

Para el NAMINO

$$\Delta h = \left( \frac{Q}{Cd Ad \sqrt{2g}} \right)^2 = \left( \frac{70}{0.7 \times 7.07 \sqrt{19.62}} \right)^2 = 10.20 \text{ m}$$

$$A_{\text{es}} = \frac{260.829}{1 + \frac{1}{2} (10.20) \frac{57 - (2 \times 3)}{57 \times 3}} = 103.262 \text{ m}^2$$

Considerando un factor de seguridad de 2 resulta

$$A_s = 2.0 \times 103.262 = 206.524 \text{ m}^2$$

Se verifica ahora si esta cámara cumple con las restricciones. Se revisa primero la maniobra II pues ya se vió que es la más desfavorable en este proyecto en caso de satisfacer esta restricción se revisan las maniobras I y III.

Se calculan primero los parámetros de Calame y Gaden

$$z_* = 3.565 \sqrt{\frac{3 \cdot 500}{9.81} \frac{19.635}{206.524}} = 20.763$$

$$F_{ro} = \frac{3}{20.763} = 0.144 \quad ; \quad r_o = \frac{\Delta h}{z_*} = \frac{10.20}{20.763} = 0.491$$

de la fig 4.2  $z_r = 0.79$

y  $z_{\text{mín}} = -0.79 \times 20.912 = -16.52 \text{ m}$

Con lo que

$$\text{Elev mínima} = 160.00 - 16.52 = 143.48 \text{ msnm}$$

que no cumple con la restricción impuesta.

Como en el inciso anterior se procede por tanteos. El área de la cámara con orificio que cumple la restricción del mínimo es

$$A_s = 346.36 \text{ m}^2 \quad (D_s = 21 \text{ m}) \quad \text{para una } z_{\text{mín}} = -11.94 \text{ m}$$

Por lo que la Elev mínima =  $160.00 - 11.94 = 148.06 \text{ msnm}$

Revisión para la maniobra III.

Para esta maniobra se utilizan las siguientes ecuaciones (ver cap 4.3)

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{g}{L} \left( z + F V |V| + k \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| \right) \quad (4.9)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{V A_T - Q_t}{A_s} \quad (4.3)$$

$$Q_t = P / \left( k \left( H + z + R \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| \right) \right) \quad (4.16)$$

Para la última ecuación

$$k = \rho g \eta / k'$$

en donde

$\eta$  eficiencia

$k'$  constante para transformar kw a l kg m/seg  
( $k' = 101.88$  kg m/seg por kw)

Sí se considera  $\eta = 85\%$

$$k = \frac{1000 \times 0.85}{101.88} = 8.34$$

Al considerar  $A_s = 346.36 \text{ m}^2$  se obtiene con la maniobra III  $z_{\text{mín}} = 12.839$  (Elev mínima = 147.16 msnm) que no cumple con la restricción; por tal motivo el área se incrementa obteniéndose que con  $A_s = 380.13 \text{ m}^2$  ( $D_s = 22 \text{ m}$ ) resulta  $z_{\text{mín}} = -11.397$ , que da Elev mín = 148.603 que ya cumple con la restricción.

Los resultados para  $A_s = 380.13 \text{ m}^2$  se pueden consultar en la fig 4.9, (en los cuales se empleó  $\Delta z = 10 \text{ seg}$ ).

Revisión para la maniobra I

Con los parámetros relativos se obtiene

$$z_* = 4.074 \sqrt{\frac{3 \ 500}{9.81} \frac{19.635}{380.13}} = 17.489$$

$$\Delta h = \left( \frac{Q}{Cd \ Ad \ \sqrt{2g}} \right)^2 = \left( \frac{80}{0.7 \times 7.07 \ \sqrt{19.62}} \right)^2 = 13.32 \text{ m}$$

$$F_{ro} = \frac{5}{17.489} = 0.286 \quad ; \quad r_o = \frac{13.32}{17.489} = 0.762$$

$$z_r = 0.53 \text{ (fig 4.1) y } z_{\text{máx}} = 9.27 \text{ m}$$

Con lo cual

$$\text{Elev máxima} = 200.00 + 9.27 = 209.27 \text{ msnm}$$

que cumple con la restricción; empleando el programa se obtiene

$$\text{Elev máxima} = 209.247 \text{ msnm; con } z = 9.247 \text{ m}$$

el volumen de excavación resulta

$$V = (209.25 - 148.603) \times 380.13 = 23 \ 053 \text{ m}^3$$

#### IV. Análisis de la alternativa 4.4

El área de la cámara vertical se tomará como la calculada con el criterio de Escande con  $n = 2.0$

$$A_s = 206.524 \text{ m}^2 \quad (D_s = 16.22 \text{ m})$$

Con esta área se provoca la maniobra I en el NAME si la elevación máxima alcanzada es mayor que la restricción se justifica el diseño de una cámara superior; por otro lado para justificar el diseño de una cámara inferior se provoca la maniobra III (ya que es más desfavorable que la II) en el NAMINO y si la elevación mínima obtenida con ésto es menor que la restricción se justifica el diseño de una expansión inferior.

Al provocar tales maniobras se obtiene (con el programa)

$$z_{\text{máx}} = 20.628 \text{ m; Elev máxima} = 220.628 \text{ msnm}$$

$$z_{\text{mín}} = -19.219 \text{ m; Elev mínima} = 140.728 \text{ msnm}$$

que no cumplen con las restricciones; por tanto habrá necesidad de emplear expansión superior e inferior. Se hicieron varios diseños con ayuda del programa. Uno que da resultados satisfactorios puede verse en la fig 4.10. En la tabla 4.1 se muestra la impresión por el programa de los datos correspondientes a este diseño para la maniobra III.

Para este diseño resulta

Maniobra I (tabla 4.2, fig 4.11)

$$z_{\text{máx}} = 10.253 \text{ m; Elev máxima} = 210.253 \text{ msnm}$$

Maniobra III (tabla 4.3, fig 4.12)

$$z_{\text{mín}} = -11.053 \text{ m; Elev mínima} = 148.947 \text{ msnm}$$

Con lo cual el volumen resulta

$$V = (210.253 - 148.947) \times 205.794 = 12\,617 \text{ m}^3$$

## V. Comparación de volúmenes

Resumen de volúmenes

Cámara simple  $V = 41\,098 \text{ m}^3$

Cámara con orificio =  $23\,053 \text{ m}^3$

Cámara con expansiones =  $12\,617 \text{ m}^3$

Como puede observarse la cámara con expansiones implica el menor volumen, sin embargo, la elevación del diseño final se hace tomando en cuenta otros aspectos importantes del sistema en general (ver el siguiente inciso, y los criterios de diseño del cap 5).

## VI. Comentarios adicionales

Debe notarse que aunque la cámara con expansiones resulta estable, las oscilaciones tienden a ser estacionarias (ver cap 4.3) entre las elevaciones 202.00 y 155.00; aún después de 10 períodos; si estas variaciones fueran desfavorables para la operación del sistema hidromecánico, deberá ampliarse el área de la cámara en su sección más pequeña.

Además del análisis económico (para el cual la estimación del volumen de excavación y área de la cámara es esencial) para el diseño definitivo deben incluirse además factores constructivos, de operación, seguridad, golpe de ariete en la tubería de presión y en el túnel, resonancia, etc.

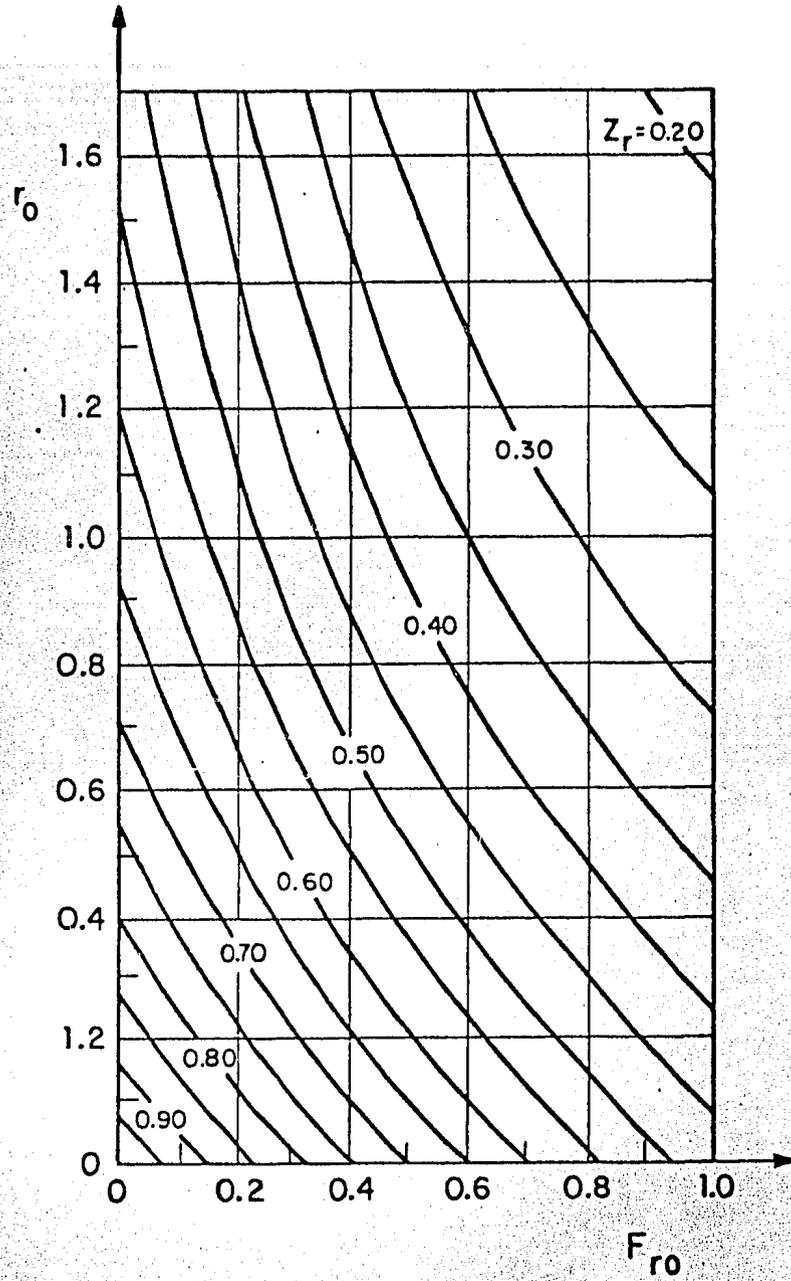


Fig 4.1 Cámara de oscilación con orificio. Rechazo instantáneo de carga total

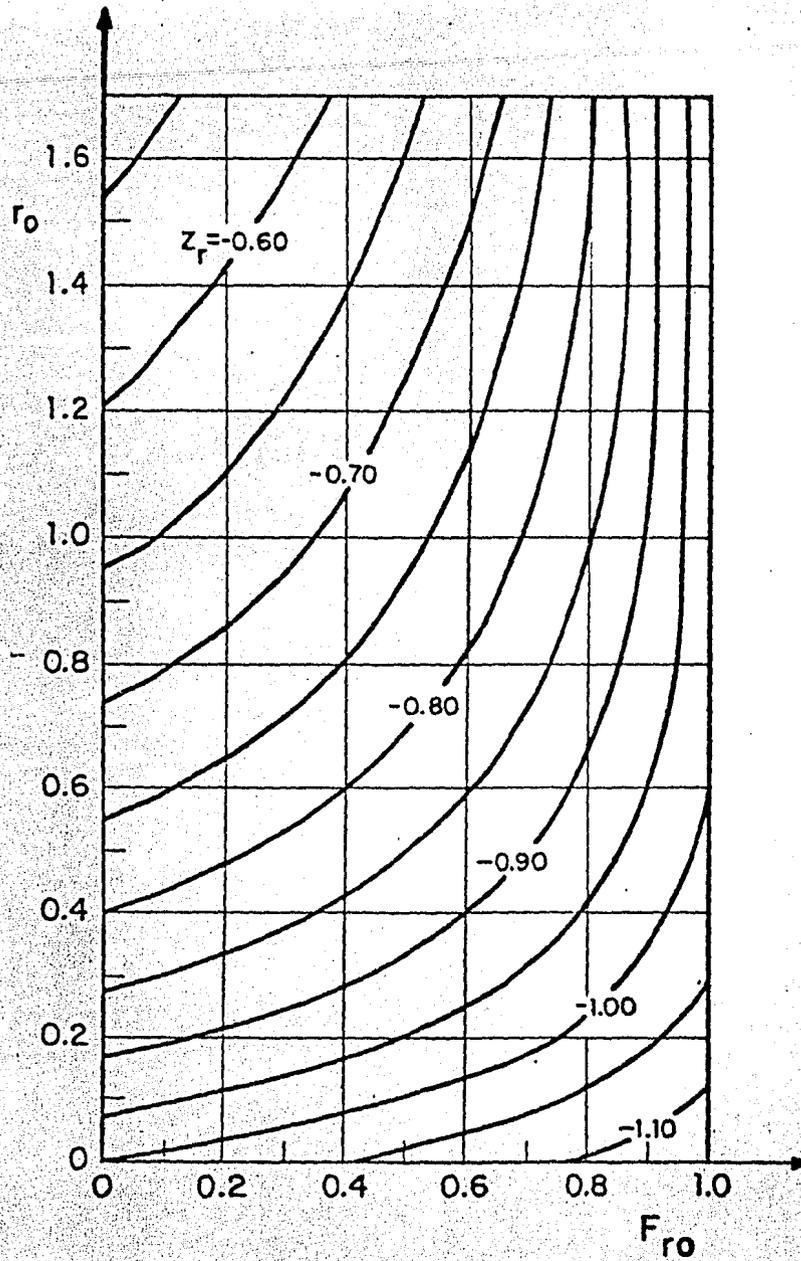
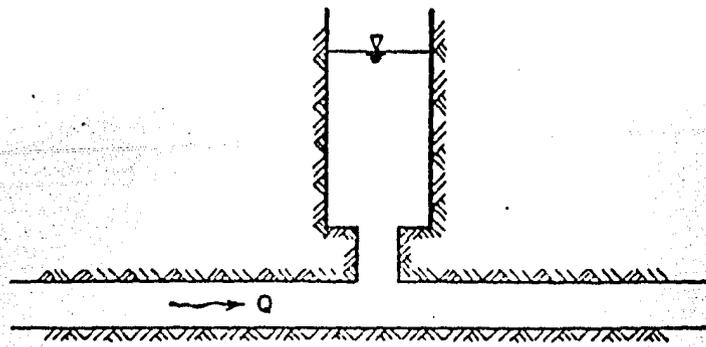
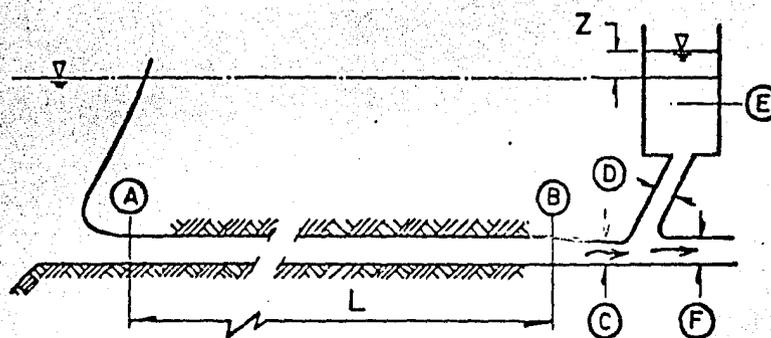


Fig 4.2 Cámara de oscilación diferencial o con orificio.  
Demanda instantánea de carga total



a) Con un tubo corto



b) Unión en forma compleja

Fig 4.3 Otras formas de unión entre túnel y cámara de oscilación

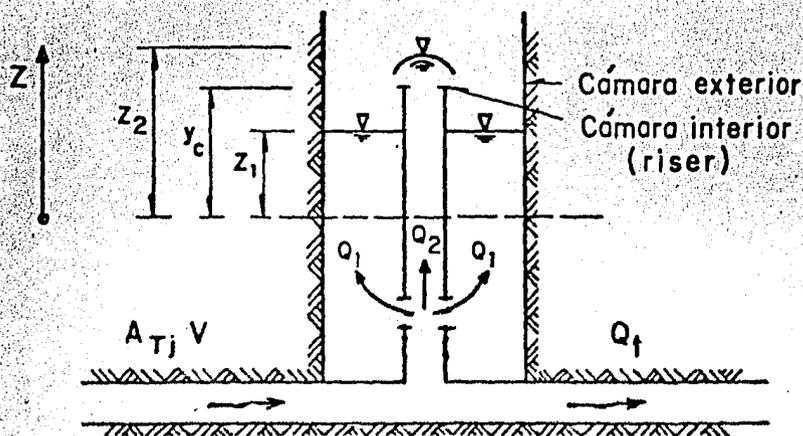


Fig 4.4 Cámara diferencial tipo Johnson

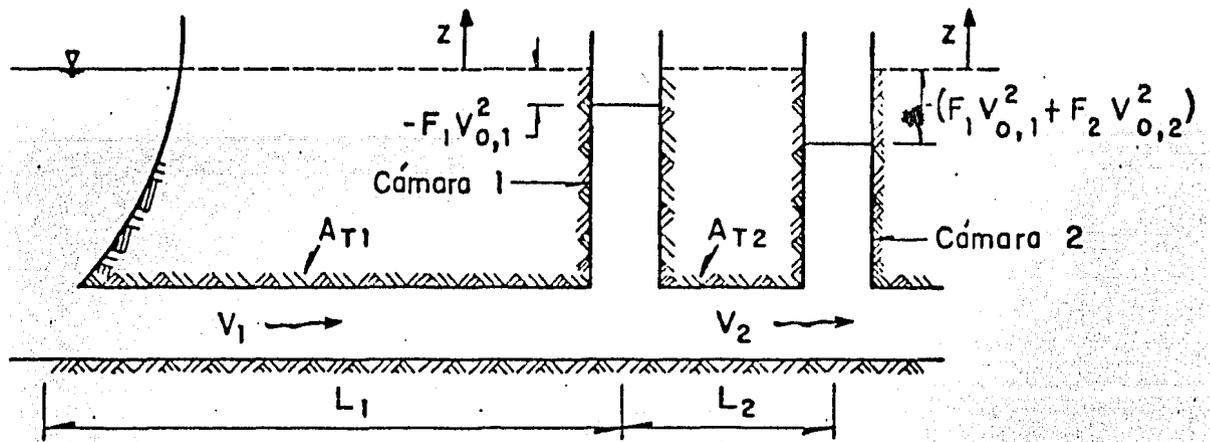


Fig 4.5 Sistema con dos cámaras aguas arriba

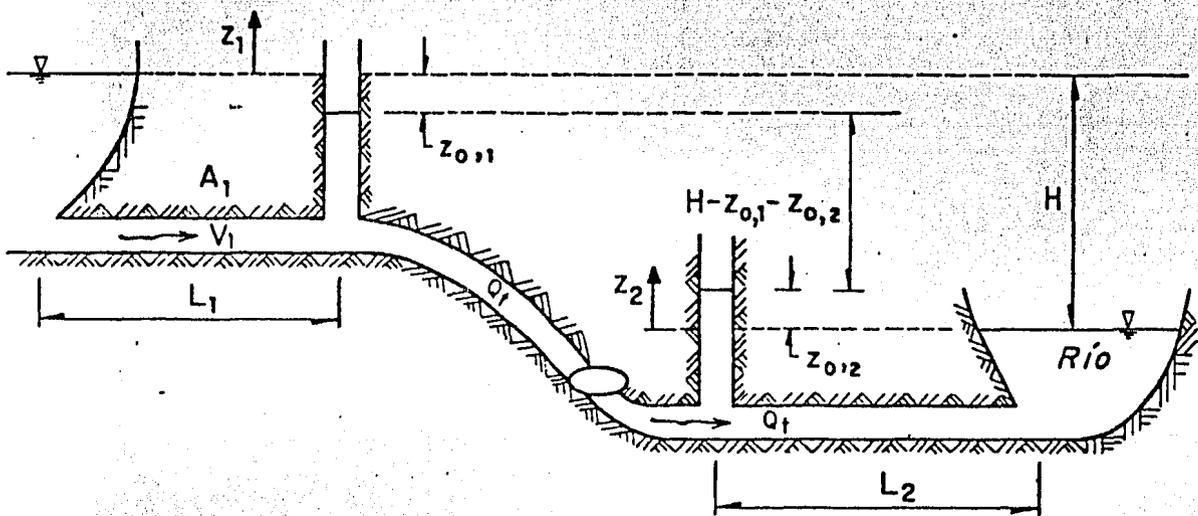


Fig 4.6 Sistema con una cámara aguas arriba y otra aguas abajo

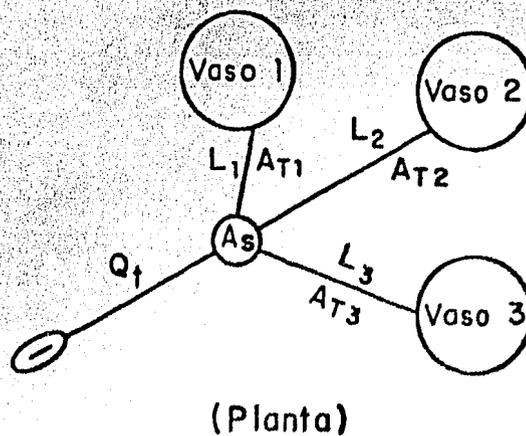
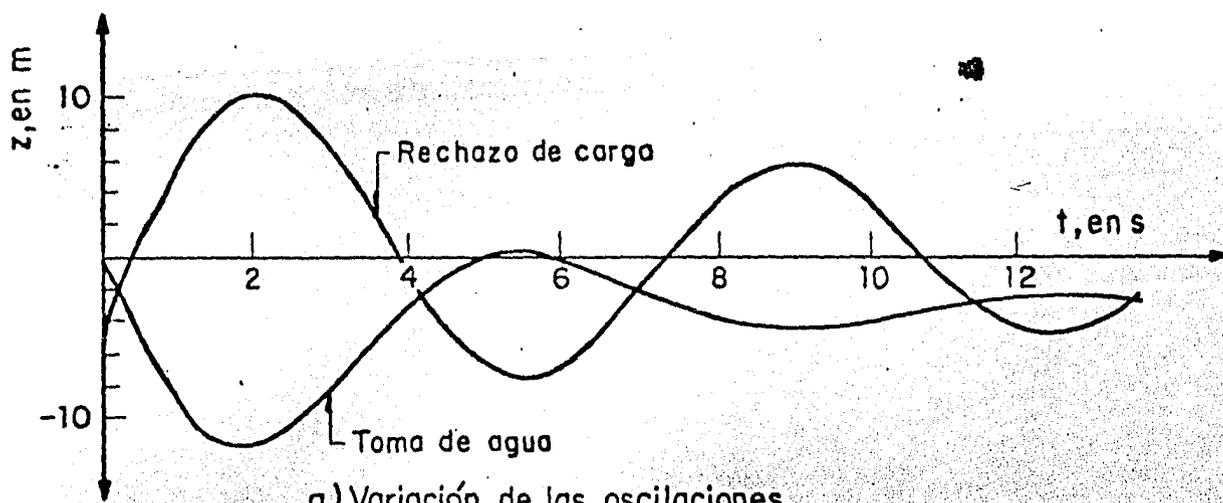


Fig 4.7 Sistema con una cámara de oscilación y 3 vasos de almacenamiento



## MAXIMOS

- |    |                     |                        |                      |
|----|---------------------|------------------------|----------------------|
| 1. | Z MAXIMO = 10.161 M | ELEV. MAX. = 210.161 M | CUANDO T = 200.000 S |
| 2. | Z MAXIMO = 5.724 M  | ELEV. MAX. = 205.724 M | CUANDO T = 900.000 S |

## MINIMOS

- |    |                     |                        |                       |
|----|---------------------|------------------------|-----------------------|
| 1. | Z MINIMO = -7.320 M | ELEV. MIN. = 192.680 M | CUANDO T = 500.000 S  |
| 2. | Z MINIMO = -4.700 M | ELEV. MIN. = 195.300 M | CUANDO T = 1240.000 S |

## b) Resumen de máximos y mínimos, para el caso del rechazo

## MAXIMOS

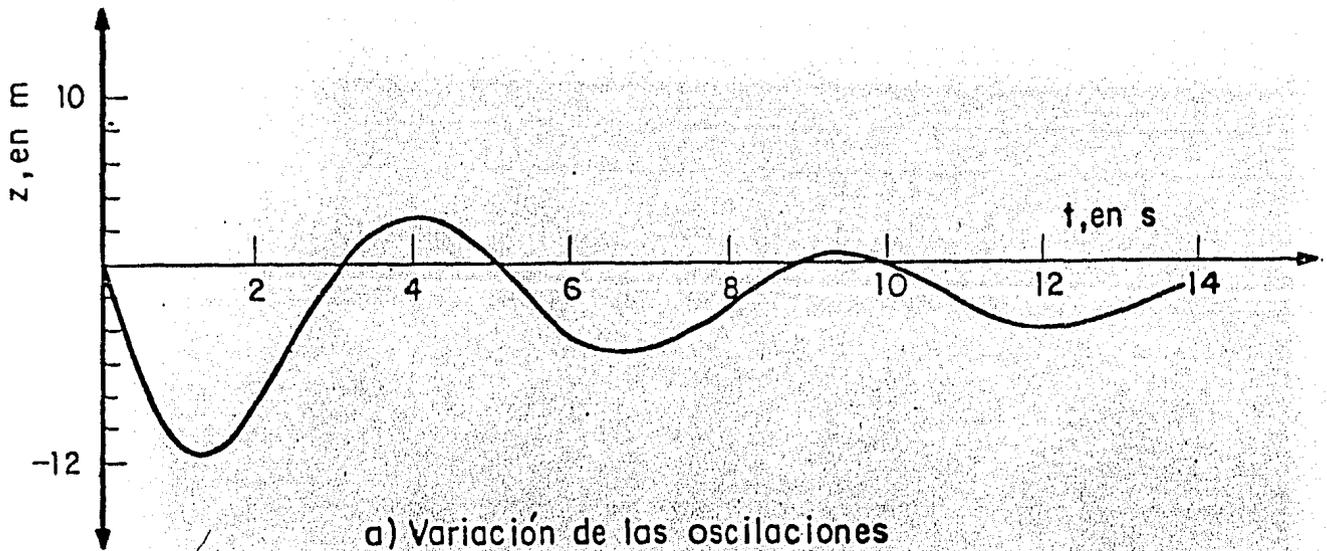
- |    |                     |                        |                       |
|----|---------------------|------------------------|-----------------------|
| 1. | Z MAXIMO = 0.185 M  | ELEV. MAX. = 160.185 M | CUANDO T = 550.000 S  |
| 2. | Z MAXIMO = -2.382 M | ELEV. MAX. = 157.618 M | CUANDO T = 1260.000 S |

## MINIMOS

- |    |                      |                        |                      |
|----|----------------------|------------------------|----------------------|
| 1. | Z MINIMO = -11.919 M | ELEV. MIN. = 148.081 M | CUANDO T = 180.000 S |
| 2. | Z MINIMO = -4.479 M  | ELEV. MIN. = 155.521 M | CUANDO T = 900.000 S |

## c) Resumen de máximos y mínimos para el caso de toma de carga

Fig 4.8 Resultados obtenidos mediante el programa para la alternativa 4.2



## MAXIMOS

1. Z MAXIMO = 2.745 M	ELEV. MAX. = 162.754 M	CUANDO T = 400.000 S
2. Z MAXIMO = 0.396 M	ELEV. MAX. = 160.396 M	CUANDO T = 940.000 S
3. Z MAXIMO = 0.565 M	ELEV. MAX. = 159.435 M	CUANDO T = 1480.000 S
4. Z MAXIMO = -1.072 M	ELEV. MAX. = 150.928 M	CUANDO T = 2020.000 S

## MINIMOS

1. Z MINIMO = -11.452 M	ELEV. MIN. = 148.540 M	CUANDO T = 130.000 S
2. Z MINIMO = - 5.494 M	ELEV. MIN. = 154.506 M	CUANDO T = 670.000 S
3. Z MINIMO = - 3.918 M	ELEV. MIN. = 156.082 M	CUANDO T = 1210.000 S
4. Z MINIMO = - 3.196 M	ELEV. MIN. = 156.804 M	CUANDO T = 1750.000 S

## b) Resumen de máximos y mínimos

Fig 4.9 Resultados para la maniobra a potencia constante de la alternativa 4.3

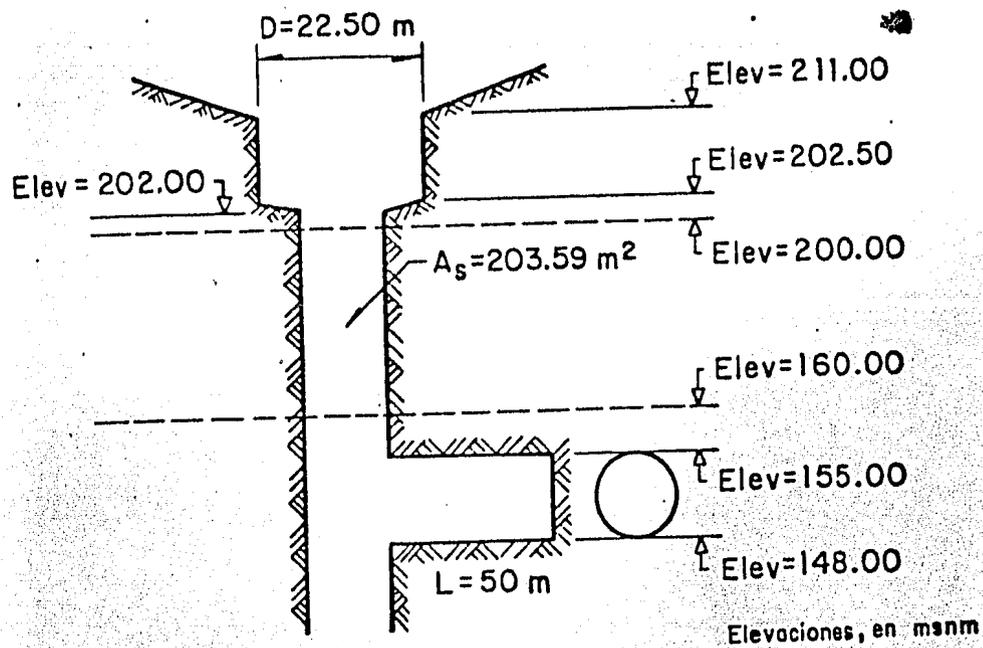


Fig 4.10 Diseño con expansiones

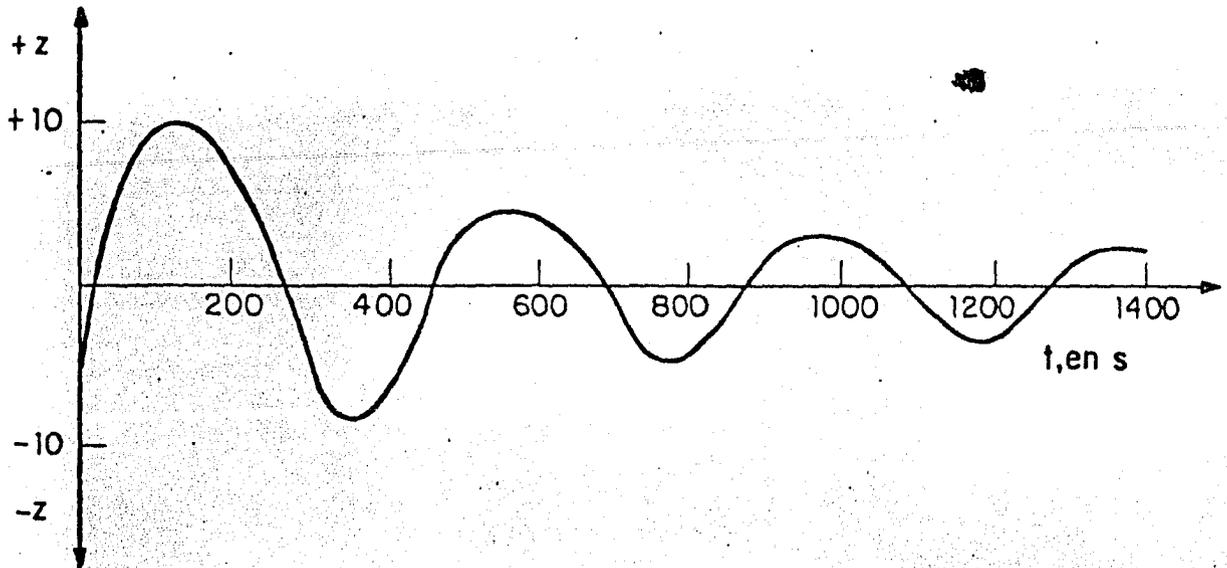


Fig 4.11 Comportamiento de las oscilaciones para la expansión superior al producirse la maniobra I

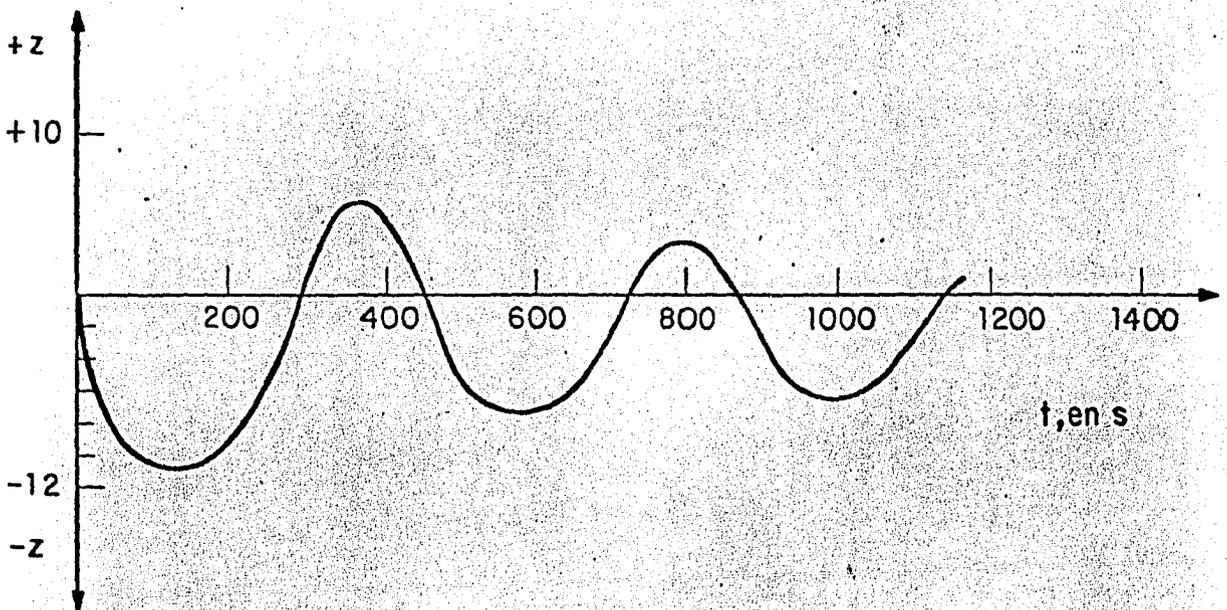


Fig 4.12 Comportamiento de las oscilaciones para la expansión inferior al producirse la maniobra III

\*CARACTERISTICAS DEL SISTEMA\*

TIPO DE CAMARA=AREA VARIABLE CON ORIFICIO  
 LOCALIZACION DE LA CAMARA=AGUAS ARRIBA DE LA CASA DE MAQUINAS

\*DATOS DEL CONDUCTO\*

LONGITUD= 3500.000 M  
 AREA= 19.635 M\*\*2  
 F PERDIDAS (+)= 0.23600 S\*\*2/M  
 C PERDIDAS (-)= 1.000

\*DATOS DE LA CAMARA\*

NUMERO DE PUNTOS QUE DESCRIBEN LA GEOMETRIA= 13	
1.-	AREA= 203.590 M**2 A LA ELEVACION= 140.000 M
2.-	AREA= 203.590 M**2 A LA ELEVACION= 148.000 M
3.-	AREA= 383.800 M**2 A LA ELEVACION= 148.250 M
4.-	AREA= 383.870 M**2 A LA ELEVACION= 148.500 M
5.-	AREA= 448.540 M**2 A LA ELEVACION= 149.000 M
6.-	AREA= 519.820 M**2 A LA ELEVACION= 150.000 M
7.-	AREA= 583.590 M**2 A LA ELEVACION= 151.500 M
8.-	AREA= 519.820 M**2 A LA ELEVACION= 153.000 M
9.-	AREA= 448.540 M**2 A LA ELEVACION= 154.000 M
10.-	AREA= 383.870 M**2 A LA ELEVACION= 154.500 M
11.-	AREA= 383.800 M**2 A LA ELEVACION= 154.750 M
12.-	AREA= 203.590 M**2 A LA ELEVACION= 155.000 M
13.-	AREA= 203.590 M**2 A LA ELEVACION= 202.000 M
14.-	AREA= 397.610 M**2 A LA ELEVACION= 202.500 M
15.-	AREA= 397.610 M**2 A LA ELEVACION= 215.000 M

\*DATOS DEL ORIFICIO\*

AREA= 7.070 M\*\*2  
 C DESCARGA (+)= 0.700  
 CCO (-)= 1.000

\*DATOS VARIOS\*

NO. PERIODOS APROX. POR CALCULAR= 3.000  
 INCREMENTO DE TIEMPO= 0.500 S  
 GASTO ANTERIOR A MANIOBRA= 0.000 M\*\*3/S  
 ELEVACION ORIGEN= 160.000 M  
 PERIODO APROXIMADO= 382.158 S  
 (CALCULADO CON AREA CAMARA= 203.590 M\*\*2)

TABLA 4.1 Características del sistema. Maniobra III

**\*CONDICIONES INICIALES\***

Z INICIAL= -4.997 M  
 ELEV. INICIAL= 195.003 M  
 VELOCIDAD INICIAL= 4.074 M/S

**\*DATOS DE LA MANIOBRA\***

TIPO DE MANIOBRA=INSTANTANEA CON GASTO FIJO  
 GASTO FINAL= 0.000 M\*\*3/S

**\*RESULTADOS\***

TIEMPO EN SEGUNDOS	Z EN METROS	ELEVACION EN METROS	VEL.TUNEL EN M/S	AREA CAMARA EN M**2
0.000	-4.997	195.003	4.074	203.590
20.000	-2.112	202.112	3.302	247.064
40.000	5.073	205.073	2.564	377.610
60.000	7.275	207.275	1.905	377.610
80.000	8.850	208.850	1.291	377.610
100.000	9.833	209.833	0.701	377.610
120.000	10.240	210.240	0.124	377.610
140.000	10.077	210.077	-0.445	377.610
160.000	9.378	209.378	-0.960	377.610
180.000	8.218	208.218	-1.367	377.610
200.000	6.718	206.718	-1.646	377.610
220.000	5.010	205.010	-1.790	377.610
240.000	3.220	203.220	-1.818	377.610
260.000	0.692	200.692	-1.740	203.590
280.000	-2.476	197.524	-1.521	203.590
300.000	-5.106	194.894	-1.190	203.590
320.000	-7.020	192.980	-0.785	203.590
340.000	-8.107	191.873	-0.336	203.590
360.000	-8.307	191.673	0.127	203.590
380.000	-7.622	192.378	0.571	203.590
400.000	-6.161	193.839	0.924	203.590
420.000	-4.140	195.860	1.147	203.590
440.000	-1.829	198.171	1.226	203.590
460.000	0.504	200.504	1.172	203.590
480.000	2.437	202.437	1.010	374.125
500.000	3.335	203.335	0.796	377.610
520.000	4.006	204.006	0.560	377.610
540.000	4.437	204.437	0.310	377.610
560.000	4.617	204.617	0.053	377.610
580.000	4.542	204.542	-0.204	377.610
600.000	4.217	204.217	-0.444	377.610
620.000	3.677	203.677	-0.647	377.610
640.000	2.957	202.957	-0.801	377.610
660.000	1.982	201.982	-0.897	203.590
680.000	0.225	200.225	-0.908	203.590
700.000	-1.461	198.539	-0.825	203.590
720.000	-2.710	197.070	-0.666	203.590
740.000	-3.775	196.005	-0.451	203.590
760.000	-4.628	195.372	-0.200	203.590
780.000	-4.758	195.242	0.066	203.590
800.000	-4.380	195.620	0.322	203.590
820.000	-3.546	196.494	0.534	203.590
840.000	-2.365	197.835	0.678	203.590
860.000	-0.984	199.016	0.740	203.590
880.000	0.438	200.438	0.722	203.590
900.000	1.753	201.753	0.631	203.590
920.000	2.550	202.550	0.486	377.610
940.000	2.750	202.750	0.321	377.610
960.000	3.181	203.181	0.145	377.610
980.000	3.235	203.235	-0.036	377.610
1000.000	3.111	203.111	-0.214	377.610
1020.000	2.818	202.818	-0.375	377.610
1040.000	2.371	202.371	-0.507	347.590
1060.000	1.424	201.424	-0.597	203.590
1080.000	0.235	200.235	-0.622	203.590
1100.000	-0.934	199.066	-0.580	203.590
1120.000	-1.964	198.036	-0.480	203.590
1140.000	-2.756	197.244	-0.336	203.590
1160.000	-3.237	196.761	-0.162	203.590
1180.000	-3.372	196.628	0.026	203.590
1200.000	-3.143	196.857	0.207	203.590
1220.000	-2.584	197.416	0.365	203.590
1240.000	-1.763	198.237	0.477	203.590
1260.000	-0.780	199.220	0.533	203.590
1280.000	0.254	200.254	0.530	203.590
1300.000	1.228	201.228	0.472	203.590
1320.000	2.042	202.042	0.368	220.032
1340.000	2.442	202.442	0.235	375.093
1360.000	2.605	202.605	0.091	377.610
1380.000	2.622	202.622	-0.056	377.610
1400.000	2.475	202.475	-0.197	395.623
1420.000	2.184	202.184	-0.327	475.177
1440.000	1.486	201.486	-0.423	203.590
1460.000	0.617	200.617	-0.470	203.590
1480.000	-0.292	199.708	-0.465	203.590
1500.000	-1.143	198.855	-0.412	203.590
1520.000	-1.856	198.144	-0.317	203.590

**\*M A X I M O S\***

1.-	Z MAXIMO=	10.253 M	ELEV. MAX. =	210.253 M	CUANDO	T=	124.500 S
2.-	Z MAXIMO=	4.622 M	ELEV. MAX. =	204.622 M	CUANDO	T=	564.000 S
3.-	Z MAXIMO=	3.238 M	ELEV. MAX. =	203.238 M	CUANDO	T=	976.000 S
4.-	Z MAXIMO=	2.633 M	ELEV. MAX. =	202.633 M	CUANDO	T=	1372.500 S

**\*M I N I M O S\***

1.-	Z MINIMO=	-8.342 M	ELEV. MIN. =	191.658 M	CUANDO	T=	354.500 S
2.-	Z MINIMO=	-4.774 M	ELEV. MIN. =	195.226 M	CUANDO	T=	773.000 S
3.-	Z MINIMO=	-3.375 M	ELEV. MIN. =	196.625 M	CUANDO	T=	1177.500 S

TABLA 4.2 Oscilaciones calculadas para la alternativa 4.4. Maniobra 1.

\*CONDICIONES INICIALES\*

Z INICIAL= 0.000 M  
 ELEV. INICIAL= 160.000 M  
 VELOCIDAD INICIAL= 0.000 M/S

\*DATOS DE LA MANIOBRA\*

TIPO DE MANIOBRA= POTENCIA CONSTANTE SIN RESTRICION  
 CARGA TOTAL= 60.000 M  
 POTENCIA FINAL= 30000.000 KW

\*RESULTADOS\*

TIEMPO, EN SEGUNDOS	Z EN METROS	ELEVACION EN METROS	VEL. TUNEL EN M/S	AREA CAMARA EN M**2
0.000	0.000	160.000	0.000	203.590
20.000	-3.783	154.217	0.661	420.485
40.000	-7.862	152.138	1.349	539.220
60.000	-9.239	150.761	1.960	536.957
80.000	-10.211	149.789	2.517	504.754
100.000	-10.826	149.174	3.033	469.933
120.000	-11.052	148.948	3.509	441.765
140.000	-10.877	149.123	3.939	457.310
160.000	-10.348	149.652	4.291	494.981
180.000	-9.370	150.430	4.544	457.492
200.000	-8.613	151.387	4.693	551.040
220.000	-7.525	152.475	4.748	531.631
240.000	-6.285	153.715	4.723	468.830
260.000	-4.300	155.700	4.621	203.590
280.000	-1.218	158.782	4.390	203.590
300.000	1.538	161.538	4.050	203.590
320.000	4.730	163.730	3.645	203.590
340.000	7.207	165.207	3.208	203.590
360.000	8.891	165.891	2.769	203.590
380.000	9.757	165.757	2.352	203.590
400.000	9.818	164.818	2.001	203.590
420.000	9.164	163.164	1.762	203.590
440.000	7.977	160.977	1.663	203.590
460.000	6.304	158.496	1.714	203.590
480.000	4.010	155.970	1.903	203.590
500.000	1.754	154.246	2.172	416.689
520.000	-0.538	153.465	2.502	486.690
540.000	-2.015	152.985	2.807	520.168
560.000	-3.260	152.740	3.098	525.684
580.000	-4.297	152.703	3.369	526.499
600.000	-5.135	152.865	3.610	522.864
620.000	-5.784	153.216	3.809	504.446
640.000	-6.240	153.760	3.955	469.655
660.000	-6.470	154.530	4.041	377.857
680.000	-6.859	156.141	4.049	203.590
700.000	-7.488	158.112	3.950	203.590
720.000	-8.017	159.983	3.763	203.590
740.000	-8.567	161.567	3.512	203.590
760.000	-9.123	162.723	3.223	203.590
780.000	-9.364	163.364	2.919	203.590
800.000	-9.447	163.447	2.624	203.590
820.000	-9.267	162.767	2.363	203.590
840.000	-8.963	161.963	2.167	203.590
860.000	-8.539	160.539	2.061	203.590
880.000	-8.156	158.844	2.057	203.590
900.000	-7.941	157.059	2.152	203.590
920.000	-7.634	155.366	2.344	203.590
940.000	-7.245	154.355	2.572	402.681
960.000	-6.714	153.886	2.819	456.695
980.000	-6.354	153.646	3.059	473.780
1000.000	-6.400	153.600	3.284	477.046
1020.000	-6.264	153.736	3.487	467.326
1040.000	-6.946	154.054	3.655	441.532
1060.000	-7.418	154.582	3.778	367.319
1080.000	-7.279	153.721	3.840	203.590
1100.000	-7.741	157.259	3.814	203.590
1120.000	-8.175	158.825	3.706	203.590
1140.000	-8.251	160.251	3.533	203.590

\*MAXIMOS\*

1.- Z MAXIMO= 5.938 M ELEV. MAX.= 165.938 M CUANDO T= 366.500 S  
 2.- Z MAXIMO= 3.483 M ELEV. MAX.= 163.483 M CUANDO T= 793.000 S

\*MINIMOS\*

1.- Z MINIMO= -11.053 M ELEV. MIN.= 148.947 M CUANDO T= 121.000 S  
 2.- Z MINIMO= -7.307 M ELEV. MIN.= 152.693 M CUANDO T= 573.300 S  
 3.- Z MINIMO= -8.406 M ELEV. MIN.= 153.974 M CUANDO T= 995.000 S

TABLA 4.2 Oscilaciones calculadas para la alternativa 4.4. Manobra III.

## 5. CRITERIOS DE DISEÑO

Como una primera idea, debe de investigarse si se requiere una cámara de oscilación; para ésto podemos hacer uso del siguiente criterio empírico; conviene construir una cámara de oscilación si se cumple que

$$\frac{\sum L_i V_i}{H_n} > 3 \text{ a } 5 \quad (\text{sistema métrico})$$

en la que  $\sum L_i V_i$  se calcula incluyendo todos los tramos de túnel y tubería, desde la obra de otma hasta la turbina, y  $H_n$  es la mínima carga neta.

En caso de que sea necesario construir una cámara se deben de verificar una serie de especificaciones para su diseño con el fin de lograr una estrutura eficiente.

### 1. Con respecto a su posición

Debe instalarse donde la reducción del golpe de ariete sea efectiva y

haga más económico el diseño del túnel de conducción. También debe quedar lo más cerca posible a las turbinas tanto como la topografía local lo permita, ya que mediante ésto se logra que las variaciones por golpe de ariete queden limitadas de tal manera que no sea necesario un refuerzo excesivo de la tubería a presión, y se tenga una operación más eficiente de las turbinas.

## 2. Estabilidad

La cámara debe ser estable; las oscilaciones resultantes de cambios de carga totales o parciales se deben amortiguar y no deben bajo ninguna condición ser sostenidas o amplificadas. Se deben revisar también las maniobras a potencia constante producidas en el NAMINO, ya que son las más desfavorables para la estabilidad del sistema, (cap 3).

El área mínima de la sección transversal se valúa con los criterios expuestos en el subcap 3.6 .

## 3. Niveles mínimos

En la determinación del nivel mínimo se debe evitar el drenado de la cámara, es decir que las oscilaciones que se produzcan no deben de llegar hasta la clave del túnel ya que ésto trae como consecuencia que se introduzca aire al sistema. En otros casos este nivel se fija por otras características (razones de operación de la planta, por ejemplo).

Para obtener el nivel mínimo se hace uso de los siguientes criterios.

- Para el nivel mínimo en el almacenamiento, NAMINO (que implica una carga mínima en las turbinas) se estudia una toma total instantánea

de carga, en caso de que el nivel mínimo resultante, este cercano al prefijado el área de la cámara debe de aumentarse.

- Este nivel debe de revisarse para el caso de una maniobra de toma total a potencia constante con el NAMINO en el almacenamiento, en caso de que se tengan mínimos más desfavorables, el área podrá ajustarse nuevamente.

#### 4. Niveles máximos

A menos de que se diseñe un vertedor la cámara no debe de verter para las oscilaciones ascendentes. Este nivel máximo se obtiene considerando un rechazo de carga total instantáneo con el nivel máximo en el almacenamiento, NAME; en caso de que las oscilaciones resulten demasiado grandes, el área de la cámara deberá aumentarse.

Como una primera aproximación estos niveles (máximos y mínimos) se pueden obtener por medio del uso de las gráficas adimensionales; para los casos de rechazo total instantánea y toma total instantánea se pueden emplear las figs 3.2 y 3.3 para cámara simple y las figs 4.1 y 4.2 para cámaras con orificio.

#### 5. Area de la cámara

De los puntos 3 y 4 anteriores se determina el área de la cámara, rigiendo la que resulte mayor (ver 4.6). Con el área de la cámara ya determinada se revisan ambos niveles mediante una simulación numérica. El área de la cámara seleccionada debe de evitar grandes rangos entre las oscilaciones ascendentes y las descendentes (a potencia constante) ya que si éstas son muy grandes dificultan la operación del gobernador para dar po-

tencia constante.

De la maniobra a potencia constante se obtiene el comportamiento de las oscilaciones que deberá constatar dos características del sistema (eléctricas, mecánicas e hidráulicas) si las oscilaciones no satisfacen estos requerimientos, se debe de estudiar la posibilidad de ampliar la cámara o bien cambiar el diseño hidráulico de ésta, incluyendo un orificio en su base por ejemplo.

En caso de que el área transversal de la cámara resulte demasiado grande se debe de estudiar la posibilidad de incluir expansiones laterales.

#### 6. Factor de fricción

Este se elige de acuerdo al material del túnel por medio de tablas o bien por la experiencia en conductos similares. Debe estudiarse la posibilidad de medir las pérdidas locales (por cambio de dirección, estrechamientos o expansiones en el túnel) y si es que éstas alcanzan valores considerables se deben de incluir en el factor de fricción, ec 2.18 .

En caso de dudas sobre este factor éste se debe de reducir en un 10% para el cálculo de la oscilación máxima y se debe de aumentar en un 10% para el cálculo de la oscilación mínima.

#### 7. Costos y construcción

Como se mencionó anteriormente la elección del tipo de cámara se determina buscando una solución óptima. Dentro de esta solución se debe de incluir el aspecto económico, a volúmenes (de excavación y de revestimiento) mínimos, costos mínimos.

El aspecto constructivo se ve afectado por la topografía del lugar ya que hay que ajustar el diseño a las limitantes físicas. Normalmente se prefieren las cámaras subterráneas por economía y seguridad y porque las que van sobre el terreno tienen limitaciones de diseño en su altura puede ocurrir así que se necesite alejar la cámara de la casa de máquinas a fin de mantenerla subterránea. La localización en ese caso se basará en un balance económico entre el ahorro en la cámara de oscilación y el gasto adicional para el refuerzo de la tubería a presión.

#### 8. Modelos hidráulicos

Un modelo hidráulico a escala puede ser útil para verificar los resultados de los cálculos numéricos y también comparar un gran número de alternativas con facilidad. Así pues, resultan útiles cuando el diseño de una cámara implique una forma poco común, cuando se requiera experimentar sobre otras formas de unión del túnel con la cámara o bien cuando se quiera conocer el comportamiento hidráulico resultante de una maniobra mixta.

#### 9. Métodos de solución

Como se vió en el cap 3 de este trabajo existen diferentes métodos para valuar las oscilaciones máximas o mínimas para las distintas maniobras que puedan presentarse; estas soluciones van desde las gráficas hasta las obtenidas por el uso de métodos numéricos.

En general se recomienda el empleo de las gráficas adimensionales como una primera aproximación a la solución. El diseño final debe de obtenerse por medio de una simulación numérica. Si se dispone de una computa-

dora se recomienda hacer la simulación empleando el método ~~de~~ Runge-Kutta de cuarto orden, que es un método que da una muy buena aproximación con la solución real (ver apéndice I); en caso de tener una máquina pequeña, puede convenir el método de Heun, que no es un método tan preciso como el anterior pero los resultados obtenidos son aceptables, (ver subcap 3.7).

## 6. REFERENCIAS

Aguilar, L., (1981) *Cámaras de oscilación múltiples*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Autrique, R. y Berezowsky, M., (1982) *Análisis adimensional de las oscilaciones en cámaras producidas por maniobras de demanda o rechazo de carga en turbinas*, Memorias del VII Congreso Nacional de Hidráulica pp. 311-326.

Berezowsky, M. y Aparicio, F. J., (1981) *Presentación adimensional de las oscilaciones en cámaras de oscilación simples y con orificio*, Memorias del VII Congreso de la Academia Nacional de Ingenieros, ANIAC, Oaxaca, Oax. pp. 26-30.

Berezowsky, M., y Gómez, A., (1984) *Integración numérica de la ecuación diferencial de flujo gradualmente variado*, Informe del Instituto de Ingeniería (en prensa).

Berezowsky, M. y Ríos, E., (1982) *Elaboración de un nuevo modelo para el tránsito de avenidas en colectores*, elaborado para el D.D.F., Instituto de Ingeniería, UNAM.

Berezowsky, M., y Rosengaus, M. M., (1981) *Cálculo de presiones debidas al golpe de ariete cuando se tiene una cámara de oscilación*, Memorias

del VII Congreso Nacional de Ingenieros, ANIAC, Oaxaca pp 21-25.

Berezowsky, M., Fuentes, O., Peña, P., Domínguez, M. A., y Rosengaus, M. M., (1983) *Métodos numéricos*, Cap A.2.16, del Manual de diseño de Obras Civiles, editado por la Comisión Federal de Electricidad, México.

Brown, J. G., (1958) *Hydroelectric Engineering Practice*, London, Blackie Vol II

Calame, J. y Gaden, D., (1926) *Théorie des Chambres d'Equilibre*, Gauthier-Villars, Paris

Carnahan, B.M., Luther H. A. y Wilkes J. O., (1969) *Applied Numerical Methods*, Wiley and Sons, New York

Chaudry, M. H., (1979) *Applied Hydraulic Transients*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, U.S.A.

Chaudhry, M. H. y Ruus, E., (1971) *Surge Tank Stability by phase Plane Method*, HY4, ASCE, Abril

Collado, J. y Camargo, J., (1981) *Conducciones a presión*, Cap A.2.3 del Manual de diseño de Obras Civiles, editado por la Comisión Federal de Electricidad. México

Cunge, J. A. y Wegner, M., (1964) *Integration numerique des equations d' Ecoulement de Barré de St Venant par un Schéma implicite de différences*

*finies. Application au cas d'une galere tantôt en charge tantôt a surface libre,* <sup>H</sup> La Hoille Blanche, No. 1, pp 33-39.

Días, S., (1982) *Funcionamiento y estabilidad de cámaras de oscilación*  
Tesis de Maestría, DEPMI, UNAM

Días, S. y Sosa, R., (1981) *Cámaras de Oscilación*, Cap A.2.5 del del Manual de Diseño de Obras Civiles, editado por la Comisión Federal de Electricidad, México.

Echávez, G. y Rosengaus, M. H., (1979) *Medición y análisis de las fuerzas que actúan en la losa de la cámara de oscilación del P.H. Chicoasén*, elaborado para la Comisión Federal de Electricidad, Instituto de Ingeniería, UNAM.

Escande, L., (1951 a) *Etude de la stabilité des chambres d'equilibre a étranglement*, Le Génie Civil. Vol. 128, No. 12, pp 227

Escande, L., (1951b) *Etude complémentaire de la stabilité des chambres d'equilibre a étranglement*, Le Genie Civil, Vol. 128, No. 13, pp 254

Frank, J. y Shuller, (1938) *Schwingungen in den Zuleitungs- und Ableitungskanälen von Wasserkraftanlagen*, Berlin.

Gardel, A., (1956) *Chambres d'equilibre*, Rouge and Cie, Lausana, Suiza  
(Dunod, Paris)

- Guarga, R., (1982) *Resonancia en sistemas de conductos a presión*, Tesis doctoral DEPFI. UNAM. pp 153
- Hussain, (1966) *Chambres d'équilibre*, Dunod, Paris.
- Jaeger, Ch., (1954) *Present Trends in Surge Tank Design*, *Proceed. The Institution of Mechanical Engineers*. Vol 168, No. 2.
- Jaeger, Ch., (1960) *A Review of Surge Tank Stability Criteria*, *Jour, Basic Engineering*, Amer. Soc. of Mechanic Engrs.,
- Jaeger, Ch., (1977) *Fluid transients in Hydro-Electric Engineering Practice*, Blackie.
- Luna, R., (1983) *Un método para transitar avenidas en redes hidráulicas a superficie libre*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM
- Mosony y Seth (1975 a y b) *The Surge Tank a Device For Controlling Water hammer*, *Water Power and Dam Construction*, Febrero (primera parte) y marzo (segunda parte)
- Mozonyi, E., (1965) *Water Power Development*, Vol II Academia de Ciencias de Hungría.
- Parmakian, J., (1963) *Water Hammer Analysis*, Prentice Hall, Inc. Englewood Clifts, N. J.

Ruus, E., (1969) *Stability of Oscillations in simple surge tank*, Hy5,  
ASCE, Sep

Sánchez, J. L., (1980), *Estudio del sistema hidromecánico de plantas hidroeléctricas*, Informe interno del Instituto de Ingeniería, pp 260

Sánchez, J. L., (1981) *Aspectos hidromecánicos de Plantas hidroeléctricas*, editado por la Comisión Federal de Electricidad. México.

Sotelo, G., (1976) *Hidráulica General*, Vol I Limusa, México

Sotelo, G., (1976) *Apuntes de Hidráulica II*, Facultad de Ingeniería, UNAM

Thoma, D., (1910) *Zur theorie des Wasser schlosses bei selbsttäetiy Gere gelten Turbine Nanlagen*, Oeldenburg, Munchen, Germany

Tirado, S., (1978) *Cámaras de oscilación de sección uniforme y diferencial*, Informe DEFFI, UNAM

Wylie, B, y Streeter, L., (1978) *Hydraulic Transients*, McGraw Hill Book Co., New York, U.S.A.

A P E N D I C E S

APENDICE I.

Comentarios sobre la solución numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Sea

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (I.1)$$

una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con la condición inicial  $y(t_0) = y_0$  y cuya solución analítica se denote por  $y(t)$  el problema consiste en determinar una aproximación  $y_{n+1}$  a  $y(t_{n+1})$  para la ec (I.1) sabiendo que  $y(t_n)$  es conocida. (Se busca una solución aproximada cuando no es posible encontrar una solución exacta). Separando variables en la ec (I.1)

$$dy = f(t, y) dt \quad (I.2)$$

al tomar límites para integrar la ec (I.2) dentro del intervalo

$t_n \leq t \leq t_{n+1}$  se obtiene

$$\int_{y(t_n)}^{y(t_{n+1})} dy = \int_{t_n}^{t_n + h} f(t, y) dt$$

en donde  $h$  es el incremento en  $t$ .

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_n + h} f(t, y) dt$$

Integrando y ordenando,

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_n + h} f(t, y) dt \quad (I.3)$$

como  $y(t_n)$  es conocida el problema consiste en valuar la integral de la ec (I.3). Así los métodos aproximados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias tratan de valuar con mayor o menor aproximación dicha integral.

En su forma más sencilla la solución numérica de una ecuación diferencial se obtiene como sigue, Berezowsky y Gómez (1984): la función  $f$  que define la ecuación diferencial representa la pendiente de la curva integral en cualquier punto como función de  $t$  y  $y$  (ec I.1); al empezar la integración se conoce un punto de la curva, es decir las condiciones iniciales  $(t_0, y_0)$ . Empezando en dicho punto se calcula la pendiente de la curva en  $t = t_0$  y se avanza una pequeña distancia a lo largo de la tangente correspondiente. Si el incremento en  $t$  es  $h$  se llega a un nuevo punto  $t_1 = t_0 + h$ , y a partir de la pendiente de la tangente, obtenida de la ecuación diferencial se obtendrá un nuevo valor de  $y$  llamado  $y_1$ ; procediendo de esta manera puede obtenerse una secuencia de líneas rectas cortas, las cuales se espera, se aproximen con suficiente precisión a la curva verdadera que es la solución, fig I.1

De este modo, los métodos numéricos se clasifican según su aproximación a la curva verdadera  $f(t, y)$ .

En muchos problemas se tiene o un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden o una ecuación diferencial de orden superior, conviene por ello utilizar notación vectorial para escribir el sistema.

Sea

$$\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_s)^T$$

$$\bar{y}_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)^T$$

$$\bar{f} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)^T$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}) ; \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$$

se tiene la ventaja de que la ecuación vectorial representa una o más ecuaciones, por lo tanto lo que se diga para una valdrá para el sistema.

Cualquier ecuación diferencial de orden superior puede transformarse en un sistema de ecuaciones; sea por ejemplo

$$\frac{d^3y}{dt^3} = g \left( t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = \gamma_1, y'(0) = \gamma_2 ; y''(0) = \gamma_3$$

si se definen

$$\bar{n}_1 = y, \bar{n}_2 = \frac{dy}{dt} ; \bar{n}_3 = \frac{d^2y}{dt^2}$$

se puede hacer la transformación

$$\frac{d\bar{n}_1}{dt} = \bar{n}_2$$

$$\bar{n}_1(0) = \gamma_1$$

$$\frac{d\bar{n}_2}{dt} = \bar{n}_3$$

$$\bar{n}_2(0) = \gamma_2$$

$$\frac{d\bar{n}_3}{dt} = q(t_1, \bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3)$$

$$\bar{n}_3(0) = \gamma_3$$

que es un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias.

La solución de un problema de valores iniciales

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(t, \bar{y})$$

Puede considerarse como una función

$$\bar{y}(t, \bar{y}_0)$$

en donde  $\bar{y}_0$  es un vector de condiciones iniciales. Puede visualizarse una familia de curvas solución en el espacio  $(t, y)$  que relacionan las soluciones a los valores iniciales  $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$ , la dependencia de la solución  $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$  de  $\bar{y}_0$  es de gran interés en la práctica. (ver fig I.2).

Un error en la condición inicial, por ejemplo por redondeo, implica que  $y(t_0)$  está forzado a seguir otra vía en la familia de soluciones.

De entre los métodos que permiten resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias en forma aproximada destacan los de Heun y el de Runge - Kutta, que son métodos directos de un sólo paso, en los cuales se usa la información acerca de la curva en un sólo punto  $(y_i)$  para calcular el siguiente  $(y_{i+1})$  sin necesidad de iterar.

#### Método de Heun

Este método del tipo de Runge-Kutta de segundo orden en el cual se trabaja promediando las pendientes en los puntos  $(t_m, y_m)$  y  $(t_m + h, y_m + h y'_m)$ . Es un método que converge rápidamente. El método de Heun usa las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h f(t_m, y_m) \\
 k_2 &= h f(t_m + h, y_m + k_1) \\
 y_{m+1} &= y_m + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \quad (I.4)
 \end{aligned}$$

Comparando las ecuaciones (I.3) y (I.4) puede observarse que

$$\int_{t_n}^{t_n + h} f(t, y) dt = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

Interpretación geométrica. Partiendo del punto conocido  $(t_m, y_m)$  se puede dibujar una recta de pendiente  $m = y'_m$  que pase por el punto  $(t_m, y_m)$  teniéndose así la línea  $L_1$  (fig I.3), por el punto  $t_{m+1} = t_m + h$  se levanta una vertical hasta interceptar a la línea  $L_1$  en el punto  $(t_m + h, y_m + h y'_m)$ . En este punto se calcula la pendiente de la curva, línea  $L_2$ ; se promedian las dos pendientes y se obtiene la línea  $\bar{L}$ . Finalmente se traza la línea  $L$  paralela a  $\bar{L}$  que pase por  $(t_m, y_m)$ . El punto en el que la línea  $L$  intersecte a la vertical levantada por  $t = t_{m+1} = t_m + h$  se considera como el punto buscado  $(t_{m+1}, y_{m+1})$ .

#### Método de Runge-Kutta

Este es un método de cuarto orden. En este método, se hacen valuaciones extras de la función en diferentes puntos. El método queda definido por las siguientes expresiones:

$$k_1 = hf(t_m, y_m)$$

$$k_2 = hf(t_m + h/2, y_m + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(t_m + h/2, y_m + k_2/2)$$

$$k_4 = hf(t_m + h, y_m + k_3)$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (I.5)$$

comparando las expresiones (I.3) y (I.5) puede observarse que

$$\int_{t_n}^{t_n + h} f(t, y) dt = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Interpretación geométrica: el método de Runge-Kutta equivale a sumar el valor de  $y_m$  el promedio pesado de una serie de valores  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , encontrados como sigue:

Primero se encuentra el valor de la pendiente de la curva en el punto  $(t_m, y_m)$  con lo cual se traza la línea  $L_1$ , fig I.4, la distancia que hay entre la línea horizontal A que pasa por el punto  $(t_m, y_m)$  y la intersección de  $L_1$  con la vertical B que pasa por  $t = t_{m+1}$  es el valor de  $k_1$ . Ahora se calcula la pendiente de la curva en el punto  $(t_m + h/2, y_m + k_1/2)$ , la cual queda representada por la línea  $M_2$  y se le traza una paralela que pase por el punto  $(t_m, y_m)$  llamada  $L_2$ , la distancia existente entre la horizontal A y la intersección de  $L_2$  con la vertical B es  $k_2$ . Se procede a calcular la pendiente de la curva en el punto  $(t_m + h/2, y_m + k_2/2)$ , la cual queda representada por la línea punteada  $M_3$ . Se traza una línea paralela a  $M_3$  que pase por el punto  $(t_m, y_m)$  llamada  $L_3$ . La distancia que se encuentra entre la intersección de las líneas  $L_3$  y B y la línea A es  $k_3$ . Finalmente se

valua la pendiente de la curva en el punto  $(t_m + h, y_m + k_3)$  la que queda representada por la línea  $M_4$ . Se traza una línea paralela a  $M_4$  que pase por el punto  $(t_m, y_m)$  y se le llama  $L_4$ . La distancia que hay entre la línea A y la intersección de las líneas  $L_4$  y B es lo que se llama  $k_4$ . Una vez calculados  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  se encuentra su promedio pesado y se suma a  $y_m$  como se indica en la ec (I.5).

Un tratamiento completo de ecuaciones diferenciales sale del objetivo de este resumen. Ver los textos de Milne (1953), Hamming (1962) y otros mencionados en las referencias.

#### REFERENCIAS

1. Berezowsky, M. y Gómez M.A., (1984), "Integración numérica de la ecuación diferencial del flujo gradualmente variado" Instituto de Ingeniería, UNAM (en prensa)
2. Carnahan, B.H., Luther H.A. y Wilkes J.O., (1969), "Applied numerical methods", Wiley and Sons, New York
3. Dahlquist G. y Björck Å (1974), "Numerical methods", Prentice Hall, New Jersey
4. Hamming R.W. (1962) "Numerical methods for scientists and engineers" Mc Graw-Hill, New York
5. Milne W.E. (1953) "Numerical solution of differential equations" John Wiley and Sons, New York

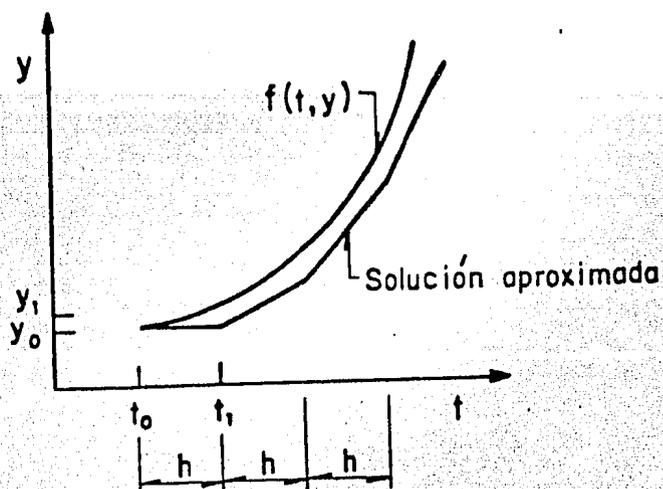


Fig I.1 Representación gráfica del significado de la solución numérica de una ecuación diferencial

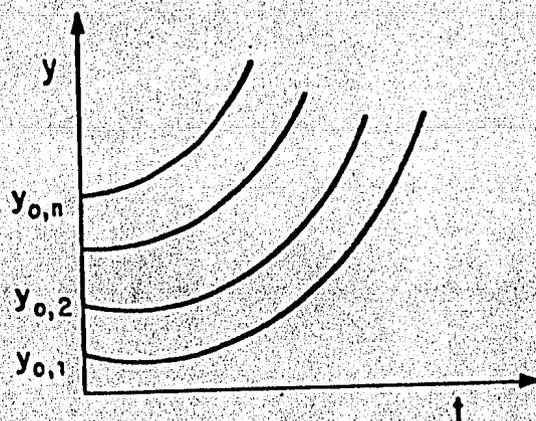


Fig I.2 Representación geométrica del problema de valores iniciales

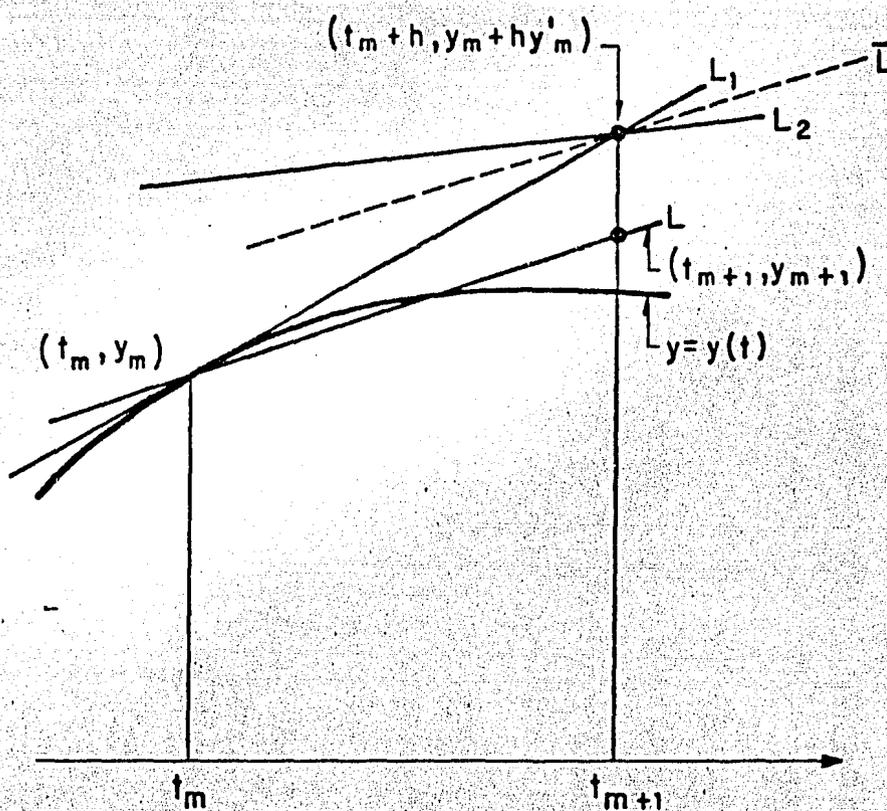


Fig I.3 Representación geométrica del método de Heun de segundo orden

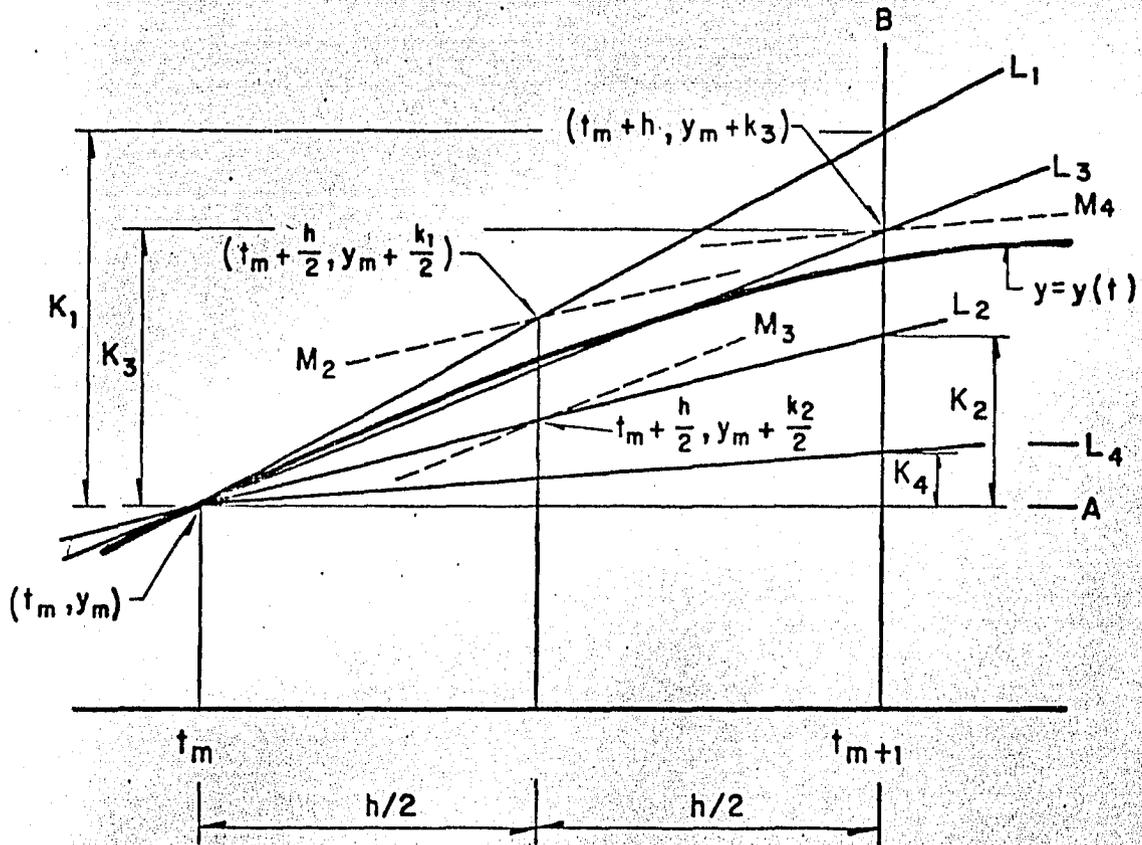


Fig I.4 Representación geométrica del método de Runge-Kutta de cuarto orden.

## APENDICE II

Ecuación diferencial de las oscilaciones en cámara simple sujeta a maniobras de potencia constante.

La ecuación diferencial de las oscilaciones se obtiene combinando la ecuación dinámica, ec 2.14, la ecuación de continuidad, ec 2.23 y la del gasto turbinado para dar gasto constante, ec 2.27.

La ec 2.23 puede escribirse de la siguiente forma

$$Q_t = VA_T - A_s \frac{dz}{dt} \quad (II.1)$$

y la ec 2.27 como

$$Q_t (H + z) = Q_o H_o = C = P/k \quad (II.2)$$

en donde se considera que la eficiencia es constante.

Derivando las ecs (II.1) y (II.2) con respecto al tiempo e igualándolas se obtiene

$$\frac{d Q_t}{dt} = A_T \frac{dV}{dt} - A_s \frac{d^2 z}{dt^2} = - C(H + z)^{-2} \frac{dz}{dt}$$

de donde

$$\frac{dV}{dt} = A_r \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{C}{A_T (H + z)^2} \frac{dz}{dt} \quad (II.3)$$

donde

$$A_r = A_s / A_T$$

Por otro lado, despejando la velocidad de la ec (II.1)

$$V = \frac{Q_T}{A_T} + A_r \frac{dz}{dt} \quad (\text{II.4})$$

Elevando al cuadrado

$$V^2 = \left( \frac{Q_T}{A_T} \right)^2 + 2 \left( \frac{Q_T}{A_T} \right) A_r \frac{dz}{dt} + A_r^2 \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (\text{II.5})$$

En esta ecuación se sustituye  $Q_t$  de la ec (II.2)

$$V^2 = \frac{C^2}{(H+z)^2 A_r^2} + \frac{2 A_r C}{A_r (H+z)} + A_r \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (\text{II.6})$$

Sustituyendo las ecs (II.3) y (II.6) en la ecuación dinámica, ec 2.14

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{g}{L} (z + FV^2)$$

y acomodando resulta

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k_1 \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{dz}{dt} \left( \frac{k_2}{(H+z)} - \frac{k_3}{(H+z)^2} \right) + k_4 z = - \frac{k_5}{(H+z)^2} \quad (\text{II.7})$$

donde se han definido las siguientes constantes

$$k_1 = g F A_r / L \quad (\text{II.8a})$$

$$k_2 = 2g FC / A_r L \quad (\text{II.8b})$$

$$k_3 = C / A_r \quad (\text{II.8c})$$

$$k_4 = g / (L A_r) \quad (\text{II.8d})$$

$$k_5 = g FC^2 / (L A_r A_T) \quad (\text{II.8e})$$

La discusión siguiente se ha basado en la de Jaeger (1977).

La ec (II.7) representa las oscilaciones cuando el sistema trata de dar

potencia constante. El eje sobre el cual oscila el sistema corresponde al de régimen permanente

$$z_o = - F V_o^2 \quad (\text{II.9})$$

donde además debe cumplirse que  $dz/dt = 0$  y  $d^2z/dt = 0$ .

En la fig II.1 puede verse en un plano V-z que el eje de las oscilaciones corresponde a la intersección de las curvas  $Z = - FV^2$  (ecuación de una parábola) y la ec (II.2) (ecuación de una hipérbola) teniéndose para una potencia P dada dos soluciones que corresponden a los ejes I y II en la fig II.1. La potencia máxima que puede obtenerse en el sistema corresponde al punto de tangencia de las ecs (II.9) y (II.2) de donde resulta

$$z_o = - H/3 \quad (\text{II.10})$$

Esta ecuación implica que la máxima potencia se obtiene cuando las pérdidas de fricción entre el almacenamiento y la turbina son de un tercio de la carga disponible. En la práctica resulta antieconómico tener una pérdida de carga tan alta (recuérdese que la energía perdida es energía no generada).

En resumen, en la fig II.1 el punto (1) representa el de equilibrio; el punto (2) el de equilibrio único para la curva de potencia máxima y el punto (3) representa el colapso de las oscilaciones. El cruce de la parábola con la misma hipérbola  $C_1$  indica que la cámara de oscilación tiene aparentemente dos puntos de equilibrio; generalmente el punto de equilibrio es el de arriba, y el punto de abajo es el de colapso hidráulico; que significa que si se rebasa la cámara tiende a drenarse sin posibili-

dad de recuperar su nivel.

Para facilitar el análisis de estabilidad conviene eliminar el término del lado derecho de la ec (II.7). Esto se logra trasladando el eje de las oscilaciones. Sea  $z = z_0 + s$  donde  $z_0$  está dado por la ec (II.9). Sustituyendo en el término del lado derecho de la ec (II.7) resulta

$$\frac{ks}{(H + z^2)} = \frac{ks}{(H + z_0 + s)^2}$$

expandiendo el denominador en series de Taylor se obtiene

$$\frac{1}{(H + z_0 + s)^2} = (H + z_0)^{-2} - 2(H + z_0)^{-3} s + 3(H + z_0)^{-4} s^2 - \dots$$

Sustituyendo esta expresión y haciendo  $z = z_0 + s$  en la ec (II.7) resulta

$$\begin{aligned} & \frac{d^2s}{dt^2} + k_1 \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \left( \frac{k_2}{(H + z_0 + s)} - \frac{k_3}{(H + z_0 + s)^2} \right) \frac{ds}{dt} + \\ & + \left( k_4 - \frac{k_5}{(H + z_0)^2} \left( \frac{2}{(H + z_0)} - \frac{3s}{(H + z_0)^2} + \dots \right) \right) s = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

que es una ecuación de la forma

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \phi(t) \frac{ds}{dt} + \psi(t) s = 0 \quad (\text{II.12})$$

donde

$$\phi(t) = k_1 \frac{ds}{dt} + \frac{k_2}{H + z_0 + s} - \frac{k_3}{(H + z_0 + s)^2} \quad (\text{II.13a})$$

$$\psi(t) = k_4 - \frac{k_5}{(H + z_0)^2} \left( \frac{2}{(H + z_0)} - \frac{3s}{(H + z_0)^2} + \dots \right) \quad (\text{II.13b})$$

Si  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  son funciones continuas, la ec (II.12) es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Esta ecuación está bastante estudiada en general y su solución depende de la forma de las funciones  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  y puede encontrarse con métodos como la transformada de Laplace, variación de parámetros, series de potencias, etc. Ver por ejemplo W. Boyce y R. Di Prima (1973) o también E. Kreyszig (1967). Para el estudio de la estabilidad de un sistema con cámara de oscilación simple, el carácter no lineal de las funciones II.13a y b dificulta el análisis. Sin embargo con algunas simplificaciones (ver cap 3) puede suponerse que dichas funciones son aproximadamente constantes. La ecuación homogénea resultante que es del tipo

$$a \frac{d^2s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + cs = 0 \quad (\text{II.14})$$

está muy estudiada en teoría de vibraciones y corresponde a la modelación de un sistema masa resorte o también a la de circuitos eléctricos.

En un sistema masa resorte, la constante  $a$  corresponde a la masa del sistema, la constante  $b$  al amortiguamiento y la  $c$  a la constante del resorte; para que el sistema sea realista desde el punto de vista físico,  $a$  como  $c$  deben ser reales positivas y para que el sistema sea amortiguado,  $b$  debe ser mayor que cero.

La solución de la ec (II.14) depende de los valores de las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  conforme a las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 + \frac{b}{a} \lambda + \frac{c}{a} = 0$$

que son

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

sea

$$\alpha = b/2a \quad ; \quad \beta = \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} \quad (\text{II.15})$$

entonces

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta \quad ; \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta$$

Siempre que  $b/a > 0$  el sistema es amortiguado, ésto es, las oscilaciones disminuyen con el tiempo. Sin embargo, en función de los valores de  $b^2 - 4ac$  se tiene un comportamiento distinto de las funciones solución de la ec (II.14).

Caso I. Si la constante de amortiguamiento es pequeña de tal forma que  $b^2 < 4ac$ ,  $\beta$  resulta imaginario.

Sea

$$\beta = i\omega \quad (\text{II.16a})$$

donde

$$\omega = \frac{1}{2a} \sqrt{4ac - b^2} \quad (\omega > 0) \quad (\text{II.16b})$$

Las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas

$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega \quad ; \quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega$$

y la solución general es

$$s(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = C e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \delta) \quad (\text{II.17})$$

donde

$$C^2 = A^2 + B^2 \quad ; \quad \tan \delta = B/A$$

y las constantes A y B se obtienen de las condiciones iniciales.

Dado que  $\cos(\omega t - \delta)$  varía entre  $-1$  y  $+1$ , la curva solución está entre las curvas  $s = ce^{-\alpha t}$  y  $s = -ce^{-\alpha t}$  (ver fig II.2a) tocando estas curvas cuando  $\omega t - \delta$  es un entero múltiple de  $\pi$ .

La frecuencia de las oscilaciones es  $\omega/2\pi$  (ciclos por segundo) y puede verse de (II.16) que entre más pequeño sea  $b$  ( $> 0$ ), las oscilaciones son más rápidas. Conforme  $b$  tiende a cero,  $\omega$  tiende al valor de frecuencia de oscilaciones armónicas no amortiguadas  $\omega_0 = \sqrt{c/a}$ . El tiempo entre dos mínimos (o máximos) sucesivos ocurre a valores equidistantes del tiempo, siendo dicho período el inverso de la frecuencia

$$T_r = 2\pi/\omega$$

Así mismo, puede demostrarse que la relación del tamaño de dos máximos (o mínimos) consecutivos sigue una ley logarítmica

$$\Delta = L_n M_i / M_{i+1} - 2\pi\alpha/\omega = \text{constante}$$

siendo  $M_i$  la amplitud del  $i$ -ésimo máximo

$\Delta$  decremento logarítmico de las oscilaciones

Caso II. Si  $b^2 = 4ac$ ,  $\beta = 0$  y las dos raíces de la ecuación característica son iguales,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ ; la solución general de la ec (II.14) es

$$s(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\alpha t}$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes que se determinan de las condiciones iniciales. En este caso prácticamente ya no hay oscilaciones. Dado que  $e^{-\alpha t}$

es siempre diferente de cero y  $(C_1 t + C_2)$  tiene a lo más un cero, la curva solución pasa a lo más una vez por el eje  $s = 0$ ; es más si las condiciones iniciales son tales que  $C_1$  y  $C_2$  tienen el mismo signo, la curva solución no cruza dicho eje (fig II.2b).

Caso III. Si la constante  $b$  es tan grande que  $b^2 > 4ac$ , las raíces de la ecuación característica son reales y distintas; la solución general de la ec (II.14) es

$$s(t) = C_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + C_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$$

Y como en el caso II tampoco hay oscilaciones puesto que para tiempos grandes, los dos exponentes son negativos y las dos funciones exponenciales tienden a cero conforme  $t$  tiende a infinito (fig II.2c).

De estos tres casos, el más interesante desde el punto de vista de la estabilidad en sistemas hidroeléctricos es el primero ya que los otros dos corresponden a sistemas obviamente estables o muy amortiguados.

#### REFERENCIAS

Boyce, W. y DiPrima, R., (1973) "Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera" Ed. Limusa

Kreyszig, E. (1967) "Matemáticas avanzadas para ingenieros" Ed. Limusa, S.A. México

Jaeger, Ch., (1977) "Fluid transients in Hydro-Electric Engineering Practice, Blackie

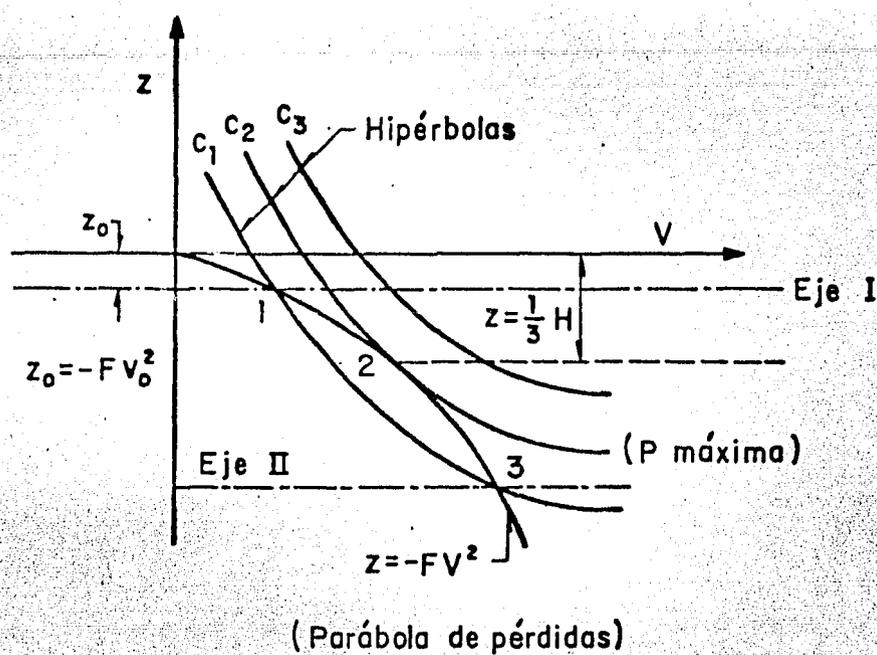
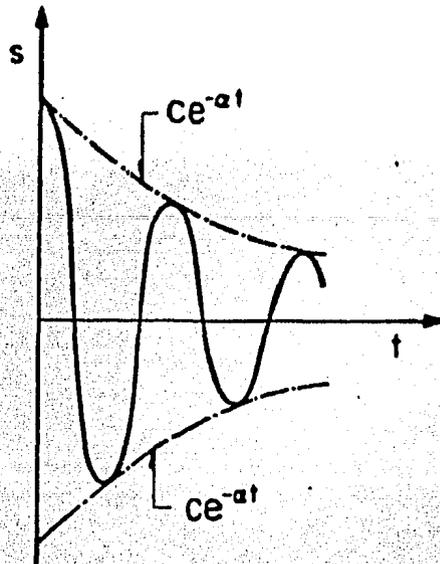
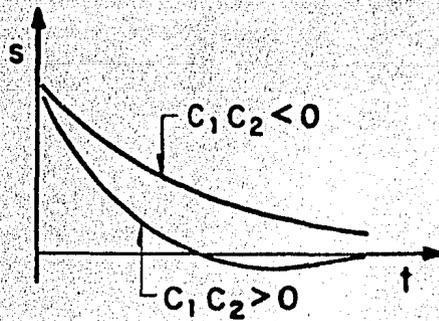


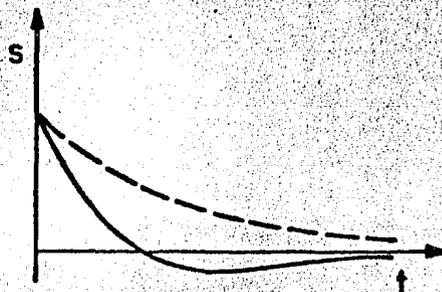
Fig II .1 Posición de los ejes de oscilación



a) Cuando la constante de amortiguamiento  $b$  es pequeña



b) Cuando las dos raíces de la ecuación característica son iguales,  $b^2 = 4ac$



c) Cuando la constante de amortiguamiento  $b$  es grande

Fig II.2 Comportamiento de las funciones solución de la ec II.4. Recuérdese que  $s$  corresponde a  $z = -F V_0^2$