

24: 192



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**INTERACCION  
SUELO - VIGA  
FLOTANTE**

**T E S I S**

*Que para obtener el Titulo de  
INGENIERO CIVIL*

*presenta:*

**IRENE VAZQUEZ MANRIQUEZ**

México, D. F.

1986



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

	Pag.
I.- INTRODUCCION . . . . .	1
II.- ANTECEDENTES . . . . .	7
-Método del Dr. Leonardo Zeevaert . . . . .	7
-Método del Ing. José Luis Sánchez Martínez . . . . .	10
III.- ANALISIS ESTRUCTURAL . . . . .	17
- Barra con apoyos continuos . . . . .	20
- Barra con un apoyo continuo y otro articulado . . . . .	25
- Barra en Cantiliver . . . . .	30
- Desplazamiento vertical en la cimentación a la mitad del entre-eje . . . . .	34
- Matriz de rigideces de toda la estructura . . . . .	35
IV.- ANALISIS DE DEFORMACIONES DEL SUELO . . . . .	37
V.- INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA . . . . .	43
- Método del M.I. Agustín Deméneghi Colina. . . . .	43
- Resumen de pasos. . . . .	45
VI.- EJEMPLO DE APLICACION . . . . .	48
VII.- CONCLUSIONES . . . . .	65
BIBLIOGRAFIA . . . . .	67

**"INTERACCION SUELO-VIGA FLOTANTE"**

## INTRODUCCION

Al analizar estructuras que se encuentran sobre suelos compresibles, existe un problema relativamente complejo, ya que por un lado se debe de tomar en cuenta la rigidez de la estructura y por otro la rigidez del propio suelo. En general, se considera por separado al suelo y a la estructura y no se toma en cuenta la interacción real que existe entre ellas.

Para ilustrar lo anterior, se hacen algunas consideraciones sobre la distribución de asentamientos y de esfuerzos en algunos casos sencillos (Juárez Baidillo y Rico 1976).

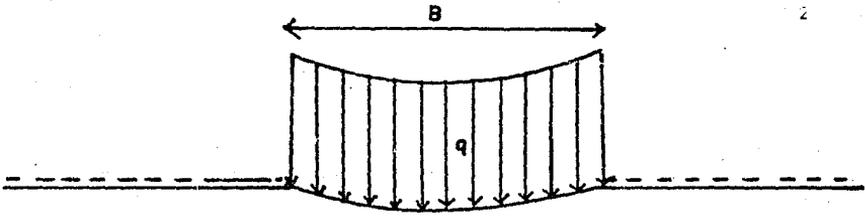
El caso de una área uniformemente cargada y totalmente flexible; debido a su flexibilidad, las presiones que el área cargada transmite al suelo serán idénticas a la presión uniforme sobre el área. Por otra parte, el asentamiento no será uniforme, sino que tendrá un valor máximo al centro del área cargada y menor en la periferia, adoptando una ley similar a la que se muestra en la fig. 1.a (si es que el medio cargado se supone linealmente elástico).

En la práctica, el asentamiento inmediato debido exclusivamente a cambio de forma (es decir, excluyendo el asentamiento por consolidación) de áreas flexibles con carga uniforme, apoyadas en arcillas saturadas, adopta un perfil similar al mostrado en la fig. 1. a. 1.

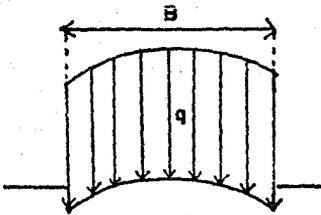
En cambio, cuando el área flexible se apoya en arenas o gravas el perfil se parece al de la fig. 1.a.2., ya que los materiales gruesos poseen la propiedad de que su rigidez aumenta con el confinamiento, el cual obviamente será máximo en la zona que está bajo el centro del área cargada.

Ahora si la carga se transmite al suelo a través de una placa infinitamente rígida. En este caso es obvio que, debido a su rigidez, la placa se asentará uniformemente, por lo que la presión de contacto entre placa y medio en general no podrá ser uniforme.

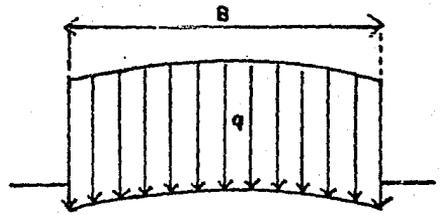
Comparando este caso con el de la fig. 1.a, es fácil ver que en el medio homogéneo y elástico la presión es mínima al centro y máxima en las orillas, puesto que para llegar al asentamiento uniforme se deberá disminuir la tendencia al -



1) Sobre arcilla saturada



Ancho pequeño



Ancho grande

2) Sobre suelos friccionantes

Fig 1.a PERFIL DEL ASENTAMIENTO BAJO UN AREA CARGADA SOBRE LA SUPERFICIE DE UN MEDIO SEMI-INFINITO.

asentamiento en la parte central (por medio de una disminución de presión) y aumentar dicha tendencia en las orillas (aumentando la presión). Un razonamiento análogo para el caso del medio cuya rigidez aumenta con el confinamiento, conduce a una distribución en la cual la presión es máxima bajo el centro del área cargada y mucho menor bajo la periferia. En la fig. 1.b se muestran ambas distribuciones.

El caso de la fig. 1.b.1 se parece a la distribución de presiones que se presenta en una arcilla saturada en condiciones iniciales. Teóricamente la presión es infinita en la periferia de la placa y es igual a la mitad de la presión media bajo el centro de la misma, es evidente que la primera condición no se puede satisfacer, ya que el valor de la presión en la periferia estará limitado a su máximo, que dependerá de la resistencia del material.

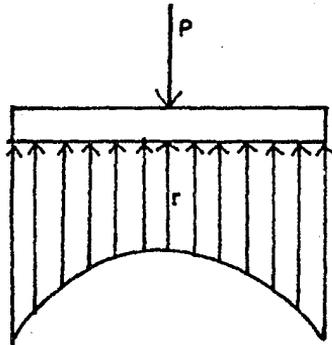
En la fig. 1.b.2 está representada aproximadamente la distribución real de presiones bajo una placa rígida colocada sobre arena o grava.

De los casos que se mencionaron anteriormente se observa que los diagramas de reacción del terreno y de asentamiento dependen de la rigidez de la placa y de las características de compresibilidad del suelo.

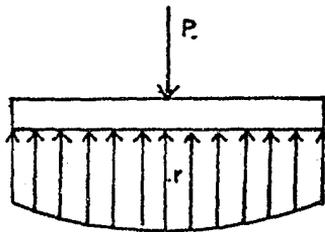
Es importante tomar en cuenta la rigidez de la estructura al hacer el análisis de su cimentación sobre todo para determinar de una manera más realista los asentamientos diferenciales y los elementos mecánicos sobre la cimentación.

El nombre de Vigaflotante proviene de considerar la siguiente hipótesis: un edificio puede ser simulado como una viga con características de carga y rigidez iguales a las de éste, y que reposa libremente sobre el suelo de tal forma que cualquier punto que se localice en la superficie de la cimentación sirve como apoyo para sostener la viga.

El procedimiento tratado en esta tesis fue elaborado por el M.I. Agustín Deméneghi Colina. Pretende ser lo más sencillo y práctico posible; es un procedimiento aplicable a estructuras que se encuentran apoyadas en suelos de mediana a alta compresibilidad. El problema en sí radica en determinar los hundimientos totales y diferenciales, así como los elementos mecánicos que son producto de los hundimientos de la cimentación.



1) Medio homogéneo elástico



2) Medio cuya rigidez aumenta con el confinamiento.

FIG 1.b DISTRIBUCIONES DE PRESIONES BAJO UNA PLACA INFINITAMENTE RIGIDA,

Este procedimiento es una solución al problema de interacción suelo-estructura en el análisis y diseño de las cimentaciones.

En el capítulo II, se comentan métodos que consideran de manera conjunta a la estructura y al suelo; uno de los investigadores que ha profundizado en el estudio de este problema es el Dr. Leonardo Zeevaert. El método del Dr. Zeevaert (1973) tiene el inconveniente de que no se conoce a priori el módulo de reacción del suelo por lo que se hace necesario el uso de iteraciones.

Otro de los investigadores que ha estudiado este problema es el Ing. José Luis Sánchez Martínez. Su método consiste en un análisis de cimentaciones someras teniendo en cuenta la interacción suelo-estructura. Se plantea un método no iterativo que consiste en realizar el análisis conjunto suelo-estructura como un sistema estructural único, que se resuelve utilizando el método general de las rigideces.

En el capítulo tres se presenta la descripción de todo el análisis estructural (Deméneghi 1979). Se obtienen las ecuaciones para diferentes tipos de apoyos, por ejemplo: apoyos continuos, un apoyo continuo y otro articulado, una barra en cantiliver, los momentos de empotramiento para cada tipo de apoyo, los desplazamientos verticales en la cimentación a la mitad del entre-eje, con lo que se obtiene la matriz de rigideces de toda la estructura.

En el capítulo Cuatro se desarrolla la ecuación para calcular los desplazamientos verticales en función de las reacciones del terreno. Se hace un análisis de los asentamientos totales primarios, debido a una sobre carga (supuesto un proceso de consolidación unidimensional). Con lo que podemos obtener los valores de influencia obteniendo los desplazamientos en función de las reacciones del terreno  $r_i$ .

En el capítulo cinco se presenta la parte que corresponde a la compatibilidad de desplazamientos. En este capítulo podemos aplicar lo señalado en los anteriores dos capítulos.

Se menciona en forma general en que consiste el método del M. Ing. Agustín Deméneghi. También se proponen una serie de pasos para aplicar el método, a fin de que el lector tenga facilidad de seguirlo.

En el capítulo Seis, se presenta un ejemplo de aplicación, en el que, aplicando lo estudiado en los capítulos anteriores, se detalla paso a paso la solución de dicho ejemplo.

Por último, el capítulo Siete corresponde a las conclusiones que se obtuvieron de la aplicación de este procedimiento y del uso del mismo.

## CAPITULO II

ANTECEDENTES

En este capítulo se explican algunos métodos que han surgido para la Interacción Suelo-Estructura. Los métodos se han escogido en base a la sencillez de ellos y sus autores son:

Dr. Leonardo Zeevaert

M.I. Agustín Deméneghi Colina

Ing. José Luis Sánchez Martínez

A continuación se describen, de una manera general, los métodos del Dr. Zeevaert y del Ing. Sánchez Martínez. El método que propone el M.I. Deméneghi se describe en el capítulo V.

El Dr. Leonardo Zeevaert, propone el siguiente método (Zeevaert 1973).

Considérese una planta de cimentación, que se idealiza en un sistema de vigas cortas en un sentido y vigas longitudinales en el otro. Las vigas cortas tienen una rigidez mayor que las vigas longitudinales con relación a la compresibilidad del suelo. Es necesario que las vigas cortas tomen las reacciones y las cargas de las columnas, para lo cual se hará una hipótesis; se considera a las vigas longitudinales como un sistema estáticamente determinado, lo cual permite trabajar con áreas tributarias. Si -- los asentamientos diferenciales con esta hipótesis se cumplen, las vigas longitudinales no requieren de ninguna rigidez especial, excepto la necesaria para transmitir el contacto de presión entre la losa de cimentación y la reacción de las vigas.

Sin embargo, las vigas longitudinales pueden ser diseñadas con la rigidez necesaria para reducir los asentamientos diferenciales a valores permisibles o menores. En este caso, las vigas longitudinales, además de transmitir reacciones, son usadas para distribuir cargas desbalanceadas en las vigas cortas, estas cargas son requeridas para obtener continuidad en las reacciones del terreno. Por lo tanto, las vigas longitudinales pueden ser llamadas vigas para balancear cargas.

La superficie cargada se divide en bandas con área  $A_n$  en la dirección en la cual se encuentran las vigas cortas. Lo siguiente es determinar el asentamiento medio  $\delta'_{an}$  de cada banda del área  $A_n$ :

$$\delta'_{an} = \frac{\sum \delta_n a_n}{A_n}$$

Los valores  $\delta'_{an}$  se consideran como la primera aproximación para el desplazamiento vertical promedio de cada banda, correspondiente a la primera suposición de una reacción del terreno  $q'_{an}$ .

Una vez que los valores  $\delta'_{an}$  son conocidos, entonces puede ser calculada para cada banda la primera aproximación del módulo de reacción:

$$K'_{s} = \frac{q'_{an} A_n}{\delta'_{an}}$$

$\delta'_{an}$  - asentamiento medio

$q'_{an}$  - reacción del terreno

$A_n$  - Area

$K'_{s}$  - módulo de reacción

Usando los valores de  $K'_{s}$  y los de las columnas cargadas, para las bandas correspondientes, se calcula los desplazamientos verticales, considerando la rigidez de la estructura de cimentación en la dirección longitudinal, como si se tratara de una viga o una cimentación elástica; con esto se introduce en el cálculo la rigidez de la viga dada por "EI".

Con el resultado de esta primera aproximación podemos obtener los cortantes y momentos flexionantes de la cimentación y los desplazamientos verticales promedio ( $\delta''_{an}$ ), con los cuales se puede obtener los valores correspondientes corregidos de la reacción del terreno

$$q''_{an} = \frac{\delta''_{an} K'_{s}}{A_n}$$

$q''_{an}$  - valores corregidos de la reacción del terreno

$\delta''_{an}$  = desplazamientos verticales promedio

El cálculo de estos valores se pueden llevar a cabo por métodos numéricos o a través del establecimiento de la matriz correspondiente para obtener las reacciones desconocidas de cada banda.

Con el mejoramiento del promedio de las reacciones del terreno unitarias  $q'_{an}$  de cada banda tributaria, se efectúa un segundo análisis de asentamientos. Los parámetros de compresibilidad deben ser corregidos para el mejoramiento de los niveles de esfuerzo inducidos en el subsuelo.

El cálculo de asentamientos llevado a cabo dará un mejoramiento de los desplazamientos verticales promedio del subsuelo, bajo las bandas transversales; se define como  $\delta'''_{an}$  y a partir de ellos se calcula el módulo de cimentación para las bandas tributarias, por medio de la siguiente expresión:

$$K''_s = \frac{q''_{an} A}{\delta'''_{an}}$$

$\delta'''_{an}$  - desplazamientos verticales promedio del subsuelo, bajo las bandas transversales.

$K''_s$  - módulo de cimentación para las bandas tributarias.

Usando el valor de  $K''_s$  mejorado, se llevará a cabo un segundo ciclo de cálculos para determinar cortantes, momentos flexionantes, deflexiones y reacciones del subsuelo, como anteriormente se describió.

El procedimiento se repite hasta que el cambio en fuerzas cortantes y momentos flexionantes sea despreciable para fines prácticos. Esto es el procedimiento propuesto por el Dr. Zeevaert (1973).

La resolución del problema de la interacción suelo-estructura presenta dificultades para su aplicación práctica. En el método del Dr. Zeevaert (1973) hay necesidad de hacer iteraciones, tanto para el análisis estructural como para el cálculo de hundimientos, lo cual requiere de un gran número de operaciones.

El segundo método del Ing. José Luis Sánchez Martínez se describirá a continuación:

Se plantea un método no interactivo que consiste en realizar el análisis conjunto suelo-estructura como un sistema estructural único utilizando el método general de las rigideces.

Se establece primero la matriz de rigideces de la estructura a partir de cada uno de sus miembros; se plantea enseguida la matriz de rigideces -- del suelo, idealizado como una serie de soportes interdependientes, A -- partir de ambas matrices de rigideces se obtiene, sumándolas, la matriz total de rigideces del sistema.

Las expresiones generales que se usan son:

$$S_T = S_E + S_S$$

$S_E = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_i$  = matriz de rigideces de la estructura en función de sus "i" miembros.

$S_S$  = matriz de rigideces de suelo

Además:

$$D = S_T^{-1} A$$

A = vector de acciones

D = vector de desplazamientos desconocidos,

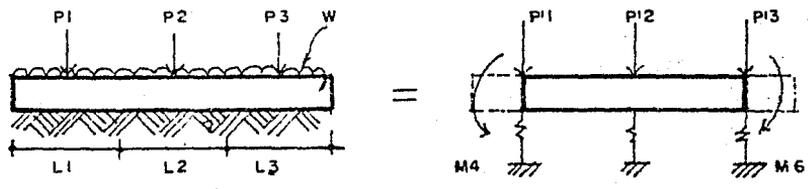
$S_T^{-1}$  = inversa de la matriz de rigideces del sistema

$A_i$  =  $S_i D$  = vector de acciones en el miembro i.

$F_s = S_s D$  = vector de fuerzas sobre cada uno de los resortes que idealizan al suelo.

Considerece aquí como desplazamientos desconocidos a los desplazamientos verticales y a los giros de los puntos de la estructura que se escojan.

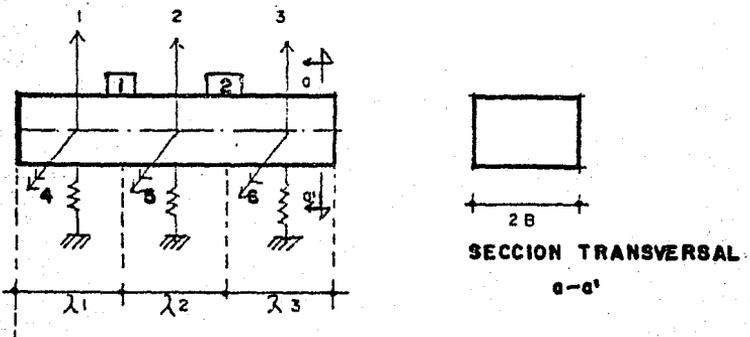
Ilustrando el método con un viga simple:



$$P'_1 = F_1 + WL_1$$

$$M = \frac{W}{2} \left( \frac{L_1}{2} \right)^2$$

Los desplazamientos desconocidos son tres movimientos verticales y tres giros



La matriz de rigideces de la estructura queda de  $6 \times 6$ , se obtendrá super-

poniéndolos a la matriz de cada miembro.

Por ejemplo el del miembro  $\boxed{1}$  y  $\boxed{2}$  queda:

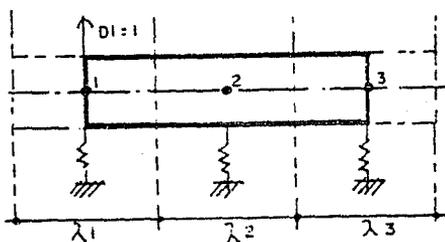
$$S_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{12EI_1}{L_1^3} & \frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_1}{L_1^2} & \frac{6EI_1}{L_1^2} \\ \frac{12EI_1}{L_1^3} & \frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & 0 & \frac{-6EI_1}{L_1^2} & \frac{-6EI_1}{L_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_1}{L_1^2} & \frac{-6EI_1}{L_1^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_1}{L_1} & \frac{2EI_1}{L_1} \\ \frac{6EI_1}{L_1^2} & \frac{-6EI_1}{L_1^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_1}{L_1} & \frac{2EI_1}{L_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{12EI_2}{L_2^3} & \frac{-12EI_2}{L_2^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{6EI_2}{L_2^2} \\ \frac{-12EI_2}{L_2^3} & \frac{12EI_2}{L_2^3} & 0 & 0 & \frac{-6EI_2}{L_2^2} & \frac{-6EI_2}{L_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{-6EI_2}{L_2^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_2}{L_2} & \frac{2EI_2}{L_2} \\ \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{-6EI_2}{L_2^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_2}{L_2} & \frac{4EI_2}{L_2} \end{array} \end{array}$$

$S_{ji}$  = Valor de la acción correspondiente al desplazamiento desconocido  $j$  producida por la aplicación de un desplazamiento  $i$  con valor unitario.

Entonces la matriz de rigideces de la estructura se obtiene.

$$S_E = S_1 + S_2$$

Se establece la matriz de rigideces del suelo. Se obtiene dando desplazamientos verticales con valor unitario a cada uno de los resortes y calculando las fuerzas que aparecen por este efecto en todos ellos.



Al dar el desplazamiento  $D_1 = 1$  aparecen fuerzas no solo en el resorte 1, sino también en todos los demás, ya que ellos deben considerarse ligados de alguna forma por pertenecer a un medio continuo. Lo mismo sucede al aplicar sucesivamente desplazamientos unitarios correspondientes a  $D_2$  y a  $D_3$ .

El conjunto de todas las fuerzas obtenidas constituye la matriz de rigideces del suelo.

$$S_s = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$S_{ij}$  - fuerza que aparece en  $j$  al aplicar un desplazamiento vertical unitario  $i$ .

El cálculo de estas fuerzas y por lo tanto el de la matriz de rigideces del suelo no puede obtenerse directamente, sin embargo, se puede llegar a ella en forma indirecta, teniendo en cuenta que la matriz de rigideces es la inversa de la de flexibilidades.

La matriz de flexibilidades del suelo puede calcularse fácilmente determinando los hundimientos del terreno debido a la aplicación de fuerzas unitarias.

El conjunto de desplazamientos producidos por esfuerzos unitarios aplicados sobre áreas preestablecidas (2Bλ) en la superficie del terreno constituye la matriz  $|A_{ji}|$

$$A_{ji} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}$$

$\delta_{ij}$  = hundimiento de  $j$  al actuar un esfuerzo  $q = 1$  en un área con centro en  $i$ .

$$q = 1 = \frac{P}{a}$$

$a$ : es el área en que se aplica el esfuerzo unitario.

La matriz de flexibilidades se obtiene aplicando cargas unitarias  $P = 1$ , esto es, esfuerzos  $q_i = \frac{1}{a_i}$

$a_i$  : es un área con centro en  $i$  en la que se aplica la carga unitaria.

Los desplazamientos producidos por las cargas unitarias se obtendrán dividiendo los de la matriz  $|A_{ij}|$  entre el área correspondiente, esto es:

$$F_s = \begin{bmatrix} \frac{\delta_{11}}{a_1} & \frac{\delta_{12}}{a_2} & \frac{\delta_{13}}{a_3} \\ \frac{\delta_{21}}{a_1} & \frac{\delta_{22}}{a_2} & \frac{\delta_{23}}{a_3} \\ \frac{\delta_{31}}{a_1} & \frac{\delta_{32}}{a_2} & \frac{\delta_{33}}{a_3} \end{bmatrix}$$

$F_s$  es la matriz de Flexibilidades del suelo y su inversa es la matriz de rigideces que se requiere.

$$S_s = F_s^{-1}$$

$$S_I = S_I + S_s$$

Las expresiones generales son:

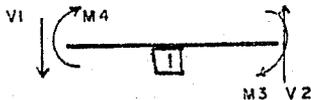
$$A = S_I D ; D = S_I^{-1} A$$

A: Vector de acciones

D: Vector de desplazamientos desconocidos.

Se plantea aplicando las acciones que en este caso serían, en general, fuerzas verticales y momentos aplicados en los nudos.

Los elementos mecánicos en los miembros se obtienen a partir de sus matrices de rigideces.



$$A_1 = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = S_1 D$$

$S_1$  = matriz de rigideces del miembro 1

D = vector de desplazamientos.

Las fuerzas en el suelo se obtienen utilizando la matriz de rigideces del suelo.

$$\begin{bmatrix} S_s & | & 0 \\ \hline 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_v \\ \hline D_m \end{Bmatrix} = S_s D_v$$

En sí se consiste el método del Ing. Sánchez Martínez, el cual propuso también un programa de computadora lo que lo hace más práctico.

En sí se han escogido los tres métodos que se consideran principales. Es necesario aclarar que en los tres se necesita la ayuda de una computadora, ya que son muchas las operaciones que se tienen que realizar.

CAPITULO III  
ANALISIS ESTRUCTURAL

Para realizar el análisis conjunto de la estructura y el suelo conviene emplear el método de rigideces para el análisis de la estructura. Como es conocido, al utilizar este procedimiento se obtiene la matriz de rigideces y se conoce el vector de cargas, pero se desconoce el vector de desplazamientos.

La determinación de la matriz de rigideces de la viga flotante se puede llevar a cabo empleando alguno de los varios métodos que se conocen actualmente en la Ingeniería Estructural. Conviene que este método pueda ser programado en una computadora.

Para poder comprender más fácilmente el análisis estructural, consideremos a la viga flotante sometida a un sistema de cargas, como se muestra en la figura 3.a.

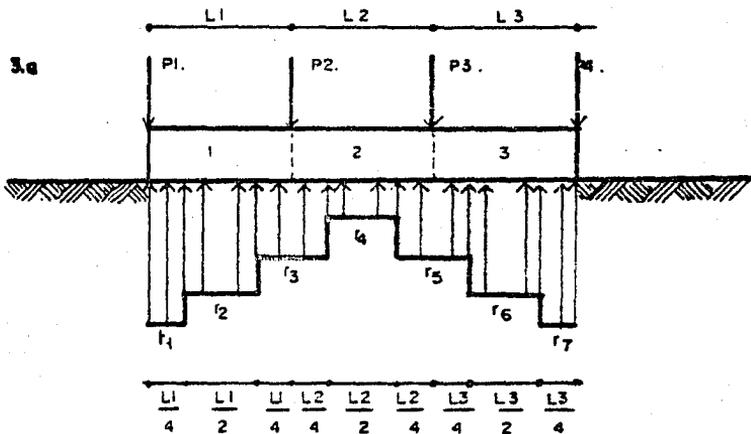


Fig. 3.a. Numeración de barras y reacciones del terreno.

Se ha colocado una reacción  $r$ , bajo cada carga puntual (si fuera el caso en que hubiera) y otra bajo la mitad de dos cargas puntuales, resultando tres reacciones bajo cada barra de la cimentación. Esto se considera -- para sencillez de cálculo. Si se desea tener un mayor número de reacciones  $r_i$ , se puede considerar cada barra de la cimentación como dos o más - barras, para fines de análisis.

Se utilizará el método de las rigideces para el análisis estructural. El análisis de una estructura por el método de las rigideces se logra superponiendo los resultados del análisis de una estructura equivalente, determinada cinemáticamente correspondientes a varias condiciones de carga, de tal manera que se satisfaga las condiciones de equilibrio estático y de compatibilidad de deformación requerida por la estructura original.

La estructura equivalente, determinada cinemáticamente se define restringiendo artificialmente los nudos de la estructura original que pueden desplazarse libremente; esta estructura equivalente se denomina estructura restringida.

Al aplicar el sistema de cargas original a la estructura restringida, se desarrollan en ellas reacciones que no existen en la estructura original; la solución se obtiene superponiendo:

- 1.- El resultado del análisis de estructura restringida sometida al sistema de cargas originales.
- 2.- Una combinación lineal de la estructura restringida sometida a la aplicación individual de las componentes del desplazamiento de los nudos, en tal forma que se eliminen las restricciones artificiales de los nudos.

Todo esto nos permite definir el sistema de ecuaciones, planteado matricialmente:

$$\{F\} = [K] \{d\} \dots\dots\dots(3.1)$$

donde:  $\{F\}$  = vector de cargas aplicadas en los nudos que se van a restringir.

$[K]$  = matriz de rigidez, que representa las acciones restringidas de la estructura determinada cinemáticamente, asociadas con las componentes desconocidas y no restringidas del desplazamiento de los nudos de la estructura original producidas por la aplicación independiente de una unidad de cada una de las componentes mencionadas del desplazamiento de nudos.

$\{d\} =$  Vector de componentes no restringidas del desplazamiento de la estructura.

La matriz de rigidez de una estructura representa las diversas componentes de las reacciones de los nudos que se requieran para mantener el equilibrio de una estructura restringida, al imponerle individualmente desplazamientos unitarios en la dirección de las componentes del desplazamiento de los nudos.

En este sistema de ecuaciones tenemos dos tipos de incógnitas, los desplazamientos (que pueden ser lineales y angulares) y las reacciones del terreno  $r_i$  (estas pueden aparecer en  $V_i^e$  o en  $M_i^e$ ).

Cada columna de la matriz de rigideces de la estructura corresponde al análisis de la estructura restringida sometida a la aplicación de una unidad de una componente específica del desplazamiento de los nudos.

Cada renglón de la matriz de rigideces de la estructura representa el valor que una acción restringida específica adquiere como consecuencia de la imposición individual de una unitaria de cada una de las componentes del desplazamiento de los nudos de la estructura determinada cinemáticamente o restringida.

Al someter a la estructura restringida a una componente unitaria de desplazamiento de un nudo, las acciones que se desarrollan en los extremos de cada elemento para conservar el equilibrio corresponden a los coeficientes de rigidez del elemento asociado con el tipo particular de desplazamiento del extremo.

Conocidas las acciones de un desplazamiento determinado que desarrolla en los extremos de los elementos, las reacciones de la estructura restringida puede calcularse mediante las condiciones de equilibrio estático de cada nudo.

Se puede presentar en el análisis estructural tres casos de interés:

- a) Barra con apoyos continuos.

- b) Barra con un apoyo continuo y otro articulado.  
 c) Barra en catilíver

Como se puede apreciar en la figura 3.b, se han incluido desplazamientos lineales a la mitad de los entre-ejes en la cimentación ( $\delta_2, \delta_4$  y  $\delta_6$ ). En estas condiciones, faltará determinar las ecuaciones para relacionar estos desplazamientos con el resto de los desplazamientos de la viga flotante y con el sistema de cargas generales. Estas ecuaciones auxiliares se pueden obtener utilizando el teorema de la viga conjugada.

3.b

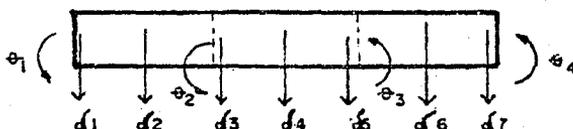


fig. 3.b desplazamientos lineales  $\delta_i$  y giros  $\theta_i$

Finalmente, la obtención de todas las ecuaciones que relacionen los desplazamientos lineales  $\delta_i$  y los desplazamientos angulares  $\theta_i$  con las cargas  $w_i$  y  $r_i$ , se obtienen utilizando la ecuación matricial 3.1 (equilibrio de momentos en nudos y en cortantes en ejes de barras) y las ecuaciones auxiliares de desplazamientos a la mitad de los entre-ejes.

#### BARRA CON APOYOS CONTINUOS.

La matriz de rigideces de una barra  $j$  con apoyos continuos (fig. 3.c) -- está dada por:

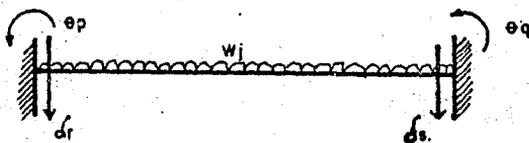


Fig. 3.c barra con apoyos continuos.

Matriz de rigideces

$$\left[ K \right]_j = \begin{matrix} & \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s \\ \begin{matrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} \end{matrix} & \left. \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix} \right\} \dots(3.2)
 \end{matrix}$$

siendo:  $L$  = Longitud de la barra  $j$ .

$E$  = Módulo de elasticidad del material que forma la barra  $j$ .

$I$  = Módulo de inercia de la barra  $j$ .

$\theta_p$  = Desplazamiento angular en el nudo  $p$ .

$\theta_q$  = Desplazamiento angular en el nudo  $q$ .

$\delta_r$  = Desplazamiento lineal en el nudo  $r$ .

$\delta_s$  = Desplazamiento lineal en el nudo  $s$ .

Los momentos y cortantes de empotramiento de barra sobre nudo, para diferentes condiciones de carga son los siguientes:

Para una carga uniformemente repartida  $w_1$ : (fig. 3.C)

$$M_p^e = \frac{w_1 L^2}{12} ; \quad M_q^e = -\frac{w_1 L^2}{12} \quad \dots\dots(3.3)$$

$$V_r^e = \frac{w_1 L}{2} ; \quad V_s^e = -\frac{w_1 L}{2} \quad \dots\dots(3.4)$$

Para la carga repartida de la cimentación (fig. 3.d)

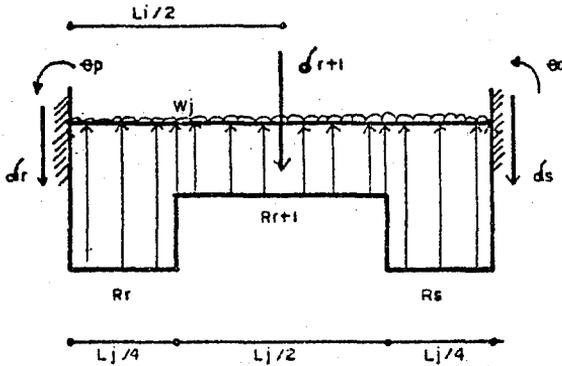
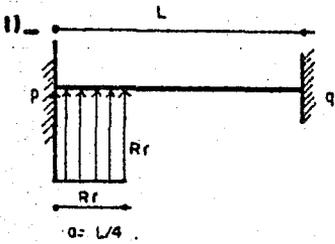


Fig. 3.d Barra con cargas repartidas en la cimentación. Apoyos continuos.

Deduciendo las ecuaciones:

para el lado izquierdo



$$M_p = - \frac{WL}{12} m (3m^2 - 8m + 6)$$

$$m = \frac{a}{L}$$

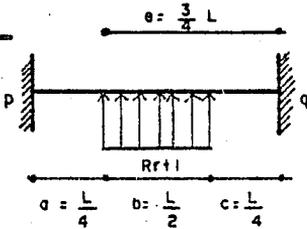
$$W = \frac{r_r L}{4} ; m = \frac{L}{4L} = \frac{1}{4}$$

$$M_p = - \frac{WL}{12} \left(\frac{1}{4}\right) \left[ 3 \left(\frac{1}{16}\right) - 8 \left(\frac{1}{4}\right) + 6 \right] = - \frac{WL}{48} \left(\frac{3}{16} - \frac{32}{16} + \frac{96}{16}\right)$$

$$M_p = - \frac{67WL}{768} = - \frac{67 L^2 r_r}{3072}$$

$$\therefore M_p = - \frac{63}{3072} L^2 r_r$$

21.



$$M_P = \frac{-W}{12L^2 b} \left[ e^3(4L - 3e) - c^3(4L - 3c) \right]$$

$$W = \frac{r_{r+1} L}{2}$$

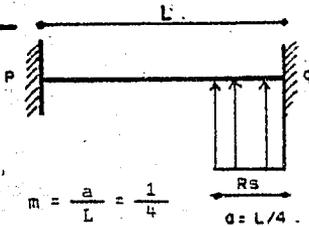
$$M_P = - \frac{W}{12L^2 \left(\frac{L}{2}\right)} \left[ \left(-\frac{3}{4}L\right)^3 (4L - 3\left(\frac{3}{4}L\right)) - \left(\frac{L}{4}\right)^3 (4L - 3\left(\frac{L}{4}\right)) \right]$$

$$M_P = - \frac{W}{6L^3} \left[ \frac{27}{64} L^3 \left(\frac{7}{4}L\right) - \frac{L^3}{64} \left(\frac{13}{4}L\right) \right]$$

$$M_P = - \frac{W}{6L^3} \left[ \frac{176L^4}{256} \right] = - \frac{176L^2 r_{r+1}}{3072} = - \frac{11 L^2 r_{r+1}}{192}$$

$$\therefore M_P = - \frac{11L r_{r+1}}{192}$$

3)



$$M_P = - \frac{WL}{12} m^2 (4 - 3m)$$

$$m = \frac{a}{L} = \frac{1}{4}$$

$$W = \frac{r_s L}{4}$$

$$M_P = - \frac{r_s L}{12} \left(\frac{L}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left[ 4 - 3\left(\frac{1}{4}\right) \right]$$

$$M_P = - \frac{r_s L^2}{48} \left(\frac{1}{16}\right) \left[\frac{13}{4}\right] = - \frac{13}{3072} L^2 r_s$$

$$\therefore M_P = - \frac{13}{3072} L^2 r_s$$

Por lo tanto la suma de los momentos da por resultado el momento de empo-  
tramiento total de lado izquierdo:

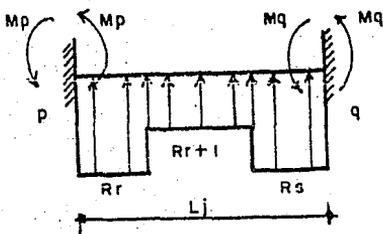
$$M_p^e = \frac{-67}{3072} L_j^2 r_r - \frac{11}{192} L_j^2 r_{r+1} - \frac{13}{3072} L_j^2 r_s \quad \dots (3.5)$$

Análogamente se deduce  $M_q^e$  del lado derecho:

$$M_q^e = \frac{13}{3072} L_j r_r + \frac{11}{192} L_j r_{r+1} + \frac{67}{3072} L_j r_s \quad \dots (3.6)$$

Para los cortantes:

lado izquierdo:



$$\Sigma M_q = 0 \text{ (barra/nudo)}$$

$$\frac{67}{3072} L_j^2 r_r + \frac{11}{192} L_j^2 r_{r+1} + \frac{13}{3072} L_j^2 r_s - \frac{13}{3072} L_j^2 r_r - \frac{11}{192} L_j^2 r_{r+1} - \frac{67}{3072} L_j^2 r_s$$

$$+ r_r \frac{L}{4} \left( \frac{7}{8} L \right) + r_{r+1} \frac{L}{2} \left( \frac{L}{2} \right) + r_s \frac{L}{4} \frac{L}{8} + v_r^e L = 0$$

$$\frac{726}{3072} L_j^2 r_r + \frac{1}{4} L_j^2 r_{r+1} + \frac{42}{3072} L_j^2 r_s = - v_r^e L$$

$$v_r^e = + \frac{121}{512} L_j r_r + \frac{1}{4} L_j r_{r+1} + \frac{7}{512} L_j r_s \quad \dots (3.7)$$

Análogamente se deduce  $v_q^e$  del lado derecho:

$$v_q^e = + \frac{7}{512} L_j r_r + \frac{1}{4} L_j r_{r+1} + \frac{121}{512} L_j r_s \quad \dots (3.8)$$

## BARRA CON UN APOYO CONTINUO Y OTRO ARTICULADO

La matriz de rigideces de una barra  $j$  con un apoyo continuo a la izquierda y otro articulado a la derecha vale: (fig. 3.e)

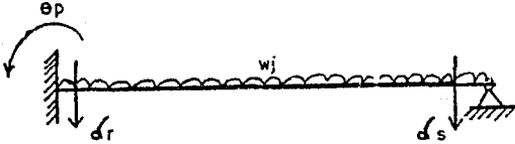


Fig. 3.e Barra con un apoyo continuo a la izquierda y otro articulado a la derecha.

Matriz de rigideces:

$$[K]_j = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^3} \\ \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \delta_r \\ \delta_s \end{Bmatrix} \dots\dots(3.9)$$

Los momentos de empotramientos y cortantes, de barra sobre nudo, para diferentes condiciones de carga, se presenta a continuación:

Para la carga uniformemente  $w_i$ : (fig. 3.e)

$$M_P^e = \frac{W_i L_j}{8} \quad \dots (3.10)$$

$$V_r^e = -\frac{5W_i L_j}{8} \quad ; \quad V_s^e = \frac{-3W_i L_j}{8} \quad \dots (3.11)$$

Para la carga repartida de la cimentación: (fig. 3.f.)

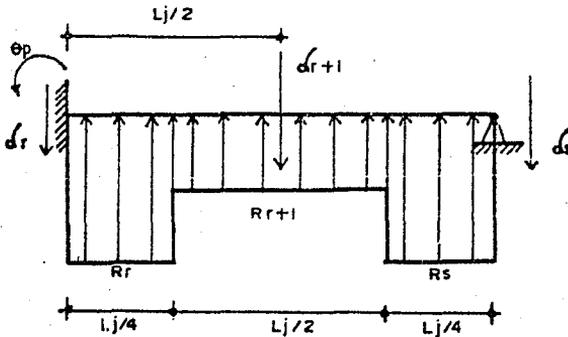
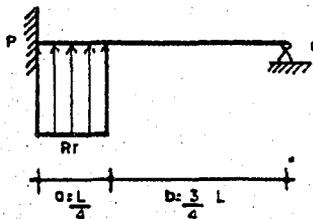


Fig. 3.f. Barra con cargas repartidas en la cimentación. Apoyo continuo a la izquierda y apoyo articulado a la derecha.

Deduciendo las ecuaciones:

Para el lado izquierdo:

1) 1)



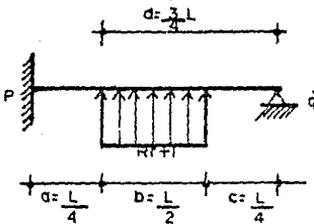
$$M_P = -\frac{W a}{8} (2-n)^2$$

$$n = \frac{a}{L} = \frac{1}{4} \quad ; \quad W = \frac{r_r L}{4}$$

$$M_P = -\frac{r_r L a}{32} \left(2 - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{r_r L^2}{128} \left(\frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{49 r_r L^2}{2048}$$

$$M_P = -\frac{49 r_r L^2}{2048}$$

2) 2)



$$M_P = -\frac{W}{8L^2 b} (d^2 - c^2)(2L^2 - c^2 - d^2)$$

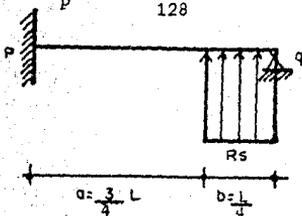
$$W = \frac{r_r + 1}{2} L$$

$$M_P = -\frac{W}{8L^2 b} \left[ \left(\frac{3}{4}L\right)^2 - \left(\frac{1}{4}L\right)^2 \right] \left[ 2L^2 - \left(\frac{1}{4}L\right)^2 - \left(\frac{3}{4}L\right)^2 \right]$$

$$M_P = -\frac{W}{8L^2 b} \left( \frac{9}{16}L^2 - \frac{1}{16}L^2 \right) \left( 2L^2 - \frac{1}{16}L^2 - \frac{9}{16}L^2 \right)$$

$$M_P = -\frac{W}{8L^2 b} \left( \frac{176 L^4}{256} \right) = -\frac{r_r + 1}{16 L^2 \left(\frac{1}{2}L\right)} \left( \frac{176 L^4}{256} \right) = -\frac{352 r_r + 1 L^2}{4096}$$

$$\therefore M_P = -\frac{11 r_r + 1 L^2}{128}$$



$$M_P = -\frac{Wb}{8} (2-n^2)$$

$$n = \frac{b}{L} = \frac{1}{4}; \quad W = \frac{r_s L}{4}$$

$$M_P = -\frac{r_s L b}{8} \left(2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = -\frac{r_s L}{32} \left(\frac{31}{16}\right)$$

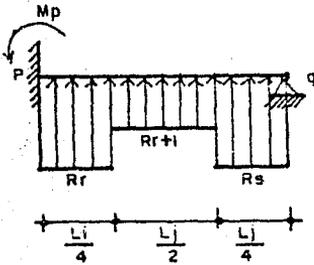
$$\therefore M_p = - \frac{31 r L}{2048} \frac{s}{s}$$

Por lo tanto la suma de los momentos, da por resultado el momento de empostramiento total del lado izquierdo.

$$M_p^e = - \frac{49}{2048} L_j^2 r_r - \frac{11}{128} L_j^2 r_{r+1} - \frac{31}{2048} L_j^2 r_s \quad \dots (3.12)$$

Para los cortantes

lado izquierdo

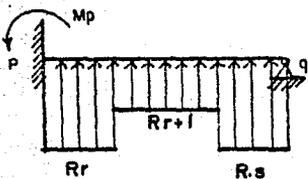


$$\begin{aligned} \Sigma M_q = 0 \\ - \frac{49}{2048} L_j^2 r_r - \frac{11}{128} L_j^2 r_{r+1} - \frac{31}{2048} L_j^2 r_s \\ + r_r \frac{L_j}{4} \left( \frac{7L_j}{8} \right) + r_{r+1} \frac{L_j}{2} \frac{L_j}{2} + r_s \frac{L_j}{4} \left( \frac{L_j}{8} \right) + V_p^e L = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{399}{2048} L_j^2 r_r + \frac{21}{128} L_j^2 r_{r+1} + \frac{33}{2048} L_j^2 r_s = - V_p^e L$$

$$V_p^e = \frac{399}{2048} L_j r_r + \frac{21}{128} L_j r_{r+1} + \frac{33}{2048} L_j r_s \quad \dots (3.13)$$

lado derecho:



$$\begin{aligned} \Sigma M_p = 0 \\ \frac{49}{2048} L_j^2 r_r + \frac{11}{128} L_j^2 r_{r+1} + \frac{31}{2048} L_j^2 r_s \\ + r_r \frac{L_j}{4} \left( \frac{L_j}{8} \right) + r_{r+1} \left( \frac{L_j}{2} \right) \left( \frac{L_j}{2} \right) + r_s \frac{L_j}{4} \left( \frac{7L_j}{8} \right) + V_q^e L = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{113}{2048} L_{j^r}^2 + \frac{43}{128} L_{j^r}^2 + 1 + \frac{479}{2048} L_{j^s}^2 = -v_q^e L$$

$$v_q^e = \frac{113}{2048} L_{j^r}^2 + \frac{43}{128} L_{r+1} + \frac{479}{2048} L_{j^s}^2$$

..... (3.14)

Los desplazamientos angulares se consideran positivos si van en sentido contrario a las manecillas del reloj y son positivos si son hacia abajo. El sentido de los momentos flexionantes de barra sobre nudo es positivo si da en sentido - de las manecillas del reloj y el sentido de las fuerzas cortantes de barra sobre nudo es positivo si el cortante va hacia arriba.

### BARRA EN CANTILIVER

Determinación del desplazamiento  $\delta$ , debido a la carga  $P_1$ . Fig. 3.g

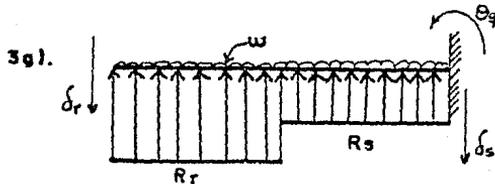
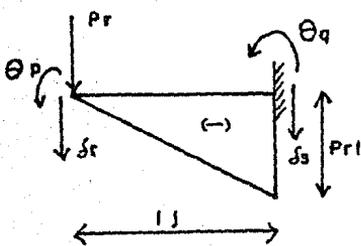


Fig. 3.g - Barra en cantiliver

Por el teorema de la viga conjugada



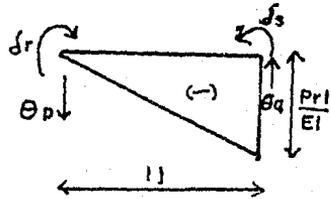
DMF Viga real

De la viga conjugada

$$\sum M_P = 0$$

$$\delta_r - \delta_s - \theta_q l - \frac{1}{2} \frac{P_r l}{EI} l \left( \frac{2}{3} l \right) = 0$$

$$\delta_r - \delta_s - \theta_q l - \frac{1}{3} \frac{P_r l^3}{EI} = 0$$



Viga Conjugada

Multiplicando la ecuación por  $\frac{4EI}{l^2}$

queda:

$$\frac{4EI}{l^2} \delta_r - \frac{4EI}{l^2} \delta_s - \frac{4EI}{l} \theta_q - \frac{4}{3} P_{rl} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

Para la carga uniformemente repartida  $w_1$  y la carga repartida de la cimentación Fig. 3.h

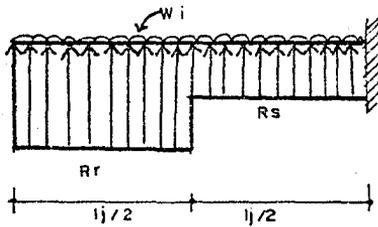
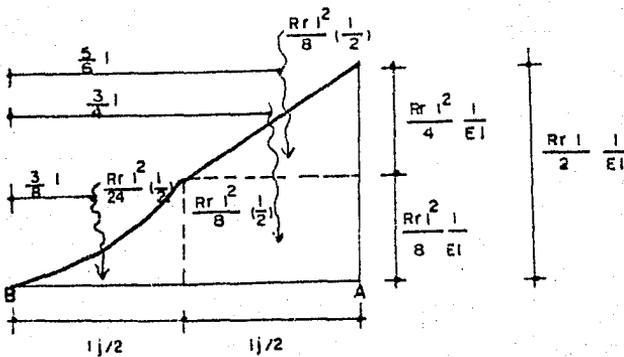


Fig 3.h Barra en cantiliver

Para el lado izquierdo



$$M_B = -\frac{r r_1^3}{48} \left(\frac{3}{8} l\right) + \frac{r r_1^3}{16} \left(\frac{3}{4} l\right) + \frac{r r_1^3}{16} \left(\frac{5}{6} l\right)$$

$$= -\frac{r r_1^4}{16} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) = \frac{r r_1^4}{16} \left(\frac{41}{24}\right) \frac{1}{EI}$$

Si multiplicamos por  $\frac{4EI}{l^2}$

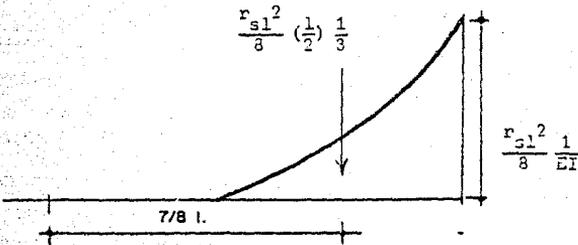
$$\implies M_B = -\frac{r r_1}{14} \left(\frac{41}{24} \frac{1}{EI}\right) \frac{4EI}{l^2} = -\frac{41}{96} r r_1^2$$

$$\therefore M_B = -\frac{41}{96} r r_1^2$$

lo mismo sería para  $w_r$

$$M_B = \frac{41}{96} w_r r_1^2$$

Para el lado derecho



$$M_B = -\frac{r s_1^2}{48} \left(\frac{7}{8} l\right) = \frac{7 r s_1^4}{48 \times 8} \frac{1}{EI}$$

si multiplicamos por  $\frac{4EI}{l^2}$

$$\implies M_B = -\frac{7r_{s1}^4}{48EI} \cdot \frac{4EI}{l^2} = -\frac{7}{96} r_{s1}^2$$

$$\therefore M_B = -\frac{7}{96} r_{s1}^2$$

lo mismo sería para  $w_s$

$$M_B = \frac{7}{96} w_{s1}^2$$

Por lo que la ecuación completa queda:

$$\frac{4EI}{l} \theta_q - \frac{4EI}{l^2} \delta_r + \frac{4EI}{l^2} \delta_s - \frac{41}{96} l^2 r_r - \frac{7}{96} l^2 r_s + \frac{41}{96} l^2 w_r + \frac{7}{96} l^2 w_s + \frac{4}{3} P_{r1} = 0$$

\dots\dots\dots (3.16)

## DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN LA CIMENTACION A LA MITAD DEL ENTRE-EJE

La obtención del desplazamiento vertical  $\delta_{r+1}$  en la cimentación, a la mitad del entre-eje (Fig. 3.d), para una barra con apoyos continuos, empleando los teoremas de la viga conjugada, conduce a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{EI}{L} \theta_p - \frac{EI}{L} \theta_q - \frac{8EI}{L^2} \delta_r + 16 \frac{EI}{L^2} \delta_{r+1} - 8 \frac{EI}{L^2} \delta_s + \frac{1}{256} r_r L^2 \\ + \frac{13}{384} r_{r+1} L^2 + \frac{1}{256} r_s L^2 = \frac{1}{24} W_j L^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.17)$$

Para una barra en la cimentación, con un apoyo continuo a la izquierda y otro apoyo articulado a la derecha (Fig. 3.e) se puede emplear la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} - \frac{3EI}{L} \theta_p + 11 \frac{EI}{L^2} \delta_r - 16 \frac{EI}{L^2} \delta_{r+1} + \frac{5EI}{L^2} \delta_s - \frac{37}{6144} L^2 r_r - \frac{3}{48} L^2 r_{r+1} \\ - \frac{91}{6144} L^2 r_s = - \frac{1}{12} W_j L^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{3EI}{L} \theta_p - \frac{11EI}{L^2} \delta_r + \frac{16EI}{L^2} \delta_{r+1} - \frac{5EI}{L^2} \delta_s + \frac{37}{6144} r_r L^2 = \frac{1}{16} r_{r+1} L^2 \\ + \frac{91}{6144} r_s L^2 = \frac{1}{12} W_j L^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.18)$$

## MATRIZ DE RIGIDECES DE TODA LA ESTRUCTURA

La matriz de rigideces de toda la estructura consiste en ensamblar las matrices de cada barra.

Como se dijo anteriormente, empleando el método de las rigideces primeramente se restringen sus grados de libertad (desplazamientos lineales y angulares). - Esto ocasiona momentos flexionantes y fuerzas cortantes de empotramiento. Posteriormente se permiten individualmente cada uno de los desplazamientos restringidos, lo que provoca momentos y cortantes adicionales para mantener la estructura en equilibrio.

La suma de los momentos de empotramiento y los momentos debido a giros en los nudos debe ser cero en cada uno de los nudos, para que cada uno de estos esté en equilibrio. Además, la suma de cortantes de empotramiento y de cortantes - debido a desplazamientos lineales de los nudos debe ser nula en cada uno de los ejes de barra, para que cada uno de los ejes de barra esté en equilibrio.

Debido a lo anterior se obtienen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$K_{11}^{\delta_1} + K_{12}^{\delta_2} + \dots + K_{1j}^{\theta_j} + K_{1k}^{\theta_k} + \dots + A_{11}r_1 + A_{12}r_2 + \dots = B_{11}W_1 + B_{12}W_2 + \dots$$

$$K_{21}^{\delta_1} + K_{22}^{\delta_2} + \dots + K_{2j}^{\theta_j} + K_{2k}^{\theta_k} + \dots + A_{21}r_1 + A_{22}r_2 + \dots = B_{21}W_1 + B_{22}W_2 + \dots$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$K_{i1}^{\delta_1} + K_{i2}^{\delta_2} + \dots + K_{ij}^{\theta_j} + K_{ik}^{\theta_k} + \dots + A_{i1}r_1 + A_{i2}r_2 + \dots = B_{i1}W_1 + B_{i2}W_2 + \dots$$

..... (3.19)

en donde:

$K_{ij}$  = coeficiente de la matriz de rigideces de toda la estructura

$A_{ij}$  = coeficiente que corresponde a la reacción de la cimentación  $r_i$

$B_{ij}$  = coeficiente que corresponde a la carga de la estructura  $w_j$

En el sistema de ecuaciones anterior se tienen tres tipos de incógnitas:

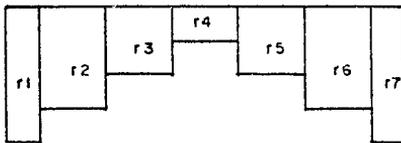
- Los desplazamientos lineales  $\delta_i$
- Los desplazamientos angulares  $\theta_i$
- Las reacciones de la cimentación  $r_i$

Lo que procedé a continuación es obtener los desplazamientos del suelo  $\delta_i$  en función de las reacciones de terreno  $r_i$ , mediante un análisis de hundimientos del terreno.

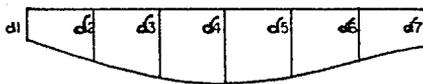
## CAPITULO IV

## ANALISIS DE ASENTAMIENTOS DEL TERRENO.

En este capítulo se desarrollará la ecuación para calcular los desplazamientos verticales  $\delta_i$  en función de las reacciones del terreno  $r_i$  (fig. 4.a), para la estratigrafía y propiedades del subsuelo mostrada en la fig. 4.b

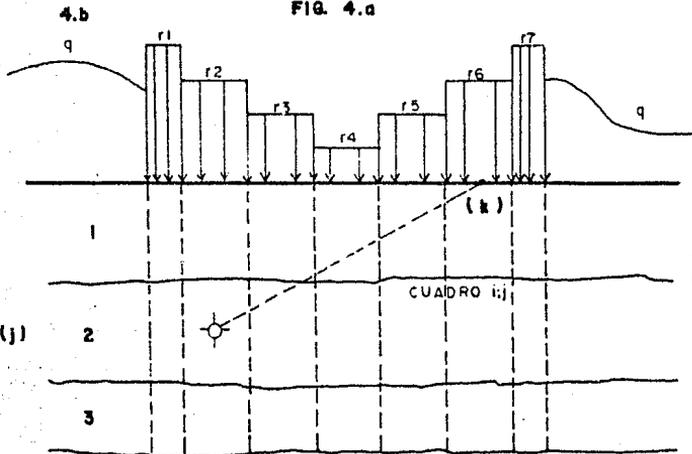


REACCIONES DEL  
TERRENO  $r_i$ .



DESPLAZAMIENTOS VERTICALES  
DEL SUELO  $d_i$ .

FIG. 4.a



j : ESTRATO j .  
i : CADA UNA DE LAS  
CARGAS DE LA  
CIMENTACION.  
K: PUNTO DONDE SE  
MIDE EL DEZPLA-  
ZAMIENTO.

FIG-4.b—Determinación de los asentamientos del terreno.

Para calcular los desplazamientos verticales del terreno se debe recordar que el asentamiento total primario, debido a una sobrecarga "p" (supuesto un proceso de consolidación unidimensional), puede determinarse a partir de la figura siguiente:

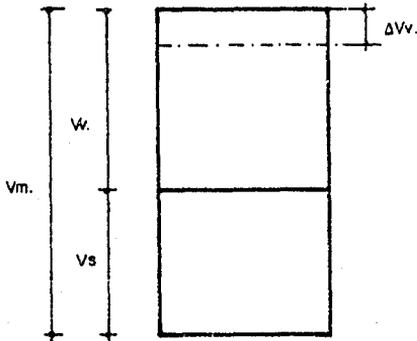


fig. 4.c Obtención del asentamiento total de un estrato de suelo.

Sea  $V_s = 1$  y  $e = \frac{V_v}{V_s}$

e: relación de vacíos

entonces  $V_v = e$

$$V_m = 1 + e$$

la deformación volumétrica unitaria  $\epsilon_v$  está dada por la relación:

$$\epsilon_v = \frac{\Delta V_v}{V_m} \dots\dots\dots (20)$$

Donde:  $\Delta V_v = \Delta e$

Tal que:  $\epsilon_v = \frac{\Delta e}{1 + e} \dots\dots\dots (21)$

Por otro lado, se sabe que:

$$V = H \cdot A_T \quad \dots\dots\dots (22)$$

H: altura de la muestra

$A_T$  : Area transversal de la muestra

$$\Delta V_v = \delta \cdot A_T \quad \dots\dots\dots (23)$$

entonces:

$$\epsilon_v = \frac{\delta \cdot A_T}{H \cdot A_T} = \frac{\delta}{H} \quad \dots\dots\dots (24)$$

igualando las ecuaciones (21) y (24)

$$\frac{\delta}{H} = \frac{\Delta e}{1 + e}$$

Es decir que:

$$\delta = \frac{\Delta e}{1 + e} \cdot H \quad \dots\dots\dots (25)$$

Sea el coeficiente de compresibilidad  $a_v$ , definido tal que:

$$a_v = \frac{\Delta e}{\Delta \bar{\sigma}} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$\Delta \bar{\sigma}$  ; incremento de presión efectiva.

entonces:

$$\delta = \frac{a_v}{1 + e} \cdot \Delta \bar{\sigma} \cdot H \quad \dots\dots\dots (27)$$

al término  $\frac{a_v}{1 + e}$  se le conoce como "modulo de variación volumétrica"

$m_v$  de donde:

$$\delta = m_v \cdot \Delta \bar{\sigma} \cdot H \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\text{siendo } m_v = \frac{a_v}{1 + e} = \frac{\Delta e}{(1 + e) \Delta \bar{\sigma}}$$

haciendo referencia a la fig. 4.b la ecuación (28) queda de la manera siguiente:

$$\delta_{(i,j)_k} = m_{v_{i,j}} \cdot \Delta \bar{\sigma}_{i,j_k} \cdot H_j \quad \dots\dots\dots(29)$$

Donde:

$\delta_{(i,j)_k}$  : Deformación del cuadro  $i, j$  debida a una reacción colocada en  $k$ .

$m_{v_{i,j}}$  : Módulo longitudinal de deformación del cuadro  $i, j$ .

$H_j$  : Espesor del estrato  $j$ .

$\Delta \bar{\sigma}_{i,j_k}$  : Incremento de presión vertical en el cuadro  $i, j$ , - debido a la presión de contacto  $P_k = \frac{P_k}{b_k}$  en la frontera cimentación - suelo.

$b_k$  : Ancho de la cimentación en el punto  $k$ .

Con la ecuación (29) podemos obtener las deformaciones del suelo en función de las reacciones del terreno, es decir, la deformación del cuadro  $i, j$  (fig. 4.b) debida a la reacción que existe.

El incremento de presión se puede obtener a partir de la siguiente figura:

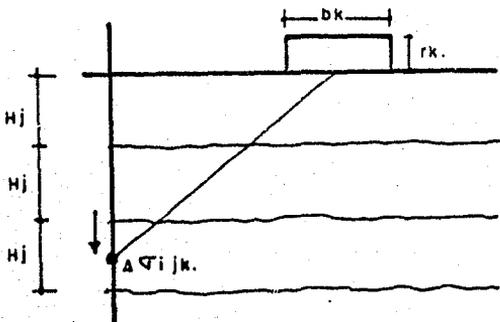


Fig. 4.e Esfuerzo vertical en un punto.

$$\Delta \bar{\sigma}_{i,j,k} = I_{i,j,k} \frac{r_k}{b_k} \dots \dots \dots (30)$$

donde:  $P_k = \frac{r_k}{b_k}$

$I_{i,j,k}$  : valor de influencia en el cuadro i, j debido a una presión unitaria colocada en k.

El valor de  $I_{i,j,k}$  se puede determinar calculando el esfuerzo que ocasiona una presión unitaria colocada en el tramo k sobre el cuadro i, j (Zeevaert 1973).

Por lo anterior, la deformación del cuadro i, j debida a todas las reacciones  $r_k$  será:

$$\delta_{i,j} = m_{v_{ij}} H_j \sum_{k=1}^n I_{i,j,k} \frac{r_k}{b_k} \dots \dots \dots (31)$$

n: Número de cargas aplicadas en la superficie.

La deformación bajo el punto i valdrá:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^p \delta_{i,j}$$

p: Número de estratos en el subsuelo

Entonces:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^p m_{v_{ij}} H_j \left( \sum_{k=1}^n I_{i,j,k} \frac{r_k}{b_k} \right) \dots \dots \dots (32)$$

Si además actúa una sobrecarga lateral q, la ecuación 32 queda:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^p m_{v_{ij}} H_j q_{i,j} + \sum_{j=1}^p m_{v_{ij}} H_j \left( \sum_{k=1}^n I_{i,j,k} \frac{r_k}{b_k} \right) \dots \dots \dots (33)$$

Es importante en este momento hacer una aclaración: los valores del módulo de deformación del suelo  $m_{v_{ij}}$  dependen del esfuerzo de confinamiento, el cual no se conoce apriori. Por esta razón, los  $m_{v_{ij}}$  deben determinarse para un nivel de esfuerzos lo más cercano posible a la realidad (Zee -

vaert 1973), dependiendo este nivel de la experiencia del Ingeniero que realiza el análisis. Si, posteriormente, se ve que el nivel de presiones considerado en el primer análisis está muy alejado de la magnitud de los esfuerzos obtenidos después de resolver todo el problema, es probable que haya necesidad de volver a calcular los hundimientos del suelo con los valores corregidos del módulo al tomar un nuevo nivel de esfuerzos.

## CAPITULO V

## INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA

Una vez realizado el análisis estructural y el análisis de asentamientos del terreno, se establece la condición de compatibilidad de desplazamientos entre ellos, de la siguiente manera:

Los desplazamientos del suelo que están en función de las reacciones del terreno  $r_i$ , determinados por la ecuación (33), se sustituyen en el sistema de ecuaciones - del análisis estructural. De esta manera, desaparecen, como incógnitas los desplazamientos lineales y quedan unicamente como incógnitas los desplazamientos angulares en los nudos ( $\theta_i$ ) y las reacciones del terreno ( $r_i$ ), por lo que el número de incógnitas, con lo que se puede resolver el sistema de ecuaciones.

Ya conocidas las reacciones del terreno ( $r_i$ ), se pueden determinar también los - desplazamientos verticales del terreno, en esto consiste la interacción suelo-estructura.

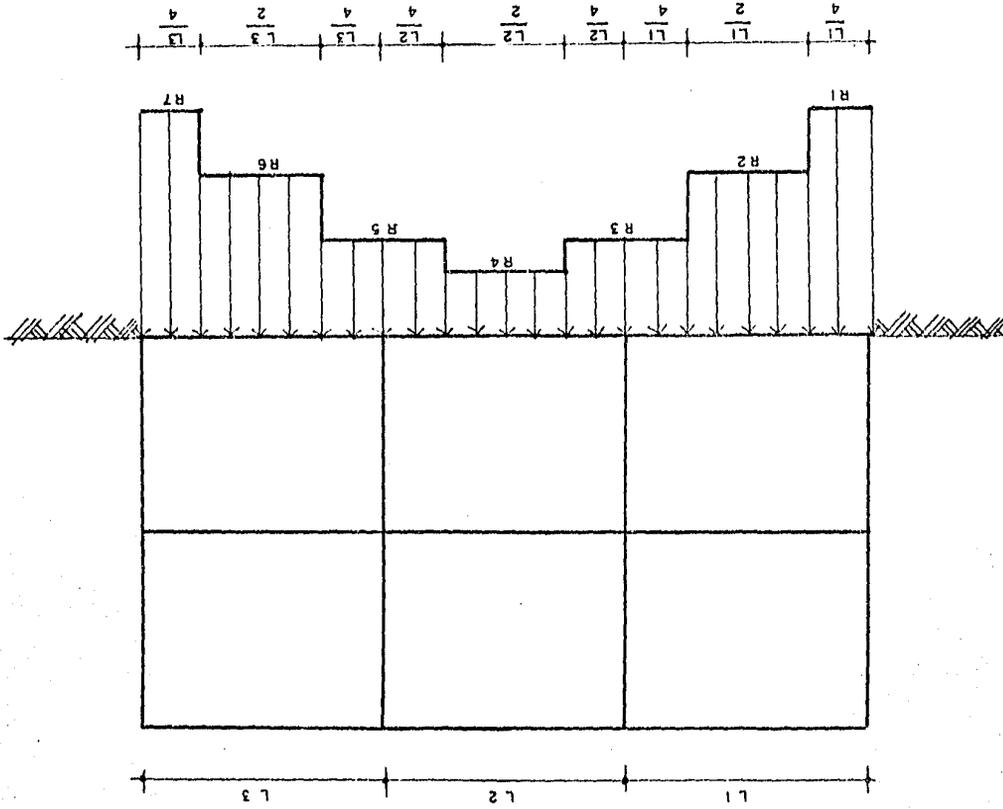
Se describe a continuación brevemente el método del MI Agustín Deméneghi Colina - (1979):

Considere una estructura reticular apoyada sobre un suelo de mediana a alta compresibilidad (Fig. 5.a), en la que la cimentación puede ser resuelta a base de -- zapatas corridas o mediante una losa con contratraves de concreto armado. Se quiere determinar los hundimientos totales y diferenciales, así como los elementos mecánicos en la cimentación y en la superestructura.

Por otro lado se desconoce el diagrama de reacción del terreno, por lo que se sustituye la carga repartida del suelo sobre la cimentación por cargas repartidas - bajo las columnas y bajo los puntos medios de las contratraves, como se muestra - en la siguiente figura:

CAPITULO V.

3



Para realizar el análisis de la estructura y el suelo, se usará el método de rigideces para el análisis estructural. Este consiste en obtener la matriz de rigideces de la cual se conoce el vector de cargas y se desconoce el vector de desplazamientos (desplazamientos angulares  $\theta_i$  de cada uno de los nudos de la estructura y los desplazamientos lineales  $\delta_i$ ). El vector de cargas no es conocido totalmente pues las reacciones del terreno  $r_i$  son también incógnitas. Con lo que se realiza un análisis de asentamientos del terreno para obtener los desplazamientos del suelo  $\delta_i$  en función de las reacciones  $r_i$  que quedan como incógnitas.

Integrando estas ecuaciones que resultan del análisis de asentamiento en la matriz de rigideces, queda un sistema de ecuaciones en que las incógnitas son únicamente los desplazamientos angulares ( $\theta_i$ ) y las reacciones del terreno ( $r_i$ ).

Resuelto el sistema de ecuaciones, se pueden obtener los desplazamientos verticales ya que estaban en función de las reacciones del terreno  $r_i$ .

Conocidos los desplazamientos angulares y los desplazamientos verticales es fácil obtener los momentos flexionantes, las fuerzas cortantes y las fuerzas normales en toda la estructura.

En este procedimiento no interviene en ningún momento el concepto de módulo de reacción del suelo  $K_s$ , con lo cual se evitan las interacciones.

Para resolver el problema de interacción suelo-estructura se requiere atacarlo en tres etapas: efectuar un análisis estructural, realizar un análisis de asentamientos del suelo y finalmente establecer la compatibilidad de desplazamientos entre la estructura y el suelo.

Para que el lector tenga facilidad de usar el método del MI Agustín Deméneghi - Colina a continuación se hará un resumen de los pasos a seguir:

- a) Determinar las características geométricas de la viga. Estas pueden ser: Longitud de cada tramo, momento de inercia de cada tramo, cargas concentradas y cargas repartidas, etc.
- b) Se divide la viga en tres o más partes, las cuales se trabajan por separado, una barra (la central) se idealiza con apoyos continuos (Fig. 3.c) las otras dos barras como cantiliver (Fig. 3.g), las cuales se numeran.

- c) Se definen los grados de libertad de cada barra, con lo que se empieza a trabajar separando cada barra.
- d) Para la barra con apoyos continuos (barra central) (Fig. 3.c), se calcula su matriz de rigideces, la cual va a tener cinco grados de libertad; se calculan los momentos de empotramiento debido a las cargas y los debidos a las cargas repartidas de la cimentación.
- e) Aplicando la ecuación

$$0 = [k] \{d\} + \begin{Bmatrix} V^e \\ M^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V^c \\ M^c \end{Bmatrix}$$

$[k]$  = matriz de rigideces

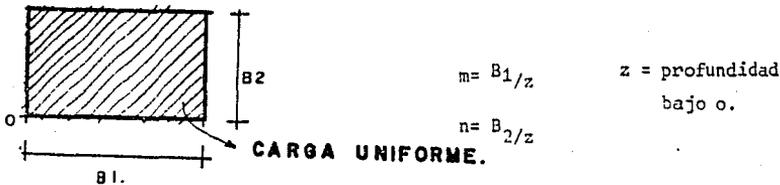
$\{d\}$  = vector de desplazamientos angulares y desplazamientos lineales.

$\begin{Bmatrix} V^e \\ M^e \end{Bmatrix}$  = suma de los cortantes y momentos de empotramiento de las cargas de la estructura y las cargas de la cimentación.

- f) Para las barras extremas, en cantiliver, aplicamos la ecuación (3.16)
- g) Determinar los desplazamientos verticales en la cimentación a la mitad del entre-eje para una barra con apoyos continuos, ecuación (3.17) esta ecuación formará parte del sistema de ecuaciones.
- h) Obtenido el sistema de ecuaciones debido al análisis estructural se observa que hay mas incógnitas que ecuaciones (ecuación 3.19) por lo que es necesario hacer intervenir al terreno.
- i) Se hace el análisis de asentamientos, obteniendo los desplazamientos ( $\delta_i$ ) en función de las reacciones del terreno ( $r_i$ )
- j) Se determinan los valores de influencia  $I_{ijk}$ ,  $I_{ijk}$  = esfuerzo normal vertical en el punto  $ij$ , debido a una presión unitaria colocada en  $k$ .
- k) Para hallar los valores de influencia se coloca una presión unitaria en el

área 1 y se determinan los esfuerzos en los puntos del subsuelo (fig. 4.e). Luego se coloca la presión unitaria en 2 y se obtienen los esfuerzos y así sucesivamente.

- l) Los esfuerzos se pueden determinar con las fórmulas de Boussinesq, con la carta de Newmark, con la ecuación de la solución de Boussinesq, integrada por el Ing. Julio Damy Ríos, etc.
- m) Se utilizó por sencillez la ecuación de la solución de Boussinesq, integrada por el Ing. Julio Damy Ríos. Esta ecuación se puede usar para el caso de rectángulos con carga uniforme.



$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left\{ \left( \frac{1}{1+m^2} + \frac{1}{1+n^2} \right) \frac{mn}{(m^2 + n^2 + 1)^{1/2}} + \tan^{-1} \left( \frac{mn}{(m^2 + n^2 + 1)^{1/2}} \right) \right\}$$

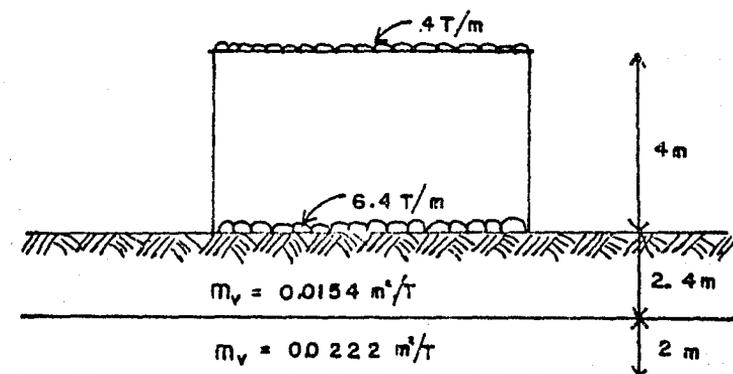
- n) A continuación se calculan los hundimientos del suelo aplicando la ecuación (30). Si no actúa una sobrecarga lateral entonces  $q_{ij} = 0$ .
- o) Con esto se obtienen los desplazamientos verticales ( $\delta_i$ ) en función de las reacciones del terreno ( $r_i$ ).
- p) Estos desplazamientos verticales se sustituyen en el sistema de ecuaciones (ecuación 3.19) con esto se logra reducir el número de incógnitas, obteniéndose así un sistema determinado, (igual número de ecuaciones que de incógnitas).
- q) Ya resuelto el sistema de ecuaciones se obtienen los desplazamientos angulares y las reacciones del terreno; con éstas se obtienen los desplazamientos verticales. Estos son el resultado final del análisis de interacción suelo-viga flotante.

## CAPITULO VI

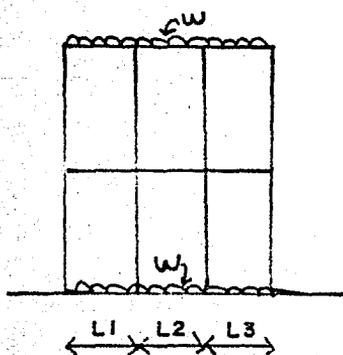
Ejemplo de Aplicación.

Este capítulo fue hecho con el objeto de ilustrar el procedimiento descrito anteriormente, haciendo un ejemplo sencillo de aplicación.

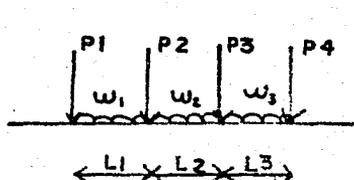
Se pide determinar los diagramas de reacción y hundimientos del terreno, para la estructura, estratigrafía y propiedades indicadas en la siguiente figura



Marco de un edificio



Viga flotante



Dada una estructura, se pretende hacer el modelo de una viga equivalente, teniendo ésta las mismas características de carga y rigidez que las de la estructura. La viga equivalente reposa libremente sobre el suelo de tal forma que cualquier punto que se localice en la superficie de la cimentación sirve como apoyo para sostener la viga. Para las condiciones de carga, basta con calcular el valor de las cargas verticales que llegan a la cimentación y así colocarlas actuando sobre la viga, ya sean éstas concentradas o uniformemente distribuidas. La rigidez de la viga, que estará dada por el parámetro  $EI/L$ , se obtendrá de la siguiente manera: El módulo de elasticidad "E" se tomará igual al del material de que esté construido el edificio ya sea éste de concreto, acero, mampostería o madera. El momento de inercia "I" se obtendrá como la suma de todos los momentos de inercia de las áreas de los elementos estructurales con respecto al eje centroidal del edificio.

Consideremos como ejemplo un edificio de 1 nivel; su planta es de ocho por ocho metros, está apoyado en un suelo de mediana compresibilidad.

Datos

$B = 8$  m. ancho de la cimentación.

$f'c = 200$  kg/cm<sup>2</sup>

$E_c = 10000 f'c$

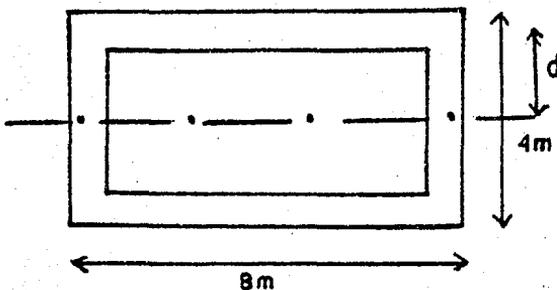
$t = 15$  cm espesor de la losa.

Cargas:

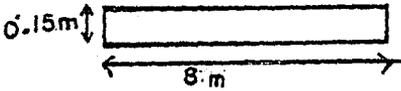
Azotea CV + CM = 500 Kg/m<sup>2</sup>

Cimentación CV+CM = 800 kg/m<sup>2</sup>

Para el momento de inercia con respecto a su eje centroidal de la figura; por el teorema de ejes paralelos  $I = I_o + Ad^2$



Para las losas



$$A = 800 \times 15 = 12\,000 \text{ cm}^2$$

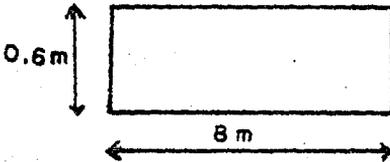
$$d = 200 - 7.5 = 192.5 \text{ cm.}$$

$$d^2 = 37056.25 \text{ cm}^2$$

$$I_o = \frac{800 (15)^3}{12} = 225\,000 \text{ cm}^4$$

$$I = 225\,000 + (12\,000 \times 37056.25) = 444\,900\,000 \text{ cm}^4$$

Para las trabes



$$A = 800 \times 60 = 48\,000 \text{ cm}^2$$

$$d = 200 - 30 = 170 \text{ cm}$$

$$d^2 = 28\,900 \text{ cm}^2$$

$$I_o = \frac{800 (60)^3}{12} = 14\,400\,000 \text{ cm}^4$$

$$I = 14\,400 + (48\,000 \times 28\,900) = 1\,387\,214\,400 \text{ cm}^4$$

La suma de los momentos de inercia es:

$$I = 1,832'144,400 \text{ cm}^4$$

De la parte superior e inferior el momento de inercia total

$$I = 3,664'228,800 \text{ cm}^4$$

Para el módulo de elasticidad tenemos

$$f'c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E = 10\,000 \sqrt{200} = 141,421.36 \text{ Kg/cm}^2$$

El producto EI;

$$EI = 3\,664'228,800 \times 141,421.36 = 5.182 \times 10^{14} \text{ Kg-cm}^2$$

$$EI = 51.82 \times 10^6 \text{ ton-m}^2$$

Carga uniformemente repartida en la cimentación.

$$w = (CV+CM)L = 800 \times 8 = 6400 \text{ Kg/m} = 6.4 \text{ ton/m.}$$

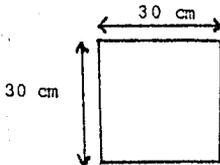
Carga uniformemente repartida de la azotea.

Hacemos puntual la carga de azotea

$$P_1 = (CV + CM) L^2 = 500 \times 8^2 = 32\,000 \text{ Kg.} = 32 \text{ ton.}$$

$$\frac{P_1}{2} = 16 \text{ ton.}$$

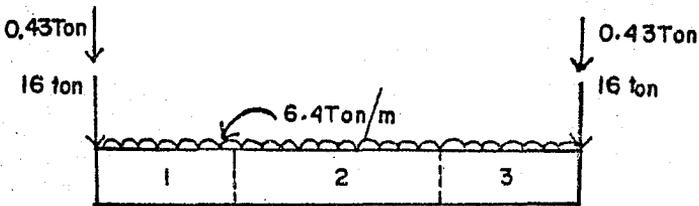
Carga de las columnas



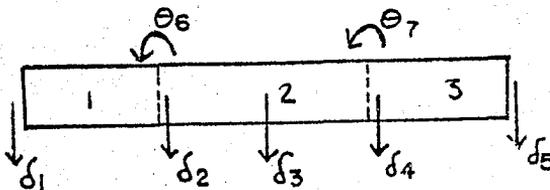
$$P_2 = 0.3 \times 0.3 \times 4 = 0.36 \text{ m}^3 \times 2.4 \text{ t/m}^3$$

$$P_2 = 0.864 \text{ ton.}$$

$$\frac{P_2}{2} = 0.432 \text{ ton.}$$



Numerando las barras y los grados de libertad



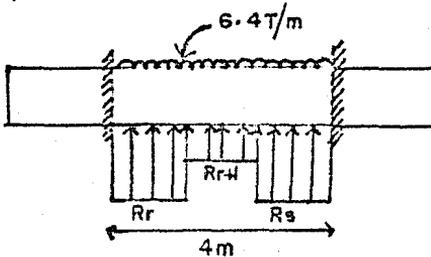
Tenemos 7 grados de libertad; formamos la siguiente tabla

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$
1	-	$\theta_6$	$\delta_1$	$\delta_2$
2	$\theta_6$	$\theta_7$	$\delta_2$	$\delta_4$
3	$\theta_7$	-	$\delta_4$	$\delta_5$

Determinación de la matriz de rigideces de cada barra:

Barra 2

$$L = 4 \text{ m} \quad ; \quad EI = 51.82 \times 10^6 \text{ ton} \cdot \text{m}$$



La matriz de rigideces es:

$$\begin{bmatrix}
 51.82 \times 10^6 & \frac{51.82 \times 10^6}{2} & -\frac{3(51.82 \times 10^6)}{8} & \frac{3(51.82 \times 10^6)}{8} \\
 \frac{51.82 \times 10^6}{2} & 51.82 \times 10^6 & -\frac{3(51.82 \times 10^6)}{8} & \frac{3(51.82 \times 10^6)}{8} \\
 -\frac{3(51.82 \times 10^6)}{8} & -\frac{3(51.82 \times 10^6)}{8} & \frac{3(51.82 \times 10^6)}{16} & -\frac{3(51.82 \times 10^6)}{16} \\
 \frac{3(51.82 \times 10^6)}{8} & \frac{3(51.82 \times 10^6)}{8} & -\frac{3(51.82 \times 10^6)}{16} & \frac{3(51.82 \times 10^6)}{16}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \theta_6 \\
 \theta_7 \\
 \delta_2 \\
 \delta_4
 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 51.82 \times 10^6 & 25.93 \times 10^6 & -19.43 \times 10^6 & 19.43 \times 10^6 \\
 25.93 \times 10^6 & 51.82 \times 10^6 & -19.43 \times 10^6 & 19.43 \times 10^6 \\
 -19.43 \times 10^6 & -19.43 \times 10^6 & 9.72 \times 10^6 & -9.72 \times 10^6 \\
 19.43 \times 10^6 & 19.43 \times 10^6 & -9.72 \times 10^6 & 9.72 \times 10^6
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \theta_6 \\
 \theta_7 \\
 \delta_2 \\
 \delta_4
 \end{Bmatrix}$$

Momentos de empotramiento

Para las cargas uniformemente repartidas de la estructura y las cargas de equilibrio de las barras 1 y 3 utilizamos las ecs: 3.3, 3.4:

$$M_{p(6)}^e = \frac{W_j L_j^2}{12} - \frac{W_j l^2}{2} = \frac{6.4(4)^2}{12} + \frac{6.4(2)^2}{2} = 4.27 \text{ t/m}$$

$$M_{q(7)}^e = -\frac{W_j L_j^2}{2} + \frac{W_j l^2}{2} = -\frac{6.4(4)^2}{12} + \frac{6.4(2)^2}{2} = 4.27 \text{ t/m.}$$

$$V_{r(2)}^e = -\frac{W_j L}{2} - W_j l = -\frac{6.4(4)}{2} - 6.4(2) = -25.6 \text{ ton.}$$

$$V_{s(4)}^e = -\frac{W_j L}{2} - W_j l = -\frac{6.4(4)}{2} - 6.4(2) = -25.6 \text{ ton.}$$

Para las cargas uniformemente repartidas de la cimentación, utilizamos las ecs: 3.5, 3.6, 3.7, 3.8:

$$M_{p(6)}^e = -\frac{67}{3072} L^2 r_2 - \frac{11}{192} L^2 r_3 - \frac{13}{3072} L^2 r_4 + \frac{3}{8} l^2 r_1 + \frac{1}{8} l^2 r_2 - P_r l$$

$$M_{p(6)}^e = -\frac{1072}{3072} r_2 - \frac{176}{192} r_3 - \frac{208}{3072} r_4 + \frac{3}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_2 - 32.86$$

$$M_{q(7)}^e = \frac{13}{3072} L^2 r_2 + \frac{11}{192} L^2 r_3 + \frac{67}{3072} L^2 r_4 - \frac{1}{8} l^2 r_4 - \frac{3}{8} l^2 r_5 + P_s l$$

$$M_{q(7)}^e = \frac{208}{3072} r_2 + \frac{176}{192} r_3 + \frac{1072}{3072} r_4 - \frac{1}{2} r_4 - \frac{3}{2} r_5 + 32.86$$

$$V_{r(2)}^e = \frac{121}{512} L r_2 + \frac{1}{4} L r_3 + \frac{7}{512} L r_4 + \frac{1}{2} l r_1 + \frac{1}{2} l r_2 - P_r$$

$$V_{r(2)}^e = \frac{484}{512} r_2 + r_3 + \frac{28}{512} r_4 + r_1 + r_2 - 16.43$$

$$V_{s(4)}^e = \frac{7}{512} L r_2 + \frac{1}{4} L r_3 + \frac{121}{512} L r_4 + \frac{1}{2} l r_4 + \frac{1}{2} l r_5 - P_r$$

$$V_{s(4)}^e = \frac{28}{512} r_2 + r_3 + \frac{484}{512} r_4 + r_4 + r_5 - 16.43$$

Sumamos tanto los momentos de empotramiento de la estructura como los de la cimentación.

$$M_{p(6)}^e = 0.1510r_2 - 0.9167r_3 - 0.0677r_4 + 1.5 r_1 - 37.13 \dots a$$

$$M_{q(7)}^e = 0.0677r_2 + 0.9167r_3 - 0.1510r_4 - 1.5r_5 + 37.13 \dots b$$

$$V_{r(2)}^e = 1.9453r_2 + r_3 + 0.0547r_4 + r_1 - 42.03 \dots c$$

$$V_{s(4)}^e = 0.0547r_2 + r_3 + 1.9453r_4 + r_5 - 42.03 \dots d$$

$$[K] \begin{Bmatrix} d \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V^e \\ M^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V^c \\ M^c \end{Bmatrix} = 0$$

Sumemos los momentos y cortantes de empotramiento con la matriz de rigideces, para después ensamblarla con las demás ecuaciones.

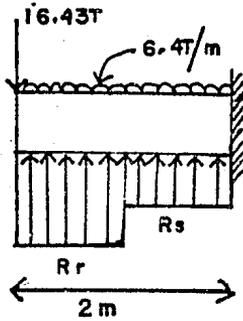
Pero antes de esto calculamos el desplazamiento vertical en la cimentación a la mitad del entre eje de la ec: 3.17:

$$\frac{EI}{L} \theta_6 - \frac{EI}{L} \theta_7 - \frac{8EI}{L^2} \delta_2 + \frac{16 EI}{L^2} \delta_3 - \frac{8 EI}{L^2} \delta_4 + \frac{1}{256} L^2 r_2 + \frac{13}{384} L^2 r_3 + \frac{1}{256} L^2 r_4 = \frac{1}{24} w_j L^2$$

$$12.96 \times 10^6 \theta_6 - 12.96 \times 10^6 \theta_7 - 25.91 \times 10^6 \delta_2 + 51.82 \times 10^6 \delta_3 - 25.91 \times 10^6 \delta_4 + 0.0625 r_2 + 0.5417 r_3 + 0.0625 r_4 = 4.2667 \dots e$$

Barra 1

L= 2 m



De la ec. 3.15:

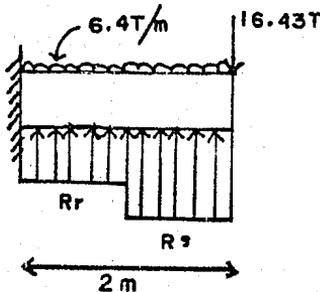
$$\frac{4(51.82 \times 10^6)}{2} \theta_6 - \frac{4(51.82 \times 10^6)}{4} \delta_1 + \frac{4(51.82 \times 10^6)}{4} \delta_2 - \frac{41}{96} (4) r_1 - \frac{7}{96} (4) r_2 + \frac{41}{96} (4) (6.4) + \frac{7}{96} (4) (6.4) + \frac{4}{3} (16.43) (2) = 0$$

$$103.64 \times 10^6 \theta_6 - 51.82 \times 10^6 \delta_1 + 51.82 \times 10^6 \delta_2 - 1.7083 r_1 - 0.2917 r_2 =$$

$$-56.6187 \dots \dots \dots F$$

Barra 3

L= 2 m



Barra 3

L = 2 m

Utilizando la ec: 3.17:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{4(51.82 \times 10^6)}{2} \theta_7 + \frac{4(51.82 \times 10^6)}{4} \delta_4 - \frac{4(51.82 \times 10^6)}{4} \delta_5 - \frac{7}{96} (4) r_4 \\
 & - \frac{41}{96} (4) r_5 + \frac{7}{96} (4) (6.4) + \frac{4}{3} (2) (16.43) + \frac{41}{96} (4)(6.4) = 0 \\
 & - 103.64 \times 10^6 \theta_7 + 51.82 \times 10^6 \delta_4 - 51.82 \times 10^6 \delta_5 - 0.2917 r_4 - 1.7083 r_5 = \\
 & - 56.6187 \quad \dots\dots\dots g
 \end{aligned}$$

Haciendo el ensamble de la matriz y las reducciones necesarias.

Sabemos que por simetría de la estructura :

$$\delta_2 = \delta_4 ; \quad \delta_1 = \delta_5 ; \quad r_1 = r_5 ; \quad r_2 = r_4 ; \quad \theta_7 = - \theta_6$$

$$\begin{aligned}
 51.82 \times 10^6 \theta_6 + 25.91 \times 10^6 (-\theta_6) + 0.15 r_2 - 0.9167 r_3 - 0.0677 r_4 + 1.5 r_1 &= 37.13 \\
 25.91 \times 10^6 \theta_6 + 51.82 \times 10^6 (-\theta_6) + 0.0677 r_2 + 0.9167 r_3 - 0.151 r_4 - 1.5 r_5 &= -37.13 \\
 -19.43 \times 10^6 \theta_6 - 19.43 \times 10^6 (-\theta_6) + 1.9453 r_2 + r_3 + 0.054 r_4 + r_1 &= 42.03 \\
 19.43 \times 10^6 \theta_6 + 19.43 \times 10^6 (-\theta_6) + 0.054 r_2 + r_3 + 1.9453 r_4 + r_5 &= 42.03 \\
 103.64 \times 10^6 \theta_6 - 51.82 \times 10^6 \delta_1 + 51.82 \times 10^6 \delta_2 - 1.7083 r_1 - 0.2977 r_2 &= -56.6187 \\
 -103.64 \times 10^6 (-\theta_6) - 51.82 \times 10^6 \delta_5 + 51.82 \times 10^6 \delta_4 - 1.7083 r_5 - 0.2917 r_4 &= -56.6187 \\
 12.96 \times 10^6 \theta_6 - 12.96 \times 10^6 (-\theta_6) - 25.91 \times 10^6 \delta_2 + 51.82 \times 10^6 \delta_3 - 25.91 \times 10^6 \delta_4 + \\
 0.0625 r_3 + 0.5417 r_3 + 0.0625 r_4 &= 4.2667
 \end{aligned}$$

$$25.91 \times 10^6 \theta_6 + 0.0833 r_2 - 0.9167 r_3 + 1.5 r_1 = 37.13$$

$$-25.91 \times 10^6 \theta_6 - 0.0833 r_2 + 0.9167 r_3 - 1.5 r_1 = -37.13$$

$$1.999 r_2 + r_3 + r_1 = 42.03$$

$$1.999 r_2 + r_3 + r_1 = 42.03$$

$$103.64 \times 10^6 \theta_6 - 51.82 \times 10^6 \delta_1 + 51.82 \times 10^6 \delta_2 - 1.7083 r_1 - 0.2977 r_2 = -56.6187$$

$$103.64 \times 10^6 \theta_6 - 51.82 \times 10^6 \delta_1 + 51.82 \times 10^6 \delta_2 - 1.7083 r_1 - 0.2977 r_2 = -56.6187$$

$$25.92 \times 10^6 \theta_6 - 51.82 \times 10^6 \delta_2 + 51.82 \times 10^6 \delta_3 + 0.125 r_2 + 0.5417 r_3 = 4.2667$$

La matriz queda:

$$\begin{bmatrix} \theta_6 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & r_1 & r_2 & r_3 \\ 25.92 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0.0833 & -0.9167 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.999 & 1 \\ 103.64 \times 10^6 & -51.82 \times 10^6 & 51.82 \times 10^6 & 0 & -1.7083 & 0.2977 & 0 \\ 25.92 \times 10^6 & 0 & -51.82 \times 10^6 & 51.82 \times 10^6 & 0 & 0.125 & 0.5417 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_6 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 37.13 \\ 42.03 \\ -56.6187 \\ 4.2667 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots\dots 1 \\ \dots\dots 2 \\ \dots\dots 3 \\ \dots\dots 4 \end{matrix}$$

Como se observa tenemos más incógnitas que ecuaciones, por lo que es necesario calcular los desplazamientos del suelo en función de las reacciones del suelo.

Utilizando el concepto de valores de influencia.

Los desplazamientos del terreno están dados por:

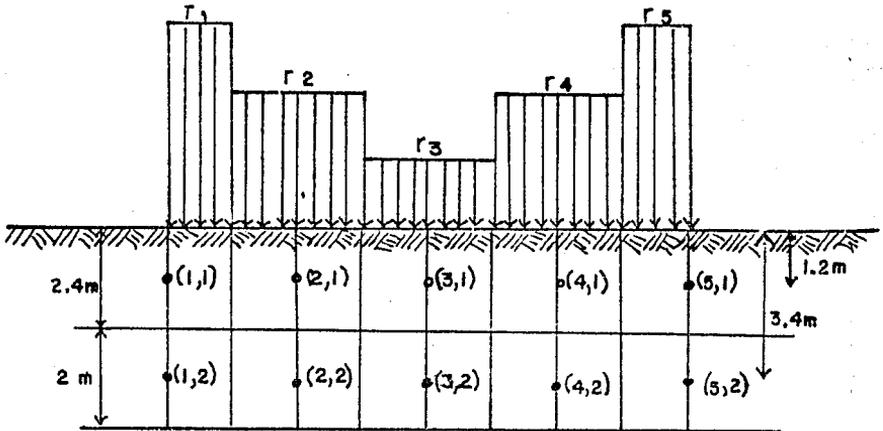
$$\delta_i = \sum_{j=1}^P M_{vij} H_j q_{ij} + \sum_{j=1}^P M_{vij} H_j \left( \sum_{k=1}^M I_{ijk} \frac{r_k}{b_k} \right)$$

donde:

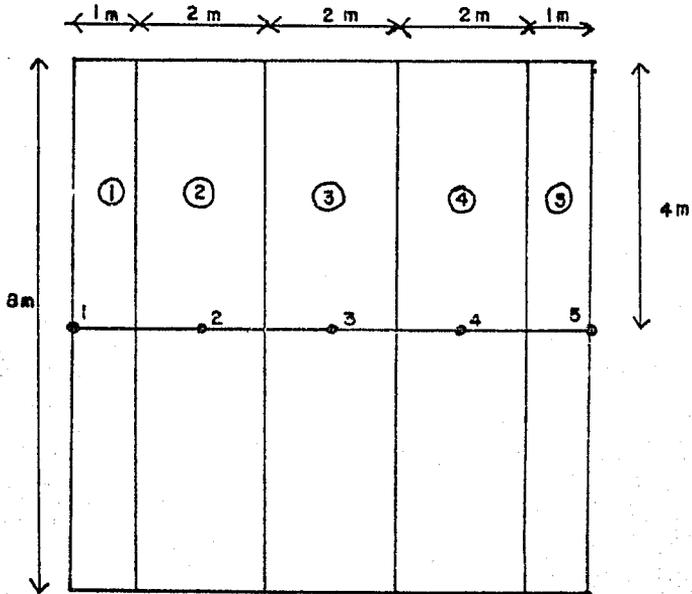
$I_{ijk}$  = esfuerzo normal vertical en el punto  $ij$ , debido a una presión unitaria colocada en  $K$ .

a) ELEVACION

58



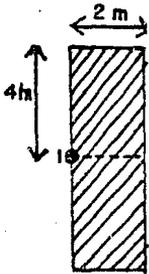
b) PLANTA



Determinación de los valores de influencia

Para estos valores usaremos la ecuación integrada por el Ing. Julio Damy:

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left\{ \left( \frac{1}{1+m^2} + \frac{1}{1+n^2} \right) \left( \frac{mn}{(m^2+n^2+1)^{1/2}} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{mn}{(m^2+n^2+1)^{1/2}} \right) \right\}$$



$$I_{111}$$

$$x = 1 \quad z = 1.2$$

$$y = 4$$

$$m = \frac{x}{y} = 0.833$$

$$n = \frac{y}{z} = 3.333$$

$$I_{121}: z = 3.4$$

$$m = \frac{1}{3.4} = 0.2941$$

$$n = \frac{4}{3.4} = 0.0865$$

$$I_{121} = 0.16286 \text{ t/m}^2$$

$$I_{111} = 0.3763 \text{ t/m}^2$$

$$I_{211}: z = 1.2$$

$$A_I$$

$$x = 3 \quad m = 2.5$$

$$y = 4 \quad n = 3.333$$

$$I_{211} = 0.48532$$

$$I_{211} = A_I - A_{II} = 0.10898 \text{ t/m}^2$$

$$I_{211}: z = 3.4$$

$$A_I$$

$$x = 3 \quad m = 0.8824$$

$$y = 4 \quad n = 0.0865$$

$$I_{221} = 0.35058$$

$$I_{221} = A_I - A_{II} = 0.18772 \text{ t/m}^2$$

$$A_{II}$$

$$x = 1 \quad m = 0.833$$

$$y = 4 \quad n = 3.333$$

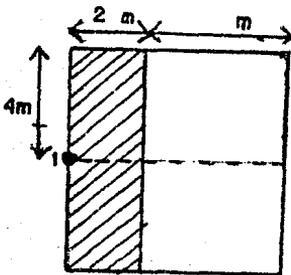
$$I_{211} = 0.37634$$

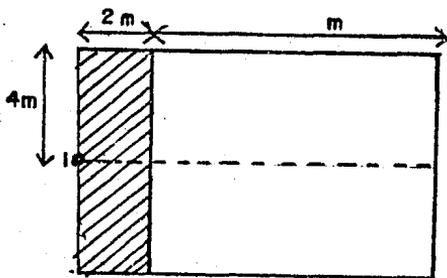
$$A_{II}$$

$$x = 1 \quad m = 0.2941$$

$$y = 4 \quad n = 0.0865$$

$$I_{221} = 0.16286$$





$$I_{311}: \quad Z = 1.2$$

$$A_I \quad \quad \quad A_{II}$$

$$x = 5 \quad m = 4.167 \quad x = 3 \quad m = 2.5$$

$$y = 4 \quad n = 3.333 \quad y = 4 \quad n = 3.333$$

$$I_{311} = 0.49298 \quad I_{311} = 0.48532$$

$$I_{311} = 0.00766 \text{ t/m}^2$$

$$I_{321} \quad Z = 3.4$$

$$A_I \quad \quad \quad A_{II}$$

$$x = 5 \quad m = 1.471 \quad x = 3 \quad m = 0.882$$

$$y = 4 \quad n = 1.176 \quad y = 4 \quad n = 1.176$$

$$I_{321} = 0.40697 \quad I_{321} = 0.35058$$

$$I_{321} = 0.05639 \text{ t/m}^2$$

De manera similar se obtienen los demás valores de influencia.

$$k = 1$$

$I_{111}$ 0.3763	$I_{211}$ 0.10898	$I_{311}$ 0.00766	$I_{411}$ 0.00129	$I_{511}$ 0.00022
$I_{121}$ 0.16286	$I_{221}$ 0.18772	$I_{321}$ 0.05639	$I_{421}$ 0.01624	$I_{521}$ 0.00338

$$k = 2$$

$I_{112}$ 0.08958	$I_{212}$ 0.75267	$I_{312}$ 0.10898	$I_{412}$ 0.00766	$I_{512}$ 0.00088
$I_{122}$ 0.11836	$I_{222}$ 0.32572	$I_{322}$ 0.18772	$I_{422}$ 0.05639	$I_{522}$ 0.01042

k = 3

$I_{113}$ 0.00562	$I_{213}$ 0.10898	$I_{313}$ 0.75267	$I_{413}$ 0.10898	$I_{513}$ 0.00562
$I_{123}$ 0.03698	$I_{223}$ 0.18772	$I_{323}$ 0.32572	$I_{423}$ 0.18772	$I_{523}$ 0.03698

k = 4

$I_{114}$ 0.00088	$I_{214}$ 0.00766	$I_{314}$ 0.10898	$I_{414}$ 0.75267	$I_{514}$ 0.08958
$I_{124}$ 0.01042	$I_{224}$ 0.05639	$I_{324}$ 0.18772	$I_{424}$ 0.32572	$I_{524}$ 0.11836

k = 5

$I_{115}$ 0.00022	$I_{215}$ 0.00129	$I_{315}$ 0.00766	$I_{415}$ 0.10898	$I_{515}$ 0.37634
$I_{125}$ 0.00338	$I_{225}$ 0.01624	$I_{325}$ 0.05639	$I_{425}$ 0.18772	$I_{525}$ 0.16286

Sustituyendo los valores de influencia en la ec. de desplazamientos tenemos:

$$\delta_1 = m_{v11} H_1 \left( I_{111} \frac{r_1}{b_1} + I_{112} \frac{r_2}{b_2} + I_{113} \frac{r_3}{b_3} + I_{114} \frac{r_4}{b_4} + I_{115} \frac{r_5}{b_5} \right) + m_{v12} H_2 \left( I_{121} \frac{r_1}{b_1} + I_{122} \frac{r_2}{b_2} + I_{123} \frac{r_3}{b_3} + I_{124} \frac{r_4}{b_4} + I_{125} \frac{r_5}{b_5} \right)$$

$$\delta_1 = \left[ \begin{array}{l} 0.0154 (2.4) (0.3763) + 0.0222 (2) (0.16286) \\ 0.0154 (2.4) (0.08958) + 0.0222 (2) (0.11836) \\ 0.0154 (2.4) (0.00562) + 0.0222 (2) (0.03698) \\ 0.0154 (2.4) (0.00088) + 0.0222 (2) (0.01042) \\ 0.0154 (2.4) (0.00022) + 0.0222 (2) (0.00338) \end{array} \right] \begin{array}{l} r_{1/8} \\ r_{2/8} \\ r_{3/8} \\ r_{4/8} \\ r_{5/8} \end{array}$$

$$\delta_1 = 0.00266 r_1 + 0.00113 r_2 + 0.00023 r_3 \dots \dots \dots 5$$

$$\delta_2 = m_{v21} H_1 \left( I_{211} \frac{r_1}{b_1} + I_{212} \frac{r_2}{b_2} + I_{213} \frac{r_3}{b_3} + I_{214} \frac{r_4}{b_4} + I_{215} \frac{r_5}{b_5} \right) + m_{v22} H_2 \left( I_{221} \frac{r_1}{b_1} + I_{222} \frac{r_2}{b_2} + I_{223} \frac{r_3}{b_3} + I_{224} \frac{r_4}{b_4} + I_{225} \frac{r_5}{b_5} \right)$$

$$\delta_2 = 0.00164 r_1 + 0.00563 r_2 + 0.00155 r_3 \dots \dots \dots 6$$

$$\delta_3 = m_{v31} H_1 \left( I_{311} \frac{r_1}{b_1} + I_{312} \frac{r_2}{b_2} + I_{313} \frac{r_3}{b_3} + I_{314} \frac{r_4}{b_4} + I_{315} \frac{r_5}{b_5} \right) + m_{v32} H_2 \left( I_{321} \frac{r_1}{b_1} + I_{322} \frac{r_2}{b_2} + I_{323} \frac{r_3}{b_3} + I_{324} \frac{r_4}{b_4} + I_{325} \frac{r_5}{b_5} \right)$$

$$\delta_3 = 0.00070 r_1 + 0.00309 r_2 + 0.00529 r_3 \dots \dots \dots 7$$

de la ec. 3

$$103.64 \times 10^6 \theta_6 - 51.82 \times 10^6 \delta_1 + 51.82 \times 10^6 \delta_2 - 1.7083 r_1 - 0.2977 r_2 = -56.6187$$

$$103.64 \times 10^6 \theta_6 - 51.82 \times 10^6 (0.00266 r_1 + 0.00113 r_2 + 0.00023 r_3) + 51.82 \times 10^6 (0.00164 r_1 + 0.00563 r_2 + 0.00155 r_3) - 1.7083 r_1 - 0.2977 r_2 = -56.6187$$

$$103.64 \times 10^6 \theta_6 - 52858.1083 r_1 + 233189.7023 r_2 + 68402.4 r_3 = -56.6187$$

de la ec: 4

$$25.92 \times 10^6 \theta_6 - 51.82 \times 10^6 \delta_2 + 51.82 \times 10^6 \delta_3 + 0.125 r_2 + 0.5417 r_3 = 4.2667$$

$$25.92 \times 10^6 \theta_6 - 51.82 \times 10^6 (0.00164r_1 + 0.00563 r_2 + 0.00155 r_3) \\ + 51.82 \times 10^6 (0.0007r_1 + 0.00309 r_2 + 0.00529 r_3) \\ + 0.125 r_2 + 0.5417 r_3 = 4.2667$$

$$25.92 \times 10^6 \theta_6 - 48710.8 r_1 - 131622.675 r_2 + 193807.3417 r_3 = 4.2667$$

$\theta_6$	$r_1$	$r_2$	$r_3$		
$25.82 \times 10^6$	1.5	0.08333	-0.9167	$\begin{bmatrix} \theta_6 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} 37.13 \\ 42.03 \\ 55.5187 \\ 4.2667 \end{bmatrix}$
0	1	1.999	1		
$103.64 \times 10^6$	- 52858.1083	233189.7023	68402.4		
$25.92 \times 10^6$	- 48710.8	- 131622.675	193807.3417		

Resolviendo el sistema:

$$\theta_6 = 2.1015 \times 10^{-7}$$

$$r_1 = 26.3843 \text{ t/m}$$

$$r_2 = 3.3648 \text{ t/m}$$

$$r_3 = 8.9165 \text{ t/m}$$

Sustituyendo estos valores en las ec. 5, 6 y 7 .

$$\delta_1 = 0.00266r_1 + 0.00113r_2 + 0.00023r_3$$

$$\delta_1 = 0.07604 \text{ m} = 7.603 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = 0.00164 r_1 + 0.00563 r_2 + 0.00155r_3$$

$$\delta_2 = 0.07604 \text{ m} = 7.604 \text{ cm}$$

$$\delta_3 = 0.0007r_1 + 0.00309r_2 + 0.00529 r_3$$

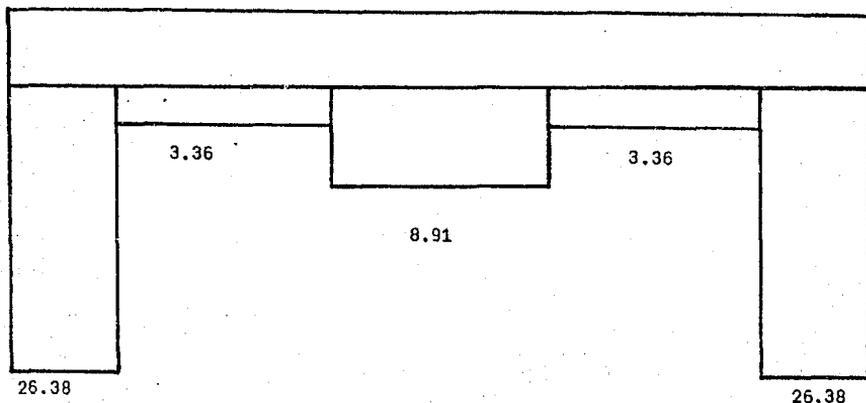
$$\delta_3 = 0.07603 \text{ m} = 7.603 \text{ cm}$$

$$\delta_1 = 7.603 \text{ cm}$$

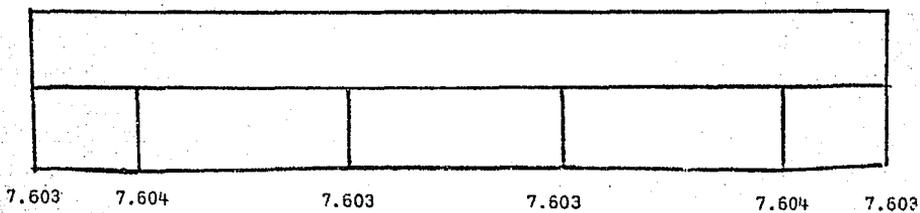
$$\delta_3 = 7.603 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = 7.604 \text{ cm}$$

Estos resultados del análisis de interacción suelo-viga flotante se muestran en la siguiente figura:



a) Reacciones del terreno (t/m)



b) Hundimientos (cm)

El hundimiento diferencial es mucho menor a : 0.001 cm. Con este ejemplo sencillo se ve la importancia de tomar en cuenta la interacción suelo-viga flotante.

## CONCLUSIONES

En capítulos anteriores hemos visto y analizado el desarrollo y las condiciones necesarias para la elaboración de este trabajo, que trata del procedimiento propuesto por el M.I. Agustín Deméneghi para problemas de interacción suelo estructura en vigas flotantes.

Como ya se mencionó antes, este es un tema que se ha tratado relativamente poco y que por consiguiente los métodos o procedimientos propuestos resultan en general demasiado laboriosos; en cambio el procedimiento expuesto en este trabajo pretende ser lo más sencillo y práctico; cabe señalar que la sencillez no le resta importancia a este, ya que los resultados con respecto a otros métodos más elaborados son aproximadamente los mismos.

El método técnico de interacción suelo-estructura nos ayuda a obtener las reacciones que se generan en un medio compresible y las deformaciones verticales que en este se puedan presentar, al ser sometido a sollicitaciones de cargas estáticas verticales, a través de una viga elástica lineal y de rigidez variable, la cual reposa libremente sobre el suelo.

La solución del problema de interacción suelo-estructura se puede realizar haciendo un análisis tanto de la estructura como de asentamientos del suelo, y haciendo una combinación después de ambos en una forma adecuada, llegamos al resultado del problema. De esta manera no se emplea el módulo de reacción ni se necesitan realizar iteraciones.

La sencillez de este procedimiento, estriba principalmente en que es posible hacer un algoritmo del problema; como consecuencia de lo anterior, es posible hacer un programa de computadora.

Las reacciones finalmente obtenidas son el resultado de haber tomado en cuenta todas las cargas actuando sobre el suelo y de tomar en cuenta también a la rigidez de la estructura y la estratigrafía y propiedades del suelo, hechos que son bastante más reales; que no toman en cuenta las características del subsuelo en el que se

desplanta una cimentación y suponer una reacción uniforme. En cuanto a los hundimientos, que es un aspecto muy importante en estructuras apoyadas en suelos -- compresibles, el método nos proporciona los hundimientos totales y diferenciales que existen a lo largo de la cimentación.

Para este procedimiento requerimos del módulo de elasticidad de los materiales de la estructura y del coeficiente de variación volumétrica, la exactitud de -- estos datos nos llevará a una buena precisión. Sabemos por estudios realizados que el módulo de elasticidad de los materiales tiende a disminuir con el tiempo. Por otro lado, el coeficiente de variación volumétrica de los suelos compresibles también sufre variaciones. Por lo tanto, la distribución y magnitud de las reacciones y hundimientos diferenciales cambiará con el transcurso de los años. Con lo que tomaremos ciertas medidas de seguridad para no poner en peligro la vida - útil de la estructura.

## BIBLIOGRAFIA

Demeneghi Colina Agustín. "Interacción Suelo-Estructura"  
Revista de Ingeniería, Ed. Nueva Epoca.  
No. 4, 1983.

Flores Ojeda Manuel "Programa de Computadora para la Interacción Suelo-Estructura en un Pilote de -- Sección Variable", Tesis Profesional, 1981.

Juárez Badillo y Rico "Mecánica de Suelos", Tomo I, Cap. X  
Tomo II, Cap. II, III y VIII, Ed. Limusa, 1976.

Sánchez Martínez J. "Un método de solución al problema de interacción suelo estructura en cimentaciones someras" Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural y Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, 1982.

Zeevaert L. "Interacción Suelo-Estructura de Cimentación, Ed. Limusa, 1980.