UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Escuela Nacional de Estudios Profesionales
"ACATLAN"

Análisis Tridimensional de Cimentaciones de Turbogeneradores

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

Licenciatura en Ingeniería Civil

P R E S E N T A

RAMON DE LA ROSA RENTERIA

México D. F. 1980.

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"
COORDINACION DEL PROGRAMA DE INGENIERIA Y ACTUARIA.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA

CAI-C-073/80.

Señor Ramón de la Rosa Rentería,
Alumno de la Carrera de Ingeniero Civil,
P r e s e n t e.

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha 24 de Enero de 1980, me complace notificarle que esta Coordinación tuvo a bien asignarle el siguiente tema de tesis: "ANALISIS TRIDIMENSIONAL DE CIMENTACIONES DE TURBOGENERADORES", el cual se desarrollará como sigue:

1.- Introducción.
2.- Antecedentes.
3.- Análisis matricial de cimentaciones para equipo rotatorio.
4.- Adaptación de un programa de computadora
5.- Ejemplos de aplicación.
6.- Conclusiones.

Asímismo fué designado como Asesor de Tesis el Señor Ing. Gerardo de Lizarriturri Olague, profesor de esta Escuela.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar examen profesional, así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la tesis.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Acatlán, Edo. de Méx., a 29 de Julio de 1980.

Ing. Alejandro Ramírez Seceña
Coordinador del Programa
de Ingeniería y Actuaría.

ENEP - ACATLAN
COORDINACION DE
INGENIERIA Y ACTUARIA

A MIS PADRES:
GRACIAS POR APOYARME EN TODO MOMENTO

A FLOR MARIA

AGRADEZCO LA VALIOSA COLABORACION Y
ASESORIA EN LA REALIZACION DE ESTA
TESIS AL ENGR. VICENTE GUERRERO FLORES.

AGRADECIMIENTOS

AGRADEZCO EL APOYO ECONOMICO Y MORAL QUE ME PROPORCIONARON TANTO EL CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA COMO EL INSTITUTO DE - INVESTIGACIONES ELECTRICAS EN LA REALIZACION DE ESTE ESTUDIO.

AGRADEZCO LA AYUDA QUE ME PROPORCIONARON LAS SIGUIENTES PERSONAS:

DR. GERARDO LOPEZ VALADEZ
DR. OSCAR HERNANDEZ BASILIO
ING.CARLOS MONTIEL RENTERIA
ING.ARMANDINA ALANIS
ARQ.ALEJANDRO SANGER

INDICE

CAPITULO 1. INTRODUCCION

El estudio del comportamiento de estructuras de soporte o cimentaciones para turbogeneradores ha sufrido algunas modificaciones sustanciales en los últimos años. Esto se debe tanto al desarrollo de nuevas técnicas de análisis, como al acelerado avance de las computadoras. Al surgir nuevas técnicas de análisis, estas estructuras pueden ser analizadas con base a modelos realistas por lo que es posible llegar a diseños más racionales de dichas estructuras de soporte.

Los objetivos del presente estudio son:

a) Detallar un método de análisis para las cimentaciones de turbogeneradores teniendo en cuenta desarrollos recientes. Lo anterior incluye la presentación de algunos modelos que pueden emplearse convenientemente en el análisis de estas estructuras.

b) Adaptar un programa de computadora para analizar tanto estática como dinámicamente las cimentaciones mencionadas.

c) Verificar mediante un ejemplo de aplicación que los modelos propuestos son adecuados.

Para la consecución de los objetivos mencionados, en el capítulo siguiente se anotan algunos antecedentes. Con objeto de centrar ideas, se describen las estructuras, se mencionan algunos criterios con los que éstas eran analizadas en el pasado y se anotan algunas características de las estructuras ya construidas. En el tercer capítulo se presenta el método de análisis propuesto y las consideraciones que condujeron a él. En el siguiente capítulo se describen el programa de computadora y las transformaciones que fueron necesarias para adaptarlo al método de análisis considerado. En el capítulo 5 se incluye con fines ilustrativos el análisis de una estructura --particular por el método descrito en el capítulo 3. En el capítulo 6 se --señalan las conclusiones del estudio. Finalmente en forma de apéndices se presentan los fundamentos del análisis matricial de estructuras y algunos --conceptos importantes de dinámica estructural.

CAPITULO 2. ANTECEDENTES

2.1 Cimentaciones para turbogeneradores.

Un turbogenerador es básicamente un dispositivo electromecánico que transforma algún tipo de energía en energía eléctrica. Así por ejemplo, en un sistema hidroeléctrico se transforma la energía de movimiento del agua, en sistemas termoeléctricos se transforma la energía calorífica. Para fijar ideas tómese el caso de una planta termoeléctrica de combustibles fósiles: en este caso el equipo generador consta de:turbinas de alta y de baja presión, un generador, un excitador, además de algunos dispositivos auxiliares como son: calentadores, calderas, bombas de agua de alimentación, sistema combustible, condensador, sistemas de vacío, sistemas de aceite lubricante,etc.

Durante la operación de un turbogenerador como el señalado en el párrafo anterior, se efectúan los siguientes cambios de energía: primero la energía calorífica disponible del vapor que genera la caldera es convertida en energía cinética por la turbina, ésta a su vez es transformada en energía de movimiento (rotatorio) y finalmente por medio de un eje que interconecta a la turbina con el generador, le es transmitida a este último la energía de movimiento para que la transforme en energía eléctrica.

Para el funcionamiento óptimo del turbogenerador es muy importante el alineamiento de su eje, ya que por las altas velocidades a las que éste gira, alguna falla debida a una falta de alineamiento de dicho eje podría ocasionar cuantiosos daños. Para darse una idea del costo de un equipo generador, tómese el caso de la Planta Geotérmica de Cerro Prieto en Baja California Norte. El costo total aproximado de la planta resultó ser de $ 480 millones y el costo del turbogenerador con su equipo auxiliar fue de casi un 20% del costo total antes mencionado. La capacidad del turbogenerador de la Planta de Cerro Prieto es pequeña (30 Mw), pero actualmente se pueden en---

contrar plantas de mucha mayor capacidad. Así, las hay de 37.5, 84, 100, 158, 220, 300, 650, y de hasta 775 Mw.

Para tener una idea del costo de los turbogeneradores de grandes capacidades se puede usar la siguiente ecuación aproximada:

$$P_n = P_o \left(\frac{c_n}{c_o}\right)^{0.6} \qquad (2\text{-}1)^*$$

donde:

P_n = Costo de la planta o parte de ella, de capacidad "n" (nueva)

P_o = Costo de la planta o parte de ella, de capacidad "o" (original)

c_n = Capacidad de la planta nueva

c_o = Capacidad de la planta original

Así por ejemplo el costo de un turbogenerador de 650 Mw de capacidad, obtenido mediante la ecuación 2-1 es de 522 millones de pesos. De lo anterior se concluye que es de mucha importancia analizar las estructuras de soporte para turbogeneradores de una manera realista, y no con base a los métodos simplificados que se venían utilizando hasta hace algunos años.

Para dar una idea de las simplificaciones que se hacían en el pasado, en la figura 2.1 se presentan dos modelos a partir de los cuales se analizaban las cimentaciones de turbogeneradores. En contraste con las anteriores, en la fig. 2.2 se ilustran algunos modelos de análisis más recientes. Aun así, los modelos que se proponen en este trabajo son más completos que los ante--

*Fórmula tomada del libro "APPLIED PROCESS DESIGN FOR CHEMICAL AND PETROCHEMICAL PLANTS" de ERNEST E. LUDWING, Volumen I, 9a. Edición, Página 37.

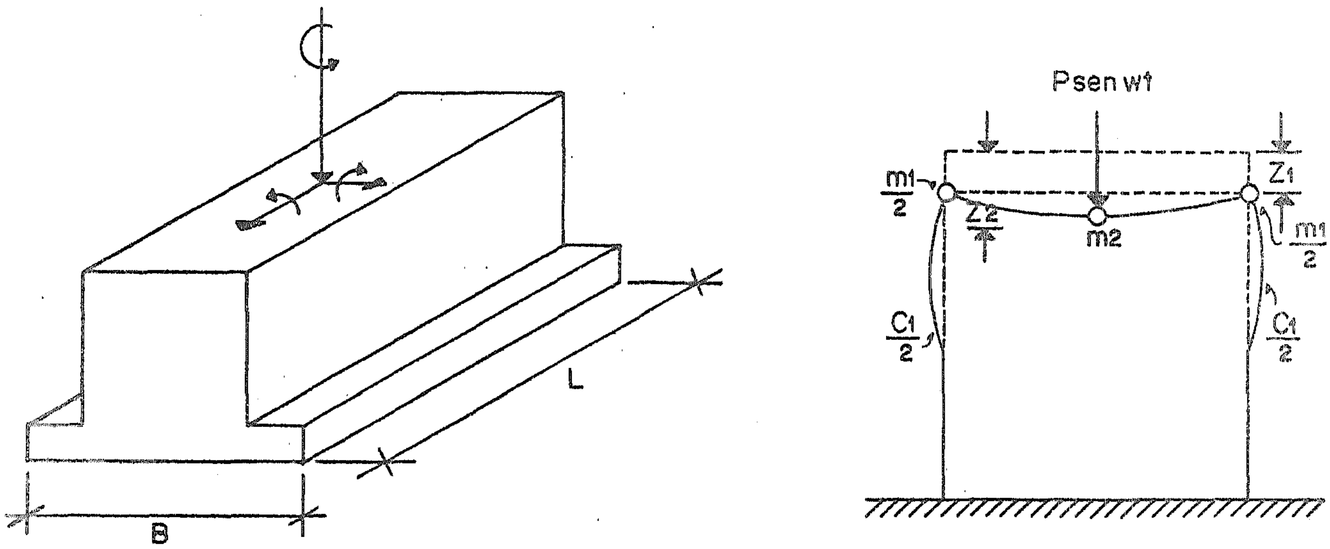


Fig.2.1 Modelos Simplificados de Estructuras de Apoyo para Turbogeneradores.

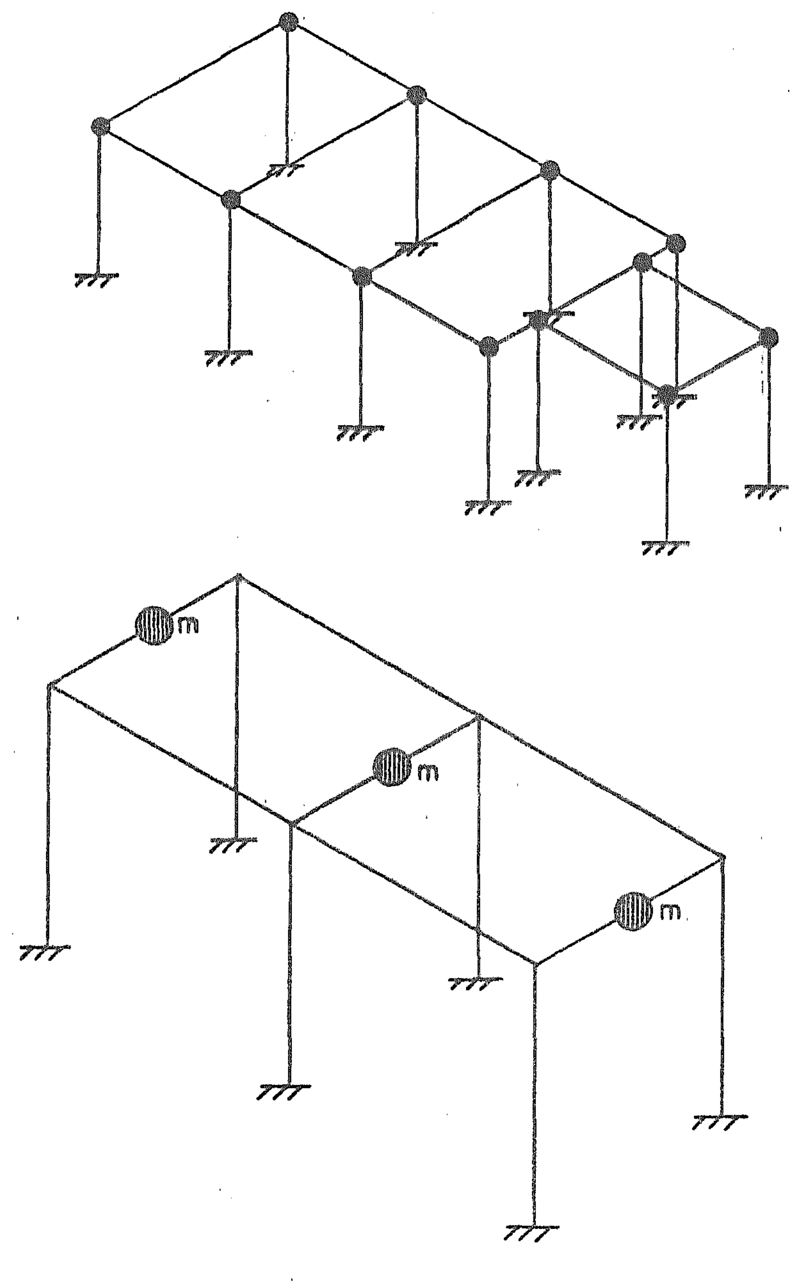


Fig.2.2 Modelos actuales de Estructuras de Soporte para Turbogeneradores.

riores y se puede afirmar casi con certeza que resultan más representativos de este tipo de estructuras.

Uno de los criterios convencionales de diseño empleado por la mayoría de los analistas en el pasado es el llamado criterio de alta sintonía. Este criterio se fundamenta en diseñar la estructura en tal forma que su frecuencia natural de vibración sea al menos un 20% mayor que la frecuencia de operación del turbogenerador. Con esto se pretendía evitar que se presentara el fenómeno de resonancia en la estructura.

Dado que como ya se señaló, la capacidad de los turbogeneradores se ha incrementado grandemente, aplicar el diseño señalado en el párrafo anterior no resulta práctico. Esto se debe principalmente a que, para garantizar que las vibraciones inducidas por el turbogenerador estuviesen fuera de la zona de resonancia, deberían construirse estructuras de tales dimensiones, que implicarían que su costo se incrementara considerablemente.

Por el motivo anterior, las estructuras son ahora analizadas con un criterio denominado (en contraposición al anterior) de baja sintonía. Este consiste en diseñar a la estructura de tal forma que su frecuencia natural de vibración sea menor que la frecuencia de operación de la máquina. El problema de resonancia se evita en estas circunstancias mediante un adecuado monitoreo de las vibraciones cuando el turbogenerador se pone en operación.

Debido a lo señalado anteriormente, los pedestales que se diseñan en la actualidad ofrecen algunas ventajas en comparación a los construidos en el pasado. Por ejemplo, se puede mencionar que con los análisis actuales se han logrado estructuras con dimensiones más reducidas que las de los pedestales convencionales, esto repercute en el costo del pedestal ya que se requiere menor cantidad de material . Una ventaja importante que se desprende de lo anterior, es que con las secciones más pequeñas se puede contar con un es pacio más amplio para la colocación del equipo auxil

Debe mencionarse que en la actualidad, las cimentaciones para turbogenerado res que se construyen, generalmente están compuestas por una losa de cimentación (de concreto reforzado) la cual de ser necesario debe colocarse sobre pilotes. Sobre dicha losa se construye una superestructura (o pedestal) que casi siempre es un marco tridimensional cuyos elementos estructura les son columnas (en general de eje recto) vigas longitudinales y vigas transversales. Estas superestructuras pueden ser de acero o de concreto re forzado. Estas últimas son las que se utilizan regularmente en nuestro medio.

Como un complemento de lo que ya se ha discutido, cabe destacar que los cri terios de diseño actuales, están fundamentados en las normas de la German Standard DIN-4024. Estas pueden ser aplicadas tanto al acero como al concreto reforzado. Generalmente la práctica común es diseñar los miembros críticos verticales de tal manera que tengan su frecuencia natural fundamen tal al menos 20% debajo de la velocidad de operación de la máquina. El pro cedimiento de diseño de acuerdo con las normas DIN-4024 es el siguiente:

1. Un análisis estático de la configuración de la cimentación con el tamaño de los miembros propuestos por el fabricante.

2. Un análisis dinámico tridimensional usando algún programa de computación para determinar las frecuencias y los modos de vibración de la estructura.

3. Determinación de los esfuerzos máximos de la combinación más desfavorable de cargas estáticas y dinámicas.

4. Un análisis de esfuerzos por temperatura para un rango de + 15°C a - 10°C desde la base hasta la cubierta.

En los párrafos anteriores se ha mencionado muy someramente el uso de las computadoras digitales en el análisis de los pedestales. Debe remarcarse sin embargo, que las computadoras son herramientas muy poderosas en este tipo de análisis; en la actualidad se cuenta con diferentes programas de computadora que permiten analizar las estructuras en forma muy completa. Es importante señalar también que la efectividad de un análisis, depende fundamentalmente de la bondad del modelo que se seleccione. En otras palabras, de poca utilidad resulta el contar con métodos de análisis y con la ayuda de la computadora, si el modelo analítico que se proponga es poco representativo de la estructura real.

Por otra parte, debe mencionarse también que a pesar de la actualización de las técnicas de análisis, los fabricantes de turbogeneradores han cambiado muy poco las normas de diseño y con esto, se le resta importancia a la investigación y desarrollo de estas nuevas técnicas de análisis. Se reconoce aquí la necesidad de desarrollar estudios experimentales en el futuro que permitan modificar y actualizar las normas de diseño, para complementar estudios analíticos como el que se presenta en este trabajo.

2.2 Tipos de pedestales.

En términos generales los pedestales de soporte para turbogeneradores pueden clasificarse, atendiendo a los materiales para su construcción, en pedestales de concreto reforzado o de acero estructural. Los primeros son los que se construyen en nuestro medio debido a que se considera que existen algunas ventajas importantes sobre los pedestales diseñados con acero estructural. Dentro de estas ventajas se pueden mencionar la capacidad del concreto para amortiguar fuerzas de naturaleza dinámica que son transmitidas a la estructura por la maquinaria o por un sismo. También cabe destacar la baja conductividad térmica del concreto que no permite deformaciones excesivas debidas a fuentes locales de calor. Además, la facilidad de dar a la estructura cambios de geometría adecuados para acomodar en forma conveniente el turbogenerador y su equipo auxiliar. Finalmente puede mencionarse que debido a la facilidad de hacerle cambios de geometría a la estructura, es posible darle una mejor apariencia al pedestal de concreto en comparación a uno de acero.

Otra alternativa de diseño, la cual es frecuentemente usada en Europa, es la de pedestales construidos con acero estructural. En cuanto a este tipo de estructuras, pueden mencionarse algunas ventajas como son: el mayor control de calidad sobre la elaboración del material y su rapidez de construcción. Por otra parte, las cargas muertas que transmite el pedestal de acero a la losa de cimentación son generalmente menores que las de concreto. Sin embargo se conoce la alta conductividad térmica del acero que puede provocar una rápida distorsión local debido a la presencia de altas temperaturas en la eventualidad de un accidente. Además, el pedestal puede realmente responder a la vibración debido a la escasez de masa y el bajo amortiguamiento, que caracterizan al acero. En cuanto al costo, se sabe que un pedestal de acero es más caro que uno de concreto y si además se menciona que el primero requiere de mayor mantenimiento que un pedestal de concreto, su costo se incrementa aún más. Por lo descrito hasta aquí, se entiende la preferencia de contruir pedestales de concreto reforzado en nuestro medio.

CAPITULO 3. ANALISIS MATRICIAL DE CIMENTACIONES PARA EQUIPO ROTATORIO

3.1 Método de análisis.

El análisis de estructuras de soporte para turbogeneradores se llevaba a cabo como ya se mencionó, mediante modelos simplificados con un número reducido de grados de libertad; por esta razón, el diseño de dichas estructuras resultaba poco económico. Gracias al desarrollo de nuevas técnicas de análisis y debido a la disponibilidad de las computadoras digitales, es posible actualmente realizar análisis mucho más aproximados y realistas de estas estructuras. Una de estas técnicas de análisis es el método del elemento finito, mediante el cual es posible estimar con mayor aproximación la respuesta de estructuras como las que aquí se estudian.

La aplicación del método del elemento finito conduce en el caso estático a un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{P} \qquad (3\text{-}1)^*$$

Para analizar un sistema mecánico por medio de la técnica del elemento finito, es necesario en primer término definir el sistema equivalente que lo represente. En general, este es uno de los pasos más importantes en el análisis, ya que la validez de la solución depende de una selección adecuada del modelo de la estructura. El sistema equivalente se obtiene como un conjunto de elementos ligados entre sí a través de puntos nodales. Los valores que se obtengan para los desplazamientos de éstos, a partir de la solución del sistema de ecuaciones representado por (3-1), permiten conocer la respuesta de la estructura.

* Los símbolos que se emplean en este trabajo se resumen y describen en el apéndice A.4.

Idealizando la estructura en la forma descrita, se simplifica un problema en el que se tienen un número infinito de grados de libertad (sistema estructural real),en otro cuyo comportamiento puede inferirse a partir de los desplazamientos de un número determinado o finito de puntos nodales. De lo anterior se desprende la importancia de proponer un modelo apropiado de la estructura.

3.2 Elemento viga para el análisis de pedestales.

Para poder tener en cuenta la interacción de todos los elementos estructurales de los pedestales, así como para analizar la acción de todas las cargas que soportan los mismos, es necesario que éstos se idealicen como estructuras tridimensionales. Sin embargo, para poder obtener una solución adecuada del análisis es necesario tener en cuenta el carácter masivo de los pedestales.

En la figura 3.1 se ilustra una de estas estructuras. Como puede observarse en la figura, las dimensiones de vigas y columnas, son considerables. Por este motivo, la estructura no puede idealizarse como un marco convencional de tres dimensiones, ya que al considerar que vigas y columnas pueden representarse por medio de elementos finitos de viga, los ejes centroidales de éstos no necesariamente se intersectan en el mismo punto (dado que sus secciones transversales normalmente no son iguales). Además, es claro que aún cuando el pedestal se analizara para desplazamientos de puntos nodales (intersecciones reales o ficticias de ejes de elementos viga), los resultados que se obtendrían no serían representativos, puesto que las dimensiones de los nodos y la rigidez de los mismos influyen significativamente en los valores tanto de los desplazamientos, como de los esfuerzos de los extremos de las vigas y columnas.

Teniendo en cuenta las ideas del párrafo anterior se desarrolló un modelo en el cual se consideran a los puntos nodales de la estructura como -

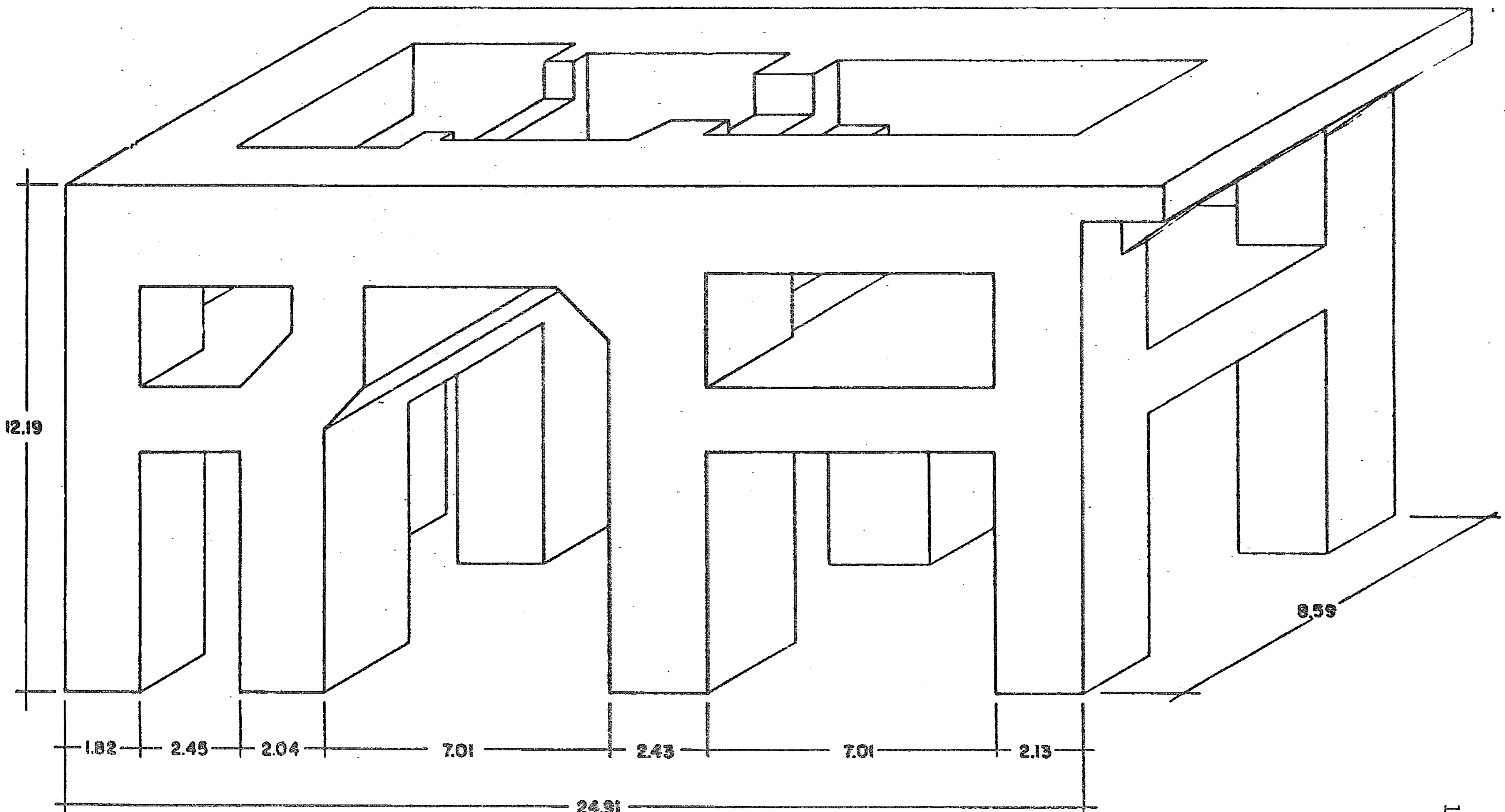


FIG. 3.1 Estructura de apoyo del turbogenerador de la Unidad No.1 de la Planta Termoeléctrica de Valle de México.

elementos rígidos con dimensión finita. Dado que en estas condiciones -- los nodos son indeformables, se tiene que los valores de los desplazamientos de los puntos extremos de todas las barras que se conectan en un mismo nodo dependen de los valores de los desplazamientos de un punto cual-- quiera de dicho nodo, por comodidad se recomienda que estas cantidades -- sean referidas a los centroides de los nodos.

Con objeto de presentar el desarrollo del modelo anterior, se estudiará - el elemento compuesto que se ilustra en la figura 3.2. En la figura se - muestra una barra que podría corresponder a la de una estructura como los pedestales que se están estudiando. Esta barra es un elemento compuesto por un elemento viga propiamente dicho el cual es flexible (y que se indica como "barra i") y dos apéndices rígidos que representan los nodos origen y extremo, los cuales son las incidencias de la barra. Como se indica en la figura se han escogido dos sistemas de referencia, el primero -- (ejes 1, 2 ; 3) es un sistema local* en el que se definen las propiedades de la barra. Así por ejemplo, el eje local 1 se ha hecho coincidir con - el eje centroidal longitudinal de ésta. El otro sistema (ejes X, Y, Z), es un sistema global al cual queda referida la geometría de la estructura.

Para el desarrollo que se presenta a continuación es muy importante distinguir entre lo que son los EXTREMOS DEL ELEMENTO y lo que son los NODOS o PUNTOS NODALES. Los primeros se refieren propiamente a los puntos extremos del elemento flexible o barra, mientras que se consideran como nodos o puntos nodales los centroides de los cuerpos rígidos con que se completa el elemento compuesto. Así por ejemplo, los puntos j y k (ver fig. 3.2) son los extremos de la barra i, mientras que p y q son los nodos o - puntos nodales asociados a la misma.

* La notación y los sistemas de referencia que se utilizan en este trabajo se resumen en el apéndice A.4.

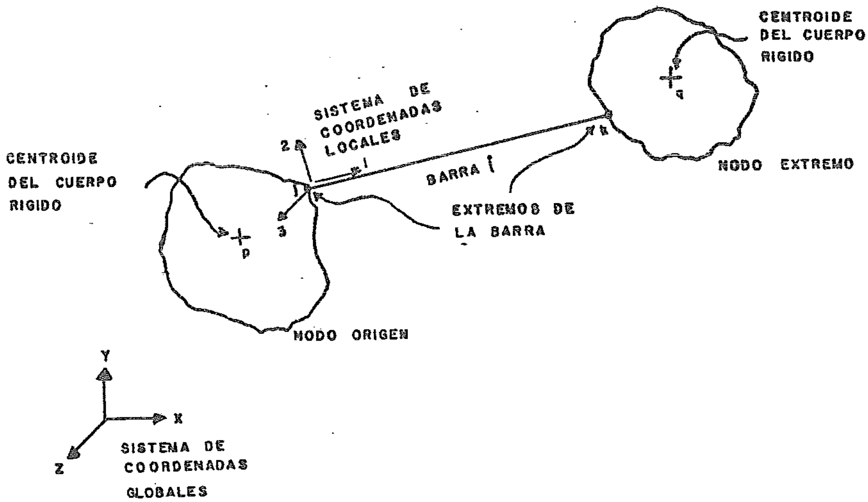


FIG. 3.2 Elemento viga compuesto

Sea $\underset{\sim}{K}$ la <u>matriz de rigidez en coordenadas locales</u> de la barra i-ésima (longitud jk) del elemento compuesto de la figura 3.2. Para poder ensamblar la matriz de rigidez de la estructura es necesario que el arreglo $\underset{\sim}{K}$ quede referido al sistema global, para ello se efectúa la conocida transformación:

$$(\underset{\sim}{K}_G)_i = \underset{\sim}{R}^T \; \underset{\sim}{K} \; \underset{\sim}{R} \qquad (3\text{-}2)$$

En la expresión anterior, el arreglo $(\underset{\sim}{K}_G)_i$ es la matriz de rigidez de barra <u>en coordenadas globales</u>, mientras que $\underset{\sim}{R}$ es una matriz de rotación que se obtiene a partir de los cosenos directores del eje del elemento. Naturalmente R^T representa la matriz transpuesta de R. La matriz $(K_G)_i$ así obtenida relaciona fuerzas y desplazamientos en los extremos del -- elemento, cuando estas cantidades están referidas al sistema global.

Por otra parte, considérese de momento únicamente el nodo origen del -- elemento, tal como se presenta en la figura 3.3. Ahí se señalan las - proyecciones del vector $\overline{pj}$ (que une al punto nodal con el extremo de la barra) sobre un sistema de ejes $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ paralelo al sistema global y que pasa por el centroide p del cuerpo rígido. Los componentes de di-- cho vector según la figura son:

$$\overline{XR}_j = X_j - X_p \qquad (3\text{-}3)$$

$$\overline{YR}_j = Y_j - Y_p$$

$$\overline{ZR}_j = Z_j - Z_p$$

Tanto las coordenadas del punto j como las del punto p que aparecen en - las ecuaciones anteriores, están dadas en el sistema global. En la figu ra se señalan los seis posibles grados de libertad del extremo j de la - viga en las direcciones X, Y, Z. Finalmente los desplazamientos que se indican en la figura son correspondientes a fuerzas que deben estar re-- feridas también al sistema X, Y, Z.

Se ha mencionado que es posible expresar los desplazamientos del extremo de la barra en función de los desplazamientos de un punto cualquiera del cuerpo rígido y que resulta conveniente que dicho punto sea el centroide del mismo. Entonces, para el nudo origen de la barra que se presenta en la figura 3.2, se tiene:

$$\underset{\sim}{D}_j = \underset{\sim}{T}_{jp} \; \underset{\sim}{D}_p \qquad (3\text{-}4)$$

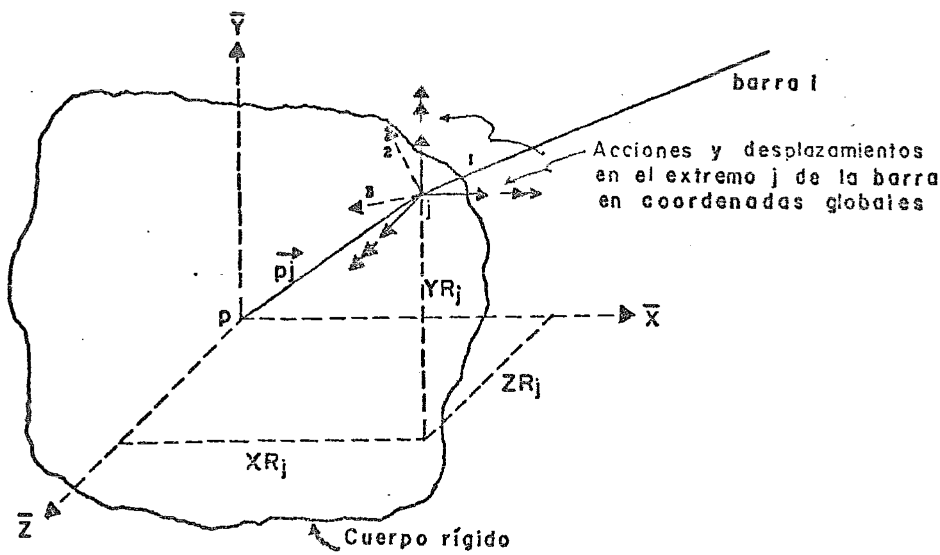


FIG. 3.3 Proyecciones del vector $\overrightarrow{pj}$ (nudo origen) en coordenadas globales

Asimismo, las acciones en el nodo pueden determinarse a partir de las acciones en el extremo de la viga por medio de una transformación similar a la ecuación (3-4). Si se denomina $\underset{\sim}{P}_j$ al vector de cargas en el extremo j en coordenadas globales y $\underset{\sim}{P}_p$ al vector de cargas en el nodo p , se puede demostrar que:

$$\underset{\sim}{P}_p = \underset{\sim}{T}_{jp}^{T} \; \underset{\sim}{P}_j \qquad (3\text{-}5)$$

Las expresiones (3-4) y (3-5) pueden generalizarse para considerar los dos extremos de la barra simultáneamente como sigue:

$$\underset{\sim}{D}_E = \underset{\sim}{T}_{ER}\ \underset{\sim}{D}_R \qquad (3\text{-}6)$$

y

$$\underset{\sim}{P}_R = \underset{\sim}{T}^T_{ER}\ \underset{\sim}{P}_E \qquad (3\text{-}7)$$

En donde el subíndice E se refiere a los extremos, mientras que R está asociado con los nodos (cuerpos rígidos) de la viga. En estas ecuaciones el orden de la matriz $\underset{\sim}{T}_{ER}$ será del doble del - de la matriz $\underset{\sim}{T}_{jp}$.

Por otra parte, la matriz $(\underset{\sim}{K}_G)_i$ relaciona fuerzas y desplazamientos en los extremos de la barra i en coordenadas globales; suprimiendo el subíndice por simplicidad, ésto puede expresarse como:

$$\underset{\sim}{P}_E = \underset{\sim}{K}_G\ \underset{\sim}{D}_E \qquad (3\text{-}8)$$

Sustituyendo la ecuación (3-6) en la ecuación (3-8) anterior se obtiene:

$$\underset{\sim}{P}_E = \underset{\sim}{K}_G\ \underset{\sim}{T}_{ER}\ \underset{\sim}{D}_R \qquad (3\text{-}9)$$

llevando la ecuación (3-9) a la ecuación (3-7) resulta:

$$\underset{\sim}{P}_R = \underset{\sim}{T}^T_{ER}\ \underset{\sim}{K}_G\ \underset{\sim}{T}_{ER}\ \underset{\sim}{D}_R \qquad (3\text{-}10)$$

La ecuación anterior establece una relación entre fuerzas y desplazamientos de los cuerpos rígidos (puntos nodales) en coordenadas globales. Resulta claro entonces, que la matriz mediante la cual puede obtenerse el vector $\underset{\sim}{P}_R$ a partir de los desplaza--

mientos mencionados, es la matriz de rigidez del elemento compuesto de la figura 3.2. De la ecuación (3-10) se desprende que esta matriz es:

$$(\underset{\sim}{K}_G)_R = \underset{\sim}{T}_{ER}^T \underset{\sim}{K}_G \underset{\sim}{T}_{ER} \qquad (3\text{-}11)$$

Teniendo en cuenta la expresión (3-2), la ecuación anterior puede escribirse finalmente como:

$$(\underset{\sim}{K}_G)_R = \underset{\sim}{T}_{ER}^T \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{T}_{ER} \qquad (3\text{-}12)$$

Este último resultado representa la ecuación fundamental del modelo propuesto, ya que como se dijo, permite obtener la matriz del elemento compuesto por una barra y dos cuerpos rígidos en sus extremos a partir de la matriz de rigidez de la barra en coordenadas locales de la viga flexible de longitud $\overline{jk}$ (figura 3.2). *

En lo que sigue se presenta la obtención de la matriz $\underset{\sim}{T}_{ER}$. Por simplicidad se ha escogido el caso plano aunque posteriormente se dan los resultados que corresponden al caso tridimensional.

Considérese que en el nodo de la figura 3.3, el plano X-Y contiene a los puntos p y j tal como se ilustra en la figura 3.4a; esto equivale a hacer $\overline{ZR}_j = 0$. En la figura se muestran los componentes $\overline{XR}_j$ y $\overline{YR}_j$ del vector $\underset{\sim}{\overline{pj}}$ el cual forma un ángulo θ con el eje X. En la figura 3.4b se indica la manera en que se numeran los seis posibles grados de libertad del punto nodal p, de los cuales sólo tres son relevantes en el caso bidimensional: D_1, D_2, y D_6.

*Los fundamentos de este método de análisis (método de rigideces) se describen en el apéndice A. 5.

Por otra parte de la geometría de la figura se desprende que:

$$\overline{YR}_j = \overline{pj}\ \mathrm{Sen}\ \theta \qquad (3\text{-}13)$$

$$\overline{XR}_j = \overline{pj}\ \mathrm{Cos}\ \theta \qquad (3\text{-}14)$$

Supóngase que se da un giro $D_{p6} = \delta\theta$ al cuerpo rígido como se ilustra en la figura, mientras los otros dos posibles desplazamientos del punto p; D_{p1} y D_{p2} permanecen fijos. En estas condiciones el punto j pasa a ocupar la posición j' y si el giro es pequeño se tiene que la distancia jj' resultará de la siguiente manera:

$$\overline{jj'} = \overline{pj}\ \delta\theta \qquad (3\text{-}15)$$

Si ahora se considera que el giro dado es unitario (esto es $\delta\theta = 1$) se obtiene:

$$\overline{jj'} = \overline{pj} \qquad (3\text{-}16)$$

las proyecciones del vector $\overline{jj'}$ en los ejes X e Y son:

$$\left.\begin{aligned} AB &= -\overline{jj'}\ \mathrm{Sen}\ \theta \\ CD &= \overline{jj'}\ \mathrm{Cos}\ \theta \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}17)$$

y por el resultado (3-16) estas expresiones pueden escribirse como:

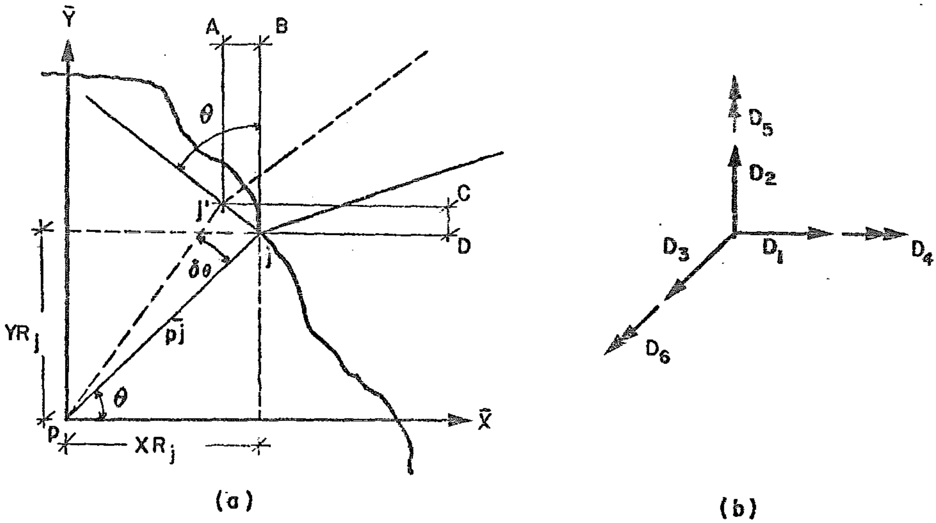


FIG. 3.4 Obtención de la matriz de transformación T en el caso plano.

$$AB = -\overline{pj}\ \text{Sen}\ \theta \qquad (3\text{-}18)$$

y

$$CD = \overline{pj}\ \text{Cos}\ \theta \qquad (3\text{-}19)$$

Comparando la ecuación (3-18) anterior con la ecuación (3-13) y la (3-19) con la ecuación (3-14) se concluye que:

$$AB = -\overline{YR}_j \qquad (3\text{-}20)$$

$$CD = \overline{XR}_j$$

Se puede observar en la figura 3.4 que las cantidades AB y CD dadas por las ecuaciones (3-20) representan las contribuciones del giro $D_{\bar{p}6}$ a los desplazamientos D_{j1} y D_{j2} del punto j respectivamente. De lo anterior se concluye que en el caso plano, los desplazamientos del extremo de la viga se expresan en función de los desplazamientos del nodo mediante las ecuaciones:

$$D_{j1} = D_{p1} - \overline{YR}_j \; D_{p6}$$

$$D_{j2} = D_{p2} + \overline{XR}_j \; D_{p6} \qquad (3\text{-}21)$$

$$D_{j6} = D_{p6}$$

las cuales matricialmente se pueden escribir en la forma de la ecuación (3-4) que se dió en párrafos anteriores. En forma análoga, si se considera el extremo k de la viga, se obtienen las siguientes expresiones:

$$D_{k7} = D_{q7} - \overline{YR}_k \; D_{q12}$$

$$D_{k8} = D_{q8} + \overline{XR}_k \; D_{q12} \qquad (3\text{-}22)$$

$$D_{k12} = D_{q12}$$

De (3-21) y (3-22) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} D_{j1} \\ D_{j2} \\ D_{j6} \\ \hdashline D_{k7} \\ D_{k8} \\ D_{k12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\overline{YR}_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \overline{XR}_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\overline{YR}_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \overline{XR}_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{p1} \\ D_{p2} \\ D_{p6} \\ \hdashline D_{q7} \\ D_{q8} \\ D_{q12} \end{bmatrix}$$

en donde (ver ec. 3.6):

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}_{ER} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{T}_{jp} & \underset{\sim}{0} \\ \hline \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{T}_{kq} \end{array}\right] \qquad (3.24)$$

siendo $\underset{\sim}{T}_{jp}$ y $\underset{\sim}{T}_{kq}$ las matrices de orden 3 que relacionan a los desplazamientos D_j y D_k con los desplazamientos D_p y D_q respectivamente en la - ecuación (3-23).

Finalmente las ecuaciones para el caso tridimensional pueden derivarse siguiendo un criterio similar al anterior y en forma reducida puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{D}_j \\ \underset{\sim}{D}_k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}_{jp} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{T}_{kq} \end{bmatrix}}_{\underset{\approx}{T}_{ER}} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{D}_p \\ \underset{\sim}{D}_q \end{bmatrix} \qquad (3.25)$$

En donde la matriz $\underset{\sim}{T}_{ER}$ resulta ahora de 12 x 12; esto es, ambas matri-- ces $\underset{\sim}{T}_{jp}$ y $\underset{\sim}{T}_{kq}$ son de orden 6. La primera de estas dos matrices es:

$$\underset{\sim}{T}_{jp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \overline{ZR}_j & -\overline{YR}_j \\ 0 & 1 & 0 & -\overline{ZR}_j & 0 & \overline{XR}_j \\ 0 & 0 & 1 & \overline{YR}_j & -\overline{XR}_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}26)$$

La matriz $\underset{\sim}{T}_{kq}$ es igual a la anterior, sólo que siendo ésta una relación de los desplazamientos del extremo k de la viga (ver fig. 3.2), el subíndice k debe reemplazar al j en los elementos correspondientes de la matriz. Así por ejemplo, el elemento (3, 4) de la matriz $\underset{\sim}{T}_{kq}$ será $\overline{YR}_k$ en lugar de $\overline{YR}_j$.

3.3 Cargas en los Pedestales

Para revisar los esfuerzos máximos que se desarrollan en un pedestal es necesario llevar a cabo un análisis estático de la estructura. Por otra parte, para la obtención de los desplazamientos en la misma un análisis dinámico es lo adecuado. En ocasiones, para el análisis de desplazamientos resulta más apropiado un análisis pseudodinámico, esto es, un análisis en el que las cargas dinámicas son reemplazadas en forma racional, por cargas estáticas equivalentes. En cualquiera de estos casos sin embargo, es necesario identificar las condiciones de carga significativas, ya que no todas ellas ocurren en forma simultánea. En lo que sigue se describen cada una de las cargas que intervienen en un análisis estático y en un análisis pseudodinámico del pedestal.

a) Carga muerta.

Esta carga incluye el peso propio de la estructura y el peso de todas las componentes del turbogenerador. El peso propio de la estructura puede determinarse sin dificultad, conocidas la geometría de la misma y el peso específico del concreto. Las cargas resultantes se consideran distribuidas uniformemente a lo largo de los elementos horizontales. En el caso de las columnas, sus pesos se suponen como cargas concentradas en los nudos del marco tridimensional con que se idealiza un pedestal.

Por otra parte los pesos del generador, turbinas, gobernador y excita--

dor se distribuyen en las vigas longitudinales y transversales del nivel de operación de la estructura, como se ejemplifica en la figura --- 3.5.. Todas estas cargas son transmitidas al pedestal generalmente a través de placas de acero ,las cuales se encuentran ancladas en las vigas de la estructura. Debe señalarse que estas cargas son excéntricas, por lo que los efectos de torsión deben ser considerados en el análisis.

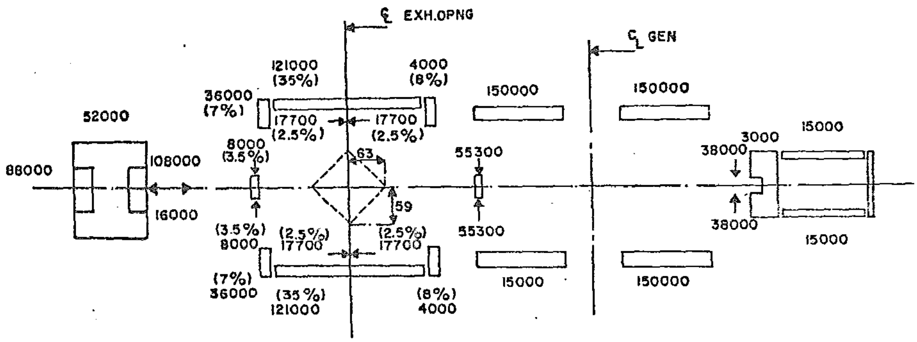


Fig.3.5 Distribución de Cargas en el Nivel de Operación de la Estructura

b) Carga de vacío

Esta carga es debida a la diferencia entre la presión atmosférica y el - vacío que se produce en el condensador durante la operación del turbogenerador. Una distribución típica sobre un pedestal se indica en la figura 3.5 y sus valores se obtienen a partir de los porcentajes indicados - por el fabricante de las máquinas, quien generalmente es el que proporciona la distribución y los porcentajes de este tipo de cargas. Esta -- carga lo mismo que los pesos de la máquina, se suponen actuando en el nivel de operación y dirigidas hacia abajo.

c) Cargas por cambio de temperatura

Con objeto de determinar las cargas producidas por los cambios de temperatura durante la operación del turbogenerador, se consideran diferencias de temperatura en dirección vertical y longitudinal del pedestal. Las variaciones de temperatura se suponen de 20°F, de acuerdo a recomendaciones de la "guía de diseño C-2.10" (referencia 7). La temperatura media ambiente se considera de 80°F. En la dirección vertical se recomienda emplear una distribución exponencial de la siguiente forma:

$$T_o = C_1 e^{kx} \qquad (3.27)$$

Las constantes C_1 y k se determinan a partir de condiciones de borde.

Por otra parte, en la dirección longitudinal de la estructura normalmente se supone una distribución lineal; como se muestra en la figura 3.6. Conocidas estas distribuciones de temperatura, es posible determinar los valo-

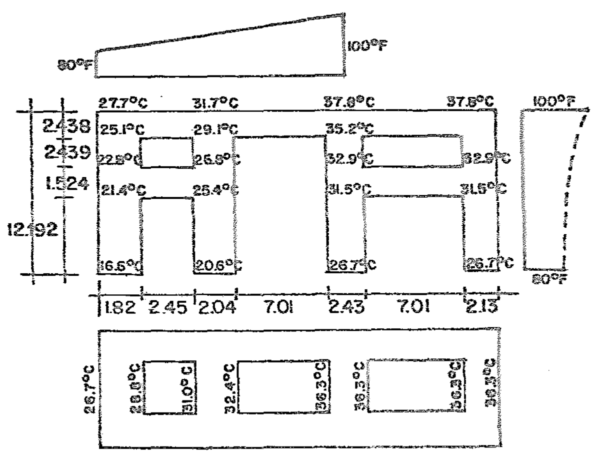


Fig.3.6 Distribución de Temperatura en el Pedestal

res de ésta en distintas partes de la estructura. A partir de estos valores se determinan los elementos mecánicos en los elementos estructurales producidos por las diferencias de temperatura calculadas. Estas fuerzas son las que se consideran en el análisis de cargas por temperatura.

d) Contracción y flujo Plástico

Los efectos de contracción y flujo plástico en el concreto de estructuras de soporte para turbogeneradores deben incluirse en el análisis, especialmente cuando se revisan desplazamientos (referencia 7). Esto se debe a que dichos efectos producen deformaciones que pueden contribuir a que se sobrepasen los límites impuestos a los movimientos de los apoyos del rotor.

Las deformaciones por contracción se deben a cambios en el contenido de agua en el concreto a lo largo del tiempo y normalmente la mayor parte de éstas ocurren en los primeros meses después de la construcción de la estructura. Para simular su efecto se supone una caída de 20°F en la temperatura, siendo mayor ésta en el nivel de la losa de cimentación y menor en el nivel de operación. Esta consideración está también indicada en la guía de diseño antes mencionada. Una vez determinada la temperatura en diferentes puntos, se pueden obtener (igual que en el caso anterior) las fuerzas que actúan en la estructura correspondientes al efecto de contracción.

Por otra parte, el flujo plástico es un fenómeno de deformación bajo carga continua. Las deformaciones en este caso aumentan con la duración de la carga. Para un pedestal, las deformaciones por flujo plástico reciben dos contribuciones, una del peso propio de la estructura y la segunda de los pesos del equipo mecánico. Nuevamente, en base a recomendaciones de la guía de diseño antes citada, se consideran los siguientes porcentajes de esta carga: peso de la estructura 12% y peso del turbogenerador 25%.

Hasta aquí se han descrito únicamente cargas estáticas. Existen otros tipos de cargas, las cuales por su naturaleza deben ser consideradas en el análisis dinámico de la estructura. Estas fuerzas actúan sobre el pedestal en dos ocasiones : la primera durante la operación del turbogenerador y la segunda cuando se presentan condiciones de emergencia. Las principales cargas que se desarrollan para las condiciones normales de operación son: el par de la turbina, el par del generador y las cargas de fricción. Condiciones de emergencia se tienen cuando se produce un corto circuito en el generador o durante un sismo.

e) Par de la turbina.

Este es un momento producido por la rotación del eje del turbogenerador y su valor se obtiene con respecto a éste. Las fuerzas que componen el par se pueden suponer uniformemente distribuidas en las vigas longitudinales del pedestal. De acuerdo a recomendaciones de la guía que se ha venido mencionando, el momento se considera actuando en la dirección opuesta a la rotación del eje de la turbina.

El momento actuante se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$T_t = \frac{(7040)\ P_t}{N} \qquad (3\text{-}28)$$

En la expresión anterior, T_t es el par de la turbina expresada en kg-m; P_t es la potencia transmitida por la turbina dada en kilowatts, y N es la velocidad de rotación del eje expresada en r.p.m.

La ecuación (3-28) puede derivarse simplemente considerando las energías de entrada y de salida, suponiendo que se tiene un sistema conservador -- (i.e. no hay perdidas de energía). En estas condiciones, la energía de entrada es el trabajo desarrollado por el eje de la máquina, que se escribe como:

$$T_g(\text{ft-lb}) \cdot \underline{N}(\text{rpm}) = 2\pi \cdot T_g \cdot N\ (\text{ft-lb/min})$$

La salida es la energía generada por la turbina, que resulta:

$$P_t \text{ (kw)} = 2\ 656\ 000\ P_t \text{ (lb-pie)/60 min.}$$

ya que 1 kw-hr = 2 656 000 (lb-pie)/60 min.

Igualando las energías de entrada y salida se obtiene:

$$2\pi \quad T_t\ N = \frac{2\ 656\ 000\ P_t}{60}$$

$$\therefore \quad T_t = \frac{2\ 656\ 000\ P_t}{2\pi\ (60)\ N} = \frac{7\ 045\ P_t}{N} \doteq \frac{7\ 040\ P_t}{N}$$

La ecuación (3-28) se obtiene en el sistema MKS a partir de la última expresión, simplemente considerando los factores de conversión:

1 pie = 0.3048 m y 1 lb = 0.4536 kg

f) Par del generador

El momento que se desarrolla en la zona donde se encuentra el generador se obtiene a partir de una ecuación similar a la (3-28), en donde T_t se sustituye por T_g (par del generador) y P_t es sustituida por P_g (potencia del generador). La derivación de dicha ecuación es semejante a la de la ecuación (3-28). En este caso una vez obtenido el momento, los valores de las fuerzas que actúan en las vigas longitudinales se determinan simplemente dividiendo el momento entre la distancia centro a centro de los apoyos que soportan el generador. Se supone que el par actúa en la dirección en que gira el turbogenerador, por lo que las fuerzas resultan verticales.

g) Fuerzas de fricción

Estas son fuerzas que actúan principalmente en dirección horizontal (a diferencia de todas las anteriores que son esencialmente verticales). Las - fuerzas de fricción se desarrollan en los apoyos de la máquina, durante la operación de la misma. Los valores de estas fuerzas se señalan en el es-- quema de la figura 3.5 y son proporcionados por el fabricante.

h) Corto circuito en el generador

Esta es una condición de carga accidental que debe revisarse. Las fuerzas que se desarrollan debidas a corto circuito producen un momento de cabeceo en la estructura. En este caso se supone un valor del momento igual a --- diez veces el valor del par en el generador que se discutió anteriormente. Este factor de ampliación no es arbitrario, sino que se toma en base a las recomendaciones que se presentan en la guía de la Ref. 7.

i) Fuerzas sísmicas

Para la obtención de las fuerzas sísmicas que se suponen actuando en el -- pedestal, es necesario realizar un análisis sísmico de la estructura. La determinación de sus parámetros está en función del tipo de estructura y - de la zona en que se encuentre la unidad. Se debe señalar que es importante el efecto de torsión, ya que los centros de masa y rigideces del pedestal no coinciden.

El análisis de la respuesta dinámica de una estructura no está dentro del alcance del presente trabajo. Unicamente se indicará como puede hacerse - un análisis de frecuencias de pedestales para la revisión del comportamiento dinámico de estas estructuras.

Hasta ahora, se ha mencionado la importancia de las computadoras digitales para el desarrollo de las nuevas técnicas de análisis para el tipo de estructuras que se estudian en este trabajo. En el siguiente capítulo se describe un programa de computadora que ha sido implementado específicamente para analizar las estructuras que se están describiendo.

CAPITULO 4. ADAPTACION DE UN PROGRAMA DE COMPUTADORA

4.1 Introducción.

Para el análisis de las estructuras que se estudian en este trabajo se adaptó un submódulo del programa de computadora SAP-V. SAP (Structural Analysis Program) es un programa que utiliza la técnica del elemento finito para el análisis estático y dinámico de sistemas estructurales complejos , cuya bondad y eficiencia son ampliamente reconocidos.

El programa SAP apareció por primera vez en 1969, fue desarrollado en la Universidad de California en Berkeley y se han presentado diferentes versiones del mismo. En particular se trabajó con la quinta versión del programa, el cual está escrito en FORTRAN-V.

El programa SAP-V originalmente contiene nueve distintos tipos de elementos finitos: armadura, viga, sólido tridimensional, cascarón, placa, elemento en deformación plana, elemento en esfuerzo plano, sólido axisimétrico, elemento de tubería y elemento de frontera.Estos elementos están organizados en forma de OVERLAYS, es decir, para cada elemento hay un grupo de subrutinas adecuadas a las características propias del elemento, por lo cual es relativamente fácil obtener subprogramas para usos específicos.

4.2 Descripción del programa SAPV-TGNDIN.

El módulo que se adaptó (SAPV-TGNDIN) tiene la capacidad de analizar tanto estática como dinámicamente sistemas estructurales (como el del pedestal-losa de cimentación-suelo que se describirá en el siguiente capítulo), modelados de la siguiente manera:

a) La superestructura o pedestal se idealiza mediante elementos sólidos tridimensionales y de viga, con los cuales es posible incluir las dimensiones finitas de las intersecciones de vigas y columnas.

b) La losa de cimentación se modela mediante elementos de placa.

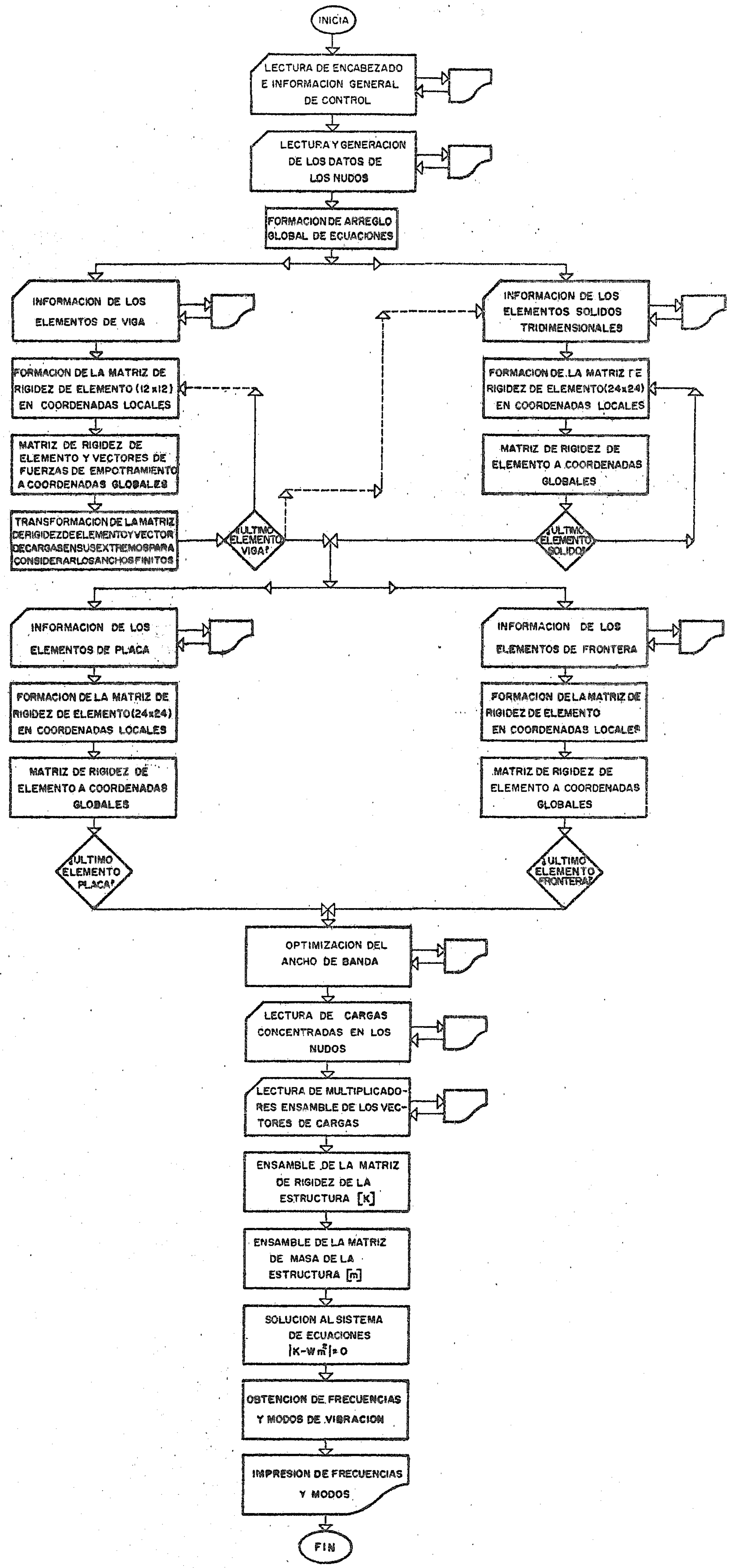
c) El suelo se idealiza por medio de elementos de frontera, considerando que las propiedades del suelo pueden darse mediante resortes cuya rigidez es obtenida a partir del módulo de reacción del suelo.

El programa autocontenido para el análisis de estructuras de soporte para turbogeneradores, está organizado como se ilustra en el diagrama de bloques de la figura 4.1. Los diferentes subprogramas que conforman SAPV-TGNDIN llevan a cabo las operaciones siguientes:

"MAIN" (programa principal). Esta parte del programa controla el flujo de solución y contiene las subrutinas comunes a todos los elementos finitos. Aquí se lee la información general de control, los datos de los nodos, número de tipos de elementos, condiciones de carga, tipo de solución requerida (estática o dinámica), los grados de libertad asociados a los puntos nodales y coordenadas de los mismos.

El programa determina a cuáles de los grados de libertad se les asocia una ecuación de equilibrio, a partir de las condiciones de frontera que se especifiquen para los puntos nodales. Las ecuaciones correspondientes a grados de libertad fijos no son retenidas para la solución. También aquí se determina el ancho de banda de la matriz de rigideces y se renumeran los puntos nodales para minimizar dicho ancho de banda cuando sea necesario. Naturalmente el cálculo y minimización del ancho de banda se efectúan después de que la matriz ha sido calculada para los diferentes tipos de elementos. Para ésto intervienen los overlays de los diferentes elementos finitos, como el del elemento viga tridimensional donde se leen los datos de las vigas, como son: las propiedades del material, propiedades geométricas de las secciones (área transversal, momentos de inercia), fuerzas de empo-

FIG. 4-1 MACRODIAGRAMAS DE FLUJO DEL PROGRAMA SAP V TONBIN



tramiento, incidencias de las barras y los anchos finitos. Para los elementos sólidos tridimensionales otro grupo de subrutinas realizan la lectura de sus datos como son: incidencias, número de elementos, propiedades de sus materiales, etc. En una forma análoga actúan las partes del programa que corresponden a los elementos de placa y de frontera.

Volviendo al programa principal, una vez que se determinaron las matrices de rigidez para los diferentes tipos de elementos que intervienen en un problema particular, se continúa con la lectura y formación de los arreglos de cargas aplicadas en los puntos nodales. Después de que se obtiene lo anterior, el programa ensambla la matriz de rigidez de la estructura, la cual se obtiene sumando la matriz de rigidez de los elementos que la forman. Finalmente se obtiene la solución del sistema de ecuaciones (3-1). Para lo cual el programa emplea el método de Gauss, optimizado en tal forma que se requiere un número mínimo de operaciones. Obtenidos los desplazamientos en los puntos nodales de la estructura, se determinan los esfuerzos en los elementos que la forman.

Para determinar las frecuencias naturales de vibración y la configuración modal de la estructura, el programa efectúa los mismos pasos señalados anteriormente hasta el ensamble de la matriz de rigidez de la estructura. El programa determina entonces, la matriz diagonal de masas de la estructura. Con esto se completan las matrices que se requieren para obtener las frecuencias naturales de la estructura por medio de la ecuación:

$$|K-w^2m| = 0 \qquad (4\text{-}1)^*$$

la cual es llamada ecuación de frecuencias del sistema. Desarrollando el determinante anterior se obtiene una ecuación de grado n en función de las

* En el apéndice B se presentan algunos conceptos fundamentales de dinámica estructural.

frecuencias w para un sistema de n grados de libertad. Las n raíces de esta ecuación (w_1^2, w_2^2, w_3^2, ..., w_n^2) representan las frecuencias de los n modos de vibración posibles en el sistema. El programa determina únicamente las frecuencias que el usuario considere necesarias, es decir, por medio de tarjetas de control se le indica al programa si se requieren todas las frecuencias o sólo algunas de ellas. Las frecuencias y los modos de vibración se obtienen mediante un overlay de solución. Finalmente se imprimen los resultados obtenidos.

4.3 Transformaciones necesarias al programa original.

A partir del programa original se implementó un módulo independiente con seis overlays integrados. Con objeto de validar este módulo autocontenido se corrieron ejemplos de solución conocida. Una vez validado el programa, se realizaron los cambios necesarios para tomar en cuenta las consideraciones del capítulo 3.

El cambio más significativo al programa consistió en la introducción de las transformaciones implícitas en las ecuaciones (3-6),(3-7) y (3-12) para que el programa tuviera la capacidad de considerar las dimensiones finitas de los nodos, para el empleo del elemento viga compuesto que se presentó anteriormente. Para ello se modificaron sustancialmente las subrutinas que corresponden al elemento viga y se introdujeron dos subrutinas denominadas NEWSTF y NEWLD.

El programa modificado determina inicialmente la matriz de rigidez $\underset{\sim}{K}$ (ecuación 3-2) de cada barra (tramo j-k, fig.3.2) y forma el arreglo de cargas $\underset{\sim}{P}$ asociado a los extremos j y k de las barras (fig.3.2), también referido a coordenadas locales. Luego se realiza el producto de la matriz de rigidez $\underset{\sim}{K}$ anterior por la matriz de rotación $\underset{\sim}{R}$; con ésto se obtiene una matriz que relaciona fuerzas en coordenadas locales con desplazamientos que corresponden aún a los puntos j y k de la barra. Esta matriz es almacenada en disco, ya que será empleada más adelante para obtener los esfuerzos cuando los desplazamientos han sido calculados.

De lo descrito en el párrafo anterior resulta claro que no ha sido considerada aún la influencia que tienen los puntos nodales tomados como cuerpos rígidos. Para ello al programa se le proporcionan como datos, las proyecciones de los componentes (en coordenadas globales) de los vectores que unen a los puntos p y j en el nodo origen y los puntos q y k en el nodo extremo de cada barra (fig 3.3). Debe mencionarse que para formar la matriz de rigidez K se tomó en cuenta la longitud efectiva de la barra j-k, la cual se obtiene a partir de las coordenadas de q y k y los componentes de los vectores antes mencionados. Estos componentes se emplean para formar la matriz $\underset{\sim}{T}$, que por una parte transforma los desplazamientos de los puntos p y q en desplazamientos de los extremos j y k de la barra, y también sirve para relacionar las acciones de los puntos j y k con fuerzas actuando en los centroides de los cuerpos rígidos por medio de la ecuación (3-7). Con la matriz de transformación $\underset{\sim}{T}$ entonces, se obtiene la matriz de rigidez del elemento compuesto mediante el producto matricial:

$$(\underset{\sim}{K}_G)_R = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{K}_G \underset{\sim}{T} \qquad (4\text{-}2)$$

Posteriormente la matriz de rigidez de la estructura se ensambla a partir de matrices como la anterior, quedando entonces:

$$\{\underset{\sim}{K}\} = \Sigma_i \; \{ (\underset{\sim}{K}_G)_R \}_i \qquad (4\text{-}3)$$

desde i=1, hata el número total de elementos.

Una vez ensamblada la matriz de rigidez anterior, se obtienen los desplazamientos de los puntos nodales de la estructura a partir de la ecuación:

$$\underset{\sim}{P}_R = \underset{\sim}{K} \; \underset{\sim}{D}_R \qquad (4\text{-}4)$$

Para la solución de este sistema se emplea, como se mencionó anteriormente, el método de Gauss. En la exresión anterior $\underset{\sim}{K}$ es la matriz dada por la ecuación (4-3), mientras que $\underset{\sim}{P}_R$ es el vector de cargas en los centroides de los cuerpos rígidos que se obtienen mediante una ecuación similar a la (3-7).

Conocidos los desplazamientos de los puntos nodales, es posible determinar los desplazamientos de los extremos de las barras mediante el producto:

$$\underset{\sim}{D}_E = \underset{\sim}{T} \; \underset{\sim}{D}_R \qquad (4\text{-}5)$$

Finalmente, es posible calcular los esfuerzos ($\underset{\sim}{E}$) en los extremos de las barras a partir de la matriz $\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{R}$ que relaciona los desplazamientos antes calculados $\underset{\sim}{D}_E$ en coordenadas globales con las acciones externas en los extremos de las barras en coordenadas locales, esto es:

$$\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{K} \; \underset{\sim}{R} \; \underset{\sim}{D}_E \qquad (4\text{-}6)$$

Por último, las subrutinas correspondientes a la solución dinámica no sufrieron ninguna modificación y simplemente fueron adaptadas al sistema UNIVAC de la Comisión Federal de Electricidad. (La versión original del programa fue escrita para sistemas IBM 370).

En el capítulo anterior se discutió el método de análisis que se empleó para la solución de estructuras de apoyo para turbogeneradores. En este capítulo se presentó el programa de computadora que se adaptó para la solución de dichas estructuras. En el siguiente capítulo se presenta por último un ejemplo de aplicación que permitió validar tanto los modelos empleados, como el programa que se sugiere para llevar a cabo los análisis mencionados.

CAPITULO 5. EJEMPLO DE APLICACION.

5.1 Descripción del problema.

La estructura que se estudia en este capítulo es la que soporta a la unidad No. 1 de la Planta Termoeléctrica de Valle de México; la estructura es de concreto reforzado. En la figura 3.1 se ilustra a escala el pedestal, sus dimensiones se señalan en metros. Como puede apreciarse en la figura, las columnas del marco son prismáticas con sección transversal rectangular aunque no todas son iguales. Las vigas longitudinales tienen también su sección transversal rectangular. En cuanto a las vigas transversales, dos de ellas (las de los marcos centrales) tienen las secciones irregulares mostradas en la figura 5.1, mientras que en las restantes sus secciones transversales son rectangulares. Aunque la losa de cimentación no se incluye en la figura 3.1, se mencionará que ésta tiene un peralte constante de 2.13 metros, con ésto se pretende dar rigidez a la estructura en su parte inferior para minimizar los efectos de asentamientos diferenciales.

La estructura que se está describiendo presentó problemas aparentes para las condiciones de carga a las que se encontraba sometida. Estos problemas fueron: la aparición de grietas en las columnas y la presencia de asentamientos, los cuales originaron desplazamientos diferenciales en el nivel de operación. Por otra parte, la unidad tendría cambios tanto en su frecuencia de operación, como en las características del rotor mismo, debido al proceso de unificación de frecuencias llevado a cabo en el país recientemente.

Por los motivos descritos en el párrafo anterior, se consideró necesario estudiar el comportamiento de la estructura para estas nuevas condiciones, con objeto de investigar si se podía garantizar el adecuado funcionamiento del turbogenerador. Para enfatizar la necesidad de este análisis, supóngase primeramente que el diseño original del pedestal correspondió a uno de alta sintonía; en estas condiciones el aumento de la frecuencia de excitación tendería a mover al sistema hacia la zona de resonancia del modo fundamental, y la pérdida de rigidez por agrietamiento lo podría situar en un rango de amplificaciones excesivas de desplazamientos y por tanto de esfuerzos. Por otra parte si se supone que la estructura es de baja sintonía, el incremento de la frecuencia de operación tenderá a alejar al sistema de la región crítica del primer modo, acercándolo a la correspondiente del modo inmediato superior.

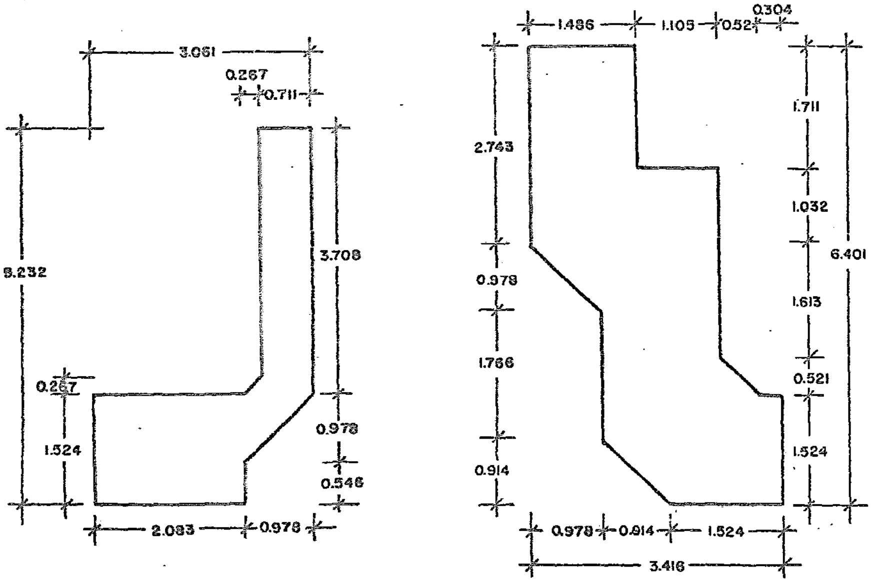


Fig.5.1 Geometría de las Secciones Transversales de los Diafragmas de los Marcos Centrales de la Estructura de la Fig.3.1

La presencia de grietas en este tipo de estructuras se debe principalmente a efectos de temperatura o bien, éstas pueden ser causadas por contracción del concreto. Esto se debe a que teniendo el concreto muy baja conductividad térmica, los gradientes de temperatura causados por fuentes de calor (localizadas en distintas partes del turbogenerador y de sus elementos auxiliares) se acentúan. Esto tiene como resultados la generación de esfuerzos considerables, distorsiones locales y eventualmente grietas.

Por otro lado, los asentamientos de estructuras de soporte para turbogeneradores pueden ser fundamentalmente de dos tipos. El primero de ellos se debe a los movimientos periódicos que resultan de la operación de las máquinas principalmente durante su encendido y apagado; estos movimientos son generalmente reversibles. El segundo tipo de asentamientos incluye deformaciones a largo plazo en el suelo de cimentación, compactación de suelos granulares debidos a vibraciones ocasionadas por condiciones de emergencia y deformaciones en los elementos estructurales de la cimentación debido a contracción y flujo plástico en el concreto; estos movimientos son por lo general irreversibles.

Para estudiar el problema que se presenta, se analizará el pedestal de la unidad mencionada cuando éste se encuentra sometido a las nuevas condiciones de operación. Debe considerarse que, tanto por el cambio de la frecuencia de operación como por el cambio de las características del rotor, las fuerzas excitadoras provocarán un cambio en el comportamiento del pedestal.

En primer lugar es necesario garantizar que las deformaciones de la estructura no producirán desplazamientos en la misma que excedan las tolerancias que señala el fabricante para el funcionamiento apropiado del turbogenerador. Además será indispensable revisar los niveles de esfuerzo en los elementos estructurales. Debido a que no se contó con el modelo dinámico del rotor, no se realizó un análisis dinámico completo, sin embargo se llevó a cabo un análisis pseudodinámico en el cual las fuerzas de carácter dinámico se aproximan como fuerzas estáticas equivalentes.

Por otra parte, es necesario realizar un análisis de frecuencias para verificar si éstas no tienen valores cercanos a la frecuencia de operación del turbogenerador (3600 rpm). En caso de que esto suceda, se podría presentar el fenómeno de resonancia, el cual ocasionaría que los desplazamientos de la estructura se amplificaran, impidiendo la operación normal del equipo.

A continuación se presentan los modelos empleados para la revisión estructural de la unidad mencionada. Los modelos (tres en total) se utilizaron para lo siguiente:

Modelo-1

a) Análisis estático y pseudodinámico para la determinación de esfuerzos y desplazamientos.
b) Análisis de frecuencias.

Modelo-2

a) Análisis estático y pseudodinámico para la determinación de esfuerzos y desplazamientos.
b) Análisis de frecuencias.

Modelo-3

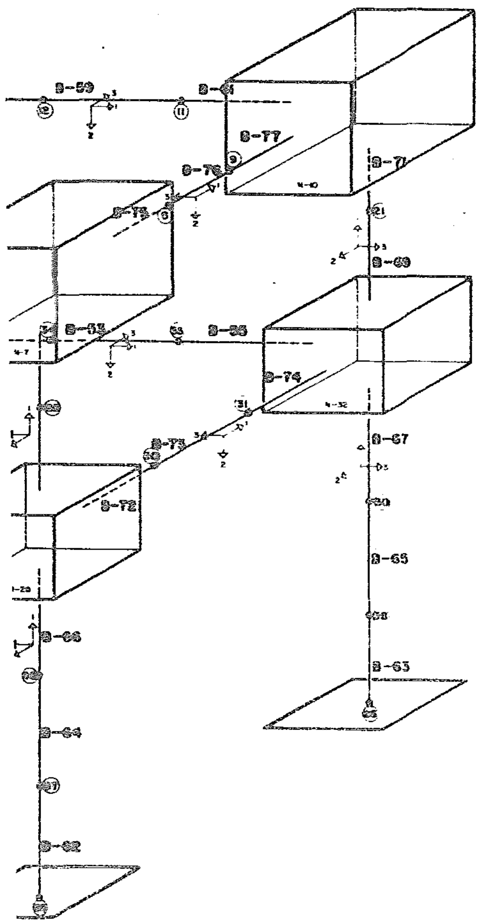
a) Análisis de frecuencias.

5.2 Modelo-1.

El primer modelo que se estudió, es el más simplificado de los modelos que se presentan. Se consideró necesario en primer lugar analizar la estructura únicamente para cargas estáticas, como son el peso propio de la misma, los pesos de los componentes del turbogenerador y cargas estáticas equivalentes, obtenidas de cargas dinámicas como: par del turbogenerador, par de la turbina, etc. A partir de este análisis se pretendían verificar por una parte, los desplazamientos de los puntos de apoyo del turbogenerador y por otra parte determinar los niveles de esfuerzos que se desarrollan en los diferentes miembros del pedestal, causados por estas cargas. El modelo que mejor aproximaría las características de la estructura podría formarse empleando elementos sólidos tridimensionales. Sin embargo el número de grados de libertad que se obtendrían con esta idealización sería muy grande,por lo cual un modelo así resulta poco práctico.

Por otra parte es importante considerar a la estructura en forma tridimensional,ya que únicamente de esta manera puede tenerse en cuenta la interacción de todos los elementos que la forman. Debido a lo anterior el modelo que se escogió anteriormente para el análisis estático se obtuvo a partir de una combinación de elementos de viga con apéndices rígidos y elementos de viga simples. Dado que la principal motivación de esta revisión estática del comportamiento de la estructura era determinar las deformaciones y esfuerzos que se desarrollan en la superestructura, el pedestal se consideró completamente empotrado en la losa de cimentación.

En la figura 5.2 se ilustra el modelo de la estructura. Se señala ahí el sistema global de referencia X, Y, Z, cuyo origen se encuentra en una de las esquinas (nivel 0.0) de la barra-1. Además de este sistema global, se tienen sistemas locales para cada barra, algunos de los cuales coinciden en orientación. Así por ejemplo, las barras 1 a 10, 25 a 30, y 44 a 49 tienen sus sistemas locales orientados en la misma forma. Puede verse en la figura que para todas las barras, el eje longitudinal se ha hecho coincidir con el eje local 1, mientras que los ejes 2 y 3 definen sus ejes principa


B-59
B-77
B-71
B-76
B-75
B-69
B-55
B-56
B-74
B-73
B-67
B-72
B-65
B-66
B-63
B-64
B-62

EXICO

les de flexión. El modelo está constituido por 77 elementos de viga con 14 secciones transversales diferentes, se tienen únicamente 74 puntos nodales en el modelo. Puede apreciarse en la figura que los elementos viga fueron subdivididos en elementos de la misma longitud obteniéndose así una mayor cantidad de puntos nodales; ésto se hizo porque se pretende utilizar este modelo, como parte de un modelo con el que se estudiarán las frecuencias del sistema pedestal-cimentación-suelo, y para dicho modelo es conveniente concentrar las masas de la estructura en todos esos puntos nodales. En la tabla T.1 se muestran las propiedades de los elementos viga del pedestal, en la primera columna de la tabla se indica el número de barra, en seguida se anotan las incidencias de cada una de ellas, en la columna 3 se tienen sus longitudes. Otras propiedades geométricas como el área de la sección transversal, área de cortante, inercia torsional y los momentos de inercia en las direcciones principales se anotan también en esta tabla. Debe notarse que todas las barras, a excepción de las 31, 32, 33, 40, 41, 42 y 43, tienen su sección transversal rectangular. Las secciones transversales de las 7 vigas antes mencionadas son muy irregulares y tienen momentos de inercia mayores, su geometría se presentó en la figura 5.1.

En cuanto a las propiedades mecánicas del concreto del pedestal se consideró un módulo de elasticidad de 2.925×10^6 T/M^2, el mó- de Poisson es de 0.25 y el peso volumétrico de 2,4 T/M^3.

Las cargas que intervienen en el análisis pseudodinámico son: la carga muerta, la carga de vacío, cargas por cambio de temperatura, contracción y flujo plástico, par de la turbina, par del generador, fuerzas de fricción, corto circuito en el generador, y fuerzas sísmicas. La determinación de todas estas fuerzas se des

BARRA	INCIDENCIAS ORIGEN	INCIDENCIAS EXTRE.	LONGITUD (M)	SECCION TRANSVER. (M^2)	AREA CORTANTE (M^2)	INERCIA TORSIONAL (M^4)	INERCIA (EJE 2) (M^4)	INERCIA (EJE 3) (M^4)
1	62	54	1.930	3.93	2.88	1.63	0.97	0.94
2	69	61	1.930	3.93	2.88	1.63	0.97	0.94
3	54	46	1.930	3,93	2.88	1.63	0.97	0.94
4	61	53	1.930	3.93	2.88	1.63	0.97	0.94
5	46	23	1.93	3.93	2.88	1.63	0.97	0.94
6	53	38	1.930	3.93	2.88	1.63	0.97	0.94
7	23	19	1.219	3.93	2.88	1.63	0.97	0.94
8	38	22	1.219	3.93	2.88	1.63	0.97	0.94
9	19	1	1.219	3.93	2.88	1.63	0.97	0.94
10	22	16	1.219	3.93	2.88	1.63	0.97	0.94
11	23	40	1.659	2.78	2.36	1.08	0.77	0.54
12	40	39	1.659	2.78	2.36	1.08	0.77	0.54
13	39	38	1.659	2.78	2.36	1.08	0.77	0.54
14	1	18	1.659	4.52	3.84	2.60	2.75	1.06
15	18	17	1.659	4.52	3.84	2.60	2.75	1.06
16	17	16	1.659	4.52	3.84	2.60	2.75	1.06
17	23	24	1.219	2,82	2.40	1.11	0.81	0.55
18	38	37	1.219	2.82	2.40	1.11	0.81	0.55
19	24	25	1.219	2.82	2.40	1.11	0.81	0.55
20	37	36	1.219	2.82	2.40	1.11	0.81	0.55
21	1	2	1.318	4.52	3.84	2.78	1.29	2.24
22	16	15	1.318	4.52	3.84	2.78	1.29	2.24
23	2	25	1.318	4.52	3.84	2.78	1.29	2.24
24	15	36	1.318	4.52	3,84	2.78	1.29	2.24
25	63	55	1.930	5.10	4.34	3.64	2.55	1.84
26	68	60	1.930	5.10	4.34	3.64	2.55	1.84
27	55	47	1.930	5.10	4.34	3.64	2.55	1.84
28	60	52	1.930	5.10	4.34	3.64	2.55	1.84
29	47	25	1.930	5.10	4.34	3.64	2.55	1.84
30	52	36	1.930	5.10	4.34	3.64	2.55	1.84

Tabla T.1 Propiedades de los elementos viga del modelo-1.

BARRA	INCIDENCIAS ORIGEN	INCIDENCIAS EXTR.	LONGITUD (M)	SECCION TRANSVER. (M^2)	AREA CORTANTE (M^2)	INERCIA TORSIONA. (M^4)	INERCIA (EJE 2) (M^4)	INERCIA (EJE 3) (M^4)
31	25	41	1.621	6.32	5.37	1.84	2.28	16.92
32	41	42	1.621	6.32	5.37	1.84	2.28	16.92
33	42	36	1.621	6.32	5.37	1.84	2.28	16.92
34	25	3	1.380	5.06	4.30	3.57	1.81	2.51
35	36	14	1.380	5.06	4.30	3.57	1.81	2.51
36	3	4	1.380	5.06	4.30	3.57	1.81	2.51
37	14	13	1.380	5.06	4.30	3.57	1.81	2.51
38	4	26	1.380	5.06	4.30	3.57	1.81	2.51
39	13	35	1.38	5.06	4.30	3.57	1.81	2.51
40	26	46	0.946	12.57	10.68	11.26	4.30	43.82
41	43	44	0.946	12.57	10.68	11.26	4.30	43.82
42	44	45	0.946	12.57	10.68	11.26	4.30	43.82
43	45	35	0.946	12.57	10.68	11.26	4.30	43.82
44	64	56	1.930	5.97	5.08	5.05	2.99	2.96
45	67	59	1.930	5.97	5.08	5.05	2.99	2.96
46	56	48	1.930	5.97	5.08	5.05	2.99	2.96
47	59	28	1.930	5.97	5.08	5.05	2.99	2.96
48	48	26	1.930	5.97	5.08	5.05	2.99	2.96
49	51	35	1.930	5.97	5.08	5.05	2.99	2.96
50	26	27	2.322	2.82	2.40	1.11	0.81	0.55
51	35	34	2.322	2.82	2.40	1.11	0.81	0.55
52	27	28	2.322	2.82	2.40	1.11	0.81	0.55
53	34	33	2.322	2.82	2.40	1.11	0.81	0.55
54	28	29	2.322	2.82	2.40	1.11	0.81	0.55
55	33	32	2.322	2.82	2.40	1.11	0.81	0.55
56	26	5	2.322	5.23	4.44	3.83	2.62	1.99
57	35	12	2.322	5.23	4.44	3.83	2.62	1.99
58	5	6	2.322	5.23	4.44	3.83	2.62	1.99
59	12	11	2.322	5.23	4.44	3.83	2.62	1.99
60	6	7	2.322	5.23	4.44	3.83	2.62	1.99

Tabla T.1 Continuación.

BARRA	INCIDENCIAS ORIGEN	INCIDENCIAS EXTRE	LONGITUD (M)	SECCION TRANSVER. (M^2)	AREA CORTANTE (M^2)	INERCIA TORSIONAL (M^4)	INERCIA (EJE 2) (M^4)	INERCIA (EJE 3) (M^4)
61	11	10	2.322	5.23	4.44	3.83	2.62	1.99
62	65	57	1.930	3.95	3.36	2.19	1.13	1.50
63	66	58	1.930	3.95	3.36	2.19	1.13	1.50
64	57	49	1.930	3.95	3.36	2.19	1.13	1.50
65	58	50	1.930	3.95	3.36	2.19	1.13	1.50
66	49	29	1.930	3.95	3.36	2.19	1.13	1.50
67	50	32	1.930	3.95	3.36	2.19	1.13	1.50
68	29	20	2.322	3.95	3.36	2.19	1.13	1.50
69	32	31	2.322	3.95	3.36	2.19	1.13	1.50
70	20	7	2.322	3.95	3.36	2.19	1.13	1.50
71	21	10	2.322	3.95	3.36	2.19	1.13	1.50
72	29	30	1.659	3.25	2.76	1.41	1.23	6.29
73	30	31	1.659	3.25	2.76	1.41	1.23	6.29
74	31	32	1.659	3.25	2.76	1.41	1.23	6.29
75	7	8	1.168	4.55	3.87	2.93	1.72	1.72
76	8	9	1.168	4.55	3.87	2.93	1.72	1.72
77	9	10	1.168	4.55	3.87	2.93	1.72	1.72

Tabla T.1 Continuación.

cribió en el capítulo 3. Sin embargo, no todas estas fuerzas que acaban de mencionarse actúan simultáneamente y para analizar el pedestal se escogen algunas combinaciones de éstas que corresponden a condiciones de operación y de emergencia desfavorables.

En primer lugar se consideraron cuatro condiciones de carga, las cuales se denominaron A, B, C y D. Estas son:

Condición A: Peso propio de la estructura
+ peso propio de la máquina
+ flujo pástico (correspondiente a los dos pesos anteriores)

Condición B: Carga de vacío
+ par del generador
+ par de la turbina
+ carga de fricción
+ carga debida a temperatura

Condición C: Corto circuito del generador

Condición D: Efectos de contracción.

Los valores de los esfuerzos críticos en la estructura se encontraron a partir de los resultados de la combinación de carga para la condición de emergencia más desfavorable. En lo que sigue debe entenderse como condición crítica aquella para la cual se obtiene el menor valor del factor de resistencia. Este factor es el cociente de la fuerza resistente entre la fuerza actuante en un miembro cualquiera de la estructura.

Para obtener los valores de resistencia mínimos fue necesario identificar aquellas barras en que se presentaron fuerzas máximas actuantes, para valores mínimos de resistencia. En cada caso se analizaron las barras más esforzadas para la condición de flexocompresión, para lo cual se empleó la formula de Bresler:

$$\frac{1}{P_r} = \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} - \frac{1}{P_o} \qquad (5\text{-}1)$$

en la que:

P_r = Carga axial resistente con excentricidad en 2 direcciones

P_2 = Carga axial resistente con excentricidad $e_2 \neq 0$

P_3 = Carga axial resistente con excentricidad $e_3 \neq 0$

P_o = Carga axial resistente cuando $e_2 = e_3 = 0$

Una vez determinada la carga P_r anterior, se comparó con la carga actuante, obteniéndose así el factor de resistencia en cada caso. El efecto de torsión se revisó únicamente para la barra en la que el momento torsionante es máximo. En la tabla T.2 se resumen los resultados del análisis descrito hasta el momento:

Barra No.	Axial (Ton)	Flexión M2 (Ton-m)	Flexión M3 (Ton-m)	Resistencia (Ton)	Factor de resistencia
5	332* -280	- 17 - 11	190 122	4670	9.8
48	688 -502	325 325	87 87	10059	10.2
16	17 - 17	- 15 34	35 38	411	25.0
60	29 - 29	158 66	- 17 100	104	2.5

Tabla T.2 Obtención de factores de resistencia

* El primer renglón corresponde al extremo origen de la barra y el segundo corresponde al extremo final de dicha barra.

Por otra parte, los desplazamientos de la estructura se revisaron para las condiciones normales de operación (combinación de las condiciones de carga A + B + D); para ello se empleó el criterio de General Electric (ref) que establece que el radio de curvatura R del eje del rotor no debe ser menor de 241.4 km. La obtención del radio de curvatura se hace en función del desplazamiento relativo máximo de los apoyos del rotor mediante la ecuación:

$$R = \frac{L_1 \, L_2}{K \, D} \qquad (5\text{-}2)$$

la cual es válida para verificar el alineamiento vertical y horizontal del rotor. Para discutir los términos de la ecuación anterior, considérese la planta de la estructura mostrada en la figura siguiente:

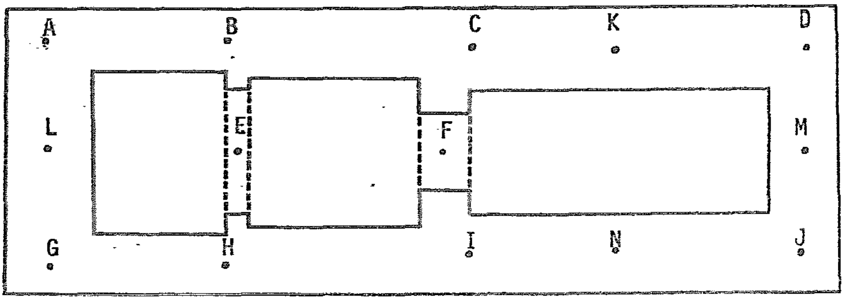


Fig. 5.3 Localización de puntos en el nivel de operación.

en donde:

R = Radio de curvatura del eje del rotor (en Km).

L_1= Distancia entre dos apoyos consecutivos (L y E en la figura 5.3)

L_2= Igual a L_1 sólo que ahora entre los apoyos E y F.

D = Desplazamiento relativo entre el punto E y la cuerda que une a los puntos L y F. (ver figura 5.4)

K = 2000 cuando L_1 y L_2 están dados en metros.

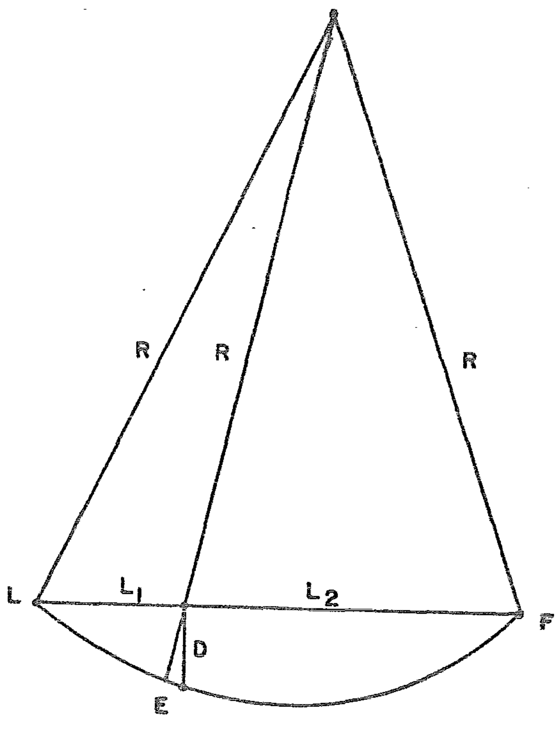


Fig. 5.4 Criterio de la deflexiones de la General Electric.

Con objeto de verificar si el comportamiento dinámico de pedestales para turbogeneradores, se puede estudiar mediante modelos obtenidos a partir de elementos de viga compuestos, se llevó a cabo el análisis de frecuencias del modelo-1. Los resultados que se obtuvieron para las primeras 5 frecuencias se presentan en la tabla T.3. Estos resultados se compararan con los obtenidos para el modelo más aproximado (modelo-2) que se presenta más adelante. Se encontraron en ambos casos resultados muy parecidos (ver tabla T.6).

Modo Número	Frecuencia (rpm)	Período (seg)
1	1896.6	0.0316
2	2468.4	0.0243
3	2595.0	0.0231
4	2965.2	0.0202
5	3886.2	0.0154

Tabla T.3 Frecuencias y períodos del modelo-1.

En virtud de que un elemento de decisión importante, para escoger el modelo adecuado para el análisis de frecuencias del sistema - padestal-losa de cimentación-suelo, es el tiempo de ejecución en computadora, a continuación se presenta el tiempo invertido por el sistema UNIVAC- 1100 en el análisis de frecuencias del modelo-1 descrito:

TIEMPO DE COMPUTADORA	
	hrs:min:seg
C.P.U	00:04:34
I/O	00:11:25
OTROS	00:02:14
TOTAL	00:18:01

Tabla T.4 Tiempos de computadora para el análisis de frecuencias del modelo-1.

5.3 Modelo-2.

El modelo-2 es mucho más complejo que el descrito en párrafos anteriores. La necesidad de analizar este modelo, se debe a que no se tenía la certidumbre de que una idealización tan simplificada como la del modelo-1 fuera adecuada. El presente modelo fue desarrollado tanto para comparar los resultados del análisis pseudodinámico que se hizo (ref16), así como para realizar un análisis de frecuencias y hacer una comparación con el análisis correspondiente del modelo-1 que fue descrito anteriormente. Cabe destacar que a pesar de que el análisis pseudodinámico de ambos modelos resultara semejante no se podía concluir que los análisis modales de ambos modelos lo serían.

En la figura 5.5 se muestra el modelo número 2 del pedestal. Si se compara este modelo con el descrito anteriormente, se puede notar que los nudos 25, 26,35 y 36, así como las barras 31,32, 33, 40, 41, 42 y 43 del modelo-1, se han discretizado mediante elementos sólidos con ocho puntos nodales cada uno de ellos.- También puede apreciarse que en este modelo no se consideró la losa de cimentación, es decir, se supuso que las columnas están completamente empotradas.

En este nuevo modelo del pedestal se ha elegido el mismo sistema de coordenadas globales del caso anterior. Los diafragmas discretizados con los elementos sólidos tridimensionales se denominan módulo I y módulo II como se indica en la figura.

El modelo consta de 397 puntos nodales. En la misma figura 5.5 se presentan tablas que permiten localizar los puntos nodales de los módulos I y II. Así por ejemplo, el punto nodal en la intersección h-ii de la tabla correspondiente al módulo II es el nudo 254 y corresponde en la figura al nudo origen de la barra 38. Del mismo modo las dos tablas de la derecha (también en la figura 5.5) permiten identificar el número de cada uno de los elementos sólidos tridimensionales de los módulos I y II. En total se tienen -

PUNTOS NODALES DE LOS ELEMENTOS SOLIDOS

MODULO I

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x
i	13	19	25	31	37	46	55	61	70	79	85	94	103	109	118	127	136	145	154	163	172	181	190	199
ii	14	20	26	32	38	47	56	62	71	80	86	95	104	110	119	128	137	146	155	164	173	182	191	200
iii	15	21	27	33	39	48	57	63	72	81	87	96	105	111	120	129	138	147	156	165	174	183	192	201
iv					40	49		64	73		88	97		112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202
v					41	50		65	74		89	98		113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203
vi					42	51	.	66	75		90	99		114	123	132	141	150	159	168	177	186	195	204
vii	16	22	28	34	43	52	58	67	76	82	91	100	106	115	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205
viii	17	23	29	35	44	53	59	68	77	83	92	101	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206
ix	18	24	30	36	45	54	60	69	78	84	93	102	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207

MODULO II

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
i	208	214	220	226	232	239	246	253	259	266	273	280	286	293	300	307	314	321	328	335	342
ii	209	215	221	227	233	240	247	254	260	267	274	281	287	294	301	308	315	322	329	336	343
iii	210	216	222	228	234	241	248	255	261	268	275	282	288	295	302	309	316	323	330	337	344
iv					235	242	249		262	269	276		289	296	303	310	317	324	331	338	345
v	211	217	223	229	236	243	250	256	263	270	277	283	290	297	304	311	318	325	332	339	346
vi	212	218	224	230	237	244	251	257	264	271	278	284	291	298	305	312	319	326	333	340	347
vii	213	219	225	231	238	245	252	258	265	272	279	285	292	299	306	313	320	327	334	341	

ELEMENTOS SOLIDOS [illegible]

MODULO I

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
I	1	5	9	13	21	25	33	37	41	49	57	65	73	81
II	2	6	10	14	22	26	34	38	42	50	58	66	74	82
III				15		27			43	51	59	67	75	83
IV				16		28			44	52	60	68	76	84
V				17		29			45	53	61	69	77	85
VI				18		30			46	54	62	70	78	86
VII	3	7	11	19	23	31	35	39	47	55	63	71	79	87
VIII	4	8	12	20	24	32	36	40	48	56	64	72	80	88

MODULO II

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
I	89	93	97	101	107	113	117	123	127	133	139	145
II	90	94	98	102	108	114	118	124	128	134	140	146
III				103	109		119		129	135	141	147
IV				104	110		120		130	136	142	148
V	91	95	99	105	111	115	121	125	131	137	143	149
VI	92	96	100	106	112	116	122	126	132	138	144	150

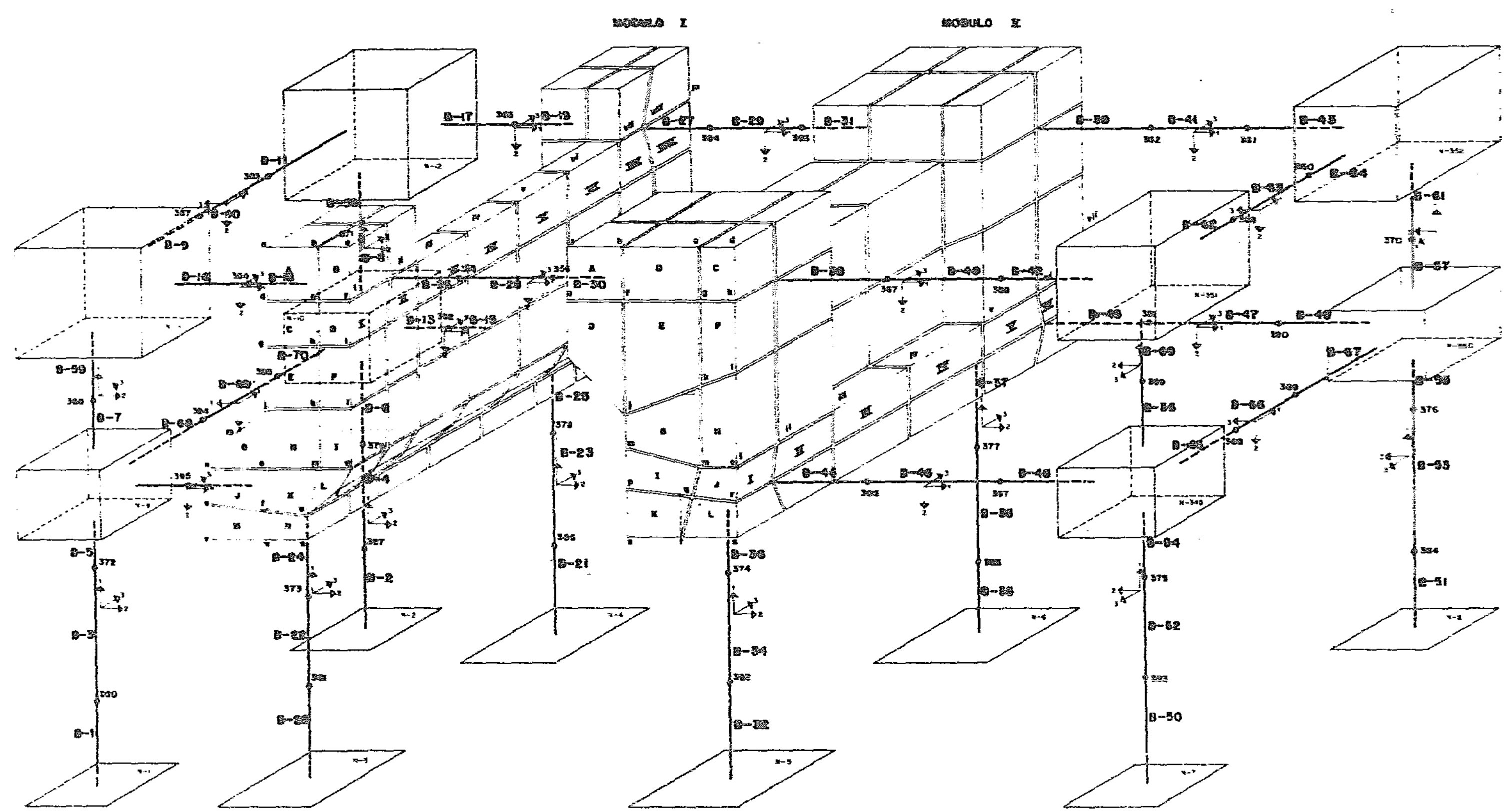


FIG. 5.5 MODELO - 2

70 barras, en las cuales se presentan 12 secciones transversales diferentes. Los nudos de dimensión finita son ocho.

Las propiedades mecánicas del concreto son las mismas que para el modelo anterior.

Los resultados obtenidos del análisis pseudodinámico son del mismo orden de magnitud que los del modelo-1. En la tabla T.5 se presentan resumidos algunos de estos resultados;

Barra No.	Axial (Ton)	Cortante (Ton)	Cortante (Ton)	Torsión (Ton-m)	Flexión (Ton-m) M2	Flexión (Ton-m) M3
36	688 -502	30 - 30	-112 112	——— ———	325 325	87 87
37	619 -433	36 - 36	134 -134	——— ———	-390 -390	105 105
38	11 - 11	89 -210	- 6 6	162 137	18 27	123 300

Tabla T.5 Valores máximos de esfuerzos; modelo-2.

La mayoría de los elementos críticos tuvieron un factor de resistencia del orden de 10. Esto quiere decir, que los elementos estructurales soportan diez veces más el valor de la carga actuante. Por otra parte, para los desplazamientos, se encontró que en la condición de carga número 1, el radio de curvatura en la condición más desfavorable fue del doble del mínimo requerido, y en la condición de carga número 4, el valor del radio de curvatura fue del triple de dicho valor mínimo.

Resumiendo el análisis pseudodinámico, se analizaron esfuerzos y desplazamientos en la estructura para las nuevas condiciones de operación y para los dos modelos hasta aquí descritos. Para los esfuerzos se consideraron fundamentalmente condiciones de emergencia. Las fuerzas de naturaleza dinámica se aproximaron como cargas estáticas equivalentes. Para los desplazamientos se revisaron únicamente condiciones normales de operación. Se obtuvieron factores de resistencia altos para las barras más esforzadas y para las condiciones de carga más desfavorables.

Como se señaló anteriormente, se llevó a cabo,con fines comparativos, un análisis de frecuencias de este segundo modelo.

En la tabla siguiente se muestran las frecuencias y los períodos que se obtuvieron con el modelo-2.

Modo No.	Período (seg)	Frecuencia (rpm)
1	0.0273	2195.4
2	0.0247	2421.0
3	0.0203	2954.4
4	0.0130	4585.8
5	0.0110	5426.4

Tabla T.6 Frecuencias y períodos del modelo-2.

Es importante notar que debido a la mayor discretización del presente modelo se incrementó el número de grados de libertad, lo cual incrementó el tiempo de ejecución como puede notarse en la tabla T.7, donde se indican los tiempos que consumió el análisis de frecuencias de este segundo modelo.

TIEMPO DE COMPUTADORA hrs:min:seg	
CPU	01:05:01
I/O	01:48:34
OTROS	00:18:25
TOTAL	03:12:00

Tabla T.7 Tiempos de computadora para el análisis de frecuencias del modelo-2.

De los resultados anotados en esta tabla se puede concluír que un modelo completo del sistema pedestal-losa de cimentación-suelo en base a este segundo modelo resultaría muy poco práctico, ya que se incrementaría el costo de computación en un 400 %. Además, y más importante, el hecho de que las frecuencias de los modelos 1 y 2 (comparar tablas T.3 y T.6) sean muy parecidas permite garantizar que un tercer modelo compuesto por el pedestal del modelo-1, la losa de cimentación y el suelo pueda ser una buena idealización para analizar el sistema completo.

5.4 Modelo-3.

Como ya se ha mencionado, con el estudio de los dos modelos anteriores se pretendía por una parte, determinar en la forma más aproximada tanto los esfuerzos como los desplazamientos de la estructura. Asimismo, se pretendían obtener las frecuencias de la misma y compararlas para validar el modelo simplificado. Una vez que se ha hecho ésto, se debe analizar el sistema completo (estructura-cimentación-suelo) para lo cual se aprovecha el modelo simplificado que forma parte del modelo que aquí se presenta.

Este modelo se ilustra en la figura 5.6. El total de puntos nodales es de 128 y el número de vigas es de 77, las vigas como en el modelo-1 tienen 14 secciones transversales diferentes.Como se mencionó en el párrafo anterior,en este modelo se añadió la losa de cimentación, la cual se idealizó por medio de elementos de placa, con un total de 56 elementos de este tipo. La idealización del suelo fue hecha mediante elementos de frontera, con 65 elementos aplicados en los puntos nodales de la losa de cimentación. Como se puede notar en la figura 5.6, los nudos 62, 72 y 122 tienen aplicados más de un elemento de frontera, ésto se hizo con el fin de dar estabilidad al sistema evitando giros en el sentido del eje Z. El resto de los elementos de frontera proporcionan la resistencia al giro en las otras dos direcciones. Cabe aclarar que estos elementos de frontera horizontales(aplicados en los nudos 62, 72 y 122) solo restringen el giro de todo el sistema en conjunto. Por otra parte, debido a la gran rigidez de la losa de cimentación, se está partiendo de la hipótesis de que las deformaciones angulares en su propio plano son despreciables por lo que se han igualado a cero.

Los sistemas de referencia tanto global como local son idénticos a los del modelo-1, lo mismo que las propiedades mecánicas del concreto. El módulo de reacción con que se calculó la rigidez de los elementos de frontera es de 10 T/M^2.

Las frecuencias y los períodos que se obtuvieron con este modelo se muestran en la tabla T.8. En dicha tabla puede apreciarse que las frecuencias de los primeros modos de la estructura son menores que las que se encontraron en los dos modelos anteriores. Esto es razonable ya que la losa de cimentación rigidiza la estructura debido a sus dimensiones tan gran

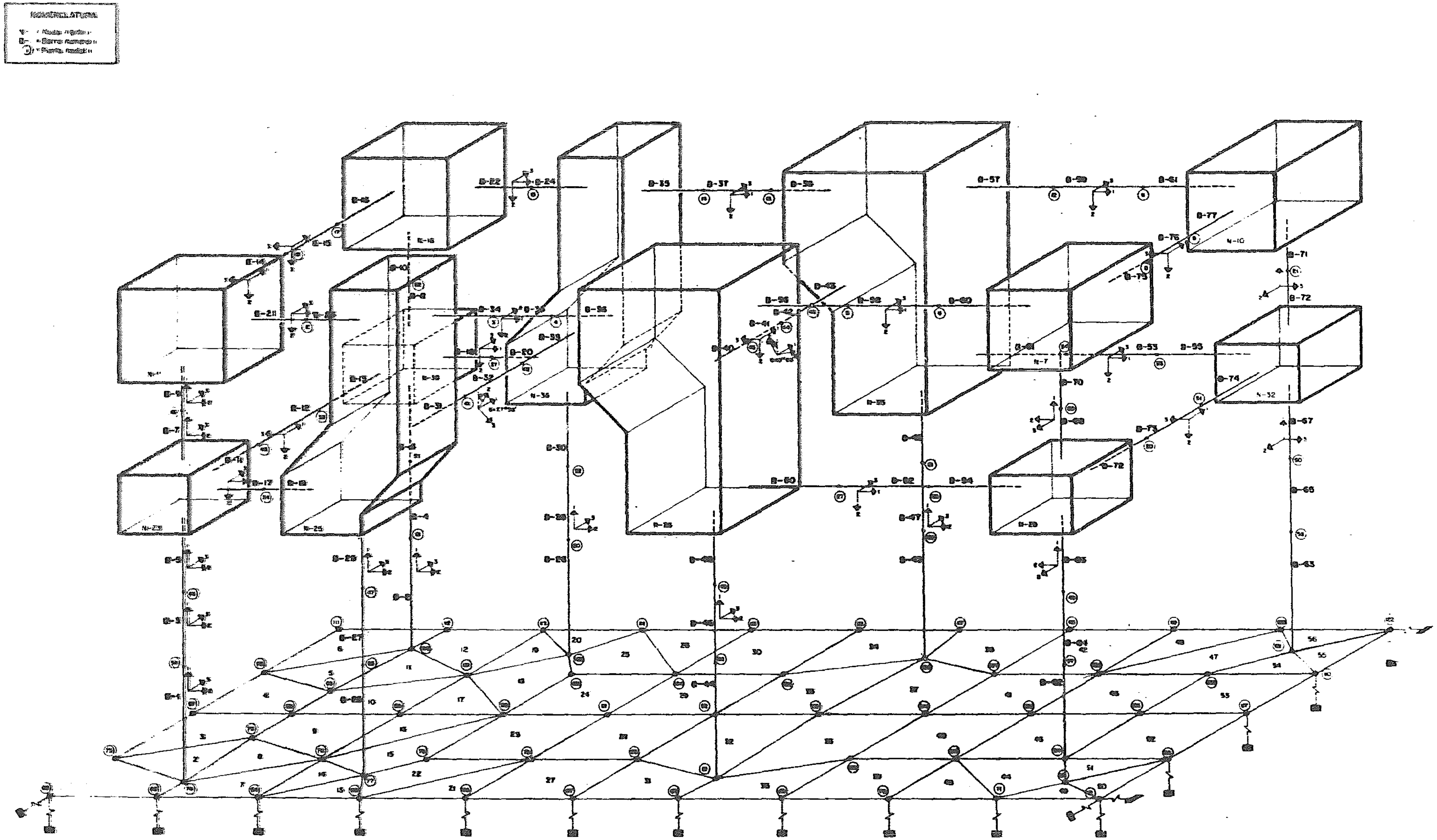


FIG. 5.6 MODELO - 3 DEL PEDESTAL DE LA UNIDAD No.-1 DE LA PLANTA TERMOELECTRICA VALLE DE MEXICO

des.

Modo Número	Período (seg)	Frecuencia (rpm)
1	0.0622	963.6
2	0.0545	1101.0
3	0.0399	1502.4

Tabla T.8 Frecuencias y períodos del modelo-3.

Mediante el análisis del tercer modelo entonces, es posible concluir que las frecuencias del sistema pedestal-losa de cimentación-suelo se encuentran alejadas de la frecuencia de operación del turbogenerador. Por lo que es de esperarse que el comportamiento del sistema será adecuado para las nuevas excitaciones a que se verá sometido. A continuación se presenta un listado de los resultados que se obtuvieron con el modelo número 3.

```
  SSSSSSSSSS      AAAAAAAAAA     PPPPPPPPPPP
 SSSSSSSSSSSS    AAAAAAAAAAAA    PPPPPPPPPPPP
 SS        SS    AA        AA    PP        PP
 SS              AA        AA    PP        PP
 SSS             AA        AA    PP        PP
  SSSSSSSSS      AAAAAAAAAAAA    PPPPPPPPPPPP
   SSSSSSSSS     AAAAAAAAAAAA    PPPPPPPPPPP
         SSS     AA        AA    PP
          SS     AA        AA    PP
 SS       SS     AA        AA    PP
 SSSSSSSSSSSS    AA        AA    PP
  SSSSSSSSSS     AA        AA    PP
```

JPL VERSION ABRIL 29, 1977

```
TTTTTTTTTTTT    GGGGGGGGGG    NN         NN    DDDDDDDDDD       IIIIII    NN          NN
TTTTTTTTTTTT   GGGGGGGGGGGG   NNN        NN    DDDDDDDDDDD      IIIIII    NNN         NN
     TT        GG        GG   NNNN       NN    DD        DD       II      NNNN        NN
     TT        GG        GG   NNNNN      NN    DD        DD       II      NNNNN       NN
     TT        GG             NN NNN     NN    DD        DD       II      NN NNN      NN
     TT        GG             NN  NNN    NN    DD        DD       II      NN  NNN     NN
     TT        GG     GGGGG   NN   NNN   NN    DD        DD       II      NN   NNN    NN
     TT        GG     GGGGGG  NN    NNN  NN    DD        DD       II      NN    NNN   NN
     TT        GG        GG   NN     NNNNN     DD        DD       II      NN     NNNNN
     TT        GG        GG   NN      NNNN     DD        DD       II      NN      NNNN
     TT        GGGGGGGGGGGG   NN       NNN     DDDDDDDDDDD      IIIIII    NN       NNN
     TT         GGGGGGGGGG    NN        NN     DDDDDDDDDD       IIIIII    NN        NN
```

MODELO 3 PEDESTAL PT VALLE DE MEXICO - ELEMENTOS VIGA,PLACA Y FRONTERA

```
INFORMACION DE CONTROL

     NUMERO DE PUNTOS NODALES          =    128
     NUMERO DE TIPOS DE ELEMENTOS      =      3
     NUMERO DE CASOS DE CARGA          =      6
     NUMERO DE FRECUENCIAS             =      5
     CODIGO DE ANALISIS (NDYN)         =      4
        EQ.0,  ESTATICO
        EQ.1,  EXTRACCION MODAL
        EQ.2,  RESPUESTA DINAMICA
        EQ.3,  ESPECTRO DE RESPUESTA
        EQ.4,  INTEGRACION DIRECTA
        EQ.5,  RESPUESTA DE FRECUENCIA
        EQ.6,  ANALISIS DE PANDEO
     MODO DE SOLUCION (MODEX)          =      0
        EQ.0,  EJECUCION
        EQ.1,  VERIFICACION DE DATOS
     NUMERO DE SUBESPACIO
     [illegible] DE ITERACION (NAD)    =      8
     ECUACIONES POR BLOQUE             =      5
     [illegible]                       =      0
     CONSTANTE GRAVITACIONAL           =   9.8100
     MEMORIA DINAMICA TOTAL (MTOT)=15000
MINIMIZACION DEL ANCHO DE BANDA REQUERIDA
MEMORIA REQUERIDA PARA ESTE PASO =    1201
```

DATOS GENERADOS DE LOS PUNTOS NODALES

NODO NUMERO	CONDICIONES DE FRONTERA X	Y	Z	XX	YY	ZZ	COORDENADAS DE LOS NODOS X	Y	Z	T
1	0	0	0	0	0	0	1.349	.927	10.973	.000
2	0	0	0	0	0	0	4.916	.927	10.973	.000
3	0	0	0	0	0	0	9.622	1.038	10.973	.000
4	0	0	0	0	0	0	11.802	1.038	10.973	.000
5	0	0	0	0	0	0	18.120	.226	11.125	.000
6	0	0	0	0	0	0	20.442	1.226	11.125	.000
7	0	0	0	0	0	0	23.825	1.226	11.125	.000
8	0	0	0	0	0	0	23.825	3.713	11.125	.000
9	0	0	0	0	0	0	23.825	4.974	11.125	.000
10	0	0	0	0	0	0	23.825	7.461	11.125	.000
11	0	0	0	0	0	0	20.442	7.461	11.125	.000
12	0	0	0	0	0	0	18.120	7.461	11.125	.000
13	0	0	0	0	0	0	11.802	7.649	10.973	.000
14	0	0	0	0	0	0	9.622	7.649	10.973	.000
15	0	0	0	0	0	0	4.916	7.760	10.973	.000
16	0	0	0	0	0	0	1.349	7.760	10.973	.000
17	0	0	0	0	0	0	1.349	5.473	11.354	.000
18	0	0	0	0	0	0	1.349	3.515	11.354	.000
19	0	0	0	0	0	0	.914	.927	8.534	.000
20	0	0	0	0	0	0	23.825	.927	8.354	.000
21	0	0	0	0	0	0	23.825	7.760	8.354	.000
22	0	0	0	0	0	0	.914	7.760	8.354	.000
23	0	0	0	0	0	0	.914	.927	6.553	.000
24	0	0	0	0	0	0	3.040	.927	6.553	.000
25	0	0	0	0	0	0	6.159	.927	8.737	.000
26	0	0	0	0	0	0	14.319	1.226	9.259	.000
27	0	0	0	0	0	0	18.120	.927	6.553	.000
28	0	0	0	0	0	0	20.442	.927	6.553	.000
29	0	0	0	0	0	0	23.825	.927	6.553	.000
30	0	0	0	0	0	0	23.825	3.515	6.553	.000
31	0	0	0	0	0	0	23.825	5.473	6.553	.000
32	0	0	0	0	0	0	23.825	7.760	6.553	.000
33	0	0	0	0	0	0	20.442	7.760	6.553	.000
34	0	0	0	0	0	0	18.120	7.760	6.553	.000
35	0	0	0	0	0	0	14.319	7.461	9.259	.000
36	0	0	0	0	0	0	6.159	7.760	8.737	.000
37	0	0	0	0	0	0	3.048	7.760	6.553	.000
38	0	0	0	0	0	0	.914	7.760	6.553	.000
39	0	0	0	0	0	0	.914	5.473	6.553	.000
40	0	0	0	0	0	0	.914	3.546	6.553	.000
41	0	0	0	0	0	0	6.113	3.713	7.681	.000
42	0	0	0	0	0	0	6.113	4.794	7.681	.000
43	0	0	0	0	0	0	13.950	3.397	8.870	.000
44	0	0	0	0	0	0	13.950	4.343	8.870	.000
45	0	0	0	0	0	0	13.950	5.290	8.870	.000
46	0	0	0	0	0	0	.914	927	3.860	.000
47	0	0	0	0	0	0	5.309	1.226	3.860	.000
48	0	0	0	0	0	0	14.570	1.226	3.860	.000
49	0	0	0	0	0	0	23.825	.927	3.860	.000
50	0	0	0	0	0	0	23.825	7.760	3.860	.000
51	0	0	0	0	0	0	14.570	7.460	3.860	.000
52	0	0	0	0	0	0	5.309	7.460	3.860	.000
53	0	0	0	0	0	0	.914	7.760	3.860	.000
54	0	0	0	0	0	0	.914	.927	1.930	.000
55	0	0	0	0	0	0	5.309	1.226	1.930	.000
56	0	0	0	0	0	0	14.570	1.226	1.930	.000
57	0	0	0	0	0	0	23.825	.927	1.930	.000
58	0		0	0	0	0	23.825	7.760	1.930	.000

59	0	0	0	0	0	0	14.570	7.460	1.930	.000
60	0	0	0	0	0	0	5.309	7.460	1.930	.000
61	0	0	0	0	0	0	.914	7.760	1.930	.000
62	0	0	0	-1	-1	-1	-2.032	.000	-2.134	.000
63	0	0	0	-1	-1	-1	.914	.000	-2.134	.000
64	0	0	0	-1	-1	-1	3.454	.000	-2.134	.000
65	0	0	0	-1	-1	-1	6.198	.000	-2.134	.000
66	0	0	0	-1	-1	-1	8.941	.000	-2.134	.000
67	0	0	0	-1	-1	-1	11.684	.000	-2.134	.000
68	0	0	0	-1	-1	-1	14.427	.000	-2.134	.000
69	0	0	0	-1	-1	-1	17.170	.000	-2.134	.000
70	0	0	0	-1	-1	-1	19.914	.000	-2.134	.000
71	0	0	0	-1	-1	-1	22.657	.000	-2.134	.000
72	0	0	0	-1	-1	-1	25.400	.000	-2.134	.000
73	0	0	0	-1	-1	-1	-2.032	2.172	-2.134	.000
74	0	0	0	-1	-1	-1	.914	.927	-2.134	.000
75	0	0	0	-1	-1	-1	.914	3.250	-2.134	.000
76	0	0	0	-1	-1	-1	2.454	2.172	-2.134	.000
77	0	0	0	-1	-1	-1	5.309	1.226	-2.134	.000
78	0	0	0	-1	-1	-1	6.198	2.172	-2.134	.000
79	0	0	0	-1	-1	-1	8.941	2.172	-2.134	.000
80	0	0	0	-1	-1	-1	11.684	2.172	-2.134	.000
81	0	0	0	-1	-1	-1	14.570	1.226	-2.134	.000
82	0	0	0	-1	-1	-1	17.170	2.172	-2.134	.000
83	0	0	0	-1	-1	-1	19.914	2.172	-2.134	.000
84	0	0	0	-1	-1	-1	22.657	2.172	-2.134	.000
85	0	0	0	-1	-1	-1	23.825	.927	-2.134	.000
86	0	0	0	-1	-1	-1	25.400	2.172	-2.134	.000
87	0	0	0	-1	-1	-1	-2.032	4.343	-2.134	.000
88	0	0	0	-1	-1	-1	.914	4.343	-2.134	.000
89	0	0	0	-1	-1	-1	2.454	4.343	-2.134	.000
90	0	0	0	-1	-1	-1	6.198	4.343	-2.134	.000
91	0	0	0	-1	-1	-1	8.941	4.343	-2.134	.000
92	0	0	0	-1	-1	-1	11.684	4.343	-2.134	.000
93	0	0	0	-1	-1	-1	14.427	4.343	-2.134	.000
94	0	0	0	-1	-1	-1	17.170	4.343	-2.134	.000
95	0	0	0	-1	-1	-1	19.914	4.343	-2.134	.000
96	0	0	0	-1	-1	-1	22.657	4.343	-2.134	.000
97	0	0	0	-1	-1	-1	25.400	4.343	-2.134	.000
98	0	0	0	-1	-1	-1	-2.032	6.515	-2.134	.000
99	0	0	0	-1	-1	-1	.914	5.429	-2.134	.000
100	0	0	0	-1	-1	-1	.914	7.760	-2.134	.000
101	0	0	0	-1	-1	-1	3.454	6.515	-2.134	.000
102	0	0	0	-1	-1	-1	5.309	7.460	-2.134	.000
103	0	0	0	-1	-1	-1	6.198	6.515	-2.134	.000
104	0	0	0	-1	-1	-1	8.941	6.515	-2.134	.000
105	0	0	0	-1	-1	-1	11.684	6.515	-2.134	.000
106	0	0	0	-1	-1	-1	14.570	7.460	-2.134	.000
107	0	0	0	-1	-1	-1	17.170	6.515	-2.134	.000
108	0	0	0	-1	-1	-1	19.914	6.515	-2.134	.000
109	0	0	0	-1	-1	-1	22.657	6.515	-2.134	.000
110	0	0	0	-1	-1	-1	25.400	6.515	-2.134	.000
111	0	0	0	-1	-1	-1	-2.032	8.687	-2.134	.000
112	0	0	0	-1	-1	-1	.914	8.687	-2.134	.000
113	0	0	0	-1	-1	-1	3.454	8.687	-2.134	.000
114	0	0	0	-1	-1	-1	6.198	8.687	-2.134	.000
115	0	0	0	-1	-1	-1	8.941	3.687	-2.134	.000
116	0	0	0	-1	-1	-1	11.648	8.687	-2.134	.000
117	0	0	0	-1	-1	-1	14.427	8.687	-2.134	.000
118	0	0	0	-1	-1	-1	17.170	8.687	-2.134	.000
119	0	0	0	-1	-1	-1	19.914	8.687	-2.134	.000
120		0	0	-1	-1	-1	22.657	8.687	-2.134	.000

121	0	0	0	-1	-1	-1	23.825	7.760	-2.134	.000
122	0	0	0	1	1	1	25.400	8.687	-2.134	.000
123	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1.349	1.854	.000	.000
124	-1	-1	-1	-1	-1	-1	16.113	1.854	26.814	.000
125	-1	-1	-1	-1	-1	-1	7.328	1.038	.000	.000
126	-1	-1	-1	-1	-1	-1	7.328	7.647	.000	.000
127	1	1	1	1	1	1	3.958	2.451	37.179	.000
128	1	1	1	1	1	1	11.684	4.243	999999999.000	.000

ELEMENTO VIGA TRIDIMENSIONAL

```
NUMERO DE VIGAS                            =   77
NUMERO DE CONJUNTOS DE PROP. GEOM.         =   14
NUMERO DE CONJUNTOS DE FUERZAS             =    8
NUMERO DE MATERIALES                       =    1
```

PROPIEDADES DEL MATERIAL

NUMERO DE MATERIAL	MODULO DE YOUNG	RADIO DE POISSON	DENSIDAD DE MASA	DENSIDAD DE PESO
1	.2925+07	.2500	.2497-01	.2450+00

PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LAS VIGAS

NUMERO DE SECCION	AREA AXIAL A(1)	AREA CORT A(2)	AREA CORT A(3)	TORSION J(1)	INERCIA I(2)	INERCIA I(3)	MODULOS DE SECCION S(2)	S(3)
1	.3391+01	.2881+01	.2881+01	.1627+01	.9710+00	.9450+00	.0000	.0000
2	.2787+01	.2368+01	.2368+01	.1081+01	.7770+00	.5390+00	.0000	.0000
3	.4525+01	.3845+01	.3845+01	.2686+01	.2746+01	.1059+01	.0000	.0000
4	.2825+01	.2400+01	.2400+01	.1108+01	.8070+00	.5470+00	.0000	.0000
5	.4520+01	.3840+01	.3840+01	.2786+01	.1295+01	.2239+01	.0000	.0000
6	.5105+01	.4337+01	.4337+01	.3637+01	.2556+01	.1646+01	.0000	.0000
7	.6324+01	.5373+01	.5373+01	.1836+01	.2278+01	.1692+02	.0000	.0000
8	.5061+01	.4300+01	.4300+01	.3576+01	.1810+01	.2507+01	.0000	.0000
9	.1257+02	.1068+02	.1068+02	.1126+02	.4302+01	.4382+02	.0000	.0000
10	.5976+01	.5077+01	.5077+01	.5853+01	.2991+01	.2960+01	.0000	.0000
11	.5230+01	.4444+01	.4444+01	.3831+01	.2618+01	.1988+01	.0000	.0000
12	.3956+01	.3361+01	.3361+01	.2192+01	.1133+01	.1591+01	.0000	.0000
13	.3252+01	.2763+01	.2763+01	.1117+01	.1234+01	.6290+00	.0000	.0000
14	.4554+01	.3869+01	.3869+01	.2935+01	.1728+01	.1728+01	.0000	.0000

MULTIPLICADORES DE CARGA

	A	B	C	D
X-DIR	.000000	.000000	.000000	.000000
Y-DIR	.000000	.000000	.000000	.000000
Z-DIR	.000000	.000000	.000000	.000000

DATOS DEL ELEMENTO VIGA 3/D

VIGA NUMERO	NODO -I	NODO -J	NODO -K	MATERIAL NUMERO	SECCION NUMERO	CARGAS EN EXTREMOS A	B	C	D	CODIGOS		ANCHOS FINITOS XI	XJ	YI	YJ	ZI	ZJ	BANDA
1	71	54	57	1	1	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	87
2	100	61	58	1	1	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	123
3	54	46	57	1	1	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	54
4	61	53	58	1	1	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	54
5	46	23	29	1	1	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	-.76	144
6	53	38	32	1	1	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	-.76	96
7	23	19	29	1	1	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.76	.00	30
8	38	22	32	1	1	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.76	.00	102
9	19	1	20	1	1	0	0	0	0	0	0	.00	-.43	.00	.00	.00	-1.22	114
10	22	16	21	1	1	0	0	0	0	0	0	.00	-.43	.00	.00	.00	-1.22	12
11	23	40	46	1	2	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.93	.00	.00	.00	108
12	40	39	46	1	2	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	12
13	39	38	46	1	2	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	-.93	.00	.00	12
14	1	18	123	1	3	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.93	.00	.38	.00	108
15	13	17	123	1	3	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	12
16	17	16	123	1	3	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	-.93	.00	.38	12
17	23	24	46	1	4	0	0	0	0	0	0	.91	.00	.00	.60	.00	.00	12
18	38	37	22	1	4	0	0	0	0	0	0	.91	.00	.00	.00	.00	.06	12
19	24	25	46	1	4	0	0	0	0	0	0	.00	-1.89	.00	.00	.00	-2.18	12
20	37	36	22	1	4	0	0	0	0	0	0	.00	-1.89	.00	.00	.00	-2.18	12
21	1	2	46	1	5	0	0	0	0	0	0	1.35	.00	.00	.00	.00	.00	12
22	16	15	22	1	5	0	0	0	0	0	0	1.35	.00	.00	.00	.00	.00	12
23	3	25	45	1	5	0	0	0	0	0	0	.00	-.57	.00	.00	.00	2.24	144
24	15	36	22	1	5	0	0	0	0	0	0	.00	-.57	.00	.00	.00	2.24	132
25	77	55	56	1	6	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	

26	102	60	59	1	6	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	90
27	55	47	56	1	6	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	135
28	60	52	59	1	6	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	54
29	47	25	56	1	6	0	0	0	0	0	0	.00	-.05	.00	.30	.00	-2.95	54
30	52	36	59	1	6	0	0	0	0	0	0	.00	-.05	.00	.30	.00	-2.95	130
31	25	11	124	1	7	0	0	0	0	0	0	-.05	.00	.93	.00	-1.06	.00	102
32	11	42	124	1	7	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	102
33	42	36	124	1	7	0	0	0	0	0	0	.00	-.05	.00	.93	.00	-1.06	12
34	25	3	125	1	8	0	0	0	0	0	0	1.17	.00	.11	.00	2.24	.00	42
35	36	14	126	1	8	0	0	0	0	0	0	1.17	.00	-.11	.00	2.24	.00	130
36	3	4	125	1	8	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	130
37	14	13	126	1	8	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	12
38	4	26	125	1	8	0	0	0	0	0	0	.00	-1.94	.00	-.17	.00	1.71	12
39	13	35	126	1	8	0	0	0	0	0	0	.00	-1.94	.00	.17	.00	1.71	130
40	26	46	127	1	9	0	0	0	0	0	0	-.36	.00	1.22	.00	-.39	.00	128
41	43	44	127	1	9	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	126
42	44	45	127	1	9	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	12
43	45	35	127	1	9	0	0	0	0	0	0	.00	-.36	.00	-1.22	.00	-.39	12
44	81	56	55	1	10	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	66
45	104	59	60	1	10	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	96
46	56	48	55	1	10	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	153
47	59	28	60	1	10	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	54
48	48	24	55	1	10	0	0	0	0	0	0	.00	.26	.00	.00	.00	-3.47	152
49	51	35	60	1	10	0	0	0	0	0	0	.00	.26	.00	.00	.00	-3.47	130
50	26	27	19	1	4	0	0	0	0	0	0	1.48	.00	-.30	.00	-2.71	.00	102
51	35	34	22	1	4	0	0	0	0	0	0	1.48	.00	.30	.00	-2.71	.00	12
52	27	28	19	1	4	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	12
53	34	33	22	1	4	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	12
54	28	29	19	1	4	0	0	0	0	0	0	.00	-1.07	.00	.00	.00	.00	12
55	33	32	22	1	4	0	0	0	0	0	0	.00	-1.07	.00	.00	.00	.00	12
56	26	5	77	1	11	0	0	0	0	0	0	1.40	.00	.00	.00	1.87	.00	12

																		132
57	38	12	102	1	11	0	0	0	0	0	0	1.40	.00	.00	.00	1.07	.00	144
58	5	6	77	1	11	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	12
59	12	11	102	1	11	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	12
60	6	7	77	1	11	0	0	0	0	0	0	.00	-1.07	.00	.00	.00	.00	12
61	11	10	102	1	11	0	0	0	0	0	0	.00	-1.07	.00	.00	.00	.00	12
62	65	57	19	1	12	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	102
63	121	58	22	1	12	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	284
64	57	49	19	1	12	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	54
65	61	56	22	1	12	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	64
66	49	29	19	1	12	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	-.74	126
67	58	32	32	1	12	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	-.74	114
68	29	30	44	1	12	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.76	.00	60
69	32	31	63	1	12	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.76	.00	72
70	29	7	44	1	12	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	-.30	.00	-1.07	84
71	31	10	63	1	12	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.30	.00	-1.07	72
72	29	30	20	1	13	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.93	.00	.00	.00	12
73	30	31	20	1	13	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	12
74	31	32	20	1	13	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	-.93	.00	.00	12
75	7	8	20	1	14	0	0	0	0	0	0	.00	.00	1.22	.00	.00	.00	12
76	8	9	20	1	14	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	.00	.00	.00	12
77	9	10	20	1	14	0	0	0	0	0	0	.00	.00	.00	-1.22	.00	.00	12

MEMORIA REQUERIDA PARA ESTE PASO = 1298

E L E M E N T O   P L A C A

TIPO DE ELEMENTO = 6
NUMERO DE ELEMENTOS = 56
NUMERO DE MATERIALES = 1

TABLA DE PROPIEDADES DEL MATERIAL

TIPO	DENSIDAD DE MASA	DENSIDAD DE PESO	......EXPANSION TERMICA............. ALFA-X	ALFA-Y	..COEFICIENTES DE ELASTICIDAD PARA ESFUERZOS PLANOS............. C-XX	C-XY	C-XS	C-YY	C-YS	G-XY
1	2.458-04	2.497-02	0.000	0.000	3.120+06	7.800+05	0.000	3.120+06	0.000	1.170+06

MULTIPLICADORES DE LOS CASOS DE CARGA

NUMERO DEL CASO DE CARGA	PRESION	EFECTOS TERMICOS	ACELERACION EN X-	ACELERACION EN Y-	ACELERACION EN Z-
1	.000	.000	.000	.000	.000
2	.000	.000	.000	.000	.000
3	.000	.000	.000	.000	.000
4	.000	.000	.000	.000	.000

DATOS DEL ELEMENTO PLACA

ELEMENTO NUMERO	NODO-I	NODO-J	NODO-K	NODO-L	NODO-O	MATERIAL NUMERO	ESPESOR	PRESION NORMAL	DIF DE TEMPERATURA	GRADIENTE TERMICO	BANDA
1	62	63	74	73	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
2	73	74	75	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	9
3	73	75	88	87	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	48
4	87	88	99	98	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
5	98	99	100	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	9
6	98	100	112	111	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
7	63	64	76	74	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
8	74	76	75	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	9
9	75	76	89	88	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
10	88	89	101	99	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
11	99	101	100	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	9
12	100	101	113	112	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
13	64	65	77	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
14	64	77	76	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
15	76	77	78	90	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
16	76	90	89	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
17	89	90	101	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
18	101	90	103	102	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
19	101	102	113	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
20	113	102	114	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
21	65	66	79	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
22	77	65	79	78	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
23	78	79	91	90	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
24	90	91	104	103	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
25	102	103	104	114	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
26	114	104	115	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	36
27	66	67	80	79	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
28	79	80	92	91	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42

29	94	92	105	104	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
30	104	105	116	115	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
31	67	68	81	80	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
32	80	81	93	92	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
33	92	93	106	105	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
34	105	106	117	116	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
35	68	69	82	81	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
36	81	82	94	93	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
37	93	94	107	106	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
38	106	107	118	117	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
39	69	70	83	82	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
40	82	83	95	94	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
41	94	95	108	107	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
42	107	108	119	118	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
43	70	71	83	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
44	83	71	85	84	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
45	83	84	96	95	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
46	95	96	109	108	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
47	108	109	121	120	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
48	108	120	119	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
49	71	72	85	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
50	85	72	86	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
51	84	85	86	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	9
52	84	86	97	96	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	42
53	96	97	110	109	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	45
54	109	110	121	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
55	121	110	122	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	39
56	120	121	122	0	0	1	2.1340+00	0.000	.00	.000	9

E L E M E N T O   F R O N T E R A

TIPO DE ELEMENTO = 7
NUMERO DE ELEMENTOS = 65

MULTIPLICADORES DE CARGA

CASO(A)	CASO(B)	CASO(C)	CASO(D)
.0000	.0000	.0000	.0000

ELEMENTO NUMERO	NODO (N)	NODO (NI)	NODO (NJ)	NODO (NK)	NODO (NL)	COD. KR	COD. KD	COD. (KN) GENERACION	DESPLAZ. ESPECIFICADO	ROTACION ESPECIFICADA	CONSTANTE DEL RESORTE
1	62	73	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.3954+06
2	62	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.1441+06
3	63	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2125+06
4	64	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2216+06
5	65	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2540+06
6	66	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2483+06
7	67	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2665+06
8	68	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2330+06
9	69	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2665+06
10	70	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2483+06
11	71	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2479+06
12	72	71	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.3954+06
13	72	86	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.3954+06
14	72	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.9940+05
15	73	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.3525+06
16	74	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.4355+06
17	75	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.4122+06
18	76	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.6078+06
19	77	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.3288+06
20	78	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.3545+06
21	79	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.6449+06
22	80	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.5958+06
23	81	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.5956+06
24	82	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.5958+06
25	83	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.6525+06
26	84	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.4611+06
27	85	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2625+06
28	86	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2629+06
29	87	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2282+06
30	88	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.4350+06
31	89	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.4054+06
32	90	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.7104+06
33	91	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.5960+06
34	92	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.6606+06
35	93	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.7252+06
36	94	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.6606+06
37	95	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.5960+06
38	96	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.5960+06
39	97	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2980+06
40	98	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.3525+06
41	99	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.4122+06
42	100	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.4355+06
43	101	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.6078+06

44	102	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.3288+06
45	103	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.3545+06
46	104	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.6449+06
47	105	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.5958+06
48	106	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.5956+06
49	107	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.5958+06
50	108	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.6525+06
51	109	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.4611+06
52	110	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2629+06
53	111	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.1141+06
54	112	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2125+06
55	113	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2216+06
56	114	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2540+06
57	115	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2483+06
58	116	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2665+06
59	117	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2330+06
60	118	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2665+06
61	119	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2483+06
62	120	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2479+06
63	121	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.2625+06
64	122	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.3954+06
65	122	128	0	0	0	1	0	0	.0000	.0000	.9940+05

C A R G A S N O D A L E S (ESTATICAS) O M A S A S (DINAMICAS)

NODO NUMERO	CASO D CARGA	FUERZA EJE -X	FUERZA EJE -Y	FUERZA EJE -Z	MOMENTO EJE -X	MOMENTO EJE -Y	MOMENTO EJE -Z

TODAS LAS ECUACIONES TIENEN RIGIDEZ FIJA

CASO DE CARGA	MULTIPLICADORES DE CARGA A	B	C	D
1	.000	.000	.000	.000

PARAMETROS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

MINIMO ELEMENTO DIAGONAL NO CERO = 1.117+006
MAXIMO ELEMENTO DIAGONAL = 2.747+008
MAXIMO/MINIMO = 2.460+002
ELEMENTO PROMEDIO DE LA DIAGONAL = 2.872+007
DENSIDAD DE LA MATRIZ = 84.7 PCT.

IMPRESION DE FRECUENCIAS

MODO NUMERO	FRECUENCIA CIRCULAR (RAD/SEG)	FRECUENCIA (CICLOS/SEG)	PERIODO (SEG)	TOLERANCIA
1	.1089+03	.1606+02	.6226-01	.1326-15
2	.1153+03	.1835+02	.5451-01	.1027-14
3	.1574+03	.2504+02	.3993-01	.9922-12
4	.2474+03	.3937+02	.2540-01	.2573-06
5	.2872+03	.4570+02	.2188-01	.2855-05

MEMORIA REQUERIDA PARA ESTE PASO = 3609

IMPRESION DE LOS VECTORES CARACTERISTICOS

A N A L I S I S   M O D A L

MODO NUMERO   1
FRECUENCIA =   16.0647   HZ

EIGENVECTORES NORMALIZADOS
DESPLAZAMIENTOS/ROTACIONES DE LOS NODOS LIBRES

NODO NUMERO	TRANSLACION EN X-	TRANSLACION EN Y-	TRANSLACION EN Z-	ROTACION EN X-	ROTACION EN Y-	ROTACION EN Z-
1	6.03667-002	1.95543-001	8.09821-003	-3.64195-003	3.57060-004	2.17319-003
2	6.02451-002	2.01960-001	7.27609-003	-4.49082-003	3.09135-004	2.52782-003
3	5.95701-002	2.18643-001	5.23943-003	-7.35324-003	2.67668-004	3.27297-003
4	5.94049-002	2.23398-001	4.94011-003	-8.46789-003	3.97266-004	2.52991-003
5	5.91038-002	2.32533-001	9.07580-004	-7.73139-003	-6.76073-004	2.39813-004
6	5.90343-002	2.32190-001	3.60846-003	-5.88201-003	-1.14650-003	1.02334-004
7	5.89376-002	2.33616-001	7.19861-003	-4.03980-003	-7.58966-004	1.10413-003
8	5.52094-002	2.23620-001	-5.06942-004	-2.44138-003	-7.40465-004	1.54270-003
9	5.27182-002	2.33591-001	-2.10411-003	-2.18763-003	-7.22052-004	1.25779-003
10	5.07567-002	2.33529-001	-8.23337-003	-3.27673-003	-7.03551-004	2.21597-004
11	5.03144-002	2.34780-001	-1.12082-002	-2.94627-003	-1.00466-003	-4.49730-004
12	4.98467-002	2.35988-001	-1.37111-002	-2.61453-003	-9.56253-004	1.06226-004
13	4.88878-002	2.26067-001	-1.87176-002	-3.25483-003	4.12549-005	2.84325-003
14	4.85793-002	2.20928-001	-1.82920-002	-4.22899-003	8.29385-004	3.55429-003
15	4.75271-002	2.02716-001	-8.32621-003	-4.60713-003	1.88992-003	2.78248-003
16	4.73309-002	1.95714-001	-3.89344-003	-3.56527-003	1.79740-003	2.36169-003
17	5.32388-002	1.97070-001	1.84617-003	-1.05328-003	1.31786-003	1.87329-003
18	5.57583-002	1.97023-001	2.20663-003	-1.07700-003	8.37860-004	1.79845-003
19	5.92918-002	1.83915-001	7.86190-003	-5.01507-003	5.03403-004	2.12607-003
20	6.02368-002	2.18105-001	7.91337-003	-7.31402-003	1.45391-003	2.02902-003
21	5.28445-002	2.19213-001	-8.52453-003	-7.14823-003	2.19746-004	-8.10826-004
22	4.17905-002	1.83169-001	-2.88932-003	-5.48535-003	2.33123-003	2.33832-003
23	5.81775-002	1.72788-001	7.46758-003	-5.12240-003	4.84147-004	2.07792-003
24	5.83479-002	1.76634-001	7.14943-003	-5.31303-003	3.57059-005	1.90259-003
25	5.92889-002	1.95217-001	6.66878-003	-5.50399-003	3.57235-004	2.38333-003
26	5.79088-002	2.12004-001	1.28228-003	-9.58036-003	6.60967-004	1.01926-003
27	5.65345-002	1.88138-001	1.11985-002	-7.58422-003	-3.89255-003	7.37497-004
28	5.66321-002	1.91148-001	1.84910-002	-5.59314-003	1.27743-003	3.47936-003
29	5.56881-002	2.03053-001	7.61200-003	-8.08290-003	3.26070-003	2.59590-003
30	4.98840-002	2.03479-001	-2.50561-003	1.74106-004	2.47152-003	1.39392-003
31	4.85504-002	2.03855-001	1.77248-003	2.11579-004	1.68234-003	6.44413-005
32	5.08688-002	2.04103-001	-8.10377-003	-7.96382-003	8.93634-004	-1.44297-003
33	5.11466-002	2.13542-001	-8.43748-003	-6.07589-003	-1.33664-003	-3.53187-003
34	5.14016-002	2.21965-001	-1.28626-002	-4.10060-003	-1.81806-003	-2.32295-003
35	5.04555-002	2.28338-001	-1.65806-002	-2.28380-003	-5.89814-004	1.38269-003
36	4.22572-002	1.95808-001	-1.26175-002	-5.85071-003	2.45651-003	2.64991-003
37	3.71036-002	1.75923-001	-6.34949-003	-5.90512-003	1.61779-003	2.03008-003
38	3.73870-002	1.71831-001	-2.72549-003	-6.12185-003	2.29580-003	2.32113-003
39	4.49328-002	1.72191-001	5.07502-003	1.30639-004	1.69216-003	3.37173-003
40	5.11482-002	1.72516-001	1.70952-003	4.75694-004	1.08815-003	3.26823-003
41	5.21467-002	1.89423-001	-4.30977-003	-4.09814-003	9.39309-004	3.33503-003
42	4.88439-002	1.89474-001	-6.86301-003	-3.78290-003	1.27049-003	3.61355-003
43	5.64633-002	2.27030-001	-7.49176-003	-2.29818-003	-5.89790-004	1.43152-003
44	5.51034-002	2.27021-001	-9.66474-003	-2.29740-003	-5.89798-004	1.42890-003

45	5.37361-002	7.26995-001	-1.18358-002	-2.29358-003	-5.89790-004	1.41598-003
46	5.65715-002	1.53997-001	6.01470-003	-9.80583-003	1.70777-004	6.25127-004
47	5.40234-002	1.60528-001	4.14611-003	-8.87408-003	2.36344-003	1.80343-003
48	4.99085-002	1.59947-001	8.99564-004	-9.21515-003	3.49673-003	7.74083-004
49	4.36160-002	1.72036-001	5.88619-003	-1.45638-002	5.32140-003	1.96289-003
50	4.63916-002	1.74094-001	-6.31106-003	-1.40070-002	2.30509-003	-1.09110-003
51	5.36776-002	2.16544-001	-1.64508-002	-2.21631-003	-6.06751-004	1.30231-003
52	3.01799-002	1.58315-001	-5.30165-003	-9.29586-003	2.73862-003	1.91631-003
53	2.96936-002	1.48793-001	-2.07355-003	-1.07197-002	3.23727-003	1.75512-003
54	5.30753-002	1.29330-001	4.29824-003	-1.24993-002	2.28038-003	4.23843-004
55	4.78128-002	1.40166-001	2.95967-003	-9.36085-003	3.09229-003	1.22274-003
56	4.04830-002	1.42468-001	6.63883-004	-7.72961-003	4.44847-003	5.25040-004
57	3.17388-002	1.39477-001	4.16114-003	-1.58570-002	5.58796-003	1.33086-003
58	4.07791-002	1.42917-001	-4.51908-003	-1.51686-002	2.72182-003	-7.39780-004
59	2.39032-002	1.41564-001	-1.46624-003	-5.12718-003	-6.72701-005	3.06732-003
60	2.47777-002	1.38111-001	-3.71512-003	-9.18903-003	2.46590-003	1.29928-003
61	2.28688-002	1.24933-001	-1.42194-003	-1.16225-002	3.25605-003	1.18999-003
62	5.30037-002	6.40576-002	4.64271-004	0.00000	0.00000	0.00000
63	4.94027-002	9.05698-002	6.89879-004	0.00000	0.00000	0.00000
64	4.50563-002	1.03022-001	4.65526-004	0.00000	0.00000	0.00000
65	3.96296-002	1.13250-001	4.35119-004	0.00000	0.00000	0.00000
66	3.49027-002	1.10827-001	1.86791-004	0.00000	0.00000	0.00000
67	2.95120-002	1.21934-001	7.08534-005	0.00000	0.00000	0.00000
68	2.42580-002	1.21736-001	1.70384-004	0.00000	0.00000	0.00000
69	1.92423-002	1.17098-001	6.54986-005	0.00000	0.00000	0.00000
70	1.46639-002	1.09891-001	1.85942-004	0.00000	0.00000	0.00000
71	1.10142-002	1.01043-001	4.83493-004	0.00000	0.00000	0.00000
72	6.17015-003	7.73689-002	5.57009-004	0.00000	0.00000	0.00000
73	3.71959-002	7.06999-002	3.76477-004	0.00000	0.00000	0.00000
74	4.33722-002	9.01364-002	6.79326-004	0.00000	0.00000	0.00000
75	3.16291-002	9.04888-002	3.17419-004	0.00000	0.00000	0.00000
76	3.56034-002	1.03517-001	3.56635-004	0.00000	0.00000	0.00000
77	3.76515-002	1.10998-001	4.58229-004	0.00000	0.00000	0.00000
78	3.39364-002	1.13529-001	3.00535-004	0.00000	0.00000	0.00000
79	3.09094-002	1.19804-001	8.76806-005	0.00000	0.00000	0.00000
80	2.83107-002	1.22699-001	2.52669-005	0.00000	0.00000	0.00000
81	2.52633-002	1.22110-001	1.66908-004	0.00000	0.00000	0.00000
82	2.31824-002	1.17776-001	8.65626-006	0.00000	0.00000	0.00000
83	2.13459-002	1.10535-001	6.50219-005	0.00000	0.00000	0.00000
84	2.04492-002	1.00329-001	3.48102-004	0.00000	0.00000	0.00000
85	1.51981-002	9.31292-002	5.24317-004	0.00000	0.00000	0.00000
86	2.01057-002	8.63861-002	4.73791-004	0.00000	0.00000	0.00000
87	2.76053-002	7.45349-002	2.49992-004	0.00000	0.00000	0.00000
88	2.71604-002	9.04686-002	2.44706-004	0.00000	0.00000	0.00000
89	2.75076-002	1.03041-001	1.06032-004	0.00000	0.00000	0.00000
90	2.75628-002	1.13058-001	3.12466-005	0.00000	0.00000	0.00000
91	2.73581-002	1.20047-001	-7.54320-006	0.00000	0.00000	0.00000
92	2.70030-002	1.23033-001	-5.84904-005	0.00000	0.00000	0.00000
93	2.65318-002	1.22378-001	-9.77802-005	0.00000	0.00000	0.00000
94	2.61519-002	1.17913-001	-1.09351-004	0.00000	0.00000	0.00000
95	2.61595-002	1.10214-001	-1.02512-004	0.00000	0.00000	0.00000
96	2.66311-002	1.00634-001	-1.02762-004	0.00000	0.00000	0.00000
97	2.61883-002	9.15847-002	-1.03549-004	0.00000	0.00000	0.00000
98	1.84695-002	7.61843-002	1.35939-004	0.00000	0.00000	0.00000
99	2.30879-002	9.06113-002	1.75885-004	0.00000	0.00000	0.00000
100	1.37758-002	9.09736-002	-4.83471-005	0.00000	0.00000	0.00000
101	2.00275-002	1.03108-001	-1.34364-004	0.00000	0.00000	0.00000
102	1.81696-002	1.10648-001	-3.70447-004	0.00000	0.00000	0.00000
103	2.14296-002	1.13340-001	-2.31261-004	0.00000	0.00000	0.00000
104	2.37346-002	1.19859-001	-9.74408-005	0.00000	0.00000	0.00000
105	2.56875-002	1.22895-001	-1.52894-004	0.00000	0.00000	0.00000
106	2.79551-002	1.22645-001	-4.93975-004	0.00000	0.00000	0.00000

107	2.90025-002	1.17617-001	-2.41326-004	0.00000	0.00000	0.00000
108	3.01977-002	1.09775-001	-2.72520-004	0.00000	0.00000	0.00000
109	3.06064-002	1.01036-001	-5.60154-004	0.00000	0.00000	0.00000
110	3.04087-002	9.47175-002	-6.88517-004	0.00000	0.00000	0.00000
111	8.85868-003	7.64046-002	7.87416-005	0.00000	0.00000	0.00000
112	9.34652-003	9.08426-002	-5.54753-005	0.00000	0.00000	0.00000
113	1.16376-002	1.02811-001	-2.05709-004	0.00000	0.00000	0.00000
114	1.68323-002	1.13134-001	-3.84621-004	0.00000	0.00000	0.00000
115	1.97387-002	1.19011-001	-1.87193-004	0.00000	0.00000	0.00000
116	2.43339-002	1.22270-001	-2.13636-004	0.00000	0.00000	0.00000
117	2.89893-002	1.22346-001	-4.94712-004	0.00000	0.00000	0.00000
118	3.29892-002	1.17049-001	-3.13169-004	0.00000	0.00000	0.00000
119	3.50926-002	1.09672-001	-3.96493-004	0.00000	0.00000	0.00000
120	3.49130-002	1.01208-001	-6.98546-004	0.00000	0.00000	0.00000
121	3.21632-002	9.86738-002	-7.40936-004	0.00000	0.00000	0.00000
122	3.06927-002	9.64694-002	-7.74465-004	0.00000	0.00000	0.00000

CAPITULO 6. CONCLUSIONES.

El elemento compuesto que se presentó enel capítulo 2 permite simplificar el análisis (tanto estático como dinámico) de estructuras de soporte para turbogeneradores, sin que sea necesario recurrir a modelos poco representativos de las mismas como se hacía en el pasado.

La manera en que se presentó dicho elemento facilita su adaptación a cualquier programa de análisis estructural. En particular su adaptación al programa SAP-V permitió obtener un submódulo eficiente con el cual el análisis de dichas estructuras puede sistematizarse.

El elemento compuesto que se introdujo (cap.2) y la herramienta de cálculo implementada (cap.4), permiten efectuar el análisis de pedestales mediante modelos apropiados como los que se discutieron en el capítulo 5.

Para el análisis pseudodinámico, modelos construídos únicamente con base a elementos viga compuestos, parecen ser los más indicados. Esto se concluye con base a que, con modelos más elaborados (como el modelo-2) en los que se incluyen elementos sólidos tridimensionales, se obtienen prácticamente los mismos resultados, aunque el tiempo de computadora que se consume en su análisis es mucho mayor que el que se requiere en los primeros.

Para un análisis de frecuencias es necesario incluír tanto la cimentación como el suelo en que se apoya la estructura. El modelo simplificado (elementos viga compuestos) permite construír ventajosamente, modelos en los que se puede incluír otros elementos estructurales (losa, pilotes, etc.), así como las caracte rísticas o propiedades del suelo.

Finalmente debe señalarse que paralelamente a estudios analíticos como el que aquí se presentó, deberían realizarse estudios experimentales, fundamentalmente para modificar la práctica de diseño de estas estructuras. Esta necesidad se reconoce ya que los criterios de diseño de los pedestales de turbogeneradores han sido mantenidos por muchos años por los fabricantes de las máquinas, seguramente por el éxito de las estructuras construídas. Estudios experimentales permitirían probablemente reducir algunas de las limitaciones impuestas por dichos fabricantes, que en la actualidad parecen exageradas.

A. ANALISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

A.1 Matrices

Una matriz de orden mxn es un arreglo ordenado de números conteniendo m renglones y n columnas, el cual puede representarse como:*

$$A = \left[A\right] = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & --- & a_{2n} \\ --- & --- & --- & --- & --- \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & --- & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El elemento de la matriz en el renglón i-ésimo y la columna j-ésima, se indica como a_{ij}, con los índices en este orden.

En el análisis matricial de estructuras se emplean algunas matrices que por sus características son consideradas como matrices especiales entre las cuales pueden destacarse las siguientes:

MATRIZ TRANSPUESTA. Se dice que la matriz A^T es la transpuesta de A cuando los renglones y las columnas de A^T son respectivamente, las columnas y renglones de la matriz A. Entonces se tendrá que:

$$A_{mxn} = \left[a_{ij}\right] \qquad ; \qquad A^T{}_{nxm} = \left[a_{ji}\right]$$

MATRIZ SIMETRICA. Una matriz es simétrica cuando al intercambiar sus renglones por columnas y viceversa nos queda la misma matriz En otras palabras, una matriz es simétrica si es igual a su transpuesta, es decir:

* En este apéndice se han eliminado por simplicidad el subrayado de las matrices, esto es, la matriz A se representa como A y no como $\underset{\sim}{A}$.

$$A = A^T$$

ó

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{para todo } i, j$$

Obviamente A debe ser de orden nxn, es decir, cuadrada.

MATRIZ DIAGONAL. Es aquella en la que todos sus elementos son nulos excepto los de la diagonal principal, es decir:

$$D = \left[d_{ij}\right] \qquad d_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$d_{ij} \neq 0 \quad \text{si} \quad i = j$$

MATRIZ IDENTIDAD. Es una matriz diagonal en la cual los elementos no nulos son iguales a uno. En ocasiones se utiliza la notación I = δ_{ij} , donde δ_{ij} es la llamada Delta de Dirac y se define como:

$$\delta_{ij} = 0 \qquad \text{si} \quad i \neq j$$

$$\delta_{ij} = 1 \qquad \text{si} \quad i = j$$

Esta matriz recibe el nombre de identidad pues puede verificarse que:

$$IA = AI = A$$

MATRIZ EN BANDA. Es aquella en la que todos los elementos no nulos de la matriz se encuentran contenidos dentro de una banda paralela a la diagonal principal. Debe indicarse aquí también que algunos de los elementos dentro de la banda pueden ser cero.

MATRIZ CERO O NULA. Es una matriz en la que todos sus elementos son cero, es decir:

$$\overline{0} = \begin{bmatrix} 0_{ij} \end{bmatrix} \quad ; \quad 0_{ij} = 0 \quad \text{para todo } i,j$$

A.2 Algebra matricial

SUMA DE MATRICES. Dos matrices pueden sumarse sólo si son del mismo orden, si es así, se dice que las matrices son conformables para la suma.

El resultado de sumar dos matrices es otra matriz del mismo orden en donde cada elemento es la suma de los elementos correspondientes a las matrices sumando; esto es:

si $A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ y $B_{mxn} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$

entonces

$$A + B = S_{mxn} = \begin{bmatrix} s_{ij} \end{bmatrix}$$

donde

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

La suma de matrices es conmutativa y asociativa. La resta de dos matrices es simplemente la suma de una matriz más otra multiplicada por -1.

MULTIPLICACION DE MATRICES. Se debe mencionar primero que la multiplicación de matrices no es conmutativa, en otras palabras, tratándose de matrices el orden de los factores sí altera el producto. Para ser específicos, tratándose del producto A x B se dice que A PREMULTIPLICA a B, o bien que B POSMULTIPLICA a A.

El resultado de multiplicar dos matrices será otra matriz cuyo orden es el NUMERO DE RENGLONES DE LA MATRIZ QUE PREMULTIPLICA por el NUMERO DE COLUMNAS DE LA QUE POSMULTIPLICA.

En forma concisa, el algoritmo de la multiplicación se puede escribir como:

$$A_{mxn} \times B_{nxq} = C_{mxq}$$

en donde el elemento C_{ij} está dado por:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Se puede demostrar que el producto matricial es asociativo, esto es:

$$A \times B \times C = (A \times B) C = A (B \times C)$$

otra propiedad interesante del producto es que la transpuesta de una matriz producto es igual al producto de las transpuestas tomadas en orden inverso, es decir:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

INVERSION DE MATRICES. De las definiciones de suma y resta de matrices mencionadas anteriormente se puede notar que dichas operaciones son inversas. Por otra parte no se puede decir que exista una operación inversa a la multiplicación matricial ya que la división entre matrices NO ESTA DEFINIDA. Sin embargo se puede hablar de un "recíproco matricial" o más propiamente de una matriz inversa.

Se define a la inversa de una matriz A, como la matriz A^{-1} tal que:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

Algunas de las propiedades de la matriz inversa son las siguientes:

a) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
b) $(A^{-1})^{-1} = A$
c) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
d) La inversa de una matriz (si existe) es única.

A.3 El problema de los valores característicos

Si se tiene una matriz cuadrada (de orden nxn) y se multiplica por una matriz de orden nx1, se tiene que:

$$A_{nxn}\ \overline{x}_{nx1} = \overline{b}_{nx1}$$

En el problema de los valores característicos interesa que al multiplicar A por el vector $\overline{x}$, se obtenga un vector que sea proporcional a $\overline{x}$, esto es:

$$A\overline{x} = \lambda\,\overline{x} \qquad (A\text{-}1)$$

donde λ es un escalar.

En el planteamiento anterior, la matriz A es conocida y por tanto, lo que interesa determinar son los valores del escalar λ y los vectores $\overline{x}$ (no nulos) que satisfagan la igualdad anterior. A estos valores de λ se les llama valores propios, característicos o eigenvalores de la matriz A. Y a los vectores $\overline{x}$: vectores propios, característicos o eigenvectores de la matriz A. Como se verá más adelante para cada valor de λ que satisface la ecuación anterior, corresponde un vector $\overline{x}$.

La ecuación (A-1) puede escribirse como:

$$A\overline{x} = \lambda I\overline{x}$$

en donde si A es de orden $n x n$, $\overline{x}$ es de orden $n x 1$, entonces I es la matriz identidad de orden n. Pasando todos los términos al primer miembro se tiene:

$$A\overline{x} - \lambda I\overline{x} = \overline{0}$$

Las matrices A y λI son ahora del mismo orden y por tanto pueden restarse quedando otra matriz también de orden n. Por tanto la expresión anterior resulta:

$$\left[A - \lambda I \right] \overline{x} = \overline{0} \qquad \text{(A-2)}$$

Se puede observar que la igualdad (A-2) es la representación matricial de un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas (las componentes del vector $\overline{x}$) cuya matriz de coeficientes es $\left[A - \lambda I \right]$.

Como se sabe, este sistema tiene siempre una solución: la trivial $\overline{x}=\overline{0}$. Sin embargo, ya se mencionó que son relevantes los vectores no nulos únicamente. Ahora bien si el rango de $\left[A - \lambda I \right]$ es igual a n, el sistema resulta compatible determinado y no habrá otra solución más que la trivial y consecuentemente no se tendrán valores característicos. Por otra parte, si el rango de $\left[A - \lambda I \right]$ es menor que n, se tiene un sistema compatible indeterminado, para el cual existe una multiplicidad de soluciones.

Recordando la relación estrecha que existe entre el rango de una matriz cuadrada y su determinante asociado, para que el rango de $\left[A - \lambda I \right]$ sea menor que n es necesario que:

$$\det \left| A - \lambda I \right| = 0 \qquad \text{(A-3)}$$

En la ecuación (A-3) se conoce A pero no λ; así, si se calcula el determinante, éste resulta un polinomio en λ de grado n. Esto es, al desarrollar el determinante, la ecuación (A-3) se convierte en:

$$\beta_n \lambda^n + \beta_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \beta_1 \lambda + \beta_0 = 0 \quad (A-4)$$

que es una ecuación en λ de grado n y tiene por tanto n raíces, o lo que es lo mismo, n valores de λ que la satisfacen. A esta ecuación se le llama ecuación característica. Las raíces de la ecuación (A-4) son los valores propios de la matriz A buscados, y se tienen n de ellos, no todos distintos necesariamente.

Se ha resuelto entonces la primera parte del problema planteado al encontrar los valores de λ. Sin embargo quedan por determinar los vectores $\bar{x}$. Para esto se procederá como se indica a continuación: conocidos los valores característicos λ_1, λ_2, λ_3, ..., λ_n, sustitúyase por ejemplo el primero de ellos (i.e. λ_1) en la ecuación (A-2); y se tendrá:

$$\left[A - \lambda_1 I \right] \bar{x} = 0$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo compatible indeterminado, puesto que $\left[A-\lambda_1 I\right]$ es singular ya que su determinante es cero. La solución general de este sistema, será el vector característico asociado al valor característico λ_1. En forma idéntica se puede proceder con los valores λ_2, λ_3,... λ_n para encontrar sus vectores característicos asociados, resolviendo así el problema planteado anteriormente.

A.4 Notación y Sistemas de Referencia

Con objeto de poder asociar a ciertas direcciones conocidas -

las cantidades (fuerzas, desplazamientos) que se manejan en el análisis estructural, generalmente se definen para cada problema, un sistema General o Global de Referencia para la estructura y un sistema Local de Referencia para cada barra de la misma. De esta manera, tanto las fuerzas externas como los desplazamientos de los puntos nodales de la estructura, van a ser referidos siempre al sistema Global o General de Referencia, mientra que todas las fuerzas internas (esfuerzos) y deformaciones de las barras serán referidos al sistema Local de Referencia.- Tales sistemas se ilustran en la figura A.1.

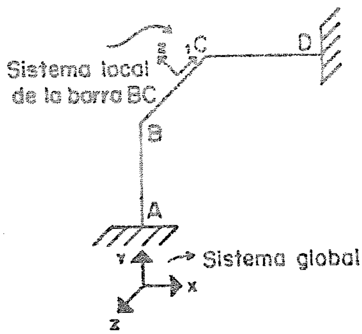


Fig.A.1 Sistemas de referencia

Tanto el sistema Local como el sistema General, son sistemas derechos, esto es, se rigen por la regla de la mano derecha.

Para las estructuras que se analizan en esta tesis, la notación que se usa es la siguiente:

N_i punto nodal, nodo o junta i-ésima

B_i barra, miembro o elemento i-ésimo

$\underset{\sim}{D}$ matriz de desplazamientos

$\underset{\sim}{K}$ matriz de rigidez en coordenadas locales.

$\underset{\sim}{K}_G$ matriz de rigidez en coordenadas globales.

$\underset{\sim}{P}$ matriz de cargas o acciones en la estructura original

$\underset{\sim}{P}_D$ matriz de acciones en la estructura restringida correspondientes a los desplazamientos desconocidos y debido a todas las cargas excepto aquellas que corresponden a dichos desplazamientos.

$\underset{\sim}{R}$ matriz de rotación de ejes

$\underset{\sim}{T}$ matriz de transformación

A.5 Introducción al método de rigideces

El método de las rigideces en el caso de estructuras resueltas con base a marcos es un caso particular del método del elemento finito, en el que los elementos finitos son los elementos de viga. El programa de computadora que se utilizó en este trabajo, realiza el análisis de las estructuras empleando este método. Por tal razón en lo que sigue se hará una breve descripción del mismo.

En el método de las rigideces las incógnitas son los desplazamientos nodales de la estructura. Con el fin de ilustrar los conceptos del método en su forma más simple, considérese el análisis de la viga mostrada en la figura A.2a. La viga está empotrada en A y tiene un apoyo simple en B, además está sujeta a una carga uniforme de magnitud w. El único desplazamiento desconocido es la rotación θ_B en el nudo B. Cuando se determina esta rotación, las acciones y desplazamientos de la viga -

pueden ser calculados.

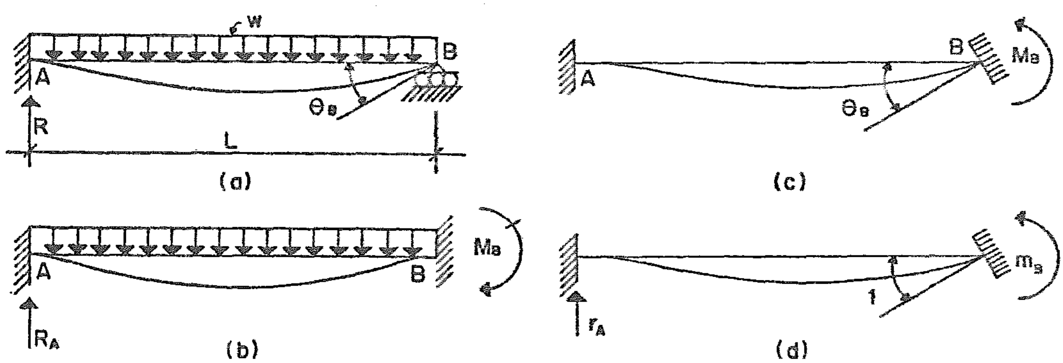


Fig A.2 Ilustración del método de las rigideces.

El primer paso en el método de las rigideces es obtener una estructura cinemáticamente determinada eliminando los desplazamientos de la estructura real. La estructura que se obtiene así, es denominada, la estructura restringida. Para la viga de la figura A.2a, la estructura restringida será obtenida empotrando completamente el nudo B (ver figura A.2b).

Cuando las cargas actúan sobre la viga restringida se desarrolla un momento en el apoyo B que está dado por la expresión:

$$M_B = \frac{wL^2}{12} \qquad \text{(A-5)}$$

Nótese que el momento M_B es una acción correspondiente a la rotación θ_B, que es la incógnita en el análisis. Debido a que este momento no existe en la viga real, es necesario considerar que la viga restringida está sujeta a un momento igual y opuesto al M_B, que se muestra actuando en la viga en la figura A.2c. Cuando las acciones actuantes en las dos vigas (figs. A.2b y A.2c) son superpuestas, el análisis de la figura A.2a puede ser considerado como la superposición de los análisis mostrados en las figuras A.2b y A.2c, permitiendo que la rotación producida por el momento M_B en la figura A.2c sea igual a θ_B, la rotación desconocida en la viga real.

La relación entre el momento M_B y la rotación θ_B en la viga de la figura A.2c es:

$$M_B = \frac{4EI}{L}\,\theta_B \qquad (A\text{-}6)$$

Igualando las ecuaciones (A-5) y (A-6) resulta:

$$\frac{wL^2}{12} = \frac{4EI}{L}\,\theta_B$$

de donde:

$$\theta_B = \frac{w\,L^3}{48EI}$$

Por otra parte, considérese a la estructura restringida bajo el efecto del valor unitario de la rotación desconocida. Este último efecto es mostrado en la figura A.2d por un momento m_B que produce un valor unitario de la rotación θ_B en el extremo derecho. Nótese que m_B es una acción que corresponde a θ_B. El valor de m_B es el coeficiente de rigidez para la estructura restringida, que puede calcularse como:

$$m_B = \frac{4EI}{L}$$

Formulando la ecuación de superposición, los momentos en el nudo B serán sumados como sigue: el momento en la viga restringida sujeta a la carga (figura A.2b) será añadido al momento m_B multiplicado por θ_B. La suma de esos dos términos debe dar el momento en el nudo B de la viga real, el cual es cero en este ejemplo.

De acuerdo a la convención de signos adoptada, el momento M_B en la figura A.2b es negativo:

$$M_B = -\frac{wL^2}{12}$$

La ecuación de superposición de momentos en el nudo B será entonces:

$$M_B + m_B\,\theta_B = 0 \qquad \text{(A-7)}$$

$$-\frac{wL^2}{12} + \frac{4EI}{L}\,\theta_B = 0$$

resolviendo esta ecuación se tiene que:

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI}$$

el cual es el mismo resultado anterior.

El último têrmino en la ecuación fue expresado convenientemente como el producto del momento causado por un valor unitario del desplazamiento desconocido (coeficiente de rigidez) por - el desplazamiento mismo.

Después de haber determinado la rotación desconocida, es posible obtener las acciones en los extremos de los miembros y las reacciones. Considérese que se debe obtener la reacción R ac-- tuando en el soporte A de la viga (figura A2.a). Esta fuerza - es la suma de la reacción R_A en el soporte A de la figura A.2b y θ_B veces la fuerza r_A de la figura A.2d como se muestra en la siguiente ecuación de superposición:

$$R = R_A + r_A\ \theta_B$$

Las fuerzas R_A y r_A pueden calcularse de la viga restringida:

$$R_A = \frac{wL}{2} \qquad ; \qquad r_A = \frac{6EI}{L^2}$$

así, entonces:

$$R = \frac{wL}{2} + \left(\frac{6EI}{L^2} \qquad \frac{wL}{48\,EI} \right)$$

$$R = \frac{wL}{2} + \frac{wL}{8} = \frac{5wL}{8}$$

Los mismos conceptos pueden ser usados para calcular cualquier otra acción o desplazamiento de la viga, los principios fundamentales del método son los ya indicados para el caso simple - que acaba de describirse. A continuación se resume la metodología que deberá seguirse para un análisis general:

RESUMEN DEL METODO DE LAS RIGIDECES. De una manera más general este método puede ser descrito como sigue para la solución de - cualquier tipo de marco estructural.

Descripción del problema. El problema en cuestión debe estar - claramente definido por la descripción de la estructura y las - cargas, cambios de temperatura, desplazamientos en los apoyos o

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_D + \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{D}$$

Determinación de las acciones en los extremos y las reacciones.

Para obtener las reacciones en la estructura, se multiplica la matriz de desplazamientos $\underset{\sim}{D}$ por las reacciones debidas a los desplazamientos unitarios y se suma a este producto la matriz de las reacciones debidas a las cargas externas. En una forma similar pueden obtenerse las acciones en los extremos de los miembros estructurales.

Cuando los vectores de los desplazamientos, las acciones en los extremos y las reacciones en la estructura han sido calculados, puede considerarse que el análisis está completo.

A.6 Matriz de rotación en el caso bidimensional.

Considérese un vector $\underset{\sim}{A}$ actuando en el plano X-Y (ver fig. A.3). Dos sistemas de ejes ortogonales con origen en 0 son mostrados en la figura. Los ejes Ys y Xs se suponen paralelos al sistema de Referencia Global, y el sistema de ejes Xm y Ym se toman paralelos al sistema de Referencia Local. Supóngase que los cosenos directores del eje Xm con respecto a los ejes Xs y Ys son λ_{11} y λ_{12}. Es evidente que esos cosenos directores pueden ser expresados en términos del ángulo ϕ como sigue:

$$\lambda_{11} = \text{Cos}\ \phi \qquad \lambda_{12} = \text{Cos}\ (90° - \phi) = \text{Sen}\ \phi \qquad \text{(a)}$$

Además supóngase que los cosenos directores del eje Ym con respecto a los ejes Xs y Ys son λ_{12} y λ_{22} respectivamente. Estos cosenos directores pueden ser expresados en términos del ángulo ϕ como sigue:

$$\lambda_{21} = \text{Cos}\ (90° + \phi) = -\text{Sen}\ \phi \qquad \lambda_{22} = \text{Cos}\ \phi \qquad \text{(b)}$$

Para cualquiera de los cosenos directores anteriores, el primer subíndice se refiere a los ejes Xm y Ym, y el segundo subíndice se refiere a los ejes Xs y Ys. Además el número 1 denota la dirección X (sea Xs o Xm). Por ejemplo, λ_{12} es el coseno director del eje Xm con respecto a Ys.

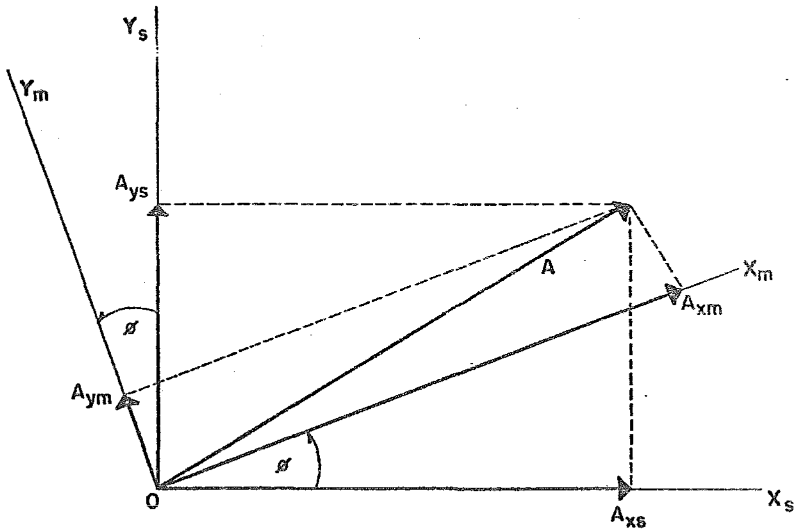


Fig.A.3 Rotacion de ejes en dos dimensiones.

El vector A puede ser transformado en dos componentes ortogonales Axs y Ays en las direcciones Xs y Ys respectivamente como se muestra en la figura A.3. Alternativamente, A puede ser transformado en dos componentes ortogonales Axm y Aym en las direcciones Xm y Ym respectivamente. El último conjunto de componentes puede ser expresado en términos de los componentes anteriores. Por inspección de la geometría de la figura, se puede observar que Axm es igual a la suma de las proyecciones de Axs y Ays en el eje Xm. Adicionalmente,Aym es igual a la suma de las proyecciones de Axs y Ays en el eje Ym. Por lo tanto las expresiones Axm y Aym son:

$$\begin{aligned} Axm &= \lambda_{11}\ Axs + \lambda_{12}\ Ays \\ Aym &= \lambda_{21}\ Axs + \lambda_{22}\ Ays \end{aligned} \qquad (A-8)$$

de manera matricial estas fórmulas serán:

$$\begin{bmatrix} Axm \\ Aym \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Axs \\ Ays \end{bmatrix} \qquad (A-9)$$

Sustituyendo las expresiones (a) y (b) en la ecuación (A-9), queda entonces:

$$\begin{bmatrix} Axm \\ Aym \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos } \phi & \text{Sen } \phi \\ -\text{Sen } \phi & \text{Cos } \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Axs \\ Ays \end{bmatrix} \qquad (A-10)$$

Las ecuaciones (A-9) y (A-10) pueden ser expresadas simbólicamente como:

$$\underset{\sim}{A}m = \underset{\sim}{R}\ \underset{\sim}{A}s \qquad (A-11)$$

En esta ecuación, $\underset{\sim}{A}m$ es un vector que consiste de los componentes del vector $\underset{\sim}{A}$ paralelos a los ejes Xm y Ym, $\underset{\sim}{A}s$ es un vector que contiene los componentes del vector $\underset{\sim}{A}$ paralelos a Xs y Ys, y $\underset{\sim}{R}$ es una matriz de cosenos directores la cual será referida como matriz de rotación. Por lo tanto la matriz de rotación en un problema de dos dimensiones es:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos } \phi & \text{Sen } \phi \\ -\text{Sen } \phi & \text{Cos } \phi \end{bmatrix} \qquad \text{(A-12)}$$

Así, es posible expresar el conjunto de los componentes Xs y Ys del vector $\underset{\sim}{A}$ en términos de los componentes Xm y Ym.

Para el caso tridimensional se puede determinar la matriz de-rotación mediante un proceso similar al anterior quedando la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos } \phi & \text{Sen } \phi & 0 \\ -\text{Sen } \phi & \text{Cos } \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(A-13)}$$

B. FUNDAMENTOS DE DINAMICA ESTRUCTURAL.

B.1 Sistemas de un grado de libertad.

COMPONENTES DE UN SISTEMA DINAMICO BASICO. Las propiedades físicas esenciales de cualquier sistema estructural linealmente elástico sujeto a cargas dinámicas incluyen: su masa, sus propiedades elásticas, sus mecanismos de pérdida de energía (o amortiguamiento) y el origen externo de la excitación o carga. En un modelo simplificado de un sistema de un grado de libertad, cada una de estas propiedades se asume concentrada en un elemento físico simple. Un esquema de tal sistema es mostrado en la siguiente figura:

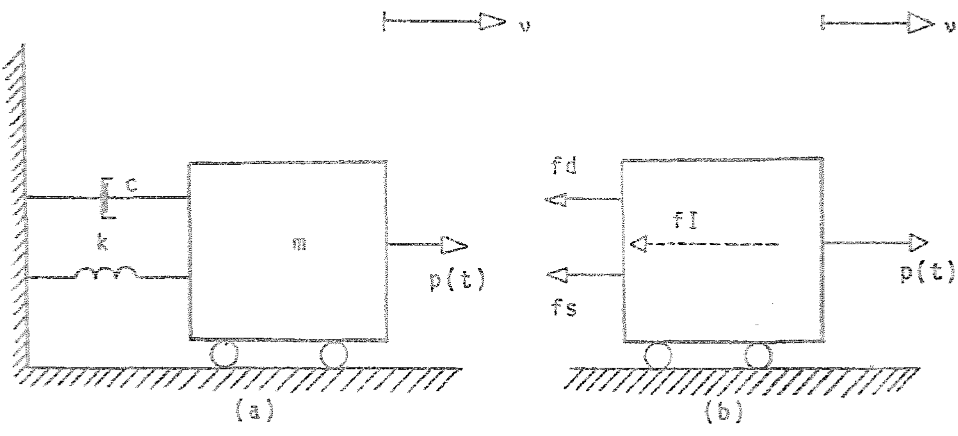


Fig. B.1 Idealización de un sistema de un grado de libertad.

La masa m de este sistema es concentrada en el cuerpo rígido. Este cuerpo rígido puede transladarse únicamente en la dirección v como se indica en la figura; debido a ésto se dice que el sistema tiene un grado de libertad. La resistencia elástica al desplazamiento es proporcionada por los resortes sin peso de rigidez k, mientras que los mecanismos de pérdida de energía están representados por el amortiguador c. La carga externa que produce la respuesta dinámica de este sistema es la carga que varía con el tiempo, p(t).

ECUACION DE MOVIMIENTO. Para el sistema de la figura B.1a, la ecuación de movimiento puede formularse directamente por el equilibrio de todas las fuerzas que actúan sobre la masa. Como se indica en la figura B.1b, la fuerza actuante en la dirección del desplazamiento (grado de libertad) es la fuerza p(t) y las tres fuerzas resultantes del movimiento son: la inercia fI, la de amortiguamiento fd y la fuerza del resorte elástico fs. La ecuación de movimiento es únicamente una expresión de equilibrio de estas fuerzas, como sigue:

$$f_I + f_d + f_s = p(t) \qquad \text{(B-1)}$$

Cada uno de los sumandos en el término de la izquierda de la ecuación anterior, es una función del desplazamiento v y de sus derivadas con respecto al tiempo.

Con objeto de construír la ecuación de movimiento del sistema de un grado de libertad de la figura B.1, considérese primero la fuerza elástica, la cual está representada por el producto de la rigidez del resorte por el desplazamiento, esto es:

$$f_s = k\,v \qquad \text{(B-2a)}$$

Por otra parte, la fuerza de inercia es el producto de la masa por su aceleración, es decir:

$$f_I = m\ddot{v} \qquad \text{(B-2b)}$$

Finalmente suponiendo que en el sistema se tiene un mecanismo de amortiguamiento viscoso, la fuerza de amortiguamiento será:

$$fd = c\,\dot{v} \qquad \text{(B-2c)}$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones (B-2) en la ecuación (B-1) la ecuación de movimiento queda de la siguiente forma:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t) \qquad \text{(B-3)}$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden, con coeficientes constantes cuya solución puede determinarse sin mucha dificultad como se discutirá más adelante.

INFLUENCIA DE LAS FUERZAS GRAVITACIONALES. Considérese ahora el sistema mostrado en la figura B.2. La ecuación de equilibrio en este caso es:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t) + W \qquad \text{(B-4)}$$

en donde:

W = peso del cuerpo

El desplazamiento total v en este caso recibe la contibución de un desplazamiento estático Δ_{st} debido al peso del cuerpo, entonces:

$$v = \Delta_{st} + \bar{v} \qquad \text{(B-5)}$$

obteniendo el producto kv se tiene:

$$kv = k\,\Delta_{st} + k\,\bar{v} \qquad \text{(B-6)}$$

sustituyendo este resultado en (B-4) se obtiene:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + k\Delta_{st} + k\bar{v} = p(t) + W \qquad \text{(B-7)}$$

Notando que:

$$k\,\Delta_{st} = W$$

Entonces la ecuación (B-7) resulta:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + k\bar{v} = p(t) \qquad \text{(B-8)}$$

como Δ_{st} no varía con el tiempo se puede concluír de (B-5) que $\dot{v} = \dot{\bar{v}}$ y $\ddot{v} = \ddot{\bar{v}}$, entonces (B-8) resulta:

$$m\ddot{\bar{v}} + c\dot{\bar{v}} + k\bar{v} = p(t) \qquad \text{(B-9)}$$

comparando esta ecuación con la ecuación (B-3) se puede concluír que el sistema dinámico no es afectado por las fuerzas gravitacionales (i.e. el peso del cuerpo). Por esta razón los desplazamientos siempre son referidos a la posición estática y los desplazamientos que se determinen serán la respuesta dinámica.

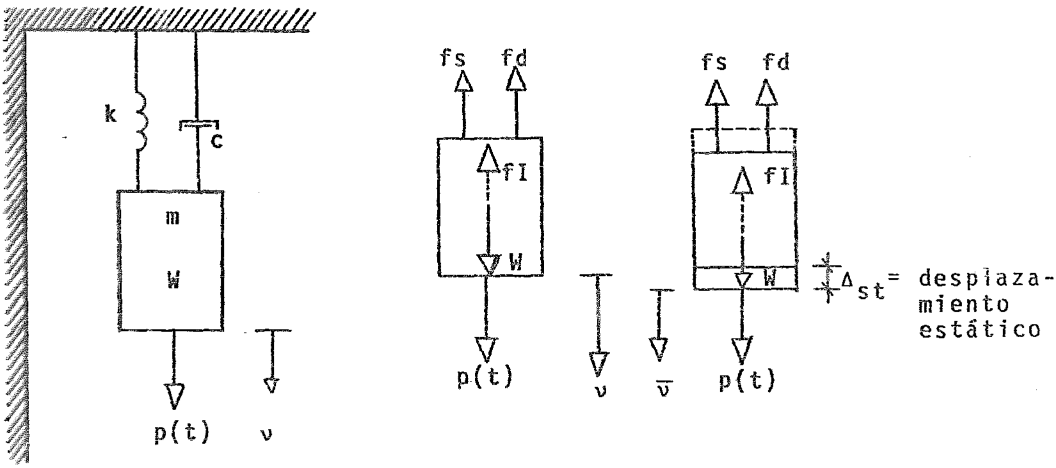


Fig.B.2 Influencia de las fuerzas gravitacionales.

B.2 Vibraciones libres.

SOLUCION DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO. Para un sistema de masa resorte de un grado de libertad con amortiguamiento, ya se vio que la ecuación de movimiento puede ser escrita como:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv\,(t) = p(t) \qquad (B-10)$$

La solución de esta ecuación puede obtenerse convenientemente, primero tratando a dicha ecuación como homogénea, esto és, con el término de la derecha igual a cero y posteriormente encontrando una solución particular. La ecuación anterior igualada a cero resulta entonces:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = 0 \qquad (B-11)$$

Los movimientos que ocurren cuando las fuerzas aplicadas son cero se llaman vibraciones libres.

La solución de la ecuación (B-11) es:

$$v(t) = G\ e^{st} \qquad (B-12)$$

sustituyendo esta ecuación en la ecuación (B-11) resulta:

$$(ms^2 + cs + k)\ G\ e^{st} = 0 \qquad (B-13)$$

dividiendo la ecuación (B-13) entre mG e^{st}, e introduciendo la notación $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$: frecuencia natural sin amortiguar, resulta que:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + w^2 = 0 \qquad (B-14)$$

el valor de s que puede ser obtenido de esta expresión, depende del valor de c. Así, el tipo de movimiento representado por la ecuación (B-12) dependerá del amortiguamiento del sistema.

VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAR. Si el sistema es sin amortiguamiento, es decir, si en la ecuación (B-14) se hace c = 0, el valor de s en dicha ecuación resultante será:

$$s = \pm iw \qquad (B\text{-}15)$$

y la respuesta dada por la ecuación (B-12) es:

$$\nu(t) = G_1\, e^{iwt} + G_2\, e^{-iwt} \qquad (B\text{-}16)$$

en donde los dos términos que resultan de los dos valores de s y las otras constantes G_1 y G_2 representan las amplitudes del movimiento. Recordando que los términos exponenciales de (B-16) pueden expresarse como:

$$e^{\pm iwt} = \mathrm{Cos}\ wt \pm i\ \mathrm{Sen}\ wt \qquad (B\text{-}17)$$

entonces la ecuación mencionada resulta:

$$\nu(t) = A\ \mathrm{Sen}\ wt + B\ \mathrm{Cos}\ wt \qquad (B\text{-}18)$$

donde las constantes se determinan de las condiciones iniciales. Por ejemplo, si el desplazamiento $\nu(0)$ y la velocidad $\dot{\nu}(0)$ son conocidas para un tiempo t=0 (es decir, al inicio de las vibraciones libres del sistema) entonces:

$$B = \nu(0) \quad y \quad A = \frac{\dot{\nu}(0)}{w}$$

y la ecuación (B-18) resulta:

$$\nu(t) = \frac{\dot{\nu}(0)}{w} \text{ Sen } wt + \nu(0) \text{ Cos } wt \qquad \text{(B-19)}$$

esta ecuación representa un movimiento armónico simple, el cual se muestra en la figura B.4.

La frecuencia cíclica f, la cual es simplemente referida como la frecuencia del movimiento, está dada por:

$$f = \frac{w}{2\pi} \qquad \text{(B-20)}$$

y su recíproco que recibe el nombre de período (T), es:

$$T = \frac{2\pi}{w} \qquad \text{(B-21)}$$

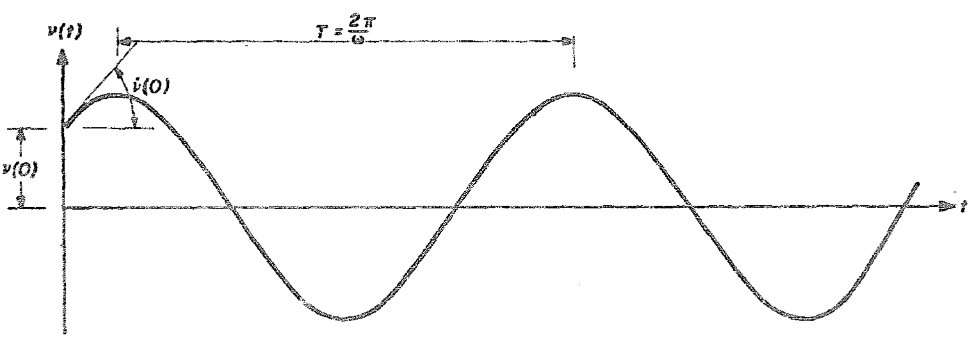


Fig. B.4 Respuesta de vibración libre sin amortiguamiento

VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS. Si se presenta amortiguamiento en el sistema, la solución de la ecuación (B-14) que define la respuesta es:

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - w^2} \qquad \text{(B-22)}$$

De esta última ecuación se pueden presentar tres casos: cuando el radical es positivo, cero o negativo.

a) Amortiguamiento crítico. Si el radical en la ecuación (B-22) es cero, entonces $c/2m = w$ y el valor del amortiguamiento crítico Cc es:

$$Cc = 2\ mw \tag{B-23}$$

el valor de s en la ecuación (B-22) es en este caso:

$$s = -\frac{c}{2m} = -w \tag{B-24}$$

y la respuesta dada por la ecuación (B-12) es:

$$v(t) = (G_1 + G_2\ t)\ e^{-wt} \tag{B-25}$$

En la anterior ecuación el segundo término es multiplicado por t porque se tienen raices s iguales.

Tomando en cuenta las condiciones iniciales de la ecuación (B-25)

$$v(t) = v(0)\ (1+wt) + \dot{v}(0)\ t\ \ e^{-wt} \tag{B-26}$$

la cual es mostrada gráficamente en la figura B.5. En general se dice que el amortiguamiento crítico Cc es la mínima cantidad de amortiguamiento para la cual no ocurren oscilaciones en vibración libre.

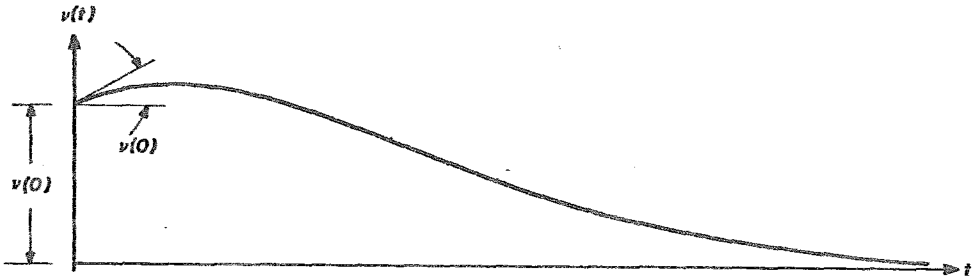


Fig. B.5 Respuesta de vibración libre con amortiguamiento crítico.

b) Sistemas subamortiguados. Si el amortiguamiento es menor que el crítico en la ecuación (B-23), o sea que $c < 2\,mw$, entonces el radical en la ecuación (B-22) debe ser negativo. Para la evaluación de la respuesta libre en este caso, es conveniente expresar el amortiguamiento como una relación ξ del valor del amortiguamiento crítico:

$$\xi = \frac{c}{Cc} = \frac{c}{2mw} \qquad \text{(B-27)}$$

donde ξ es llamado porcentaje de amortiguamiento. Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (B-22) se tiene:

$$s = -\xi\, w \pm \sqrt{(\xi w)^2 - w^2}$$

multiplicando por -1 el radical e introduciendo un nuevo símbolo, w_D, se obtiene:

$$s = -\xi w \pm i\, w_D \qquad \text{(B-28)}$$

donde :

$$w_D = w\sqrt{1-\xi^2} \qquad \text{(B-29)}$$

La cantidad W_D es llamada frecuencia de vibración amortiguada. Para los porcentajes de amortiguamiento que se suponen en los sistemas estructurales típicos (ξ<20 %), W_D difiere poco de la frecuencia sin amortiguar, como se puede notar de la ecuación (B-29).

La solución de la ecuación (B-11) para un sistema de un grado de libertad, con amortiguamiento menor al crítico, puede obtenerse sustituyendo la ecuación (B-28) en la ecuación (B-12):

$$\nu(t) = G_1\, e^{(-\xi wt+iw_Dt)} + G_2\, e^{(-\xi wt-iw_Dt)} = e^{-\xi wt}(G_1\, e^{iw_Dt}+G_2\, e^{-iw_D}$$

el término entre paréntesis representa un movimiento armónico simple, entonces la expresión puede escribirse como:

$$\nu(t) = e^{-\xi wt}\,(A \text{ Sen } w_Dt + B \text{ Cos } w_Dt) \qquad \text{(B-30)}$$

Finalmente si se toma en cuenta las condiciones iniciales, la la ecuación (B-30) queda de la siguiente manera:

$$\nu(t) = e^{-\xi wt}\left[\frac{\dot{\nu}(0) + \nu(0)\,\xi w}{w_D} \text{ Sen } w_Dt + \nu(0) \text{ Cos } w_Dt\right] \qquad \text{(B-31)}$$

Una gráfica de la respuesta de un sistema subamortiguado con un desplazamiento inicial $\nu(0)$ y con velocidad inicial cero: $\dot{\nu}(0)=0$ (en otras palabras, soltando la masa desde una posición estacionaria desplazada) se muestra en la figura B.6. Es interesante notar que el sistema subamortiguado oscila alrededor de la posi ción neutral con una frecuencia circular constante.

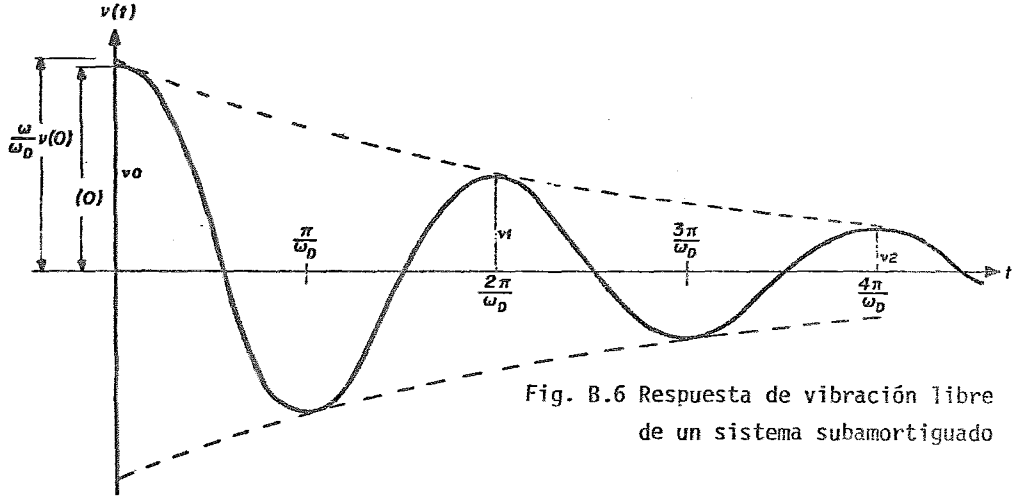


Fig. B.6 Respuesta de vibración libre de un sistema subamortiguado

B.3 Sistemas de varios grados de libertad

FORMULACION DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO. Las ecuaciones de movimiento de un sistema de varios grados de libertad (ver fig. B.7) pueden plantearse expresando el equilibrio de las fuerzas efectivas asociadas a cada uno de los grados de libertad. Así, el equilibrio dinámico puede ser expresado como:

$$fI_1 + fd_1 + fs_1 = p(t)_1$$

$$fI_2 + fd_2 + fs_2 = p(t)_2 \qquad \text{(B-32)}$$

$$fI_3 + fd_3 + fs_3 = p(t)_3$$

o bien escribiendo (B-32) en forma reducida se tiene:

$$\underset{\sim}{fI} + \underset{\sim}{fd} + \underset{\sim}{fs} = \underset{\sim}{P}(t) \qquad \text{(B-33)}$$

Cada una de las fuerzas resistentes está expresada por medio de un conjunto apropiado de coeficientes de influencia.

En forma matricial, el conjunto completo de las fuerzas elásticas puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ \cdots \\ f_{si} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \cdots \\ \nu_i \end{bmatrix} \qquad \text{(B-34)}$$

o simbólicamente:

$$\underset{\sim}{fs} = \underset{\sim}{K}\, \nu \qquad \text{(B-35)}$$

Los coeficientes k_{ij} son llamados coeficientes de rigidez y se definen como:

k_{ij} = fuerza correspondiente a la coordenada i debido al desplazamiento unitario de la coordenada j.

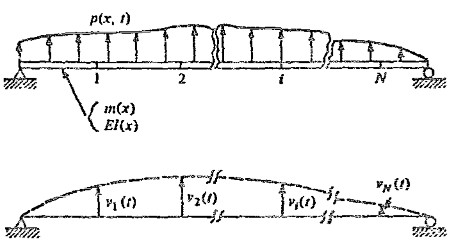


Fig. B.7 Discretización de una estructura general tipo viga.

Si se asume que el amortiguamiento depende de la velocidad, es decir, que el sistema tiene amortiguamiento viscoso, las fuerzas de amortiguamiento correspondientes a los grados de libertad pueden ser expresadas como sigue:

$$\begin{bmatrix} fd_1 \\ fd_2 \\ \cdots \\ fd_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1i} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2i} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{ii} & \cdots & c_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\nu}_1 \\ \dot{\nu}_2 \\ \cdots \\ \dot{\nu}_n \end{bmatrix} \qquad \text{(B-36)}$$

donde $\dot{\nu}_i$ representa la velocidad de movimiento de la coordenada i, y el coeficiente c_{ij} es llamado coeficiente de influencia de amortiguamiento, cuya definición es:

c_{ij} = Fuerza correspondiente a la coordenada i debida a la velocidad unitaria de la coordenada j. Simbólicamente puede escribirse como:

$$\underset{\sim}{fd} = \underset{\sim}{C}\,\dot{\underset{\sim}{\nu}} \qquad \text{(B-37)}$$

La fuerza de inercia puede también ser expresada como un conjunto de coeficientes de influencia, llamados coeficientes de masa, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} fI_1 \\ fI_2 \\ \cdots \\ fI_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1i} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{2i} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{i1} & m_{i2} & m_{ii} & \cdots & m_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\nu}_1 \\ \ddot{\nu}_2 \\ \cdots \\ \ddot{\nu}_i \end{bmatrix} \qquad \text{(B-38)}$$

siendo $\ddot{v}_i$ la aceleración de movimiento de la coordenada i, y m_{ij} el coeficiente de influencia de masa, definido como sigue:

m_{ij} = fuerza correspondiente a la coordenada i debida a la aceleración unitaria de la coordenada j. Y escrita en forma reducida resulta:

$$f_I = \underset{\sim}{m}\,\ddot{\underset{\sim}{v}} \qquad (B\text{-}39)$$

sustituyendo (B-35), (B-37) y (B-39) en (B-33) se obtiene la ecuación de equilibrio dinámico de la estructura. Considerando todos los grados de libertad:

$$\underset{\sim}{m}\,\ddot{\underset{\sim}{v}} + \underset{\sim}{c}\,\dot{\underset{\sim}{v}} + \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{P}(t) \qquad (B\text{-}40)$$

esta ecuación representa las n ecuaciones de movimiento que sirven para definir la respuesta del sistema de más de un grado de libertad.

B.4 Análisis de frecuencias de vibración.

La ecuación de movimiento de un sistema sin amortiguar vibrando libremente es:

$$\underset{\sim}{m}\,\ddot{\underset{\sim}{v}} + \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0} \qquad (B\text{-}41)$$

El problema del análisis de vibración consiste en determinar las condiciones bajo las cuales se permitirá que ocurra el movimiento.

Si se asume que el movimiento es armónico simple, éste se puede expresar para un sistema con varios grados de libertad como:

$$\underset{\sim}{\nu}(t) = \underset{\sim}{\hat{\nu}} \text{ Sen } (wt + \theta) \qquad \text{(B-42)}$$

donde $\hat{\nu}$ = configuración del sistema (el cual no cambia con el tiempo, sólo las amplitudes varían).

θ = ángulo de fase.

Las aceleraciones en vibración libre son:

$$\underset{\sim}{\ddot{\nu}} = -w^2 \underset{\sim}{\hat{\nu}} \text{ Sen } (wt + \theta) = -w^2 \underset{\sim}{\nu} \qquad \text{(B-43)}$$

Sustituyendo (B-42) y (B-43) en (B-41) se tiene:

$$-w^2 m \underset{\sim}{\hat{\nu}} \text{ Sen } (wt + \theta) + \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{\hat{\nu}} \text{ Sen } (wt + \theta) = \underset{\sim}{0}$$

lo cual puede escribirse como:

$$\left[K - w^2 m\right] \underset{\sim}{\hat{\nu}} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(B-44)}$$

Por la regla de Cramer se puede demostrar que la solución a este conjunto de ecuaciones simultáneas es de la forma:

$$\underset{\sim}{\hat{\nu}} = \frac{\underset{\sim}{0}}{\left|\underset{\sim}{K} - w^2 \underset{\sim}{m}\right|} \qquad \text{(B-45)}$$

Las amplitudes finitas para las vibraciones libres sólo son posibles si:

$$\left|\underset{\sim}{K} - w^2 \underset{\sim}{m}\right| = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(B-46)}$$

La anterior es llamada ecuación de frecuencais del sistema. Desarrollando el determinanate se obtiene una ecuación de n-ésimo gra do en función de las frecuencias w^2 para un sistema de n grados de libertad. Las n raíces de esta ecuación (w_1^2, w_2^2, w_3^2, ..., w_n^2) representan las frecuencias de los n modos de vibración posibles en el sistema.

B.5 Análisis de los modos de vibración.

Una vez determinadas las frecuencias de vibración, la ecuación de movimiento (B-44) puede ser expresada como:

$$\underset{\sim}{E}^{(n)} \hat{\underset{\sim}{v}}_n = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(B-47)}$$

en donde:

$$\underset{\sim}{E}^{(n)} = \underset{\sim}{K} - w_n^2 \underset{\sim}{m} \qquad \text{(B-48)}$$

Así, $\underset{\sim}{E}^{(n)}$ representa la matriz obtenida de la resta de $w_n^2 m$ a la matriz de rigideces, por lo que al depender de la frecuencia será diferente para cada modo. La ecuación (B-47) puede ser satisfecha idénticamente porque las frecuencias fueron evaluadas con esta condición; por lo tanto la amplitud de las vibraciones es indeterminada. Sin embargo, la configuración del sistema de vibración se puede determinar normalizando todos los desplazamientos en términos de una de las coordenadas. Así la ecaución (B-47) puede escribirse como:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} e_{11}^{(n)} & e_{12}^{(n)} & \cdots & e_{1n}^{(n)} \\ \hline e_{21}^{(n)} & e_{22}^{(n)} & \cdots & e_{2n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{n1}^{(n)} & e_{n2}^{(n)} & \cdots & e_{nn}^{(n)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline \hat{v}_{2n} \\ \vdots \\ \hat{v}_{nn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \qquad \text{(B-49)}$$

de donde la partición indica la parte que corresponde a las amplitudes de desplazamientos aún desconocidos. Por conveniencia, la ecuación (B-49) puede ser expresada simbólicamente como:

$$\begin{bmatrix} e_{11}^{(n)} & \underset{\sim}{E}_{10}^{(n)} \\ \underset{\sim}{E}_{01}^{(n)} & \underset{\sim}{E}_{00}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{\underset{\sim}{\nu}}_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \qquad \text{(B-50)}$$

de donde:

$$\underset{\sim}{E}_{01}^{(n)} + \underset{\sim}{E}_{00}^{(n)} \hat{\underset{\sim}{\nu}}_{0n} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(B-51)}$$

$$e_{11}^{(n)} + \underset{\sim}{E}_{10}^{(n)} \hat{\underset{\sim}{\nu}}_{0n} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(B-52)}$$

La ecuación (B-51) puede resolverse simultáneamente para las amplitudes de los desplazamientos:

$$\hat{\underset{\sim}{\nu}}_{0n} = -(\underset{\sim}{E}_{00}^{(n)})^{-1} \underset{\sim}{E}_{01}^{(n)} \qquad \text{(B-53)}$$

La ecuación (B-52) sin embargo es redundante.

Las amplitudes de los desplazamientos obtenidas de la ecuación (B-53) junto con la amplitud unitaria del primer componente constituyen el vector de desplazmientos asociados con el n-ésimo modo de vibración. Por conveniencia el vector es usualmente expresado en forma adimensional, dividiendo todos los componentes entre un componente de referencia (normalmente el mayor) resultando un vector que es llamado configuración del n-ésimo modo ϕ_n, así:

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{\hat{\nu}_{kn}} \begin{bmatrix} \hat{\hat{\nu}}_{1n} \\ \hat{\nu}_{2n} \\ \vdots \\ \hat{\nu}_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{(B-54)}$$

La configuración de cada uno de los n modos de vibración puede ser encontrada por el mismo proceso. La matriz cuadrada de las n configuraciones modales será representada por:

$$\underset{\sim}{\Phi} = \left[\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3, \ldots,\ \phi_n\right] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{(B-55)}$$

Se infiere que el análisis de frecuencias y modos de vibración es un problema de valores y vectores característicos y para su solución puede consultarse el apéndice A.

BIBLIOGRAFIA

1. Abell,A.;Steer,A.G.; "The Dynamic Response of Large Turbo-Alternator Steel Foundations";The Institution of Mechanical Engineers, Journal,1976.

2. Almuti,A.M.; "Large Flexible Turbine Foundations"; ASCE, - Journal, 1977.

3. Aneja, I.K.;"Dynamics Response of Sistems-Turbine-Generators on Various Foundations"; Proceedings of the American Power Conference, Vol. 37; 1975.

4. Bathe,K.J.; Wilson,E.L.; Peterson, F.E.; "SAP-V, A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems"; University of Southern California; Department of Civil Engineering.

5. Barkan, D.D.; "Dynamics of Bases and Foundations"; Mc Graw Hill Book Company, N.Y.; 1962.

6. Bechtel; "Design Guide Number C-2.10 for Reinforced Concrete Turbine Generator Pedestals"; 1973.

7. Bechtel; "Structural Analysis and Design"; Curso impartido a personal de la CFE; México,1977.

8. CEGB; "Modern Power Station Practice: Planning and Layout", Vol 1; Pergamon Press, Ltd; 1971.

9. CFE-IIIE; "Análisis Dinámico de Cimentaciones"; Editorial - CFE; México, D.F, 1969.

10. Clough,R.W.; Penzien,J.; "Dynamics of Structures"; Mc Graw Hill Kogakusha.Ltd.;1975.

11. Croneberger,D.K.; Broome,K.R.; "Low-Tuned Foundations for Large Turbine-Generators"; Power Engineering, Journal, June 1973.

12. Dunham,C.W.; "Foundations of Structures"; Mc Graw Hill Book Company, Second Edition; 1962.

13. General Electric; "Steam Turbine-Generator Foundations"; GET-1749C.

14. Gere,J.M.; Weaver,W.Jr.; "Analysis of Framed Structures"; D. Van Nostrand Company,Inc.;Princeton, New Jersey;1965.

15. Guerrero, V.A.; Gândara,F.J.; "Estructura de Apoyo para Turbogeneradores, Implementación de Métodos para su Análisis y Diseño Estructural"; Instituto de Investigaciones Eléctricas; México, 1979.

16. Guerrero, V.A.; Gândara, F.J.; "PTE Valle de México-1,Soporte del Turbogenerador, Revisión del Comportamiento Estructural"; Instituto de Investigaciones Eléctricas; México, 1978.

17. Guerrero,V.A., Lopez,G.A., Gândara,F.J.; "Análisis Estructural con Computadora, Curso Introductorio"; Instituto de Investigaciones Eléctricas; México, 1979.

18. Hadjian,A.H.; "Design Criteria for Turbine-Generator Pedestals"; Journal of the Power Division; Jan., 1970.

19. Hurty,W.C.; Rubinstein,M.F.; "Dynamics of Structures"; Prentice Hall, Inc.; New Jersey; 2nd. printing, 1965.

20. Lisnitzer,M.;Chang.D.C.;Abel,L.W.; "The Design of Support Structures for Elevated Centrifugal Machinery"; Proceedings of the Sixth Turbomachinery Symposium; Texas,1977.

21. Rubinstein,M.F.; "Matrix Computer Analysis of Structures"; Prentice Hall Inc., New Jersey;1966.

22. Sperry Univac; FORTRAN-V Manual; S. Univac Series.

23. Sperry Univac; FORTRAN-V Library; S. Univac Series.

24. Sternlight,B.; Lewis,P.; "Vibration Problems with High Speed Turbomachinery"; ASME paper, 67-DE-8; 1967.

25. Timoshenko,S; Young,D.H.;Weaver,W.Jr.; "Vibration Problems in Engineering"; John Wiley & Sons, 1976.

26. Thomson,W.T.; "Theory of Vibrations with Aplications"; Prentice Hall Inc., 1972.

27. Westinghouse; "Power Plant Design Manual for Steam Turbines"; Westinghouse Large Turbine Division; 1971.