

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
Escuela Nacional de Estudios Profesionales
"A R A G O N"

**APLICACION DE LOS METODOS NUMERICOS EN EL
CALCULO DE PERFILES DE FLUJO
GRADUALMENTE VARIADO.**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A :
ALEJANDRO RIOS GARCIA



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

C O N T E N I D O

	Página
CAPITULO 1. INTRODUCCION.	1
CAPITULO 2. OBJETIVO.	4
CAPITULO 3. METODOS DE SOLUCION DE PERFILES DE FLUJO GRADUALMENTE VARIADO.	9
3.1 Cálculo de flujo uniforme.	10
3.2 Cálculo de la energía específica y flujo crítico.	16
3.3 Flujo gradualmente variado (Ecuación general y clasificación de perfiles)..	22
3.4 Métodos de solución de perfiles de flujo .	32
CAPITULO 4. METODOS NUMERICOS DE SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES.	56
4.1 Conceptos básicos sobre ecuaciones diferenciales y sus soluciones.1.	57
4.2 Métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias..	59
CAPITULO 5. APLICACION DE LOS METODOS NUMERICOS AL CALCULO DE PERFILES DE FLUJO GRADUALMENTE VARIADO.	68
5.1 Planteamiento del problema.	69
5.2 Solución del problema aplicando métodos numéricos.	70

	Página
5.3 Solución del problema aplicando métodos de integración de la ecuación dinámica. . . .	94
5.4 Solución del problema aplicando métodos de incrementos finitos.	100
 CAPITULO 6. COMPARACION DE LA APLICACION DE LOS METODOS NUMERICOS EN EL CALCULO DE PERFILES DE FLUJO GRADUALMENTE VARIADO.	 102
 CAPITULO 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.	 110

C A P I T U L O 1

INTRODUCCION.

1. INTRODUCCION.

El desarrollo de los métodos numéricos ha contribuido a la solución de problemas que antes eran resueltos en forma intuitiva o por tanteos.

La importancia que tienen los métodos numéricos en el cálculo de perfiles de flujo gradualmente variado estriba en que las soluciones suministran una base para valorar y comparar con los métodos tradicionales que son de un valor práctico considerable. No deseamos menospreciar la importancia de los métodos clásicos o tradicionales, pero sin embargo hay que indicar que a menudo los problemas de la práctica, o bien la solución es tan difícil de obtener o tan laboriosa de valorar que no vale la pena el esfuerzo. Por muchas razones, entonces estamos obligados a buscar métodos de solución que se apliquen en los casos en que los problemas no se puedan resolver fácilmente por los métodos clásicos.

Los métodos numéricos que se utilizarán en el cálculo de perfiles de flujo gradualmente variado consisten en la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias, que serán caminos que el lector puede seguir en la solución de problemas prácticos y que servirán para introducir ideas no solamente para resolver problemas de perfiles de flujo.

Los fenómenos físicos que estudia la Ingeniería, se pueden representar mediante modelos matemáticos; entonces algunos casos se reducen a una ecuación diferencial, siendo su solución una función que representa el comportamiento del fenómeno.

La solución de ecuaciones diferenciales no es un problema sencillo, una forma de resolverlos, es a través de los métodos numéricos que permiten la utilización de la computadora digital.

Una ventaja que presentan los métodos numéricos es que son fácilmente programables en cualquier equipo de cómputo, desde una calculadora de bolsillo hasta una computadora de gran capacidad.

En este trabajo se estudiarán los métodos numéricos para obtener la solución de la ecuación dinámica que servirá para aplicarse a problemas de perfiles de flujo gradualmente variado.

C A P I T U L O 2

OBJETIVO.

2. OBJETIVO.

En el presente trabajo se pretende encontrar con la utilización de los métodos numéricos solución al cálculo de perfiles de flujo gradualmente variado que evite el habitual y tedioso proceso de tanteos de los métodos tradicionales.

Para que de esta manera habiendo revisado y comparado los métodos numéricos de solución de la ecuación dinámica de flujo gradualmente variado se puedan dar recomendaciones pertinentes para que los Ingenieros dedicados a la hidráulica tengan una guía adecuada para la programación del método numérico de la solución de la ecuación dinámica antes mencionada.

De esta forma el presente trabajo se desarrolla de la siguiente manera:

CAPITULO 1.

En éste primer capítulo se hace una introducción de la importancia que tienen los métodos numéricos en el cálculo de perfiles de flujo gradualmente variado.

CAPITULO 2.

En este capítulo se plantea el objetivo principal de éste trabajo.

CAPITULO 3.

Este capítulo se llama métodos de solución de perfiles de flujo gradualmente variado.

Primeramente se estudia la fórmula para el cálculo de flujo uniforme en canales prismáticos, así como los elementos hidráulicos

que influyen en dicho en dicho cálculo y los factores que ejercen mayor influencia sobre el coeficiente de rugosidad en un canal, encontrándose que se pueden simplificar los cálculos mediante curvas adicionales que muestran la relación entre el tirante normal y el factor de sección $A R^{2/3}$.

En segundo lugar se estudia el cálculo de energía específica -- y flujo crítico; definiendo que es la energía específica y la ecuación que la define analíticamente. También se describe el tirante crítico, estado crítico del flujo, el factor de sección en el cálculo del flujo crítico, los criterios y las condiciones que caracterizan el estado crítico, y se presenta un cuadro preparado de curvas adimensionales que muestra la relación entre la profundidad y el factor de sección que nos permite simplificar los cálculos de flujo crítico.

En tercer lugar se estudia el flujo gradualmente variado. (Ecuación general y la clasificación de perfiles). Se presentan las hipótesis básicas, el seguimiento para llegar a la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado, así como también las características y clasificación de los perfiles de flujo, mencionándose algunos comentarios acerca de los perfiles de flujo.

En cuarto lugar tenemos los métodos de solución de perfiles de flujo. Este subcapítulo trata básicamente de los métodos de cálculos mejor conocidos para la solución de perfiles de flujo gradualmente variado haciendo la aclaración que únicamente se trataron para canales prismáticos.

Dentro de los métodos de cálculos se presentan dos grupos, uno llamado métodos de integración de la ecuación dinámica, que incluye el cálculo por integración gráfica e integración directa y el otro métodos de incrementos finitos en canales prismáticos, que incluye el método para el cálculo de la longitud del tramo y el método gráfico. Siendo el más importante el primer grupo de cálculo y dentro de él, el de integración directa, que aunque es muy tedioso el cálculo nos arroja resultados más precisos; todos los métodos mencionados son descritos mediante fórmulas y procedimientos.

CAPITULO 4.

Este capítulo se llama Métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales. En el primer subcapítulo se presentan los -- conceptos básicos sobre ecuaciones diferenciales y su solución. En el segundo subcapítulo se trata de los métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, en primer lugar se describe que es aproximación numérica y errores; posteriormente se describen cada uno de los métodos numéricos a utilizar y su solución.

CAPITULO 5.

Este capítulo se llama Aplicación de los métodos numéricos al -- cálculo de perfiles de flujo gradualmente variado. En primer lugar se plantea el problema, calculándose el tirante normal, crítico y pendiente crítica S_c , para hacer la clasificación del -- perfil de flujo.

En segundo lugar se obtiene la solución del problema aplicando los métodos numéricos descritos anteriormente.

En tercer lugar se obtiene la solución del problema aplicando métodos de integración de la ecuación dinámica.

CAPITULO 6.

El capítulo se llama comparación de la aplicación de los métodos numéricos en el cálculo de perfiles de flujo gradualmente variado; se compararon los resultados obtenidos con los métodos anteriores contra los obtenidos con el método de integración directa, para diferentes valores Δx encontrándose con estos errores absolutos.

CAPITULO 7.

En este capítulo se hacen las conclusiones y las recomendaciones.

C A P I T U L O 3

METODOS DE SOLUCION DE PERFILES DE FLUJO GRADUALMENTE
VARIADO.

3.1 CALCULO DEL FLUJO UNIFORME.

Las fórmulas mejor conocidas y más ampliamente usadas para el cálculo del flujo uniforme son las fórmulas conocidas con el nombre de Chézy y Manning, las cuáles se describirán a continuación:

En el año de 1769, el Ingeniero Francés Antonio Chézy desarrolló la primera fórmula para el cálculo del flujo uniforme, la cual se expresa como sigue:

$$V = C \sqrt{RS} \qquad 3.1-1$$

Donde:

V es la velocidad media en m/seg.

R es el radio hidráulico en m.

S es la pendiente de la línea de energía. (Adimensional)

C es un factor de resistencia del flujo, llamado coeficiente de Chézy. (Es una función de la longitud, el tiempo, así como la aspereza del lecho del canal.)

Kutter dedujo una fórmula empírica que sirve para determinar el valor del coeficiente de Chézy, la cual se expresa como sigue:

$$C = \frac{23 + 0.00155/S + 1/n}{1 + (23 + 0.00155/S)n/\sqrt{R}}$$

En esta fórmula, C se expresa en función del radio hidráulico R y la pendiente S, así como del coeficiente de aspereza n. El coeficiente "n" en esta fórmula es conocido específicamente como la "n" de Kutter. (1)

Posteriormente en el año 1889, el Ingeniero Irlandés Robert Manning presentó una fórmula, que fue modificada más tarde a su forma actual, la cual se expresa como:

$$V = R^{2/3} S^{1/2} / n$$

3.1-3

Donde:

V es la velocidad media en m/seg.

R es el radio hidráulico en m.

S es la pendiente de la línea de energía. (Adimensional)

n es el coeficiente de Kutter. (Adimensional).

Debido a su simplicidad y a los resultados satisfactorios que arroja para aplicaciones prácticas, la fórmula de Manning ha sido la más usada para el cálculo del flujo uniforme en canales.

Dentro de los rangos normales de pendiente y radio hidráulico, los valores del coeficiente "n" de Manning y "n" de Kutter (1), generalmente son muy parecidos numéricamente, por lo cual para propósitos prácticos, los dos valores pueden considerarse idénticos.

Los factores que ejercen mayor influencia sobre el coeficiente de rugosidad en un canal artificial y natural se describen a continuación:

A. RUGOSIDAD DE LA SUPERFICIE. La rugosidad de la superficie está definida por el tamaño, la forma de los granos del material que forma el perímetro mojado y que producen un efecto retardante sobre el flujo.

B. VEGETACION. La vegetación puede ser vista como un tipo de rugosidad superficial, pues reduce en forma marcada la capacidad del canal y retarda el flujo.

C. IRREGULARIDAD DEL CANAL. La irregularidad del canal comprende irregularidades en el perímetro mojado y variaciones en la sección transversal, tamaño, y forma a lo largo de la longitud del canal.

D. ALINEAMIENTO DEL CANAL. Curvaturas suaves con radios grandes darán un valor relativamente bajo del coeficiente "n", -- mientras que curvaturas agudas con meandros severos aumentarán el valor del coeficiente "n".

E. DEPOSITOS Y SOCAVACIONES. Hablando en términos generales, los depósitos pueden cambiar un canal muy irregular en uno -- comparativamente uniforme y disminuir el valor del coeficiente "n". Mientras que la erosión puede funcionar al revés y -- aumentar el valor de "n".

F. OBSTRUCCION. La presencia de troncos, pilas de puentes y -- estructuras en general tiende a aumentar el valor del coeficiente "n".

G. TAMANO Y FORMA DEL CANAL. No hay evidencia definitiva acerca de que el tamaño y forma del canal sea un factor importante que afecte el valor del coeficiente "n".

H. NIVEL Y CAUDAL. El valor del coeficiente "n" en la mayoría de las corrientes decrece con un aumento en el nivel y en el caudal.

I. CAMBIO ESTACIONAL. Debido al crecimiento estacional de las plantas acuáticas, pasto hierbas, sauces, arbustos y árboles en el canal o en los bancos, el valor del coeficiente "n" -- puede aumentar en la estación de crecimiento y disminuir en la estación estable.

J. MATERIAL SUSPENDIDO Y TRANSPORTE DE FONDO. Si el material suspendido y el transporte de fondo, está o no en movimiento, consume energía y ocasiona pérdidas de altura o aumenta la rugosidad del canal.

El gasto para un canal con flujo uniforme se puede expresar -- como el producto de la velocidad, representada por la ecuación de Chézy y el área hidráulica:

$$Q = V A = C A R^{2/3} S^{1/2} = K S^{1/2} \quad 3.1-4$$

$$K = C A R^{2/3} \quad 3.1-5$$

Donde:

Q es el gasto en m³/seg.

V es la velocidad media en m/seg.

A es el área hidráulica en m².

C es un factor de resistencia del flujo llamado coeficiente de Chézy.

K es conocido como factor de transporte de la sección del canal.

K representa una medida de la capacidad de transporte de la sección del canal, ya que es directamente proporcional a Q.

Cuando la fórmula de Manning es usada para el cálculo del flujo uniforme, el factor de transporte de la sección del canal está dada por la ecuación:

$$K = A R^{2/3} n \quad 3.1-6$$

Donde:

K es el factor de transporte de la sección.

A es el área hidráulica en m².

R es el radio hidráulico en m.

n es el coeficiente de Kutter. (Adimensional).

Se define como factor de sección a la expresión $A R^{2/3}$ y es un elemento importante en el cálculo del flujo uniforme. Partiendo de la ec. 3.1-6, este factor puede ser expresado como:

$$A R^{2/3} = n K \quad 3.1-7$$

de la ec. 3.1-4, $K = Q / \sqrt{S}$, sustituyendo en la ec. 3.1-7, queda:

$$A R^{2/3} = n Q / \sqrt{S} \quad 3.1-8$$

La ec. 3.1-8, muestra que para una condición dada de n, Q, y S, existe sólo una profundidad posible para mantener un flujo uniforme, dado que el valor de $A R^{2/3}$ siempre aumenta al aumentar el tirante lo cual es cierto en la mayoría de los casos. La profundidad mencionada es comúnmente conocida como profundidad normal o tirante normal. Cuando "n" y S son conocidos en una sección del canal se puede observar en la ec. 3.1-8, que puede haber sólo una descarga para mantener un flujo uni-

forme a través de la sección, dado que $A R^{2/3}$ siempre aumenta con el aumento del tirante.

Cuando la descarga, pendiente, y rugosidad son conocidas, con la ecuación 3.1-8, se determina el factor de sección $A R$ y de aquí el tirante normal y_n . Por otra parte, cuando n , S , y el tirante son conocidos el gasto normal Q_n puede ser calculado con la ecuación 3.1-8 de la siguiente manera:

$$Q = A R^{2/3} S / n \tag{3.1-9}$$

Con el objeto de simplificar los cálculos se cuenta con curvas adimensionales que muestran la relación entre el tirante normal y el factor de sección $A R^{2/3}$ (Fig. 3.1-1), y han sido preparadas para canales de sección rectangular, trapezoidal y circular. Estas curvas que se explican por sí mismas ayudarán a determinar el tirante normal para un factor de sección $A R^{2/3}$ dado y viceversa.

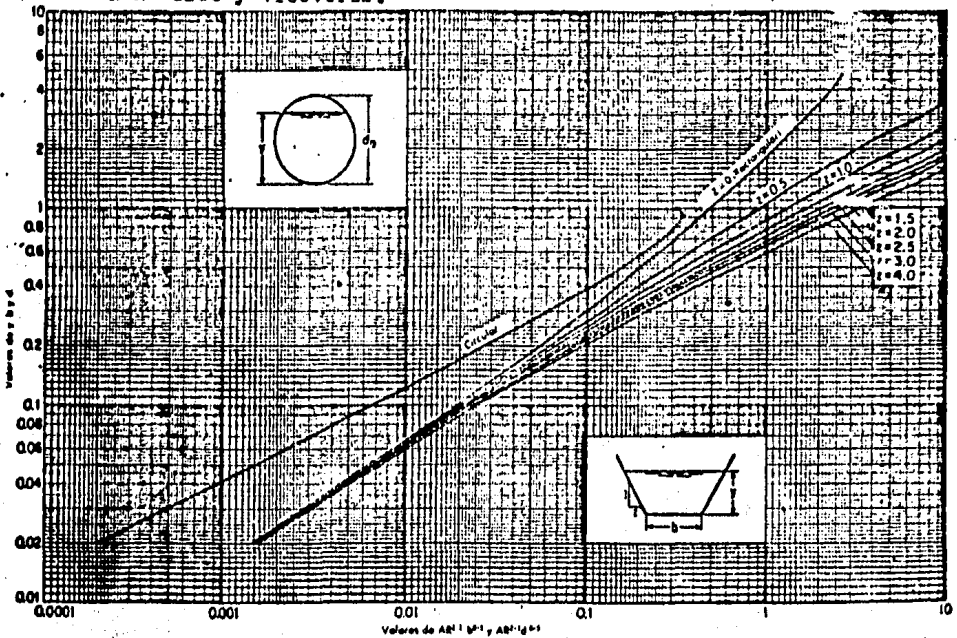


Fig. 3.1-1 Curvas para determinar la profundidad,

3.2 CALCULO DE ENERGIA ESPECIFICA Y FLUJO CRITICO.

ENERGIA ESPECIFICA. Se define como la energía por kilogramo - en una sección de un canal con respecto al fondo del mismo, - La energía específica de un canal se puede definir analíticamente como:

$$E = d \cos \theta + \alpha V^2 / 2g. \quad 3.2-1$$

Pudiéndose simplificar la ec. anterior para un canal de pequeña pendiente con coeficiente de Coriolis ($\alpha = 1$) unitario de la forma siguiente:

$$E = y + V^2 / 2g \quad 3.2-2$$

si se sustituye $V = Q/A$ en la ec. 3.2-2 resulta:

$$E = y + Q^2 / 2g A^2 \quad 3.2-3$$

esto es, la energía en la sección de un canal es una función de la profundidad del flujo.

La profundidad del flujo se dibuja contra la energía específica para una sección dada del canal y para un caudal como lo muestra la fig. 3.2-1, para cualquier punto "P" de la curva (fig. 3.2-1) la ordenada representa la profundidad, y la abscisa representa la energía específica, la cual es igual a la suma de la altura de presión "y" y la altura de velocidad $V^2 / 2g$.

Cuando la profundidad del flujo es más grande que la profundidad crítica, la velocidad es menor que la velocidad crítica - para una descarga dada, y entonces el flujo es subcrítico, - cuando la profundidad del flujo es menor que la profundidad crítica, el flujo es supercrítico. Por tanto " y_1 ", es la profundidad de un flujo supercrítico, e " y_2 " es la profundidad de un flujo subcrítico. Si los caudales cambian, la energía específica cambia, como se muestra en la fig. 3.2-1.

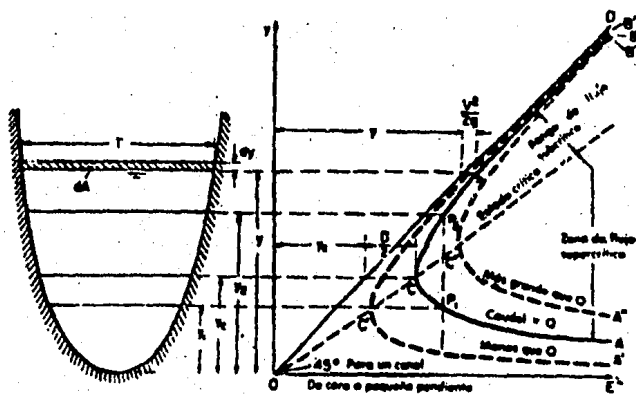


Fig. 3.2-1 Curva de la energía específica.

TIRANTE CRITICO. En el punto C de la fig. 3.2-1, la energía específica es la mínima con la cual puede pasar el gasto Q a través de la sección y para la cual existe un solo valor - del tirante, " y_c " que recibe el nombre de tirante crítico y al cual corresponde una velocidad llamada crítica.

EL ESTADO CRITICO DEL FLUJO. Ha sido definido como la condición para la cual el número de Froude es igual a la unidad. - Una definición más común es aquella que dice, que es el estado del flujo al cual la energía específica es un mínimo para una descarga dada.

$$V^2/2g = D/2$$

El criterio anterior establece que en el estado crítico del flujo la velocidad es igual a la mitad de la profundidad hidráulica. La ec. 3.2-4 puede escribirse también como $V/\sqrt{gD} = 1$, la cual significa lo mencionado antes.

Para que el criterio se pueda usar en cualquier problema, se deberán cumplir las condiciones siguientes:

1. Flujo paralelo o gradualmente variado.
2. Canal de pequeña pendiente.
3. Coeficiente de la energía igual a la unidad.

Si el coeficiente de la energía no es igual a la unidad, el criterio de flujo crítico es:

$$\alpha V^2/2g = D/2 \quad 3.2-5$$

Para un canal de gran pendiente de ángulo θ y coeficiente de energía α , el criterio para flujo crítico se define como:

$$\alpha V^2/2g = D \cos \theta/2 \quad 3.2-6$$

donde D es la profundidad hidráulica de la superficie mojada normal al fondo del canal. Estando en este caso el número de Froude como:

$$F = V/\sqrt{g D \cos \theta/\alpha} \quad 3.2-7$$

Las condiciones que caracterizan el estado crítico del flujo se pueden enumerar como sigue:

1. De energía específica es un mínimo para una descarga dada.
2. La descarga es un máximo para una energía específica dada.
3. La fuerza específica es un mínimo para una descarga dada.

4. La altura de velocidad es igual a la mitad de la profundidad hidráulica en un canal de pendiente pequeña.
5. El número de Froude es igual a la unidad.
6. La velocidad del flujo en un canal de pendiente pequeña con distribución uniforme de velocidad es igual a la celeridad de pequeñas ondas de gravedad en aguas bajas ocasionada por disturbios locales.

Un flujo que se acerca o está en estado crítico es inestable. Esto se debe a que un cambio menor en la energía específica - dentro o cerca del estado crítico causará un cambio mayor en la profundidad. Cuando el flujo está cerca del estado crítico, la superficie del agua aparece inestable y ondulada. Tales fenómenos son causados generalmente por cambios menores en la energía debido a variaciones de la rugosidad del canal, sección transversal, pendiente, o depósitos de sedimentos o residuos. En el diseño de un canal, si la profundidad se encuentra dentro o cerca de la profundidad crítica para una gran longitud del canal, la forma o pendiente del canal debe alterarse si es posible, a los efectos de asegurar una estabilidad mayor.

EL FACTOR DE SECCION EN EL CALCULO DEL FLUJO CRITICO.

Sustituyendo $V = Q/A$ en la ecuación 3.2-4 y simplificando, queda:

$$Z = Q/\sqrt{g} \quad 3.2-8$$

Cuando el coeficiente de Coriolis no es la unidad, queda:

$$Z = Q/\sqrt{g/\alpha} \quad 3.2-9$$

La ecuación 3.2-8 ó 3.2-9 es una herramienta muy útil para el cálculo y análisis del flujo crítico en canales.

Cuando el caudal está dado, la ecuación da el factor Z de la sección crítica y, entonces la profundidad crítica, y_c .

Cuando la profundidad y el factor de la sección son dados, la descarga crítica se puede calcular por la ec. 3.2-8 en la forma siguiente:








$$Q = Z \sqrt{g} \tag{3.2-10}$$

o por la ec. 3.2-9 en la forma siguiente:

$$Q = Z \sqrt{g/\alpha} \tag{3.2-11}$$

En el cuadro 3.2-1 se dan fórmulas para el cálculo del factor de sección Z de siete secciones comunes.

Cuadro 3.2-1 Elementos geométricos de las secciones del canal

Sección	Área A	Perímetro mojado P	Radio hidráulico R	Ancho superior T	Profundidad hidráulica D	Factor de la sección Z
 Rectángulo	by	$b + 2y$	$\frac{by}{b + 2y}$	b	y	$\frac{b}{y^{3/2}}$
 Trapezoide	$(b + ay)y$	$b + 2y\sqrt{1 + a^2}$	$\frac{(b + ay)y}{b + 2y\sqrt{1 + a^2}}$	$b + 2ay$	$\frac{(b + ay)y}{b + 2ay}$	$\frac{(b + ay)^{3/2}}{\sqrt{b^2 + 2ay}}$
 Triángulo	$\frac{ay^2}{2}$	$y\sqrt{1 + a^2}$	$\frac{ay}{2\sqrt{1 + a^2}}$	$2ay$	$\frac{ay}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a^{3/2}}{y^{3/2}}$
 Círculo	$\frac{1}{2} \pi r^2 (1 - \cos \theta)$	$\pi r \theta$	$\frac{r}{2} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\theta}\right)$	$2r \sin \frac{\theta}{2}$	$\frac{r(1 - \cos \theta)}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{r^{3/2} (1 - \cos \theta)^{3/2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}$
 Parábola	$\frac{2}{3} T y$	$T + \frac{8}{3} y$	$\frac{2Ty}{3T + 8y}$	$\frac{2}{3} T$	y	$\frac{3}{2} \frac{T^{3/2}}{y^{3/2}}$
 Rectángulo con ángulos redondeados	$\left(\frac{T}{3} - a\right) y + (b + ay)y$	$(b + 2y) + 2ay$	$\frac{(b + ay)y}{(b + 2y) + 2ay}$	$b + 2y$	$\frac{(b + ay)y}{b + 2y}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(b + ay)^{3/2}}{\sqrt{b^2 + 2ay}}$
 Triángulo con fondo redondeado	$\frac{T^2}{6} - \frac{ay^2}{2} (1 - \cos \theta) + \frac{T}{2} y + \frac{ay^2}{2} (1 - \cos \theta)$	$\frac{T}{2} + y\sqrt{1 + a^2}$	$\frac{ay}{2}$	$2ay$	$\frac{ay}{2}$	$\frac{3}{2} \frac{T^{3/2}}{y^{3/2}}$

* Aproximación satisfactoria para el ángulo $0 < \theta < 1$, donde $x = ay/T$. Cuando $x > 1$, use la expresión exacta.
 $P = (T/2) \{ \sqrt{1 + x^2} + 1/x \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) \}$.

Para simplificar los cálculos del flujo crítico, se han preparado curvas adimensionales las que muestran la relación entre la profundidad y el factor de sección Z (Fig. 3.2-2), para canales rectangulares, trapezoidales, y circulares. Mismas que servirán para determinar la profundidad crítica, dado un factor Z de sección ó viceversa.

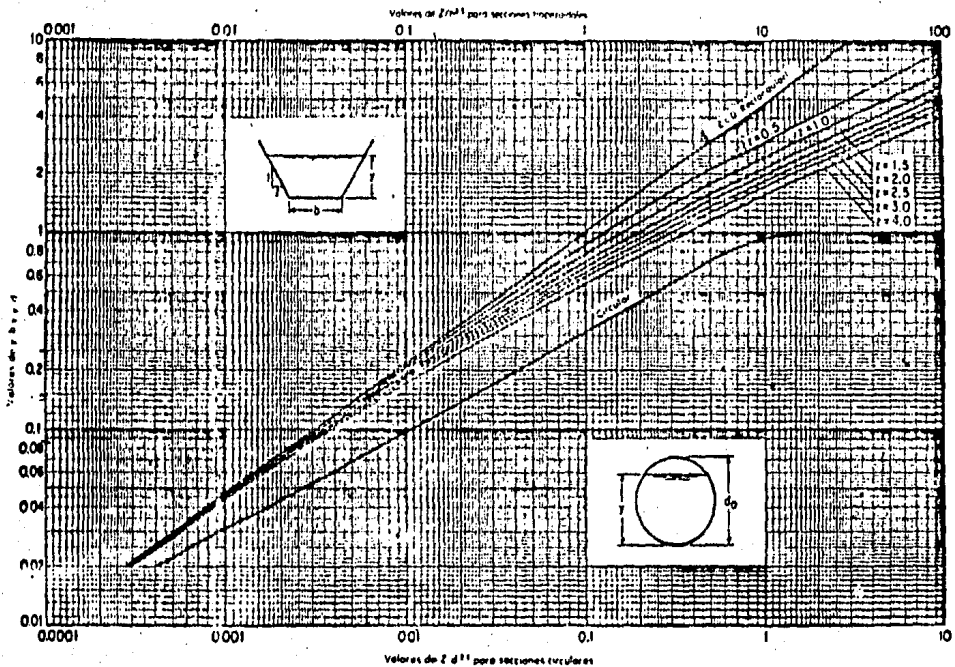


Fig. 3.2-2 Curvas para determinar la profundidad crítica.

3.3 FLUJO GRADUALMENTE VARIADO.

(ECUACION GENERAL Y CLASIFICACION DE PERFILES)

3.3-1 HIPOTESIS BASICAS.

El flujo gradualmente variado que se discutirá se refiere a un flujo permanente cuyo tirante varía gradualmente en la dirección del canal, de tal manera que las líneas de corriente son rectas y practicamente paralelas, es decir la distribución hidrostática de presión prevalece en cada sección.

Para el desarrollo de la teoría, resulta necesario tomar en cuenta las siguientes hipótesis:

1. La pendiente de la plantilla en el canal es uniforme y pequeña de tal manera que se confunde el tirante de la sección normal con el vertical y, además, no ocurre arrastre de aire en el interior del flujo.
2. La distribución de velocidades en la sección del canal está fijada. Así, los coeficientes de distribución de la velocidad son constantes.
3. La pérdida de energía en una sección es la misma que la de un flujo uniforme. Se utilizan las mismas fórmulas que en un flujo uniforme, utilizando la velocidad media, el radio hidráulico y el coeficiente de rugosidad. La pérdida de energía es causada casi enteramente por fricción, pudiendo existir además pérdidas por turbulencias.

3.3.2 ECUACION DINAMICA.

De la ecuación diferencial de energía para un flujo, se tiene:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx} \left(d \cos \theta + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) + \frac{dh_f}{dx} = 0 \quad 3.3-1$$

Donde:

- x Coordenada curvilínea siguiendo el eje del canal - sobre la plantilla.
- z Carga de posición medida del plano de referencia a la plantilla del canal, en m.
- $d \cos \theta$ Carga de presión sobre la plantilla del canal en m.
- g Aceleración de gravedad, en m/seg^2 .
- h_f Pérdida interna de energía, en m.
- v Velocidad media en la sección, en m/seg .
- α Coeficiente de Coriolis para corregir el efecto de la distribución de velocidades en la sección considerada.

Debe destacarse que la pendiente de la plantilla S_o está definida como el seno del ángulo θ de la inclinación respecto de la horizontal y se supone positiva si la inclinación es descendente hacia aguas abajo y negativa en caso contrario, esto es, que:

$$S_o = \text{Sen } \theta = - dz/dx \quad 3.3-2$$

La pendiente de la línea de la energía es:

$$S_f = dh_f/dx \quad 3.3-3$$

siendo, $dE/dx = (dE/dy) (dy/dx)$, donde $dE/dy = 1 - F_f^2$, resulta que:

$$dE/dx = (1 - F_f^2) dy/dx \quad 3.3-4$$

Donde:

$$F_f = V/\sqrt{gD/\alpha} = Q/\sqrt{gD/\alpha}$$

sustituyendo las ecuaciones (3.3-2), (3.3-3) en:

$$dz/dx + dE/dx + dh_f/dx = 0$$

tenemos:

$$dy/dx = (S_0 - S_f)/(1 - F_F^2) = S_0(1 - S_f/S_0)/(1 - F_F^2) \quad 3.3-5$$

que es la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado. dy/dx representa la pendiente S_0 de la superficie libre - del agua referida al eje x , coincidente con la plantilla del canal.

Además se pueden usar fórmulas para canales anchos rectangulares:

1. Cuando se usa la fórmula de Manning.

$$dy/dx = S_0(1 - (y_n/y)^{10/3})/(1 - (y_c/y)^3) \quad 3.3-6$$

2. Cuando se usa la fórmula de Chézy:

$$dy/dx = S_0(1 - (y_n/y)^3)/(1 - (y_c/y)^3) \quad 3.3-7$$

3.3.3 CARACTERISTICAS Y CLASIFICACION DE LOS PERFILES DE FLUJO.

Por simplicidad el canal se considerará prismático; la forma que adopta el perfil está directamente asociado con la pendiente de la plantilla S_0 y con los valores de S_f y F_F^2 . Por lo que respecta a la pendiente de la plantilla, S_0 será positiva si el fondo desciende en la dirección del flujo, negativa si asciende y cero si es horizontal.

En el caso de pendiente positiva, sobre ella se puede establecer un flujo uniforme de tirante y_n , por lo cual dicha pendiente (positiva) podría también ser:

"Suave" si $y_n > y_c$, llamando a los perfiles resultantes, perfiles tipo "M".

"Crítica" si $y_n = y_c$, llamando a los perfiles resultantes perfiles tipo "C".

"Pronunciada" si $y_n < y_c$, llamando a los perfiles resultantes, perfiles tipo "S".

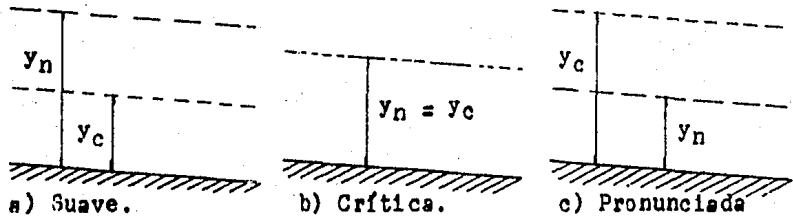


Fig. 3.3-1, Tipos de pendientes.

La clasificación de la pendiente en uno de estos tipos dependerá de la rugosidad, de la magnitud misma de la pendiente y en menor grado del gasto.

Cualquiera que sea la pendiente, para un gasto dado y sección del canal, las líneas que indicarán la altura del tirante normal y el crítico, dividen el espacio en que podría desarrollarse el perfil del flujo en tres zonas que se llamarán:

ZONA 1. El espacio sobre la línea superior.

ZONA 2. El espacio entre las dos líneas.

ZONA 3. El espacio abajo de la línea inferior.

Dentro de las cuales queda alojado cualquier perfil de tirante "y". Por ejemplo un perfil S2, queda comprendido entre la línea superior " y_c " y " y_n " como se muestra en la fig. 3.3-2.

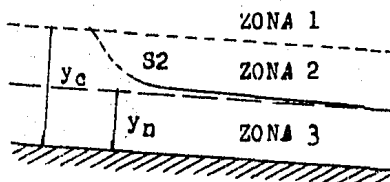


Fig. 3.3-2 Perfil S2.

Se recuerda también que si:

$dy/dx > 0$, El perfil de la superficie libre diverge de la plantilla.

$dy/dx = 0$, El perfil de la superficie libre es paralelo a la plantilla.

$dy/dx < 0$, El perfil de la superficie libre, converge con la plantilla.

Existen diferentes formas para el perfil de la superficie libre en un flujo gradualmente variado (13 en total) y que se muestran en la figura 3.3-3.

Los perfiles de flujo se pueden clasificar de acuerdo a la naturaleza de la pendiente del canal y la zona en la cual la superficie del flujo cae. Estos tipos son designados como H2, H3; M1, M2, M3; C1, C2, C3; S1, S2, S3; y A2, A3.

Donde:

- H Pendiente horizontal.
- M Pendiente moderada. (subcrítica)
- C Pendiente crítica.
- S Pendiente pronunciada. (supercrítica)
- A Pendiente adversa.

donde el numeral representa el número de la zona.

En seguida se mencionarán algunos comentarios acerca de dichos perfiles:

PERFILES TIPO M. El perfil M1 bien conocida como curva de remanso, es muy común. Las estructuras de control, tales como vertedores y compuertas, y otros accidentes naturales, como estrechamientos y curvas, pueden producir un efecto de remanso en un canal, tomándose como límite o longitud de dicho ---

remanso aquella sección en que el tirante difiere en uno por ciento respecto del normal.

	PERFILES EN LA ZONA 1 $y > y_n \mid S_0 > S_f \mid$ $y > y_c \mid FF < 1$	PERFILES EN LA ZONA 2 $y_n > y_c \mid S_0 > S_f \mid FF < 1$ $y_c > y_n \mid S_0 > S_f \mid FF > 1$	PERFILES EN LA ZONA 3 $y < y_n \mid S_0 < S_f \mid$ $y < y_c \mid FF > 1$
PENDIENTE POSITIVA $S_0 > 0$	$\frac{dy}{dx} = \frac{+}{+} = +$ SUBCRÍTICA: $y_n > y_c$ M1 CALCULO	$\frac{dy}{dx} = \frac{-}{+} = -$ M2 CALCULO	$\frac{dy}{dx} = \frac{-}{-} = +$ M3 CALCULO
	$\frac{dy}{dx} = \frac{+}{+} = +$ CRÍTICA: $y_n = y_c$ C1 CALCULO	$\frac{dy}{dx} = 0$ C2 CALCULO	$\frac{dy}{dx} = \frac{-}{-} = +$ C3 CALCULO
	$\frac{dy}{dx} = \frac{+}{+} = +$ SUPERCRÍTICA: $y_n < y_c$ S1 CALCULO	$\frac{dy}{dx} = \frac{+}{-} = -$ S2 CALCULO	$\frac{dy}{dx} = \frac{-}{-} = +$ S3 CALCULO
PENDIENTE HORIZONTAL $S_0 = 0$	$\frac{dy}{dx}$ NO EXISTE NINGUNA NINGUNA	$\frac{dy}{dx} = \frac{-}{+} = -$ H2 CALCULO	$\frac{dy}{dx} = \frac{-}{-} = +$ H3 CALCULO
	PENDIENTE NEGATIVA $S_0 < 0$	$\frac{dy}{dx}$ NO EXISTE NINGUNA NINGUNA	$\frac{dy}{dx} = \frac{-}{+} = -$ A2 CALCULO

Fig. 3.3-3 Clasificación de los perfiles en flujo gradualmente variado.

El perfil M2 ocurre cuando el tirante se reduce, por ejemplo, en un estrechamiento de la sección o en la proximidad de una caída. El perfil M3 se puede encontrar aguas abajo de un cambio de pendiente supercrítica a subcrítica, o después de la descarga de una compuerta. Está regido por las condiciones aguas abajo y termina normalmente en un salto hidráulico. Los perfiles M2 y M3 son muy cortos en comparación con el M1.

PERFILES TIPO S. El perfil S1 empieza después de un salto hidráulico y termina en una obstrucción. El perfil S2, es muy corto y más bien se presenta como una transición entre una caída hidráulica y el flujo uniforme. El perfil S2 es generalmente muy corto y se encuentra comunmente a la entrada de un canal de gran pendiente o en un cambio de pendiente suave a pronunciada. El perfil S3 es de tipo transicional de un flujo supercrítico o de un canal de gran pendiente a otra de menos pendiente, y se produce aguas abajo de una compuerta.

PERFILES TIPO C. La inestabilidad propia del estado crítico se manifiesta en la forma de una ondulación superficial apreciable.

PERFILES TIPO H. Este perfil es el límite inferior de una pendiente suave. El tirante normal es infinito, por lo cual hay solo dos perfiles.

PERFILES TIPO A. La pendiente So negativa es rara.

3.3-4 SINTESIS DE PERFILES COMPUESTOS.

El análisis del perfil del flujo es un procedimiento utilizado para predecir la forma general del perfil del flujo. Un canal prismático con un cambio en la pendiente consiste en un par de canales prismáticos conectados, de la misma sección transversal pero con pendientes diferentes.

Se pueden interpretar cualitativamente los perfiles de la superficie libre en un canal largo, de sección uniforme, y con una gran variedad de pendientes, secciones de control y tipos de perfil.

La fig. 3.3-4 muestra dos canales, cada uno con una compuerta deslizable cerca del extremo aguas abajo, para ilustrar el procedimiento. Se supone que la abertura de la compuerta y el gasto permanecen constantes.

PROCEDIMIENTO PARA DIBUJAR LOS PERFILES DE FLUJO:

El primer paso consiste en dibujar las líneas de tirante normal y crítico, las cuales son paralelas a la plantilla. Siendo el canal prismático, el tirante crítico es el mismo en toda su longitud, en seguida, se localizan las secciones de control en los sitios apropiados de entrada y salida, en los cambios de pendiente de suave a pronunciada y en la compuerta; esta última, válida en ambas direcciones debido a que los tirantes hacia aguas arriba y hacia aguas abajo están gobernados por la ecuación de descarga de la compuerta.

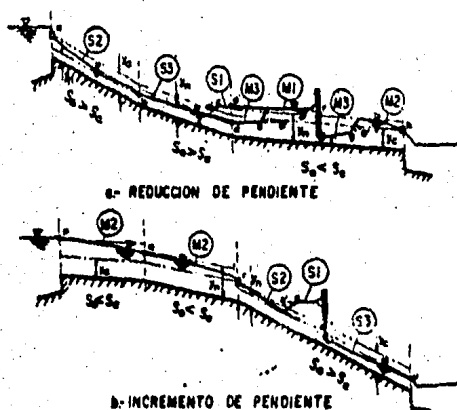


Fig. 3.3-4 Identificación de perfiles y secciones de control

3.3-5 SECCION DE CONTROL

Se llama sección de control, a la sección de un canal en donde se puede establecer una relación definida entre el nivel de la superficie libre del agua y el gasto correspondiente, pudiéndose controlar el flujo, tanto en la dirección aguas arriba como en la dirección aguas abajo.

Algunos ejemplos de secciones de control son: las presas, vertederos y compuertas. Debido a que el gasto está relacionado con la carga a través de una curva llamada de "gasto-tirante". Las secciones de control también existen a la entrada o salida de un canal. Es importante el conocimiento de las características del perfil en estas regiones, para ilustrarlo, se considera el caso de un canal prismático largo que conecta dos vasos de almacenamiento. Debido a la considerable longitud del canal, la tendencia es hacia el flujo uniforme.

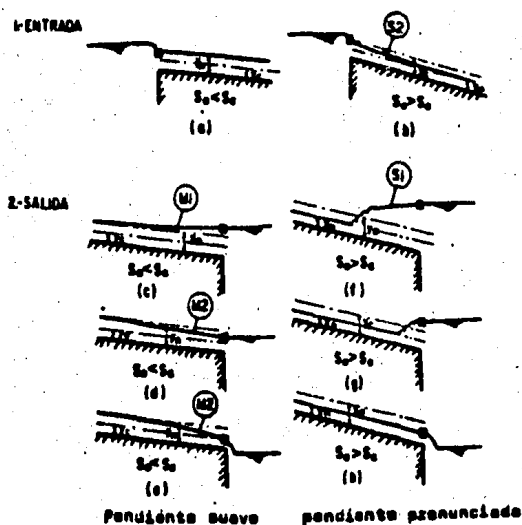


Fig. 3.3-5 Perfiles a la entrada y salida de un canal

La fig. 3.3-5 muestra los perfiles a la entrada y salida para pendientes suave y pronunciada y para una variedad de niveles en el vaso de salida. Las secciones de control se indican por medio de puntos encerrados dentro de un cuadrado.

3.4 METODOS DE SOLUCION DE PERFILES DE FLUJO.

3.4-1 METODOS DE CALCULO.

Unicamente se tratarán métodos de solución de perfiles para canales prismáticos.

METODOS DE CALCULO	Métodos de integración de la ec. dinámica.	-Integración gráfica. -Integración directa.
	Métodos de incrementos finitos en canales prismáticos.	-Método para el cálculo de la longitud del tramo. -Método gráfico.

3.4-2 METODOS DE INTEGRACION DE LA EC. DINAMICA.

1. INTEGRACION GRAFICA.

La solución de la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado permite determinar cuantitativamente la forma del perfil del flujo.

De la expresión:

$$dy/dx = (S_0 - S_f)/(1 - F_r^2) = S_0(1 - S_f/S_0)/(1 - F_r^2) \quad 3.3-5$$

Tenemos:

$$dx = ((1 - F_r^2)/(S_0 - S_f))dy = ((1 - F_r^2)/(S_0 - S_f))dy = f(y) dy \quad 3.4-1$$

cuya solución permite determinar la distancia x en términos de "y".

Considérense dos secciones de un canal (fig. 3.4-1a) a las distancias " x_1 " y " x_2 ", respectivamente, desde un punto elegido "y" en la cual se presentan los tirantes " y_1 " y " y_2 ".

La distancia entre las dos secciones (medida sobre la plantilla del canal) de la ec. (3.4-1) es:

$$x_2 - x_1 = \int_{y_1}^{y_2} f(y) dy \quad 3.4-2$$

Considerando varios valores de "y", es posible calcular los de $f(y)$ y dibujar una curva de "y" contra $f(y)$ (fig.3.4-1b). De acuerdo con la ec. 3.4-2, el valor de "x" es igual al área sombreada; entre la curva, el eje "y" y las ordenadas $f(y)$ correspondientes a las abscisas " y_1 " y " y_2 ". Se aplica a cualquier tipo de perfil de flujo en canales prismáticos de cualquier forma y pendiente y, en general es fácil de seguir. El área puede ser determinada por medio, de un planímetro, o por cualquier otro procedimiento.

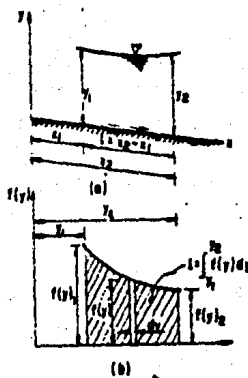


Fig. 3.4-1 Método de integración gráfica.

2. INTEGRACION DIRECTA.

La integración directa de la ec. 3.3-5 es prácticamente imposible si se desea obtener para todas las formas de sección y tipos de canal.

La ec. 3.3-5 puede ser expresada de la siguiente manera:

$$dy/dx = S_0(1 - (y_n/y)^N)/(1 - (y_c/y)^M) \quad 3.4-3$$

Donde: M y N son exponentes que dependen de la forma de la sección y del tirante.

En la fig. 3.4-2 y 3.4-3 se presentan las curvas de N y M respectivamente para secciones trapeciales y rectangulares.

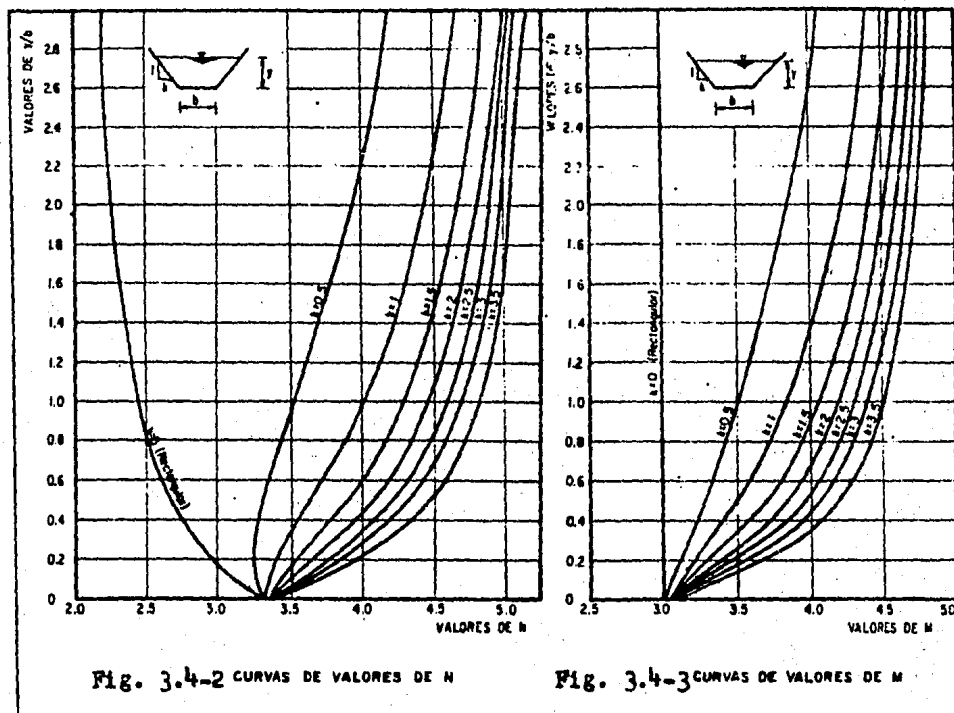


Fig. 3.4-2 CURVAS DE VALORES DE N

Fig. 3.4-3 CURVAS DE VALORES DE M

Si hacemos $u = y/y_n$; la ec. 3.4-3 se puede expresar como:

$$dx = \frac{y_n}{S_0} \left(1 - \frac{1}{1-u^N} + \frac{(y_c)^M}{y_n^M} \frac{u^{N-M}}{1-u^N} \right) du \quad 3.4-4$$

Debido a que el cambio de tirante en el flujo gradualmente variado generalmente es pequeño, los exponentes hidráulicos N y M se pueden suponer constantes dentro de los límites de integración y así la ecuación anterior resulte:

$$x = \frac{y_n}{S_0} \left[U - \int_0^U \frac{du}{1-u^N} + \left(\frac{y_c}{y_n} \right)^M \int_0^U \frac{u^{N-M}}{1-u^N} du \right] + \text{CONST.}$$

La primera integral de la ec. 3.4-5 se designa por:

$$F(u, N) = \int_0^u \frac{du}{1-u^N} \quad 3.4-6$$

y esta es conocida como la función de flujo variable.

La segunda integral de la ec. 3.4-5 puede expresarse también en la forma de una función de flujo variado. Si hacemos

$v = u^{N/J}$ y $J = N/(N-M+1)$; esta integral puede transformarse en:

$$\int_0^u \frac{u^{N-M}}{1-u^N} du = \frac{J}{N} \int_0^v \frac{dv}{1-v^J} = \frac{J}{N} F(v, J) \quad 3.4-7$$

donde:

$$F(v, J) = \int_0^v \frac{dv}{1-v^J} \quad 3.4-8$$

que es la misma función de flujo variado excepto que las variables "u" y "N" se reemplazan por "v" y "J" respectivamente.

De este modo, usando la notación para las funciones de flujo variado, la ec. 3.4-5 resulta:

$$x = \frac{y_n}{S_0} \left[u - F(u, N) + \left(\frac{y_n}{y_1} \right)^M \frac{J}{N} F(v, J) \right] + \text{CONST.} \quad 3.4-9$$

$$x = A \left[u - F(u, N) + B F(v, J) \right] + \text{CONST.} \quad 3.4-10$$

donde:

$$A = \frac{y_n}{S_0}, \quad B = \left(\frac{y_n}{y_1} \right)^M \frac{J}{N}, \quad u = \frac{y}{y_n}, \quad v = u^{N/J}, \quad J = \frac{N}{N-M+1}$$

La distancia "L" que separa dos secciones consecutivas 1 y 2 de características conocidas en un flujo gradualmente variado, de la ec. 3.4-10 es entonces:

$$L = x_2 - x_1 = A \left\{ (u_2 - u_1) - \left[F(u_2, N) - F(u_1, N) \right] + B \left[F(v_2, J) - F(v_1, J) \right] \right\} \quad 3.4-11$$

Para determinar el perfil, el canal se divide en un número de tramos y la longitud de cada tramo se calcula con la ec. 3.4-11 a partir de los tirantes conocidos o supuestos en los extremos del tramo.

El procedimiento de cálculo es como sigue:

1. Se calcula el tirante normal " y_n " y el crítico " y_c " a partir de Q y S_0 .
2. De las figs. 3.4-2 y 3.4-3 se determinan los exponentes N y M para un tirante medio estimado a partir de los tirantes en los extremos del tramo, suponiendo que la sección en estudio tiene exponentes N y M aproximadamente constantes.
3. Se calcula $J = N/(N - M + 1)$ y los valores de $u = y/y_n$ y $v = u^{N/J}$ en las dos secciones de los extremos del tramo.
4. Los valores de $F(u, N)$ y $F(v, J)$, se encuentran en la tabla 3.4-1.
5. Finalmente la longitud del tramo que separa las dos secciones extremas, se calcula con la ec. 3.4-11.

3.4-3 METODO DE INCREMENTOS FINITOS EN CANALES PRISMATICOS.

1. METODO PARA EL CALCULO DE LA LONGITUD DEL TRAMO.

El método de incrementos finitos es el que tiene aplicaciones más amplias debido a que es adecuado para el análisis de perfiles de flujo tanto en canales prismáticos como no prismáticos.

La fig. 3.4-4 ilustra un tramo de un canal prismático limitado por las secciones 1 (aguas arriba) y 2 (aguas abajo) de longitud x . Igualando las alturas totales se puede escribir:

$$S_0 \Delta x \pm \gamma_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \gamma_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + S_f \Delta x \quad 3.4-12$$

Resolviendo para Δx ,

$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{S_0 - S_f} = \frac{\Delta E}{S_0 - S_f} \quad 3.4-13$$

En donde "E" es la energía específica o, suponiendo

$$E_1 = \gamma_1 + \frac{V_1^2}{2g} \quad 3.4-14a$$

$$E_2 = \gamma_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad 3.4-14b$$

S_f es la pendiente media de fricción entre las dos secciones y se calcula de la siguiente manera:

$$h_f = S_f \Delta x = \frac{1}{2} (S_{f1} + S_{f2}) \Delta x \quad 3.4-15$$

Cuando se utiliza la fórmula de Manning, la pendiente de fricción en la sección (1) y (2), se expresa por:

$$S_{f1} = \left(\frac{V_1 n_1}{R_1^{2/3}} \right)^2 \quad 3.4-16a$$

$$S_{f2} = \left(\frac{V_2 n_2}{R_2^{2/3}} \right)^2 \quad 3.4-16b$$

De acuerdo con el sentido en que se efectúa el cálculo, se conocerán las características hidráulicas en alguna de las dos secciones, la (1), si el cálculo es en la dirección del flujo o la (2), si es en dirección contraria. El procedimiento consiste en suponer un valor tentativo del tirante en la sección desconocida y ajustar dicho valor mediante la verificación a través de las ecs. 3.4-13, 3.4-15 y 3.4-16a y b.

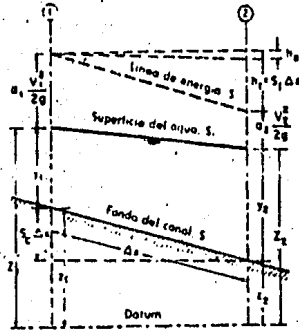


Fig. 3. Un tramo del canal para la derivación de métodos por pasos.

2. METODO GRAFICO.

Sustituyendo las ecs. 3.4-16a y b; y 3.4-15 en la ec. 3.4-13 resulta:

$$E_1 - S_{f1} \frac{\Delta x}{2} + S_0 \Delta x = E_2 + S_{f2} \frac{\Delta x}{2} \quad 3.4-17$$

Suponiendo que el tipo de perfil de flujo implica que el cálculo se realiza hacia aguas abajo, se tendrán conocidas las condiciones en la sección 1 (aguas arriba) y desconocidas en la sección 2 (aguas abajo).

Conocida la sección del canal y el gasto para el cual se va a obtener el perfil de flujo, se puede calcular la curva Energía específica-Tirante (E-y), asignando a éste valores entre los que variarán los tirantes del perfil por calcular.

Dichos valores se elegirán con diferencias entre sí tan pequeñas como requiera la precisión con que se desea obtener la curva. Así mismo, se escoge la longitud Δx del tramo, acorde con la precisión deseada; dicha longitud permanecerá constante en el cálculo de tal manera que la pérdida por fricción para la mitad del tramo se calculará como:

$$S_f \frac{\Delta x}{2} = \left(\frac{V_n}{R^{2/3}} \right) \frac{\Delta x}{2} \quad 3.4-18$$

esto es, para cada valor del tirante "y" se calculará la energía específica E y la pérdida de energía $S_f \Delta x / 2$ y de aquí los valores $E + S_f \Delta x / 2$ y $E - S_f \Delta x / 2$.

Así mismo, como estos resultados se dibujan sobre un plano coordenado las curvas E-y; $E - S_f \Delta x / 2 - y$; $E - S_f \Delta x / 2 - y$, como se muestra en la fig. 3.4-5, conviene elegir el eje horizontal como eje de tirantes "y" y el vertical para la energía específica E y las funciones $E - S_f \Delta x / 2$ y $E - S_f \Delta x / 2$.

En la fig. 3.4-5 el punto 1 sobre la rama de la curva $E - y$ correspondiente a régimen subcrítico indica las condiciones en la sección inicial. La ordenada del punto 2 será igual a $E - S_f x/2$, y descendiendo la distancia $S_0 x$ sobre una vertical a partir de dicho punto, se llega a 3 cuya ordenada, es igual a $E - S_f x/2$. Por tanto, al desplazarse sobre la horizontal que pasa por el punto 3 se llega al 4 y, a partir de este y sobre una vertical, al 5 cuyas coordenadas indicarán las condiciones de tirante y energía específica en la sección 2, a la distancia x hacia aguas arriba de la 1.

El procedimiento se reitera las veces que sea necesario para encontrar los tirantes en secciones sucesivas hasta llegar a la sección en que se establezca el flujo uniforme.

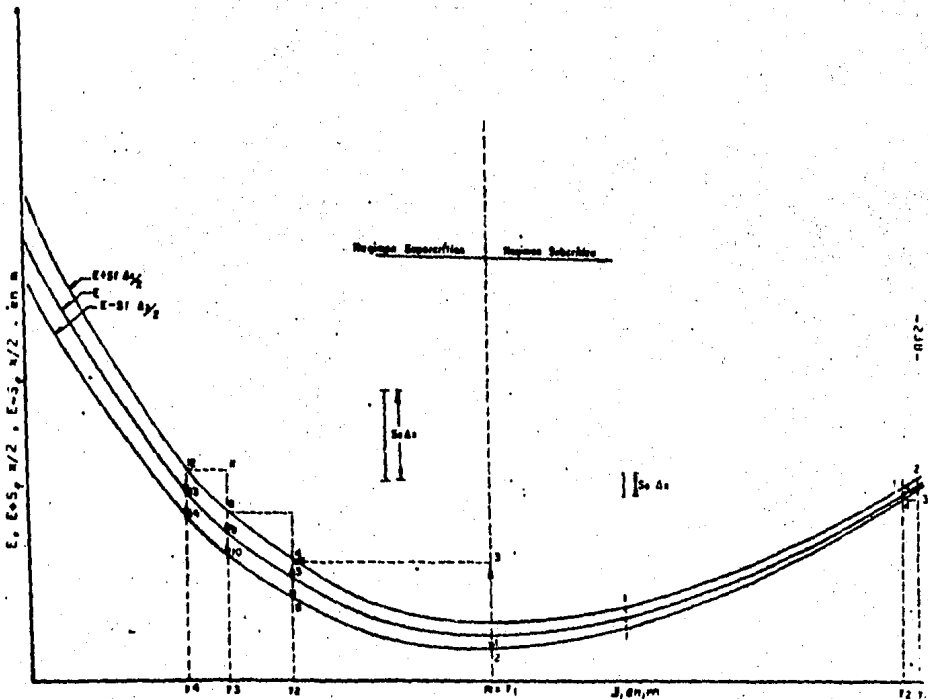


Fig. 3.4-5

Curvas $E - y$, $(E + S_f x/2) - y$ y $(E - S_f x/2) - y$ Para la solución gráfica de las ecuaciones (5.39) y (5.41) en un canal prismático.

Tabla 3.4-1 Cuadro de las funciones de flujo variado*

$$F(u, N) = \int_0^u \frac{du}{1-u^N} \text{ AND } F(u, N)z_s = \int_0^u \frac{du}{1+u^N}$$

La función del flujo variado para pendientes positivas, $F(u, N)$

$\frac{N}{u}$	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.161	0.161	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.181	0.181	0.181	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.202	0.201	0.201	0.201	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.223	0.222	0.221	0.221	0.221	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.244	0.243	0.242	0.241	0.241	0.241	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.265	0.263	0.262	0.262	0.261	0.261	0.261	0.260	0.260	0.260
0.28	0.286	0.284	0.283	0.282	0.282	0.281	0.281	0.281	0.280	0.280
0.30	0.307	0.305	0.304	0.303	0.302	0.302	0.301	0.301	0.301	0.300
0.32	0.329	0.326	0.325	0.324	0.323	0.322	0.322	0.321	0.321	0.321
0.34	0.351	0.348	0.346	0.344	0.343	0.343	0.342	0.342	0.341	0.341
0.36	0.372	0.369	0.367	0.366	0.364	0.363	0.363	0.362	0.362	0.361
0.38	0.395	0.392	0.389	0.387	0.385	0.384	0.383	0.383	0.382	0.382
0.40	0.418	0.414	0.411	0.408	0.407	0.405	0.404	0.403	0.403	0.402
0.42	0.442	0.437	0.433	0.430	0.428	0.426	0.425	0.424	0.423	0.423
0.44	0.465	0.460	0.456	0.452	0.450	0.448	0.446	0.445	0.444	0.443
0.46	0.489	0.483	0.479	0.475	0.472	0.470	0.468	0.466	0.465	0.464
0.48	0.514	0.507	0.502	0.497	0.494	0.492	0.489	0.488	0.488	0.485
0.50	0.539	0.531	0.525	0.521	0.517	0.514	0.511	0.509	0.508	0.506
0.52	0.565	0.557	0.550	0.544	0.540	0.536	0.534	0.531	0.529	0.528
0.54	0.592	0.582	0.574	0.568	0.563	0.559	0.556	0.554	0.551	0.550
0.56	0.619	0.608	0.599	0.593	0.587	0.583	0.579	0.576	0.574	0.572
0.58	0.648	0.635	0.626	0.618	0.612	0.607	0.603	0.599	0.596	0.594
0.60	0.676	0.663	0.653	0.644	0.637	0.631	0.627	0.623	0.620	0.617
0.61	0.691	0.678	0.667	0.657	0.650	0.644	0.639	0.635	0.631	0.628
0.62	0.706	0.692	0.680	0.671	0.663	0.657	0.651	0.647	0.643	0.640
0.63	0.722	0.707	0.694	0.684	0.676	0.669	0.664	0.659	0.655	0.652
0.64	0.738	0.722	0.709	0.698	0.690	0.683	0.677	0.672	0.667	0.664
0.65	0.754	0.737	0.724	0.712	0.703	0.696	0.689	0.684	0.680	0.676
0.66	0.771	0.753	0.738	0.727	0.717	0.709	0.703	0.697	0.692	0.688
0.67	0.787	0.769	0.754	0.742	0.731	0.723	0.716	0.710	0.705	0.701
0.68	0.804	0.785	0.769	0.757	0.746	0.737	0.729	0.723	0.718	0.713
0.69	0.822	0.804	0.785	0.772	0.761	0.751	0.743	0.737	0.731	0.726

*El cuadro de la función de flujo variado para pendientes positivas $F(u, N)$ es reproducido de Ven Te Chow, Integrating the equation of gradually varied flow, Proceedings, American Society of Civil Engineers, Vol. 81, paper no. 838, pp. 1-32, Noviembre, 1955. El cuadro de la función de flujo variado para pendientes negativas $F(u, N) - S_0$ es reproducido de la terminada discusión del autor de ese paper en el Proceedings, col. 83, Journal of Hydraulics Division, no. HY1, paper no. 1177, pp. 9-22, Febrero, 1957.

La función del flujo variado para pendientes positivas, $F(u, N)$. (Continuación)

$u \backslash N$	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0.70	0.840	0.810	0.802	0.787	0.776	0.766	0.757	0.750	0.744	0.739
0.71	0.838	0.838	0.819	0.804	0.791	0.781	0.772	0.764	0.758	0.752
0.72	0.878	0.855	0.836	0.820	0.807	0.796	0.786	0.779	0.772	0.766
0.73	0.898	0.874	0.854	0.837	0.823	0.811	0.802	0.793	0.786	0.780
0.74	0.918	0.892	0.868	0.854	0.840	0.827	0.817	0.808	0.800	0.794
0.75	0.940	0.913	0.890	0.872	0.857	0.844	0.833	0.823	0.815	0.808
0.76	0.961	0.933	0.909	0.890	0.874	0.861	0.849	0.839	0.830	0.823
0.77	0.985	0.954	0.930	0.909	0.892	0.878	0.866	0.855	0.846	0.838
0.78	1.007	0.970	0.950	0.929	0.911	0.896	0.883	0.872	0.862	0.854
0.79	1.031	0.998	0.971	0.949	0.930	0.914	0.901	0.889	0.879	0.870
0.80	1.056	1.022	0.994	0.970	0.950	0.934	0.919	0.907	0.896	0.887
0.81	1.083	1.046	1.017	0.992	0.971	0.954	0.938	0.925	0.914	0.904
0.82	1.110	1.072	1.041	1.015	0.993	0.974	0.958	0.945	0.932	0.922
0.83	1.139	1.099	1.067	1.039	1.016	0.996	0.979	0.965	0.952	0.940
0.84	1.171	1.129	1.094	1.064	1.040	1.019	1.001	0.985	0.972	0.960
0.85	1.201	1.157	1.121	1.091	1.065	1.043	1.024	1.007	0.993	0.980
0.86	1.238	1.193	1.153	1.119	1.092	1.068	1.048	1.031	1.015	1.002
0.87	1.272	1.223	1.182	1.149	1.120	1.095	1.074	1.055	1.039	1.025
0.88	1.314	1.262	1.228	1.181	1.151	1.124	1.101	1.081	1.064	1.049
0.89	1.357	1.302	1.255	1.216	1.183	1.155	1.131	1.110	1.091	1.075
0.90	1.401	1.343	1.294	1.253	1.218	1.189	1.163	1.140	1.120	1.103
0.91	1.452	1.388	1.338	1.294	1.257	1.225	1.197	1.173	1.152	1.133
0.92	1.505	1.438	1.385	1.340	1.300	1.266	1.236	1.210	1.187	1.166
0.93	1.564	1.493	1.435	1.381	1.348	1.311	1.279	1.251	1.226	1.204
0.94	1.645	1.568	1.504	1.449	1.403	1.363	1.329	1.297	1.270	1.246
0.950	1.737	1.652	1.582	1.518	1.467	1.423	1.385	1.352	1.322	1.296
0.960	1.833	1.741	1.665	1.601	1.543	1.497	1.454	1.412	1.383	1.355
0.970	1.939	1.806	1.750	1.702	1.644	1.596	1.543	1.501	1.464	1.431
0.975	2.055	1.945	1.853	1.779	1.707	1.649	1.598	1.554	1.514	1.479
0.980	2.164	2.045	1.946	1.855	1.783	1.720	1.660	1.617	1.575	1.536
0.985	2.294	2.165	2.056	1.959	1.880	1.812	1.752	1.699	1.652	1.610
0.990	2.477	2.333	2.212	2.104	2.017	1.940	1.873	1.811	1.761	1.714
0.995	2.702	2.521	2.478	2.353	2.250	2.159	2.079	2.003	1.945	1.889
0.999	3.523	3.292	3.097	2.931	2.788	2.663	2.554	2.457	2.370	2.293
1.000	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
1.001	3.317	2.931	2.640	2.399	2.184	2.006	1.856	1.725	1.610	1.509
1.003	2.587	2.266	2.022	1.818	1.649	1.506	1.384	1.279	1.188	1.107
1.010	2.273	1.977	1.757	1.572	1.419	1.291	1.182	1.089	1.007	0.936
1.015	2.090	1.807	1.602	1.428	1.286	1.166	1.065	0.978	0.902	0.836
1.020	1.961	1.711	1.493	1.327	1.191	1.078	0.982	0.900	0.828	0.766
1.03	1.779	1.531	1.340	1.186	1.060	0.955	0.866	0.790	0.725	0.668
1.04	1.651	1.410	1.212	1.086	0.967	0.868	0.785	0.714	0.653	0.600
1.05	1.552	1.314	1.150	1.010	0.896	0.802	0.723	0.656	0.598	0.548
1.06	1.472	1.250	1.082	0.948	0.838	0.748	0.672	0.603	0.551	0.508
1.07	1.404	1.195	1.026	0.896	0.790	0.703	0.630	0.569	0.516	0.471
1.08	1.340	1.136	0.978	0.851	0.749	0.663	0.595	0.535	0.485	0.441
1.09	1.285	1.084	0.935	0.812	0.713	0.631	0.563	0.506	0.457	0.415
1.10	1.250	1.050	0.907	0.777	0.681	0.601	0.536	0.480	0.433	0.392
1.11	1.209	1.014	0.861	0.746	0.652	0.573	0.511	0.457	0.411	0.372
1.12	1.172	0.981	0.831	0.718	0.626	0.551	0.488	0.436	0.392	0.354

La función del flujo variado para pendientes positivas, $F(u, N)$. (Continuación)

$\frac{N}{u}$	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
1.13	1.139	0.950	0.805	0.692	0.602	0.529	0.468	0.417	0.374	0.337
1.14	1.107	0.921	0.780	0.669	0.581	0.509	0.450	0.400	0.358	0.322
1.15	1.078	0.892	0.756	0.647	0.561	0.490	0.432	0.384	0.343	0.308
1.16	1.052	0.870	0.734	0.627	0.542	0.473	0.417	0.369	0.329	0.295
1.17	1.027	0.850	0.713	0.608	0.525	0.458	0.402	0.356	0.317	0.283
1.18	1.003	0.825	0.694	0.591	0.509	0.443	0.389	0.343	0.305	0.272
1.19	0.981	0.810	0.676	0.574	0.494	0.429	0.375	0.331	0.294	0.262
1.20	0.960	0.787	0.659	0.559	0.480	0.416	0.363	0.320	0.283	0.252
1.22	0.922	0.755	0.628	0.531	0.454	0.392	0.341	0.299	0.264	0.235
1.24	0.887	0.725	0.600	0.503	0.431	0.371	0.322	0.281	0.248	0.219
1.26	0.855	0.692	0.574	0.482	0.410	0.351	0.304	0.265	0.233	0.205
1.28	0.827	0.666	0.551	0.461	0.391	0.331	0.289	0.250	0.219	0.193
1.30	0.800	0.644	0.530	0.442	0.373	0.318	0.274	0.237	0.207	0.181
1.32	0.775	0.625	0.510	0.424	0.357	0.304	0.260	0.225	0.196	0.171
1.34	0.752	0.605	0.492	0.408	0.342	0.290	0.248	0.214	0.185	0.162
1.36	0.731	0.589	0.475	0.393	0.329	0.278	0.237	0.204	0.176	0.153
1.38	0.711	0.567	0.459	0.378	0.316	0.266	0.226	0.194	0.167	0.145
1.40	0.692	0.548	0.444	0.363	0.304	0.255	0.217	0.185	0.159	0.138
1.42	0.674	0.533	0.431	0.353	0.293	0.246	0.208	0.177	0.152	0.131
1.44	0.658	0.517	0.417	0.341	0.282	0.236	0.199	0.169	0.145	0.125
1.46	0.642	0.505	0.405	0.330	0.273	0.227	0.191	0.162	0.139	0.119
1.48	0.627	0.493	0.394	0.320	0.263	0.219	0.184	0.156	0.133	0.113
1.50	0.613	0.480	0.383	0.310	0.255	0.211	0.177	0.149	0.127	0.108
1.55	0.580	0.451	0.358	0.288	0.235	0.191	0.161	0.135	0.114	0.097
1.60	0.551	0.425	0.335	0.269	0.218	0.179	0.148	0.123	0.103	0.087
1.65	0.525	0.402	0.316	0.251	0.203	0.165	0.130	0.113	0.094	0.079
1.70	0.501	0.381	0.299	0.236	0.189	0.153	0.125	0.103	0.086	0.072
1.75	0.480	0.362	0.282	0.222	0.177	0.143	0.116	0.095	0.079	0.065
1.80	0.460	0.349	0.267	0.209	0.166	0.133	0.108	0.088	0.072	0.060
1.85	0.442	0.332	0.254	0.198	0.156	0.125	0.100	0.082	0.067	0.055
1.90	0.425	0.315	0.242	0.188	0.147	0.117	0.091	0.076	0.062	0.050
1.95	0.409	0.304	0.231	0.178	0.139	0.110	0.088	0.070	0.057	0.046
2.00	0.395	0.292	0.221	0.169	0.132	0.104	0.082	0.066	0.053	0.043
2.10	0.369	0.273	0.202	0.154	0.119	0.092	0.073	0.058	0.046	0.037
2.20	0.346	0.253	0.186	0.141	0.107	0.083	0.065	0.051	0.040	0.032
2.3	0.326	0.235	0.173	0.129	0.098	0.075	0.058	0.045	0.035	0.026
2.4	0.308	0.220	0.160	0.119	0.089	0.068	0.052	0.040	0.031	0.024
2.5	0.292	0.207	0.150	0.110	0.082	0.062	0.047	0.036	0.028	0.022
2.6	0.277	0.197	0.140	0.102	0.076	0.057	0.043	0.033	0.025	0.019
2.7	0.264	0.188	0.131	0.095	0.070	0.052	0.039	0.029	0.022	0.017
2.8	0.252	0.178	0.124	0.089	0.065	0.048	0.036	0.027	0.020	0.015
2.9	0.241	0.166	0.117	0.083	0.060	0.044	0.033	0.024	0.018	0.014
3.0	0.230	0.159	0.110	0.078	0.056	0.041	0.030	0.022	0.017	0.012
3.5	0.190	0.126	0.083	0.059	0.041	0.029	0.021	0.015	0.011	0.008
4.0	0.161	0.104	0.069	0.046	0.031	0.022	0.015	0.010	0.007	0.005
4.5	0.139	0.087	0.057	0.037	0.025	0.017	0.011	0.008	0.005	0.004
5.0	0.122	0.076	0.048	0.031	0.020	0.013	0.009	0.006	0.004	0.003
6.0	0.098	0.060	0.036	0.022	0.014	0.009	0.006	0.004	0.002	0.002
7.0	0.081	0.048	0.028	0.017	0.010	0.006	0.004	0.002	0.002	0.001
8.0	0.069	0.040	0.022	0.013	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001
9.0	0.060	0.034	0.019	0.011	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000
10.0	0.051	0.028	0.016	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000
20.0	0.023	0.018	0.011	0.006	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000

La función del flujo variado para pendientes positivas, $F(u, N)$. (Continuación)

$\frac{N}{u}$	4.2	4.6	5.0	5.4	5.8	6.2	6.6	7.0	7.4	7.8
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260
0.28	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280
0.30	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300
0.32	0.321	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320
0.34	0.341	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340
0.36	0.361	0.361	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360
0.38	0.381	0.381	0.381	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380
0.40	0.402	0.401	0.401	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400
0.42	0.422	0.421	0.421	0.421	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420
0.44	0.443	0.442	0.441	0.441	0.441	0.441	0.440	0.440	0.440	0.440
0.46	0.463	0.462	0.462	0.461	0.461	0.461	0.460	0.460	0.460	0.460
0.48	0.484	0.483	0.482	0.481	0.481	0.481	0.480	0.480	0.480	0.480
0.50	0.505	0.504	0.503	0.502	0.501	0.501	0.501	0.500	0.500	0.500
0.52	0.527	0.525	0.523	0.522	0.522	0.521	0.521	0.521	0.520	0.520
0.54	0.548	0.546	0.544	0.543	0.542	0.542	0.541	0.541	0.541	0.541
0.56	0.570	0.567	0.565	0.564	0.563	0.562	0.562	0.561	0.561	0.561
0.58	0.592	0.589	0.587	0.585	0.583	0.583	0.582	0.582	0.581	0.581
0.60	0.614	0.611	0.608	0.606	0.605	0.604	0.603	0.602	0.602	0.601
0.61	0.628	0.622	0.619	0.617	0.615	0.614	0.613	0.612	0.612	0.611
0.62	0.637	0.633	0.630	0.628	0.628	0.625	0.624	0.623	0.622	0.622
0.63	0.649	0.644	0.641	0.638	0.638	0.635	0.634	0.633	0.632	0.632
0.64	0.661	0.656	0.652	0.649	0.647	0.646	0.645	0.644	0.643	0.642
0.65	0.673	0.667	0.663	0.660	0.658	0.656	0.655	0.654	0.653	0.653
0.66	0.685	0.679	0.675	0.672	0.669	0.667	0.666	0.665	0.664	0.663
0.67	0.697	0.691	0.686	0.683	0.680	0.678	0.676	0.675	0.674	0.673
0.68	0.709	0.703	0.698	0.694	0.691	0.689	0.687	0.686	0.685	0.684
0.69	0.722	0.715	0.710	0.706	0.703	0.700	0.698	0.696	0.695	0.694
0.70	0.735	0.727	0.722	0.717	0.714	0.712	0.710	0.708	0.706	0.705
0.71	0.748	0.740	0.734	0.729	0.726	0.723	0.721	0.719	0.717	0.716
0.72	0.761	0.752	0.746	0.741	0.737	0.734	0.732	0.730	0.728	0.727
0.73	0.774	0.765	0.759	0.753	0.749	0.746	0.743	0.741	0.739	0.737
0.74	0.788	0.779	0.771	0.766	0.761	0.757	0.754	0.752	0.750	0.748
0.75	0.802	0.792	0.784	0.778	0.773	0.769	0.766	0.763	0.761	0.759
0.76	0.817	0.806	0.798	0.791	0.786	0.782	0.778	0.775	0.773	0.771
0.77	0.831	0.820	0.811	0.804	0.798	0.794	0.790	0.787	0.784	0.782
0.78	0.847	0.834	0.825	0.817	0.811	0.806	0.802	0.799	0.796	0.794
0.79	0.862	0.849	0.839	0.831	0.824	0.819	0.815	0.811	0.808	0.805

La función del flujo variado para pendientes positivas, $F(u, N)$ (continuación)

$\frac{N}{u}$	4.2	4.6	5.0	5.4	5.8	6.2	6.6	7.0	7.4	7.8
0.80	0.878	0.865	0.854	0.845	0.838	0.832	0.826	0.821	0.820	0.818
0.81	0.895	0.881	0.869	0.860	0.852	0.846	0.841	0.836	0.834	0.830
0.82	0.913	0.897	0.885	0.875	0.866	0.860	0.854	0.850	0.846	0.842
0.83	0.931	0.914	0.901	0.890	0.881	0.874	0.868	0.863	0.859	0.855
0.84	0.949	0.932	0.918	0.906	0.897	0.890	0.882	0.877	0.872	0.868
0.85	0.969	0.950	0.935	0.923	0.912	0.905	0.898	0.891	0.887	0.882
0.86	0.990	0.970	0.954	0.940	0.930	0.921	0.913	0.906	0.901	0.896
0.87	1.012	0.990	0.973	0.959	0.947	0.937	0.929	0.922	0.916	0.911
0.88	1.035	1.012	0.994	0.978	0.966	0.955	0.946	0.938	0.932	0.927
0.89	1.060	1.035	1.015	0.999	0.986	0.974	0.964	0.956	0.949	0.943
0.90	1.087	1.060	1.039	1.021	1.007	0.994	0.984	0.974	0.967	0.960
0.91	1.116	1.088	1.064	1.045	1.029	1.016	1.003	0.993	0.986	0.979
0.92	1.148	1.117	1.092	1.072	1.054	1.039	1.027	1.016	1.006	0.999
0.93	1.181	1.151	1.123	1.101	1.081	1.065	1.050	1.040	1.031	1.021
0.94	1.225	1.188	1.158	1.134	1.113	1.095	1.080	1.066	1.054	1.044
0.950	1.272	1.232	1.199	1.172	1.148	1.128	1.111	1.097	1.084	1.073
0.960	1.329	1.285	1.248	1.217	1.188	1.167	1.149	1.133	1.119	1.106
0.970	1.402	1.351	1.310	1.275	1.246	1.319	1.197	1.179	1.162	1.148
0.975	1.447	1.393	1.348	1.311	1.280	1.250	1.227	1.207	1.190	1.173
0.980	1.502	1.443	1.395	1.354	1.339	1.286	1.263	1.241	1.221	1.204
0.985	1.573	1.508	1.454	1.409	1.372	1.337	1.309	1.284	1.263	1.243
0.990	1.671	1.598	1.537	1.487	1.444	1.404	1.373	1.344	1.319	1.297
0.995	1.838	1.751	1.678	1.617	1.565	1.519	1.479	1.451	1.416	1.388
0.999	2.223	2.102	2.002	1.917	1.845	1.780	1.725	1.678	1.635	1.596
1.000	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
1.001	1.417	1.264	1.138	1.033	0.951	0.870	0.803	0.746	0.697	0.651
1.005	1.030	0.915	0.817	0.737	0.669	0.612	0.553	0.526	0.481	0.447
1.010	0.873	0.766	0.681	0.610	0.551	0.502	0.459	0.422	0.389	0.360
1.015	0.778	0.680	0.602	0.537	0.483	0.440	0.399	0.366	0.336	0.310
1.02	0.711	0.620	0.540	0.486	0.436	0.394	0.358	0.327	0.300	0.276
1.03	0.618	0.535	0.469	0.415	0.370	0.333	0.300	0.272	0.249	0.228
1.04	0.554	0.477	0.415	0.363	0.324	0.290	0.262	0.236	0.214	0.195
1.05	0.504	0.432	0.374	0.328	0.289	0.259	0.231	0.208	0.189	0.174
1.06	0.464	0.396	0.342	0.298	0.262	0.233	0.209	0.187	0.170	0.154
1.07	0.431	0.366	0.315	0.273	0.239	0.212	0.191	0.168	0.151	0.136
1.08	0.403	0.341	0.292	0.252	0.220	0.194	0.172	0.153	0.137	0.123
1.09	0.379	0.319	0.272	0.234	0.201	0.179	0.158	0.140	0.125	0.112
1.10	0.357	0.299	0.254	0.218	0.189	0.165	0.146	0.129	0.114	0.102
1.11	0.338	0.282	0.230	0.204	0.176	0.154	0.135	0.119	0.105	0.094
1.12	0.321	0.267	0.215	0.192	0.165	0.143	0.125	0.110	0.097	0.086
1.13	0.305	0.253	0.212	0.181	0.155	0.135	0.117	0.102	0.090	0.080
1.14	0.291	0.240	0.201	0.170	0.146	0.126	0.109	0.095	0.084	0.074
1.15	0.278	0.229	0.191	0.161	0.137	0.118	0.102	0.089	0.078	0.068
1.16	0.266	0.218	0.181	0.153	0.130	0.111	0.096	0.084	0.072	0.064
1.17	0.255	0.208	0.173	0.145	0.123	0.105	0.090	0.078	0.068	0.060
1.18	0.244	0.199	0.165	0.138	0.116	0.099	0.085	0.073	0.063	0.055
1.19	0.235	0.191	0.157	0.131	0.110	0.094	0.080	0.068	0.059	0.051
1.20	0.228	0.183	0.150	0.125	0.105	0.088	0.076	0.064	0.056	0.048
1.22	0.209	0.168	0.138	0.114	0.095	0.080	0.068	0.057	0.049	0.042
1.24	0.195	0.156	0.127	0.104	0.086	0.072	0.060	0.051	0.044	0.038

. La función del flujo variado para pendientes positivas, $F(u, N)$ (Continuación)

$\frac{N}{u}$	8.2	8.6	9.0	9.4	9.8
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260
0.28	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280
0.30	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300
0.32	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320
0.34	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340
0.36	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360
0.38	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380
0.40	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400
0.42	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420
0.44	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440
0.46	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460
0.48	0.480	0.480	0.480	0.480	0.480
0.50	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.52	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520
0.54	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540
0.56	0.561	0.560	0.560	0.560	0.560
0.58	0.581	0.581	0.580	0.580	0.580
0.60	0.601	0.601	0.601	0.600	0.600
0.61	0.611	0.611	0.611	0.611	0.610
0.62	0.621	0.621	0.621	0.621	0.621
0.63	0.632	0.631	0.631	0.631	0.631
0.64	0.642	0.641	0.641	0.641	0.641
0.65	0.652	0.652	0.651	0.651	0.651
0.66	0.662	0.662	0.662	0.661	0.661
0.67	0.673	0.672	0.672	0.672	0.671
0.68	0.683	0.683	0.682	0.682	0.681
0.69	0.694	0.693	0.692	0.692	0.692
0.70	0.704	0.704	0.703	0.702	0.702
0.71	0.715	0.714	0.713	0.713	0.712
0.72	0.726	0.725	0.724	0.723	0.723
0.73	0.736	0.735	0.734	0.734	0.733
0.74	0.747	0.746	0.745	0.744	0.744
0.75	0.758	0.757	0.756	0.755	0.754
0.76	0.769	0.768	0.767	0.766	0.765
0.77	0.780	0.779	0.778	0.777	0.776
0.78	0.792	0.790	0.789	0.788	0.787
0.79	0.804	0.802	0.800	0.799	0.798

La función del flujo variado para pendientes positivas, $F(u, N)$ (continuación)

$N \backslash u$	8.2	8.5	9.0	9.4	9.8
0.80	0.815	0.813	0.811	0.810	0.809
0.81	0.827	0.825	0.823	0.822	0.820
0.82	0.839	0.837	0.835	0.833	0.831
0.83	0.852	0.849	0.847	0.845	0.844
0.84	0.865	0.862	0.860	0.858	0.856
0.85	0.878	0.875	0.873	0.870	0.868
0.86	0.892	0.889	0.886	0.883	0.881
0.87	0.907	0.903	0.900	0.897	0.894
0.88	0.921	0.918	0.914	0.911	0.908
0.89	0.937	0.933	0.929	0.925	0.922
0.90	0.954	0.949	0.944	0.940	0.937
0.91	0.972	0.967	0.961	0.957	0.953
0.92	0.991	0.986	0.980	0.975	0.970
0.93	1.012	1.006	0.999	0.994	0.989
0.94	1.036	1.029	1.022	1.016	1.010
0.950	1.062	1.055	1.047	1.040	1.033
0.960	1.097	1.088	1.079	1.063	1.053
0.970	1.138	1.128	1.119	1.100	1.087
0.975	1.157	1.147	1.137	1.122	1.108
0.980	1.187	1.176	1.166	1.150	1.132
0.985	1.224	1.210	1.196	1.183	1.165
0.990	1.275	1.260	1.243	1.228	1.208
0.995	1.363	1.342	1.320	1.302	1.280
0.999	1.560	1.530	1.500	1.476	1.447
1.000	"	"	"	"	"
1.001	0.614	0.577	0.546	0.519	0.494
1.005	0.420	0.391	0.368	0.350	0.331
1.010	0.337	0.313	0.294	0.278	0.262
1.015	0.289	0.269	0.255	0.237	0.223
1.020	0.257	0.237	0.221	0.209	0.196
1.03	0.212	0.195	0.181	0.170	0.159
1.04	0.173	0.165	0.152	0.143	0.134
1.05	0.158	0.143	0.132	0.124	0.115
1.06	0.140	0.127	0.116	0.106	0.098
1.07	0.123	0.112	0.102	0.094	0.086
1.08	0.111	0.101	0.092	0.084	0.077
1.09	0.101	0.091	0.082	0.075	0.069
1.10	0.092	0.083	0.074	0.067	0.062
1.11	0.084	0.075	0.067	0.060	0.055
1.12	0.077	0.069	0.062	0.055	0.050
1.13	0.071	0.063	0.056	0.050	0.045
1.14	0.065	0.058	0.052	0.046	0.041
1.15	0.061	0.054	0.048	0.043	0.038
1.16	0.056	0.050	0.045	0.040	0.035
1.17	0.052	0.046	0.041	0.036	0.032
1.18	0.048	0.042	0.037	0.033	0.029
1.19	0.045	0.039	0.034	0.030	0.027
1.20	0.043	0.037	0.032	0.028	0.025
1.22	0.037	0.032	0.028	0.024	0.021
1.24	0.032	0.028	0.024	0.021	0.018

La función del flujo variado, para pendientes positivas, $F(u, N)$ (Continuación)

$\frac{N}{u}$	8.2	8.6	9.0	9.4	9.8
1.26	0.028	0.024	0.021	0.018	0.016
1.28	0.025	0.021	0.018	0.016	0.014
1.30	0.022	0.019	0.016	0.014	0.012
1.32	0.020	0.017	0.014	0.012	0.010
1.34	0.018	0.015	0.012	0.010	0.009
1.36	0.016	0.013	0.011	0.009	0.008
1.38	0.014	0.012	0.010	0.008	0.007
1.40	0.013	0.011	0.009	0.007	0.006
1.42	0.011	0.009	0.008	0.006	0.005
1.44	0.010	0.008	0.007	0.006	0.005
1.46	0.009	0.008	0.006	0.005	0.004
1.48	0.009	0.007	0.005	0.004	0.004
1.50	0.008	0.006	0.005	0.004	0.003
1.55	0.006	0.005	0.004	0.003	0.003
1.60	0.005	0.004	0.003	0.002	0.002
1.65	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001
1.70	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001
1.75	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001
1.80	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
1.85	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
1.90	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000
1.95	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
2.00	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2.10	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
2.20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

La función de flujo variado para pendientes negativas, $F(u, N) - S_0$

$\frac{N}{u}$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.099	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.119	0.119	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.139	0.139	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.158	0.159	0.159	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.178	0.179	0.179	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.197	0.198	0.199	0.199	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.216	0.217	0.218	0.219	0.219	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.234	0.236	0.237	0.238	0.239	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.253	0.255	0.256	0.257	0.258	0.259	0.259	0.260	0.260	0.260
0.28	0.272	0.274	0.275	0.276	0.277	0.278	0.278	0.279	0.280	0.280
0.30	0.291	0.293	0.294	0.295	0.296	0.297	0.298	0.298	0.299	0.299
0.32	0.308	0.311	0.313	0.314	0.316	0.317	0.318	0.318	0.319	0.319
0.34	0.326	0.329	0.331	0.333	0.335	0.337	0.338	0.339	0.339	0.339
0.36	0.344	0.347	0.350	0.352	0.354	0.356	0.357	0.357	0.358	0.358
0.38	0.362	0.365	0.368	0.371	0.373	0.374	0.375	0.376	0.377	0.377
0.40	0.380	0.384	0.387	0.390	0.392	0.393	0.394	0.395	0.396	0.396
0.42	0.397	0.401	0.405	0.407	0.409	0.411	0.412	0.413	0.414	0.417
0.44	0.414	0.419	0.423	0.426	0.429	0.430	0.432	0.433	0.434	0.435
0.46	0.431	0.437	0.440	0.444	0.447	0.449	0.451	0.452	0.453	0.454
0.48	0.447	0.453	0.458	0.461	0.464	0.467	0.469	0.471	0.472	0.473
0.50	0.463	0.470	0.475	0.479	0.483	0.485	0.487	0.489	0.491	0.492
0.52	0.479	0.485	0.491	0.494	0.498	0.502	0.505	0.507	0.509	0.511
0.54	0.494	0.501	0.507	0.512	0.516	0.520	0.522	0.525	0.527	0.529
0.56	0.509	0.517	0.523	0.528	0.533	0.537	0.540	0.543	0.545	0.547
0.58	0.524	0.533	0.539	0.545	0.550	0.554	0.558	0.561	0.563	0.567
0.60	0.540	0.548	0.555	0.561	0.566	0.571	0.575	0.578	0.581	0.583
0.61	0.547	0.556	0.563	0.569	0.575	0.579	0.581	0.587	0.589	0.592
0.62	0.554	0.563	0.571	0.578	0.583	0.578	0.591	0.595	0.598	0.600
0.63	0.562	0.571	0.579	0.585	0.590	0.595	0.599	0.603	0.607	0.609
0.64	0.569	0.579	0.588	0.592	0.598	0.602	0.607	0.611	0.615	0.618
0.65	0.576	0.585	0.592	0.599	0.606	0.610	0.615	0.619	0.623	0.626
0.66	0.583	0.593	0.600	0.607	0.613	0.618	0.622	0.626	0.630	0.634
0.67	0.590	0.599	0.607	0.614	0.621	0.626	0.631	0.635	0.639	0.643
0.68	0.597	0.607	0.615	0.622	0.628	0.634	0.639	0.643	0.647	0.651
0.69	0.603	0.613	0.621	0.629	0.635	0.641	0.646	0.651	0.655	0.659
0.70	0.610	0.620	0.629	0.637	0.644	0.649	0.654	0.659	0.663	0.667
0.71	0.617	0.627	0.636	0.644	0.651	0.657	0.661	0.666	0.671	0.674
0.72	0.624	0.634	0.643	0.651	0.658	0.664	0.669	0.674	0.679	0.682
0.73	0.630	0.641	0.650	0.659	0.665	0.672	0.677	0.682	0.687	0.691
0.74	0.637	0.648	0.657	0.665	0.672	0.679	0.684	0.689	0.694	0.698
0.75	0.643	0.655	0.664	0.671	0.679	0.686	0.691	0.696	0.701	0.706
0.76	0.649	0.661	0.670	0.679	0.687	0.693	0.699	0.704	0.709	0.713
0.77	0.656	0.667	0.677	0.685	0.693	0.700	0.705	0.711	0.715	0.719
0.78	0.662	0.673	0.683	0.692	0.700	0.707	0.713	0.718	0.723	0.727
0.79	0.668	0.680	0.690	0.699	0.705	0.713	0.719	0.724	0.729	0.733

La función del flujo variado para pendientes negativas, $F(u, N) - S_0$.
(Continuación)

N	4.0	4.2	4.5	5.0	5.5
0.80	0.746	0.750	0.755	0.762	0.768
0.81	0.753	0.757	0.762	0.770	0.776
0.82	0.760	0.764	0.769	0.777	0.783
0.83	0.768	0.771	0.776	0.784	0.790
0.84	0.773	0.778	0.783	0.791	0.798
0.85	0.780	0.784	0.790	0.798	0.805
0.86	0.786	0.791	0.797	0.804	0.812
0.87	0.793	0.797	0.803	0.811	0.819
0.88	0.799	0.803	0.810	0.818	0.826
0.89	0.805	0.810	0.816	0.825	0.832
0.90	0.811	0.816	0.822	0.831	0.839
0.91	0.817	0.821	0.828	0.837	0.845
0.92	0.823	0.828	0.834	0.844	0.851
0.93	0.829	0.833	0.840	0.850	0.857
0.94	0.835	0.840	0.846	0.856	0.864
0.950	0.840	0.845	0.852	0.861	0.869
0.960	0.846	0.851	0.857	0.867	0.875
0.970	0.851	0.856	0.863	0.872	0.881
0.975	0.854	0.859	0.866	0.875	0.883
0.980	0.857	0.861	0.868	0.878	0.886
0.985	0.859	0.863	0.870	0.880	0.889
0.990	0.861	0.867	0.873	0.883	0.891
0.995	0.864	0.869	0.876	0.885	0.894
1.000	0.867	0.873	0.879	0.887	0.897
1.005	0.870	0.874	0.881	0.890	0.899
1.010	0.873	0.878	0.884	0.893	0.902
1.015	0.875	0.880	0.886	0.896	0.904
1.020	0.877	0.883	0.889	0.899	0.907
1.03	0.882	0.887	0.893	0.902	0.911
1.04	0.888	0.893	0.898	0.907	0.916
1.05	0.892	0.897	0.903	0.911	0.920
1.06	0.896	0.901	0.907	0.915	0.924
1.07	0.901	0.906	0.911	0.919	0.928
1.08	0.905	0.910	0.916	0.923	0.932
1.09	0.909	0.914	0.920	0.927	0.936
1.10	0.913	0.918	0.923	0.931	0.940
1.11	0.917	0.921	0.927	0.935	0.944
1.12	0.921	0.926	0.931	0.939	0.948
1.13	0.925	0.929	0.935	0.943	0.951
1.14	0.928	0.933	0.938	0.947	0.954
1.15	0.932	0.936	0.942	0.950	0.957
1.16	0.936	0.941	0.945	0.953	0.960
1.17	0.939	0.944	0.948	0.957	0.963
1.18	0.943	0.947	0.951	0.960	0.965
1.19	0.947	0.950	0.954	0.963	0.968
1.20	0.950	0.953	0.958	0.966	0.970
1.21	0.953	0.957	0.961	0.970	0.976
1.21	0.952	0.956	0.960	0.967	0.981
1.26	0.959	0.971	0.975	0.982	0.986
1.29	0.974	0.977	0.981	0.987	0.990

La función del flujo variado para pendientes negativas, $F(u, N) - S_0$.
(Continuación)

$\frac{N}{u}$	4.0	4.2	4.5	5.0	5.5
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260
0.28	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280
0.30	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300
0.32	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320
0.34	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340
0.36	0.359	0.360	0.360	0.360	0.360
0.38	0.378	0.379	0.380	0.380	0.380
0.40	0.397	0.398	0.398	0.400	0.400
0.42	0.417	0.418	0.418	0.419	0.420
0.44	0.436	0.437	0.437	0.439	0.440
0.46	0.455	0.456	0.457	0.458	0.459
0.48	0.474	0.475	0.476	0.478	0.479
0.50	0.493	0.494	0.495	0.497	0.498
0.52	0.512	0.513	0.515	0.517	0.518
0.54	0.531	0.532	0.533	0.536	0.537
0.56	0.549	0.550	0.552	0.555	0.558
0.58	0.567	0.569	0.570	0.574	0.576
0.60	0.585	0.587	0.589	0.593	0.595
0.61	0.594	0.596	0.598	0.602	0.604
0.62	0.604	0.605	0.607	0.611	0.613
0.63	0.612	0.615	0.616	0.620	0.622
0.64	0.620	0.623	0.625	0.629	0.631
0.65	0.629	0.632	0.634	0.638	0.640
0.66	0.637	0.640	0.643	0.647	0.650
0.67	0.646	0.649	0.652	0.656	0.659
0.68	0.654	0.657	0.660	0.665	0.668
0.69	0.662	0.665	0.668	0.674	0.677
0.70	0.670	0.673	0.677	0.682	0.686
0.71	0.678	0.681	0.685	0.690	0.694
0.72	0.686	0.689	0.694	0.699	0.703
0.73	0.694	0.698	0.702	0.707	0.712
0.74	0.702	0.705	0.710	0.716	0.720
0.75	0.709	0.712	0.717	0.724	0.728
0.76	0.717	0.720	0.725	0.731	0.736
0.77	0.724	0.727	0.733	0.739	0.744
0.78	0.731	0.735	0.740	0.747	0.752
0.79	0.738	0.742	0.748	0.754	0.760

La función del flujo variado para pendientes negativas, $F(u, N) - 30$.
(Continuación)

N u	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
0.80	0.674	0.685	0.695	0.703	0.712	0.720	0.726	0.732	0.737	0.741
0.81	0.680	0.691	0.701	0.710	0.719	0.727	0.733	0.739	0.744	0.749
0.82	0.686	0.698	0.707	0.717	0.725	0.733	0.740	0.745	0.751	0.755
0.83	0.692	0.703	0.713	0.722	0.731	0.740	0.746	0.752	0.757	0.762
0.84	0.698	0.709	0.719	0.729	0.737	0.746	0.752	0.758	0.764	0.769
0.85	0.704	0.715	0.725	0.735	0.744	0.752	0.759	0.765	0.770	0.775
0.86	0.710	0.721	0.731	0.741	0.750	0.758	0.765	0.771	0.777	0.782
0.87	0.715	0.727	0.738	0.747	0.756	0.764	0.771	0.777	0.783	0.788
0.88	0.721	0.733	0.743	0.753	0.762	0.770	0.777	0.783	0.789	0.794
0.89	0.727	0.739	0.749	0.758	0.767	0.776	0.783	0.789	0.795	0.800
0.90	0.732	0.744	0.754	0.764	0.773	0.781	0.789	0.795	0.801	0.807
0.91	0.738	0.750	0.760	0.770	0.779	0.787	0.795	0.801	0.807	0.812
0.92	0.743	0.754	0.766	0.776	0.785	0.793	0.800	0.807	0.813	0.818
0.93	0.749	0.761	0.772	0.782	0.791	0.799	0.807	0.812	0.818	0.823
0.94	0.754	0.767	0.777	0.787	0.795	0.804	0.813	0.818	0.824	0.829
0.950	0.759	0.772	0.783	0.793	0.801	0.809	0.819	0.823	0.829	0.835
0.960	0.764	0.777	0.788	0.798	0.807	0.815	0.824	0.829	0.835	0.841
0.970	0.770	0.782	0.793	0.803	0.812	0.820	0.826	0.834	0.840	0.846
0.975	0.772	0.785	0.796	0.805	0.814	0.822	0.828	0.836	0.843	0.848
0.980	0.778	0.787	0.798	0.808	0.818	0.825	0.830	0.839	0.845	0.851
0.985	0.777	0.790	0.801	0.811	0.820	0.827	0.833	0.841	0.847	0.853
0.990	0.780	0.793	0.804	0.814	0.822	0.830	0.837	0.844	0.850	0.856
0.995	0.783	0.795	0.806	0.816	0.824	0.832	0.840	0.847	0.853	0.859
1.000	0.785	0.797	0.808	0.818	0.826	0.834	0.842	0.849	0.856	0.862
1.005	0.788	0.799	0.810	0.820	0.829	0.837	0.845	0.852	0.858	0.864
1.010	0.790	0.801	0.812	0.822	0.831	0.840	0.847	0.855	0.861	0.867
1.015	0.793	0.804	0.815	0.824	0.833	0.843	0.850	0.858	0.864	0.870
1.020	0.795	0.807	0.818	0.828	0.837	0.845	0.853	0.860	0.866	0.872
1.03	0.800	0.811	0.822	0.832	0.841	0.850	0.857	0.864	0.871	0.877
1.04	0.803	0.816	0.829	0.837	0.846	0.855	0.862	0.870	0.877	0.883
1.05	0.810	0.821	0.831	0.841	0.851	0.859	0.867	0.874	0.881	0.887
1.06	0.815	0.826	0.837	0.846	0.855	0.864	0.871	0.879	0.885	0.891
1.07	0.819	0.831	0.841	0.851	0.860	0.869	0.876	0.883	0.889	0.896
1.08	0.824	0.836	0.846	0.856	0.865	0.873	0.880	0.887	0.893	0.900
1.09	0.828	0.840	0.851	0.860	0.870	0.877	0.885	0.892	0.898	0.904
1.10	0.833	0.845	0.855	0.865	0.874	0.881	0.890	0.897	0.903	0.908
1.11	0.837	0.849	0.860	0.870	0.878	0.886	0.894	0.900	0.907	0.912
1.12	0.842	0.854	0.864	0.873	0.882	0.891	0.897	0.904	0.910	0.916
1.13	0.846	0.858	0.868	0.878	0.886	0.895	0.902	0.908	0.914	0.919
1.14	0.851	0.861	0.872	0.881	0.890	0.899	0.905	0.912	0.918	0.923
1.15	0.855	0.866	0.876	0.886	0.895	0.903	0.910	0.916	0.922	0.928
1.16	0.859	0.870	0.880	0.890	0.899	0.907	0.914	0.920	0.926	0.931
1.17	0.864	0.874	0.884	0.893	0.902	0.911	0.917	0.923	0.930	0.934
1.18	0.868	0.878	0.888	0.897	0.906	0.915	0.921	0.927	0.933	0.939
1.19	0.872	0.882	0.892	0.901	0.910	0.918	0.925	0.931	0.937	0.942
1.20	0.876	0.886	0.896	0.904	0.913	0.921	0.928	0.934	0.940	0.945
1.22	0.880	0.891	0.900	0.909	0.917	0.925	0.932	0.938	0.944	0.949
1.24	0.888	0.898	0.908	0.917	0.925	0.933	0.940	0.945	0.950	0.955
1.26	0.900	0.910	0.919	0.927	0.935	0.942	0.948	0.954	0.960	0.964
1.28	0.908	0.917	0.926	0.934	0.942	0.948	0.954	0.960	0.965	0.970

La función del flujo variado para pendientes negativas, $F(u, N) - S_0$.
(Continuación)

N u	4.0	4.2	4.5	5.0	5.5
1.30	0.979	0.978	0.985	0.991	0.994
1.32	0.985	0.988	0.990	0.995	0.997
1.34	0.990	0.992	0.995	0.999	1.001
1.36	0.994	0.996	0.999	1.002	1.005
1.38	0.998	1.000	1.003	1.006	1.008
1.40	1.001	1.004	1.006	1.009	1.011
1.42	1.005	1.008	1.010	1.012	1.014
1.44	1.009	1.013	1.014	1.016	1.018
1.46	1.014	1.016	1.017	1.018	1.018
1.48	1.016	1.019	1.020	1.020	1.020
1.50	1.020	1.021	1.022	1.022	1.022
1.55	1.029	1.029	1.029	1.028	1.028
1.60	1.035	1.035	1.034	1.032	1.030
1.65	1.041	1.040	1.039	1.036	1.034
1.70	1.047	1.046	1.043	1.039	1.037
1.75	1.052	1.051	1.047	1.042	1.039
1.80	1.057	1.055	1.051	1.045	1.041
1.85	1.061	1.059	1.054	1.047	1.043
1.90	1.065	1.060	1.057	1.049	1.045
1.95	1.068	1.064	1.059	1.051	1.046
2.00	1.071	1.066	1.062	1.053	1.047
2.10	1.076	1.071	1.065	1.056	1.049
2.20	1.080	1.073	1.068	1.058	1.050
2.3	1.084	1.079	1.071	1.060	1.051
2.4	1.087	1.081	1.073	1.061	1.052
2.5	1.090	1.083	1.075	1.062	1.053
2.6	1.092	1.085	1.076	1.063	1.054
2.7	1.094	1.087	1.077	1.063	1.054
2.8	1.096	1.088	1.078	1.064	1.054
2.9	1.098	1.089	1.079	1.065	1.055
3.0	1.099	1.090	1.080	1.065	1.055
3.3	1.103	1.093	1.082	1.066	1.055
4.0	1.106	1.097	1.084	1.067	1.056
4.5	1.108	1.098	1.085	1.067	1.056
5.0	1.110	1.099	1.085	1.068	1.056
6.0	1.111	1.100	1.085	1.068	1.056
7.0	1.111	1.100	1.086	1.068	1.056
8.0	1.111	1.100	1.086	1.068	1.056
9.0	1.111	1.100	1.086	1.068	1.056
10.0	1.111	1.100	1.086	1.068	1.056

C A P I T U L O 4

METODOS NUMERICOS DE SOLUCION DE ECUACIONES
DIFERENCIALES.

4. METODOS NUMERICOS DE SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

4.1 CONCEPTOS BASICOS SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS -- SOLUCIONES.

ECUACION DIFERENCIAL. Es aquella que relaciona dos o más va--
riables en términos de derivadas o diferenciales. Para su es--
tudio conviene mencionar las siguientes definiciones acerca --
de estas ecuaciones:

- a) ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA. Es aquella en la que
existe solamente una variable independiente, por lo --
tanto sus derivadas serán totales.
- b) ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL. Es aquella en la que --
existen dos o más variables independientes, por lo --
que sus derivadas serán parciales.
- c) ORDEN DE UNA ECUACION DIFERENCIAL. El orden de una --
ecuación diferencial es el de la derivada de mayor --
orden que aparece en la ecuación.
- d) GRADO DE UNA ECUACION DIFERENCIAL. Es el grado alge--
braico de la derivada de mayor orden que aparece en
en la ecuación diferencial.
- e) ECUACION DIFERENCIAL LINEAL. Una ecuación diferencial
es lineal, si en ella no aparecen potencias de la --
variable dependiente y sus derivadas, ni productos --
de la variable dependiente por sus derivadas o produc--
tos entre derivadas.

SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL.

Es una relación funcional que no debe incluir derivadas o in--
tegrales de funciones y que verifica idénticamente la ecu--
ción diferencial.

Por ejemplo, supóngase que la rapidez de variación de "y" con respecto a "x" es proporcional a "y":

$$dy/dx = y \quad 4.1-1$$

Si usamos una prima para indicar diferenciación, entonces:

$$y' = y \quad 4.1-2$$

Una solución clásica de la ec. anterior será:

$$y = ae^x \quad 4.1-3$$

En que "a" es una constante arbitraria. Valores diferentes de "a" nos llevan a una familia de curvas, todas las cuales satisfacen la ecuación diferencial (4.1-1), que implica que en cada punto de la curva el valor de la función y el de su derivada deben de ser iguales. La fig. 4.1-1 muestra 3 miembros de la familia de curvas de la ec. 4.1-3.

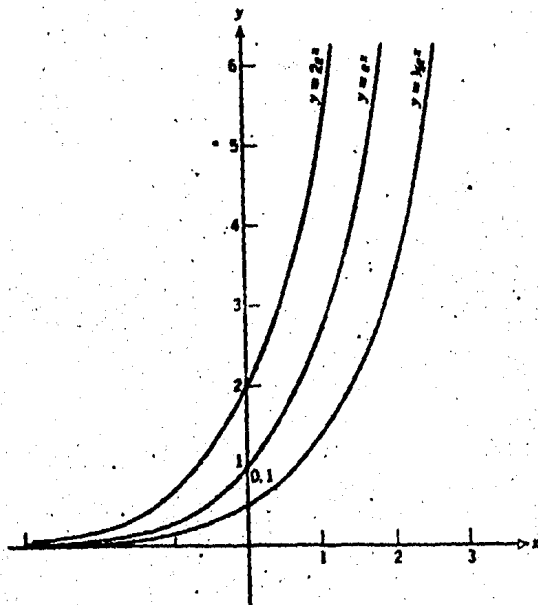


Fig. 4.1-1 Tres miembros de la familia de curvas representada por la ecuación diferencial $y' = y$. La condición inicial $y(0) = 1$, selecciona un miembro particular de la familia.

Para determinar que curva es la que debe seleccionarse, será necesario establecer las condiciones para el problema. Por ejemplo, si especificamos, que la solución de la ec. 4.1-3 pasa por el punto $x = 0$, $y = 1$, tendríamos:

$$y(0) = 1$$

teniéndose entonces que $a = 1$, y que la curva particular de la familia general de curvas es:

$$y = e^x \quad 4.1-4$$

La curva de la ec. 4.1-4 se representa en la fig. 4.1-1.

4.2 METODOS NUMERICOS DE SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

4.2-1 APROXIMACION NUMERICA Y ERRORES.

APROXIMACION NUMERICA. Esta aproximación se debe a que los métodos, para realizar los cálculos para la soluciones de ecuaciones diferenciales, se auxilian de las computadoras digitales, que al trabajar con un número determinado de cifras, producen inevitablemente errores.

ERRORES.

Dependiendo de la fuente que los produzca, los errores en los que se incurre al utilizar computadoras digitales para resolver problemas, pueden clasificarse en alguno de los siguientes tipos:

- Errores inherentes.
- Errores por truncamiento.
- Errores por redondeo.

Los errores inherentes o errores propios de los datos, son aquellos que se producen al leer de algún dispositivo de medición un dato para representar alguna magnitud física y son debidos a la imprecisión del dispositivo.

Los errores por truncamiento, son aquellos que se presentan al utilizar series en los cálculos; como por ejemplo las series de las funciones trigonométricas. Estas series tienen un número infinito de términos y al hacer algún cálculo con ellas, se utiliza un número determinado de términos, truncando los demás. Este tipo de errores se presenta también, cuando se utilizan números irracionales tales como $\sqrt{2}$, e, etc.

Por último, los errores por redondeo se deben a la imposibilidad de manejar en operaciones como multiplicación o división, todos los dígitos resultantes que involucran estas operaciones. En este caso, el resultado se redondea o aproxima al número máximo de dígitos con los que se dispone para trabajar.

La magnitud del error generado por alguna de la fuentes mencionadas anteriormente, se puede medir con ayuda del error absoluto o el error relativo. El error absoluto se define como la diferencia en valor absoluto entre un valor cualquiera "x" y una aproximación a este valor representada por x_1 :

$$e_a = |x - x_1|$$

El error relativo se define como el cociente del error absoluto entre el valor "x", tomando en valor absoluto y expresado en por ciento (%):

$$e_r = \frac{|x - x_1|}{x} \cdot 100$$

4.2-2 METODO DE EULER

Es uno de los métodos más antiguos y mejor conocidos de integración numérica de ecuaciones diferenciales, además es un método sencillo para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden; pero tiene la desventaja de tener un error por truncamiento relativamente grande.

De la ecuación:

$$y'(x) = f(x,y) \quad 4.2-1$$

Si integramos a la ec. 4.2-1 entre un punto x_i y el siguiente x_{i+1} .

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i) dx \quad 4.2-2$$

integrando el miembro de la izquierda de la ec. 4.2-2 tenemos:

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i) dx \quad 4.2-3$$

aplicando integración numérica al miembro de la derecha de la ec. 4.2-3 se obtiene la expresión:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y) dx = h \left[f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} (f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)) + \dots \right] \quad 4.2-4$$

considerando únicamente el primer sumando de la ec. 4.2-4 y sustituyendo en la ec. 4.2-3 tenemos:

$$y_{i+1} - y_i = hf(x_i, y_i) \quad 4.2-5$$

Despejando y_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad 4.2-6$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

La ec. 4.2-6 describe el método de Euler.

4.2-3 METODO DE EULER-GAUSS.

Este método también se le conoce como PREDICTOR-CORRECTOR. -- como su nombre implica primero "predecimos" un valor de y_{i+1} . Después usamos una fórmula diferente para "corregir" este -- valor. Para el predictor usaremos la ecuación del método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad 4.2-6$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

Para el corrector se considerarán los 3 primeros sumandos de la expresión 4.2-4:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx = h \left[f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} (f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)) \right] + e_r$$

simplificando:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx = \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] + e_r$$

sustituyendo en la ec. 4.2-3:

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] + e_r$$

De la expresión anterior, despejando y_{i+1} del primer miembro y despreciando el error:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \quad 4.2-7$$

La fórmula de corrección es la ec. 4.2-7. Obsérvese que esta fórmula es implícita puesto que y_{i+1} aparece en ambos miembros de la ecuación, siendo el del primer miembro un nuevo -- valor calculado a partir de la fórmula y el del segundo miembro la expresión previa. El problema se resuelve obteniendo el valor de y_{i+1} , a través del método de Euler, el cual considera solamente como predicción que será sustituido en el miem--

bro derecho de la ec. 4.2-7, con lo que se obtendrá un nuevo valor corregido de y_{i+1} .

Por lo tanto, las ecs. 4.2-6 y 4.2-7 definen el método de -- EULER-GAUSS, esto es:

$$y_{i+1P} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1C} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1P})]$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

4.2-4 LA SERIE DE TAYLOR COMO UNA SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL.

Este método teóricamente suministra una solución para cualquier ecuación diferencial. Su importancia estriba en que suministra una base para evaluar y comparar los métodos que son de un valor práctico más considerable.

Escribimos el desarrollo en serie de Taylor con respecto a algún punto $x = x_1$ de la solución $y(x)$.

$$y(x) = y_1 + y_1' (x - x_1) + \frac{y_1''}{2} (x - x_1)^2 + \frac{y_1'''}{6} (x - x_1)^3 + \dots \quad 4.2-8$$

en que y_j es la j -ésima derivada de $y(x)$ valuada en $x = x_1$. Los valores sucesivos de "x" están todos a una distancia "h" del valor precedente; esto es, $x_1 = x_0 + h$.

Podemos aproximar la solución en el siguiente punto x_{1+1} -- sustituyendo x_{1+1} por x en 4.2-8.

$$y_{1+1} = y_1 + h y_1' + \frac{h^2}{2} y_1'' + \frac{h^3}{6} y_1''' + \dots \quad 4.2-8'$$

La aproximación será mejor mientras más términos se tomen en la serie.

La solución en serie de Taylor se clasifica como método de un paso porque la determinación de y_{1+1} requiere solamente la información en un punto precedente x_1, y_1 .

La dificultad práctica de este método es que puede ser difícil de hecho en algunos casos es imposible valorar las derivadas.

4.2-5 METODOS DE RUNGE-KUTTA.

Los métodos de RUNGE-KUTTA tienen tres propiedades distintivas:

1. Son métodos de un paso: para encontrar y_{i+1} necesitamos la información disponible en el punto precedente, x_i, y_i .
2. Coinciden con la SERIE DE TAYLOR hasta los términos h^p , en que p es distinto para los diferentes métodos y se denomina el orden del método.
3. No requieren la evaluación de ninguna derivada de $f(x, y)$, sino únicamente de la función f .

Para estudiar los métodos de RUNGE-KUTTA, considérese la estructura de los métodos de Euler y Euler-Gauss:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad \text{EULER}$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \quad \text{EULER-GAUSS.}$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

ambos métodos pueden escribirse como:

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

donde en el método de Euler:

$$\phi(x, y) = f(x, y)$$

y el método de Euler-Gauss:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2} [f(x, y) + f(x+h, y+h\gamma)] \quad 4.2-9$$

a) METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN.

Para este método:

$$\phi(x_i, y_i, h) = a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i + b_1 h, y_i + b_2 h \gamma_i) \quad 4.2-10$$

en que:

$$Y_i = f(x_i, Y_i)$$

y donde:

$$a_1 = a_2 = 1/2$$

$$b_1 = b_2 = 1$$

sustituyendo en la ec. 4.2-10, se obtienen las fórmulas de recurrencia que definen al método de RUNGE-KUTTA de segundo orden:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

4.2-11

DONDE:

$$k_1 = hf(x_i, Y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, Y_i + hf(x_i, Y_i))$$

b) METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN.

Este método queda definido mediante la siguientes expresiones:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

DONDE:

$$k_1 = hf(x_i, Y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, Y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, Y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

4.2-12

$$k_4 = hf(x_i + h, Y_i + k_3)$$

4.2-6 METODO DE MILNE.

Otro método de integración paso a paso, que tiene la ventaja de proporcionar un orden de error menor, comparado con los métodos vistos anteriormente, el predictor-corrector de Milne. Este método se basa en la información de cuatro puntos para calcular el siguiente, ver fig. 4.2-1.

Para desarrollarlo se parte de una ec. diferencial de primer orden de la forma:

$$Y'(x) = f(x, Y)$$

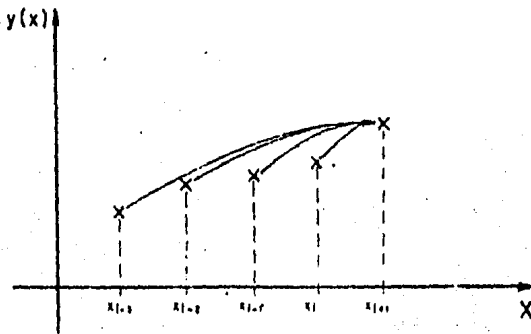


Fig. 4.2-1

cuya solución se obtiene integrando:

$$\int y'(x) dx = \int f(x, y) dx$$

4.2-13

$$y(x) = \int f(x, y) dx$$

si desarrollamos $f(x, y)$ en forma de la serie de Taylor en el entorno del punto x_0 considerando solamente a la variable x , se tiene:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) f'(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^3}{6} f'''(x_0, y_0) + \dots$$

si sustituimos la expresión anterior en la ec. 4.2-13, se tiene:

$$y(x) = \int \left(f(x_0, y_0) + (x - x_0) f'(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^3}{6} f'''(x_0, y_0) + \dots \right) dx$$

integrando entre $x_{-n} = x_0 - nh$ y $x_n = x_0 + nh$ y simplificando se tiene:

$$y(x) \Big|_{x_{-n}}^{x_n} = \frac{1}{3} n^3 h f(x_{-1}, y_{-1}) + 2n \left(1 - \frac{n^2}{3}\right) h f(x_0, y_0) +$$

4.2-14

$$+ \frac{1}{3} n^3 h f(x_1, y_1) + \left(\frac{n^2}{6} - \frac{1}{36}\right) n^3 h^5 f^{(4)}(x_0, y_0) + \dots$$

Después de varios procedimientos se llega a la ecuación predictoria:

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3} h \left[2f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(x_i, y_i) \right]$$

$$i = 3, 4, 5, \dots$$

4.2-15

La corrección del valor y_{i+1} que proporciona esta última expresión se obtiene integrando la ecuación diferencial de primer orden, entre x_{i-1} y x_{i+1} .

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

$$y(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

a través de la fórmula de Simpson.

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \frac{h}{3} [f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] + (o) h^4$$

Por lo que la ecuación correctora queda:

$$y_{i+1c} = y_{i-1} + \frac{h}{3} [f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \quad 4.2-16$$

$i = 3, 4, 5, \dots$

La desventaja que presenta este método es que requiere de los primeros cuatro puntos de la solución para poder utilizarse, esta limitación puede superarse fácilmente utilizando alguno de los métodos vistos anteriormente, en particular la serie de Taylor puede ser usada para obtener la solución de los primeros puntos, sobre todo si el valor de "h" con el que se trabaja es pequeño, ya que así los puntos estarán cercanos al entorno de x_0 y por lo tanto el error que se cometa será pequeño.

C A P I T U L O 5

APLICACION DE LOS METODOS NUMERICOS AL CALCULO DE PERFILES
DE FLUJO GRADUALMENTE VARIADO.

5. APLICACION DE LOS METODOS NUMERICOS AL CALCULO DE PERFILES DE FLUJO GRADUALMENTE VARIADO.

5.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Clasificar y calcular el perfil de flujo que se presenta en el canal de la figura 5.1, el cual conduce un gasto de 60 m³/seg. con una pendiente de plantilla de 0.008, un coeficiente de rugosidad de Manning de 0.012, un ancho de plantilla de 7 m y un talud de 2. En este canal, la carga H antes de la compuerta es de 4.92 m y el tirante contracto y_c después de la misma es de 0.38 m.

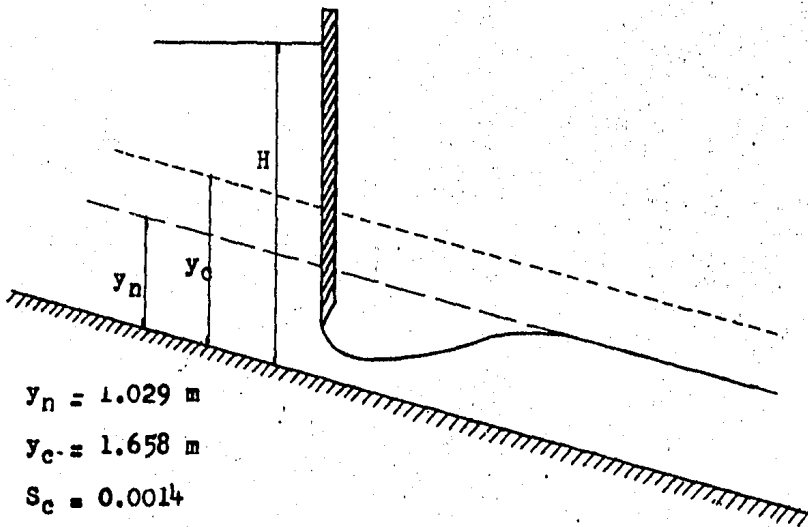


Fig. 5.1

a) CALCULO DEL TIRANTE NORMAL.

Para simplificar los cálculos se usará la ec. 3.1-8 y utilizando las curvas que han sido preparadas para canales de sección trapecial (fig. 3.1-1)

$$\frac{nQ}{B^{5/3} S^{1/2}} = \frac{0.012 \cdot 60}{7^{5/3} (0.008)^{1/2}} = 0.04439$$

esto es, $AR^{4/3}/b = 0.04489$ y de la fig. 3.1-1, para $Z = 2$. -- se obtiene $y_n/b = 0.147$, por tanto el tirante normal vale:

$$y_n = 0.147 (7) = 1.029 \text{ m}$$

b) CALCULO DEL TIRANTE CRITICO.

El tirante crítico se puede calcular de una manera similar a la del tirante normal, a partir del parámetro.

$$Q/b^{1.5}\sqrt{g} = 60/7^{1.5}(\sqrt{9.80}) = 0.1478$$

De la fig. 3.2-2, para secciones trapeciales se obtiene que $y/b = 0.2369$, siendo el tirante crítico.

$$y_c = 0.2369 (7) = 1.658 \text{ m}$$

c) CALCULO PENDIENTE CRITICA Sc.

$$Ac = (7 + 2(1.658))1.658 = 17.1039$$

$$Pc = 7 + 4.4722(1.658) = 14.4149$$

$$Rc^{2/3} = 1.1208$$

$$Vc = Q/Ac = 60/17.1039 = 3.5080$$

$$Sc = (Vc n/R)^2 = (3.5080(0.012)/1.1208)^2 = 0.0014$$

$$Sc = 0.0014 < 0.008$$

d) CLASIFICACION DEL PERFIL DE FLUJO.

Por tanto el perfil del flujo deberá ser del tipo S3 con tirantes comprendidos $y_c > y_n > y$ y con un tirante inicial $y_0 < y_n$, debiéndose iniciar los cálculos hacia aguas abajo.

5.2 SOLUCION DEL PROBLEMA APLICANDO METODOS NUMERICOS.

Datos del problema:

$$Q = 60 \text{ m}^3/\text{seg.} \quad S_0 = 0.008 \quad h = 0.012 \quad b = 7 \text{ m.}$$

$$Z = 2$$

La ecuación diferencial que representa el fenómeno es la llamada "ecuación dinámica" y cuya representación más conocida es:

$$dy/dx = (S_0 - S_f)/(1 - F_f^2)$$

Donde:

$$S_f = (Q_n/AR^{4/3})^2$$

$$F_f^2 = Q^2(7 + 4(y))/gA^3$$

en las que el significado de las literales es ampliamente conocido.

5.2-1 SOLUCION CON EL METODO DE EULER.

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

$$i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

a) Solución del problema usando un espaciamiento $h = 40$.

Condición inicial $y(0) = 0.38$

Para $i = 0$, la solución es:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

SECUENCIA DE CALCULO.

$$A = (b + 2(y))^{1/2} = (7 + 2(0.38))^{1/2} = 2.9488$$

$$P = b + 4.4722(y) = 7 + 4.4722(0.38) = 8.6994$$

$$R^{2/3} = \left(\frac{A}{P}\right)^{2/3} = \left(\frac{2.9488}{8.6994}\right)^{2/3} = 0.4862$$

$$S_f = \left(\frac{Q_n}{A R^{4/3}}\right)^2 = \left(\frac{60 \cdot 0.012}{2.9488 \cdot 0.4862}\right)^2 = 0.2523$$

$$F_f^2 = \frac{Q^2(b + 4(y))}{9A^3} = \frac{(60)^2(7 + 4(0.38))}{9 \cdot 81(2.9488)^3} = 121.9375$$

$$y_1 = y_0 + h \left(\frac{S_0 - S_f}{1 - F_f^2}\right) = 0.38 + 40 \left(\frac{0.008 - 0.2523}{1 - 121.9375}\right)$$

$$y_1 = 0.38 + 0.0879 = 0.4679$$

En forma similar se obtuvieron los tirantes subsecuentes, los resultados se muestran a continuación:

x	y
0	0.38
40	0.4679
80	0.5421
120	0.6108
160	0.6741
200	0.7315
240	0.7833
280	0.8289
320	0.8687
360	0.9026
400	0.9304
440	0.9530
480	0.9710
520	0.9851
560	0.9959
600	1.0046
640	1.0109
680	1.0155
720	1.0193
760	1.0222
800	1.0241

b) Solución del problema usando un espaciamento $h = 80$

Condición inicial $y(0) = 0.38$

Para $i = 0$, la solución es:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

La secuencia de cálculo es idéntico, que para un espaciamento $h = 40$.

Utilizando el cálculo de las características geométricas del canal y del número de Froude resulta:

$$A = 2.9488$$

$$F_r^2 = 121.9375$$

$$P = 8.6994$$

$$R = 0.4862$$

$$Sf = 0.2523$$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + h (S_0 - S_f) / (1 - F_f^2) \\
 &= 0.38 + 80 (0.008 - 0.2523) / (1 - 121.9375) \\
 &= 0.38 + 0.1616 = 0.5416
 \end{aligned}$$

En forma similar se obtuvieron los tirantes subsecuentes, los resultados se muestran a continuación:

x	y
0	0.38
80	0.5416
160	0.6791
240	0.7933
320	0.8821
400	0.9451
480	0.9846
560	1.0061
640	1.0187
720	1.0244
800	1.0263

c) Solución del problema usando un espaciamiento $h = 120$

Condición inicial $y(0) = 0.38$

Para $i = 0$, la solución es:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

1.

La secuencia de cálculo es idéntico, que para un espaciamiento $h = 40$.

Utilizando el cálculo de las características geométricas del canal y del número de Froude resulta:

$$A = 2.9488$$

$$S_f = 0.2523$$

$$P = 8.6994$$

$$F_f^2 = 121.9375$$

$$R = 0.4862$$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + h (S_0 - S_f) / (1 - F_f^2) \\
 &= 0.38 + 120(0.008 - 0.2523) / (1 - 121.9375) \\
 &= 0.38 + 0.2424 = 0.6224
 \end{aligned}$$

En forma similar se obtuvieron los tirantes subsecuentes, los resultados se muestran a continuación:

x	y
0	0.38
120	0.6224
240	0.8029
360	0.9362
480	1.0015
600	1.0228
720	1.0286

5.2-2 SOLUCION DEL PROBLEMA USANDO EL METODO DE EULER-GAUSS.

$$y_{i+1p} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1c} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1p})]$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

a) Solución del problema usando un espaciamiento $h = 40$

Condición inicial $y(0) = 0.38$

Para $i = 0$, la solución es:

$$y_{1p} = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_{1c} = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_{1p})]$$

SECUENCIA DE CALCULO:

PREDICTORA:

$$A = (7 + 2y) y = (7 + 2(0.38)) 0.38 = 2.9488$$

$$P = 7 + 4.4722 y = 7 + 4.4722(0.38) = 8.6994$$

$$R^{2/3} = \left(\frac{A}{P} \right)^{2/3} = \left(\frac{2.9488}{8.6994} \right)^{2/3} = 0.4862$$

$$S_f = \left(\frac{Qn}{A R^{2/3}} \right)^2 = \left(\frac{60 \cdot 0.012}{2.9488 \cdot 0.4862} \right)^2 = 0.2523$$

$$f^2 = \frac{Q^2(b + 4(y))}{9 A^3} = \frac{(60)^2(7 + 4(0.38))}{9 \cdot 81 (2.9488)^3} = 121.9375$$

$$Y_{1P} = Y_0 + h \left(\frac{S_0 - S_f}{1 - F_f^2} \right) = 0.38 + 40 \left(\frac{0.008 - 0.2523}{1 - 121.9375} \right)$$

$$Y_{1P} = 0.38 + 0.0879 = 0.4679$$

CORRECTORA:

$$A = (7 + 2(0.4679))0.4679 = 3.7132$$

$$P = 7 + 4.4722(0.4679) = 9.0925$$

$$R^{2/3} = 0.5504$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{3.7132(0.5504)} \right)^2 = 0.1241$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.4679))}{9.81(3.7132)^3} = 63.59$$

$$Y_{1c} = Y_0 + \frac{h}{2} \left[f(x_0, Y_0) + f(x_1, Y_{1P}) \right]$$

$$Y_{1c} = Y_0 + \frac{h}{2} \left[\frac{S_0 - S_f}{1 - F_f^2} + \frac{S_0 - S_f}{1 - F_f^2} \right]$$

↑
PREDICTOR

$$Y_{1c} = 0.38 + \frac{40}{2} \left[\frac{0.008 - 0.2523}{1 - 121.9375} + \frac{0.008 - 0.1241}{1 - 63.59} \right]$$

$$Y_{1c} = 0.38 + 0.0775 = 0.4575$$

En forma similar se obtuvieron los tirantes subsecuentes, los resultados se muestran a continuación:

x	y
0	0.38
40	0.4575
80	0.5295
120	0.5955
160	0.6575
200	0.7135
240	0.7635
280	0.8095
320	0.8495
360	0.8835
400	0.9115
440	0.9355
480	0.9535
520	0.9715
560	0.9855
600	0.9955
640	1.0031
680	1.0091
720	1.0137
760	1.0206
800	1.0245

b) Solución del problema usando un espaciamiento $h = 80$

PREDICTOR 4:

Para $i = 0$

La secuencia de cálculo es idéntico, que para un espaciamiento $h = 40$.

DATOS PRELIMINARES CALCULADOS ANTERIORMENTE:

$$A = 2.9488$$

$$P = -8.6994$$

$$R = 0.4862$$

$$S_f = 0.2523$$

$$F_f^2 = 121.9375$$

$$y_{1p} = y_0 + h (S_0 - S_f) / (1 - F_f^2) = 0.38 + 80$$

$$= 0.38 + 80(0.008 - 0.2523) / (1 - 121.9375) = 0.5415$$

CORRECTORA:

$$A = (7 + 2(0.5415)) 0.5415 = 4.3769$$

$$P = 7 + 4.3722(0.5415) = 9.4217$$

$$R^{2b} = 0.5998$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{4.3769(0.5998)} \right)^2 = 0.0752$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.5415))}{9.81(4.3769)^3} = 40.1156$$

$$y_{ic} = y_0 + \frac{h}{2} \left(\frac{S_0 - S_f}{1 - F_f^2} + \frac{S_0 - S_f}{1 - F_f^2} \right)$$

↑
PREDICTOR

$$y_{ic} = 0.38 + \frac{80}{2} \left(\frac{0.008 - 0.2523}{1 - 121.9315} + \frac{0.008 - 0.0752}{1 - 40.1156} \right)$$

$$y_{ic} = 0.38 + 0.1495 = 0.5295$$

En forma similar se obtuvieron los tirantes subsecuentes, los resultados se muestran a continuación:

x	y
0	0.38
80	0.5395
160	0.6572
240	0.7628
320	0.8464
400	0.9080
480	0.9512
560	0.9800
640	0.9984
720	1.0100
800	1.0174

c) Solución del problema usando un espaciamento $h = 120$

Para $i = 0$

PREDICTORA:

La secuencia de cálculo es idéntico, que para un espaciamento $h = 40$.

Datos preliminares calculados anteriormente:

$$A = 2.9488$$

$$P = 8.6994$$

$$R = 0.4862$$

$$S_f = 0.2523$$

$$F_f^2 = 121.9375$$

$$\begin{aligned} y_{lp} &= y_0 + h(S_0 - S_f)/(1 - F_f^2) \\ &= 0.38 + 120(0.008 - 0.2523)/(1 - 121.9375) \\ &= 0.6223 \end{aligned}$$

CORRECTORA:

$$A = (7 + 4(0.6223))0.6223 = 5.1306$$

$$P = 7 + 4.4722(0.6223) = 9.7831$$

$$R^{2/3} = 0.6503$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{5.1306(0.6503)} \right)^2 = 0.0466$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.6223))}{9.81(5.1306)^3} = 25.7845$$

$$y_{ic} = y_0 + \frac{h}{2} \left(\frac{S_0 - S_0}{1 - F_f^2} + \frac{S_0 - S_f}{1 - F_f^2} \right)$$

| PREDICTOR

$$y_{ic} = 0.38 + \frac{120}{2} \left(\frac{0.008 - 0.2523}{1 - 121.9375} + \frac{0.008 - 0.0466}{1 - 25.7845} \right)$$

$$y_{ic} = 0.38 + 0.2146 = 0.5946$$

En forma similar se obtuvieron los tirantes subsecuentes, los resultados se muestran a continuación:

x	y
0	0.38
120	0.5046
240	0.7593
360	0.8733
480	0.9440
600	0.9840
720	1.0156

5.2-3 SOLUCION DE PROBLEMA USANDO EL METODO DE RUNGE-RUTTA DE SEGUNDO ORDEN.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

DONDE:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))$$

a) Solución del problema usando un espaciamento $h = 40$

Condición inicial $y(0) = 0.38$

Para $i = 0$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

DONDE:

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))$$

$$\text{CALCULO } k_1; \quad k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(40, 0.38)$$

$$A = (7 + 2(0.38))0.38 = 2.9488$$

$$P = 7 + 4.4722(0.38) = 8.6994$$

$$R^{2/3} = 0.4062$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{2.9488(0.4862)} \right)^2 = 0.2523$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7+4(0.38))}{9.81(2.9488)^3} = 121.9375$$

$$k_1 = hf \left(\frac{S_0 - S_f}{1 - F_f^2} \right)$$

$$k_1 = 40 \left(\frac{0.008 - 0.2523}{1 - 121.9375} \right) = 0.0808$$

CALCULO k_2

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))$$

$$k_2 = hf(0 + 40, 0.38 + 0.0808)$$

$$k_2 = hf(40, 0.4608)$$

$$A = (7 + 2(0.4608))0.4608 = 3.6503$$

$$F = 7 + 4.4722(0.4608) = 9.0608$$

$$F^{2/3} = 0.5455$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{3.6503(0.5455)} \right)^2 = 0.1307$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7+4(0.4608))}{9.81(3.6503)^3} = 66.7202$$

$$k_2 = hf \left(\frac{S_0 - S_f}{1 - F_f^2} \right)$$

$$k_2 = 40 \left(\frac{0.008 - 0.1307}{1 - 66.7202} \right) = 0.0747$$

SUST. k_1 y k_2 , RESULTA:

$$Y_1 = Y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$Y_1 = 0.38 + \frac{1}{2}(0.0808 + 0.0747)$$

$$Y_1 = 0.4578$$

En forma similar se obtuvieron los tirantes subsecuentes; los resultados se muestran a continuación:

x	y
0	0.38
40	0.4578
80	0.5299
120	0.5968
160	0.6584
200	0.7145
240	0.7650
280	0.8099
320	0.8492
360	0.8831
400	0.9117
440	0.9355
480	0.9549
520	0.9707
560	0.9834
600	0.9939
640	1.0018
680	1.0079
720	1.0127
760	1.0164
800	1.0193

b) Solución del problema usando un espaciamiento $h = 80$

Para $i = 0$

Cálculo K_1

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(80, 0.38)$$

Datos preliminares, calculados anteriormente:

$$A = 2.9488$$

$$P = 8.6994$$

$$R = 0.4862$$

$$S_f = 0.2523$$

$$F_f = 121.9375$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_1 = 80 \left(\frac{0.008 - 0.2523}{1 - 121.9375} \right) = 0.1616$$

CALCULO k_2

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))$$

$$k_2 = hf(0 + 80, 0.38 + 0.1616)$$

$$k_2 = hf(80, 0.5416)$$

$$A = (7 + 2(0.5416)) \cdot 0.5416 = 4.3779$$

$$P = 7 + 4.4722(0.5416) = 9.4221$$

$$R^{2/3} = 0.5999$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{4.3779(0.5999)} \right)^2 = 0.0752$$

$$F_r^2 = \frac{3600(7 + 4(0.5416))}{9.81(4.3779)^3} = 40.0899$$

$$k_2 = h \left(\frac{S_0 - S_f}{1 - F_r^2} \right)$$

$$k_2 = 80 \left(\frac{0.008 - 0.0752}{1 - 40.0899} \right) = 0.1375$$

SUST. k_1 y k_2 ; RESULTA:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) =$$

$$y_1 = 0.38 + \frac{1}{2} (0.1616 + 0.1375)$$

$$y_1 = 0.5296$$

En forma similar se obtuvieron los tirantes subsecuentes, los resultados se muestran a continuación:

x	y
0	0.38
80	0.5296
160	0.6574
240	0.7633
320	0.8465
400	0.9083
480	0.9516
560	0.9798
640	0.9983
720	1.0100
800	1.0175

c) Solución del problema usando un espaciamiento $h = 120$

Para $i = 0$

Cálculo k_1

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(120, 0.38)$$

Datos preliminares, calculados anteriormente.

$$A = 2.9488$$

$$P = 8.6994$$

$$R^{3/2} = 0.4862$$

$$S_f = 0.2523$$

$$F_T^2 = 121.9375$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_1 = 120 \left(\frac{0.008 - 0.2523}{1 - 121.9375} \right) = 0.2424$$

CALCULO k_2

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))$$

$$k_2 = hf(0 + 120, 0.38 + 0.2424)$$

$$A = (7 + 2(0.6224)) 0.6224 = 5.1316$$

$$P = 7 + 4.4722(0.6224) = 9.7835$$

$$R^{2/3} = 0.6504$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{5.1316(0.6504)} \right)^2 = 0.0465$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.6224))}{9.81(5.1316)^3} = 25.7705$$

$$K_2 = h \left(\frac{S_0 - S_f}{1 - F_f^2} \right) = 120 \left(\frac{0.008 - 0.0465}{1 - 25.7705} \right)$$

$$K_2 = 0.1865$$

SUST. K_1 Y K_2 EN:

$$Y_1 = Y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2), \text{ RESULTA:}$$

$$Y_1 = 0.38 + \frac{1}{2}(0.2424 + 0.1865)$$

$$Y_1 = 0.5945$$

En forma similar se obtuvieron los tirantes subsecuentes, los resultados se muestran a continuación:

x	y
0	0.38
120	0.5945
240	0.7591
360	0.8731
480	0.9438
600	0.9838
720	1.0054

5.2-4 SOLUCION DEL PROBLEMA USANDO EL METODO RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN.

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

DONDE:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

a) Solución del problema usando un espaciamento $h = 40$

Condición inicial $y(0) = 0.38$

Para $i = 0$

$$y_i = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

CALCULO k_1

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(0, 0.38)$$

$$A = (7 + 2(0.38))0.38 = 2.9488$$

$$P = 7 + 4.4722(0.38) = 8.6994$$

$$R^4 = 0.1862$$

$$S_f = \left(\frac{0.38}{2.9488(0.4862)} \right)^2 = 0.2523$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.38))}{981(2.9488)^2} = 121.9375$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = h \left(\frac{S_p - S_f}{1 - F_f} \right)$$

$$k_1 = 40 \left(\frac{0.008 - 0.2523}{1 - 121.9375} \right) = 0.0808$$

CALCULO K_2

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_2 = hf(0 + \frac{40}{2}, 0.38 + \frac{0.0808}{2})$$

$$k_2 = hf(20, 0.4208)$$

$$A = (7 + 2(0.4204))0.4204 = 3.2963$$

$$P = 7 + 4.4722(0.4204) = 8.8801$$

$$R^{2/3} = 0.5165$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{3.2963(0.5165)} \right)^2 = 0.1789$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.4204))}{9.81(3.2963)^3} = 88.9537$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_2 = 40 \left(\frac{0.000 - 0.1789}{1 - 88.9537} \right) = 0.0777$$

CALCULO K_3

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_3 = hf(0 + \frac{40}{2}, 0.38 + \frac{0.0777}{2})$$

$$k_3 = hf(20, 0.4189)$$

$$A = (7 + 2(0.4189))0.4189 = 3.2828$$

$$P = 7 + 4.4722(0.4189) = 8.8732$$

$$R^{2/3} = 0.5154$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{3.2828(0.5154)} \right)^2 = 0.1811$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.4189))}{9.81(3.2828)^3} = 89.9891$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_3 = 40 \left(\frac{0.008 - 0.1811}{1 - 89.9891} \right) = 0.0770$$

CALCULO k_4

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$k_4 = hf(0 + 40, 0.38 + 0.0778)$$

$$k_4 = hf(40, 0.4578)$$

$$A = (7 + 2(0.4578))0.4578 = 3.6238$$

$$P = 7 + 4.4722(0.4578) = 9.0474$$

$$R^{2/3} = 0.5434$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{3.6238(0.5434)} \right)^2 = 0.1337$$

$$F_r^2 = \frac{3600(7 + 4(0.4578))}{9.81(3.6238)^3} = 68.1044$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$k_4 = 40 \left(\frac{0.008 - 0.1337}{1 - 68.1044} \right) = 0.0749$$

SUST. k_1, k_2, k_3 y k_4 EN:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

RESULTA:

$$y_1 = 0.38 + \frac{1}{6}(0.0808 + 2(0.0777) + 2(0.0778) + 0.0749)$$

$$y_1 = 0.4578$$

En forma similar se obtuvieron los tirantes subsecuentes, los resultados se muestran a continuación:

x	y
0	0.38
40	0.4578
80	0.5300
120	0.5970
160	0.6587
200	0.7150
240	0.7657
280	0.8107
320	0.8500
360	0.8839
400	0.9125
440	0.9363
480	0.9558
520	0.9716
560	0.9843
600	0.9943
640	1.0021
680	1.0082
720	1.0130
760	1.0167
800	1.0195

b) Solución del problema usando un espaciamiento $h = 80$

Para $i = 0$

Cálculo k_1

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(0, 0.38)$$

Datos preliminares, calculados anteriormente.

$$A = 2.9488$$

$$P = 8.6994$$

$$R^2 = 0.4862$$

$$S_f = 0.2523$$

$$F_f^2 = 121.9375$$

$$k_1 = 80 \left(\frac{2.008 - 0.2523}{1 - 121.9375} \right) = 0.1616$$

CALCULO k_2

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_2 = hf(0 + \frac{80}{2}, 0.38 + \frac{0.1616}{2})$$

$$k_2 = hf(40, 0.4608)$$

$$A = (7 + 2(0.4608))0.4608 = 3.6502$$

$$P = 7 + 4.4722(0.4608) = 9.0607$$

$$R^{1/2} = 0.5455$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{3.6502(0.5455)} \right)^2 = 0.1308$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.4608))}{9.81(3.6502)^3} = 66.6763$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_2 = 80 \left(\frac{0.008 - 0.1308}{1 - 66.6763} \right) = 0.1495$$

CALCULO k_3

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_3 = hf(0 + \frac{80}{2}, 0.38 + \frac{0.1495}{2})$$

$$k_3 = hf(40, 0.4548)$$

$$A = (7 + 2(0.4548))0.4548 = 3.5969$$

$$P = 7 + 4.4722(0.4548) = 9.0340$$

$$R^{1/2} = 0.5412$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{3.5969(0.5412)} \right)^2 = 0.1368$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.4548))}{9.81(3.5969)^3} = 69.5469$$

$$k_3 = 80 \left(\frac{0.008 - 0.1368}{1 - 69.5469} \right) = 0.1504$$

CALCULO K_4

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$K_4 = hf(0 + 80, 0.38 + 0.1504)$$

$$K_4 = hf(80, 0.5304)$$

$$A = (7 + 2(0.5304))0.5304 = 4.2756$$

$$P = 7 + 4.4722(0.5304) = 9.3721$$

$$R^{2/3} = 0.5926$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{4.2756(0.5926)} \right)^2 = 0.0807$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.5304))}{9.81(4.2756)^3} = 42.8273$$

$$K_4 = 80 \left(\frac{0.0807 - 0.0807}{1 - 42.8273} \right) = 0.1391$$

SUST: K_1, K_2, K_3 Y K_4 EN:

$$Y_1 = Y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \text{ RESULTA:}$$

$$Y_1 = 0.38 + \frac{1}{6}(0.1616 + 2(0.1495) + 2(0.1504) + 0.1391)$$

$$Y_1 = 0.5304$$

En forma similar se obtuvieron los tirantes subsecuentes, los resultados se muestran a continuación:

x	y
0	0.38
80	0.5301
160	0.6587
240	0.7657
320	0.8500
400	0.9124
480	0.9558
560	0.9842
640	1.0021
720	1.0130
800	1.0195

c) Solución del problema usando un espaciamento $h = 120$

Para $i = 0$

CALCULO k_1

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(0, 0.38)$$

DATOS PRELIMINARES, CALCULADOS ANTERIORMENTE:

$$A = 2.9484$$

$$P = 8.6194$$

$$R^2 = 0.4062$$

$$S = 0.2523$$

$$F^2 = 121.9375$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_1 = 120 \left(\frac{0.008 - 0.2523}{1 - 121.9375} \right) = 0.2424$$

CALCULO k_2

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_2 = hf\left(0 + \frac{120}{2}, 0.38 + \frac{0.2424}{2}\right)$$

$$k_2 = hf(60, 0.5012)$$

$$A = (7 + 2(0.5012))0.5012 = 4.0106$$

$$P = 7 + 4.4722(0.5012) = 9.2414$$

$$R^{2/3} = 0.5732$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{4.0106(0.5732)} \right)^2 = 0.0981$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.5012))}{9.81(4.0106)^3} = 51.2235$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_2 = 120 \left(\frac{0.008 - 0.0981}{1 - 51.2235} \right) = 0.2152$$

CALCULO k_3

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_3 = hf(0 + \frac{1.80}{2}, 0.38 + \frac{0.2152}{2})$$

$$k_3 = hf(60, 0.4876)$$

$$A = (7 + 2(0.4876))0.4876 = 3.8889$$

$$P = 7 + 4.4722(0.4876) = 9.1807$$

$$R^{2/3} = 0.5640$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{3.8889(0.5640)} \right)^2 = 0.1077$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.4876))}{9.81(3.8889)^3} = 55.8466$$

$$k_3 = 120 \left(\frac{0.008 - 0.1077}{1 - 55.8466} \right)$$

$$k_3 = 0.2182$$

CALCULO K_4

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3)$$

$$K_4 = hf(0 + 120, 0.38 + 0.2182)$$

$$K_4 = hf(120, 0.5982)$$

$$A = (7 + 2(0.5982))0.5982 = 4.9035$$

$$P = 7 + 4.4722(0.5982) = 9.6755$$

$$R^{2/3} = 0.6357$$

$$S_f = \left(\frac{0.72}{4.9035(0.6357)} \right)^2 = 0.0534$$

$$F_f^2 = \frac{3600(7 + 4(0.5982))}{9.81(4.9035)^3} = 29.2365$$

$$K_4 = 120 \left(\frac{0.008 - 0.0534}{1 - 29.2365} \right)$$

$$K_4 = 0.1928$$

SUST. K_1, K_2, K_3 Y K_4 EN:

$$Y_1 = y_0 + \frac{1}{2} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \text{ RESULTA}$$

$$Y_1 = 0.38 + \frac{1}{2} (0.2424 + 2(0.2152) + 2(0.2182) + 0.1928)$$

$$Y_1 = 0.5970$$

En forma similar se obtuvieron los tirantes subsecuentes, los resultados se muestran a continuación:

x	y
0	0.38
120	0.5970
240	0.7656
360	0.8837
480	0.9556
600	0.9940
720	1.0123

5.3 SOLUCION DEL PROBLEMA APLICANDO METODOS DE INTEGRACION DE
LA ECUACION DINAMICA.

5.3-1 SOLUCION DEL PROBLEMA USANDO EL METODO DE INTEGRACION --
GRAFICA.

Y	A	P	B	$R^{2/3}$	A/B	V	$(\sqrt{NR})^{2/3}$	$\alpha \frac{\sqrt{2}B'}{GA}$	$1-Fr^2$	S_0-S'	$f(\psi)$	X
0.38	2.9488	8.6904	8.5200	0.4882	0.3481	20.3473	0.2522	121.9391	120.9391	0.2442	495,2481	
0.4575	3.6211	9.0460	8.8300	0.5432	0.4101	18.5696	0.1340	68.2441	67.2441	0.1280	533,6833	39.87
0.5295	4.2672	9.3680	9.1180	0.5920	0.4680	14.0807	0.0812	43.0625	42.0625	0.0732	574,6243	39.80
0.5955	4.8777	9.6632	9.3920	0.6340	0.5199	12.3009	0.0542	29.6678	28.6678	0.0462	620,5152	39.43
0.6575	5.4671	9.9405	9.6300	0.6713	0.5677	10.9747	0.0385	21.6271	20.6271	0.0305	676,2984	40.20
0.7135	6.0127	10.1909	9.8540	0.7035	0.6102	9.9789	0.0290	16.6351	15.6351	0.0210	744,5288	39.78
0.7635	6.5104	10.4145	10.0540	0.7311	0.6475	9.2160	0.0229	13.3714	12.3714	0.0149	830,2953	39.37
0.8095	6.9771	10.6202	10.2680	0.7557	0.6815	8.5996	0.0186	11.0617	10.0617	0.0108	949,2170	40.93
0.8495	7.3998	10.7991	10.3980	0.7765	0.7107	8.1193	0.0157	9.4554	8.4554	0.0077	1,098,1039	40.95
0.8835	7.7456	10.9512	10.5340	0.7938	0.7353	7.7483	0.0137	8.3187	7.3187	0.0057	1,283,9825	40.50
0.9115	8.0422	11.0784	10.6480	0.8078	0.7554	7.4606	0.0123	7.5111	6.5111	0.0043	1,514,2093	39.17
0.9355	8.2998	11.1837	10.7420	0.8196	0.7726	7.2300	0.0112	6.8969	5.8969	0.0032	1,842,7813	40.28
0.9535	8.4928	11.2642	10.8140	0.8284	0.7854	7.0848	0.0105	6.4780	5.4780	0.0025	2,191,2000	38.51
0.9715	8.6881	11.3447	10.8880	0.8371	0.7981	6.9060	0.0098	6.0915	5.0915	0.0018	2,828,6111	45.18
0.9855	8.8409	11.4074	10.9420	0.8437	0.8080	6.7866	0.0093	5.8106	4.8106	0.0013	3,700,4615	45.70
0.9955	8.9505	11.4521	10.9820	0.8485	0.8150	6.7035	0.0090	5.6205	4.6205	0.0010	4,820,5000	41.60
1.0031	9.0341	11.4881	11.0124	0.8521	0.8204	6.7415	0.0087	5.4807	4.4807	0.0007	6,401,0000	41.88
1.0091	9.1003	11.5129	11.0364	0.8549	0.8246	6.5932	0.0086	5.3738	4.3738	0.0006	7,289,6667	41.07
1.0137	9.1511	11.5335	11.0548	0.8571	0.8278	6.5568	0.0084	5.2937	4.2937	0.0004	10,734,2500	41.46
1.0208	9.2274	11.5643	11.0824	0.8603	0.8326	6.5024	0.0082	5.1786	4.1786	0.0002	20,883,000	109.08
1.0280	9.3207	11.6019	11.1160	0.8642	0.8385	6.4373	0.0080	5.0377	4.0377	0.0000		

TABLA 5.3-1: Cálculo del perfil del flujo mediante integración gráfica.

Se hizo un ajuste a los valores de "y" para que la distancia Δx sea igual a 40, resultando los siguientes valores:

y
0.38
0.4575
0.5295
0.5955
0.6575
0.7135
0.7635
0.8075
0.8475
0.8835
0.9115
0.9355
0.9560
0.9715
0.9835
0.9950
1.0020
1.0100
1.0160
1.0180
1.0290

5.3-2 SOLUCION DEL PROBLEMA USANDO EL METODO DE INTEGRACION --
DIRECTA.

Datos calculados previamente:

$$y_n = 1.029$$

$$y_c = 1.658$$

Tirante medio:

$$y_m = (0.38 + 1.0208)/2 = 0.704$$

$y_m/b = 0.704/7 = 0.10$, de las Figs. 5.15 y 5.16, los exponentes hidráulicos son $N = 3.45$ y $M = 3.2$

$$\begin{aligned} \text{El valor de } J &= N / (N - M + 1) \\ &= 3.45 / (3.45 - 3.2 + 1) \\ &= 2.76 \end{aligned}$$

Para cada sección se calculan los valores de $U(y/y_n)$ y $V(U^{N/J})$ y de la tabla 3.4-1 se interpolan los valores $F(u, N)$ y $F(v, J)$.

De la ec. (3.4-11) se calcula la longitud del tramo que separa las dos secciones extremas.

$$l = A \{ (u_2 - u_1) - (F(u_2, N) - F(u_1, N)) + B (F(v_2, J) - F(v_1, J)) \}$$

DONDE:

$$A = \frac{y_n}{S_0} = \frac{1.029}{0.008} = 128.625$$

$$B = \left(\frac{y_c}{y_n} \right)^M \frac{J}{N} = \left(\frac{1.658}{1.029} \right)^{3.2} * \frac{2.76}{3.45} = 3.601$$

Y	U	V	F (u,n)	F (v,j)	ΔU	$\Delta F (u,n)$	$\Delta F (v,j)$	X
0,38	0,3693	0,2879	0,3730	0,2906	—	—	—	—
0,4618	0,4488	0,3673	0,4566	0,3737	0,0795	0,0336	0,0836	39,0611
0,5361	0,5210	0,4428	0,5333	0,4580	0,0722	0,0767	0,0823	38,3940
0,6039	0,5869	0,5137	0,6080	0,5379	0,0659	0,0747	0,0819	37,6515
0,6656	0,6468	0,5800	0,6818	0,6200	0,0599	0,0738	0,0821	37,0902
0,7214	0,7011	0,6415	0,7567	0,7029	0,0543	0,0749	0,0829	36,6073
0,7714	0,7497	0,6976	0,8305	0,7870	0,0486	0,0738	0,0841	36,2494
0,8157	0,7927	0,7480	0,9025	0,8727	0,0430	0,0720	0,0857	36,8527
0,8544	0,8303	0,7926	0,9755	0,9599	0,0376	0,0730	0,0872	36,7399
0,8876	0,8626	0,8313	1,0501	1,0494	0,0323	0,0746	0,0895	36,9415
0,9158	0,8900	0,8644	1,1258	1,1406	0,0274	0,0756	0,0912	36,2181
0,9393	0,9128	0,8922	1,2007	1,2340	0,0228	0,0749	0,0934	37,5278
0,9586	0,9316	0,9152	1,2783	1,3239	0,0188	0,0756	0,0999	35,2659
0,9742	0,9467	0,9338	1,3577	1,4251	0,0151	0,0816	0,1012	39,3693
0,9866	0,9588	0,9488	1,4364	1,5252	0,0121	0,0785	0,1001	38,8661
0,9965	0,9684	0,9607	1,5185	1,6246	0,0096	0,0821	0,0994	37,7451
1,0041	0,9758	0,9698	1,5977	1,7253	0,0074	0,0792	0,1007	38,4508
1,0101	0,9816	0,9771	1,6809	1,8286	0,0058	0,0832	0,1083	38,9617
1,0146	0,9860	0,9825	1,7626	1,9305	0,0044	0,0817	0,1079	38,3116
1,0181	0,9894	0,9868	1,8436	2,0370	0,0034	0,0810	0,1065	40,4513
1,0208	0,9920	0,9900	1,9395	2,1325	0,0026	0,0859	0,0955	33,2229

TABLA 5.3-2 Cálculo del perfil del flujo mediante integración directa.

Se hizo un ajuste a los valores de "y" para que la distancia -
x sea igual a 40, resultando los siguientes valores:

y

0.38
0.4640
0.5420
0.6140
0.6820
0.7420
0.7940
0.8385
0.8760
0.9090
0.9360
0.9570
0.9720
0.9855
0.9975
1.0040
1.0106
1.0145
1.0180
1.0200
1.0220

5.4 SOLUCION DEL PROBLEMA APLICANDO METODOS DE INCREMENTOS - -
FINITOS.

3.4-1 SOLUCION DEL PROBLEMA USANDO EL METODO PARA EL CALCULO DE
LA LONGITUD DEL TRAMO.

Y	A	P	R 2/3	V	$\alpha \frac{V^2}{2g}$	E	ΔE	Sf	\bar{S}_f	$S_0 - \bar{S}_f$	ΔX
0.38	2.9488	8.6994	0.4862	20.3473	21.1016	21.4816	--	0.2522	--	--	--
0.4619	3.6600	9.0657	0.5462	16.9934	13.6934	14.1553	7.3263	0.1297	0.1910	0.1830	40.03
0.5362	4.3284	9.3980	0.5964	13.8619	9.7937	10.3299	3.8254	0.0778	0.1038	0.0958	39.93
0.6042	4.9595	9.7021	0.6393	12.0980	7.4598	8.0640	2.2659	0.0516	0.0647	0.0567	39.96
0.6664	5.5530	9.9803	0.6765	10.8050	5.9505	6.6169	1.4471	0.0367	0.0447	0.0362	39.98
0.7227	6.1035	10.2321	0.7086	9.8304	4.9254	5.6481	0.9688	0.0277	0.0322	0.0242	40.03
0.7731	6.6071	10.4575	0.7363	9.0811	4.2032	4.9763	0.6718	0.0219	0.0248	0.0168	39.99
0.8177	7.0612	10.6569	0.7600	8.4971	3.6800	4.4977	0.4786	0.0180	0.0200	0.0120	39.88
0.8584	7.4616	10.8300	0.7801	8.0412	3.2957	4.1521	0.3456	0.0153	0.0167	0.0087	39.72
0.8895	7.8089	10.9780	0.7969	7.6835	3.0090	3.8985	0.2536	0.0134	0.0144	0.0064	39.63
0.9174	8.1050	11.1028	0.8107	7.4028	2.7931	3.7105	0.1880	0.0120	0.0127	0.0047	40.00
0.9405	8.3526	11.2061	0.8221	7.1834	2.6300	3.5705	0.1400	0.0110	0.0115	0.0035	40.00
0.9594	8.5567	11.2906	0.8312	7.0120	2.5060	3.4654	0.1051	0.0102	0.0106	0.0026	40.42
0.9746	8.7219	11.3586	0.8385	6.8792	2.4120	3.3866	0.0788	0.0097	0.0100	0.0020	39.40
0.9867	8.8541	11.4127	0.8443	6.7765	2.3405	3.3272	0.0594	0.0093	0.0095	0.0015	39.60
0.9962	8.9582	11.4552	0.8488	6.6978	2.2865	3.2827	0.0445	0.0090	0.0092	0.0012	37.08
1.0037	9.0407	11.4887	0.8524	6.6387	2.2449	3.2486	0.0341	0.0087	0.0089	0.0009	37.89
1.0095	9.1047	11.5147	0.8551	6.5900	2.2135	3.2230	0.0256	0.0085	0.0086	0.0006	42.67
1.0140	9.1544	11.5348	0.8572	6.5542	2.1895	3.2035	0.0195	0.0084	0.0085	0.0005	39.00
1.0175	9.1931	11.5505	0.8588	6.5266	2.1711	3.1886	0.0149	0.0083	0.0084	0.0004	37.25
1.0201	9.2219	11.5621	0.8600	6.5063	2.1576	3.1777	0.0109	0.0082	0.0083	0.0003	36.33

TABLA 54-1 Cálculo del perfil del flujo, mediante el método longitud del tramo, método de incrementos finitos.

C A P I T U L O 6

COMPARACION DE LA APLICACION DE LOS METODOS NUMERICOS EN EL
CALCULO DE PERFILES DE FLUJO GRADUALMENTE VARIADO.

Para encontrar los errores absolutos (EA), mostrados en las tablas 6.1-1, 6.1-2 y 6.1-3; y en las figs. 6.1-1, 6.1-2 y -- 6.1-3, se compararon los resultados obtenidos con los métodos anteriores contra los obtenidos con el método de integración directa, el cual no introduce errores acumulables al aumentar Δx . Se usaron también diferentes valores de Δx para observar como se comportaban los errores al hacerlo.

X	Val. y'' Integrac. Directa	Euler		Euler Gauss		Runge Kutta 2° Orden		Runge Kutta 4° Orden		Integración Gráfica.		Incrém. Finitos Long. de tramo	
		Y	EA	Y	EA	Y	EA	Y	EA	Y	EA	Y	EA
0	0.38	0.38	0.00	0.38	0.00	0.38	0.00	0.38	0.00	0.38	0.00	0.38	0.00
40	0.4680	0.4679	1.00E-4	0.4675	1.05E-2	0.4578	1.02E-2	0.4578	1.02E-2	0.4575	1.05E-2	0.4619	6.10E-3
80	0.5422	0.5421	1.00E-4	0.5295	1.27E-2	0.5299	1.23E-2	0.5300	1.22E-2	0.5295	1.27E-2	0.5362	6.00E-3
120	0.6140	0.6108	3.20E-3	0.5955	1.85E-2	0.5968	1.72E-2	0.5970	1.70E-2	0.5955	1.85E-2	0.6042	9.80E-3
160	0.6820	0.6741	7.90E-3	0.6575	2.45E-2	0.6584	2.36E-2	0.6587	2.33E-2	0.6575	2.45E-2	0.6664	1.56E-2
200	0.7420	0.7315	1.05E-2	0.7135	2.85E-2	0.7145	2.75E-2	0.7150	2.70E-2	0.7135	2.85E-2	0.7227	1.93E-2
240	0.7940	0.7833	1.07E-2	0.7635	3.05E-2	0.7650	2.9 E-2	0.7657	2.83E-2	0.7635	3.05E-2	0.7731	2.09E-2
280	0.8385	0.8289	9.06E-3	0.8095	2.9 E-2	0.8099	2.86E-2	0.8107	2.78E-2	0.8075	3.10E-2	0.8177	2.08E-2
320	0.8760	0.8687	7.03E-3	0.8495	2.65E-2	0.8492	2.68E-2	0.8500	2.60E-2	0.8475	2.85E-2	0.8564	1.96E-2
360	0.9090	0.9026	6.04E-3	0.8835	2.55E-2	0.8831	2.59E-2	0.8839	2.51E-2	0.8835	2.55E-2	0.8895	1.95E-2
400	0.9360	0.9304	5.06E-3	0.9115	2.45E-2	0.9117	2.43E-2	0.9125	2.35E-2	0.9115	2.45E-2	0.9174	1.86E-2
440	0.9570	0.9530	4.0 E-3	0.9355	2.15E-2	0.9355	2.15E-2	0.9363	2.07E-2	0.9355	2.15E-2	0.9405	1.65E-2
480	0.9720	0.9710	1.0 E-3	0.9535	1.85E-2	0.9549	1.71E-2	0.9558	1.62E-2	0.9560	1.60E-2	0.9594	1.26E-2
520	0.9855	0.9851	4.0 E-4	0.9715	1.40E-2	0.9707	1.48E-2	0.9716	1.39E-2	0.9715	1.4 E-2	0.9746	1.09E-2
560	0.9975	0.9959	1.6 E-3	0.9855	1.20E-2	0.9834	1.41E-2	0.9843	1.32E-2	0.9835	1.40E-2	0.9867	1.08E-2
600	1.0040	1.0046	-6.0 E-4	0.9955	8.50E-3	0.9939	1.01E-2	0.9943	9.70E-3	0.9950	9.00E-3	0.9962	7.80E-3
640	1.0106	1.0109	-3.0 E-4	1.0031	7.5 E-3	1.0018	8.8 E-3	1.0021	8.50E-3	1.0020	8.60E-3	1.0037	6.90E-3
680	1.0145	1.0155	-1.0 E-3	1.0091	5.4 E-3	1.0079	6.8 E-3	1.0082	6.3 E-3	1.0100	4.5 E-3	1.0095	5.0 E-3
720	1.0180	1.0193	-1.3 E-3	1.0137	4.3 E-3	1.0127	5.9 E-3	1.0130	5.0 E-3	1.0160	2.0 E-3	1.0140	4.0 E-3
760	1.0200	1.0222	-2.2 E-3	-1.0206	-6.0 E-4	1.0164	3.6 E-3	1.0167	3.3 E-3	1.0180	2.0 E-3	1.0175	2.5 E-3
800	1.0220	1.0241	-2.10E-3	-1.0245	-2.50E-3	1.0193	2.7 E-3	1.0195	2.5 E-3	1.0208	1.4 E-3	1.0201	1.9 E-3

TABLA 8.1-1 Errores absolutos (EA), de los resultados obtenidos con los métodos anteriores contra los obtenidos con el método de Integración directa para un $\Delta X=40$

X	Val. Y Int. Directa.	Euler		Euler Gauss		Runge Kutta 2° Orden		Runge Kutta 4° Orden		Integración Gráfica		Incr. Finitos Long. de tramo	
		Y	EA	Y	EA	Y	EA	Y	EA	Y	EA	Y	EA
0	0,38	0,38	0,00	0,38	0,00	0,38	0,00	0,38	0,00	0,38	0,00	0,38	0
120	0,6140	0,6224	-8,40E-3	0,5946	1,94E-2	0,5945	1,96E-2	0,5970	1,70E-2	0,5955	1,86E-2	0,7229	-0,1089
240	0,7940	0,8029	-8,90E-3	0,7593	3,47E-2	0,7591	3,49E-2	0,7856	2,84E-2	0,7635	3,06E-2	0,8672	-0,0732
360	0,9090	0,9362	-2,72E-2	0,8793	3,57E-2	0,8791	3,59E-2	0,8837	2,53E-2	0,8835	2,55E-2	0,8508	-0,0418
480	0,9720	1,0018	-2,95E-2	0,9440	2,80E-2	0,9438	2,82E-2	0,9556	1,64E-2	0,9560	1,60E-2	0,9636	-0,0216
600	1,0040	1,0228	-1,88E-2	0,9840	2,00E-2	0,9838	2,02E-2	0,9940	1,00E-2	0,9950	9,00E-3	1,0135	-9,50E-3
720	1,0180	1,0286	-1,06E-2	1,0156	2,40E-3	1,0054	1,26E-2	1,0128	5,20E-3	1,0160	2,00E-3	1,0222	-4,20E-3

TABLA 6.1 - 3 Errores absolutos (EA), de los resultados obtenidos con los métodos anteriores contra los obtenidos con el método de Integración directa, para un $\Delta X=120$.

X	Tirante "ny" Integ. dir.	Euler		Euler Gauss.		Runge Kutta 2° Orden		Runge Kutta 4° Orden		Integración Gráfica		Incrém. Finitos Long. de tramo	
		Y	EA	Y	EA	Y	EA	Y	EA	Y	EA	Y	EA
0	0.38	0.38	0	0.38	0	0.38	0	0.38	0	0.38	0	0.38	0
80	0.5422	0.5416	6.00E-4	0.5295	1.27E-2	0.5295	1.26E-2	0.5301	1.21E-2	0.5295	1.27E-2	0.5616	-0.0194
160	0.6820	0.6791	2.90E-3	0.6572	2.48E-2	0.6574	2.46E-2	0.6587	2.33E-2	0.6575	2.45E-2	0.6949	-0.0129
240	0.7940	0.7933	7.00E-4	0.7628	3.12E-2	0.7633	3.07E-2	0.7657	2.83E-2	0.7635	3.05E-2	0.7994	-5.40E-3
320	0.8760	0.8821	-8.10E-3	0.8464	2.96E-2	0.8465	2.95E-2	0.8500	2.60E-2	0.8475	2.85E-2	0.8780	-2.00E-3
400	0.9360	0.9451	-9.10E-3	0.9080	2.80E-2	0.9083	2.77E-2	0.9124	2.36E-2	0.9115	2.45E-2	0.9336	2.40E-3
480	0.9720	0.9848	-1.28E-2	0.9512	2.08E-2	0.9518	2.04E-2	0.9558	1.62E-2	0.9560	1.60E-2	0.9707	1.30E-3
560	0.9975	1.0061	-8.60E-3	0.9800	1.75E-2	0.9798	1.77E-2	0.9842	1.33E-2	0.9835	1.40E-2	0.9942	3.30E-3
640	1.0106	1.0187	-8.10E-3	0.9984	1.22E-2	0.9983	1.23E-2	1.0021	8.50E-3	1.0020	8.60E-3	1.0085	2.10E-3
720	1.0160	1.0244	-8.40E-3	1.0100	8.00E-3	1.0100	8.00E-3	1.0130	5.00E-3	1.0160	2.00E-3	1.0170	1.00E-3
800	1.0220	1.0283	-4.30E-3	1.0174	4.60E-3	1.0175	4.50E-3	1.0195	2.50E-3	1.0208	1.40E-3	1.0219	1.00E-4

TABLA 6.1-2 Errores absolutos (EA), de los resultados obtenidos con los métodos anteriores contra los obtenidos con el método de Integración directa, para un $\Delta X=60$.

1
CMS

1.07

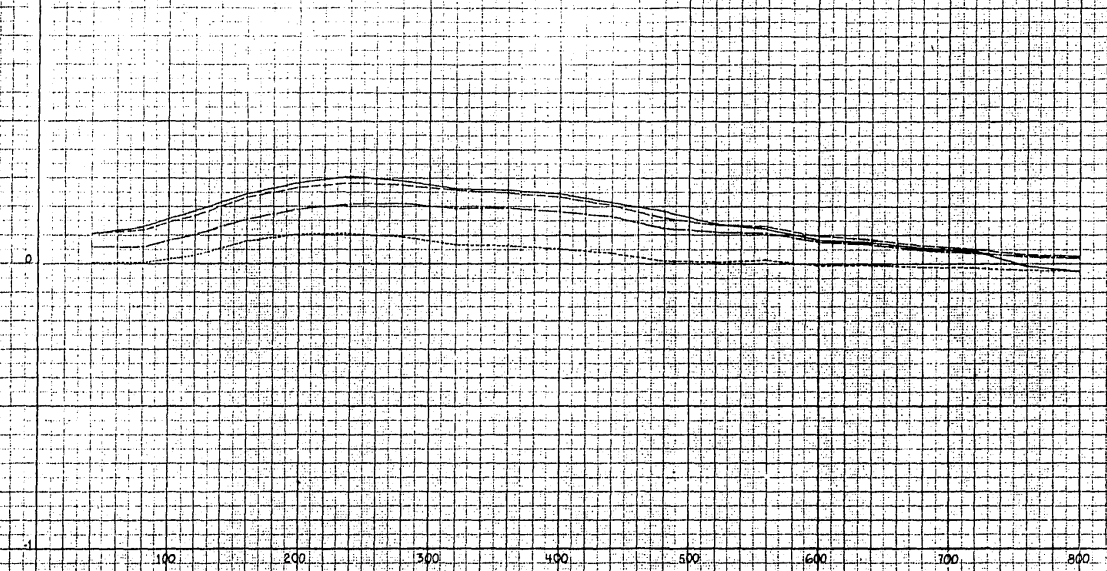


FIG. 6.11. ERRORES ABSOLUTOS USANDO $\Delta x = 40 \text{ m}$

- Euler
- Euler-Gauss
- Runge-Kutta 4º ORDEN
- INCREMENTOS FINITOS

CMS

0

100

200

300

400

500

600

700

800

FIG. 411-P

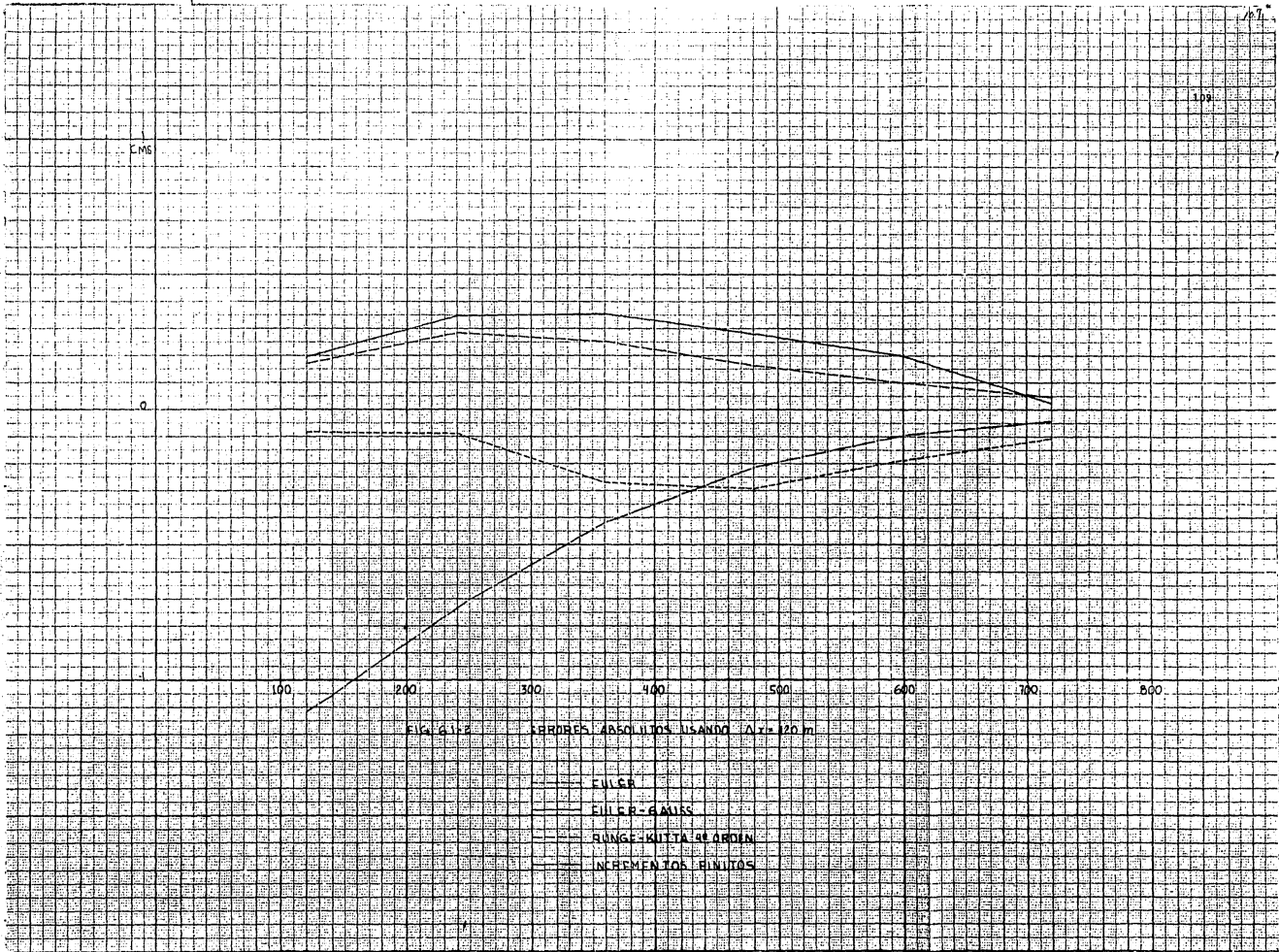
ABRILES ABSOLUTOS USANDO ALZA 120 m

FWLGA

FWLFR-GALISS

RUNGE-KUTTA 4º ORDEN

INCREMENTOS FINITOS



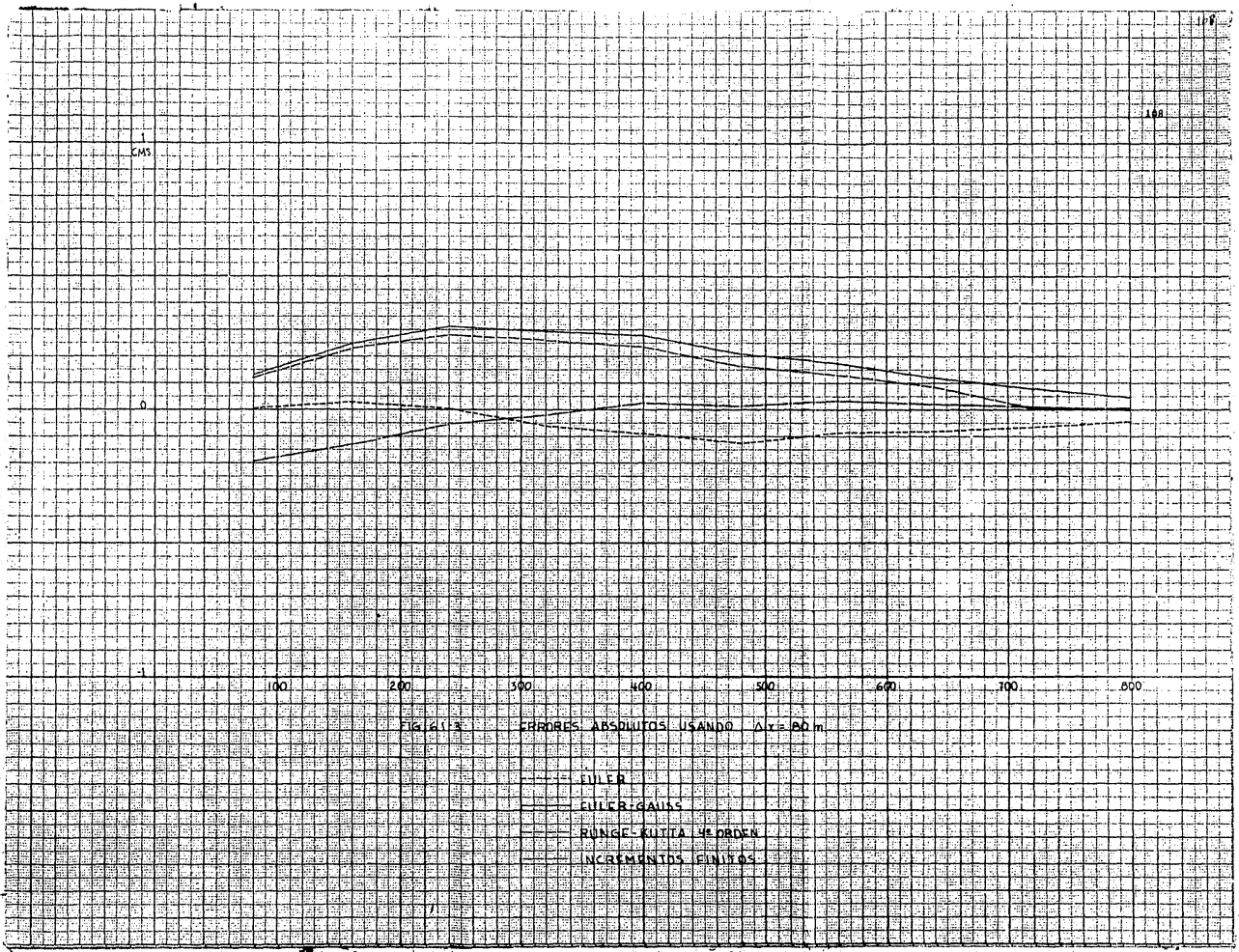
1
CMS

0

100 200 300 400 500 600 700 800

FIG. 6.1.5. ERRORES ABSOLUTOS USANDO $\Delta x = 100$ m.

- FILLER
- FILTER-GAUSS
- FUNCION KURTZA 4º ORDEN
- INCREMENTOS FINITOS



C A P I T U L O 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Analizando cada uno de los métodos que se estudiaron puede concluirse lo siguiente:

METODO DE EULER: Para un espaciamento $\Delta x = 40$ los resultados de éste método se asemejan más a la horizontal de referencia; - para un espaciamento $\Delta x = 80$ los resultados graficados varían un poco más que en el caso anterior alejándose un poco más de la horizontal; para un espaciamento $\Delta x = 120$, es notable la - variación comparada con los espaciamentos anteriores, pues se aleja más. Por tanto este método debe ser utilizado para espaciamentos pequeños.

METODO DE EULER-GAUSS: Este método aunque para espaciamentos pequeños los errores absolutos son mayores que para otros métodos usados; se observa que los errores son parecidos para los - diferentes espaciamentos estudiados, es decir la variación es muy pequeña o poco variable.

METODO DE RUNGE-KUTTA 4o. ORDEN: En éste método los errores son semejantes a los del método de Euler-Gauss; pero más pequeños.

METODO DE INCREMENTOS FINITOS: Es un método que para espaciamentos pequeños se pueden obtener buenos resultados, porque se observa en las curvas que para un espaciamento $\Delta x = 40$ se acerca a la horizontal; pero para Δx mayores es inestable, da errores absolutos muy grandes.

Por lo anterior el método que se recomienda utilizar en problemas de perfiles de flujo gradualmente variado es el de RUNGE-KUTTA 4o. ORDEN, ya que comparado con los demás métodos estudiados es el que nos arroja resultados más satisfactorios y con

la ventaja de que es fácilmente programable en cualquier equipo de computo, desde una calculadora de bolsillo hasta una computadora de gran capacidad.

R E F E R E N C I A

VEN TE CHOW,
HIDRAULICA DE LOS CANALES ABIERTOS
EDITORIAL DIANA, MEXICO.

HORACE W. KING, CHESTER O. WISLER
JAMES G. WOODBURN.
HIDRAULICA
EDITORIAL TRILLAS, MEXICO.

GILBERTO SOTELO AVILA,
APUNTES DE HIDRAULICA II
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM.

D. D. MCCRAKEN, W. S. DORN.
METODOS NUMERICOS Y PROGRAMACION FORTRAN
EDITORIAL LIMUSA, MEXICO.

RAFAEL IRIARTE B., HUGO E. BORRAS G.
ROSSYNELA DURAN C.
APUNTES DE METODOS NUMERICOS
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM.