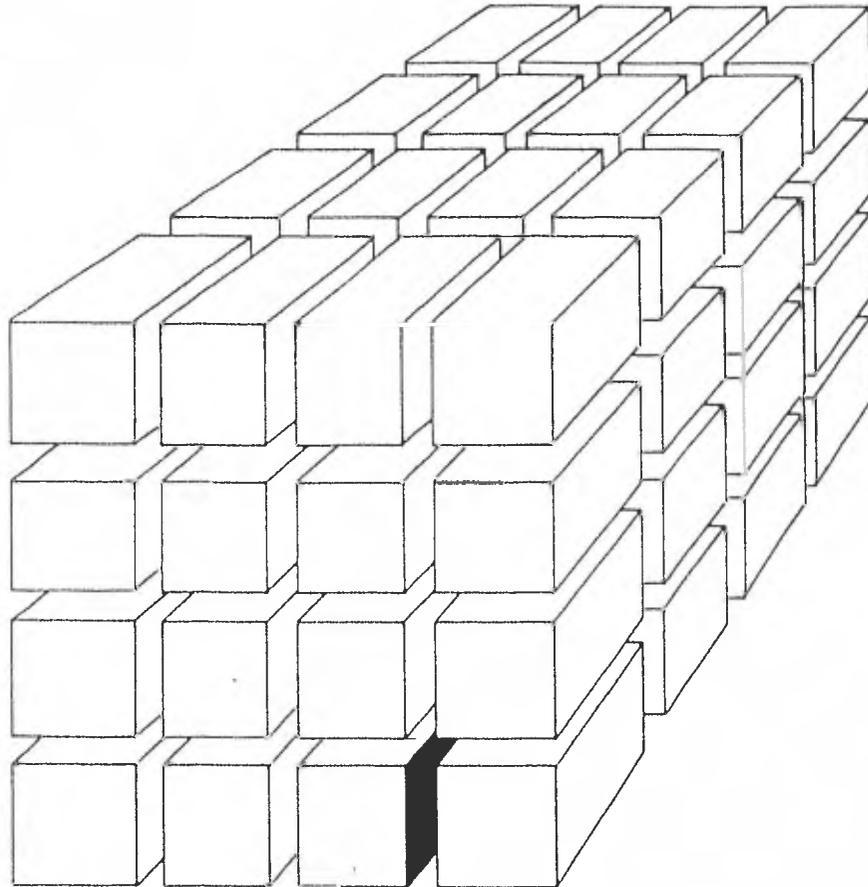


Universidad Nacional  
Autónoma

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

F  
A  
C  
U  
L  
T  
A  
D  
O  
D  
E  
I  
N  
G  
E  
N  
I  
E  
R  
I  
A



# simulación numérica de yacimientos

luis a. ayala gómez

josé r. serrano lozano

- mayo 1982 -

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

## LISTA DE FIGURAS

Figura	Nombre	pág.
1	Modelo de cero dimensiones	16
2	Modelos de una dimensión	16
2a	Modelo de una dimensión forma radial	17
3a	Modelo areal de dos dimensiones	17
3b	Modelo de sección transversal	18
3c	Modelo de dos dimensiones forma radial	18
4	Modelo de tres dimensiones	19
4a	Modelo de tres dimensiones forma radial	19
5.1	Ejemplo de aplicación en una dimensión	104

## LISTA DE TABLAS

Tabla	Tema	pág.
I	Fórmulas de Bickley	86
5.1	Ejemplo de aplicación resuelto por el método de Jacobi	118
5.2	Ejemplo de aplicación resuelto por el método de Gauss-Seidel	118
5.3	Ejemplo de aplicación resuelto por el método PSOR	120

## INDICE GENERAL

	Pág.
I Prólogo	i
II Introducción	1
III Principios Básicos y Ecuaciones de Flujo	20
IV Método de Diferencias Finitas	62
V Solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales por el método de diferencias finitas.	87
VI Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas	98
VII Consideraciones Generales	161
VIII Nomenclatura	164
IX Bibliografía	169

## P R O L O G O

La evolución y desarrollo de la industria petrolera, ha traído como consecuencia la aplicación de técnicas cada vez más depuradas y sofisticadas, orientadas a maximizar la producción de hidrocarburos, pero al mismo tiempo, llevando a cabo una explotación racional de los mismos; entre dichas técnicas, se encuentra la simulación numérica de yacimientos, la cuál, "es una herramienta" sumamente útil, para predecir el comportamiento de los yacimientos.

Debe tenerse en cuenta, que si la información proviene de fuentes fidedignas, los resultados que se obtendrán serán confiables. Si por el contrario no se cuenta con buena información, los resultados obtenidos serán un elemento indicativo para determinar que parámetros deben obtenerse con precisión.

Dada la importancia que tiene la ingeniería de yacimientos en la explotación de los hidrocarburos y teniendo en cuenta las necesidades de los estudiantes de ingeniería petrolera, se elaboraron estos apuntes con la intención de brindar una fuente de información escrita en castellano, ya que en la mayoría de los casos dicha información está escrita en otro idioma. A través de los mismos se pretende despertar el interés del alumnado, motivándolo para su mejor preparación.

## C O N T E N I D O

### CAPITULO 1

- 1.1 Introducción.
- 1.2 Definición.
- 1.3 Objetivo.
- 1.4 Definición de un modelo matemático de simu  
lación.
- 1.5 Información requerida.
- 1.6 Resultados.
- 1.7 Utilidad de la simulación.
- 1.8 Consecuencia de una información deficiente.
- 1.9 Tipos de simuladores.
  - 1.9.1 Modelo de cero dimensiones.
  - 1.9.2 Modelos de una dimensión.
  - 1.9.3 Modelos de dos dimensiones.
  - 1.9.4 Modelos tridimensionales.
- 1.10 Tipos de flujo.
  - 1.10.1 Flujo Monofásico.
  - 1.10.2 Flujo bifásico.
  - 1.10.3 Flujo trifásico.
- 1.11 Modelos composicionales.
- 1.12 Modelos térmicos.
- 1.13 Diagrama indicativo para la selección de -  
un simulador.

## C A P I T U L O 1

### 1.1 INTRODUCCION

El objetivo primordial al hacer uso de la simulación numérica, es predecir el comportamiento de un yacimiento en cuestión y encontrar la manera de optimizar ciertas condiciones para aumentar la recuperación.

En la ingeniería de yacimientos tradicional se trata al yacimiento en forma burda, considerándolo como un tanque con propiedades promedio, mientras que la simulación de yacimientos por medio de computadoras, permite un estudio más detallado, al poder dividir virtualmente a dicho yacimiento en un número finito de celdas o bloques y aplicar las ecuaciones fundamentales de flujo de fluidos en medios porosos para cada celda conjugadas a la ecuación de balance de materia.

Es importante señalar que la utilidad de los resultados obtenidos de una simulación, estará en función de la destreza y experiencia que el ingeniero tenga para interpretarlos, dependiendo de las condiciones de explotación de un yacimiento, ya sea en su etapa inicial o en una etapa de ajuste a través de la historia del yacimiento.

### 1.2 DEFINICION

La simulación numérica de yacimientos, es un proceso mediante el cual el ingeniero, con la ayuda de un modelo matemático, inte-

---

-gra un conjunto de factores para describir con cierta precisión el comportamiento de procesos físicos que ocurren en un yacimiento.

### 1.3 OBJETIVO

Lo que se pretende al hacer uso de la simulación es predecir el comportamiento de los yacimientos sujetos a diferentes políticas de explotación y en base a resultados obtenidos de dicha simulación, poder seleccionar la manera más adecuada de explotarlos. Dependiendo de la política de la empresa, la manera más adecuada de explotar un yacimiento puede requerir; maximizar el gasto, maximizar la recuperación, maximizar la ganancia, etc.

También en muchas ocasiones, con ayuda de la simulación, se puede llevar a cabo el desarrollo de un campo en base a una información limitada, pudiéndose determinar donde perforar nuevos pozos o establecer un esquema para comparar el agotamiento por recuperación primaria y la que se tendría con una recuperación secundaria o recuperación mejorada.

La enorme ventaja que se tiene al hacer uso de la simulación es que permite "producir" un yacimiento varias veces y en muy diferentes maneras, con lo cual se pueden analizar diferentes alternativas y seleccionar una de ellas; en la que se obtenga por ejemplo, la máxima recuperación, mientras que físicamente el yacimiento puede producirse una sola vez, y lo más probable es que no sea en la forma más adecuada, dado que un error cometido en el proceso afectará cualquier cambio subsecuente.

#### 1.4 DEFINICION DE UN MODELO MATEMATICO DE SIMULACION

Básicamente un modelo matemático de simulación de yacimientos, consiste en un número determinado de ecuaciones diferenciales parciales, que expresan el principio de conservación de masa y/o energía acopladas con ecuaciones representativas de flujo de fluidos, temperatura y/o la concentración de dichos fluidos a través de medios porosos.

Las ecuaciones resultantes, son ecuaciones diferenciales parciales "no lineales" y su solución es posible únicamente de una manera discreta, es decir, en un número de puntos preseleccionados en tiempo y espacio y no de una manera continua; por lo cual es indispensable el uso de un programa de cómputo.

#### 1.5 INFORMACION REQUERIDA

Para llevar a cabo una simulación se requiere la información siguiente:

a) Propiedades petrofísicas.

- Porosidad ( $\phi$ )
- Permeabilidad ( $k$ )
- Saturaciones de agua, aceite y gas ( $S_w, S_o, S_g$ )
- Presión capilar entre diferentes interfases

$$(Pc_{w-o}, Pc_{o-g}, Pc_{g-w})$$

- Permeabilidades relativas; al agua, al aceite y al gas

$$(k_{rw}, k_{ro}, k_{rg})$$

b) Propiedades pVT de los fluidos del yacimiento

- Factores de volumen ( $B_w, B_o, B_g$  )
- Relación de solubilidad ( $R_s$  )
- Viscosidades ( $\mu_w, \mu_o, \mu_g$  )
- Compresibilidades ( $c_F, c_w, c_o, c_g$  )

c) Límites del yacimiento.

d) Características del acuífero que rodea al yacimiento

e) Cuando se trata de hacer un ajuste de la historia del yacimiento, se requieren; ritmos de producción, declinación de la presión, etc.

Tanto las propiedades petrofísicas como las propiedades PVT, - se determinan en el laboratorio a través de muestras del yacimiento, que se procura sean representativas. Registros eléctricos obtenidos durante la perforación proporcionan información complementaria, necesaria en la correcta evaluación de las propiedades petrofísicas.

Los límites del yacimiento y las características del acuífero, se determinan con estudios geológicos ayudados de métodos indirectos como son los registros geofísicos, etc.

De suma importancia en un estudio de yacimientos por medio de simulación, es la determinación de las permeabilidades relativas y las presiones capilares. Las permeabilidades relativas determinan el flujo fraccional de las fases y por ende los resultados del simulador. Obviamente las curvas obtenidas en el laboratorio en pequeños núcleos, cuyas dimensiones se miden en centímetros, deben ser ajustadas antes de poder usarse en un simulador cuyas celdas se miden normalmente en centenares de metros. La evaluación oportuna y sistemática de un conjunto de "pseudo permeabilidades relati-

-vas" es un proceso indispensable y a menudo olvidado en la simulación matemática de yacimientos.

Las curvas de presión capilar son necesarias para poder describir la distribución de saturaciones y el tamaño de la zona de transición, los contactos agua-aceite y gas-aceite.

### 1.6 RESULTADOS

Los resultados típicos que se obtienen de un programa de simulación, consisten en la distribución de presiones, saturaciones en cada una de las celdas en las que se ha dividido al yacimiento, -- así como relaciones agua-aceite y gas-aceite para los pozos productores.

Si hay inyección de fluidos, se obtiene; o el ritmo de inyección de los pozos inyectores, o las presiones necesarias para inyectar los volúmenes establecidos.

### 1.7 UTILIDAD DE LA SIMULACION

Un modelo matemático de simulación calibrado adecuadamente, es la herramienta más poderosa con la que cuenta un ingeniero para predecir con cierto grado de precisión el comportamiento de un yacimiento sujeto a diferentes políticas de explotación.

Aún cuando en ocasiones no se conozcan las características petrofísicas de un yacimiento la simulación puede ser útil en obtener la sensibilidad de los resultados a variaciones en la descripción en el yacimiento. Por ejemplo si se tiene una propiedad "x" y

se sabe que dicha propiedad puede variar en un rango de  $x_1$  a  $x_2$ , - es decir,  $x_1 \leq x \leq x_2$  y se efectúan 2 ó 3 corridas de simulación, - si los resultados no varían mucho se puede:

- 1) Tomar como buena una de las predicciones.
- 2) Relegar a segundo término esfuerzos especiales para medir con - precisión dicha propiedad.

Si por el contrario los resultados de simular el yacimiento -- con diferentes valores de la propiedad "x" varían considerablemente, entonces se debe tener especial cuidado en la obtención de la distribución de la propiedad "x" en diferentes áreas del yacimiento para mejorar la descripción del mismo, ya que su distribución - afectará considerablemente la recuperación.

Aún si hay diferencia en los resultados al variar las propiedades, se puede tratar de buscar ciertas invariantes en la recuperación por medio de diferentes formas de explotación del yacimiento.

Ejemplo:

Si el valor asignado a una propiedad, digamos porosidad es  $\phi_1$ , y los resultados de una simulación indican las siguientes recuperaciones:

- Por agotamiento natural 20%
- Por un método de inyección A 30%
- Por un método de inyección B 40%

El incremento en la recuperación al aplicar el método de inyección A es de 50% y el incremento al aplicar el método de inyección B es 100 %

Ahora, si el valor asignado a la porosidad es  $\phi_2$  y los resultados indican que la recuperación es:

- Por agotamiento natural 23%
- Por un método de inyección A 35%
- Por un método de inyección B 47%

En este caso el incremento en la recuperación al aplicar el método de inyección A es de 52% y el incremento corresponde al método de inyección B es de 104%.

De lo anterior se observa, que aún habiendo variaciones en las propiedades de  $\phi_1$  a  $\phi_2$ , los incrementos calculados para ambos métodos de inyección son practicamente los mismos por lo que se deduce en este caso no es necesario conocer toda la información en forma precisa. En una forma más realista, la precisión de la información debe ser proporcional a la sensibilidad de los resultados a variaciones de dicha información.

### 1.8 CONSECUENCIA DE UNA INFORMACION DEFICIENTE

Lo anterior no significa que la simulación de yacimientos deba aplicarse en cualquier ocasión. Dada la complejidad y sofisticación de la simulación numérica de yacimientos, carece de sentido su utilización sino se trata previamente de obtener buena información, debido a que la confiabilidad de los resultados de una simulación, está en función de la información proporcionada.

Para usar la simulación apropiadamente, se citan a continuación ciertas consideraciones fundamentales.

- Se debe hacer un muestreo adecuado y suficiente, para asegurar que la información sea representativa del yacimiento.

- Al determinar las propiedades petrofísicas y pVT de las muestras se debe tratar de aproximar al máximo las condiciones que realmente prevalecerán en el yacimiento.
- Es importante, tratar de reproducir en el laboratorio, los mecanismos de desplazamiento que operarán en el yacimiento para determinar las permeabilidades relativas que tanta trascendencia tienen en la recuperación. Además, en el caso de simulaciones areales o tridimensionales, es indispensable efectuar primero estudios en secciones transversales que permitan determinar las curvas de pseudo permeabilidad relativa que permitan calibrar los resultados de un modelo burdo con celdas relativamente grandes a los resultados obtenidos al utilizar una mejor definición del número de capas y con celdas más pequeñas.

Si por el contrario la información disponible es insuficiente y además no representativa, la utilización de un modelo simplificado tal como las ecuaciones de balance de materia, aplicadas con buen criterio ingenieril pueden utilizarse con ventaja sobre un modelo de simulación.

Indiscutiblemente, un modelo matemático adecuadamente ajustado que ha permitido reproducir la historia de un yacimiento, es el instrumento más poderoso para predecir, con el mayor grado de confianza, el comportamiento de dicho yacimiento.

## 1.9 TIPOS DE SIMULADORES

### 1.9.1 MODELO DE CERO DIMENSIONES O MODELO DE TANQUE

(Por considerar al yacimiento como un tanque)

Este modelo, supone que el yacimiento se comporta como un tanque con propiedades promedio, además supone que las propiedades PVT son función de la presión media y que la permeabilidad relativa es únicamente función de la saturación media.

A este modelo comunmente se le llama balance de materia (Fig. 1).

### 1.9.2. MODELOS DE UNA DIMENSION

Dicho modelo fue generado por BUCKLEY-LEVERETT, para dar una solución analítica al comportamiento por recuperación secundaria. En simulación de yacimientos dicho modelo se puede aplicar, si se tiene un yacimiento en el que el flujo en una dirección es predominante. Por ejemplo en los casos de inyección de gas en la cresta de un yacimiento o en la inyección de agua (o entrada natural de agua) por el flanco de otro yacimiento (Fig. 2).

En una dimensión también se puede utilizar un modelo en forma radial. Este modelo es útil para pruebas de formación y pruebas de incremento o decremento de presión. En cada celda se pueden variar propiedades tales como porosidad y permeabilidad (Fig. 2a).

### 1.9.3. MODELOS DE DOS DIMENSIONES

#### 1.9.3.1. MODELO AREAL

Se tiene variaciones de las propiedades en dos direcciones, pudiéndose considerar además, los efectos gravitacionales al asignar diferentes profundidades a las celdas del modelo, el cual puede --

ser representado por una malla. Este modelo se aplica a yacimientos donde generalmente los espesores son pequeños con respecto a su área y no existe efecto muy marcado de estratificación o se ha generado un conjunto adecuado de pseudo permeabilidades relativas (Fig. 3a).

#### 1.9.3.2 MODELO DE SECCION TRANSVERSAL

Otro tipo de modelo de dos dimensiones se tiene en la representación de secciones transversales en donde las propiedades de las capas varían. La utilidad de estos modelos estriba en su versatilidad en la descripción de la distribución vertical de saturaciones de avance de un frente (gas y/o agua) además de ser los instrumentos para la obtención de las mencionadas curvas de pseudo permeabilidad relativa (Fig. 3b).

#### 1.9.3.3 MODELO AREAL DE DOS DIMENSIONES EN FORMA RADIAL

Incluyen algunas de las consideraciones del modelo anterior -- además de la ventaja de poder analizar con mayor detalle los cambios bruscos de presión y saturación que ocurren en la cercanía de los pozos (Fig. 3c).

#### 1.9.4 MODELOS TRIDIMENSIONALES

Existen yacimientos con espesores muy grandes, por lo que es necesario considerar variaciones tanto horizontales como verticales

(Fig. 4). Otro tipo de modelo de tres dimensiones, se puede representar en forma radial (Fig. 4a).

## 1.10 TIPOS DE FLUJO

Hasta aquí se han mostrado solamente variaciones en la geometría o sea las dimensiones; sin embargo, en el yacimiento se pueden considerar también varios tipos de flujo, como son el monofásico, bifásico y trifásico.

### 1.10.1 FLUJO MONOFASICO

El flujo monofásico está dado por el flujo de un sólo fluido - en particular. Por ejemplo en los acuíferos el agua; aceite en un yacimiento bajo saturado o gas en un yacimiento de gas volumétrico.

### 1.10.2 FLUJO BIFASICO

Se presenta cuando dos fluidos diferentes fluyen al mismo tiempo por ejemplo:

- |                |  |
|----------------|--|
| Gas y Aceite:  | En un yacimiento que produce por empuje de gas disuelto liberado.  |
| Agua y Aceite: | En un yacimiento bajo saturado con entrada de agua, cuya presión se mantiene arriba de la presión de burbujeo. |
| Agua y Gas:    | En un yacimiento de gas con entrada de agua o cuya saturación de agua congénita es mayor                       |

que la saturación crítica.

### 1.10.3 FLUJO TRIFASICO

Se presenta cuando hay flujo de tres fluidos a la vez: agua, - aceite y gas. Este caso se contempla en yacimientos que producen - por empuje combinado, en los que la entrada de agua, el empuje de - gas disuelto y/o el empuje de un casquete original o secundario -- tiene influencia en la producción.

Por todo lo anterior se puede tener combinaciones entre mode- - los y tipos de flujo; es decir, se puede tener un modelo de una di- - mensión con 3 fases o bien uno en 2 dimensiones con 2 fases o gene- - ralizando un modelo de 3 dimensiones con 1, 2 ó 3 fases.

### 1.11 MODELOS COMPOSICIONALES

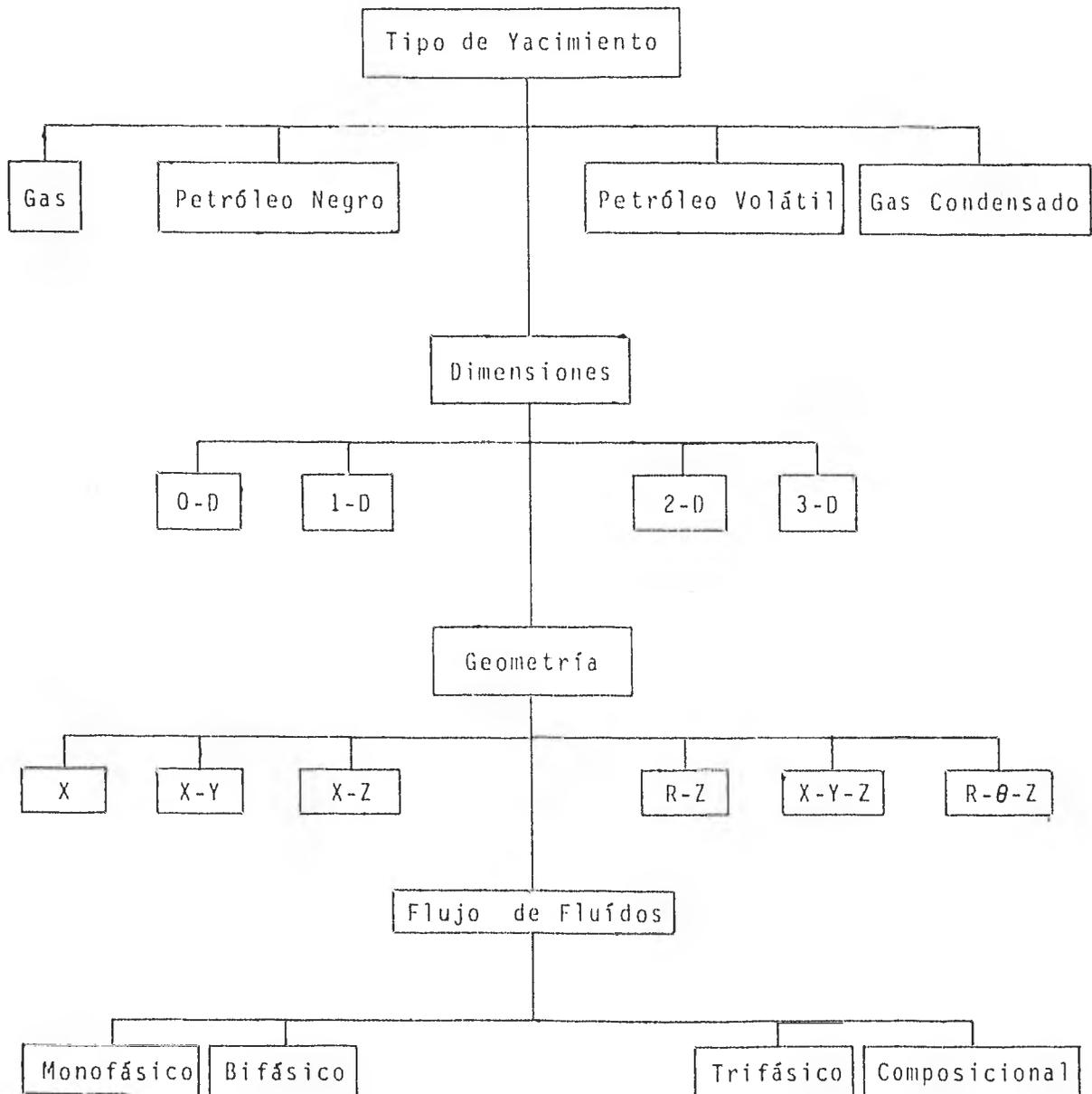
Existen otros tipos de modelos, donde no sólo se toma en cuen- - ta la variación de la geometría y el tipo de flujo, sino también - la variación de la composición de los fluidos del yacimiento al ex- - plotarlos. En esta categoría se incluyen los yacimientos de aceite- - volátil y los yacimientos de gas y condensado con condensación re- - trógrada, para los cuales se debe tomar en cuenta la composición - de los fluidos originales. Consecuentemente, este tipo de simulado- - res permite predecir variaciones en la composición de los fluidos- - producidos, así como variaciones en los gastos y presiones del ya- - cimiento.

## 1.12 MODELOS TERMICOS

Cuando se somete un yacimiento a un proceso de recuperación mejorada por medio de un método térmico, como por ejemplo la inyección de vapor o la combustión in-situ, independientemente de existir flujo de fluidos en el medio poroso a causa de gradientes de presión, se genera un intercambio de energía en el yacimiento, variaciones de temperatura y viscosidad de los fluidos, efectos de destilación y/o craqueo, etc. Estos generan una serie de modificaciones en las propiedades de los fluidos.

Teniendo en cuenta lo anterior se pueden elaborar modelos que involucren tanto las variaciones de flujo, como las variaciones en las propiedades de los fluidos del yacimiento en función de los efectos composicionales y/o variaciones en las temperaturas.

" Diagrama Indicativo para la selección  
de un Simulador "



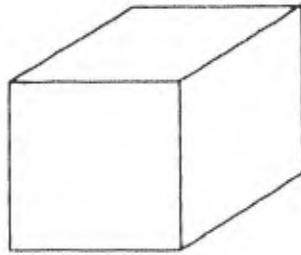
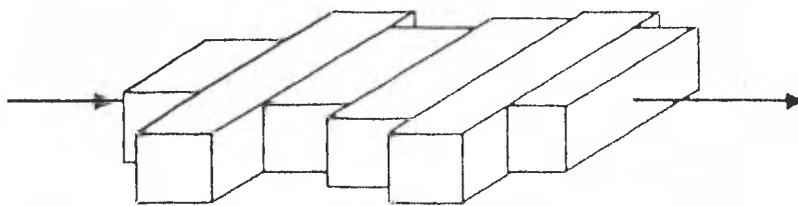
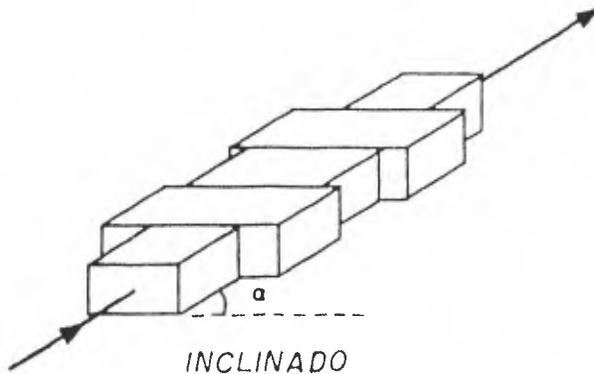


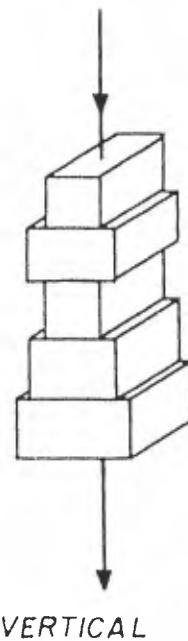
FIG. 1 MODELO DE CERO DIMENSIONES



HORIZONTAL



INCLINADO



VERTICAL

FIG. 2 MODELO DE UNA DIMENSION

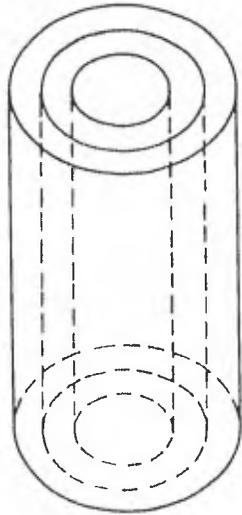


FIG 2a MODELO DE UNA DIMENSION  
FORMA RADIAL

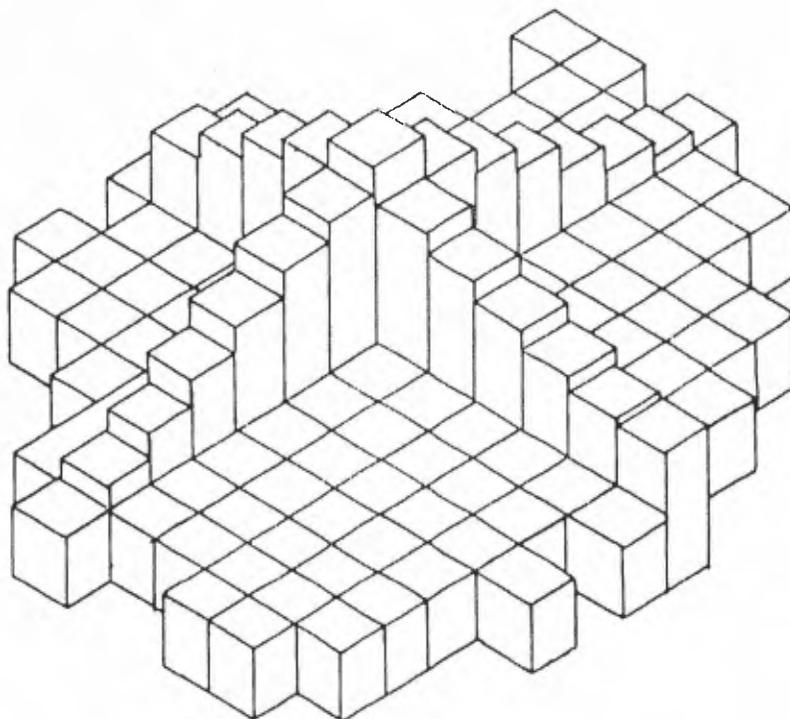


FIG. 3a MODELO AREAL DE DOS DIMENSIONES

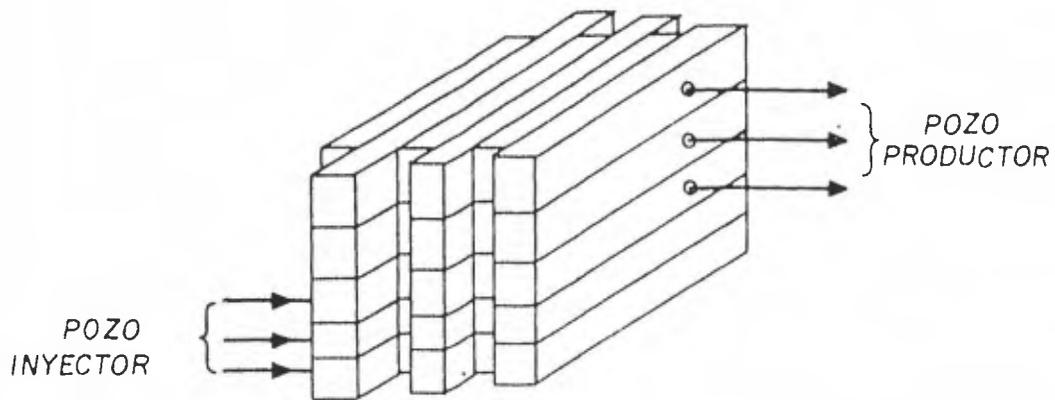


FIG. 3b DE SECCION TRANSVERSAL

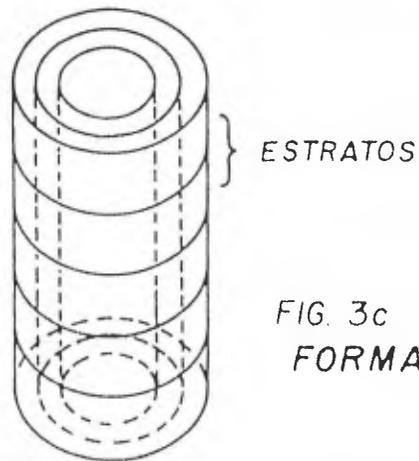
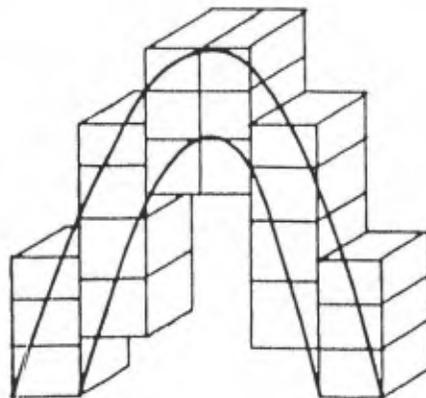


FIG. 3c  
FORMA RADIAL



MODELOS DE DOS DIMENSIONES

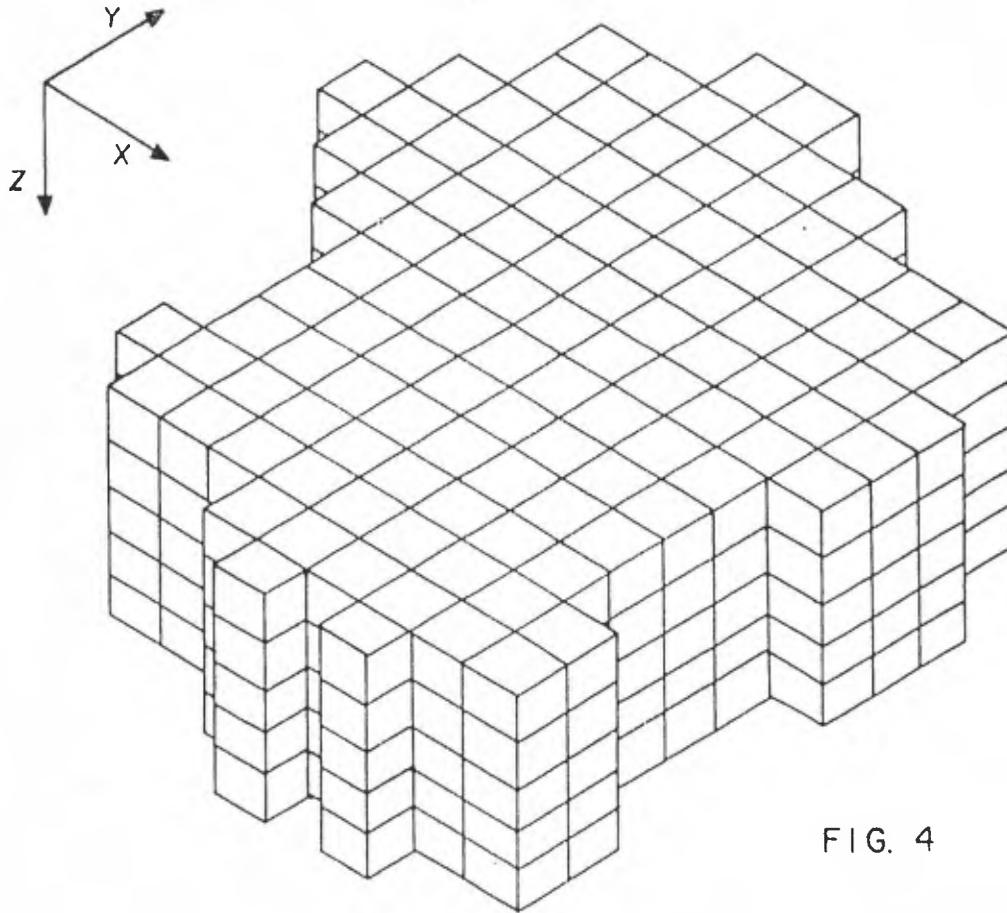


FIG. 4

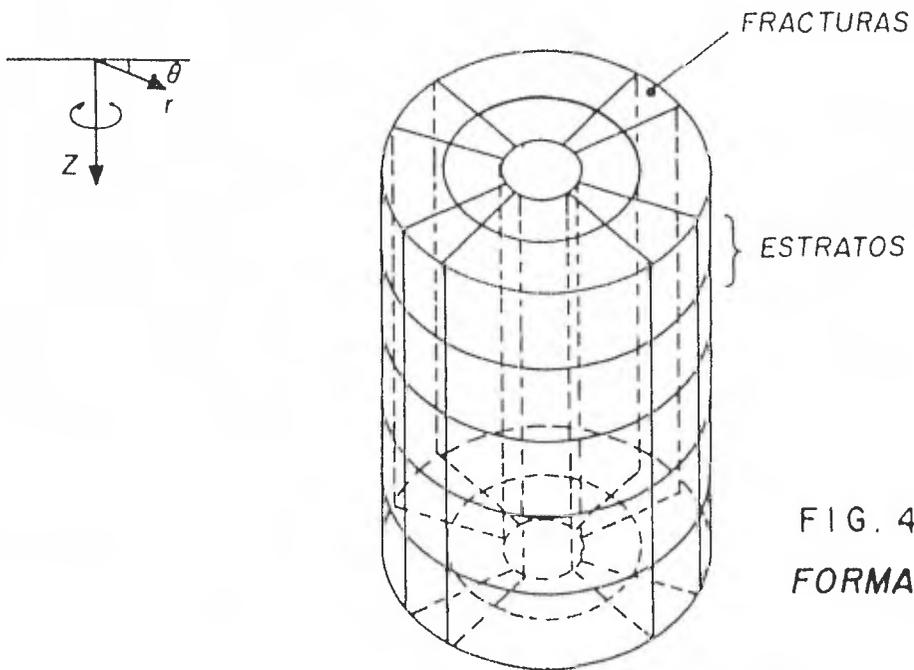


FIG. 4a  
FORMA RADIAL

MODELOS DE TRES DIMENSIONES

## C O N T E N I D O

### CAPITULO 2 PRINCIPIOS BASICOS Y ECUACIONES DE FLUJO

- 2.1            *Introducción.*
- 2.2            *Potencial de flujo.*
- 2.3            *Ley de Darcy.*
- 2.4            *Ecuación de continuidad y difusividad.*
- 2.4.1        *Ecuación de continuidad para un sólo fluido.*
- 2.4.2        *Ecuación de difusividad.*
- 2.4.3        *Tipos de fluidos.*
- 2.4.4        *Ecuaciones de estado.*
- 2.5            *Desarrollo de ecuaciones para los diferentes tipos de fluidos.*
- 2.5.1        *Ecuación para flujo incompresible.*
- 2.5.2        *Ecuación para flujo ligeramente compresible.*
- 2.5.3        *Ecuación de flujo para un gas real.*
- 2.6            *Formulación integral de un problema trifásico.*
- 2.7            *Condiciones iniciales y condiciones de frontera.*
- 2.8            *Requerimientos, datos generales y preparación para un simulador.*

## C A P I T U L O 2

### PRINCIPIOS BASICOS Y ECUACIONES FUNDAMENTALES

#### 2.1 INTRODUCCION

El flujo de fluidos en medios porosos es un fenómeno muy complejo y como tal no puede ser descrito explícitamente.

En flujo a través de tuberías o conductos, es posible medir la longitud y el diámetro y calcular la capacidad de flujo como función de la caída de presión; sin embargo, el flujo en medios porosos es diferente, ya que se tienen que considerar ecuaciones que describan el flujo de los fluidos en una, dos o tres fases, a través de "canales de flujo" que presentan variaciones de uno o varios ordenes de magnitud en donde los fluidos pueden ser tratados como incompresibles, ligeramente incompresibles o compresibles. Además para representar el sistema de flujo pueden considerarse una, dos o tres dimensiones, incluyendo, si se desea, heterogeneidad en las propiedades petrofísicas, efectos gravitacionales, efectos capilares y transferencia de masa entre las fases.

#### 2.2 POTENCIAL DE FLUJO ( $\phi$ )

El potencial de flujo combina los efectos de presión con los efectos gravitacionales y se define por:

$$\phi = p - \rho g D \quad (2.1)$$

en donde:

$$\phi = (p, \rho)$$

$\rho g$  = es el peso específico

$D$  = es la profundidad (positiva hacia abajo) medida a partir de un plano conveniente de referencia.

De acuerdo a las unidades comunmente usadas en ingeniería petrolera, el potencial puede ser expresado como:

$$\phi = p + \frac{1}{144} \frac{g}{g_c} \rho h \quad (2.2)$$

$$\phi = p - \frac{1}{144} \frac{g}{g_c} \rho D \quad (2.3)$$

en donde

$p$  = presión (lb/pg<sup>2</sup>)

$\rho$  = densidad (lb/pies<sup>3</sup>)

$h$  = altura medida hacia arriba de un plano dado (pies)

$D$  = profundidad medida hacia abajo de un plano dado (pies)

$g$  = aceleración de la gravedad en el lugar que se este trabajando.

$g_c$  = constante gravitacional condiciones normales y es igual a 32.2 pies/seg<sup>2</sup>.

La variación del potencial en una dirección horizontal es equivalente al cambio de presión en esa dirección.

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{dp}{dx} + 0 \quad (2.4)$$

Sin embargo, la variación del potencial en la dirección vertical incluye también el efecto gravitacional:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{dp}{dz} - \frac{1}{144} \frac{g}{g_c} \rho \quad (2.5)$$

### 2.3 LEY DE DARCY

La ley de Darcy establece la proporcionalidad de la velocidad - de flujo de un fluido homogéneo en medio poroso con el gradiente de presión.

$$\frac{q}{A} \sim \text{gradiente de presión} \quad (2.6)$$

en donde

$$q = vA \quad (2.7)$$

Para cambiar el signo de proporcionalidad por el signo igual es necesario tomar en cuenta tanto las características del medio poroso (permeabilidad) como las del fluido (viscosidad); así para flujo horizontal la ecuación de Darcy se expresa como:

$$\frac{q}{A} = - \frac{k}{\nu} \frac{dp}{dl} \quad (2.8)$$

La validez de la ecuación anterior presupone las siguientes condiciones:

- a) Fluido homogéneo (una sola fase)
- b) No existen reacciones químicas entre el fluido y el medio poroso.
- c) La permeabilidad es independiente del fluido, de la temperatura, de la presión y de la localización.
- d) Régimen laminar.
- e) No existe efecto de Klinkenberg.
- f) Flujo permanente e incompresible.
- g) El fluido satura 100% al medio poroso.

El signo (-) de la ecuación anterior, surge al considerar que - la presión disminuye cuando la longitud aumente y se requiere para-compensar el signo negativo del gradiente.

Para flujo inclinado es necesario considerar tanto la variación en la presión como la variación en la carga gravitacional.

$$v = \frac{q}{A} = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{dp}{dl} + \rho g \right) \quad (2.9)$$

La razón del signo (+) se relaciona con la dirección que se le- de a "l", la cual puede ser positiva hacia arriba o viceversa.

Ahora bien, la velocidad a la que se refiere la ecuación de - - Darcy es la velocidad aparente, por lo que si se desea evaluar la - velocidad real habrá que dividir la velocidad aparente por la poro- sidad efectiva del medio, o sea:

$$v_{med.} = \frac{u}{\phi_e} \quad (2.10)$$

donde

$v_{med.}$  = velocidad real o media.

$u$  = velocidad aparente.

$\phi_e$  = porosidad efectiva.

La ecuación de Darcy en forma vectorial se expresa como:

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\phi} = -\frac{\vec{k}}{\mu\phi} \nabla p \quad (2.11)$$

Haciendo un análisis de cada una de las variables que intervie- nen en la ecuación (2.11) :

- La viscosidad ( $\mu$ ) es un escalar.
- La porosidad ( $\phi$ ) es un escalar.
- La velocidad ( $\vec{v}$ ) por tener magnitud, dirección y sentido es un vector.
- El potencial ( $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ ) también es un vector.
- La permeabilidad ( $\vec{k}$ ) es un tensor, capaz de influir en la dirección de flujo, la cual no siempre es gobernada exclusivamente por el gradiente de presión.

Dados los ejes  $x, y, z$  no necesariamente ortogonales, las componentes de la velocidad  $\vec{v}$  ( $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$ ) se expresan, de acuerdo a la ley de Darcy, como:

$$\bar{u}_x = - \frac{1}{\mu} \left( k_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (2.12)$$

$$\bar{u}_y = - \frac{1}{\mu} \left( k_{yx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} + k_{yz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (2.13)$$

$$\bar{u}_z = - \frac{1}{\mu} \left( k_{zx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_{zy} \frac{\partial \phi}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (2.14)$$

La matriz tensor de permeabilidad tiene nueve componentes:

$$k_{i,j} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

mientras que la velocidad y el potencial, siendo vectores tienen tres componentes solamente:

$$\vec{v} = ( u_x, u_y, u_z ) \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

Debido a la laboriosidad de trabajar con tensores, se hacen comúnmente las siguientes suposiciones, para simplificar las ecuaciones :

1) La matriz tensorial es simétrica, o sea:

$$k_{xy} = k_{yx}, k_{xz} = k_{zx}, k_{yz} = k_{zy}$$

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

2) Al rotar los ejes de una matriz simétrica se obtiene una matriz diagonal.

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix}$$

En donde los ejes son ortogonales y están alineados con las direcciones principales de flujo. Por lo que las componentes de la velocidad se reducen a :

$$\bar{u}_x = - \frac{k_{xx}}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.15)$$

$$\bar{u}_y = - \frac{k_{yy}}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.16)$$

$$\bar{u}_z = - \frac{k_{zz}}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.17)$$

En general las direcciones principales de flujo son:

$s$ ; La dirección máxima, paralela a los planos de sedimentación.

$s$ ; La dirección mínima perpendicular a los planos de sedimentación.

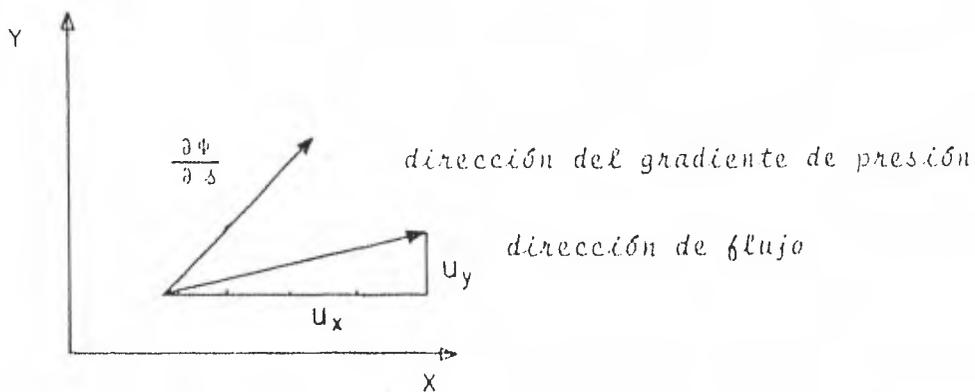
Si el medio es isotrópico ( $k_x = k_y = k_z$ ), entonces la dirección del flujo es igual a la dirección del gradiente aplicado.

Si el medio es anisotrópico sin embargo ( $k_x \neq k_y \neq k_z$ ), la dirección del flujo es diferente a la dirección del gradiente aplicado.

EJEMPLO:

Sea un medio poroso bidimensional donde  $k_x = 4k_y$ , si se aplica un gradiente con un ángulo de  $45^\circ$  (o sea  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ ) encontrar la dirección del flujo.

SOLUCION



$$\bar{u}_x = -\frac{4}{u} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\bar{u}_y = -\frac{1}{u} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\bar{u}_{xy} = -\frac{4}{u} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{1}{u} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left[-\frac{4}{\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right]^2}$$

$$|\vec{u}| = \frac{1}{\mu} \sqrt{17} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

La magnitud del vector normal está dada por:

$$|\vec{u}| = \frac{1}{\mu} \sqrt{17} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

La dirección del vector unitario está dada por:

$$\vec{e}_u = -\frac{kx}{\mu\sqrt{17}} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{ky}{\mu\sqrt{17}} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

o sea la aplicación de un gradiente a  $45^\circ$  a este medio, resulta en un vector velocidad cuya dirección principal tiene un ángulo  $\theta = \tan^{-1} 1/4$ ,  $\theta = 14^\circ 02'$

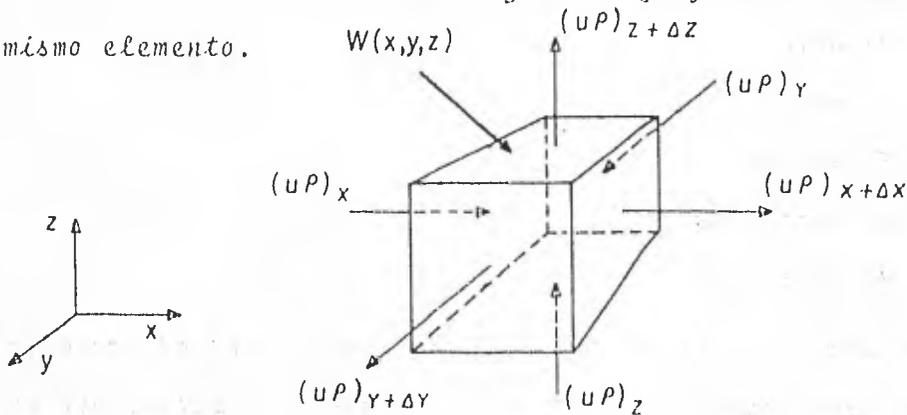
## 2.4 ECUACION DE CONTINUIDAD Y DIFUSIVIDAD

La descripción matemática del flujo de fluidos en medios porosos esta basada en la ley de la conservación de la masa.

### 2.4.1 ECUACION DE CONTINUIDAD PARA UN SOLO FLUIDO

La ecuación de continuidad es consecuencia de la aplicación del principio de conservación de la masa, el cual establece que la masa dentro de un sistema permanece constante con el tiempo, es decir,  $-dm/dt = 0$ . La ecuación de continuidad para un cierto elemento de me

-dio poroso establece que la rapidez de crecimiento de la masa dentro del elemento es exactamente igual al flujo neto de masa hacia el mismo elemento.



Considerese un pequeño paralelepípedo de un medio poroso de dimensiones  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ; a través del cual existe flujo en todas las caras.

Haciendo un balance de materia durante un intervalo pequeño de tiempo  $\Delta t$ .

Se puede considerar que:

El flujo de masa por unidad de superficie es igual a la velocidad multiplicada por la densidad

$$u \rho \quad (2.18)$$

Dimensionalmente

$$\frac{L}{T} \frac{M}{L^3} = \frac{M}{TL^2}$$

Ahora bien si el flujo de masa se multiplica por el área transversal al flujo, se obtiene como resultado, el flujo másico.

$$u \rho A = \rho q$$

(2.19)

donde

A= área

M= masa

T= tiempo

u= velocidad

$\rho$  = densidad

Por otra parte se puede considerar que la entrada de masa al elemento considerado es positiva (inyección), mientras que la salida de masa se considera negativa (producción). El término fuente (o sumidero) se representa por  $W(x, y, z)$ , el cual tiene unidades de masa por unidad de volúmen de roca.

$$W(x, y, z) \left[ \frac{\text{Masa}}{\text{unidad de vol. de roca}} \right]$$

$W(x, y, z) (+)$  Inyección

$W(x, y, z) (-)$  Producción

Por otra parte:

Masa de fluido en el elemento,

en el tiempo  $t$ :  $\Delta x \Delta y \Delta z (\phi \rho)_t$  (inicial)

en el tiempo  $t + \Delta t$ :  $\Delta x \Delta y \Delta z (\phi \rho)_{t+\Delta t}$  (final)

Del principio de conservación de masa:

(Masa que entra) - (Masa que sale) = Acumulación,

Acumulación = (Masa final) - (Masa inicial)

La cara  $\Delta y, \Delta z$  es perpendicular al flujo en la dirección  $x$ , con lo cual la cantidad de masa neta que entra en la dirección  $x$  se expresa como:

$$\Delta t \left[ (\rho u)_x - (\rho u)_{x+\Delta x} \right] \Delta y \Delta z \quad (2.20)$$

Para las direcciones "y", y "z" se obtienen expresiones similares. Ahora la acumulación se escribe como:

$$\text{Acumulación} = \Delta x \Delta y \Delta z (\phi \rho)_{t+\Delta t} - \Delta x \Delta y \Delta z (\phi \rho)_t \quad (2.21)$$

tomando en cuenta las expresiones anteriores

$$\Delta t \left[ (\rho u)_x - (\rho u)_{x+\Delta x} \right] \Delta y \Delta z + \Delta t \left[ (\rho u)_y - (\rho u)_{y+\Delta y} \right] \Delta x \Delta z + \Delta t \left[ (\rho u)_z - (\rho u)_{z+\Delta z} \right] \Delta y \Delta x + W(x, y, z) = \Delta x \Delta y \Delta z \left[ (\phi \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \rho)_t \right]$$

dividiendo entre  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$  se obtiene:

$$-\frac{(\rho u)_{x+\Delta x} - (\rho u)_x}{\Delta x} - \frac{(\rho u)_{y+\Delta y} - (\rho u)_y}{\Delta y} - \frac{(\rho u)_{z+\Delta z} - (\rho u)_z}{\Delta z} + \frac{W(x, y, z)}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t} = \frac{(\phi \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \rho)_t}{\Delta t} \quad (2.23)$$

tomando límites cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$  y recordando la definición de derivada de una función:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

se tiene que:

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + W(x, y, z) = \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} \quad (2.24)$$

Esta ecuación es la forma general de la ecuación de continuidad en un medio poroso.

#### 2.4.2 ECUACION DE DIFUSIVIDAD

Substituyendo las componentes de la velocidad por la ley de Darcy en la ecuación de continuidad se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + W(x, y, z) = \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} \quad (2.25)$$

Esta es la ecuación general de difusividad que representa el flujo de un solo fluido a través de un medio poroso.

Para el flujo de varios fluidos, es necesario considerar también que el medio poroso estará sujeto a variaciones en la saturación por lo tanto, después de proceder en forma similar a la anterior, la ecuación de difusividad para flujo multifásico en donde  $k_f$  representa la permeabilidad efectiva al flujo en cuestión, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{k_{fx}}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{k_{fy}}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{k_{fz}}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + W(x, y, z) = \frac{\partial(S_f \phi \rho)}{\partial t} \quad (2.26)$$

Para la solución de esta ecuación es necesario utilizar una ecuación de estado que relacione la densidad con la presión.

#### 2.4.3. TIPOS DE FLUIDOS

Los fluidos de un yacimiento son clasificados dentro de tres grupos, dependiendo de su compresibilidad.

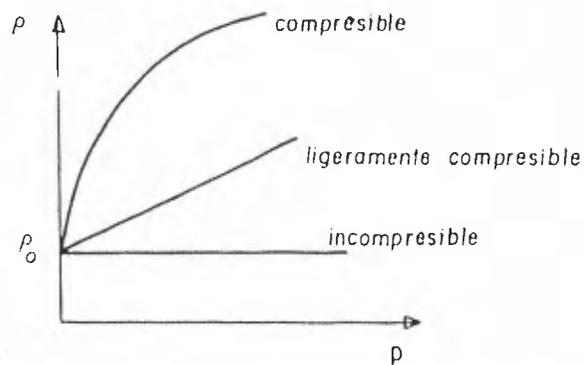
- a) Fluidos incompresibles.
- b) Fluidos ligeramente compresibles.
- c) Fluidos compresibles.

En un fluido incompresible, la densidad de los fluidos se considera constante.

Un fluido se denomina ligeramente compresible si su densidad se puede considerar como una función lineal de presión (por ejemplo compresibilidad constante).

Finalmente un fluido compresible es aquel que presenta un cambio significativo de densidad con la presión.

Graficamente se tiene lo siguiente:



#### 2.4.4 ECUACIONES DE ESTADO

Dependiendo del fluido que se este manejando, existen varias ecuaciones de estado.

- a) Si el fluido es incompresible quiere decir que la densidad será constante.

$$\rho = \text{ctte.} \quad (2.27)$$

- b) Si el fluido es ligeramente compresible (líquido) la ecuación de estado será:

$$c = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T=\text{ctte.}} \quad (2.28)$$

c) Para un gas ideal

$$pV = nRT \quad (2.29)$$

d) Para un gas real

$$pV = ZnRT \quad (2.30)$$

Antes de introducir las ecuaciones de estado a la ecuación de difusividad, se definen algunos términos.

$$B_0 = \text{Factor de volúmen en } \left[ \frac{\text{vol. @ c.y.}}{\text{vol. @ c.s.}} \right]$$

$$q_{\text{vol.}} = \text{Ritmo de inyección en } \left[ \frac{\text{vol. @ c.s./día}}{\text{pie}^3 \text{ de roca}} \right]$$

por lo que

$w(x, y, z)$  = Ritmo de inyección de masa por unidad de volúmen.

$$w(x, y, z) = B_0 q_{\text{vol.}} \rho \quad (2.31)$$

$$w(x, y, z) = \left[ \frac{\text{vol. @ c.y.}}{\text{vol. @ c.s.}} \right] \left[ \frac{\text{vol. @ c.s.}}{\text{día} \cdot \text{pie}^3} \right] \left[ \frac{\text{masa}}{\text{vol. @ c.y.}} \right]$$

## 2.5 DESARROLLO DE ECUACIONES PARA LOS DIFERENTES TIPOS DE FLUIDOS

### 2.5.1 ECUACION PARA FLUJO INCOMPRESIBLE

$$\text{si } \rho = \text{cte.}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.32)$$

y además la viscosidad es constante. De la ecuación de difusividad

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + W(x, y, z) = \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t}$$

substituyendo el valor de  $W$ , sabiendo que  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , multiplicando - por  $\mu$  y dividiendo por  $\rho$  (ambas constantes):

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) + q_{vol} \cdot B = 0 \quad (2.33)$$

En la ecuación anterior las permeabilidades pueden variar en  $x, y, z$ ; es decir

$$k_x = k_x(x, y, z)$$

$$k_y = k_y(x, y, z)$$

$$k_z = k_z(x, y, z)$$

Si el medio es isotrópico y homogéneo

$$k_x = k_y = k_z = k$$

Dividiendo la ecuación (2.33) por  $k$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\mu q_{vol} B}{k} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\mu q_{vol} B}{k} = 0$$

la cual se puede expresar como

$$\nabla^2 \phi + \frac{q_{vol.} B}{k} = 0 \quad \text{Ecuación de Poisson} \quad (2.35)$$

Si no existe inyección la ecuación anterior se simplifica a:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{Ecuación de Laplace} \quad (2.36)$$

Las unidades que comunmente se usan en ingeniería petrolera son las siguientes:

$$B \left[ \frac{\text{vol. @. y.}}{\text{vol. @. s.}} \right]$$

$$q_{vol.} \left[ \frac{\text{stb}}{\text{día pie}^3} \right]$$

$$x, y, z \quad (\text{pies})$$

$$\mu \quad (\text{lb/pg}^2)$$

$$v \quad (\text{cp})$$

por lo que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{144} \frac{q}{g_c} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{144} \frac{q}{g_c} \frac{\partial D}{\partial x} \end{array} \right. \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{144} \frac{q}{g_c} \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{144} \frac{q}{g_c} \frac{\partial D}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{144} \rho \frac{g}{g_c} \frac{\partial h}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{144} \rho \frac{g}{g_c} \frac{\partial D}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2.39)$$

### 2.5.2 ECUACION PARA UN FLUIDO LIGERAMENTE COMPRESIBLE DE COMPRESIBILIDAD CONSTANTE.

Recordando la ecuación general de compresibilidad dada por:

$$c = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (2.40)$$

a partir de ella se podrá obtener una ecuación que relacione la densidad del fluido con su compresibilidad, con ayuda de la siguiente ecuación:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

∴  $\rho$  = densidad,  $m$  = masa y  $V$  = volúmen. Despejando el volúmen de la ecuación anterior,

$$V = \frac{m}{\rho} \quad (2.41)$$

derivando la ecuación (2.41) con respecto a la presión ( $p$ ) se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\frac{\partial m}{\partial p} - m \frac{\partial \rho}{\partial p}}{\rho^2} \quad (2.42)$$

sustituyendo en la ecuación (2.40) las expresiones (2.41) y (2.42).

$$c = \frac{-1}{m/\rho} \left( \frac{-m\partial\rho}{\rho^2\partial p} \right)$$

$$\therefore c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} \quad (2.43)$$

La ecuación anterior nos representa la relación de la densidad de un líquido con su compresibilidad. Para obtener la variación de la presión en las direcciones "x,y,z", bastará con despejar "dp" de la ecuación (2.43) y derivar respecto a cada una de las direcciones correspondientes.

despejando "dp":

$$dp = \frac{1}{c\rho} \frac{d\rho}{1}$$

derivando respecto a "x,y,z"

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{c\rho} \frac{d\rho}{dx} \quad (2.44)$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1}{c\rho} \frac{d\rho}{dy} \quad (2.45)$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{1}{c\rho} \frac{d\rho}{dz} \quad (2.46)$$

Si el espesor del yacimiento es pequeño y de bajo relieve estructural, es decir para flujo horizontal, se puede hacer la considera-

-ción de que el potencial de flujo es aproximadamente igual a la --  
presión.

$$\phi = p \quad (2.47)$$

Ahora bien, si no se tiene inyección en ningún pozo ( $w(x,y,z)=0$ ),  
tomando en cuenta la consideración anterior y recordando la ecuación  
de difusividad dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + w(x,y,z) = \frac{\partial (S_{F\phi\rho})}{\partial t}$$

sustituyendo en la ecuación anterior las ecuaciones (2.44), (2.45),  
(2.46), y (2.47) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{k_x}{\mu} \frac{1}{c\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{k_y}{\mu} \frac{1}{c\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{k_z}{\mu} \frac{1}{c\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \frac{\partial (\phi\rho)}{\partial t}$$

simplificando la ecuación anterior:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_x}{\mu} \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k_y}{\mu} \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_z}{\mu} \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \frac{\partial (\phi\rho)}{\partial t} \quad (2.48)$$

Considerando un medio isotrópico ( $k_x=k_y=k_z=k$ ), la viscosidad --  
constante ( $\mu=c\eta$ ), multiplicando por  $\mu$  y dividiendo entre  $k$ , se --

obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

o sea:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

siendo equivalente a :

$$\nabla^2 \rho = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.49)$$

La ecuación obtenida anteriormente es la representativa para el flujo de un fluido ligeramente compresible de compresibilidad constante, la cual puede ser aplicada para líquidos y para gases en intervalos pequeños.

La ecuación (2.49) no es muy práctica para su utilización en la forma obtenida, debido a la dificultad que presenta la evaluación de las densidades, por lo que es conveniente expresar la ecuación (2.49) en función de la presión.

De la ecuación (2.45)

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}$$

despejando "cdp" se tiene:

$$c dp = \frac{1}{\rho} d\rho$$

integrando de  $p_0$  a  $p$

$$\int_{p_0}^p c dp = \int_{p_0}^p \frac{d\rho}{\rho}$$

se obtiene:

$$c (p - p_0) = \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

despejando " $\rho$ "

$$\rho = \rho_0 e^{c(p-p_0)} \quad (2.50)$$

$\rho_0$  = densidad inicial del fluido valuada a una presión inicial --  
(  $p_0$  )

$p$  = presión medida a cualquier tiempo.

Recordando que la fórmula de expansión de una función " $f(z)$ ", --  
en las cercanías del valor conocido de la función por medio de la se-  
rie de Taylor, siendo " $a$ " el punto conocido:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)(z-a)}{1!} + \frac{f''(a)(z-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(z-a)^n}{n!}$$

por lo tanto se puede expandir la función  $f(x)$  alrededor del punto  $x=0$ ,  
entonces:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

por lo tanto:

$$\theta^{cp} = 1 + \frac{cp}{1!} + \frac{c^2 p^2}{2!} + \frac{c^3 p^3}{3!} + \dots + \frac{c^n p^n}{n!} \quad (2.51)$$

En la mayoría de los casos en ingeniería petrolera (para líquidos), se cumple que:

$$cp < 0.01$$

$$\therefore c^2 p^2 < 0.0001$$

por lo que la expresión (2.51) se puede simplificar a:

$$\theta^{cp} \approx 1 + cp \quad (2.52)$$

sustituyendo la ecuación (2.52) en la ecuación (2.50) se tiene:

$$\rho = \rho_0 (1 + cp) \quad (2.53)$$

teniendo la densidad como función de la presión, se podrá obtener la ecuación de flujo representativa.

Sustituyendo la ecuación (2.53) en la ecuación (2.49)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial [\rho_0(1+cp)]}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial [\rho_0(1+cp)]}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial [\rho_0(1+cp)]}{\partial z} \right] = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial [\rho_0(1+cp)]}{\partial t} \quad (2.54)$$

siendo " $\rho_0$ " la densidad inicial del fluido (constante), entonces:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

por lo que, en la dirección "x" se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( 0 + c \rho_0 \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

reduciéndose la ecuación (2.54) a:

$$c \rho_0 \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] = \frac{\mu c}{k} c \rho_0 \frac{\partial p}{\partial t}$$

dividiendo entre  $c \rho_0$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t}$$

o sea:

$$\nabla^2 p = \frac{\mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.55)$$

que es la ecuación de difusión para un fluido ligeramente compresible habiendo hecho las siguientes consideraciones:

- medio isotrópico
- medio homogéneo
- viscosidad constante
- compresibilidad constante

La importancia que reviste dicha ecuación es trascendente, debido a su múltiple utilidad. Entre otras aplicaciones se tienen:

- pruebas de presión (incremento, decremento, interferencia, etc.)
- pruebas de límite de yacimientos
- simulación de yacimientos.

### 2.5.3 ECUACION DE FLUJO PARA UN GAS REAL

Para poder obtener la ecuación representativa de flujo de gas, es necesario introducir la ecuación general de los gases.

Recordando la ecuación general de los gases dada por:

$$p V = Z n R T \quad (2.56)$$

$$\therefore n = n^{\circ} \text{ de moles} = \frac{m}{M} = \frac{\text{masa}}{\text{peso molecular}} \quad (2.57)$$

sustituyendo la ecuación (2.57) en la ecuación (2.56).

$$p V = Z \frac{m}{M} R T \quad (2.58)$$

de la ecuación (2.40)  $\rho = \frac{m}{V}$

sustituyendo la ecuación (2.40) en la ecuación (2.58) y despejando "  $\rho$  " se tiene:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{ZRT} \quad (2.59)$$

involucrando el valor de la densidad de un gas dada por la ecuación (2.59), en la ecuación de difusividad.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{pM}{ZRT} \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{pM}{ZRT} \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{pM}{ZRT} \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{pM}{ZRT} q. \text{ vol. } (x, y, z) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{pM}{ZRT} \right) \quad (2.60)$$

Si se llama 1 a las condiciones de yacimiento y 2 a las condiciones de superficie

$$\frac{p_1 V_1}{Z_1 T_1} = \frac{p_2 V_2}{Z_2 T_2}$$

como  $V_1 = q \text{ vol. } (x, y, z)$

$$\frac{p_1 q \text{ vol. } (x, y, z)}{Z_1 T_1} = \frac{p_2 q \text{ vol. } (\text{scf}/d)}{Z_2 T_2} \quad (2.61)$$

sabiendo que las condiciones estandar son:

$$T_2 = 60^\circ \text{F} = 60 + 460 = 520 \text{ } ^\circ \text{R}$$

$$Z_2 = 1$$

$$p_2 = 14.7 \text{ lb/pg}^2$$

$$d = d/a$$

despejando  $q \text{ vol. } (x, y, z)$  de la ecuación (2.61) y sustituyendo los valores de las condiciones estandar:

$$q \text{ vol. } (x, y, z) = \frac{14.7 \times q \text{ vol. } (\text{scf}/d)}{520} \frac{Z_1 T_1}{p_1}$$

sustituyendo la ecuación (2.62) en la ecuación (2.60)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho M}{ZRT} \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho M}{ZRT} \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho M}{ZRT} \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) +$$

$$\frac{\rho (14.7) q \text{ vol. } (\text{scf}/d)}{Z \cdot p \times 520} = q \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho M}{ZRT} \right)$$

como M, R y T son constantes; multiplicando por R T y dividiendo --- entre M resulta lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\mu} \frac{k_x}{Z} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\mu} \frac{k_y}{Z} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\mu} \frac{k_z}{Z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) +$$

$$\frac{14.7 \text{ q vol. (scf/d)}}{520 \times 5.615} = \frac{1}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{Z} \right) \quad (2.63)$$

que es la ecuación de difusión para un gas real, en donde:

$$\text{q. vol.} \left[ \frac{\text{scf/d}}{\text{pie}^3 \text{ roca}} \right]$$

$$T \text{ [}^\circ\text{R]}$$

$$p \text{ [lb/pg}^2\text{]}$$

5.615 factor de conversión ( 1 bl = 5.615 pie<sup>3</sup> )

La ecuación anterior es una ecuación no lineal.

Para reducir la no linealidad de la ecuación se utilizará un artificio.

Defínase al potencial de un gas real como (p\*):

$$p^* = \int_{p_0}^p \frac{\xi}{\mu(\xi) Z(\xi)} d\xi$$

La integral anterior se puede calcular a través del método de Simpson para funciones discretas. El método consiste en elaborar una tabla de valores y una gráfica de "p" VS "p/μZ", donde a partir de la unión de los puntos se obtendrá una curva, por medio de la cual se -

podrá obtener el valor de la integral en un intervalo, que representa el área bajo la curva.

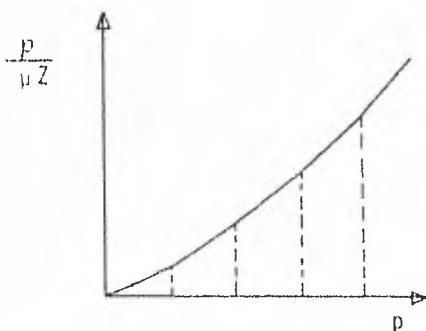
La función anterior permite transformar la ecuación no lineal - de la siguiente manera:

si

$$\frac{\partial p^*}{\partial p} = \frac{p}{\nu Z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\partial p^*}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

se tendrá que:

$$" \quad \frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\partial p^*}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p}{\nu Z} \frac{\partial p}{\partial x} " \quad (2.64)$$



sustituyendo el valor de la ecuación (2.64) en la ecuación para un gas real se tendrá:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial p^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial p^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) +$$

$$\frac{14.7 \text{ q. vol. (scf/d)}}{520 \times 5.615} = \frac{1}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{p}{Z} \right) \quad (2.65)$$

además de la expresión anterior se pueden obtener otras 2 expresio-

-nes: de la ley de los gases reales:

$$V = \frac{Zm}{M} \frac{RT}{p} \quad (2.66)$$

derivando respecto a "p" la ecuación anterior

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{mRT}{M} \left( \frac{1}{Zp^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial Z}{\partial p} \right)$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{mRT}{M} \left( \frac{1}{p} \frac{\partial Z}{\partial p} - \frac{Z}{p^2} \right) \quad (2.67)$$

sustituyendo la ecuación (2.66) y la (2.67) en la ecuación de compresibilidad ecuación (2.40).

$$c = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

$$c = - \frac{pM}{ZmRT} \cdot \frac{mRT}{M} \left( \frac{1}{p} \frac{\partial Z}{\partial p} - \frac{Z}{p^2} \right)$$

simplificando

$$c = - \frac{p}{Z} \left( \frac{1}{p} \frac{\partial Z}{\partial p} - \frac{Z}{p^2} \right)$$

$$\therefore c = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial p} \quad (2.68)$$

que representa la ecuación de compresibilidad para gases.

Del término  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi p}{Z} \right)$  de la ecuación (2.65), si se conside-

ra la porosidad ( $\phi$ ) como una constante, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{Z} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{Z} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \left( \frac{-p}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial p}{\partial t} =$$

$$\frac{p}{Z} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t}$$

como  $c = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial p}$

entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{Z} \right) = \frac{pc}{Z} \frac{\partial p}{\partial p^*} \frac{\partial p^*}{\partial t}$$

Si se tiene una diferencial total, es decir que "p\*" es función de "p" entonces:

$$\frac{\partial p}{\partial p^*} = \frac{1}{\partial p^* / \partial p}$$

o sea:

$$\frac{dp}{dp^*} = \frac{1}{dp^*/dp} = \frac{1}{p/\mu Z}$$

por lo que:

$$" \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{Z} \right) = \frac{\rho c}{Z} \frac{\partial p^*}{\partial t} = c_{II} \frac{\partial p^*}{\partial t} "$$

quedando finalmente la ecuación para un gas real en tres formas diferentes:

$$1a) \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial p^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial p^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) +$$

$$\frac{14.7 \text{ q. vol. (scf/d)}}{520 \times 5.615} = \frac{\phi \rho c}{5.615} \left( \frac{\partial p^*}{\partial t} \right) \quad (2.70)$$

$$2a) \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial p^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial p^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) +$$

$$\frac{14.7 \text{ q. vol. (scf/d)}}{520 \times 5.615} = \frac{\phi \rho c}{5.615} \left( \frac{\partial p^*}{\partial t} \right) \quad (2.71)$$

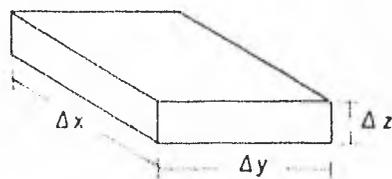
$$3a) \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial p^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial p^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) +$$

$$\frac{14.7 \text{ q. vol. (scf/d)}}{520 \times 5.615} = \frac{\phi}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{Z} \right) \quad (2.72)$$

NOTA: La consideración de que la porosidad es constante, es aceptable debido a que la compresibilidad de la roca es mucho menor que la compresibilidad del gas.

## 2.6 FORMULACION INTEGRAL DE UN PROBLEMA TRIFASICO

Para formular las ecuaciones de flujo trifásico, se tomaron en cuenta las propiedades de cada fluido en particular. Procediendo en forma similar a la utilizada para deducir la ecuación de flujo monofásico, se llega a las siguientes ecuaciones de flujo de tres fases.



Aceite:

$$\nabla \left( \frac{Kk_{ro}A}{\mu_o B_o} \nabla \phi_o \right) \Delta + q_o \text{ stb/d} = \frac{Vb}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right) \quad (2.73)$$

Agua:

$$\nabla \left( \frac{Kk_{rw}A}{\mu_w B_w} \nabla \phi_w \right) \Delta + q_w \text{ stb/d} = \frac{Vb}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right) \quad (2.74)$$

Gas:

$$\nabla \left( \frac{Kk_{rg}A}{\mu_g B_g} \nabla \phi_g + \frac{R_s Kk_{ro}A}{\mu_o B_o} \nabla \phi_o \right) \Delta + q_g \text{ stb/d} = \frac{Vb}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi S_o R_s}{B_o} \right) \quad (2.75)$$

donde

$$\Delta = \Delta x \Delta y \Delta z, \quad V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

Además del flujo de cada fase se tienen las siguientes ecuaciones auxiliares que corresponden a la presión capilar, ecuación de -

saturación y las ecuaciones del potencial.

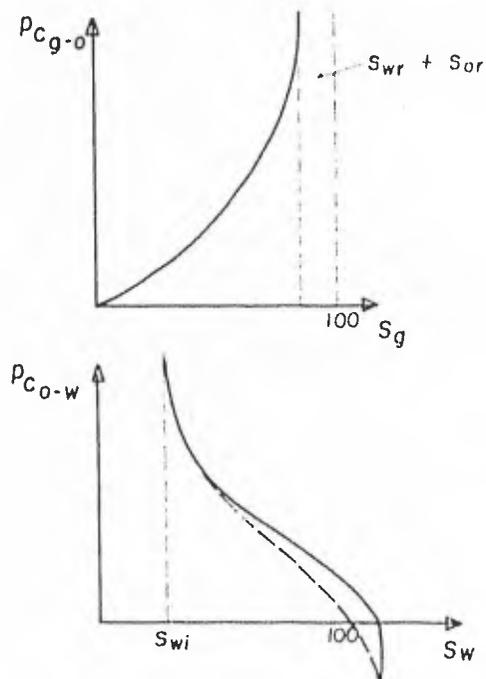
$$- p_{c_{o-w}} = p_o - p_w \quad (2.76)$$

$$- p_{c_{g-o}} = p_g - p_o \quad (2.77)$$

$$- 1 = S_o + S_w + S_g \quad (2.78)$$

\* Medio mojado por agua, donde generalmente  $p_g > p_o > p_w$

Como se menciona anteriormente el comportamiento de la presión-capilar, se obtiene por medio del análisis petrofísico llevado a cabo en el laboratorio.



En algunas rocas  $p_{c_{o-w}}$  se vuelve negativa, implicando un cambio de mojabilidad.

Relaciones de potencial.

$$\psi_o = p_o - \frac{1}{144} \frac{q}{g_c} \rho_o^D \quad (2.79)$$

$$\psi_w = p_w - \frac{1}{144} \frac{q}{g_c} \rho_w^D \quad (2.80)$$

$$\psi_g = p_g - \frac{1}{144} \frac{q}{g_c} \rho_g^D \quad (2.81)$$

Con lo cual se tendrán 6 ecuaciones con 6 incógnitas y por lo tanto el sistema será compatible. Los parámetros que se deben determinar son:  $p_o$ ,  $p_w$ ,  $p_g$ ,  $S_o$ ,  $S_w$  y  $S_g$ .

## 2.7 CONDICIONES INICIALES Y CONDICIONES DE FRONTERA

a).- *Condiciones iniciales.*

Quando una de las variables independientes en una ecuación diferencial parcial es el tiempo, se necesita conocer entre otras cosas, la variable dependiente a un tiempo  $t_o$  para obtener la solución de la ecuación a otros tiempos. A ésta se le llama condición inicial.

En simulación de yacimientos, generalmente la variable dependiente es la presión.

Las presiones y saturaciones deben ser conocidas al tiempo  $t=t_o$ .

Para determinar las condiciones anteriores, éstas se determinan a través de un ejemplo ilustrativo. Dadas las presiones del aceite, la saturación de agua y la saturación de gas.

$$S_g = 1 - S_o - S_w$$

$$p_w = p_o - p_{c_{o-w}} (S_w)$$

$$p_g = p_o - p_{c_{g-o}} (S_g)$$

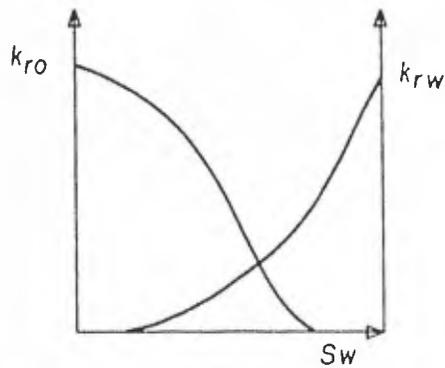
En la práctica se debe proceder de la siguiente manera:

- 1.- Conocer el plano estructural y estratigráfico
- 2.- Conocer las profundidades de los contactos (g-o, w-o)
- 3.- Existencia y tamaño del acuífero (si es que existe)
- 4.- Propiedades pVT de los fluidos en función de la presión
- 5.- Curvas de presión capilar ( $p_{c_{g-o}}$ ,  $p_{c_{w-o}}$ )
- 6.- Curvas de permeabilidades relativas.

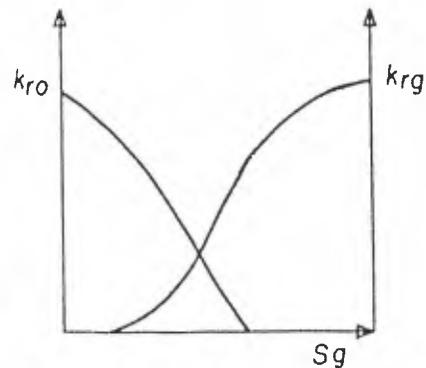
$$k_{rg} = k_{rg} (S_g)$$

$$k_{rw} = k_{rw} (S_w)$$

$$k_{ro} = k_{ro} (S_w, S_g)$$



agua - aceite



aceite - gas

En la actualidad no existe un equipo efectivo para determinar -- las permeabilidades relativas de 3 fases, lo que se hace es elaborar 2 gráficas utilizando 2 fluidos para cada una (g-o y w-o).

7.- Como último dato se requiere definir la presión en un plano de referencia.

Antes de entrar al análisis de fronteras, defínase algunos términos necesarios para su entendimiento.

+ Transmisividad (T)

La transmisividad se define como la capacidad de transmitir, dada por la siguiente ecuación:

$$q = T p,$$

de la ecuación de Darcy

$$q = - \frac{K}{\mu} \frac{A p}{L}$$

entonces

$$T = \frac{K}{\mu} A$$

b).- Condiciones de frontera.

Si se conoce la presión, y/o las primeras derivadas espaciales de la misma, en determinadas regiones de un yacimiento para todo valor del tiempo, a éstas se les conoce como condiciones de frontera.

Las fronteras son límites del yacimiento, que pueden estar abiertas o cerradas al flujo. De acuerdo a los problemas que se presentan en simulación de yacimientos, se consideran fronteras cerradas.

Frontera cerrada. \_ Frontera caracterizada por la inexistencia de flujo. Su cualidad fundamental esta dada por:

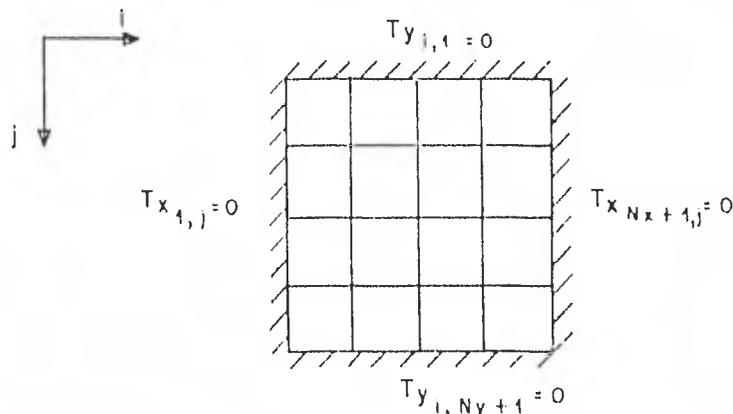
$\left( \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \neq 0 \right)$  = Condiciones de frontera de presión y/o gastos constantes.

$\bar{n}$  = Vector perpendicular a todas las superficies equipotenciales.

¿ Cómo cerrar las fronteras ?

Básicamente existen 2 formas de cerrar las fronteras cuando se utiliza una malla de bloques, y éstas son las siguientes:

1).- Evitar el flujo a través de toda la periferia, haciendo las transmisividades en dicha periferia igual a cero.

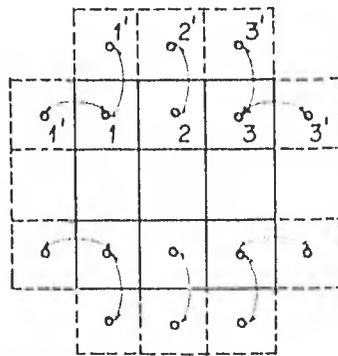


donde:

$N_x$  = Número de bloques en la dirección "x"

$N_y$  = Número de bloques en la dirección "y"

2).- La segunda forma se puede hacer a través de extender la malla agregando bloques virtuales externos a dicha frontera y haciendo los potenciales, permeabilidades, presiones, etc. de cada bloque agregado iguales a los del bloque interior inmediato adyacente. De tal forma que no haya cambio de bloque a bloque adyacente y el flujo sea cero.



1 y 1' tienen las mismas características del bloque adyacente, es decir:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{1'} \\ k_1 &= k_{1'} \end{aligned}$$

por lo tanto el flujo de 1 a 1' es igual a cero.

La deficiencia de esta segunda forma es que se genera una nueva red o sea:

de  $(N_x) (N_y)$  a  $(N_x + 2) (N_y + 2) - 4$

$$\therefore (N_x + 2) (N_y + 2) - 4 = \underline{\underline{2(N_y + N_x) + N_x N_y - N_x N_y}}$$

por lo que se agregarla un número considerable de ecuaciones.

### POZOS INYECTORES O PRODUCTORES (término fuente)

+ Para un modelo areal

Si el ritmo de inyección es dato, se incluye como término fuente (sumidero) en la ecuación y se determinan las presiones y saturaciones como en cualquier otro bloque.

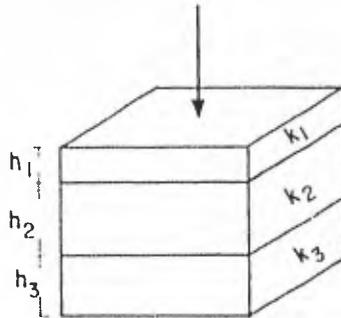
Si se quiere determinar el gasto en función de formaciones se tendrá que relacionar la presión en el fondo con la presión de fondo-

fluyendo.

+ Para un modelo vertical o tridimensional.

Se debe dividir el gasto entre las capas "disparadas". Hay varias formas de hacerlo, la más simple es dividir el ritmo total de acuerdo al producto  $kh$  de cada bloque.

Por ejemplo.- Para 3 bloques (capas y un ritmo de inyección dado)



$$q_1 = \frac{K_1 h_1}{K_1 h_1 + K_2 h_2 + K_3 h_3} Q_T$$

$$q_2 = \frac{K_2 h_2}{K_1 h_1 + K_2 h_2 + K_3 h_3} Q_T$$

$$q_3 = \frac{K_3 h_3}{K_1 h_1 + K_2 h_2 + K_3 h_3} Q_T$$

se puede presentar el caso de que  $K_x \neq K_y \neq K_z$  (anisotropía).

Para propósito de dividir los gastos, solo se toma  $K_x$  y  $K_y$ .

Por lo que se puede calcular "K" de diferentes formas.

1.- Promedio aritmético

$$K_1 = 1/2 (Kx_1 + Ky_1)$$

2.- Promedio geométrico

$$K_1 = \sqrt{\frac{Kx_1 \cdot Ky_1}{1}}$$

2.a

$$K_1 = \sqrt{\frac{Kx_1^2 + Ky_1^2}{2}}$$

3.- Promedio armónico

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{2Kx_1} + \frac{1}{2Ky_1}$$

Ejemplo:

Dada K ( 150, 180, 10 ), calcular  $K_1$

Solución:

1.-  $K_1 = 1/2 (150 + 180) = 165$

2.-  $K_1 = \sqrt{150 \times 180} = 164.32$

2.a.-  $K_1 = \sqrt{\frac{(150)^2 + (180)^2}{2}} = 165.68$

3.-  $K_1 = \frac{1}{\frac{1}{2 \times 150} + \frac{1}{2 \times 180}} = 163.64$

Ejemplo No. 2: K ( 150, 15, 10 )

Solución:

$$1.- \quad K_1 = 1/2 (150 + 15) = 82.5$$

$$2.- \quad K_1 = \sqrt{150 \times 15} = 47.43$$

$$2.a.- \quad K_1 = \sqrt{\frac{(150)^2 + (15)^2}{2}} = 106.6$$

$$3.- \quad K_1 = \frac{1}{\frac{1}{300} + \frac{1}{30}}$$

De los ejemplos anteriores se puede concluir:

- a).- Se puede utilizar cualquier forma cuando se tiene anisotropía.
- b).- A través de experiencias se ha determinado que en anisotropías considerables, es recomendable el promedio geométrico para la permeabilidad horizontal del bloque.

## 2.8 REQUERIMIENTOS, DATOS GENERALES Y PREPARACION DE UN SIMULADOR

1).- Mapas básicos requeridos:

1.a.- Mapa estructural.- Sirve para determinar a través de las curvas de nivel, las profundidades de los pozos, efectos geológicos de subsuelo como fallas, así como la vista en planta del yacimiento, límites del mismo, contactos agua-aceite, gas-aceite y/o gas-agua.

1.b.- Mapa de isopacas.- Líneas que unen puntos en el yacimiento de igual espesor. Entre otras cosas, sirve para cuantificar volumétricamente ya sea el volumen original de aceite y/o volumen original de gas etc.

1.c.- Mapa de isoporosidades.- Por medio de núcleos y de registros geofísicos se determina la porosidad en ciertos puntos, los cua

-les son referidos a un plano. Posteriormente se interpola entre dichos valores para asignar un valor de porosidad a cada celda.

1.d.- Mapa de isopermeabilidades.- Igual al de isoporosidades, - la diferencia entre ellos es que en éste último se utilizan permeabilidades.

2).- Sistema de cuadrícula de la malla.

Un sistema de cuadrícula o sistema de celdas es sobrepuesto al plano estructural del yacimiento, siendo cada celda una unidad básica usada en el simulador de flujo de fluidos y cálculos de balance de materia para cada celda.

Algunos puntos básicos a considerar en la selección del sistema de celdas es el siguiente:

- a).- El sistema de la malla en toda su forma será rectangular.
- b).- La malla contendrá la menor cantidad de bloques como sea posible, dependiendo de la heterogeneidad del yacimiento.
- c).- La malla será correctamente orientada, clasificada según su tamaño y su forma para permitir una buena aproximación de los límites del yacimiento.
- d).- Si existe permeabilidad direccional u orientada, un eje de la malla estará en la dirección de máxima permeabilidad. Dicha permeabilidad podrá ser determinada por medio de pruebas de presión pruebas de pulso, etc.
- e).- Tratar de colocar un pozo por bloque y en el centro del mismo.
- f).- Si la existencia de un acuífero es conocida o si el flujo de agua es sospechado, el sistema de malla incluirá hileras extras de celdas a cubrir el acuífero para simular el flujo del agua.

## C O N T E N I D O

### CAPITULO 3      METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

- 3.1            *Introducción.*
- 3.2            *Serie de Taylor.*
- 3.3            *Serie de Mc. Laurin.*
- 3.4            *Aplicación de la serie de Taylor a las ecuaciones de flujo de fluidos.*
  - 3.4.1        *Serie de Taylor en una dimensión.*
    - 3.4.1.1     *Primera derivada.*
    - 3.4.1.2     *Segunda derivada.*
  - 3.4.2        *Serie de Taylor en dos dimensiones.*
  - 3.4.3        *Serie de Taylor en tres dimensiones.*
- 3.5            *Método de Greenspan.*
  - 3.5.1        *Intervalos iguales.*
  - 3.5.2        *Intervalos desiguales.*
- 3.6            *Resolución por tabla.*

## C A P I T U L O 3

### 3.1 INTRODUCCION

Las ecuaciones que representan el flujo de fluidos en medios porosos son en general ecuaciones diferenciales parciales no lineales, las cuales relacionan cambios de presión y saturación con el tiempo a través del medio. Esas ecuaciones son extremadamente complejas, y la obtención de una solución se complica por la presencia de condiciones de límite (de frontera) especializadas.

La solución de esas ecuaciones por medios analíticos, es generalmente imposible, excepto para casos triviales. La solución numérica de esas ecuaciones es generalmente el único camino para que una solución pueda ser obtenida en la mayoría de las aplicaciones. Para resolver numéricamente estas ecuaciones se procede a usar algunos de los métodos de solución, entre los cuales se encuentran los siguientes:

a).- Métodos de diferencias finitas.

La solución numérica de las ecuaciones presenta respuestas a puntos discretos dentro del sistema. La transformación de una ecuación diferencial (continua) a una forma discreta se hace por el uso de diferencias finitas.

b).- Métodos variacionales.

Estos métodos no tan solo resuelven las ecuaciones en puntos discretos, sino además aproximan las soluciones por medio de un conjunto de polinomios de diversos grados. Dentro de estos métodos se encuentra el método de Galerkin.

Estos métodos son muy utilizados en la solución de problemas que consideran flujo de calor, esfuerzos generados por cambios de temperatura, etc.

### 3.2 SERIE DE TAYLOR

La serie de Taylor es el principio básico usado en la derivación de las fórmulas de aproximación en diferencias finitas.

Sea una función  $f(x)$ , el valor de esta función expandida alrededor de un punto  $A$  cualquiera, está dado por:

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + a_3 (x-a)^3 + \dots \quad (3.1)$$

en donde las incógnitas son las constantes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . La obtención de estos valores se logra derivando sucesivamente la función original:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x-a)^1 + 3a_3 (x-a)^2 + 4a_4 (x-a)^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 (x-a)^1 + 4 \cdot 3a_4 (x-a)^2 + 5 \cdot 4a_5 (x-a)^3 + \dots$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 (x-a)^1 + 5 \cdot 4 \cdot 3a_5 (x-a)^2 + \dots$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n-1)! a_{n-1} (x-a) + \dots$$

Ahora, evaluando las derivadas en el punto  $x=a$  y despejando se obtendrán los valores de los coeficientes  $a_i$  :

$$a_0 = f(x)$$

$$a_1 = \frac{f'(a)}{1!}$$

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

$$a_3 = \frac{f'''(a)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{f'''(a)}{3!}$$

⋮

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Sustituyendo en la ecuación (3-1) el valor de los coeficientes encontrados, se tendrá:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Para obtener una aproximación adecuada evaluando el menor número posible de términos de la serie es necesario que, para el  $n$ -ésimo término  $(x-a)^n < n!$  (y/o que la  $n$ -ésima derivada sea pequeña).

Por lo tanto si se quieren considerar un número reducido de términos es necesario que  $(x-a)$  sea pequeña.

### 3.3 SERIES DE MC. LAURIN

La serie de Mc. Laurin de una función se genera expandiendo la misma alrededor del punto  $a = 0$ .

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 +$$

$$f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} \tag{3.3}$$

Ejemplo:

$$y = f(x) = \text{sen } 18^\circ$$

Evaluando la función y sus derivadas en el punto  $a=0$ , y tomando en consideración que  $18^\circ$  son  $\pi/10$  radianes:

$$\begin{aligned} y &= \text{sen } x = 0 \\ y' &= \text{cos } x = 1 \\ y'' &= -\text{sen } x = 0 \\ y''' &= -\text{cos } x = -1 \\ y^{(4)} &= \text{sen } x = 0 \\ y^{(5)} &= \text{cos } x = 1 \\ y^{(6)} &= -\text{sen } x = 0 \\ y^{(7)} &= -\text{cos } x = -1 \\ y^{(8)} &= \text{sen } x = 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$f(\pi/10) = 0 + \frac{\pi}{10} + 0 - \frac{1}{6}(\pi/10)^3 + 0 + \frac{1}{120}(\pi/10)^5 +$$

$$0 - \frac{1}{7!}(\pi/10)^7$$

$$f(\pi/10) = 0.314159265 - 0.005167713 + 0.00002502$$

$$f(\pi/10) = 0.309016994$$

### 3.4. APLICACION DE LA SERIE DE TAYLOR EN LA EVALUACION DE DERIVADAS

Considérese el intervalo  $0,1$  dividiendo en  $R$  subintervalos de longitud  $x$ .

$$x = \frac{1}{R}$$

En un punto cualquiera  $x_i$  :

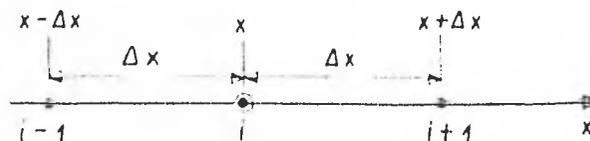
$x_i = i \Delta x$ , y obviamente

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x$$

$$x_{i-1} = x_i - \Delta x$$

La distancia entre dos puntos consecutivos es la "Diferencia finita  $x$ ".

En el método de "Diferencias Finitas" la evaluación de las funciones, y sus derivadas se efectúa solamente en los puntos  $x_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, R$ .



$$\therefore R = \frac{1}{\Delta x}$$

$$x - \Delta x \approx i - 1$$

$$x + \Delta x \approx i + 1$$

### 3.4.1 SERIES DE TAYLOR EN UNA DIMENSION

Utilizando la notación anterior las expansiones en serie de Taylor para una función  $f(x)$ , en los puntos  $x_{i+1}$  y  $x_{i-1}$  se escriben como:

$$\begin{aligned} f_{i+1} = & f_i + \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \dots \\ & + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_i \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} f_{i-1} = & f_i - \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \dots \\ & + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

#### 3.4.1.1 PRIMERA DERIVADA

La expresión de la primera derivada, se obtiene despejando la ecuación (3.4) en términos de dicha derivada:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \dots \quad (3.6)$$

en donde el término del lado derecho de la ecuación es una aproximación en diferencias finitas a la primera derivada de la función. La precisión de dicha aproximación depende del número de términos que se utilicen en el lado derecho de la expresión.

Los términos no utilizados (truncados) constituyen el error de truncamiento. En general como cada término sucesivo es menor al anterior, el error de truncamiento se determina por el orden, o exponente de la diferencia finita  $\Delta x$ , del primer término truncado.

La ecuación (3.6) considerando al concepto del error de truncamiento queda de la siguiente manera:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

la cual tiene un error de truncamiento de primer orden.

De igual forma, la expresión para la primera derivada obtenida a partir de la ecuación (3.5) se escribe:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \dots \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.9)$$

Combinando expansiones diferentes para una función, es posible obtener fórmulas más precisas o de mayor orden, por ejemplo, restando (3.5) de (3.4) se tiene:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \dots \quad (3.10)$$

la cual tiene un error de truncamiento de segundo orden,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.11)$$

Procediendo en forma análoga se pueden obtener fórmulas de mayor precisión para la primera derivada, expandiendo la función en otros puntos cercanos al punto  $x$ , por ejemplo:

$$f_{i+2} = f_i + (2\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i + \dots \quad (3.12)$$

$$f_{i-2} = f_i - (2\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i - \dots \quad (3.13)$$

#### 3.4.1.2 SEGUNDA DERIVADA

Una expresión de la segunda derivada se obtiene sumando las ecuaciones (3.4) y (3.5) :

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{(\Delta x)^4}{12} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i + \dots \quad (3.14)$$

en donde el término del error es de segundo orden

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{\delta_{i+1} - 2\delta_i + \delta_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4} \Big|_i + \dots = \frac{\delta_{i+1} - 2\delta_i + \delta_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (3.15)$$

### 3.4.2 SERIE DE TAYLOR EN DOS DIMENSIONES

Para la obtención de fórmulas en diferencias finitas que involucren dos dimensiones, se puede utilizar la expansión de la serie de Taylor, en dos dimensiones:

$$\begin{aligned} \delta_{i\pm 1, j\pm 1} &= \delta_{i, j} + (\pm \Delta x) \frac{\partial \delta}{\partial x} \Big|_{i, j} + (\pm \Delta y) \frac{\partial \delta}{\partial y} \Big|_{i, j} + \\ &\frac{(\pm \Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \Big|_{i, j} + (\pm \Delta x) (\pm \Delta y) \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} \Big|_{i, j} + \frac{(\pm \Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} \Big|_{i, j} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Otra alternativa, generalmente más sencilla se logra utilizando las fórmulas de una dimensión, haciendo variar la función en una dirección y manteniendo los subíndices de las otras direcciones constantes, por ejemplo; la expansión de la función  $f(x, y)$  en el punto  $(i+1, j+1)$  se puede obtener por ejemplo expandiendo primero en la dirección "x", manteniendo constantes los índices de la dirección "y", ejemplo:

$$\begin{aligned} \delta_{i+1, j+1} &= \delta_{i, j+1} + \Delta x \frac{\partial \delta}{\partial x} \Big|_{i, j+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \Big|_{i, j+1} + \\ &\frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \delta}{\partial x^3} \Big|_{i, j+1} + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

(1)                      (2)                      (3)

(4)

Nótese que la función y las derivadas están evaluadas en  $(i+1, j)$  es decir en el punto  $(x, y+\Delta y)$ , por lo tanto es necesario expandir nuevamente cada uno de los términos numerados, manteniendo ahora constantes los índices en la dirección "x" y variar los índices en la dirección "y";

$$(1) \quad \delta_{i,j+1} = \delta_{i,j} + \Delta y \left. \frac{\partial \delta}{\partial y} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} \right|_{i,j} + \dots \quad (3.18)$$

$$(2) \quad \left. \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|_{i,j+1} = \left. \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|_{i,j} + \Delta y \left. \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta y)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \delta}{\partial x \partial y^2} \right|_{i,j} + \dots$$

..... (3.19)

$$(3) \quad \left. \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|_{i,j+1} = \left. \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \Delta y \left. \frac{\partial^3 \delta}{\partial x^2 \partial y} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta y)^3}{2!} \left. \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{i,j} + \dots$$

..... (3.20)

La expresión final se obtiene cuando los índices de la función y sus derivadas son precisamente  $(i, j)$ , en este caso:

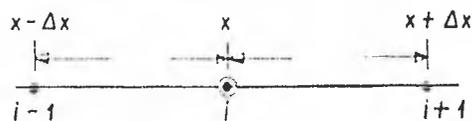
$$\delta_{i\pm 1, j\pm 1} = \delta_{i,j} + (\pm \Delta x) \left. \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|_{i,j} + (\pm \Delta y) \left. \frac{\partial \delta}{\partial y} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \dots \quad (3.21)$$

### 3.4.3 SERIE DE TAYLOR EN TRES DIMENSIONES

La expansión de una función en tres dimensiones se logra en una forma análoga a la anterior o mediante la expansión de la serie de



### 3.5.1 INTERVALOS IGUALES



Ejemplo No. 1

Encontrar la expresión para la primera derivada de la función  $u$  en términos de los valores de la función en los puntos  $i, e, i + 1$ .



PROCEDIMIENTO.

1) Asignar las constantes a los puntos  $i, e, i + 1$ .

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = C_1 u_i + C_2 u_{i+1} + e_t$$

2) Para valuar  $C_1$  y  $C_2$ , expandimos por series de Taylor.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = C_1 u_i + C_2 \left[ u_i + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i \right] + e_t$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = (C_1 + C_2) u_i + C_2 \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + C_2 \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i + e_t$$

3) Igualar coeficientes para obtener los valores de las constantes y del error de truncamiento. (lado izquierdo y lado derecho de la ecuación).

$$c_1 + c_2 = 0, \quad \Delta x c_2 = 1 \quad c_1 = -c_2 = -\frac{1}{\Delta x}, \quad c_2 = \frac{1}{\Delta x}$$

$$c_2 \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + e_t = 0 \quad \therefore e_t = -c_2 \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i$$

$$e_t = -\frac{1}{\Delta x} \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i = -\frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \quad \therefore e_t = \text{término del error.}$$

4) Substituir los valores obtenidos en la ecuación en donde aparezcan las constantes.

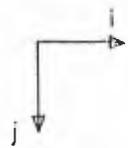
$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i = -\frac{u_i}{\Delta x} + \frac{u_{i+1}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

#### EJEMPLO No. 2

Expresar la segunda derivada mixta de una función en términos de los valores de la función en los puntos  $i+1$ ,

$j+1$ ;  $i+1, j-1$ ;  $i-1, j-1$ ;  $i-1, j+1$ .



$c_3$   
•  
 $i-1, j-1$

$c_2$   
•  
 $i+1, j-1$

⊙  
 $i, j$

$c_4$   
•  
 $i-1, j+1$

$c_1$   
•  
 $i+1, j+1$

1er paso. Expresar lo anterior matemáticamente:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = & C_1 \left[ u_{i,j} + (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + (\Delta y) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \right. \\
 & + (\Delta x) (\Delta y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \\
 & + \left. \frac{3(\Delta x)^2 (\Delta y)}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{i,j} + \frac{3(\Delta x) (\Delta y)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{i,j} \right] \\
 & + C_2 \left[ u_{i,j} + (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} - (\Delta y) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \right. \\
 & - (\Delta x) (\Delta y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} - \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \\
 & - \left. \frac{3(\Delta x)^2 (\Delta y)}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{i,j} + \frac{3(\Delta x) (\Delta y)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \Big|_{i,j} - \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{i,j} \right] \\
 & + C_3 \left[ u_{i,j} - (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} - (\Delta y) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \right. \\
 & - (\Delta x) (\Delta y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \\
 & - \left. \frac{3(\Delta x)^2 (\Delta y)}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{i,j} - \frac{3(\Delta x) (\Delta y)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \Big|_{i,j} - \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{i,j} \right] \\
 & + C_4 \left[ u_{i,j} - (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + (\Delta y) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \right. \\
 & - (\Delta x) (\Delta y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j}
 \end{aligned}$$

$$+ \left[ \frac{3(\Delta x)^2 (\Delta y)}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{i,j} - \frac{3(\Delta x) (\Delta y)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{i,j} \right]$$

(1)

(2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{i,j} (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \{ \Delta x (C_1 + C_2 - C_3 - C_4) \}$$

(3)

(1)

$$+ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \{ \Delta y (C_1 - C_2 - C_3 + C_4) \} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left\{ \frac{(\Delta x)^2}{2!} (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \right\}$$

(4)

(1)

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \{ (\Delta x) (\Delta y) (C_1 - C_2 + C_3 - C_4) \} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left\{ \frac{(\Delta y)^2}{2} (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \right\}$$

(2)

(3)

$$+ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \left\{ \frac{(\Delta x)^3}{3!} (C_1 + C_2 - C_3 - C_4) \right\} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \left\{ \frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)}{2!} (C_1 - C_2 - C_3 + C_4) \right\}$$

(2)

$$+ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{i,j} \left\{ \frac{(\Delta x) (\Delta y)^2}{2!} (C_1 + C_2 - C_3 - C_4) \right\} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{i,j} \left\{ \frac{(\Delta y)^3}{3!} \right.$$

(3)

$$\left. (C_1 - C_2 - C_3 + C_4) \right\} + e_t$$

Igualando los coeficientes de los términos análogos en ambos lados de la ecuación, se tiene:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \quad (1)$$

$$C_1 + C_2 - C_3 - C_4 = 0 \quad (2)$$

$$C_1 - C_2 - C_3 + C_4 = 0 \quad (3)$$

$$\Delta x \Delta y (C_1 - C_2 + C_3 - C_4) = 1 \quad (4)$$

- Sumando (1) y (2)

$$2 C_1 + 2 C_2 = 0$$

donde  $C_1 + C_2 = 0$  por lo que  $C_1 = -C_2$

- Sumando (2) + (3)

$$2 C_1 - 2 C_3 = 0$$

por lo que  $C_1 = C_3$

- Sumando (1) + (3)

$$2 C_1 + 2 C_4 = 0$$

por lo que  $C_1 = -C_4$

- Sustituyendo en (4)

$$C_1 + C_1 + C_1 + C_1 = \frac{1}{\Delta x \Delta y}$$

$$\therefore 4 C_1 = \frac{1}{\Delta x \Delta y}$$

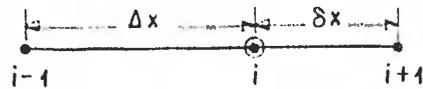
por lo que  $C_1 = \frac{1}{4 \Delta x \Delta y}$

$$C_2 = -\frac{1}{4 \Delta x \Delta y}, \quad C_3 = \frac{1}{4 \Delta x \Delta y} \quad \text{y} \quad C_4 = -\frac{1}{4 \Delta x \Delta y}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial y reduciendo términos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1}}{4 \Delta x \Delta y} + \mathcal{O}(\Delta x \Delta y)$$

### 3.5.2 INTERVALOS DESIGUALES



Otra aplicación de las series de Taylor es para intervalos desiguales.

EJEMPLO No. 3

Expresar la primera derivada de la función "u" en el punto "i" en términos de los valores de la función en los puntos "i + 1", "i - 1" (nótese que  $\Delta x \neq \delta x$ ).

Expresando el problema en forma matemática

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = C_1 u_{i-1} + C_2 u_i + C_3 u_{i+1} + e_t$$

expandiendo la función "u" por medio de las series de Taylor, evaluada en los puntos "i + 1", "i - 1"

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i &= C_1 \left[ u_i - \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i \dots \right] \\ &+ C_2 u_i \\ &+ C_3 \left[ u_i + \delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \frac{(\delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i + \frac{(\delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i \dots \right] \\ &+ e_t \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i = (C_1 + C_2 + C_3) u_i + (C_3 \delta x - C_1 \Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i + \left( C_1 \frac{(\Delta x)^2}{2} + C_3 \frac{(\delta x)^2}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \left( C_3 \frac{(\delta x)^3}{3!} - C_1 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + e_t$$

Iguando los coeficientes de los términos análogos en ambos lados de la ecuación:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0 \quad (1)$$

$$C_3 \delta x - C_1 \Delta x = 1 \quad (2)$$

$$C_1 \frac{(\Delta x)^2}{2} + C_3 \frac{(\delta x)^2}{2} = 0 \quad (3)$$

De la ecuación (1) :

$$C_2 = -C_1 - C_3 \quad (4)$$

De la ecuación (3) :

$$C_1 = -C_3 \frac{(\delta x)^2}{(\Delta x)^2} \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4)

$$C_2 = C_3 \frac{(\delta x)^2}{(\Delta x)^2} - C_3 \quad (6)$$

Sustituyendo (5) en (2)

$$C_3 \delta x + C_3 \frac{(\delta x)^2}{(\Delta x)^2} \Delta x = 1 \quad (7)$$

Despejando  $C_3$

$$C_3 \left[ \frac{\Delta x \delta x + (\delta x)^2}{\Delta x} \right] = 1$$

$$C_3 = \frac{\Delta x}{\delta x \Delta x + (\delta x)^2}$$

Consecuentemente

$$C_2 = \frac{\delta x - \Delta x}{(\Delta x)(\delta x)} \quad \text{y} \quad C_1 = \frac{-\delta x}{\Delta x \delta x + (\Delta x)^2}$$

nótese que para el caso en que  $\Delta x = \delta x$ , las constantes se simplifican a:

$$C_1 = \frac{1}{-2\Delta x}, \quad C_3 = \frac{1}{2\Delta x}$$

y la fórmula para la primera derivada para el caso de intervalos uniformes se escribe como:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{u_{i+1} - u_i + u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

por lo tanto la fórmula buscada se expresa como:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{(\Delta x)^2 u_{i+1} - (\delta x)^2 u_{i-1} + \{(\delta x)^2 - (\Delta x)^2\} u_i}{(\delta x + \Delta x) \Delta x \delta x} + e_t$$

### 3.6 RESOLUCION POR TABLA (Fórmulas de Bickley)

En las ecuaciones (3.4.1.1) y (3.4.1.2) se obtuvieron las aproximaciones de la primera y segunda derivada. En aquellos casos en que se desee incrementar el grado de aproximación (disminuir el término del error) se deben usar más puntos. El manejo de un mayor número de

términos y expansiones en series de Taylor, incrementa la posibilidad de errores algebraicos.

Para obviar las posibilidades de error, Bickley compiló una tabla con los coeficientes de la fórmula siguiente:

$$\left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=x_n} = \frac{k!}{m! h^k} \sum_{j=0}^m A_j f(x_j) \quad (3.23)$$

$A_j$  = coeficientes dados en la tabla siguiente

$h = \Delta x$

$k$  = orden de la derivada

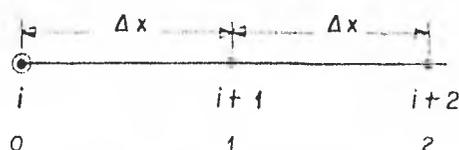
$m$  = número de puntos que se desea usar en la aproximación, menos uno

$n$  = número del punto en el que evalúa la derivada

$f(x_j)$  = función evaluada en cada punto.

#### EJEMPLO No. 4

Obtener una aproximación en la primera derivada, en el punto  $i$ , usando 3 puntos por medio de la tabla de Bickley.



Nótese que los puntos en cuestión se numeran de izquierda a derecha comenzando con cero. Así, el punto "i" le corresponde el cero, al punto "i + 1" el número uno y al punto "i + 2" el número dos.

Por lo tanto en este caso el orden de la derivada el primero  $k=1$ .

El valor de "m" es "2" ya que es igual al número de puntos a --  
 usar (3) menos uno. Finalmente, ya que se desea evaluar la derivada  
 en el punto "i" "n" es cero.

Aplicando la fórmula :

$$\frac{df}{dx} \Big|_{x = x_i} = \frac{1!}{2! (\Delta x)^1} [ A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + e_t ]$$

de la tabla 1

Con los datos de primera derivada ( $k = 1$ ),  $m = 2$  y  $n = 0$  se ob-  
 tienen los valores de los coeficientes  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  y el término del-  
 error.

$$A_0 = -3, A_1 = 4 \quad A_2 = -1 \quad \text{y} \quad e_t = \frac{1}{3} (\Delta x)^3 \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{\zeta}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación se tiene:

$$\frac{df}{dx} \Big|_{x = x_i} = \frac{1}{2 \Delta x} \left[ -3 b_0 + 4 b_1 - b_2 + \frac{1}{3} (\Delta x)^3 \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{\zeta} \right]$$

y en la notación original la fórmula para la primera derivada se ex-  
 presa como:

$$\frac{df}{dx} \Big|_{x = x_i} = \frac{-3 b_i + 4 b_{i+1} - b_{i+2}}{2 \Delta x} + \frac{1}{6} (\Delta x) \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{\zeta}$$

Nota:

la  $\frac{d^3 f}{dx^3}$  del término del error se evalúa en el intervalo  $i, i + 2,$

es decir  $x_i \leq \zeta \leq x_{i+2}$ , no se evalúa en  $i$ .

EJEMPLO No. 5

Obtener una expresión para la segunda derivada de  $f$  evaluada en el punto  $x = x_i$  utilizando 6 puntos. ( $x_i = 2$ )

Asignando primero el orden a los puntos

0	1	2	3	4	5
·	·	⊙	·	·	·
$i-2$	$i-1$	$i$	$i+1$	$i+2$	$i+3$

evaluando los parámetros  $k$ ,  $m$  y  $n$ :

$$k = 2$$

$$m = 6 - 1 = 5$$

$$n = 2$$

De la tabla de Bickley se obtiene:

$$A_0 = -5, A_1 = 80, A_2 = -150, A_3 = 80, A_4 = -5, A_5 = 0$$

Expandiendo la fórmula para este caso en particular:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=x_{i-2}} = \frac{2!}{5! (\Delta x)^2} [A_0 f_0 + A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 + A_4 f_4 + A_5 f_5 + e_t]$$

$$e_t = \frac{1}{180} (\Delta x)^6 \frac{d^6 f}{dx^6} \Big|_t$$

Sustituyendo los coeficientes:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{2!}{5! (\Delta x)^2} [-5f_0 + 80f_1 - 150f_2 + 80f_3 - 5f_4 + 0 + \frac{1}{180} (\Delta x)^6$$

$$\left. \frac{\partial^6 f}{\partial x^6} \right|_{\zeta} ]$$

Simplificando:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-f_{i-2} + 16 f_{i-1} - 30 f_i + 16 f_{i+1} - f_{i+2}}{12 (\Delta x)^2} + \frac{1}{10800} (\Delta x)^4 \left. \frac{\partial^6 f}{\partial x^6} \right|_{\zeta}$$

Obsérvese que puede darse el caso que uno más de los coeficientes sea cero. Esto quiere decir que para expresar la derivada en cuestión, no es necesario el valor de la función en todos los puntos del intervalo. Además observe que la suma de los coeficientes de la fórmula de Bickley es cero.

NUMERICAL ANALYSIS

COEFFICIENTS FOR DIFFERENTIATION

Differentiation Formula:  $\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \sum_{j=0}^m \frac{h^k}{k!} a_{kj} \frac{d^k f(x_j)}{dx^k}$

FIRST DERIVATIVE (k=1)							THIRD DERIVATIVE (k=3)								
j	a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	$\frac{h^k}{k!}$ Error	j	a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	$\frac{h^k}{k!}$ Error
Three Point (m=2)							Four Point (m=3)								
0	-3	4	-1				1/3	0	-1	3	-3	1			-1/4
1	-1	0	1				-1/6 h <sup>3</sup> f'''(ξ)	1	-1	3	-3	1			-1/12 h <sup>4</sup> f''''(ξ)
2	1	-4	3				1/3	2	-1	3	-3	1			1/12 h <sup>4</sup> f''''(ξ)
								3	-1	3	-3	1			1/4
Four Point (m=3)							Five Point (m=4)								
0	-11	18	-9	2			-1/4	0	-10	36	-48	28	-6		7/24
1	-2	-3	6	-1			1/12 h <sup>4</sup> f''''(ξ)	1	-6	20	-24	12	-2		1/24
2	1	-6	3	2			-1/12 h <sup>4</sup> f''''(ξ)	2	-2	4	0	-4	2		-1/24 h <sup>5</sup> f''''(ξ)
3	-2	9	-18	11			1/4	3	2	-12	24	-20	6		1/24
								4	6	-26	48	-36	10		7/24
Five Point (m=4)							Six Point (m=5)								
0	-50	96	-72	32	-6		1/5	0	-85	355	-590	490	-205	35	-5/16
1	-6	-20	36	-12	2		-1/20	1	-35	125	-170	110	-35	5	-1/48
2	7	-16	0	16	-2		1/30 h <sup>5</sup> f''''(ξ)	2	-5	-5	50	-70	35	-5	1/48 h <sup>6</sup> f''''(ξ)
3	-2	12	-36	20	6		-1/20	3	5	-35	70	-50	5	5	-1/48 h <sup>6</sup> f''''(ξ)
4	6	-32	72	-96	50		1/5	4	-5	35	-110	170	-125	35	1/48
								5	-35	205	-490	590	-355	85	5/16
Six Point (m=5)							FOURTH DERIVATIVE (k=4)								
0	-274	600	-600	400	-150	24	-1/6	Five Point (m=4)							
1	-24	-130	240	-120	40	-6	1/30	0	1	-4	6	-4	1		-1/12 h <sup>5</sup> f''''(ξ)
2	6	-60	-40	120	-30	4	-1/60 h <sup>4</sup> f''''(ξ)	1	1	-4	6	-4	1		-1/24 h <sup>6</sup> f''''(ξ)
3	-4	30	-120	40	60	-6	1/60 h <sup>4</sup> f''''(ξ)	2	1	-4	6	-4	1		-1/144 h <sup>6</sup> f''''(ξ)
4	6	-40	120	-240	130	24	-1/30	3	1	-4	6	-4	1		1/24 h <sup>5</sup> f''''(ξ)
5	-24	150	-400	600	-600	274	1/6	4	1	-4	6	-4	1		1/12 h <sup>5</sup> f''''(ξ)
SECOND DERIVATIVE (k=2)							Six Point (m=5)								
j	a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	$\frac{h^k}{k!}$ Error	0	15	-70	130	-120	55	-10	17/144
Three Point (m=2)							Five Point (m=4)								
0	1	-2	1				-1/2 h <sup>3</sup> f'''(ξ)	1	10	-45	80	-70	30	-5	5/144
1	1	-2	1				-1/24 h <sup>4</sup> f''''(ξ)	2	5	-20	35	-20	5	0	-1/144 h <sup>6</sup> f''''(ξ)
2	1	-2	1				1/2 h <sup>3</sup> f'''(ξ)	3	0	5	-20	30	-20	5	-1/144 h <sup>6</sup> f''''(ξ)
Four Point (m=3)							Six Point (m=5)								
0	6	-15	12	-3			11/24	4	-5	30	-70	80	-45	10	5/144
1	3	-6	3	0			-1/24 h <sup>4</sup> f''''(ξ)	5	-10	55	-120	130	-70	15	17/144
2	0	3	-6	3			-1/24 h <sup>4</sup> f''''(ξ)	FIFTH DERIVATIVE (k=5)							
3	-3	12	-15	6			11/24	Six Point (m=5)							
Five Point (m=4)							Six Point (m=5)								
0	35	-104	114	-56	11		-5/12 h <sup>5</sup> f''''(ξ)	0	-1	5	-10	10	-5	1	-1/48
1	11	-20	6	4	-1		1/24 h <sup>5</sup> f''''(ξ)	1	-1	5	-10	10	-5	1	-1/80
2	-1	16	-30	16	-1		1/180 h <sup>6</sup> f''''(ξ)	2	-1	5	-10	10	-5	1	-1/240 h <sup>6</sup> f''''(ξ)
3	-1	4	6	-20	11		-1/24 h <sup>5</sup> f''''(ξ)	3	-1	5	-10	10	-5	1	1/240 h <sup>6</sup> f''''(ξ)
4	11	-56	114	-104	35		5/12 h <sup>5</sup> f''''(ξ)	4	-1	5	-10	10	-5	1	1/60
Six Point (m=5)							Six Point (m=5)								
0	225	-770	1070	-780	305	-50	137/360	0	-1	5	-10	10	-5	1	1/48
1	50	-75	-70	70	-30	5	-13/360	1	-1	5	-10	10	-5	1	-1/80
2	-5	80	-150	60	-5	0	1/180 h <sup>6</sup> f''''(ξ)	2	-1	5	-10	10	-5	1	-1/240 h <sup>6</sup> f''''(ξ)
3	0	-5	80	-150	80	-5	1/180 h <sup>6</sup> f''''(ξ)	3	-1	5	-10	10	-5	1	1/240 h <sup>6</sup> f''''(ξ)
4	5	-30	70	-20	-75	50	-13/360	4	-1	5	-10	10	-5	1	1/60
5	-50	305	-780	1070	-770	225	137/360	5	-1	5	-10	10	-5	1	1/48

Compiled from W. G. Bickley, Formulae for numerical differentiation, Math. Gaz. 25, 19-27, 1941 (with permission).

TABLE I

## C O N T E N I D O

### CAPITULO 4 SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES POR EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

- 4.1            *Introducción.*
- 4.2            *Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales.*
- 4.3            *Esquemas de solución de las ecuaciones de flujo.*
  - 4.3.1        *Esquema explícito.*
  - 4.3.2        *Esquema mixto.*
  - 4.3.3        *Esquema implícito.*

## CAPITULO 4

### SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES POR EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

#### 4.1 INTRODUCCION

Las ecuaciones obtenidas para la simulación de yacimientos son generalmente ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales para las cuales, salvo en algunas excepciones, no se han encontrado soluciones analíticas. Por esta razón es necesario utilizar métodos numéricos para llegar a una solución.

Anteriormente se presentaron las bases del Método de Diferencias Finitas que es la técnica más comunmente utilizada para este tipo de problemas. Ahora se presentará una breve clasificación de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, algunas consideraciones sobre la forma de expandir el lado derecho de las ecuaciones de flujo (el término de acumulación) y los diversos procedimientos propuestos para resolver las ecuaciones de flujo de fluidos a través de medios procesos.

#### 4.2 CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

En general las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales pueden ser clasificadas como elípticas, parabólicas, hiperbólicas o mixtas. Cada una de estas clases pueden ser lineal o no lineal. La mayoría de las ecuaciones resultantes de problemas prácticos de simulación son ecuaciones no lineales, es decir, los coeficientes de las derivadas par-

-ciales son funciones tanto de las variables dependientes como de las variables independientes.

Por esta razón, y en especial las ecuaciones resultantes en problemas de flujo en dos o tres fases pueden ser muy difíciles de clasificar, ya que además de las no linealidades de las ecuaciones, estas aparecen como sistemas de ecuaciones y no como una sola ecuación.

Una ecuación diferencial parcial de segundo orden es una ecuación que contiene derivadas hasta de segundo orden y más de una variable independiente. La forma más general de una ecuación diferencial parcial de segundo orden con dos variables independientes es:

$$A(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y,u) \left( \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy} \right) \quad (4.1)$$

en donde "x" e "y" son las variables independientes y "u" es la variable dependiente. Normalmente "x" e "y" se refieren a posición pero en problemas en los que una de las variables sea el tiempo "y", se puede referir a tiempo. Si los coeficientes A, B y C son funciones únicamente de las variables independientes, son constantes o son cero, la ecuación es lineal. Esta ecuación es no lineal si cualquiera A, B o C es función de la variable dependiente. Por ejemplo la ecuación (4.2) es lineal.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{kx}{u} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{ky}{u} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{(qstb) x, y, t}{\Delta x \Delta y} = \phi_c \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.2)$$

y la ecuación (4.3) es no lineal.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{kx}{\mu} - \frac{p}{Z} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{ky}{\mu} - \frac{p}{Z} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \left( \frac{p}{T} \right)_{c.s.} +$$

$$\frac{(q_{stb})_{xyt}}{\Delta x \Delta y} = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{Z} \right) \quad (4.3)$$

La ecuación (4.1) se clasificará como elíptica, parabólica o hiperbólica dependiendo del valor del discriminante  $B^2 - 4AC$ , para un punto dado  $(x, y)$

$$\text{si } B^2 - 4AC < 0 \quad \text{Elíptica} \quad (4.4)$$

$$\text{si } B^2 - 4AC = 0 \quad \text{Parabólica} \quad (4.5)$$

$$\text{si } B^2 - 4AC > 0 \quad \text{Hiperbólica} \quad (4.6)$$

Esta delimitación involucra que la ecuación pueda cambiar de clasificación dependiendo de los valores de "x" e "y" bajo consideración (valores de los coeficientes A y B).

Así por ejemplo la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{es siempre hiperbólica;}$$

la ecuación  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  es siempre elíptica, (ecuación de Laplace)

y la ecuación  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$  es siempre parabólica, (ecuación de onda)

Sin embargo, la ecuación

$$(1-y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1+y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

cuyo discriminante es:

$$D = (2x)^2 - 4(1-y)(1+y)$$

$$D = 4x^2 - 4(1-y^2)$$

$$D = 4x^2 - 4 + 4y^2$$

$$D = x^2 + y^2 - 1$$

es elíptica dentro del círculo  $x^2 + y^2 = 1$  (ejemplo: discriminante negativo), hiperbólica fuera del círculo (ejemplo discriminante positivo) y parabólica en la frontera. (ejemplo: discriminante cero).

Los problemas en los que el signo del discriminante depende de la solución pueden presentar dificultades especiales ya que el tipo de ecuación gobierna el número y la naturaleza de las condiciones iniciales y/o de frontera.

Es decir, un problema complejo puede tener en un cierto rango una solución única y bien determinada mientras que en otro rango las soluciones pueden ser múltiples y no determinadas o aún no existir.

Sin embargo las ecuaciones netamente elípticas, parabólicas o hiperbólicas se mantienen como tales, independientemente de las dimensiones y del sistema de coordenadas que se considere. Así, por ejemplo, las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}$$

y

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}$$

son también parabólicas.

#### 4.3 ESQUEMAS DE SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE FLUJO

La formulación de un esquema adecuado de solución a las ecuaciones diferenciales parciales es de suma importancia ya que de él dependen la estabilidad y precisión de las soluciones. En general se puede decir que entre más implícito sea el esquema de solución, se logrará una mayor estabilidad, y se podrán utilizar intervalos de tiempos mayores. Desafortunadamente, entre más implícito sea un esquema mayor será el grado de dificultad para resolverlo (o avanzar la solución del tiempo  $t$  al tiempo  $t+\Delta t$ ).

Por esta razón es necesario encontrar un equilibrio entre un esquema simple que permita intervalos de tiempo pequeños y requiera poco tiempo de cómputo para avanzar la solución y un esquema muy complicado que sea estable aún para intervalos de tiempo grandes pero que requiera un tiempo de cómputo considerablemente mayor.

Determinante en la formulación de estos esquemas es el nivel de tiempo al cual los términos de flujo, o sea las derivadas espaciales, se evalúan. Tres de los esquemas más comúnmente utilizados son el esquema explícito, el esquema mixto y el esquema implícito. Su ilustración se hará mediante la ecuación simplificada de flujo monofásico:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.7)$$

la cual se aproxima en diferencias finitas como:

$$Tx_{i+1/2} (p_{i+1} - p_i) - Tx_{i-1/2} (p_i - p_{i-1}) = \frac{V_{bi}}{\Delta t} (p_i^{n+1} - p_i^n) \quad (4.8)$$

en donde,  $T_x$  es la transmisividad entre las celdas y  $V_{bi}$  es el volumen total del bloque  $i$ .

#### 4.3.1 ESQUEMA EXPLICITO.

En este esquema, las presiones y transmisividades de los términos de flujo se evalúan al nivel de tiempo conocido "n".

Por esta razón es el esquema más sencillo. Su expresión en diferencias finitas se escribe como:

$$Tx_{i+1/2}^n (p_{i+1}^n - p_i^n) - Tx_{i-1/2}^n (p_i^n - p_{i-1}^n) = \frac{V_{bi}}{\Delta t} (p_i^{n+1} - p_i^n) \quad (4.9)$$

Como en este esquema la única incógnita es  $p_i^{n+1}$ , para avanzar la solución de "n" a "n + 1" lo que se requiere es aplicar la ecuación (4.9) a cada uno de los puntos de la malla. Por su sencillez este esquema presenta limitaciones fuertes de estabilidad lo que implica tener que usar intervalos pequeños de tiempo al avanzar la solución. Esta limitación hace que su aplicación sea impráctica en la mayoría de los problemas de simulación.

#### 4.3.2 ESQUEMA MIXTO.

Este es el esquema que se utiliza con mayor frecuencia y consiste en evaluar las presiones al nivel nuevo de tiempo "n + 1", mientras que las transmisividades se evalúan al nivel de tiempo conocido "n". Así, la ecuación en diferencias finitas se expresa como:

$$T_{i+1/2}^n (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) - T_{i-1/2}^n (p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}) = \frac{V_{bi}}{\Delta t} (p_i^{n+1} - p_i^n) \quad (4.10)$$

Para cada celda para la que se escribe la ecuación (4.10) se tienen ahora tres incógnitas  $p_{i-1}^{n+1}$ ,  $p_i^{n+1}$ ,  $p_{i+1}^{n+1}$  por lo tanto para avanzar la solución del tiempo "n" al tiempo "n + 1" se requiere escribir las ecuaciones para todas las celdas y posteriormente resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

Este tipo de esquema se utiliza con éxito en simuladores areales y tridimensionales en los cuales, en general, no se dan cambios bruscos de presiones y/o saturaciones de un intervalo de tiempo al otro. Sin embargo pueden presentar serias limitaciones de estabilidad y consecuentemente requerir intervalos de tiempo muy pequeños en simuladores de flujo convergente tales como simuladores de configuración y algunos simuladores de secciones transversales.

Es de mucha importancia la forma en que se manejan los términos fuente en este esquema, especialmente en modelos tridimensionales y de secciones transversales en donde existen pozos terminados en varias capas. Una formulación inadecuada de los términos fuente puede disminuir la estabilidad del modelo y reducir en mucho el máximo incremento de tiempo ( $\Delta t$ ) permisible para obtener resultados aceptables.

### 4.3.3 ESQUEMA IMPLICITO.

Este esquema consiste en evaluar tanto las presiones como las -- transmisividades al nuevo nivel de tiempo "n + 1" quedando la ecua-- ción en diferencias finitas como:

$$Tx_{i+1/2}^{n+1} (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) - Tx_{i-1/2}^{n+1} (p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}) = \frac{V_{bi}}{\Delta t} (p_i^{n+1} - p_i^n) \dots \dots (4.11)$$

Nuevamente, al escribir la ecuación para cada celda las incógnitas resultantes son  $p_{i-1}^{n+1}$ ,  $p_i^{n+1}$ ,  $p_{i+1}^{n+1}$ , por lo tanto para avanzar la solución hay que escribir las ecuaciones para todas las celdas. El sistema resultante no puede evaluarse directamente ya que los coeficientes  $Tx_{i-1/2}^{n+1}$  dependen de presiones al nivel "n + 1", o sea que se tiene un sistema de ecuaciones no-lineales. La solución se logra mediante técnicas iterativas tales como la de Newton-Raphson extendida al caso de variables múltiples.

Por esta razón el esquema implícito es el que involucra mayor esfuerzo de cómputo para avanzar la solución de un nivel a otro (tres o cuatro veces mayor que el esquema mixto) sin embargo esta formulación permite utilizar incrementos de tiempo mucho mayores que el esquema mixto y aún permanecer estable.

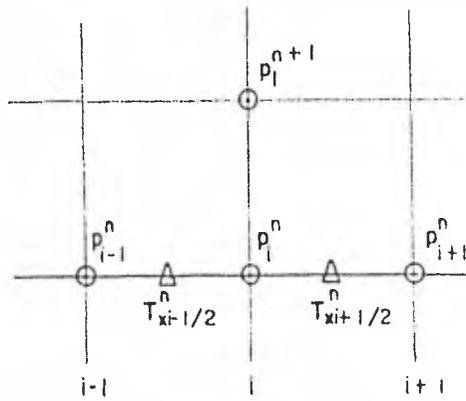
Para flujo multifásico, las técnicas de solución utilizadas normalmente combinan los dos últimos esquemas presentados.

La figura adjunta presenta una comparación esquemática de los tres esquemas en la cual los círculos representan los puntos en los cuales se evalúan las presiones y los triángulos los puntos en donde

se evalúan las transmisividades.

ESQUEMA EXPLICITO.

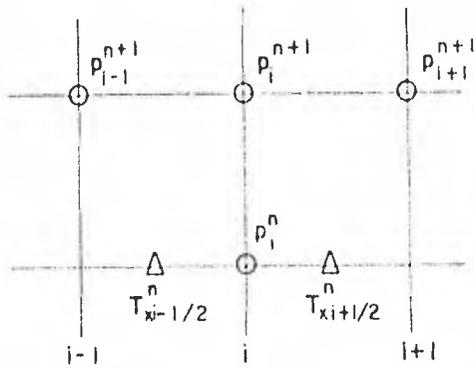
NIVEL DE TIEMPO



n + 1

n

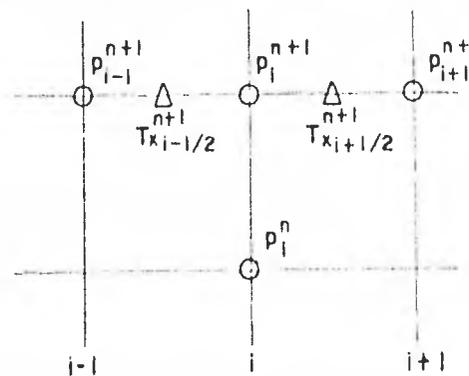
ESQUEMA MIXTO.



n + 1

n

ESQUEMA IMPLICITO.



n + 1

n

De acuerdo a la discusión anterior, las ecuaciones en diferencias finitas presentadas en las secciones previas pueden ser resueltas utilizando dos procedimientos diferentes para problemas multifásicos:

El primer procedimiento es implícito en presión y explícito en saturación (IMPES) y el segundo es implícito en presión y saturación (IMPIS).

En la mayoría de los estudios de yacimientos se puede utilizar ventajosamente el procedimiento IMPES, sin embargo, en problemas tales como conificación en donde se utilizan celdas muy pequeñas cerca del pozo es necesario usar un procedimiento IMPIS o una de sus variaciones.

En problemas monofásicos la presión en líquidos, o el potencial real del gas para gases son las únicas variables dependientes y es conveniente calcularlas implícitamente. Por esto para problemas monofásicos no hay limitaciones en el tamaño del intervalo de tiempo a utilizar, en cuanto a estabilidad se refiere.

## C O N T E N I D O

### CAPITULO 5

### SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS.

- 5.1            *Introducción.*
- 5.2            *Problemas en una dimensión.*
- 5.3            *Técnicas de solución.*
- 5.3.1        *Método directo.*
- 5.3.1.1      *Método de eliminación de Gauss.*
- 5.3.2        *Métodos iterativos.*
- 5.3.2.1      *Método de Jacobi.*
- 5.3.2.2      *Método de Gauss- Seidel.*
- 5.3.2.3      *Método de sobrerelajación puntual sucesiva.*
- 5.3.2.4      *Criterios de convergencia.*
- 5.4            *Ejemplo en dos dimensiones.*
- 5.5            *Arreglos característicos resultantes de  
flujo monofásico.*
- 5.6            *Algoritmo de Thomas para un sistema de ecua-  
ciones tridiagonales.*
- 5.7            *Flujo poco compresible, horizontal en dos  
dimensiones.*
- 5.8            *Esquemas de solución.*
- 5.9            *Consistencia, convergencia y estabilidad.*

## C A P I T U L O 5

### SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS.

#### 5.1 INTRODUCCION.

El objetivo de esta sección es presentar maneras de resolver las ecuaciones de presión, las cuales forman un sistema lineal de ecuaciones simultaneas. Dichas ecuaciones pueden ser escritas con la siguiente notación matricial:

$$A p = b \quad (5.1)$$

La ecuación (5.1) puede ser llamada ecuación vectorial o ecuación matricial y representa un número de ecuaciones lineales simultaneas, debido a que las ecuaciones son lineales, por que la matriz A contiene solo coeficientes que son constantes. El vector "p" representa las incógnitas de presión en todos los puntos del sistema considerado.

La solución de la ecuación de presión puede ser en todo caso muy simple o muy compleja, dependiendo del problema físico. Cuando la solución es relativamente fácil, como en el caso de problemas de una dimensión y muchos problemas de dos dimensiones, la solución de la ecuación de presión constituye solo una fracción del tiempo total de computación y del costo de la simulación del yacimiento. En problemas difíciles como algunos de dos y la mayoría de tres dimensiones, el esfuerzo requerido para resolver la ecuación de presión tiene un-

mayor significado en relación al resto del problema de la simulación del yacimiento.

Existe un número de técnicas para resolver la ecuación (5.1), la mayor parte de éstas están orientadas hacia problemas de dos dimensiones puesto que estos ocurren más frecuentemente en simulación de yacimientos. A continuación se explica un número de técnicas de solución comúnmente usadas para la simulación de yacimientos.

## 5.2 PROBLEMAS EN UNA DIMENSIÓN.

Para el problema de una dimensión, se puede ser más específico acerca de la interpretación de la ecuación vectorial  $A p = b$ . Para principiar considérese el siguiente diagrama esquemático (Fig. 5) usando un número de celdas  $N_x$  las cuales se encuentran numeradas de izquierda a derecha. Cualquiera celda puede ser referida a la celda " $i$ " con el propósito de escribir una ecuación general. De la ecuación de simulación de yacimientos, se sabe que una ecuación escrita para la celda " $i$ " involucra también los valores de las dos celdas -- continuas próximas, desde las cuales puede ocurrir el flujo de fluidos. Una ecuación para la celda " $i$ " presenta el siguiente aspecto:

$$a_i p_{i-1} + b_i p_i + c_i p_{i+1} = d_i \quad (5.2)$$

Para la celda  $1 \in I$ , solamente una celda está próxima, y esto representa la condición límite de no flujo en el final de la celda.

Sus ecuaciones están dadas por:

$$b_{i1} p_1 + c_{i1} p_2 = d_{i1} \quad (5.3)$$

y

$$a_{i1} p_{Nx-1} + b_{iNx} p_{Nx} = d_{Nx} \quad (5.4)$$

A continuación se presentan las ecuaciones correspondientes a un problema de cinco celdas, estas celdas se encuentran esquematizadas en la (Fig. 5.2). Para este problema de cinco celdas se tienen cinco incógnitas, tienen una solución única.

$$b_{i1} p_1 + c_{i1} p_2 = d_1 \quad (5.3a)$$

$$a_{i2} p_1 + b_{i2} p_2 + c_{i2} p_3 = d_2 \quad (5.3b)$$

$$a_{i3} p_2 + b_{i3} p_3 + c_{i3} p_4 = d_3 \quad (5.3c)$$

$$a_{i4} p_3 + b_{i4} p_4 + c_{i4} p_5 = d_4 \quad (5.3d)$$

$$a_{i5} p_4 + b_{i5} p_5 = d_5 \quad (5.3e)$$

Las ecuaciones (5.3), pueden ser escritas en forma matricial, - la cual es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} b_{i1} & c_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ a_{i2} & b_{i2} & c_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{i3} & b_{i3} & c_{i3} & 0 \\ 0 & 0 & a_{i4} & b_{i4} & c_{i4} \\ 0 & 0 & 0 & a_{i5} & b_{i5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (5.4)$$

El arreglo de los coeficientes es una matriz, designada por A. Los arreglos de las incógnitas "p" y de los términos independientes "d" son vectores, denotados como  $\vec{p}$  y  $\vec{d}$  respectivamente. La ecuación vectorial del arreglo es la siguiente:

$$A \vec{p} = \vec{d} \quad (5.5)$$

Al inspeccionar la matriz mostrada en la ecuación (5.4), se ve que los coeficientes están alineados en una forma diagonal. Esto siempre será el caso si se ordenan las celdas de izquierda a derecha como se muestra en las figuras (5.1) y (5.2).

La matriz A es una matriz tridiagonal y es característica de problemas de una dimensión. Nótese que las tres diagonales son cerradas, sin ceros intermedios. Este tipo de ecuaciones vectoriales son muy fáciles de resolver.

#### 5.2.1 TECNICAS DE SOLUCION.

Como ejemplo de algunas de las técnicas de solución de ecuaciones, considérese la ecuación para el flujo monofásico, incompresible, (elíptica).

$$\nabla \cdot \left[ \frac{kA}{\mu B} \nabla p \right] + q = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi),$$

En la dirección "x" la ecuación anterior queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{kx}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + q = 0,$$

si el medio es homogéneo, entonces no habrá variación en la permeabilidad y  $k_x$  es constante además si el medio es incompresible, el factor de volumen  $B$  y la viscosidad  $\mu$  se pueden considerar como constantes. Lo que resulta:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{q \mu B}{k_x} = 0, \quad (5.5)$$

Nota: En la práctica es preferible no hacer este tipo de simplificaciones ya que es conveniente conservar las unidades de cada término en unidades de gasto.

En el sistema práctico de unidades de campo,

$k_x$  = perm ( 1.127 x darcies)

$p$  = presión ( lb/pg<sup>2</sup>)

$q$  = gasto de (inyección (+)) (stb/d /pie<sup>3</sup> roca)

$x$  = distancia (pies)

$\mu$  = viscosidad (cp)

Escribiendo la ecuación (5.5), en diferencias finitas

$$\frac{p_{i-1} - 2 p_i + p_{i+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\mu B}{k_x} q \frac{q \text{ stb/d}}{\text{vol. celda } i} = 0$$

#### EJEMPLO No. 1

Calcular el gasto y la distribución de presiones para el siguiente sistema.

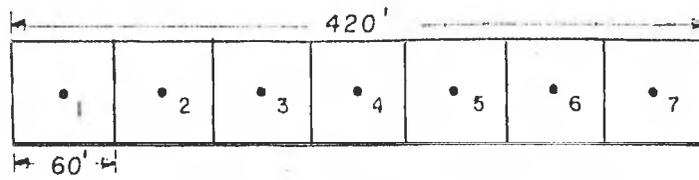


FIG. 5.1y5.2

$$kx = 200 \text{ mD}$$

$$\mu = 1 \text{ cp}$$

$$A = 200 \text{ pies}^2$$

$$p_1 = 600 \text{ lb/pg}^2$$

$$p_7 = 100 \text{ lb/pg}^2$$

Se tiene un sistema lineal, medio homogéneo, hay un pozo inyector en la celda 1 y un pozo productor en la celda 7.

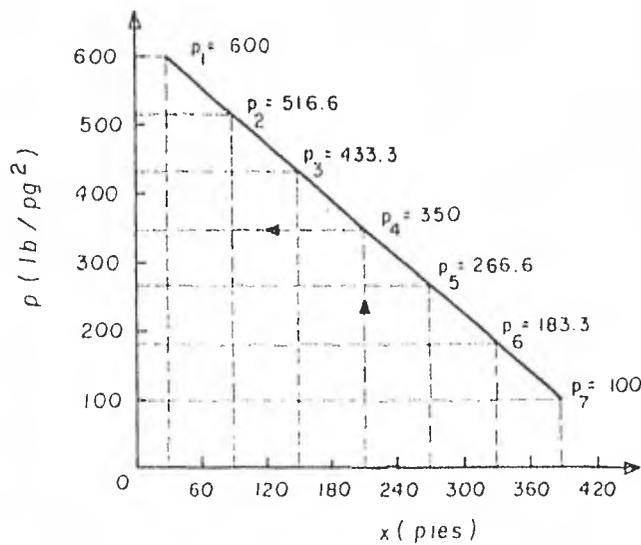
SOLUCION:

Los gastos se pueden calcular con la ecuación de Darcy

$$q = \frac{kA}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{(0.2) (1.127) (200)}{(1.0)} \times \frac{(600-100)}{(360)}$$

$$q = 62.61 \text{ bls/dla.}$$

En este caso particular las presiones se pueden calcular en una forma muy sencilla. Considerando que se trata de un sistema lineal, la presión varía en forma lineal para cada celda y el gradiente permanece constante en el sistema, se puede hacer una gráfica de  $x$  vs  $p$  tomando en cuenta los datos proporcionados, de tal manera que para cada distancia se pueda tener un valor de presión.



Otra forma de resolver el problema es utilizando la formulación en diferencias finitas. Escribiendo la ecuación general para cada nodo en el cual no se conoce la presión, se tiene lo siguiente:

$$\frac{p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u B_0}{kx (\text{Vol. del nodo } i)} [q \text{ stb}] = 0$$

sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación anterior:

$$\frac{p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1}}{(60)^2} + \frac{(1.0) (1.0) (q \text{ stb/d})}{(0.2) (1.127) (200 \times 60)} = 0$$

donde para  $(q \text{ stb/d})_1 = 62.61$ ,  $(q \text{ stb/d})_7 = -62.61$ . Los gastos son iguales en valor absoluto debido a que el flujo es incompresible -- por lo que se dice que el gasto que se inyecta (+) es igual al gasto que se produce (-). En las celdas 2,3,4,5,6 existe flujo pero no hay fuentes ni sumideros por lo tanto:

$(q \text{ stb/d})_{i=2,3,4,5,6} = 0$ ; las incógnitas son las  $p_{i=2,3,4,5,6}$ , para lo cual se tiene que escribir la ecuación en diferencias para cada uno de los nodos en donde no se conoce la presión. Para esto se tiene lo siguiente:

Nodo

$$i=2 \quad p_1 \quad - \quad 2p_2 \quad + \quad p_3 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = \quad 0$$

$$i=3 \quad 0 \quad + \quad p_2 \quad - \quad 2p_3 \quad + \quad p_4 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = \quad 0$$

$$i=4 \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad p_3 \quad - \quad 2p_4 \quad + \quad p_5 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = \quad 0$$

$$i=5 \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad p_4 \quad - \quad 2p_5 \quad + \quad p_6 \quad + \quad 0 \quad = \quad 0$$

$$i=6 \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad p_5 \quad - \quad 2p_6 \quad + \quad p_7 \quad = \quad 0$$

pasando las presiones conocidas al lado derecho de las ecuaciones

$$- 2p_2 \quad + \quad p_3 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = \quad - 600$$

$$p_2 \quad - \quad 2p_3 \quad + \quad p_4 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = \quad 0$$

$$0 \quad + \quad p_3 \quad - \quad 2p_4 \quad + \quad p_5 \quad + \quad 0 \quad = \quad 0$$

$$0 \quad + \quad 0 \quad + \quad p_4 \quad - \quad 2p_5 \quad + \quad p_6 \quad = \quad 0$$

$$0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad p_5 \quad - \quad 2p_6 \quad = \quad - 100$$

Este sistema de ecuaciones lineales se puede escribir en notación matricial como:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -600 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}$$

El arreglo de los coeficientes puede ser llamado matriz de coeficientes ( $A$ ), el arreglo de las presiones  $p$  ( $s$ ) como vector de incógnitas ( $\vec{p}$ ) y el arreglo de coeficientes del lado derecho de la igualdad como lado derecho ( $D$ ). La ecuación vectorial del arreglo es la siguiente:

$$A \vec{p} = D$$

premultiplicando a la ecuación vectorial por la inversa de  $A$ , con el objeto de tener el vector de incógnitas en función de ( $A^{-1}$ ) y ( $D$ )

$$A^{-1} A p = A^{-1} D, \quad p = A^{-1} D$$

Este sistema podrá resolverse por inversión matricial solamente si es posible obtener la inversión de  $A$  ( $A^{-1}$ ) en otras palabras sólo si  $\det A \neq 0$ .

Para sistemas pequeños es relativamente sencillo obtener la inversa de la matriz de coeficientes, pero para sistemas grandes puede ser ventajoso utilizar en la solución métodos iterativos.

Una ilustración de los métodos mas comunes se presenta a continuación.

### 5.3.1 METODO DIRECTO.

Antes de presentar el método directo se recordará el teorema fundamental de equivalencia, el cual es la base para el desarrollo de la eliminación de Gauss. Este teorema se expresa de la siguiente forma: Si en un sistema de ecuaciones se sustituye una de ellas por una combinación lineal de las ecuaciones del sistema, se obtiene un nuevo sistema que es equivalente al anterior.

### 5.3.1.1 METODO DE ELIMINACION DE GAUSS.

Este método es un método exacto para resolver sistemas lineales, el cual básicamente consiste en sistematizar el teorema fundamental de equivalencia.

El método consiste en aplicar a una matriz ampliada (la cual se forma con la matriz de coeficientes y el lado derecho de la ecuación vectorial (5.4)), un número determinado de operaciones, las cuales son llamadas operaciones elementales sobre los renglones de una matriz, con el fin de obtener un sistema equivalente al anterior en donde se pueden obtener fácilmente las incógnitas.

Tomando el sistema original, el objetivo es transformar a la matriz de coeficientes  $A$ , en una matriz tridiagonal superior.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -600 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}$$

formando la matriz ampliada, se obtiene:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -600 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -100 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -600 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & 0 & -300 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -100 \end{array} \right]$$

1º multiplique el primer renglón por 1/2 y súmese al segundo renglón.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -600 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 & -200 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -100 \end{array} \right]$$

2º multiplique el segundo renglón por 2/3 y súmese al tercero.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -600 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & -5/4 & 1 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -100 \end{array} \right]$$

3º multiplique el tercer renglón por 3/4 y súmese al cuarto renglón.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -600 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & -5/4 & 1 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6/5 & -220 \end{array} \right]$$

4º multiplique el cuarto renglón por 4/5 y súpese al quinto.

Por lo que  $p_6 = \frac{-(220)(5)}{-6} = 183.33 \text{ lb/pg}^2$ , substituyendo este valor en el cuarto renglón

$$-5/4 p_5 + p_6 = -150$$

$$\therefore p_5 = \frac{(-150 - 183.33)(4)}{-5} = 266.67 \text{ lb/pg}^2$$

y a la vez substituyendo  $p_5$  en el 3er renglón

$$-4/3 p_4 = -200 - 266.67$$

$$p_4 = 350 \text{ lb/pg}^2$$

ahora  $p_4$  en el 2do renglón

$$-3/2 p_3 = -300 - 350$$

$$p_3 = 433.33 \text{ lb/pg}^2$$

y por último, substituyendo  $p_3$  en el 1er renglón

$$-2 p_2 = -600 - 433.33$$

$$p_2 = 516.67 \text{ lb/pg}^2$$

obteniéndose la siguiente distribución de presiones:

$p_1 = 600 \text{ psi}$ ,  $p_2 = 516.67 \text{ psi}$ ,  $p_3 = 433.33 \text{ psi}$ ,  $p_4 = 350 \text{ psi}$ ,  $p_5 = 266.67$   $p_6 = 183.33 \text{ psi}$  y  $p_7 = 100 \text{ psi}$ .

q=62.6	q=0	q=0	q=0	q=0	q=0	q=-62.6
• 1	• 2	• 3	• 4	• 5	• 6	• 7
p=600	p=516.6	p=433.3	p=350	p=266.6	p=183.3	p=100

$\therefore q (\text{bl/día})$ ,  $p (\text{lb/pg}^2)$

### 5.3.2 MÉTODOS ITERATIVOS.

#### 5.3.2.1 MÉTODO DE JACOBI. (DE PUNTO JACOBI)

Escribanse las ecuaciones de tal manera que cada ecuación contenga una incógnita en función de las otras cantidades, la incógnita corresponderá con el orden de la ecuación. Por el ordenamiento de estas ecuaciones la incógnita tiene generalmente el coeficiente más grande. Este método converge siempre que por lo menos un elemento diagonal sea, en valor absoluto, mayor que la suma del resto de los elementos del mismo renglón. Aplicando el método el ejemplo anterior.

$$i = 2 \quad p_1 - 2p_2 + p_3 = 0$$

$$-2p_2 = -p_1 - p_3$$

$$2p_2 = p_1 + p_3$$

$$p_2 = 1/2 ( p_1 + p_3 )$$

$$i = 2 \quad p_2^{m+1} = 1/2 ( p_3^m + p_1 ) = 1/2 ( p_3^m + 600 )$$

Haciendo lo mismo para los siguientes nodos se tiene:

$$i = 3 \quad p_3^{m+1} = 1/2 ( p_2^m + p_4 )$$

$$i = 4 \quad p_4^{m+1} = 1/2 ( p_3^m + p_5 )$$

$$i = 5 \quad p_5^{m+1} = 1/2 ( p_4^m + p_6 )$$

$$i = 6 \quad p_6^{m+1} = 1/2 ( p_5^m + p_7 ) = 1/2 ( p_5^m + 100 )$$

En las ecuaciones anteriores la incógnita está en el lado izquierdo de la igualdad y se le asigna el nivel de iteración "m+1", la parte conocida se encuentra en el lado derecho y se le asigna el nivel de iteración "m".

El proceso iterativo consiste en suponer valores para cada una de las incógnitas, resolviendo las ecuaciones del método y mediante este proceso mejorar los valores supuestos por medio de iteraciones.

El proceso se continúa hasta que dos valores consecutivos de todas -- las variables presentan una variación a una tolerancia predeterminada.

EJEMPLO:

1era Iteración

$$\text{suponer: } p_2^0 = p_3^0 = p_4^0 = p_5^0 = p_6^0 = 0$$

$$m = 0$$

$$m + 1 = 0 + 1 = 1$$

entonces:

$$p_2^1 = 1/2(p_1^0 + p_3^0) = 1/2(600 + 0) = 300$$

$$p_3^1 = 1/2(p_2^0 + p_4^0) = 1/2(0 + 0) = 0$$

$$p_4^1 = 1/2(p_3^0 + p_5^0) = 1/2(0 + 0) = 0$$

$$p_5^1 = 1/2(p_4^0 + p_6^0) = 1/2(0 + 0) = 0$$

$$p_6^1 = 1/2(p_5^0 + p_7^0) = 1/2(0 + 100) = 50$$

2da Iteración

$$p_2^2 = 1/2(0 + 600) = 300$$

$$p_3^2 = 1/2(300 + 0) = 150$$

$$p_4^2 = 1/2(0 + 0) = 0$$

$$p_6^2 = 1/2(0 + 100) = 50$$

Para las demás iteraciones el procedimiento será el mismo, hasta el número de iteraciones requeridas. Para este ejemplo el número de iteraciones pedidas es de nueve. Los resultados son presentados en la tabla (5.1).

#### 5.3.2.2 METODO DE GAUSS SEIDEL.

Este método es similar al de Jacobi, pero permite acelerar la convergencia del método iterativo, al tomar ventaja del hecho de que cuando se calculan variables posteriores a la segunda, las incógnitas de menor subíndice se conocen a un nivel de iteración más avanzado. Este es el método de Gauss-Seidel también llamado de iteraciones parciales o desplazamientos sucesivos.

Para el ejemplo anterior las ecuaciones se escriben como:

$$p_2^{m+1} = 1/2 (p_3^m + p_1^m)$$

$$p_3^{m+1} = 1/2 (p_2^{m+1} + p_4^m)$$

$$p_4^{m+1} = 1/2 (p_3^{m+1} + p_5^m)$$

$$p_5^{m+1} = 1/2 (p_4^{m+1} + p_6^m)$$

$$p_6^{m+1} = 1/2 (p_5^{m+1} + p_7^m)$$

1era Iteración

suponiendo nuevamente que  $p_2^0 = p_3^0 = p_4^0 = p_5^0 = p_6^0 = 0$

$$m = 0$$

$$m + 1 = 1$$

$$p_2^1 = 1/2 ( 0 + 600 ) = 300.00$$

$$p_3^1 = 1/2 ( 300 + 0 ) = 150.00$$

$$p_4^1 = 1/2 ( 150 + 0 ) = 75.00$$

$$p_5^1 = 1/2 ( 75 + 0 ) = 37.50$$

$$p_6^1 = 1/2 ( 37.5 + 100 ) = 68.75$$

2da Iteración

$$p_1^1 = 600, p_2^1 = 300, p_3^1 = 150, p_4^1 = 75, p_5^1 = 37.5, p_6^1 = 68.75$$

$$p_7^1 = 100 \text{ ps.i}$$

$$p_2^2 = 1/2 ( 150.00 + 600 ) = 375.00$$

$$p_3^2 = 1/2 ( 375 + 75 ) = 225$$

$$p_4^2 = 1/2 ( 225 + 37.5 ) = 131.25$$

$$p_5^2 = 1/2 ( 131.25 + 68.75 ) = 100$$

$$p_6^2 = 1/2 ( 100 + 100 ) = 100$$

3ra Iteración

$$p_1^2 = 600, p_2^2 = 375, p_3^2 = 225, p_4^2 = 131.25, p_5^2 = 100, p_6^2 = 100$$

$$p_7^2 = 100 \text{ psi}$$

$$p_2^3 = 1/2 (225 + 600) = 412.5$$

$$p_3^3 = 1/2 (412.5 + 131.25) = 271.87$$

$$p_4^3 = 1/2 (271.87 + 100.00) = 185.93$$

$$p_5^3 = 1/2 (185.94 + 100.00) = 142.97$$

$$p_6^3 = 1/2 (142.97 + 100.00) = 121.48$$

Iterando sucesivamente se obtienen los valores presentados en la tabla (5.2).

### 5.3.2.3 METODO DE SOBRELAJACION PUNTUAL SUCESIVA (PSOR)

El concepto de sobrerelajación es un método de aceleramiento en la convergencia de los anteriores procesos iterativos. En este caso el nuevo valor de iteración  $p^{m+1}$  se obtiene con parte del nuevo y parte de la iteración anterior  $p^m$ .

Para el ejemplo anterior, las ecuaciones del método PSOR se escriben de la siguiente manera:

$$p_2^{m+1} = \omega(1/2 (p_3^m + 600) ) + (1-\omega) p_2^m$$

$$p_3^{m+1} = \omega(1/2 (p_2^{m+1} + p_4^m) ) + (1-\omega) p_3^m$$

$$p_4^{m+1} = \omega(1/2 (p_3^{m+1} + p_5^m) ) + (1-\omega) p_4^m$$

$$p_5^{m+1} = \omega(1/2 (p_4^{m+1} + p_6^m) ) + (1-\omega) p_5^m$$

$$p_6^{m+1} = \omega \left( \frac{1}{2} (p_5^{m+1} + 100) \right) + (1-\omega) p_6^m$$

$$1 \leq \omega \leq 2$$

durante la sobrerelajación, se amplifica la magnitud del cambio de presión durante cada iteración multiplicando este cambio de presión por un parámetro de relajación,  $\omega > 1.0$ .

Si  $\omega$  estuviese comprendido entre cero y uno, se tendría bajorelajación. Este procedimiento no es efectivo para el tipo de problemas de yacimientos.

Si  $\omega = 1$ , el PSOR se reduce al método de Gauss-Seidel. Ahora usando un valor de 1.334 para  $\omega$  se tiene:

1era Iteración

suponiendo  $p_2^0 = p_3^0 = p_4^0 = p_5^0 = p_6^0 = 0$

$$p_2^1 = 1.334 \left( \frac{1}{2} (0 + 600) \right) + (1-1.334) (0) = 400.2$$

$$p_3^1 = 1.334 \left( \frac{1}{2} (400.2 + 0) \right) + (1-1.334) (0) = 266.93$$

$$p_4^1 = 1.334 \left( \frac{1}{2} (266.9 + 0) \right) + (1-1.334) (0) = 178.04$$

$$p_5^1 = 1.334 \left( \frac{1}{2} (178.0 + 0) \right) + (1-1.334) (0) = 118.75$$

$$p_6^1 = 1.334 \left( \frac{1}{2} (118.7 + 100) \right) + (1-1.334) (0) = 145.91$$

2da Iteración

$$p_2^1 = 400.2, p_3^1 = 266.9, p_4^1 = 178, p_5^1 = 118.7, p_6^1 = 145.91$$

$$p_7^1 = 100$$

$$p_2^2 = 1.334 \left( \frac{1}{2} (266.9 + 600) \right) + (1-1.334) (400.2) = 444.57$$

$$p_3^2 = 1.334 \left( \frac{1}{2} (444.5 + 178.0) \right) + (1-1.334) (266.93) = 326.13$$

$$p_4^2 = 1.334 \left( \frac{1}{2} (326.13 + 118.7) \right) + (1-1.334) (178.00) = 237.27$$

$$p_5^2 = 1.334 \left( \frac{1}{2} (237.27 + 145.9) + (1-1.334) (118.7) \right) = 215.91$$

$$p_6^2 = 1.334 \left( \frac{1}{2} (215.91 + 100) + (1-1.334) (145.91) \right) = 161.98$$

iterando sucesivamente se obtienen los valores presentados en la tabla (5.3).

T A B L A . 5 . 1

Incl	Valor	L e t e r a c i o n e s										
		1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a	11a
p	0	300	300.00	375.00	375.00	415.625	415.625	442.1875	442.1875	461.13	461.13	475.09
p	0	0	150.00	150.00	231.25	231.250	284.375	284.3750	322.2600	322.26	350.19	350.19
p	0	0	0	87.50	87.50	153.125	153.125	202.3440	202.3440	239.26	239.25	266.94
p	0	0	25	25.00	75.00	75.000	120.313	120.3130	156.2500	156.25	183.69	183.69
p	0	50	50	62.50	62.50	87.500	87.500	110.1563	110.1563	128.12	128.12	141.84

T A B L A . 5 . 2

Incl	Valor	L e t e r a c i o n e s										
		1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a	11a
p	0	300	375.00	412.50	435.94	455.670	470.600	482.0800	490.7100	497.27	502.06	505.72
p	0	150	225.00	271.87	310.94	341.210	364.160	381.4300	394.4000	404.13	411.43	416.91
p	0	75	131.25	185.94	226.95	257.710	280.780	298.0500	311.0600	320.80	328.10	333.57
p	0	37.5	100.00	142.97	174.22	197.400	214.746	227.7000	237.4600	244.76	250.24	254.35
p	0	68.7	100.00	121.48	137.11	148.710	157.370	163.5600	168.7300	172.38	175.12	177.17

$$p_5^2 = 1.334 (1/2 (237.27 + 145.9) + (1-1.334) (118.7) = 215.91$$

$$p_6^2 = 1.334 (1/2 (215.91 + 100) + (1-1.334) (145.91) = 161.98$$

iterando sucesivamente se obtienen los valores presentados en la tabla (5.3).

T A B L A. 5 . 1 (continuaón)

i t e r a c i ó n							
12a	13a	14a	15a	16a	17a	18a	19a
475.09	485.51	485.51	493.304	493.30	499.14	499.14	503.52
371.02	371.02	386.61	386.610	398.29	398.29	407.05	407.05
266.94	287.70	287.70	303.280	303.28	314.96	314.96	323.72
204.39	204.39	219.95	219.950	231.63	231.63	240.38	240.38
141.84	152.19	152.19	159.980	159.98	165.81	165.81	170.19

T A B L A. 5 . 2 (continuaón)

i t e r a c i ó n							
12a	13a	14a	15a	16a	17a	18a	19a
508.45	510.50	512.04	513.200	514.06	514.71	515.20	515.57
421.01	424.04	426.40	428.136	429.43	430.41	431.14	431.68
337.68	340.76	343.07	344.800	346.10	347.07	347.80	348.35
257.43	259.73	261.47	262.768	263.74	264.47	265.02	265.43
178.71	179.86	180.73	181.380	181.87	182.22	182.20	182.72

T A B L A . 5 . 3

Inc.	Valor inicial	i t e r a c i ó n									
		1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a
p	0	400.2	444.57	469.24	485.13	509.60	512.58	515.580	516.0800	516.48	516.57
p	0	266.9	326.13	362.31	406.96	423.68	428.83	431.63	432.7600	433.10	433.24
p	0	178.04	237.27	306.43	329.39	342.50	346.84	348.88	349.5500	349.84	349.94
p	0	118.75	215.91	240.31	274.75	262.67	265.10	266.01	266.4400	266.58	266.63
p	0	145.91	161.98	172.88	178.87	182.15	182.68	183.11	183.2500	183.31	183.32

$w_{opt} = 1.334$

T A B L A . 5 . 3 (continuación)

<i>í t e r a c i ó n</i>								
<i>11a</i>	<i>12a</i>	<i>13a</i>	<i>14a</i>	<i>15a</i>	<i>16a</i>	<i>17a</i>	<i>18a</i>	<i>19a</i>
516.63	516.66	516.57	516.63	516.66	516.66	516.66	516.66	516.66
433.30	433.30	433.24	433.30	433.32	433.33	433.33	433.33	433.33
349.98	349.99	349.94	349.98	349.99	349.99	349.99	349.99	349.99
266.65	266.66	266.63	266.65	266.66	266.66	266.66	266.66	266.66
183.33	183.33	183.32	183.32	183.33	183.33	183.33	183.33	183.33

### Comentarios y conclusiones

En las tablas anteriores se observa la eficiencia de cada uno de los métodos. Obteniéndose los resultados siguientes:

a).- Para el método de Jacobi debido a que el método por estructuración es lento, arroja un total de 74 iteraciones para convergir, con una tolerancia de 0.001 de presión, llegándose a la siguiente -- distribución de presiones:

$$p_1 = 600.000 \text{ lb/pg}^2$$

$$p_2 = 516.666 \text{ "}$$

$$p_3 = 433.324 \text{ "}$$

$$p_4 = 349.999 \text{ "}$$

$$p_5 = 266.659 \text{ "}$$

$$p_6 = 183.329 \text{ "}$$

$$p_7 = 100.000 \text{ "}$$

b).- Para el método de Gauss-Seidel como se planteó anteriormente es mucho más eficiente, arrojando un total de 36 iteraciones para convergir, con una tolerancia de 0.001 de presión, obteniéndose la siguiente distribución de presiones:

$$p_1 = 600.000 \text{ lb/pg}^2$$

$$p_2 = 516.666 \text{ "}$$

$$p_3 = 433.320 \text{ "}$$

$$p_4 = 349.990 \text{ "}$$

$$p_5 = 266.659 \text{ "}$$

de los otros coeficientes para algún nodo. Físicamente en simulación de yacimientos, esta condición es siempre satisfactoria si se tiene formulado un sistema físico propio. Los requerimientos para que esto ocurra es que la compresibilidad del sistema físico sea positiva, el transcurso del tiempo positivo; y la transmisividad positiva. Si el PSOR no converge, es posible que haya un error en el sistema físico, probablemente ocurra una compresibilidad negativa en algún nodo.

$$\left\| d \right\|_{\max}^{m+1} = \max_i \left| p_i^{m+1} - p^m \right|$$

La proposición de convergencia puede ser analizada por el término llamado factor de reducción,  $\rho$ , primero se definirá una medida de convergencia referida a una variable a cada máximo residual. Si se observa el máximo residual a cada iteración y se traza este valor vs el número de iteraciones se tendrá la Fig. (5a)

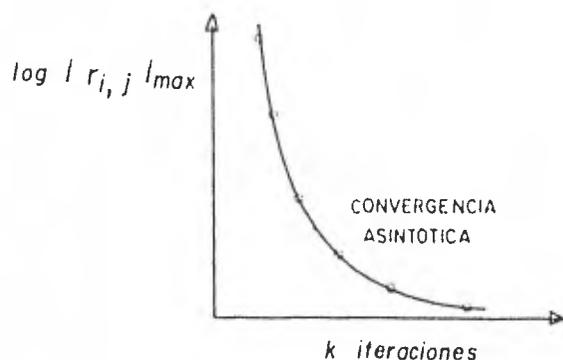


FIG. 5a

Durante esta convergencia asintótica, el máximo residual y todos los otros residuales en las celdas están gobernadas por la relación siguiente:

$$r_{i,j}^{k+1} = \rho r_{i,j}^k$$

donde  $\rho$  es llamado el factor de reducción y es igual al radio espectral de la matriz formada durante el proceso PSOR,  $\rho$  depende del valor de  $\omega$  y la velocidad y razón de convergencia.

EJEMPLO:

Calcule  $\|d\|$  y  $\rho$ , en donde  $\rho = \frac{\|d\|_{\max}^{m+1}}{\|d\|_{\max}^m}$

por el método de Gauss-Seidel

Solución

De la tabla 5.2 se tiene lo siguiente:

7a iteración	8a iteración	9a iteración
$p_2 = 482.0800781$	490.7165527	497.2015381
$p_3 = 381.4331055$	394.4030762	404.1343689
$p_4 = 298.0959960$	311.0671997	320.8003998
$p_5 = 227.7313232$	237.4664307	244.7668076
$p_6 = 163.8656616$	168.7332153	172.3834038

diferencia máxima entre la 7a y 8a iteración

$$12.9712037$$

diferencia máxima entre la 8a y 9a iteración

$$9.7332001$$

de la fórmula

$$\rho = \frac{\|d\|_{\max}^{m+1}}{\|d\|_{\max}^m}$$

entonces

$$\rho = \frac{9.7332001}{12.9712037} = 0.7503698442$$

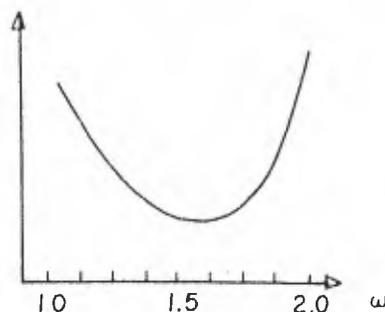
#### COMPORTAMIENTO DE $\omega$

En general, se puede obtener un valor de  $\omega$  que optimice el proceso iterativo. Una manera práctica de obtener  $\omega_{opt.}$ , consiste en efectuar unas 10 iteraciones con  $\omega = 1$ . Entre la 7a, 8a, 9a, y 10a se obtiene  $\rho$ . Por ejemplo para el problema de Gauss-Seidel  $\rho = 0.75037$

$$\omega_{opt.} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 0.7507}} = 1.334$$

El parámetro de relajamiento  $\omega$  es mayor para problemas mas complicados, por ejemplo; grandes contrastes en permeabilidad y su comportamiento esquemático es similar al presentarlo en la siguiente figura.

No. de iteración  
para alcanzar la  
convergencia.



#### 5.4 EJEMPLO DE FLUJO MONOFÁSICO BIDIMENSIONAL INCOMPRESIBLE.

De la ecuación para flujo monofásico incompresible en 2 dimensio-

-nes, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_x}{\mu_o B_o} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k_y}{\mu_o B_o} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + q = 0$$

Expandiendo en diferencias finitas, suponiendo  $k_x$ ,  $k_y$ , y  $B_o$  como constantes

$$\frac{k_x}{B_o} \frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{k_y}{B_o} \frac{p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{q \text{ stb}}{(\text{vol. del nodo})_i} = 0$$

Datos

$$k_x = 200 \text{ mD.}$$

$$k_y = 50 \text{ mD.}$$

$$\mu_o = 1.5 \text{ cp.}$$

$$B_o = 1.2$$

$$h = 20 \text{ pies}$$

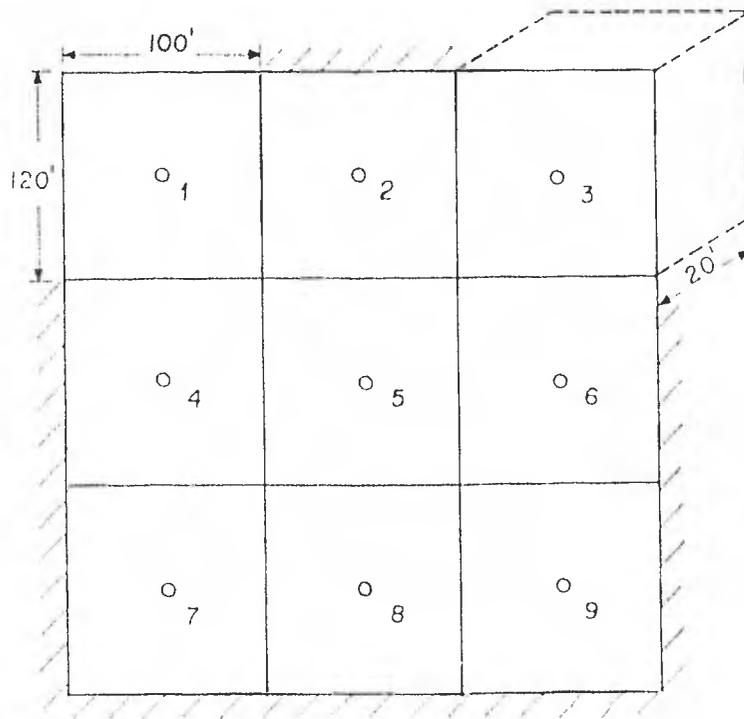
$$x = 100 \text{ pies}$$

$$y = 120 \text{ ''}$$

$$q_1 = 500 \text{ bl/dca}$$

$$q_9 = -500 \text{ ''}$$

$$p_g = 1000 \text{ lb/pg}^2$$



Es importante notar que el sistema es cerrado, es decir, que no hay flujo en la frontera externa. Para hacer esto, recordando la ecuación de Darcy, en donde el gasto es proporcional a la caída de

presión:

$$q = \text{ctte. } p$$

Si el flujo es cero en la frontera  $p$  tiene que ser cero. Por lo tanto hay que aumentar nodos ficticios alrededor del sistema cuyas presiones son idénticas a las de los nodos inmediatamente contiguos dentro del sistema.

Escribiendo las ecuaciones correspondientes a cada uno de los nodos se tiene lo siguiente:

Nodo

$$1) \frac{0.2 \times 1.127}{(1.5)(1.2)} \times \frac{p_1 - 2p_1 - p_2}{(100)^2} + \frac{0.05 \times 1.127}{(1.5)(1.2)} \times \frac{p_1 - 2p_1 + p_4}{(120)^2} + \frac{500}{(100 \times 120 \times 20)} = 0$$

$$2) \frac{0.2 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_1 - 2p_2 + p_3}{(100)^2} + \frac{0.05 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_2 - 2p_2 + p_5}{(120)^2} + 0 = 0$$

$$3) \frac{0.2 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_2 - 2p_3 + p_3}{(100)^2} + \frac{0.05 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_3 - 2p_3 + p_6}{(120)^2} + 0 = 0$$

$$4) \frac{0.2 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_4 - 2p_4 + p_5}{(100)^2} + \frac{0.05 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_1 - 2p_4 + p_7}{(120)^2} +$$

$$0 = 0$$

$$5) \frac{0.2 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_4 - 2p_5 + p_6}{(100)^2} + \frac{0.05 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_2 - 2p_5 + p_8}{(120)^2} +$$

$$0 = 0$$

$$6) \frac{0.2 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_5 - 2p_6 + p_6}{(100)^2} + \frac{0.05 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_3 - 2p_6 + 1000}{(120)^2} +$$

$$0 = 0$$

$$7) \frac{0.2 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_7 - 2p_7 + p_8}{(100)^2} + \frac{0.05 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_4 - 2p_7 + p_7}{(120)^2} +$$

$$0 = 0$$

$$8) \frac{0.2 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_7 - 2p_8 + 1000}{(100)^2} + \frac{0.05 \times 1.127}{1.8} \times \frac{p_5 - 2p_8 + p_8}{(120)^2} +$$

$$0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & + a_{12} & & + a_{18} \\ & & & \\ a_{31} & + a_{32} & & + a_{38} \\ & & & \\ a_{81} & + a_{82} & & + a_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r}
- 3055.42 p_1 + 1803.2 p_2 + 0 p_3 + 1252.22 p_4 + 0 p_5 + 0 p_6 + 0 p_7 + 0 p_8 = -3 \times 10 \\
1803.2 p_1 - 4858.6 p_2 + 1803.2 p_3 + 0 p_4 + 1252.22 p_5 + 0 p_6 + 0 p_7 + 0 p_8 = 0 \\
0 p_1 + 1803.2 p_2 - 3055.42 p_3 + 0 p_4 + 0 p_5 + 1252.22 p_6 + 0 p_7 + 0 p_8 = 0 \\
1252.22 p_1 + 0 p_2 + 0 p_3 - 4307.64 p_4 + 1803.2 p_5 + 0 p_6 + 1252.22 p_7 + 0 p_8 = 0 \\
0 p_1 + 1252.2 p_2 + 0 p_3 + 1803.2 p_4 - 6110.84 p_5 + 1803.2 p_6 + 0 p_7 + 1252.2 p_8 = 0 \\
0 p_1 + 0 p_2 + 1252.22 p_3 + 0 p_4 + 1803.2 p_5 - 4307.6 p_6 + 0 p_7 + 0 p_8 = -1252222 \\
0 p_1 + 0 p_2 + 0 p_3 + 1252.22 p_4 + 0 p_5 + 0 p_6 - 3055.42 p_7 + 1803.2 p_8 = 0 \\
0 p_1 + 0 p_2 + 0 p_3 + 0 p_4 + 1252.22 p_5 + 0 p_6 + 1803.2 p_7 - 4858.6 p_8 = -1803200
\end{array}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por eliminación de Gauss - (método directo), se obtiene la siguiente distribución de presiones:

$$p_1 = 1303.6270 \text{ lb/pg}^2$$

$$p_2 = 1216.6606 \text{ "}$$

$$p_3 = 1174.7270 \text{ "}$$

$$p_4 = 1189.2844 \text{ "}$$

$$p_5 = 1151.8139 \text{ "}$$

$$p_6 = 1114.3426 \text{ "}$$

$$p_7 = 1128.9000 \text{ "}$$

$$p_8 = 1086.9664 \text{ "}$$

$q = 500$ $\circ_1$ $p = 1303.6$	$q = 0$ $\circ_2$ $p = 1216.6$	$q = 0$ $\circ_3$ $p = 1174.7$
$q = 0$ $\circ_4$ $p = 1189.2$	$q = 0$ $\circ_5$ $p = 1151.8$	$q = 0$ $\circ_6$ $p = 1114.3$
$q = 0$ $\circ_7$ $p = 1128.9$	$q = 0$ $\circ_8$ $p = 1086.9$	$q = -500$ $\circ_9$ $p = 1000$

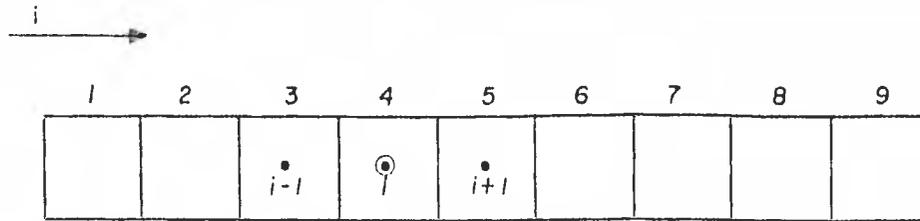
$$\therefore q(\text{bl/d/a}), p(\text{lb/pg}^2)$$

### 5.5 ARREGLOS CARACTERISTICOS RESULTANTES DE FLUJO MONOFASICO.

a).- Una dimensión

Ecuación:

$$\frac{p_{i-1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t}$$



$$\begin{bmatrix}
 xx & & & & & & & & \\
 xxx & & & & & & & & \\
 & xxx & & & & & & & \\
 & & xxx & & & & & & \\
 & & & xxx & & & & & \\
 & & & & xxx & & & & \\
 & & & & & xxx & & & \\
 & & & & & & xxx & & \\
 & & & & & & & xxx & \\
 & & & & & & & & xx
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 p_1 \\
 p_2 \\
 p_3 \\
 p_4 \\
 p_5 \\
 p_6 \\
 p_7 \\
 p_8 \\
 p_9
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 q_1 \\
 q_2 \\
 q_3 \\
 q_4 \\
 q_5 \\
 q_6 \\
 q_7 \\
 q_8 \\
 q_9
 \end{bmatrix}$$

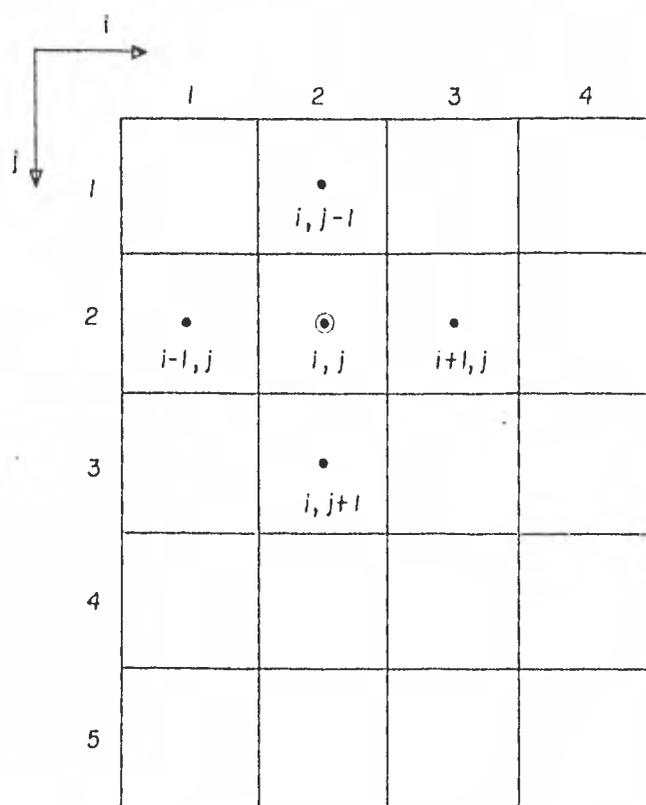
Obteniendose una matriz tridiagonal

b).- Dos dimensiones

Ecuación

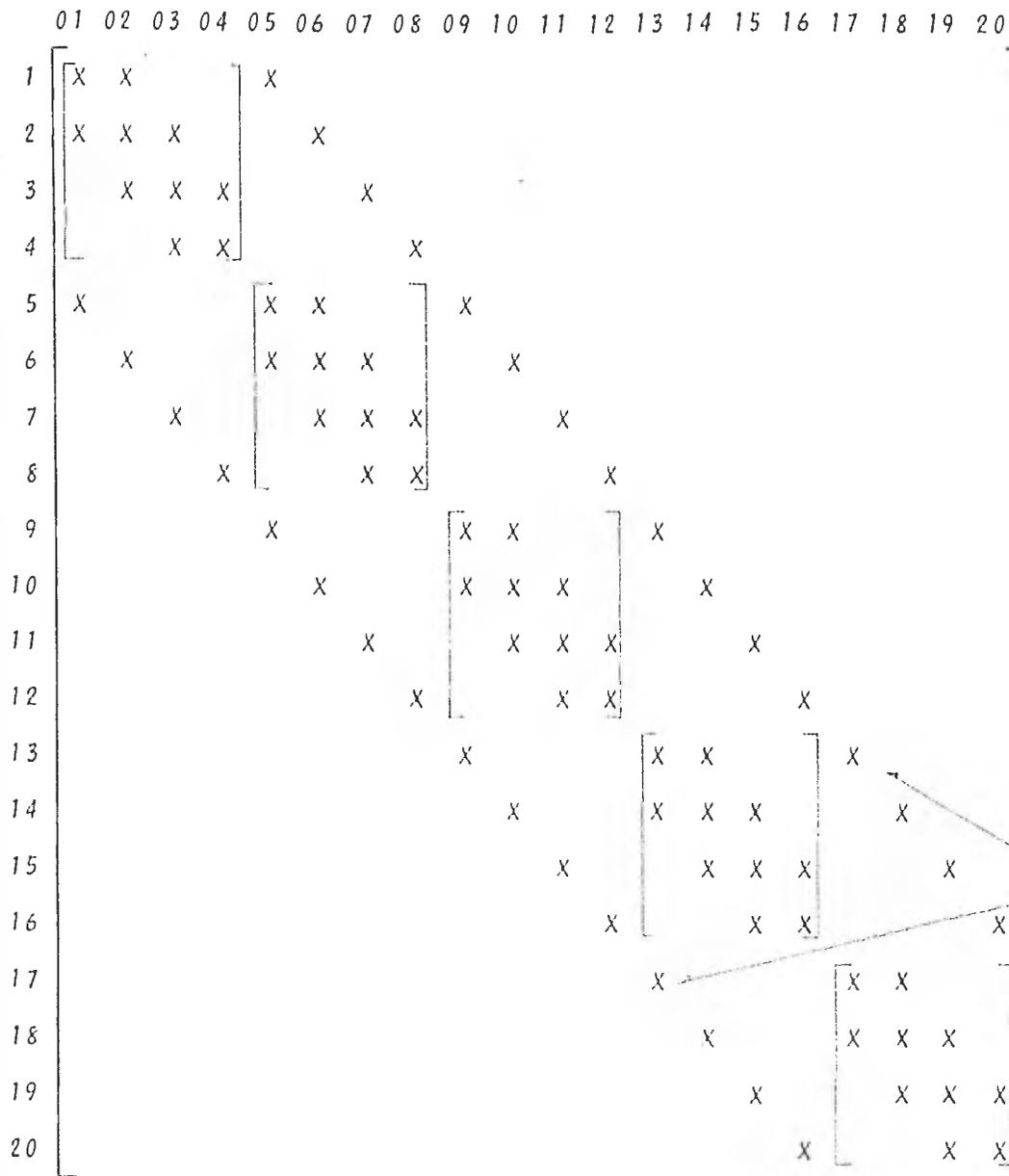
$$\frac{p_{i-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\Delta t}$$



Suponiendo que se tiene una malla de cuatro por cinco, se obtendrá una matriz pentadiagonal, diagonalmente dominante, en donde la parte central de la matriz, esta formada por cinco matrices de  $4 \times 4$ , que co rresponderá al flujo en la dirección "x".

Las diagonales adyacentes a la parte central corresponderán al flu jo en la dirección "y".

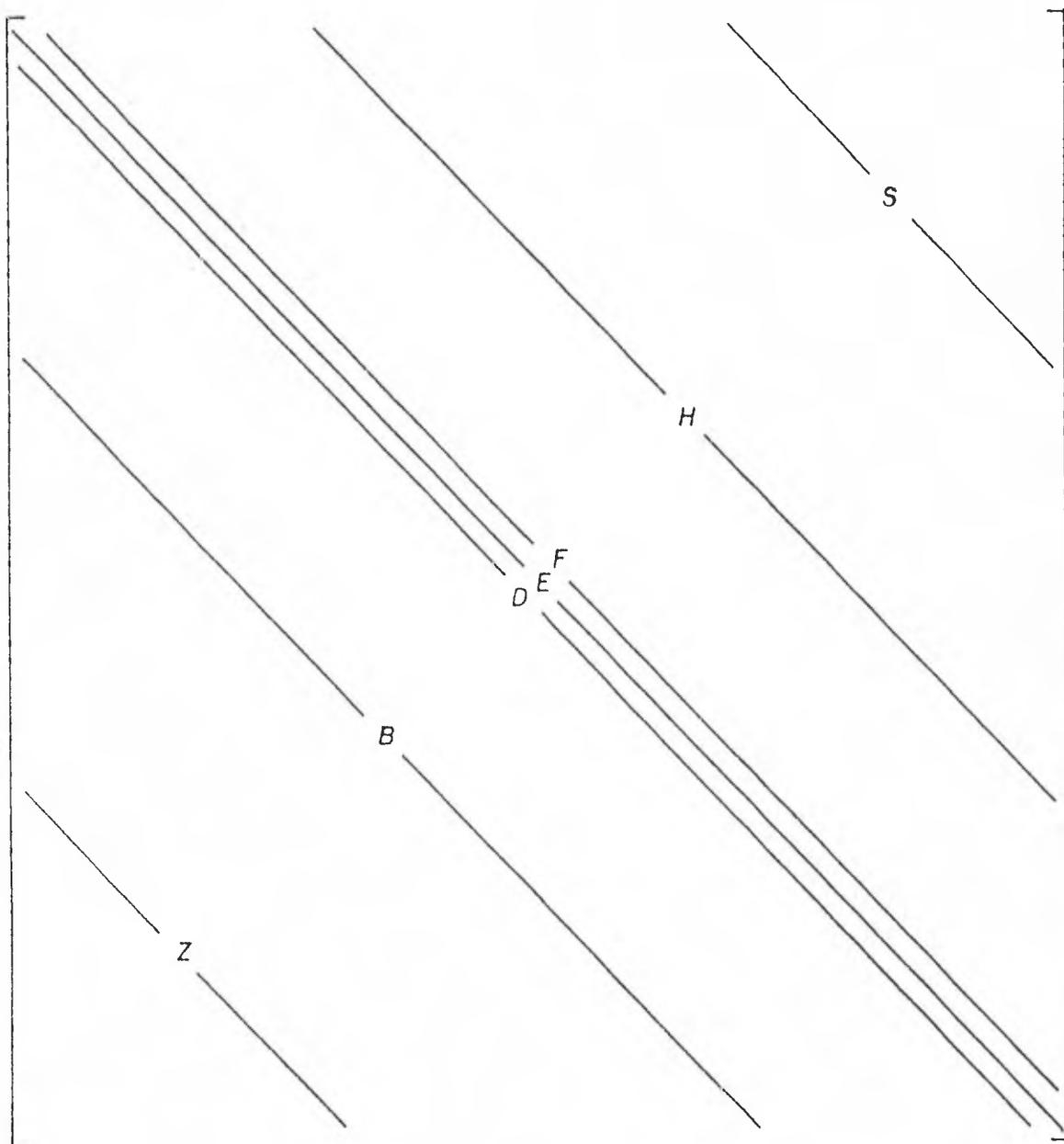


"Flujo en la dirección "y"

c) Tres dimensiones (flujo monofásico)

Ecuación

$$\begin{array}{c} \text{término en} \quad \quad \quad \text{término en} \\ x \quad \quad \quad + \quad \quad \quad y \quad \quad \quad + \\ \\ + \frac{p_{i,j,k-1}^{n+1} - 2p_{i,j,k}^{n+1} + p_{i,j,k+1}^{n+1}}{(\Delta z)^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^n}{\Delta t} \end{array}$$



D, E y F — FLUJO EN LA DIRECCION "X"  
 B y H — FLUJO EN LA DIRECCION "Y"  
 Z y S — FLUJO EN LA DIRECCION "Z"

### 5.6 ALGORITMO DE THOMAS PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES TRIDIAGONAL.

El algoritmo de Thomas es esencialmente una variación de la eliminación Gaussiana y con el cual se evita el crecimiento del error asociado con la solución de las ecuaciones y se disminuyen los problemas en cuanto a capacidad de computadora.

Supongase que se tiene un sistema de  $n$  ecuaciones con las incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en donde:

$$\begin{bmatrix}
 b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & \\
 & & & a_n & b_n & 
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 x_{n-1} \\
 x_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 d_1 \\
 d_2 \\
 d_3 \\
 d_4 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 d_{n-1} \\
 d_n
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 x_1 + c_1 x_2 & = d_1 \\
 a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 & = d_2 \\
 + a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 & = d_3 \\
 + a_4 x_3 + b_4 x_4 + c_4 x_5 & = d_4 \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n & = d_{n-1} \\
 a_n x_{n-1} + b_n x_n & = d_n
 \end{aligned}$$

Por definición

$$\gamma_1 = \frac{d_1}{b_1} \dots (1)$$

$$\omega_1 = \frac{c_1}{b_1} \dots (2)$$

despejando  $x_1$  de la primera ecuación y sustituyendo las expresiones anteriores se tiene lo siguiente:

$$x_1 = \frac{d_1}{b_1} - \frac{c_1}{b_1} x_2$$

entonces

$$x_1 = \gamma_1 - \omega_1 x_2 \dots (3)$$

sustituyendo la ecuación (3) en la segunda ecuación del sistema se tiene

$$a_2 (\gamma_1 - \omega_1 x_2) + b_2 x_2 + c_3 x_3 = d_2$$

factorizando  $x_2$

$$(b_2 - a_2 \omega_1) x_2 + c_3 x_3 = d_2 - a_2 \gamma_1$$

definiendo a

$$\beta_2 = b_2 - a_2 \omega_1$$

$$x_2 = \frac{d_2 - a_2 \gamma_1}{\beta_2} - \frac{c_3 x_3}{\beta_2}$$

ahora

$$\gamma_2 = \frac{d_2 - a_2 \gamma_1}{\beta_2}, \omega_2 = \frac{c_3}{\beta_2}$$

$$x_2 = \gamma_2 - \omega_2 x_3 \dots (4)$$

continuando el proceso hasta  $n-1$ , ya que hasta  $n-1$  habrán 3 ecuaciones por lo tanto

$$\beta_i = b_i - a_i \omega_{i-1}$$

$$\gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{\beta_i}$$

$$\omega_i = \frac{c_i}{\beta_i}$$

.

.

.

$$x_{n-1} = \gamma_{n-1} - \omega_{n-1} x_n$$

sustituyendo las expresiones anteriores en la última ecuación del sistema se tiene,

$$a_n (\gamma_{n-1} - \omega_{n-1} x_n) + b_n x_n = d_n$$

$$(b_n - a_n \omega_{n-1}) x_n = d_n - a_n \gamma_{n-1}$$

$$x_n = \gamma_n$$

$$x_i = \gamma_i - \omega_i x_{i+1}$$

como ya se conoce el valor de  $x_n$ , ahora se conocerán los valores de  $x_{n-1}$ ,  $x_{n-2}$ ,  $x_{n-3}$ , etc. El algoritmo de Thomas consiste en dos secuencias:

1).- Primera secuencia progresiva:

$$\beta_1 = b_1$$

$$\omega_i = \frac{c_i}{\beta_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$\beta_i = b_i - a_i \omega_{i-1}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, n$$

$$\gamma_1 = \frac{d_1}{\beta_1}, \gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{\beta_i}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, n$$

2).- Segunda secuencia regresiva

$$x_n = \gamma_n$$

$$x_i = \gamma_i - \omega_i x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, n-3, \dots, 1$$

### 5.7 FLUJO POCO COMPRESIBLE, HORIZONTAL, EN DOS DIMENSIONES.

La ecuación para este tipo de flujo es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Ax Kx}{\mu_o B_o} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{Ay Ky}{\mu_o B_o} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \Delta y + q_{stb/d} =$$

$$\frac{\phi c V_b}{5.615} \frac{\partial p}{\partial t}$$

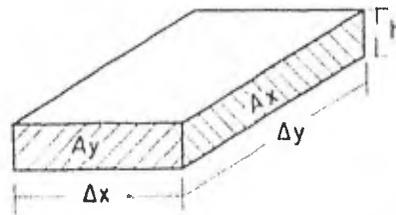
En donde:

A	Area transversal total	[pie <sup>2</sup> ]
K	Permeabilidad absoluta (1.127 x Darcy)	[Darcy]
$\mu_o$	Viscosidad del fluido	[cp]
$B_o$	Factor de volúmen	[vol. cy./vol.@c.s.]
p	Presión	[lb/pg <sup>2</sup> ]
x, y	Distancia	[pie]
$\Delta x, \Delta y$	Longitudes de las celdas	[pie]
$\phi$	Porosidad	[fracción]
c	Compresibilidad del fluido	[vol./vol.lb/pg <sup>2</sup> ]
t	Tiempo	[dias]
$V_b$	Volúmen total de la celda	[pie <sup>3</sup> ]

$$A = h \Delta y$$

$$A = h \Delta x$$

$$V = h \Delta x \Delta y$$



La expansión en diferencias finitas será:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

\* 1.127 este. de transformación para que el gasto de directamente en  $b1/dla$

Formulando la expresión en la dirección "x" se tiene:

$$\left( \frac{A_x K_x \Delta x}{\mu_o B_o} \right) \left( \frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \right) = \left( \frac{A_x K_x}{\mu_o B_o \Delta x} \right)$$

$$(p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j})$$

$$\left( \frac{A_x K_x}{\mu_o B_o \Delta x} \right) (p_{i-1,j} - p_{i,j} - p_{i,j} + p_{i+1,j})$$

$$\left( \frac{A_x K_x}{\mu_o B_o \Delta x} \right) \Big|_{i+1/2,j} (p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) - \left( \frac{A_x K_x}{\mu_o B_o \Delta x} \right) \Big|_{i-1/2,j} (p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1})$$

en la dirección "y"

$$\left( \frac{A_y K_y}{\mu_o B_o \Delta y} \right) \Big|_{i,j+1/2} (p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) - \left( \frac{A_y K_y}{\mu_o B_o \Delta y} \right) \Big|_{i,j-1/2} (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1})$$

obteniendo la siguiente expresión:

$$\left( \frac{\lambda_x K_x}{\mu_0 B_0 \Delta x} \right) \left( p_{i+1/2,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1} \right) - \left( \frac{\lambda_x K_x}{\mu_0 B_0 \Delta x} \right) \left( p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1/2,j}^{n+1} \right) +$$

$$+ T_{x_{i+1/2,j}} - T_{x_{i-1/2,j}}$$

$$\therefore \frac{\lambda_x K_x}{\mu_0 B_0 \Delta x} = T_{x_{i+1/2,j}}$$

$$\left( \frac{\lambda_y K_y}{\mu_0 B_0 \Delta y} \right) \left( p_{i,j+1/2}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1} \right) - \left( \frac{\lambda_y K_y}{\mu_0 B_0 \Delta y} \right) \left( p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1/2}^{n+1} \right) +$$

$$+ T_{y_{i,j+1/2}} - T_{y_{i,j-1/2}}$$

$$q_{i,j} \text{ stb/dla} = \frac{\phi c V_{b_{i,j}}}{5.615 \Delta t} (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n)$$

esta ecuación se puede escribir en la notación SIP:

$$B_{i,j} p_{i,j-1/2} + D_{i,j} p_{i-1,j} + E_{i,j} p_{i,j} + F_{i,j} p_{i+1,j} + H_{i,j} p_{i,j+1/2} = q_{i,j}$$

en donde:

$$B_{i,j} = \left( \frac{\lambda_y K_y}{\mu_0 B_0 \Delta y} \right)_{i,j-1/2}$$

$$D_{i,j} = \left( \frac{\lambda_x K_x}{\mu_0 B_0 \Delta x} \right)_{i-1/2,j}$$

$$E_{i,j} = \frac{V_{b_{i,j}} \phi c}{5.615}$$

$$H_{i,j} = \left( \frac{\lambda_y K_y}{\mu_0 B_0 \Delta y} \right)_{i,j+1/2}$$

$$F_{i,j} = \left( \frac{\lambda_x K_x}{\mu_0 B_0 \Delta x} \right)_{i+1/2,j}$$

$$q_{i,j} = - q \text{ stb/dla}_{i,j} - \frac{\Gamma_{i,j}}{\Delta t} p_{i,j}^n$$

$$E_{i,j} = E_{x_{i,j}} + E_{t_{i,j}} + E_{y_{i,j}} \left| E_{x_{i,j}} = - \left( \frac{\lambda_x K_x}{\mu_0 B_0 \Delta x} \right)_{i+1/2,j} \left( \frac{\lambda_x K_x}{\mu_0 B_0 \Delta x} \right)_{i-1/2,j} \right.$$

$$E_{i,j} = - \frac{\Gamma_{i,j}}{\Delta t}$$

$$E_{y_{i,j}} = - \left( \frac{\Lambda_y K_y}{u_0 B_0 \Delta y} \right)_{i,j+1/2} -$$

$$\left( \frac{\Lambda_y K_y}{u_0 B_0 \Delta y} \right)_{i,j-1/2}$$

$$E_{x_{i,j}} = - (D + F)$$

$$E_{y_{i,j}} = - (B + H)$$

### 5.8 ESQUEMAS DE SOLUCIÓN.

#### 1.- DIFERENCIAS PROGRESIVAS

- Nivel de tiempo ( n ) en el LIE\*

- Condicionalmente estable:

$$\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq 1/2$$

- Error  $O(\Delta x)^2 + O(\Delta t) + O(\Delta y)^2$

#### 2.- DIFERENCIAS REGRESIVAS

- Nivel de tiempo ( n+1 ) en el LIE

- Incondicionalmente estable

- Error  $O(\Delta x)^2 + O(\Delta t) + O(\Delta y)^2$

#### 3.- CRANK - NICHOLSON

- Nivel de tiempo 1/2 ( n+1 ) y 1/2 ( n ) en el LIE

- Incondicionalmente estable

- Error  $O(\Delta x)^2 + O(\Delta t)^2 + O(\Delta y)^2$

#### 4.- PROMEDIOS PONDERADOS

- Nivel de tiempo  $\theta$  ( n+1 ) y  $(1-\theta)$  ( n ) en el LIE

- Incondicionalmente estable si  $1/2 \leq \theta \leq 1$

\* LIE LADO IZQUIERDO DE LA ECUACION

- Condicionalmente estable si  $0 \leq \theta \leq 1/2$

5.- DUFORT - FRANKEL

- Tres niveles de tiempo  $(n-1)$ ,  $(n)$ ,  $(n+1)$

- Explícito en  $(n+1)$

- Puede ser inconsistente  $\therefore$  no es recomendable

6.- ADEP (PROCEDIMIENTO EXPLICITO DE DIRECCION ALTERNANTE)

versión de BARAKAT - CLARK

- Explícito

- Incondicionalmente estable

- Error  $O(\Delta x)^2 + O(\Delta y)^2 + O(\Delta t)^2$

PRIMER PASO

$$\frac{u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} =$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

si  $a = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$  y  $b = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2}$

$$a u_{i-1,j}^{n+1} - a u_{i,j}^{n+1} - a u_{i,j}^n + a u_{i+1,j}^n + b u_{i,j-1}^{n+1} - b u_{i,j}^{n+1} - b u_{i,j}^n -$$

$$b u_{i,j+1}^n = u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n$$

despejando

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{1-a-b}{1+a+b} u_{i,j}^n + \frac{a u_{i-1,j}^{n+1} + a u_{i+1,j}^n + b u_{i,j-1}^{n+1} + b u_{i,j+1}^n}{1+a+b}$$

Ahora, se barre la malla en el siguiente orden:

$$j = 1 ; i=1,2,3, \dots, Nx$$

$$j = 2 ; i=1,2,3, \dots, Nx$$

$$j = 3 ; i=1,2,3, \dots, Nx$$

·

$$j = Ny ; i=1,2,3, \dots, Nx$$

### SEGUNDO PASO

$$\frac{u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} =$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

$$a u_{i-1,j}^n - a u_{i,j}^n - a u_{i,j}^{n+1} + a u_{i+1,j}^{n+1} + b u_{i,j-1}^n - b u_{i,j}^n - b u_{i,j}^{n+1} + b u_{i,j+1}^{n+1}$$

$$u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n$$

despejando

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{1-a-b}{1+a+b} u_{i,j}^n + \frac{a u_{i-1,j}^n + a u_{i+1,j}^{n+1} + b u_{i,j-1}^n + b u_{i,j+1}^{n+1}}{1+a+b}$$

ahora, se barre la malla en el siguiente orden:

$$j = Ny ; i = Nx, Nx-1, Nx-2, \dots, 1$$

$$j = Ny-1 ; i = Nx, Nx-1, Nx-2, \dots, 1$$

$$j = Ny-2 ; i = Nx, Nx-1, Nx-2, \dots, 1$$

·

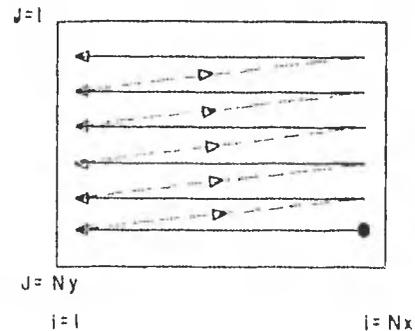
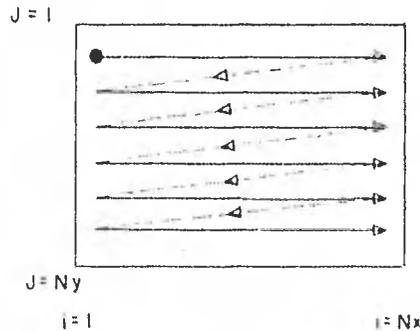
·

·

$$j = 1 ; i = Nx, Nx-1, Nx-2 \dots, 1$$

TERCER PASO

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{u_{i,j}^{n+1(1)} + u_{i,j}^{n+1(2)}}{2}$$



### 7.- ADIP (No iterativo)

(PROCEDIMIENTO IMPLICITO DE DIRECCION ALTERNANTE)

Peaceman y Rachford, Trans.AIME 1959.

PROPOSITO: Avanzar la solución del tiempo "n" al tiempo "n+1"

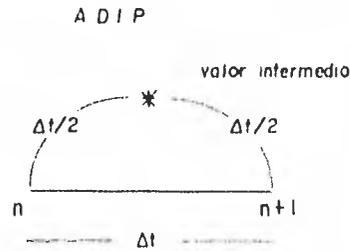
PRIMER PASO

Se consideran implícitas las incógnitas en la dirección "x" y explícitas las incógnitas en la dirección "y". Además en los términos  $q_{i,j}$ ,  $E \Delta t$ , se usa un intervalo de tiempo de  $\Delta t/2$ . (por ejemplo  $\Gamma_{i,j} / \Delta t/2$ ). En el primer paso se avanza la solución del nivel "n" al nivel "n\*".

$$D P_{i-1,j}^* + (E_x + E_t) P_{i,j}^* + F P_{i+1,j}^* = - (B P_{i,j-1}^n + E_y P_{i,j}^n + H P_{i,j+1}^n) + q_{i,j}^n$$

Para cada  $(i, j)$  se tiene una ecuación con tres incógnitas, por

lo tanto para poder resolver el sistema es necesario escribir  $N_x$  ecuaciones para toda "i" y una "j" dada. Las  $N_x$  ecuaciones con  $N_x$  incógnitas resultan en un sistema tridiagonal que se puede resolver eficientemente con el algoritmo de Thomas.

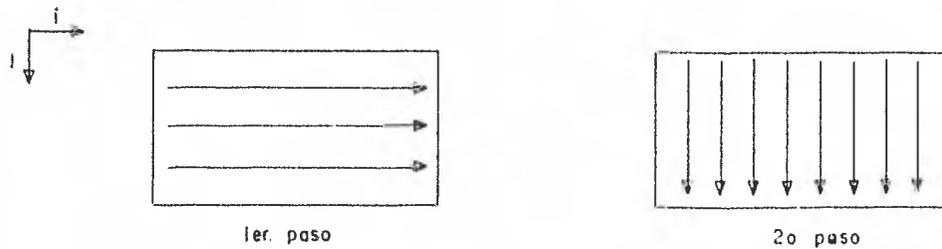


### SEGUNDO PASO

Ahora se consideran implícitas las incógnitas en la dirección "y" y explícitas las incógnitas en la dirección "x":

$$B P_{i,j-1}^{n+1} + (E_y + E_t) P_{i,j}^{n+1} + H P_{i,j+1}^{n+1} = - (D P_{i-1,j}^* + E_x P_{i,j}^* + F P_{i+1,j}^*) + q_{i,j}^n$$

Similarmente se analizan simultáneamente  $N_y$  ecuaciones con  $N_y$  incógnitas escribiendo las ecuaciones para toda "j" y una "i" dada. La solución se obtiene por medio del algoritmo de Thomas.



Comparativamente, para una malla de 10 x 20 el esquema regresivo genera 200 ecuaciones con 200 incógnitas, dando lugar a una estructura pentadiagonal. Por lo tanto, para avanzar la solución de "n" a "n+1" se necesita resolver este sistema. El esquema ADIP requiere resolver 10 ecuaciones veinte veces más 20 ecuaciones diez veces, todas ellas -

con estructura tridiagonal.

### MÉTODOS ITERATIVOS

OBJETIVO: Avanzar la solución de  $P_{i,j}^n$  a  $P_{i,j}^{n+1}$  por medio de iteraciones

$P_{i,j}^{(m)}$ , iterando hasta  $\left| P_{i,j}^{(m+1)} - P_{i,j}^{(m)} \right| < \epsilon \forall i,j$ . En general, los métodos iterativos requieren menor capacidad de almacenamiento que los métodos directos.

La ecuación base para los métodos iterativos se obtiene despejando  $P_{i,j}$ :

$$P_{i,j} = - \frac{1}{E_{i,j}} ( - q_{i,j} + B_{i,j} P_{i,j-1} + D_{i,j} P_{i-1,j} + F_{i,j} P_{i+1,j} + H_{i,j} P_{i,j+1} )$$

### 8.- ADIP ITERATIVO PARA FLUJO PERMANENTE (Peaceman-Rachford)

La ecuación  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + q = 0$  es un caso límite de  $\nabla^2 u + q =$

$\frac{\partial u}{\partial t}$  para tiempos muy grandes para los cuales se tiene que  $\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow 0$

#### PASO 1

$$\frac{u_{i-1,j}^{(m+1/2)} - 2u_{i,j}^{(m+1/2)} + u_{i+1,j}^{(m+1/2)}}{(x)} + \frac{u_{i,j-1}^{(m)} - 2u_{i,j}^{(m)} + u_{i,j+1}^{(m)}}{(y)} + q_{i,j}$$

$$= \alpha (u_{i,j}^{(m+1/2)} - u_{i,j}^{(m)})$$

PASO 2

$$\frac{U_{i-1,j}^{(m+1/2)} - 2U_{i,j}^{(m+1/2)} + U_{i+1,j}^{(m+1/2)}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i,j-1}^{(m+1)} - 2U_{i,j}^{(m+1)} + U_{i,j+1}^{(m+1)}}{(\Delta y)^2} +$$

$$q_{i,j} = \alpha_L (U_{i,j}^{(m+1)} - U_{i,j}^{(m+1/2)})$$

Los  $\alpha_L$  son PARAMETROS DE ITERACION. Su empleo acelera la convergencia del proceso. Normalmente se utilizan de 4 a 8 parámetros de iteración en forma cíclica. Por ejemplo, si se seleccionan cuatro parámetros  $\alpha_1 = 4$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $\alpha_4 = 0.5$  se usará  $\alpha_1$  para la primera iteración,  $\alpha_2$  para la segunda,  $\alpha_3$  para la tercera,  $\alpha_4$  para la cuarta,  $\alpha_1$  para la quinta,  $\alpha_2$  para la sexta, etc. El método converge para cualquier valor positivo de  $\alpha$ .

En todos los métodos iterativos hay que investigar si ya se alcanzó la convergencia después de cada iteración, por ejemplo

$$\epsilon \text{ Max}_{i,j} \left| U_{i,j}^{(m+1)} - U_{i,j}^{(m)} \right| < \epsilon ?$$

MÉTODOS ITERATIVOS PARA FLUJO TRANSITORIO

9.- MÉTODO DE JACOBI

$$P_{i,j}^{(m+1)} = - \frac{1}{E_{i,j}} \left[ (-q_{i,j}^n + B_{i,j} P_{i,j-1}^{(m)} + D_{i,j} P_{i-1,j}^{(m)} + F_{i,j} P_{i+1,j}^{(m)} + H_{i,j} P_{i,j+1}^{(m)}) \right]$$

Este método es muy lento y por lo tanto no es recomendable utilizarlo

10.- METODO DE GAUSS-SEIDEL

$$P_{i,j}^{n+1(m+1)} = - \frac{1}{E_{i,j}^n} \left( -q_{i,j}^n + B_{i,j}^{n+1(m+1)} P_{i,j-1}^{n+1(m)} + D_{i,j}^{n+1(m+1)} P_{i-1,j}^{n+1(m)} + F_{i,j}^{n+1(m)} P_{i+1,j}^{n+1(m)} + H_{i,j}^{n+1(m)} P_{i,j+1}^{n+1(m)} \right)$$

11.- PSOR (SOBRERELAJACION PUNTUAL SUCESIVA)

$$P_{i,j}^{n+1(m+1)} = (1-\omega) P_{i,j}^{n+1(m)} + \omega \left\{ - \frac{1}{E_{i,j}^n} \left( -q_{i,j}^n + B_{i,j}^{n+1(m+1)} P_{i,j-1}^{n+1(m)} + D_{i,j}^{n+1(m+1)} P_{i-1,j}^{n+1(m)} + F_{i,j}^{n+1(m)} P_{i+1,j}^{n+1(m)} + H_{i,j}^{n+1(m)} P_{i,j+1}^{n+1(m)} \right) \right\}$$

12.- LSR (RELAJACION LINEAL SUCESIVA) :  $\omega = 1$

En este método se tienen dos opciones, considerar la dirección "x" implícita, o considerar la dirección "y" implícita. Para la primera iteración se tiene lo siguiente:

$$P_{i,j}^{n+1(m+1)} = - \frac{1}{E_{i,j}^n} \left( -q_{i,j}^n + B_{i,j}^{n+1(m)} P_{i,j-1}^{n+1(m)} + D_{i,j}^{n+1(m+1)} P_{i-1,j}^{n+1(m)} + F_{i,j}^{n+1(m+1)} P_{i+1,j}^{n+1(m)} + H_{i,j}^{n+1(m)} P_{i,j+1}^{n+1(m)} \right)$$

despejando:

$$D_{i,j}^{n+1(m+1)} P_{i-1,j}^{n+1(m)} + E_{i,j}^{n+1(m+1)} P_{i,j}^{n+1(m)} + F_{i,j}^{n+1(m+1)} P_{i+1,j}^{n+1(m)} =$$

----- incógnitas -----

$$- \frac{1}{J} ( - q_{i,j} + B_{i,j} P_{i,j-1}^{n+1(m)} + H_{i,j} P_{i,j+1}^{n+1(m)} )$$

----- términos conocidos -----

Por lo tanto se tiene que para:

$j= 1$  se generan  $N_x$  ecuaciones

$j= 2$  " " " "

$j= 3$  " " " "

$j= 4$  " " " "

· · · · ·

· · · · ·

$j= N_y$  se generan  $N_x$  ecuaciones

Estos sistemas de ecuaciones se deben resolver  $M$  veces hasta que se obtiene convergencia.

### 13.- LSOR (SOBRERELAJACION LINEAL SUCESIVA)

Nuevamente, para este método se tienen las dos opciones del LSR. Ilustrando ahora la forma de las ecuaciones al considerar la dirección "y" implícita.

$$P_{i,j}^{n+1(m+1)} = (1 - \omega) P_{i,j}^{n+1(m)} +$$

$$\omega \left\{ - \frac{1}{E_{i,j}^n} ( - q_{i,j} + B_{i,j} P_{i,j-1}^{n+1(m+1)} + D_{i,j} P_{i-1,j}^{n+1(m)} + F_{i,j} P_{i+1,j}^{n+1(m)} + H_{i,j} P_{i,j+1}^{n+1(m+1)} ) \right\}$$

Despejando:

$$\frac{B_{i,j}}{1} P_{i,j-1}^{n+1(m+1)} + E_{i,j} P_{i,j}^{n+1(m+1)} + H_{i,j} P_{i,j+1}^{n+1(m+1)} =$$

términos desconocidos o incógnitas

$$(1-\omega) P_{i,j}^{n+1(m)} + \frac{1}{E_{i,j}} \left[ -a_{i,j}^{(n)} + D_{i,j} P_{i-1,j}^{n+1(m)} + F_{i,j} P_{i+1,j}^{n+1(m)} \right]$$

↑  
-términos conocidos

En este caso, se tiene que para:

$i=1$  se generan  $N_y$  ecuaciones

$i=2$  se generan  $N_y$  ecuaciones

$i=3$  " " "

·  
·  
·

$i=N_x$  se generan  $N_y$  ecuaciones

Estos sistemas de ecuaciones se deben resolver  $M$  veces hasta obtener convergencia.

Para obtener  $\omega$  óptima en LSOR se procede en forma similar al caso de PSOR, por ejemplo se efectúan varias iteraciones con  $\omega = 1$  (LSOR) obteniéndose el radio espectral ( $\rho$ ). Con este valor se calcula  $\omega_{opt}$ .

#### ADIP (iterativo) PROCEDIMIENTO IMPLICITO DE DIRECCION ALTERNANTE

Peaceman-Rachford, Douglas-Rachford (no usarlo ni en problemas en tres dimensiones ni en flujo multifásico)

#### PRIMER PASO

Considerando implícitas las incógnitas en la dirección "x" y explícitas las incógnitas en la dirección "y":

$$D P_{i-1,j}^{(*)} + (Ex+Et - hk\Delta T) P_{i,j}^{(*)} + F P_{i+1,j}^{(*)} = q_{i,j} - \left[ B P_{i,j-1}^{(m)} + (Ey + hk\Delta T) P_{i,j}^{(m)} + HP_{i,j+1}^{(m)} \right]$$

### SEGUNDO PASO

Considerando ahora implícitas las incógnitas en la dirección "y" y explícitas las incógnitas en la dirección "x":

$$B P_{i,j-1}^{(m+1)} + (Ey+Et - hk\Delta T) P_{i,j}^{(m+1)} + H P_{i,j+1}^{(m+1)} = q_{i,j} - \left[ D P_{i-1,j}^{(*)} + (Ex + hk\Delta T) P_{i,j}^{(*)} + F P_{i+1,j}^{(*)} \right]$$

PEACEMAN-RACHFORD

$$hk\Delta T P_{i,j}^{(m)} + F P_{i+1,j}^{(*)} = q_{i,j} - \left[ D P_{i-1,j}^{(*)} + Ex P_{i,j}^{(*)} + H P_{i,j+1}^{(m+1)} \right]$$

DOUGLAS-RACHFORD

Nótese que la única diferencia entre los dos esquemas iterativos es que P-R le suma al LDE:  $hk\Delta T (P_{i,j}^{(m+1)} - P_{i,j}^{(*)})$  mientras que D-R le suma al LDE:  $hk\Delta T (P_{i,j}^{(m+1)} - P_{i,j}^{(m)})$  en el segundo paso de la iteración.

El procedimiento D-R en 3 dimensiones es similar usando niveles de iteración,  $(*)$ ,  $(**)$  y  $(m+1)$  y sumando  $hk\Delta T (P_{m+1}^{(**)}) - P_{m+1}^{(m)}$  al LDE respectivamente.

### 5.9 CONSISTENCIA, CONVERGENCIA, Y ESTABILIDAD.

En esta sección se verán formas de analizar las expansiones en diferencias finitas y determinar que tan representativas son para las

ecuaciones diferenciales parciales originales, así como bajo que condiciones el esquema propuesto es estable.

Se dice que una ecuación en diferencias finitas es **CONSISTENTE O COMPATIBLE** si tiende a ser idéntico a la ecuación diferencial parcial original a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Se dice que una ecuación en diferencias finitas es **CONVERGENTE** si la solución exacta a las ecuaciones en diferencias ( $u$ ) tiende a la solución exacta a las ecuaciones diferenciales ( $u$ ) para todo valor de  $x$  a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Se dice que un sistema de ecuaciones en diferencias finitas es **ESTABLE** si un error en la solución (introducido por cualquier forma) tiende a desvanecerse a medida que avanza la solución y si los errores de truncamiento en las operaciones aritméticas no se acumulan con el tiempo.

#### CONSISTENCIA O COMPATIBILIDAD

El análisis de consistencia de un esquema en diferencias finitas se lleva a cabo en una forma similar a la desarrollada para analizar el término del error, es decir, se expanden los términos en función de series de Taylor y se analiza el comportamiento de la expresión resultante a medida que  $\Delta x$  y  $\Delta t$  tienden a cero.

Ejemplo: Analizar la consistencia del esquema de Dufort-Frankel.

ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

ecuación en diferencias finitas:

$$\frac{2\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \left[ u_{i+1}^n - u_i^{n+1} - u_i^n + u_{i-1}^n \right] = u_i^{n+1} - u_i^n$$

expandiendo en series de Taylor:

$$\begin{aligned} & \frac{2\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \left[ u_i^n + (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \right. \\ & - u_i^n - (\Delta t) \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^n - \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{(\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \dots \\ & - u_i^n + (\Delta t) \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^n - \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{(\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \dots \\ & \left. + u_i^n - (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \dots \right] = \\ & = u_i^n + (\Delta t) \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \dots \\ & - u_i^n + (\Delta t) \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^n - \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{(\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \dots \end{aligned}$$

simplificando términos, la ecuación se reduce a:

$$\begin{aligned} & \frac{2\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \left[ (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^n - (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_i^n + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_i^n + \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i^n - \right. \\ & \left. \frac{(\Delta t)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \Big|_i^n \right] = 2 (\Delta t) \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^n + \frac{(\Delta t)^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_i^n \end{aligned}$$

dividiendo por  $2\alpha\Delta t$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{(\Delta t)^4}{12(\Delta x)^2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{6\alpha} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} + \left[ \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{(\Delta t)^2}{6\alpha} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \left( \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{12} \left( \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)} \right)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right] = 0$$

Ahora la pregunta a contestar para analizar la consistencia de esta última ecuación es si tiende a la ecuación diferencial parcial a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$  y que  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Como se puede comprobar el primero, segundo y cuarto término del paréntesis tienden a cero a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$  (el término  $\frac{(\Delta t)^2}{\Delta x}$  probablemente se acerca a cero) pero el cociente  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  que aparece en el tercer término puede ser un número finito, digamos  $\beta$  por lo tanto el esquema Dufort-Frankel representa mas bien una ecuación del tipo de la ecuación de onda, por ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Una vez asegurada la consistencia de un esquema iterativo y para poder tener una aproximación válida, ésta debe arrojar resultados que estén más o menos cerca de la solución del problema original. Esta consideración se puede analizar en dos formas diferentes:

Primero se puede considerar un punto fijo  $x_i^n$  y preguntar acerca de la diferencia entre  $u_i^n$  y  $U_i^n$  a medida que la malla (espacio-tiempo) se -

hace cada vez más fina. Se espera que en el límite, a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ , el error tienda también a cero. (CONVERGENCIA)

El segundo aspecto del comportamiento de la aproximación en diferencias finitas puede estudiarse manteniendo fijas  $\Delta x$  y  $\Delta t$  y examinando que pasa a medida que la solución se avanza en tiempo. Se espera - en este caso que los errores no se amplifiquen a tal grado que los resultados obtenidos no sean válidos (ESTABILIDAD).

#### CONVERGENCIA - ERROR DE TRUNCAMIENTO

En general, entre menor sea el error de truncamiento, la convergencia de la ecuación en diferencias a la ecuación diferencial es más rápida. Por esto, una forma de analizar la convergencia de un esquema en diferencias finitas es analizando su error de truncamiento.

Error de truncamiento es el error incurrido al reemplazar la ecuación diferencial por una ecuación en diferencias finitas. Debido a este error, la solución exacta a la ecuación en diferencias (sin error de redondeo) es diferente a la solución de la ecuación diferencial -- parcial correspondiente.

El término "error de truncamiento" viene del hecho de que al reemplazar derivadas por cocientes de diferencias es equivalente a utilizar series de Taylor "truncadas".

El error de truncamiento local de una aproximación en diferencias finitas se define como:

$$E_L = L_D U_i^n - (Lu)_i^n$$

en donde:

$E_L$  = error de truncamiento local

$L_D$  = forma en diferencias finitas

$Lu =$  forma diferencial

Por ejemplo: Para el esquema en diferencias progresivas:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$L_D U_i^n = \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}$$

$$E_L = \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{ó} \quad E_L = O(\Delta x)^2 + O(\Delta t)$$

Si se tuviesen las soluciones exactas se podría definir el ERROR-DE TRUNCAMIENTO GLOBAL mediante:

$$E_G = \max_{i,n} \left| U_i^n - u(x_i, t_n) \right|$$

En la mayoría de los casos, no se tiene la solución exacta  $u(x_i, t_n)$  por lo tanto el problema consiste en tratar de encontrar los límites-al error global. Para ecuaciones diferenciales simples normalmente se pueden encontrar pero, a medida que las ecuaciones se hacen más complejas, la estimación de estos límites se hace bastante más difícil. Afortunadamente se ha encontrado que los errores globales muestran el mismo orden de dependencia con respecto a los tamaños de malla (espacio-tiempo) que los errores locales. De aquí que los ERRORES LOCALES - DE TRUNCAMIENTO que son mucho más fáciles de estimar se puedan usar - por lo menos como guía para el orden de CONVERGENCIA de la solución a la ecuación en diferencias finitas a la solución de la ecuación diferencial a medida que el tamaño de la malla tiende a cero.

En la práctica, para problemas que tengan algún grado de dificultad la estimación del error se obtiene resolviendo la ecuación en diferencias utilizando diferentes tamaños de malla variando tanto los incrementos espaciales ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ) como el incremento temporal ( $\Delta t$ ) para encontrar sus efectos en la solución.

En muchas ocasiones, valores prácticos de  $\Delta x$  y  $\Delta t$  (para los cuales el tiempo de computación no se hace excesivo), son tan grandes -- que el error no parece disminuir tan rápidamente como lo predicen las fórmulas para el error local de truncamiento. La razón de esto es que las expresiones que se obtienen para el orden del error describen el comportamiento asintótico a medida que  $\Delta x$  y  $\Delta t$  tienden a cero y no dicen mucho acerca del comportamiento del error para tamaños de malla relativamente grandes.

Por estas razones, normalmente se tienen que considerar como estimaciones empíricas del error obtenidas corriendo el mismo problema -- con diferentes tamaños de mallas. Una vez encontrado el tamaño de malla que equilibra el costo de usar un tamaño pequeño, contra el riesgo asociado al utilizar una malla grande y aumentar el error, se corren los siguientes casos con dicho tamaño.

#### ESTABILIDAD

Un esquema en diferencias finitas es ESTABLE si el efecto de un error (o perturbación) hecha en alguna de las etapas de cómputo no se propaga en errores a medida que la solución se avanza en etapas posteriores de cálculo.

Para el análisis de estabilidad no importa cual es la fuente del error por ejemplo, error de truncamiento, error de redondeo o alguna-

otra causa.

En general hay tres métodos para analizar la estabilidad de un esquema en diferencias finitas:

i) Método de Karplus

ii) Análisis Armónico (criterio de Vonlleumann)

iii) Método Matricial.

Los dos primeros métodos toman en consideración la ecuación en diferencias solamente sin incluir ni las condiciones iniciales y de frontera ni los términos fuente.

El método matricial es el más general ya que considera la ecuación las condiciones iniciales y de frontera, y también los términos fuente.

C O N T E N I D O

CAPITULO 6

CONSIDERACIONES GENERALES

## C A P I T U L O 6

### CONSIDERACIONES GENERALES

- 1.- La simulación de yacimientos una herramienta útil, que aunada a otros procesos de predicción permite obtener mejores resultados en el estudio de yacimientos petroleros.
- 2.- La efectividad de una simulación está en función de la representatividad y de la calidad de la información que se proporcione.
- 3.- Los modelos matemáticos permiten simular el comportamiento de un yacimiento, bajo diferentes alternativas de producción, a fin de seleccionar la forma óptima de desarrollar y explotar un yacimiento de aceite y/o gas.
- 4.- En ocasiones es conveniente desarrollar un modelo matemático, de acuerdo a las características del yacimiento por estudiar.
- 5.- La predicción mediante una simulación, solo puede ser confiable cuando se cuente con la caracterización precisa del yacimiento y, además cuando el modelo permita simular los nuevos mecanismos de desplazamiento así como sus fenómenos asociados que posteriormente se presentarán.
- 6.- Ningún modelo simula los fenómenos de convención, supersaturación de aceite y el de inversión de presión asociados al mecanismo de la segregación gravitacional.
- 7.- Un modelo matemático, una vez ajustado, es el mejor recurso para predecir el comportamiento de un yacimiento.

8.- Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores se infiere que la aplicación de un modelo simplificado, con un buen criterio ingenieril, puede tener ventaja sobre un modelo sofisticado de simulación.

NOMENCLATURA

<u>SIMBOLOS</u>	<u>UNIDADES FACTIBLES DE USARSE</u>
A : Area	( pies <sup>2</sup> )
B <sub>g</sub> : Factor de volúmen del gas (B <sub>g</sub> <1)	pies <sub>g</sub> <sup>3</sup> @c.y
	<hr/> pies <sub>g</sub> <sup>3</sup> @c.s
B <sub>o</sub> : Factor de volúmen del aceite (B <sub>o</sub> >1)	pies <sub>o</sub> <sup>3</sup> @c.y + gd.@c.y
	<hr/> pies <sub>o</sub> <sup>3</sup> @c.s
B <sub>w</sub> : Factor de volúmen del agua.	pies <sub>w</sub> <sup>3</sup> @c.y + gd.@c.y
	<hr/> pies <sub>w</sub> <sup>3</sup> @c.s
c : Compresibilidad	( lb./pg <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>
c <sub>f</sub> : Compresibilidad de la formación	( lb./pg <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>
c <sub>g</sub> : Compresibilidad del gas	( lb./pg <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>
c <sub>o</sub> : Compresibilidad del aceite	( lb./pg <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>
c <sub>w</sub> : Compresibilidad del agua	( lb./pg <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>
D : Profundidad	(pies)
E <sub>G</sub> : Error de truncamiento global	
E <sub>L</sub> : Error de truncamiento local	
e <sub>t</sub> : Término del error	
f(x <sub>i</sub> ) : Función evaluada en cada punto	

$g$	: Aceleración de la gravedad.	(pies/seg. <sup>2</sup> )
$g_c$	: Constante gravitacional @ condiciones normales y es igual a 32.2 pies/seg. <sup>2</sup>	(pies/seg. <sup>2</sup> )
$h$	: Altura.	(pies)
$I$	: Potencial de un gas real.	
$K$	: Permeabilidad absoluta.	(Darcy)
$k_g$	: Permeabilidad efectiva al gas.	(Darcy)
$k_o$	: Permeabilidad efectiva al aceite.	(Darcy)
$k_w$	: Permeabilidad efectiva al agua.	(Darcy)
$k_{r_g}$	: Permeabilidad relativa al gas.	(Darcy)
$k_{r_o}$	: Permeabilidad relativa al aceite.	(Darcy)
$k_{r_w}$	: Permeabilidad relativa al agua.	(Darcy)
$L$	: Longitud.	(pies)
$M$	: Peso molecular <sup>+</sup>	(lb/mole-lb)
$m$	: Masa.	(lb <sub>m</sub> )
$N_x$	: Número de bloques en la dirección "x"	
$N_y$	: Número de bloques en la dirección "y"	
$N_z$	: Número de bloques en la dirección "z"	
$n$	: Número de moles ( $n = m/M$ )	
$\vec{n}$	: Vector perpendicular a todas las superficies equipotenciales.	
$O$	: Error de truncamiento.	
$p$	: Presión.	(lb./pg. <sup>2</sup> )
$p_c$	: Presión capilar.	(lb./pg. <sup>2</sup> )
$p_{c_{o-g}}$	: Presión capilar entre las interfases gas-aceite.	(lb./pg. <sup>2</sup> )

+ En algunos capítulos se hace,  $M =$  masa, solamente para fines de análisis dimensional.

$p_{c_{w-o}}$	: Presión capilar entre las interfases agua-aceite.	(lb./pg <sup>2</sup> )
$\bar{q}_{vol.}$	: Ritmo de inyección y/o producción.	(bl.@c.s/dla.pies <sup>3</sup> )
$q$	: Gasto.	(bl./dla)
$R$	: Constante universal de los gases.	(lb-pg <sup>2</sup> /°R-mole-lb)
$R_s$	: Razón gas disuelto-aceite.	(pies <sup>3</sup> <sub>g</sub> /pies <sup>3</sup> <sub>o</sub> )
$S_f$	: Saturación de fluido en general.	(pies <sup>3</sup> <sub>f@c.y</sub> /pies <sup>3</sup> <sub>poros</sub> )
$S_g$	: Saturación de gas.	(pies <sup>3</sup> <sub>g@c.y</sub> /pies <sup>3</sup> <sub>poros</sub> )
$S_o$	: Saturación de aceite.	(pies <sup>3</sup> <sub>o@c.y</sub> /pies <sup>3</sup> <sub>poros</sub> )
$S_w$	: Saturación de agua.	(pies <sup>3</sup> <sub>w@c.y</sub> /pies <sup>3</sup> <sub>poros</sub> )
$S_{gr}$	: Saturación de gas residual.	(pies <sup>3</sup> <sub>g@c.y</sub> /pies <sup>3</sup> <sub>poros</sub> )
$S_{or}$	: Saturación de aceite residual.	(pies <sup>3</sup> <sub>o@c.y</sub> /pies <sup>3</sup> <sub>poros</sub> )
$S_{wr}$	: Saturación de agua residual.	(pies <sup>3</sup> <sub>w@c.y</sub> /pies <sup>3</sup> <sub>poros</sub> )
$S_{wi}$	: Saturación de agua intersticial.	(pies <sup>3</sup> <sub>w@c.y</sub> /pies <sup>3</sup> <sub>poros</sub> )
$T$	: Temperatura <sup>++</sup>	(°R)
$T$	: Transmisividad $T = \frac{A k}{\mu B \Delta x}$	(pies <sup>2</sup> mD/cp pies)
$t$	: Tiempo.	(días)
$u$	: Velocidad aparente.	(pies/seg.)
$v_{med.}$	: Velocidad media.	(pies/seg.)
$V_b$	: Volúmen bruto de roca.	(pies <sup>3</sup> )
$V$	: Volúmen.	(barriles)
$W$	: Término fuente o sumidero.	(Masa/volúmen de roca)
$Z$	: Factor de desviación de los gases reales.	
$\phi$	: Porosidad.	(pies <sup>3</sup> poros/pies <sup>3</sup> roca)
$\phi_e$	: Porosidad efectiva.	(pies <sup>3</sup> poros/pies <sup>3</sup> roca)
$\mu$	: Viscosidad.	(poises)
$\mu_g$	: Viscosidad del gas.	(poises)

<sup>++</sup> En algunos capítulos se hace,  $T =$  tiempo, solamente para fines de análisis dimensional.

$\nu_o$	: Viscosidad del aceite.	(poises)
$\nu_w$	: Viscosidad del agua.	(poises)
$\rho$	: Densidad.	(lb/pies <sup>3</sup> )
$\rho_g$	: Densidad del gas.	(lb/pies <sup>3</sup> )
$\rho_o$	: Densidad del aceite.	(lb/pies <sup>3</sup> )
$\rho_w$	: Densidad del agua.	(lb/pies <sup>3</sup> )
$\phi$	: Potencial de flujo.	(lb/pg <sup>2</sup> )
$w$	: Razón de convergencia.	
$\rho_e$	: Radio espectral de la matriz.	
@c.s	: Medido a condiciones estandar o superficiales.	
@c.y	: Medido a condiciones de yacimiento.	

#### SUBINDICES

$i$  : Irreductible.

$g$  : Gas.

$o$  : Aceite, inicial.

$w$  : Agua.

$x, y, z$  Direcciones ortogonales en los ejes  $x, y, z$

$i, j, k$  Direcciones ortogonales en los ejes  $x, y, z$

#### TERMINOS USADOS EN TABLAS

$A$  . Coeficientes dados en la tabla.

$m$  . Número de puntos usados en la aproximación menos uno.

$n$  . Número del punto en el que se evalua la derivada.

$L_D$  . Forma en diferencias finitas.

$L_U$  . Forma diferencial.

## FACTORES DE CONVERSIÓN

### Longitud

$$1 \text{ pg} = 2.54 \text{ cm.}$$

$$1 \text{ pie} = 30.48 \text{ cm.}$$

### Volúmen

$$1 \text{ BL} = 159 \text{ lt} = 42 \text{ gal}$$

$$1 \text{ BL} = 5.615 \text{ pies}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 6.29 \text{ BL} = 35.314 \text{ pies}^3$$

### Presión

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm. Hg}$$

$$1 \text{ atm} = 14.7 \text{ lb/pg}^2 \text{ abs.}$$

## CONSTANTES

Condiciones superficiales (c.s); 1 atm y 20°C ó 14.7 lb/pg<sup>2</sup> y 60°F

$$\text{TEMPERATURA ABSOLUTA } ^\circ\text{K} = ^\circ\text{C} + 273$$

$$^\circ\text{R} = ^\circ\text{F} + 460$$

$$\text{Peso molecular medio del aire seco} = 28.97$$

$$\text{Volúmen de 1 mole-gr de gas @c.s} = 22.40 \text{ litros}$$

$$\text{Volúmen de 1 mole-lb de gas @c.s} = 379.40 \text{ pies}^3$$

$$\text{Peso específico del agua @c.s} = 1 \text{ gr/cm}^3 = 62.4 \text{ lb/pie}^3$$

$$\text{Peso específico del gas @c.s.} = 0.0764 \text{ (lb/pie}^3\text{)}$$

$$R = 82.05 \text{ (atm-cm)} / (^\circ\text{K-mole-gr})$$

$$R = 10.73 \text{ (lb/pg}^2\text{-pie}^3\text{)} / (^\circ\text{R-mole-lb})$$

#### BIBLIOGRAFIA

- 1 BASHBUSH B. José L. "Cátedra de Simulación Matemática de Yacimientos".  
Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. México, D. F.
- 2 CRICHLON Henry B. "Modern Reservoir Engineering: A simulation Approach".  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- 3 Scientific Software Corporation "Reservoir Simulation Manual", Denver  
Colorado. 1975.
- 4 VAN POOLLEN H. K., Bigel H.C., Jargon J.R. "Reservoir Modeling", The  
Petroleum Publishing Company, Tulsa Oklahoma, 1971.
- 5 THOMAS G. W. "Principles of Reservoir Simulation", Englewood Colorado,  
1981.
- 6 COATS K.H. "Use and Misuse of Reservoir Simulation Models" SPE-AIME.
- 7 BASHBUSH B. José L. "Notas del Curso Internacional de Simulación de Ya-  
cimientos" IMP - Julio 1980.
- 8 DOMINGUEZ V. G. "Notas del Curso de Simulación de Yacimientos" IMP- Mar-  
zo 1982.
- 9 GARAICOCHEA P. Francisco "Comportamiento Primario de Yacimientos" Facul-  
tad de Ingeniería, U.N.A.M.