00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

EL INVARIANTE DE HOPF

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

ROSALÍA GUADALUPE HERNÁNDEZ AMADOR

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA

MÉXICO, D.F. M 28265 MARZO,2006

Agradecimientos

Agradezco al Dr. José Luís Cisneros Molina por sus enseñanzas y la gran disponibilidad que siempre mostró durante el tiempo que tomó realizar este trabajo.

También agradezco a los sinodales que revisaron este trabajo, Dr. Carlos Prieto de Castro, Dra. Lorena Armas Sanabria, Dr. Rodrigo Guillermo Rodríguez y especialmente al Dr. Marcelo A. Aguilar González por todos sus comentarios y útiles consejos.

Deseo agradecer también al **Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica PAPIIT** por el apoyo económico otorgado para la realización de esta tesis, bajo el proyecto No. **ES-110702**, titulado "**Métodos Analíticos en Topología Algebraica**".

A mis padres

Índice general

Introducción II

1. Introducción a Cohomología **1**

1.1. Simplejos Singulares y Complejos Celulares 1

1.2. Cohomología 6

1.3. El Invariante de Hopf en cohomología 26

2. Introducción a la K-Teoría **31**

2.1. Haces Vectoriales 31

2.2. K-Teoría y Periodicidad de Bott 39

2.3. El Invariante de Hopf en K-Teoría 52

3. El Invariante de Hopf **55**

3.1. Carácter de Chern 55

3.2. Equivalencia 59

3.3. Teorema de Adams 61

3.4. Aplicación 64

3.5. Interpretación Geométrica del Invariante de Hopf 67

Bibliografía **76**

Introducción

El Invariante de Hopf es un invariante numérico que se define para aplicaciones entre esferas de la forma $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$. Un hecho interesante es que rara vez toma el valor uno. Encontrar los valores que debe tomar n para que exista una aplicación f con esta propiedad, es el llamado **problema de la no existencia de elementos de Invariante de Hopf uno**. El caso de n impar fue facilmente excluido; el caso $n \equiv 2 \pmod 4$, $n > 2$ fue excluido por G. W. Whitehead; J. Adem, demostró que si una aplicación tiene Invariante de Hopf uno entonces n debe ser una potencia de 2. La solución completa a dicha cuestión es debida a J. F. Adams (1960) el cual nos asegura que una aplicación $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ de Invariante de Hopf uno sólo existe cuando $n = 1, 2, 4$ u 8. El objetivo de este trabajo es reunir las herramientas necesarias para finalmente poder demostrar este resultado de J. F. Adams.

Esto tiene un gran número de consecuencias interesantes. De hecho, el interés que provoca se debe a que existen ciertos problemas cuya solución se reduce a la cuestión de estudiar aplicaciones de Invariante de Hopf uno. Algunas de estas cuestiones son las siguientes:

- ¿Cuáles esferas $\mathbb{S}^{n-1}$ son paralelizables?
- ¿Cuáles esferas $\mathbb{S}^{n-1}$ se pueden dotar de una estructura de H-espacio?

y la cuestión puramente algebraica:

- ¿Qué espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ poseen estructura de álgebra de división?

Ahora es conocido que la solución universal a todas estas cuestiones es precisamente: cuando $n = 1, 2, 4$ y 8.

La solución original de J. F. Adams (1960) al problema de la no existencia de elementos de Invariante de Hopf uno hace uso de operaciones secundarias en cohomología ordinaria (ver [1]) y éste fue un punto crítico de arranque de la topología algebraica moderna. Sin embargo, posteriormente, con el surgimiento de la K-Teoría de M. F. Atiyah, se encontró una demostración alternativa mas simple a dicho problema (1966) produciendo un gran impacto en esta área (ver [2]).

De hecho, K-Teoría fue la primera teoría de cohomología generalizada descubierta y juega un papel de suma importancia en la conexión de la topología algebraica con otras áreas de la matemática, por ejemplo, el análisis y la geometría algebraica.

El Invariante de Hopf puede ser expresado en términos cohomológicos o podemos expresarlo también en el lenguaje de K-Teoría. Durante este trabajo vamos a presentar estas dos versiones, demostraremos que en efecto son equivalentes, y usaremos particularmente las herramientas de la K-Teoría para obtener la prueba del Teorema de Adams, siendo éste nuestro objetivo principal. Posteriormente, se aplica este poderoso resultado para lograr contestar las cuestiones que enumeramos anteriormente. Finalmente, presentamos la definición original del Invariante de Hopf como número de enlace y probaremos la equivalencia con las definiciones anteriores.

Este trabajo consta de tres capítulos. En el primero se da una pequeña introducción a la topología algebraica y se presentan definiciones, ejemplos y resultados muy elementales. Se estudian brevemente simplejos singulares y espacios celulares, y se definen los grupos de homología y cohomología sobre ellos. También se introduce el Teorema de Dualidad de Poincaré. El objetivo de este capítulo es ir capturando algunos hechos importantes en topología algebraica, encaminados a contar con las herramientas suficientes para lograr entender la definición del Invariante de Hopf en su versión cohomológica.

En el segundo capítulo se presenta una introducción a la K-Teoría y particularmente se discute K-Teoría compleja. Se presenta la noción de haces vectoriales, los cuales son los objetos sobre los cuales se construye la K-Teoría, y se presenta el fundamental Teorema de Periodicidad de Bott. Nuevamente se presentan sólo hechos básicos encaminados a comprender la definición del Invariante de Hopf en este lenguaje.

En el capítulo final, cuando ya hemos desarrollado toda la maquinaria tanto de cohomología como de K-Teoría, estudiamos el carácter de Chern, el cual nos da la conexión entre estas dos teorías. Entonces se demuestra la equivalencia de las definiciones del Invariante de Hopf estudiadas en los primeros dos capítulos. Luego, se presenta el resultado principal de este trabajo, el Teorema de Adams, y analizamos cómo las operaciones de Adams en K-Teoría nos proporcionan una simple solución al problema de la no existencia de elementos de Invariante de Hopf uno. Luego se presentan algunas aplicaciones en relación a las cuestiones de esferas paralelizables, H-espacios y álgebras de división enunciadas anteriormente y finalmente se presenta la definición original del Invariante de Hopf en términos geométricos y la equivalencia con las otras definiciones.

Capítulo 1

Introducción a Cohomología

El objetivo de este capítulo es introducirnos en el mundo de la topología algebraica y estudiar particularmente el invariante topológico llamado cohomología. La presentación que se hace a continuación de definiciones y hechos, tiene la única finalidad de contar con el vocabulario suficiente para llegar a la formulación del Invariante de Hopf.

Empezamos este capítulo estudiando una clase particular de espacios topológicos y sus grupos de cohomología asociados, en la primera y segunda sección respectivamente. Es hasta la última sección que se presenta nuestra noción objetivo, la definición del Invariante de Hopf, cuando hemos desarrollado ya los elementos necesarios requeridos para plantear y entender tal definición.

1.1. Simplejos Singulares y Complejos Celulares

En esta sección presentamos las definiciones de n-simplejos singulares y complejos celulares, así como algunas propiedades topológicas y ciertos ejemplos básicos a los cuales recurriremos ocasionalmente durante las sucesivas secciones.

Un *n-simplejo* es el análogo n-dimensional de un triángulo, esto es, el mínimo conjunto convexo en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$ que contiene $n+1$ puntos los cuales no viven todos en un hiperplano de dimensión menor que n. Llamamos *n-simplejo estándar* al conjunto convexo $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$\Delta^n := \left\{ (t_0, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0 \text{ para todo } i \right\}.$$

Definición 1.1 *Cualquier aplicación continua de Δ^n a un espacio topológico X es llamado un **n-simplejo singular** en X. La i-esima cara del n-simplejo singular*

$\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ es el $(n-1)$-simplejo singular

$$\sigma \circ \phi_i^n : \Delta^{n-1} \longrightarrow X, \quad i = 0, 1, ..., n$$

donde $\phi_i^n : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ es el encaje lineal definido por

$$\phi_i^n (t_0, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n) = (t_0, ..., t_{i-1}, 0, t_{i+1}, ..., t_n) .$$

Aquí la palabra "singular" se usa para expresar la idea de que σ no necesariamente es un encaje, sino que puede haber "singularidades" que hacen que su imagen ya no necesariamente se mire como un simplejo.

La idea de un complejo celular es la de un espacio topológico que se puede formar mediante una sucesión de pasos, en cada uno de los cuales vamos pegando copias de discos n-dimensionales, para cada entero no negativo n, pero donde el pegado se hace de cierta forma en particular: "mediante fronteras".

En adelante, dada una aplicación $f : A \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos y $A \subset X$ un subespacio cerrado, denotaremos por

$$Y \bigcup_f X$$

al espacio cociente de la unión ajena $Y \bigsqcup X$ mediante la relación de equivalencia que identifica $a \in A$ con su imagen $f(a) \in Y$. Esto es, el espacio que resulta de pegarle a Y el espacio X a lo largo de A, mediante la aplicación f. Tal espacio dotado de la topología cociente es llamado *espacio de adjunción.*

Además, denotaremos por $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a la *esfera unitaria de dimensión* n, y por $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ al *disco cerrado unitario de dimensión* n.

Describiremos ahora el proceso inductivo mediante el cual se construye un complejo celular. Sea X^0 un conjunto discreto de puntos. Estos puntos son llamados 0-células. Si ya hemos definido X^{n-1}, sea $\{f_{\partial_\sigma}\}_\sigma$ una colección de aplicaciones $f_{\partial_\sigma} : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$ con σ en algún conjunto de índices. Sea D la unión ajena de copias $\mathbb{D}_\sigma^n$ de $\mathbb{D}^n$, una para cada σ, y sea S la correspondiente unión de las fronteras $\mathbb{S}_\sigma^{n-1}$ de estos discos. La familia $\{f_{\partial_\sigma}\}_\sigma$ determina una aplicación $f : S \longrightarrow X^{n-1}$ dada por $f|_{\mathbb{S}_\sigma^{n-1}} = f_{\partial_\sigma}$, entonces definimos

$$X^n := X^{n-1} \bigcup_f D.$$

Podemos detener este proceso inductivo en un paso finito, haciendo $X := X^n$ para algún $n < \infty$, o podemos continuar indefinidamente haciendo $X := \bigcup X^n$, y considerando a X con la topología débil, esto es, $A \subset X$ es abierto (o cerrado) si y sólo si $A \bigcap X^n$ es abierto (o cerrado) en X^n para cada n.

Definición 1.2 *Un espacio topológico X obtenido de esta manera es llamado* **complejo celular** *o* **complejo CW**. *El subespacio X^n es llamado n-esqueleto de X, las $f_{\partial_\sigma} : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$ son llamadas aplicaciones de pegado, y las aplicaciones correspondientes $f_\sigma : \mathbb{D}^n_\sigma \longrightarrow X$ definidas mediante la composición $i \circ q \circ j : \mathbb{D}^n_\sigma \hookrightarrow X^{n-1} \bigcup_f D = X^n \hookrightarrow X$ (donde i, j denotan inclusiones y q la proyección sobre el cociente que define a X^n) son llamadas n-células.*

En ocasiones usaremos indistintamente el término n-célula para referirnos a la aplicación $f_\sigma : \mathbb{D}^n_\sigma \longrightarrow X$ o a su imagen en X, y la denotaremos por e^n.

El subconjunto compacto $f_\sigma(\mathbb{D}^n_\sigma) \subset X$ es llamado *célula cerrada*, notemos que en general éste no es homeomorfo a $\mathbb{D}^n_\sigma$ pues podrían existir identificaciones sobre la frontera, sin embargo f_σ se restringe a un homeomorfismo en el interior del disco cuya imagen es llamada *célula abierta*. Además, notemos que no necesariamente la imagen del interior de tal disco $\mathbb{D}^n_\sigma$ mediante f_σ es un abierto en todo X, sino que sólo es un abierto en X^n.

Un **complejo celular finito** es aquél que contiene solamente una cantidad finita de células. Por otra parte, si $X = X^n$ para algún $n < \infty$ decimos que X es de dimensión finita, y definimos al número n más pequeño con esta propiedad como **dimensión del complejo celular** X. Notemos que un complejo celular de dimensión finita no necesariamente es un complejo celular finito, sin embargo, esto no causará ambigüedad en nuestro trabajo ya que para nuestros propósitos será suficiente trabajar con complejos celulares finitos.

Un subespacio A de un complejo celular X es llamado **subcomplejo** de X si tiene por sí mismo estructura de complejo celular y tal estructura es compatible con la estructura celular de X, es decir, que la composición de cada célula $\mathbb{D}^n \longrightarrow A$ de A con la inclusión $A \hookrightarrow X$ es una célula de X. Entonces, A viene a ser la unión de algunas de las células de X. Además, su topología de complejo celular coincide con la topología inducida por X.

Una pareja (X, A) donde A es un subcomplejo de X es llamado un **complejo celular relativo** o **pareja CW**. Por ejemplo, trivialmente el n-esqueleto X^n de X es un subcomplejo de X. En particular, X^{n-1} es un subcomplejo de X^n, de modo que (X^n, X^{n-1}) es un complejo celular relativo.

Presentaremos ahora algunos ejemplos que ilustran las definiciones anteriores.

Esfera unitaria. La esfera $\mathbb{S}^n$, $n \geq 0$, tiene estructura de complejo celular n-dimensional con una célula en dimensión cero y una en dimensión n. Para $n \geq 1$ la aplicación de pegado de la n-célula es la aplicación constante $c : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow e^0$ (de

hecho es la única aplicación posible que podemos definir) por lo tanto $\mathbb{S}^n = e^0 \cup_c e^n$.
▲

La descomposición celular de un complejo no necesariamente es única. Por ejemplo, podemos obtener inductivamente $\mathbb{S}^n$ a partir del ecuador $\mathbb{S}^{n-1}$y del pegado de dos n-células, las componentes de $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{n-1}$, de modo que $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^{n-1} \cup e^n \cup e^n$. Por lo tanto $\mathbb{S}^n = e^0 \cup e^0 \cup \cdots \cup e^n \cup e^n$, esto es, $\mathbb{S}^n$ posee dos k-células para cada $k \leq n$. Por lo tanto, el k-esqueleto de $\mathbb{S}^n$ es $\mathbb{S}^k$ y en particular concluimos que con esta nueva estructura celular, cada subesfera $\mathbb{S}^k$ es un subcomplejo de $\mathbb{S}^n$, $k \leq n$.

Espacio proyectivo complejo n-dimensional. Este espacio, que denotamos por $\mathbb{CP}^n$, se define como el cociente $\mathbb{CP}^n := \mathbb{S}^{2n+1}/\sim$ donde la relación de equivalencia $\sim$ se define para z y w en $\mathbb{S}^{2n+1}$ como $z \sim w$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{S}^1$ tal que $w = \lambda z$. Podemos obtener $\mathbb{CP}^n$ de $\mathbb{CP}^{n-1}$ mediante el pegado de una $2n$-célula, por lo tanto, podemos escribir $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{CP}^{n-1} \cup e^{2n}$. Así, por inducción sobre n obtenemos la estructura celular $\mathbb{CP}^n \cong e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$ con células solamente en dimensiones pares, y donde el $2k$-esqueleto y $2(k+1)$-esqueleto son ambos $\mathbb{CP}^k$, $k \leq n$. Por lo tanto cada $\mathbb{CP}^k$ es un subcomplejo celular de $\mathbb{CP}^n$. ▲

A fin de alargar nuestra lista de ejemplos, notemos que es posible obtener complejos celulares a partir de complejos dados, esto es, existen algunas construcciones de espacios que conservan la estructura celular. A continuación presentamos algunos ejemplos de tales construcciones que conocemos para espacios topológicos en general (ver [10], [13]).

Producto cartesiano. Al producto cartesiano $X \times Y$ de complejos celulares X y Y se le puede dar la estructura de un complejo celular con una n-célula para cada par consistente de una p-célula de X y una q-célula de Y, donde $p + q = n$. En algunos casos la topología de $X \times Y$ como complejo celular es más fina que la topología producto, sin embargo, las dos topologías coinciden si X y Y tienen una cantidad numerable de células. Incluso, estas dos topologías coinciden cuando alguno de ellos es un complejo celular finito (ver [10]). ▲

Espacio cociente. Si (X, A) es un complejo celular relativo, entonces el espacio cociente X/A hereda una estructura celular natural de X. De hecho, X/A tiene una 0-célula correspondiente a la imagen de A en X/A y una célula para cada célula de $X - A$. Para una n-célula de $X - A$ con aplicación de pegado $\mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$, la aplicación de pegado para la correspondiente célula en X/A es la composición con el cociente $\mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}/A^{n-1}$. ▲

Espacio de adjunción. Sean X, Y complejos celulares y $A \subset X$ un subcomplejo. Si $f : A \longrightarrow Y$ es una *aplicación celular*, esto es, $f(X^n) \subset f(Y^n)$ para todo n, entonces el espacio de adjunción $Y \bigcup_f X$ es un complejo celular que contiene a Y como subcomplejo y tiene una célula para cada célula de X que no está en A. De hecho, el complejo cociente $\left(Y \bigcup_f X\right)/Y$ es homeomorfo a X/A. ▲

Cuña. Para complejos celulares punteados X_α cuyos puntos básicos son 0-células, la cuña $\bigvee_\alpha X_\alpha$ de los X_α se define como el espacio cociente de la unión ajena $\bigsqcup_\alpha X_\alpha$ mediante la relación de equivalencia que identifica los puntos básicos en un solo punto. Éste es un complejo celular y cada X_α es un subcomplejo de $\bigvee_\alpha X_\alpha$. ▲

En particular para el complejo celular relativo (X^n, X^{n-1}) de cualquier complejo celular X, el espacio cociente X^n/X^{n-1} es una cuña de esferas n-dimensionales, con una esfera para cada n-célula de X.

Algunas propiedades topológicas de los complejos celulares son las siguientes (ver [10]):

- Cada subcomplejo celular es un subespacio cerrado.
- Los complejos celulares finitos son compactos.
- Un subespacio compacto de un complejo celular está contenido en un subcomplejo finito.
- Los complejos celulares son normales, y en particular, son Hausdorff.
- Los complejos celulares son localmente contraíbles. En particular, son localmente arco-conexos. Así, un complejo celular es arco-conexo si y sólo si es conexo.
- *Cerradura finita*: La cerradura de cada célula intersecta solamente una cantidad finita de células.
- *Topología débil*: Un conjunto es cerrado si y sólo si intersecta la cerradura de cada célula en un conjunto cerrado.

Debido a estas dos últimas propiedades, los complejos celulares reciben alternativamente el nombre de complejos CW (por sus siglas en inglés C = *Closure finiteness* y W = *Weak topology*).

1.2. Cohomología

El propósito de esta sección es obtener el lenguaje con el cual definiremos el Invariante de Hopf. Empezaremos con ciertos hechos que nos conducirán a la noción de cohomología. En particular, definiremos los grupos de homología singular y los grupos de homología celular, y a partir de tales grupos y un proceso de dualización, definiremos los grupos de cohomología singular y celular. Estos últimos son de particular interés pues se pueden equipar de cierta estructura adicional, el producto copa, que convierte a los grupos de cohomología en anillo graduado.

Sea X un espacio topológico y $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros. Para cada $n \geq 0$, sea $S_n(X)$ el grupo abeliano libre con un generador $[\sigma]$ para cada n-simplejo singular $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ en X y con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Para $n < 0$ definimos el grupo $S_n(X)$ como cero. Los elementos de $S_n(X)$ son llamados **n-cadenas singulares** y se pueden escribir como sumas formales finitas $\sum_\sigma n_\sigma [\sigma]$ con coeficientes $n_\sigma \in \mathbb{Z}$.

Podemos definir un homomorfismo de grupos $\partial_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$ llamado **homomorfismo frontera**

$$\begin{aligned} \partial_n : S_n(X) &\longrightarrow S_{n-1}(X) \\ [\sigma] &\longmapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\sigma \circ \phi_i^n] \end{aligned}$$

donde $\sigma \circ \phi_i^n$ son las caras de σ, y extendemos linealmente $\partial_n(\sum_\sigma n_\sigma [\sigma]) = \sum_\sigma n_\sigma \partial_n([\sigma])$. Entonces

$$\begin{aligned} \partial_n(\partial_{n+1}([\sigma])) &= \partial_n\left(\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\left[\sigma\circ\phi_j^{n+1}\right]\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left[\sigma\circ\phi_j^{n+1}\circ\phi_i^n\right] \\ &= \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}\left[\sigma\circ\phi_j^{n+1}\circ\phi_i^n\right] \\ &= \sum_{0\leq i<j\leq n+1}(-1)^{i+j}\left[\sigma\circ\phi_j^{n+1}\circ\phi_i^n\right] \\ &\quad + \sum_{0\leq j\leq i\leq n}(-1)^{i+j}\left[\sigma\circ\phi_j^{n+1}\circ\phi_i^n\right] \end{aligned}$$

pero notemos que $\phi_j^{n+1} \circ \phi_i^n = \phi_{i+1}^{n+1} \circ \phi_j^n$ cuando $j \leq i$, por lo tanto si renombramos

$i+1$ por k en el segundo sumando se sigue que

$$\begin{aligned}\partial_n\left(\partial_{n+1}\left([\sigma]\right)\right) &= \sum_{0\leq i<j\leq n+1}(-1)^{i+j}\left[\sigma\circ\phi_j^{n+1}\circ\phi_i^n\right] \\ &\quad+\sum_{0\leq j<k\leq n+1}(-1)^{k+j-1}\left[\sigma\circ\phi_k^{n+1}\circ\phi_j^n\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

Así, los homomorfismos ∂_n definen un complejo de cadenas $S_*(X)$ llamado **complejo de cadenas singulares de** X, esto es, una sucesión de homomorfismos

$$\cdots\longrightarrow S_{n+1}(X)\xrightarrow{\partial_{n+1}}S_n(X)\longrightarrow\cdots\longrightarrow S_1(X)\xrightarrow{\partial_1}S_0(X)\xrightarrow{\partial_0}0$$

con la propiedad de que $\partial_n\circ\partial_{n+1}=0$ para todo $n\geq 0$.

La condición $\partial_n\circ\partial_{n+1}=0$ en un complejo de cadenas arbitrario A_* implica que $\operatorname{Im}\partial_{n+1}\subset\operatorname{Ker}\partial_n$, donde Im y Ker denotan la imagen y el núcleo de los respectivos homomorfismos. Entonces tiene sentido hablar del grupo cociente $\operatorname{Ker}\partial_n/\operatorname{Im}\partial_{n+1}$, llamado n**-ésimo grupo de homología del complejo de cadenas** A_* y denotado por $H_n(A_*)$. Los elementos de $\operatorname{Ker}\partial_n$ son llamados **ciclos** y los de $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ **fronteras**.

En particular, del complejo de cadenas singulares asociado a un espacio dado, obtenemos la siguiente definición.

Definición 1.3 *El* n***-ésimo grupo de homología singular con coeficientes en*** $\mathbb{Z}$*, de* X *es*

$$H_n(X):=H_n(S_*(X))=\operatorname{Ker}\partial_n/\operatorname{Im}\partial_{n+1}\quad n\geq 0.$$

Decimos que dos ciclos son *homólogos* si su diferencia es una frontera. Los elementos de $H_n(X)$ son clases laterales de $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ llamados *clases de homología*. Por lo tanto, dos ciclos que representan la misma clase de homología son homólogos.

Ahora, denotemos por $S^n(X)$ al grupo *dual* de $S_n(X)$, esto es,

$$S^n(X):=\operatorname{Hom}(S_n(X),\mathbb{Z})$$

es el grupo de homomorfismos $S_n(X)\longrightarrow\mathbb{Z}$. Los elementos de $S^n(X)$ son llamados n**-cocadenas singulares**. Definimos el **homomorfismo cofrontera** δ^n :

$S^{n-1}(X) \longrightarrow S^n(X)$ como el *homomorfismo dual* correspondiente a $\partial_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$, esto es

$$\begin{array}{rcl} \delta^n : S^{n-1}(X) & \longrightarrow & S^n(X) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ \partial_n \end{array}$$

entonces

$$\delta^{n+1}(\delta^n(\varphi)) = \delta^{n+1}(\varphi \circ \partial_n) = \varphi \circ \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

Por lo tanto el complejo de cadenas singulares $S_*(X)$ de X define un **complejo de cocadenas singulares** $S^*(X)$, esto es, un complejo de cadenas con las flechas invertidas

$$0 \xrightarrow{\delta^0} S^0(X) \xrightarrow{\delta^1} S^1(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S^n(X) \xrightarrow{\delta^{n+1}} S^{n+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

donde $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$. En adelante denotaremos al valor de una n-cocadena φ en una n-cadena σ por $\langle \varphi, \sigma \rangle \in \mathbb{Z}$.

La condición $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ en un complejo de cocadenas A^* implica que $\operatorname{Im} \delta^n \subset \operatorname{Ker} \delta^{n+1}$ y por lo tanto tiene sentido hablar de la homología de este complejo de cocadenas, que denotamos por $H^n(A^*)$. En este caso los elementos de $\operatorname{Ker} \delta^{n+1}$ son llamados **cociclos** y los de $\operatorname{Im} \delta^n$ **cofronteras**.

Definición 1.4 *El n-**ésimo grupo de cohomología singular con coeficientes** en $\mathbb{Z}$ de X se define como*

$$H^n(X) := H_n(S^*(X)) = \operatorname{Ker} \delta^{n+1} / \operatorname{Im} \delta^n \quad n \geq 0.$$

Para una cocadena ψ ser un cociclo significa que $\delta^n(\psi) = \psi \circ \partial_n = 0$, en otras palabras, ψ se anula sobre fronteras.

En general, dados dos complejos de cadenas A_*, B_* de grupos abelianos, o más generalmente R-módulos sobre un anillo conmutativo R, se define el complejo de cadenas producto tensorial $A_* \otimes_R B_*$ tal que $(A \otimes_R B)_n = \sum_{i+j=n} A_i \otimes_R B_j$ con homomorfismos frontera $\partial_n(a \otimes b) = \partial_i(a) \otimes b + (-1)^i a \otimes \partial_j(b)$ para $a \in A_i$ y $b \in B_j$.

En particular si consideramos $R = \mathbb{Z}$, un complejo de cadenas A_*, y el complejo de cadenas formado por un grupo abeliano fijo G y con homomorfismos frontera cero, resulta el complejo de cadenas $A_* \otimes_{\mathbb{Z}} G$ con homomorfismos frontera $\partial_n \otimes 1_G$. Los grupos de homología asociados a este complejo de cadenas, $H_n(A_* \otimes_{\mathbb{Z}} G)$, son llamados **grupos de homología del complejo de cadenas A_* con coeficientes en G.**

Definición 1.5 *El n-ésimo grupo de homología singular con coeficientes en G, de X es*

$$H_n(X;G) := H_n(S_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G)$$

y el n-ésimo grupo de cohomología singular con coeficientes en G, de X es

$$H^n(X;G) := H_n(S^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G).$$

En adelante $S_*(X;G)$ denotará al complejo de cadenas $S_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$, y $S^*(X;G)$ al complejo de cadenas $S^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$. Cuando nos referimos a $G = \mathbb{Z}$ usualmente escribimos simplemente $H_n(X)$ (o $H^n(X)$) en lugar de $H_n(X;\mathbb{Z})$ (o $H^n(X;\mathbb{Z})$).

Una aplicación dada $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos, induce un homomorfismo a nivel de cadenas singulares

$$f_\# : S_n(X;G) \longrightarrow S_n(Y;G) \quad \text{para cada } n$$

que se obtiene de componer cada n-simplejo singular $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ en X con f para obtener un n-simplejo singular $f_\#(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta^n \longrightarrow Y$ en Y, y entonces extendemos linealmente $f_\#\left(\sum_\sigma n_\sigma \sigma\right) = \sum_\sigma n_\sigma f_\#(\sigma) = \sum_\sigma n_\sigma (f \circ \sigma)$.

Los $f_\#$'s definen una *transformación de cadenas* entre el complejo de cadenas singulares $S_*(X;G)$ de X y el complejo de cadenas singulares $S_*(Y;G)$ de Y, esto es, $f_\#$ conmuta con el homomorfismo frontera, pues para un generador $[\sigma]$ se tiene

$$\begin{aligned} f_\#(\partial_n([\sigma])) &= f_\#\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[\sigma \circ \phi_i^n]\right) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f \circ [\sigma \circ \phi_i^n] \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[f \circ \sigma \circ \phi_i^n] = \partial_n(f_\#(\sigma)) \end{aligned}$$

y entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & S_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_\#"'] & S_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_\#"'] & S_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & S_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & S_n(Y) \arrow[r, "\partial_n"] & S_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}.$$

La relación $f_\# \circ \partial_n = \partial_n \circ f_\#$ implica que $f_\#$ manda ciclos en ciclos y fronteras en fronteras, por lo tanto obtenemos **homomorfismos inducidos a nivel de homología**

$$f_* : H_n(X;G) \longrightarrow H_n(Y;G) \quad \text{para cada } n$$

tal que a la clase $[c]$ de un ciclo c, lo manda a $[f_{\#}(c)]$.

Tales homomorfismos inducidos tienen las propiedades funtoriales:

- $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ para una composición $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$.
- $1_* = 1$ (donde 1 denota la aplicación identidad de un espacio o un grupo).

Además, se puede probar (ver [10]) que aplicaciones homotópicas $f \simeq g : X \longrightarrow Y$ inducen el mismo homomorfismo, esto es, $f_* = g_* : H_n(X;G) \longrightarrow H_n(Y;G)$ para cada n. Esta propiedad es llamada *invariancia homotópica.* Este hecho y las propiedades funtoriales de los homomorfismos inducidos implican inmediatamente que para cada n, los f_* son isomorfismos si $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica. En particular tenemos que si X y Y son homeomorfos entonces sus grupos de homología singular son isomorfos.

Luego, dualizando los homomorfismos $f_{\#} : S_n(X;G) \longrightarrow S_n(Y;G)$ inducidos por $f : X \longrightarrow Y$ se tienen homomorfismos a nivel de cocadenas singulares

$$f^{\#} : S^n(Y;G) \longrightarrow S^n(X;G) \quad \text{para cada } n$$

esto es, para cada $\varphi \in S^n(Y)$ se define $f^{\#}(\varphi)$ como la composición $\varphi \circ f_{\#} : S_n(X) \longrightarrow S_n(Y) \longrightarrow G$. Tales $f_{\#}$'s definen una *transformación de cocadenas* entre el complejo de cocadenas singulares $S^*(X;G)$ de X y el complejo de cocadenas singulares $S^*(Y;G)$ de Y, esto es, los $f^{\#}$'s conmutan con el homomorfismo cofrontera, pues

$$f^{\#}(\delta^n(\varphi)) = f^{\#}(\varphi \circ \partial_n) = \varphi \circ \partial_n \circ f_{\#} = \varphi \circ f_{\#} \circ \partial_n = \delta^n(\varphi \circ f_{\#}) = \delta^n(f_{\#}(\varphi))$$

y obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S^{n-1}(Y) \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "f^{\#}"'] & S^n(Y) \arrow[r, "\delta^{n+1}"] \arrow[d, "f^{\#}"'] & S^{n+1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "f^{\#}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S^{n-1}(X) \arrow[r, "\delta^n"] & S^n(X) \arrow[r, "\delta^{n+1}"] & S^{n+1}(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

así, mediante $f^{\#}$, obtenemos **homomorfismos inducidos a nivel de cohomología**

$$f^* : H^n(Y;G) \longrightarrow H^n(X;G) \quad \text{para cada } n$$

que manda la clase $[\varphi]$ del cociclo φ a $\left[f^{\#}(\varphi)\right]$, y que tienen las propiedades funtoriales:

- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ para una composición $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$.
- $1^* = 1$ (donde 1 denota la aplicación identidad de un espacio o un grupo).

También en este caso se puede probar que se cumple la propiedad de *invariancia homotópica* (ver [10]) y en particular concluimos que espacios homeomorfos tienen grupos de cohomología singular isomorfos.

Ahora bien, existen ciertas relaciones entre los grupos de homología de un espacio X, un subespacio A y el cociente X/A. En general no se cumple que $H_n(X)$ contenga a $H_n(A)$ como subgrupo y que el grupo cociente $H_n(X)/H_n(A)$ sea isomorfo a $H_n(X/A)$. Notemos que si esto se cumpliera en general, entonces la teoría de homología podría colapsarse totalmente ya que todo espacio X se puede encajar como subespacio de un espacio con grupos de homología triviales, a saber, el **cono** de X definido por $CX := (X \times I)/(X \times \{0\})$, con $I = [0,1]$, el cual es contraíble.

A fin de formular tales relaciones necesitamos los siguientes hechos algebraicos (ver [10], [6]). Una sucesión de homomorfismos $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$ es *exacta* si $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Si $A' = 0$, esto significa que g es inyectivo; si $A'' = 0$, esto significa que f es suprayectivo. Por lo tanto, si una sucesión corta $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$ es exacta, entonces f es un isomorfismo.

Por otro lado si $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta entonces los siguientes enunciados son equivalentes: existe un homomorfismo $s : A \longrightarrow A'$ tal que $s \circ f$ es la identidad en A'; existe un homomorfismo $t : A'' \longrightarrow A$ tal que $g \circ t$ es la identidad en A''; existe un isomorfismo $A \approx A' \oplus A''$. Si estas condiciones se satisfacen decimos que la sucesión exacta se *escinde*.

Una sucesión larga $\cdots \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow \cdots$ es exacta si es exacta en cada posición. Las inclusiones $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ son equivalentes a pedir $g \circ f = 0$, así, la sucesión es un complejo de cadenas; las inclusiones opuestas $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f$ nos dicen que los grupos de homología de este complejo de cadenas son triviales.

Si ahora consideramos complejos de cadenas X'_*, X_*, X''_* con homomorfismos frontera ∂_n, entonces una *sucesión exacta corta de complejos de cadenas* es una sucesión

$$0 \longrightarrow X'_* \xrightarrow{f} X_* \xrightarrow{g} X''_* \longrightarrow 0$$

tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots\longrightarrow & X'_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & X'_n & \xrightarrow{\partial_n} & X'_{n-1} & \longrightarrow \\
 & f\Big\downarrow & & f\Big\downarrow & & f\Big\downarrow & \\
\cdots\longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{\partial_n} & X_{n-1} & \longrightarrow \\
 & g\Big\downarrow & & g\Big\downarrow & & g\Big\downarrow & \\
\cdots\longrightarrow & X''_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & X''_n & \xrightarrow{\partial_n} & X''_{n-1} & \longrightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

tiene renglones exactos y es conmutativo (aquí 0 denota al complejo de cadenas que es cero en todo grado). Tal sucesión de complejos de cadenas induce de forma natural una sucesión exacta larga de homomorfismos de grupos

$$\cdots \longrightarrow H_n(X') \xrightarrow{f_*} H_n(X) \xrightarrow{g_*} H_n(X'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X') \longrightarrow \cdots,$$

donde *naturalidad* significa que el diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas de complejos de cadenas, induce un diagrama conmutativo de sucesiones exactas largas de grupos. En este caso ∂ es llamado *homomorfismo de conexión* y se define de la siguiente manera: si $[x]$ denota la clase de homología de un ciclo x, definimos $\partial : H_n(X'') \longrightarrow H_{n-1}(X')$ como $\partial[x''] = [x']$, donde $f(x') = \partial_n(x)$ para algún x tal que $g(x) = x''$, y donde ∂_n denota al correspondiente homomorfismo frontera $\partial_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ (la existencia de x se debe a que g es suprayectivo; la existencia de x' se debe a que $g(\partial_n(x)) = \partial_n(g(x)) = 0$ y f es inyectiva)

$$\begin{array}{ccc}
 & & 0 \\
 & & \downarrow \\
 & & X'_{n-1} \ni x' \\
 & & f\Big\downarrow \\
x \in X_n & \xrightarrow{\partial_n} & X_{n-1} \ni \partial_n(x) \\
\Big\downarrow g & & \\
x'' \in X''_n & & \\
\downarrow & & \\
0 & &
\end{array}$$

Las sucesiones exactas nos permiten relacionar los grupos de homología de un espacio, un subespacio y el espacio cociente asociado.

Dado un espacio X y un subespacio $A \subset X$, sea

$$S_n(X, A) := S_n(X) / S_n(A)$$

de modo que las cadenas singulares en $S_n(A)$ son triviales en $S_n(X)$. Como el homomorfismo frontera $\partial_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$ manda $S_n(A)$ a $S_{n-1}(A)$, éste induce un homomorfismo frontera cociente $\partial_n : S_n(X, A) \longrightarrow S_{n-1}(X, A)$ por lo tanto obtenemos una **complejo de cadenas relativas** $S_*(X, A)$

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X, A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_0(X, A) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

donde $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ ya que esta condición también se cumple antes de pasar al cociente.

Luego, dualizando este complejo de cadenas, haciendo

$$S^n(X, A) := \mathrm{Hom}(S_n(X, A), \mathbb{Z})$$

y definiendo homomorfismos cofrontera relativos $\delta^n : S^n(X, A) \longrightarrow S^{n+1}(X, A)$ como restricciones de los homomorfismos cofronteras no relativos, obtenemos un **complejo de cocadenas relativas** $S^*(X, A)$

$$0 \xrightarrow{\delta^0} S^0(X, A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S^n(X, A) \xrightarrow{\delta^{n+1}} S^{n+1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

Definición 1.6 *El n-**ésimo grupo de homología relativa con coeficientes en** G de (X, A) es*

$$H_n(X, A; G) := H_n(S_*(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} G).$$

*El n-**ésimo grupo de cohomología relativa con coeficientes en** G de (X, A) es*

$$H^n(X, A; G) := H_n(S^*(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} G).$$

Denotaremos por $S_*(X, A; G)$ al complejo de cadenas $S_*(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} G$ y por $S^*(X, A; G)$ al complejo de cadenas $S^*(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} G$.

Notemos que los elementos de $H_n(X, A)$ están representados por **ciclos relativos**, es decir, n-cadenas $\alpha \in S_n(X)$ tales que $\partial_n(\alpha) \in S_{n-1}(A)$. Un ciclo relativo α es trivial si y sólo si es una **frontera relativa**, esto es, $\alpha = \partial\beta + \gamma$ para algún $\beta \in S_{n+1}(X)$ y $\gamma \in S_n(A)$. Estas propiedades hacen precisa la idea intuitiva de que $H_n(X, A)$ es "la homología de X módulo A".

Justo como en el caso no relativo, existen homomorfismos inducidos para homología relativa. Una aplicación de parejas $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$, esto es $f(A)\subset B$, induce un homomorfismo

$$f_{\#}:S_n(X,A;G)\longrightarrow S_n(Y,B;G)\quad \text{para cada } n$$

ya que $f_{\#}:S_n(X)\longrightarrow S_n(Y)$ manda $S_n(A)$ en $S_n(B)$, así, tenemos aplicaciones bien definidas sobre cocientes $f_{\#}:S_n(X,A)\longrightarrow S_n(Y,B)$. Además la relación $\partial_n\circ f_{\#}=f_{\#}\circ\partial_n$ se cumple para cadenas relativas porque se cumple para cadenas no relativas. Por lo tanto los $f_{\#}$'s definen una transformación de cadenas y entonces existen **homomorfismos relativos inducidos a nivel de homología**

$$f_*:H_n(X,A;G)\longrightarrow H_n(Y,B;G)$$

y estos siguen cumpliendo las propiedades funtoriales $(f\circ g)_*=f_*\circ g_*$ e $1_*=1$ y la propiedad de invariancia homotópica.

Análogamente, mediante dualización, se cumple que f induce un homomorfismo

$$f^{\#}:S^n(Y,B;G)\longrightarrow S^n(X,A;G)\quad \text{para cada } n$$

que define una transformación de cocadenas, por lo tanto existen **homomorfismos relativos inducidos a nivel de cohomología**

$$f^*:H^n(Y,B;G)\longrightarrow H^n(X,A;G)\quad \text{para cada } n$$

donde se mantienen las propiedades funtoriales $(f\circ g)^*=f^*\circ g^*, 1^*=1$ y la invariancia homotópica.

Por otro lado si $i:A\hookrightarrow X, j:(X,\varnothing)\hookrightarrow(X,A)$ denotan las inclusiones, tenemos que el siguiente diagrama con renglones exactos es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\longrightarrow & S_n(A) & \xrightarrow{i_{\#}} & S_n(X) & \xrightarrow{j_{\#}} & S_n(X,A) & \longrightarrow 0\\
 & \partial_n\Big\downarrow & & \partial_n\Big\downarrow & & \partial_n\Big\downarrow & \\
0\longrightarrow & S_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & S_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_{\#}} & S_{n-1}(X,A) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

entonces

$$0\longrightarrow S_*(A)\xrightarrow{i}S_*(X)\xrightarrow{j_{\#}}S_*(X,A)\longrightarrow 0$$

define una sucesión exacta corta de complejos de cadenas y su **sucesión exacta larga de homología** inducida es

$$\cdots\longrightarrow H_n(A)\xrightarrow{i_*}H_n(X)\xrightarrow{j_*}H_n(X,A)\xrightarrow{\partial}H_{n-1}(A)\longrightarrow\cdots\longrightarrow H_0(X,A)\longrightarrow 0$$

donde i_*, j_* son los respectivos homomorfismos inducidos y ∂ es el homomorfismo de conexión. De hecho podemos obtener una sucesión exacta larga análoga con grupos de homología con coeficientes en G.

Esta sucesión exacta larga hace precisa la idea de que los grupos $H_n(X, A)$ miden la diferencia entre los grupos $H_n(X)$ y $H_n(A)$. En particular, la exactitud implica que si $H_n(X, A) = 0$ para todo n, entonces la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ induce isomorfismos $H_n(A) \approx H_n(X)$ para todo n, porque la sucesión exacta larga para (X, A) se rompe en sucesiones $0 \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \longrightarrow 0$.

Por otro lado, dualizando la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow S_n(A) \xrightarrow{i} S_n(X) \xrightarrow{j} S_n(X, A) \longrightarrow 0$$

obtenemos una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow S^*(X, A) \xrightarrow{j^*} S^*(X) \xrightarrow{i^*} S^*(X, A) \longrightarrow 0$$

donde los respectivos homomorfismos i^*, q^*conmutan con δ^n puesto que i, q conmutan con ∂_n, y entonces la **sucesión exacta larga de grupos de cohomología** asociada viene a ser

$$\cdots \longrightarrow H^n(X, A) \xrightarrow{j^*} H^n(X) \xrightarrow{i_*} H^n(A) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

donde δ denota al homomorfismo de conexión, y en general obtenemos también una sucesión exacta larga con grupos de cohomología con coeficientes en G.

Ejemplo 1.7 *Notemos que si $X = \{x_0\}$ es el espacio con un solo punto $S_n(X) \approx \mathbb{Z}$ para todo $n \geq 0$, ∂_{2n} es la identidad para $n \geq 1$, y es cero en otro caso. Por lo tanto $S_n(X; G) \approx G$ y $\partial_{2n} \otimes 1_G$ es la identidad para $n \geq 1$ y es cero en otro caso, entonces*

$$H_n(X; G) \approx \begin{cases} G & si\ n = 0 \\ 0 & si\ n > 0 \end{cases}.$$

Por lo tanto $S^n(X; G) \approx G$ para todo n y $\delta^{2n} \otimes 1_G$ es la identidad para $n \geq 1$ y cero en otro caso, de modo que

$$H^n(X; G) \approx \begin{cases} G & si\ n = 0 \\ 0 & si\ n > 0 \end{cases}.$$

Luego, de la invariancia homotópica de H_n (o H^n) se sigue que estos también son los grupos de homología (o cohomología) de cualquier espacio contraíble. ▲

En ocasiones es conveniente tener una versión un poco modificada de homología en la cual un punto tenga grupos de homología triviales para todas las dimensiones incluyendo cero.

Definición 1.8 *Sea X un espacio punteado con punto básico x_0 y $c : X \longrightarrow \{x_0\}$ la única aplicación sobre el espacio con un solo punto. Los* ***grupos de homología reducida*** *de X con coeficientes en G se definen como*

$$\widetilde{H}_n(X;G) := \operatorname{Ker}(c_* : H_n(X;G) \longrightarrow H_n(\{x_0\};G)).$$

Y si $i : \{x_0\} \hookrightarrow X$ denota la inclusión del punto básico, entonces definimos los grupos de ***cohomología reducida*** *de X con coeficientes en G como*

$$\widetilde{H}^n(X;G) := \operatorname{Ker}(i^* : H^n(X;G) \longrightarrow H^n(\{x_0\};G)).$$

Notemos que $c \circ i = 1$ de modo que $c_* \circ i_* = 1$, por lo tanto c_* es suprayectiva y se tiene que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_n(X;G) \longrightarrow H_n(X;G) \xrightarrow{c_*} H_n(\{x_0\};G) \longrightarrow 0$$

se escinde, y tenemos la siguiente relación entre homología reducida y no reducida

$$H_n(X;G) \approx \widetilde{H}_n(X;G) \oplus H_n(\{x_0\};G)$$

por lo tanto

$$H_0(X;G) \approx \widetilde{H}_0(X;G) \oplus G \quad \text{y} \quad H_n(X;G) \approx \widetilde{H}_n(X;G) \text{ si } n \neq 0.$$

Por otro lado $c \circ i = 1$ implica que $i^* \circ c^* = 1$, por lo tanto la inclusión induce un homomorfismo suprayectivo y la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}^n(X;G) \longrightarrow H^n(X;G) \xrightarrow{i^*} H^n(\{x_0\};G) \longrightarrow 0$$

se escinde, y resulta una descomposición en suma directa

$$H^n(X;G) \approx \widetilde{H}^n(X;G) \oplus H^n(\{x_0\};G)$$

por lo tanto

$$H^0(X;G) \approx \widetilde{H}^0(X;G) \oplus G \quad \text{y} \quad H^n(X;G) \approx \widetilde{H}^n(X;G) \text{ si } n \neq 0.$$

En particular para $X = \{x_0\}$ concluimos que $\widetilde{H}_n(X;G)$ y $\widetilde{H}^n(X;G)$ son cero para todo n.

También existen sucesiones exactas largas para parejas (X, A) con $A \neq \varnothing$, con grupos de homología (cohomología) reducidos completamente análoga a la sucesión exacta larga con grupos de homología no reducidos. En particular aplicando dicha sucesión a la pareja (X, x_0) donde $x_0 \in X$, como $\widetilde{H}_n(x_0) = 0$ para todo n, obtenemos isomorfismos

$$H_n(X, x_0) \approx \widetilde{H}_n(X) \quad \text{para todo } n.$$

Dada una pareja arbitraria, podemos expresar la homología relativa de esta pareja como homología reducida absoluta (ver [10]). En efecto, considerando el espacio $X \cup CA$ donde CA denota al cono de A, se puede probar que existen isomorfismos

$$H_n(X, A) \approx \widetilde{H}_n(X \cup CA) \quad \text{para cada } n.$$

Si (X, A) es un complejo celular relativo, $A \neq \varnothing$, el cociente $q : (X, A) \longrightarrow (X/A, A/A)$ induce isomorfismos

$$q_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X/A, A/A) \approx \widetilde{H}_n(X/A) \quad \text{para todo } n$$

y podemos obtener isomorfismos similares

$$H_n(X, A; G) \approx \widetilde{H}_n(X/A; G) \quad \text{y} \quad H^n(X, A; G) \approx \widetilde{H}^n(X/A; G) \quad \text{para todo } n.$$

En el caso particular en el que X es un complejo celular y X^n es el n-esqueleto, se puede probar (ver [10] , [14]):

- $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$ para $k \neq n$ y es un grupo libre para $k = n$ con un generador por cada n-célula de X, pues en este caso $H_k(X^n, X^{n-1}) \approx \widetilde{H}_k(X^n/X^{n-1})$ y el cociente X^n/X^{n-1} es una cuña de n-esferas, una para cada n-célula de X.
- $H_k(X^n) = 0$ para $k > n$. En particular si X es de dimensión finita entonces $H_k(X) = 0$ para $k > \dim X$.
- La inclusión $i : X^n \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $i_* : H_k(X^n) \longrightarrow H_k(X)$ si $k < n$.

Se cumplen enunciados similares en el caso de cohomología.

En este caso, dado un complejo celular X consideremos las sucesiones exactas largas para las parejas $(X^{n+1}, X^n), (X^n, X^{n-1})$ y (X^{n-1}, X^{n-2}) y denotemos por $j_n : H_n(X^n) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-1})$. Si definimos $d_n : H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-1})$ como la composición

$$d_n := j_{n-1} \circ \partial_n$$

(los cuales son justo relativizaciones de los homomorfismos frontera ∂_n) obtenemos la siguiente sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}\left(X^{n+1}, X^n\right) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right) \longrightarrow \cdots.$$

Notemos que la composición $d_n \circ d_{n+1}$ es cero pues incluye dos homomorfismos sucesivos en una de las sucesiones exactas. Por lo tanto, si $C_n(X) := H_n(X^n, X^{n-1})$ entonces la sucesión anterior viene a ser un complejo de cadenas C_* con homomorfismos frontera d_n

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \xrightarrow{d_0} 0$$

llamado **complejo de cadenas celulares de** X.

Como $C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ es libre, cuya base está en correspondencia uno a uno con las n-células de X, podemos pensar en los elementos de $H_n(X^n, X^{n-1})$ como combinaciones lineales de las n-células de X.

Dualizando el complejo de cadenas celulares, si $C^n(X) := \operatorname{Hom}(C_n(X), \mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}(H_n(X^n, X^{n-1}), \mathbb{Z}) \approx H^n(X^n, X^{n-1})$ podemos definir homomorfismos cofronteras $d^n : C^n(X) \longrightarrow C^{n+1}(X)$ para obtener un **complejo de cocadenas celulares de** X, $C^*(X)$

$$0 \longrightarrow C^0(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^{n-1}(X) \xrightarrow{d^{n-1}} C^n(X) \xrightarrow{d^n} C^{n+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Definición 1.9 *Los grupos de homología del complejo de cadenas $C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$ son llamados* ***grupos de homología celular con coeficientes en*** *G de X. Los grupos de homología del complejo de cocadenas $C^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$ son llamados* ***grupos de cohomología celular con coeficientes*** *en G de X.*

Notemos que podemos identificar $H_n(X)$ con $H_n(X^n) / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$. Luego, como j_n es inyectivo, manda $\operatorname{Im} \partial_{n+1}$ isomorfamente sobre $\operatorname{Im}(j_n \circ \partial_{n+1}) = \operatorname{Im} d_{n+1}$ y manda $H_n(X^n)$ isomorfamente sobre $\operatorname{Im} j_n = \operatorname{Ker} \partial_n$. Además, como j_{n-1} es inyectivo, $\operatorname{Ker} \partial_n = \operatorname{Ker} d_n$. Así, j_n induce un isomorfismo del cociente $H_n(X^n) / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ sobre $\operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$. Por lo tanto los grupos de homología singular y los grupos de homología celular son isomorfos, esto es,

$$H_n(X; G) \approx H_n(C_*(X); G) \quad \text{para cada } n.$$

Similarmente podemos obtener isomorfismos (ver [10], [4])

$$H^n(X; G) \approx H^n(C^*(X); G) \quad \text{para cada } n.$$

Ejemplo 1.10 *Si X es un complejo celular sin n-células, entonces $H_n(X) = 0$. Mas generalmente, si X es un complejo celular con k n-células, entonces como $H_n(X^n, X^{n-1})$ es abeliano libre con k generadores, el subgrupo* $\operatorname{Ker} d_n$ *debe estar generado por a lo más k elementos, por lo tanto también el cociente* $\operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$ *y entonces $H_n(X)$ es generado por a lo más k elementos.* ▲

Ejemplo 1.11 *Consideremos la esfera $\mathbb{S}^n$ con la estructura celular canónica con únicamente una 0-célula y una n-célula y $G = \mathbb{Z}$. Supongamos primero que $n = 0$, entonces $C_0(\mathbb{S}^0) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, C_i(\mathbb{S}^0) \approx 0$ para $i > 0$ y los homomorfismos frontera son cero, de modo que $H_0(\mathbb{S}^0) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $H_i(\mathbb{S}^0) \approx 0$ si $i \neq 0$. Supongamos ahora que $n > 0$, entonces $C_0(\mathbb{S}^n) = C_n(\mathbb{S}^n) \approx \mathbb{Z}$ y $C_i(\mathbb{S}^0) \approx 0$ en otro caso, y concluimos que los homomorfismos frontera son cero (el caso $n = 1$ se sigue por la definición) por consiguiente $H_0(\mathbb{S}^n) \approx \mathbb{Z}, H_n(\mathbb{S}^n) \approx \mathbb{Z}$ y $H_i(\mathbb{S}^n) \approx 0$ si $i \neq 0, i \neq n$. Por lo tanto, de la relación entre homología y homología reducida llegamos a que*

$$H_i(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} \quad y \quad H_i(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, n \\ 0 & i \neq n \end{cases} \quad \text{para } n > 0. \ \blacktriangle$$

Por comodidad, en el ejemplo anterior tomamos la descomposición celular canónica de la esfera, aunque pudimos haber tomado cualquier otra descomposición, ya que los grupos de homología de un espacio son independientes de tal elección.

Ejemplo 1.12 *Consideremos el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ con la descomposición celular $\mathbb{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$ dada por exactamente una célula en cada dimensión par y nuevamente consideremos $G = \mathbb{Z}$. Entonces $C_i(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{Z}$ si i es par, $0 \leq i \leq 2n$; $C_i(\mathbb{CP}^n) = 0$ en otro caso. Por lo tanto, los homomorfismos frontera son cero y*

$$H_i(\mathbb{CP}^n) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & i \text{ par, } 0 \leq i \leq 2n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} . \quad \blacktriangle$$

En general, si X es un complejo celular sin células de dimensiones $n-1$ y $n+1$ entonces $H_n(X)$ es abeliano libre cuya base está en correspondencia uno a uno con las n-células de X.

Hemos visto que para homología singular se cumplen las propiedades $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ y $1_* = 1$ para los homomorfismos inducidos. Por lo tanto, para cada n, los $H_n(-; G)$ definen *funtores covariantes* de la categoría cuyos objetos son las parejas de espacios topológicos y los morfismos son las aplicaciones continuas, a la categoría de grupos abelianos y homomorfismos de grupos. Además, si $H_n(A)$

denota a $H_n(A,\varnothing)$, tenemos definidas transformaciones naturales de funtores $\partial : H_n(X,A;G) \longrightarrow H_{n-1}(A;G)$. Se puede probar (ver [6]) que estos funtores y transformaciones naturales satisfacen:

- *Funtorialidad.* Para aplicaciones entre parejas $g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ y $f : (Y,B) \longrightarrow (Z,C)$

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_* : H_n(X,A;G) \longrightarrow H_n(Z,C;G)$$

  y si $1_{(X,A)} : (X,A) \longrightarrow (X,A)$ es la identidad entonces

$$1_{(X,A)*} = 1_{H_n(X,A)} : H_n(X,A;G) \longrightarrow H_n(X,A;G)$$

  donde $1_{H_n(X,A)}$ es la identidad de grupos.

- *Homotopía.* Si $f \simeq g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ como aplicaciones de parejas entonces

$$f_* = g_* : H_n(X,A;G) \longrightarrow H_n(Y,B;G).$$

- *Escisión.* Dada una pareja (X,A) y un subespacio $U \subset X$ tal que la cerradura de U está contenida en el interior de A, entonces la inclusión $k : (X-U, A-U) \hookrightarrow (X,A)$ induce un isomorfismo

$$k_* : H_n(X-U, A-U;G) \longrightarrow H_n(X,A;G).$$

- *Exactitud.* Para las inclusiones $i : A \hookrightarrow X$ y $j : X \hookrightarrow (X,A)$ existe una sucesión exacta larga natural

$$\cdots \longrightarrow H_n(A;G) \xrightarrow{i_*} H_n(X;G) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A;G) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A;G) \longrightarrow \cdots.$$

- *Dimensión.* Si X es el espacio que consta de un solo punto, entonces $H_0(X;G) \approx G$ y $H_i(X;G) \approx 0$ para todo $i \neq 0$.

Estos son llamados *axiomas de Eilenberg-Steenrod* y son los axiomas para una **teoría de homología ordinaria**.

Para cada n, los $H^n(-;G)$ resultan ser un *funtores contravariantes* entre las mismas categorías, y junto con las transformaciones naturales $\delta : H^n(A;G) \longrightarrow H^{n+1}(X,A;G)$ dadas por el homomorfismo de conexión se puede probar que satisfacen:

- *Funtorialidad.* Para aplicaciones entre parejas $g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ y $f : (Y, B) \longrightarrow (Z, C)$
$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* : H^n (Z, C; G) \longrightarrow H^n (X, A; G)$$
y si $1_{(X,A)} : (X, A) \longrightarrow (X, A)$ es la identidad entonces
$$1^*_{(X,A)} = 1_{H^n(X,A)} : H^n (X, A; G) \longrightarrow H^n (X, A; G)$$
donde $1_{H^n(X,A)}$ es la identidad de grupos.

- *Homotopía.* Si $f \simeq g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ como aplicaciones de parejas entonces
$$f^* = g^* : H^n (Y, B; G) \longrightarrow H^n (X, A; G) .$$

- *Escisión.* Dada una pareja (X, A) y un subespacio $U \subset X$ tal que la cerradura de U está contenida en el interior de A, entonces la inclusión $k : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo
$$k^* : H^n (X, A; G) \longrightarrow H^n (X - U, A - U; G) .$$

- *Exactitud.* Para las inclusiones $i : A \hookrightarrow X$ y $j : X \hookrightarrow (X, A)$ existe una sucesión exacta larga natural
$$\cdots \longrightarrow H^n (A; G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1} (X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^{n+1} (X; G) \xrightarrow{i^*} H^{n+1} (A; G) \longrightarrow \cdots .$$

- *Dimensión.* Si X es el espacio que consta de un solo punto, entonces $H^0 (X; G) \approx G$ y $H^i (X; G) \approx 0$ para todo $i \neq 0$.

Estos son llamados *axiomas de Eilenberg-Steenrod* y son los axiomas para una **teoría de cohomología ordinaria**.

En términos de información intrínseca no existe una gran diferencia entre grupos de homología y grupos de cohomología, sin embargo, la contravariancia proporciona una estructura extra en cohomología. A saber, existe un producto llamado producto copa, el cual hace de los grupos de cohomología un anillo graduado. En adelante consideraremos cohomología con coeficientes en un anillo.

Sea R un anillo. Para cocadenas $c \in S^m (X; R)$ y $c' \in S^n (X; R)$, el producto $c \smile c' \in S^{m+n} (X)$ se define como sigue. Sea $\sigma : \Delta^{m+n} \longrightarrow X$ un simplejo singular. La *m-cara frontal* de σ es la composición
$$\sigma \circ \alpha_m : \Delta^m \longrightarrow X$$

donde $a_m : \Delta^m \longrightarrow \Delta^{m+n}$ se define como

$$\alpha_m(t_0, ..., t_m) = (t_0, ..., t_m, 0, ..., 0).$$

Similarmente la *n-cara trasera* de σ es la composición

$$\sigma \circ \beta_n : \Delta^n \longrightarrow X$$

donde $\beta_n : \Delta^n \longrightarrow \Delta^{m+n}$

$$\beta_n(t_m, t_{m+1}, ..., t_{m+n}) = (0, ..., 0, t_m, t_{m+1}, ..., t_{m+n}).$$

Definimos el **producto copa de cocadenas** $c \smile c'$ mediante la identidad

$$\langle c \smile c', [\sigma] \rangle = (-1)^{mn} \langle c, [\sigma \circ \alpha_m] \rangle \cdot \langle c', [\sigma \circ \beta_n] \rangle \in R$$

donde el lado derecho es el producto en R. Esta operación es bilineal y asociativa, pero no es conmutativa. El cociclo constante $1 \in S^0(X)$ es el elemento identidad. Debemos hacer la aclaración en este momento de que el signo $(-1)^{mn}$ en esta definición es opcional. Libros como [6] o [14] incluyen este signo en la definición, mientras que otros como [10] o [9] no lo hacen.

Este producto tiene la siguiente fórmula

$$\delta(c \smile c') = \delta c \smile c' + (-1)^m c \smile \delta c' \quad \text{para } c \in S^m(X; R), c' \in S^n(X; R).$$

De aquí se sigue que el producto copa de dos cociclos es un cociclo, y también el producto copa de un cociclo y una frontera, en cualquier orden, es una cofrontera ya que $c \smile \delta c' = \pm\delta(c \smile c')$ si $\delta c = 0$, y $\delta c \smile c' = \delta(c \smile c')$ si $\delta c' = 0$. Esto implica que existe un **producto copa de clases de cohomología** inducido

$$\smile : H^m(X; R) \otimes_R H^n(X; R) \longrightarrow H^{m+n}(X; R)$$

también llamado producto interno en cohomología.

Ahora supongamos que tenemos una pareja de espacios $A \subset X$. Si la cocadena c pertenece al subconjunto $S^m(X, A) \subset S^m(X)$, (esto es si $c[\sigma] = 0$ para todo $\sigma : \Delta^m \longrightarrow A \subset X$) y si $c' \in S^n(X)$, entonces claramente $c \smile c'$ pertenece a $S^{m+n}(X, A)$. Esto nos lleva a una versión relativa del producto copa

$$\smile : H^m(X, A; R) \otimes_R H^n(X; R) \longrightarrow H^{m+n}(X, A; R).$$

Y más generalmente, consideremos dos subconjuntos $A, B \subset X$ tales que son abiertos relativos de $A \bigcup B$, podemos definir un producto copa

$$\smile : H^m(X, A; R) \times H^n(X, B; R) \longrightarrow H^{m+n}(X, A \cup B; R).$$

A nivel de cohomología esta operación es asociativa y distributiva ya que a nivel de cocadenas el producto copa tiene estas propiedades. Si R tiene un elemento identidad entonces existe un elemento identidad para el producto copa, la clase $1 \in H^0(X;R)$ definido por el 0-ciclo que toma el valor 1 en cada 0-simplejo singular. Además esta operación conmuta salvo signo. En el contexto de grupos graduados, esta propiedad es llamada conmutatividad. Por lo tanto el **anillo de cohomología** $H^*(X) = \bigoplus_n H^n(X)$ es conmutativo como *anillo graduado.*

En resumen, el producto copa tiene las siguientes propiedades (ver [10], [6]):

- *Asociatividad*: Para $x \in H^k(X,A;R), x' \in H^l(X,A';R), x'' \in H^m(X,A'';R)$ se tiene que
$$x \smile (x' \smile x'') = (x \smile x') \smile x'' \in H^{k+l+m}(X, A \cup A' \cup A''; R).$$
- *Existe unidad*: La imagen de $1 \in R = H^0(*;R)$ bajo el homomorfismo $\pi^*: H^0(*;R) \longrightarrow H^0(X;R)$ inducido por la única aplicación $\pi: X \longrightarrow \{*\}$ es la unidad para el producto. Esto es, para $x \in H^k(X,A;R)$ se tiene que
$$1_X \smile x = x = x \smile 1_X.$$
- *Conmutatividad graduada*: Para $x \in H^k(X,A;R)$ y $x' \in H^l(X,A';R)$ se cumple la relación
$$x \smile x' = (-1)^{kl} x' \smile x.$$
- *Naturalidad*: Si $f: X \longrightarrow Y$ entonces $f^*(x \smile y) = f^*(x) \smile f^*(y)$.

Además, si $\delta: H^k(A) \longrightarrow H^{k+1}(X,A)$ es el homomorfismo de conexión en la sucesión exacta para la pareja (X,A) e $i^*: H^l(X) \longrightarrow H^l(A)$ el homomorfismo inducido por la inclusión

- $\delta(x \smile i^*(x')) = \delta(x) \smile x'$.

Por otro lado, si consideramos clases de cohomología $x \in H^m(X,A)$ y $y \in H^n(Y,B)$ donde A es un subconjunto abierto de X y B es un subconjunto abierto de Y (si B es vacío entonces A no necesita ser abierto, y viceversa) entonces usando las proyecciones canónicas

$$\begin{aligned} \pi_1 &: (X \times Y, A \times Y) \longrightarrow (X,A) \\ \pi_2 &: (X \times Y, X \times B) \longrightarrow (Y,B) \end{aligned}$$

definimos el **producto externo en cohomología** o **producto cruz**

$$\times : H^m(X, A) \otimes_R H^n(Y, B) \longrightarrow H^{m+n}(X \times Y, (A \times Y) \bigcup (X, B))$$

como la clase de cohomología

$$x \times y = \pi_1^*(x) \smile \pi_2^*(y)$$

(en ocasiones es conveniente usar la abreviatura $(X, A) \times (Y, B)$ para la pareja $(A \times Y) \bigcup (X \times B)$).

El producto externo nos permite calcular la cohomología de espacios producto, ya que por ejemplo, produce un homomorfismo

$$\times : \bigoplus_{i+j=n} H^i(X) \otimes H^j(Y) \longrightarrow H^n(X \times Y)$$

el cual es isomorfismo cuando X y Y son complejos celulares tales que cada $H^i(X)$ es un R-módulo libre de torsión y Y tiene solamente una cantidad finita de células en cada dimensión (ver [14]).

El producto copa se relaciona con el producto externo mediante la siguiente fórmula

$$x \smile x' = \Delta^*(x \times x')$$

donde $\Delta : (X, A \cup A') \longrightarrow (X, A) \times (X, A')$ es la aplicación diagonal.

Terminaremos esta sección presentando el Teorema de Dualidad de Poincaré, el cual nos asegura cierta simetría entre grupos de homología y cohomología para variedades cerradas y orientadas. En ocasiones, este resultado nos ayuda a simplificar el cálculo de tales grupos.

En primer lugar, consideremos una variedad topológica sin frontera M de dimensión n (no suponemos que M sea diferenciable). Para cada $x \in M$ existe una carta coordenada homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ que contiene a x. Luego, por escisión, exactitud e invariancia homotópica tenemos isomorfismos

$$H_i(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) \approx H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{Z}) \approx \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{Z}) \approx \widetilde{H}_{i-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}\right)$$

entonces $H_i(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) \approx 0$ si $i \neq n$ y es $\mathbb{Z}$ para $i = n$.

Una *orientación local* μ_x para M en x es una elección de uno de los dos posibles generadores para $H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z})$ y tal μ_x determina orientaciones locales μ_y para todos los puntos y en una vecindad de x. Una *orientación* para M es una función que asigna a cada $x \in M$ una orientación local μ_x que varía continuamente con x, en el siguiente sentido: para cada x debe existir una vecindad compacta N y una clase $\mu_N \in H_n(M, M - N; \mathbb{Z})$ tal que si ρ_y denota el homomorfismo

$$\rho_y : H_n(M, M - N; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(M, M - \{y\}; \mathbb{Z})$$

inducido por la inclusión $(M, M - N) \hookrightarrow (M, M - \{y\})$ entonces $\rho_y(\mu_N) = \mu_y$ para cada $y \in N$. La pareja consistente en una variedad y una orientación es llamada una *variedad orientada.*

Para cualquier variedad orientada M y cualquier compacto $K \subset M$, existe una y sólo una clase $\mu_K \in H_n(M, M - K)$ que satisface $\rho_x(\mu_K) = \mu_x$ para cada $x \in K$ (ver [14]). En particular si M es compacta, existe una y sólo una clase $\mu_M \in H_n(M)$ con esa propiedad. Esta clase es llamada **clase fundamental** de M.

Por otro lado, notemos que la dualidad entre homología y cohomología también se refleja por el hecho de que evaluación de cocadenas en cadenas nos da un homomorfismo natural

$$S^p(X) \otimes S_p(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

y cuando pasamos a homología y cohomología, nos resulta un producto (o evaluación) llamado **índice de Kronecker**

$$H^p(X) \otimes H_p(X) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Éste se denota por $\langle x, \xi \rangle$ para $x \in H^n(X), \xi \in H_n(X)$ y se define como sigue: elegimos un cociclo z representante de x y un ciclo ς representante de ξ, entonces $\langle x, \xi \rangle := \langle z, \zeta \rangle$ es decir la evaluación de z en ζ.

El índice de Kronecker cumple que $\langle f^*(x), \xi \rangle = \langle x, f_*(\xi) \rangle$.

Ahora, para cualquier espacio X y anillo de coeficientes, existe una operación bilineal llamada producto capa

$$\frown : S^i(X) \otimes S_n(X) \longrightarrow S_{n-i}(X)$$

que se puede caracterizar como sigue: para cada cocadena $b \in S^i(X)$ y cada cadena $\xi \in S_n(X)$ el **producto capa a nivel de cadenas** $b \frown \xi$ es el único elemento de $S_{n-i}(X)$ tal que

$$\langle a, b \frown \xi \rangle = \langle a \smile b, \xi \rangle \tag{1.1}$$

para todo $a \in S^{n-i}(X)$. Más explícitamente, para cada generador $[\sigma]$ de $S_n(X)$, el producto capa $b \frown [\sigma]$ se puede definir como el producto del elemento del anillo

$(-1)^{i(n-i)}\langle b, [i\text{-cara trasera de }\sigma]\rangle$ con el simplejo singular $[(n-i)$-cara frontal de $\sigma]$.

Combinando la identidad (1.1) con las propiedades del producto copa podemos obtener lo siguiente (ver [14], [6]):

- $(b \smile c) \frown \xi = b \frown (c \frown \xi)$.
- $1 \frown \xi = \xi$.
- $\partial (b \frown \xi) = (\delta b) \frown \xi + (-1)^k b \frown \partial\xi$ si $b \in S^k(X)$.

Y de esta última propiedad se sigue que existe un **producto capa** inducido

$$\frown : H^i(X) \otimes H_n(X) \longrightarrow H_{n-i}(X).$$

Podemos enunciar el Teorema de Dualidad de Poincaré en términos de esta operación para variedades compactas con cualesquiera coeficientes (ver [14]).

Teorema 1.13 (Dualidad de Poincaré) *Sea M una n-variedad compacta y orientada con clase fundamental μ_M, entonces existe un isomorfismo*

$$\begin{array}{rcl} \frown \mu_M : H^i(M) & \longrightarrow & H_{n-i}(M) \\ a & \longmapsto & a \frown \mu_M \end{array}$$

Este resultado nos puede ayudar a simplificar de gran manera los cálculos de grupos de homología y cohomología de variedades. Notemos que en este caso se tiene que $H^i(M) \approx H_{n-i}(M)$. Si $i = 0$ entonces el teorema nos dice que $H_n(M) \approx \mathbb{Z}$ con generador $1 \frown \mu_M = \mu_M$ la clase fundamental; si $i = n$ entonces nos dice que $H^n(M) \approx \mathbb{Z}$ con generador ς dual a μ_M, $\langle \varsigma, \mu_M \rangle = 1$.

1.3. El Invariante de Hopf en cohomología

El objetivo de esta sección es presentar la definición del Invariante de Hopf. En un principio H. Hopf dió esta definición en términos más geométricos (1931) como cierto número de enlace. Sin embargo, la definición que presentaremos aquí es una reformulación dada por N. E. Steenrod.

Sea $\mathbb{S}^n$ la esfera de dimensión n, donde $n \geq 2$, y sea $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ una aplicación dada. El **cono de la aplicación** f se define como el espacio de adjunción

$$C_f := \mathbb{S}^n \bigcup_f C\mathbb{S}^{2n-1}$$

donde $C\mathbb{S}^{2n-1} = (X \times I) / (X \times \{0\})$ denota al cono de $\mathbb{S}^{2n-1}$, el cual pegamos a $\mathbb{S}^n$ a lo largo de $X \times \{1\}$ mediante la identificación $(x,1) \sim f(x)$. Notemos que

$$C_f = \mathbb{S}^n \bigcup\nolimits_f C\mathbb{S}^{2n-1} \cong \mathbb{S}^n \bigcup\nolimits_f \mathbb{D}^{2n}$$

así, podemos pensar a C_f como un complejo celular: considerando a $\mathbb{S}^{2n-1}$ como la frontera de la $2n$-célula $e^{2n} = \mathbb{D}^{2n}$ y entonces formamos el complejo $C_f = \mathbb{S}^n \bigcup_f e^{2n}$ con la unión ajena de $\mathbb{S}^n$ y e^{2n} e identificando cada punto en $\mathbb{S}^{2n-1} = \partial e^{2n}$ con su imagen bajo f. Entonces C_f es un complejo con tres células, de dimensiones $0, n$, y $2n$.

Consideremos el grupo de coeficientes $\mathbb{Z}$. Entonces el complejo de cadenas celulares con coeficientes enteros asociado al espacio C_f es

$$C_k(C_f) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, n, 2n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con homomorfismos frontera $d_k = 0$ para todo k. Luego, dualizando este complejo de cadenas, obtenemos el complejo de cocadenas

$$C^k(C_f) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, n, 2n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con homomorfismos cofrontera $d^k = 0$ para todo k. Por lo tanto, la cohomología de C_f es

$$H^k(C_f) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, n, 2n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} . \tag{1.2}$$

Notemos que en particular $(C_f, \mathbb{S}^n)$ es un complejo celular relativo, de modo que $H^k(C_f, \mathbb{S}^n) \approx \widetilde{H}^k(C_f/\mathbb{S}^n) \approx \widetilde{H}^k(\mathbb{S}^{2n})$ para cada k, de modo que si $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow C_f, j : (C_f, \varnothing) \hookrightarrow (C_f, \mathbb{S}^n)$ denotan las inclusiones, entonces de (1.2) y el Ejemplo (1.11) se tiene que la sucesión exacta larga asociada a la pareja $(C_f, \mathbb{S}^n)$ se rompe en las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow H^n(C_f) \xrightarrow{i^*} H^n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \longrightarrow H^{2n}(\mathbb{S}^{2n}) \xrightarrow{j^*} H^{2n}(C_f) \longrightarrow 0$$

por lo tanto los homomorfismos inducidos i^* y j^* vienen a ser isomorfismos. Así, tomemos $\sigma \in H^n(C_f)$ ($\sigma \neq 0$) correspondiente a la clase de orientación de $\mathbb{S}^n$ y tomemos $\tau \in H^{2n}(C_f)$ ($\tau \neq 0$) correspondiente a la clase de orientación de $\mathbb{S}^{2n}$. Entonces el producto copa cuadrado $\sigma^2 := \sigma \smile \sigma \in H^{2n}(C_f)$ es algún entero múltiplo de τ.

Definición 1.14 *El **Invariante de Hopf** (en cohomología) de $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es el entero $H(f)$ tal que*

$$\sigma^2 = H(f) \cdot \tau.$$

El tipo de homotopía de C_f depende sólo de la clase de homotopía de la aplicación f, así $H(f)$ también depende sólo de la clase de homotopía de f. Por lo tanto, podemos hablar del Invariante de Hopf de una clase de homotopía, de modo que podemos definir una transformación

$$H : \pi_{2n-1}(S^n) \longrightarrow \mathbb{Z}, \tag{1.3}$$

la cual manda una clase de homotopía α al entero $H(f)$ donde f es un representante de α. Aún mas, se puede probar que H es un homomorfismo de grupos (ver [10]) tal que si n es impar entonces $H = 0$; si n es par entonces $2 \in \operatorname{Im} H$.

Algunas propiedades del Invariante de Hopf, relacionadas con el grado de una aplicación, son las siguientes (ver [13]):

- Si $g : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$, entonces $H(f \circ g) = \deg(g) \cdot H(f)$.
- Si $e : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ tiene grado d, entonces $H(e \circ f) = [\deg(e)]^2 \cdot H(f)$.

Notemos que si $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ con n impar, entonces de la conmutatividad graduada del producto copa, $\sigma^2 = -\sigma^2$ lo cual implica que $\sigma^2 = 0$. Por lo tanto

$$H(f) = 0 \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Por otro lado, para cualquier n par, existen aplicaciones con Invariante de Hopf dos. De hecho, para n par, se pueden obtener aplicaciones cuyo Invariante de Hopf sea ¡*cualquier número par*!. En efecto (ver [10]) consideremos $\mathbb{S}^n$ con un punto básico e el cual es una 0-célula y sea $J_2(\mathbb{S}^n)$ el espacio cociente de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$ mediante la relación de equivalencia que identifica $(x, e) \sim (e, x)$. Entonces de la estructura usual de complejo celular de $\mathbb{S}^n$, $J_2(\mathbb{S}^n)$ hereda una estructura celular con tres células, de dimensiones 0, n, y $2n$, así $J_2(\mathbb{S}^n)$ tiene la forma C_f para algún $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$. Se puede probar que si n es par, el cuadrado del generador de $H^n(J_2(\mathbb{S}^n))$ debe ser dos veces el generador de $H^{2n}(J_2(\mathbb{S}^n))$, así que $H(f) = \pm 2$. Luego, mediante el homomorfismo (1.3) inducido por el Invariante de Hopf se sigue que para cada n par, podemos obtener aplicaciones cuyo Invariante de Hopf sea cualquier número par.

Sin embargo, las aplicaciones con Invariante de Hopf uno son más escasas. Para $n = 2, 4$ y 8 podemos dar ejemplos de aplicaciones $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ con Invariante de Hopf 1. Por lo tanto del homomorfismo (1.3) inducido por el Invariante de Hopf, existen aplicaciones con Invariante de Hopf igual a cualquier número entero.

Para el caso $n = 2$, notemos que el anillo de cohomología del espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^2$ es el álgebra de polinomios truncados

$$H^*\left(\mathbb{CP}^2\right) \approx \mathbb{Z}\left[\alpha\right]/\alpha^3 \tag{1.4}$$

donde α es el generador de $H^2\left(\mathbb{CP}^2\right)$, esto es, $H^{2q}\left(\mathbb{CP}^2\right)$ es el grupo abeliano libre con generador α^q para $q \leq 2$. En efecto, sabemos que $\mathbb{CP}^2$ tiene una estructura celular con una $2q$-célula para cada q, $0 \leq q \leq 2$, por lo tanto la conclusión es correcta aditivamente: $H^{2q}\left(\mathbb{CP}^2\right)$ es un grupo abeliano libre con un generador para $0 \leq q \leq 2$. Además, como $\mathbb{CP}^1$ es el 3-esqueleto de $\mathbb{CP}^2$, de la sucesión exacta de la pareja $\left(\mathbb{CP}^2, \mathbb{CP}^1\right)$ se tiene que la inclusión $\mathbb{CP}^1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^2$ induce un isomorfismo $H^{2q}\left(\mathbb{CP}^2\right) \longrightarrow H^{2q}\left(\mathbb{CP}^1\right)$ para $q < 2$. Entonces, si α genera a $H^2\left(\mathbb{CP}^2\right)$ y $\mu \in H_4\left(\mathbb{CP}^2\right)$ denota la clase fundamental, por dualidad de Poincaré $H^2\left(\mathbb{CP}^2\right) \approx H_2\left(\mathbb{CP}^2\right)$ y $\alpha \frown \mu$ genera a $H_2\left(\mathbb{CP}^2\right)$. Luego $1 = \langle \alpha, \alpha \frown \mu \rangle = \langle \alpha \smile \alpha, \mu \rangle$ de modo que α^2 es el dual de μ, y entonces es el generador de $H^4\left(\mathbb{CP}^2\right)$.

Consideremos $\mathbb{S}^3 = \left\{(u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid |u|^2 + |v|^2 = 1\right\}$ la esfera unitaria en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ y $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (u, v) &\longmapsto uv^{-1} \end{aligned}$$

es la aplicación de pegado en el espacio proyectivo complejo 2-dimensional tal que

$$C_f = \mathbb{S}^2 \bigcup\nolimits_f e^4 \cong \mathbb{CP}^2.$$

Luego, si $\sigma \in H^2\left(C_f\right)$ y $\tau \in H^4\left(C_f\right)$ son los elementos involucrados en la definición del Invariante de Hopf, aplicando (1.4) resulta que σ^2 debe ser el generador de $H^4\left(C_f\right)$ de modo que $\sigma^2 = \tau$, y por lo tanto efectivamente $H\left(f\right) = 1$.

También existe el **espacio proyectivo cuaterniónico** $\mathbb{HP}^n$ definido exactamente como en el caso complejo, con estructura de complejo celular de la forma $\mathbb{HP}^n \cong e^0 \cup e^4 \cup e^8 \cup ....$ De hecho, se puede probar (ver [10]) que

$$H^*\left(\mathbb{HP}^2\right) \approx \mathbb{Z}\left[\beta\right]/\beta^3$$

donde β es generador de $H^4\left(\mathbb{HP}^2\right)$. Si consideremos $\mathbb{S}^7$ la esfera unitaria en $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$, entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{S}^7 & \longrightarrow & \mathbb{S}^4 \\ (u,v) & \longmapsto & uv^{-1} \end{array}$$

corresponde a la aplicación de pegado del plano proyectivo cuaterniónico

$$\mathbb{HP}^2=\mathbb{S}^4\bigcup\nolimits_f e^8$$

de modo que $H(f)=1$.

La asociatividad en el producto de complejos y cuaterniones es necesaria para que, en esos casos, la identificación $z\sim\lambda z$ sea efectivamente una relación de equivalencia, de modo que no podemos extender esta definición a espacios proyectivos de Cayley, sin embargo sí existe una definición de plano proyectivo de Cayley $\mathbb{OP}^2$. Sea $\mathbb{O}$ el álgebra no asociativa de los números de Cayley u octonianos, cuyos elementos son parejas de cuaterniones. Consideremos $\mathbb{S}^{15}$ la esfera unitaria en el espacio vectorial 16-dimensional $\mathbb{O}^2$ y $\mathbb{S}^8=\mathbb{O}\cup\{\infty\}$, sea

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{S}^{15} & \longrightarrow & \mathbb{S}^8 \\ (z_0,z_1) & \longmapsto & z_0z_1^{-1}. \end{array}$$

Entonces definimos el **plano proyectivo de Cayley** como

$$\mathbb{OP}^2=\mathbb{S}^8\bigcup\nolimits_f e^{16}.$$

En este caso también se puede probar que (ver [10])

$$H^*\left(\mathbb{OP}^2\right)\approx\mathbb{Z}\left[\gamma\right]/\gamma^3$$

donde γ es generador de $H^8\left(\mathbb{OP}^2\right)$, y que $H(f)=1$.

Tales aplicaciones $\mathbb{S}^3\longrightarrow\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^7\longrightarrow\mathbb{S}^4$ y $\mathbb{S}^{15}\longrightarrow\mathbb{S}^8$ son llamadas **fibraciones de Hopf**.

De hecho, por J. F. Adams (ver [1]) se sabe que *para valores de n distintos de* $2,4$ *y* 8*, no existen aplicaciones de Invariante de Hopf uno.* Mas adelante, en el tercer capítulo de este trabajo, discutiremos más acerca de esta cuestión. En particular, se puede probar que la existencia de aplicaciones con Invariante de Hopf uno está muy relacionada con la existencia de estructuras multiplicativas en $\mathbb{R}^n$, de donde se sigue que las únicas dimensiones n para las cuales se tiene estructura de *álgebra de división* sobre $\mathbb{R}^n$ son $n=1,2,4$ y 8, que son las que conocemos $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

Capítulo 2

Introducción a la K-Teoría

El objetivo de este capítulo es presentar una introducción a la K-Teoría. Durante la exposición intentamos no entrar en demasiados detalles técnicos, exhibiendo sólo ideas principales encaminadas a formular la definición del Invariante de Hopf.

En la primera sección introducimos la teoría elemental de haces vectoriales, los cuales corresponden a los elementos sobre los cuales se define la K-Teoría de un espacio topológico, como se muestra en la segunda sección, y también presentamos el teorema fundamental de la K-Teoría, el Teorema de Periodicidad de Bott, que nos ayuda a simplificar enormemente algunos cálculos en K-Teoría, permite ver a ésta como una teoría de cohomología generalizada y nos abre paso hacia la definición del Invariante de Hopf que se presenta en la tercera y última sección.

2.1. Haces Vectoriales

En esta sección presentaremos la definición de haz vectorial y posteriormente algunas propiedades, ejemplos y operaciones entre haces que serán fundamentales para la construcción de la K-Teoría.

La idea de un haz vectorial es la de una familia de espacios vectoriales parametrizada mediante los puntos de un espacio topológico, de tal manera que se cumple una condición de trivialidad local. Para nuestros propósitos todos los espacios vectoriales considerados serán espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definición 2.1 *Un* ***haz vectorial*** *n-**dimensional** sobre el campo $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ es una terna (E, X, p) formada de una pareja de espacios topológicos E, X y una aplicación continua y suprayectiva $p : E \longrightarrow X$, tal que para cada $x \in X$, $p^{-1}(x)$*

posee una estructura de espacio vectorial sobre K compatible con la topología relativa a E, esto es que la suma y el producto por escalar son aplicaciones continuas, y tal que existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de X y homeomorfismos $h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times K^n$ para cada α donde $p^{-1}(x) \approx \{x\} \times K^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales para cada $x \in U_\alpha$. El espacio E es llamado espacio total, X es llamado espacio base, p es la proyección, $E_x := p^{-1}(x)$ es la fibra sobre el punto x, y h_α trivialización local.

Por ejemplo, si X es un espacio topológico y V un espacio vectorial sobre $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, podemos considerar $X \times V$ con la topología producto y $\pi_1 : X \times V \longrightarrow X$ la proyección canónica en el primer factor. Entonces la terna $(X \times V, X, \pi_1)$ es un haz vectorial sobre K de dimensión $\dim V$, pues basta tomar la cubierta abierta $\{X\}$. Éste es llamado **haz vectorial producto** con fibra V.

Si ahora consideramos un haz vectorial (E, X, p), Y un subespacio de X y $q := p|_{p^{-1}(Y)}$ la restricción de p al subespacio $p^{-1}(Y)$, entonces $(p^{-1}(Y), Y, q)$ es claramente un haz vectorial, pues basta con restringir la cubierta abierta de X a Y. En este caso denotamos al haz como $E|_Y$ y lo llamamos **haz vectorial restricción**.

Por otro lado, dado un haz vectorial (E, X, p) y un subespacio $E_0 \subset E$ que intersecta a cada fibra de E en un subespacio vectorial tal que la restricción $p|_{E_0} : E_0 \longrightarrow X$ es un haz vectorial, es llamado un *subhaz* vectorial de (E, X, p).

Definición 2.2 *Un* ***homomorfismo*** *entre los haces vectoriales (E, X, p) y (F, Y, q) es una pareja (ϕ, θ) de aplicaciones continuas $\phi : E \longrightarrow F$ y $\theta : X \longrightarrow Y$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "\theta"] & Y \end{tikzcd}$$

y para cada $x \in X$, $\phi|_{p^{-1}(x)} : E_x \longrightarrow F_{\theta(x)}$ es una aplicación lineal de espacios vectoriales.
La pareja (ϕ, θ) es un ***isomorfismo*** *si $X = Y$ y $\theta = 1_X$ es la identidad, para cada $x \in X$ la restricción $\phi|_{p^{-1}(x)} : E_x \longrightarrow F_x$ es un isomorfismo lineal, y ϕ^{-1} es continua. En este caso decimos que los haces vectoriales son isomorfos y lo denotamos $E \approx F$.*

En particular, un haz vectorial isomorfo a algún haz producto es llamado **haz vectorial trivial**.

Dado un haz vectorial (E, X, p), $\dim(E_x)$ es una función localmente constante sobre X y por lo tanto es constante en cada componente conexa de X. Cuando esta función es constante en todo X decimos que la dimensión del haz es precisamente el número $\dim(E_x)$. En adelante denotaremos por ε^n al *haz vectorial trivial n-dimensional* y llamaremos *haz de líneas* a cualquier haz vectorial 1-dimensional.

Generalmente denotaremos un haz vectorial (E, X, p) como $p : E \longrightarrow X$, y cuando no se preste a confusión alguna nos referiremos al haz (E, X, p) simplemente como "el haz E". Con esta notación, debemos tener presente de la definición de dimensión de un haz, que usualmente la dimensión del haz es diferente de la dimensión de E visto como espacio topológico.

Notemos que si (E, X, p) y (F, X, q) son haces vectoriales n-dimensionales sobre el mismo espacio base, entonces una aplicación continua $\phi : E \longrightarrow F$ es un isomorfismo si y sólo si $\phi|_{p^{-1}(x)} : E_x \longrightarrow F_x$ es un isomorfismo lineal. En efecto si ϕ es un isomorfismo entonces de la definición se tiene que ϕ se restringe a un isomorfismo lineal entre fibras. Por otro lado si suponemos que $\phi|_{p^{-1}(x)} : E_x \longrightarrow F_x$ es un isomorfismo lineal para todo $x \in X$, entonces se sigue que ϕ es biyectiva y además $p = \phi \circ q$. Así, para probar que ϕ es un isomorfismo de haces sólo nos hace falta verificar que ϕ^{-1} es continua. Debido a que esto es una cuestión local, podemos restringirnos a un abierto U de X sobre el cual E y F son triviales. Luego, componiendo con trivializaciones locales se reduce al caso de un isomorfismo $\phi : U \times V^n \longrightarrow U \times V^n$ (donde V^n denota ya sea al espacio vectorial n-dimensional real o complejo) de la forma $h(x, v) = (x, g_x(v))$ con g_x un elemento del grupo $GL(V)$ de transformaciones lineales invertibles de V, el cual depende continuamente de x. La matriz inversa g_x^{-1} también depende continuamente de x puesto que sus entradas se pueden expresar algebraicamente en términos de las entradas de g_x, por lo tanto $h^{-1}(x, v) = h^{-1}(x, g_x^{-1}(v))$ es continua.

Dado un haz vectorial (E, X, p) decimos que una aplicación continua $s : X \longrightarrow E$ es una **sección del haz** E si $p \circ s = 1_X$ (o equivalentemente si $s(x) \in p^{-1}(x)$ para cada $x \in X$). Podemos caracterizar haces triviales en términos de este concepto: un haz vectorial n-dimensional es trivial si y sólo si para cada $x \in X$, existen n secciones $s_1, s_2, ..., s_n$ tales que $\{s_1(x), s_2(x), ...s_n(x)\}$ es una base de la fibra $p^{-1}(x)$, pues si en primer lugar consideramos $E \approx X \times V^n$ y una base $\{v_1, ..., v_n\}$ de V^n entonces podemos definir n secciones

$$\begin{aligned} s_i : X &\longrightarrow X \times V^n \\ x &\longmapsto (x, v_i) \end{aligned}$$

y claramente para cada $x \in X$, $\{s_1(x), ..., s_n(x)\}$ es una base de $\{x\} \times V^n$. Por otro lado, dado un haz vectorial n-dimensional E y n secciones linealmente independientes $s_1, ..., s_n$ y definimos

$$\begin{array}{rcl} \phi : X \times V^n & \longrightarrow & E \\ (x, \lambda_1, ..., \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i(x) \end{array}$$

entonces ϕ es una aplicación continua y un isomorfismo lineal entre fibras; por lo tanto es un isomorfismo de haces vectoriales, de modo que E es trivial.

Presentamos a continuación algunos ejemplos para ilustrar las definiciones anteriores.

Haz tangente de la esfera unitaria. Sea $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera unitaria de dimensión n y $T_x\mathbb{S}^n$ el espacio tangente a $\mathbb{S}^n$ en x. La terna $(T\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n, \pi_1)$ donde

$$T\mathbb{S}^n = \bigcup_{x\in\mathbb{S}^n} T_x\mathbb{S}^n = \left\{(x, v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v\rangle = 0\right\}$$

y $\pi_1 : T\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es la proyección canónica en el primer factor, define un haz vectorial. La fibra en cada $x \in \mathbb{S}^n$ es el espacio tangente a $\mathbb{S}^n$ en el punto x. Para construir trivializaciones locales, elegimos un punto arbitrario $b \in \mathbb{S}^n$ y tomamos U_b como el hemisferio abierto que contiene al punto b y que está acotado por el hiperplano que pasa a través del origen y que es ortogonal a b. Definimos las trivializaciones locales

$$h_b : \pi_1^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times \pi_1^{-1}(b) \approx U_b \times \mathbb{R}^n$$

por $h_b(x, v) = (x, \pi_b(v))$ donde π_b es la proyección ortogonal sobre el plano tangente $\pi_1^{-1}(b)$. Es claro que h_b es trivialización local pues π_b se restringe a un isomorfismo de $\pi_1^{-1}(x)$ en $\pi_1^{-1}(b)$ para cada $x \in U_b$. Concluimos que $(T\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n, \pi_1)$ es un haz vectorial real n-dimensional. ▲

Podemos mostrar que cuando $n = 0, 1, 3$ o 7 el haz tangente a $\mathbb{S}^n$ es trivial. El caso $n = 0$ es claro. Mediante la caracterización que tenemos para haces triviales en términos de secciones, deducimos que el haz tangente a $\mathbb{S}^1$ es trivial ya que si identificamos a $\mathbb{R}^2$ con los números complejos, se tiene la sección $s_1 : z \longmapsto iz$. Por otro lado, si por ejemplo consideramos $n = 3$, podemos identificar a $\mathbb{R}^4$ con los cuaterniones $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ y aprovechando la estructura de álgebra de división en $\mathbb{H}$ con multiplicación determinada por las identidades $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, podemos definir tres secciones del haz tangente a la esfera $\mathbb{S}^3$ de la siguiente manera:

$$s_1 : z \longmapsto iz \qquad s_2 : z \longmapsto jz \qquad s_3 : z \longmapsto kz$$

las cuales son linealmente independientes. De esta manera obtenemos tres campos vectoriales tangentes a $\mathbb{S}^3$ no nulos y linealmente independientes, de modo que, nuevamente por la caracterización que tenemos para haces triviales se sigue que el haz tangente a $\mathbb{S}^3$ es trivial. El caso $n = 7$ se prueba de manera análoga identificando a $\mathbb{R}^8$ con los octonianos $\mathbb{O}$ (o números de Cayley) respectivamente.

Una observación interesante acerca de este ejemplo es que se puede probar que las únicas esferas cuyo haz tangente es trivial son precisamente $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^7$. Esto lo haremos mas adelante en el tercer capítulo.

Haz de Hopf. Consideremos el espacio proyectivo complejo n-dimensional $\mathbb{CP}^n$. Podemos identificar a $\mathbb{CP}^n$ con el espacio de líneas complejas en $\mathbb{C}^{n+1}$ que pasan a través del origen. Sea

$$H = \{(l, v) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in l\}$$

y $\pi_1 : H \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ la proyección canónica en el primer factor. Entonces $(H, \mathbb{CP}^n, \pi_1)$ es un haz vectorial complejo 1-dimensional. Para ver esto, notemos primero que la fibra en cada punto $l \in \mathbb{CP}^n$ es la misma línea l. Luego, análogamente al ejemplo anterior, podemos definir trivializaciones locales

$$h_b : \pi_1^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times \pi_1^{-1}(b) \approx U_b \times \mathbb{C}$$

mediante proyección ortogonal de las fibras $\pi_1^{-1}(l)$ sobre $\pi_1^{-1}(b)$ para cada $l \in U_b$. Por lo tanto H es un haz de líneas complejo sobre $\mathbb{CP}^n$. Éste es llamado haz de Hopf y en ocasiones nos referiremos al haz H como el **haz de líneas canónico complejo.** ▲

Para mas ejemplos de haces vectoriales, notemos que podemos construir nuevos haces vectoriales a partir de haces dados. Por ejemplo, las operaciones algebraicas para espacios vectoriales y homomorfismos tales como suma directa y producto tensorial, inducen operaciones entre fibras de haces vectoriales sobre el mismo espacio base, que a su vez inducen operaciones en la familia de haces vectoriales (ver [5]).

Suma directa o **suma de Whitney**. Sean E, F y G haces vectoriales sobre X y definamos

$$E \oplus F := \bigcup_{x \in X} (E_x \oplus F_x).$$

Éste es un haz vectorial sobre X llamado suma directa de E y F (o suma de Whitney de E y F) cuya fibra en cada $x \in X$ es $E_x \oplus F_x$. Además, como en espacios vectoriales, obtenemos isomorfismos canónicos

- $(E \oplus F) \oplus G \approx E \oplus (F \oplus G)$.
- $E \oplus F \approx F \oplus E$.
- $E \oplus \varepsilon^0 \approx E$. ▲

Producto tensorial. Dados E y F haces vectoriales sobre el mismo espacio X

$$E \otimes F := \bigcup_{x \in X} (E_x \otimes F_x)$$

es un haz vectorial cuya fibra en cada $x \in X$ es el producto tensorial $E_x \otimes F_x$. Si además G es otro haz vectorial sobre X, tenemos isomorfismos

- $(E \otimes F) \otimes G \approx E \otimes (F \otimes G)$.
- $E \otimes F \approx F \otimes E$.
- $E \otimes \varepsilon^1 \approx E$.
- $E \otimes (F \oplus G) \approx (E \otimes F) \oplus (E \otimes G)$. ▲

Sea $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y X un espacio paracompacto. Se sabe que la familia de haces vectoriales sobre X mediante la relación de equivalencia de "ser isomorfo a" es un conjunto. Denotamos a éste por $\mathrm{Vect}_K(X)$, esto es, el conjunto de *clases de isomorfismos de haces vectoriales (reales o complejos respectivamente) sobre* X y por $\mathrm{Vect}_K^n(X)$ al subconjunto de $\mathrm{Vect}_K(X)$ de *clases de isomorfismos de haces vectoriales* n*-dimensionales sobre* X.

El hecho de que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$ sea un conjunto se debe a que se puede establecer una biyección (ver [5]) entre $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^n(X)$ y el conjunto de clases de homotopías $[X, G_n(\mathbb{R}^\infty)]$ donde $G_n(\mathbb{R}^\infty) := \bigcup_i G_n(\mathbb{R}^i)$ y $G_n(\mathbb{R}^i)$ es la variedad Grassmanniana o sea el espacio cuyos elementos son los subespacios n-dimensionales de $\mathbb{R}^i$. (Análogamente se puede probar que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^n(X) \approx [X, G_n(\mathbb{C}^\infty)]$ de modo que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ es un conjunto).

Las operaciones entre haces vectoriales de suma de Whitney y producto tensorial inducen naturalmente operaciones de suma y producto en $\mathrm{Vect}_K(X)$ definidas como

$$[E] \oplus [F] := [E \oplus F] \quad \text{y} \quad [E] \otimes [F] := [E \otimes F].$$

para clases de isomorfismos $[E]$ y $[F]$. Tales operaciones hacen de $(\mathrm{Vect}_K(X), \oplus)$ y $(\mathrm{Vect}_K(X), \otimes)$ semigrupos abelianos, y aún mas hacen de $(\mathrm{Vect}_K(X), \oplus, \otimes)$ un semianillo (se cumple la ley distributiva del producto respecto a la suma).

Otras operaciones. De manera similar a la suma de Whitney y producto tensorial, podemos también inducir otras operaciones sobre haces vectoriales (ver [5]) para obtener la noción de *haz dual* E^*, *haz producto exterior* $\Lambda^k E$, *haz de homomorfismos* $\mathrm{Hom}(E, F)$, *haz cociente* E/F. ▲

Haz inducido o pullback. A partir de una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ y un haz vectorial sobre Y podemos construir un haz vectorial con base X conservando la estructura de las fibras. Dado un haz vectorial (E, X, p) el haz inducido por f sobre X es la terna $(f^*(E), X, \pi_1)$ donde

$$f^*(E) = \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\}$$

y $\pi_1(x, e) = x$ es la proyección canónica en el primer factor. El haz $f^*(E)$ es único salvo isomorfismos (ver [15]). La fibra sobre un punto $x \in X$ del haz $f^*(E)$ es trivialmente isomorfa a la correspondiente fibra sobre el punto $f(x)$ del haz E. Además, se tiene que el homomorfismo de haces $F : f^*(E) \longrightarrow E$, $F(x, e) = e$ hace al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} .$$

▲

Se puede probar que para haces vectoriales E, F sobre el mismo espacio base $f^*(E \oplus F) \approx f^*(E) \oplus f^*(F)$ y $f^*(E \otimes F) \approx f^*(E) \otimes f^*(F)$ por lo que la aplicación inducida

$$\begin{aligned} f^* : \mathrm{Vect}(Y) &\longrightarrow \mathrm{Vect}(X) \\ [E] &\longmapsto [f^*(E)] \end{aligned}$$

viene a ser un homomorfismo de semigrupos (o semianillos).

El haz inducido tiene las propiedades funtoriales:

- $(f \circ g)^*(E) \approx g^* \circ f^*(E)$.
- $1^*(E) \approx E$ donde 1 denota la aplicación identidad.

Además, se puede probar (ver [5]) que si $f, g : X \longrightarrow Y$ son aplicaciones continuas homotópicas y X es un espacio paracompacto, entonces $f^*(E) \approx g^*(E)$ para cada haz E sobre X. Este hecho y las propiedades funtoriales del haz inducido implican inmediatamente que si X es paracompacto entonces una equivalencia homotópica $f : X \longrightarrow Y$ induce una biyección $f^* : \mathrm{Vect}(Y) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X)$ (que manda la clase del haz trivial $Y \times V^n$ en la clase del haz trivial $X \times V^n$). Por lo tanto, si X es contraíble entonces todo haz sobre X es trivial y $\mathrm{Vect}(X) \approx \mathbb{N}_0$ (el conjunto de los enteros no negativos).

De lo anterior deducimos que $\mathrm{Vect}(-)$ es un funtor contravariante de la categoría donde los objetos son los espacios topológicos paracompactos y los morfismos son las aplicaciones continuas, en la categoría de semigrupos abelianos y homomorfismos de semigrupos.

Construcción de pegado. Otra forma de construir haces vectoriales a partir de haces dados es la siguiente (ver [5]): sea X un espacio compacto, X_1 y X_2 dos subespacios cerrados de X no ajenos que cubren a X y sean $p_1 : E_1 \longrightarrow X_1$ y $p_2 : E_2 \longrightarrow X_2$ dos haces vectoriales de la misma dimensión. Supongamos que sobre $A := X_1 \cap X_2$ existe un isomorfismo de haces $\Phi : E_1|_A \longrightarrow E_2|_A$. Entonces el espacio cociente de la unión ajena $E_1 \sqcup E_2$ mediante la relación de equivalencia que identifica $e_1 \in E_1|_A$ con $\Phi(e_1) \in E_2|_A$, denotado por $E_1 \cup_\Phi E_2$, posee naturalmente una estructura de haz vectorial con base X. Éste haz es llamado construcción de pegado de E_1 y E_2 mediante Φ.

La construcción de pegado tiene las siguientes propiedades. Dados E, E_1, E_2, E_1', E_2' haces vectoriales sobre X y $\Phi : E_1|_A \longrightarrow E_2|_A$, $\Phi' : E_1'|_A \longrightarrow E_2'|_A$ isomorfismos de haces, entonces:

- La clase de isomorfismo de $E_1 \cup_\Phi E_2$ depende solamente de la clase de homotopía del isomorfismo Φ.
- Si $E_i := E|_{X_i}$, $i = 1, 2$ entonces la identidad define un isomorfismo $1_A : E_1|_A \longrightarrow E_1|_A$ y $E \approx E_1 \cup_{1_A} E_2$.
- Si existen isomorfismos $\alpha : E_1 \longrightarrow E_1'$ y $\beta : E_2 \longrightarrow E_2'$ tales que $\beta|_A \circ \Phi = \Phi' \circ \alpha|_A$, entonces $E_1 \cup_\Phi E_2 \approx E_1' \cup_{\Phi'} E_2'$.
- $(E_1 \cup_\Phi E_2) \oplus (E_1' \cup_{\Phi'} E_2') \approx (E_1 \oplus E_1') \cup_{\Phi \oplus \Phi'} (E_2 \oplus E_2')$.
- $(E_1 \cup_\Phi E_2) \otimes (E_1' \cup_{\Phi'} E_2') \approx (E_1 \otimes E_1') \cup_{\Phi \otimes \Phi'} (E_2 \otimes E_2')$.
- $(E_1 \cup_\Phi E_2)^* \approx E_1^* \cup_{(\Phi^*)^{-1}} E_2^*$. ▲

En particular, podemos escribir el haz de Hopf sobre $\mathbb{CP}^1$, $H \longrightarrow \mathbb{CP}^1$, en términos de una construcción de pegado de la siguiente manera: identificamos $\mathbb{CP}^1 \approx \mathbb{S}^2 \approx \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$, la compactación de $\mathbb{C}$ con el punto al infinito. Definimos como X_1 al conjunto de números complejos de módulo ≥ 1 junto con el punto al infinito $\{\infty\}$; definimos X_2 al conjunto de complejos de módulo ≤ 1. Luego, $A = X_1 \cap X_2$ son los complejos de módulo 1. Sean $E_1 := X_1 \times \mathbb{C}$ y $E_2 := X_2 \times \mathbb{C}$, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos isomorfismos

$$\begin{array}{rcc} \Phi_n : E_1|_A & \longrightarrow & E_2|_A \\ (x, z) & \longmapsto & (x, x^n z) \end{array}$$

El haz de Hopf se puede escribir como $H = E_1 \cup_{\Phi_{-1}} E_2$. Además, si $H^n = E_1 \cup_{\Phi_{-n}} E_2$ podemos probar (ver [15]) que H^{-n} es el dual de H^n.

Contracción. Sea X un espacio compacto y $p : E \longrightarrow X$ un haz vectorial, el cual es trivial sobre el subespacio cerrado $Y \subset X$, $Y \neq \varnothing$. Entonces mediante tal trivialización podemos contraer las fibras de E sobre Y a una única fibra sobre el punto Y/Y en X/Y, de modo que a partir de un haz sobre X obtenemos un haz sobre el cociente X/Y (ver [12]). Sea $\alpha : E|_Y \longrightarrow Y \times V$ la trivialización de E sobre Y, $\pi_2 : Y \times V \longrightarrow V$ la proyección en el segundo factor, y definamos la relación de equivalencia sobre E como $e \sim e'$ si y sólo si $e, e' \in E|_Y$ y $(\pi_2 \circ \alpha)(e) = (\pi_2 \circ \alpha)(e')$ ó $e, e' \notin E|_Y$ y $e = e'$. Denotamos por E/α al espacio cociente de E mediante esta relación de equivalencia. Entonces E/α es un haz vectorial sobre X/Y de la misma dimensión que E.

Además, si E, E_1, E_2 son haces vectoriales sobre X con trivializaciones $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ sobre Y respectivamente:

- Las clases de isomorfismo de E/α dependen sólo de la clase de homotopía de α.
- Si $q : X \longrightarrow X/Y$ es la proyección sobre el cociente entonces $q^*(E/\alpha) \approx E$.
- $(E_1/\alpha_1) \oplus (E_2/\alpha_2) \approx (E_1 \oplus E_2) / (\alpha_1 \oplus \alpha_2)$.
- $(E_1/\alpha_1) \otimes (E_2/\alpha_2) \approx (E_1 \otimes E_2) / (\alpha_1 \otimes \alpha_2)$. ▲

2.2. K-Teoría y Periodicidad de Bott

El propósito de esta sección es presentar la definición de la K-Teoría de un espacio topológico. En general, podemos definir K-Teoría de espacios localmente compactos, pero para nuestros propósitos será suficiente estudiar la K-Teoría de espacios topológicos compactos. Además, hemos estado estudiando tanto haces vectoriales reales como complejos, pero en adelante consideraremos sólo haces vectoriales complejos (a menos que se especifique lo contrario) por lo que denotaremos $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ simplemente como $\mathrm{Vect}(X)$.

Debido a la teoría desarrollada en la sección anterior sabemos que la familia de clases de isomorfismos de haces vectoriales complejos sobre un espacio base fijo X, que denotamos por $\mathrm{Vect}(X)$, es un semigrupo respecto a la suma inducida por la suma de Whitney (éste no es un grupo porque en general no existen elementos inversos). Sin embargo, podemos extender esta familia para hacer de ella un grupo. La K-Teoría de un espacio topológico X consiste en la completación del semigrupo $(\mathrm{Vect}(X), \oplus)$ a un grupo abeliano $K(X)$. Dicha completación es conocida como la construcción de Grothendieck.

En general, la construcción de Grothendieck asigna un grupo a un semigrupo dado, con cierta propiedad universal, como presentamos a continuación.

Si A es cualquier semigrupo abeliano, podemos asociarle un grupo abeliano $K(A)$ único salvo isomorfismos, y un homomorfismo de semigrupos $\alpha : A \longrightarrow K(A)$ con la siguiente propiedad universal: si G es cualquier grupo abeliano y $\gamma : A \longrightarrow G$ un homomorfismo de semigrupos, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\nu : K(A) \longrightarrow G$ tal que el siguiente diagrama de semigrupos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & K(A) \arrow[d, "\nu"] \\ & G \end{tikzcd}$$

es conmutativo. La pareja $(K(A), \alpha)$ es llamada la **construcción de Grothendieck asociada al semigrupo** A. Si A es también un semianillo entonces $K(A)$ será un anillo conmutativo.

$K(A)$ se define agregando los inversos de los elementos de A como sigue: consideremos $A \times A$ y definimos la relación de equivalencia $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ si y sólo si existe $c \in A$ tal que $a_1 + b_2 + c = a_2 + b_1 + c$. Entonces $K(A) = A \times A / \sim$ y si $[(a, b)]$ denota la clase de equivalencia de (a, b) entonces la suma en $K(A)$ se define como $[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)]$, así el negativo de $[(a, b)]$ es $[(b, a)]$, y como A es abeliano, $K(A)$ es también abeliano. Además si A es un semianillo, el producto en $K(A)$ se define como $[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)]$. El homomorfismo de semigrupos $\alpha : A \longrightarrow K(A)$ se define como $\alpha : a \longmapsto [(a,0)]$. Generalmente escribimos $[a] - [b]$ para referirnos a la clase $[(a,b)]$.

Existe una construcción alternativa de $K(A)$, a saber, si $F(A)$ es el grupo abeliano libre generado por A y sea $\overline{\alpha} : A \longrightarrow F(A)$ la inyección canónica. Tomamos $H(A)$ como el subgrupo de $F(A)$ generado por los elementos de la forma $\overline{\alpha}(a+b) - \overline{\alpha}(a) - \overline{\alpha}(b)$ para cada $a, b \in A$ (donde $+$ representa la suma en A). Entonces $K(A) \approx F(A)/H(A)$ y $\alpha : A \longrightarrow K(A)$ es el homomorfismo de semigrupos dado por la composición

$$A \xrightarrow{\overline{\alpha}} F(A) \xrightarrow{\sigma} F(A)/H(A)$$

donde σ es la proyección sobre el cociente. Abusando de notación, para cualquier $a \in A$ denotamos a su imagen $\alpha(a) \in K(A)$ simplemente como a.

En particular, la construcción de Grothendieck aplicada a $(\mathrm{Vect}(X), \oplus)$ da paso a la siguiente definición.

Definición 2.3 *Sea X un espacio topológico compacto. El grupo de Grothendieck asociado a* $\mathrm{Vect}(X)$ *es denotado por $K(X)$ y llamado K-**Teoría** de X*

$$K(X) := K(\mathrm{Vect}(X)).$$

Como además $(\mathrm{Vect}(X), \oplus, \otimes)$ es un semianillo, entonces $K(X)$ posee estructura de anillo conmutativo. El elemento 1 en $K(X)$ está representado por el haz trivial $X \times \mathbb{C} \longrightarrow X$ y el elemento 0 está representado por el haz $1_X : X \longrightarrow X$ cuya fibra es $\{*\} \approx \{0\}$.

Abusando de notación E denotará a la clase de isomorfismo en $\mathrm{Vect}(X)$ del haz E, y $[E]$ denotará la imagen de esta clase en $K(X)$. Así, de la primera construcción de K se tiene que todo elemento de $K(X)$ se puede escribir como una diferencia formal $[E] - [F]$, donde E y F son elementos de $\mathrm{Vect}(X)$.

Se puede probar (ver [5],[4]) que dado un haz vectorial sobre un espacio compacto, siempre existe otro tal que su suma es trivial, por lo tanto sea G tal que $F \oplus G = \varepsilon^n$, entonces

$$[E] - [F] = [E] + [G] - ([F] + [G]) = [E \oplus G] - [\varepsilon^n]$$

así, todo elemento de $K(X)$ es de la forma $[H] - [\varepsilon^n]$.

Supongamos ahora que E, F son tales que $[E] = [F]$ entonces nuevamente de la primera construcción de K se sigue que existe un haz G tal que $E \oplus G \approx F \oplus G$.

Sea G' un haz tal que $G \oplus G' = \varepsilon^n$. Entonces $E \oplus G \oplus G' \approx F \oplus G \oplus G'$, así que $E \oplus \varepsilon^n \approx F \oplus \varepsilon^n$. Por lo tanto

$$[E] = [F] \quad \text{si y sólo si} \quad E \oplus \varepsilon^n \approx F \oplus \varepsilon^n \in \mathrm{Vect}\,(X) \quad \text{para algún } n.$$

De este modo vemos que la aplicación canónica $\mathrm{Vect}\,(X) \longrightarrow K\,(X)$ no es una inyección.

Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ induce un homomorfismo de semianillos $f^* : \mathrm{Vect}\,(Y) \longrightarrow \mathrm{Vect}\,(X)$ que asocia a la clase de un haz E la clase del haz inducido $f^*\,(E)$. Mediante la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, podemos obtener un **homomorfismo inducido a nivel de K-Teoría**

$$\begin{aligned} f^* : K\,(Y) &\longrightarrow K\,(X) \\ [E] - [F] &\longmapsto [f^*E] - [f^*F] \end{aligned}$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}\,(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d, "f^*"'] & K\,(Y) \arrow[d, "f^*"] \\ \mathrm{Vect}\,(X) \arrow[r, "\alpha_X"] & K\,(X) \end{tikzcd} .$$

De las propiedades del haz inducido podemos deducir que estos homomorfismos inducidos en K-Teoría tienen las propiedades funtoriales:

- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
- $1_X^* = 1_{K(X)}$.

Además, aplicaciones homotópicas $f \simeq g : X \longrightarrow Y$ inducen el mismo homomorfismo, esto es, $f^* = g^* : K\,(Y) \longrightarrow K\,(X)$. Por lo tanto, f^* es un isomorfismo cuando $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica. En particular tenemos que si X y Y son homeomorfos entonces tenemos un isomorfismo $K\,(X) \approx K\,(Y)$.

Concluimos que $K\,(-)$ es un funtor contravariante de la categoría de espacios topológicos compactos y aplicaciones continuas, en la categoría de anillos y homomorfismos de anillos.

Ejemplo 2.4 *Consideremos $X = \{x_0\}$ el espacio consistente en un punto. Cada haz sobre un punto es trivial y está caracterizado por su dimensión, entonces la familia de todos los haces sobre un punto es isomorfa al semianillo de enteros no negativos,* $\mathrm{Vect}\,(X) = \mathbb{N}_0$ *y por lo tanto $K\,(X)$ es isomorfa al anillo de los enteros*

$$K\,(X) \approx \mathbb{Z}$$

a la diferencia $[E]-[F]$ le corresponde al número $\dim E - \dim F \in \mathbb{Z}$. *Así, de las propiedades funtoriales de K se sigue que éste también es el grupo de K-Teoría de cualquier espacio contraíble.* ▲

Aún para espacios simples (como por ejemplo la esfera n-dimensional) puede resultar difícil calcular su grupo de K-Teoría. Sin embargo, como veremos más adelante, el Teorema de Periodicidad de Bott puede ser de gran ayuda en este aspecto.

Sabemos que los elementos de $K\,(X)$ se pueden escribir como diferencias formales de clases de isomorfismos de haces vectoriales sobre X. Definiremos a continuación la K-Teoría reducida de un espacio topológico, cuyos elementos tienen la forma de diferencias de clases de haces de la misma dimensión.

Antes de continuar, fijaremos cierta notación:
$\mathcal{C}$: la categoría de espacios topológicos compactos y aplicaciones continuas.
$\mathcal{C}^+$: la categoría de espacios compactos con punto básico y aplicaciones continuas que respetan el punto básico.
$\mathcal{C}^2$: la categoría de parejas de espacios compactos y aplicaciones continuas de parejas.
A los objetos $(X, Y) \in \mathcal{C}^2$ los asociamos con el espacio X/Y con punto básico canónico Y/Y, esto es, un objeto de $\mathcal{C}^+$. En el caso donde $Y = \varnothing$, entenderemos X/Y como la unión ajena de X con un punto, el cual viene a ser su punto básico. En adelante denotaremos a este objeto de $\mathcal{C}^+$ por X^+.

Sea $X \in \mathcal{C}^+$ con punto básico x_0. La inclusión $i : x_0 \hookrightarrow X$ induce un homomorfismo de anillos

$$\begin{aligned} i^* : K\,(X) &\longrightarrow K\,(x_0) \approx \mathbb{Z} \\ [E]-[F] &\longmapsto \dim E - \dim F \end{aligned}$$

que a cada haz vectorial sobre X le asocia la dimensión del haz sobre la componente que contenga al punto básico x_0.

Definición 2.5 *El núcleo del homomorfismo i^* es llamado K-**Teoría reducida** del espacio $X \in \mathcal{C}^+$ y se denota por $\widetilde{K}(X)$, esto es,*

$$\widetilde{K}(X) := \ker\left(i^* : K(X) \longrightarrow K(x_0)\right).$$

$\widetilde{K}(X)$ es un ideal de $K(X)$ y por lo tanto un anillo sin unidad. Los elementos de $\widetilde{K}(X)$ están representados por diferencias $[E] - [F]$ para los cuales $\dim E = \dim F$. Aún mas, los elementos de $\widetilde{K}(X)$ se pueden escribir como $[E] - \varepsilon^n$ donde $n = \dim(E_{x_0})$.

Existe otra forma de representar a los elementos de $\widetilde{K}(X)$. Decimos que dos haces E y F sobre X son *establemente equivalentes* si existen n y m tales que $E \oplus \varepsilon^n \approx F \oplus \varepsilon^m$. La relación "ser establemente equivalentes.[es] claramente una relación de equivalencia sobre $\mathrm{Vect}(X)$. Si denotamos por $\mathcal{S}(X)$ al conjunto de clases estables de haces sobre X, entonces $\mathcal{S}(X)$ tiene estructura de semigrupo abeliano donde, si $\{E\}$ denota la clase estable del haz E, entonces definimos $\{E\} + \{F\} := \{E \oplus F\}$ y el cero es la clase de cualquier haz trivial sobre X. Se puede probar (ver [4]) que $\widetilde{K}(X) \approx \mathcal{S}(X)$.

Notemos que si X tiene punto básico x_0, y $c : X \longrightarrow \{x_0\}$ es la aplicación constante entonces $c \circ i = 1$ y entonces de las propiedades funtoriales de K, $i^* \circ c^* = 1$, por lo tanto i induce un homomorfismo suprayectivo y se sigue que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}(X) \longrightarrow K(X) \xrightarrow{i^*} K(\{x_0\}) \longrightarrow 0$$

se escinde. Por lo tanto

$$K(X) \approx \widetilde{K}(X) \oplus K(\{x_0\}) \approx \widetilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

En particular cuando $X = \{x_0\}$ concluimos que $\widetilde{K}(X)$ es trivial.

Si $X, Y \in \mathcal{C}^+$ y $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua que respeta el punto básico y si consideramos $f^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$ entonces la imagen de $\widetilde{K}(Y)$ está contenida en $\widetilde{K}(X)$, de modo que tenemos homomorfismos inducidos

$$f^* : \widetilde{K}(Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$$

que siguen teniendo las propiedades funtoriales. Concluimos que $\widetilde{K}(-)$ es un funtor contravariante de la categoría $\mathcal{C}^+$ a la categoría de grupos abelianos y homomorfismos de grupos.

Existe también una versión relativa de K-Teoría para parejas en $\mathcal{C}^2$.

Definición 2.6 *Sea $(X,Y) \in \mathcal{C}^2$. Definimos la K-**Teoría relativa** de la pareja (X,Y) como el anillo*

$$K(X,Y) := \widetilde{K}(X/Y).$$

En particular se tiene que $K(X,\{x_0\}) = \widetilde{K}(X)$ y $K(X,\varnothing) \approx K(X)$. Además, como $\widetilde{K}(-)$ es un funtor, se sigue que $K(-,-)$ también es un funtor contravariante de la categoría $\mathcal{C}^2$ a la categoría de grupos abelianos.

Tenemos definida hasta ahora la K-Teoría para espacios topológicos compactos, espacios con punto básico y parejas topológicas. Sin embargo, también existe la noción de K-Teoría de grado superior.

Dado un espacio topológico X se define la *suspensión* de X como $\Sigma X := X \times I/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\})$, esto es, el espacio cociente que resulta de $X \times I$, $I = [0,1]$, mediante la relación de equivalencia que identifica a $X \times \{0\}$ en un punto y a $X \times \{1\}$ en otro punto. Equivalentemente este espacio se obtiene como la unión de los dos conos $C^+X = X \times [0,1]/X \times \{1\}$ y $C^-X = X \times [-1,0]/X \times \{-1\}$ identificados mediante las bases.Si X es un espacio con punto básico x_0 se define la *suspensión reducida* de X como $SX := X \times I/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I)$, esto es, la suspensión de X donde se identifica a un punto el segmento $\{x_0\} \times I$. En este caso, SX es un espacio con punto básico $\{x_0\} \times I$ y tiene el mismo tipo de homotopía que ΣX. Para cada entero positivo n, la **n-ésima suspensión** del espacio X es $S^n X := S \cdots SX$ (n veces).

Definición 2.7 *El n-**ésimo grupo de K-Teoría reducida** del espacio topológico $X \in \mathcal{C}^+$ se define como*

$$\widetilde{K}^{-n}(X) = \begin{cases} \widetilde{K}(S^n X) & si\ n \in \mathbb{N} \\ \widetilde{K}(X) & si\ n = 0 \end{cases}.$$

*El n-**ésimo grupo de K-Teoría relativa** de la pareja $(X,Y) \in \mathcal{C}^2$ es*

$$K^{-n}(X,Y) := \begin{cases} \widetilde{K}^{-n}(X/Y) = \widetilde{K}(S^n(X/Y)) & si\ n \in \mathbb{N} \\ K(X,Y) & si\ n = 0 \end{cases}.$$

*El n-**ésimo grupo de K-Teoría** de $X \in \mathcal{C}$*

$$K^{-n}(X) := \begin{cases} K^{-n}(X,\varnothing) = \widetilde{K}(S^n X^+) & si\ n \in \mathbb{N} \\ K(X) & si\ n = 0 \end{cases}.$$

Se tiene que $\widetilde{K}^{-n}(-), K^{-n}(-,-), K^{-n}(-)$ son funtores contravariantes. En particular $K(X) = K^0(X), K(X,Y) = K^0(X,Y), \widetilde{K}(X) = \widetilde{K}^0(X)$.

Notemos que K^{-n} fue definido sólo para $n \in \mathbb{N}_0$. Más adelante presentamos un resultado que nos permitirá extender la definición de K^{-n} para todo entero n.

Analizaremos ahora algunas "propiedades cohomológicas" de las definiciones que tenemos de esta sección (ver [5], [15]). Dada (X,Y) una pareja en $\mathcal{C}^2$, la sucesión $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} X/Y$ donde i es la inclusión y q es la proyección sobre el cociente, induce una sucesión exacta asociada a la pareja (X,Y)

$$\widetilde{K}(X/Y) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(Y). \tag{2.1}$$

En efecto, como la composición $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} X/Y$ es constante, $i^* \circ q^* = 0$ por lo que $\operatorname{Im} q^* \subseteq \operatorname{Ker} i^*$. Por otro lado, sea $\xi \in \operatorname{Ker} i^*$, entonces podemos representar a ξ en la forma $[E] - \varepsilon^n$. Luego $\xi \in \operatorname{Ker} i^*$ si y sólo si $[i^*E] - \varepsilon^n = 0$. Se sigue que $[E|_Y] = \varepsilon^n$, lo cual implica que existe un entero positivo m tal que $(E \oplus \varepsilon^m)|_Y$ es trivial, $(E \oplus \varepsilon^m)|_Y = \varepsilon^n \oplus \varepsilon^m$, esto es tenemos una trivialización α de $(E \oplus \varepsilon^m)|_Y$. Esto define entonces un haz $(E \oplus \varepsilon^m)/\alpha$ sobre X/Y, y así tenemos un elemento

$$\eta := [(E \oplus \varepsilon^m)/\alpha] - [\varepsilon^n \oplus \varepsilon^m] \in \widetilde{K}(X/Y).$$

Entonces

$$q^*(\eta) = [E \oplus \varepsilon^m] - [\varepsilon^n \oplus \varepsilon^m] = [E] - [\varepsilon^n] = \xi$$

por lo que $\operatorname{Ker} i^* \subseteq \operatorname{Im} q^*$. Así, de estas dos inclusiones concluimos que $\operatorname{Ker} i^* = \operatorname{Im} q^*$, esto es, (2.1) es una sucesión exacta.

Luego, como $K(X,Y) = \widetilde{K}(X/A)$ y la inclusión $A \hookrightarrow X$ induce homomorfismos $K(X) \longrightarrow K(A)$ y $\widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(A)$ con el mismo núcleo, la siguiente sucesión también es exacta

$$K(X,Y) \xrightarrow{q^*} K(X) \xrightarrow{i^*} K(Y).$$

Podemos extender (2.1) por la izquierda para obtener una sucesión exacta larga de grupos reducidos de K-Teoría, asociada a la pareja (X,Y)

$$\cdots \widetilde{K}^{-n-1}(Y) \xrightarrow{\delta^n} K^{-n}(X,Y) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}^{-n}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}^{-n}(Y) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \widetilde{K}^0(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}^0(Y).$$

Para hacer esto, notemos que es suficiente probar que para $(X,Y) \in \mathcal{C}^2$ tal que $Y \in \mathcal{C}^+$, existe $\delta^0 : \widetilde{K}^{-1}(Y) \longrightarrow \widetilde{K}^0(X,Y)$ y una sucesión exacta

$$\widetilde{K}^{-1}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}^{-1}(Y) \xrightarrow{\delta^0} K^0(X,Y) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}^0(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}^0(Y) \tag{2.2}$$

pues, de las propiedades de la suspensión resulta que

$$\widetilde{K}^{-n-1}(Y) = \widetilde{K}(S(S^nY)) = \widetilde{K}^{-1}(S^nY) \quad \text{y} \quad K^0(S^nX, S^nY) = \widetilde{K}^{-n}(X,Y),$$

entonces definimos el homomorfismo δ_n asociado a la pareja (X,Y), $\delta_n : \widetilde{K}^{-n-1}(Y) \longrightarrow K^{-n}(X,Y)$, como δ^0 de la pareja (S^nX, S^nY). Reemplazando (X,Y) por (S^nX, S^nY) para $i = 1, 2, ...$ obtendremos una sucesión larga infinita por la izquierda.

Luego, si $(X,Y) \in \mathcal{C}^2$ y consideramos la sucesión exacta larga de la pareja (X^+, Y^+) obtenemos una **sucesión exacta larga de grupos de K-Teoría**

$$\cdots K^{-n-1}(Y) \xrightarrow{\delta^n} K^{-n}(X,Y) \xrightarrow{q^*} K^{-n}(X) \xrightarrow{i^*} K^{-n}(Y) \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^0(X) \xrightarrow{i^*} K^0(Y).$$

Para ver que en efecto la sucesión (2.2) es exacta, veamos primeramente como se define el homomorfismo δ^0. Sea CY el cono de Y, cuya base $Y \times \{0\}$ identificamos con Y. Entonces, en particular para la pareja $(X \cup CY, X)$ la sucesión exacta (2.1) viene a ser

$$K^0(X \cup CY, X) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}(X \cup CY) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(X). \tag{2.3}$$

Por otro lado, se puede probar (ver [5]) que si $Y \subset X$ es un subespacio contraíble entonces la proyección sobre el cociente induce una biyección $\mathrm{Vect}(X/Y) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X)$. Por lo tanto, como CY es un subespacio contraíble de $X \cup CY$ se tiene un isomorfismo $K^0(X \cup CY, CY) \approx K^0(X \cup CY)$. Además, como $(X \cup CY)/CY$ es homeomorfo a X/Y tenemos

$$K^0(X,Y) = \widetilde{K}^0(X/Y) \xrightarrow{\approx} \widetilde{K}^0((X \cup CY)/CY) \xrightarrow{\approx} \widetilde{K}^0(X \cup CY). \tag{2.4}$$

Luego, del homeomorfismo entre $(X \cup CY)/X$ y $CY/(Y \times \{0\}) = \Sigma Y$ se sigue

$$\widetilde{K}^{-1}(Y) = \widetilde{K}^0(SY) \xrightarrow{\approx} \widetilde{K}^0(\Sigma Y) \xrightarrow{\approx} \widetilde{K}^0((X \cup CY)/X) = K^0(X \cup CY, X). \tag{2.5}$$

Así de (2.3),(2.4) y (2.5) definimos δ_0 como el homomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} K^0(X \cup CY, X) & \xrightarrow{q^*} & \widetilde{K}^0(X \cup CY) & \xrightarrow{i^*} & \widetilde{K}(X) \\ \uparrow\approx & & \uparrow\approx & & \\ \widetilde{K}^{-1}(Y) & \xrightarrow{\delta^0} & K^0(X/Y) & & \end{array}.$$

Notemos que $q^* : K^0(X/Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$ coincide con la composición $K^0(X/Y) \xrightarrow{\approx} \widetilde{K}^0(X \cup CY) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(X)$ de modo que obtenemos la sucesión exacta

$$\widetilde{K}^{-1}(Y) \xrightarrow{\delta^0} K^0(X/Y) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}(X)$$

de donde se sigue la exactitud de la parte media de (2.2). Además de (2.1) se tiene la exactitud de los últimos tres términos de (2.2), por lo que nos falta verificar solamente la exactitud de los primeros tres términos de (2.2).

Para poder distinguir los conos que definen la suspensión ΣX denotemos por $C_1X = (X \times [0,1]) / X \times \{1\}$ y por $C_2X = (X \times [-1,0]) / X \times \{-1\}$, donde identificamos a X con $X \times \{0\}$. Para ver que los primeros tres términos de (2.2)

$$K^0(X,Y) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}^0(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}^0(Y)$$

son en efecto una sucesión exacta, mostraremos que esta sucesión resulta ser isomorfa a la sucesión exacta asociada a la pareja $(C_1Y \cup C_2X, X \cup C_1Y)$.

Consideremos la sucesión exacta (2.1) aplicada a $(C_1Y \cup C_2X, X \cup C_1Y)$

$$K(C_1Y \cup C_2X, X \cup C_1Y) \longrightarrow \widetilde{K}(C_1Y \cup C_2X) \longrightarrow \widetilde{K}(X \cup C_1Y).$$

Entonces de los homeomorfismos $C_1Y \cup C_2X/X \cup C_1Y \cong C_2X/X$, $C_1Y \cup C_2X/C_2X \cong C_1Y/Y$ y $X \cup C_1Y/C_1Y \cong X/Y$ se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
K(C_1Y \cup C_2X, X \cup C_1Y) \arrow[r, "q^*"] & \widetilde{K}(C_1Y \cup C_2X) \arrow[r, "i^*"] & \widetilde{K}(X \cup C_1Y) \\
\widetilde{K}(C_2X/X) \arrow[u, "\approx"'] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \widetilde{K}(C_1Y/Y) \arrow[u, "\approx"'] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \widetilde{K}(X/Y) \arrow[u, "\approx"'] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
\widetilde{K}^{-1}(X) & \widetilde{K}^{-1}(Y) \arrow[r, "\delta^1"] & \widetilde{K}^0(X,Y)
\end{tikzcd}$$

Sea $\alpha : \widetilde{K}^{-1}(X) \longrightarrow \widetilde{K}^{-1}(Y)$ que hace conmutar el diagrama anterior, probaremos que α es igual a $-i^*$. Entonces como el primer renglón es exacto, resultará que

$$\widetilde{K}^{-1}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}^{-1}(Y) \xrightarrow{\delta^0} K^0(X,Y)$$

es una sucesión exacta.

Como $\mathbb{S}^1$ se puede obtener mediante el cociente del intervalo I identificando el 0 y el 1, esto es $\mathbb{S}^1 \cong I/\partial I$, la aplicación $I \longrightarrow I$ tal que $t \longmapsto 1-t$ induce una aplicación

$$T : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1.$$

Luego, $T \times 1 : \mathbb{S}^1 \times X \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times X$ determina dos aplicaciones continuas de ΣX y SX en sí mismas, que denotamos por $T \wedge 1$. Se puede probar (ver [5], [15]) que el homomorfismo $(T \wedge 1)^* : \widetilde{K}(\Sigma Y) \longrightarrow \widetilde{K}(\Sigma Y)$ es igual a menos la identidad.

Consideremos el siguiente diagrama de aplicaciones continuas

$$\begin{tikzcd}
C_1Y \cup C_2X \arrow[rr, "2"] \arrow[dd, "1"'] & & C_1Y/Y \arrow[rr, "3"] & & S_1Y \arrow[dd, "T \wedge 1"] \\
& C_1Y \cup C_2Y \arrow[ul, "6"] \arrow[ur, "7"'] \arrow[dl, "9"] \arrow[dr, "8"'] & & & \\
C_2X/X & & C_2Y/Y \arrow[ll, "4"'] \arrow[rr, "5"] & & S_1Y
\end{tikzcd}$$

Las aplicaciones $1, 2, 3, 5, 7$ corresponden a las proyecciones canónicas; 4 es la inyección canónica. La aplicación 6 asocia a la clase de (y, t) la de $(y, -t)$; la aplicación 8 asocia a la clase de (y, t) la de $(y, -t)$ si t es positivo, o el punto básico si t es negativo. Finalmente la aplicación 9 es la composición de 8 y 4. Entonces $2, 3, 5, 7$ y 8 inducen isomorfismos en K-Teoría. El diagrama resulta ser conmutativo.

Aplicando $\widetilde{K}$ a este diagrama, resulta que la composición de $1, 2$ y 3 es igual a α, y la composición de 4 y 5 es igual a i^*. Por lo tanto, como $(T \wedge 1)^* y = -y$ se sigue que $\alpha = -i^*$. Entonces

$$\widetilde{K}^{-1}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}^{-1}(Y) \xrightarrow{\delta^0} K^0(X, Y)$$

es exacta, y también (2.2) lo es.

En particular, si $(X, Y) \in \mathcal{C}^2$ tal que Y es un retracto de X, considerando la sucesión exacta larga asociada a (X, Y) resulta que para todo $n \geq 0$,

$$0 \longrightarrow K^{-n}(X, Y) \xrightarrow{q^*} K^{-n}(X) \xrightarrow{i^*} K^{-n}(Y) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta que se escinde, y por lo tanto

$$K^{-n}(X) \approx K^{-n}(X, Y) \oplus K^{-n}(Y)$$

y si consideramos a X y Y con el mismo punto básico

$$\widetilde{K}^{-n}(X) \approx K^{-n}(X, Y) \oplus \widetilde{K}^{-n}(Y).$$

Volviendo a lo que señalábamos anteriormente, K^{-n} fue definido sólo para $n \in \mathbb{N}_0$, sin embargo, el teorema que a continuación presentaremos nos permite extender la definición de $K(X)$ a una familia de grupos abelianos $K^n, n \in \mathbb{Z}$. Este resultado es el teorema fundamental de la K-Teoría y de hecho nos asegura que dicha familia de grupos es periódica en n de periodo 2, de aquí la justificación de que el teorema recibe el nombre de "periodicidad"(ver [5]).

La demostración original de este teorema (dada por Raoul Bott) hace uso de teoría de Morse. Posteriormente Atiyah y Bott presentaron otra prueba que resultó del estudio de haces sobre el espacio producto $X \times \mathbb{S}^2$. Luego Atiyah propone otra demostración usando el índice de una familia de operadores diferenciales elípticos. Entre las demostraciones más recientes se encuentran: la de Kono y Tokunaga, haciendo uso de cohomología y clases de Chern; Giffen y Harris usando espacios clasificantes de categorías definidas vía espacios simpliciales; Bryan, Sanders, Tian usando espacios de móduli; y Aguilar, Prieto usando casifibraciones. Aún cuando existen diferentes demostraciones de este resultado, suelen ser complicadas, de modo que nos centraremos en hacer uso de dicho resultado sin presentar alguna demostración (para una demostración ver [5], [3]).

Se puede probar (ver [5], [12]) que si H es el haz de líneas canónico sobre $\mathbb{CP}^1 \approx \mathbb{S}^2$, entonces H genera al grupo multiplicativo $\mathrm{Vect}^1(\mathbb{S}^2)$ de haces de líneas sobre $\mathbb{S}^2$. En particular el elemento $b_2 := [H] - [1] \in \widetilde{K}(\mathbb{S}^2) = K^{-2}(*)$ es llamado *generador de Bott.*

Teorema 2.8 (Periodicidad de Bott) *Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Entonces existe un isomorfismo*

$$\beta : K(X) \longrightarrow K^{-2}(X)$$

mediante la multiplicación por el generador de Bott b_2.

Como $\widetilde{K}(S^2X) = \widetilde{K}^{-2}(X)$, se sigue que

$$K^{-n}(X) \approx K^{-n-2}(X), \quad \text{para } n \in \mathbb{N}_0.$$

Esta propiedad de periodicidad permite extender la notación $K^n(X)$ para cualquier entero n. Además, este resultado permite demostrar que K-Teoría es una teoría de cohomología generalizada, es decir, que satisface los axiomas de Eilenberg-Steenrod excepto el axioma de la dimensión. En efecto, definiendo para cada $n \in \mathbb{N}$

$$K^n(X) := \begin{cases} K^0(X) & \text{si } n \equiv 0 \bmod 2 \\ K^{-1}(X) & \text{si } n \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

se tiene que $K^n(-)$ resulta ser un *funtor contravariante* de la categoría donde los objetos son las parejas de espacios paracompactos y subespacios cerrados y los morfismos son las aplicaciones continuas, en la categoría de grupos abelianos y homomorfismos de grupos. Además, tenemos definidas transformaciones naturales de funtores $\delta : K^n(A) \longrightarrow K^{n+1}(X,A)$ donde estos funtores y transformaciones naturales satisfacen (ver [4]):

- *Funtorialidad.* Para aplicaciones entre parejas $g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ y $f : (Y,B) \longrightarrow (Z,C)$

  $$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* : K^n(Z,C) \longrightarrow K^n(X,A)$$

  y si $1_{(X,A)} : (X,A) \longrightarrow (X,A)$ es la identidad entonces

  $$1^*_{(X,A)} = 1_{H^n(X,A)} : H^n(X,A) \longrightarrow H^n(X,A)$$

  donde $1_{H^n(X,A)}$ es la identidad de grupos.

- *Homotopía.* Si $f \simeq g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ como aplicaciones de parejas entonces

  $$f^* = g^* : K^n(Y,B) \longrightarrow K^n(X,A)$$

  para todo $n \in \mathbb{N}$.

- *Escisión.* Dada una pareja (X,A) y un subespacio $U \subset X$ tal que la cerradura de U está contenida en el interior de A, entonces la inclusión $k : (X-U, A-U) \hookrightarrow (X,A)$ induce un isomorfismo

  $$k^* : K^n(X,A) \longrightarrow K^n(X-U, A-U)$$

  para todo $n \in \mathbb{N}$.

- *Exactitud.* Para toda pareja de espacios (X,A) existe una sucesión exacta larga natural

  $$\cdots \longrightarrow K^n(A) \xrightarrow{\delta} K^{n+1}(X,A) \xrightarrow{q^*} K^{n+1}(X) \xrightarrow{i^*} K^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

  donde $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión y $q : X \longrightarrow X/A$ la proyección sobre el cociente.

Notemos que la K-Teoría satisface los axiomas de Eilenberg-Steenrod (ver 1.2) excepto el axioma de dimensión. En este caso decimos que la K-Teoría es una **teoría de cohomología generalizada**.

Si consideremos $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X, \pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ las proyecciones canónicas entonces se define el **producto externo en K-Teoría** como el homomorfismo de anillos

$$\begin{aligned} \mu : K(X) \otimes K(Y) &\longrightarrow K(X \times Y) \\ [E] \otimes [F] &\longmapsto [\pi_1^* E] \otimes [\pi_2^* F]. \end{aligned}$$

Tomando $Y = \mathbb{S}^2$ se puede probar (ver [5]) que el producto externo

$$\begin{aligned} \mu : K(X) \otimes K(\mathbb{S}^2) &\longrightarrow K(X \times \mathbb{S}^2) \\ [E] \otimes [F] &\longmapsto [\pi_1^* E] \otimes [\pi_2^* F] \end{aligned}$$

es un isomorfismo. De hecho, el Teorema de Periodicidad de Bott es equivalente a afirmar que en este caso μ es un isomorfismo.

Ejemplo 2.9 *El generador de Bott $b_2 = H - 1$ genera a $\widetilde{K}(\mathbb{S}^2)$. Entonces el producto externo de n copias de b_2 que denotamos como $b_{2n} := b_2 \times \cdots \times b_2$, corresponde al generador de $\widetilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$, (ver [12]). Luego,*

$$\widetilde{K}^0(\mathbb{S}^n) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad y \quad \widetilde{K}^1(\mathbb{S}^n) \approx \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} . \blacktriangle$$

Si en vez de considerar haces vectoriales complejos consideramos haces vectoriales reales sobre un espacio topológico X, obtenemos una K-Teoría real usualmente denotada por $KO(X)$. Existe también un teorema de periodicidad el cual nos dice que la familia $KO^n(X)$ es periódica de periodo 8. Sin embargo, nosotros consideraremos solamente el caso complejo.

2.3. El Invariante de Hopf en K-Teoría

Sea $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, una aplicación dada y

$$C_f = \mathbb{S}^n \cup_f C\mathbb{S}^{2n-1} = \mathbb{S}^n \cup_f \mathbb{D}^{2n}$$

el cono de f.

En este caso, el cociente $C_f/\mathbb{S}^n$ es precisamente $\mathbb{S}^{2n}$, y la sucesión exacta (2.1) de la pareja $(C_f, \mathbb{S}^n)$ inducida por $\mathbb{S}^n \overset{i}{\hookrightarrow} C_f \overset{q}{\longrightarrow} \mathbb{S}^{2n}$ donde i es la inclusión y q es la proyección sobre el cociente es

$$\widetilde{K}(\mathbb{S}^{2n}) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}(C_f) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(\mathbb{S}^n).$$

Sea α la imagen bajo q^* del generador b_{2n}, esto es, $\alpha = q^*(b_{2n})$; sea $\beta \in \widetilde{K}(C_f)$ tal que $i^*(\beta) = b_n$ cuando n es par (tal elemento siempre existe porque i^* es suprayectivo) y sea $\beta = 0$ para n impar. Notemos que $i^*(\beta^2) = i^*(\beta)^2 = 0$ puesto que todos los cuadrados en $\widetilde{K}(\mathbb{S}^n)$ son cero, por lo tanto $\beta^2 \in \ker i^* = \operatorname{Im} q^*$, de modo que existe un elemento en $\widetilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$ tal que bajo q^* es β^2. Pero todo elemento en $\widetilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$ es un múltiplo de b_{2n}, así que existe $h(f) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\beta^2 = h(f) \cdot \alpha.$$

Definición 2.10 *El **Invariante de Hopf** de la aplicación $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n}$ se define como el entero $h(f)$ tal que*

$$\beta^2 = h(f) \cdot \alpha.$$

Podemos ver que la definición anterior tiene sentido, pues $h(f)$ no depende de la elección de β. En efecto, si $\widetilde{\beta}$ es otro elemento en $\widetilde{K}(C_f)$ tal que $i^*\left(\widetilde{\beta}\right) = b_n$ entonces $\widetilde{\beta} = \beta + m\alpha$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Pero $\alpha^2 = 0$ y $\alpha\beta = 0$, de modo que $\beta^2 = (\beta + m\alpha)^2 = \widetilde{\beta}^2$. Por lo tanto $h(f)$ está bien definido.

El Invariante de Hopf $h(f)$ depende sólo de la clase de homotopía de f (pues C_f depende sólo de la clase de homotopía de f). Por lo tanto, podemos definir

$$h : \pi_{2n-1}(S^n) \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{2.6}$$

el cual, resulta ser un homomorfismo de grupos (ver [12]).

Dada una aplicación continua $\phi : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, $n > 1$, y $e \in \mathbb{S}^{n-1}$, se tienen aplicaciones $\phi_1 : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ y $\phi_2 : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ tales que

$$\phi_1 : x \longmapsto \phi(x, e) \quad \text{y} \quad \phi_2 : x \longmapsto \phi(e, x)$$

se define el *bigrado de* f como la pareja $(\deg(\phi_1), \deg(\phi_2))$ donde deg denota al grado de la aplicación. Se puede que el Invariante de Hopf tiene las siguientes propiedades (ver [12]):

- Si $g : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$, entonces $h(f \circ g) = \deg(g) \cdot h(f)$.
- Si $e : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ tiene grado d, entonces $h(e \circ f) = [\deg(e)]^2 \cdot h(f)$.
- Si $\phi : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ entonces el Invariante de Hopf de la construcción de Hopf de ϕ (ver 3.4) es $h(H_\phi) = \deg(\phi_1) \cdot \deg(\phi_2)$.

Notemos que cuando n es impar se tiene que $\beta = 0$. Por lo tanto, para todo f se tiene que

$$h(f) = 0 \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Por otro lado, para n par existen aplicaciones con Invariante de Hopf igual a ¡*cualquier número par*!. En efecto (ver [12]) para $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ sea $T_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la reflexión a través de la línea $\mathbb{R}x$. Entonces para n par, si definimos $T : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ como $T(x, y) = T_x(y)$ entonces T tiene bigrado $(2, -1)$, de modo que de las propiedades mencionadas anteriormente, el Invariante de Hopf de H_f es -2. Entonces del homomorfismo (2.6) se sigue que tenemos una aplicación cuyo Invariante de Hopf es cualquier número par.

Podemos dar ejemplos de aplicaciones con Invariante de Hopf uno en los casos $n = 2, 4$ y 8 y en efecto mediante (2.6) con Invariante de Hopf igual a cualquier entero.

La multiplicación dada por los números complejos, los cuaterniones y los octonianos nos permiten ver a $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^8$ como álgebras de división. De aquí, podemos dar a $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^7$ una estructura de H-espacio con multiplicación $\phi : (x, y) \longmapsto xy / \|xy\|$, la cual está bien definida porque en un álgebra de división no hay divisores de cero. Entonces la construcción de Hopf de ϕ, H_ϕ, tiene Invariante de Hopf ± 1 como probamos en (3.4).

El problema de la no existencia de elementos con Invariante de Hopf uno fué demostrado por Adams-Atiyah ([2]) usando K-Teoría, pero fue probado primeramente por Adams ([1]) usando operaciones secundarias en cohomología ordinaria. En este capítulo vimos que los haces tangentes de las esferas $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^7$ son triviales, pues en particular la no existencia de elementos de Invariante de Hopf uno está relacionada con el hecho de que éstas son las *únicas* esferas con esta propiedad.

Tenemos dos definiciones del Invariante de Hopf una en términos cohomológicos y otra con K-Teoría. En el siguiente capítulo probaremos que ambas son equivalentes.

Capítulo 3

El Invariante de Hopf

Durante este capítulo pretendemos plantear y demostrar el resultado principal de este trabajo, a saber, el **Teorema de Adams sobre la no existencia de elementos de Invariante de Hopf uno.** El enfoque que tomaremos para demostrarlo es haciendo uso de herramientas de la K-Teoría. Aunque el Invariante de Hopf se define en términos de la estructura de anillo en K-Teoría, para demostrar el Teorema de Adams necesitaremos de cierta estructura adicional, que son las operaciones de Adams.

Empezaremos el capítulo probando que en efecto la definición del Invariante de Hopf en cohomología (del primer capítulo) y la del Invariante de Hopf en K-Teoría (del segundo capítulo) son equivalentes. Para esto, estudiaremos en la primera sección el carácter de Chern, el cual nos da la conexión entre K-Teoría y cohomología que necesitaremos durante la segunda sección para demostrar tal equivalencia. En la tercera sección se presentan las operaciones de Adams en K-Teoría, y se demuestra el Teorema de Adams. Luego, durante la tercera sección presentaremos, como una aplicación de toda la teoría desarrollada, ciertos problemas cuya solución se reduce al problema de "la no existencia de elementos de Invariante de Hopf uno". Finalizaremos este trabajo presentando una interpretación geométrica del Invariante de Hopf, que de hecho fué en estos términos como se definió originalmente el Invariante de Hopf.

3.1. Carácter de Chern

El objetivo de esta sección es exhibir un homomorfismo llamado carácter de Chern, el cual nos da una correspondencia directa entre los anillos de cohomología y K-Teoría. Presentaremos primeramente algunos hechos que nos ayudarán a encontrar tal conexión. Esta presentación la hacemos sin entrar en demasiados detalles, pero recalcamos que estos son hechos de gran interés independiente dentro de la K-Teoría. Finalmente enunciaremos algunas propiedades del carácter de Chern que serán relevantes durante la siguiente sección. En adelante trabajaremos sólo con espacios compactos, al menos que se especifique lo contrario.

Existe un resultado (ver [13]) que nos permite deducir fórmulas explícitas para haces en general a partir de fórmulas para una suma de haces de líneas. Éste es llamado *principio de descomposición*, y nos dice que para un haz vectorial $E \longrightarrow X$ dado, existe un espacio compacto $F(E)$ y una aplicación $p : F(E) \longrightarrow X$ tal que el pullback $p^*(E)$ es una suma de haces de líneas sobre $F(E)$, además $p^* : H^*(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(F(E);\mathbb{Z})$ y $p^* : K(X) \longrightarrow K(F(E))$ son monomorfismos.

Por otro lado, una *clase característica* c es una aplicación natural que le asigna a cada haz vectorial n-dimensional $E \longrightarrow X$, una clase de cohomología $c(E) \in H^k(X)$, con n y k fijos. En particular para haces vectoriales complejos, si $n > 1$, existe una única sucesión de funciones $c_1, c_2, \ldots$ que asigna a cada haz $E \longrightarrow X$ una clase $c_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$, que dependen solamente del tipo de isomorfismo de E, llamadas **clases de Chern** (de hecho todas las clases características con coeficientes enteros para haces vectoriales complejos, son polinomios en las clases de Chern). Éstas satisfacen y están unívocamente caracterizadas por los siguientes axiomas (ver [14]):

(a) $c_0 = 1$ y $c_i = 0$ si $i > \dim E$.

(b) $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \smile c(E_2)$ para $c = 1 + c_1 + c_2 + \ldots \in H^*(X;\mathbb{Z})$.

(c) $c_i(f^*(E)) = f^*(c_i(E))$ para un pullback $f^*(E)$.

(d) Para el haz de líneas canónico $E \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty$, $c_1(E)$ es el generador de $H^2(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z})$.

La suma $c(E) := 1 + c_1(E) + \ldots$ es llamada la *clase total de Chern*. La fórmula en (b) para las clases totales de Chern se puede reescribir en la forma $c_n(E_1 \oplus E_2) = \sum_{i+j=n} c_i(E_1) \smile c_j(E_2)$.

De estos axiomas, podemos ver que la clase total de Chern manda sumas directas a productos copa. La idea del carácter de Chern es formar una combinación algebraica de clases de Chern la cual mande sumas directas a sumas y productos tensoriales a productos copa, dando así un homomorfismo natural de anillos de K-Teoría a cohomología (para lograr esto, deberemos trabajar con cohomología con coeficientes racionales).

A continuación aplicaremos algunos hechos básicos acerca de clases de Chern y nos ayudaremos del principio de descomposición para lograr obtener el carácter de Chern, definiéndolo primero para haces de líneas y luego extendiendo via el principio de descomposición a haces vectoriales mas generales.

Sea R un anillo conmutativo con unidad y denotemos por $H^{**}(X;R)$ al producto cartesiano $\prod_{i=0}^{\infty} H^i(X;R)$, el cual consiste de todas las series formales $a_0+a_1+a_2+...$, con $a_i \in H^i(X;R)$. Este producto tiene una estructura de anillo conmutativo, cuya suma y producto están dados por

$$\begin{aligned}(a_0+a_1+a_2+...)+(b_0+b_1+b_2+...) &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+... \\ (a_0+a_1+a_2+...)\cdot(b_0+b_1+b_2+...) &= c_0+c_1+c_2+...\end{aligned}$$

donde $c_k=\sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Consideremos una serie de potencias formal $f(t)=\sum a_i t^i \in R[t]$. Dado un elemento $x\in H^n(X;R)$, hacemos $f(x)=\sum a_i x^i \in H^{**}(X;R)$. Mediante el principio de descomposición, podemos usar f para construir un homomorfismo natural de monoides abelianos $\widehat{f}:\mathrm{Vect}(X)\longrightarrow H^{**}(X;R)$, donde X es cualquier espacio compacto, como sigue: para un haz de líneas L sobre X, sea

$$\widehat{f}(L):=f(c_1(L)).$$

Para una suma $E=L_1\oplus...\oplus L_n$ de haces de línea sobre X, donde $\dim E=n$, sea

$$\widehat{f}(E):=\sum_{i=1}^{n} f(c_1(L_i)).$$

Para un haz n-dimensional arbitrario sobre X, sea $\widehat{f}(E)$ el único elemento de $H^{**}(X;R)$ tal que $p^*\left(\widehat{f}(E)\right)=\widehat{f}(p^*(E))\in H^{**}(F(E))$, donde p y $F(E)$ están especificados por el principio de descomposición. Más explícitamente, escribiendo $p^*(E)=L_1\oplus...\oplus L_n$, vemos que $\widehat{f}(p^*(E))$ es un polinomio simétrico en los $c_1(L_i)$ y por lo tanto puede ser escrito como un polinomio en los polinomios simétricos elementales $p^*(c_k(E))$. Finalmente $\widehat{f}(E)$ resulta de aplicaciones de este polinomio a los $c_k(E)$. (Para haces vectoriales E sobre espacios no conexos X agregamos los elementos obtenidos mediante la restricción de E a las componentes de X).

Luego, por la propiedad universal de $K(X)$, se tiene que $\widehat{f}$ se extiende a un homomorfismo

$$\widehat{f}:K(X)\longrightarrow H^{**}(X;R).$$

Definición 3.1 *Tomando $R=\mathbb{Q}$ y $f(t)=e^t=\sum t^i/i!$ definimos el* ***carácter de Chern*** *como*

$$\begin{aligned} ch: K(X) &\longrightarrow H^{**}(X;\mathbb{Q}) \\ E &\longmapsto ch(E):=\widehat{f}(E).\end{aligned}$$

Notemos que la imagen de ch vive en la suma de los elementos de grado par en $H^{**}(X;\mathbb{Q})$, lo cual se denota por $H^{par}(X;\mathbb{Q})$.

Por naturalidad, se sigue que existe también una forma reducida del carácter de Chern $ch : \widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{H}^{**}(X;\mathbb{Q})$ ya que estos anillos reducidos son núcleos de restricciones a un punto.

El carácter de Chern especifica de hecho un homomorfismo de anillos, esto es, $ch(E \oplus E') = ch(E) \oplus ch(E')$ y $ch(E \otimes E') = ch(E) \cdot ch(E')$ para haces E y E' sobre X. En efecto, el principio de descomposición en el caso de haces vectoriales complejos funciona con cualesquiera coeficientes (en particular para coeficientes en $\mathbb{Q}$) entonces es suficiente verificar las propiedades cuando E y E' son sumas de haces de líneas, digamos $E = \bigoplus_i L_i$, $E' = \bigoplus_j L'_j$. Claramente de la definición $ch(E \oplus E') = ch(E) \oplus ch(E)$; además de la relación $e^{t+t'} = e^t e^{t'}$ tenemos $ch(E \otimes E') = ch\left(\bigoplus_{i,j}(L_i \otimes L'_j)\right) = \sum_{i,j} ch(L_i \otimes L'_j) = \sum_{i,j} e^{c_1(L_i \otimes L'_j)} = \sum_{i,j} e^{c_1(L_i)+c_1(L_j)} = \sum_{i,j} e^{c_1(L_i)} e^{c_1(L_j)} = \sum_{i,j} ch(L_i)\, ch(L_j) = ch(E) \cdot ch(E)$.

Antes de continuar, presentaremos un primer cálculo del carácter de Chern al cual recurriremos más adelante.

Lema 3.2 *Para $n \geq 1$, $ch : \widetilde{K}(\mathbb{S}^{2n}) \longrightarrow H^{2n}(\mathbb{S}^{2n};\mathbb{Q})$ es inyectivo y manda $\widetilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$ isomorfamente sobre el subgrupo $H^{2n}(\mathbb{S}^{2n};\mathbb{Z}) \subset H^{2n}(\mathbb{S}^{2n};\mathbb{Q})$. Por lo tanto c_n : $\widetilde{K}(\mathbb{S}^{2n}) \longrightarrow H^{2n}(\mathbb{S}^{2n};\mathbb{Z})$ es un monomorfismo con cokernel $\mathbb{Z}_{(n-1)!}$.*

Demostración. El primer enunciado es claro para $n = 1$ (cuando $ch = c_1$). El caso $n > 1$ se sigue por compatibilidad con los productos externos como sigue: como $ch(x \times (H-1)) = ch(x) \smile ch(H-1)$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}(X) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "ch"'] & \widetilde{K}(S^2X) \arrow[d, "ch"] \\
\widetilde{H}^{**}(X;\mathbb{Q}) \arrow[r, "\approx"] & \widetilde{H}^{**}(S^2X;\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

donde la aplicación superior es el producto externo con $H-1$, el cual es un isomorfismo por periodicidad de Bott; la aplicación inferior es el producto externo con $ch(H-1) = ch(H) - ch(1) = 1 + c_1(H) - 1 = c_1(H)$, un generador de $H^2(\mathbb{S}^2;\mathbb{Z})$. Luego (ver [13]) la aplicación inferior es un isomorfismo y se restringe a un isomorfismo de los subgrupos de $\mathbb{Z}$-coeficientes. Por lo tanto, tomando $X = \mathbb{S}^{2n}$, el resultado se sigue por inducción sobre n.

Por otro lado, la definición de ch implica que la componente ch_n de ch en grado $2n$ es $\frac{c_n}{(n-1)!}$ mas otros términos que se pueden descomponer en términos de los c_i para $i < n$. Por lo tanto se sigue el segundo enunciado del lema. ■

Notemos que aún cuando $H^{**}(X;\mathbb{Z})$ es libre de torsión, de manera que $H^{**}(X;\mathbb{Z})$ es un subanillo de $H^{**}(X;\mathbb{Q})$, no siempre es cierto que la imagen de ch está contenida en $H^{**}(X;\mathbb{Z})$. Por ejemplo, si $L \in K(\mathbb{CP}^n)$ es el haz de líneas canónico, entonces $ch(L) = 1 + c + c^2/2 + ... + c^n/n!$ donde $c = c_1(L)$ genera $H^2(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z})$, por lo tanto c^k genera $H^{2k}(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z})$ para $k \leq n$.

Por otro lado, se puede probar que para complejos celulares finitos X con punto básico, la aplicación $K^*(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H^{**}(X;\mathbb{Q})$ inducida por el carácter de Chern es un isomorfismo. Por lo tanto, para estos espacios, el carácter de Chern nos dice que las únicas posibles diferencias entre los grupos $K^*(X)$ y $H^{**}(X;\mathbb{Z})$ viven en sus subgrupos de torsión (ver [7]).

Hasta ahora tenemos definido el carácter de chern $K^0(X) \longrightarrow H^{par}(X;\mathbb{Q})$, pero mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{K}^0(SX) & \xrightarrow{ch} & \widetilde{H}^{par}(SX;\mathbb{Q}) \\
\approx \big\downarrow & & \big\downarrow \approx \\
K^1(X) & \xrightarrow{ch} & H^{impar}(X;\mathbb{Q})
\end{array}$$

podemos extender a dimensiones impares.

3.2. Equivalencia

Hemos definido el Invariante de Hopf $H(f)$ en términos cohomológicos y el Invariante de Hopf $h(f)$ mediante elementos de K-Teoría, en el primero y segundo capítulo respectivamente. El objetivo de esta sección es demostrar que realmente estos dos invariantes numéricos son iguales, por lo tanto, podremos referirnos a éste sin ambigüedades como **el** Invariante de Hopf. La herramienta principal que usaremos para probar tal equivalencia será el carácter de Chern desarrollado en la sección anterior.

Como veremos a continuación, con toda la maquinaria que hemos desarrollado, la demostración de dicho resultado puede parecer insignificante, pues es corta y para nada abrumadora. Lo realmente impresionante son las consecuencias que podemos deducir, como veremos al final del capítulo.

Primeramente, para fijar la notación que usaremos durante la demostración del teorema en esta sección, recordemos cómo se definen $H(f)$ y $h(f)$ para una aplicación $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$, $n \geq 1$:

- Consideremos la inclusión $\mathbb{S}^n \hookrightarrow C_f$ y la proyección sobre el cociente $C_f \longrightarrow C_f/\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^n$. A nivel de cohomología, se tienen isomorfismos inducidos

$$i^* : H^n(C_f) \xrightarrow{\approx} H^n(\mathbb{S}^n) \text{ y } q^* : H^{2n}(\mathbb{S}^{2n}) \xrightarrow{\approx} H^{2n}(C_f)$$

  (para mas detalles ver la sección 1.3). Si $\sigma \in H^n(C_f)$, $\sigma \neq 0$, correspondiente a la clase de orientación de $\mathbb{S}^n$ y $\tau \in H^{2n}(C_f)$, $\tau \neq 0$, correspondiente a la clase de orientación de $\mathbb{S}^{2n}$, entonces se define el *Invariante de Hopf en cohomología* de f como el entero $H(f)$ tal que

$$\sigma^2 = H(f)\,\tau.$$

- Por otro lado, considerando nuevamente la sucesión $\mathbb{S}^n \overset{i}{\hookrightarrow} C_f \xrightarrow{q} \mathbb{S}^{2n}$, a nivel de K-Teoría obtenemos una sucesión exacta

$$\widetilde{K}(\mathbb{S}^{2n}) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}(C_f) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0$$

  (para mas detalles ver la sección 2.3). Si b_{2n} y b_n denotan a generadores de $\widetilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$ y $\widetilde{K}(\mathbb{S}^n)$ respectivamente, $\alpha := q^*(b_{2n})$ y β es algún elemento en $\widetilde{K}(C_f)$ tal que $i^*(\beta) = b_n$, entonces se define el *Invariante de Hopf en K-Teoría* de f como el entero $h(f)$ tal que

$$\beta^2 = h(f)\,\alpha.$$

Teorema 3.3 (Equivalencia) *El Invariante de Hopf en cohomología es igual al Invariante de Hopf en K-Teoría.*

Demostración. Sea $n \geq 1$ y consideremos una aplicación fija $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n}$. Debido a las aplicaciones inducidas por la inclusión $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow C_f$ y la proyección sobre el cociente $q : C_f \longrightarrow C_f/\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^{2n}$ en cohomología y en K-Teoría, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{K}(\mathbb{S}^{2n}) \arrow[r, "q^*"] \arrow[d, "ch"'] & \widetilde{K}(C_f) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "ch"'] & \widetilde{K}(\mathbb{S}^n) \arrow[r] \arrow[d, "ch"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{H}^*(\mathbb{S}^{2n};\mathbb{Q}) \arrow[r, "q^*"] & \widetilde{H}^*(C_f;\mathbb{Q}) \arrow[r, "i^*"] & \widetilde{H}^*(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(el renglón superior es exacto porque $\widetilde{K}^1(\mathbb{S}^n) = 0$ y $\widetilde{K}^1(\mathbb{S}^{2n}) = 0$).

Las aplicaciones verticales en el diagrama son monomorfismos porque son isomorfismos racionales. Luego, por el lema en la sección anterior se tiene que los generadores $b_n \in \widetilde{K}(\mathbb{S}^n)$ y $b_{2n} \in \widetilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$ son mandados mediante el carácter de Chern a generadores de $H^n(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z})$ y $H^{2n}(\mathbb{S}^{2n};\mathbb{Z})$. Por lo tanto, el diagrama implica que salvo signo, $ch(\alpha) = \tau$ y $ch(\beta) = \sigma + q\tau$ para algún racional q. Luego $\tau^2 = 0, \sigma\tau = 0$ y ch es un homomorfismo de anillos, entonces

$$\begin{aligned} ch\left(\beta^2\right) &= ch(\beta)\, ch(\beta) \\ &= (\sigma + q\tau)(\sigma + q\tau) \\ &= H(f)\,\tau. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la relación $\beta^2 = h(f)\,\alpha$ se sigue que

$$\begin{aligned} ch\left(\beta^2\right) &= h(f)\, ch(\alpha) \\ &= h(f)\,\tau \end{aligned}$$

por lo tanto, concluimos que $H(f) = h(f)$. ■

3.3. Teorema de Adams

En esta sección presentaremos el resultado principal de este trabajo "el **Teorema de Adams sobre la no existencia de elementos de Invariante de Hopf uno**".

Puesto que ya hemos probado que las dos definiciones que tenemos del Invariante de Hopf coinciden, en adelante nos concentraremos exclusivamente en la definición dada en términos de K-Teoría. Y aunque pretendemos demostrar el teorema mediante el uso de los elementos de K-Teoría, todavía necesitaremos introducir cierta estructura adicional, a saber, ciertos homomorfismos llamados operaciones de Adams.

Se puede probar que por ejemplo, existen aplicaciones $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ de Invariante de Hopf 2 para todo par n. Mas aún, para n par se pueden conseguir aplicaciones cuyo Invariante de Hopf sea cualquier número par. En contraste *las aplicaciones con Invariante de Hopf* 1 *son más escasas.* El Teorema de Adams nos indica que los únicos valores de n para los cuales una aplicación f tiene invariante de Hopf 1 son $n = 1, 2, 4$ y 8. Éste es llamado el problema de la no existencia de elementos de Invariante de Hopf 1.

Antes de empezar a analizar dicho problema, necesitamos los siguientes preliminares (ver [13]): Para cada entero $k \neq 0$ existen homomorfismos naturales de anillos $\psi^k : K(X) \longrightarrow K(X)$ llamados **operaciones de Adams**, que tienen las siguientes propiedades: Para todo $x, y \in K(X)$

1. $\psi^1 = id$ y ψ^{-1} es inducida por conjugación compleja de haces.
2. $\psi^k(xy) = \psi^k(x)\,\psi^k(y)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.
3. $\psi^k\psi^l(x) = \psi^{kl}(x) = \psi^l\psi^k(x)$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$.
4. $\psi^p(x) \equiv x^p \bmod p$ para cualquier primo p.
5. Si $b \in \widetilde{K}^0(\mathbb{S}^{2n})$ es un generador, entonces $\psi^k(b) = k^n b$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Con la ayuda de las operaciones de Adams, la versión en K-Teoría del Invariante de Hopf y algunos argumentos de teoría de números, demostraremos a continuación el Teorema de Adams.

Teorema 3.4 (Adams) *Si $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es tal que $h(f) = \pm 1$, entonces $n = 1, 2, 4$ u 8.*

Demostración. Notemos que por definición del Invariante de Hopf n no puede ser impar. Por lo tanto, supongamos que n es de la forma $n = 2m$. Conservando la notación de la sección anterior, sean b_n y b_{2n} los generadores de $\widetilde{K}(\mathbb{S}^n)$ y $\widetilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$ respectivamente, y sean $\{\alpha, \beta\} \subset \widetilde{K}(C_f)$ tales que $\alpha = q^*(b_{2n})$, $i^*(\beta) = b_n$ y $\beta^2 = h(f)\,\alpha$.

Como $\psi^k(b_{2n}) = k^{2m} b_{2n}$ y $\psi^k(b_n) = k^m b_n$ (por la última propiedad enumerada de las operaciones de Adams) usando naturalidad tenemos que

$$\begin{aligned} \psi^k(\alpha) &= q^*\left(\psi^k(b_{2n})\right) \\ &= q^*\left(k^{2m} b_{2n}\right) \\ &= k^{2m}\alpha \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} i^*\left(\psi^k(\beta) - k^m\beta\right) &= \psi^k(b_n) - k^m b_n \\ &= k^m b_n - k^m b_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\psi^k(\beta) = k^{2m}\beta + \mu_k\alpha \text{ para algún } \mu_k \in \mathbb{Z}.$$

Luego, como $\psi^2(\beta) \equiv \beta^2 \bmod 2 \equiv h(f)\,\alpha \bmod 2$

$$\psi^2(\beta) = 2^m\beta + \mu_2\alpha \equiv h(f)\,\alpha \bmod 2$$

por lo tanto, μ_2 y $h(f)$ tienen la misma paridad, y concluimos que μ_2 es impar.

Ahora, para cualquier k fijo

$$\begin{aligned}\psi^k\psi^2(\beta) &= \psi^k(2^m\beta + \mu_2\alpha)\\ &= 2^m(k^m\beta + \mu_k\alpha) + \mu_2 k^{2m}\alpha\\ &= k^m 2^m\beta + \left(2^m\mu_k + k^{2m}\mu_2\right)\alpha\end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned}\psi^2\psi^k(\beta) &= \psi^2(k^m\beta + \mu_k\alpha)\\ &= k^m 2^m\beta + \left(k^m\mu_2 + 2^{2m}\mu_k\right)\alpha.\end{aligned}$$

Puesto que $\psi^k\psi^2 = \psi^2\psi^k$ se tiene

$$k^m\mu_2 + 2^{2m}\mu_k = 2^m\mu_k + k^{2m}\mu_2$$

entonces

$$2^m(2^m - 1)\,\mu_k = k^m(k^m - 1)\,\mu_2.$$

Por lo tanto, como μ_2 es impar, esto implica que 2^m divide $k^m - 1$ para todo impar k (en particular esto se cumple para $m = 1$).

Considerando el caso $k = 3$, se tiene que $2^m(2^m - 1)\,\mu_k = 3^m(3^m - 1)\,\mu_2$ y $(3^m - 1)$ es divisible por 2^m. Sea $m = 2^j l$ donde l es impar. Entonces

$$3^m - 1 = \left(3^{2^j}\right)^l - 1\left(3^{2^j} - 1\right)\left(\left(3^{2^j}\right)^{l-1} + \left(3^{2^j}\right)^{l-2} + \cdots + 1\right).$$

El segundo factor tiene una cantidad impar de sumandos y, por lo tanto, es impar. Así, el número $3^{2^j} - 1$ es divisible por 2^m y por lo tanto es divisible por 2^{2^k}. Por otro lado,

$$3^{2^j} - 1 = \left(3^{2^{j-1}} + 1\right)\left(3^{2^{j-2}} + 1\right)\cdots(3+1)(3-1). \tag{3.1}$$

El número $3^{2^j} + 1$ es divisible por 2 pero no divisible por 4. Entonces por (3.1), $3^{2^j} - 1$ es divisible por 2^{k+2} pero no divisible por 2^{k+3}. Por lo tanto

$$2^j l \leq j + 2.$$

Para $l = 1$ esta desigualdad se cumple cuando $j = 0, 1, 2$; para $l \geq 3$ no tiene solución. Por lo tanto, concluimos que $m = 1, 2$ o 4. ■

3.4. Aplicación

La importancia del Teorema de Adams se refleja, por ejemplo, en que existen algunas cuestiones cuya solución se reduce a la existencia de aplicaciones de Invariante de Hopf 1. Algunas de estas cuestiones son las siguientes:

- ¿Qué espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ poseen estructura de álgebra de división, es decir, cuándo existe una multiplicación $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sin divisores de cero?
- ¿Cuáles esferas son paralelizables, o lo que es equivalente, cuándo su haz tangente es trivial?
- ¿Cuáles esferas poseen estructura de H-espacio, o sea, cuándo existe una multiplicación continua $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ con identidad por ambos lados?

Algunas respuestas parciales a las interrogantes anteriores son: para los valores $n = 1, 2, 4, 8$, podemos darle a $\mathbb{R}^n$ una estructura de álgebra de división mediante las identificaciones naturales $\mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}$ con la multiplicación canónica de números reales; $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ y multiplicación compleja; $\mathbb{R}^4 \approx \mathbb{H}$ con multiplicación de cuaterniones; $\mathbb{R}^8 \approx \mathbb{O}$ con multiplicación de octonianos. Mas aún, por restricción de estos productos a las respectivas esferas unitarias, esto es, $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ y $\mathbb{S}^7 \subset \mathbb{R}^8$, concluimos que estas esferas son H-espacios. Además, puesto que la condición de ser H-espacio es mas débil que la de ser un grupo topológico, se tiene que $\mathbb{S}^0$ también es un H-espacio. Por otro lado, de una discusión en la sección 2.1 (en la que por cierto hicimos uso de la estructura multiplicativa de $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$) se tiene que $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$ tienen haz tangente trivial.

Así, tenemos ejemplos de espacios euclidianos que poseen estructura de álgebra de división, tenemos ejemplos de esferas cuyo haz tangente es trivial y las cuales pueden ser dotadas de una estructura de H-espacio. Sin embargo ¿son los únicos ejemplos?. La respuesta tiene su esencia basada en el Teorema de Adams, porque de hecho las cuestiones enumeradas anteriormente se reducen al problema de la existencia de aplicaciones de Invariante de Hopf uno. Por lo tanto, del Teorema de Adams concluimos que tales enunciados son válidos sólo cuando $n = 1, 2, 4$ u 8.

Teorema 3.5 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*
(a) $n = 1, 2, 4$ *u* 8.
(b) $\mathbb{R}^n$ *es un álgebra de división.*
(c) $\mathbb{S}^{n-1}$ *es paralelizable.*
(d) $\mathbb{S}^{n-1}$ *es un* H*-espacio.*
(e) Existe una aplicación $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ *con Invariante de Hopf* 1.

Demostración. (a) $\Longrightarrow$ (b) Como ya habíamos mencionado anteriormente, si $n = 1, 2, 4$ u 8 entonces mediante las identificaciones $\mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ los números complejos, $\mathbb{R}^4 \approx \mathbb{H}$ los cuaterniones y $\mathbb{R}^8 \approx \mathbb{O}$ los octonianos, concluimos que $\mathbb{R}^n$ es un álgebra de división. ▲

(b) $\Longrightarrow$ **(c)** Supongamos ahora que $\mathbb{R}^n$ es un álgebra de división y consideremos una base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $e_1 = 1$. Para cada $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ fijo definamos

$$x_i := xe_i - \frac{(x, xe_i)}{\|x\|^2}x, \quad i > 1$$

entonces $x \cdot x_i = 0$. Luego, como $-\frac{(x,xe_i)}{\|x\|^2}, e_2, ..., e_n$ son linealmente independientes, también $-\frac{(x,xe_i)}{\|x\|^2}x, xe_2, ..., xe_n$ son linealmente independientes. Por lo tanto los x_i son linealmente independientes. Así la aplicación $x \longrightarrow x + x_i$ nos proporciona $n-1$ campos vectoriales linealmente independientes, y por la caracterización que tenemos de haces vectoriales triviales (ver sección 2.1) concluimos que $\mathbb{S}^{n-1}$ es paralelizable. ▲

(c) $\Longrightarrow$ **(d)** Supongamos ahora que la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ es paralelizable con campos vectoriales tangentes $v_1, ..., v_{n-1}$ los cuales son linealmente independientes en cada punto de $\mathbb{S}^{n-1}$. Por el proceso de Gram-Schmidt podemos hacer los vectores $x, v_1(x), ..., v_{n-1}(x)$ ortonormales para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. En particular para e_1 el primer vector de la base estándar en $\mathbb{R}^n$, podemos suponer que los vectores $v_1(e_1), ..., v_{n-1}(e_1)$ son los vectores $e_2, ..., e_n$ de la base estándar, cambiando el signo de v_{n-1} si fuera necesario para conservar la orientación, deformando entonces los campos vectoriales cerca de e_1. Sea $\alpha_x \in SO(n)$ que manda la base estándar a $x, v_1(x), ..., v_{n-1}(x)$. Entonces la aplicación $(x, y) \longmapsto \alpha_x(y)$ define una estructura de H-espacio sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ con elemento identidad el vector e_1 ya que α_{e_1} es la aplicación identidad y $\alpha_x(e_1) = x$ para todo x. ▲

(d) $\Longrightarrow$ **(e)** En primer lugar presentaremos la **construcción de Hopf**, que le asocia a cada aplicación $\phi : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ una aplicación $H_\phi : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$. Para definir esto, consideremos los homeomorfismos $\mathbb{S}^{2n-1} \cong \partial(\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n) = \partial\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \bigcup \mathbb{D}^n \times \partial\mathbb{D}^n$ y $\mathbb{S}^n$ como la unión de dos discos $\mathbb{D}^n_+$ y $\mathbb{D}^n_-$ con sus fronteras identificadas. Entonces definimos H_ϕ como

$$H_\phi(x, y) = \begin{cases} |y|\,\phi\left(x, \frac{y}{|y|}\right) \in \mathbb{D}^n_+ & \text{si } (x, y) \in \partial\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \\ |x|\,\phi\left(\frac{x}{|x|}, y\right) \in \mathbb{D}^n_- & \text{si } (x, y) \in \mathbb{D}^n \times \partial\mathbb{D}^n \end{cases}.$$

Notemos que H_ϕ está bien definida y es continua, aún cuando $|x|$ o $|y|$ es cero, y H_ϕ coincide con ϕ en $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}$. Probaremos que H_ϕ tiene Invariante de Hopf uno siempre que ϕ es una multiplicación de H-espacio, pero primero notemos que $\mathbb{S}^{2n}$ no puede ser H-espacio, $n > 0$.

Supongamos que $\mathbb{S}^{2n-1}$ es H-espacio con multiplicación $\phi : \mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$. Sea $e \in \mathbb{S}^{2n-1}$ el elemento identidad para la multiplicación de H-espacio. En vista de la definición de H_ϕ es natural ver la adjunción de la $4n$-célula de C_{H_ϕ} como una aplicación $\left(\mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{D}^{2n}, \partial\left(\mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{D}^{2n}\right)\right) \longrightarrow \left(C_{H_\phi}, \mathbb{S}^{2n}\right)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}(C_f) \otimes \tilde{K}(C_f) \arrow[r] & \tilde{K}(C_f) \\
\tilde{K}(C_f, D^{2n}_+) \otimes \tilde{K}(C_f, D^{2n}_-) \arrow[u, "\approx"'] \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^* \otimes \Phi^*"'] & \tilde{K}(C_f, S^{2n}) \arrow[u] \arrow[d, "\approx"] \\
\tilde{K}(D^{2n} \times D^{2n}, \partial D^{2n} \times D^{2n}) \otimes \tilde{K}(D^{2n} \times D^{2n}, D^{2n} \times \partial D^{2n}) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & \tilde{K}(D^{2n} \times D^{2n}, \partial(D^{2n} \times D^{2n})) \\
\tilde{K}(D^{2n} \times \{e\}, \partial D^{2n} \times \{e\}) \otimes \tilde{K}(\{e\} \times D^{2n}, \{e\} \times \partial D^{2n}) \arrow[ur, "\approx"'] &
\end{tikzcd}$$

donde las aplicaciones horizontales son las aplicaciones producto; la aplicación diagonal es el producto externo, equivalente al producto externo $\widetilde{K}\left(\mathbb{S}^{2n}\right) \times \widetilde{K}\left(\mathbb{S}^{2n}\right) \longrightarrow \widetilde{K}\left(\mathbb{S}^{4n}\right)$, el cual es un isomorfismo por ser iteración del isomorfismo de periodicidad de Bott. Por la definición de H-espacio y la de H_ϕ, la aplicación Φ se restringe a un homeomorfismo de $\mathbb{D}^{2n} \times \{e\}$ en $\mathbb{D}^{2n}_-$ y de $\{e\} \times \mathbb{D}^{2n}$ en $\mathbb{D}^{2n}_+$. Se sigue que el elemento $\beta \times \beta$ en el grupo superior izquierdo va al generador del grupo del renglón inferior del diagrama, ya que β se restringe a un generador de $\widetilde{K}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)$ por definición. Por lo tanto por conmutatividad del diagrama, la aplicación producto en el renglón superior manda $\beta \times \beta$ a $\pm\alpha$ ya que α se definió como la imagen del generador de $\widetilde{K}\left(C_{H_\phi}, \mathbb{S}^{2n}\right)$. Así tenemos que $\beta^2 = \pm\alpha$, lo cual nos dice que el Invariante de Hopf de H_ϕ es ± 1. ▲

(e) $\Longrightarrow$ **(f)** Esta implicación es el Teorema de Adams de la sección anterior. ▲

■

3.5. Interpretación Geométrica del Invariante de Hopf

El objetivo de esta sección es presentar una descripción geométrica del Invariante de Hopf como número de enlace, tal y como lo definió originalmente H. Hopf en 1931-1935. La idea es definir la "intersección" de clases de homología, y en particular cuando éstas son clases fundamentales, poder interpretar este concepto con la intersección geométrica de subvariedades. Introduciremos primeramente operaciones funcionales y reescribiremos el Invariante de Hopf en estos nuevos términos. Posteriormente, para finalizar este trabajo, probaremos que efectivamente la definición como número de enlace coincide con las definiciones que ya hemos estudiado anteriormente.

En 1949 Steenrod introdujo nuevas operaciones, los productos copa funcionales, mediante los cuales podemos describir $H(f)$. Si $s^n \in H^n(\mathbb{S}^n)$ es el generador, éste determina un elemento $s^n \smile_f s^n \in H^{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1})$ llamado el producto copa funcional de s^n con s^n, el cual coincide salvo signo con $H(f) \cdot s^{2n-1}$. A continuación veremos cómo se puede calcular el producto copa funcional en términos de cocadenas.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación dada. El **cilindro** de f es el espacio de adjunción $\mathrm{Cil}_f := Y \bigcup_{f_1} X \times I$ donde $I = [0,1]$ y $f_1 : X \times \{1\} \longrightarrow Y$ se define como $f_1(x,1) = f(x)$. Tenemos inclusiones naturales

$$j : X \hookrightarrow \mathrm{Cil}_f \quad \text{y} \quad l : Y \hookrightarrow \mathrm{Cil}_f$$

y una proyección canónica

$$p : \mathrm{Cil}_f \longrightarrow Y$$

tal que $p(\langle t, x\rangle) = f(x)$ y $p(y) = y$. Además, podemos obtener el cono de f como el espacio cociente $C_f = \mathrm{Cil}_f / X$.

En particular

$$p \circ j = f, p \circ l = 1 \ \text{ y } \ l \circ p \simeq 1$$

de modo que Cil_f y Y son del mismo tipo de homotopía.

Consideremos las inclusiones $j : X \hookrightarrow \mathrm{Cil}_f, a : (\mathrm{Cil}_f, \varnothing) \hookrightarrow (\mathrm{Cil}_f, X)$ y la sucesión exacta larga de grupos de cohomología asociada a la pareja (Cil_f, X)

$$\cdots \longrightarrow H^n(\mathrm{Cil}_f, X) \xrightarrow{a^*} H^n(\mathrm{Cil}_f) \xrightarrow{j^*} H^n(X) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(\mathrm{Cil}_f, X) \longrightarrow \cdots$$

y consideremos la porción exacta

$$H^{p-1}(\mathrm{Cil}_f) \xrightarrow{j^*} H^{p-1}(X) \xrightarrow{\delta} H^p(\mathrm{Cil}_f, X) \xrightarrow{a^*} H^p(\mathrm{Cil}_f) \xrightarrow{f^*} H^p(X).$$

de la sucesión anterior. Como Cil_f y Y son del mismo tipo de homotopía, se tienen isomorfismos $p^* : H^n(Y) \xrightarrow{\approx} H^n(\mathrm{Cil}_f)$ para cada n. Luego, como $p \circ j = f$ entonces $j^* \circ p^* = f^*$ y la siguiente sucesión es exacta

$$H^{p-1}(Y) \xrightarrow{f^*} H^{p-1}(X) \xrightarrow{\delta} H^p(\mathrm{Cil}_f, X) \xrightarrow{k^*} H^p(Y) \xrightarrow{f^*} H^p(X)$$

donde $k^* := (p^*)^{-1} \circ a^*$ es una inyección.

Sea $v \in H^q(Y)$ y consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
H^{p-1}(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & H^{p-1}(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\lambda_2"'] & H^p(\mathrm{Cil}_f, X) \arrow[r, "k^*"] \arrow[d, "\lambda_3"'] & H^p(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & H^p(X) \arrow[d, "\lambda_2"'] \\
H^{p+q-1}(Y) \arrow[r, "f^*"] & H^{p+q-1}(X) \arrow[r, "\delta"] & H^{p+q}(\mathrm{Cil}_f, X) \arrow[r, "k^*"] & H^{p+q}(Y) \arrow[r, "f^*"] & H^{p+q}(X)
\end{tikzcd}$$

donde los λ_i están determinados por el producto copa con v como sigue:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(-) &= - \smile v \\
\lambda_2(-) &= - \smile f^*(v) \\
\lambda_3(-) &= - \smile p^*(v).
\end{aligned}$$

Si $u \in H^p(Y)$ es tal que $f^*(u) = 0$ y $\lambda_1(u) = u \smile v = 0$ entonces u y v determinan un elemento $u \smile_f v$ del grupo cociente $H^{p+q-1}(X) / f^* H^{p+q-1}(Y) + H^{p-1}(X) \smile f^* v$,

$$\begin{tikzcd}
 & H^p(\mathrm{Cil}_f, X) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_3"'] & H^p(Y) \ni u \\
u \smile_f v \in H^{p+q-1}(X) \arrow[r, "\delta"] & H^{p+q}(\mathrm{Cil}_f, X) &
\end{tikzcd}$$

Definición 3.6 *$u \smile_f v$ es llamado el* ***producto copa funcional*** *de u y v.*

En particular consideremos $X = \mathbb{S}^{2n-1}, Y = \mathbb{S}^n$ y $p = q = n$ $(n \geq 1)$. Entonces $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n, v \in H^n(\mathbb{S}^n)$ y el diagrama conmutativo con renglones exactos viene a ser

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & 0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\lambda_3"'] & H^n(\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1}) \arrow[r, "k^*"] \arrow[d, "\lambda_3"'] & H^n(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & 0 \arrow[d, "\lambda_2"'] \\
0 \arrow[r, "f^*"] & H^{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1}) \arrow[r, "\delta"] & H^{2n}(\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1}) \arrow[r, "k^*"] & 0 \arrow[r, "f^*"] & 0
\end{tikzcd}$$

y k^*, δ resultan ser isomorfismos. Notemos que si $u \in H^n(\mathbb{S}^n)$ entonces $f^*(u) = 0$ y $\lambda_1(u) = u \smile v = 0$, además, en este caso el grupo $H^{p+q-1}(X)/f^*H^{p+q-1}(Y) + H^{p-1}(X) \smile f^*v$ viene a ser $H^{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1})$, por lo tanto $u \smile_f v$ es el elemento bien definido

$$u \smile_f v = \delta^{-1}\left((k^*)^{-1} u \smile (p^*) v\right)$$

de $H^{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1})$. Como en este caso $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ podemos calcular el Invariante de Hopf de esta aplicación.

$\mathbb{S}^n$ tiene una orientación conocida, de modo que en adelante denotaremos por $s_n \in H_n(\mathbb{S}^n)$ a su clase de orientación, y denotaremos por $s^n \in H^n(\mathbb{S}^n)$ al dual de Kronecker de s_n correspondiente a la clase de orientación de $\mathbb{S}^n$.

Lema 3.7 *Sea* $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ *con* $n \geq 1$. *Si* $H(f)$ *es el invariante de Hopf de* f *entonces*

$$s^n \smile_f s^n = H(f) \cdot s^{2n-1}$$

o bien, en términos del índice de Kronecker

$$\langle s^n \smile_f s^n, s_{2n-1} \rangle = H(f).$$

Demostración. Recordemos que de las inclusiones $\mathbb{S}^n \hookrightarrow C_f$ y $(C_f, \varnothing) \longrightarrow (C_f, \mathbb{S}^{2n})$ y de la sucesión exacta asociada a la pareja entonces tenemos isomorfismos $(C_f, \mathbb{S}^{2n})$ obtenemos isomorfismos

$$i^* : H^n(C_f) \xrightarrow{\approx} H^n(\mathbb{S}^n) \text{ y } q^* : H^{2n}\left(\mathbb{S}^{2n}\right) \xrightarrow{\approx} H^{2n}(C_f)$$

y entonces el Invariante de Hopf $H(f)$ se define mediante la identidad

$$\sigma^2 = H(f)\tau$$

donde $\sigma \in H^n(C_f)$ corresponde a la clase de orientación de $\mathbb{S}^n$ y $\tau \in H^{2n}(C_f)$ a la clase de orientación de $\mathbb{S}^{2n}$.

Sea $\pi : (\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1}) \longrightarrow (C_f, *)$ la proyección. Entonces

$$\begin{aligned} H(f)\pi^*(\tau) &= \pi^*\left(\sigma^2\right) \\ &= \pi^*\left((i^*)^{-1} s^n \smile (i^*)^{-1} s^n\right) \\ &= \pi^*(i^*)^{-1} s^n \smile \pi^*(i^*)^{-1} s^n \end{aligned}$$

pero notemos que $\pi^* : \widetilde{H}^n(C_f) \longrightarrow H^n(\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1})$ y $k^* : H^n(\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1}) \longrightarrow H^n(\mathbb{S}^n)$ son isomorfismos y $k^* \circ \pi^* = i^*$. Además, como en particular k^* es un isomorfismo y $k^* \circ p^* = 1$ entonces

$$H(f)\pi^*(\tau) = (k^*)^{-1} s^n \smile (k^*)^{-1} s^n = p^* s^n \smile p^* s^n.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} s^n \smile_f s^n &= \delta^{-1}\left((k^*)^{-1} s^n \smile (p^*) s^n\right) \\ &= \delta^{-1}(p^* s^n \smile p^* s^n) \\ &= \delta^{-1}(H(f)\,\pi^*(\tau)) \\ &= H(f)\,\delta^{-1}(\pi^*(\tau)) \\ &= H(f)\, s^{2n-1}. \end{aligned}$$

Si s_{2n-1} representa la clase fundamental de $\mathbb{S}^{2n-1}$ entonces $\langle s^{2n-1}, s_{2n-1}\rangle = 1$ y se sigue que $\langle s^n \smile_f s^n, s_{2n-1}\rangle = H(f)$. ∎

Ahora veremos como calcular $s^n \smile_f s^n$ en términos de n-cocadenas. Para esto, consideremos una cocadena $\underline{s^n} \in S^n(\mathbb{S}^n)$ de $\mathbb{S}^n$ que representa a s^n, esto es,

$$s^n = [\underline{s^n}].$$

Como $s^n \smile s^n = 0$ existe una cocadena $A \in S^{2n-1}(\mathbb{S}^n)$ tal que la cofrontera $\delta A = \underline{s^n} \smile \underline{s^n}$. Pero $S^{2n-1}(\mathbb{S}^n) = 0$, por lo que $A = 0$. Por otro lado, como $f^*(s^n) = 0$, existe una cocadena $B \in S^{n-1}(\mathbb{S}^{2n-1})$ tal que

$$\delta B = f^{\#}(\underline{s^n}) \tag{3.2}$$

(donde $f^{\#}$ denota al homomorfismo a nivel de cocadenas inducido por f).

Notemos que $B \smile f^{\#}(\underline{s^n}) \in S^{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1})$, entonces recordando la fórmula para la cofrontera del producto copa tenemos que

$$\begin{aligned} \delta\left(B \smile f^{\#}(\underline{s^n})\right) &= \delta B \smile f^{\#}(\underline{s^n}) + (-1)^{n-1} B \smile \delta\left(f^{\#}(\underline{s^n})\right) \\ &= \delta B \smile f^{\#}(\underline{s^n}) + (-1)^{n-1} B \smile \delta\delta B \\ &= \delta B \smile f^{\#}(\underline{s^n}) \\ &= f^{\#}(\underline{s^n}) \smile f^{\#}(\underline{s^n}) \\ &= f^{\#}(\underline{s^n} \smile \underline{s^n}) \\ &= f^{\#}(\delta A) \\ &= 0 \end{aligned}$$

de modo que $Z := B \smile f^{\#}(\underline{s^n})$ es un cociclo de $\mathbb{S}^{2n-1}$.

Lema 3.8 *La clase de cohomología de Z es un representante de $s^n \smile_f s^n$.*

Demostración. En primer lugar, notemos que si $j : \mathbb{S}^{2n-1} \hookrightarrow \mathrm{Cil}_f, l : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathrm{Cil}_f, p : \mathrm{Cil}_f \longrightarrow \mathbb{S}^n$ son las aplicaciones que derivamos de la definición del cilindro de f entonces

$$p \circ j = f \ \ y \ \ p \circ l = 1.$$

En particular, a nivel de cocadenas, tenemos que

$$\left(j^{\#}p^{\#}\right)(\underline{s^n}) = f^{\#}(\underline{s^n}) = \delta B.$$

Por otro lado, la sucesión $\mathbb{S}^{2n-1} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathrm{Cil}_f \xrightarrow{q} \mathrm{Cil}_f / \mathbb{S}^{2n-1}$ induce una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow S^{n-1}\left(\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1}\right) \xrightarrow{q^{\#}} S^{n-1}(\mathrm{Cil}) \xrightarrow{j^{\#}} S^{n-1}\left(\mathbb{S}^{2n-1}\right) \longrightarrow 0$$

y entonces $j^{\#}$ es una aplicación suprayectiva, por lo que existe $C \in S^{n-1}(\mathrm{Cil}_f)$ tal que

$$j^{\#}(C) = B.$$

Consideremos la cocadena $p^{\#}(\underline{s^n}) - \delta C \in S^n(\mathrm{Cil}_f)$ entonces

$$\begin{aligned} j^{\#}\left(p^{\#}(\underline{s^n}) - \delta C\right) &= j^{\#}\left(p^{\#}(\underline{s^n})\right) - j^{\#}(\delta C) \\ &= \delta B - \delta\left(j^{\#}C\right) \\ &= \delta B - \delta B \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $p^{\#}(\underline{s^n}) - \delta C$ es un cociclo relativo de $(\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1})$. Aún mas,

$$\begin{aligned} l^{\#}\left(p^{\#}(\underline{s^n}) - \delta C\right) &= l^{\#}\left(p^{\#}(\underline{s^n})\right) - l^{\#}(\delta C) \\ &= 1^{\#}(\underline{s^n}) - \delta\left(l^{\#}C\right) \\ &= \underline{s^n} - \delta\left(l^{\#}C\right) \end{aligned}$$

por lo que $l^{\#}\left(p^{\#}(\underline{s^n}) - \delta C\right) \sim \underline{s^n}$ en $\mathbb{S}^n$. De aquí concluimos que si z es la clase de cohomología de $p^{\#}(\underline{s^n}) - \delta C$, entonces

$$l^*(z) = s^n.$$

Ahora, como

$$\begin{aligned} j^{\#}\left(\left(p^{\#}(\underline{s^n}) - \delta C\right) \smile p^{\#}(\underline{s^n})\right) &= j^{\#}\left(p^{\#}(\underline{s^n}) - \delta C\right) \smile j^{\#}\left(p^{\#}(\underline{s^n})\right) \\ &= 0 \smile j^{\#}\left(p^{\#}(\underline{s^n})\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\left(p^{\#}\left(\underline{s^n}\right)-\delta C\right) \smile p^{\#}\left(\underline{s^n}\right) \in S^{2n}\left(\mathrm{Cil}_f\right)$ es un cociclo relativo de $\left(\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1}\right)$ que representa a $\lambda_3(z)=z \smile p^*\left(s^n\right)$.

Por otro lado, recordemos que el homomorfismo de conexión $\delta: H^{2n-1}\left(\mathbb{S}^{2n-1}\right) \longrightarrow H^{2n}\left(\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1}\right)$ se define a partir del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S^{2n}\left(\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1}\right) & \xrightarrow{q^{\#}} & S^{2n}\left(\mathrm{Cil}_f\right) & \xrightarrow{j^{\#}} & S^{2n}\left(\mathbb{S}^{2n-1}\right) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \delta \Big\uparrow & & \delta \Big\uparrow & & \delta \Big\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & S^{2n-1}\left(\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1}\right) & \xrightarrow{q^{\#}} & S^{2n-1}\left(\mathrm{Cil}_f\right) & \xrightarrow{j^{\#}} & S^{2n-1}\left(\mathbb{S}^{2n-1}\right) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

como sigue: dada una clase $\left[x''\right] \in H^{2n-1}\left(\mathbb{S}^{2n-1}\right)$ representada por el ciclo $x'' \in S^{2n-1}\left(\mathbb{S}^{2n-1}\right)$, nos fijamos en la cocadena $x \in S^{2n-1}\left(\mathrm{Cil}_f\right)$ tal que $j^{\#}(x)=x''$, y luego tomamos $x' \in S^{2n}\left(\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1}\right)$ tal que $q^{\#}\left(x'\right)=\delta x$. Entonces

$$\begin{aligned}
\delta: H^{2n-1}\left(\mathbb{S}^{2n-1}\right) & \longrightarrow H^{2n}\left(\mathrm{Cil}_f, \mathbb{S}^{2n-1}\right) \\
\left[x''\right] & \longmapsto \left[x'\right].
\end{aligned}$$

En particular notemos que

$$\begin{aligned}
\left(p^{\#}\left(\underline{s^n}\right)-\delta C\right) \smile p^{\#}\left(\underline{s^n}\right) &= \left(p^{\#}\left(\underline{s^n}\right) \smile p^{\#}\left(\underline{s^n}\right)\right)-\left(\delta C \smile p^{\#}\left(\underline{s^n}\right)\right) \\
&= p^{\#}\left(\underline{s^n} \smile \underline{s^n}\right)-\left[\delta C \smile p^{\#}\left(\underline{s^n}\right)+(-1)^{n-1} C \smile \delta p^{\#}\left(\underline{s^n}\right)\right] \\
&= p^{\#}(\delta A)-\delta\left(C \smile p^{\#}\left(\underline{s^n}\right)\right) \\
&= \delta\left[-\left(C \smile p^{\#}\left(\underline{s^n}\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

(pues $\delta\left(\underline{s^n}\right)=0$) y además

$$\begin{aligned}
j^{\#}\left(C \smile p^{\#}\left(\underline{s^n}\right)\right) &= j^{\#}(C) \smile j^{\#}\left(p^{\#}\left(\underline{s^n}\right)\right) \\
&= B \smile f^{\#}\left(\underline{s^n}\right) \\
&= Z
\end{aligned}$$

por lo tanto, δ manda la clase de homología de Z en $\lambda_3(z)=z \smile p^*\left(s^n\right)$, y se sigue nuestro resultado. ■

Para finalizar, utilizaremos la dualidad de Poincaré para dar una descripción homológica del producto copa funcional en el caso de una aplicación entre dos variedades, y así, posteriormente poder obtener una descripción geométrica del Invariante de Hopf como un número de enlace como lo hizo originalmente H. Hopf.

Daremos la definición original del Invariante de Hopf, y finalizaremos el capítulo mostrando que ésta coincide con la definición cohomológica del capitulo 1.

Recordemos que para una n-variedad M cerrada y orientada con clase fundamental $\mu_M \in H_n(M;\mathbb{Z})$, el Teorema de Dualidad de Poincaré nos dice que el homomorfismo

$$\frown \mu_M : H^q(M) \longrightarrow H_{n-q}(M)$$

dado por el producto capa con la clase fundamental, es un isomorfismo. En adelante, denotaremos al inverso de este isomorfismo por D, esto es, $D(a) \frown \mu_M = a$.

Definimos el **producto de intersección a nivel de cadenas**

$$\bullet : S_p(M) \otimes S_q(M) \longrightarrow S_{p+q-n}(M)$$

como la composición

$$S_p(M) \otimes S_q(M) \xrightarrow{1\otimes D} S_p(M) \otimes S^{n-q}(M) \longrightarrow S_{p+q-n}(M).$$

Si $a \in S_p(M), b \in S_q(M)$ entonces (ver [16])

$$\partial(a \bullet b) = \pm\partial(a) \bullet b \pm a \bullet \partial(b) \tag{3.3}$$

donde los signos dependen sólo de p y q. Luego, podemos extender al **producto de intersección de clases de homología**

$$\bullet : H_p(M) \otimes H_q(M) \longrightarrow H_{p+q-n}(M)$$

se define como la composición

$$H_p(M) \otimes H_q(M) \longrightarrow H_p(M) \otimes H^{n-q}(M) \longrightarrow H_{p+q-n}(M)$$

donde la primera aplicación es inducida por el inverso del isomorfismo en la dualidad de Poincaré y la segunda por el producto capa, tal que

$$u \bullet v = D(v) \frown u.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} u \bullet v &= D(v) \frown u \\ &= D(v) \frown (D(u) \frown \mu_M) \\ &= (D(v) \smile D(u)) \frown \mu_M \\ &= D^{-1}(D(v) \smile D(u)) \end{aligned}$$

y entonces

$$D(u \bullet v) = D(v) \smile D(u).$$

Además:

- $u \bullet v = (-1)^{(n-\deg u)(n-\deg v)} v \bullet u$.
- $u \bullet (v \bullet w) = (u \bullet v) \bullet w$.

Por otro lado, consideremos una 0-cadena c sobre el espacio X. Entonces c es una suma formal $\sum_x n_x x$ sobre puntos $x \in X$, donde $n_x = 0$ excepto por un número finito de x. Sea $\varepsilon : S^0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ el homomorfismo tal que $\varepsilon(c) := \sum_x n_x$. Tanto ε como el inducido $\varepsilon_* : H_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ son llamados *homomorfismos de aumentación*, y en particular satisface que si $\deg \phi = \deg \sigma$ entonces

$$\varepsilon(\phi \frown \sigma) = \langle \phi, \sigma \rangle .$$

Consideremos ahora $a \in S_p(M), b \in S_q(M)$ tales que $p + q = n$. Entonces $a \bullet b$ es una 0-cadena de M y se define el **número de intersección de las cadenas** a y b como el entero

$$I(a,b) := \varepsilon(a \bullet b)$$

Si en particular a y b son dos ciclos de dimensiones p y q tales que $p+q = n-1$ y sea $c \in S_{p+1}$ tal que $\partial c = a$. Entonces $c \bullet b$ es una 0-cadena y mediante (3.3) podemos verificar que el número de intersección $I(c,b)$ es independiente de c (ver [16]).

Definición 3.9 *Bajo las condiciones anteriores $I(c,b)$ es llamado* ***número de enlace de** a **y** b. Lo denotaremos por $\lambda(a,b)$.*

Consideremos ahora una aplicación $f : M \longrightarrow N$ entre variedades orientadas, compactas y sin frontera de dimensiones m y n, respectivamente. Mediante la dualidad de Poincaré, podemos asociar a f_* un homomorfismo $f_! : H_{n-p}(N) \longrightarrow H_{m-p}(M)$ llamado retromorfismo de Hopf. A nivel de cadenas, sea $f_\dagger : S_{n-p}(N) \longrightarrow S_{m-p}(M)$

$$f_\dagger = D_M^{-1} \circ f^\# \circ D_N$$

y entonces

$$f_! = D_M \circ f^* \circ D_N$$

donde D_M y D_N denotan al inverso del isomorfismo de dualidad de Poincaré para M y N.

Se puede probar que si μ_M y μ_N son las clases fundamentales de M y N respectivamente ([16]):

- $f_!(\mu_N \frown x) = \mu_M \frown f^*(x)$ para todo $x \in H^*(N)$.
- $f_!(u \bullet v) = f_!(u) \bullet f_!(v)$.
- $f_*(u \bullet f_! v) = f_*(u) \bullet v$.

Particularmente, supongamos que $M = \mathbb{S}^{2n-1}, N = \mathbb{S}^n$ son esferas orientadas, de modo que $f : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ y $f_\dagger : S_{n-p}(\mathbb{S}^n) \longrightarrow S_{2n-1-p}(\mathbb{S}^{2n-1})$. Consideremos $p = n$ y entonces tomemos dos 0-ciclos distintos x, y en $\mathbb{S}^n$. Entonces $f_\dagger(x), f_\dagger(y)$ deben ser $(n-1)$-ciclos de $\mathbb{S}^{2n-1}$.

En efecto $D(x) = \underline{s^n}_1$ y $D(y) = \underline{s^n}_2$ donde $\underline{s^n}_1, \underline{s^n}_2$ son representantes de la clase de cohomología s^n. Entonces

$$f_\dagger(x) = D^{-1}\left(f^{\#}(D(x))\right) = D^{-1}\left(f^{\#}(\underline{s^n})\right).$$

Luego, por (3.2) sabemos que existe $B \in S^{n-1}(\mathbb{S}^{2n-1})$ tal que $f^{\#}(\underline{s^n}) = \delta B$, y por lo tanto

$$f_\dagger(x) = D^{-1}\left(f^{\#}(\underline{s^n})\right) = D^{-1}(\delta B) = \pm\partial\left(D^{-1}B\right)$$

de modo que se puede definir el número de enlace de $f_\dagger(x)$ y $f_\dagger(y)$.

Definición 3.10 (Hopf) *El Invariante de Hopf de f es el número de enlace de $f_\dagger(x)$ y $f_\dagger(y)$.*

Con la ayuda de la formulación que hicimos en la sección anterior del Invariante de Hopf cohomológico en términos del producto copa funcional, probaremos que este número de enlace es el Invariante de Hopf $H(f)$.

Teorema 3.11 *El número de enlace de $f_\dagger(x)$ y $f_\dagger(y)$ es $\pm H(f)$.*

Demostración. Puesto que $f_\dagger(x) = \pm\partial(D^{-1}B)$, el número de enlace de $f_\dagger(x)$ y $f_\dagger(y)$ se define entonces como el número de intersección de $D^{-1}B$ y $f_\dagger(y)$, esto es

$$\lambda(f_\dagger(x), f_\dagger(y)) = I\left(\pm D^{-1}B, f_\dagger(y)\right) = \pm\varepsilon\left(D^{-1}B \bullet f_\dagger(y)\right)$$

pero notemos que

$$\pm\varepsilon\left(D^{-1}B \bullet f_\dagger(y)\right) = \pm\varepsilon\left(D^{-1}\left[D(f_\dagger(y)) \smile D\left(D^{-1}B\right)\right]\right)$$

usando las propiedades del producto de intersección y el producto copa tenemos que el número de enlace es

$$\begin{aligned}
\lambda\left(f_{\dagger}(x), f_{\dagger}(y)\right) &= I\left(\pm D^{-1}B, f_{\dagger}(y)\right) \\
&= \pm\varepsilon\left(D^{-1}B \bullet f_{\dagger}(y)\right) \\
&= \pm\varepsilon\left(D^{-1}\left[D\left(f_{\dagger}(y)\right) \smile D\left(D^{-1}B\right)\right]\right) \\
&= \pm\varepsilon\left(D^{-1}\left[f^{\#}\left(D(y)\right) \smile B\right]\right) \\
&= \pm\varepsilon\left(\left[f^{\#}\left(\underline{s^{n}}\right) \smile B\right] \frown \underline{s_{2n-1}}\right) \\
&= \pm\left\langle B \smile f^{\#}\left(\underline{s^{n}}\right), \underline{s_{2n-1}}\right\rangle \\
&= \pm\left\langle s^{n} \smile_{f} s^{n}, s_{2n-1}\right\rangle \\
&= \pm H(f)
\end{aligned}$$

ya que por el lema en la sección anterior, $B \smile f^{\#}\left(\underline{s^{n}}\right)$ es un representante de $s^{n} \smile_{f} s^{n}$. ■

Bibliografía

[1] Adams J. F., *On the Non-Existence of Elements of Hopf Invariant One.* Annals of Mathematics, Vol. 72, No. 1, July (1960), 20-104.

[2] Adams J. F., Atiyah M.F., *K-Theory and the Hopf Invariant.* Quart. J. Math. Oxford (2), 17 (1966), 31-48.

[3] Aguilar M., Prieto C., *Cuasifibrations and Bott Periodicity.* Topology and its Applications 98 (1999) 3-17.

[4] Aguilar M., Gitler S., Prieto C., *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint.* Springer 2002.

[5] Atiyah, Michael F., *K-Theory*, Benjamin Inc. 1967.

[6] Bredon, Glen E., *Topology and Geometry.* Springer 1991.

[7] Glenys L., Alexander M., *Vector Bundles and their applications.* Kluwer Academic Publishers 1998.

[8] Gray, Brayton, *The Hopf Invariant and Related Problems.* Aarhus, Lectures Notes Series No. 24, 1970.

[9] Greenberg, Marvin J., *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin Inc. 1967.

[10] Hatcher, Allen, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press. 2002.

[11] Hatcher, Allen, *Vector Bundles and K-Theory.* 2001.

[12] Husemoller, Dale, *Fibre Bundle.* Springer 1993.

[13] May J. M., *A Concise Course in Algebraic Topology.* University of Chicago Press1999.

[14] Milnor John W., Stasheff James D., *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies 76, Princeton University Press.

[15] Poenaru V., *Cours Élémentaire de K-Théorie.* Publications Mathématiques D'Orsay, année universitaire 1967-1968.

[16] Whitehead, George W., *Elements of Homotopy Theory.* Springer 1978.

rosalia@matcuer.unam.mx

01 (777) 1 61 35 45

CUENTA: 503005896