16

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

CALCULO NUMERICO DE LOS EFECTOS DEL GOLPE DE ARIETE EN SISTEMAS DE BOMBEO.

T E S I S

Que para obtener el título de:

I N G E N I E R O   C I V I L

P r e s e n t a :

RENE AUTRIQUE RUIZ

México, D. F.   1982

FACULTAD DE INGENIERIA
EXAMENES PROFESIONALES
60-I-323

Al Pasante señor RENE AUTRIQUE RUIZ,
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Dr. Gerardo Hiriart Le-Bert, para que lo desarrolle como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"CALCULO NUMERICO DE LOS EFECTOS DEL GOLPE DE ARIETE EN SISTEMAS DE BOMBEO"

Introducción.
I. El golpe de ariete.
II. Ecuaciones de continuidad y movimiento.
III. Solución numérica de las ecuaciones de continuidad y movimiento.
IV. Influencia de algunas variables y condiciones de frontera.
V. Solución numérica en sistemas de bombeo.
VI. Aplicación a algunos sistemas de bombeo en México.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, 8 de diciembre de 1981
EL DIRECTOR

ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

JJE/OBLH/ser

Aclaración

La parte medular de este trabajo fue realizada en el Instituto de Ingeniería, bajo la dirección del Dr. Gerardo Hiriart, durante la fase de diseño preliminar del acueducto para la Planta Carboeléctrica Río Escondido, en 1978. Si bien el objetivo del trabajo es presentar un programa que simule el comportamiento de un sistema de bombeo durante fenómenos transitorios, se consideró conveniente incluir algunos capítulos introductorios, producto de la recopilación de puntos de vista y tratamientos tanto de textos clásicos como de publicaciones recientes.

I N D I C E

INTRODUCCION

La desigual distribución del agua respecto a recursos como el suelo con alta potencialidad agrícola o respecto a los centros urbano-industriales ha originado la necesidad de transferir agua de una cuenca a otra. Como éstas se encuentran separadas entre sí por cadenas de montañas, para salvar los parteaguas los acueductos deberán tener tramos en los cuales el agua se conduzca a presión.

El procedimiento normal para seleccionar el diámetro de una tubería a presión que deba conducir un cierto gasto es calcular su diámetro económico, es decir el diámetro que haga mínimo el costo de instalación y operación de la conducción durante su vida económica, una vez tomado en cuenta el costo de la tubería, del equipo de bombeo y del consumo de energía.

Este diámetro económico representa un óptimo en condiciones de funcionamiento normal, o de flujo establecido. Sin embargo, las tuberías a presión están también sujetas a los efectos del golpe de ariete, fenómeno transitorio durante el cual se presentan grandes variaciones de la presión alrededor de la presión normal de trabajo.

Para soportar estas nuevas presiones, el espesor de la tubería deberá recalcularse. Por otra parte, la magnitud de las variaciones de la presión es función de la velocidad del agua, y por tanto del diámetro de la tubería: a mayor diámetro tendremos menores incrementos en la presión. Bajo estas nuevas consideraciones, el diámetro económico calculado originalmente habrá dejado de ser el más económico.

Además, el diseño de un sistema de bombeo sujeto a los efectos del golpe de ariete no sólo requerirá el dimensionamiento de la tubería, sino también el de estructuras auxiliares como tanques de oscilación, la selección de tiempos de cierre de válvulas y la programación de los arranques y paros de las bombas. El diseño final deberá garantizar que no serán rebasados ciertos límites tanto en los esfuerzos de la tubería como en la operación de las bombas.

La complejidad de las ecuaciones del golpe de ariete, la cantidad de las variables y su interacción son tales que el diseño más económico sólo podrá encontrarse probando distintas combinaciones de valores de las variables: diámetro de la tubería, tiempo de cierre de las válvulas, ubicación y diámetro del tanque de oscilación, etc.

Este tipo de aproximación a la solución difícilmente puede lograrse sin ayuda de una computadora. El propósito de este trabajo es presentar un programa que simule el comportamiento de un sistema de bombeo durante el golpe de ariete y pueda usarse para su diseño.

CAPITULO I

EL FENOMENO DEL GOLPE DE ARIETE

El golpe de ariete es un fenómeno transitorio que se presenta en conductos cerrados al ocurrir cambios en sus condiciones de frontera.

El ciclo de eventos que componen este fenómeno ha sido descrito por varios autores (5, 16, 18, 25, 29). Lo repetiremos aquí en sus líneas generales.

Supongamos una tubería elástica de acero por la que fluye agua a velocidad v, con una presa aguas arriba que mantiene una carga constante al principio de aquélla, y una válvula aguas abajo que se cierra instantáneamente. Al ocurrir el cierre, la energía cinética del agua inmediatamente aguas arriba de la válvula trabajará para expandir elásticamente la tubería y comprimir el agua, elevando su presión en Δh por encima de la presión hidrostática. Esta conversión de energía cinética en energía de compresión elástica del agua y de expansión elástica de la tubería continuará hacia aguas arriba a la velocidad del sonido. Al llegar esta onda a la presa, toda la tubería se encontrará expandida, y el agua dentro de ella estará comprimida, sujeta a una presión $h+\Delta h$ y con velocidad cero.

Al no poder entrar más agua a la tubería, no habrá ya energía para mantener la tubería expandida. Inmediatamente aguas abajo de la presa, el agua igualará su presión con la de la presa, convirtiéndose nuevamente la energía elástica almacenada en energía cinética, haciendo fluir al agua con velocidad igual a la original pero en sentido opuesto. La onda viajará ahora hacia aguas abajo, y al llegar a la válvula la tubería tendrá sus dimensiones iniciales y el agua su presión y densidad originales, aunque con velocidad inversa.

La energía cinética del agua servirá ahora para contraer elásticamente la tubería y expandir la propia agua. Esta nueva onda viajará hacia aguas arriba con la velocidad del sonido, y al alcanzar la presa toda la tubería se habrá contraído a un diámetro menor al inicial, la velocidad del agua será cero, y su densidad y presión estarán $\Delta\rho$ y Δh por debajo de las originales.

En este momento, al ser mayor la presión en la presa que en la tubería, el agua entrará nuevamente a ésta con velocidad V, volviendo la tubería a sus dimensiones iniciales. Al llegar la onda a la válvula, las condiciones serán iguales a las de partida, habiéndose cerrado un ciclo.

De no ser por el calor disipado por la fricción entre el fluído y la tubería, el ciclo continuaría indefinidamente, pues hemos considerado al agua y a la tubería como perfectamente elásticos.

De la descripción anterior se desprende que se presentan dentro del fenómeno dos tipos de ondas: las ondas positivas, o de compresión, que generan incrementos positivos en la presión, y las ondas negativas, o de expansión, que generan incrementos negativos en la presión. Las primeras pueden originarse en una frontera sólida, como una válvula cerrada, o bien ser el producto de una reflexión negativa de una onda negativa. Las segundas se pueden generar al reflejarse negativamente una onda positiva. En una frontera sólida ocurrirán reflexiones positivas: la onda no cambiará de signo. La combinación de la onda incidente y de la onda reflejada producirá en esa frontera un cambio en la presión del doble del que produce la onda incidente aislada, pues al encontrarse una onda con otra sus efectos se suman algebráicamente. En cambio, una frontera no sólida, como puede ser un gran depósito de agua en un extremo de una tubería, producirá reflexiones negativas, en las que las ondas cambiarán de signo. En estas fronteras las ondas se anularán mutuamente, y no se producirá cambio alguno en la presión (19).

Dentro de las modificaciones sufridas por las distintas variables durante el golpe de ariete, la de la presión será sin duda la más importante: las sobrepresiones y subpresiones originadas pueden dar lugar a esfuerzos de tal magnitud en la tubería que provoquen su ruptura o colapso, o por lo menos aceleren su fatiga y disminuyan su vida útil.

Uno de los ejemplos más claros en la literatura es el que se refiere a los daños ocurridos en Junio de 1950 en la planta hidroeléctrica Oigawa (3). El cierre accidental y prácticamente instantáneo de una válvula de mariposa provocó la ruptura por sobrepresión de 8 m de tubería. A su vez, esta ruptura generó un golpe de ariete negativo que colapsó aguas arriba un tramo de 53 m, al presentarse en él presiones por debajo de la atmosférica. A consecuencia del accidente murieron tres personas, la casa de máquinas quedó enterrada bajo sedimentos acarreados por el agua, y se inutilizó la planta por varias semanas.

El golpe de ariete se presenta en todos los conductos cerrados sujetos a cambios en sus condiciones de frontera. El caso más conocido es el que se presenta en las plantas hidroeléctricas, en las que son necesarias continuas maniobras en las válvulas aguas arriba de las turbinas para que éstas generen energía de acuerdo a las curvas de demanda. Además, los movimientos del regu lador de velocidad, que hacen variar el gasto de admisión de la máquina de acuerdo con la demanda instantánea de potencia, producen continuamente golpes de ariete de ambos signos.

En los sistemas de bombeo el golpe se originará en los arranques y paros de las bombas, o después de fallas de energía. Existirán ciertas particularidades, debido a que el flujo del agua es contra la gravedad y a que los acueductos deben seguir la topografía existente a lo largo de la mayor parte de su longitud. Lo primero origina que el flujo al invertirse lo haga definitivamente e interaccione con la bomba que en general aún está rotando en sentido positivo, obligando a analizar el funcionamiento de ésta junto con el resto del sistema. Lo segundo hace bastante probable la existencia de tramos de conducción sujetos a separación de la columna de agua, al presentarse presiones menores a la presión de vaporización de la misma.

Otros sistemas en los que ocurren golpes de ariete son los oleoductos y gasoductos, los condensadores de las plantas termoeléctricas, y las redes de tuberías de enfriamiento o de transferencia de calor en las plantas nucleares.

Fenómenos enteramente análogos se presentan en las conducciones a superficie libre y en los cauces naturales. En este caso, la velocidad del flujo y la velocidad de las ondas de perturbación tendrán magnitudes comparables, y las variaciones de la presión serán ahora variaciones del tirante. El ejemplo más típico son las ondas de avenida, aunque también podemos citar los fenómenos originados por movimientos de compuertas en canales de riego, y los que ocurren en canales conectados a sistemas de generación o bombeo.

En los capítulos siguientes trataremos el golpe de ariete en sistemas de bombeo, aunque no dejaremos de señalar, cuando convenga, las analogías o particularidades que tenga respecto a otros sistemas.

CAPITULO II

ECUACIONES DE CONTINUIDAD Y MOVIMIENTO

II.1 Velocidad de propagación de las ondas elásticas

Los sólidos, líquidos y gases son medios elásticos en las cuales un cambio en el esfuerzo de compresión origina un cambio de volumen. Cualquier medio elástico puede caracterizarse por un módulo de elasticidad, igual a la relación entre un esfuerzo diferencial unitario de compresión y la reducción relativa de volumen que dicho esfuerzo produce. Como toda reducción de volumen está acompañada de un incremento en la densidad, podemos expresar el módulo de elasticidad E como

$$E = -\frac{dp}{dV/V} = \frac{dp}{d\rho/\rho} \qquad (2.1)$$

Si se aplica un esfuerzo de compresión a un cuerpo, éste no se transmitirá instantáneamente, sino que sólo podrá propagarse a través del cuerpo como una onda elástica de velocidad finita.

Puede demostrarse (19) que la velocidad de una onda elástica en un medio en reposo será

$$a = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} \qquad (2.2)$$

La velocidad de una onda elástica, o celeridad, no depende pues exclusivamente del módulo de elasticidad, sino de la relación entre éste y la densidad.

Una onda de sonido es también una onda elástica. Una onda de presión elástica se propagará en un medio elástico a una velocidad que conocemos como la velocidad del sonido en ese medio. En la Tabla 2.1 se presentan las velocidades del sonido para distintos medios.

Tabla 2.1

Medio	Velocidad del sonido, en m/seg, para una presión de 1 atm
Aire seco*, 0°C	331.45
Vapor de agua, 134°C	494
Agua, 20°C	1,482.3
Acero	5,250

La velocidad del sonido en el agua aumenta con la temperatura (Tabla 2.2), hasta llegar a un máximo a los 74°C. Entre los 0°C y los 30°C, la variación de la velocidad es aproximadamente de un 1% por cada 4°C.

Por otra parte, para presiones entre 0 y 3,000 psi (entre 0 y 2,100 m de agua) a 30°C (Tabla 2.3), la velocidad acústica cambia solo un 0.1%, por lo que pueden despreciarse los efectos en ella originados por cambios en la presión.

---

* Para un gas ideal, en el que $pv = RT$, a puede expresarse también en la forma

$$a = \left(\frac{kp}{\rho}\right)^{1/2}$$

donde $k = \frac{Cp}{Cv}$ es la relación entre los calores específicos del gas, o coeficiente politrópico.

El contenido de gas en el agua modifica su compresibilidad y por tanto, la celeridad (17). Una proporción de aire en volumen de 10^{-4} puede reducir la velocidad del sonido hasta un 85% de la velocidad en un medio libre de gases, y una proporción de 10^{-3} puede reducirla hasta un 45%, bajo una carga de 46m (Tabla 2.4).

Finalmente, el contenido de partículas sólidas, como la salinidad, aumenta la celeridad (Tabla 2.5)

En el golpe de ariete trataremos con un fluído contenido dentro de una tubería. El efecto de la elasticidad de esta última será disminuir la velocidad del sonido en un medio fluído infinito. La expresión para la velocidad de una onda elástica de presión es en este caso (5, 16, 18, 29)

$$a = \frac{(K/\rho)^{1/2}}{(1+\frac{K}{E}\frac{D}{e}c_1)^{1/2}} \qquad (2.3)$$

en la que K = módulo de elasticidad del agua

= 2.24×10^8 kgf/m2 a 20°C

E = módulo de elasticidad del material de la tubería

ρ = densidad del agua

= 999 kgm/m3 a 20°C

D = diámetro de la tubería

e = espesor de la tubería

c_1 = coeficiente de anclaje

Tabla 2.2 Velocidad del sonido en el agua, en función de la temperatura, a una presión de 1 atm.

Temperatura, en ^{0}C	Velocidad del sonido, en m/seg
0	1402.3
4	1421.6
10	1447.2
20	1482.3
30	1509.0
50	1542.5
74	1551.5
100	1543.0

Tabla 2.3 Velocidad del sonido en el agua, en función de la presión, a una temperatura de 20 ^{0}C

Presión manométrica, en m de agua	Velocidad del sonido, en m/seg
0	1482.3
1400	1505.7
2800	1528.7

Tabla 2.4 Efecto de la proporción de aire incluido en la velocidad del sonido en el agua, a una presión de 46 m (17)

Proporción de aire, en volumen	Velocidad del sonido, en m/seg	a/a_0 (a_0= 1482.3 m/seg)
10^{-6}	1479.8	0.998
10^{-5}	1454.6	0.981
10^{-4}	1254.4	0.846
10^{-3}	665.8	0.449
10^{-2}	232.8	0.157

Tabla 2.5 Velocidad del sonido en el agua en función del contenido de partículas sólidas, a 20 ^{0}C y una presión de 1 atm.

Salinidad, en %	Velocidad del sonido, en m/seg
3.3	1519.6
3.5	1522.2
3.7	1524.2

Tabla 2.7 Celeridad de las ondas de presión en una tubería en función de la relación D/e, para distintas condiciones de anclaje.

Relación	Celeridad de la onda de presión, en m/seg		
D/e	Condición 1	Condición 2	Condición 3
40	1258.75	1260.69	1241.69
60	1179.01	1181.40	1158.12
80	1112.73	1115.41	1089.43
100	1056.50	1059.37	1031.67
120	1008.01	1011.01	982.22
140	965.65	968.72	939.26
160	928.21	931.32	901.48
180	894.81	897.95	867.93
200	864.78	867.93	837.86
220	837.58	840.73	810.72
240	812.79	815.94	786.05
260	790.09	793.21	763.51
280	769.18	772.29	742.80
300	749.85	752.94	723.69

En esta expresión el denominador es el factor de corrección a la velocidad de propagación de la onda por efecto de la elasticidad de la tubería. Puede verse claramente que cuando $E \to \infty$, la celeridad tiende a ser la velocidad del sonido en un medio infinito. Por otra parte, la celeridad decrece al crecer la relación D/e. En la Tabla 2.7 se muestran valores para la celeridad en función de la relación D/e, para el módulo de elasticidad del acero * más común en las tuberías comerciales (2.1×10^{10} kgf/m2), y para tres distintos factores de anclaje (17), correspondientes a los siguientes casos:

1. $C_1 = 1 - \mu^2$ — tubería anclada contra movimiento axial en toda su longitud.

2. $C_1 = \frac{5}{4} - \mu$ — tubería anclada contra movimiento axial o longitudinal sólo en el extremo aguas arriba.

3. $C_1 = 1$ — tubería con juntas de expansión en toda su longitud.

La relación de Poisson μ para el acero se consideró igual a 0.3 (17).

Como podemos ver, la celeridad (de ahora en adelante llamaremos siempre celeridad a la velocidad de la onda de presión) no varía notablemente: ± 20% alrededor de un valor típico de 1000 m/seg. En el capítulo IV veremos en qué rango de variación del incremento relativo de la presión puede traducirse este rango de variación de la celeridad.

II.2 Ecuaciones de continuidad y movimiento para el flujo transitorio en conductos cerrados.

* En tuberías de concreto las celeridades son menores que en tuberías de acero (16), y en tuberías de muy flexibles (hule, plástico) son aún menores (29).

En la hidráulica nos basta con conocer dos variables, la carga hidráulica y la velocidad, para describir el movimiento del agua. Estas variables aparecerán generalmente en las ecuaciones en función de dos variables independientes: el tiempo y la distancia. Para el espacio se considera una sola variable, pues en general puede suponerse que los flujos ocurren en una sola dirección.

Como existen dos variables desconocidas, para resolver cualquier problema serán necesarias dos ecuaciones. La primera, conocida como ecuación de continuidad, provendrá del principio de conservación de masa, y la segunda, la ecuación de movimiento o ecuación dinámica, provendrá de la segunda ley de Newton.

Si quisiéramos clasificar los problemas de flujo de agua yendo del más simple al más complejo, empezaríamos con los problemas de flujo establecido, o permanente, en los cuales tanto la carga hidráulica como la velocidad en una sección cualquiera se mantienen constantes a lo largo del tiempo. Dentro de los flujos permanentes, el flujo uniforme es el más simple pues en él tanto la carga como la velocidad se mantienen constantes en el espacio y en el tiempo, mientras que en el flujo variado la carga y la velocidad pueden variar en el espacio, pero no en el tiempo. En último término tendríamos el flujo no establecido, o transitorio, en el cual la carga y la velocidad varían tanto en el espacio como en el tiempo. Los flujos transitorios se originan de flujos establecidos cuando en estos ocurren cambios en sus condiciones de frontera.

En la mayoría de los problemas que caben dentro de los flujos que hemos señalado, en particular en los que se refieren a flujos a superficie libre, se considera al agua como incompresible. En el flujo transitorio en conductos cerrados, en cambio, debemos considerar al agua como un fluído compresible, pues como ya señalamos las ondas de presión al propagarse lo comprimen y expanden sucesivamente.

Las ecuaciones correspondientes a esta situación resultan ser *

1. Continuidad $$v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} - v \operatorname{sen} \alpha = 0 \qquad (2.4)$$

2. Movimiento $$g \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{f}{2D} v/v/ = 0 \qquad (2.5)$$

en las que a es la celeridad de la onda, v la velocidad del flujo, h la presión expresada en carga de agua, D el diámetro de la tubería y α el ángulo que forma con respecto a la horizontal.

En la ecuación de continuidad todos los términos representan dimensionalmente velocidades, mientras que en la de movimiento representan aceleraciones. En esta última podemos distinguir entre la aceleración convectiva, $v \frac{\partial v}{\partial x}$, debida al movimiento del fluído de un punto a otro en una zona no uniforme, y la aceleración local, $\frac{\partial v}{\partial t}$, que es simplemente la variación de la magnitud de la velocidad en el tiempo. La primera es una consecuencia de la no uniformidad del movimiento, y la segunda es producto de su transitoriedad. El término -- $v \frac{\partial h}{\partial x}$ de la primera ecuación también es un término convectivo. En el capítulo siguiente hablaremos un poco más de estos términos convectivos.

---

* Su deducción puede verse en 5, 16, 18, 29.

II.3 Distintas soluciones a las ecuaciones de continuidad y movimiento.

La primera solución completa a los problemas del golpe de ariete fue presentada por Allievi en la primera década del siglo, y empleada hasta los años 30, en que aparecieron los métodos gráficos.

Allievi parte de las ecuaciones completas del flujo transitorio en conductos cerrados, y propone despreciar los términos convectivos y el término de fricción, obteniendo las ecuaciones

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{Continuidad} \qquad (2.6)$$

$$g\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \qquad \text{Movimiento} \qquad (2.7)$$

Derivando (2.6) con respecto a t, multiplicándola por g/a^2 y restándola de la derivada de (2.7) con respecto a x, se obtiene

$$a^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$$

que es una ecuación diferencial parcial hiperbólica de segundo orden que corresponde a la forma de la ecuación de onda en una dimensión, cuya solución general es

$$h = h_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \qquad (2.8)$$

en donde F y f son ondas de presión que viajan en direcciones opuestas, sin deformarse, y con velocidad a. La solución para v resulta

$$v = v_0 - \frac{g}{a}\left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)\right] \qquad (2.9)$$

Aplicando las ecuaciones 2.8 y 2.9 en la válvula (x=0) (Figura 2.1) para $t = T$ y $t = 2T$, y aprovechando que $F(t) + f(t+T) = 0$, podemos obtener (11)

$$\frac{a}{g}\left(v_T - v_{2T}\right) = \left(h_T - h_0\right) + \left(h_{2T} - h_0\right), \qquad (2.10)$$

ecuación que origina la solución en cadena de Allievi :

$$
\begin{aligned}
h_1 - h_0 &= \frac{a}{g}\,(v_0 - v_1) \\
h_2 + h_1 - 2h_0 &= \frac{a}{g}\,(v_1 - v_2) \\
h_3 + h_2 - 2h_0 &= \frac{a}{g}\,(v_2 - v_3) \qquad (2.11)^{*} \\
&\vdots \\
h_i + h_{i-1} - 2h_0 &= \frac{a}{g}\,(v_{i-1} - v_i)
\end{aligned}
$$

Multiplicando y dividiendo los segundos miembros por v_0 y dividiendo las ecuaciones anteriores entre h_0 ; introduciendo los parámetros $\rho = \frac{av_0}{2gh_0}$ (constante de Allievi), $\xi_i^2 = \frac{h_i}{h_0}$, y $\tau_i = \frac{A_i}{A_0}$ (porcentaje de apertura de la válvula) ; y teniendo en cuenta que en la válvula $\frac{v_i}{v_0} = \frac{A_i}{A_0}\left[\frac{h_i}{h_0}\right]^{\frac{1}{2}} = \tau_i\,\xi_i$, las ecuaciones 2.11 se convertirán en

$$
\begin{aligned}
\xi_1^2 - 1 &= 2\rho\,(\tau_0\,\xi_0 - \tau_1\,\xi_1) \\
\xi_2^2 - \xi_1^2 - 2 &= 2\rho\,(\tau_1\,\xi_1 - \tau_2\,\xi_2) \\
\xi_3^2 - \xi_2^2 - 2 &= 2\rho\,(\tau_2\,\xi_2 - \tau_3\,\xi_3) \qquad (2.12)^{*} \\
&\vdots \\
\xi_i^2 - \xi_{i-1}^2 - 2 &= 2\rho\,(\tau_{i-1}\,\xi_{i-1} - \tau_i\,\xi_i)
\end{aligned}
$$

que pueden emplearse en maniobras lineales de cierre o apertura de válvulas, totales o parciales. También pueden usarse las cartas de Allievi, construidas a

* Los subíndices representan períodos de la tubería 2L/a, es decir el tiempo que tarda una onda en regresar a la frontera en la que fue emitida.

partir de 2.12 (18). Como ya señalamos, esta solución no considera la fricción.

Los métodos gráficos se derivan también de las ecuaciones del golpe de ariete deducidas por Allievi. En problemas como los cierres y aperturas de válvulas permiten una visión rápida y relativamente precisa del problema, a la vez que su construcción es sencilla.

Por ejemplo, para el caso de un cierre aguas abajo, puede demostrarse que si la sección de la tubería es constante las ondas F y f (la onda emitida y la onda reflejada, respectivamente) se pueden representar en el plano adimensional v-h ($v = V/V_0$ y $h = H/H_0$, siendo H_0 y V_0 la elevación del gradiente hidráulico y la velocidad, en condiciones de flujo establecido) mediante rectas de pendiente -2ρ y $+2\rho$, respectivamente. En la frontera aguas abajo, el movimiento de la válvula puede representarse en el mismo plano adimensional mediante parábolas $v = \tau(h)^{\frac{1}{2}}$, en las que τ representa el grado de apertura de la válvula. El almacenamiento de agua de la frontera aguas arriba, que garantiza una carga constante, estará representado por la recta $h = 1$. El problema se resuelve transitando alternativamente ondas F y f entre las representaciones de las condiciones de frontera de la tubería.

Aunque estos métodos fueron desarrollados originalmente para tuberías de sección constante y sin fricción, se han adaptado ya a otras condiciones. Pueden resolverse problemas en tuberías con distintos diámetros (trabajando en el plano v-h con distintas pendientes), problemas que incluyan pérdidas por fricción, problemas en tuberías que se unen o se bifurcan, e incluso problemas más complicados, como los originados al ser detenida una bomba. Los principios de las construcciones gráficas no se modifican, pero éstas se complican considerablemente. Las soluciones gráficas aparecen tratadas en detalle en los libros de Bergeron (2) y Parmakian (16). Fueron ampliamente aceptadas desde su aparición, en los treintas, hasta la segunda mitad de los sesentas, cuando surgieron las soluciones numéricas.

El punto de partida de las soluciones numéricas es un artículo de Streeter de mayo de 1962 (20), en el que por primera vez propone emplear el método de las características para resolver las ecuaciones completas del golpe de ariete (2.4 y 2.5) y demuestra que los resultados de sus cálculos coinciden con experimentos realizados en laboratorio. A partir de entonces, se incorporan paulatinamente tratamientos numéricos de distintas condiciones de frontera. Han sido propuestas también soluciones numéricas implícitas para resolver las ecuaciones del golpe de ariete, pero la de características se ha mantenido como la más conveniente.

Los métodos gráficos permiten muchas veces obtener una visión rápida del problema y darse una idea de su magnitud. Sin embargo, en problemas complicados se prefieren los métodos numéricos, pues permiten analizar un mayor número de alternativas, sin necesidad de repetir largas construcciones gráficas.

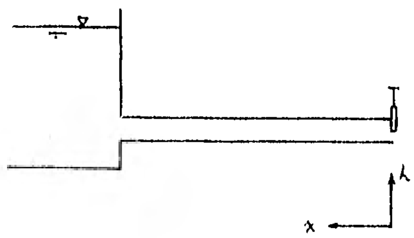


Figura 2.1

CAPITULO III

SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES DE CONTINUIDAD Y MOVIMIENTO

III.1 Ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas.

Una ecuación diferencial parcial contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes. Se dice que es lineal cuando es lineal en sus variables dependientes y en sus derivadas. Se dice que es cuasi-lineal cuando es lineal en las derivadas de mayor orden de las variables dependientes.

Las ecuaciones diferenciales parciales se clasifican de acuerdo a las raíces de sus ecuaciones características (1):

Supongamos un sistema cuasi-lineal de primer orden

$$a_1 U_x + b_1 U_y + C_1 V_x + d_1 V_y = f_1$$

$$a_2 U_x + b_2 U_y + C_2 V_x + d_2 V_y = f_2$$

en el que $a_1, a_2, \ldots, f_1, f_2$ son funciones de x, y, U y V. Añadiendo las relaciones

$$dU = U_x\, d_x + U_y\, d_y$$

$$dV = V_x\, dx + V_y\, dy \quad ,$$

tendremos un sistema de 4x4, que podemos escribir en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ d_x & d_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_x & d_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ dU \\ dV \end{bmatrix}$$

Este sistema tendrá solución única para U_x, U_y, V_x y V_y si su determinante es diferente de cero, y tendrá múltiples soluciones si éste se anula, es decir si

$$(a_1\ c_2 - a_2\ c_1)\ (d_y)^2 - (a_1\ d_2 - a_2\ d_1 + b_1\ c_2 - b_2\ c_1)\ d_x d_y + (b_1\ d_2 - b_2\ d_1)(d_x)^2 = 0$$

Esta ecuación, llamada ecuación característica, es una ecuación cuadrática en dy/dx. Las raíces de esta ecuación nos darán dos direcciones, llamadas direcciones características, o líneas características, que podrán ser reales y diferentes, reales e idénticas, o complejas, de acuerdo con el valor del discriminante

$$\Delta = (a_1\ d_2 - a_2\ d_1 + b_1\ c_2 - b_2\ c_1)^2 - 4\ (a_1\ c_2 - a_2\ c_1)\ (b_1\ d_2 - b_2\ d_1)\ ,$$

que servirá además para clasificar las ecuaciones:

Δ	Raíces de la ecuación característica	Líneas características	Tipo de ecuación
> 0	Reales y distintas	2	**Hiperbólica**
$= 0$	Reales e idénticas	1	Parabólica
< 0	Complejas	0	Elíptica

El mismo criterio se sigue para clasificar a las ecuaciones de segundo orden. - En este caso el sistema de ecuaciones será:

$$a\ U_{xx} + b\ U_{xy} + c\,U_{yy} = f$$

$$d\ (U_x) = U_{xx}\ d_x + U_{xy}\ d_y$$

$$d\ (U_y) = U_{xy}\ d_x + U_{yy}\ d_y \quad ,$$

o bien

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d_x & d_y & 0 \\ 0 & d_x & d_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xx} \\ U_{xy} \\ U_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ d\ (U_x) \\ d\ (U_y) \end{bmatrix} ,$$

y tendrá solución única para U_{xx}, U_{xy}, U_{yy} a menos que el determinante se anu- le, es decir

$$a\ (d_y)^2 - b\ d_x d_y + c\ (d_x)^2 = 0$$

Siendo el discriminante de la ecuación característica $b^2 - 4ac$, la ecuación -- será hiperbólica si $b^2 - 4ac > 0$, parabólica si $b^2 - 4ac = 0$, y elíptica si - $b^2 - 4ac < 0$.

Las ecuaciones elípticas representarán problemas de equilibrio, como el flujo viscoso establecido y los esfuerzos de equilibrio en estructuras elásticas. - En cambio, los problemas de propagación estarán gobernados por ecuaciones hi- perbólicas o parabólicas. Ejemplos típicos de estos problemas incluyen la - propagación de ondas de presión en fluídos, la propagación de esfuerzos y des_ plazamientos en sistemas elásticos, y la propagación del calor. Son problemas de naturaleza transitoria, en los que debe predecirse el comportamiento futuro de un sistema dado su estado inicial, satisfaciendo además condiciones en las fronteras. Estos problemas son llamados también problemas de valores iniciales, El planteamiento de estos problemas es del tipo

Resolver la ecuación diferencial

$$L\ (\emptyset) = f$$

dentro del dominio D cuando el estado inicial está definido por

$$I_i\ (\emptyset) = h_i$$

y sujeto a las condiciones

$$B_i\ (\emptyset) = g_i$$

en las fronteras. El dominio de integración es abierto. (Figura 3.1).

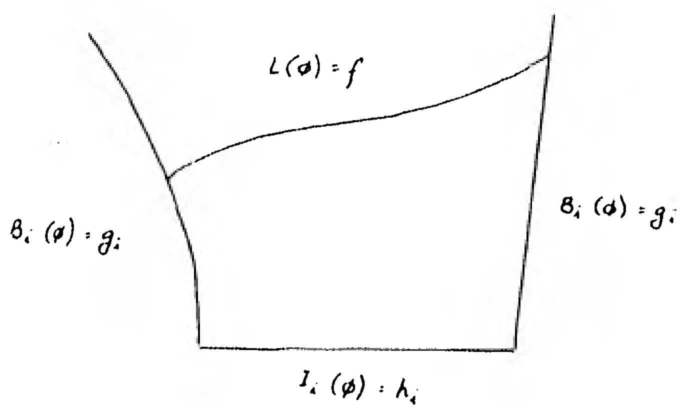


FIGURA 3.1

En general, las ecuaciones diferenciales parciales no tienen solución analítica exacta, existiendo soluciones sólo para casos particulares bastante simplificados y que muy rara vez se encuentran en la práctica. Esto ha dado lugar a la búsqueda de soluciones mediante el análisis numérico, que si bien empezaron a desarrollarse desde la segunda década del siglo actual no fue sino hasta los años 50 que pudieron empezar a aplicarse, al aparecer la segunda generación de máquinas computadoras. En los apartados siguientes veremos algunos métodos de solución numérica que han sido propuestos para la solución de ecuaciones hiperbólicas, y trataremos de escoger el más conveniente para el tipo de problemas que queremos resolver.

III.2 <u>Método de las características con intervalos fijos.</u>

Las líneas características constituyen las coordenadas naturales de un sistema hiperbólico. Si sustituimos el sistema original de ecuaciones hiperbólicas por uno en el cual los ejes coordenados sean las líneas características podremos convertir el sistema de ecuaciones diferenciales parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (5, 11, 24, 29).

Las ecuaciones completas del golpe de ariete son:

$$v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = v \text{ sen } \alpha \tag{3.01}$$

$$g \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{f}{2D} v/v/ , \tag{3.02}$$

aunque la mayoría de los autores (5, 7, 8, 24, 29) se inclinan por eliminar los términos de poco peso y trabajan con las ecuaciones simplificadas:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (3.03)$$

$$g\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{f}{2D} v/v/ \qquad (3.04)$$

Si recordamos que

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial t} dt \qquad (3.1)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt \qquad (3.2)$$

y escribimos el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & a^2/g & 0 \\ g & 0 & 0 & 1 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial h/\partial x \\ \partial h/\partial t \\ \partial v/\partial x \\ \partial v/\partial t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{f}{2D} v/v/ \\ dh \\ dv \end{bmatrix}$$

Al resolver la ecuación característica

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - a^2 = 0$$

obtenemos las raíces

$$\frac{dx}{dt} = a \qquad y \qquad \frac{dx}{dt} = -a$$

A lo largo de estas curvas, las ecuaciones diferenciales parciales se convertirán en ecuaciones diferenciales ordinarias:

Si llamamos $$L_1 = g\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{f}{2D} v/v/ = 0$$

$$L_2 = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

y las combinamos linealmente

$$L_1 + \lambda L_2 = \lambda \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g}{\lambda}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\lambda a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{f}{2D} v/v/ = 0 \qquad (3.3)$$

Si $$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{\lambda} = \frac{\lambda a^2}{g}$$

es decir, si $$\lambda = \pm \frac{g}{a} \quad y \quad \frac{dx}{dt} = \pm a \quad ,$$

la ecuación 3.3 se convertirá, sustituyendo los dos valores de λ, en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{g}{a}\frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{f}{2D} v/v/ = 0 \qquad (3.4)$$

para $\frac{dx}{dt} = a$

$$-\frac{g}{a}\frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{f}{2D} v/v/ = 0 \qquad (3.5)$$

para $\frac{dx}{dt} = -a$

Los valores de dx/dt son precisamente los calculados con la ecuación característica. En lugar de las ecuaciones diferenciales parciales de continuidad y movimiento, tenemos ahora un par de ecuaciones diferenciales ordinarias, y una sola variable independiente, t. Cada una de estas ecuaciones es válida solo a lo largo de una curva característica. Como la celeridad de las ondas a puede considerarse constante, las curvas características son rectas en el plano xt de las variables independientes.

De acuerdo a la Figura 3.2, conocidos los valores de v y h en A y B, podemos escribir para el punto P las ecuaciones 3.4 y 3.5 como ecuaciones de diferencias finitas, empleando para las derivadas un esquema de diferencias hacia adelante:

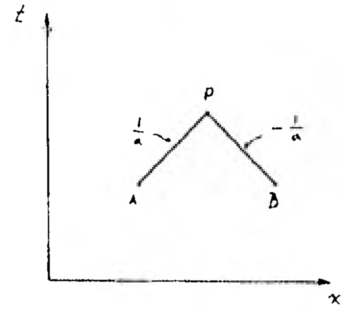


FIGURA 3.2

$$\frac{g}{a}\ \frac{H_p-H_A}{t_p-t_A} + \frac{V_p-V_A}{t_p-t_A} + \frac{f}{2D}\ V_A/V_A/ = 0 \qquad (3.6)$$

$$\text{para} \quad X_p-X_A = a\ (t_p-t_A) \qquad (3.7)$$

$$-\frac{g}{a}\ \frac{H_p-H_B}{t_p-t_A} + \frac{V_p-V_B}{t_p-t_B} + \frac{f}{2D}\ V_B/V_B/ = 0 \qquad (3.8)$$

$$\text{para} \quad X_p-X_B = a\ (t_p-t_B) \qquad (3.9)$$

Las ecuaciones 3.6 a 3.9 forman un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas: H_p, V_p, t_p y x_p. Sin embargo, dado que las curvas características son rectas,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \pm a$$

podemos formar una malla en el plano xt considerando intervalos fijos Δt y Δx, siempre y cuando $\Delta x = a\ \Delta t$ (Figura 3.3).

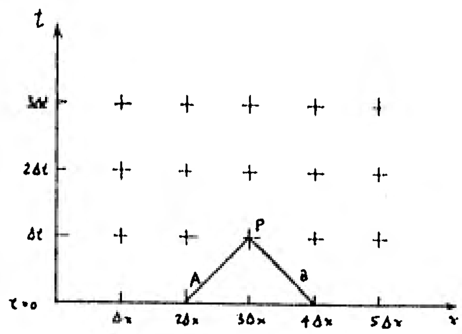


FIGURA 3.3

De esta manera,

$$t_p - t_A = t_p - t_B = \Delta t$$

$$X_p - X_A = X_p - X_B = \Delta x$$

y tendremos para cada punto de la malla dos ecuaciones con dos incógnitas, Hp y Vp:

$$\frac{g}{a} (H_p - H_A) + (V_p - V_A) + \frac{f\Delta t}{2D} V_A/V_A/ = 0 \qquad \text{Ecuación } C^+$$

$$-\frac{g}{a} (H_p - H_B) + (V_p - V_B) + \frac{f\Delta t}{2D} V_B/V_B/ = 0 \qquad \text{Ecuación } C^-$$

Hemos llamado a la primera Ecuación C+ y a la segunda Ecuación C⁻, pues corresponden respectivamente con los valores positivo y negativo de dx/dt. Ahora bien, para el tratamiento de algunas condiciones de frontera, como las bombas o los tanques de oscilación, nos será más útil trabajar con el gasto como variable. Así,

$$H_p = C_p - BQ_p \qquad \text{Ecuación } C^+ \qquad (3.10)$$

$$H_p = C_M + BQ_p \qquad \text{Ecuación } C^- \qquad (3.11)$$

en las que $B = \frac{a}{gA}$

y en C_P y C_M se han agrupado los términos conocidos del intervalo de tiempo -- anterior:

$$C_P = H_A + BQ_A - R\ Q_A/Q_A/$$

$$C_M = H_B - BQ_B + R\ Q_B/Q_B/$$

donde $R = \frac{f\Delta x}{2g\ DA^2}$

La manera de ir avanzando en la solución podrá visualizarse mejor recordando el planteamiento general de los problemas de propagación, en los cuales deben estar definidos tanto el estado inicial como las condiciones en las fronteras.

Las ecuaciones C^+ y C^- nos servirán para calcular los puntos interiores. En -- los puntos fronterizos $x = 0$ y $x = L$ podremos emplear únicamente la ecuación - C^- y la ecuación C^+, respectivamente. En cada una de estas fronteras requeriremos una ecuación en H y Q para resolverla simultáneamente con la ecuación característica respectiva. Cada punto interior P tendrá su región de dependencia y su región de influencia, definidas por las curvas características que pasan por él (7, 8):

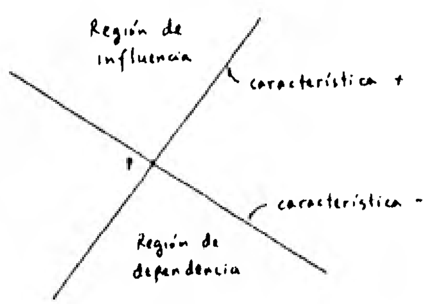


FIGURA 3.4

Podemos así dividir el plano xt en subregiones, de acuerdo a la influencia - que en ellas tengan las condiciones iniciales y las condiciones de frontera. Así, en la Figura 3.5, la región sombreada representa la región dominada únicamente por las condiciones iniciales, en la que no incidirán las perturbaciones generadas en las fronteras.

En las Figuras 3.6 y 3.7 se muestran las regiones dominadas por lqs condiciones iniciales y las condiciones de frontera aguas arriba y aguas abajo, respectivamente, pues una condición de frontera no es capaz de generar por sí sola una región de influencia.

Las Figuras 3.8 y 3.9 se refieren a los muy frecuentes casos en que el sistema es excitado en una sola frontera: por ejemplo, para una excitación en la frontera de aguas abajo, el plano xt puede dividirse en tres regiones: a) la región libre de perturbaciones, b) la región en la que solo las ondas generadas por la excitación están presentes, y c) la región (infinita hacia arriba) en la que - coexisten las ondas generadas en la frontera de aguas abajo y las ondas reflejadas en la frontera de aguas arriba.

En las Figuras aparece el período de la tubería $T = 2L/a$, de cuyo significado hablamos en el capítulo anterior.

Tenemos ahora un método con el que pueden calcularse las variables del flujo - transitorio en puntos definidos a lo largo de la tubería, avanzando en el tiempo a intervalos también definidos, y en el que además podemos seguir gráfica - mente la solución. Sin embargo, existen otros métodos de solución numérica a las ecuaciones del flujo transitorio, que trataremos en el siguiente apartado.

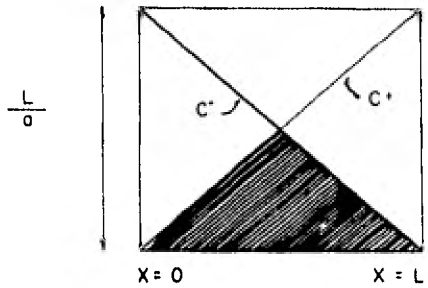


FIG. 3.5
REGION DOMINADA POR LAS CONDICIONES INICIALES.

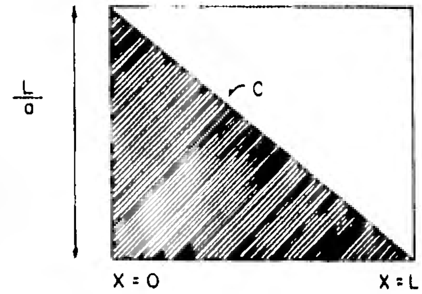


FIG. 3.6
REGION DOMINADA POR LAS CONDICIONES INICIALES Y LA FRONTERA AGUAS ARRIBA.

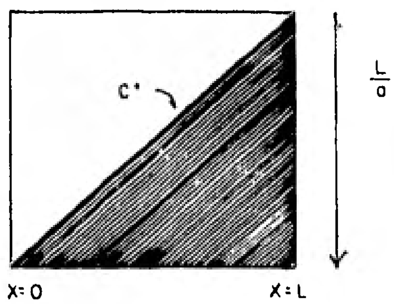


FIG. 3.7
REGION DOMINADA POR LAS C.I. Y LA FRONTERA AGUAS ABAJO

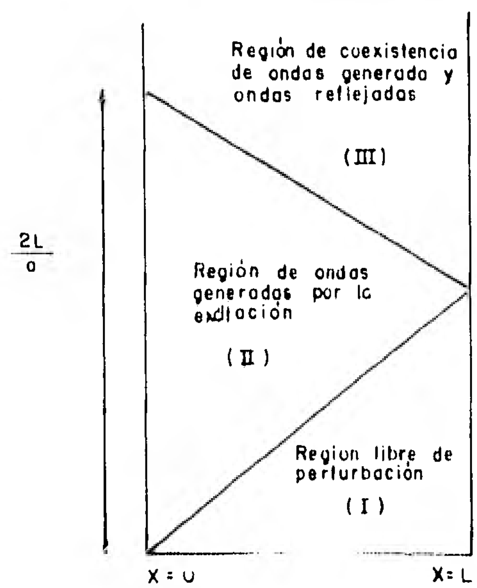


FIG. 3.8
EXCITACION EN LA FRONTERA AGUAS ARRIBA

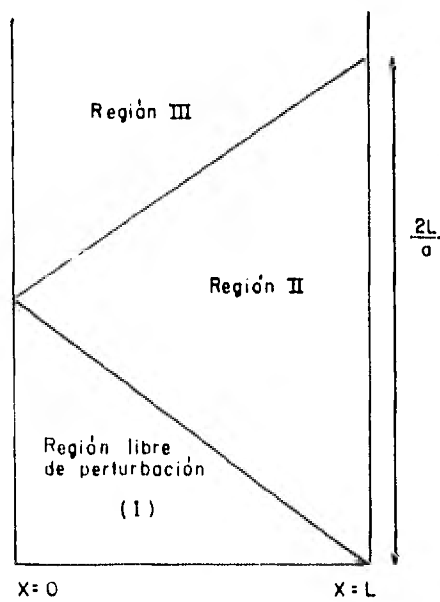


FIG. 3.9
EXCITACION EN LA FRONTERA AGUAS ABAJO.

III.3 Otros métodos de solución numérica.

a) Ecuaciones completas con interpolaciones

Consideraremos ahora las ecuaciones completas del golpe de ariete, y procederemos como en el apartado III.2, hasta convertir las ecuaciones diferenciales parciales en un par de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Recordando las ecuaciones completas,

$$v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = v \text{ sen } \alpha \qquad (3.01)$$

$$g \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{f}{2D} v/v/ \qquad (3.02)$$

añadiendo las ecuaciones 3.1 y 3.2 y escribiendo el sistema en forma matricial, tendremos

$$\begin{bmatrix} v & 1 & a^2/g & 0 \\ g & 0 & v & 1 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial h/\partial x \\ \partial h/\partial t \\ \partial v/\partial x \\ \partial v/\partial t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \text{ sen } \alpha \\ - \frac{f}{2D} v/v/ \\ dh \\ dv \end{bmatrix}$$

Si resolvemos la ecuación característica

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - 2v \frac{dx}{dt} - (a^2-v^2) = 0$$

obtenemos las raíces

$$\frac{dx}{dt} = v+a \quad y \quad \frac{dx}{dt} = v-a$$

Sabemos que a lo largo de estas curvas las ecuaciones diferenciales parciales se convertirán en ecuaciones diferenciales ordinarias. En efecto, si combinamos linealmente las ecuaciones de movimiento $L_1 = 0$ y de continuidad $L_2 = 0$,

$$L_1 + \lambda L_2 = \lambda \left[\frac{\partial h}{\partial t} + (v+\frac{g}{\lambda})\frac{\partial h}{\partial x}\right] + \frac{\partial v}{\partial t} + (v+\frac{\lambda a^2}{g})\frac{\partial v}{\partial t} +$$

$$+ \frac{f}{2D} v/v/ - \lambda v \text{ sen } \alpha = 0$$

y hacemos que $\frac{dx}{dt} = v + \frac{g}{\lambda} = v + \frac{\lambda a^2}{g}$,

es decir que $\lambda = \pm \frac{g}{a}$ y $\frac{dx}{dt} = v \pm a$,

tendremos el par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{g}{a}\frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{f}{2D} v/v/ - \frac{g}{a} v \text{ sen } \alpha = 0 \quad (3.05)$$

$$-\frac{g}{a}\frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{f}{2D} v/v/ + \frac{g}{a} v \text{ sen } \alpha = 0 \quad (3.06)$$

válidas respectivamente a lo largo de las curvas características

$$\frac{dx}{dt} = v + a$$

$$y \quad \frac{dx}{dt} = v - a$$

Estas curvas características no son rectas, como en el caso de las ecuaciones simplificadas, y no coincidirán con los puntos de una malla rectangular de intervalos fijos en x y en t. Las curvas características que pasan por un punto

P (Figura 3.10) en $t + \Delta t$ no intersecarán a la recta del intervalo anterior - ($t = t$) en los puntos conocidos A y B.

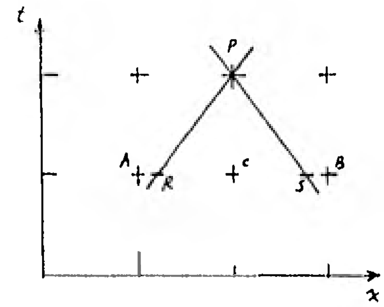


FIGURA 3.10

Si la malla satisface la condición de Courant para este caso ($\Delta t\ (\nu + a) \leq \Delta x$), las intersecciones ocurrirán en los puntos R y S, dentro del segmento AB. De esta manera, los valores en P podrán calcularse a partir de los valores de las variables en los puntos R y S, que a su vez se calcularán interpolando entre los puntos conocidos A, B y C.

b) Malla de características

Para evitar las interpolaciones, puede prescindirse de los intervalos fijos Δx y Δt y dejar que sean las propias ecuaciones las que vayan definiendo los puntos de la malla. Habrá cuatro incógnitas en cada punto, en lugar de dos. Las ecuaciones empleadas, en forma de diferencias finitas, son:

$$H_p - H_A + \frac{a_A}{g} (V_p - V_A) + \frac{f}{2gD}\ a_A\ (t_p - t_A)\ V_A/V_A/ = 0 \qquad (3.12)$$

$$X_p - X_A = (\nu_A + a_A)\ (t_p - t_A) \qquad (3.13)$$

$$H_B - H_p + \frac{a_B}{g} (V_p - V_B) + \frac{f}{2gD} a_B (t_p - t_B) V_B/V_B/ = 0 \qquad (3.14)$$

$$X_p - X_B = (\nu_B - a_B) (t_p - t_B) \qquad (3.15)$$

Las coordenadas del punto P (X_p, t_p) se calculan de las ecuaciones 3.13 y -- 3.15, y H_p y V_p de las ecuaciones 3.12 y 3.14:

$$t_p = \frac{X_B - X_A + (\nu_A + a_A) t_A - (\nu_B - a_B) t_B}{(\nu_A + a_A) - (\nu_B - a_B)}$$

$$X_p = X_A + (\nu_A + a_A) (t_p - t_A)$$

$$V_p = \frac{g (H_A - H_B - F) + a_A V_A + a_B V_B}{a_A + a_B}$$

$$H_p = H_A - \frac{a_A}{g} (V_p - V_A) - \frac{f}{2gD} a_A (t_p - t_A) V_A/V_A/$$

donde:

$$F = \frac{f}{2gD} \left[a_A (t_p - t_A) V_A/V_A/ + a_B (t_p - t_B) V_B/V_B/ \right]$$

c) Método Implícito

Los esquemas numéricos que hemos tratado hasta ahora han sido esquemas explíci_ tos, en los cuales las incógnitas se calculan en términos de valores conocidos en $t - \Delta t$ e independientemente de las incógnitas en los puntos vecinos, por lo que siempre es posible despejarlas. En los esquemas implícitos, en cambio, -- las ecuaciones contienen incógnitas en más de un punto en el instante t, por - lo que todo el sistema debe resolverse simultáneamente, incluyendo las condi - ciones de frontera.

Partiendo de las ecuaciones diferenciales parciales completas *,

$$\nu \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0$$

$$g \frac{\partial h}{\partial x} + \nu \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{f}{2D} \nu/\nu/ = 0$$

plantearemos para cada término un esquema de diferencias finitas, de acuerdo - a la notación de la Figura 3.11 (19a):

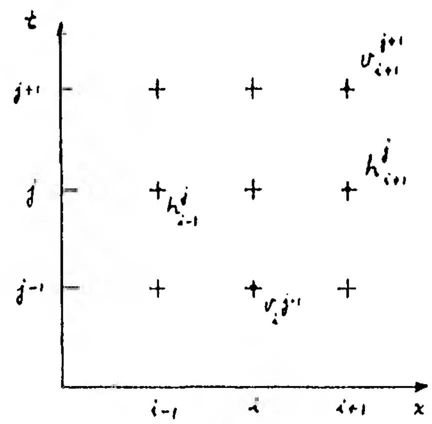


FIGURA 3.11

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right) i = \frac{h_i^{\alpha+1} - h_i^{\alpha}}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right) i = \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{\nu_{i+1}^{\alpha+1} + \nu_{i+1}^{\alpha}}{2} - \frac{\nu_{i-1}^{\alpha+1} + \nu_{i-1}^{\alpha}}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) i = \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{h_{i+1}^{\alpha+1} + h_{i+1}^{\alpha}}{2} - \frac{h_{i-1}^{\alpha-1} + h_{i-1}^{\alpha}}{2} \right]$$

---

* Hemos eliminado únicamente los términos en sen α.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_i = \frac{v_i^{\alpha+1} - v_i^{\alpha}}{\Delta t} \qquad \left(\frac{f}{2D} v/v/\right)_i = \frac{f}{2D} v_i^{\alpha} /v_i^{\alpha} /$$

$$\left(v \frac{\partial h}{\partial x}\right)_i = v_i^{\alpha} \frac{h_{i+1}^{\alpha} - h_{i-1}^{\alpha}}{2\Delta x}$$

$$\left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right)_i = v_i^{\alpha} \frac{v_{i+1}^{\alpha} - v_{i-1}^{\alpha}}{2\Delta x}$$

Se usa un esquema de diferencias central para las derivadas con respecto a x, y un esquema de diferencias hacia adelante para las derivadas con respecto a t. - Los términos no lineales se valúan en el instante anterior, para evitar que las ecuaciones dejen de ser lineales.

No desarrollaremos aquí el método hasta el final. Simplemente señalaremos que para calcular los valores de las incógnitas en cada sección de la tubería, será necesario resolver, para cada t, un sistema de 2n ecuaciones lineales, siendo n el número de secciones de tubería.

d) Método combinado implícito-características.

Para los casos en que después de la división de la tubería en tramos de cálculo económicos nos quede un tramo residuo muy pequeño, se ha sugerido (25) emplear el método de las características en los tramos de longitud Δx combinado con un esquema implícito en el tramo menor, de longitud $\Delta x'$. Los esquemas de diferencias finitas propuestos para este tramo menor son diferentes a los del apartado anterior. Se basan en una celda de cuatro puntos, y se aplican a las ecuaciones simplificadas:

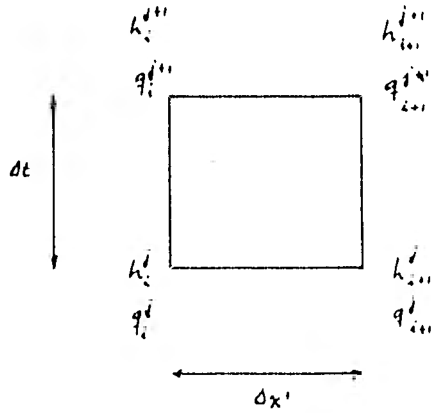


FIGURA 3.12

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x'} \left(\frac{h_{i+1}^{\alpha} + h_{i+1}^{\alpha+1}}{2} - \frac{h_i^{\alpha} + h_i^{\alpha+1}}{2} \right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{h_i^{\alpha+1} + h_{i+1}^{\alpha+1}}{2} - \frac{h_i^{\alpha} + h_{i+1}^{\alpha}}{2} \right)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x'} \left(\frac{q_{i+1}^{\alpha} + q_{i+1}^{\alpha}}{2} - \frac{q_i^{\alpha} + q_i^{\alpha+1}}{2} \right)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{q_i^{\alpha+1} + q_{i+1}^{\alpha+1}}{2} - \frac{q_i^{\alpha} + q_{i+1}^{\alpha}}{2} \right)$$

III.4 Discusión de los distintos métodos de solución numérica.

Hemos visto ya que se han propuesto una serie de esquemas numéricos para resolver las ecuaciones del flujo transitorio. Trataremos aquí de encontrar el método más conveniente para el tipo de problemas que analizaremos en capítulos posteriores.

Los métodos de solución pueden clasificarse en dos grupos: los métodos directos y los métodos de características. En los primeros la representación en diferencias finitas se hace a partir de las propias ecuaciones de continuidad y movimiento, mientras que en los segundos las ecuaciones deben transformarse primero a su forma característica, para de ésta desarrollar su representación en diferencias finitas. Los esquemas de solución pueden aún clasificarse en explícitos e implícitos, según las incógnitas aparezcan explícita o implícitamente en las ecuaciones.

Los métodos de características y los métodos explícitos están restringidos, por razones de estabilidad de sus esquemas, a trabajar con intervalos de tiempo bastante pequeños.

Los métodos implícitos, en cambio, suelen ser incondicionalmente estables, pudiendo escoger los intervalos Δx y Δt sin necesidad de que guarden alguna relación entre ellos. En estos métodos puede trabajarse con intervalos de tiempo mayores, y usar Δx pequeños sin obligar a que el Δt sea excesivamente pequeño.

Existe una gran variedad de métodos implícitos, según los esquemas de diferencias escogidos para valuar los términos de las ecuaciones. Pueden emplearse -

desde esquemas bastante sencillos, como el del apartado anterior, en el que las ecuaciones son lineales, hasta esquemas más complicados en los que las ecuaciones no son lineales y deben resolverse con el procedimiento iterativo de Newton-Raphson. La mayor desventaja que presentan los métodos implícitos es la necesidad de resolver simultáneamente todo el sistema, incluyendo las condiciones de frontera, por lo que deben ser descartados en presencia de condiciones de frontera complejas, en las cuales el cálculo de las incógnitas sólo puede hacerse por iteraciones. Como veremos más adelante, este es precisamente el caso de las bombas.

Si se usa el método de las características, debe escogerse entre trabajar con las ecuaciones completas o con las ecuaciones simplificadas. En las primeras, cabe aún escoger entre una malla de intervalos fijos con interpolaciones y una malla de características. En las segundas, las curvas características resultan ser rectas en el plano de solución xt, y los puntos de una malla de intervalos fijos y de una malla de características coinciden.

Dentro de esta gran variedad de métodos, cada uno presenta ventajas relativas para cierto tipo de problemas, mientras que para otros debe desecharse. Así, los métodos implícitos se han empleado casi exclusivamente en problemas a superficie libre, como los tránsitos de avenidas, que suelen durar varios días, en los que se requieren intervalos de tiempo grandes y los cauces deben seccionarse de manera arbitraria. El método de las características, en cambio, se ha reservado casi exclusivamente a problemas de golpe de ariete, pues es el que mejor se adapta a ellos y el que proporciona mayor exactitud.

El método de las características se introdujo como solución de las ecuaciones del golpe de ariete en un famoso artículo de Streeter (20), en 1962. En él se empleaban las ecuaciones completas de continuidad y movimiento y una malla de intervalos fijos con interpolaciones. Sin embargo, en sus publicaciones posteriores, Streeter trabaja con las ecuaciones simplificadas cuando se trata de tuberías metálicas. En su última publicación (29) demuestra que las interpolaciones necesarias al usar las ecuaciones completas introducen errores que se van acumulando conforme se avanza en el tiempo, y recomienda textualmente "evitar las interpolaciones (es decir, las ecuaciones completas) siempre que sea posible".

Evangelisti (7, 8, 9), por su parte, siempre ha trabajado con las ecuaciones simplificadas. Chaudhry (5) ni siquiera discute las ecuaciones completas. Está claro entonces que en tuberías suficientemente rígidas * basta con emplear las ecuaciones simplificadas.

Ahora bien, ¿por qué es posible simplificar las ecuaciones? Si volvemos a las ecuaciones completas (3.01 y 3.02) y a las simplificadas (3.03 y 3.04) veremos que los términos suprimidos son $v \frac{\partial h}{\partial x}$ y $-v$ sen α en la ecuación de continuidad y $v \frac{\partial v}{\partial x}$ en la ecuación de movimiento. Seguramente la mejor manera de visualizar su influencia será comparando las ecuaciones diferenciales ordinarias a que dan lugar tanto las ecuaciones completas como las ecuaciones simplificadas (3.05, 3.06 , 3.4 y 3.5). La primera diferencia entre las ecuaciones 3.05 y

* En las tuberías metálicas, la importancia relativa de los términos no lineales es del orden de 0.1%. En cambio, en tuberías con bajo módulo de elasticidad, como el hule o el plástico, en que la celeridad de las ondas puede ser muy pequeña, pueden llegar a tener una importancia relativa hasta del 10%. (28).

3.06 y las ecuaciones 3.4 y 3.5 es el término $\frac{g}{a}$ v sen α, que vale cero en tube-rías horizontales y es muy pequeño incluso en tuberías de gran pendiente, sobre todo si lo comparamos con el término $\frac{g}{a}\frac{dh}{dt}$. La otra diferencia son las curvas características a lo largo de las cuales son válidas las ecuaciones anteriores. Estas curvas características están definidas por las expresiones $\frac{dx}{dt} = \pm a$ y - $\frac{dx}{dt} = v \pm a$. En el caso de conductos cerrados no tiene sentido establecer diferencias entre ambas curvas, pues la velocidad del flujo es casi insignificante comparada con la celeridad, además de que en general se trabaja con valores - - aproximados de esa última *.

Comparemos ahora las ecuaciones simplificadas (3.03 y 3.04) con las usadas por Allievi (2.6 y 2.7). Su única diferencia es el término de fricción de la ecua-ción de movimiento. Este término ha sido aproximado de distintas maneras. Lo más común es emplear una aproximación de primer orden, en la que se supone que la velocidad es la misma al principio y al final del invervalo de tiempo. - - Evangelisti (7, 8) recomienda un algoritmo predictor-corrector, que considera el promedio de las velocidades al principio y al final del intervalo de tiempo. El proceso iterativo de este algoritmo duplica el tiempo de cálculo. Los demás autores consideran suficiente la aproximación de primer orden, aunque -- Streeter (26) sugiere también un esquema trapezoidal para conducciones muy lar-gas, en las cuales la fricción sea importante.

* En los fenómenos transitorios a superficie libre, la velocidad del agua y la celeridad de la onda tienen magnitudes comparables, y pueden emplearse las ecuaciones completas, con malla de intervalos fijos con interpolaciones o con malla de características.
La principal desventaja de la primera solución está en sus interpolaciones, aunque se obtienen los valores de las incógnitas en puntos prestablecidos. En la segunda solución los resultados son exactos, pero no se tiene ningún control sobre los puntos en los que aparecerán.

Podemos concluir por tanto que la solución más recomendable por su exactitud, facilidad de manejo de las condiciones de frontera y facilidad de programación, es la del método de las características, con malla de intervalos fijos, empleando las ecuaciones simplificadas, y con una aproximación de primer orden para el término de la fricción.

CAPITULO IV

INFLUENCIA DE ALGUNAS VARIABLES Y CONDICIONES DE FRONTERA

IV.1 Programa de cálculo y condiciones de frontera

En el cálculo numérico de los efectos del golpe de ariete en una tubería intervienen distintas variables. Los valores de algunas de ellas deberán definirse durante el diseño, como el diámetro y el espesor de la tubería, los tiempos de cierre de las válvulas, si las hay, y el diámetro del tanque de oscilación, si lo hay. Otros, como los de la celeridad de la onda de presión y del coeficiente de fricción, variarán con el diámetro y el espesor de la tubería, y, por último, el intervalo de tiempo escogido para los cálculos dependerá de las longitudes de los tubos del sistema y de la celeridad en cada uno de ellos y deberá tener una magnitud tal que el tiempo total de cálculo resulte razonable.

Si recordamos que durante el proceso de diseño será necesario probar distintos valores de algunas variables, para llegar a una solución cercana a la óptima, convendrá tener una idea cualitativa de cómo afectan las variaciones normales de las variables que intervienen como datos en el cálculo a las variables que nos interesa calcular, como la presión.

Con este fin se diseñó un programa de cálculo para computadora de escritorio, en lenguaje BASIC (Apéndice 4.1), para la solución de un ejemplo clásico sen cillo: una tubería horizontal por la que circule un gasto Q en régimen permanente (Figura 4.01), sujeta a cambios repentinos en sus fronteras, representativos de fenómenos comunes en sistemas de generación o de bombeo:

1. Carga constante aguas arriba (A) con cierre de válvula aguas abajo (B)
2. Cierre de válvula aguas arriba, con carga constante aguas abajo
3. Carga constante aguas arriba con apertura de válvula aguas abajo
4. Los tres casos anteriores, con un tanque de oscilación en un punto intermedio C.

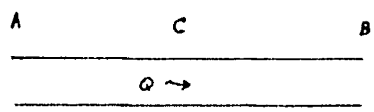


FIGURA 4.01

El caso 2 se presenta en sistemas de bombeo, mientras que los casos 1 y 3 son típicos de instalaciones hidroeléctricas. Como veremos, la variación de la presión en la tubería es enteramente análoga en ambas situaciones, con una diferencia de fase únicamente.

El programa de cálculo emplea el método de las características con intervalos fijos para resolver las ecuaciones simplificadas del golpe de ariete. Calcula la presión y el gasto en distintas secciones de la tubería, para cada intervalo de tiempo, y, para cada sección, las presiones máxima y mínima y los tiempos en que ocurren.

Los datos de partida son los siguientes:

Longitud de la tubería	3,500 m
Gasto	2.4 m^3/seg
Diámetro de la tubería	1.20 m
Velocidad	2.12 m/seg
Intervalo de tiempo	0.5 seg
Celeridad de la onda de presión	1,000 m/seg
Número de tramos en la tubería	7
Número de secciones en la tubería	8
Longitud de los tramos	500 m
Coeficiente de fricción	0.02
Diámetro del tanque de oscilación	2.40 m
Carga aguas arriba	300 m
Tiempo de cierre de la válvula	8 seg
Período de la tubería, 2 L/a	7 seg

Como ya señalamos en el capítulo anterior, para el cálculo de las incógnitas en los puntos interiores nos bastará con las ecuaciones características $C+$ y C^- (3.10 y 3.11). En las fronteras, en cambio, sólo podremos emplear una ecuación característica, y será necesario definir ecuaciones adicionales para poder calcular todas las incógnitas.

Trataremos rápidamente las ecuaciones que corresponden a las condiciones de frontera que analizaremos:

1. Carga constante aguas arriba o aguas abajo.

La ecuación adicional necesaria será

$$Hp = cte \qquad (4.1)$$

que deberá resolverse simultáneamente con 3.10 ó 3.11, según corresponda,

2. Cierre de válvula aguas abajo.

La ecuación general a aplicar en el caso de una válvula en algún extremo de una tubería es

$$Qp = Qo\,\tau\,\left(\frac{Hp}{Ho}\right)^{1/2} \qquad (4.2)$$

en la que Qo y Ho son el gasto y la carga en la válvula en condiciones de flujo establecido, τ es la apertura relativa de la válvula, dada por una ley -conocida o propuesta- de cierre o apertura (Figuras 4.02 y 4.03), y Qp y Hp son el gasto y la carga correspondientes a un instante t en el cual la apertura es τ.

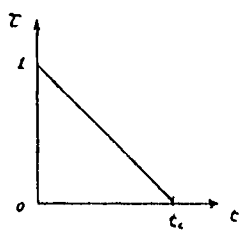


FIGURA 4.02
CIERRE DE VALVULA

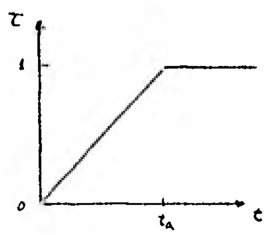


FIGURA 4.03
APERTURA DE VALVULA

En el caso de una apertura aguas abajo, si eliminamos Hp de la ecuación 4.2 y de la ecuación característica C+ (3.10):

$$Hp = Cp - B\,Qp \qquad (3.10)$$

obtendremos

$$Qp = -C_8 + (C_8^{\,2} + C_6\,Cp)^{1/2} \qquad (4.3)$$

en la que $\quad C_8 = \dfrac{C_6\,B}{2} \quad$ y $\quad C_6 = \dfrac{Qo^2\,\tau^2}{Ho}$

3. Cierre de válvula aguas arriba.

Las ecuaciones a emplear para esta condición serán 4.2 y la ecuación característica C^- (3.11):

$$Hp = C_M + B \quad Qp \qquad (3.11)$$

Nuevamente, si eliminamos de ellas Hp, tendremos

$$Qp = C_8 + (C_8^{\,2} + C_6 \; C_M)^{1/2} \qquad (4.4)$$

4. Apertura de válvula aguas abajo.

Se emplearán, al igual que en el caso 2, las ecuaciones 4.3 y 3.10, sólo que τ estará ahora definida por una ley de apertura como la de la Figura 4.03.

5. Válvula totalmente cerrada.

La ecuación adicional necesaria será simplemente

$$Qp = 0 \qquad (4.5)$$

que se resolverá simultáneamente con 3.10 ó 3.11, según corresponda.

6. Tanque de oscilación.

Este caso se tratará en el apartado IV.6.

IV.2 Influencia de la velocidad.

Al crecer los gastos de transferencia de agua, las velocidades de operación en los acueductos crecieron también, ante la incosteabilidad e inconveniencia de manejar tuberías de grandes diámetros. Este aumento de la velocidad multiplicó la magnitud de los efectos provocados por el golpe de ariete y originó en buena medida la búsqueda de soluciones más precisas.

Para tener una idea de los efectos que tiene en los incrementos de la presión el modificar el diámetro de la tubería y, por tanto, la velocidad del agua, se empleó el programa del Apéndice 4.1 para simular un cierre de válvula lineal en el extremo aguas arriba de la tubería, para distintas parejas de valores del diámetro y la velocidad. Estas fueron escogidas de manera que representaran las velocidades antiguas (1 m/seg) y actuales de los acueductos (entre 2 y 3 m/seg).

Como podemos ver en la Tabla 4.1, para una velocidad pequeña y un diámetro grande (1 m/seg y 1.75 m), las variaciones en la sección más crítica -inmediatamente aguas abajo de la válvula- son solamente de un 30% alrededor de la carga estática, mientras que para un diámetro pequeño y una velocidad grande (1.05 m y 2.77 m/seg) las fluctuaciones pueden ser hasta de un 100% alrededor de la carga estática. Una tubería en esta situación requerirá espesores más grandes, y por trabajar dentro de un rango de esfuerzos mayor, su fatiga será también mayor.

Podemos notar también que si reducimos el diámetro de la tubería hasta 1 m, la presión disminuye aparentemente hasta un valor menor al de la presión de vaporización del agua (Tabla 5.1, capítulo siguiente), que es de aproximadamente -10 m. A partir del momento en que la presión alcanza ese valor, no pueden seguirse usando las ecuaciones del golpe de ariete *, por lo que la presión mínima de -32.36 m debe tomarse únicamente como un indicador de que en ese punto se presenta la vaporización del agua. Como en general se prefiere evitar esta si-

* El fenómeno de la separación de columna comprende las siguientes fases: a) inicio de la cavitación, b) ruptura de la columna líquida, c) existencia de dos columnas sujetas a cavitación separadas por una gran cavidad, d) reunión de las dos columnas y e) desaparición de la cavitación (8). Se han propuesto distintos tratamientos matemáticos y numéricos para las regiones sujetas a separación de columna (5), bastante complicados en general.

tuación, convendrá desechar el diámetro de 1 m y considerar, por ejemplo, un diámetro de 1.05 m, para el cual la presión manométrica mínima es de 4.00 m y no se presenta la formación de cavidades de vapor.

En la Tabla 4.2 se muestran los resultados para un cierre de válvulas en la frontera de aguas abajo. Los resultados son enteramente análogos a los del cierre aguas arriba, presentando únicamente una diferencia de fase (Figura 4.1). A media tubería, los incrementos de presión son del orden del 60 al 70% de los incrementos en la frontera La envolvente de presiones máximas y mínimas a lo largo de la tubería se muestra en la Figura 4.2. En la Tabla 4.21 se muestran los incrementos de presión para un cierre aguas abajo y para los mismos valores de la velocidad del ejemplo, pero calculados a partir de las cartas de Allievi (18). Como en ellas no se considera la fricción, los resultados son menores a los calculados numéricamente.

En conclusión, a mayores velocidades corresponderán siempre mayores incrementos en la presión, pues será mayor la energía cinética disponible para convertirse en energía de deformación de la tubería y de compresión del agua.

Esta conclusión también pudo haberse derivado de la expresión

$$\Delta h = -\frac{a}{g}\,\Delta v \tag{4.51}$$

deducida en 1897 por Jukowski, despreciando la fricción. En la Tabla 4.22 aparecen los incrementos de presión calculados con el programa, para un cierre instantáneo, y con la expresión de Jukowski. Puede apreciarse que aproximadamente $\Delta h = \Delta h_{\text{Jukowski}} + h_f$.

Tabla 4.1
Influencia de la velocidad
(Cierre aguas arriba, t_c = 8 seg)

Velocidad, m/seg	1.00	2.12	2.53	2.77	3.06
Diámetro, m	1.75	1.20	1.10	1.05	1.00
Presión máxima, x=0, m	376.80	461.94	495.06	524.32	542.19
Tiempo, seg	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0
Presión mínima, x=0	207.69	90.09	40.95	4.00	-32.36
Tiempo	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0
Presión máxima, x=1500	350.18	402.37	426.44	452.82	501.04
Tiempo	13.5	13.5	12 5	12.5	12.5
Presión mínima, x=1500	243.19	156.11	113.25	80.35	12.29
Tiempo	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5
Incremento máximo, x=0, %	26	54	65	75	-
Decremento máximo	31	70	86	99	-
Incremento máximo, x=1500	17	37	46	57	-
Decremento máximo	19	47	61	72	-
$\Delta_{máx\ 1500}/\Delta_{máx\ 0}$	0.61	0.66	0.69	0.70	-

Tabla 4.2
Influencia de la velocidad
(Cierre aguas abajo, t_c = 8 seg)

Velocidad, m/seg	1.00	2.12	2.53	3.06
Diámetro, m	1.75	1.20	1.10	1.00
Presión máxima, x=3500, m	386.25	474.77	508.37	553.58
Tiempo, seg	7.0	7.5	8.0	8.0
Presión mínima, x=3500	221.38	131.91	100.74	61.12
Tiempo	15.0	15.0	15.0	15.0
Presión máxima, x=2000	352.72	414.90	437.40	469.19
Tiempo	8.5	8.5	8.5	9.5
Presión mínima, x=2000	247.81	188.55	167.92	139.89
Tiempo	15.5	15.5	15.5	16.0
Incremento máximo, x=3500, %	30	66	82	108
Decremento máximo	26	54	64	77
Incremento máximo, x=2000	18	42	52	67
Decremento máximo	17	36	42	50
$\Delta_{máx\ 2000}/\Delta_{máx\ 3500}$	0.61	0.65	0.65	0.66

Tabla 4.21 Incrementos de presión en la válvula, calculados con las cartas de Allievi (18), para un cierre aguas abajo

Velocidad, m/seg	Diámetro, m	$\theta = \frac{t_c}{T}$	ρ	$Z^2 = 1 + \frac{\Delta h}{h}$
1.00	1.75	1.143	0.171	1.30
2.12	1.20	1.143	0.377	1.62
2.53	1.10	1.143	0.461	1.79
3.06	1.00	1.143	0.584	1.96

Tabla 4.22 Comparación entre los resultados de la fórmula de Jukowski y los resultados del programa, para un cierre instantáneo

Velocidad, m/seg	Diámetro, m	Δh (Jukowski)	Δh	h_f
1.00	1.75	101.71	103.60	2.03
2.12	1.20	216.32	228.75	13.39
2.53	1.10	257.43	276.64	20.69
3.06	1.00	311.50	342.41	33.32

Fig 4.2
Envolventes de Presiones en la tuberia

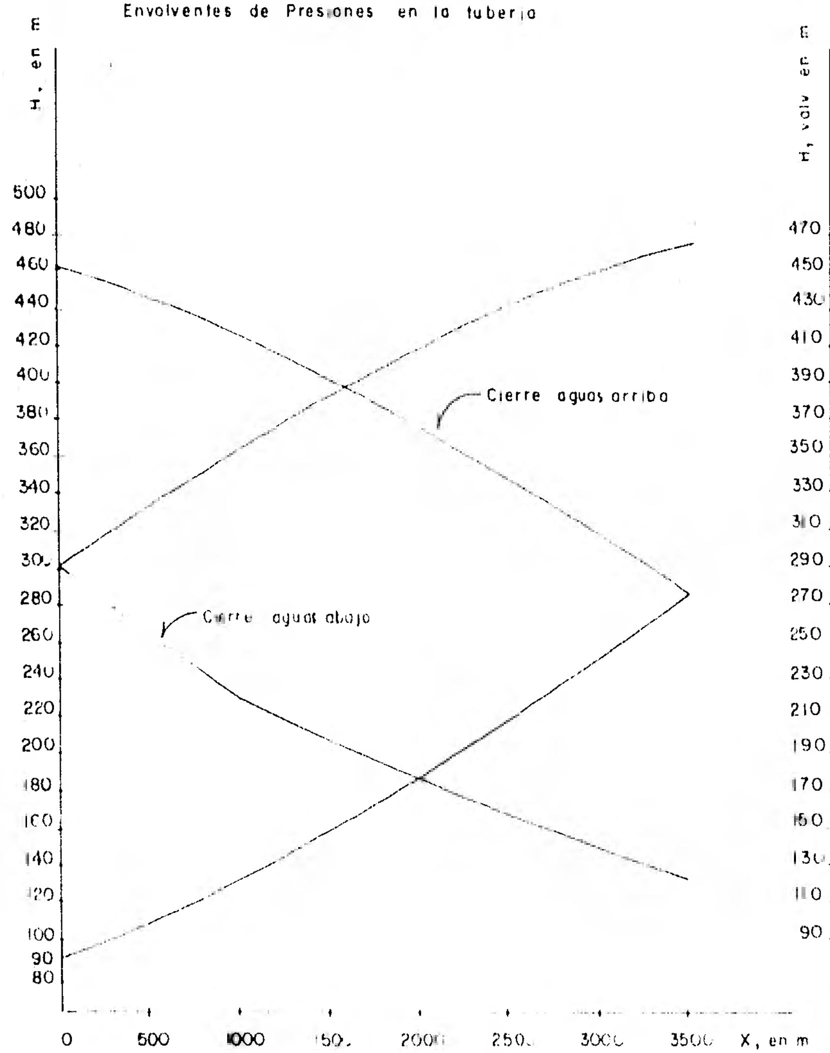
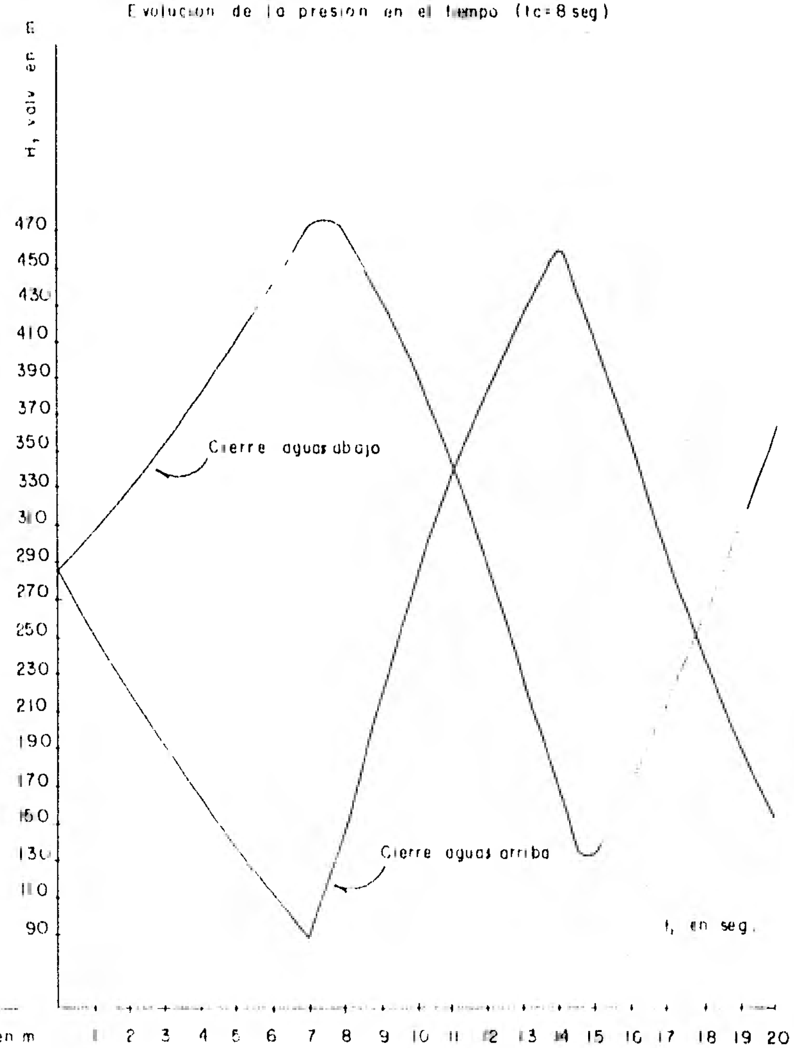


Fig 4.1
Evolucion de la presion en el tiempo (tc=8 seg)



IV.3 Influencia del tiempo de cierre de válvulas

De acuerdo con los resultados de la Tabla 4.51, para tiempos de cierre menores o iguales al período de la tubería (7 seg), las variaciones de la presión son prácticamente las mismas. Para tiempos de cierre mayores, las variaciones van disminuyendo gradualmente. Esto significa que si no queremos que se presenten en la tubería las presiones máximas, debemos pensar en maniobras largas, con tiempos de cierre mayores que $2L/a$ (Figura 4.41).

Ahora bien, independientemente del tiempo de cierre, la máxima presión siempre se presentará en el tiempo $t = 2L/a$ (Tabla 4.51). Por ejemplo, en un cierre aguas abajo, la onda de presión positiva parte en el tiempo cero, comprimiendo el agua hacia aguas arriba; al llegar a la presa, en el tiempo $t = L/a$, se refleja negativamente, oponiéndose ahora al efecto de la onda positiva incidente, regresando el agua a su presión original, viajando hacia aguas abajo causando el mismo efecto, y tardando en llegar a la válvula L/a segundos más. Al encontrar una frontera sólida se reflejará positivamente, y el cambio de presión que provoque la onda reflejada será del mismo signo que el de la onda incidente, por lo que la suma de efectos hará que la disminución en la presión sea el doble de la disminución provocada por la onda incidente, reduciendo la presión por debajo de la original.

En la válvula, por tanto, la presión empezará a aumentar al iniciarse el cierre y no dejará de hacerlo hasta que $2L/a$ segundos después llegue la onda liberadora. Es decir, mientras el agua no haya visto anulada su velocidad en toda la tubería, habrá aún energía disponible para expander la tubería y comprimir al agua. Y a la inversa, mientras el agua no haya reanudado su movimiento (ahora en sentido inverso), no podrá liberarse la energía almacenada para que el agua y la tubería regresen a su estado inicial. Por esta misma razón, los incrementos máximos de la presión se presentarán, en secciones intermedias de la tubería, en tiempos menores que en la válvula: entre L/a y $2L/a$ (Tablas 4.51 y 4.52). En sistemas complicados, o cuando existan reflexiones parciales de ondas, las afirmaciones anteriores no serán necesariamente ciertas.

En la Figura 4.42 se muestra la evolución de la presión en la válvula para distintos tiempos de cierre, menores o iguales a $2L/a$. Durante el tiempo de maniobra la presión crece rápidamente, pero lo hará muy lentamente una vez finalizada aquélla. Este último incremento es debido exclusivamente a la fricción (Tabla 4.53).

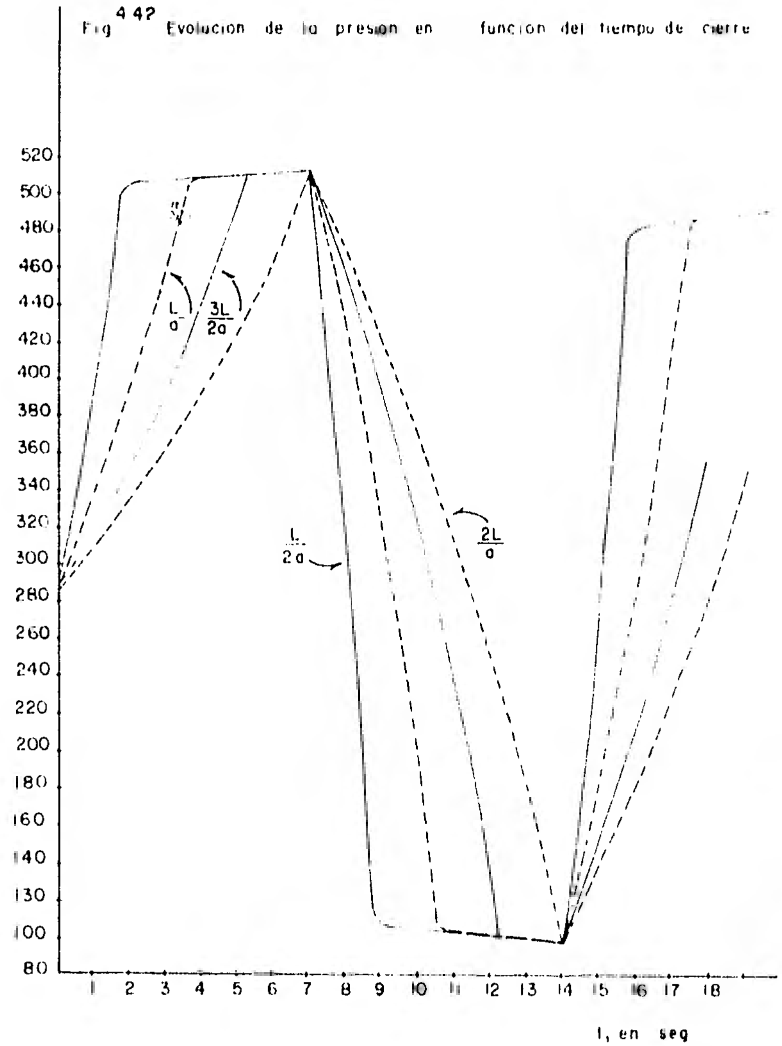


Fig 4.42 Evolucion de la presion en funcion del tiempo de cierre
L/a
3L/2a
L/2a
2L/a
t, en seg

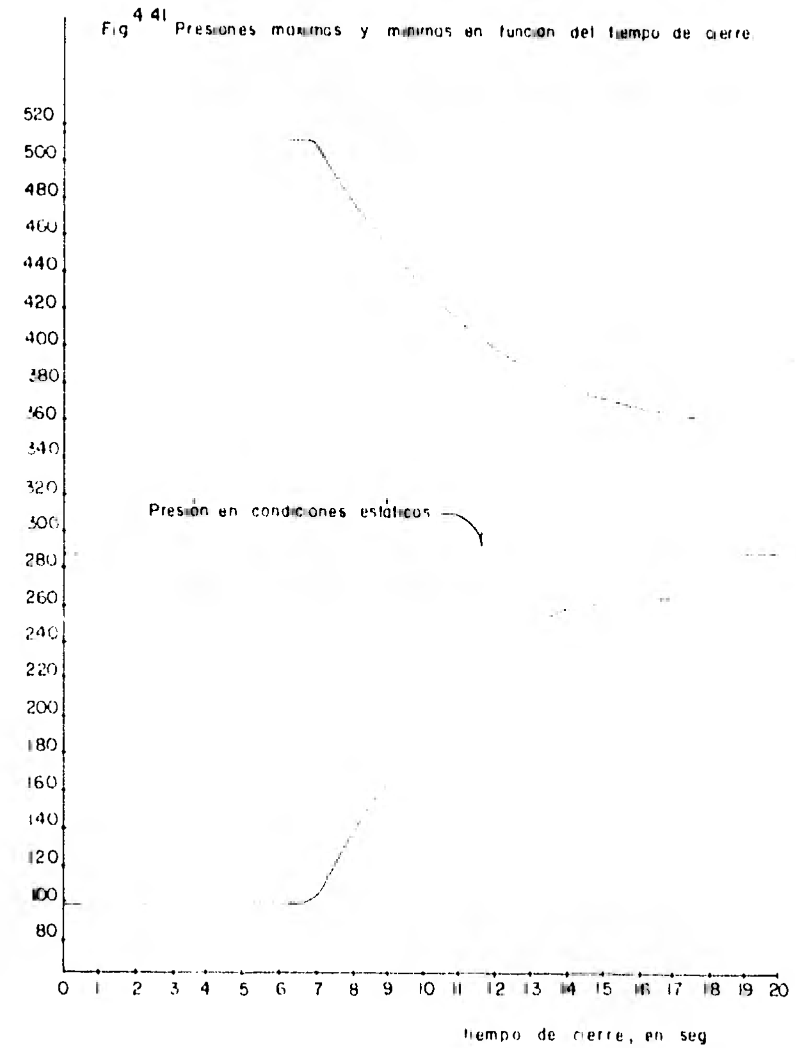


Fig 4.41 Presiones maximas y minimas en funcion del tiempo de cierre
Presion en condiciones estaticas
tiempo de cierre, en seg

IV.4 Influencia de la celeridad de la onda de presión

Señalamos ya en el capítulo anterior que para asegurar la estabilidad de la solución numérica deberá satisfacerse la condición de Courant ($\Delta x \leq a \Delta t$). Para el método de las características con intervalos fijos, convendrá que $\Delta x = a \Delta t$. Ahora bien, cuando en un sistema exista más de una tubería, las longitudes de éstas podrán ser tales que para un Δt y una $\underline{a}$ dados, los múltiplos enteros de Δx no coincidan con la longitud de alguna o algunas tuberías. Dado que el Δt no puede cambiarse, pues debe ser el mismo para todo el sistema, será necesario hacer ligeros ajustes en la celeridad. Veremos ahora cual puede ser el efecto de tales ajustes.

De acuerdo con la expresión de Jukowski (4.51), el incremento de la presión será directamente proporcional a la celeridad. De esta manera, si modificamos la celeridad en un 20%, el incremento de presión se modificará en la misma proporción. Sin embargo, la modificación de la presión total será siempre menor a la modificación de la celeridad y dependiente de la carga inicial. Si esta es por ejemplo de 300 m, para una velocidad de 2.12 m/seg, una celeridad original de 1000 m/seg y una modificación de esta del 20%, la modificación en la presión resulta sólo del 8%. Para modificaciones de la celeridad del 15, 10 y 5 por ciento, la modificación de la presión resulta del 6, 4 y 2%, respectivamente.

Por otra parte, también se modificará el tiempo en el que estas presiones ocurren, al modificarse el período 2L/a de la tubería. Por tanto, el sistema se verá afectado doblemente, pues la variación de la presión será de distinta amplitud y además tendrá un pequeño desfase. Cuando se haga necesaria una modificación de la celeridad, habrá que tener en mente estos efectos en el momento de interpretar los resultados finales.

IV.5 Influencia del intervalo de tiempo

El intervalo de tiempo escogido para los cálculos debe ser tal que cumpla con los siguientes requisitos:

1. Satisfaga la condición de Courant ($\Delta x \leq a \Delta t$) para todos los tubos del sistema.
2. Los resultados del cálculo se aproximen lo más posible a la solución real, es decir, que se introduzcan a intervalos convenientes los cambios que ocurren en las fronteras.
3. Proporcione resultados en un número suficiente de puntos de la tubería, permitiendo emplear distintos espesores a lo largo de ella.
4. El tiempo de cálculo sea razonable.

Evangelisti (8) propone calcular las variables HP y QP en sólo la mitad de los puntos de la malla (Figura 4.3). De esta manera el tiempo de cálculo se reduce a la mitad, aunque los cambios en la fronteras se introducen cada $2\Delta t$. Sin embargo, cuando estos cambios ocurren demasiado rápido, convendrá introducirlos cada Δt y calcular las variables en todos los puntos de la malla (Figura 4.4).

Los resultados para distintos intervalos de tiempo y para una malla como la de la Figura 4.4 se muestran en la Tabla 4.5. Si bien la solución numérica se aproxima a la solución real conforme $\Delta t \to 0$, en este caso la ganancia en precisión al cambiar el intervalo de tiempo de 0.5 a 0.1 seg es mínima, y en cambio el tiempo de cálculo se vuelve 25 veces mayor, pues el número de tramos en la tubería debe crecer al reducirse el intervalo de tiempo, para satisfacer la condición de Courant.

El intervalo de tiempo de 0.5 seg resulta el más recomendable en este caso, aunque de acuerdo con algunos criterios puede parecer grande. Por ejemplo, Evangelisti (8) recomienda que Δt fluctúe entre 1/24 y 1/16 del tiempo de tránsito L/a. Para este caso (L/a = 3.5 seg) los límites del intervalo estarían entre 0.15 y 0.22 seg.

Tabla 4.5

Influencia del intervalo de tiempo
(Cierre aguas abajo, t_c = 8 seg)

Intervalo de tiempo, en seg	0.1	0.5	0.875	1.167
Δx, en m	100	500	875	1167
Número de tramos	35	7	4	3
Presión máxima, x=3500	475.49	474.77	473.87	473.31
Tiempo	7.3	7.5	7.0	7.0
Presión mínima, x=3500	131.30	131.91	136.30	138.84
Tiempo	15.0	15.0	14.88	15.17
Tiempo de cálculo	25	1	0.33	0.18

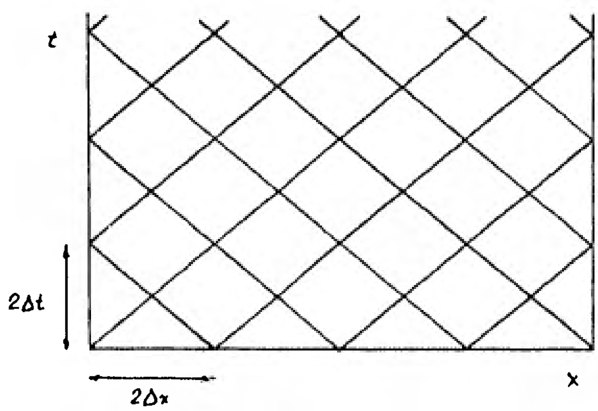


Figura 4.3

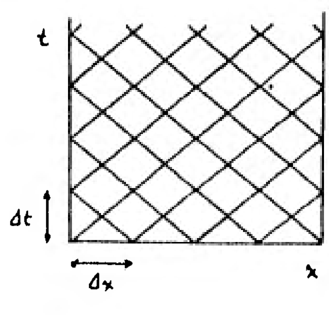


Figura 4.4

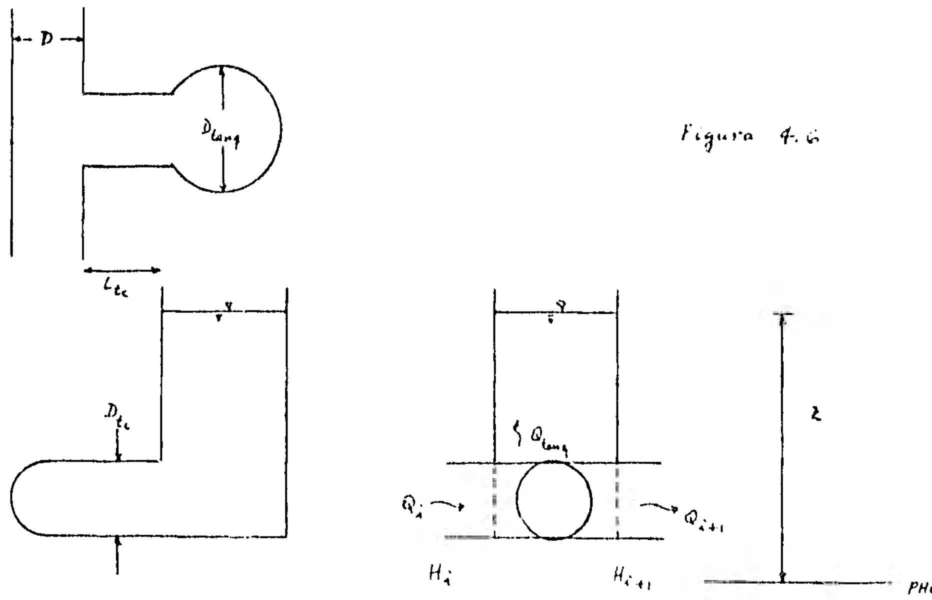


Figura 4.6

IV.5 Influencia de los tanques de oscilación

Se introdujo también en el programa un tanque de oscilación como condición de frontera intermedia (Apéndice 4.2). En ella deben calcularse cinco variables: el gasto inmediatamente antes del tanque de oscilación (QPi), el gasto inmediatamente después del tanque de oscilación (QP_{i+1}), el gasto hacia o desde el tanque (QP_{tanq}), la presión en la tubería en el lugar del tanque (HP_i = HP_{i+1}), y la elevación del agua en el tanque (ZP) (Figura 4.6). Para calcularlas se emplea el método propuesto por Chaudhry (5), modificando ligeramente la ecuación dinámica del tanque, para adaptarla al esquema que aparece en la Figura 4.6 e incorporar pérdidas por entrada y salida.

La ventaja del método de Chaudhry es que permite calcular las oscilaciones en el tanque y a la vez emplear el método de las características en la tubería. Martin (12) propone un método un poco menos preciso que también usa el método de las características pero que no emplea la ecuación dinámica del tanque, -

pues considera iguales la presión en la tubería en el lugar del tanque y la elevación del agua en el tanque.

Las ecuaciones a emplear en esta condición de frontera serán, despreciando la compresibilidad del agua en el tanque y en la tubería de conexión, y de acuerdo con la notación de la Figura 4.5

a. Ecuación característica C^+ $\quad HP_i = CP_i - B_i * QP_i$ (3.10)

b. Ecuación característica C^- $\quad HP_{i+1} = CM_{i+1} + B_{i+1} * QP_{i+1}$ (3.11)

c. Ecuación de continuidad $\quad QP_i = QP_{i+1} + QP_{tanq}$ (4.6)

d. Ecuación de igualdad de cargas $\quad HP_i = HP_{i+1}$ (4.7)

e. Ecuación del nivel de agua en el tanque

$$ZP = Z + \frac{\Delta t}{A_{tanq}} \quad \frac{QP_{tanq} + Q_{tanq}}{2} \qquad (4.8)$$

f. Ecuación dinámica del tanque

$$QP_{tanq} = Q_{tanq} + \frac{g\ A_{tc}\ \Delta t}{L_{tc}} (HP_i - ZP) - \frac{\Delta t}{2\ A_{tc}\ L_{tc}} \left(f\ \frac{L_{tc}}{D_{tc}} + C_{ent}\right) Q_{tanq}/Q_{tanq}/ \qquad (4.9)$$

en las cuales

Z = nivel del agua en el tanque en t

ZP = nivel del agua en el tanque en $t+\Delta t$

A_{tanq} = área transversal del tanque de oscilación

Q_{tanq} = gasto en el tanque en t

QP_{tanq} = gasto en el tanque en $t+\Delta t$

A_{tc} = área transversal de la tubería de conexión

L_{tc} = longitud de la tubería de conexión

C_{ent} = coeficiente de pérdidas por entrada o por salida al o del tanque

D_{tc} = diámetro de la tubería de conexión

Las ecuaciones 3.10, 3.11 y 4.6 a 4.9 forman un sistema de 6 ecuaciones con - 6 incógnitas. Pero como $HP_i = HP_{i+1}$, conviene eliminar la ecuación 4.7 y trabajar con un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas, que podemos escribir - en forma matricial:

$$
\begin{bmatrix} 1 & B1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -B2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -M & 0 & 0 & M & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -U \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} HP \\ QP_i \\ QP_{i+1} \\ ZP \\ QP_{tanq} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} CP \\ CM \\ 0 \\ CT \\ KT \end{bmatrix}
\qquad (4.10)
$$

en donde

$HP = HPi = HP_{i+1}$

$CP = CP_i$

$CM = CM_{i+1}$

$B1 = Bi$

$B2 = B_{i+1}$

$$M = \frac{g\, A_{tc}\, \Delta t}{L_{tc}}$$

$$U = \frac{\Delta t}{2\, A_{tanq}}$$

$$K_{tanq} = Z + U * Q_{tanq}$$

$$C_{tanq} = Q_{tanq} - \frac{\Delta t}{2\, A_{tc}\, L_{tc}} \left(f \frac{L_{tc}}{D_{tc}} + C_{ent}\right) \; Q_{tanq}/Q_{tanq}/$$

Si en la matriz ampliada del sistema 4.10 dividimos el renglón 2 entre -B2, intercambiamos los renglones 2 y 3 y 4 y 5, y convertimos la matriz de coeficientes en una matriz identidad de acuerdo con el procedimiento de Gauss - Jordan obtendremos en el vector de términos independientes la solución del sistema:

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & B \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & C \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & D \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & E
\end{array}\right]
$$

es decir

$$HP = A = CP - B1 * \left[F + (1-G) * \frac{S}{R} \right]$$

$$QPi = B = F - (G-1) * \frac{S}{R}$$

$$QP_{i+1} = C = F - G * \frac{S}{R}$$

$$ZP = D = KT + U * \frac{S}{R}$$

$$QP_{tanq} = E = \frac{S}{R}$$

en donde

$$F = \frac{CP-CM}{B2+B1}$$

$$G = \frac{B1}{B2+B1}$$

$$R = 1 + M \left[B1 * (1-G) + U \right]$$

$$S = CT + M \left[CP - B1 * F - KT \right]$$

Se calcularon los efectos de la presencia de un tanque de oscilación para cierres de válvula tanto en la frontera aguas abajo como en la frontera aguas arriba (Figuras 4.7 y 4.8). Los efectos de la presencia de un tanque de oscilación son los siguientes:

1. Reducen las variaciones de la presión, y pueden evitar la separación de columna (Tabla 4.6).
2. Reducen el período 2L/a del sistema, pues las ondas se reflejarán ahora en la superficie libre del tanque de oscilación. Si el tanque está localizado a 1500 m de la válvula, el período del sistema será ahora de 3 seg. De acuerdo con los resultados del apartado IV.3, cualquier maniobra de cierre de válvulas realizada en un tiempo menor o igual al período del sistema (maniobra corta) origina prácticamente los mismos incrementos en la presión; para maniobras realizadas en tiempos mayores a 2L/a (maniobras largas), éstos disminuyen. Si no deseamos las presiones máximas, debemos pensar en maniobras largas. Cuando contemos con un tanque de oscilación, las maniobras largas serán aquéllas mayores a 3 seg, mientras que en una tubería sin tanque serán aquéllas mayores a 7 seg (Tabla 4.7).
3. Reducen la longitud de tubería sujeta a fluctuaciones considerables de la presión. Estas ocurrirán únicamente entre la válvula y el tanque de oscilación. En el resto de la tubería la variación de la presión es prácticamente insignificante (Figura 4.9).

Las variables del tanque que deben definirse son su diámetro y su localización. A mayores diámetros del tanque corresponderán menores oscilaciones y mayores períodos de éstas (Tabla 4.8 y Figura 4.10). Parmakian (16a) recomienda que el diámetro del tanque sea por lo menos dos veces el diámetro de la tubería.

El tanque deberá localizarse lo más cercano posible a la válvula o a la máquina hidráulica, sobre todo porque así se reducirá la longitud de tubería sujeta a grandes variaciones de la presión. En la Tabla 4.6 y en la Figura 4.9 se muestran los resultados para dos localizaciones de tanque: a 1000 m y a 1500 m de la válvula. Sin embargo, como veremos en el último capítulo, en algunas ocasiones la topografía impedirá localizar el tanque en el sitio más deseable.

FIG 4.9 INFLUENCIA DE LOS TANQUES DE OSCILACION EN LAS ENVOLVENTES DE PRESIONES EN LA TUBERIA

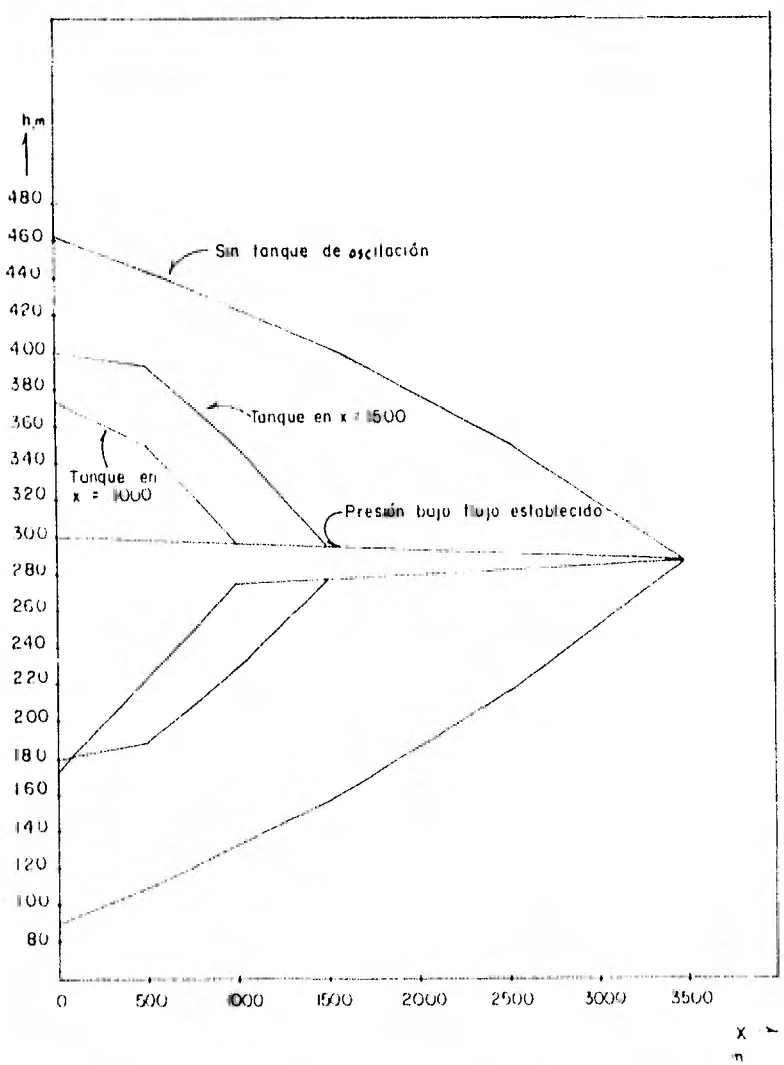
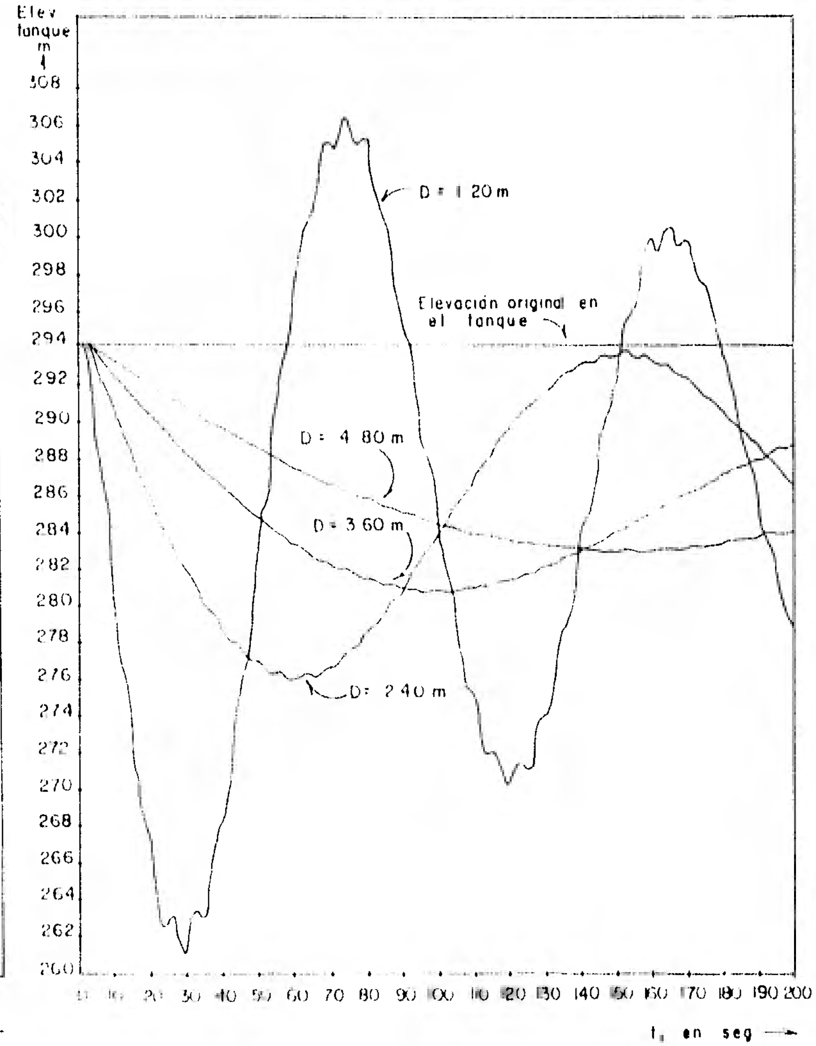


FIG 4.10 EVOLUCION DEL NIVEL AGUA EN EL TANQUE DE OSCILACION, DESPUES DE UN CIERRE DE VALVULA, PARA DISTINTOS DIAMETROS DE TANQUE



En la Figura 4.101 se muestran tanto la evolución del nivel del agua en el tanque de oscilación como la envolvente de los picos de la presión en la válvula, para un cierre aguas abajo en 8 segundos y un tanque de 2.40 m de diámetro ubicado 1500 m aguas arriba de la válvula. El período de las oscilaciones en el tanque es de 180 segundos, mientras que el de las oscilaciones de la presión es de 6 segundos, o 4L/a: las primeras son oscilaciones de masa, y las segundas oscilaciones de carácter elástico.

El comportamiento de las presiones máximas y mínimas en función del tiempo de cierre se muestra en la Figura 4.103.

En la Tabla 4.9 aparecen, para distintos diámetros de tanque, las amplitudes máximas y los períodos de las oscilaciones en el tanque, calculadas con el programa y con las expresiones teóricas (11)

$$z_{máx} = v \frac{D}{D_{tanq}} \sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (4.11)$$

y

$$T = 2\pi \frac{D_{tanq}}{D} \sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (4.12)$$

correspondientes a una tubería sin fricción. En ellas, L representa la distancia entre el tanque y la frontera de carga constante.

Finalmente, siempre que se instale un tanque de oscilación en un sistema, deberá verificarse que el intervalo de tiempo escogido para la tubería sin tanque sea también adecuado para la tubería con tanque, pues la disminución del período del sistema puede hacer conveniente la reducción del intervalo de tiempo. En este caso, los resultados para t = 0.5, 0.25 y 0.1 segundos son prácticamente iguales.

Tabla 4.6 Influencia de los tanques de oscilación (Cierre aguas arriba, t_c = 8 seg)

Diámetro, m	Velocidad m/seg	Presiones máximas en x=0 (Tiempo) Sin tanque	Presiones máximas en x=0 (Tiempo) Tanque x=1500	Presiones mínimas en x=0 (Tiempo) Sin tanque	Presiones mínimas en x=0 (Tiempo) Tanque x=1500
1.75	1.00	376.80 (14.0)		207.69 (7.0)	
1.20	2.12	461.94 (14.0)	399.31 (12.0)	90.09 (7.0)	180.38 (9.0)
1.10	2.53	495.06 (14.0)	443.46 (12.0)	40.95 (7.0)	128.26 (9.0)
1.05	2.77	524.32 (14.0)	480.54 (12.0)	4.00 (7.0)	84.60 (9.0)
1.00	3.06	542.19 (14.0)	543.58 (12.0)	(-32.36) (7.0)	11.10 (9.0)

Tabla 4.7 Influencia del tanque de oscilación, para distintos tiempos de cierre. (Cierre aguas arriba, D = 1.20 m)

Tiempo de cierre, seg	Presión máxima en x=0 (Tiempo) Sin tanque	Presión máxima en x=0 (Tiempo) Con tanque	Presión mínima en x=0 (Tiempo) Sin tanque	Presión mínima en x=0 (Tiempo) Con tanque
3.0	489.75 (14.0)	498.59 (6.0)	73.16 (7.0)	80.54 (3.0)
7.0	489.89 (14.0)	375.27 (12.0)	74.81 (7.0)	176.60 (3.0)
8.0	461.94 (14.0)	399.31 (12.0)	90.09 (7.0)	180.38 (3.0)

Tabla 4.8 Influencia del diámetro del tanque de oscilación

D_{tanq}, m	Presión máx x=0 (Tiempo)	Presión mín x=0 (Tiempo)	Elev máx tanque (Tiempo)	Elev mín tanque (Tiempo)
1.20	385.81 (71.5)	166.07 (26.5)	306.65 (74.5)	260.92 (29.5)
2.40	399.31 (12.0)	180.38 (9.0)	294.26 (0.0)	276.00 (60.0)
3.60	402.31 (12.0)	181.37 (9.0)	294.26 (0.0)	280.81 (102.0)

Tabla 4.9

Comparación entre las oscilaciones teóricas y calculadas y entre los períodos teóricos y calculados

Diámetro del tanque, en m	$z_{máx}$ en m	$z_{máx}$ según 4.11	T_{tanq} en seg	T_{tanq} según 4.12
1.20	33.34	30.30	90	90
2.40	18.26	15.15	180	179
3.60	13.45	10.10	268	269
4.80	11.22	7.57	370	359

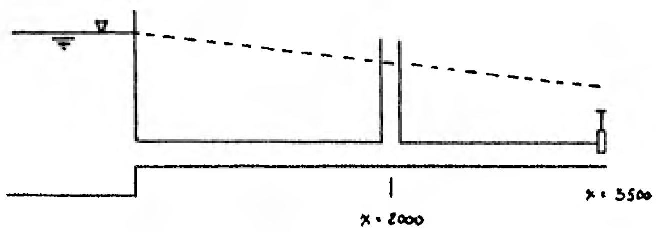


Figura 4.7 Tanque de oscilación en un cierre aguas abajo

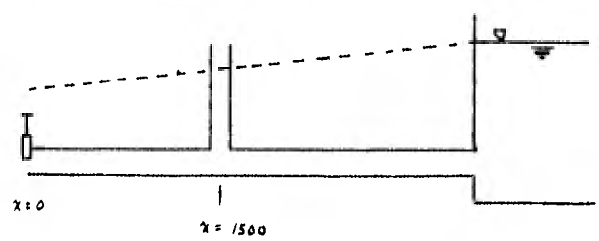


Figura 4.8 Tanque de oscilación en un cierre aguas arriba

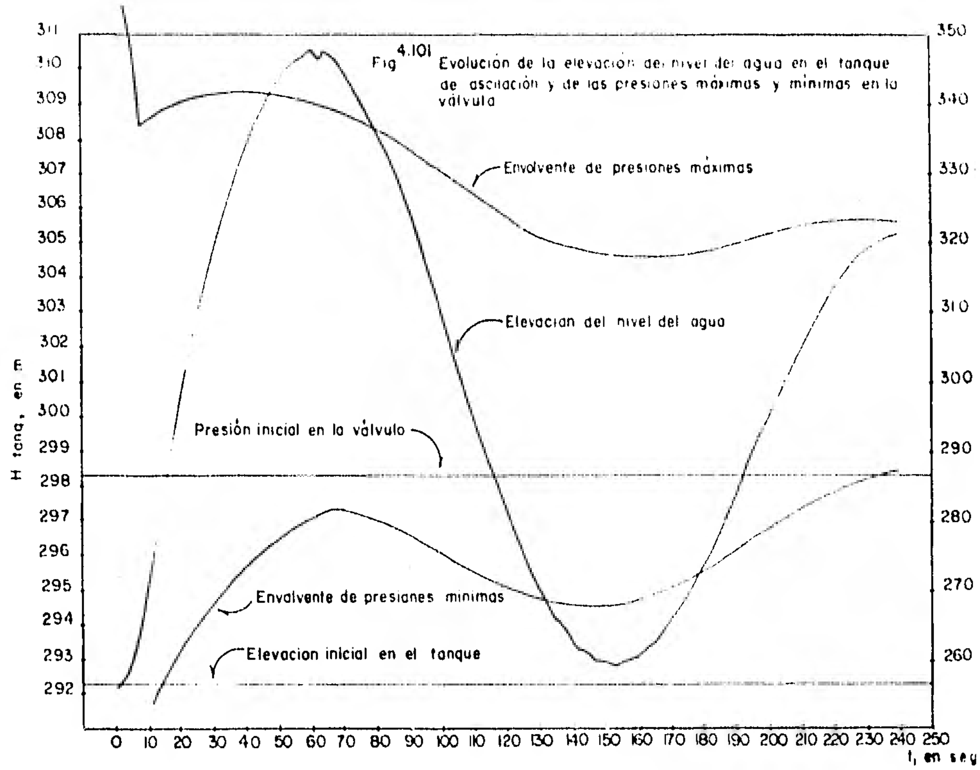


Fig 4.101 Evolución de la elevación del nivel del agua en el tanque de oscilación y de las presiones máximas y mínimas en la válvula

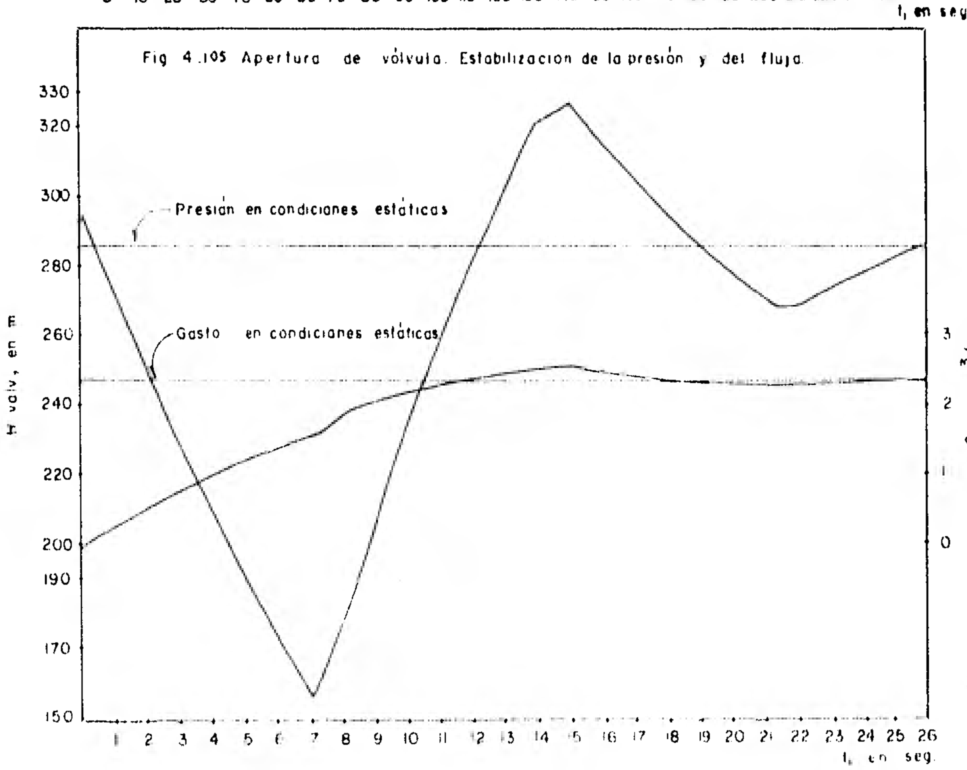
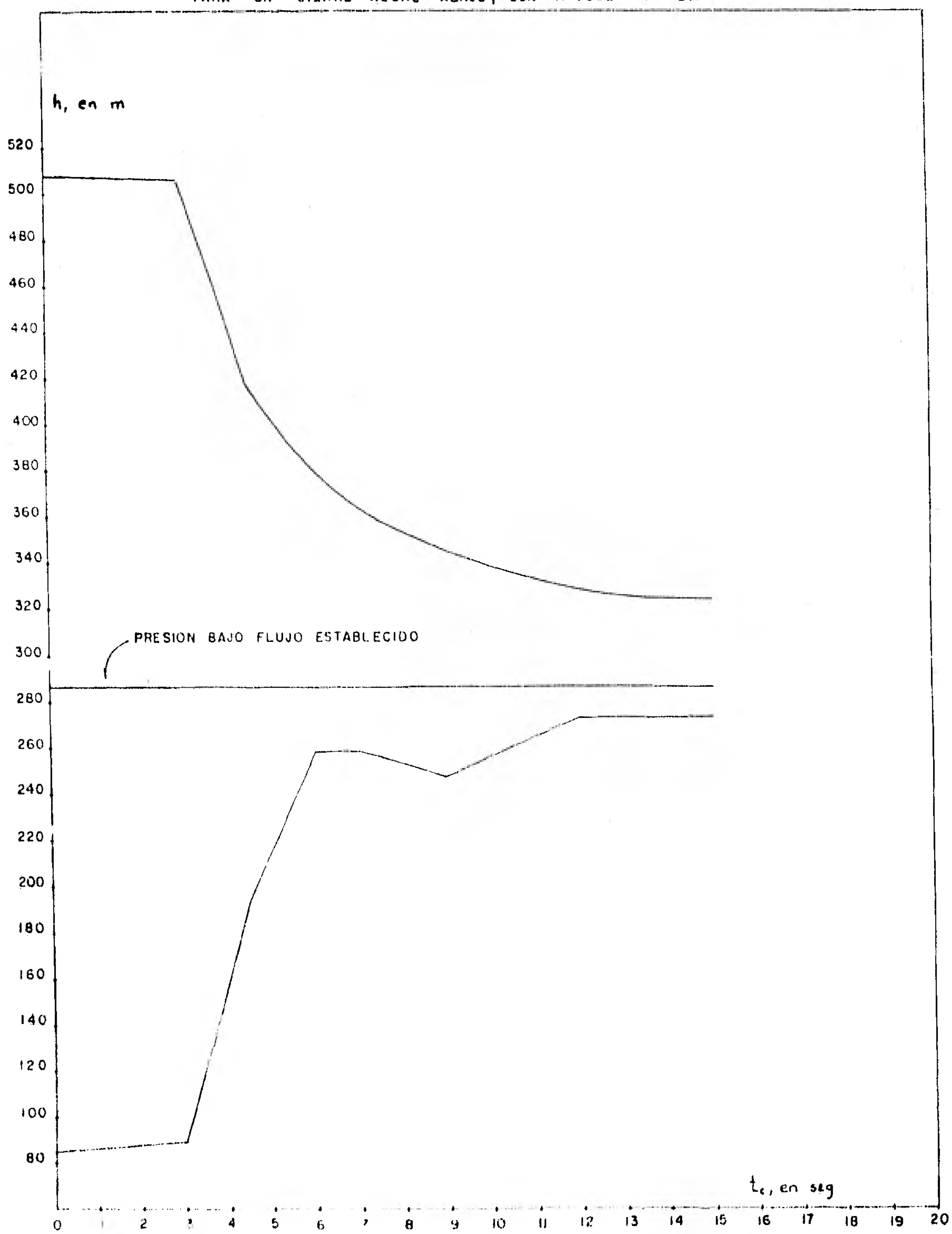


Fig 4.105 Apertura de válvula. Estabilización de la presión y del flujo.

Fig 4 103 PRESIONES MAXIMAS Y MINIMAS, EN FUNCION DEL TIEMPO DE CIERRE, PARA UN CIERRE AGUAS ABAJO, CON TANQUE DE OSCILACION



Apéndice 4.1 Programa para calcular los efectos de un cierre de válvula aguas abajo en una tubería con fricción.

```
  8 PRINT "CALCULO DEL GOLPE DE
    ARIETE EN UNA TUBERIA CON FR
    ICCION"
  9 PRINT "METODO DE LAS CARACTE
    RISTICAS"
 10 PRINT
 20 DIM H(20),P(20),Q(20),G(20),
    A(20),X(20),B(20),T(20)
 30 A=1000
 40 G=9.81
 50 F=.02
 60 H(1)=300
 70 D=1.2
 80 A5=.25*PI*D^2
 90 K1=0
 92 REM K2=NUMERO DE INTERVALOS
    DE TIEMPO ENTRE IMPRESIONES
100 K2=2
110 T0=.5
120 T1=0
122 REM T2=TAU, PORCENTAJE DE AP
    ERTURA DE LA VALVULA
130 T2=1
140 T9=30
142 REM T5=TIEMPO DE CIERRE
150 T5=8
160 Q0=2.4
170 L=3500
172 PRINT "DATOS DEL PROBLEMA"
173 PRINT USING 174 ; Q0,L,T0,D
174 IMAGE "GASTO= ",DD.DD," LO
    NG TUB= ",DDDD.DD," DELTA
    T= ",D.DD," DIAM= ",DD.DD
175 PRINT USING 176 ; A,F,T5
176 IMAGE "CELER= ",DDDD.DD,"
    COEF FRIC= ",D.DDD," T CIE
    RRE= ",DDD.DD
177 PRINT
180 N=L/(A*T0)
190 B=A/(G*A5)
200 R=A*F*T0/(2*G*D*A5^2)
210 P5=F*L*(Q0/A5)^2/(2*G*D*N)
220 FOR I=1 TO N+1
230 H(I)=H(1)-P5*(I-1)
232 A(I)=H(I)
233 X(I)=H(I)
240 Q(I)=Q0
242 T(I)=0
243 B(I)=0
250 NEXT I
260 H0=H(N+1)
261 PRINT "   T   TAU   H(1)   H(
     )   Q(   H("
262 PRINT
263 REM MODIFICAR SUBINDICES SEG
    UN PROBLEMA
270 PRINT USING 271 ; T1,T2,H(1),H(N
    +1)/2+1),Q(N+1),H(N+1)
271 IMAGE DDD.D,DDD.DD,DDDDD.DD,
    DDD.DD,DDDD.DD
290 T1=T1+T0
300 K1=K1+1
310 IF T1>T9 THEN 582
320 REM PUNTOS INTERIORES POR CA
    RACTERISTICAS
330 FOR I=2 TO N
340 H1=H(I-1)+B*Q(I-1)-R*Q(I-1)*
    ABS(Q(I-1))
350 H2=H(I+1)-B*Q(I+1)+R*Q(I+1)*
    ABS(Q(I+1))
360 G(I)=(H1-H2)/(2*B)
370 P(I)=H2+B*G(I)
375 NEXT I
380 REM CONDICIONES DE FRONTERA
390 REM IZQUIERDA
400 P(1)=H(1)
410 G(1)=(P(1)-H(2)+B*Q(2)-R*Q(2
    )*ABS(Q(2)))/B
420 REM DERECHA
430 C1=H(N)+Q(N)*(B-R*ABS(Q(N)))
440 IF T1>=T5 THEN 500
450 T2=1-T1/T5
460 C6=(Q0*T2)^2/H0
470 G(N+1)=-B*C6/2+SQR((B*C6/2)^
    2+C6*C1)
480 P(N+1)=C1-B*G(N+1)
490 GOTO 530
500 G(N+1)=0
510 P(N+1)=C1
520 T2=0
530 FOR I=1 TO N+1
540 H(I)=P(I)
542 Q(I)=G(I)
550 IF H(I)<=X(I) THEN 554
551 X(I)=H(I)
552 T(I)=T1
554 IF H(I)>=A(I) THEN 560
555 A(I)=H(I)
556 B(I)=T1
560 NEXT I
570 IF INT(K1/K2)*K2=K1 THEN 270
580 GOTO 290
582 PRINT
583 PRINT "PRESIONES MAXIMAS Y M
    INIMAS"
590 PRINT
600 PRINT USING 610 ; X((N+1)/2+
    1),X(N+1)
610 IMAGE 12X,DDDD.DD,6X,DDDD.DD
620 PRINT USING 610 ; T((N+1)/2+
    1),T(N+1)
630 PRINT
640 PRINT USING 610 ; A((N+1)/2+
    1),A(N+1)
650 PRINT USING 610 ; B((N+1)/2+
    1),B(N+1)
660 END
```

Apéndice 4.2 Programa para calcular los efectos de un cierre de válvula aguas arriba en una tubería con tanque de oscilación.

```
10 PRINT "CALCULO DEL GOLPE DE
   ARIETE EN UNA TUBERIA CON FR
   ICCION"
20 PRINT "METODO DE LAS CARACTE
   RISTICAS"
30 PRINT "CON TANQUE DE OSCILAC
   ION"
32 PRINT "CIERRE AGUAS ARRIBA"
40 PRINT
50 REM METODO DE LAS CARAC
60 DIM H(2,12),P(2,12),Q(2,12),
   G(2,12),A(2,12),X(2,12),B(2,
   12),T(2,12)
120 A=1000
130 G=9.81
140 F=.02
150 T0=.5
160 T1=0
170 H(1,1)=300
180 H(2,1)=294.262
190 D=1.2
200 A5=.25*PI*D^2
210 REM CARACTERISTICAS DEL TANQ
    UE
212 E=0
214 S=0
220 D6=2.4
230 A6=.25*PI*D6^2
240 REM Q6=GASTO POR EL TANQUE
250 REM H6=ALTURA DEL AGUA EN EL
     TANQUE
260 REM CARACTERISTICAS TUBERIA
    CONEXION
270 L4=10
280 D4=1.2
290 A4=.25*PI*D4^2
300 REM CONSTANTES TANQUE
310 W1=G*A4*T0/L4
320 W2=T0/(2*A6)
340 K1=0
350 REM K2=NUMERO DE INTERVALOS
    DE TIEMPO ENTRE IMPRESIONES
360 K2=2
370 REM T2=TAU PORCENTAJE DE AP
    ERTURA DE LA VALVULA
380 T2=1
390 T9=240
400 REM T5=TIEMPO DE CIERRE
410 T5=8
420 Q0=2.4
430 L(1)=1500
440 L(2)=2000
450 PRINT "DATOS DEL PROBLEMA"
470 PRINT USING 471 : Q0,L(1),L(
    2)
471 IMAGE "GASTO",DDD.DD," LONG
     TUBOS ",2(DDDDDD.DD)
472 PRINT USING 473 : T0,D,A,T5
473 IMAGE "DELTA T ",DDD.DD," DI
    AM ",DDD.DD," CELER ",DDDDD.
    DD," T CIERRE ",DDD.DD
480 PRINT USING 481 : D6
481 IMAGE "DIAM TANQUE ",DDD.DD
490 PRINT USING 491 : E,S
491 IMAGE "COEFS ENTRADA Y SALID
    A ",2(DDD.DD)
500 PRINT
510 N(1)=L(1)/(A*T0)
520 N(2)=L(2)/(A*T0)
530 B=A/(G*A5)
540 R=A*F*T0/(2*G*D*A5^2)
550 REM X=PRESION MAXIMA
560 REM T=TIEMPO PRESION MAXIMA
570 REM A=PRESION MINIMA
580 REM B=TIEMPO PRESION MINIMA
590 FOR J=1 TO 2
600 F(J)=F*L(J)*(Q0/A5)^2/(2*G*D
    *N(J))
610 FOR I=1 TO N(J)+1
620 H(J,I)=H(J,1)-F(J)*(I-1)
630 A(J,I)=H(J,I)
640 X(J,I)=H(J,I)
650 Q(J,I)=Q0
660 T(J,I)=0
670 B(J,I)=0
680 NEXT I
690 NEXT J
700 H0=H(1,1)
710 H6=H(2,1)
720 Q6=0
730 Q1=Q6
740 Q9=Q6
750 A1=H6
760 A9=H6
770 R1=0
780 R9=0
790 S1=0
800 S9=0
810 PRINT
820 PRINT "    T     HV     HTUB
    HTQ     QTQ"
840 PRINT
850 REM MODIFICAR SUBINDICES SEG
    UN PROBLEMA
860 PRINT USING 861 : T1,H(1,1),
    H(2,1),H6,Q6
861 IMAGE DDD.D,      3(DDDD.DD)
    ,DDD.DD
890 T1=T1+T0
900 K1=K1+1
910 IF T1>T9 THEN 1740
920 REM PUNTOS INTERIORES POR CA
    RACTERISTICAS
930 FOR J=1 TO 2
940 FOR I=2 TO N(J)
950 H1=H(J,I-1)+B*Q(J,I-1)-R*Q(J
    ,I-1)*ABS(Q(J,I-1))
960 H2=H(J,I+1)-B*Q(J,I+1)+R*Q(J
    ,I+1)*ABS(Q(J,I+1))
970 G(J,I)=(H1-H2)/(2*B)
980 P(J,I)=H2+B*G(J,I)
```

```
990 NEXT I
1000 NEXT J
1010 REM CONDICIONES DE FRONTERA
1020 REM DERECHA
1030 P(2,N(2)+1)=H(2,N(2)+1)
1040 C1=H(2,N(2))+Q(2,N(2))*(B-R
     *ABS(Q(2,N(2))))
1050 G(2,N(2)+1)=(C1-P(2,N(2)+1)
     )/B
1060 REM IZQUIERDA
1070 C2=H(1,2)-Q(1,2)*(B-R*ABS(Q
     (1,2)))
1080 IF T1>=T5 THEN 1130
1090 T2=1-T1/T5
1100 C6=(Q0*T2)^2/H0
1110 B8=(B*C6/2)^2+C6*C2
1120 IF B8>=0 THEN 1124
1122 B8=0
1124 G(1,1)=B*C6/2+SQR(B8)
1126 P(1,1)=C2+B*G(1,1)
1128 GOTO 1160
1130 G(1,1)=0
1140 P(1,1)=C2
1150 T2=0
1160 REM TANQUE DE OSCILACION
1162 C9=E
1163 IF Q6>=0 THEN 1168
1164 C9=S
1168 W3=T0/(2*L4*A4)*(F*L4/D4+C9
     )
1170 W4=Q6*(1-W3*ABS(Q6))
1180 W5=H6+W2*Q6
1310 X1=H(1,N(1))+B*Q(1,N(1))-R*
     Q(1,N(1))*ABS(Q(1,N(1)))
1320 X2=H(2,2)-B*Q(2,2)+R*Q(2,2)
     *ABS(Q(2,2))
1330 X3=(X1-X2)/(2*B)
1340 X4=.5
1350 X5=W4+W1*(X1-B*X3-W5)
1360 X6=1+W1*(B*(1-X4)+W2)
1380 P(1,N(1)+1)=X1-B*(X3+(1-X4)
     *X5/X6)
1390 P(2,1)=P(1,N(1)+1)
1400 G(1,N(1)+1)=X3-(X4-1)*X5/X6
1410 G(2,1)=X3-X4*X5/X6
1420 H6=W5+W2*X5/X6
1430 Q6=X5/X6
1440 REM H=PRESIONES EN T
1450 REM P=PRESIONES EN T + DELT
     A T
1460 REM Q=GASTOS EN T
1470 REM G=GASTOS EN T + DELTA T
1480 FOR J=1 TO 2
1490 FOR I=1 TO N(J)+1
1500 H(J,I)=P(J,I)
1510 Q(J,I)=G(J,I)
1520 IF H(J,I)<=X(J,I) THEN 1550
1530 X(J,I)=H(J,I)
1540 T(J,I)=T1
1550 IF H(J,I)>=A(J,I) THEN 1580
1560 A(J,I)=H(J,I)
1570 B(J,I)=T1
1580 NEXT I
1590 NEXT J
1600 IF H6<=A9 THEN 1630
1610 A9=H6
1620 R9=T1
1630 IF H6>=A1 THEN 1660
1640 A1=H6
1650 R1=T1
1660 IF Q6<=Q9 THEN 1690
1670 Q9=Q6
1680 S9=T1
1690 IF Q6>=Q1 THEN 1720
1700 Q1=Q6
1710 S1=T1
1720 IF INT(K1/K2)*K2=K1 THEN 86
     0
1730 GOTO 890
1740 PRINT
1742 PRINT "PRESIONES MAXIMAS Y
     MINIMAS"
1743 PRINT
1750 PRINT USING 1800 ; X(1,1),X
     (2,1)
1760 PRINT USING 1800 ; T(1,1),T
     (2,1)
1780 PRINT USING 1800 ; A(1,1),A
     (2,1)
1790 PRINT USING 1800 ; B(1,1),B
     (2,1)
1800 IMAGE 5X,DDDD.DD,     DDDD.D
     D
1802 PRINT
1804 PRINT "ELEVACIONES Y GASTOS
      MAXIMOS Y MINIMOS EN EL TA
     NQUE"
1806 PRINT
1810 PRINT USING 1830 ; A1,A9,Q1
     ,Q9
1820 PRINT USING 1830 ; R1,R9,S1
     ,S9
1830 IMAGE 2(DDDDD.DD),2(DDDD.DD
     )
1840 END
```

CAPITULO V

SOLUCION NUMERICA EN SISTEMAS DE BOMBEO

V.1 Principales efectos del golpe de ariete en sistemas de bombeo.

Hablamos en el capítulo anterior de la influencia de distintas variables y condiciones de frontera en la magnitud de los incrementos de presión en la tubería. En este capítulo analizaremos los principales efectos del golpe de ariete en sistemas de bombeo, que incluyen, además de los efectos en la tubería, los efectos en las bombas.

Al cesar el suministro de energía a una bomba, ya sea accidental o intencionalmente, ésta continuará rotando debido a su inercia exclusivamente, disminuyendo su velocidad de rotación, el gasto que sale de ella y la carga añadida a éste. La velocidad y el gasto seguirán descendiendo lentamente (Figura 5.1), hasta que el gasto se invierta y empiece a disipar la energía de rotación que aún le quede a la bomba, terminando por invertir esta rotación y hacer que la bomba trabaje como turbina. Finalmente, el gasto inverso llegará a un mínimo (o a un máximo en su valor absoluto), y empezará a aproximarse a cero. Algún tiempo después, la rotación en reversa de la bomba llegará también a un mínimo (o a una velocidad máxima en reversa), y empezará a perder velocidad, hasta llegar a detenerse.

Las características de cada sistema incidirán directamente en esta secuencia

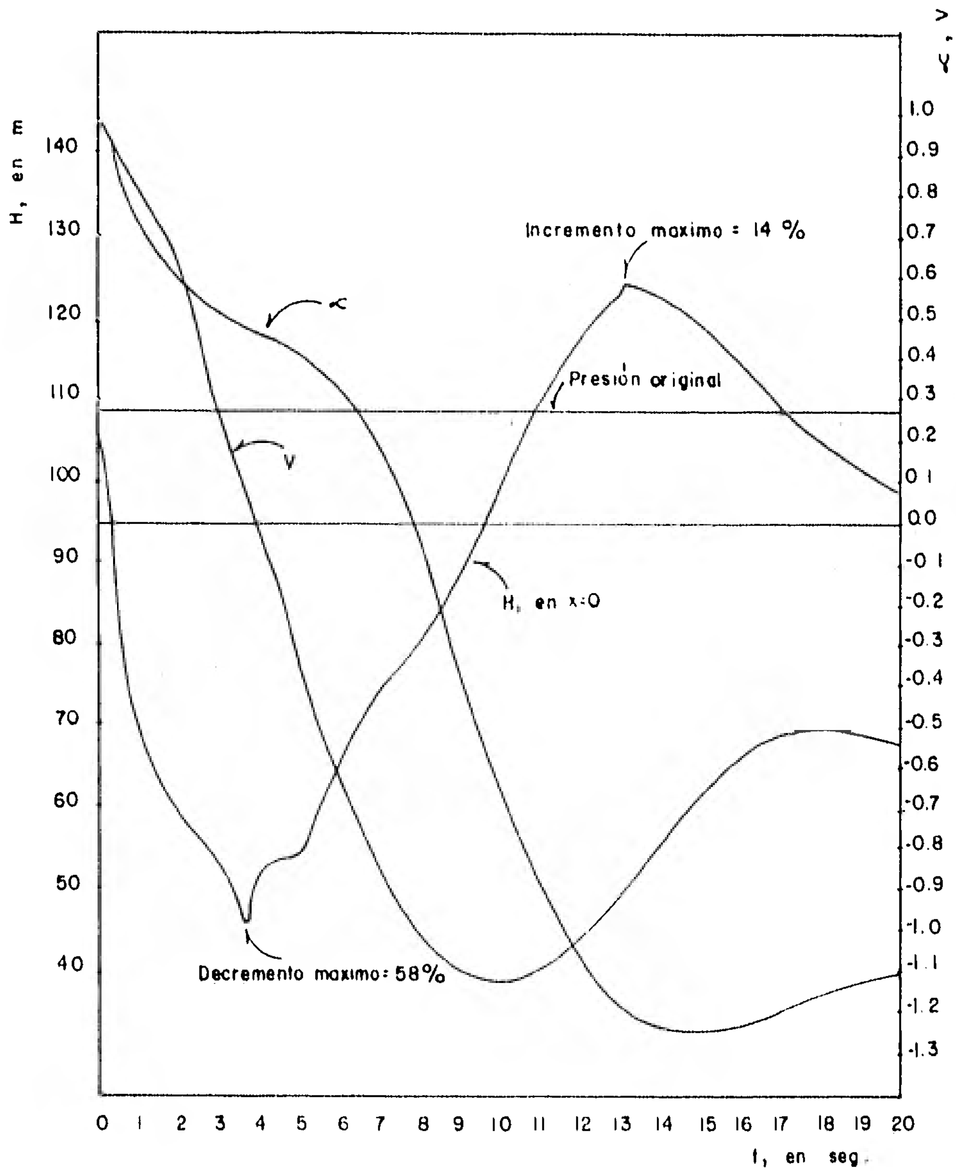


Fig. 5.1

Evolucion de la presion y de las relaciones N/ND (α) y Q/QD (v), para una falla de energia sin cierre de valvula (ejemplo 2).

de eventos. Entre las principales variables que pueden afectarla se encuentran: el momento de inercia de toda la masa en rotación; la duración del cierre de la válvula, en caso de realizarse; la presencia de un tanque de oscilación; la magnitud de la carga dinámica y, dentro de ésta, el peso relativo de la carga de gravedad y de la carga de fricción. Su influencia respectiva será tratada en el apartado 5 de este capítulo.

Dentro de la tubería, la interrupción del flujo de energía provoca la emisión de una onda negativa de presión hacia aguas abajo, que origina a su paso una disminución en la presión. Esta onda se reflejará en el depósito de descarga de la tubería o en el tanque de oscilación, y regresará como onda positiva, causando ahora incrementos de presión. La onda continuará reflejándose en las fronteras de la tubería, hasta que la fricción atenúe sus efectos y el sistema llegue al reposo.

Ahora bien, en los sistemas de bombeo algunos tramos de la tubería se encuentran relativamente cercanos al gradiente hidráulico: los tramos elevados o "picos" de la línea, los tramos próximos al depósito de descarga de la tubería y la tubería de succión de la bomba. Es por tanto muy probable que la onda negativa haga descender las presiones en esos tramos por debajo de la presión de vaporización del agua * (Tablas 5.1), originando lo que se conoce como separación de la columna de agua, debido a que las cavidades de vapor que se forman llegan a ocupar toda la tubería en una cierta extensión. Estas cavidades crecen hasta alcanzar un tamaño máximo, y luego decaen; las dos columnas de agua se reunen de nuevo, mediante un choque que provoca una sobrepresión considerable.

---

* Esta es de aproximadamente -10 m, para temperaturas del agua entre 20 y 25°C.

Tabla 5.1a Presiones de vaporización del agua, a distintas temperaturas, al nivel del mar.

Temperatura, en ^{o}C	Presión de vaporización, en m de agua
0	- 10.27
5	- 10.24
10	- 10.21
15	- 10.16
20	- 10.09
25	- 10.01
30	- 9.90
40	- 9.58
50	- 9.07
60	- 8.30
70	- 7.15
80	- 5.50
90	- 3.18
100	0.00

Tabla 5.1b Presiones de vaporización del agua, a 20 ^{o}C, para distintas alturas sobre el nivel del mar.

Elevación, msnm	Presión de vaporización, en m de agua
0	- 10.09
500	- 9.45
1000	- 8.85
1500	- 8.29
2000	- 7.76

La mayoría de los autores recomiendan evitar los tramos de tubería sujetos a separación de columna. En general se busca protegerlos y aislarlos de los - efectos del golpe de ariete mediante tanques de oscilación.

En lo que toca a la bomba, el principal inconveniente que puede presentarse - es que la máxima velocidad admisible en reversa sea excedida. Esta velocidad, que de alcanzarse daña seriamente a la bomba, varía entre un 120 y un 150 por ciento de la velocidad normal de rotación, y debe ser proporcionada por el fabricante. Para evitar excederla, puede aislarse la bomba cerrando una válvula que se coloca inmediatamente aguas abajo de ella, buscando a la vez que el tiempo de cierre sea tal que no origine presiones indeseables en la tubería - de descarga.

V.2 Curvas características modificadas de las bombas.

Para poder simular el comportamiento de una bomba durante un fenómeno transitorio, debemos contar con algún tipo de curvas que puedan proporcionarnos valores de las variables de interés durante las distintas etapas de operación - que se sucederán durante el fenómeno.

Antiguamente, al analizar problemas de golpe de ariete en sistemas de bombeo se empleaban las curvas características de la bomba (Figura 5.2) en tediosos cálculos aritméticos (18), o bien los diagramas característicos para bombas con distintas velocidades específicas, publicados por primera vez por Knapp en 1937 (6), con los cuales podían construirse nuevos diagramas homólogos -- adimensionales para la carga y el par motor: $\frac{h}{\alpha^2}$ vs $\frac{v}{\alpha}$, $\frac{h}{v^2}$ vs $\frac{\alpha}{v}$, $\frac{\beta}{\alpha^2}$ vs $\frac{v}{\alpha}$ y $\frac{\beta}{v^2}$ vs $\frac{\alpha}{v}$, siendo h la relación entre la carga y la carga de diseño, β

la relación entre el par motor y el par motor de diseño, ν la relación entre el gasto y el gasto de diseño y α la relación entre la velocidad de rotación y la velocidad de rotación de diseño. Su adaptación a cálculos numéricos (22) no entusiasmaba a nadie, pues era necesario alimentar a la computadora con todas esas curvas y su manejo dentro del programa traía consigo grandes problemas de subindización.

Afortunadamente, en un artículo publicado en 1974, Streeter (27) presentó un nuevo método para tratar los problemas de golpe de ariete en sistemas de bombeo, en el que la información de las curvas características de las bombas (Figura 5.2) se sintetizaba en dos curvas: $h/(\alpha^2 + \nu^2)$ contra π + arc tan $\frac{\nu}{\alpha}$, llamada curva WH, y $\beta/(\alpha^2 + \nu^2)$ contra π + arc tan $\frac{\nu}{\alpha}$, llamada curva WB (Figuras 5.5 y 5.6), y se lograba además que ambas fueran compatibles con las ecuaciones que describían el comportamiento de la bomba.

Las curvas WH y WB se construyen a partir de curvas adimensionales, llamadas curvas características de la bomba (Figura 5.2), que deben ser entregadas por el fabricante al adquirir una bomba. En ellas se grafican las curvas correspondientes al funcionamiento de la bomba para distintos porcentajes (en este caso 0, 25, 50, 75, 100 y 125%) de la carga de diseño y del par motor de diseño, con ν y α en los ejes coordenados. Cada cuadrante representa una forma de operación distinta de la bomba (Figura 5.3). Al ser detenida, la bomba recorrerá los cuadrantes de la gráfica en sentido opuesto a las manecillas del reloj, como se muestra en la figura.

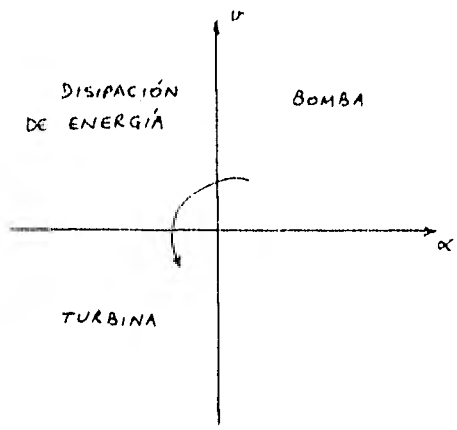


FIGURA 5.3

A las curvas WH y WB, también adimensionales, las llamaremos curvas características modificadas de las bombas. En ellas cada forma de operación de la bomba estará representada por un intervalo del eje $\pi + \arctan \frac{v}{\alpha}$ (Figura 5.4). Se han publicado curvas "promedio" WH y WB para distintas velocidades específicas de bombas (5, 27, 29), que pueden usarse cuando no se disponga de datos, aunque es preferible calcularlas a partir de las curvas características de la bomba en cuestión.

En las Figuras 5.5 y 5.6 se grafican tanto las curvas promedio para una velocidad específica de 35 (SI) como las curvas calculadas * a partir de la Figura 5.2, que corresponden a una velocidad específica de 29 (SI). Se considera (27, 29) que con 88 puntos equidistantes a lo largo del eje $\pi + \arctan \frac{v}{\alpha}$ queda convenientemente definida una curva WB o WH.

---

* Frecuentemente, las curvas calculadas deben ser suavizadas a mano.

FIG. 5.2 CURVAS CARACTERISTICAS DE UNA BOMBA CON VELOCIDAD ESPECIFICA = 29(SI) Ω 1500 (UNIDADES INGLESAS)

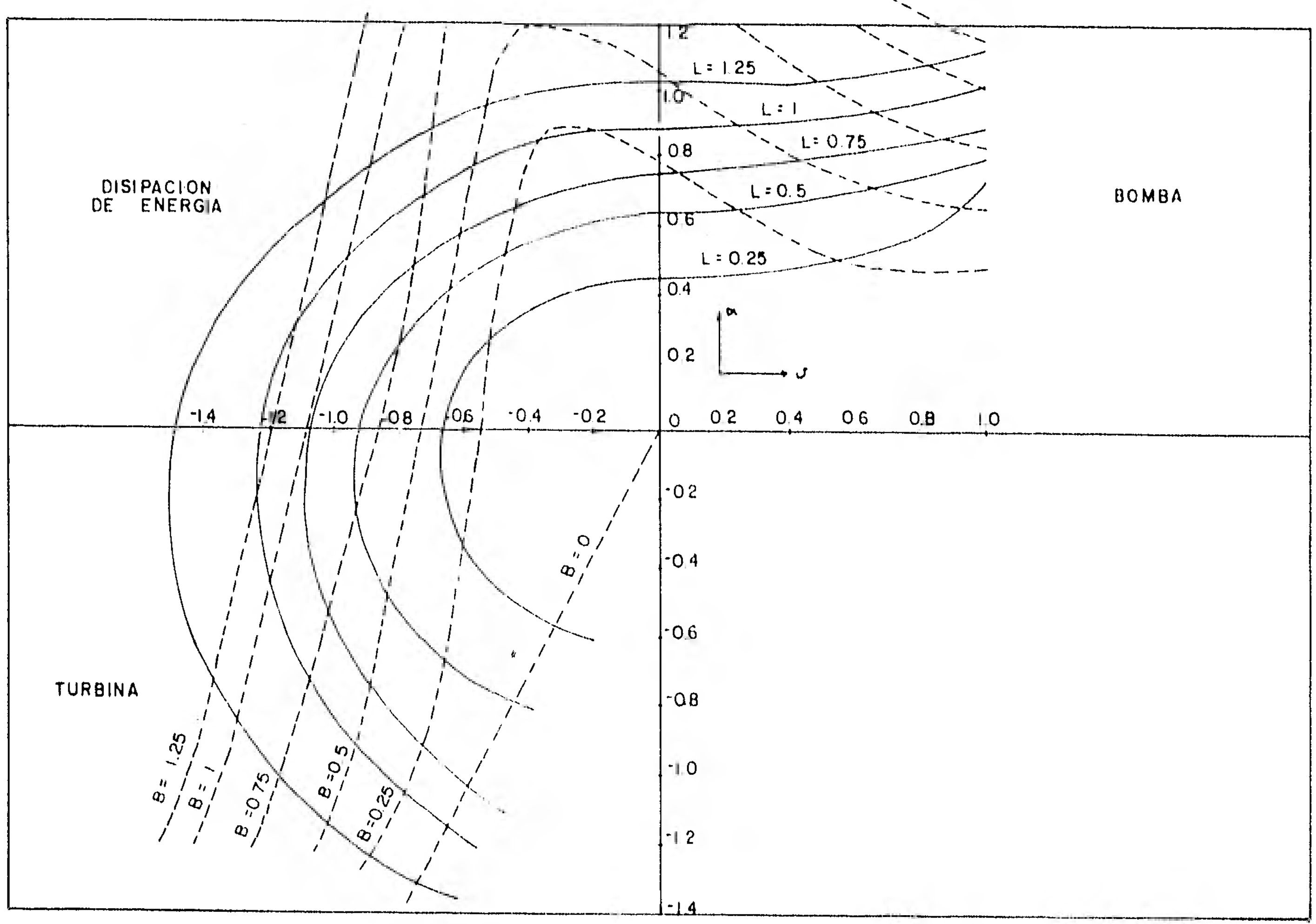


Fig 5.5 Curvas W H —— Publicados para Ns = 35 (SI) - - - calculados a partir de la fig. 5.2 para Ns = 29(SI)

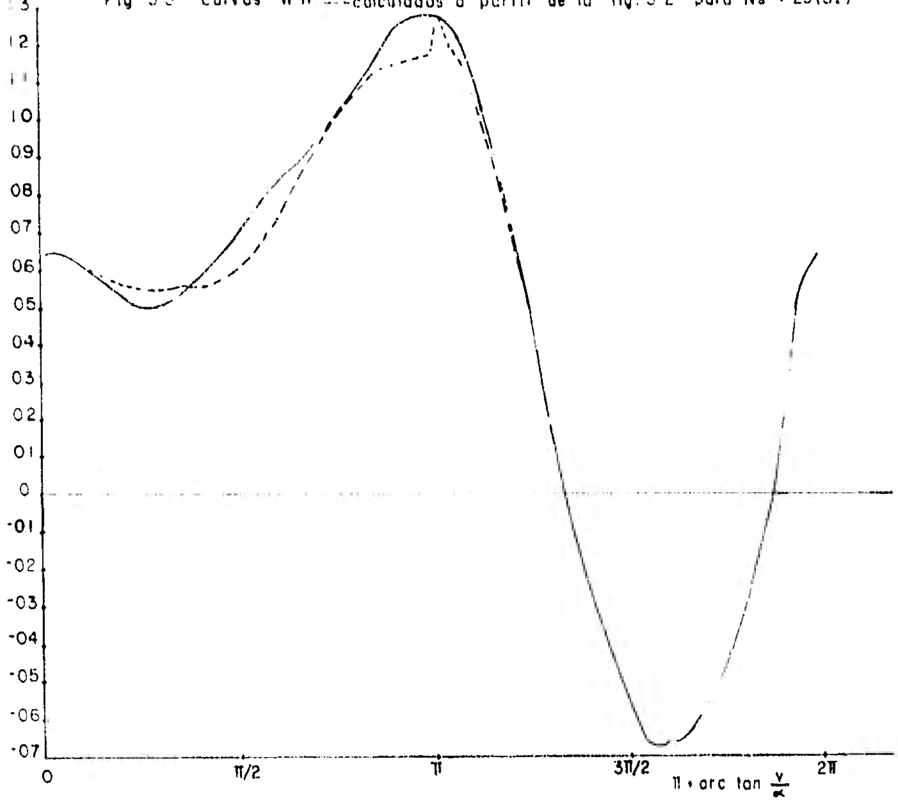
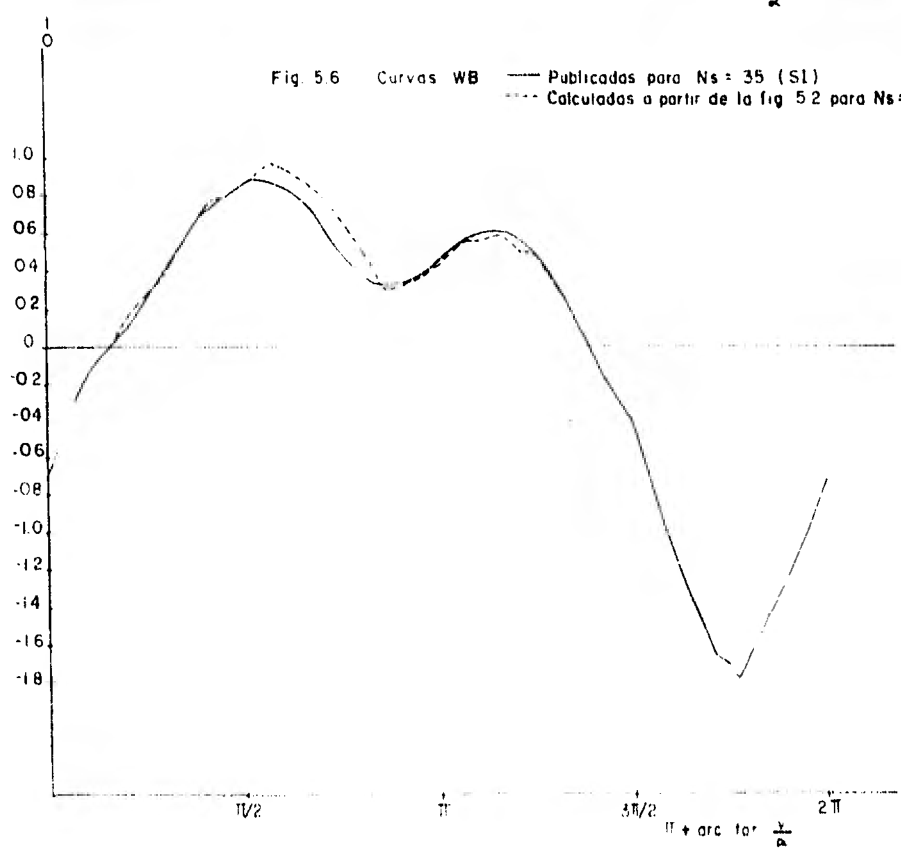


Fig. 5.6 Curvas WB —— Publicadas para Ns = 35 (SI) - - - Calculadas a partir de la fig 5.2 para Ns = 29(SI)



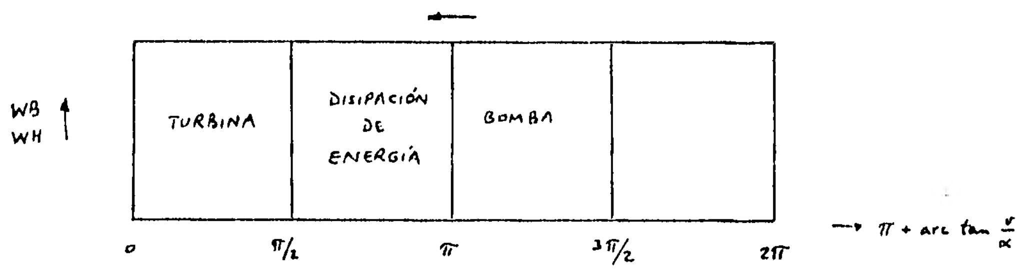


FIGURA 5.4

V.3 Ecuación de movimiento de la rueda y ecuación de balance de cargas.

La deducción de ambas ecuaciones puede encontrarse en las referencias 5, 27 y 29, aunque la repetiremos aquí en sus líneas generales.

a. Ecuación de balance de cargas (Figura 5.7)

$$H_{succión} + \text{Carga dinámica total} - \text{Pérdidas válvula} = H_{descarga} \quad (5.1)$$

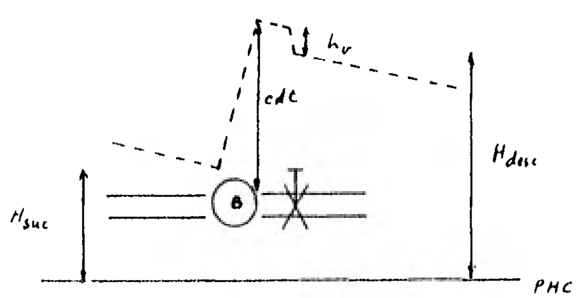


FIGURA 5.7

De C^+ (3.10) , $$H_{succión} = HP_{j,i+1} = CP_j - B_j * QP_{j,i+1} \qquad (5.2)$$

De C^- (3.11) , $$H_{descarga} = HP_{j+1,1} = CM_{j+1} + B_{j+1} * QP_{j+1,1} \qquad (5.3)$$

$$\text{Carga dinámica total} = H_{diseño} * h$$

$$= H_{dis}\ (\alpha^2+\nu^2)\left[A_o + A_1(\pi+\text{arc tan}\ \frac{\nu}{\alpha})\right] \qquad (5.4)$$

donde $A_o + A_1\ (\pi+\text{arc tan}\ \frac{\nu}{\alpha})$ es una interpolación lineal en la curva WH

$$\text{Pérdidas en la válvula} = \frac{\Delta H\ \nu/\nu/}{\tau^2} \qquad (5.5)$$

Al no haber capacidad de almacenamiento en la bomba, el gasto de entrada es igual al gasto de salida,

$$QP_{j,i+1} = QP_{j+1,1} = \nu * Q_{diseño} \qquad (5.6)$$

Sustituyendo 5.2 a 5.6 en 5.1,

$$F1 = CP_j - CM_{j+1} - \nu\ Q_{dis}\ (B_j + B_{j+1}) +$$

$$+ H_{dis}\ (\alpha^2+\nu^2)\left[A_o + A_1\ (\pi + \text{arc tan}\ \frac{\nu}{\alpha})\right] - \frac{\Delta H\ \nu/\nu/}{\tau^2} = 0 \qquad (5.7)$$

b. Ecuación de movimiento de la rueda

$$T = -\frac{WR^2}{g}\ \frac{dw}{dt} \qquad (5.8)$$

donde T = par motor promedio

w = velocidad de rotación, en rad/seg

WR^2 = momento de inercia de la masa en rotación

Si $w = \frac{2\pi\ N_{dis}\ \alpha}{60}$, $\beta_o = \frac{T_o}{T_{dis}}$ y $\beta = \frac{T_p}{T_{dis}}$

en las que T_o = par motor en t

T_p = par motor en $t+\Delta t$

T_{dis} = par motor de diseño

N_{dis} = velocidad de rotación de diseño, en rpm,

entonces $$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{2\pi\ N_{dis}}{60}\ \frac{\alpha - \alpha_o}{\Delta t} \qquad (5.9)$$

donde α y α_o son la relación N/N_{dis} en $t+\Delta t$ y t, respectivamente,

y $$T = \frac{T_o+T_p}{2} = \frac{T_{dis}}{2}\ (\beta_o+\beta) \qquad (5.10)$$

Sustituyendo 5.9 y 5.10 en 5.8, y despejando β ,

$$\beta = \frac{WR^2}{g}\ \frac{\pi}{15}\ \frac{N_{dis}}{T_{dis}}\ \frac{\alpha_o-\alpha}{\Delta t} - \beta_o$$

$$= CBB\ (\alpha_o-\alpha)\ - \beta_o \qquad (5.11)$$

Como además $\beta = (\alpha^2+\nu^2)\left[B_o + B_1\ (\pi + \text{arc tan}\ \frac{\nu}{\alpha})\right]$ (5.12)

donde $B_o + B_1\ (\pi + \text{arc tan}\ \frac{\nu}{\alpha})$ es una interpolación lineal en la curva WB, tendremos finalmente

$$F2 = (\alpha^2+\nu^2)\left[B_o + B_1\ (\pi + \text{arc tan}\ \frac{\nu}{\alpha})\right] + \beta_o - CBB\ (\alpha_o-\alpha) = 0 \qquad (5.13)$$

Las ecuaciones 5.7 y 5.13 (F1=0 y F2=0) forman un sistema de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas, α y ν. Por ser no lineales, es necesario resolverlas numéricamente con el método de Newton-Raphson. El sistema

$$F1 + \frac{\partial F1}{\partial \nu} \Delta\nu + \frac{\partial F1}{\partial \alpha} \Delta\alpha = 0$$

$$F2 + \frac{\partial F2}{\partial \nu} \Delta\nu + \frac{\partial F2}{\partial \alpha} \Delta\alpha = 0 \qquad (5.14)$$

se resuelve para $\Delta\nu$ y $\Delta\alpha$, con cuyos valores se incrementarán ν y α antes de efectuar la iteración siguiente. La primera aproximación de ν y α en t+Δt se calcula incrementándolas en la misma medida en que se incrementaron entre t-Δt y t:

$$\nu_n = \nu_{n-1} + \delta\nu = \nu_{n-1} + (\nu_{n-1} - \nu_{n-2}) = 2\nu_{n-1} - \nu_{n-2}$$

$$\alpha_n = 2\,\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}$$

El proceso iterativo de Newton-Raphson * se detiene cuando la diferencia entre dos valores sucesivos de las variables sea menor que una tolerancia establecida, por ejemplo 0.0001.

Una vez conocidos α y ν pueden calcularse los gastos $QP_{j,i+1}$ y $QP_{j+1,1}$ mediante 5.6 y las cargas $HP_{j,i+1}$ y $HP_{j+1,1}$ con las ecuaciones características 5.2 y 5.3.

V.4 Mecanismos y estructuras de atenuación del golpe de ariete.

Normalmente, los sistemas en los que se presentan problemas de golpe de ariete, consisten en tuberías, válvulas y máquinas hidráulicas. El objeto de

---

* La necesidad de iterar en la frontera para cada intervalo de tiempo prácticamente elimina la posibilidad de emplear esquemas implícitos en el caso de transitorios en bombas.

simular el comportamiento del sistema ante distintas causas que provocan golpe de ariete será el proteger y diseñar convenientemente sus elementos.

En el caso de las tuberías, su espesor y su esfuerzo de fluencia deben ser suficientes para resistir las presiones máximas y mínimas. Las válvulas también están diseñadas para resistir cierta presión máxima que no debe excederse. Finalmente, debe verificarse que las bombas no sobrepasen su máxima velocidad permisible en reversa.

Cuando el análisis de un arreglo propuesto para un sistema de bombeo arroja sobrepresiones o subpresiones excesivas o sobrevelocidad excesiva en reversa, deberá modificarse la operación de los mecanismos de control, como las válvulas, o introducir otras estructuras que atenúen los efectos del golpe de ariete, como los tanques de oscilación o las cámaras de aire.

Por ejemplo, si en un primer análisis obtenemos una sobrevelocidad excesiva en reversa en las bombas, puede colocarse una válvula en la descarga de cada una de las bombas, que empezarán a cerrarse automáticamente al ocurrir una falla de energía o al detener intencionalmente la bomba. Pueden probarse distintos tiempos de cierre hasta encontrar uno que no rebase la máxima sobrevelocidad en reversa ni las presiones máximas o mínimas admisibles en la tubería. Como se verá en ejemplos de capítulos posteriores, un tiempo de cierre pequeño en la válvula de descarga disminuirá la sobrevelocidad en reversa de la bomba, o incluso no permitirá que su rotación se invierta, pero en cambio tendremos en la tubería incrementos de presión mayores que los que resultan de tiempos de cierre grandes, aunque con éstos la velocidad en reversa puede ser excesiva.

Será pues necesario encontrar un tiempo de cierre que concilie ambos efectos, y la manera de encontrar este tiempo es simplemente probar distintos tiempos de cierre.

En general son muy raros los casos en los cuales no es necesario colocar válvulas en la descarga de las bombas, pues la sobrevelocidad en reversa resulta superior a la máxima admisible, aunque puede prescindirse de ellas en las tuberías de muy poca pendiente, en las que la carga de fricción sea la principal componente de la carga dinámica total.

Los sistemas de bombeo operarán en general durante una parte del día únicamente, por lo que serán necesarias frecuentes maniobras de arranque y de paro. Si las bombas son arrancadas o detenidas de manera programada, es decir si las maniobras se realizan dejando un intervalo de tiempo entre una bomba y otra, tanto la velocidad en reversa como las máximas y mínimas presiones se reducirán apreciablemente, como puede verse en un ejemplo del capítulo siguiente. Nuevamente, la manera de encontrar el intervalo más conveniente entre los paros o arranques de las bombas es probando distintos intervalos. Este tipo de maniobras sólo son necesarias -y factibles- en sistemas de bombeo con un gasto considerable, es decir, con un número grande de bombas.

El efecto tanto de los tanques de oscilación como de las cámaras de aire es reducir la longitud de la tubería sujeta a incrementos de presión, y la magnitud de éstos. Esta reducción de la longitud efectiva de la tubería trae como consecuencia la reducción del período del sistema, y con ello la reducción del tiempo mínimo de maniobras con lo que éstas se simplifican, sobre todo en el caso de conducciones muy largas. Las cámaras de aire presentan problemas de diseño y mantenimiento bastante complejos, además de que no son recomendadas por algunos autores (16a), por lo que preferiremos los tanques de oscilación, cuyo único problema puede ser su altitud excesiva, sobre todo en sistemas que no cuentan con una topografía favorable.

V.5 Influencia del perfil de la tubería, del peso relativo de la carga de gravedad y de la carga de fricción, y del momento de inercia de la bomba.

Podemos separar las conducciones de agua a presión en dos grandes grupos: aquéllas en las que predomina la carga de gravedad y aquéllas en las que predomina la carga de fricción. En general las primeras son conducciones cortas y de pendiente fuerte, mientras que las segundas son largas y de muy poca pendiente.

En los sistemas en que domine la carga de gravedad los principales problemas serán originados por la inversión del flujo y de la rotación de la bomba y de las altas presiones que se presentan después de la inversión del flujo, sobre todo cuando se realizan cierres de válvulas después del paro de la bomba (podemos ver en la Figura 5.1 y en los resultados de los ejemplos 1 y 2 que el tiempo de inversión del flujo coincide aproximadamente con el tiempo en que se presenta la mínima presión). En cambio, en los sistemas en que domine la carga de fricción, el principal problema serán las bajas presiones y la posible separación de la columna de agua, pues la inversión del flujo casi nunca se presenta. Una operación apropiada de las válvulas puede reducir las altas presiones provocadas por la inversión del flujo, pero no es efectiva para aliviar las bajas presiones en una tubería larga.

El perfil de la tubería generalmente está sujeto a la topografía local, y no es por tanto una variable que pueda escogerse. Sin embargo, existen dos tipos de perfiles que son los más convenientes en sistemas de bombeo (Figura 5.8). El perfil ACB vence la carga de gravedad lo antes posible, con un tanque de oscilación al final del tramo a presión, y luego fluye por gravedad hasta el depósito de descarga. El tanque es casi siempre necesario para evitar la separación de columna. El perfil AEB, en cambio, es un arco con la concavidad hacia arriba que trata de seguir la evolución en el tiempo de la caída de presión originada por el paro de la bomba (Figura 5.9), evitando de esta manera que la presión caiga por debajo de la presión de vaporización.

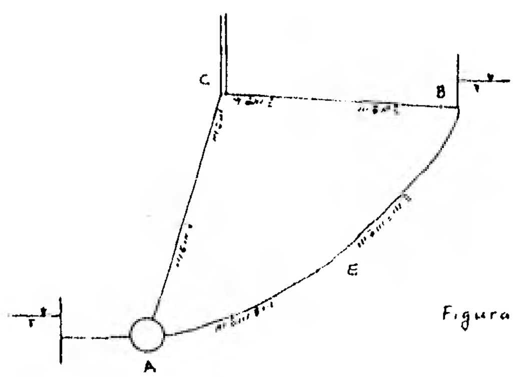


Figura 5.8

Otra variable que puede tener importancia dentro del análisis es el momento de inercia de la bomba, que incluye a la rueda, al agua que gira con ella y al motor. Un aumento en el momento de inercia de la bomba trae como consecuencia un retraso en los tiempos de inversión del flujo y de inversión de la rotación de la bomba, una disminución en la máxima sobrevelocidad en reversa de la bomba y además una reducción en los incrementos (positivos y negativos) de la presión.

En los ejemplos que siguen podrá verificarse todo lo señalado anteriormente. Los dos primeros se refieren a una tubería en que predomina la carga de gravedad:

EJEMPLO 1

Carga de diseño	100 m
Longitud del bombeo	800 m
Gasto de diseño	1 m^3/seg
Diámetro	0.8 m
Velocidad	2 m/seg
Momento de inercia	50 kgf - m^2
Velocidad específica	57 (SI); 2,940 (unidades inglesas)
Sin cierre de válvula	

EJEMPLO 2

Mismos datos del ejemplo 1, pero con un momento de inercia de 100 kgf-m^2.

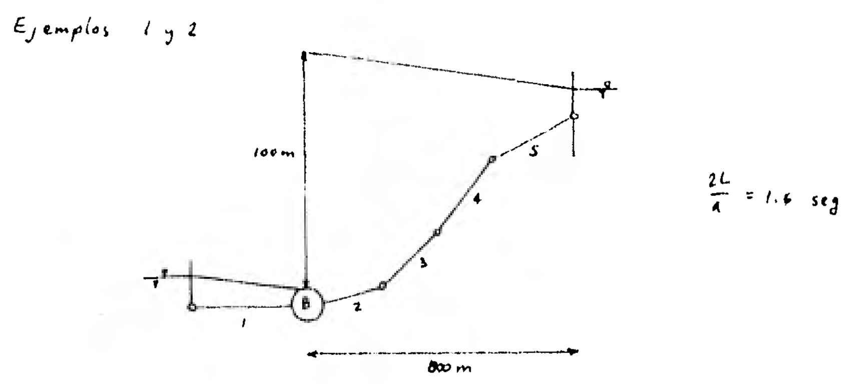


FIGURA 5.10

Tabla 5.2

Resultados Ejemplos 1 y 2

Ejemplo	Tubo	Presión inicial	Presión máxima	Tiempo	Presión mínima	Tiempo
1	1	9.0	38.6	2.4	0.9	9.6
	2	109.0	133.6	9.2	30.4	3.6
	3	108.0	127.0	10.2	40.0	1.4
	4	107.0	119.9	8.8	54.1	1.2
	5	106.0	114.2	9.8	75.2	1.4
2	1	9.0	29.3	4.4	4.7	13.6
	2	109.0	124.2	13.2	46.2	3.6
	3	108.0	119.2	13.4	57.7	3.4
	4	107.0	114.7	13.6	71.4	3.2
	5	106.0	110.6	13.8	85.4	3.4

Ejemplo	Tiempo inversión flujo	Tiempo inversión rotación	α mínima	Tiempo	ν mínima	Tiempo
1	2.9	5.5	-1.30	9.9	-1.04	7.2
2	4.1	7.8	-1.24	14.7	-1.12	10.3

En la Tabla 5.2 y en la Figura 5.11 puede apreciarse la disminución de la variación de la presión. Además, el tiempo de inversión del flujo y de la rotación se retrasan, y, sobre todo, la máxima sobrevelocidad en reversa decrece en un 6%, que puede ser decisivo para la bomba. En la Figura 5.11 puede también verse que un perfil en arco como el AEB no presentaría problemas de separación de columna, mientras que un perfil como el ACB sí los tendría, a menos que se instalara un tanque de oscilación en C.

Fig. 5.9 Evolución de la presión en el tiempo, ejemplo 2

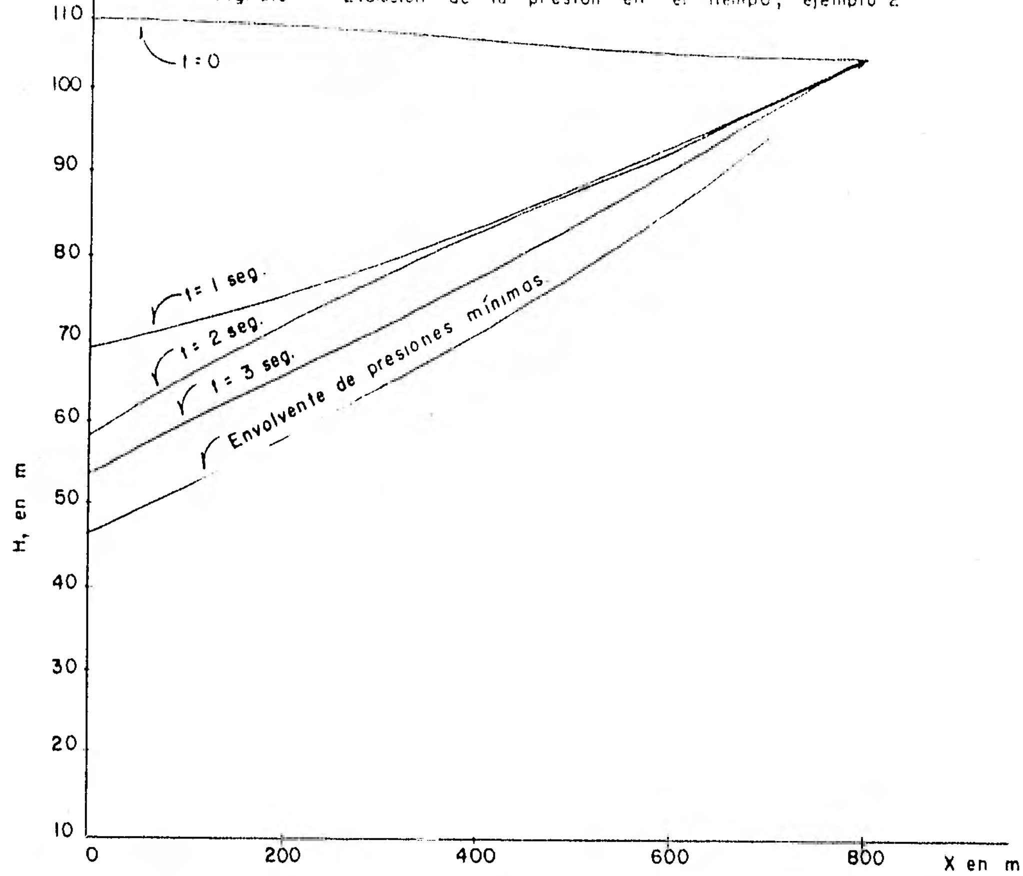
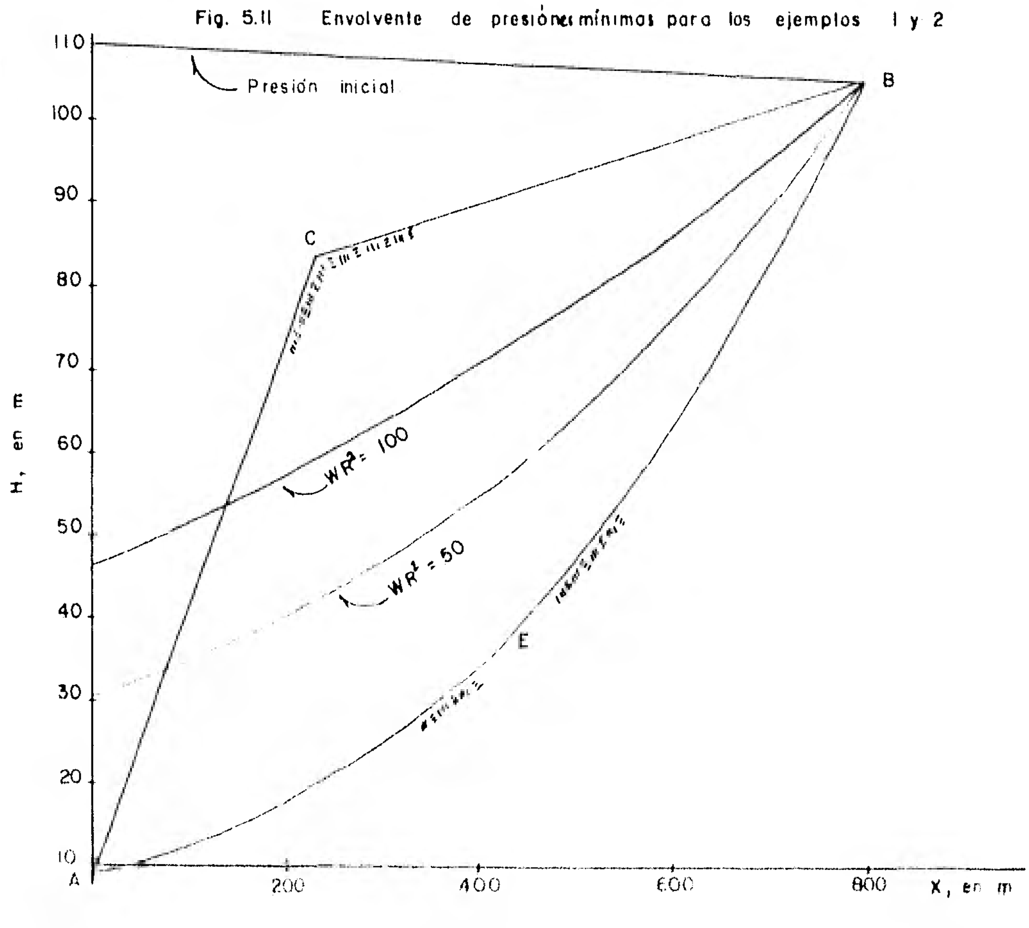


Fig. 5.11 Envolvente de presiones mínimas para los ejemplos 1 y 2



EJEMPLO 3

Carga de diseño	30 m
Longitud del bombeo	2,400 m
Gasto de diseño	0.5 m^3/seg
Diámetro	0.5 m
Velocidad	2.55 m/seg
Momento de inercia	30 kgf-m^2
Velocidad específica	55 (SI); 2,850 (unidades inglesas)
Sin cierre de válvula	

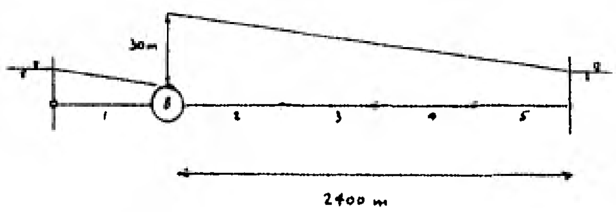


Figura 5.12

En este caso la tubería sigue una topografía plana, y la carga de la bomba sirve exclusivamente para vencer la carga de fricción. Ni el gasto ni la rotación de la bomba llegan a invertirse. Esta conducción está en una situación bastante insegura, pues la presión de vaporización del agua está a punto de alcanzarse simultáneamente en toda la línea (Tabla 5.3).

Tabla 5.3

Resultados Ejemplo 3

Tubo	Presión inicial	Presión máxima	Tiempo	Presión mínima	Tiempo
1	7.4	15.5	5.6	7.4	13.6
2	37.4 (29.4*)	37.4	13.2	-3.0	4.2
3	29.4 (21.5*)	29.4	13.4	-7.3	3.6
4	21.5 (17.5*)	21.5	13.6	-8.0	3.3
5	13.6	13.6	0.1	-6.9	3.0

α mín. = 0.125

ν mín. = 0.36

* Presiones iniciales correspondientes a los puntos de la tubería en los que se presenta la presión mínima que aparece en la quinta columna.

CAPITULO VI

PROGRAMA DE CALCULO Y APLICACION A ALGUNOS SISTEMAS DE BOMBEO EN MEXICO

VI.1 Programa de Cálculo.

El programa ARIETE consiste en un programa principal o programa fuente y ocho subrutinas: LEEDAT, LEESUB, DDIAM, TANQUE, PRESA, VALV, BOMBA y TUBOS. Las dos primeras son subrutinas para lectura de datos, y las seis restantes tratan cada una distintas condiciones de frontera. Aunque el programa está destinado a tratar problemas de golpe de ariete en sistemas de bombeo, podrán también tratarse algunos problemas correspondientes a sistemas de generación.

Al diseñar el programa, se buscó que tuviera la capacidad de adaptarse a los distintos arreglos que pueden presentarse en sistemas de bombeo, que su manejo fuera sencillo, y que proporcionara al final un resumen con los principales resultados de interés.

El arreglo del sistema se especifica con nudos y tubos numerados. En cada nudo se definen la condición de frontera existente y los tubos que llegan a él o salen de él. Los puntos interiores se calculan en el programa principal, y los puntos fronterizos en las subrutinas. Una vez terminados los cálculos para un tiempo t, se almacenan los valores calculados de las variables, se incrementa el tiempo en Δt, y se calculan los nuevos valores para $t + \Delta t$. La impresión de resultados se realiza a intervalos escogidos, múltiplos de Δt. Al alcanzar el tiempo máximo de cálculos, se imprimen, para cada tubo, los valores máximos y mínimos de las presiones y los tiempos en que ocurren; para cada bomba, la velocidad máxima en reversa, el gasto inverso máximo y los tiempos en que ocurren, y los tiempos de inversión del flujo y de la rotación de la rueda; y, para cada tanque de oscilación, las elevaciones máxima y mínima alcanzadas.

Dentro del programa principal se leen también aquellas variables que en general requieren pruebas con distintos valores, pudiendo hacerlas todas en la misma corrida, sin necesidad de repetir los demás datos del arreglo, que se mantienen iguales. Estas variables son IGUBOM, que especifica si se trata de la simulación de una falla de energía o de un paro programado; TCVB, el tiempo de cierre de la válvula situada inmediatamente aguas abajo de la bomba; TPARO (N), los tiempos en que se detienen las distintas bombas en un paro programado (en caso de una falla de energía, estos tiempos son todos iguales a cero); TMAX, el tiempo máximo de cálculo; DTANQ(N), el diámetro del o de los tanques de oscilación, en caso de haberlos; y LET1, LET2 y LET3, títulos que identifican el problema y sus características particulares.

Cuando sean otras las variables que quieran modificarse sin modificar los datos restantes, basta transferir su lectura de las subrutinas LEEDAT o LEESUB al programa principal. Esto es posible pues tales variables aparecen en declaraciones COMMON, que figuran tanto en el programa principal como en las subrutinas de lectura. La operación contraria también puede realizarse.

Las subrutinas LEEDAT y LEESUB son subrutinas para lectura de datos. En la primera se leen los datos generales del problema, y en la segunda los correspondientes a las distintas condiciones de frontera. En la Tabla 6.2 pueden -

verse las variables leídas en cada subrutina.

Las subrutinas DDIAM y TUBOS se aplican a nudos a los cuales concurren dos o más tubos. Para el caso de dos tubos en serie únicamente, se usa la subrutina DDIAM. Si concurren en el nudo más de dos tubos, debe usarse la subrutina TUBOS.

Si se tiene una carga constante en la frontera de aguas arriba o de aguas abajo, se emplea la subrutina PRESA. Para válvulas en fronteras aguas abajo, se llama a la subrutina VALV. Finalmente, para bombas y tanques de oscilación se aplican las subrutinas BOMBA y TANQUE.

El programa puede manejar sistemas hasta de 15 tubos y 15 nudos, con 50 secciones en cada tubo. El número máximo de tubos que pueden concurrir a un nudo es 10. La subrutina BOMBA acepta varias bombas en paralelo, aunque sus características de operación definidas por las curvas WH y WB deben ser iguales. Las cargas y gastos en el sistema en condiciones estáticas deben calcularse por separado y entrar al programa como datos (Tabla 6.2).

En las páginas siguientes se encuentran tablas con las claves de las condiciones de frontera (Tabla 6.1), con el orden de lectura de los datos (Tabla 6.2), y la lista de las variables empleadas, con su significado (Tabla 6.3).

Tabla 6.1 Claves de las condiciones de frontera

NCOND(N)	Condición de frontera	Subrutina
1	Nudo al que concurren dos tubos	DDIAM
2	Tanque de oscilación	TANQUE
3	Bomba	BOMBA
4	Carga constante en el extremo aguas arriba	PRESA
5	Válvula en un extremo aguas abajo	VALV
6	Nudo al que concurren más de dos tubos	TUBOS
7	Carga constante en el extremo aguas abajo	PRESA

Tabla 6.2 Orden de lectura de las variables

1. Subrutina LEEDAT : Datos generales

```
NTUB, NNUD
NNUD tarjetas con  NT, (NUDTUB(IL,I),I=1,NT)
NCOND(N)      (NNUD datos)
XL(J)         (NTUB datos)
D(J)          (NTUB datos)
F(J)          (NTUB datos)
A(J)          (NTUB datos)
H(J,1)        (NTUB datos)
Q(J,1)        (NTUB datos)
DELT
IPR
```

2. Subrutina LEESUB : Datos en las fronteras

```
Para cada nudo al que concurran más de dos tubos,
  NNTUB(N), NT1, NT2, (NSIG(KK),KK=NT1,NT2)
En el primer nudo en el que se encuentre una bomba,
  NBOM, NBINI
  HD, QD, VND, WR2, EFI
  CV, EXPB
  ITER, TOL
  ALFA(N)       (NBOM datos)
  VE(N)         (NBOM datos)
  TTAU(N)       (NBOM datos)
  WB(IC)        (89 datos, generalmente)
  WH(IC)        (89 datos, generalmente)
```

3. En el programa principal

```
NPROB
NPROB veces : LET1          IGUBOM
              LET2          TCVB
              LET3          TPARO(N)     (NBOM datos)
                            TMAX
```

y, en caso de haber tanques de oscilación, DTANQ(N)

Tabla 6.3

LISTA DE VARIABLES DEL PROGRAMA ARIETE

A(J)	Celeridad de la onda de presión en el tubo J, en m/seg.
ALFA (N)	Cociente velocidad de rotación/velocidad de rotación de diseño en la bomba del nudo N.
ALFINV(N)	Primer valor negativo calculado de ALFA(N)
ALFMIN(N)	Valor mínimo calculado de ALFA(N)
AR(J)	Area de la sección transversal del tubo J, en m2
ATANQ	Area de la sección transversal de algún tanque de oscilación
B(J)	Constante B de las ecuaciones C^+ y C^- en el tubo J
BETA(N)	Cociente par motor/par motor de diseño en la bomba del nudo N
CENT(N)	Coeficiente de pérdidas por entrada al tanque de oscilación del nudo N.
CM(J)	Constante CM de la ecuación C^- en el tramo aguas arriba del tubo J.
CMM	Constante CM de la ecuación C^-.
CP(J)	Constante CP de la ecuación C^+ en el tramo aguas abajo del tubo J.
CPP	Constante CP de la ecuación C^+.
CSAL(N)	Coeficiente de pérdidas por salida del tanque de oscilación del nudo N.
CV	Coeficiente de pérdidas de carga en la válvula de la bomba, bajo el gasto de diseño.
D(J)	Diámetro interior del tubo J, en m.
DALFA	Variación calculada de ALFA(N) entre dos iteraciones (Ecs. 5.14).
DELHF(J)	Pérdidas de carga por fricción en un tramo del tubo J, en m.
DELT	Intervalo de tiempo Δt empleado en los cálculos, en seg.
DELV	Variación calculada de VE(N) entre dos iteraciones (Ecs. 5.14).
DTANQ(N)	Diámetro del tanque de oscilación del nudo N, en m.

DTC	Diámetro del tubo que conecta la tubería con un tanque de oscilación, en m.
EFI	Eficiencia de la(s) bomba(s).
EXP	Exponente en la ley de cierre de válvulas en tramos finales de tubería.
EXPB	Exponente en la ley de cierre de válvulas en bombas.
F(J)	Coeficiente de fricción en el tubo J.
F1	F1 en la ecuación 5.7
F1A	Derivada parcial de F1 con respecto a α.
F1V	Derivada parcial de F1 con respecto a ν.
F2	F2 en la ecuación 5.13.
F2A	Derivada parcial de F2 con respecto a α.
F2V	Derivada parcial de F2 con respecto a ν.
FTC	Coeficiente de fricción en el tubo que conecta la tubería con un tanque de oscilación.
H(J,I)	Elevación del gradiente hidráulico en la sección I del tubo J, en el tiempo t, en m.
HD	Carga de diseño de la(s) bomba(s), en m.
HH(N)	Cociente carga/carga de diseño en la bomba del nudo N.
HIN(J,I)	Elevación del gradiente hidráulico en condiciones de flujo establecido, en la sección I del tubo J, en el tiempo t, en m.
HMAX(J)	Elevación máxima calculada del gradiente hidráulico en el tubo J, en m.
HMIN(J)	Elevación mínima calculada del gradiente hidráulico en el tubo J, en m.
HNUD	Elevación del gradiente hidráulico en algún nudo al que concurran más de dos tubos, en m.
HP(J,I)	Elevación del gradiente hidráulico en la sección I del tubo J, en el tiempo t + Δt, en m.
HO(N)	Carga inicial en la válvula de algún nudo final N.
IGUBOM	Variable que define si se trata de la simulación de una falla de energía o de un cierre programado. Vale uno en el primer caso y cero en el segundo.

IPR	Número de intervalos de tiempo Δt entre dos impresiones de resultados.
ITER	Número máximo de iteraciones en el cálculo de ALFA(N) y VE(N).
IW(N)	Variable que define la zona de operación de la bomba del nudo N.
KI	Número de iteraciones efectuadas en el cálculo de ALFA(N) y VE(N).
LET1	Enunciado de las características del problema.
LET2	Enunciado de las características del problema.
LET3	Enunciado de las características del problema.
NBINI	Nudo en el que se encuentra la primera bomba en paralelo.
NBOM	Número de bombas en paralelo en una estación de bombeo.
NCOND(N)	Variable que define la condición de frontera en el nudo N.
NNT	Nudo al que concurren más de dos tubos.
NNTUB(N)	Número de tubos que concurren al nudo N.
NNUD	Número de nudos del sistema.
NPROB	Número de problemas que se resolverán en una corrida del programa.
NSIG(J)	Variable que define si un tubo llega a o sale de un nudo al que concurren más de dos tubos. Vale -1 en el primer caso y 1 en el segundo.
NTRAM(J)	Número de tramos en que se divide el tubo J.
NTRMAX(J)	Sección del tubo J en la que se presenta la máxima elevación del gradiente hidráulico.
NTRMIN(J)	Sección del tubo J en la que se presenta la mínima elevación del gradiente hidráulico.
NTUB	Número de tubos del sistema.
NT1	Primer tubo que concurre al nudo NNT.
NT2	Ultimo tubo que concurre al nudo NNT.
NUDTUB(N,M)	Número del M-ésimo tubo que concurre al nudo N.
Q(J,I)	Gasto en la sección I del tubo J, en el tiempo t, en m3/seg.

QD	Gasto de diseño de la(s) bomba(s), en m3/seg.
QIN(J,I)	Gasto en condiciones de flujo establecido, en la sección I del tubo J, en m3/seg.
QP(J,I)	Gasto en la sección I del tubo J, en el tiempo t + Δt, en m3/seg.
QTANQ(N)	Gasto en el tanque de oscilación del nudo N, en m3/seg.
R(J)	Constante R de las ecuaciones C^+ y C^- en el tubo J.
T	Tiempo t, en seg.
TALFIN(N)	Tiempo en el que ocurre ALFINV(N), en seg.
TALMIN(N)	Tiempo en el que ocurre ALFMIN(N), en seg.
TAU(N)	Apertura de la válvula en algún nudo final N.
TC(N)	Tiempo de cierre de la válvula en algún nudo final N, en seg.
TCVB	Tiempo de cierre de la(s) válvula(s) de la(s) bomba(s), en seg.
TD	Par motor de diseño de la(s) bomba(s) en kgf m.
THMAX(J)	Tiempo en el que se presenta la elevación máxima del gradiente hidráulico en el tubo J, en seg.
THMIN(J)	Tiempo en el que se presenta la elevación mínima del gradiente hidráulico en el tubo J, en seg.
TINTER	Intervalo de tiempo entre impresiones, en seg.
TMAX	Tiempo máximo de cálculo, en seg.
TOL	Tolerancia admisible entre valores de ALFA(N) y VE(N) en iteraciones sucesivas.
TPARO(N)	Tiempo t en el que se detiene la bomba del nudo N, en seg.
TTAU(N)	Apertura de la válvula de la bomba del nudo N.
TVEINV(N)	Tiempo en que ocurre VEINV(N), en seg.
TVEMIN(N)	Tiempo en el que ocurre VEMIN(N), en seg.
TZMAX(N)	Tiempo en el que ocurre ZMAX(N), en seg.
TZMIN(N)	Tiempo en el que ocurre ZMIN(N), en seg.
VE(N)	Cociente gasto/gasto de diseño en la bomba del nudo N.
VEINV(N)	Primer valor negativo calculado de VE(N).

VEL	Velocidad del agua en algún tubo, en condiciones de flujo establecido, en m/seg.
VEMIN(N)	Valor mínimo calculado de VE(N).
VESP	Velocidad específica de la(s) bomba(s), en unidades SI.
VESPIN	Velocidad específica de la(s) bomba(s), en unidades inglesas.
VND	Velocidad de rotación de diseño de la(s) bomba(s), en RPM.
WB	Curva característica modificada de la bomba (par motor).
WH	Curva característica modificada de la bomba (carga).
WR2	Momento de inercia de rotación de la(s) bomba(s), en kgf m^2.
XL(J)	Longitud del tubo J, en m.
XLTC	Longitud del tubo que conecta la tubería con un tanque de oscilación, en m.
XLTR	Longitud de los tramos de algún tubo, en m.
Z(N)	Elevación de la superficie libre del agua en el tanque de oscilación del nudo N, en m.
ZMAX(N)	Elevación máxima calculada de la superficie libre del agua en el tanque de oscilación del nudo N, en m.
ZMIN(N)	Elevación mínima calculada de la superficie libre del agua en el tanque de oscilación del nudo N, en m.

VI.2 Acueducto para la Planta Carboeléctrica Río Escondido I, Coahuila

La planta carboeléctrica Río Escondido I, de 600 MW, utiliza carbón como combustible y hubo de ser localizada a boca de mina. Para el enfriamiento del agua de condensación se construyó un gran estanque, de 6 m de altura. Su nivel mínimo de operación es de 3 m, y su consumo de agua es, en promedio, de 0.6 m^3/seg. Tal cantidad de agua no existe en los alrededores de la planta, por lo que debe construirse un acueducto de 31 km de longitud para traer agua del Río Bravo, aguas abajo de la Presa La Amistad. En vista de que el agua no está disponible todo el tiempo, el acueducto debe ser capaz de llenar el estanque desde su nivel mínimo de operación hasta su nivel máximo en tres meses, para lo cual debe conducir un gasto de 2.5 m^3/seg. El desnivel entre el sitio del estanque y el Río Bravo es de 114 m. El perfil de la conducción es bastante desfavorable: no corresponde con el tipo de perfiles deseables en los acueductos (Figura 6.1).

Durante el diseño preliminar de una conducción de agua, se calculan generalmente un diámetro de tubería y un número de estaciones de bombeo tales que minimicen su costo total, que incluye la tubería, la adquisición de las bombas y su operación, en condiciones de flujo establecido. Se procura que las bombas de todas las estaciones se diseñen para la misma carga. Con estos datos se analiza el comportamiento del sistema ante los fenómenos transitorios, y se introducen las modificaciones convenientes.

Del diseño preliminar rsultó que el número más conveniente de estaciones de bombeo eran tres, para un diámetro alrededor de 1.40 m y una velocidad del agua de 1.62 m/seg. La carga dinámica total, que incluye el desnivel y las pérdidas por fricción, es de aproximadamente 180 m, con lo que la primera estación estaría localizada en el km 0.0, la segunda entre los kilómetros 2 y 3, y la tercera alrededor del kilómetro 20. Analizaremos aquí únicamente el tramo comprendido entre las dos primeras estaciones, que es el que presenta mayores dificultades. Para este tramo, en vista del perfil del terreno, se prefirió aumentar el diámetro hasta 1.524 m (60 in), para atenuar los efectos de los fenómenos transitorios. La velocidad del agua resulta de 1.37 m/seg.

Cada estación comprende 4 bombas en paralelo, de 0 625 m^3/seg cada una. El arreglo general de una estación se muestra en la Figura 6.21. Los tubos de succión y descarga de cada bomba son de 0.762 m (30 in), en la primera estación.

Las situaciones consideradas, para una ubicación de la segunda estación en el kilómetro 3.0, fueron las siguientes:

1. Falla de energía, sin tanque de oscilación.
2. Paro programado, sin tanque de oscilación, con intervalo de 10 seg entre el paro de una bomba y el paro de la siguiente.
3. Falla de energía, con tanque de oscilación de 3.50 m de diámetro en el kilómetro 1.0.
4. Falla de energía, con tanque de oscilación de 3.50 m de diámetro en el kilómetro 2.0.

Los resultados se muestran en las Figuras 6.3 a 6.6 y en las Tablas 6.4 a 6.7.

Si no instalamos tanque de oscilación,en caso de una falla de energía, se presentará separación de columna entre los kilómetros 1 y 2.5, aproximadamente. En el caso de un paro programado, la separación de columna no llega a presentarse, aunque se alcanzan presiones de -6.5 m en el kilómetro 2. Es decir, mientras que las presiones mínimas podrán ser controladas en las maniobras diarias, no sucederá así en las fallas de energía. Como debe preverse también esta situación, será necesario instalar un tanque de oscilación. En cambio, en la succión de la bomba no se presentan problemas de separación de columna ni presiones muy altas, y no hará falta un tanque.

En general conviene que éstos se instalen cercanos a las bombas, para que la longitud de tubería sujeta a grandes variaciones de la presión sea mínima. Si instalamos el tanque en el kilómetro 1.0, desaparece la separación de columna en el caso de una falla de energía, pero la altura necesaria del tanque es muy grande: alrededor de 45 m (39 m debidos exclusivamente al gradiente en condiciones de flujo establecido y 4 m adicionales debidos al máximo ascenso del agua en el tanque. Si lo ubicamos en el kilómetro 2.0, en cambio, su altura deberá ser mucho menor: alrededor de 15 m (11.5 m debidos al gradiente en condiciones de flujo establecido y 2.75 m debidos al máximo ascenso del agua en el tanque), aunque la envolvente de presiones mínimas quedaría mucho más cercana al nivel del terreno que en el caso anterior (Figura 6.3). Cabría también pensar en localizar el tanque en el kilómetro 1.5, aunque no se obtendría mucha ventaja en cuanto a su altura, que sería de aproximadamente 30 m. La solución más recomendable parece ser ubicar el tanque de oscilación en el kilómetro 2.0, y aumentar su diámetro, pues cuando este es de 3.50 m, el tanque se encuentra cercano al vaciado durante el descenso máximo del nivel del agua. Un aumento

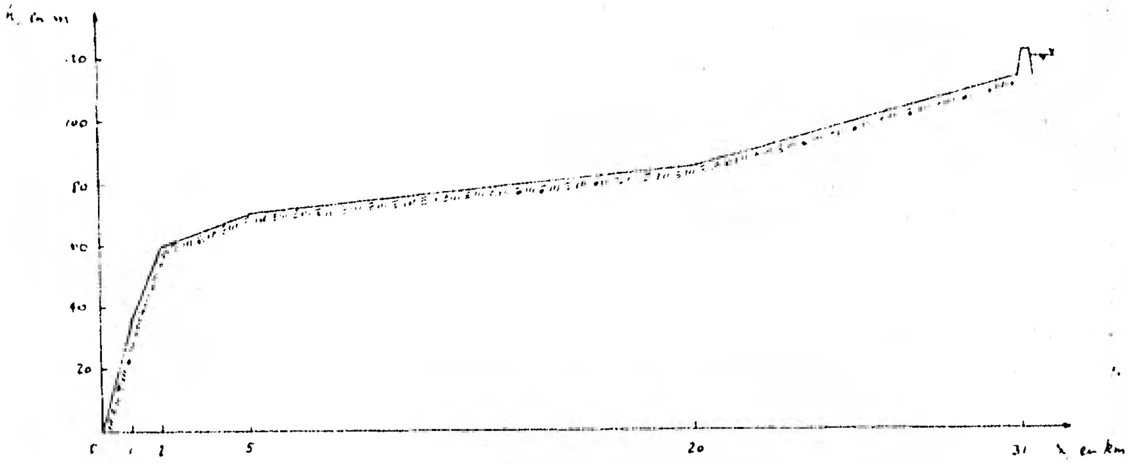


Figura 6.1 Perfil del terreno entre el Río Bravo y el estanque de enfriamiento de la Planta Río Escondido

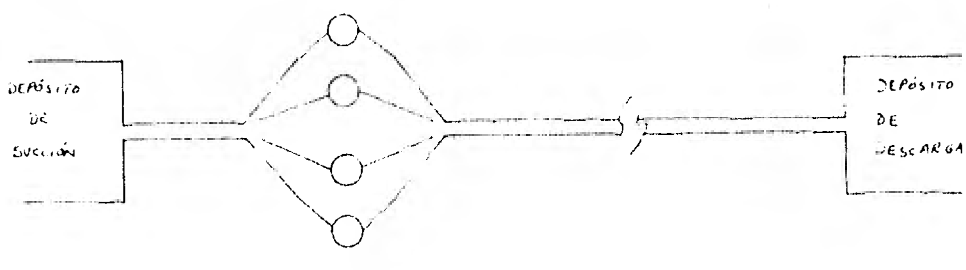


Figura 6.2 Arreglo general de una estación de bombeo

RIO ESCONDIDO. PRIMERA ESTACION.

CUATRO BOMBAS. FALLA DE ENERGIA.

CON TANQUE DE OSCILACION EN EL KM 2

CIERRE DE VALVULA EN ******* SEG

TIEMPOS DE PARO 0.00 0.00 0.00 0.00

DIAMETRO DEL TANQUE DE OSCILACION 9 3.500 METROS

DATOS GENERALES DEL PROBLEMA

NUMERO DE TUBOS 12
NUMERO DE NUDOS 10

TUBO	LONGITUD	DIAMETRO	VELOCIDAD	CELERIDAD	COEF FRIC	TRAMOS
1	200.000	1.524	1.371	1000.000	.018	2
2	200.000	.762	1.371	1000.000	.018	2
3	200.000	.762	1.371	1000.000	.018	2
4	200.000	.762	1.371	1000.000	.018	2
5	200.000	.762	1.371	1000.000	.018	2
6	200.000	.762	1.371	1000.000	.018	2
7	200.000	.762	1.371	1000.000	.018	2
8	200.000	.762	1.371	1000.000	.018	2
9	200.000	.762	1.371	1000.000	.018	2
10	1000.000	1.524	1.371	1000.000	.018	10
11	1000.000	1.524	1.371	1000.000	.018	10
12	1000.000	1.524	1.371	1000.000	.018	10

INTERVALO DE TIEMPO .1000 SEG
INTERVALO DE TIEMPO ENTRE IMPRESIONES 1.000 SEG
TIEMPO MAXIMO DE CALCULOS 120.00 SEG

NUMERO DE BOMBAS 4
GASTO DE DISEÑO .625 M3/SEG
CARGA DE DISEÑO 65.000 M
VELOCIDAD DE ROTACION 1780.000 RPM
MOMENTO DE INERCIA 56.000 KG-M2
EFICIENCIA .840
VELOCIDAD ESPECIFICA 61.472 -- EN UNIDADES INGLESAS = 3174.724

Tabla 6.4 Datos generales del problema. Caso 4.

TUBO	SECCION	PRESION MAX	TIEMPO	SECCION	PRESION MIN	TIEMPO
1	3	18.257	7.800	3	8.133	35.000
2	3	24.991	8.000	3	6.657	35.200
3	3	24.991	8.000	3	6.657	35.200
4	3	24.991	8.000	3	6.657	35.200
5	3	24.991	8.000	3	6.657	35.200
6	1	90.806	31.700	1	15.271	6.400
7	1	90.806	31.700	1	15.271	6.400
8	1	90.806	31.700	1	15.271	6.400
9	1	90.806	31.700	1	15.271	6.400
10	1	89.918	31.600	1	16.033	6.200
11	1	85.295	30.800	1	22.764	5.200
12	1	79.407	31.000	1	38.015	4.200

NUDO	VEL MAX REVERSA	TIEMPO	N/NO INVERSO MAX	TIEMPO
3	-1.296	33.200	-.975	25.000
4	-1.296	33.200	-.975	25.000
5	-1.296	33.200	-.975	25.000
6	-1.296	33.200	-.975	25.000

NUDO	TIEMPO INVERSION FLUJO	TIEMPO INVERSION ROTACION
3	10.000	18.200
4	10.000	18.200
5	10.000	18.200
6	10.000	18.200

Tabla 6.5 Resultados. Caso 1 : Falla de energía, sin tanque de oscilación.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	PRESION [illegible]	TIEMPO
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3	8,620	51.100
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3	5,356	23.700
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3	6,909	24.100
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3	6,441	36.500
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6,261	30.200
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	31,310	6.400
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	33,818	6.400
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	33,818	6.400
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	33,818	6.400
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	34,139	6.200
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	41,372	5.600
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	53,393	4.600

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] PRESION MAX	TIEMPO
[illegible]	[illegible]	[illegible]	-1.071	12.100
[illegible]	[illegible]	[illegible]	-1.074	21.700
[illegible]	[illegible]	[illegible]	-1.044	31.300
[illegible]	[illegible]	[illegible]	-1.044	42.400

[illegible] ROTACION

[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]

Tabla 6.6 Resultados. Caso 2 : Paro programado, a intervalos de 10 seg, sin tanque de oscilación.

TUBO	SECCION	PRESION MAX	TIEMPO	SECCION	PRESION MIN	TIEMPO
1	3	18.299	5.800	3	7.694	25.200
2	3	25.394	6.000	3	5.759	25.200
3	3	25.394	6.000	3	5.759	25.200
4	3	25.394	6.000	3	5.759	25.200
5	3	25.394	6.000	3	5.759	25.200
6	1	83.528	26.800	1	21.803	9.600
7	1	83.528	26.800	1	21.803	9.600
8	1	83.528	26.800	1	21.803	9.600
9	1	83.528	26.900	1	21.803	9.600
10	1	82.530	26.600	1	23.549	4.200
11	9	74.352	118.800	1	38.994	3.200
12	1	74.326	119.000	1	61.507	43.000

NUDO	VEL MAX REVERSA	TIEMPO	Q/QO INVERSO MAX	TIEMPO
3	-1.232	27.600	-.987	19.200
4	-1.232	27.600	-.987	19.200
5	-1.232	27.600	-.987	19.200
6	-1.232	27.600	-.987	19.200

NUDO	TIEMPO INVERSION FLUJO	TIEMPO INVERSION ROTACION
3	8.200	15.100
4	8.200	15.100
5	8.200	15.100
6	8.200	15.100

NUDO	ELEV MAX TO	TIEMPO	ELEV MIN TO	TIEMPO
9	74.364	119.400	61.455	43.100

Tabla 6.7 Resultados. Caso 4 : Falla de energía, con tanque de oscilación en el kilómetro 2.0 .

de 3.50 m a 5.00 m en el diámetro del tanque podría reducir la oscilación máxima en un 30%.

VI.3 Comentarios finales

Al diseñar una conducción de agua a presión deberá siempre analizarse su comportamiento ante fenómenos transitorios Estos tendrán diferentes grados de severidad; algunos de ellos, como los paros y los arranques de las bombas, se podrán controlar relativamente, aunque habrá otros, como las fallas de energía, que producirán los efectos máximos en la tubería, en las bombas y en las estructuras de control.

El sistema deberá estar diseñado para funcionar satisfactoriamente durante el transitorio más desfavorable: los tanques de oscilación deberán evitar la separación de columna y no vaciarse ni derramar, las bombas no excederán su máxima velocidad permisible en reversa, y la tubería estará diseñada para esta condición con un factor de seguridad de 3 (5). Para el caso de una falla total en el funcionamiento de las válvulas o del tanque de oscilación, el factor de seguridad deberá ser de 2 (5). Para situaciones catastróficas, como el cierre accidental de una válvula de mariposa en la planta Oigawa, el factor de seguridad en la tubería deberá ser ligeramente mayor que 1 (3,5).

Los fenómenos transitorios para los cuales es necesario conocer el comportamiento del sistema pueden simularse con programas como el presentado, en los que se calculen los efectos de aquéllos resolviendo numéricamente las ecuaciones que definen tanto el flujo transitorio dentro de la tubería como el funcionamiento de las bombas y de las estructuras y mecanismos de control. El objeto de la simulación es diseñar correctamente las tuberías y los mecanismos y estructuras de protección de la maquinaria y de la tubería y evitar accidentes que pudieran interrumpir el abastecimiento de agua, y operar convenientemente el sistema, evitando fallas o fatigas prematuras de los materiales o máquinas hidráulicas mediante la correcta programación de las maniobras.

En el ejemplo presentado en el apartado anterior no se analizaron exhaustivamente todas las alternativas de diseño para el tramo de acueducto considerado, pues el objeto era simplemente presentar el programa y algunas de sus aplicaciones. Por ejemplo, pudo haberse simulado el sistema para diámetros menores y velocidades mayores; la magnitud de los efectos de los transitorios se hubiera incrementado, obligando a aproximar más el tanque de oscilación a las bombas, o incluso a sustituirlo por una cámara de aire, dada la altura excesiva que resultaría; pudo haberse considerado también la posibilidad de efectuar cierres de válvulas, y de instalar supresores de oscilación* ; pudo también pensarse en localizar la segunda estación en el kilómetro 2.0, etc. La comparación económica de estas alternativas nos daría el diseño más económico con un comportamiento satisfactorio ante fenómenos transitorios.

Existe otra condición que no tratamos, pero que también debe considerarse: el arranque de las bombas. Este se analiza suponiendo que la velocidad de rotación de la bomba crece uniformemente durante el tiempo de arranque. Como la velocidad de rotación deja de ser incógnita, únicamente será necesaria la ecuación 5.7 (F1 = 0).

Finalmente, en algunos acueductos las dimensiones de los estanques de succión y de descarga serán tales que no podrán considerarse como fronteras de carga constante. En estos casos será necesario considerar, durante el transitorio, la variación del nivel del agua en el tiempo. Si se trata de un sistema con varias estaciones de bombeo, en el cual el tanque o depósito de descarga de alguna estación es también el depósito de la succión de la siguiente, el análisis deberá hacerse simultáneamente para todo el sistema, tanto ante fallas totales (en todo el sistema) como ante fallas locales (en alguna estación, totales o parciales), y ante paros y arranques programados de todo el sistema.

---

* Los supresores de oscilación son válvulas situadas en tuberías de derivación alrededor de la bomba, que se abren al ocurrir una falla de energía. De esta manera, pueden controlarse tanto la rotación en reversa de la o las bombas, con un cierre rápido en la válvula de la tubería principal, como las altas presiones que generaría este cierre, mediante la tubería de derivación abierta.

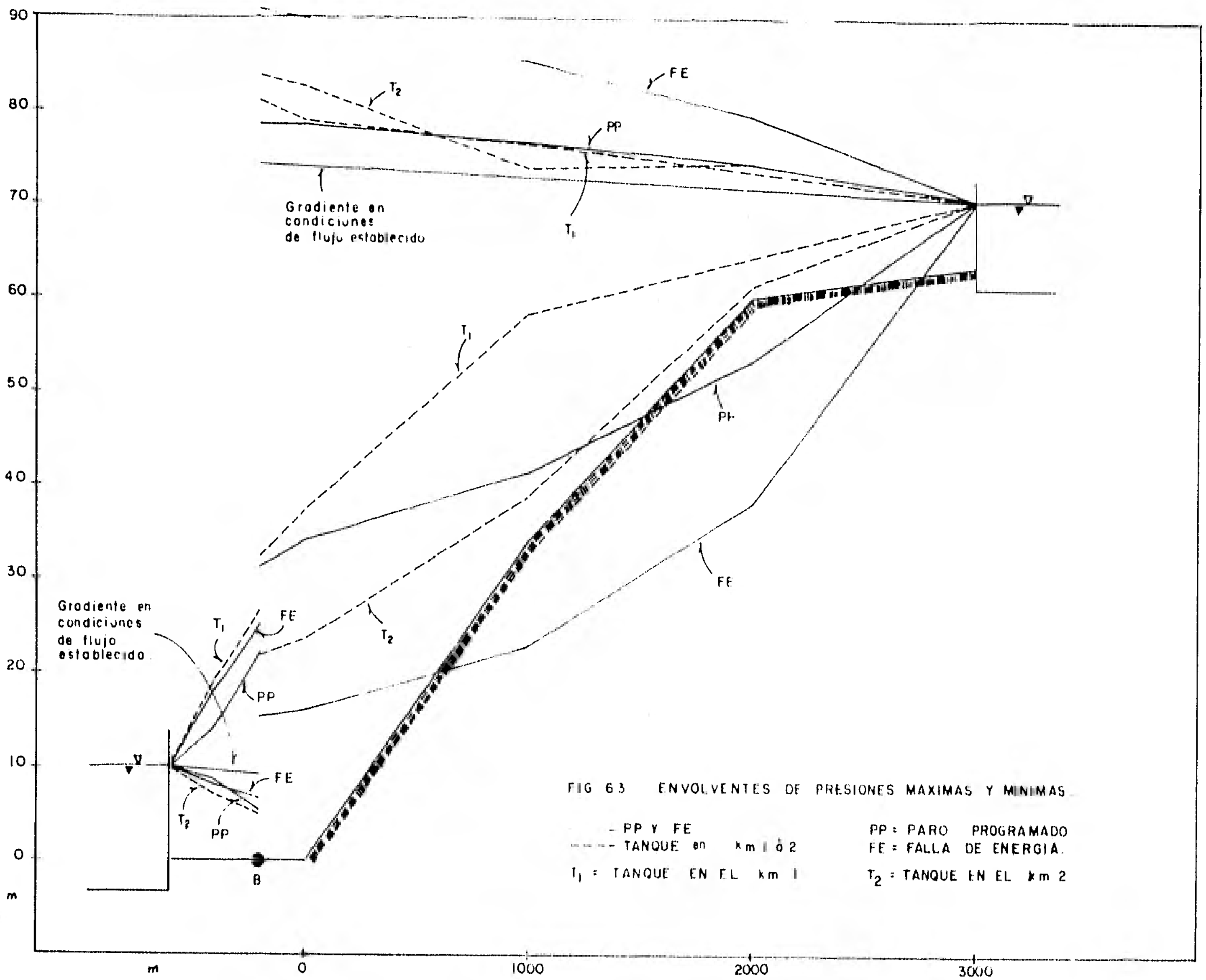


FIG 6.3 ENVOLVENTES DE PRESIONES MAXIMAS Y MINIMAS

—— PP Y FE

- - - - TANQUE en km 1 ó 2

T_1 = TANQUE EN EL km 1

PP = PARO PROGRAMADO

FE = FALLA DE ENERGIA.

T_2 = TANQUE EN EL km 2

FIG. 6.4 EVOLUCION DE LA PRESION EN EL Km 0

PP = PARO PROGRAMADO

FE = FALLA DE ENERGIA

T_2 : TANQUE EN EL Km 1

T_1 : TANQUE EN EL Km 2

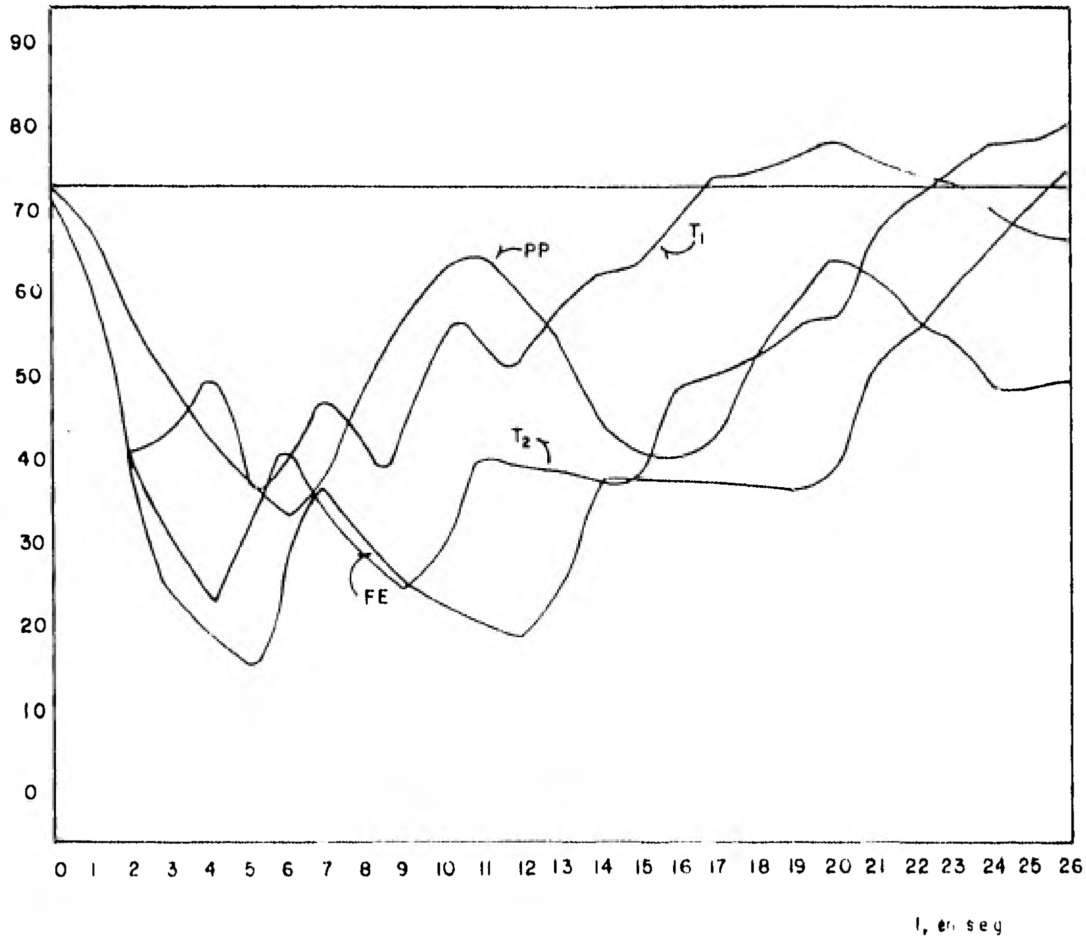
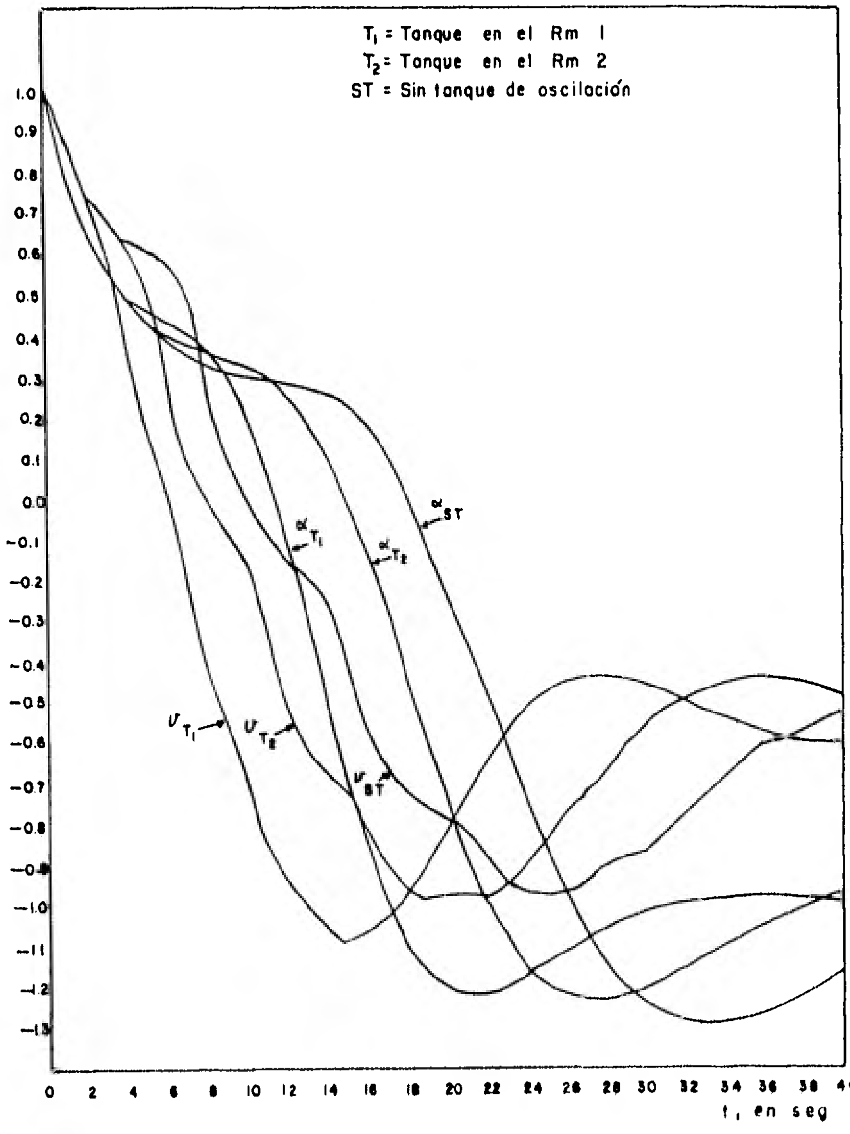


FIG. 6.5 COMPORTAMIENTO DE LAS BOMBAS EN UNA FALLA DE ENERGIA.
CON TANQUE Y SIN TANQUE



Apéndice 6.1 Programa ARIETE

```
      PROGRAM ARIETE(INPUT,OUTPUT)
      COMMON/CARAC/HP(15,50),QP(15,50),H(15,50),Q(15,50)
      COMMON/CONST/A(15),NTRAM(15),AR(15),R(15),CM(15),CR(15),
     1R(15),D(15),F(15),XL(15),NCOND(15),DELHF(15),NUDTUB(11,15),G,PI,
     2DELT,IPR,NTUB,NNUD
      COMMON/TUB/NETUB(10),NSTR(15)
      COMMON/VAL/H0(15),Q0(15),TAU(15),TC(15),EXP
      COMMON/TANQ/Z(15),QTANQ(15),QTANQ(15),XLTC,DTC,FTC,CENT,CSAL
      COMMON/BOMB/WH(30),WB(30),VE(15),VE0(15),V00(15),ALFA(15),ALFA0(15
     1),ALFAC0(15),HH(15),BETA(15),BETA0(15),TM(15),TTAU(15),IPARO(15),
     20D,HD,VED,WR2,ID,DELT,EPR,TCVB,CV,EXPR,ITER,TOL,NBOM,NBINI,IGUBOM,
     3K1,EFI
      DIMENSION HMAX(15),HMIN(15),QMAX(15),QMIN(15),NTRMAX(15),
     1NTRMIN(15),ALFMIN(15),ALFMAX(15),VEMIN(15),VEMAX(15),TALMIN(15),
     2TALFIN(15),IVEMIN(15),TMIN(15),TMAX(15),ZMIN(15),TZMAX(15),TZMIN
     3(15)
      DIMENSION HIN(15,50),QIN(15,50)
      DIMENSION ALFAA(15),VEA(15),TTAUA(15)
      DIMENSION LET1(20),LET2(20),LET3(20)
      CALL LEEDAT
      DATA G,PI/9.81,3.1415926/
      CALL LEESIM
      NBOMN=NBOM+NBINI-1
      DO 91 NN=NBINI,NBOMN
      ALFAA(NN)=ALFA(NN)
      VEA(NN)=VE(NN)
      TTAUA(NN) = TTAU(NN)
   91 CONTINUE
      DO 14 J=1,NTUB
      NTRAM1=NTRAM(J)+1
      DO 14 I=1,NTRAM1
      H(J,I)=H(J,1)-DELHF(J)*(I-1)
      Q(J,I)=Q(J,1)
   14 CONTINUE
      DO 15 J=1,NTUB
      NTRAM1=NTRAM(J)+1
      DO 15 I=1,NTRAM1
      HIN(J,I)=H(J,I)
      QIN(J,I)=Q(J,I)
   15 CONTINUE
      READ 420,NPROB
      DO 2000 IP=1,NPROB
      READ 427,(LET1(ILT),ILT=1,20)
      READ 427,(LET2(ILT),ILT=1,20)
      READ 427,(LET3(ILT),ILT=1,20)
      READ 430,IGUBOM
      READ 432,TCVB
      READ 432,(IPARO(IB),IB=NBINI,NBOMN)
      READ 432,TMAX
      PRINT 423,(LET1(ILT),ILT=1,20)
      PRINT 423,(LET2(ILT),ILT=1,20)
      PRINT 423,(LET3(ILT),ILT=1,20)
      PRINT 3,TCVB
      PRINT 5,(IPARO(IB),IB=NBINI,NBOMN)
      PRINT 6
      DO 25 IT=1,NNUD
      IF(NCOND(IT).NE.2) GO TO 25
```

```
      READ 432,DTANO(NT)
      PRINT 503,NT,DTANO(NT)
   26 CONTINUE
      PRINT 551
      PRINT 560,NTUB
      PRINT 570,NNUD
      PRINT 575
      DO 450 J=1,NTUB
      VEL=QIN(J,1)/AR(J)
      XLTR=A(J)*DELT
      PRINT 580,J,XL(J),D(J),VEL,A(J),F(J),NTRAM(J),XLTR
  450 CONTINUE
      PRINT 590,DELT
      TINTER=DELT*IPR
      PRINT 591,TINTER
      PRINT 592,TMAX
      PRINT 600,NBOM
      PRINT 610,QD
      PRINT 611,HD
      PRINT 612,VND
      PRINT 613,WR2
      PRINT 614,EFI
      VESP=VND*(QD**0.5)/(HD**0.75)
      VESPIN=VND*((QD*1000.*60./3.7854)**0.5)/((HD/0.3048)**0.75)
      PRINT 615,VESP,VESPIN
      PRINT 94
      DO 11 J=1,NTUB
      HMAX(J)=HIN(J,1)
      HMIN(J)=HIN(J,NTRAM(J)+1)
   11 CONTINUE
      DO 13 NN=NBINI,NBOMN
      ALFA(NN)=ALFAA(NN)
      VE(NN)=VEA(NN)
      TTAU(NN)=TTAUA(NN)
      ALFMIN(NN)=ALFA(NN)
      ALFINV(NN)=-ALFA(NN)
      VEMIN(NN)=VE(NN)
      VEINV(NN)=-VE(NN)
      ALFA0(NN)=ALFA(NN)
      ALFA00(NN)=ALFA(NN)
      VE0(NN)=VE(NN)
      V00(NN)=VE(NN)
      IW(NN)=(PI+ATAN2(VE(NN),ALFA(NN)))/DELX+1
      A1=(WH(IW(NN)+1)-WH(IW(NN)))/DELX
      A0=WH(IW(NN)+1)-A1*IW(NN)*DELX
      B1=(WB(IW(NN)+1)-WB(IW(NN)))/DELX
      B0=WB(IW(NN)+1)-B1*IW(NN)*DELX
      AVC=ALFA(NN)**2.+VE(NN)**2.
      X=PI+ATAN2(VE(NN),ALFA(NN))
      HH(NN)=AVC*(A0+A1*X)
      BETA(NN)=AVC*(B0+B1*X)
      BETA0(NN)=BETA(NN)
   13 CONTINUE
      DO 17 J=1,NTUB
      NTRAM1=NTRAM(J)+1
      DO 17 I=1,NTRAM1
      H(J,I)=HIN(J,I)
```

```
      Q(J,I)=QIN(J,I)
   17 CONTINUE
      DO 18 N=1,NNUD
      IF(NCOND(N).NE.2) GO TO 18
      Z(N)=H(NUDTUB(N,2),1)
      ZMIN(N)=Z(N)
      ZMAX(N)=Z(N)
      J4=NUDTUB(N,1)
      I4=NTRAM(J4)+1
      J5=NUDTUB(N,2)
      I5=1
      QTAND(N)=Q(J4,I4)-Q(J5,I5)
   18 CONTINUE
      T=0.
      K=0
   20 PRINT 99
      DO 21 J=1,NTUB
      PRINT 100,T,J,H(J,1),H(J,NTRAM(J)+1),Q(J,1),Q(J,NTRAM(J)+1)
   21 CONTINUE
      PRINT 199
      DO 23 NN=NBINI,NBOMB
      PRINT 200,ALFA(NN),VE(NN),HE(NN),BETA(NN),IW(NN),K1,ITAU(NN)
   23 CONTINUE
      KTA=0
      DO 60 N=1,NNUD
      IF(NCOND(N).NE.2) GO TO 60
      KTA=KTA+1
      IF(KTA.GT.1) GO TO 16
      PRINT 520
   16 PRINT 530,N,Z(N),QTAND(N)
   60 CONTINUE
      PRINT 94
   30 T=T+DELT
      K=K+1
      IF(T.GT.TMAX) GO TO 1000
C     PUNTOS INTERIORES
      DO 40 J=1,NTUB
      IF (NTRAM(J).EQ.1) GO TO 40
      NTRAMJ=NTRAM(J)
      DO 39 I=2,NTRAMJ
      CPP=H(J,I-1)+Q(J,I-1)*(B(J)-R(J)*ABS(Q(J,I-1)))
      CMM=H(J,I+1)-Q(J,I+1)*(B(J)-R(J)*ABS(Q(J,I+1)))
      HP(J,I)=(CPP+CMM)/2.
      QP(J,I)=(HP(J,I)-CMM)/B(J)
   39 CONTINUE
   40 CONTINUE
C     FRONTERA ENTRE TUBOS
      DO 180 J=1,NTUB
      I=NTRAM(J)+1
      CP(J)=H(J,I-1)+Q(J,I-1)*(B(J)-R(J)*ABS(Q(J,I-1)))
  180 CONTINUE
      DO 190 J=1,NTUB
      I=1
      CM(J)=H(J,I+1)-Q(J,I+1)*(B(J)-R(J)*ABS(Q(J,I+1)))
  190 CONTINUE
      DO 295 N=1,NNUD
      GO TO (282,292,302,312,322,332,312) NCOND(N)
```

```
 282 CALL DDIAH(N,T)
     GO TO 295
 292 CALL TANQUE(N,T)
     IF(Z(N).LE.ZMAX(N)) GO TO 128
     ZMAX(N)=Z(N)
     TZMAX(N)=T
 128 IF(Z(N).GE.ZMIN(N)) GO TO 295
     ZMIN(N)=Z(N)
     TZMIN(N)=T
     GO TO 295
 302 CALL BOMBA(N,T)
     IF(ALFA(N).GE.ALFMIN(N)) GO TO 103
     ALFMIN(N)=ALFA(N)
     TALMIN(N)=T
     IF(ALFMIN(N)) 103,103,203
 203 ALFMIN(N)=0.
     TALMIN(N)=0.
 103 IF(VE(N).GE.VEMIN(N)) GO TO 104
     VEMIN(N)=VE(N)
     TVEMIN(N)=T
     IF(VEMIN(N)) 104,104,204
 204 VEMIN(N)=0.
     TVEMIN(N)=0.
 104 IF(ALFA(N).GT.0.) GO TO 105
     IF(ALFA(N).LE.ALFINV(N)) GO TO 106
     ALFINV(N)=ALFA(N)
     TALFIN(N)=T
     GO TO 106
 105 TALFIN(N)=0.
 106 IF(VE(N).GT.0.) GO TO 294
     IF(VE(N).LE.VEINV(N)) GO TO 206
     VEINV(N)=VE(N)
     TVEINV(N)=T
     GO TO 206
 294 TVEINV(N)=0.
 206 GO TO 295
 312 CALL PRESA(N,T)
     GO TO 295
 322 CALL VALV(N,T)
     GO TO 295
 332 CALL TUBOS(N,T)
 295 CONTINUE
     DO 50 J=1,NTUB
     NTRAM1=NTRAM(J)+1
     DO 50 I=1,NTRAM1
     Q(J,I)= QP(J,I)
     H(J,I)=HP(J,I)
     IF(H(J,I).LE.HMAX(J)) GO TO 49
     HMAX(J)=H(J,I)
     THMAX(J)=T
     NTRMAX(J)=I
  49 IF(H(J,I).GE.HMIN(J)) GO TO 50
     HMIN(J)=H(J,I)
     THMIN(J)=T
     NTRMIN(J)=I
  50 CONTINUE
     IF (K/IPR*IPR-K) 30,20,30
```

```
1000 PRINT 299
     DO 53 J=1,NTUB
     PRINT 300,J,NTPMAX(J),PMAX(J),TPMAX(J),NTPMIN(J),PMIN(J),TPMIN(J)
  53 CONTINUE
     PRINT 399
     DO 58 NN=NBINI,NBOMN
     PRINT 400,NN,ALFMIN(NN),TALMIN(NN),VEMIN(NN),TVEMIN(NN)
  58 CONTINUE
     PRINT 499
     DO 59 NN=NBINI,NBOMN
     PRINT 500,NN,TVEINV(NN),TALFIN(NN)
  59 CONTINUE
     DO 70 NN=1,NNUD
     IF(NCOND(NN).NE.2) GO TO 70
     PRINT 540
     PRINT 550,NN,ZMAX(NN),TZMAX(NN),ZMIN(NN),TZMIN(NN)
  70 CONTINUE
2000 CONTINUE
   3 FORMAT("  CIERRE DE VALVULA DE ",F7.2," SEG",/)
   5 FORMAT("    TIEMPOS DE DATO  ",10F10.2)
   6 FORMAT(/)
  94 FORMAT(///)
  99 FORMAT("    TIEMPO     TUBO     PRESION INIC     PRESION FIN      GA
    *STO INIC       GASTO FIN",/)
 100 FORMAT(F10.3,I8,4F16.3)
 199 FORMAT(/,"          ALFA             VE          HR          BETA       IW
    *    ITER     APERTURA",/)
 200 FORMAT(4F12.3,2I8,F12.3)
 299 FORMAT(//,"        TUBO   SECCION    PRESION MAX          TIEMPO    SE
    *CCION     PRESION MIN       TIEMPO",//)
 300 FORMAT(2I10,2F15.3,I10,2F15.3)
 399 FORMAT(//,"       NUDO     VEL MAX REVERSA          TIEMPO     Q/QO I
    *NVERSO MAX         TIEMPO",//)
 400 FORMAT(I10,F20.3,F15.3,F20.3,F15.3)
 427 FORMAT(20A4)
 428 FORMAT(1H1,20A4,/)
 429 FORMAT(20A4,/)
 430 FORMAT(16I5)
 432 FORMAT(8F10.0)
 499 FORMAT(//,"       NUDO     TIEMPO INVERSION FLUJO        TIEMPO INVER
    *SION ROTACION",//)
 500 FORMAT(I10,F19.3,F29.3)
 508 FORMAT("  DIAMETRO DEL TANQUE DE OSCILACION ",I6,F12.3,"   METROS"
    *,/)
 520 FORMAT(/,"      NUDO     ELEV TANQUE    GASTO TANQUE",/)
 530 FORMAT(I10,2F15.3)
 540 FORMAT(//,"     NUDO      ELEV MAX TQ          TIEMPO      ELEV MIN TQ
    *       TIEMPO",//)
 550 FORMAT(I10,4F15.3)
 551 FORMAT(3X,"DATOS GENERALES DEL PROBLEMA",/)
 560 FORMAT(3X,"NUMERO DE TUBOS",I12)
 570 FORMAT(3X,"NUMERO DE NUDOS",I12,/)
 575 FORMAT("     TUBO       LONGITUD         DIAMETRO        VELOCIDAD
    *      CELERIDAD        COEF FRIC       TRAMOS      LONG TRAMOS",/)
 580 FORMAT(I10,5F16.3,I12,F16.3)
 590 FORMAT(/,3X,"INTERVALO DE TIEMPO",F12.4,"    SEG")
 591 FORMAT(3X,"INTERVALO DE TIEMPO ENTRE IMPRESIONES",F10.3,"   SEG")
```

```
592 FORMAT(3X,"TIEMPO MAXIMO DE CALCULOS",F12.2,"    SEG",/)
600 FORMAT(3X,"NUMERO DE [illegible]",I12)
610 FORMAT(3X,"GASTO DE DISENO",F14.3,"    M3/SEG")
611 FORMAT(3X,"CARGA DE DISENO",F14.3,"    M")
612 FORMAT(3X,"VELOCIDAD DE ROTACION",F16.3,"    RPM")
613 FORMAT(3X,"MOMENTO DE INERCIA",F16.3,"    KG-M2")
614 FORMAT(3X,"EFICIENCIA",F12.3)
615 FORMAT(3X,"VELOCIDAD ESPECIFICA",F16.3,"    -- EN UNIDADES INGLESAS
   * =",F16.3)
    STOP
    END
```

```
      SUBROUTINE LEEDAT
      COMMON/CARAC/HP(15,50),QP(15,50),H(15,50),Q(15,50)
      COMMON/CONST/A(15),NTRAM(15),AR(15),B(15),CM(15),CP(15),
     1R(15),D(15),F(15),XL(15),NCOND(15),DELHF(15),NUDTUB(10,15),G,PI,
     2DELT,IPR,NTUB,NNUD
      READ 217,NTUB,NNUD
      DO 7 IL=1,NNUD
      READ 217,NT,(NUDTUB(IL,I),I=1,NT)
    7 CONTINUE
      READ 217,(NCOND(N),N=1,NNUD)
      READ 213,(XL(J),J=1,NTUB)
      READ 213,(D(J),J=1,NTUB)
      READ 213,(F(J),J=1,NTUB)
      READ 213,(A(J),J=1,NTUB)
      READ 213,(H(J,1),J=1,NTUB)
      READ 213,(Q(J,1),J=1,NTUB)
      READ 213,DELT
      READ 217,IPR
      DO 10 J=1,NTUB
      NTRAM(J)=XL(J)/(A(J)*DELT)
      AR(J)=0.25*PI*D(J)**2.
      B(J)=A(J)/(G*AR(J))
      R(J)=A(J)*F(J)*DELT/(2.*G*D(J)*AR(J)**2.)
      DELHF(J)=F(J)*XL(J)*(Q(J,1)/AR(J))**2./(2.*G*D(J)*NTRAM(J))
   10 CONTINUE
  213 FORMAT(8F10.0)
  217 FORMAT(16I5)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE LEESUB
      COMMON/CARAC/HP(15,50),QP(15,50),H(15,50),Q(15,50)
      COMMON/CONST/A(15),NTRAM(15),AP(15),R(15),CM(15),CP(15),
     1B(15),D(15),F(15),XL(15),NCOND(15),DELHE(15),NNOTUD(10,15),G,PI,
     2DELT,IPR,NTUB,NNUD
      COMMON/TUB/NNTUB(10),NSIG(15)
      COMMON/VAL/HO(15),QO(15),TAU(15),TC(15),EXP
      COMMON/TANQ/Z(15),QTANQ(15),DTANQ(15),XLTC,DTC,FTC,CENT,CSAL
      COMMON/BOMB/WH(89),WB(89),VE(15),VEO(15),VOO(15),ALFA(15),ALFAO(15
     1),ALFAOO(15),BH(15),BETA(15),BETAO(15),IV(15),TTAU(15),IPARO(15),
     2QD,HD,VND,WP2,TD,DELX,CRR,TCVR,CV,EXPR,ITER,TOL,NBOM,NBINI,IGUBOM,
     3K1,EFI
      KB=0
      KT=0
      DO 395 N=1,NNUD
      GO TO (394,392,402,394,422,432,394) NCOND(N)
  392 KT=KT+1
      IF(KT.GT.1) GO TO 395
      READ 212,XLTC,DTC,FTC,CENT,CSAL
      GO TO 395
  402 KB=KB+1
      IF (KB.GT.1) GO TO 395
      READ 215,NBOM,NBINI
      READ 212,HD,QD,VND,WP2,EFI
      DELX=PI/44.
      TD=30000.*QD*HD/(PI*EFI*VND)
      CRR=WP2*VND*PI/(15.*G*TD*DELT)
      READ 212,CV,EXPR
      READ 220,ITER,TOL
      NBOMN=NBOM+NBINI-1
      READ 212,(ALFA(IB),IB=NBINI,NBOMN)
      READ 212,(VE(IB),IB=NBINI,NBOMN)
      READ 212,(TTAU(IB),IB=NBINI,NBOMN)
      READ 213,(WB(IC),IC=1,89)
      READ 213,(WH(IC),IC=1,89)
      DO 78 IB=NBINI,NBOMN
      ALFAO(IB)=ALFA(IB)
      ALFAOO(IB)=ALFA(IB)
      VEO(IB)=VE(IB)
      VOO(IB)=VE(IB)
      IV(IB)=(PI+ATAN2(VE(IB),ALFA(IB)))/DELX+1
      A1=(WH(IV(IB)+1)-WH(IV(IB)))/DELX
      AO=WH(IV(IB)+1)-A1*IV(IB)*DELX
      B1=(WB(IV(IB)+1)-WB(IV(IB)))/DELX
      BO=WB(IV(IB)+1)-B1*IV(IB)*DELX
      AVC=ALFA(IB)**2.+VE(IB)**2.
      X=PI+ATAN2(VE(IB),ALFA(IB))
      BH(IB)=AVC*(AO+A1*X)
      BETA(IB)=AVC*(BO+B1*X)
      BETAO(IB)=BETA(IB)
   78 CONTINUE
      GO TO 395
  422 READ 212,TC(N),TAU(N),EXP
      HO(N)=H(NNTUB(N,1),NTRAM(J)+1)
      QO(N)=Q(NNTUB(N,1),NTRAM(J)+1)
      GO TO 395
  432 READ 216,NNTUB(N),NT1,NT2,(NSIG(KK),KK=NT1,NT2)
```

```
      GO TO 395
  394 CONTINUE
  395 CONTINUE
  212 FORMAT(8F10.0)
  213 FORMAT(8X,8F9.0)
  216 FORMAT(16I5)
  220 FORMAT(I10,F10.0)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE DDIAM(N,T)
      COMMON/CARAC/HP(15,50),QP(15,50),H(15,50),Q(15,50)
      COMMON/CONST/A(15),NTRAM(15),AR(15),B(15),CM(15),CP(15),
     1R(15),D(15),F(15),XL(15),NCOND(15),DELHE(15),NUDTUB(10,15),G,PI,
     2DELT,IPR,NTUB,NNUD
      J1=NUDTUB(N,1)
      I1=NTRAM(J1)+1
      J2=NUDTUB(N,2)
      I2=1
      HP(J1,I1)=(B(J2)*CP(J1)+B(J1)*CM(J2))/(B(J2)+B(J1))
      QP(J1,I1)=(CP(J1)-HP(J1,I1))/B(J1)
      HP(J2,I2)=HP(J1,I1)
      QP(J2,I2)=(HP(J2,I2)-CM(J2))/B(J2)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE TANQUE(N,T)
      COMMON/CARAC/HP(15,50),QP(15,50),H(15,50),Q(15,50)
      COMMON/CONST/A(15),NTRAM(15),AR(15),B(15),CM(15),CP(15),
     1R(15),D(15),F(15),XL(15),NCOND(15),DELHF(15),NUDTUB(10,15),G,PI,
     2DELT,IPR,NTUB,NNUD
      COMMON/TANQ/Z(15),QTANQ(15),DTANQ(15),XLTC,DTC,FTC,CENT,CSAL
      J1=NUDTUB(N,1)
      I1=NTRAM(J1)+1
      J2=NUDTUB(N,2)
      I2=1
      ATANQ=0.25*PI*DTANQ(N)**2.
      ARTC=0.25*PI*DTC**2.
      WMA=G*ARTC*DELT/XLTC
      UXA=DELT/(2.*ATANQ)
      GTA=B(J1)/(B(J1)+B(J2))
      ETQ=(CP(J1)-CM(J2))/(B(J1)+B(J2))
      COEF=CENT
      IF(QTANQ(N).GT.0.) GO TO 114
      COEF=CSAL
  114 FXM=(DELT/(2.*XLTC*ARTC))*(FTC*XLTC/DTC+COEF)
      CTANQ=QTANQ(N)*(1.-FXM*ABS(QTANQ(N)))
      RKTANQ=Z(N)+UXA*QTANQ(N)
      RTA=1.+WMA*(B(J1)*(1.-GTA)+UXA)
      STA=CTANQ+WMA*(CP(J1)-B(J1)*ETQ-RKTANQ)
      YTA=STA/RTA
      HP(J1,I1)=CP(J1)-B(J1)*(ETQ+(1.-GTA)*YTA)
      HP(J2,I2)=HP(J1,I1)
      QP(J1,I1)=ETQ+(1.-GTA)*YTA
      QP(J2,I2)=ETQ-GTA*YTA
      Z(N)=RKTANQ+UXA*YTA
      QTANQ(N)=YTA
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE PRESA(N,T)
      COMMON/CARAC/HP(15,50),QP(15,50),H(15,50),Q(15,50)
      COMMON/CONST/A(15),NTRAM(15),AB(15),B(15),CM(15),CP(15),
     1R(15),D(15),F(15),XL(15),NCOND(15),DELHF(15),NUDTUB(10,15),G,PI,
     2DELT,IPR,NTUB,NNUD
      IF (NCOND(N).EQ.7) GO TO 81
      J=NUDTUB(N,1)
      I=1
      HP(J,I)=H(J,I)
      QP(J,I)=(HP(J,I)-CM(J))/B(J)
      RETURN
   81 J=NUDTUB(N,1)
      I=NTRAM(J)+1
      HP(J,I)=H(J,I)
      QP(J,I)=(CP(J)-HP(J,I))/B(J)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE  VALV(N,T)
      COMMON/CARAC/HP(15,50),QP(15,50),H(15,50),Q(15,50)
      COMMON/CONST/A(15),NTRAM(15),AR(15),B(15),CM(15),CP(15),
     1R(15),D(15),F(15),XL(15),NCOND(15),DELHF(15),NUDTUB(10,15),G,PI,
     2DELT,IPR,NTUB,NNUD
      COMMON/VAL/H0(15),Q0(15),TAU(15),TC(15),EXP
      J=NUDTUB(N,1)
      I=NTRAM(J)+1
      IF(T.GE.TC(N)) GO TO 60
      TAU(N)=(1.-T/TC(N))**EXP
      C4=(Q0(N)*TAU(N))**2./H0(N)
      QP(J,I)=-B(J)*C4/2.+SQRT((B(J)*C4/2.)**2.+C4*CP(J))
      HP(J,I)=CP(J)-B(J)*QP(J,I)
      RETURN
   60 TAU(N)=0.
      QP(J,I)=0.
      HP(J,I)=CP(J)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE BOMBA(N,T)
      COMMON/CARAC/HP(15,50),QP(15,50),H(15,50),Q(15,50)
      COMMON/CONST/A(15),NTRAM(15),AP(15),R(15),CM(15),CP(15),
     1R(15),D(15),F(15),XL(15),NCOND(15),DELHF(15),NUDTUB(10,15),G,PI,
     2DELT,IPP,NTUB,NNUD
      COMMON/BOMB/WH(89),WB(89),VE(15),VEO(15),V00(15),ALFA(15),ALFA0(15
     1),ALFA00(15),HH(15),BETA(15),BETA0(15),IW(15),TTAU(15),TPARO(15),
     2QD,HD,VND,WP2,IP,DELX,CBB,TCVB,CV,EXPB,ITER,TOL,NBOM,NMINI,IGUBOM,
     3K1,EFI
      J1=NUDTUB(N,1)
      J2=NUDTUB(N,2)
      IF(IGUBOM.EQ.1.AND.N.GT.NMINI) GO TO 158
      IF(T.LT.TPARO(N)) GO TO 154
      IF (T.GE.TCVB) GO TO 41
      TTAU(N)=(1.-T/TCVB)**EXPB
      DELH=CV*(QD/AP(NUDTUB(N,2)))**2./(2.*G)
      GO TO 51
   41 VE(N)=0.
      TTAU(N)=0.
      QP(J2,1)=0.
      HP(J2,1)=CM(J2)
      QP(J1,NTRAM(J1)+1)=0.
      HP(J1,NTRAM(J1)+1)=CP(J1)
      RETURN
   51 ALFA(N)=2.*ALFA0(N)-ALFA00(N)
      VE(N)=2.*VE0(N)-V00(N)
      X=PI+ATAN2(VE(N),ALFA(N))
      ZI1=X/DELX+1.
   19 IW(N)=ZI1
      ZI1=IW(N)
      A1=(WH(IW(N)+1)-WH(IW(N)))/DELX
      A0=WH(IW(N)+1)-A1*IW(N)*DELX
      B1=(WB(IW(N)+1)-WB(IW(N)))/DELX
      B0=WB(IW(N)+1)-B1*IW(N)*DELX
      DO 61 K2=1,ITER
      K1=K2
      AVC=ALFA(N)**2.+VE(N)**2.
      F1=TTAU(N)**2.*(CP(J1)-CM(J2)-VE(N)*QD*(B(J1)+B(J2)))+HD*AVC*(A0+A1
     **X)-DELH*VE(N)*ABS(VE(N))
      F2=AVC*(B0+B1*X)+BETA0(N)-CBB*(ALFA0(N)-ALFA(N))
      F1A=TTAU(N)**2.*(2.*ALFA(N)*HD*(A0+A1*X)-HD*VE(N)*A1)
      F1V=TTAU(N)**2.*(2.*VE(N)*HD*(A0+A1*X)+HD*A1*ALFA(N)-QD*(B(J1)+B(J
     *2)))-2.*DELH*ABS(VE(N))
      F2A=2.*ALFA(N)*(B0+B1*X)-B1*VE(N)+CBB
      F2V=2.*VE(N)*(B0+B1*X)+B1*ALFA(N)
      DALFA=(F1*F2V-F2*F1V)/(F1V*F2A-F1A*F2V)
      DELV=-F1/F1V-DALFA*F1A/F1V
      IF(IGUBOM.EQ.1) GO TO 98
      ALFA(N)=ALFA(N)+0.25*DALFA
      VE(N)=VE(N)+0.25*DELV
      GO TO 104
   98 ALFA(N)=ALFA(N)+DALFA
      VE(N)=VE(N)+DELV
  104 X=PI+ATAN2(VE(N),ALFA(N))
      IF (ABS(DALFA)+ABS(DELV).LT.TOL) GO TO 45
   61 CONTINUE
      PRINT 2,F1,F2,ALFA(N),VE(N),IW(N),K1,N
```

```
      RETURN
   45 ZI2=X/DELX+1.
      DZ=ZI2-ZI1
      IF (ABS(DZ).LT.1.) GO TO 81
      IF(IGUBOM.EQ.1) GO TO 96
      IF(DZ.GT.0.) GO TO 92
      SZ=-1.
      GO TO 93
   92 SZ=1.
   93 ZI1=ZI1+SZ
      GO TO 19
   96 ZI1=ZI1+DZ
      GO TO 19
   81 QP(J2,1)=VE(N)*QD
  193 HP(J2,1)=CH(J2)+B(J2)*QP(J2,1)
      QP(J1,NTRAM(J1)+1)=QP(J2,1)
      HP(J1,NTRAM(J1)+1)=CP(J1)-B(J1)*QP(J1,NTRAM(J1)+1)
      AVC=ALFA(N)**2.+VE(N)**2.
      HH(N)=AVC*(A0+A1*X)
      BETA(N)=AVC*(B0+B1*X)
      VOO(N)=VEO(N)
      VEO(N)=VE(N)
      ALFAOO(N)=ALFAO(N)
      ALFAO(N)=ALFA(N)
      BETAO(N)=BETA(N)
      RETURN
  158 ALFA(N)=ALFA(N-1)
      VE(N)=VE(N-1)
      HH(N)=HH(N-1)
      BETA(N)=BETA(N-1)
      IW(N)=IW(N-1)
      TTAU(N)=TTAU(N-1)
      QP(J2,1)=VE(N)*QD
      HP(J2,1)=CH(J2)+B(J2)*QP(J2,1)
      QP(J1,NTRAM(J1)+1)=QP(J2,1)
      HP(J1,NTRAM(J1)+1)=CP(J1)-B(J1)*QP(J1,NTRAM(J1)+1)
      RETURN
  154 QP(J2,1)=VE(N)*QD
      HP(J2,1)=CH(J2)+B(J2)*QP(J2,1)
      QP(J1,NTRAM(J1)+1)=QP(J2,1)
      HP(J1,NTRAM(J1)+1)=CP(J1)-B(J1)*QP(J1,NTRAM(J1)+1)
      RETURN
    2 FORMAT("   ACABE LAS ITERACIONES",4F12.3,3I10)
      END
```

```
      SUBROUTINE TUBOS(N,T)
      COMMON/CARAC/HP(15,50),QP(15,50),H(15,50),Q(15,50)
      COMMON/CONST/A(15),NTRAM(15),AR(15),B(15),CM(15),CP(15),
     1R(15),D(15),F(15),XL(15),NCOND(15),DELHF(15),NUDTUB(10,15),G,PI,
     2DELT,IPR,NTUB,NNUD
      COMMON/TUB/NNTUB(10),NSIG(15)
      DIMENSION A2(15),A3(15)
      NNTUBN=NNTUB(N)
      DO 15 M=1,NNTUBN
      J=NUDTUB(N,M)
      IF (NSIG(J).EQ.1) GO TO 14
      A2(M)=1./B(J)
      A3(M)=-CM(J)/B(J)
      GO TO 15
   14 A2(M)=-1./B(J)
      A3(M)=CP(J)/B(J)
   15 CONTINUE
      SIGMAN=0.
      SIGMAD=0.
      NNTUBN=NNTUB(N)
      DO 16 M=1,NNTUBN
      J=NUDTUB(N,M)
      SIGMAN=SIGMAN+NSIG(J)*A3(M)
      SIGMAD=SIGMAD+NSIG(J)*A2(M)
   16 CONTINUE
      HNUD=-SIGMAN/SIGMAD
      NNTUBN=NNTUB(N)
      DO 18 M=1,NNTUBN
      J=NUDTUB(N,M)
      IF (NSIG(J).EQ.1) GO TO 17
      QP(J,1)=(HNUD-CM(J))/B(J)
      HP(J,1)=HNUD
      GO TO 18
   17 QP(J,NTRAM(J)+1)=(CP(J)-HNUD)/B(J)
      HP(J,NTRAM(J)+1)=HNUD
   18 CONTINUE
      RETURN
      END
```

REFERENCIAS

1. Ames, William. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press, 1977, 2a Ed.
2. Bergeron, Louis. Du Coup de Bélier en Hydraulique au Coup de Foudre en Eléctricité. Dunod, Paris, 1950.
3. Bonin, C. C. "Water Hammer Damage to Oigawa Power Station". Journal of Engineering for Power, ASME, Abr 1960, pp 111-119.
4. Brown, R. J. "Water Column Separation at Two Pumping Plants". Journal of Basic Engineering, ASME, Dic 1968, pp 521-531.
5. Chaudhry, M. H. Applied Hydraulic Transients. Van Nostrand Reinhold, 1979.
6. Donsky, B. "Complete Pump Characteristics and the Effects of Specific Speeds on Hydraulic Transients". Jour Bas Eng, ASME, Dic 1961, pp 685-699.
7. Evangelisti, G. "Teoria Generale del Colpo d'Ariete col Metodo delle Caratteristiche". L'Energia Elettrica, 1965, Nos. 2 (pp 65-90) y 3 (pp 145-162).
8. Evangelisti, G. "Water Hammer Analysis by the Method of Characteristics". L'Energia Elettrica, 1969, Nos. 10 (pp 673-692), 11 (pp 759-771), y 12 (pp 839-858).
9. Evangelisti, G. ; Boari, M. ; Guerrini, P. y Rossi, R. "Some Applications of Water Hammer Analysis by the Method of Characteristics". L'Energia Elettrica, 1973, No. 1 (1-12) y 1974, No. 6 (309-324).
10. Jackson, A. T. Analysis of Transient Pressure Conditions for La Angostura Water Pipeline. Bechtel, Oct 1976, 1-22.
11. Jaeger, Charles. Engineering Fluid Mechanics. Blackie & Sons, Londres, 1957.
12. Martin, C.S. "Method of Characteristics Applied to Calculation of Surge Tank Oscillations". Proceedings, First International Conference on Pressure Surges, BHRA, Sep 1972, Paper E1, 1-12.
13. Papadakis, C. N. Hydraulic Transient Analysis Program. User's Manual. H & C F, Gaithersburg, Mar 1975.
14. Parmakian, John. "Pressure Surges at Large Pump Installations". Transactions, ASME, Vol 75, Ago 1953, 995-1006.
15. Parmakian, J. "Pressure Surge Control at Tracy Pumping Plant". Proceedings, ASCE, Vol 79, Dic 1953, Sep 361, 1-29.
16. Parmakian, J. Waterhammer Analysis. Dover, 1963.

16a. Parmakian, J. Conferencia en el Instituto de Ingeniería, UNAM, Jul 1978.

17. Pearsall, I. S. "The Velocity of Water Hammer Waves". Proc Instn Mech Engrs, 1965-66, Vol 180, Pt 3E, 12-20.

18. Rich, George. Hydraulic Transients. Mc Graw Hill, 1951.

19. Rouse, Hunter. Elementary Mechanics of Fluids. Dover, 1978, 2a Ed.

19a. Sánchez Bribiesca, José Luis. Notas del curso "procedimientos de Optimización y Control", UNAM, 1978.

20. Streeter, V. L. y Chintu Lai. "Water Hammer Analysis Including Fluid Friction". Journal of the Hydraulics Division, ASCE, May 1962, 79-112.

21. Streeter. V. L. "Valve Stroking to Control Water Hammer". J Hyd Div, ASCE, Mar 1963, 39-66.

22. Streeter, V. L. "Waterhammer Analysis of Pipelines". J Hyd Div, ASCE, Jul 1964, 151-172.

23. Streeter, V. L. "Valve Stroking for Complex Piping Systems". J Hyd Div, ASCE, May 1967, 81-98.

24. Streeter, V. L. y Wylie, E. B. Hydraulic Transients. Mc Graw Hill, 1967.

25. Streeter, V. L. "Water Hammer Analysis". J Hyd Div, ASCE, Nov 1969, 1959-1972.

26. Streeter, V. L. "Unsteady Flow Calculations by Numerical Methods". J Basic Eng, ASME, Jun 1972, 457-466.

27. Streeter, V. L. y Wylie, E. B. "Transient Analysis of Offshore Loading Systems". Journal of Engineering for Industry, ASME, 1974, Paper No. 74-Pet-2.

28. Wood, F. M. History of Water Hammer. Queen's University at Kingston, Ontario. Department of Civil Engineering, Report No. 65, Abr 1970.

29. Wylie, E. B. y Streeter, V. L. Fluid Transients. Mc Graw Hill, 1978.